RÈGE
ND
URER

ELEMENTE DER THEORIE DER FUNKTIONEN

EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN GRÖSSE

FÜNFTE AUFLAGE

H. DURÈGE

ELEMENTE DER THEORIE DER FUNKTIONEN
EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN GRÖSSE

IN FÜNFTER AUFLAGE NEU BEARBEITET

VON

LUDWIG MAURER

MIT 41 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1906

Vorrede.

Als ich auf Ansuchen des Teubnerschen Verlags die Herausgabe einer neuen Auflage von Durèges Funktionentheorie übernommen hatte, habe ich mich überzeugt, daß ich mich entweder auf unwesentliche Änderungen beschränken oder ein neues Buch schreiben müsse.

Gegen das erstere Verfahren sprachen erhebliche Bedenken. Durèges Buch ist unter dem mächtigen Eindruck von Riemanns grundlegenden Publikationen entstanden. Sein ausschließlicher Zweck war, die neuen Ideen weiteren Kreisen zugänglich zu machen. Daß es einem Bedürfnis entgegengekommen ist, dafür spricht die weite Verbreitung, die es gefunden hat. Die späteren Auflagen haben Verbesserungen im einzelnen, aber keine durchgreifende Umarbeitung erfahren. Auch noch in der letzten, 1893 erschienenen, Auflage hat die ganze neuere Entwicklung der Funktionentheorie keine Berücksichtigung gefunden. Daher erscheint das Werk heute seiner ganzen Anlage nach veraltet. Ich habe mich deshalb entschlossen eine neue Bearbeitung des Stoffes vorzunehmen und nur Durèges Einleitung beizubehalten. An der Tendenz des Durègeschen Werkes habe ich festgehalten: auch in seiner neuen Gestalt verfolgt das Buch den Zweck, den Leser in die Riemannsche Anschauungsweise einzuführen, und es setzt an Vorkenntnissen nicht mehr voraus als in den üblichen Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung gegeben zu werden pflegt.

In diesen Vorlesungen werden in der Regel die auf reelle Variable und ihre Funktionen bezüglichen Begriffsbestimmungen aus pädagogischen Gründen nicht in ihrer ganzen Schärfe vorgetragen, und wenn dies geschieht, so finden sie auf dieser Stufe des Unterrichts noch kein volles Verständnis. Ich habe deswegen diese Begriffsbestimmungen, soweit sie mir für die

Begründung der Funktionentheorie erforderlich schienen, in einem einleitenden Kapitel zusammengestellt.

Durège hat in seinem Werk die Integrale algebraischer Funktionen ausführlich behandelt, ohne doch bis zur Riemannschen Thetafunktion vorzudringen. Es schien mir nicht zweckmäßig ihm auf diesem Weg zu folgen. Ich habe zwar die wesentlichsten Sätze aus der Theorie der algebraischen Funktionen entwickelt und die Konstruktion der Riemannschen Flächen eingehend besprochen, aber auf die Theorie der Integrale algebraischer Funktionen bin ich nicht eingegangen. Ich habe mich darauf beschränkt durch ein ausführlich behandeltes Beispiel einen Einblick in dies weite Gebiet zu eröffnen. Dagegen habe ich der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung einen umfangreichen Abschnitt gewidmet. Dafür sprachen mehrere Gründe: abgesehen davon, daß diese Theorie an und für sich ein großes Interesse bietet, ist sie meines Erachtens besonders geeignet, die allgemeinen funktionentheoretischen Prinzipien zu erläutern; dazu kommt, daß sie den naturgemäßen Zugang zu der Theorie der automorphen Funktionen eröffnet, die zurzeit im Vordergrund des Interesses steht.

Bei der Abfassung dieses Buches habe ich mich vielfach des Rates von Professor Brill zu erfreuen gehabt; ich möchte ihm dafür auch an dieser Stelle meinen Dank aussprechen. Ich kann auch nicht unerwähnt lassen, daß ich mich in vieler Beziehung durch die Erinnerung an die ausgezeichneten Vorlesungen E. B. Christoffels habe leiten lassen. Wer diese Vorlesungen gehört hat, wird dies ohne weiteres bemerken.

Ein Sachregister beizufügen erschien mir im Hinblick auf das ausführliche Inhaltsverzeichnis nicht erforderlich. Zur Bequemlichkeit des Lesers habe ich aber die gebrauchten Termini technici, soweit sie nicht den Elementen der Analysis angehören, in einem Verzeichnis zusammengestellt und auf ihre Definition verwiesen.

Tübingen, im Juli 1906.

L. Maurer.

Inhalt.

Vierter Abschnitt.

Unendliche Reihen und Produkte.

Fünfter Abschnitt.

Einwertige Funktionen einer komplexen Variabeln.

Sechster Abschnitt.

Doppelt periodische Funktionen.

Siebenter Abschnitt.

Mehrwertige Funktionen.

Achter Abschnitt.

Algebraische Funktionen.

Neunter Abschnitt.

Die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Zusammenstellung der gebrauchten Bezeichnungen.

Einleitung.

Die Verfolgung der allmäligen Entwickelung der Lehre von den imaginären Größen bietet besonders deswegen ein großes Interesse dar, weil man hier noch deutlich erkennen kann, mit welchen Schwierigkeiten die Einführung neuer, vorher nicht bekannter, oder wenigstens nicht hinreichend geläufiger Begriffe verbunden ist. Die Zeiten, in welchen die negativen, gebrochenen und irrationalen Größen in die Mathematik eingeführt wurden, liegen uns so ferne, daß wir uns von den Schwierigkeiten, welche auch die Einführung dieser Begriffe früher gehabt haben mag, keine rechte Vorstellung mehr machen können. Außerdem ist die Erkenntnis des Wesens der imaginären Größen auch wieder rückwärts für die Erkenntnis der negativen, gebrochenen und irrationalen Größen lehrreich geworden, da ein gemeinsames Band alle diese Größen umschlingt.

Bei den älteren Mathematikern herrschte fast durchgängig die Ansicht, daß die imaginären Größen unmöglich seien. Man begegnet beim Durchblättern älterer mathematischer Schriften immer wieder dem Ausspruche, daß das Auftreten imaginärer Größen keine andere Bedeutung habe, als die, die Unmöglichkeit oder Unlösbarkeit einer Aufgabe darzutun, daß diese Größen keinen Sinn hätten, daß man sich ihrer aber bisweilen mit Nutzen bedienen könne, obgleich die Form der Resultate dann nur eine symbolische sei. In dieser Beziehung ist es interessant, den Entwicklungsgang Cauchy's zu beobachten. Dieser große Mathematiker ist neben unserem „*Princeps mathematicorum*“ Gauss, welcher zuerst und wohl schon sehr frühe die hohe Bedeutung der imaginären Größen für alle

Teile der Mathematik erkannte, als Schöpfer der Lehre von den Funktionen imaginärer Variabeln zu betrachten. Gleichwohl schloß er sich sowohl in seiner „algebraischen Analysis", als auch in den „Exercices" vom Jahre 1844 noch ganz der Ansicht der älteren Mathematiker an. Es heißt dort an einer Stelle*: „Toute équation imaginaire n'est autre chose que la représentation symbolique de deux équations entre quantités réelles. L'emploi des expressions imaginaires, en permettant de remplacer deux équations par une seule, offre souvent le moyen de simplifier les calculs et d'écrire sous une forme abrégée des résultats fort compliqués. Tel est même le motif principal pour lequel on doit continuer à se servir de ces expressions, qui prises à la lettre et interprétées d'après les conventions généralement établies, ne signifient rien et n'ont pas de sens. Le signe $\sqrt{-1}$ n'est en quelque sorte qu'un outil, un instrument de calcul, qui peut être employé avec succès dans un grand nombre de cas pour rendre beaucoup plus simples non-seulement les formules analytiques, mais encore les méthodes à l'aide desquelles on parvient à les établir."

Diese Worte bezeichnen sehr deutlich den Standpunkt der älteren Mathematiker, der, wie man sieht, mitunter auch noch viel später festgehalten wurde. Fast nur in einer der mathematischen Disziplinen wurden die imaginären Größen von jeher mit berücksichtigt, nämlich in der Lehre von den algebraischen Gleichungen; denn hier war es viel zu wichtig, zugleich auf alle Wurzeln Rücksicht zu nehmen, als daß das Imaginärwerden der letzteren den Untersuchungen hätte Stillstand gebieten können. Nichts destoweniger fanden einzelne Männer, die, wie es scheint, sich mit einer gewissen Vorliebe den imaginären Größen zuwandten, wie de Moivre, Bernoulli, die beiden Fagnano, d'Alembert, Euler allmälig die diesen Größen innewohnenden ausgezeichneten Eigenschaften auf und bildeten ihre Lehre immer mehr und mehr aus. Doch wurden diese Untersuchungen im ganzen mehr für wissenschaftliche Spielereien, für bloße Kuriosa angesehen, und man legte ihnen

* *Cauchy*. Exercices d'analyse et de physique mathématique. Tome III. p. 361.

nur insofern Wert bei, als sie nützliche Hilfsmittel für andere Untersuchungen darboten. Es hat aber auch nicht an solchen gefehlt, welche die imaginären Größen wegen ihrer vermeinten Unmöglichkeit nirgend angewendet wissen wollten*.

Die Ansicht von der Unmöglichkeit der imaginären Größen ist eigentlich von einem Verkennen des Wesens der negativen, gebrochenen und irrationalen Größen ausgegangen. Da nämlich die Anwendung dieser mathematischen Begriffe auf Geometrie, Mechanik, Physik und zum Teil selbst im bürgerlichen Leben sich so leicht und so von selbst darbot, ja ohne Zweifel in vielen Fällen die Veranlassung zur Untersuchung dieser Größen wurde, so kam es, daß man in irgend einer dieser Anwendungen das wahre Wesen dieser Begriffe und ihre wahre Stellung im Gebiete der Mathematik zu finden glaubte. Bei den imaginären Größen lag nun eine solche Anwendung nicht so nahe, und wegen der mangelnden Kenntnis derselben glaubte man die imaginären Größen in das Reich der Unmöglichkeit verweisen, ihre Existenz bezweifeln zu müssen. Dabei ließ man aber außer Acht, daß die reine Mathematik, die Wissenschaft der Addition, so wichtig auch ihre Anwendungen sind, doch an und für sich mit den letzteren nichts zu tun hat, daß ihre durch eine vollständige und widerspruchsfreie Definition eingeführten Begriffe in der Definition selbst ihre Existenz begründen, und daß ihre Sätze wahr sind, gleichviel, ob man von ihnen eine Anwendung machen kann oder nicht. Ob und wann dieser oder jener Satz eine Anwendung finden wird, läßt sich oft nicht vorherbestimmen, und gerade die heutige Zeit ist ja reich genug an Beispielen, daß sich die wichtigsten, selbst tief in das Leben der Völker eingreifenden Anwendungen an Sätze geknüpft haben, bei deren Entdeckung man sicherlich keine Ahnung von diesen Folgen hatte. So stark war aber allmählich der Glaube an die Unmöglichkeit der

* Aussi a-t-on vu quelques géomètres d'un rang distingué ne point goûter ce genre de calcul, non qu'ils doutassent de la justesse de son résultat, mais parce qu'il paraissait y avoir une sorte d'inconvenance à employer des expressions de ce genre qui n'ont jamais servi qu'à annoncer une absurdite dans l'énoncé d'un problème. *Montucla*. Histoire des mathématiques. Tome III. p. 283.

imaginären Größen geworden, daß, als seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts die Idee auftauchte, die imaginären Größen geometrisch darzustellen*), man nun umgekehrt aus der vermeintlichen Unmöglichkeit derselben auch die Unmöglichkeit, sie geometrisch darzustellen, folgerte**).

Um die Stellung, welche die imaginären Größen im Gebiete der reinen Mathematik einnehmen, zu erkennen, und um einzusehen, daß sie mit den negativen, gebrochenen und irrationalen Größen durchaus auf eine Linie zu stellen sind, müssen wir etwas zurückgreifen.

Die ersten mathematischen Begriffe, die sich unmittelbar aus der Grundoperation der Mathematik, der Addition, ergeben, sind diejenigen, die man nach dem heutigen Sprachgebrauche positive ganze Zahlen nennt. Geht man von der Addition zu ihrer Umkehrung, der Subtraktion, über, so stellt sich alsbald die Notwendigkeit ein, neue mathematische Begriffe einzuführen. Sobald nämlich die Aufgabe entsteht, eine größere Zahl von einer kleineren zu subtrahieren, so kann dieselbe nicht mehr durch eine positive ganze Zahl gelöst werden. Auf einem Standpunkte, auf dem man nur positive ganze Zahlen kennt, hat man daher die Alternative, entweder eine solche Aufgabe als unmöglich, als unlösbar zu bezeichnen, und damit dem Fortschritt der Wissenschaft nach dieser Richtung hin eine Schranke zu setzen, oder aber die Möglichkeit der Auflösung jener Aufgaben dadurch herbeizuführen, daß man

*) Ueber das Historische in Betreff der geometrischen Darstellung der imaginären Größen vergl. *Hankel*, Theorie der komplexen Zahlensysteme. Leipzig 1867, S. 81.

Es verdient bemerkt zu werden, daß *Abel* und *Jacobi* im Gegensatze zu der Ansicht, daß erst eine geometrische Darstellung den imaginären Größen eine wirkliche Existenz zu gewähren vermöge, schon in ihren ersten Untersuchungen über die elliptischen Funktionen, also zu einer Zeit, wo jene Darstellung noch so gut wie unbekannt war, unbekümmert um die Möglichkeit oder Unmöglichkeit einer solchen, sich der imaginären Größen unbeschränkt bedienten, in dem vollen Bewußtsein, wie wesentlich die Berücksichtigung derselben sei, und wie unvollständig ihre Untersuchungen ohne dieselben hätten bleiben müssen.

**) *Foncenex*, Reflexions sur les quantités imaginaires. Miscellanea Taurinensia. Tome I. p. 122.

solche mathematische Begriffe, welche die Aufgabe zu lösen vermögen, als neue Begriffe einführt. Auf diese Weise entstehen durch die Subtraktion die negativen Größen als Differenzen zunächst zweier positiver ganzer Zahlen, von denen der Subtrahendus größer ist als der Minuendus. Ihre Existenz und Bedeutung für die reine Mathematik ist dann nicht etwa in einem Gegensatze zwischen rechts und links, vorwärts und rückwärts, Bejahung und Verneinung, Vermögen und Schulden oder in irgend einer ihrer mannigfaltigen Anwendungen begründet, sondern lediglich in der Definition, durch welche sie eingeführt werden.

Wenngleich nun aber in rein begrifflicher Beziehung in den negativen Größen nichts Unmögliches liegt, so kann es sich doch ereignen, daß durch das Auftreten von negativen Größen die Unmöglichkeit oder Unlösbarkeit einer Aufgabe angezeigt wird, nämlich dann, wenn die Natur der Aufgabe zu ihrer Lösung notwendig positive Größen erfordert. Ist z. B. folgende Aufgabe gestellt: Man soll 6 Kugeln so in zwei Urnen verteilen, daß sich in der einen 8 mehr befinden, als in der andern, so ist darin folgende rein mathematische Aufgabe enthalten: zwei Zahlen zu finden, deren Summe gleich 6, und deren Differenz gleich 8 sei. Wird nun nur verlangt, daß diese Zahlen mathematische Begriffe seien, ohne dieselben auf eine besondere Art von mathematischen Begriffen zu beschränken, und sind ferner vorher die negativen Größen durch ihre Definition begrifflich festgestellt worden, so liegt die Lösbarkeit der rein mathematischen Aufgabe auf der Hand; wie jeder sieht, sind die positive Zahl 7 und die negative Zahl -1 diejenigen Größen, welche der Aufgabe genügen. Nichtsdestoweniger ist die ursprünglich gestellte Aufgabe zu lösen unmöglich, denn in derselben wird verlangt, daß jede der gesuchten Zahlen eine Anzahl bedeuten soll, also notwendig positiv sein muß. Läge nun die Unmöglichkeit nicht so offen da, wie bei diesem einfachen Beispiele, so würde das Auftreten der negativen Zahl -1 die Unlösbarkeit der Aufgabe zu Tage bringen.

Ganz dieselben Umstände treten nun bei jeder andern indirekten Operation aufs Neue ein. Die nächste indirekte

Operation ist die Division. Stellt man die Aufgabe, eine ganze Zahl in eine andere zu dividieren, welche nicht ein Vielfaches der ersteren ist, so entsteht die Unmöglichkeit, diese Aufgabe durch positive oder negative ganze Zahlen zu lösen. Der Fortschritt der Wissenschaft erfordert also wieder, die Möglichkeit der Lösung dadurch herbeizuführen, daß man die dazu nötigen Größen einführt und begrifflich feststellt. Diese neuen Begriffe sind hier die rationalen Brüche. Aber auch hier kann der Fall eintreten, daß das Auftreten derselben die Unmöglichkeit der Lösung einer Aufgabe kundgibt, nämlich wiederum dann, wenn die Natur der Aufgabe die Lösung durch die neuen Begriffe nicht gestattet. Als ein Beispiel diene folgende Aufgabe: Durch ein in einer Maschine oder einem Uhrwerke befindliches Rad, welches 100 Zähne besitzt und in der Minute einmal umläuft, soll unmittelbar ein anderes Rad so in Bewegung gesetzt werden, daß dieses 12mal in der Minute umläuft; man fragt, wie viele Zähne man dem letzteren Rade geben muß. Die hier zu Grunde liegende rein mathematische Aufgabe besteht einfach darin, 100 durch 12 zu dividieren, und sind die Brüche einmal begrifflich festgestellt worden, so hat die Auflösung keine Schwierigkeit, sie liefert $8^1/_3$. Das Auftreten dieses Bruches aber zeigt zugleich die Unmöglichkeit an, die ursprünglich gestellte Aufgabe zu lösen, da die zu bestimmende Anzahl der Zähne des zweiten Rades eine ganze Zahl sein muß.

Die dritte indirekte Operation ist die Wurzelausziehung. Setzt man

$$\sqrt[n]{a} = x,$$

wo n eine positive ganze Zahl bedeute, so ist die Aufgabe, eine dieser Gleichung entsprechende Größe x zu finden, durch ganze Zahlen oder rationale Brüche nicht mehr lösbar, sobald a nicht die n^{te} Potenz einer solchen Größe ist. In diesem Falle tritt also wieder die Notwendigkeit ein, die Aufgabe durch Einführung neuer Begriffe lösbar zu machen. Ist nun entweder a positiv, oder wenn a negativ ist, n eine ungerade Zahl, so sind die neu einzuführenden Begriffe die irrationalen Größen; ist aber a negativ und zugleich n eine gerade Zahl, so entstehen als neue Begriffe die imaginären Größen. Es liegt nun ebensowenig die Unmöglichkeit vor, diese letzteren begrifflich festzustellen, wie die irrationalen Größen oder wie früher die rationalen Brüche und die negativen Größen, denn bei keiner der hier aufzustellenden Definitionen stößt man auf einen inneren Widerspruch. Wenn ein solcher einträte, wenn Eigenschaften miteinander in Verbindung gesetzt würden, von denen bewiesen werden kann, daß sie nicht miteinander bestehen können, dann allerdings hätte man es wirklich mit etwas Unmöglichem zu tun. Gauss* führt als ein Beispiel einer solchen Unmöglichkeit ein ebenes rechtwinkliges gleichseitiges Dreieck an. In der Tat wird bewiesen, daß ein ebenes gleichseitiges Dreieck nicht zugleich rechtwinklig sein kann. Hier läge also wirklich etwas Unmögliches vor.

Wenn nun schon das Auftreten von negativen Größen oder von Brüchen bisweilen die Unmöglichkeit einer Aufgabe kund gibt, so ist leicht begreiflich, daß diese auch durch imaginäre Größen angezeigt werden kann, wie in folgendem Beispiel: Eine gegebene Gerade von der Länge 2 soll in zwei solche Teile geteilt werden, daß das aus ihnen gebildete Rechteck den Inhalt 4 habe. Der rein mathematische Inhalt dieser Aufgabe ist, zwei Zahlen zu finden, deren Summe gleich 2, und deren Produkt gleich 4 ist. Wird nun nur verlangt, daß diese Zahlen mathematische Größen seien, ohne näher anzugeben, welcher Art sie sein sollen, so hat die Auflösung, nachdem die imaginären Größen einmal begrifflich festgestellt worden sind, keine Schwierigkeit. Sie führt auf die Auflösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 - 2x + 4 = 0,$$

deren Wurzeln die imaginären Zahlen

$$1 + \sqrt{-3} \quad \text{und} \quad 1 - \sqrt{-3}$$

sind. Nimmt man aber auf die ursprüngliche Aufgabe Rücksicht, wonach die gesuchten Größen Teile einer geraden Linie

* Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. (Inaug.-Diss. pag. 4 Note.)

bedeuten sollen und daher reelle Größen sein müssen, dann ist die Aufgabe zu lösen unmöglich, weil das größte aus zwei Teilen der Linie 2 gebildete Rechteck den Inhalt 1 hat, und daher keines den Inhalt 4 haben kann: und diese Unmöglichkeit wird hier durch das Auftreten imaginärer Größen angezeigt. Montucla*) hat dies nämliche Beispiel als Beleg für die Ansicht gewählt, daß in der Unmöglichkeit einer Aufgabe überhaupt die Bedeutung und Entstehung der imaginären Größen zu suchen sei, indem sie dann aufträten, wenn man eine Aufgabe stelle, welche eine unmögliche oder absurde Forderung enthalte. Wir haben gesehen, daß ganz dasselbe auch von den negativen Größen und den Brüchen behauptet werden könnte, und die Worte: „Ainsi toutes les fois que la résolution d'un probleme conduit à de semblables expressions et que parmi les différentes valeurs de l'inconnue il n'y en a que de telles, le probleme, ou pour mieux dire, ce qu'on demande est impossible" und weiterhin: „Le problème, qui conduirait à une pareille équation, serait impossible ou ne présenterait qu'une demande absurde" lassen sich fast wörtlich auf die beiden früher angeführten Beispiele anwenden, in denen die Unmöglichkeit der Aufgabe durch eine negative Zahl und durch einen Bruch angezeigt wurde.

Aus den vorigen Erörterungen erhellt, daß die imaginären, die irrationalen, die rational gebrochenen und die negativen Größen eine gemeinsame Entstehungsart haben, nämlich durch die indirekten Operationen, bei welchen ihre Einführung durch den Fortschritt der Wissenschaft notwendig gemacht wird. Sie alle finden ihre Existenz in ihrer Definition begründet, welche bei keiner etwas Unmögliches in sich schließt; bei allen aber kann es Fälle geben, wo ihr Auftreten wegen der besonderen Natur der Aufgabe die Unmöglichkeit, diese zu lösen, kundgibt.

Ehe wir nun zu unserem eigentlichen Gegenstande übergehen, sei noch eine Bemerkung über das Rechnen mit den imaginären Größen erlaubt. Auch hier können wir wieder an die ihnen verwandten Größen anknüpfen. Jedesmal, wenn in

*) Histoire des mathématiques. Tome III, pag. 27.

die Mathematik ein neuer Begriff eingeführt wird, ist es an und für sich in vieler Beziehung eine Sache der Willkür, in welcher Weise man die Operationen, denen man die früheren Begriffe unterwirft, auf den neuen Begriff übertragen will. Nachdem z. B. die Definition der Potenzen mit ganzen positiven Exponenten aus der wiederholten Multiplikation einer Größe mit sich selbst hergeleitet ist, entsteht die Frage, was man unter einer Potenz mit einem negativen Exponenten zu verstehen habe. An und für sich ist dieses ganz willkürlich, indem es nichts gibt, was uns zwingt, etwas Bestimmtes darunter zu verstehen. Allein wenn man hier und in allen ähnlichen Fällen ganz willkürlich verfahren wäre und sich nicht an eine bestimmte Norm gebunden hätte, so würde das mathematische Gebäude gewiß eine seltsame, die Übersicht gewaltig erschwerende Gestalt erhalten haben. Die äußere Konsequenz und die harmonische Übereinstimmung in allen ihren Teilen verdankt die Mathematik der Befolgung des Grundsatzes, daß man jedesmal, wenn man einen neu eingeführten Begriff den früher bekannt gewordenen Operationen unterwirft, die von diesen Operationen geltenden Hauptsätze auch dann noch als fortbestehend annimmt, wenn man jene auf die neuen Begriffe überträgt. Diese an und für sich willkürliche Annahme ist so lange zu machen erlaubt, als daraus nicht Widersprüche entstehen*). Wenn nun dieser Grundsatz befolgt wird, dann sind die Definitionen, von denen oben die Rede war, nicht mehr willkürlich, sondern ergeben sich als notwendige Folge jenes Grundsatzes. Bei den Potenzen wird z. B. bewiesen, daß, wenn m und n zwei positive ganze Zahlen sind, und $m > n$ angenommen wird,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

ist. Nun wird willkürlich festgesetzt, daß dieser Satz auch dann noch richtig bliebe, wenn $m < n$, also $m - n = -p$ eine negative Zahl ist; und dann folgt, daß man

*) Dies ist dasselbe, was später von *Hankel* als das Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze bezeichnet worden ist. (Theorie der komplexen Zahlensysteme. Leipzig 1867. S. 11.)

$$a^{-p} = \frac{1}{a^p}$$

zu setzen habe, wodurch die Bedeutung einer Potenz mit einem negativen Exponenten nun bestimmt festgestellt ist.

Daß der obige Grundsatz, trotzdem daß seine Annahme durchaus nicht notwendig, sondern willkürlich ist, für die Mathematik die größte Wichtigkeit besitzt, bedarf wohl keiner näheren Auseinandersetzung. Man braucht sich nur zu vergegenwärtigen, wie das System der Mathematik beschaffen sein würde, wenn jener Grundsatz nicht befolgt wäre, um sofort zu erkennen, welche Unterscheidungen man bei jedem Schritte zu machen gezwungen wäre, und wie schwerfällig alsdann der Gang der Beweise sein würde. Die durch diesen Grundsatz herbeigeführte in weiter Ausdehnung stattfindende Allgemeingültigkeit der mathematischen Sätze läßt auch eine andere Erscheinung in der Geschichte der Mathematik begreifen, nämlich die eine Zeit lang so weit auseinandergehenden Ansichten über die Bedeutung der divergenten Reihen. Da man gewohnt war, fast alle mathematischen Sätze als allgemein gültig zu betrachten, so bedurfte es längerer Zeit, bis die Überzeugung durchdrang, daß bei den Reihenentwickelungen die Resultate nur unter gewissen beschränkenden Bedingungen Geltung haben, und daß überhaupt bei der Einführung des Unendlichen in die Mathematik jener Grundsatz nicht so unbedingt zur Anwendung gebracht werden darf, wie sonst.

Bei der Übertragung der mathematischen Operationen auf die imaginären Größen findet nun aber der obige Grundsatz volle Anwendung, und es ist vollständig nachgewiesen, daß dabei keinerlei Widersprüche eintreten. Es liegt nicht in der Absicht, diesen Nachweis hier zu wiederholen; erwähnt mag aber werden, daß jener Grundsatz, obwohl sonst stets befolgt, doch gerade bei den imaginären Größen nicht von jeher und allgemein anerkannt wurde. Noch zu Eulers Zeit waren die Mathematiker gar nicht darüber einig, was man unter dem Produkt zweier Quadratwurzeln aus negativen Größen zu verstehen habe. Euler selbst setzte obigem Grundsatze gemäß, und wie jetzt allgemein angenommen wird, wenn a und b

zwei positive Größen bedeuten,

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{ab},$$

also das Produkt dieser beiden imaginären Größen einer reellen Größe gleich. Dies wurde aber nicht allgemein anerkannt, vielmehr glaubte Emerson, ein englischer Mathematiker, daß man annehmen müsse, es sei

$$\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{-ab},$$

weil es absurd sei, anzunehmen, daß das Produkt zweier unmöglicher Größen nicht auch unmöglich sei; und Hutton sagt in seinem mathematischen Wörterbuche*), daß zu seiner Zeit die Ansichten der Mathematiker hierüber ziemlich gleich geteilt seien.

Erster Abschnitt.

Definitionen und Sätze aus der Theorie der reellen Größen und ihrer Funktionen.

§ 1. Die irrationalen Zahlen. In der Einleitung ist gezeigt worden, wie man mittels des Prinzips der „Permanenz der formalen Gesetze" (S. 9, Fußnote) von den ganzen positiven Zahlen ausgehend zu den negativen und den gebrochenen gelangt. Derselbe Weg führt zur Definition der irrationalen Zahlen, die Wurzeln aus rationalen Zahlen oder allgemeiner Wurzeln von algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten sind, ferner zur Definition der Logarithmen der rationalen Zahlen für eine beliebige rationale Basis usw. Man kann aber auf diesem Wege nicht zu einer allgemeinen Definition der irrationalen Zahlen gelangen, denn solange man die Definition an bestimmte Rechenoperationen knüpft, bedarf jede Klasse irrationaler Zahlen einer besonderen Definition. Hat man z. B. die Wurzeln algebraischer Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten und die Logarithmen der rationalen Zahlen für eine rationale Basis definiert, so ergibt sich hieraus noch nicht die Definition der Logarithmen der Wurzeln.

---

*) *Hutton,* Mathematical dictionary. 1796.

Um den allgemeinen Begriff der irrationalen Zahl festzustellen, müssen wir daher einen anderen Weg einschlagen.

Wir gehen aus von der folgenden Bemerkung:

Wenn eine rationale Zahl r gegeben ist, so können wir die Gesamtheit der rationalen Zahlen in zwei Klassen A und B einteilen der Art, daß der Klasse A alle die Zahlen, die kleiner als r sind, der Klasse B alle die Zahlen, die größer als r sind, angehören. Die Zahl r selbst können wir nach Belieben der einen oder der anderen Klasse zuzählen. Charakteristisch für diese Klasseneinteilung sind die beiden Eigenschaften:

1. jede rationale Zahl gehört einer und nur einer der beiden Klassen an;

2. jede Zahl der Klasse A ist kleiner als alle Zahlen der Klasse B.

Diese beiden charakteristischen Eigenschaften sind nun nicht dadurch bedingt, daß die Klasseneinteilung durch eine rationale Zahl bewirkt wird. Rechnen wir beispielsweise zur Klasse A diejenigen rationalen Zahlen, deren Quadrat < 2, zur Klasse B diejenigen, deren Quadrat > 2 ist, so erhalten wir eine Einteilung, die die beiden charakteristischen Eigenschaften besitzt; da es aber keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat $= 2$ ist, so wird diese Einteilung durch keine rationale Zahl bewirkt. Eine andere Klasseneinteilung, die ebenfalls die beiden charakteristischen Eigenschaften besitzt, erhalten wir, wenn wir die rationale Zahl x zur ersten oder zur zweiten Klasse rechnen, je nachdem die Differenz $10^x - 2$ negativ oder positiv ist. Auch diese Einteilung wird durch keine rationale Zahl bestimmt.

Nehmen wir nun an, es liege irgend eine Einteilung der rationalen Zahlen in zwei Klassen A, B vor, die die beiden unter 1. und 2. genannten charakteristischen Eigenschaften besitzt. Eine derartige Einteilung bezeichnet man als „Schnitt (A, B)". Gibt es in der Klasse A eine größte Zahl r, so umfaßt die Klasse A alle die rationalen Zahlen, die $\leqq r$ sind, die Klasse B alle die Zahlen, die $> r$ sind. Gibt es in der Klasse B eine kleinste Zahl r, so umfaßt die Klasse A die Zahlen, die $< r$ sind, die Klasse B die Zahlen, die $\geqq r$ sind.

Wenn einer dieser beiden Fälle eintritt, so fällt der Schnitt (A, B) mit einem der beiden Schnitte zusammen, die durch die rationale Zahl r bestimmt sind. Diese beiden Schnitte wollen wir als nicht wesentlich verschieden betrachten.

Wenn es weder in der Klasse A eine größte noch auch in der Klasse B eine kleinste Zahl gibt, so ist der Schnitt (A, B) nicht durch eine rationale Zahl bestimmt.

Wir sagen in diesem Fall, der Schnitt „entspreche" einer irrationalen Zahl α oder auch er sei „durch eine irrationale Zahl α bestimmt".

Zwei irrationale Zahlen α und β heißen gleich oder ungleich, je nachdem ihnen derselbe Schnitt entspricht oder nicht.

Diese Definition der irrationalen Zahlen verdankt man Dedekind.*)

Ihre durchsichtige Klarheit beruht darauf, daß sie keinerlei Darstellung der irrationalen Zahlen durch rationale benutzt. Wir werden nun zeigen, wie man von der Dedekindschen Definition ausgehend zu der üblichen Darstellung der irrationalen Zahlen gelangt.

Wir bemerken zunächst: die Reihe der Brüche

$$-\frac{3}{a}\ -\frac{2}{a}\ -\frac{1}{a}\quad 0\quad \frac{1}{a}\ \frac{2}{a}\ \frac{3}{a}\ \ldots$$

deren gemeinschaftlicher Nenner eine gegebene ganze Zahl a ist, und deren Zähler die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe sind, wird durch den Schnitt (A, B) in zwei Teile zerlegt. Den letzten Bruch, der der Klasse A angehört und den ersten Bruch, der der Klasse B angehört, bezeichnen wir als Näherungsbrüche der Zahl α, die dem Schnitt (A, B) entspricht oder auch als Näherungsbrüche des Schnittes (A, B). Zu jeder ganzen positiven Zahl a gehören somit zwei Näherungsbrüche, deren Differenz $= 1 : a$ ist. Wenn die Zahl α rational und a ein Multiplum des Nenners von α ist, so ist der eine der beiden Näherungsbrüche $= \alpha$.

Betrachten wir nun Näherungsbrüche, die zu verschiedenen Nennern gehören.

*) Stetigkeit und irrationale Zahlen.

Wir behaupten:

Die Differenz zweier Näherungsbrüche $b : a$ und $b' : a'$ ist dem absoluten Betrag nach $< 1 : a + 1 : a'$.

Um dies zu beweisen, nehmen wir zunächst an, die beiden Brüche $b : a$ und $b' : a'$ gehören derselben Klasse an — etwa der ersten — und es sei $b' : a' > b : a$.

Nun gehört, weil $b : a$ ein Näherungsbruch ist, $(b + 1) : a$ der zweiten Klasse an, folglich ist $(b + 1) : a > b' : a'$. Demnach ist

$$\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a} = \frac{1}{a} - \left(\frac{b+1}{a} - \frac{b'}{a'}\right) < \frac{1}{a} \cdot$$

Lassen wir die Voraussetzung, es sei $b' : a' > b : a$, fallen, so können wir sagen: gehören die beiden Brüche $b : a$ und $b' : a'$ derselben Klasse an, so ist ihre Differenz kleiner als der größere der beiden Brüche $1 : a$ und $1 : a'$. Nehmen wir nunmehr an, der Bruch $b : a$ gehöre zur ersten, der Bruch $b' : a'$ dagegen zur zweiten Klasse. In diesem Falle gehören die beiden Brüche $(b' - 1) : a'$ und $b : a$ derselben Klasse an und das gleiche gilt für die beiden Brüche $b' : a'$ und $(b + 1) : a$. Folglich ist der absolute Betrag jeder der beiden Differenzen $(b' - 1) : a' - b : a$ und $b' : a' - (b + 1) : a$ kleiner als der größere der beiden Brüche $1 : a$ und $1 : a'$. Aus den Gleichungen

$$\frac{b'}{a'} - \frac{b}{a} = \left(\frac{b' - 1}{a'} - \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{a'} = \left(\frac{b'}{a'} - \frac{b+1}{a}\right) + \frac{1}{a}$$

ergibt sich nun unmittelbar die Richtigkeit unserer Behauptung.

Wir bilden nun eine unbegrenzte Reihe von Näherungsbrüchen:

$$\text{R)} \qquad \frac{b_0}{a_0}\ \frac{b_1}{a_1}\ \frac{b_2}{a_2}\ \ldots .$$

Die Nenner $a_0\ a_1\ a_2 \ldots$ wählen wir der Art, daß mit wachsendem Index ν a_ν über alle Grenzen wächst. Genauer ausgedrückt heißt das: Wir wählen die Nenner so, daß sich zu jeder gegebenen positiven Zahl m ein Index μ der Art bestimmen läßt, daß für $\nu \geqq \mu$ $a_\nu > m$ ist. Dieser Forderung genügen wir beispielsweise, indem wir $a_\nu = 10^\nu$ setzen. Es ist dann $b_\nu : a_\nu$ ein ν-stelliger Dezimalbruch; die Differenz zwischen diesem Näherungsbruch und einem der folgenden ist kleiner als eine Einheit der ν^{ten} Dezimale.

Die Näherungsbrüche (R) können sich in beliebiger Weise auf die Klassen A und B verteilen.

Auf jeden Fall können wir, wenn nur die Nenner der Näherungsbrüche der gestellten Bedingung genügen, den Index μ so groß wählen, daß für $\nu > \mu$ der absolute Betrag der Differenz $b_\nu : a_\nu - b_\mu : a_\mu$ kleiner als eine vorgegebene, beliebig kleine, Größe ε ist. Da nämlich, wie eben bewiesen worden ist, der absolute Betrag dieser Differenz $< 1 : a_\nu + 1 : a_\mu$ ist, so brauchen wir nur den Index μ so groß zu wählen, daß für

$$\nu \geqq \mu \quad a_\nu > \frac{2}{\varepsilon} \text{ ist.}$$

Nachdem wir gezeigt haben, daß für jeden Schnitt in mannigfaltiger Weise eine Reihe von Näherungsbrüchen bestimmt werden kann, bleibt zu beweisen, daß auch umgekehrt eine jede Reihe der Form (R) einen Schnitt bestimmt. Es ist zweckmäßig bei diesem Beweis nicht davon Gebrauch zu machen, daß die Glieder der Reihe (R) Näherungsbrüche sind, sondern von einer allgemeineren Voraussetzung auszugehen. Es sei eine unbegrenzte Reihe von rationalen Zahlen

$$\text{(C)} \qquad c_0 \; c_1 \; c_2 \; . \; . \; .$$

vorgelegt, die der folgenden Bedingung genügen:

3. Nach Annahme einer beliebig zu wählenden positiven Größe ε kann man einen Index μ der Art bestimmen, daß für $\nu > \mu$ $|c_\nu - c_\mu| < \varepsilon$ ist.*) Eine derartige Reihe bezeichnet man als „Fundamentalreihe“. Sie heißt insbesondere „Elementarreihe“, wenn man den Index μ so bestimmen kann, daß für $\nu \geqq \mu$ $|c_\nu| < \varepsilon$ ist, wo ε eine beliebig zu wählende positive Größe bedeutet.

Aus der Definition der Fundamentalreihe folgt unmittelbar, daß die absoluten Beträge aller Glieder der Reihe unter einer angebbaren Zahl bleiben.

Die aus Näherungsbrüchen bestehende Reihe (R) ist offenbar eine Fundamentalreihe, aber es können im Allgemeinen die Glieder einer Fundamentalreihe nicht als Näherungsbrüche einer bestimmten Zahl betrachtet werden.

*) Mit $|c_\nu - c_\mu|$ bezeichnen wir in üblicher Weise den absoluten Betrag der Differenz $c_\nu - c_\mu$.

Wir beweisen nun den Satz:

Eine jede Fundamentalreihe bestimmt einen Schnitt und damit auch eine rationale oder irrationale Zahl.

Den Beweis stützen wir auf die folgende Bemerkung:

Eine Fundamentalreihe (C) ist entweder eine Elementarreihe, oder aber es besitzen sämtliche Glieder der Reihe, von einem bestimmten Glied c_μ angefangen, dasselbe Vorzeichen und die absoluten Beträge dieser Glieder bleiben über einer angebbaren positiven Zahl.

Wenn nämlich einer jeden positiven Größe ε nur eine endliche Anzahl von Gliedern der Reihe (C) entsprechen, die der Bedingung $|c_\mu| > \varepsilon$ genügen, so ist die Reihe eine Elementarreihe. Wenn also die Reihe (C) nicht eine Elementarreihe ist, so muß sich eine positive Zahl ε nachweisen lassen, die der Bedingung genügt, daß unbegrenzt viele Glieder der Reihe dem absoluten Betrag nach $> \varepsilon$ sind. Wir wählen nun den Index μ so groß, daß für $\nu > \mu$ $|c_\nu - c_\mu| < \delta < \varepsilon$ ist, und wir wählen ihn überdies so, daß $|c_\mu| > \varepsilon$ ist. Aus der Gleichung $c_\nu = c_\mu + (c_\nu - c_\mu)$ folgt, daß für $\nu > \mu$ die Zahl c_ν dasselbe Vorzeichen besitzt wie die Zahl c_μ und daß $|c_\nu| > \varepsilon - \delta$ ist.

Nehmen wir nun zunächst an, es genüge keine rationale Zahl r der Bedingung, daß die Reihe

$$(C') \qquad c_0 - r \quad c_1 - r \quad c_2 - r \ldots$$

eine Elementarreihe ist. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir einen Schnitt (A, B), wenn wir eine jede rationale Zahl r zur Klasse A oder zur Klasse B rechnen, je nachdem für große Werte des Index ν die Differenzen $c_\nu - r$ negativ oder positiv sind.

Nehmen wir zweitens an, es gebe eine rationale Zahl der Art, daß die Reihe (C') eine Elementarreihe ist. Es sei nun m eine beliebige von r verschiedene rationale Zahl. Wir wählen die Zahl μ so groß, daß für $\nu \geqq \mu$

$$|c_\nu - r| < \varepsilon < |m - r| \text{ ist.}$$

Nun folgt aus der Gleichung

$$c_\nu - m = (r - m) + (c_\nu - r)$$

daß die Zahlen $c_\nu - m$ und $r - m$ dasselbe Vorzeichen besitzen, und daß ihre Differenz kleiner als die beliebig zu wählende Zahl ε ist.

In diesem Fall bestimmt somit die Fundamentalreihe (C) denselben Schnitt wie die rationale Zahl r.

Ist insbesondere die Reihe (C) eine Elementarreihe, so ist die ihr entsprechende Zahl die Null.

Wenn die Reihe (C) keine Elementarreihe ist, so haben, wie oben gezeigt worden ist, von einem bestimmten Glied an alle Glieder der Reihe dasselbe Vorzeichen. Je nachdem sie positiv oder negativ sind, heißt die Zahl, die durch die Reihe bestimmt ist, positiv oder negativ.

Es seien nun zwei Fundamentalreihen gegeben.

$$\text{(C)} \qquad c_0 \; c_1 \; c_2 \; \ldots$$

und

$$\text{(K)} \qquad k_0 \; k_1 \; k_2 \; \ldots$$

Der Reihe (C) entspreche die Zahl α, der Reihe (K) die Zahl β.

Wir bilden die 4 Reihen

$$\text{(S)} \qquad c_0 + k_0 \quad c_1 + k_1 \quad c_2 + k_2 \ldots$$

$$\text{(D)} \qquad c_0 - k_0 \quad c_1 - k_1 \quad c_2 - k_2 \ldots$$

$$\text{(P)} \qquad c_0 k_0 \quad c_1 k_1 \quad c_2 k_2 \ldots$$

$$\text{(Q)} \qquad \frac{c_0}{k_0} \quad \frac{c_1}{k_1} \quad \frac{c_2}{k_2} \ldots$$

Es läßt sich beweisen, daß die Reihen (S), (D) und (P) auf jeden Fall Fundamentalreihen sind und daß die Reihe (Q) eine Fundamentalreihe ist, wenn die Reihe (K) keine Elementarreihe ist.

Wir wollen nur den Beweis für die letzte Behauptung ausführen.

Da nach Voraussetzung die Reihe (K) keine Elementarreihe ist, so können wir eine Zahl μ so wählen, daß für $\nu \geqq \mu$ $|k_\nu|$ größer als eine angebbare Zahl p ist. Wir können ferner eine Zahl $\lambda \geqq \mu$ so wählen, daß für $\nu \geqq \lambda$ die absoluten Beträge der Differenzen $c_\nu - c_\lambda$ und $k_\nu - k_\lambda$ kleiner als ε sind, wo ε eine beliebig zu wählende positive Zahl bedeutet. Nun ist

$$\frac{c_\nu}{k_\nu} - \frac{c_\lambda}{k_\lambda} = \frac{k_\lambda(c_\nu - c_\lambda) - c_\lambda(k_\nu - k_\lambda)}{k_\nu k_\lambda} \text{ also}$$

$$\left|\frac{c_\nu}{k_\nu} - \frac{c_\lambda}{k_\lambda}\right| < \frac{|k_\lambda| + |c_\lambda|}{p^2}\,\varepsilon.$$

Da wir über ε nach Belieben verfügen können, können wir uns so einrichten, daß der absolute Wert der Differenz $c_\nu : k_\nu - c_\lambda : k_\lambda$ kleiner als jede vorgegebene Zahl ε ist, was zu beweisen war.

Wir definieren nun als Summe, Differenz, Produkt und Quotienten der Zahlen α und β, die den Reihen (C) und (K) entsprechen, die Zahlen, die beziehungsweise den Fundamentalreihen (S), (D), (P) und (Q) entsprechen.

Damit diese Definitionen zulässig sind, ist erforderlich nachzuweisen, erstens daß sie mit den gewöhnlichen Definitionen übereinstimmen, wenn die Zahlen α und β rational sind, und zweitens daß bei Annahme dieser Definitionen die gewöhnlichen Rechnungsregeln in Geltung bleiben.*) Den ersten Teil dieses Nachweises führen wir wieder nur für den einen der vier in Betracht kommenden Fälle durch. Wir wollen unter der Voraussetzung, daß die Zahlen α und β rational sind, beweisen, daß die Fundamentalreihe (S) der Summe $\alpha + \beta$ entspricht.

Es sei m eine bestimmte von $\alpha + \beta$ verschiedene rationale Zahl. Wir können wie oben gezeigt worden ist, den Index μ so wählen, daß für $\nu \geqq \mu$ jede der Differenzen $c_\nu - \alpha$ und $k_\nu - \beta$ dem absoluten Betrag nach kleiner als eine vorgegebene positive Zahl ε ist. Nun ist

$$c_\nu + k_\nu - m = (\alpha + \beta - m) + (c_\nu - \alpha) + (k_\nu - \beta).$$

Der absolute Betrag der Summe $(c_\nu - \alpha) + (k_\nu - \beta)$ ist $< 2\varepsilon$; wählen wir also $\varepsilon < \frac{1}{2}|\alpha + \beta - m|$, so besitzen die beiden Differenzen $c_\nu + k_\nu - m$ und $\alpha + \beta - m$ dasselbe Vorzeichen. Daraus folgt: der Schnitt, der durch die Reihe (S) bestimmt ist, entspricht der rationalen Zahl $\alpha + \beta$.

Daß bei Annahme der oben aufgestellten Definitionen die für rationale Zahlen geltenden Rechnungsregeln in Kraft bleiben,

*) Vergl. S. 9 der Einleitung.

folgt daraus, daß wir ja unsere Operationen an den Gliedern der Fundamentalreihen, also an rationalen Zahlen vornehmen. So ist z. B. das Produkt $\alpha\beta$ durch die Fundamentalreihe

$$(P) \qquad c_0 k_0 \quad c_1 k_1 \quad c_2 k_2 \ldots$$

und das Produkt $\beta\alpha$ durch die Fundamentalreihe

$$(P') \qquad k_0 c_0 \quad k_1 c_1 \quad k_2 c_2 \ldots$$

bestimmt. Da nun für rationale Zahlen die Gleichung $k_i c_i = c_i k_i$ gilt, so sind die Fundamentalreihen (P) und (P′) nicht verschieden und es ist daher $\beta\alpha = \alpha\beta$.

Nachdem die Differenz zweier Zahlen, die durch Fundamentalreihen bestimmt sind, definiert ist, ergibt sich sofort die Definition des Größer- und Kleinerseins und der Gleichheit: die Zahl α heißt größer oder kleiner als die Zahl β, je nachdem der Fundamentalreihe (D), die ihre Differenz bestimmt, eine positive oder negative Zahl entspricht (s. S. 17). Die Zahlen α und β heißen gleich, wenn der Reihe (D) die Null entspricht, wenn also diese Reihe eine Elementarreihe ist.

Wenn dem Schnitt (A, B) eine irrationale Zahl α entspricht, so ist diese Zahl größer als jede Zahl der Klasse A und kleiner als jede Zahl der Klasse B. Insbesondere ist α größer als der kleinere der beiden Näherungsbrüche, die den gemeinsamen Nenner n besitzen und kleiner als der größere derselben.

Nachdem die irrationalen Zahlen definiert sind, können wir den Begriff der Fundamentalreihe erweitern: wir bezeichnen eine Reihe

$$c_0 \quad c_1 \quad c_2 \ldots$$

deren Glieder der Bedingung (3) genügen, auch dann als Fundamentalreihe, wenn die Zahlen c_0 c_1 c_2 ... irrational sind. Dem entsprechend dehnen wir auch den Begriff der Elementarreihe auf Reihen mit irrationalen Gliedern aus.

In derselben Weise, wie dies oben geschehen ist, beweisen wir, daß auch jede dieser allgemeineren Fundamentalreihen einen Schnitt und damit eine rationale oder irrationale Zahl bestimmt.

§. 2. Über Zahlenmengen. Es sei irgend eine Menge von Zahlen definiert, die sämtlich größer als eine gegebene Zahl A und kleiner als eine gegebene Zahl B sind. Den Inbegriff dieser Zahlen bezeichnen wir mit M. Wenn die

Menge der Zahlen endlich ist, so muß es unter ihnen eine größte und eine kleinste geben. Ist die Menge unendlich, so ist dies nicht notwendigerweise der Fall. Beispielsweise bilden die rationalen Zahlen r, die der Bedingung $\sqrt{2} < r < \sqrt{3}$ genügen eine wohldefinierte Menge; in dieser Menge gibt es weder eine größte noch eine kleinste Zahl.

Für eine jede Zahlenmenge M lassen sich zwei Zahlen α und β bestimmen, die den beiden folgenden Bedingungen genügen:

1. alle Zahlen der Menge M sind nicht kleiner als α und nicht größer als β;
2. wie klein auch die positive Zahl ε gewählt werden mag, so gibt es immer wenigstens eine Zahl der Menge, die kleiner als $\alpha + \varepsilon$ ist und wenigstens eine, die größer als $\beta - \varepsilon$ ist.

Die Zahlen α und β bezeichnet man als untere beziehungsweise obere Grenze der Zahlenmenge M.

Um die Existenz der unteren Grenze α nachzuweisen, wählen wir eine ganze positive Zahl $a > 1$ aus und bestimmen die ganzen Zahlen $b_0\ b_1\ b_2 \cdot\ .\ .\ b_\mu\ .\ .\ .$ folgendermaßen:

b_0 sei die größte ganze Zahl, die kleiner als alle Zahlen der Menge M ist; $b_1 : a$ sei der größte unter den Brüchen mit dem Nenner a, der kleiner als alle Zahlen der Menge M ist, $b_2 : a^2$ sei der größte unter den Brüchen mit dem Nenner a^2, der kleiner als alle Zahlen der Menge M ist, $b_\mu : a^\mu$ sei der größte unter den Brüchen mit dem Nenner a^μ, der kleiner als alle Zahlen der Menge M ist.

Es ist offenbar $b_\mu : a^\mu > b_{\mu-1} : a^{\mu-1} > (b_\mu - 1) : a^\mu$ also auch, wenn $\nu < \mu$ ist, $b_\mu : a^\mu > b_\nu : a^\nu > (b_\mu - 1) : a^\mu$ folglich bilden die Zahlen

$$b_0\ \frac{b_1}{a}\ \frac{b_2}{a^2}\ .\ .\ .$$

eine Fundamentalreihe. Die Zahl α, die dieser Fundamentalreihe entspricht, genügt offenbar den Bedingungen des Satzes.

Auf dieselbe Art ist die Existenz der oberen Grenze β nachzuweisen.

Die Eigenschaft der Zahlen der Menge M, daß sie sämtlich nicht kleiner als α und nicht größer als β sind, drückt man auch dadurch aus, daß man sagt: die Zahlen der Menge

M gehören dem Intervall (α, β) an. Gehören die Zahlen α, β selbst nicht zur Menge M, so sagen wir: die Zahlen der Menge M liegen innerhalb des Intervalls (α, β).

Gibt es keine Zahl, die größer als alle Zahlen der Menge M ist, so sagt man die obere Grenze der Menge sei $+\infty$; dementsprechend bezeichnet man $-\infty$ als untere Grenze, wenn es keine Zahl gibt, die kleiner als alle Zahlen der Menge ist.

Ein einfaches Beispiel einer derartigen Menge bietet die Reihe der natürlichen Zahlen.

Eine Zahl m aus der Menge M heißt isoliert, wenn sich ein Intervall $(m-h, m+h)$ nachweisen läßt, dem außer m keine Zahl der Menge angehört.

Eine Zahlenmenge, die nur isolierte Zahlen enthält, heißt diskret.

Wenn die Zahlenmenge M unendlich ist und alle Zahlen der Menge einem endlichen Intervall (α, β) angehören, so läßt sich mindestens eine Zahl γ der Art bestimmen, daß dem Intervall $(\gamma-\varepsilon, \gamma+\varepsilon)$ unendlich viele Zahlen der Menge angehören, wie klein auch immer die positive Zahl ε gewählt werden mag.

Um dies zu beweisen, teilen wir das Intervall (α, β) in n gleiche Teile. Unter den Teilintervallen muß es mindestens eines geben, dem unendlich viele Zahlen der Menge angehören. Es sei (α_1, β_1) ein derartiges Teilintervall. Dieses teilen wir abermals in n gleiche Teile: unter den neuen Teilintervallen ist wieder mindestens eines, dem unendlich viele Zahlen der Menge M angehören: es sei dies das Intervall (α_2, β_2). In dieser Weise fortfahrend gelangen wir zu zwei unbegrenzten Zahlenreihen

$$\alpha \ \alpha_1 \ \alpha_2 \ldots \quad \text{und} \quad \beta \ \beta_1 \ \beta_2 \ldots$$

Diese beiden Reihen sind offensichtlich Fundamentalreihen; es entspricht ihnen dieselbe Zahl und diese Zahl genügt der für die Zahl γ gestellten Bedingung.

Man bezeichnet die Zahl γ als „Häufungsstelle" der Menge M.

Die Häufungsstelle braucht nicht selbst zur Menge zu gehören.

Die Häufungsstellen können in unendlicher Zahl auftreten: in diesem Fall besitzen sie ihrerseits eine Häufungsstelle usw.

Zwei Beispiele mögen die Definition anschaulicher machen. Die Zahlenmenge M bestehe aus den Zahlen der Form $1 : n$, wo n eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Die Menge M besitzt die Häufungsstelle 0, die selbst nicht zur Menge gehört. Nehmen wir zweitens an, die Menge M bestehe aus den Zahlen der Form

$$\frac{1}{n + \frac{1}{m}},$$

wo n und m positive ganze Zahlen bedeuten. In diesem Fall sind alle Zahlen der Form $1 : n$ Häufungsstellen und diese Häufungsstellen gehören abgesehen von der Zahl 1 der Menge an.

Wenn die Zahlen der unendlichen Menge M nicht alle einem angebbaren Intervall angehören, so muß es nicht notwendig eine Häufungsstelle γ geben. In diesem Fall muß es aber unbegrenzt viele Zahlen der Menge geben, die dem absoluten Betrag nach größer als eine gegebene beliebig große Zahl sind.

Man sagt in diesem Fall: die Zahlenmenge M besitzt eine Häufungsstelle im Unendlichen.

Wenn die Zahlen der Menge M das Intervall (α, β) der Art erfüllen, daß sich kein noch so kleines Teilintervall nachweisen läßt, dem keine Zahl der Menge angehört, so sagt man, die Menge M sei in dem Intervall (α, β) „überall dicht“.

In diesem Fall bildet jede Zahl der Menge eine Häufungsstelle.

Als Beispiel einer überall dichten Zahlenmenge können die rationalen Zahlen dienen. Ein weiteres Beispiel bietet die Gesamtheit der echten und unechten Dezimalbrüche.

Eine Zahlenmenge heißt „abzählbar“, wenn sich die Zahlen der Menge der natürlichen Zahlenreihe eindeutig zuordnen lassen.

Ein Beispiel einer abzählbaren Menge bietet die Menge der positiven rationalen Zahlen. Um sie in eine Reihe zu ordnen, setzen wir fest: Von zwei rationalen Zahlen, für welche die Summe aus Zähler und Nenner verschiedene Werte hat, soll diejenige vorangehen, die der kleineren Summe entspricht, von zwei rationalen Zahlen, für die diese Summe denselben Wert hat, soll die kleinere vorangehen.*)

Statt der Bezeichnung Zahl gebrauchen wir auch die Bezeichnung „Zahlgröße" oder „Größe". Wir gebrauchen insbesondere die Bezeichnung „variable Größe x" oder „Variable", wenn wir uns vorstellen, daß das Zeichen x der Reihe nach die verschiedenen Zahlen einer Zahlenmenge M bedeuten soll. Wir bezeichnen die Variable x als stetig, wenn die Zahlenmenge M alle Zahlen eines bestimmten Intervalls (α, β) umfaßt. In diesem Fall gebrauchen wir auch die Bezeichnung: die Variable x durchläuft das Intervall (α, β).

Den Begriff der Zahlenmenge können wir in bekannter Weise anschaulich machen. Zu dem Zweck legen wir eine beliebig zu wählende Längeneinheit zugrunde und können dann einer jeden Zahl x die Strecke zuordnen, deren Länge gleich dem absoluten Betrag der Zahl x ist. Diese Strecken tragen wir als Abszissen auf einer festen Geraden auf — die positiven Zahlen entsprechenden Strecken nach der rechten Seite hin, die negativen Zahlen entsprechenden nach links hin. Der Endpunkt der Abszisse x kann als Repräsentant der Zahl x betrachtet werden. Eine jede Zahlenmenge wird nun durch ein bestimmtes Punktsystem repräsentiert.

Durchläuft die Variable x ein gegebenes Intervall (α, β) so durchläuft der entsprechende Punkt eine Strecke $\beta - \alpha$.

An diese geometrische Darstellung anknüpfend bezeichnet man einen bestimmten Wert der Variabeln x als „Punkt x".

§ 3. Der allgemeinste Funktionsbegriff. Grenzwerte. Wenn einer jeden Zahl x einer Zahlenmenge M ein bestimmter Zahlwert y zugeordnet ist, so nennt man y eine Funktion der Größe x und drückt die Beziehung durch die Bezeichnung $y = f(x)$ aus. Dabei bleibt dahingestellt, ob die Zahlenmenge M diskret ist, oder ob sie wenigstens in einem Intervall überall dicht ist**). Es bleibt ferner dahingestellt,

*) Dieses Beispiel einer abzählbaren Zahlenmenge ist auch insofern von Interesse, als es zeigt, daß es überall dichte Zahlenmengen gibt, die einer diskreten Zahlenmenge eindeutig zugeordnet werden können.

**) Die Funktion $f(x)$ kann beispielsweise nur für den Fall, daß x

in welcher Weise die Zuordnung definiert ist: wesentlich ist nur, daß sie eindeutig bestimmt ist.

Nehmen wir an a sei eine Häufungsstelle der Menge M und es gehören dem Intervall $(a, a + \varrho)$ unendlich viele Zahlen der Menge an, wie klein auch immer die positive Zahl ϱ gewählt werden mag; nehmen wir weiter an, es existiere eine bestimmte Zahl α, die der folgenden Bedingung genügt:

nach Annahme einer beliebig zu wählenden positiven Grösse ε läßt sich eine positive Zahl ϱ derart bestimmen, daß

$$|f(x) - \alpha| \leqq \varepsilon$$

ist, für alle Zahlen der Menge, die der Bedingung

$$|x - a| \leqq \varrho$$

genügen.

Man sagt in diesem Fall: die Funktion $f(x)$ konvergiert gegen den Grenzwert α, wenn x von größeren Werten her gegen a konvergiert. Man bezeichnet diesen Grenzwert mit $\lim\limits_{x = a + 0} f(x)$ oder auch mit $f(a + 0)$.

Ein derartiger Grenzwert existiert immer, wenn die Funktionswerte ihrem absoluten Betrag nach unter einer angebbaren Größe bleiben und wenn bei abnehmendem x der Funktionswert entweder beständig zunimmt oder beständig abnimmt.

In analoger Weise ist der Grenzwert $f(a - 0)$ zu erklären.

Es muß ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die Funktion für $x = a$ nicht definiert zu sein braucht, und daß, wenn sie für $x = a$ definiert ist, die Grenzwerte $f(a + 0)$ und $f(a - 0)$ unter sich und von $f(a)$ verschieden sein können.

Setzen wir beispielsweise $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$, so ist

$$f(a + 0) = 2a, \qquad f(a - 0) = -2a.$$

Für $x = a$ versagt die angegebene Definition der Funktion; es steht aber nichts im Weg, dem Punkt $x = a$ einen beliebig zu wählenden Funktionswert zuzuordnen.

Nehmen wir an, die Menge M enthalte Zahlen, die größer

---

eine ganze positive Zahl ist, definiert sein. Dies tritt ein, wenn wir $f(x) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \cdots + \frac{1}{x^2}$ setzen.

als jede vorgegebene Zahl sind, und nehmen wir weiter an, es gebe eine Zahl α, die der folgenden Bedingung genügt:

Nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse ε läßt sich eine positive Zahl r derart bestimmen, daß

$$|f(x) - \alpha| \leqq \varepsilon$$

ist, für jede Zahl der Menge, die $\geqq r$ ist.

In diesem Fall sagt man: die Funktion $f(x)$ konvergiert für unbegrenzt wachsende x gegen den Grenzwert α. Man bezeichnet diesen Grenzwert mit

$$\lim_{x=+\infty} f(x) \text{ oder auch mit } f(+\infty).$$

In analoger Weise ist der Grenzwert $f(-\infty)$ zu definieren.

§ 4. Stetige Funktionen. Der im vorigen Paragraphen aufgestellte Funktionsbegriff ist so umfassend, daß von gemeinsamen Eigenschaften der Funktionen, die unter ihn fallen, keine Rede sein kann. Wir schränken nun diesen Begriff successive immer mehr ein.

Zunächst setzen wir die Variable x als stetig voraus (siehe § 2) und nehmen an, die Funktion $f(x)$ sei für alle Punkte eines gegebenen Intervalls (a, b) definiert.

Aus der Annahme, daß jedem Punkt des Intervalls (a, b) ein bestimmter endlicher Funktionswert entspricht, darf man nicht schließen, daß die Funktionswerte eine endliche obere und untere Grenze besitzen.

Es steht beispielsweise nichts im Weg festzusetzen, für einen von Null verschiedenen Wert x sei $f(x) = \frac{1}{x}$, dagegen sei $f(o) = 0$. Es entspricht dann jedem Wert der Variabeln x ein bestimmter endlicher Funktionswert, aber die obere und untere Grenze der Funktionswerte sind unendlich.

Sofern die Funktionswerte, die den Punkten des Intervalls (a, b) entsprechen, innerhalb endlicher Grenzen liegen, bezeichnet man die Differenz dieser Grenzwerte als „Schwankung“ der Funktion im Intervall (a, b).

Die Funktion $f(x)$ heißt „stetig im Punkt x_0“, wenn sich zu einer jeden gegebenen, beliebig kleinen positiven Größe ε eine positive Größe ϱ derart bestimmen läßt, daß die Schwankung der Funktion im Intervall $(x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$ kleiner als ε ist.

Die eben aufgestellte Definition bedarf einer leichten Modifikation für den Fall, daß der Wert x_0 mit einer der Intervallgrenzen a, b zusammenfällt.

Wir bezeichnen die Funktion als stetig im Punkt a beziehungsweise im Punkt b, wenn die Schwankung in dem Intervall $(a, a + \varrho)$ beziehungsweise in dem Intervall $(b - \varrho, b)$ mit ϱ unter jede vorgegebene Größe ε sinkt.

Aus der Definition der Stetigkeit geht hervor:

Wenn die Funktion $f(x)$ in jedem Punkt innerhalb des Intervalls (a, b) stetig ist, so läßt sich nach Annahme einer beliebig zu wählenden positiven Grösse ε für jeden Punkt x im Innern des Intervalls eine positive Größe ϱ derart bestimmen, daß die Schwankung der Funktion im Intervall $(x - \varrho, x + \varrho)$ nicht grösser als ε ist.

Der größte Wert von ϱ, für den diese Forderung erfüllt ist, ist für jeden Wert der Variabeln x vollkommen bestimmt, er ist also eine Funktion der Variabeln x. Die Funktionswerte $\varrho(x)$, die den Punkten des Intervalls (a, b) zugeordnet sind, besitzen eine untere Grenze ϱ_0, die jedenfalls nicht negativ ist, da ja die Funktion $\varrho(x)$ ihrer Definition nach nur positive Werte annehmen kann. Wenn diese untere Grenze ϱ_0 von Null verschieden ist, wie auch immer die Zahl ε gewählt werden mag, so heißt die Funktion gleichmäßig stetig innerhalb des Intervalls (a, b).

Solange nicht feststeht, daß die Funktion nicht nur im Innern des Intervalls (a, b), sondern auch in seinen Endpunkten stetig ist, bleibt die Möglichkeit offen, daß die Funktion zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist. Beispielsweise ist die Funktion $\sin \frac{\pi}{1 - x}$ in jedem Punkt innerhalb des Intervalls $(0, 1)$ stetig, aber diese Stetigkeit ist keine gleichmäßige*).

Dagegen gilt der Satz:

Eine Funktion, die in jedem Punkt des Intervalls (a, b)

*) Setzen wir $x_1 = \frac{n-1}{n}$, $x_2 = \frac{2n-1}{2n+1}$, wo n eine ganze Zahl bedeutet, so ist $\sin \frac{\pi}{1 - x_2} - \sin \frac{\pi}{1 - x_1} = \pm 1$ und $x_2 - x_1 = \frac{1}{n(2n+1)}$. Bei wachsendem n bleibt die erstere Differenz ihrem absoluten Wert nach konstant, die letztere sinkt unter jede vorgegebene Größe.

(also auch in den Endpunkten) stetig ist, ist gleichmäßig stetig.

Man bezeichnet eine derartige Funktion als „stetig im Intervall (a, b)".

Den Beweis führen wir indirekt: Wir nehmen an, die untere Grenze der Werte der Funktion $\varrho(x)$, die zu einer bestimmten Größe ε gehört, sei Null. Wir zerlegen nun das Intervall (a, b) in n gleiche Teile; unter den Teilintervallen muß mindestens eines sein, für das die untere Grenze der Funktionswerte $\varrho(x)$ ebenfalls Null ist.

Es sei (a_1, b_1) ein Teilintervall, das dieser Bedingung genügt. Dieses Teilintervall zerlegen wir abermals in n gleiche Teile und können unter den Teilintervallen wieder eines auswählen — es sei dies das Intervall (a_2, b_2) — für das die untere Grenze der Funktionswerte Null ist. Diese Schlußweise fortsetzend, erhalten wir zwei unbegrenzte Zahlenreihen

$$(a) \quad a\, a_1\, a_2 \ldots \quad \text{und} \quad (b) \quad b\, b_1\, b_2 \ldots$$

die die folgenden Eigenschaften besitzen: es ist

1. $a \leqq a_1 \leqq a_2 \ldots$ und
2. $b > b_1 \geqq b_2 \ldots$, ferner ist
3. $b_\nu - a_\nu = \dfrac{b_{\nu-1} - a_{\nu-1}}{n} = \dfrac{b-a}{n^\nu}$,
4. die untere Grenze der Funktionswerte $\varrho(x)$, die im Intervall (a_ν, b_ν) stattfinden, ist Null, und zwar gilt dies für jeden Wert des Index ν.

Aus den drei ersten Eigenschaften folgt: die Zahlenreihen (a) und (b) sind Fundamentalreihen; beiden Reihen entspricht dieselbe Zahl c.

Die Funktion $f(x)$ ist in jedem Punkt des Intervalls (a, b) also auch im Punkte c stetig. Wir können daher nach Annahme einer beliebig zu wählenden positiven Größe δ eine positive Größe τ derart bestimmen, daß

5. $|f(x) - f(c)| < \delta$ ist für $|x - c| < \tau$.

Die zur Verfügung stehende Größe δ wählen wir kleiner als die Größe ε, die zur Definition der Funktion $\varrho(x)$ gedient hat.

Nun wählen wir den Index ν so groß, daß $b_\nu - a_\nu < \tau$ ist.

Da die untere Grenze der Funktionswerte $\varrho(x)$ im Intervall (a_1, b_1) Null ist (4), so muß sich ein diesem Intervall angehörender Wert x derart bestimmen lassen, daß $\varrho(x)$ kleiner als eine beliebig zu wählende positive Größe σ ist. Es muß daher einen Wert x_1 geben, der den beiden Bedingungen

(6) $|x - x_1| \leqq \sigma$ und $|f(x_1) - f(x)| > \varepsilon$ genügt,

denn wäre die letztere Ungleichung für keinen der ersten Ungleichung genügenden Wert x_1 erfüllt, so wäre $\varrho(x) > \sigma$ entgegen unserer Annahme. Nun ist

$$f(x_1) - f(c) = [f(x_1) - f(x)] + [f(x) - f(c)] \quad \text{und}$$
$$x_1 - c = [x_1 - x] + [x - c],$$

folglich ist mit Rücksicht auf die Ungleichungen (5) und (6)

$$|f(x_1) - f(c)| > \varepsilon - \delta \quad \text{und} \quad |x_1 - c| < \sigma + \tau.$$

Die Größe ε ist von vornherein gegeben, die Größen δ, σ und τ können wir aber beliebig klein wählen. Somit folgt aus unserer Annahme, daß die Differenz $f(x_1) - f(c)$ Werte von angebbarer Größe annehmen kann, wenn auch der absolute Betrag der Differenz $x_1 - c$ unter jede vorgegebene Größe sinkt. Diese Folgerung steht aber im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, daß die Funktion $f(x)$ in jedem Punkt des Intervalls (a, b) stetig ist, was zu beweisen war.

Wir können den eben bewiesenen Satz in folgender Form aussprechen:

Vorausgesetzt, daß die Funktion $f(x)$ im Intervall (a, b) stetig ist, können wir zu jeder gegebenen positiven Größe ε eine positive Größe ϱ_0 derart bestimmen, daß für alle Größen $x_1\, x_2$, die der Bedingung

$$|x_2 - x_1| \leqq \varrho_0$$

genügen, die Ungleichung

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqq \varepsilon$$

erfüllt ist.

Aus diesem Satz ergibt sich die bemerkenswerte Folgerung:

Wenn die Zahlen $x_0\, x_1\, x_2 \ldots$ eine Fundamentalreihe bilden, so bilden die entsprechenden Funktionswerte

$$f(x_0)\, f(x_1)\, f(x_2) \ldots$$

ebenfalls eine Fundamentalreihe.

Wählen wir nämlich den Index μ so groß, daß für $\nu > \mu$

$$|x_\nu - x_\mu| \leqq \varrho_0 \text{ ist, so ist } |f(x_\nu) - f(x_\mu)| < \varepsilon.$$

Diese Eigenschaft der stetigen Funktionen ist für ihre Definition von wesentlicher Bedeutung.

Nehmen wir an, es seien zunächst nur rationalen Werten der unabhängigen Variabeln x Funktionswerte $f(x)$ zugeordnet. Die Zuordnung sei derart, daß Werten der unabhängigen Variabeln, die eine Fundamentalreihe bilden, Funktionswerte entsprechen, die ebenfalls eine Fundamentalreihe bilden. Unter dieser Voraussetzung können wir die Definition der Funktion auf irrationale Werte der unabhängigen Variabeln ausdehnen, indem wir festsetzen, die Funktion $f(x)$ sei stetig.

Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, betrachten wir die Potenz $y = a^x$, wo a eine positive rationale Zahl > 1 bedeutet. Ist x eine rationale Zahl $= \frac{m}{n}$, so können wir y durch die Gleichung $y^n = a^m$ und die Zusatzbedingung, y sei positiv, eindeutig definieren.

Auf Grund dieser Definition entsprechen, wie man sich leicht überzeugt, rationalen Werten der unabhängigen Variabeln, die eine Fundamentalreihe bilden, Funktionswerte, die ebenfalls eine Fundamentalreihe bilden.

Wir können daher die Definition der Funktion auf irrationale Werte von x ausdehnen, indem wir fordern, $y = a^x$ sei eine stetige Funktion der Variabeln x.

Nehmen wir an, die Funktion $f(x)$ sei in jedem Punkt des Intervalls (a, b) mit Ausnahme des Punktes x_0 stetig, in diesem Punkt aber trete eine Unterbrechung der Stetigkeit ein, und nehmen wir weiter an, es existieren Grenzwerte $f(x_0 + 0)$ und $f(x_0 - 0)$ (siehe den vorigen Paragraphen) und es sei $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$. Unter dieser Voraussetzung bezeichnet man die im Punkt x_0 stattfindende Unstetigkeit als „hebbar", weil sie dadurch, daß man den Funktionswert in einem einzelnen Punkt abändert, gehoben werden kann.

Da die hebbaren Unstetigkeiten keinerlei Interesse bieten, schließt man sie aus und setzt fest, daß die betrachteten Funktionen von hebbaren Unstetigkeiten frei sein sollen.

Eine analoge Bestimmung betrifft den Fall, daß die Definition der Funktion in einem Punkt x_0 versagt. Vorausgesetzt, daß die Grenzwerte $f(x_0 - 0)$ und $f(x_0 + 0)$ existieren und einander gleich sind, setzt man

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Man ergänzt also die Definition der Funktion, wenn dies möglich ist, so daß keine Unterbrechung der Stetigkeit eintritt.

Auf dieser Bestimmung beruhen die bekannten Regeln für die Berechnung der sogenannten „$\frac{0}{0}$-Werte“.

Wenn zwar die Grenzwerte $f(x_0 - 0)$ und $f(x_0 + 0)$ existieren, ihre Differenz aber nicht verschwindet, so bezeichnet man diese Differenz als „Sprung“ der Funktion, den Punkt x_0 als „Sprungstelle“.

Eine Funktion, die im Intervall (a, b) von einer endlichen Anzahl von Sprungstellen abgesehen, überall stetig ist, bezeichnet man als „abteilungsweise stetig“ im Intervall (a, b).

§ 5. Sätze über stetige Funktionen. Monotone Funktionen. Für stetige Funktionen gelten die beiden folgenden Sätze:

I. Eine in dem Intervall (a, b) stetige Funktion $f(x)$ nimmt jeden zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegenden Wert γ wenigstens in einem Punkt des Intervalls an.

II. Eine in dem Intervall (a, b) stetige Funktion $f(x)$ erreicht die obere und die untere Grenze der Funktionswerte. Sie besitzt also in dem Intervall mindestens ein Maximum und ein Minimum.

Beim Beweis des ersten Satzes wollen wir, um eine bestimmte Annahme zu machen, voraussetzen, es sei $f(a) < f(b)$.

Wir teilen das Intervall (a, b) in n gleiche Teile und bezeichnen mit a_1 den letzten unter den Teilpunkten

$$a + \frac{\nu(b-a)}{n}, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots n),$$

dem ein Funktionswert $< \gamma$ entspricht; der folgende Teilpunkt werde mit b_1 bezeichnet. Das Intervall (a_1, b_1) zerlegen wir abermals in n gleiche Teile und bezeichnen den letzten Teilpunkt, dem ein Funktionswert $< \gamma$ entspricht, mit a_2, den folgenden mit b_2. In dieser Weise fortfahrend, erhalten wir zwei Zahlreihen

$$(a)\quad a\; a_1\; a_2\; \ldots \quad \text{und} \quad (b)\quad b\; b_1\; b_2\; \ldots$$

die folgenden Bedingungen genügen:

1. ist $a \leqq a_1 \leqq a_2 \ldots$ und
$b \geqq b_1 \geqq b_2 \ldots$

2. ist $b_\nu - a_\nu = \dfrac{b_{\nu-1} - a_{\nu-1}}{n} = \dfrac{b-a}{n^\nu}$,

3. ist $f(a_\nu) < \gamma < f(b_\nu)$ für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

Aus den beiden ersten Bedingungen folgt, daß die beiden Zahlreihen (a) und (b) Fundamentalreihen sind und daß sie dieselbe Zahl c bestimmen. Wegen der Stetigkeit der Funktion $f(x)$ sind auch die beiden Zahlreihen

$$f(a)\; f(a_1)\; f(a_2)\; \ldots \quad \text{und} \quad f(b)\; f(b_1)\; f(b_2)\; \ldots$$

Fundamentalreihen (siehe den vorigen Paragraphen) und sie bestimmen den Funktionswert $f(c)$. Wegen (3) ist aber $f(c) = \gamma$.

Der Beweis des zweiten Satzes läßt sich in ganz analoger Weise führen.

Bezeichnen wir mit m die obere Grenze der Werte, die die Funktion $f(x)$ im Intervall (a, b) annimmt. Das Intervall (a, b) zerlegen wir wieder in n gleiche Teile. Wenigstens für eines der Teilintervalle muß die obere Grenze der Funktionswerte ebenfalls $= m$ sein. Es sei (a_1, b_1) ein derartiges Teilintervall. Dieses Teilintervall zerlegen wir abermals in n gleiche Teile und gelangen so zu einem Teilintervall (a_2, b_2), für das die obere Grenze der Funktionswerte ebenfalls $= m$ ist.

In dieser Weise fortfahrend, erhalten wir wieder zwei Fundamentalreihen

$$(a)\quad a\; a_1\; a_2\; \ldots \quad \text{und} \quad (b)\quad b\; b_1\; b_2\; \ldots$$

denen dieselbe Zahl c entspricht. Die obere Grenze der Werte, die die Funktion im Intervall (a_ν, b_ν) annimmt, ist m. Daher ist $f(c) = m$.

Infolge des Satzes I. nimmt die Funktion $f(x)$ einen zwischen $f(a)$ und $f(b)$ liegenden Wert γ wenigstens in einem Punkt des Intervalls (a, b) an; es bleibt aber die Möglichkeit offen, daß sie diesen Wert γ in unendlich vielen Punkten des Intervalls annimmt.

Um dies durch ein Beispiel zu belegen, setzen wir

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x}.$$

Die Funktion $f(x)$ ist stetig; sie nimmt den Wert 0 in jedem noch so kleinen Intervall, das den Punkt $x = 0$ einschließt, in unendlich vielen Punkten an.

Eine derartige Funktion besitzt offenbar in einem endlichen Intervall unendlich viele Maxima und Minima.

Man bezeichnet eine Funktion, die entweder nie abnimmt oder nie zunimmt, wenn der Punkt x das Intervall (a, b) durchläuft, als monoton in diesem Intervall. Läßt sich das Intervall (a, b) in eine endliche Anzahl von Teilintervallen zerlegen, in denen die Funktion $f(x)$ monoton ist, so bezeichnet man die Funktion $f(x)$ als abteilungsweise monoton im Intervall (a, b).

§ 6. Differentiation. Der Quotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ hat bei gegebenem Wert von x für jeden von Null verschiedenen Wert von h einen bestimmten endlichen Wert. Sofern dieser Quotient gegen einen bestimmten endlichen Grenzwert konvergiert, wenn h von positiven Werten her gegen Null konvergiert, so nennt man diesen Grenzwert den „rechtsseitigen Differentialquotienten" der Funktion $f(x)$ im Punkt x. Dementsprechend bezeichnet man als „linksseitigen Differentialquotienten" den Grenzwert, gegen den der Quotient konvergiert, wenn h von negativen Werten her gegen Null konvergiert, vorausgesetzt daß ein solcher Grenzwert existiert.

Die Existenz der beiden Grenzwerte hat offenbar die Stetigkeit der Funktion im Punkt x zur Folge.

Haben die beiden Grenzwerte denselben Wert, so nennt man diesen Wert schlechthin „den Differentialquotienten" oder die „Derivierte" im Punkt x und bezeichnet ihn mit

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ oder } f'(x).$$

Damit die Funktion $f(x)$ im Punkt x einen Differentialquotienten $f'(x)$ besitzt, ist demnach erforderlich und hinreichend:

Nach Annahme einer beliebig zu wählenden positiven Größe ε muß sich eine positive Größe ϱ derart bestimmen lassen, daß

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| \leqq \varepsilon$$

ist für alle Werte von h, die der Bedingung $|h| \leqq \varrho$ genügen.

Wenn die Funktion $f(x)$ in jedem Punkt eines gegebenen Intervalls (a, b) einen Differentialquotienten besitzt, so muß für jeden Punkt des Intervalls eine Ungleichung von der Form der vorstehenden gelten, es wird sich aber bei gegebenem Wert von ε der Wert von ϱ mit x ändern, ϱ ist also Funktion der Variabeln x. Die untere Grenze ϱ_0 der Funktionswerte ϱ kann nicht negativ, wohl aber gleich Null sein. Wenn diese untere Grenze ϱ_0 eine positive Zahl ist, wie auch immer die Größe ε gewählt werden mag, so sagt man der Quotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ konvergiert „gleichmäßig" gegen den Differentialquotienten $f'(x)$.

Unter dieser Voraussetzung ist der Differentialquotient $f'(x)$ eine stetige Funktion der Variabeln x.

Beschränken wir nämlich die Größe h auf Werte, die dem absoluten Betrag nach nicht größer als $\frac{1}{2}\varrho_0$ sind, so können wir die Gleichungen ansetzen:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \delta_1,$$

$$\frac{f(x+2h) - f(x+h)}{h} = f'(x+h) + \delta_2,$$

$$\frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} = f'(x) + \delta_3,$$

und hier bedeuten $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3$ Größen, deren absoluter Betrag $\leqq \varepsilon$ ist.

Indem wir die beiden ersten Gleichungen addieren und dann die mit 2 multiplizierte dritte Gleichung subtrahieren, erhalten wir

$$f'(x+h) - f'(x) = 2\delta_3 - \delta_1 - \delta_2.$$

Der absolute Betrag der rechts stehenden Größe ist nicht größer als die beliebig zu wählende Größe 4ε; damit ist die Stetigkeit der Funktion $f'(x)$ bewiesen.

Umgekehrt folgt aus der Stetigkeit der Derivierten $f'(x)$, wie unten gezeigt wird, daß der Grenzwert ϱ_0 von Null verschieden ist.

Vorausgesetzt daß die Funktion $f(x)$ in jedem Punkt des Intervalls (a, b) eine Derivierte besitzt und daß diese Derivierte in dem Intervall stetig ist, bezeichnet man die Funktion $f(x)$ als „differenzierbar im Intervall (a, b)". Wenn in einer endlichen Anzahl von Punkten des Intervalls keine Derivierte existiert oder eine Unterbrechung der Stetigkeit der Derivierten eintritt, so nennt man die Funktion „abteilungsweise differenzierbar"*).

Wenn der Differentialquotient $f'(x_0)$ einen von Null verschiedenen Wert besitzt, so hat der Quotient $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ für hinreichend kleine Werte von h dasselbe Vorzeichen wie der Differentialquotient $f'(x_0)$; die Funktion $f(x)$ nimmt demnach zu oder ab, wenn die Variable x das Intervall $(x_0 - h, x_0 + h)$ durchläuft, je nachdem $f'(x_0)$ positiv oder negativ ist. Im Innern des Intervalls (a, b) kann daher ein Maximum oder Minimum der Funktion nur in den Punkten eintreten, in denen die Derivierte verschwindet. Zwischen zwei Punkten, in denen eine stetige Funktion verschwindet, liegt notwendig wenigstens ein Maximum oder Minimum der Funktion — abgesehen von dem Fall, daß die Funktion den konstanten Wert Null besitzt — daher liegt zwischen zwei Nullpunkten der Funktion wenigstens ein Nullpunkt der Derivierten.

Da die Funktion

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

für $x = a$ und $x = b$ verschwindet, gibt es mindestens einen Punkt im Innern des Intervalls (a, b), in dem die Derivierte

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

*) Man faßt den Begriff des Differentialquotienten und den Begriff der differenzierbaren Funktion häufig etwas weiter: man sagt auch dann, wenn der Quotient $\frac{h}{f(x + h) - f(x)}$ mit h gegen Null konvergiert, die Funktion besitze im Punkt x einen (unendlichen) Differentialquotienten und man bezeichnet eine Funktion auch dann als differenzierbar im Intervall (a, b), wenn sie in jedem Punkt des Intervalls einen Differentialquotienten in diesem weiteren Sinn besitzt, fordert hierfür also nicht die Stetigkeit der Derivierten.

verschwindet. Wir können daher die Gleichung ansetzen

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(a + \vartheta (b - a)),$$

wo ϑ eine nicht näher bestimmte positive Größe < 1 bedeutet.

Aus dieser Gleichung geht hervor, daß $f(x)$ einen konstanten Wert besitzt, wenn die Derivierte in jedem Punkt des Intervalls (a, b) verschwindet. Ersetzen wir in der vorstehenden Gleichung die Werte a und b durch die Werte x und $x + h$ und subtrahieren auf beiden Seiten $f'(x)$, so ergibt sich

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} - f'(x) = f'(x + \vartheta h) - f'(x).$$

Unter der Voraussetzung, daß die Funktion $f'(x)$ im Intervall (a, b) stetig ist, können wir den absoluten Wert von h so klein wählen, daß für jeden Punkt des Intervalls der absolute Betrag der rechten Seite der vorstehenden Gleichung kleiner als eine gegebene Größe ε ist.

Daraus folgt:

Wenn die Derivierte $f'(x)$ im Intervall (a, b) stetig ist, so konvergiert der Quotient $\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$ gleichmäßig gegen $f'(x)$.

Nachdem der Begriff der ersten Derivierten festgestellt ist, bietet die Definition der höheren Derivierten keine Schwierigkeit.

Es muß ausdrücklich hervorgehoben werden, daß aus der Stetigkeit einer Funktion noch nicht die Existenz einer Derivierten folgt. Auch wenn wir die Funktion nicht nur als stetig, sondern auch als monoton (s. § 4) voraussetzen, bleibt die Möglichkeit offen, daß die Funktion in keinem Punkt einen Differentialquotienten besitzt. Dementsprechend kann aus der Existenz einer ersten Derivierten auch nicht auf die Existenz von Derivierten höherer Ordnung geschlossen werden.

Auch der Begriff der differenzierbaren Funktion ist noch weiter als der Funktionsbegriff, wie man ihn in der analytischen Geometrie vorauszusetzen pflegt.

Von einer Kurve im gewöhnlichen Sinne des Wortes setzt man voraus: erstens daß sie von einzelnen Punkten (Ecken und Spitzen) abgesehen, in jedem Punkte eine bestimmte Tangente besitzt, und zweitens daß sie in eine endliche Anzahl von Bogen zerlegt werden kann, die von einer Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten werden*).

Auf der letzteren Voraussetzung beruht die Möglichkeit, eine konvexe und eine konkave Seite der Kurve zu unterscheiden.

Die kartesischen Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kurve lassen sich in mannigfaltiger Weise als eindeutig definierte Funktionen eines Parameters t darstellen: man kann beispielsweise für t die von einem festen Punkt an gezählte Bogenlänge wählen.

Diese Funktionen mögen mit $x = \varphi(t)$ und $y = \psi(t)$ bezeichnet werden.

Die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ müssen offenbar stetig sein und aus der ersten Voraussetzung folgt weiter, daß sie wenigstens abteilungsweise differenzierbar sind. Aus der zweiten Voraussetzung folgt, daß der Quotient $\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{dy}{dx}$ wenigstens abteilungsweise monoton ist.

Diese Bedingungen sind auch hinreichend: sind sie erfüllt, so stellen die Gleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ eine Kurve im gewöhnlichen Sinn des Wortes oder doch einen Kurvenzug dar, der aus Bogen derartiger Kurven zusammengesetzt ist.

Wenn im folgenden von einer Kurve schlechthin gesprochen wird, so wird immer vorausgesetzt, daß sich die Koordinaten eines Kurvenpunktes in der angegebenen Weise als Funktionen eines Parameters darstellen lassen.

§ 7. Integration. Die der Differentiation entgegengesetzte Operation wird als Integration bezeichnet. Ist $\frac{dF(x)}{dx} = F'(x) = f(x)$ so setzt man

$$F(x) = \int f(x)dx$$

und nennt $F(x)$ das unbestimmte Integral der Funktion $f(x)$.

Aus dieser Definition ist nicht zu ersehen, unter welchen Bedingungen einer gegebenen Funktion $f(x)$ eine Integral-

*) Wir schließen den Fall aus, daß sich die Kurve ins Unendliche erstreckt. Wenn dieser Fall eintritt, so gelten diese Voraussetzungen für jedes endliche Stück der Kurve.

funktion $F(x)$ entspricht. Zu dem Zweck ist es notwendig einen anderen Weg einzuschlagen.

Wir nehmen an, für das Intervall (a, b) der unabhängigen Variabeln x sei eine Funktion $f(x)$ definiert, von der wir zunächst nur voraussetzen, daß ihre Werte zwischen endlichen Grenzen liegen. Die Schwankung der Funktion im Intervall (a, b) bezeichnen wir mit M.

Das Intervall (a, b) zerlegen wir in Teilintervalle, wobei wir festsetzen wollen, daß keines derselben größer als eine gegebene Größe δ sei; im übrigen kann die Anzahl der Teilpunkte und die Lage eines jeden beliebig gewählt werden. Die Teilpunkte bezeichnen wir der Reihe nach mit

$$x_0\; x_1\; x_2\; \ldots\; x_n,$$

wobei der Gleichförmigkeit der Bezeichnung wegen $a = x_0$ und $b = x_n$ gesetzt ist. In jedem Teilintervall $x_\nu\; x_{\nu+1}$ nehmen wir einen Punkt ξ_ν an, der auch mit einem der Endpunkte des Teilintervalls zusammenfallen darf. Wir bilden nun die Summe

$$S = \sum_{\nu=0}^{n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu) f(\xi_\nu).$$

Um zu übersehen, inwieweit die Summe S von der Anzahl und der Lage der Punkte x_ν und ξ_ν abhängt, schieben wir zwischen je zwei Teilpunkte x_ν, $x_{\nu+1}$ eine beliebige Anzahl neuer Teilpunkte $x_{\nu 1}, x_{\nu 2} \ldots x_{\nu p_\nu - 1}$ ein, wählen in jedem der neuen Teilintervalle $x_{\nu\mu}$, $x_{\nu\mu+1}$ nach Belieben einen Punkt $\xi_{\nu\mu}$ aus und bilden dann die dieser zweiten Intervalleinteilung entsprechende Summe

$$T = \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{p_\nu - 1} (x_{\nu\mu+1} - x_{\nu\mu}) f(\xi_{\nu\mu})$$

wo wieder der Gleichförmigkeit wegen $x_\nu = x_{\nu 0}$ und $x_{\nu+1} = x_{\nu p_\nu}$ gesetzt ist.

An Stelle des einen Gliedes der Summe S

$$(x_{\nu+1} - x_\nu) f(\xi_\nu)$$

tritt nun die Summe

$$\sum_{\mu=0}^{p_\nu - 1} (x_{\nu\mu+1} - x_{\nu\mu}) f(\xi_{\nu\mu}).$$

Der absolute Betrag der Differenz

$$\sum_{\mu=0}^{p_\nu-1} (x_{\nu\,\mu+1} - x_{\nu\mu}) f(\xi_{\nu\mu}) - (x_{\nu+1} - x_\nu) f(\xi_\nu)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{p_\nu-1} (x_{\nu\mu+1} - x_{\nu\mu}) (f(\xi_{\nu\mu}) - f(\xi_\nu))$$

ist jedenfalls nicht größer als das Produkt aus der Intervalllänge $x_{\nu+1} - x_\nu$ und der Schwankung D_ν der Funktion in diesem Intervall.

Der absolute Betrag der Differenz $S - T$ ist demnach nicht größer als die Summe

$$\varDelta = (x_1 - a) D_0 + (x_2 - x_1) D_1 \cdots + (b - x_{n-1}) D_{n-1}.$$

Wir teilen nun die Intervalle $x_\nu, x_{\nu+1}$ in zwei Gruppen: in die erste Gruppe nehmen wir diejenigen Intervalle auf, in denen die Schwankung D_ν kleiner als eine gegebene Größe ε ist, in die zweite Gruppe die übrigen.

Der Beitrag zur Summe $\varDelta$, der von den Intervallen der ersten Gruppe herrührt, ist kleiner als $(b-a)\varepsilon$. Der Beitrag der zweiten Gruppe von Intervallen ist nicht größer als das Produkt aus der Gesamtlänge l dieser Intervalle und der Schwankung M der Funktion im Intervall (a, b). Die Länge l hängt einmal von der Größe δ — der oberen Grenze der Länge der Teilintervalle — und weiter von der Anzahl und Lage der Teilpunkte x_ν ab. Die Gesamtheit der Größen l, die wir erhalten, wenn wir δ festhalten aber Anzahl und Größe der Teilintervalle ändern, besitzt eine obere Grenze λ; diese Größe λ hängt nun mehr nur von δ ab.

Für den absoluten Wert der Differenz $S - T$ erhalten wir sonach die Ungleichung

$$S - T < (b - a)\varepsilon + \lambda M.$$

Wir gehen nun von der zweiten Teilung, der die Summe T entspricht, zu einer dritten Teilung über, indem wir von den Teilpunkten der zweiten Teilung eine beliebige Anzahl weglassen. Dabei wollen wir uns jedoch so einrichten, daß keines der neuen Teilintervalle größer als δ ausfällt.

Unter dieser Voraussetzung gilt auch für die Summe S', die der dritten Teilung entspricht, die Ungleichung

$$|S' - T| < (b-a)\varepsilon + \lambda M$$

und folglich ist

$$|S' - S| < 2(b-a)\varepsilon + 2\lambda M.$$

Da wir die zweite Teilung nach Belieben einrichten können, so ist die letzte Ungleichung nur an die Bedingung gebunden, daß bei den Teilungen, denen die Summen S und S' entsprechen, kein Teilintervall größer als δ ausfällt.

Das erste Glied auf der rechten Seite der vorstehenden Ungleichung können wir beliebig klein machen, indem wir die verfügbare Größe ε hinreichend klein annehmen; konvergiert nun auch die Größe λ — die Gesamtlänge der Teilintervalle, in denen die Schwankung der Funktion größer als ε ist — mit abnehmendem δ gegen Null, so konvergiert auch die Differenz $S' - S$ gegen Null; in diesem Fall konvergiert die Summe S mit abnehmendem δ gegen einen Grenzwert, der von der Anzahl und der Lage der Punkte x_ν und ξ_ν unabhängig ist. Diesen Grenzwert nennt man „bestimmtes Integral" und bezeichnet ihn mit

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Die Bedingung, daß die Größe λ mit δ gegen Null konvergiert, ist jedenfalls erfüllt, wenn die Funktion $f(x)$ im Intervall (a, b) stetig ist, denn unter dieser Voraussetzung kann man δ so klein wählen, daß die Schwankung in jedem Teilintervall, das kleiner als δ ist, kleiner als ε ausfällt. Die Bedingung ist auch erfüllt, wenn die Funktion $f(x)$ abteilungsweise stetig ist (s. § 4), denn in diesem Fall ist λ das Produkt aus der Anzahl der Sprungstellen und der Größe δ.

Die Bedingung kann sogar in dem Fall erfüllt sein, daß die Funktion Unstetigkeitspunkte besitzt, die eine überall dichte Menge bilden.

Von den Sätzen, die sich unmittelbar aus der Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe ergeben, heben wir nur die beiden folgenden hervor:

(1) Der absolute Betrag des Integrals $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ ist nicht größer als das Integral $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

(2) Nehmen wir an, die Funktion $\varphi(x)$ nehme im Intervall (a, b) nirgends einen negativen Wert an und die Werte der Funktion $\psi(x)$ liegen zwischen den Grenzen A und B. Unter dieser Voraussetzung ist

$$A\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \leqq \int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx < B\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Setzen wir voraus — was für die Gültigkeit des Satzes nicht erforderlich ist — die Funktion $\psi(x)$ sei stetig, so nimmt sie jeden zwischen A und B liegenden Wert wenigstens in einem Punkt des Integrationsintervalls an (§ 4) und wir können daher die vorstehende Ungleichung durch die Gleichung

$$(3) \qquad \int\limits_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \psi(a+\vartheta(b-a))\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx$$

ersetzen, wo ϑ eine nicht näher bestimmte positive Größe < 1 bedeutet.

Setzen wir insbesondere $\varphi(x) = 1$, so erhalten wir die Gleichung

$$(4) \qquad \int\limits_a^b \psi(x)\,dx = (b-a)\psi(a+\vartheta(b-a)) \qquad 0 < \vartheta < 1$$

die für eine beliebige stetige Funktion gilt.

Betrachten wir die obere Grenze des bestimmten Integrals als variabel, so wird das Integral eine Funktion dieser Variabeln. Wir setzen

$$F(x) = \int\limits_a^x f(x)\,dx.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$F(x+h) - F(x) = \int\limits_x^{x+h} f(x)\,dx.$$

Der absolute Betrag des Integrals auf der rechten Seite ist jedenfalls nicht größer als das Produkt aus h in den größten absoluten Betrag, den $f(x)$ im Intervall $(x, x+h)$ erreicht. Daraus ist zu schließen: die Funktion $F(x)$ ist stetig.

Nehmen wir an, die Funktion $f(x)$ sei stetig, so ist wegen (4)

$$F(x+h) - F(x) = hf(x+\vartheta h) \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

Hieraus folgt: der Quotient $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ konvergiert gegen $f(x)$, wenn h von positiven oder von negativen Werten her gegen Null konvergiert.

Die Funktion $F(x)$ besitzt somit einen Differentialquotienten

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Damit ist der Zusammenhang zwischen der Definition des bestimmten Integrals und der des unbestimmten hergestellt. Zugleich ist bewiesen: aus der Beziehung $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ folgt, daß $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ist.

Bei der Definition des bestimmten Integrals haben wir vorausgesetzt, daß die Integrationsgrenzen und die Werte der Funktion unter dem Integralzeichen endlich sind. In beiden Beziehungen läßt sich der Begriff des Integrals erweitern.

Wenn das Integral $\int\limits_a^x f(x)dx$ bei wachsendem x gegen einen Grenzwert konvergiert (s. § 3), so bezeichnet man auch diesen Grenzwert als Integral und setzt

$$\text{(5)} \qquad \lim_{x=\infty} \int\limits_a^x f(x)dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx.$$

Für die Existenz des Grenzwertes ist auf Grund von (1) die folgende Bedingung ausreichend (aber nicht notwendig):

es läßt sich ein Exponent $k > 1$ der Art bestimmen, daß das Produkt $x^k f(x)$ bei wachsendem x zwischen endlichen Grenzen bleibt.

Nehmen wir nun an, die Funktion $f(x)$ besitze in jedem Punkt im Innern des Intervalls (a, b) einen endlichen Wert, sie wachse aber über alle Grenzen, wenn der Punkt x sich dem Punkt b nähert.

Vorausgesetzt daß das Integral $\int_a^x f(x)dx$ gegen einen Grenzwert konvergiert, wenn x gegen b konvergiert, so bezeichnet man auch diesen Grenzwert als Integral und setzt

$$(6) \qquad \lim_{x=b} \int_a^x f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Entsprechend setzt man, wenn $f(x)$ an der unteren Grenze unendlich wird

$$\lim_{x=a} \int_x^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

vorausgesetzt, daß der links stehende Grenzwert existiert.

Wird die Funktion in einem Punkt c im Innern des Intervalls (a, b) unendlich, so setzt man

$$\lim_{x=c-0} \int_a^x f(x)dx + \lim_{x=c+0} \int_x^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

vorausgesetzt, daß die links stehenden Grenzwerte existieren.

Diese Grenzwerte existieren sicher, wenn man einen Exponenten $k < 1$ der Art bestimmen kann, daß das Produkt $(x-c)^k f(x)$ für $x = c$ endlich bleibt.

§ 8. Zahlenmengen im zweidimensionalen Gebiet.

In § 2 haben wir Zahlenmengen betrachtet, deren Elemente einzelne Zahlen waren; wir gehen nun zu Zahlenmengen über, deren Elemente Zahlenpaare x, y sind. Ebenso wie wir eine jede Zahl durch einen Punkt auf einer festen Geraden repräsentiert haben, so können wir ein jedes Zahlenpaar durch einen Punkt in einer festen Ebene, der „Zahlenebene“ repräsentieren. Zu dem Zweck betrachten wir x als Abszisse, y als Ordinate in einem rechtwinkligen Koordinatensystem. Dabei wollen wir ein für allemal festsetzen, die Richtungen der wachsenden Koordinaten seien so gewählt, daß man in der Richtung der wachsenden Abszissen fortschreitend die Richtung der wachsenden Ordinaten zur Linken hat. Die Richtung der wachsenden x liegt also zur Richtung der wachsenden y wie der Ostpunkt zum Nordpunkt.

Diese geometrische Repräsentation liefert uns ein anschauliches Bild und eine bequeme Bezeichnungsweise, sie enthebt uns aber nicht der Notwendigkeit die Grundbegriffe, die wir einführen, arithmetisch zu definieren.

Unter der Umgebung eines Punktes $(x_0\, y_0)$ verstehen wir die Gesamtheit der Punkte, die im Innern oder auf der Peripherie eines kleinen Kreises um den Punkt $(x_0\, y_0)$ liegen. Der Radius dieses Kreises darf beliebig klein gewählt werden, muß aber eine angebbare Größe besitzen.

Ein Punkt, der einer bestimmten Punktmenge angehört, heißt isoliert, wenn in einer hinreichend klein gewählten Umgebung desselben kein weiterer Punkt der Menge liegt.

Eine Punktmenge, die nur aus isolierten Punkten besteht, heißt diskret.

Eine Punktmenge wird als „im Endlichen liegend“ oder als „endlich“ bezeichnet, wenn die Entfernung aller Punkte der Menge von einem gegebenen Punkt der Ebene unter einer angebbaren Größe bleibt.

Ein Punkt, in dessen Umgebung unendlich viele Punkte einer gegebenen Punktmenge (M) liegen, wird als Häufungsstelle der Punktmenge bezeichnet.

Die Häufungsstelle braucht nicht notwendig zur Punktmenge (M) zu gehören (vergl. § 2).

Eine im Endlichen liegende Punktmenge (M), die unendlich viele Punkte umfaßt, besitzt notwendig mindestens eine Häufungsstelle.

Zum Beweis nehmen wir an, jeder Punkt (xy) der Menge (M) genüge der Bedingung $|x| < a, \quad |y| < a$.

Wir teilen nun das Quadrat Q, dessen Eckpunkte die Koordinaten $x = \pm a \quad y = \pm a$ besitzen, durch Parallele zu den Koordinatenachsen in n^2 Quadrate mit der Seitenlänge $a : n$. Unter diesen kleineren Quadraten muß es mindestens eines Q_1 geben, das im Innern oder auf der Begrenzung ebenfalls unendlich viele Punkte der Menge (M) enthält. Das Quadrat Q_1 teilen wir wieder in n^2 Quadrate mit der Seitenlänge $a : n^2$; unter diesen gibt es wieder mindestens eines Q_2, dem ebenfalls unendlich viele Punkte der Menge (M) angehören.

In dieser Weise fortfahrend erhalten wir eine unbegrenzte Reihe von Quadraten, von denen jedes ganz dem vorhergehenden angehört. Bezeichnen wir mit $x_1\, y_1,\, x_2\, y_2,\, x_3\, y_3 \dots$ die Koordinaten der Mittelpunkte der aufeinanderfolgenden Quadrate $Q_1\; Q_2\; Q_3 \dots$ Es ist klar, daß jede der beiden Reihen

$$x_1\; x_2\; x_3 \dots \quad \text{und} \quad y_1\; y_2\; y_3 \dots$$

eine Fundamentalreihe ist. Die beiden Reihen bestimmen somit ein Zahlenpaar $\xi\eta$: der entsprechende Punkt ist Häufungsstelle der Punktmenge (M).

Enthält eine Punktmenge unendlich viele Punkte, deren Abstände von einem gegebenen Punkt der Ebene größer als jede gegebene Größe sind, so sagt man: die Punktmenge besitzt eine Häufungsstelle im Unendlichen.

Jede Punktmenge, die unendlich viele Punkte umfaßt, besitzt mindestens eine Häufungsstelle im Endlichen oder Unendlichen: sie kann selbstverständlich auch unendlich viele Häufungsstellen haben (vergl. § 2).

Wenn jeder Punkt einer bestimmten Kurve Häufungsstelle der Punktmenge (M) ist, so sagen wir: die Punktmenge ist längs der Kurve dicht.

Eine Punktmenge, die nicht alle Punkte der Ebene umfaßt, heißt „begrenzt".

Zu jeder begrenzten Punktmenge (M) gibt es demnach eine komplementäre Punktmenge (M'), die alle Punkte der Ebene umfaßt, die nicht der Punktmenge (M) angehören.

Die Punktmenge (M') kann eine diskrete Menge sein und kann auch nur aus einer endlichen Anzahl von Punkten bestehen.

Ein Punkt wird als „Begrenzungspunkt" der Menge (M) und der Menge (M') bezeichnet, wenn in jeder noch so kleinen Umgebung des Punktes sowohl Punkte der Menge (M) als auch Punkte der Menge (M') liegen.

Welcher der beiden Mengen (M) und (M') die Begrenzungspunkte zugezählt werden sollen, bleibt bei dieser Definition dahingestellt.

Ein Punkt der Menge (M) wird als „innerer Punkt" bezeichnet, wenn sich die Umgebung des Punktes so bestimmen läßt, daß sie nur Punkte der Menge (M) enthält.

Ein innerer Punkt der Menge (M') ist für die Menge (M) ein äußerer Punkt und vice versa.

Es muß — weil die geometrische Anschauung zu einer anderen Ansicht verleiten kann — ausdrücklich bemerkt werden, daß es Punktmengen gibt, bei denen weder von inneren noch von äußeren Punkten die Rede sein kann.

Als Beispiel kann die Punktmenge dienen, die alle Punkte mit rationalen Koordinaten umfaßt.

Es erübrigt die Punktmengen zu definieren, denen die wesentlichen Eigenschaften einer Fläche zukommen.

Eine Fläche besitzt jedenfalls innere Punkte und sofern wir — was ja freisteht — die Punkte der Berandung nicht zu den Punkten der Fläche rechnen, besitzt sie nur innere Punkte. Damit die Fläche aus einem zusammenhängenden Stück besteht, ist erforderlich und hinreichend, daß zwei Punkte der Fläche durch eine Kurve verbunden werden können, die nicht aus der Fläche heraustritt.*)

Mit Punktmengen, die diese beiden charakteristischen Eigenschaften besitzen, hat man es in der Funktionentheorie fortwährend zu tun.

Der Begriff einer derartigen Punktmenge ist aber noch erheblich weiter als der elementare Begriff der Fläche. Wir stellen deshalb die folgenden Definitionen auf:

Eine Punktmenge wird als „kontinuierlicher Bereich“ oder als „Kontinuum“ bezeichnet, wenn sie nur innere Punkte enthält, und wenn je zwei ihrer Punkte durch eine Kurve verbunden werden können, deren Punkte sämtlich der Menge angehören.

Wir bezeichnen das Kontinuum insbesondere als Fläche, wenn seine Begrenzungspunkte mit den Punkten einer Kurve oder einer endlichen Anzahl von Kurven zusammenfallen (vergl. § 6 Schluß).

*) Wenn man die Punkte der Randkurve zur Fläche rechnet, so ist die Bedingung nicht hinreichend: es genügen ihr dann auch Flächenstücke, die nur in einzelnen Punkten zusammenhängen (z. B. zwei Quadrate, die einen Eckpunkt gemein haben).

Diese Kurven werden als Randkurven bezeichnet.

Die Bezeichnung „Randkurven" darf nicht dahin verstanden werden, daß diese Kurven geschlossen sind: ein beliebiger Kurvenbogen kann ebenfalls Randkurve sein.

Soll zum Ausdruck gebracht werden, daß ein Punkt (xy) mit jedem Punkt eines gegebenen kontinuierlichen Bereichs (A) zusammenfallen kann, so bezeichnen wir seine Koordinaten als stetig variabel im Bereich (A).

Das umfassendste Kontinuum besteht aus der Gesamtheit der Punkte der Ebene. Wenn ein Punkt mit jedem Punkt der Ebene zusammenfallen kann, so bezeichnen wir seine Koordinaten als unbeschränkt variabel.

Die Tragweite der eben aufgestellten Definitionen wollen wir durch zwei Beispiele erläutern.

Die Punktmenge (M') bestehe aus allen den Punkten, deren Koordinaten sich in der Form

$$x = \frac{m}{m^2 + n^2}, \quad y = -\frac{n}{m^2 + n^2}$$

darstellen lassen. Hier bedeuten m und n beliebige ganze Zahlen, von denen wenigstens die eine nicht gleich Null ist. Die komplementäre Punktmenge (M) umfaßt alle übrigen Punkte der Ebene.

Die Punktmenge (M') besitzt eine Häufungsstelle, nämlich den Punkt $(0, 0)$; diese Häufungsstelle gehört aber nicht zur Menge (M') sondern zur Menge (M). Sie ist für die Menge (M) ein Begrenzungspunkt, weil jede noch so kleine Umgebung des Punktes $(0, 0)$ Punkte der Menge (M') enthält. Die Begrenzung der Menge (M) besteht somit aus den Punkten der Menge (M') und dem Punkt $(0, 0)$.

Die Punktmenge (N), die wir erhalten, wenn wir aus der Menge (M) den Punkt $(0, 0)$ ausscheiden, enthält nur mehr innere Punkte, und es ist einleuchtend, daß wir zwei beliebige Punkte von (N) durch eine Kurve verbinden können, die nur Punkte von (N) enthält. Die Menge (N) ist daher ein Kontinuum.

Dieses Kontinuum ist aber keine Fläche, denn seine Begrenzung besteht nicht aus einer endlichen Anzahl von Randkurven, sondern aus einer unendlichen Anzahl isolierter Punkte.

Legen wir um jeden Begrenzungspunkt der Menge (N) einen Kreis vom Radius ϱ. Die Gesamtheit der Punkte der Ebene, die weder im Innern noch auf der Peripherie eines dieser Kreise liegen, bezeichnen wir mit (F_ϱ).

Außerhalb des um den Punkt $(0, 0)$ gelegten Kreises liegt nur eine endliche Anzahl von Begrenzungspunkten der Menge (N), daher wird die Begrenzung der Punktmenge (F_ϱ) durch eine endliche Anzahl von Randkurven gebildet, diese Punktmenge ist daher als Fläche zu bezeichnen.

Man kann ϱ so klein wählen, daß ein beliebiger gegebener Punkt der Menge (N) auch der Fläche (F_ϱ) angehört. Daher kann man das Kontinuum (N) als die Grenze betrachten, der sich die Fläche (F_ϱ) bei abnehmendem ϱ ohne Ende nähert.

Um noch ein zweites Beispiel zu betrachten nehmen wir an, die Menge (M') bestehe aus den Punkten, deren Koordinaten sich in der Form $x = \cos(\pi : n)$ $y = \sin(\pi : n)$ darstellen lassen, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet. Die komplementäre Menge (M) umfasse alle übrigen Punkte der Ebene.

Jeder Punkt auf der Peripherie des Kreises vom Radius 1 um den Punkt $(0, 0)$ gehört entweder der Menge (M') an oder er ist Häufungsstelle dieser Menge; daher ist jeder dieser Punkte Begrenzungspunkt der Menge (M). Alle die Punkte, die innerhalb oder außerhalb des Kreises liegen, sind innere Punkte der Menge (M).

Diese inneren Punkte bilden zwei getrennte kontinuierliche Bereiche; der eine umfaßt die Punkte im Innern des Kreises, der andere die Punkte außerhalb.

Jeder dieser Bereiche ist eine Fläche in dem oben festgestellten Sinn.

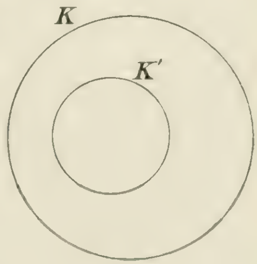


Fig. 1.

Eine Fläche heißt „einfach zusammenhängend", wenn eine jede geschlossene in der Fläche verlaufende Kurve für sich allein die vollständige Begrenzung eines Flächenstücks bildet. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so heißt die Fläche mehrfach zusammenhängend.

Man kann eine einfach zusammenhängende Fläche sehr anschaulich auch durch die Eigenschaft charakterisieren, daß jede in ihr liegende geschlossene Kurve auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, ohne daß sie aus der Fläche heraustritt.

Jede schlichte Fläche*), die nur eine Randkurve besitzt, ist einfach zusammenhängend, dagegen ist eine Fläche, die mehrere Randkurven besitzt, mehrfach zusammenhängend. Beispielsweise ist die Fläche Fig. 1, die von den Kreisen K und K' begrenzt wird, mehrfach zusammenhängend, denn eine den Kreis K' einschließende Kurve begrenzt für sich allein noch kein Stück der Fläche.

§ 9. Funktionen von zwei Variabeln. Wir haben nun die für Funktionen einer Variabeln ausgesprochenen Definitionen und Sätze auf Funktionen von zwei Variabeln auszudehnen. Dabei wollen wir uns von vornherein auf stetige Variable beschränken.

Wenn jedem Punkt (xy) eines kontinuierlichen Bereichs ein bestimmter Zahlwert u zugeordnet ist, so ist für diesen Bereich u als Funktion der Variabeln xy definiert und wird mit $f(xy)$ bezeichnet.

Da wir die Begrenzungspunkte eines Bereichs nicht zum Bereich rechnen (siehe den vorigen Paragraphen), so braucht die Funktion für die Begrenzungspunkte nicht definiert zu sein. Soll sich die Definition der Funktion auch auf diese Punkte erstrecken, so wird dies jedesmal ausdrücklich ausgesprochen.

Bezeichnen wir mit $(x_0 y_0)$ einen bestimmten Punkt, dessen Umgebung wenigstens teilweise in den Definitionsbereich der Funktion $f(xy)$ fällt.

Genügt eine Zahl α der Bedingung, daß der absolute Betrag der Differenz $f(xy) - \alpha$ für alle Punkte der Umgebung des Punktes $(x_0 y_0)$, die dem Definitionsbereich der Funktion angehören, unter jede vorgegebene Größe ε sinkt, sofern nur die Umgebung hinreichend klein angenommen wird, so heißt

*) Man bezeichnet eine Fläche als schlicht, wenn kein Teil der Fläche von einem anderen bedeckt wird. Weiterhin werden wir auch Flächen zu betrachten haben, die aus mehreren übereinander liegenden Blättern bestehen.

α der Grenzwert der Funktion im Punkt $(x_0 y_0)$ und wird mit

(1) $$\lim_{x=x_0,\, y=y_0} f(xy) \text{ bezeichnet.}$$

Von diesem Grenzwert ist der Grenzwert wohl zu unterscheiden, zu dem man gelangt, wenn man zuerst bei festgehaltenem Wert von x die Variable y gegen y_0 konvergieren läßt und dann zur Grenze für $x = x_0$ übergeht.

Dieser Grenzwert wird mit

(2) $$\lim_{x=x_0} \lim_{y=y_0} f(xy) \text{ bezeichnet.}$$

Nimmt man die Grenzübergänge in der umgekehrten Reihenfolge vor, so bezeichnet man den Grenzwert — sofern ein solcher existiert — mit

(3) $$\lim_{y=y_0} \lim_{x=x_0} f(xy).$$

Existiert der Grenzwert (1), so existieren auch die Grenzwerte (2) und (3) und sie haben denselben Wert. Wenn dagegen der Grenzwert (1) nicht existiert, so können sehr wohl die Grenzwerte (2) und (3) existieren und verschiedene Werte besitzen. Ein Beispiel bietet die Funktion

$$f(xy) = \frac{x^2 - y^2 + x^3 + y^3}{x^2 + y^2 - x^3 + y^3},$$

die für alle Punkte der Ebene mit Ausnahme des Punktes $(0\,0)$ definiert ist.

Es ist

$$\lim_{x=0} \lim_{y=0} f(xy) = \lim_{x=0} \frac{1+x}{1-x} = 1.$$

Dagegen ist

$$\lim_{y=0} \lim_{x=0} f(xy) = \lim_{y=0} \frac{y-1}{y+1} = -1.$$

Daß auch dann, wenn die Grenzwerte (2) und (3) existieren und denselben Wert besitzen, die Existenz des Grenzwertes (1) noch nicht sicher gestellt ist, geht aus dem folgenden Beispiel hervor:

$$f(xy) = \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)^2.$$

In diesem Falle ist

$$\lim_{x=0} \lim_{y=0} f(xy) = \lim_{y=0} \lim_{x=0} f(xy) = 1.$$

Da aber die Funktion für alle der Gleichung $x = \pm y$ genügenden Werte verschwindet, kann von der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{x=0,\, y=0} f(xy)$$

keine Rede sein.

Die Funktion $f(xy)$ heißt stetig im Punkt $(x_0 y_0)$ des Definitionsbereichs, wenn die Gleichung

$$\lim_{x=x_0,\, y=y_0} f(xy) = f(x_0 y_0)$$

besteht.

Diese Definition gilt auch für die Begrenzungspunkte, sofern die Funktion auch für diese definiert ist.

Nehmen wir an die Funktion $f(xy)$ sei in jedem Punkt eines endlichen Bereichs A stetig. Zufolge der Definition der Stetigkeit läßt sich nach Annahme einer positiven Größe ε für jeden Punkt $(x_0 y_0)$ dieses Bereiches eine positive Größe ϱ der Art bestimmen, daß $|f(xy) - f(x_0 y_0)| < \varepsilon$ ist für alle Punkte, die der Bedingung $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varrho$ genügen.

Die Gesamtheit der Werte ϱ, die bei gegebenem ε den Punkten des Bereichs A entsprechen, besitzt eine untere Grenze ϱ_0, die jedenfalls nicht negativ sein kann. Ist diese untere Grenze ϱ_0 eine positive Zahl, so heißt die Funktion $f(xy)$ „gleichmäßig stetig“ im Bereich A.

Vorausgesetzt daß die Funktion $f(xy)$ auch noch für die Grenzpunkte des Bereichs A definiert und in diesen Punkten stetig ist, so ist sie notwendig im Bereich A gleichmäßig stetig.

Der Beweis dieses Satzes ist in ganz analoger Weise zu führen, wie der Beweis des entsprechenden Satzes für Funktionen einer Variabeln (§ 4).

Bezeichnen wir mit A' den Bereich, der übrig bleibt, wenn wir aus dem Bereich A die Umgebungen der Grenzpunkte ausscheiden. Eine Funktion, die im Bereich A stetig ist, ist im Bereich A' sicher gleichmäßig stetig, wie klein auch immer die ausgeschiedenen Umgebungen gewählt werden mögen.

Auch die in § 5 für Funktionen einer Variabeln bewiesenen beiden Sätze: daß eine stetige Funktion jeden Wert annimmt, der zwischen zwei Funktionswerten liegt, und daß sie die obere und die untere Grenze der Funktionswerte erreicht, gelten für Funktionen von zwei Variabeln.

Der Beweis des ersten Satzes ergibt sich ohne weiteres daraus, daß die Funktion $f(xy)$ auf Grund des für Funktionen einer Variabeln geltenden Satzes auf einer zwei Punkte verbindenden Kurve jeden Wert annehmen muß, der zwischen den im Anfangs- und Endpunkt der Kurve stattfindenden Funktionswerten liegt.

Der zweite Satz ist in derselben Art zu beweisen wie der entsprechende Satz für Funktionen einer Variabeln. Er ist an die Bedingung gebunden, daß die Funktion in dem Bereich, für den die in Rede stehenden Grenzen der Funktionswerte gelten, gleichmäßig stetig ist.

Die Definition der partiellen Derivierten bildet keine Schwierigkeit, nachdem einmal der Begriff des Differentialquotienten festgestellt ist. Wir gehen daher nicht weiter darauf ein.

§. 10. Kurvenintegrale. Flächenintegrale. Der Gaußsche Integralsatz. Nehmen wir an für jeden Punkt einer gegebenen Kurve C sei eine stetige Funktion f definiert. Um von einer bestimmten Vorstellung auszugehen denken wir uns etwa die Punkte der Kurve durch die von einem festen Punkt an gezählte Bogenlänge s festgelegt und f als Funktion der Variabeln s gegeben. Das über den gegebenen Kurvenbogen erstreckte Integral

$$\int_{s_0}^{s_1} f(s)\,ds \tag{1}$$

bezeichnet man als Kurvenintegral.

In der Regel ist die Funktion f nicht nur für die Punkte der Kurve C, sondern für eine Fläche definiert, stellt sich also als eine Funktion der beiden Koordinaten xy dar; wir wollen sie demgemäß mit $f(xy)$ bezeichnen. Die Integrationsgrenzen pflegt man in diesem Fall nicht durch die Bogenlängen $s_0 s_1$, sondern durch die Koordinaten der Endpunkte $x_0 y_0$; $x_1 y_1$ festzulegen.

An Stelle des Bogendifferentials ds kann man auch seine

Projektionen auf die Koordinatenachsen einführen. Setzen wir noch

$$f(xy)\frac{ds}{dx} = \varphi(xy) \qquad f(xy)\frac{ds}{dy} = \psi(xy),$$

so können wir das Integral (1) in jeder der beiden Formen schreiben:

$$\int_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)} \varphi(xy)\,dx \quad \text{und} \quad \int_{(x_0 y_0)}^{(x_1 y_1)} \psi(xy)\,dx.$$

Sofern verschiedene Integrationswege zwischen denselben Endpunkten in Betracht kommen, schreiben wir hierfür:

$$\int \left| \begin{matrix} x_1 y_1 \\ C \\ x_0 y_0 \end{matrix} \right. \varphi(xy)\,dx \quad \text{und} \quad \int \left| \begin{matrix} x_1 y_1 \\ C \\ x_0 y_0 \end{matrix} \right| \psi(xy)\,dy.$$

Die Richtung, in der die Kurve C bei der Integration zu durchlaufen ist, ist, wenn die Kurve sich nicht überkreuzt und nicht in sich zurückläuft, durch die Angabe des Anfangs- und des Endpunkts des Integrationsweges bestimmt. Wenn die Kurve geschlossen ist, aber sich nicht überkreuzt, so sind die beiden Richtungen, in denen sie durchlaufen werden kann, dadurch unterschieden, daß die eingeschlossene Fläche das eine Mal zur Linken, das andere Mal zur Rechten liegt. Die erstere Richtung bezeichnen wir als positiv, die andere als negativ. Die positive Richtung liegt zu der nach außen gerichteten Normale ebenso wie die Richtung der wachsenden y zur Richtung der wachsenden x (s. § 8).

Soweit nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird, setzen wir immer voraus, daß die Integration im positiven Sinn erfolgt. Für den Fall, daß sich die Kurve überkreuzt, allgemeine Festsetzungen zu treffen, erweist sich nicht als erforderlich.

Wir dehnen nun den Begriff des bestimmten Integrals auf Funktionen von zwei Variabeln aus.

Es sei für jeden Punkt im Innern und auf der Berandung einer im Endlichen liegenden Fläche E eine überall stetige Funktion $f(xy)$ definiert. Wir zerlegen die Fläche E in n Stücke $(\Delta E)_\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots n)$, nehmen in jedem Flächenstück nach Belieben einen Punkt $(\xi_\nu \eta_\nu)$ an und bilden die Summe

$$S_n = \sum_{\nu=1}^{n} f(\xi_\nu \eta_\nu)\,(\Delta E)_\nu.$$

Die Flächenstücke $(\Delta E)_\nu$ seien so gewählt, daß der Abstand zweier beliebiger Punkte eines Flächenstücks eine vorgegebene Größe δ nicht übersteigt. Im Übrigen machen wir weder in bezug auf die Anzahl noch in bezug auf die Gestalt der Flächenstücke eine beschränkende Voraussetzung.

Genau dasselbe Verfahren, durch das wir die Existenz des *einfachen* bestimmten Integrals nachgewiesen haben, können wir auch hier anwenden, um zu beweisen, daß die Summe S_n bei abnehmendem δ gegen einen Grenzwert konvergiert. Diesen Grenzwert bezeichnet man mit

$$\int\limits_{(E)} f(xy)\, dE$$

und nennt ihn ein „Flächenintegral" oder ein „Doppelintegral".

Da der Wert des Flächenintegrals nicht davon abhängt, in welcher Art die Fläche E in Elemente geteilt wird, so kann die Ermittlung des Flächenintegrals in mannigfaltiger Weise auf zwei nach einander auszuführende einfache Integrationen zurückgeführt werden. Daher rührt der Name Doppelintegral.

Ein Kurvenintegral, das über eine geschlossene Kurve zu erstrecken ist, läßt sich immer in ein Flächenintegral transformieren. Auf diese Transformation wollen wir des Genaueren eingehen, da sie für die im dritten Abschnitt durchzuführenden Betrachtungen von grundlegender Bedeutung ist.

Für die endliche Fläche E und ihre Berandung sei eine überall stetige Funktion $f(xy)$ definiert. Diese Funktion besitze partielle Derivierte $\frac{\partial f}{\partial x}\ \frac{\partial f}{\partial y}$, die ebenfalls überall stetig seien.

Unter dieser Voraussetzung existieren die Doppelintegrale

$$\int\limits_{(E)} \frac{\partial f}{\partial x}\, dE \quad \text{und} \quad \int\limits_{(E)} \frac{\partial f}{\partial y}\, dE.$$

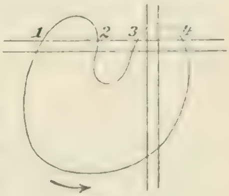


Fig. 2.

Um das erste Doppelintegral auf ein Kurvenintegral zurückzuführen, zerlegen wir die Fläche E durch Parallele zur x-Achse in Streifen von der Breite Δy; jeder dieser Streifen wird dann durch Parallele zur y-Achse in kleine Rechtecke zerlegt. Sofern eine Parallele zur x-Achse die Begrenzung der Fläche E in mehr als zwei Punkten schneidet, zerfällt der entsprechende Flächenstreifen in eine

Anzahl von getrennten Stücken (siehe Fig. 2). Die Flächenelemente, die einem bestimmten Flächenstreifen angehören, liefern zu dem Doppelintegral den Beitrag

$$\partial y \int \frac{\partial f}{\partial x}\,\partial x = \partial y\,[(f_2 - f_1) + (f_4 - f_3) + \cdots],$$

wo mit $f_1\, f_2\, f_3\, f_4 \ldots$ die Werte bezeichnet sind, die die Funktion f an den aufeinander folgenden Eintritts- und Austrittsstellen annimmt.

Bezeichnen wir mit $dx\; dy$ die Projektionen eines Bogenelements der Randkurve auf die Koordinatenachsen. Dabei denken wir uns das Bogenelement derart gerichtet, daß man im Sinn des wachsenden Bogen fortschreitend, die Fläche E zur Linken hat.

Während die Differentiale $\partial x\; \partial y$ positive Größen sind, können die Differentiale $dx\; dy$ auch negative Werte annehmen; es ist nämlich an einer Stelle, wo eine Parallele zur Abszissenachse in die Fläche eintritt, dy negativ, an einer Stelle, wo die Parallele austritt, ist dy positiv. Umgekehrt ist dx an einer Stelle, wo eine Parallele zur Ordinatenachse in die Fläche eintritt positiv, an einer Austrittsstelle dagegen negativ (s. Fig. 2). Folglich ist

$$-f_1\partial y = f_1 dy,\quad f_2\partial y = f_2 dy,\quad -f_3\partial y = f_3 dy,\quad f_4\partial y = f_4 dy \cdots$$

Daraus folgt:

$$\partial y \int \frac{\partial f}{\partial x}\,\partial x = dy\,(f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + \cdots)$$

Jedes der Bogenelemente, in die die Berandung der Fläche E durch die Parallelen zur x-Achse zerlegt wird, liefert einen Beitrag $f dy$, demnach ist das Doppelintegral

$$(2) \qquad \int_{(E)} \frac{\partial f}{\partial x}\,\partial E = \int f dy,$$

wo die Integration rechts über die vollständige Berandung der Fläche E auszudehnen ist, und zwar ist die Integration in dem Sinne auszuführen, daß die Fläche E zur Linken liegt.

Durch analoge Schlüsse ergibt sich

$$(3) \qquad \int_{(E)} \frac{\partial f}{\partial y}\,\partial E = -\int f dx.$$

Daß die in den Gleichungen (2) und (3) auftretenden Kurvenintegrale verschiedene Vorzeichen besitzen, beruht darauf, daß nach unseren Festsetzungen die Richtungen der wachsenden x und der wachsenden y verschiedene Rollen spielen: die nach außen gerichtete Normale liegt zur Richtung der wachsenden Bogen wie die $+x$-Achse zur $+y$-Achse. Für die Giltigkeit der Gleichungen (2) und (3) kommt nicht in Betracht, ob die Fläche E nur eine Randkurve besitzt, oder ob sie durch mehrere getrennte Kurven begrenzt wird (wie z. B. die in Fig. 1, § 8 dargestellte Fläche). Dagegen ist wesentlich, daß der Begriff der Kurve in dem Sinn gefaßt wird, wie dies am Schluß des § 7 geschehen ist.

Die Formeln (2) und (3) können als Spezialisierungen von Formeln betrachtet werden, die die Transformation eines Raumintegrals in ein Oberflächenintegral darstellen. Diese allgemeineren Formeln hat Gauß zuerst aufgestellt. Man bezeichnet daher den Inhalt der Gleichungen (2) und (3) als Gaußschen Integralsatz.

Wir ziehen aus den Gleichungen (2) und (3) noch eine Folgerung, von der wir gelegentlich Gebrauch machen werden.

Wir ersetzen in der Gleichung (2) f durch $\frac{\partial f}{\partial x}$, in der Gleichung (3) durch $\frac{\partial f}{\partial y}$ und addieren sodann; wir erhalten

$$\int\limits_{(E)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\partial E=\int\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dy-\frac{\partial f}{\partial y}\,dx\right)=\int\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial s}\right)ds,$$

wo im zweiten und dritten Integral über die vollständige Begrenzung der Fläche E zu integrieren ist.

Fig. 3.

Die partiellen Derivierten $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}$ sind die Kosinuse der Winkel, die das Bogenelement ds mit den Richtungen der wachsenden Koordinaten bildet. Analog sind $\frac{\partial x}{\partial n}, \frac{\partial y}{\partial n}$ die Kosinuse der Winkel, die ein Element der nach außen gerichteten Normale n mit den Richtungen der wachsenden Koordinaten bildet. Zwischen diesen partiellen Derivierten bestehen die Beziehungen (s. Fig. 3)

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial y}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial s}.$$

Folglich ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial s} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n}$$

und die vorstehende Gleichung erhält die Form

$$(5) \qquad \int\limits_{(E)} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \partial E = \int \frac{\partial f}{\partial n}\, ds\,.$$

Zweiter Abschnitt.

Komplexe Größen und ihre geometrische Repräsentation.

§ 11. Komplexe Größen. Auch nachdem das Zahlengebiet durch Einführung der irrationalen Zahlen erweitert ist, ist es nicht möglich, die indirekten Operationen unbeschränkt auszuführen (vergl. die Einleitung). Es gibt beispielsweise keine reelle Zahl, deren Quadrat negativ ist; es gibt keine reelle Zahl, die der Logarithmus einer negativen Größe ist usw. Die Forderung, die indirekten Operationen in jedem Fall ausführen zu können, nötigt daher zu einer weiteren Ausdehnung des Zahlengebiets, der Einführung der komplexen Zahlen.

Wir führen neben den „reellen Einheiten“ $+1$ und -1 noch zwei weitere „imaginäre“ Einheiten $+i$ und $-i$ ein; sie sind definiert durch die Festsetzung, daß sie der Gleichung $i^2 = -1$ genügen sollen.

Unter $x\ y$ reelle Größen verstehend, nennen wir den Ausdruck $x + iy$ eine komplexe Zahl oder auch eine komplexe Größe. x heißt der reelle, iy der imaginäre Bestandteil der komplexen Größe. Ist $y = 0$, so ist die Größe reell; ist $x = 0$, so heißt sie rein imaginär.

Die positiv genommene Wurzel $\sqrt{x^2 + y^2}$ heißt der Modul oder der absolute Betrag der komplexen Größe. Der absolute Betrag kann nur dann den Wert Null haben, wenn x und y verschwinden; in diesem Fall sagen wir, die komplexe Größe hat den Wert Null.

Die komplexen Größen $x + iy$ und $x - iy$, die sich nur durch das Vorzeichen des imaginären Teils unterscheiden, heißen konjugiert. Konjugierte Größen besitzen also denselben absoluten Betrag.

Zwei komplexe Größen heißen nur dann einander gleich, wenn sowohl ihre reellen als auch ihre imaginären Bestandteile einander gleich sind.

Im Folgenden bezeichnen wir die komplexe Größe $x + iy$ durch einen Buchstaben z und setzen $z = x + iy$. Den absoluten Betrag der Größe z bezeichnen wir mit $|z|$.

Die komplexe Größe $z = x + iy$ heißt variabel, wenn die Größen x und y als variabel betrachtet werden.

Für die Addition und die Multiplikation komplexer Größen stellen wir die Regel auf: diese Operationen sind so durchzuführen, als ob die imaginäre Einheit i eine reelle Größe wäre; dabei sind die höheren Potenzen von i auf Grund der Gleichung $i^2 = -1$ auf die erste zurückzuführen.

Danach sind die Summe und das Produkt zweier komplexen Größen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ definiert durch die Gleichungen:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \tag{1}$$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \tag{2}$$

Diese Gleichungen sind offenbar richtig, wenn die Größen z_1 und z_2 reell sind, also führt unsere Definition zu keinem Widerspruch; sie ist somit zulässig.

Auf Grund unserer Definition bleiben ferner, wie man sich leicht überzeugt, die bekannten für reelle Größen geltenden Gesetze, die sich in den Gleichungen aussprechen:

$$z_2 + z_1 = z_1 + z_2$$
$$z_2 z_1 = z_1 z_2$$
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$
$$(z_1 z_2) z_3 = z_1(z_2 z_3)$$

auch für komplexe Größen in Kraft.

Aus der Gleichung (2) ergibt sich für den absoluten Betrag des Produkts $z_1 z_2$ die Gleichung

$$|z_1 z_2| = |z_1| \, |z_2|.$$

Daraus folgt: ein Produkt kann nur dann verschwinden, wenn einer der Faktoren den Wert Null hat.

Setzen wir die rechte Seite der Gleichung (2) $= 1$, woraus

$$x_1 x_2 - y_1 y_2 = 1 \quad \text{und} \quad x_1 y_2 + x_2 y_1 = 0$$

folgt, so ergibt sich

$$x_2 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y_2 = -\frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Es ist somit der reziproke Wert der komplexen Größe z_1 durch die Gleichung

$$\frac{1}{z_1} = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - i \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}$$

bestimmt.

Die indirekten Operationen der Subtraktion und Division können wir durch die Gleichungen

$$z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1) \quad \text{und} \quad \frac{z_2}{z_1} = z_2 \cdot \frac{1}{z_1}$$

definieren. Die Subtraktion ist immer ausführbar, die Division nur dann, wenn der Nenner nicht den Wert Null hat.

Aus dem Vorausgehenden geht hervor, daß, soweit die 4 elementaren Operationen der Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division in Betracht kommen, für die komplexen Größen dieselben Rechnungsregeln gelten, wie für die reellen Größen.

Aus der Definition der Multiplikation und der Division ergibt sich unmittelbar die Definition der Potenz mit ganzzahligen positiven oder negativen Exponenten. Auf die Definition der Potenz mit beliebigen — reellen oder komplexen — Exponenten und die Definition des Logarithmus einer komplexen Größe gehen wir an dieser Stelle nicht ein: zur völligen Klarstellung dieser Begriffe ist der Begriff der Funktion einer komplexen Variabeln erforderlich.

§ 12. Geometrische Repräsentation der komplexen Größen. Da einer komplexen Größe $z = x + iy$ ein Paar reeller Zahlen xy entspricht, so findet die in § 8 erörterte geometrische Repräsentation der Zahlenpaare ohne weiteres auf komplexe Größen Anwendung: die komplexe Größe $z = x + iy$ wird durch den Punkt der Ebene repräsentiert, der in Beziehung auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem die Koordinaten xy besitzt. Der repräsentierende Punkt möge ebenfalls mit z bezeichnet werden.

Bezüglich der Orientierung der Achsen halten wir an der früher getroffenen Übereinkunft fest (§ 8), daß die Richtung der wachsenden x zur Richtung der wachsenden y wie die Richtung Osten zur Richtung Norden liegen soll.

Reelle Zahlen werden durch Punkte der Abszissenachse, rein imaginäre durch Punkte der Ordinatenachse repräsentiert. Man bezeichnet daher die erstere als Achse der reellen Zahlen, die letztere als Achse der imaginären Zahlen.

Es ist zweckmäßig, neben dem kartesischen Koordinatensystem auch Polarkoordinaten zu benutzen. Wir setzen

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad \text{also} \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Den Radius Vektor nehmen wir immer positiv: er ist offenbar gleich dem absoluten Betrag der Größe z.

Den Winkel φ bezeichnen wir als Arcus der Größe z und setzen $\varphi = \operatorname{arc} z$. Vielfach wird der Winkel φ auch als Argument bezeichnet.

Die Drehung, die der Radius Vektor erfährt, wenn φ wächst, bezeichnen wir als Drehung im positiven Sinn. Ein fester Punkt des Radius Vektors durchläuft bei dieser Drehung die Peripherie eines Kreises um den Nullpunkt in dem Sinn, daß die Kreisfläche zur Linken liegt (vergl. die analoge Festsetzung in § 10).

Während der Radius Vektor eindeutig bestimmt ist, ist der Arcus nur bis auf ein Multiplum von 2π bestimmt. Wir schränken diese Vieldeutigkeit dadurch ein, daß wir festsetzen: wenn der Punkt z eine gegebene Kurve durchläuft, so soll sich der Arcus stetig ändern. Danach ist der Arcus für einen Punkt z_1 eindeutig definiert, wenn für einen festen Punkt z_0 unter den verschiedenen zulässigen Werten ein bestimmter ausgewählt wird und wenn der Weg gegeben ist, auf dem der Punkt z von der Anfangslage z_0 in die Endlage z_1 übergehen soll.

Die Größe $\cos\varphi + i\sin\varphi$ bezeichnet man als Richtungsfaktor.

Der Richtungsfaktor ist dadurch charakterisiert, daß sein absoluter Betrag $= 1$ ist. Multiplikation und Division der

Richtungsfaktoren sind durch die Gleichungen bestimmt (siehe § 11, Nr. 2):

$$(1)\quad (\cos\varphi + i\sin\varphi)\,(\cos\psi + i\sin\psi) = \cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi).$$

$$(2)\quad \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\psi + i\sin\psi} = \cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi).$$

Aus der Gleichung (1) des § 11 ergibt sich unmittelbar die folgende Konstruktion des Punktes, der die Summe $z_1 + z_2$ repräsentiert: man ziehe vom Anfangspunkt der Koordinaten — dem Nullpunkt — aus Vektoren nach den Punkten z_1 und z_2 und lege dann durch den Punkt z_2 eine Parallele zum Vektor $0z_1$ und durch den Punkt z_1 eine Parallele zum Vektor $0z_2$; der Schnittpunkt beider Parallelen ist der Punkt $z_1 + z_2$.

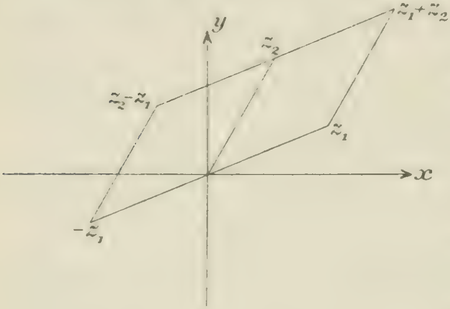


Fig. 4.

Legt man die Parallele zum Vektor $0z_2$ statt durch den Punkt z_1 durch den Punkt $-z_1$, so stellt der Schnittpunkt die Differenz $z_2 - z_1$ dar. Die Strecke z_1z_2 ist gleich der Länge des Vektors $0, z_2 - z_1$; daraus folgt: der Abstand zweier Punkte z_1 und z_2 ist gleich dem absoluten Betrag der Differenz $z_2 - z_1$.

Auf Grund dieser Bemerkung folgt aus dem geometrischen Satz, daß eine Dreiecksseite nicht größer als die Summe und nicht kleiner als die Differenz der beiden anderen ist.:

Der absolute Betrag einer Summe ist nicht größer als die Summe der absoluten Beträge der Summanden und nicht kleiner als ihre Differenz.

Der erste Teil dieses Satzes läßt sich offenbar auf Summen von beliebig vielen komplexen Zahlen ausdehnen.

§ 13. Ähnlichkeitstransformation und involutorische Transformation. Wir können die Addition komplexer Größen geometrisch noch in anderer Weise deuten, wenn wir den einen Summanden nach wie vor als eine gegebene Größe, dagegen den anderen als variabel betrachten; wir bezeichnen den konstanten Summanden mit $c = a + ib$, den variabeln mit $z = x + iy$ und setzen

$$(1) \qquad z + c = w = u + iv.$$

Indem wir reelles und imaginäres trennen, erhalten wir

$$u = x + a \qquad v = y + b.$$

Das System der Punkte (w) geht also aus dem System der Punkte (z) durch eine Parallelverschiebung hervor, die nach Richtung und Größe durch die Komponenten a, b bestimmt ist.

Um für die Multiplikation eine entsprechende geometrische Deutung zu erhalten, setzen wir

$$(2) \qquad w = qz.$$

In diesem Fall ist es zweckmäßig Polarkoordinaten zu benutzen. Wir setzen:

$$(3) \; z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \; w = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi), \; q = k(\cos\gamma + i\sin\gamma).$$

Nun ist (s. § 12, Gleichung 1)

$$\begin{aligned}\varrho(\cos\psi + i\sin\psi) &= kr(\cos\gamma + i\sin\gamma)(\cos\varphi + i\sin\varphi)\\ &= kr(\cos(\gamma+\varphi) + i\sin(\gamma+\varphi))\end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$\varrho = kr \qquad \psi = \gamma + \varphi + n\cdot 2\pi,$$

wo n eine ganze Zahl bedeutet.

Nehmen wir zunächst an, es sei $k = 1$, also q ein Richtungskoeffizient. Unter dieser Voraussetzung ist $\varrho = r$; das System (w) geht aus dem System (z) durch eine Drehung um den Nullpunkt hervor.

Nehmen wir zweitens an, es sei $\gamma = 0$, also q reell und positiv.

Das System (w) geht aus dem System (z) dadurch hervor, daß alle Radien Vektoren im Verhältnis $1 : k$ vergrößert werden; wir erhalten also eine Ähnlichkeitstransformation.

Nehmen wir drittens an, es trete keiner dieser beiden speziellen Fälle ein, so erhalten wir eine allgemeinere Ähnlichkeitstransformation, die sich aus einer Drehung um den Nullpunkt und einer Dehnung der Radien Vektoren zusammensetzt.

Die allgemeinste Ähnlichkeitstransformation erhalten wir, wenn wir die komplexe Variable mit einer komplexen Konstanten multiplizieren und dann eine komplexe Konstante addieren, wenn wir also

$$(4) \qquad w = qz + c$$

setzen.

Daß diese Gleichung eine Ähnlichkeitstransformation darstellt, kann man leicht verifizieren, ohne auf die vorausgehenden Ausführungen zurückzugreifen. Bezeichnet man nämlich mit $z_1 z_2$ zwei beliebig zu wählende Punkte des Systems (z), mit $w_1 w_2$ die entsprechenden Punkte des Systems (w), so bestehen die Gleichungen

$$w_1 = qz_1 + c \qquad w_2 = qz_2 + c \qquad w_2 - w_1 = q(z_2 - z_1),$$

woraus $|z_2 - z_1| : |w_2 - w_1| = 1 : |q|$ folgt. Diese Gleichung sagt aus, daß der Abstand zweier Punkte des Systems (z) zu dem Abstand der entsprechenden Punkte des Systems (w) in dem konstanten Verhältnis $1 : |q|$ steht.

Um auch noch die Division geometrisch zu deuten, setzen wir

$$(5) \qquad w = \frac{1}{z}.$$

Indem wir wieder Polarkoordinaten (3) einführen, erhalten wir

$$wz = r\varrho\,[\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)] = 1$$

und hieraus folgt:

$$(6) \qquad r\varrho = 1 \qquad \varphi + \psi = n \cdot 2\pi$$

Die erste Gleichung besagt: das Produkt der Längen einander entsprechender Radien Vektoren ist gleich 1. Die zweite Gleichung besagt, daß einander entsprechende Radien Vektoren symmetrisch zur Achse der reellen Zahlen liegen.

Die Gleichung (5) ist in Beziehung auf die Größen z und w symmetrisch: einem bestimmten Punkt der Ebene entspricht daher, gleichviel ob wir ihn zum System (z) oder zum System (w) rechnen, im anderen System immer derselbe Punkt. Die Beziehung zwischen den beiden ebenen Systemen (z) und (w), die durch die Gleichung (5) begründet wird, kann daher als Verallgemeinerung der Beziehung zwischen Punkten einer Geraden betrachtet werden, die man in der synthetischen Geometrie als „involutorische Beziehung“ bezeichnet: sie geht in diese über, wenn man die Variabeln z und w auf reelle Werte beschränkt. Wir wollen deshalb die Transformation (5) als „involutorische Transformation“ bezeichnen.

Jedem Punkt auf der Peripherie des „Einheitskreises“ — des Kreises vom Radius 1 um den Nullpunkt — entspricht wieder ein Punkt dieses Kreises. Einem Kreis vom Radius r um den Nullpunkt entspricht ein Kreis vom Radius $1:r$ um den Nullpunkt; Punkten, die innerhalb des ersten Kreises liegen, entsprechen Punkte außerhalb des letzteren. Konvergiert r gegen Null, so wächst $1:r$ über alle Grenzen, es entspricht daher der Nullpunkt des einen Systems dem unendlich fernen Gebiet des anderen Systems.

Bei funktionentheoretischen Untersuchungen betrachtet man ebene Systeme, die durch eine Ähnlichkeitstransformation oder durch eine involutorische Transformation ineinander übergeführt werden können, als nicht wesentlich verschieden. Da nun bei der involutorischen Transformation das unendlich ferne Gebiet der Ebene einem im Endlichen liegenden Punkt entspricht, also als mit einem Punkt gleichwertig zu betrachten ist, so bezeichnet man es als „unendlich fernen Punkt“.

Ein ähnlicher Gedankengang führt in der synthetischen Geometrie dazu, von einer unendlich fernen Geraden der Ebene zu sprechen.

In dieser Disziplin betrachtet man zwei ebene Systeme als nicht wesentlich verschieden, wenn das eine als Zentralprojektion des anderen betrachtet werden kann. Bei der Zentralprojektion entspricht dem unendlich entfernten Gebiet der einen Ebene in der anderen Ebene eine im Endlichen liegende Gerade; das unendlich ferne Gebiet ist daher bei dieser Betrachtungsweise als einer Geraden gleichwertig anzusehen.

In letzter Instanz kommt es bei allen derartigen Festsetzungen darauf an, welche Eigenschaften geometrischer Gebilde man als wesentlich, und welche man als unwesentlich betrachtet. Die Entscheidung hierüber aber hängt von den Zwecken ab, die man verfolgt.

Wir wollen beiläufig bemerken, daß sich die involutorische Transformation aus zwei bekannten einfacheren Transformationen zusammensetzen läßt. Um dies nachzuweisen, beziehen wir die beiden ebenen Systeme (z) und (w) nicht direkt aufeinander, sondern setzen sie mit einem dritten ebenen System (ζ) in Beziehung. Die Koordinaten eines Punktes, der dem System (ζ) angehört, bezeichnen wir mit r', φ'.

Wir lassen nun an Stelle der Gleichungen (6) die beiden Gleichungssysteme

$$(7) \qquad r = \frac{1}{r'} \qquad \varphi = \varphi' \qquad \text{und}$$

$$(8) \qquad \varrho = r' \qquad \varphi' + \psi = 2n\pi \quad \text{treten.}$$

Die Gleichungen (7) stellen die bekannte Transformation durch reziproke Radien, die Gleichungen (8) eine Spiegelung an der Abszissenachse dar.

Wir können den Begriff der involutorischen Transformation etwas erweitern. Zu dem Zweck gehen wir von der Gleichung aus

$$(9) \qquad (w - c)(z - c) = k^2(\cos 2\gamma + i \sin 2\gamma),$$

wo k und γ reelle, positive Konstante und c eine komplexe Konstante bedeuten. Wir setzen nun

$$(10) \quad z - c = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \quad w - c = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Aus (9) und (10) folgt:

$$r\varrho = k^2 \qquad (\varphi - \gamma) + (\psi - \gamma) = n \cdot 2\pi.$$

Die erste Gleichung zeigt: das Produkt der Abstände entsprechender Punkte vom Punkt c ist konstant. Die zweite Gleichung zeigt: die Verbindungslinien entsprechender Punkte mit dem Punkt c liegen symmetrisch zu einer Geraden durch diesen Punkt, die mit der Abszissenachse den Winkel γ bildet.

Der geometrische Charakter der Transformation (9) ist derselbe, wie der der Transformation (5), nur ist an Stelle des Einheitskreises ein Kreis vom Radius k um den Punkt c und an Stelle der Abszissenachse eine Gerade durch den Punkt c getreten, die mit der Abszissenachse den Winkel γ bildet.

Wir bezeichnen daher auch die Transformation (9) als involutorische Transformation.

§ 14. Die Kreisverwandtschaft. Indem wir eine Ähnlichkeitstransformation mit einer involutorischen Transformation zusammensetzen, erhalten wir eine allgemeinere Transformation, die die bisher betrachteten Transformationen als Spezialfälle unter sich begreift.

Wir setzen, unter $\alpha\beta\gamma\delta$ komplexe Konstante verstehend

(1) $$w = \alpha\zeta + \beta,$$

(2) $$(\zeta - \gamma)(z - \gamma) = \delta.$$

Die erste von diesen Transformationen ist eine Ähnlichkeitstransformation, die zweite eine involutorische Transformation.

Aus (2) folgt:

$$\zeta = \frac{\gamma z - \gamma^2 + \delta}{z - \gamma}.$$

Substituieren wir diesen Wert von ζ in (1), so erhalten wir eine Gleichung der Form

(3) $$w = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Hier ist

(4) $$\frac{a}{c} = \alpha\gamma + \beta, \quad \frac{b}{c} = -\alpha\gamma^2 + \alpha\delta - \beta\gamma, \quad \frac{d}{c} = -\gamma.$$

Umgekehrt läßt sich jede Transformation der Form (3) aus einer Ähnlichkeitstransformation und einer involutorischen Transformation zusammensetzen. Ist nämlich $c = 0$, so ist schon die Transformation (3) eine Ähnlichkeitstransformation. Ist dagegen c von Null verschieden, so kann der Wert einer der drei Konstanten $\alpha\beta\delta$ nach Belieben gewählt werden (es darf nur nicht gerade eine der Konstanten α oder δ gleich Null gesetzt werden); die beiden anderen und γ sind dann durch die Gleichungen (4) bestimmt. Setzen wir beispielsweise $\alpha = 1$, so erhalten wir:

$$\beta = \frac{a + d}{c}, \quad \gamma = -\frac{d}{c}, \quad \delta = -\frac{ad - bc}{c^2}.$$

Die „Substitutionsdeterminante" $ad - bc$ darf nicht verschwinden, weil sonst die Gleichung (3) für w einen konstanten Wert ergibt, also keine Transformation darstellt. Wir erhalten daher für δ, wie es sein muß, einen von Null verschiedenen Wert.

Durch die Gleichung (3) wird jedem Punkt des Systems (z) mit Ausnahme des Punktes $-d:c$ ein bestimmter Punkt des Systems (w) zugeordnet. Nähert sich aber der Punkt z dem Punkt $-d:c$, so wächst der absolute Betrag von w über alle

Grenzen. Der Punkt $-d:c$ entspricht also dem unendlich fernen Gebiet des Systems (w).

Auf Grund der im vorigen Paragraph getroffenen Festsetzung können wir daher sagen: der Punkt $-d:c$ des Systems (z) entspricht dem unendlich fernen Punkt des Systems (w).

Wenn der absolute Betrag von z über alle Grenzen wächst, so konvergiert w gegen den Wert $a:c$. Dem unendlich fernen Punkt des Systems (z) entspricht also im System (w) der Punkt $a:c$.

Bei der weiteren Untersuchung der Transformation (3) stützen wir uns auf den folgenden Satz:

Der geometrische Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten im konstanten Verhältnis $1:k$ stehen, ist ein Kreis, außer wenn $k=1$ ist; in diesem Fall ist er eine Gerade.

Zum Beweis führen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, dessen Abszissenachse durch die festen Punkte geht; den Anfangspunkt des Koordinatensystems wählen wir so, daß er den Abstand e der beiden festen Punkte im Verhältnis $1:k$ teilt.

Die Abszissen der beiden festen Punkte haben die Werte

$$(5) \qquad a_1 = \frac{e}{1+k} \qquad a_2 = -\frac{ke}{1+k}.$$

Der in Rede stehende geometrische Ort ist durch die Gleichung bestimmt:

$$\left(x + \frac{ke}{1+k}\right)^2 + y^2 = k^2\left[\left(x - \frac{e}{1+k}\right)^2 + y^2\right].$$

Aus ihr folgt:

$$(6) \qquad (k^2-1)(x^2+y^2) - 2kex = 0.$$

Diese Gleichung stellt für $k=1$ eine Gerade, wenn k von 1 verschieden ist, einen Kreis dar. Bei dieser Betrachtung erscheint somit die Gerade als Spezialfall des Kreises.

Der Radius des Kreises ist $r = ke : (k^2-1)$. Die Entfernungen der beiden festen Punkte vom Kreismittelpunkt sind (5)

$$d_1 = \frac{ke}{k^2-1} - a_1 = \frac{e}{k^2-1} \quad \text{und} \quad d_2 = \frac{ke}{k^2-1} - a_2 = \frac{k^2 e}{k^2-1}.$$

Es ist demnach $d_1 d_2 = r^2$.

Die beiden festen Punkte liegen also auf einem Durchmesser des Kreises (6), und zwar auf derselben Seite des Mittelpunktes; das Produkt ihrer Entfernungen vom Mittelpunkt ist gleich dem Quadrat des Radius.

Zwei Punkte, die diese Lage in Beziehung auf einen Kreis haben, bezeichnet man als symmetrisch in Beziehung auf den Kreis.

Unter Benutzung dieser Bezeichnung können wir den eben bewiesenen Satz auch in der Form aussprechen:

Die Entfernungen eines Punktes auf der Peripherie eines Kreises von zwei festen Punkten, die in Beziehung auf den Kreis symmetrisch liegen, stehen in konstantem Verhältnis.

In dieser Form gilt der Satz ohne weiteres auch für den Spezialfall der Geraden.

Wir kehren nun zur Untersuchung der Transformation (3) zurück.

Wir nehmen im System (z) einen Kreis K an und bezeichnen mit z einen Punkt dieses Kreises, mit $z_1 z_2$ zwei Punkte, die in Beziehung auf den Kreis K symmetrisch liegen, mit k das konstante Verhältnis der Entfernungen eines Punktes der Peripherie von K von den beiden Punkten z_1 und z_2. Mit $w\, w_1\, w_2$ bezeichnen wir die Punkte des Systems (w), die den Punkten $z\, z_1\, z_2$ entsprechen.

Es ist

$$w - w_1 = \frac{az+b}{cz+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d} = \frac{m(z-z_1)}{(cz+d)(cz_1+d)},$$

wo zur Abkürzung $ad - bc = m$ gesetzt ist. Analog erhalten wir

$$w - w_2 = \frac{m(z-z_2)}{(cz+d)(cz_2+d)}.$$

Folglich ist

$$\frac{w-w_2}{w-w_1} = \frac{cz_1+d}{cz_2+d} \cdot \frac{z-z_2}{z-z_1}.$$

Durchläuft der Punkt z den Kreis K, so bleibt der absolute Betrag $|z - z_2 : z - z_1|$ — der Quotient der Entfernungen des Punktes z von den symmetrischen Punkten z_1 und z_2 — konstant $= k$. Folglich bleibt auch der absolute Betrag

$$|w - w_2 : w - w_1| \quad \text{konstant} \quad = |cz_1 + d : cz_2 + d| \cdot k = k'.$$

Daraus folgt: der Punkt w, der dem Punkt z entspricht, durchläuft ebenfalls einen Kreis K': den Punkten z_1 und z_2, die in Beziehung auf den Kreis K symmetrisch liegen, entsprechen zwei Punkte w_1 und w_2, die in Beziehung auf den Kreis K' symmetrisch liegen.

Der Kreis K' degeneriert in eine Gerade, wenn $k' = 1$ ist, also wenn $|cz_2 + d : cz_1 + d| = k$ ist. In diesem Fall geht der Kreis K, der durch die Gleichung $|z - z_2 : z - z_1| = k$ dargestellt wird, durch den Punkt $-d:c$, der dem unendlich fernen Punkt des Systems (w) entspricht.

Die Geraden eines ebenen Systems (w) können somit als Kreise aufgefaßt werden, die durch den unendlich fernen Punkt des Systems gehen; ihnen entsprechen im System (z) Kreise durch den Punkt, der dem unendlich fernen Punkt des Systems (w) entspricht.

Weil die Transformation (3) Kreise wieder in Kreise überführt, bezeichnet man die Beziehung zwischen den Systemen (z) und (w) als „Kreisverwandtschaft“.

Über die vier Konstanten $abcd$, die in die Gleichung (3) eingehen, können wir derart verfügen, daß drei gegebenen Punkten $z_1 z_2 z_3$ des Systems (z) beziehungsweise drei gegebene Punkte $w_1 w_2 w_3$ des Systems (w) entsprechen. Dadurch sind diese vier Konstanten bis auf einen gemeinschaftlichen Faktor bestimmt.

Zum Beweis setzen wir die Gleichung

$$(7) \qquad \frac{w - w_3}{w - w_1} \cdot \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3} = \frac{z - z_3}{z - z_1} \cdot \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \text{ an.}$$

Es ist einerseits klar, daß die Auflösung dieser Gleichung nach w die Form (3) besitzt, und es ist andererseits klar, daß den Punkten $z_1 z_2 z_3$ beziehungsweise die Punkte $w_1 w_2 w_3$ entsprechen.

Die Gleichung (7) hat die Eigentümlichkeit, daß ihre linke Seite in derselben Weise aus den Größen $w_1 w_2 w_3\ w$ gebildet ist wie die rechte aus den Größen $z_1 z_2 z_3\ z$.

Wir schreiben der Gleichförmigkeit wegen z_4 an Stelle von z und setzen

$$(8) \qquad D = \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_3}.$$

Die Größe D bezeichnet man als „Doppelverhältnis“ der vier Punkte $z_1 z_2 z_3 z_4$.

Unter Benutzung dieser Bezeichnung können wir den Inhalt der Gleichung (7) in der Form aussprechen:

Vier Punkte des ebenen Systems (w) besitzen dasselbe Doppelverhältnis wie die entsprechenden Punkte des kreisverwandten Systems (z).

Das Doppelverhältnis von vier Punkten wird also durch die Transformation (3) nicht geändert: es ist dieser Transformation gegenüber invariant.

Wenn die vier Punkte $z_1 z_2 z_3 z_4$ auf der Achse der reellen Zahlen liegen, so stimmt die eben aufgestellte Definition des Doppelverhältnisses D mit der aus der Geometrie bekannten überein. Um auch für den allgemeinen Fall die geometrische Bedeutung von D klarzustellen, setzen wir

$$(9) \qquad z_\lambda - z_\mu = r_{\lambda\mu}(\cos\varphi_{\lambda\mu} + i\sin\varphi_{\lambda\mu}) \qquad \lambda, \mu = 1, 2, 3, 4.$$

$r_{\lambda\mu}$ bedeutet die Entfernung der beiden Punkte z_λ und z_μ absolut genommen; es ist also $r_{\lambda\mu} = r_{\mu\lambda}$.

$\varphi_{\lambda\mu}$ bedeutet den Winkel, um den ein vom Punkt z_μ ausgehender Vektor, der ursprünglich die Richtung der wachsenden Abszissen hat, in positivem Sinn gedreht werden muß, damit er durch den Punkt z_λ geht. Demnach ist

$$\varphi_{\mu\lambda} = \varphi_{\lambda\mu} + \pi \quad \text{oder} = \varphi_{\lambda\mu} - \pi,$$

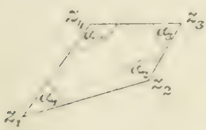


Fig. 5.

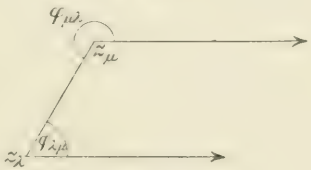


Fig. 6.

je nachdem $\varphi_{\lambda\mu} < \pi$ oder $\geqq \pi$ ist (s. Fig. 6).

Um eine bestimmte Annahme zu machen, denken wir uns die Bezeichnung so gewählt, daß

$$\varphi_{21} \leqq \varphi_{31} \leqq \varphi_{41}$$

ist (s. Fig. 5).

Die Winkel in dem Viereck $z_1 z_2 z_3 z_4$ bezeichnen wir den Indizes der Eckpunkte entsprechend mit $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$. Zwischen diesen Winkeln und den Winkeln $\varphi_{\lambda\mu}$ bestehen die Beziehungen

$$(10) \quad \alpha_1 = \varphi_{41} - \varphi_{21} \quad \alpha_2 = \varphi_{12} - \varphi_{32} \quad \alpha_3 = \varphi_{23} - \varphi_{43} \quad \alpha_4 = \varphi_{34} - \varphi_{14}.$$

Das Doppelverhältnis D hat den Wert:

$$D = \frac{r_{21}\, r_{43}\, (\cos \varphi_{21} + i \sin \varphi_{21})(\cos \varphi_{43} + i \sin \varphi_{43})}{r_{23}\, r_{41}\, (\cos \varphi_{23} + i \sin \varphi_{23})(\cos \varphi_{41} + i \sin \varphi_{41})}$$

$$= \frac{r_{21}\, r_{43}}{r_{23}\, r_{41}} \left[\cos(\varphi_{21} + \varphi_{43} - \varphi_{23} - \varphi_{41}) + i \sin(\varphi_{21} + \varphi_{43} - \varphi_{23} - \varphi_{41})\right].$$

Es ist demnach wegen (10) bis auf ein Multiplum von 2π

$$\operatorname{arc} D = -(\varphi_{41} - \varphi_{21}) - (\varphi_{23} - \varphi_{43}) = -(\alpha_1 + \alpha_3)$$

oder — ebenfalls bis auf ein Multiplum von 2π —

(11) $$\operatorname{arc} D = \alpha_2 + \alpha_4 \qquad \text{und}$$

$$D = \frac{r_{12}\, r_{34}}{r_{14}\, r_{23}}.$$

Der absolute Betrag des Doppelverhältnisses D (8) ist demnach gleich dem Quotienten aus dem Produkt der Gegenseiten $r_{12} r_{34}$ und dem Produkt der beiden anderen Gegenseiten $r_{14} r_{23}$. Der Arcus von D ist gleich der Summe der Gegenwinkel $\alpha_2 + \alpha_4$.

Diese beiden Größen bleiben unverändert, wenn wir von einem Viereck zu einem kreisverwandten Viereck übergehen.

Wenn die vier Punkte $z_1 z_2 z_3 z_4$ auf einem Kreis liegen, so ist $\alpha_2 + \alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_3 = \pi$; das Doppelverhältnis ist also reell.

Der Arcus des Doppelverhältnisses hat noch eine andere geometrische Bedeutung.

Wir legen durch die Punkte $z_1 z_2 z_3$ einen Kreis K_1 und durch die Punkte $z_1 z_4 z_3$ einen Kreis K_2. Vom Punkt z_1 aus ziehen wir zwei Vektoren $z_1 p$ und $z_1 q$ (s. Fig. 7). Der Vektor $z_1 p$ berühre den Kreis K_1 und sei nach der Seite der Geraden $z_1 z_3$ gerichtet, auf der der Punkt z_2 liegt; der Vektor $z_1 q$ berühre den Kreis K_2 und sei nach der Seite der Geraden $z_1 z_3$ gerichtet, auf der der Punkt z_4 liegt.

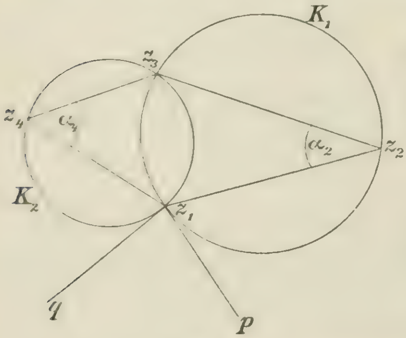


Fig. 7.

Der Winkel $p z_1 z_3$ ist $= \pi - \alpha_2$, der Winkel $q z_1 z_2$ ist $= \pi - \alpha_4$, folglich ist der Winkel, den die beiden Vektoren $z_1 p$ und $z_1 q$ und demnach auch die beiden Kreise K_1 und K_2 miteinander bilden $= \alpha_2 + \alpha_4$.

Da diese Größe der Transformation (3) gegenüber invariant ist, so bilden die beiden Kreise, die den Kreisen K_1 und K_2 im System (w) entsprechen, denselben Winkel miteinander wie die Kreise K_1 und K_2.

Einem Kreisbogendreieck im System (z) entspricht im System (w) wieder ein Kreisbogendreieck; entsprechende Winkel in diesen beiden Dreiecken sind einander gleich.

Wenn die Seiten beider Dreiecke unendlich klein sind, so können die Dreiecke als geradlinig betrachtet werden; einem unendlich kleinen geradlinigen Dreieck im System (z) entspricht also ein ähnliches Dreieck im System (w). Dieser Satz läßt sich sofort auf beliebige unendlich kleine Figuren ausdehnen.

Zwei unendlich kleine Figuren, die sich in kreisverwandten Systemen entsprechen, sind ähnlich.

Man bezeichnet diese Beziehung zwischen den kreisverwandten Systemen als „Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen".

Auf Grund der im Vorausgehenden bewiesenen Sätze kann man sich von der Beziehung zwischen kreisverwandten Systemen leicht ein anschauliches Bild machen.

Den Geraden des Systems (w), die durch den Nullpunkt gehen, entsprechen im System (z) Kreise durch die Punkte $-b:a$ und $-d:c$; der erste dieser Punkte entspricht dem Nullpunkt, der zweite dem unendlich fernen Punkt des Systems (w). Wir setzen zur Abkürzung $-b:a = z_0$, $-d:c = z_r$ und $a:c = q$ und schreiben die Gleichung (3) in der Form

(3a) $$w = q\,\frac{z - z_0}{z - z_r}.$$

Ein vom Nullpunkt der w-Ebene ausgehender Vektor ist durch die Gleichung $\operatorname{arc} w = \gamma$ (γ konstant) bestimmt; für den entgegengesetzt gerichteten Vektor gilt die Gleichung $\operatorname{arc} w = \gamma + \pi$. Dem ersten Vektor entspricht im System (z) der Kreisbogen, der durch die Gleichung

$$\operatorname{arc}\frac{z - z_0}{z - z_r} = \gamma - \operatorname{arc} q$$

bestimmt ist; der dem zweiten Vektor entsprechende Kreisbogen ist durch die Gleichung

$$\operatorname{arc}\frac{z - z_0}{z - z_r} = \gamma + \pi - \operatorname{arc} q$$

bestimmt.

Die Kreise des Systems (w), die den Nullpunkt zum Mittelpunkt haben, schneiden die Geraden durch den Nullpunkt unter einem rechten Winkel; es entspricht daher diesem Büschel von konzentrischen Kreisen im System (z) ein Büschel von Kreisen, die die sämtlichen Kreise durch die Punkte z_0 und $z_\varkappa$ orthogonal schneiden.

Wie aus der Gleichung (3a) hervorgeht, ist ein Kreis dieses Büschels durch die Gleichung

$$\left|\frac{z - z_0}{z - z_\varkappa}\right| = \text{Konst.}$$

festgelegt.

Demnach liegen die Punkte z_0 und $z_\varkappa$ in Beziehung auf jeden Kreis des Büschels symmetrisch. Zu den Kreisen des Büschels gehört auch eine Gerade, nämlich diejenige, zu der die beiden Punkte z_0 und $z_\varkappa$ symmetrisch liegen.

Diese Gerade fällt mit der Abszissenachse zusammen, wenn die Punkte z_0 und $z_\varkappa$ in Beziehung auf diese Achse symmetrisch liegen, d. h. wenn die beiden Größen z_0 und $z_\varkappa$ konjugiert sind. Es entspricht dann der Abszissenachse, wenn wir sie zum System (z) rechnen, im System (w) der Kreis, dessen Gleichung $|w| = |q|$ ist, also wenn der absolute Betrag von q gleich 1 ist, der Einheitskreis. Damit ist nachgewiesen:

Vorausgesetzt, daß die Größen z_0 und $z_\varkappa$ konjugiert sind und die Größe γ reell ist, entspricht bei der Transformation

$$w = e^{i\gamma} \frac{z - z_0}{z - z_\varkappa}$$

der Abszissenachse, wenn man sie zum System (z) rechnet, im System (w) der Einheitskreis.

Die komplexe Größe z_0 und die reelle Größe γ können beliebig gewählt werden; es bleiben also drei reelle Konstante verfügbar.

Dem Punkt z_0 entspricht der Mittelpunkt des Einheitskreises im System (w). Wir schließen daraus: je nachdem der Punkt z_0 eine positive oder eine negative Ordinate besitzt, entspricht dem Innern des Einheitskreises die Halbebene des Systems (z), die auf der Seite der positiven Ordinaten liegt, oder die auf der Seite der negativen Ordinaten.

§ 15. Repräsentation der komplexen Größen durch die Punkte einer Kugel. Man kann zur geometrischen Darstellung der Werte einer komplexen Größe an Stelle der Ebene auch jede beliebige andere Fläche verwenden, deren Punkte sich den Punkten der Ebene eindeutig zuordnen lassen: man braucht nur festzusetzen, daß jeder Punkt der betreffenden Fläche denselben komplexen Wert repräsentieren soll wie der entsprechende Punkt der Ebene. Besonders anschaulich erscheint eine Darstellung auf der Kugel, zu der wir auf folgendem Wege gelangen: Wir beschreiben um den Nullpunkt der z-Ebene mit der Längeneinheit als Radius eine Kugel. Die Endpunkte des Durchmessers, der auf der z-Ebene senkrecht steht, bezeichnen wir als Pole, und zwar wollen wir, um an eine bestimmte Vorstellung anzuknüpfen, den einen als Nordpol, den anderen als Südpol bezeichnen. Den Einheitskreis, in dem die z-Ebene von der Kugel geschnitten wird, bezeichnen wir dementsprechend als Äquator.

Von dem Südpol aus projizieren wir nun die Punkte der z-Ebene auf die Kugel. Man bezeichnet bekanntlich diese Abbildung der Ebene auf die Kugel als stereographische Projektion.

Die Punkte der Ebene und der Kugel sind einander offensichtlich eindeutig zugeordnet.

Einer Geraden der z-Ebene entspricht auf der Kugel der Kreis durch den Südpol, der von der projizierenden Ebene ausgeschnitten wird. Insbesondere entsprechen den Geraden durch den Nullpunkt die Meridiane der Kugel. Den Kreisen um den Nullpunkt der z-Ebene entsprechen auf der Kugel Parallelkreise, und zwar den Kreisen, deren Radius < 1 ist, Parallelkreise auf der nördlichen Halbkugel, den Kreisen, deren Radius > 1 ist, Parallelkreise auf der südlichen Halbkugel.

Wenn der Radius des Kreises in der z-Ebene unbegrenzt wächst, so zieht sich der entsprechende Parallelkreis um den Südpol zusammen. Der Südpol repräsentiert also den unendlich fernen Punkt der z-Ebene (vergl. § 13).

Um die Abbildung der Ebene auf die Kugel genauer zu untersuchen, beziehen wir die Punkte der Kugel auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem $\xi\eta\zeta$. Die ξ-Achse und die

η-Achse mögen mit der x-Achse beziehungsweise der y-Achse in der z-Ebene zusammenfallen, die Richtung der wachsenden ζ falle auf die Seite des Nordpols.

Die Gleichung der Geraden, die den Punkt xy der z-Ebene vom Südpol aus projiziert, sind

$$\frac{\xi - x}{x} = \frac{\eta - y}{y} = \zeta .$$

Die Gleichung der Kugel ist

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 .$$

Der Schnittpunkt des Projektionsstrahls mit der Kugel hat die Koordinaten

$$(1) \quad \xi = \frac{2x}{1+r^2} \quad \eta = \frac{2y}{1+r^2} \quad \zeta = \frac{1-r^2}{1+r^2}, \text{ wo } r = \sqrt{x^2+y^2} \text{ ist.}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$(2) \quad \frac{2}{1+r^2} = 1 + \zeta \quad x = \frac{\xi}{1+\zeta} \quad y = \frac{\eta}{1+\zeta} \quad r^2 = \frac{1-\zeta}{1+\zeta} .$$

Die Gleichung eines Kreises in der z-Ebene ist

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 .$$

Substituieren wir die Werte von xy und r^2 aus (2), so folgt:

$$2a\xi + 2b\eta + (1-c)\zeta - (1+c) = 0 .$$

Die Ebene, die durch diese Gleichung dargestellt wird, schneidet die Kugel in einem Kreis; es entspricht also einem Kreis in der z-Ebene ein Kreis auf der Kugel.

Betrachten wir ein vom Punkt (xy) in der z-Ebene ausgehendes Linienelement ds, dessen Projektionen auf die Koordinatenachsen die Differentiale $dx\, dy$ sind. Die Projektionen des entsprechenden Linienelements $d\sigma$ auf der Kugel sind (1)

$$d\xi = \frac{2dx}{1+r^2} - \frac{4xrdr}{(1+r^2)^2} \quad d\eta = \frac{2dy}{1+r^2} - \frac{4yrdr}{(1+r^2)^2} \quad d\zeta = -\frac{4rdr}{(1+r^2)^2} .$$

Daher ist

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 \\ &= \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1+r^2)^2} - \frac{16(xdx+ydy)rdr}{(1+r^2)^3} + \frac{16(x^2+y^2+1)r^2dr^2}{(1+r^2)^4} . \end{aligned}$$

Die beiden letzten Glieder auf der rechten Seite heben sich weg. Wir erhalten demnach

$$d\sigma^2 = \frac{4ds^2}{(1+r^2)^2} \quad \text{also} \quad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{2}{1+r^2} .$$

Der Quotient $d\sigma : ds$ hängt sonach zwar von dem Ort ab, an dem sich das Linienelement ds befindet, aber nicht von der Richtung des Linienelementes.

Verschieben wir also das Linienelement ds in der z-Ebene innerhalb eines Bereichs, der so klein ist, daß wir r als konstant betrachten können, so ist auch der Quotient $d\sigma : ds$ als konstant zu betrachten.

Daraus folgt: zwischen dem ebenen System (z) und seiner stereographischen Projektion auf die Kugel besteht Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen.

Dritter Abschnitt.

Definition der analytischen Funktionen einer komplexen Variabeln und ihrer Integrale.

§ 16. Rationale Funktionen. Nachdem die Bedeutung der vier Grundrechnungsarten — der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division — im Gebiet der komplexen Größen erklärt ist, ergibt sich ohne weiteres die Definition der rationalen Funktionen einer komplexen Variabeln.

Unter einer ganzen rationalen Funktion der komplexen Variabeln z verstehen wir — im Einklang mit der im Gebiet der reellen Variabeln geltenden Definition — einen Ausdruck der Form

$$w = f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 \cdots + c_n z^n \tag{1}$$

wo $c_0\ c_1\ c_2 \ldots c_n$ beliebige komplexe Konstante bedeuten.

Den Quotienten zweier ganzer rationaler Funktionen bezeichnen wir als gebrochene rationale Funktion. Das einfachste Beispiel einer gebrochenen rationalen Funktion — die Funktion $\frac{az+b}{cz+d}$ — ist bereits in § 14 eingehend untersucht worden. Bleiben wir nun zunächst bei der ganzen rationalen Funktion (1) stehen.

Es ist einleuchtend, daß jedem bestimmten Wert der Variabeln z ein vollkommen bestimmter Funktionswert $w = f(z)$ entspricht. Wir betrachten die Änderung, die der Funktionswert erfährt, wenn sich die unabhängige Variable um $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ ändert. Es ist

$$(2)\quad f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\cdot\Delta z+\frac{1}{1\cdot 2}f''(z)(\Delta z)^2\cdots+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}f^{(n-1)}(z)(\Delta z)^{n-1}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}f^{(n)}(z)(\Delta z)^n.$$

Hier ist

$$\begin{aligned} f'(z) &= c_1+2c_2z\cdots+nc_nz^{n-1}\\ f''(z) &= \quad 2c_2\cdots+n(n-1)c_nz^{n-2}\\ &\cdots\cdots\cdots\\ f^{(n)}(z) &= \qquad n(n-1)\cdots 2\cdot 1\,c_n. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit M den größten unter den absoluten Beträgen

$$\left|\frac{f^{(\nu)}(z)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots \nu}\right| \text{ und setzen fest, es sei } |\Delta z|<\varrho<1.$$

Der absolute Betrag der Summe auf der rechten Seite der Gleichung (2) ist

$$< M(\varrho+\varrho^2\cdots+\varrho^n) \text{ und dies ist } <\frac{M\varrho}{1-\varrho}.$$

Die letztere Größe wird kleiner als eine gegebene positive Größe σ, wenn wir $\varrho<\frac{\sigma}{M+\sigma}$ wählen. Daraus folgt: nach Annahme einer beliebig zu wählenden positiven Größe σ können wir eine positive Größe ϱ der Art bestimmen, daß der absolute Betrag

$$|f(z+\Delta z)-f(z)|<\sigma \text{ ist, wenn } |\Delta z|<\varrho \text{ ist.}$$

Es ist wesentlich zu bemerken, daß die der Größe Δz auferlegte Beschränkung nur ihren absoluten Betrag, nicht ihren Arcus betrifft.*)

Auf Grund der eben bewiesenen Eigenschaft bezeichnen wir $f(z)$ als stetige Funktion der Variabeln z.

Aus der Gleichung (2) folgt weiter

$$(3)\quad \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}-f'(z)=\frac{1}{1\cdot 2}f''(z)\Delta z\cdots+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}f^{(n)}(z)(\Delta z)^{n-1}.$$

Der absolute Betrag der Summe auf der rechten Seite

*) Vergl. die in § 9 durchgeführten Stetigkeitsbetrachtungen.

dieser Gleichung ist wieder $< \frac{M\varrho}{1-\varrho}$; wir können daher wieder dadurch daß wir ϱ hinreichend klein wählen, bewirken daß der absolute Betrag der rechten Seite der Gleichung (3) unter eine vorgegebene positive Größe σ sinkt.

Lassen wir ϱ gegen Null konvergieren, so ergibt sich

$$\lim_{\Delta z = 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z).$$

Die ganze Funktion $f(z)$ besitzt demnach eine Derivierte $f'(z)$, die ebenso wie $f(z)$ selbst stetige Funktion der Variabeln z ist.

Betrachten wir nun eine gebrochene rationale Funktion. Es sei $w = f(z) = h(z) : g(z)$, wo $g(z)$ und $h(z)$ ganze rationale Funktionen bedeuten.

Nimmt die Variable z einen Wert an, für den der Nenner $g(z)$ verschwindet, so verliert der Quotient $h(z) : g(z)$ seine bestimmte Bedeutung. Solche Werte der Variabeln schließen wir von der Betrachtung aus. Im übrigen entspricht offenbar jedem bestimmten Wert der Variabeln z ein bestimmter Funktionswert.

Es sei nun z ein bestimmter Wert der Variabeln, für den die Funktion $g(z)$ einen von Null verschiedenen Wert annimmt. Wegen der Stetigkeit der Funktion $g(z)$ können wir eine positive Größe ϱ der Art bestimmen, daß, wenn $|\Delta z| < \varrho$ ist, auch die Funktion $g(z + \Delta z)$ von Null verschieden ist.

Nun ist

$$f(z+\Delta z) - f(z) = \frac{h(z+\Delta z) - h(z)}{g(z+\Delta z)} - \frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{g(z+\Delta z)\, g(z)} \cdot h(z),$$

folglich

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$

$$= \left[\frac{h(z+\Delta z) - h(z)}{\Delta z} \cdot \frac{1}{g(z)} - \frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z} \cdot \frac{h(z)}{(g(z))^2}\right] \cdot \frac{g(z)}{g(z+\Delta z)}.$$

Lassen wir die Größe Δz gegen Null konvergieren, so konvergiert der Quotient $\frac{g(z+\Delta z) - g(z)}{\Delta z}$ gegen $g'(z)$, der Quotient $\frac{h(z+\Delta z) - h(z)}{\Delta z}$ gegen $h'(z)$, der Quotient $\frac{g(z+\Delta z)}{g(z)}$ gegen

1. folglich ist

$$\lim \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{h'(z)}{g(z)} - \frac{g'(z)h(z)}{g(z)^2}.$$

Auch die gebrochene rationale Funktion besitzt somit eine bestimmte Derivierte; nur für die Werte der Variabeln, für die der Nenner verschwindet, tritt eine Ausnahme ein.

Aus der Existenz der Derivierten ergibt sich ohne weiteres die Stetigkeit der Funktion in dem oben erläuterten Sinn.

§ 17. Definition der analytischen Funktionen einer komplexen Variabeln. Im Vorausgehenden ist gezeigt worden, daß ein Ausdruck der Form

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 \cdots + c_n z^n$$

eine eindeutig bestimmte Funktion der komplexen Variabeln z definiert, die eine bestimmte Derivierte besitzt. In durchaus analoger Weise läßt sich nachweisen, daß die eben genannten Eigenschaften auch einer veränderlichen Größe w zukommen, die durch eine konvergente Reihe der Form

$$w = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots$$

definiert ist, daß also eine derartige Reihe, soweit sie konvergiert, eine stetige und differenzierbare Funktion der komplexen Variabeln z darstellt. Diese Darstellungsform — die „Potenzreihe“ — hat Weierstraß zum Ausgangspunkt seiner Funktionentheorie gemacht.

Wir wollen, dem Vorgang Riemanns folgend, einen anderen Weg einschlagen, nämlich von einer begrifflichen Definition der Funktion einer komplexen Variabeln ausgehen, die nicht an die Operationen anknüpft, die zur Berechnung der Funktionswerte dienen.

In der Ebene, deren Punkte die Werte der komplexen Variabeln $z = x + iy$ repräsentieren, sei ein kontinuierlicher Bereich A gegeben, der sich nicht ins Unendliche erstreckt (vergl. § 8). Jedem Punkt des Bereichs sei ein bestimmter komplexer Wert $w = u + iv$ zugeordnet, es seien also die reellen Größen uv bestimmte Funktionen der reellen Größen xy. Da wir die Begrenzungspunkte eines kontinuierlichen Bereichs nicht zum Bereich rechnen (§ 8), so brauchen diesen Punkten keine Werte w zugeordnet zu sein.

Die Größe w ändere sich mit der Größe z nach der Stetigkeit.

Dies ist gleichbedeutend mit der Forderung, daß u und v stetige Funktionen der Variabeln xy sind (vergl. § 9).

Bezeichnen wir mit $\Delta w = \Delta u + i\Delta v$ die Änderung der Größe w, die der Änderung $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ der unabhängigen Variabeln z entspricht.

Wir setzen nun weiter voraus:

Der Quotient $\Delta w : \Delta z$ konvergiere, wenn der absolute Betrag $|\Delta z|$ gegen Null konvergiert, gegen einen Grenzwert w', der nur von der Variabeln z abhängt, und dieser Grenzwert sei stetige Funktion der Variabeln xy. (Bezüglich des Begriffs des Grenzwertes einer Funktion von zwei Variabeln Δx Δy vergl. § 9).

Mit anderen Worten: wir setzen voraus die Funktion w besitze eine stetige Derivierte w'.

Sind die angegebenen Bedingungen erfüllt, so bezeichnen wir w als eine im Bereich A reguläre analytische Funktion der komplexen Variabeln z.

Wir haben vorausgesetzt, daß der Bereich, für den die Funktion w definiert ist, endlich ist. Von dieser Beschränkung können wir uns durch die folgende Überlegung frei machen:

Die involutorische Transformation (§ 13) $z = 1 : \zeta$ ordnet jedem Punkt ζ, der im Innern eines Kreises vom Radius ϱ um den Nullpunkt liegt, einen Punkt z zu, der außerhalb eines Kreises vom Radius $1 : \varrho$ um den Nullpunkt liegt. Ist w für alle Punkte ζ im Innern des ersten Kreises als reguläre analytische Funktion der Variabeln ζ definiert, so ist damit w auch für alle Punkte z außerhalb des letzteren Kreises als Funktion der Variabeln z definiert. Insbesondere ist dem unendlich fernen Punkt des Systems (z) (vergl. § 13) derselbe Funktionswert zugeordnet wie dem Nullpunkt des Systems (ζ).

Wir stellen auf Grund dieser Überlegung die Definition auf:

Eine Funktion w der Variabeln z wird als regulär in der Umgebung des unendlich fernen Punktes bezeichnet, wenn w als Funktion der Variabeln $\zeta = 1 : z$ betrachtet in der Umgebung des Punktes $\zeta = 0$ regulär ist.

Werden die Werte der komplexen Variabeln z nicht durch die Punkte einer Ebene, sondern die Punkte einer Kugel repräsentiert, so gewinnt der Ausdruck „Umgebung des unendlich fernen Punktes" eine anschauliche Bedeutung (vergl. § 15).

Da

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{dz}\,\frac{dz}{d\zeta} = -z^2\,\frac{dw}{dz}$$

ist, so muß, damit die Funktion im Unendlichen regulär ist, das Produkt $z^2\,dw/dz$ gegen einen endlichen Grenzwert konvergieren, wenn der absolute Betrag $|z|$ über alle Grenzen wächst.

Es muß ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die oben aufgestellte Definition nur die Zuordnung der Größe w zu den Punkten des Bereichs A betrifft; ob auch noch Punkten z, die diesem Bereich nicht angehören, Werte w zugeordnet sind und ob — wenn dies der Fall ist — diese Zuordnung den gestellten Bedingungen entspricht, kommt nicht in Betracht.

Zwei Beispiele mögen die allgemeinen Ausführungen erläutern.

Betrachten wir zunächst die rationale Funktion

$$w = \frac{(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_m)}{(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_n)}.$$

Der kontinuierliche Bereich A, für den diese Funktion definiert ist, umfaßt, wenn $n \geqq m$ ist, alle Punkte der z-Ebene mit Ausnahme der Punkte $b_1\, b_2 \ldots b_n$; diese Punkte sind die Begrenzungspunkte des Bereichs A. Ist $n < m$, so tritt zu den Begrenzungspunkten noch der unendlich ferne Punkt hinzu.

Um noch ein zweites Beispiel zu betrachten gehen wir von der Gleichung $w^2 = z$ aus. Wir führen Polarkoordinaten r, ϑ ein und setzen fest, es sei $-\pi < \vartheta < +\pi$.

Unserer Gleichung genügen zwei Werte w, nämlich

$$w_1 = \sqrt{r}\, e^{\frac{1}{2} i \vartheta} \quad \text{und} \quad w_2 = -\sqrt{r}\, e^{\frac{1}{2} i \vartheta},$$

wo $\sqrt{r}$ die positive Wurzel bedeutet.

Die Werte w_1 und w_2 ändern sich im allgemeinen mit z nach der Stetigkeit, nur längs des Teils der Abszissenachse, der auf der Seite der abnehmenden x liegt, findet eine Ausnahme statt.

Nähert man sich nämlich einem Punkt auf diesem Teil der Achse von der Seite der positiven Ordinaten her, so ergibt sich für w_1 der Wert

$$\lim_{\vartheta=\pi} \sqrt{r}\, e^{\frac{1}{2} i \vartheta} = i\sqrt{r};$$

nähert man sich dagegen demselben Punkt von der Seite der negativen Ordinaten her, so ergibt sich für w_1 der Wert

$$\lim_{\vartheta=-\pi} \sqrt{r}\, e^{\frac{1}{2} i \vartheta} = -i\sqrt{r}.$$

Von den eben besprochenen Punkten abgesehen besitzen w_1 und w_2 in jedem Punkt der z-Ebene bestimmte Derivierte $w'_1 = 1:2w_1$, beziehungsweise $w'_2 = 1:2w_2$.

In dem kontinuierlichen Bereich, dessen Begrenzung der auf der Seite der negativen x liegende Teil der Abszissenachse ist, sind daher w_1 und w_2 reguläre analytische Funktionen.

Aus der Eigenschaft der analytischen Funktion $w = u + iv$ eine Derivierte zu besitzen, ergeben sich Bedingungen für die Funktionen uv, die für alle folgenden Entwicklungen von fundamentaler Bedeutung sind.

Es ist einerseits

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Andererseits ist

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = w' \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{dw}{dz}\frac{\partial z}{\partial y} = iw'.$$

Hieraus folgt:

$$i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Wir trennen reelles und imaginäres und erhalten:

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Die Funktionen u und v genügen also zwei partiellen Differentialgleichungen. Ist die Funktion u gegeben, so ist die Funktion v bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Aus der Gleichung (1) ergeben sich die weiteren partiellen Differentialgleichungen

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Aus denselben geht hervor, daß keine der beiden Funktionen u und v beliebig gewählt werden kann.

Die partiellen Differentialgleichungen (1) stellen die ausreichenden Bedingungen dafür dar, daß die Derivierte w' existiert.

Daraus folgt: vorausgesetzt daß die reellen Funktionen uv der reellen Variabeln xy für den kontinuierlichen Bereich A eindeutig definiert und in ihm überall stetig sind und den partiellen Differentialgleichungen (1) genügen, so ist $w = u + iv$ eine im Bereich A reguläre analytische Funktion der komplexen Variabeln $z = x + iy$.

Wir machen von dieser Bemerkung Gebrauch um die Exponentialfunktion für komplexe Werte der Variabeln zu definieren.

Die Funktionen $u = e^x \cos y$ und $v = e^x \sin y$ sind in jedem endlichen Bereich stetig, und dasselbe gilt für ihre partiellen Derivierten erster Ordnung. Diese Derivierten genügen den partiellen Differentialgleichungen (1), daher ist

$$w = u + iv = e^x (\cos y + i \sin y)$$

eine im Endlichen überall reguläre Funktion der komplexen Variabeln z. Da für reelle z die Gleichung $w = e^x$ gilt, so können wir die Exponentialfunktion für komplexe Werte durch die Gleichung $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$ definieren.

Man überzeugt sich leicht, daß zufolge dieser Definition die für reelle Werte der Exponenten geltende Funktionalgleichung $e^z \cdot e^\zeta = e^{z+\zeta}$ auch für komplexe Werte derselben ihre Geltung behält (vergl. § 12 Nr. 1). Für $\zeta = 2\pi i$ ist $e^\zeta = 1$, folglich ist $e^{z+2\pi i} = e^z$. Die Exponentialfunktion besitzt also die imaginäre Periode $2\pi i$, wie bekannt.

Der Begriff der analytischen Funktion einer komplexen Variabeln ist ganz beträchtlich enger als der Begriff der differenzierbaren Funktion einer reellen Variabeln.

Eine Funktion der reellen Variabeln x, die in dem Intervall (a, b) stetig und differenzierbar ist, ist durch die Werte, die sie in den Endpunkten des Intervalls annimmt, nicht bestimmt: jede Funktion, die sich in der Form

$$\varphi(x) + (x - a)(x - b)\psi(x)$$

darstellen läßt, nimmt in den Punkten a und b dieselben Werte an wie die Funktion $g(x)$. Die analytischen Funktionen einer komplexen Variabeln verhalten sich wesentlich anders. Um dies nachzuweisen, nehmen wir an für eine endliche Fläche E und ihre Berandung sei eine reelle Funktion u der reellen Variabeln xy definiert; die Funktion selbst und ihre partiellen Derivierten erster und zweiter Ordnung seien im Innern und auf der Berandung der Fläche E überall stetig; die Funktion u genüge der partiellen Differentialgleichung (2).

Wir behaupten: die Funktion u ist im Innern der Fläche E eindeutig bestimmt, wenn die Werte, die sie auf der Berandung annimmt, gegeben sind. Daraus folgt: die Funktion $w = u + iv$ ist im Innern für die Fläche E bis auf eine additive, rein imaginäre Konstante bestimmt, wenn die Werte ihres reellen Teils für die Berandung gegeben sind.

Wäre die aufgestellte Behauptung unrichtig, gäbe es also mehr als eine Funktion, die den angegebenen Bedingungen genügt, so müßte die Differenz U zweier dieser Funktionen in jedem Punkt der Berandung verschwinden, im übrigen aber denselben Bedingungen genügen wie die Funktion u. Nun ist nach dem Gaußschen Integralsatz (§ 10 Nr. 5)

$$\int\limits_E \left[\frac{\partial\left(U\frac{\partial U}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(U\frac{\partial U}{\partial y}\right)}{\partial y}\right] dE = \int\limits_E U\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right] dE +$$

$$+ \int\limits_E \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dE = \int U \frac{\partial U}{\partial n}\, ds,$$

wo das letzte Integral über die Berandung der Fläche E zu erstrecken ist. Dieses Integral verschwindet, weil die Funktion U auf dem Rand der Fläche E den Wert Null hat. Die Funktion U genügt ebenso wie die Funktion u der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

folglich ist

$$\int\limits_E \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] dE = 0.$$

Diese Gleichung kann nur bestehen, wenn die partiellen

Derivierten $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$ in der ganzen Fläche E gleich Null sind. Folglich ist die Funktion U eine Konstante. Weil U in der Fläche E stetig ist und auf dem Rand verschwindet, so muß diese Konstante gleich Null sein, was zu beweisen war.

§ 18. Konforme Abbildung. Wir haben die komplexe Variable $z = x + iy$ durch die Punkte einer Ebene — der z-Ebene — repräsentiert. Wir repräsentieren in analoger Weise die Werte der Funktion $w = u + iv = f(z)$ durch die Punkte einer zweiten Ebene — der w-Ebene. Ob die beiden ebenen Systeme (z) und (w) in derselben Ebene liegen oder nicht, kommt nicht in Betracht; wir wollen aber annehmen, daß die u-Achse mit der x-Achse und die v-Achse mit der y-Achse parallel und gleichgerichtet sei.

Durch die Zuordnung der Funktionswerte w zu den Werten der unabhängigen Variabeln z wird jedem Punkt der z-Ebene, der dem Definitionsbereich der Funktion w angehört, ein Punkt der w-Ebene zugeordnet. Man bezeichnet diese Zuordnung als „Abbildung" der z-Ebene auf die w-Ebene. Die spezielle Art der Abbildung, die durch die Funktion $w = (az + b):(cz + d)$ vermittelt wird, ist bereits in § 14 eingehend untersucht worden.

Sehen wir zu, wie sich die Abbildung eines kleinen den Punkt z_0 einschließenden Flächenstücks der z-Ebene gestaltet.

Wenn der absolute Betrag $|z - z_0|$ hinreichend klein gewählt wird, so wird die Funktion in erster Annäherung durch die Gleichung

$$(1) \qquad w - w_0 = f'(z_0) \cdot (z - z_0)$$

dargestellt, wo $w_0 = f(z_0)$ ist.

Das ergibt sich unmittelbar aus dem Begriff des Differentialquotienten.

Die Gleichung (1) stellt eine Ähnlichkeitstransformation dar (§ 13).

Das Vergrößerungsverhältnis ist gleich dem absoluten Betrag $|f'(z)|_0$. $\operatorname{arc} f'(z_0)$ ist der Winkel, um den ein Linienelement der z-Ebene gedreht werden muß, damit es dem entsprechenden Linienelement in der w-Ebene parallel wird.

Durchläuft der Punkt z einen kleinen Kreis um den Punkt z_0 im positiven Sinn, so durchläuft der entsprechende

Punkt w einen Kreis um den Punkt w_0 ebenfalls im positiven Sinn; es findet also Ähnlichkeit im engeren Sinn, d. h. Ähnlichkeit ohne Umlegung der Winkel statt.

Das Vergrößerungsverhältnis und der Drehungswinkel ändern sich von Punkt zu Punkt, wenn nicht gerade w eine lineare Funktion ist. Es findet daher nur Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen statt (vergl. § 14).

Aus der Ähnlichkeit der kleinsten Teile folgt, daß zwei sich schneidenden Kurven in der z-Ebene in der w-Ebene zwei Kurven entsprechen, die sich unter demselben Winkel schneiden.

Man bezeichnet eine derartige Abbildung als konform.

Jede reguläre analytische Funktion $w = f(z)$ liefert eine konforme Abbildung der z-Ebene auf die w-Ebene.

Unsere Betrachtung setzt voraus, daß die Derivierte $f'(z_0)$ von Null verschieden ist; die Punkte, in denen die Derivierte $f'(z)$ verschwindet, nehmen eine Ausnahmestellung ein: in der Umgebung dieser Punkte hört die Abbildung auf konform zu sein.

Wir wollen diese allgemeinen Auseinandersetzungen durch einige Beispiele anschaulich machen.

Erstes Beispiel:

$$w = z^n.$$

Hier bedeutet n eine ganze positive Zahl.

Wir führen in der z-Ebene und in der w-Ebene Polarkoordinaten ein und setzen

$$z = re^{ti} \quad w = \varrho e^{\vartheta i}.$$

Zwischen diesen Polarkoordinaten bestehen die Beziehungen

$$\varrho = r^n \quad \vartheta = 2nt + 2\nu\pi,$$

wo ν eine ganze Zahl bedeutet.

Einem Kreis vom Radius r um den Nullpunkt der z-Ebene entspricht demnach in der w-Ebene ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius r^n. Dem Radius Vektor in der z-Ebene, in den die $+ x$-Achse fällt, wenn man sie im positiven Sinn um den Winkel t dreht, entspricht in der w-Ebene der Radius Vektor, in den die $+ u$-Achse fällt, wenn man sie im positiven Sinn um den Winkel nt dreht. Insbesondere entspricht den n Vektoren, die mit der x-Achse die Winkel

$$0, \frac{2\pi}{n}, 2\frac{2\pi}{n}, \cdots (n-1)\frac{2\pi}{n}$$

bilden, in der w-Ebene die $+u$-Achse. Jeder der n Scheitelräume in der z-Ebene, der durch zwei aufeinanderfolgende der eben genannten Vektoren begrenzt ist, wird auf die ganze w-Ebene abgebildet.

Man kann sich eine anschauliche Vorstellung von dieser Abbildung machen, wenn man sich n Exemplare der w-Ebene übereinander gelegt denkt. Das oberste Blatt entspricht dem Scheitelraum, der von der x-Achse und dem Vektor begrenzt wird, der mit ihr den Winkel $2\pi : n$ bildet. Das zweite Blatt entspricht dem Scheitelraum, der von den Vektoren begrenzt wird, die mit der x-Achse die Winkel $2\pi : n$ und $4\pi : n$ bilden usw. Damit einer stetigen Drehung des Radius Vektors in der z-Ebene eine stetige Drehung des entsprechenden Radius Vektors in der w-Ebene entspricht, muß man sich die n Exemplare der w-Ebene längs der $+u$-Achse aufgeschnitten und dann jedes Blatt mit dem darunter liegenden der Art verbunden denken, daß die negative Halbebene längs der $+u$-Achse an die positive Halbebene des nächsten Blattes geheftet ist. Um das Bild vollkommen zu machen muß man das unterste Blatt mit dem obersten verbunden denken, was allerdings durch kein materielles Modell vollkommen versinnlicht werden kann.

Es ist klar, daß die Umgebung des Nullpunkts nicht konform abgebildet wird. Das hat seinen Grund darin, daß die Derivierte $w' = nz^{n-1}$ für $z = 0$ verschwindet.

Zweites Beispiel:

$$w = \frac{1+z^2}{2z}.$$

Die Funktion wird im Nullpunkt und im unendlich fernen Punkt unstetig. Wir schließen diese beiden Punkte aus, indem wir um den Nullpunkt einen kleinen Kreis C_0 mit dem Radius δ und einen großen Kreis C_r mit dem Radius $1 : \delta$ beschreiben. Ein Kreis C_1 vom Radius 1 um den Nullpunkt zerlegt das von den Kreisen C_0 und C_r begrenzte Ringgebiet in zwei Teile. Da sich der Wert der Funktion w nicht ändert, wenn man z durch $1 : z$ ersetzt, so werden die beiden Teilgebiete auf denselben Teil der w-Ebene abgebildet. Dieser Teil der w-Ebene wird also doppelt bedeckt: einmal durch die Abbildung des von den Kreisen C_1 und C_r begrenzten Ringgebietes E_1 und dann durch die Abbildung des von den Kreisen C_1 und C_ϱ begrenzten Ringgebietes E_2. Wir denken uns deshalb wieder zwei Exemplare der w-Ebene aufeinander gelegt. Auf das obere Blatt bilden wir die Fläche E_1, auf das untere die Fläche E_2 ab. Da die Flächen E_1 und E_2 längs des Kreises C_1 zusammenhängen, so müssen auch die beiden Blätter der w-Ebene längs der Kurve zusammenhängen, in die der Kreis C_1 abgebildet wird.

Die Punkte der z-Ebene beziehen wir wieder auf ein System von Polarkoordinaten r, t, dagegen behalten wir in der w-Ebene das System der rechtwinkligen Koordinaten u, v bei. Wir erhalten

$$w = u + iv = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(re^{it} + \frac{1}{r}e^{-it}\right)$$

also

$$(2) \qquad u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos t \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin t.$$

Gehört der Punkt z der Fläche E_1 an, so ist $r > 1$ und es hat deshalb u dasselbe Vorzeichen wie $\cos t$, v dasselbe Vorzeichen wie $\sin t$. Gehört dagegen der Punkt z der Fläche E_2 an, so haben zwar $\cos t$ und u dasselbe Vorzeichen, aber $\sin t$ und v haben entgegengesetzte Vorzeichen. Daraus folgt: das Bild desjenigen Teils der Fläche E_1, der einem bestimmten Quadranten der z-Ebene angehört, fällt in den gleichnamigen Quadranten des oberen Blattes der w-Ebene. Dagegen fällt das Bild des Teils der Fläche E_2, der dem ersten Quadranten angehört, in den vierten Quadranten des unteren Blattes der w-Ebene und vice versa. Das Bild des Teils der Fläche E_2, der im zweiten Quadranten liegt, fällt in den dritten Quadranten des unteren Blattes der w-Ebene und vice versa.

Längs des Kreises C_1 ist $r = 1$ also $v = 0$. Wächst t von 0 bis π, so nimmt u von $+1$ bis -1 ab; wächst dann t weiter von π bis 2π, so nimmt u von -1 bis $+1$ zu. Jeder der beiden Halbkreise, in die die x-Achse den Kreis C_1

zerlegt, wird daher auf den Abschnitt der u-Achse abgebildet, der von den Punkten $+1$ und -1 begrenzt wird.

In diesen beiden Punkten hört offenbar die Abbildung auf konform zu sein. Um die hier eintretenden Verhältnisse genauer zu untersuchen betrachten wir die Werte, die die Derivierte $w' = dw/dz$ längs des Kreises C_1 annimmt. Es ist allgemein

$$w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r^2}\, e^{-2it}\right)$$

also längs C_1

$$w' = \frac{1}{2}\,(1 - \cos 2t + i \sin 2t) = \sin t\,(\sin t + i \cos t)$$

oder

$$w' = \sin t\, e^{i\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}.$$

So lange der Wert von t zwischen 0 und π liegt, ist der absolute Betrag $|w'| = \sin t$ und $\operatorname{arc} w' = \pi/2 - t + 2\nu\pi$, wo ν eine ganze Zahl bedeutet. Liegt dagegen t zwischen π und 2π, so ist $|w'| = -\sin t$ und $\operatorname{arc} w' = 3\pi/2 - t + 2\nu\pi$. Wenn man also den Kreis C_1 im Sinn der wachsenden t durchläuft, wächst $\operatorname{arc} w'$ sprungweise um π, sobald man einen der beiden Punkte $+1$ oder -1 überschreitet. Nun ist $\operatorname{arc} w'$ der Winkel, den ein Linienelement in der z-Ebene mit dem entsprechenden Linienelement in der w-Ebene bildet (s. oben), im vorliegenden Fall also der Winkel, den die Fortschreitungsrichtung längs des Kreises C_1 mit der Fortschreitungsrichtung längs der Bildkurve einschließt. Wächst dieser Winkel plötzlich um 180^0, so wird in der Bildkurve die Fortschreitungsrichtung umgekehrt.

Einer beliebigen Kurve in der z-Ebene, die ganz innerhalb der Fläche E_1 oder ganz innerhalb der Fläche E_2 liegt, entspricht in der w-Ebene eine Kurve, die ganz im oberen beziehungsweise unteren Blatt der w-Ebene verläuft. Dagegen muß das Bild einer Kurve in der z-Ebene, die den Kreis C_1 überkreuzt, teils im oberen, teils im unteren Blatt der w-Ebene verlaufen. Wir müssen uns daher vorstellen, daß längs des vom Punkt $+1$ bis zum Punkt -1 reichenden Abschnitts der Abszissenachse die positive Halbebene des oberen Blattes der w-Ebene an die negative Halbebene des unteren Blattes geheftet ist und vice versa.

Wir betrachten nun das Kurvensystem, in das die Kreise um den Nullpunkt der z-Ebene abgebildet wurden. Längs eines dieser Kreise ist r konstant, t variabel. Die Gleichung der Bildkurve ist daher (s. (2))

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1.$$

Das ist die Gleichung einer Ellipse, die die auf der u-Achse liegenden Punkte $+1$ und -1 zu Brennpunkten hat. Die Kreise um den Nullpunkt der z-Ebene werden also in ein System konfokaler Ellipsen abgebildet.

Zwei Kreise, die die Radien r und $1:r$ haben, werden ineinander bedeckende Ellipsen in den beiden Blättern der w-Ebene abgebildet. Dies gilt insbesondere auch für die beiden Kreise C_0 und C_∞.

Längs einer durch den Nullpunkt der z-Ebene gehenden Geraden hat $tg\,t$ einen konstanten Wert, r ist variabel. Das Bild der Geraden ist die Hyperbel

$$\frac{u^2}{\cos^2 t}-\frac{v^2}{\sin^2 t}=1.$$

Auch diese Hyperbel hat die auf der u-Achse liegenden Punkte $+1$ und -1 zu Brennpunkten.

Demnach werden die Kreise um den Nullpunkt der z-Ebene und die Geraden durch diesen Nullpunkt in ein System konfokaler Kegelschnitte abgebildet. Entsprechend dem Umstand, daß die konzentrischen Kreise von den Geraden durch ihren Mittelpunkt unter einem rechten Winkel geschnitten werden, werden die den ersteren entsprechenden Ellipsen von den den letzteren entsprechenden Hyperbeln ebenfalls unter einem rechten Winkel geschnitten.

Drittes Beispiel:

$$w = e^z.$$

Die Exponentialfunktion hat die Periode $2\pi i$, sie nimmt also in Punkten, die auf einer Parallelen zur Ordinatenachse liegen und um ein Multiplum von 2π voneinander entfernt sind, denselben Wert an. Jeden Wert, den die Funktion überhaupt annimmt, nimmt sie also auch in einem Punkt eines Streifens an, der von zwei um 2π voneinander abstehenden

Parallelen zur Abszissenachse begrenzt wird. Wir wählen als Begrenzung des Streifens zwei Parallele zur Abszissenachse, deren Abstand von derselben $= \pi$ ist.

Die Funktion wird im unendlich entfernten Punkt unstetig. Um diesen Punkt auszuschließen, begrenzen wir unseren Streifen durch zwei Parallele zur Ordinatenachse, die den als sehr groß zu betrachtenden Abstand a von ihr haben. Die abzubildende Fläche ist also ein Rechteck. Es ist

$$w = u + iv = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

also

$$u = e^x \cos y \qquad v = e^x \sin y.$$

Einer Parallelen zur x-Achse entspricht in der w-Ebene eine Gerade, die mit der Richtung der wachsenden u den Winkel y bildet.

Einer Parallelen zur y-Achse entspricht ein Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius e^x. Der in die Gerade $y = -\pi$ fallenden Seite des Rechtecks entspricht die vom Punkt $-e^{-a}$ bis zum Punkte $-e^{a}$ reichende Strecke der u-Achse. In dieselbe Strecke der u-Achse wird die parallele Seite des Rechtecks abgebildet. Die zur Ordinatenachse parallele auf der Seite der positiven Abszissen liegende Seite des Rechtecks wird in einen Kreis um den Nullpunkt mit dem sehr großen Radius e^a, die auf der Seite der negativen Abszissen liegende Seite in einen konzentrischen Kreis mit dem Radius e^{-a} abgebildet.

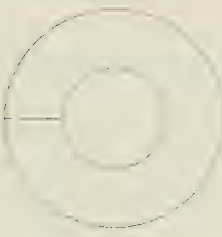


Fig. 8.

Wir erhalten somit als Abbildung des Rechtecks in der z-Ebene einen Kreisring, der längs der positiven u-Achse aufgeschnitten ist (Fig. 8). Auf der Kugel entsprechen den beiden Kreisen zwei kleine die Pole einschließende Parallelkreise, dem zwischen den Kreisen liegenden Abschnitt der u-Achse entspricht der zwischen den Parallelkreisen liegende Teil eines Halbmeridians.

Denken wir uns das Rechteck in der z-Ebene, von dem wir ausgegangen sind, beliebig oft in der Richtung der wachsenden und der abnehmenden Ordinaten um die Strecke 2π verschoben, so wird schließlich der ganze zwischen den Geraden $x = +a$ und $x = -a$ liegende Teil der z-Ebene durch kongruente Rechtecke bedeckt sein.

Jedes dieser Rechtecke wird in gleicher Weise auf den aufgeschnittenen Kreisring in der w-Ebene abgebildet.

Wir denken uns nun unendlich viele Exemplare der w-Ebene aufeinander gelegt und die aufgeschnittenen Kreisringe derart aneinander geheftet, daß der Teil eines Kreisringes, der auf der Seite der negativen v liegt, mit dem auf der Seite der positiven v liegenden Teil des darunter liegenden Kreisringes verbunden wird.

Diese unendlich viele Blätter enthaltende w-Fläche gibt nun eine konforme Abbildung des Streifens der z-Ebene, der durch die Geraden $x = +a$ und $x = -a$ begrenzt wird.

Diese Abbildung ist wechselseitig eindeutig: jedem Punkt der einen Fläche entspricht ein und nur ein Punkt der anderen.

Es ist also jedem Punkt der w-Fläche ein Wert von $z = \log w$ zugeordnet; die unendlich vielen Werte des Logarithmus, die zu einem gegebenen Wert von w gehören, werden durch über- beziehungsweise untereinander liegende Punkte der w-Fläche repräsentiert.

§ 19. Komplexe Integration. Definition des komplexen Integrals. Im Gebiet der reellen Variabeln ist ein Integral vollkommen bestimmt, wenn die Funktion, über die zu integrieren ist, und die Grenzen der Integration gegeben sind. Im Gebiet der komplexen Variabeln ist das nicht mehr der Fall; hier muß auch noch der Weg, den die Integrationsvariable zu durchlaufen hat, angegeben werden.

Nehmen wir, um dies des weiteren auszuführen, an, in der z-Ebene seien zwei Punkte

$$z_0, z_1 \quad (z_0 = x_0 + iy_0;\ z_1 = x_1 + iy_1)$$

und eine sie verbindende Kurve L gegeben. Es sei ferner für einen die Kurve L einschließenden — übrigens aber beliebig schmalen — Flächenstreifen E eine reguläre Funktion $w = u + iv = f(z)$ definiert.

Wir definieren das über die Kurve L erstreckte komplexe Integral der Funktion w durch die Gleichung (vergl. § 10)

$$(1)\quad \int \Big|_{z_0}^{\overset{z_1}{L}} w\,dz = \int \Big|_{x_0 y_0}^{\overset{x_1 y_1}{L}} (u\,dx - v\,dy) + i \int \Big|_{x_0 y_0}^{\overset{x_1 y_1}{L}} (u\,dy + v\,dx).$$

Da u und v reelle stetige Funktionen der reellen Variabeln xy sind, so haben die rechts stehenden Kurvenintegrale einen bestimmten Sinn, und dasselbe gilt daher auch für das links stehende komplexe Integral. Es ist einleuchtend, daß das komplexe Integral ebenso wie die beiden Kurvenintegrale als Grenzwert einer Summe betrachtet werden kann. Aus dieser Bemerkung ergibt sich eine obere Grenze für den absoluten Betrag des Integrals (1).

Da nämlich der absolute Betrag einer Summe nicht größer sein kann als die Summe der absoluten Beträge der Summanden (§ 12), so ist

$$(2)\qquad \left|\int w\,dz\right| \leq \int |w|\,|dz|.$$

Der absolute Betrag $|dz|$ ist nichts anderes als das Bogenelement des Integrationsweges L.

Wir ziehen aus der Gleichung (2) eine Folgerung, von der wir häufig Gebrauch machen werden.

Bezeichnen wir mit M den Maximalwert, den der absolute Betrag $|w|$ auf der Kurve L erreicht, mit l die Länge dieser Kurve.

Das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (2) ist jedenfalls nicht größer als Ml, daher ist

$$(3)\qquad \left|\int w\,dz\right| \leq Ml.$$

Wenn die Funktion $w = f(z)$ die Derivierte einer eindeutig definierten analytischen Funktion $F(z)$ ist, so gilt — wie sich unmittelbar aus der Definition des komplexen Integrals ergibt — die Gleichung

$$\int \Big|_{z_0}^{\overset{z_1}{L}} f(z)\,dz = F(z_1) - F(z_0).$$

In diesem Fall hängt also das komplexe Integral nur von den Grenzen der Integration, aber nicht von dem Weg, der sie verbindet, ab.

Dieser Fall tritt beispielsweise ein, wenn $f(z)$ eine ganze rationale Funktion ist. Im allgemeinen Fall bedarf die Frage, in wie weit das Integral vom Integrationsweg abhängt, einer genaueren Untersuchung, die wir im folgenden Paragraphen durchführen werden.

Bisher haben wir angenommen, der Integrationsweg L liege ganz im Endlichen; wir wollen nun zusehen, unter welchen Bedingungen die Integration ins Unendliche erstreckt werden darf.

Angenommen die Kurve L erstrecke sich ins Unendliche. Wir bilden sie mittelst der involutorischen Transformation $(\zeta - c)(z - c) = 1$ in eine Kurve L' ab. Der Punkt c liege nicht auf der Kurve L; unter dieser Voraussetzung erstreckt sich die Bildkurve L' nicht ins Unendliche. Nun ist

$$\int_{z_0}^{z} L\; w\,dz = -\int_{\zeta_0}^{\zeta} L' \frac{w}{(\zeta - c)^2}\,d\zeta.$$

Damit rechts die Funktion unter dem Integralzeichen längs des Integrationsweges L' stetig bleibt, ist erforderlich, daß

$$\frac{w}{(\zeta - c)^2} = (z - c)^2 w \quad \text{für } \zeta = c \quad (z = \infty) \text{ endlich bleibt.}$$

Daraus folgt: Vorausgesetzt daß das Produkt $z^2 w$ endlich bleibt, wenn der Punkt z ins Unendliche rückt, darf die Integration ins Unendliche erstreckt werden.

§ 20. Der Fundamentalsatz über komplexe Integrale. Das Integral als Funktion der oberen Grenze.

Aus dem Gaußschen Integralsatz (§ 10) ergibt sich leicht der grundlegende Satz:

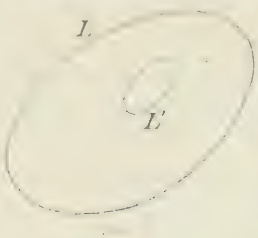
Vorausgesetzt daß sich die Funktion $w = f(z)$ in der Fläche E und auf ihrer Berandung regulär verhält, hat das über vollständige Berandung erstreckte Integral $\int w\,dz$ den Wert Null.

Es ist nämlich

$$\int w\,dz = \int (u\,dx - v\,dy) + i\int (u\,dy + v\,dx)$$
$$= -\int_E \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dE + i\int_E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dE.$$

Die beiden Flächenintegrale verschwinden zufolge der partiellen Differentialgleichungen, denen die Funktionen u und v genügen (§ 17 Nr. 1).

Um die Bedeutung dieses Satzes anschaulicher hervortreten zu lassen, nehmen wir einen Augenblick an, die Begrenzung der Fläche E bestehe aus zwei Randkurven L und L' (Fig. 9).



Wenn wir in positivem Sinn (s. § 10) über die Begrenzung der Fläche E integrieren, so wird die Kurve L in dem Sinn durchlaufen, daß die von ihr eingeschlossene Fläche zur Linken liegt, die Kurve L' in dem Sinn, daß die von ihr eingeschlossene Fläche zur Rechten liegt. Die Summe der in diesem Sinn genommenen über L und L' erstreckten Integrale ist Null. Wir kehren in dem über die Kurve L' erstreckten Integral die Integrationsrichtung um und müssen dann selbstverständlich das Vorzeichen des Integrals ändern.

Es ergibt sich: die beiden über die Kurven L und L' erstreckten Integrale sind einander gleich, wenn die beiden Integrationen in dem Sinn erfolgen, daß die vom Integrationsweg eingeschlossene Fläche zur Linken liegt. Wir drücken dies nur anders aus, wenn wir sagen:

der Wert des Integrals ändert sich nicht, wenn wir den Integrationsweg L auf den Weg L' zusammenziehen, vorausgesetzt daß in der Fläche, die der Weg L bei der Deformation überstreicht, die Funktion w sich überall regulär verhält.

Nehmen wir nunmehr an, die Fläche E besitze nur eine Randkurve. Wir nehmen auf dieser Kurve zwei Punkte z_0 und z_1 an, durch die sie in zwei Kurvenbögen L und L' zerlegt wird (Fig. 10). Zufolge des Fundamentalsatzes ist die Summe

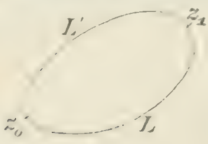


Fig. 10.

$$\int_{z_0}^{z_1} L\; w\,dz + \int_{z_1}^{z_0} L'\; w\,dz = 0,$$

folglich ist

$$(1) \qquad \int_{z_0}^{z_1} L\; w\,dz = \int_{z_0}^{z_1} L'\; w\,dz.$$

Das über den Weg L' erstreckte Integral ist also gleich dem über den Weg L erstreckten.

Wir können uns den Weg L' durch Deformation des Wegs L entstanden denken und den eben bewiesenen Satz in der Form aussprechen:

Das Integral $\int_{z_0}^{z_1} (L)\, w\, dz$ ändert seinen Wert nicht, wenn man die Integrationsgrenzen $z_0 z_1$ festhält, den Integrationsweg L aber deformiert, sofern nur die Funktion w in der Fläche, die der Integrationsweg bei seiner Deformation überstreicht, überall regulär ist.

Nehmen wir nun an, die Funktion w verhalte sich in der einfach zusammenhängenden Fläche F regulär (s. § 8 Schluß). Da jede geschlossene in der Fläche F verlaufende Kurve die vollständige Begrenzung eines Stücks dieser Fläche bildet, so folgt: Ziehen wir nur solche Integrationswege in Betracht, die nicht aus der Fläche F heraustreten, so ist das Integral

$$\int_{z_0}^{z_1} w\, dz$$

vom Wege unabhängig.

Wir halten die untere Integrationsgrenze z_0 fest, betrachten dagegen die obere Grenze z_1 als variabel. Der Integralwert

$$J(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz$$

ist der komplexen Größe z_1 eindeutig zugeordnet; um zu beweisen, daß er eine reguläre Funktion dieser Größe ist, müssen wir die Existenz einer stetigen Derivierten $J'(z_1)$ nachweisen. Nun ist

$$J(z_1 + \Delta z_1) - J(z_1) = \int_{z_0}^{z_1+\Delta z_1} f(z)\, dz - \int_{z_0}^{z_1} f(z)\, dz = \int_{z_1}^{z_1+\Delta z_1} f(z)\, dz.$$

Hieraus folgt:

$$(2)\qquad \frac{J(z_1 + \Delta z_1) - J(z_1)}{\Delta z_1} - f(z_1) = \frac{1}{\Delta z_1} \int_{z_1}^{z_1+\Delta z_1} [f(z) - f(z_1)]\, dz.$$

Den Weg, über den das Integral $\int_{z_1}^{z_1+\Delta z_1} [f(z) - f(z_1)]\, dz$ zu erstrecken ist, wählen wir geradlinig. Der absolute Betrag dieses Integrals ist jedenfalls nicht größer als das Produkt aus der Länge des Integrationsweges $|\Delta z_1|$ in das Maximum des absoluten Betrags, den die Differenz $f(z) - f(z_1)$ auf dem Integrationsweg erreicht. Dieses Maximum konvergiert, weil die Funktion $f(z)$ stetig ist mit Δz_1 gegen Null. Folglich konvergiert auch der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (2) mit Δz_1 gegen Null und es folgt:

$$(3) \qquad \frac{d}{d z_1}\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = f(z_1).$$

Damit ist bewiesen:

Sofern der Integrationsweg auf das Innere der einfach zusammenhängenden Fläche F beschränkt wird, ist das bestimmte Integral $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ eine reguläre analytische Funktion der oberen Grenze.

§ 21. Der Residuensatz. Es sei a ein Begrenzungspunkt des Definitionsbereichs A der Funktion $w = f(z)$. Wir legen um den Punkt a eine geschlossene Kurve C, die, vom Punkt a abgesehen, keinen Begrenzungspunkt des Bereichs A einschließt und durch keinen Begrenzungspunkt hindurchgeht. Da sich die Funktion w längs der Kurve C regulär verhält, so hat das im positiven Sinn über die Kurve C erstreckte Integral

$$J = \int f(z)\,dz$$

einen bestimmten Sinn.

Der Integralwert J ändert sich nicht, wenn wir die Kurve C deformieren, vorausgesetzt daß die Funktion in dem bei der Deformation überstrichenen Flächenstück regulär ist (vergl. den vorigen Paragraphen); dieser Integralwert ist also von der Gestalt der Kurve C unabhängig.

Nach dem Vorgang Cauchys nennt man den Quotienten $1/2\pi i \cdot J$ das Residuum der Funktion $f(z)$ für den Punkt a.

Wir wollen es mit $R(a)$ bezeichnen.

Wir berechnen das Residuum für die einfachsten Fälle.

Nehmen wir zunächst an, es sei

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^n},$$

wo n eine ganze positive Zahl bedeutet.

Als Integrationsweg wählen wir einen Kreis vom Radius ϱ um den Punkt a. Auf der Peripherie dieses Kreises ist

$$z - a = \varrho e^{\vartheta i}, \qquad dz = \varrho e^{\vartheta i} i \, d\vartheta,$$

folglich ist

$$R(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varrho^{n-1}} e^{-(n-1)\vartheta i} i \, d\vartheta.$$

Ist $n = 1$, so ist

$$R(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\vartheta = 1.$$

Ist $n > 1$, so ist

$$R(a) = \frac{1}{2\pi \varrho^{n-1}} \left[\frac{e^{-(n-1)\vartheta i}}{-(n-1)i} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Das Residuum der Funktion $1:(z-a)^n$ für den Punkt a ist also $= 1$ oder $= 0$, je nachdem $n = 1$ oder $n > 1$ ist.

Nehmen wir zweitens an, in der Umgebung des Punktes a verhalte sich zwar nicht die Funktion $f(z)$ selbst, wohl aber das Produkt $\varphi(z) = (z-a)f(z)$ regulär. Das Residuum

$$R(a) = \frac{1}{2\pi i} \int f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(z)}{z-a} dz$$

läßt sich in der Form

$$R(a) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{z-a} dz + \frac{\varphi(a)}{2\pi i} \int \frac{dz}{z-a}$$

darstellen.

Der Quotient $(\varphi(z) - \varphi(a)) : (z-a)$ konvergiert gegen den endlichen Grenzwert $\varphi'(a)$, wenn $z - a$ gegen Null konvergiert; der Quotient verhält sich also in der Umgebung des Punktes a regulär. Daher verschwindet das erste Glied auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung. Daher ist

$$R(a) = \varphi(a) = \lim_{z=a} (z-a) f(z).$$

Wir fassen den Inhalt dieser Gleichung in Worte:

Existiert der Grenzwert $\lim_{z=a} (z-a) f(z)$, so ist dieser Grenzwert das Residuum der Funktion $f(z)$ für den Punkt a.

Gehört der unendlich ferne Punkt zu den isolierten Begrenzungspunkten des Definitionsbereichs der Funktion $w = f(z)$, so entspricht auch diesem Punkt ein Residuum $R(\infty)$. Der allgemeinen Definition des Residuums entsprechend ist

$$R(\infty) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} f(z)\,dz,$$

wo das Integral rechts im positiven Sinn über eine den unendlich fernen Punkt einschließende Kurve C zu erstrecken ist. Was hierunter zu verstehen ist, wird sofort klar, wenn wir die Werte der komplexen Variabeln z durch Punkte der Kugel repräsentieren: Auf der Kugel stellt sich C als eine kleine den Südpol einschließende Kurve — etwa als Parallelkreis — dar. Dieser Parallelkreis ist in dem Sinn zu durchlaufen, daß der Südpol zur Linken liegt. In der z-Ebene entspricht diesem kleinen Parallelkreis ein Kreis um den Nullpunkt, dessen Radius sehr groß ist, und dieser Kreis muß in dem Sinn durchlaufen werden, daß sein Mittelpunkt zur Rechten liegt.

Wir setzen $z = 1 : \zeta$ und erhalten

$$R(\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int w\,\frac{d\zeta}{\zeta^2},$$

wo die Integration im positiven Sinn über einen kleinen Kreis um den Nullpunkt der ζ-Ebene zu erstrecken ist.

Aus dieser Gleichung ergibt sich:

Wenn ein Grenzwert $\lim\limits_{\zeta=0} w : \zeta$ oder was dasselbe sagen will, ein Grenzwert $\lim\limits_{z=\infty} zw$ existiert, so ist das Residuum $R(\infty)$ diesem Grenzwert entgegengesetzt gleich. Insbesondere ist $R(\infty) = 0$, wenn der absolute Betrag des Produkts $z^2 w$ bei wachsendem absoluten Betrag z unter einer angebbaren Größe bleibt.

Nehmen wir an im Innern einer gegebenen Fläche E liegen n Begrenzungspunkte $a_1\, a_2 \cdots a_n$ des Definitionsbereichs der Funktion $f(z)$; von diesen Punkten abgesehen, verhalte sich die Funktion im Innern und auf der Berandung der Fläche E überall regulär.

Wir legen um jeden der n Punkte a_ν einen kleinen Kreis und bezeichnen mit E' den Teil der Fläche E, der nach Ausscheidung der Kreisflächen übrig bleibt. Im Innern und auf der Berandung der Fläche E' verhält sich die Funktion $f(z)$ überall regulär, daher ist das über die vollständige Begrenzung dieser Fläche erstreckte Integral

$$J = \int f(z)\,dz \text{ gleich Null.}$$

Die Begrenzung der Fläche E' besteht aus der Begrenzung der Fläche E und aus den Peripherien der Kreise, die um die Punkte a_ν gelegt sind. Die Integration ist in dem Sinn auszuführen, daß die Fläche E' zur Linken liegt; demnach ist über die Peripherie des Kreises, der den Punkt a_ν einschließt, in dem Sinn zu integrieren, daß dieser Punkt zur Rechten liegt (s. Fig. 11). Der Beitrag zu dem Integral J, der von diesem Kreis herrührt, ist somit $-2\pi i R(a_\nu)$. Daraus folgt:

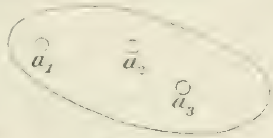


Fig. 11

Das über die Begrenzung der Fläche E erstreckte Integral $\int f(z)\,dz$ ist gleich dem Produkt von $2\pi i$ in die Summe der Residuen, die den im Innern der Fläche E liegenden Begrenzungspunkten a_ν entsprechen.

Für rationale Funktionen gilt der Satz:

Die Summe der Residuen einer rationalen Funktion ist gleich Null.

Zum Beweis legen wir um den Nullpunkt der z-Ebene einen Kreis C, der alle im Endlichen liegenden Begrenzungspunkte des Definitionsbereichs der rationalen Funktion $f(z)$ einschließt.

Das Integral

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int f(z)\,dz$$

im positiven Sinn über die Peripherie des Kreises C erstreckt, ist, wie eben bewiesen worden ist, gleich der Summe der Residuen, die zu den im Endlichen liegenden Unstetigkeitspunkten der Funktion $f(z)$ gehören.

Der Kreis C kann aber auch als eine den unendlich fernen Punkt einschließende Kurve betrachtet werden. Durchläuft man den Kreis in dem Sinn, daß der Nullpunkt zur Linken liegt, so liegt der unendlich ferne Punkt zur Rechten. Daher ist J

gleich dem negativ genommenen Residuum der Funktion $f(z)$ für den unendlich fernen Punkt. Daraus folgt, daß die Summe aller Residuen den Wert Null hat.

§ 22. Das Integral $\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. Die Funktion $w = f(z)$ der komplexen Variabeln z verhalte sich im Innern und auf der Berandung der gegebenen Fläche E regulär. Es sei z ein beliebig zu wählender aber fester Punkt im Innern der Fläche E, ζ ein variabler Punkt. Die Funktion $f(\zeta) : (\zeta - z)$ der Variabeln ζ wird unstetig, wenn sich der Punkt ζ dem Punkt z nähert, verhält sich aber im übrigen in der Fläche E regulär. Das Residuum für den Punkt z ist

$$\lim_{\zeta = z} (\zeta - z) \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = f(z).$$

Daher ist zufolge des Residuensatzes

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z),$$

wo links die Integration über die Begrenzung der Fläche E zu erstrecken ist.

Diese wichtige Gleichung stammt von Cauchy.

Zunächst ist ersichtlich: Der Wert, den die Funktion in einem Punkt im Innern der Fläche E annimmt, ist durch die Werte, die sie längs der Berandung annimmt, vollkommen bestimmt (vergl. den in § 17 bewiesenen weitergehenden Satz).

Nehmen wir an, die Fläche E sei eine Kreisfläche, deren Mittelpunkt der Punkt z ist. Längs der Peripherie des Kreises ist

$$\zeta - z = re^{i\vartheta} \quad d\zeta = re^{i\vartheta} i\, d\vartheta \quad \text{also} \quad \frac{d\zeta}{\zeta - z} = i\, d\vartheta.$$

Folglich ist

$$w = f(z) = u(xy) + iv(xy)$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(x + r\cos\vartheta,\ y + r\sin\vartheta) + iv(x + r\cos\vartheta,\ y + r\sin\vartheta)]\, d\vartheta.$$

Die Werte, die die Funktionen u und v im Mittelpunkt des Kreises annehmen, sind also die Mittelwerte aus den Werten, die längs der Peripherie stattfinden. Daraus folgt: die Funktionen u und v besitzen weder ein Maximum noch ein Minimum.

Durch Differentiation unter dem Integralzeichen, die im vorliegenden Fall offenbar zulässig ist, leitet man aus der Gleichung (1) die folgenden ab:

$$(2) \qquad f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

$$f''(z) = \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta$$

und allgemein

$$(3) \qquad f^{(n)}(z) = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Eine analytische Funktion der komplexen Variabeln z besitzt also, soweit sie sich regulär verhält, Derivierte jeder Ordnung.

Hierzu ist zu bemerken: Die Existenz der ersten Derivierten ist bei der Definition der analytischen Funktion vorausgesetzt worden; die Existenz der höheren Derivierten ergibt sich hieraus als notwendige Folge. Im Gebiet der reellen Variabeln ist das bekanntlich nicht der Fall (vergl. § 6).

Von der Gleichung (2) ausgehend beweist man leicht den wichtigen Satz:

Eine Funktion der komplexen Variabeln z, die sich in der ganzen z-Ebene (auch im unendlich fernen Punkt) regulär verhält, ist eine Konstante.

Bezeichnen wir mit r den absoluten Betrag der Größe z, mit M die obere Grenze der absoluten Beträge der Funktion $f(z)$. Um den Nullpunkt der z-Ebene legen wir einen Kreis, dessen Radius R wir sehr groß annehmen. Zufolge (2) ist das Integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

erstreckt über die Kreisperipherie $= f'(z)$. Nun ist auf der Kreisperipherie

$$\left| \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right| \leqq \frac{1}{(R - r)^2}, \quad |f(\zeta)| \leqq M \quad \text{und} \quad |d\zeta| = r\,d\vartheta,$$

folglich ist

$$|f'(z)| < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{M}{(R - r)^2} R\,d\vartheta = \frac{MR}{(R - r)^2}.$$

Der Ausdruck rechts konvergiert bei wachsendem R gegen Null, folglich ist $f'(z) = 0$, also $f(z)$ konstant w. z. b. w.

Der Definitionsbereich einer jeden analytischen Funktion besitzt demnach mindestens einen Grenzpunkt.

Wir ziehen aus der Gleichung (1) noch eine Folgerung, von der wir im folgenden Abschnitt zu Beweiszwecken Gebrauch machen werden.

Nehmen wir an, es sei ein analytischer Ausdruck $w = f(z)$ gegeben, der jedem Punkt eines kontinuierlichen Bereichs einen eindeutig bestimmten komplexen Wert $w = u + iv$ zuordnet. Es sei bewiesen, daß w stetige Funktion der reellen Variabeln xy ist, und es sei weiter bewiesen, daß für jeden Punkt des Bereichs die Gleichung

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}$$

gilt, wo die Integration über einen hinreichend kleinen Kreis um den Punkt z zu erstrecken ist.

Unter diesen Voraussetzungen ist $f(z)$ eine analytische Funktion der komplexen Variabeln z. Denn es existiert eine stetige Derivierte $f'(z)$, die durch die Gleichung (2) bestimmt ist.

Wenn also für jeden Punkt eines Bereichs die Gleichung (1) gilt, so genügen in diesem Bereich die Funktionen u und v den partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\S\ 17).$$

§ 23. Beispiele zur komplexen Integration. Mit Hilfe der komplexen Integration lassen sich die Werte von bestimmten Integralen, die anderweitig nur mühsam und durch Anwendung besonderer Kunstgriffe ermittelt werden können, in sehr einfacher und durchsichtiger Weise bestimmen.

Wir wollen dies an einigen Beispielen zeigen.

Erstes Beispiel. Es sei das Integral

$$J = \int_0^\infty \frac{du}{u^{1-k}(1+u)}$$

vorgelegt.

Die Konstante k sei reell, positiv und < 1; die Integrationsvariable u sei reell; unter u^{1-k} ist der reelle positive Wert dieser Potenz zu verstehen.

An der unteren Grenze wird zwar das Integral unendlich aber das Produkt des Integranden und der Potenz u^{1-k} bleibt stetig.

Wenn die Variable u über alle Grenzen wächst, so bleibt das Produkt des Integranden und der Potenz u^{2-k} endlich. Demnach hat das Integral J einen bestimmten Sinn (vgl. § 7).

Wollte man die Größe u direkt komplexe Werte annehmen lassen, so hätte es Schwierigkeiten zu definieren, was unter dem Ausdruck u^{1-k} zu verstehen ist. Wir führen deshalb zunächst eine neue Variable durch die Gleichung $u = e^x$ ein. Durchläuft die Variable u das Intervall 0 bis ∞, so durchläuft die Variable x das Intervall $-\infty$ bis $+\infty$. Folglich ist

$$J = \int_0^{\infty} \frac{du}{u^{1-k}(1+u)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{kx}\,dx}{1+e^x}.$$

Die unter dem Integralzeichen stehende Funktion — sie möge zur Abkürzung mit $f(x)$ bezeichnet werden — ist auch für komplexe Werte der Variabeln eindeutig definiert.

Als Weg für die Integration im komplexen Gebiet wählen wir die Begrenzung eines Rechtecks, dessen Eckpunkte die Koordinaten

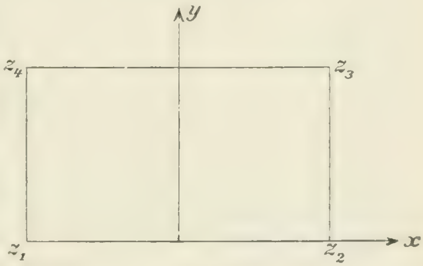


Fig. 12.

$$-a, 0; \quad +a, 0; \quad +a, 2\pi; \quad -a, 2\pi$$

haben (Fig. 12). Wir bezeichnen diese Eckpunkte der Reihe nach mit $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$, die über die einzelnen Seiten erstreckten Integrale mit $J_1\, J_2\, J_3\, J_4$.

Im Innern des Rechtecks wird die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{kz}}{1+e^z}$$

nur in einem Punkt unstetig, nämlich für $z = \pi i$. Für diesen Wert von z ist das Residuum

$$\lim_{z=\pi i} (z - \pi i) f(z) = e^{k\pi i} \lim \frac{z - \pi i}{1 + e^z} = - e^{k\pi i}.$$

Folglich ist

(1) $$J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = -2\pi i\, e^{k\pi i}.$$

Wir untersuchen nun die vier Integrale J_i.

Längs der Seite $z_1 z_2$ ist $z = x$ und x wächst von $-a$ bis $+a$. Demnach ist

$$(2) \qquad J_1 = \int_{-a}^{+a} f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \lim_{a=\infty} J_1 = J.$$

Längs der Seite $z_3 z_4$ ist $z = x + 2\pi i$; x nimmt von $+a$ bis $-a$ ab. Folglich ist

$$J_3 = \int_{+a}^{-a} \frac{e^{k(x+2\pi i)}\,dx}{1 + e^{x+2\pi i}} = -e^{2k\pi i}\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx, \quad \text{also}$$

$$(3) \qquad J_3 = -e^{2k\pi i} J_1.$$

Längs der Seite $z_2 z_3$ ist $z = a + yi$; y wächst von 0 bis 2π. Nun ist

$$f(a + iy) = \frac{e^{k(a+iy)}}{1 + e^{a+iy}} = e^{-(1-k)a}\frac{e^{iky}}{e^{-a} + e^{iy}},$$

folglich

$$J_2 = e^{-(1-k)a}\int_0^{2\pi} \frac{e^{iky}\,i\,dy}{e^{-a} + e^{iy}}.$$

Der vor dem Integralzeichen stehende Faktor konvergiert bei wachsendem a gegen Null, weil $k < 1$ ist, das Integral bleibt endlich, folglich ist

$$(4) \qquad \lim_{a=\infty} J_2 = 0.$$

Längs der Seite $z_4 z_1$ ist $z = -a + iy$; y nimmt von 2π bis 0 ab. Demnach ist

$$J_4 = \int_{2\pi}^{0} \frac{e^{k(-a+iy)}\,i\,dy}{1 + e^{-a+iy}} = -e^{-ka}\int_0^{2\pi} \frac{e^{iky}\,i\,dy}{1 + e^{-a+iy}}.$$

Weil k positiv ist, so konvergiert auch dieses Integral bei unendlich wachsendem a gegen Null. Es ist also

$$(5) \qquad \lim_{a=\infty} J_4 = 0.$$

Setzen wir die Werte (2), (3), (4) und (5) in (1) ein, so erhalten wir, wenn wir a unendlich wachsen lassen

$$(1 - e^{2k\pi i})\,J = -2\pi i\; e^{k\pi i},$$

also

$$J = \frac{2\pi i\, e^{k\pi i}}{e^{2k\pi i} - 1} = \frac{2\pi i}{e^{k\pi i} - e^{-k\pi i}} = \frac{\pi}{\sin k\pi}.$$

Es ist also

$$\int_0^\infty \frac{du}{u^{1-k}} \frac{1}{1+u} = \frac{\pi}{\sin k\pi},$$

vorausgesetzt daß $0 < k < 1$ ist.

Zweites Beispiel. Das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

hat, wie leicht zu beweisen ist, einen bestimmten endlichen Wert, und zwar ist dieser Wert bekanntlich $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Übrigens wird sich dieser Wert auch aus den folgenden Entwicklungen ergeben (s. das dritte Beispiel). Wir lassen wieder an Stelle der reellen Variabeln x die komplexe Variable z treten und wählen als Integrationsweg die Begrenzung eines Kreissektors $0 z_1 z_2$ (s. Fig. 13). Der Mittelpunkt des Kreisbogens $z_1 z_2$ sei der Nullpunkt, der Radius werde mit r, der Zentriwinkel mit γ bezeichnet. Der eine der begrenzenden Radien falle in die reelle Achse, der andere auf die Seite der wachsenden Ordinaten.

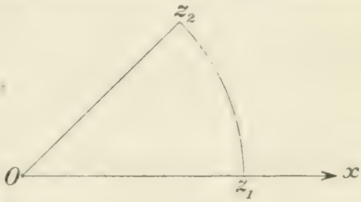


Fig. 13.

Im Innern und auf der Begrenzung des Sektors ist die Funktion e^{-z^2} regulär, folglich ist das über die Begrenzung des Sektors erstreckte Integral $\int e^{-z^2} dz$ gleich Null. Wir werden nun beweisen: vorausgesetzt daß $\gamma < \pi/4$ ist, konvergiert das über den Kreisbogen $z_1 z_2$ erstreckte Integral bei unbegrenzt wachsendem Radius r gegen Null. Folglich konvergieren die beiden Integrale, die über die beiden Radien $0 z_1$ und $0 z_2$ zu erstrecken sind, gegen denselben Grenzwert.

Längs des Radius $0 z_2$ ist

$$z = t(\cos\gamma + i\sin\gamma),$$
$$z^2 = t^2(\cos 2\gamma + i\sin 2\gamma),$$
$$dz = (\cos\gamma + i\sin\gamma)\, dt,$$

wo t eine reelle Variable bedeutet. Aus der Gleichung

$$\int_0^{z_2} e^{-z^2} dz = \int_0^{z_1} e^{-z^2} dz + \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz$$

folgt somit, wenn wir r über alle Grenzen wachsen lassen

$$\int_0^\infty e^{-t^2 (\cos 2\gamma + i \sin 2\gamma)} (\cos\gamma + i\sin\gamma)\, dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

also

$$\int_0^\infty e^{-t^2 \cos 2\gamma} [\cos(t^2 \sin 2\gamma) - i \sin(t^2 \sin 2\gamma)]\, dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,(\cos\gamma - i \sin\gamma).$$

Wir trennen Reelles und Imaginäres und erhalten

$$\int_0^\infty e^{-t^2 \cos 2\gamma} \cos(t^2 \sin 2\gamma)\, dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\cos\gamma,$$

$$\int_0^\infty e^{-t^2 \cos 2\gamma} \sin(t^2 \sin 2\gamma)\, dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\sin\gamma.$$

Insbesondere ergibt sich für $\gamma = \frac{\pi}{4}$

$$\int_0^\infty \cos t^2\, dt = \int_0^\infty \sin t^2\, dt = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Es erübrigt noch zu beweisen, daß das über den Kreisbogen $z_1 z_2$ erstreckte Integral bei wachsendem Radius gegen Null konvergiert, wenn $\gamma \leqq \frac{\pi}{4}$ ist.

Längs des Bogens $z_1 z_2$ ist

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad dz = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\, i\, d\varphi;$$

φ wächst von Null bis γ. Es ist demnach

$$\int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz = \int_0^\gamma e^{-r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)}\, r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\, i\, d\varphi.$$

Der absolute Betrag des Integranden ist $re^{-r^2\cos 2\varphi}$, folglich ist der absolute Betrag des Integrals kleiner als

$$M = r\int_0^\gamma e^{-r^2 \cos 2\varphi}\, d\varphi.$$

Nun liegt der Wert des Quotienten

$$\frac{\cos 2\varphi}{\frac{\pi}{2} - 2\varphi} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right)}{\frac{\pi}{2} - 2\varphi},$$

so lange 2φ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bleibt, zwischen den Grenzen $\frac{2}{\pi}$ und 1. Es ist somit im Integrationsintervall

$$\cos 2\varphi \geqq \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) = 1 - \frac{4\varphi}{\pi}.$$

Demnach ist

$$M < r\int_0^{\gamma} e^{-\left(1-\frac{4\varphi}{\pi}\right)r^2}\,d\varphi,$$

also

$$M < re^{-r^2}\cdot\frac{\pi}{4r^2}\left(e^{\frac{4\gamma}{\pi}r^2} - 1\right).$$

Da $\gamma < \frac{\pi}{4}$ ist, so ist demnach

$$M < \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{r}\left(1 - e^{-r^2}\right).$$

Bei wachsendem r konvergiert also M gegen Null.

Wir leiten noch eine zweite auf das Integral $\int e^{-z^2}dz$ bezügliche Formel ab. Zu dem Zweck wählen wir als Integrationsweg die Begrenzung eines Rechtecks, dessen Eckpunkte die Koordinaten

$-a, o;\quad +a, o;$
$+a, bi;\quad -a, bi$

besitzen, wo a und b reelle positive Konstante bedeuten (s. Fig. 14).

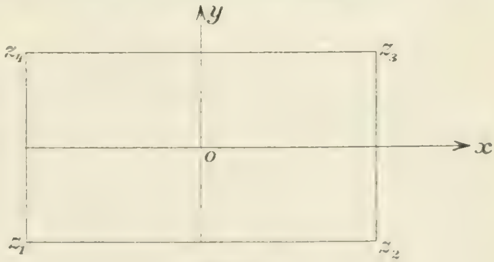


Fig. 14.

Wir bezeichnen die Eckpunkte der Reihe nach mit $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$, die über die Seiten des Rechtecks erstreckten Integrale mit $J_1\, J_2\, J_3\, J_4$.

Im Innern des Rechtecks verhält sich die Funktion e^{-z^2} regulär, folglich ist

$$(6)\qquad J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = 0.$$

Längs der Seite $z_1 z_2$ ist $z = x$, also ist

$$(7) \qquad J_1 = \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2}\,dz = \int_{-a}^{+a} e^{-x^2}\,dx.$$

Längs der Seite $z_3 z_4$ ist $z = x + ib$, folglich ist

$$(8) \qquad J_3 = \int_{z_3}^{z_4} e^{-z^2}\,dz = -\int_{-a}^{+a} e^{-(x+ib)^2}\,dx.$$

Längs der Seite $z_2 z_3$ ist $z = a + iy$, folglich ist

$$J_2 = \int_{z_2}^{z_3} e^{-z^2}\,dz = \int_{0}^{b} e^{-(a+iy)^2}\,i\,dy.$$

Da der absolute Betrag

$$|e^{-(a+iy)^2}| = e^{-(a^2-y^2)} < e^{-(a^2-b^2)}$$

ist, so ist

$$J_2 < be^{-(a^2-b^2)}.$$

Wenn wir den Wert der Konstanten b festhalten, a dagegen über alle Grenzen wachsen lassen, so ergibt sich

$$(9) \qquad \lim_{a=\infty} J_2 = 0.$$

In derselben Weise ist zu zeigen, daß

$$(10) \qquad \lim_{a=\infty} J_4 = 0$$

ist.

Aus den Gleichungen (6) bis (10) folgt für unendlich wachsende a:

$$(11) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ib)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Nun ist

$$e^{-(x+ib)^2} = e^{b^2} \cdot e^{-x^2}(\cos 2bx + i \sin 2bx),$$

somit folgt aus (11):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx\,dx = \sqrt{\pi}\,e^{-b^2}.$$

Wir ziehen aus der Gleichung (11) noch eine Folgerung. Wir lassen in dem links stehenden Integral an Stelle der Variabeln x $x + x_0$ treten, wo x_0 eine reelle Konstante bedeutet, und setzen $x_0 + ib = c$. Wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+c)^2}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Diese Gleichung bringt zum Ausdruck, daß der Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+c)^2}\,dx$$

von der komplexen Konstanten c unabhängig ist.

Drittes Beispiel.

Zum Schluß benützen wir die komplexe Integration zur Lösung eines berühmten zahlentheoretischen Problems. In der Theorie der Kreisteilung wird man zu der Aufgabe geführt, eine Summe der Form

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\nu^2\pi i}{n}}$$

zu bestimmen, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet. Gauß hat der Bestimmung dieser Summe eine eigene Abhandlung gewidmet; man bezeichnet sie daher als „Gaußsche Summe".

Das allgemeine Glied $e^{\frac{2\nu^2\pi i}{n}}$ der Summe S_n kann als Produkt der Größe $2\pi i$ mit dem Residuum der Funktion

$$f(z) = \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}z^2}}{e^{2\pi i z} - 1}$$

für den Punkt ν betrachtet werden.

In der Tat ist

$$\lim_{z=\nu} (z-\nu) f(z) = e^{\frac{2\nu^2\pi i}{n}} \lim_{z=\nu} \frac{z-\nu}{e^{2\pi i z}-1} = \frac{1}{2\pi i} e^{\frac{2\nu^2\pi i}{n}}.$$

Daher ist

$$S_n = \int f(z)\,dz, \tag{12}$$

wo die Integration im positiven Sinn über die vollständige Begrenzung einer Fläche E zu erstrecken ist, die die Punkte $0, 1, 2, \ldots n-1$ auf der Abszissenachse einschließt, alle anderen Punkte dieser Achse aber, deren Abszisse eine ganze Zahl ist, ausschließt. Die Fläche E muß nun so gewählt werden, daß die Integration über ihre Begrenzung ausgeführt werden kann. Am einfachsten gestaltet sich die Integration, wenn wir für E die Fläche eines Parallelogramms wählen. Zwei Seiten desselben seien der Abszissenachse parallel und gleich weit von ihr entfernt; die Länge dieser Seiten sei n, ihr Abstand von der Abszissenachse b. Die beiden anderen Seiten mögen mit der Richtung der wachsenden Abszissen einen Winkel von 45^0 bilden; die eine dieser Seiten schneide die Achse der reellen Zahlen in einem Punkt mit der Abszisse a, die andere in einem Punkt mit der Abszisse $a' = a - n$. Damit das Parallelogramm die Punkte $0, 1, 2, \ldots n-1$ einschließt, muß

$$n - 1 < a < n$$

sein. Die Eckpunkte des Parallelogramms bezeichnen wir wieder mit $z_1\, z_2\, z_3\, z_4$ (s. Fig. 15). Wir beweisen zunächst, daß die beiden Integrale, die über die Seiten $z_1\, z_2$ und $z_3\, z_4$ zu erstrecken sind, gegen Null konvergieren, wenn der Abstand b dieser Seiten von der Abszissenachse über alle Grenzen wächst. Da die Länge der beiden Seiten unverändert $= n$ bleibt, wenn b wächst, so brauchen wir nur zu zeigen, daß das Maximum des absoluten Betrages, den die Funktion $f(z)$ auf dieser Seite erreicht, bei wachsendem b gegen Null konvergiert. Nun ist

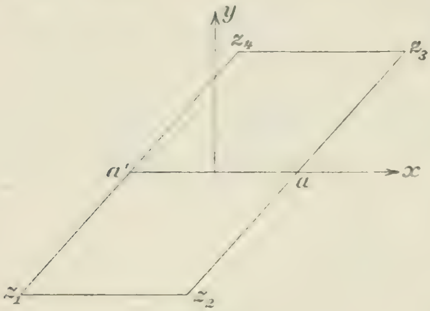


Fig. 15.

$$|e^{2\pi i z}| = e^{-2\pi y} \quad \text{also} \quad |e^{2\pi i z} - 1| > 1 - e^{-2\pi y}.$$

Ferner ist

$$\left| e^{\frac{2\pi i}{n} z^2} \right| = e^{-\frac{4\pi}{n} x y}$$

folglich ist

$$|f(z)| \leq \frac{e^{-\frac{4\pi}{n} x y}}{1 - e^{-2\pi y}}.$$

Längs der Seite $z_1\, z_2$ besitzt die Ordinate den konstanten Wert $-b$, die Abszisse ist negativ und dem absoluten Betrag nach $> b - a$.

Demnach ist längs $z_1 z_2$

$$|f(z)| < \frac{e^{-\frac{4\pi}{n}b(b-a)}}{e^{2\pi b}-1}. \tag{13}$$

Längs der Seite $z_3 z_4$ besitzt die Ordinate den konstanten Wert b, die Abszisse ist $> b - a'$. Folglich ist längs $z_3 z_4$

$$|f(z)| < \frac{e^{-\frac{4\pi}{n}b(b-a)}}{1-e^{-2\pi b}}. \tag{14}$$

Die rechten Seiten der Ungleichungen (13) und (14) konvergieren offenbar mit wachsendem b gegen Null, was zu beweisen war.

Es bleiben die auf die Seiten $z_2 z_3$ und $z_4 z_1$ bezüglichen Integrale zu ermitteln. In dem Integral

$$\int_{z_4}^{z_1} f(z)\,dz$$

kehren wir die Integrationsrichtung um und führen an Stelle der Variabeln z die Variable $\zeta = z + n$ ein. Durchläuft der Punkt z die Seite $z_1 z_4$, so durchläuft der Punkt ζ die Seite $z_2 z_3$. Demnach ist

$$\int_{z_4}^{z_1} f(z)\,dz = -\int_{z_1}^{z_4} f(z)\,dz = -\int_{z_2}^{z_3} f(\zeta - n)\,d\zeta.$$

Wir schreiben statt ζ wieder z und erhalten

$$\int_{z_2}^{z_3} f(z)\,dz + \int_{z_4}^{z_1} f(z)\,dz = \int_{z_2}^{z_3} [f(z) - f(z-n)]\,dz. \tag{15}$$

Nun ist, weil die Exponentialfunktion die Periode $2\pi i$ besitzt

$$f(z) - f(z-n) = \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}z^2} - e^{\frac{2\pi i}{n}z^2 - 4\pi i z}}{e^{2\pi i z} - 1} = e^{\frac{2\pi i}{n}z^2 - 4\pi i z}\left[e^{2\pi i z} + 1\right] =$$

$$= e^{-\frac{n\pi i}{2}} e^{\frac{2\pi i}{n}\left(z - \frac{n}{2}\right)^2} + e^{\frac{2\pi i}{n}(z-n)^2}.$$

Längs der Seite $z_2 z_3$ ist $y = x - a$ also $z = a + (1 + i)y$ und y liegt zwischen den Grenzen $-b$ und $+b$.

Wir führen an Stelle von y eine neue Variable

$$t = 2\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,y$$

ein, wo die Quadratwurzel positiv zu nehmen ist, und setzen zur Abkürzung

$$2\sqrt{\frac{\pi}{n}}\left(\frac{n}{2} - a\right) = (1+i)c_1 \quad\text{und}\quad 2\sqrt{\frac{\pi}{n}}(n-a) = (1+i)c_2$$

$$2\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,b = \beta.$$

Wir erhalten

$$\frac{2\pi i}{n}\left(z - \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{2\pi i}{n}\left[(1+i)y - \left(\frac{n}{2} - a\right)\right]^2 =$$
$$= \frac{1}{2}\,i(1+i)^2(t-c_1)^2 = -(t-c_1)^2$$

und entsprechend

$$\frac{2\pi i}{n}(z-n)^2 = -(t-c_2)^2.$$

Ferner ist $dz = (1+i)dy = (1+i)\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\,dt.$

Substituieren wir diese Werte in die Gleichung (15), so ergibt sich

$$\int_{z_2}^{z_3} f(z)dz + \int_{z_4}^{z_1} f(z)dz =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}(1+i)\int_{-\beta}^{\beta}\left[i^{-n}e^{-(t-c_1)^2} + e^{-(t-c_2)^2}\right]dt.$$

Wir lassen nun b und damit β über alle Grenzen wachsen. Weil der Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+c)^2}dt$$

nicht von der Konstanten c abhängt, (vergl. die Schlußbemerkung zum zweiten Beispiel) so dürfen wir die Konstanten c_1 und c_2 gleich Null setzen. Wir erhalten somit mit Rücksicht auf (12):

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\nu^2\pi i}{n}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}(1+i)(1+i^{-n})\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt,$$

wo die rechts stehende Quadratwurzel positiv zu nehmen ist

Wir setzen zunächst $n = 1$. Da $S_1 = 1$ ist, so folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} = \sqrt{\pi}.$$

Setzen wir diesen Wert in die vorstehende Gleichung ein, so erhalten wir

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} e^{\frac{2\nu^2\pi i}{n}} = \tfrac{1}{2}(1+i)(1+i^{-n})\sqrt{n}.$$

Diese Formel erhält eine einfachere Gestalt, wenn wir die Fälle unterscheiden, daß die Zahl n bei der Division durch 4 den Rest 0, 1, 2, 3 ergibt. Es ist für

$$n = 4m \qquad S_n = (1+i)\sqrt{n}$$
$$n = 4m+2, \; S_n = 0$$
$$n = 4m+1, \; S_n = \sqrt{n}$$
$$n = 4m+3, \; S_n = i\sqrt{n}.$$

Vierter Abschnitt.

Unendliche Reihen und Produkte.

§ 24. Reihen, deren Glieder reguläre Funktionen einer komplexen Größe sind. Es sei eine unendliche Reihe

(1) $$u_0 \; u_1 \; u_2 \; . \; . \; .$$

vorgelegt, deren Glieder reelle Größen sind.

Wenn sich die Summe

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 \cdots + u_n$$

bei unbegrenzt wachsendem n einem Grenzwert S nähert, so bezeichnet man bekanntlich die Reihe (1) als konvergent und den Grenzwert S als ihre Summe. Bleibt die Konvergenz bestehen, wenn man jedes Glied der Reihe (1) durch seinen absoluten Wert ersetzt, so heißt die Reihe „unbedingt“ konvergent, anderenfalls heißt sie „bedingt“ konvergent. Nur die unbedingt konvergenten Reihen haben die den endlichen Summen zukommende Eigenschaft, daß ihre Summe von der Anordnung der Glieder unabhängig ist.

Im folgenden benützen wir nur unbedingt konvergierende Reihen und es ist demnach unter Konvergenz einer Reihe stets die unbedingte Konvergenz zu verstehen.

Betrachten wir nun eine unendliche Reihe

(2) $$w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad \cdots$$

deren Glieder komplexe Größen sind; es sei $w_n = u_n + i v_n$.

Wenn eine jede der beiden Reihen

(3) $$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad \text{und}$$
$$v_0 \quad v_1 \quad v_2 \quad \cdots$$

konvergiert, so heißt die Reihe (2) konvergent und ihre Summe ist durch die Gleichung

$$w_0 + w_1 + w_2 + \cdots = (u_0 + u_1 + u_2 + \cdots) + i(v_0 + v_1 + v_2 \cdots)$$

bestimmt.

Wenn jede der beiden Reihen (3) unbedingt konvergiert, so konvergiert auch die Reihe, deren allgemeines Glied $|u_n| + |v_n|$ ist, und weil $|w_n| < |u_n| + |v_n|$ ist, so konvergiert auch die „Reihe der absoluten Beträge“

(4) $$|w_0| + |w_1| + |w_2| + \cdots.$$

Umgekehrt folgt aus der Konvergenz der Reihe (4) auch die unbedingte Konvergenz der beiden Reihen (3), weil

$$|w_n| > |u_n| \quad \text{und} \quad |w_n| > |v_n| .$$

Für die unbedingte Konvergenz einer Reihe, deren Glieder komplexe Größen sind, ist demnach die Konvergenz der Reihe der absoluten Beträge erforderlich und hinreichend.

Nehmen wir nun an, die Glieder der Reihe (2) seien Funktionen der komplexen Größe $z = x + iy$, die sich im Innern einer gegebenen Fläche E regulär verhalten.

Die Reihe (2) heißt „gleichmäßig konvergent“ in der Fläche E, wenn sich nach Annahme einer beliebig kleinen reellen, positiven Größe σ die Zahl n der Art bestimmen läßt, daß der absolute Betrag $\left|\sum_{\mu=0}^{m} w_{n+\mu}\right|$ für alle der Fläche E angehörenden Punkte $< \sigma$ ist, wie groß auch immer die Zahl m angenommen werden mag.

Zu dieser Definition ist zu bemerken: die beiden Bedingungen, daß die Reihe (2) in einem gegebenen Punkt z_0 konvergiert und daß die Glieder der Reihe in der Umgebung dieses Punktes reguläre Funktionen sind, reichen noch nicht aus, um die gleichmäßige Konvergenz der Reihe in der Umgebung des Punktes z_0 sicher zu stellen.

Man verifiziert dies leicht an dem Beispiel

$$w_n = (1 - z)z^n \qquad z_0 = 1.$$

Die Reihe $w_0 + w_1 + w_2 + \cdots$ konvergiert offenbar, wenn $|z| < 1$ ist. Für $z = 1$ verschwinden alle Glieder der Reihe, daher besteht die Konvergenz auch noch für $z = 1$.

Für $|z| < 1$ ist $S = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} w_\nu = 1$ dagegen ist für $z = 1$ $S = 0$.

Diese Unstetigkeit der Reihensumme rührt daher, daß die Reihe nicht gleichmäßig konvergiert: wenn $|z| < 1$ ist, so konvergiert zwar die Summe

$$R_n = \sum_{\mu=0}^{m} w_{n+\mu} = z^n - z^{n+m+1}$$

bei wachsendem n gegen Null, aber es ist nicht möglich eine feste Zahl n so zu wählen, daß für alle Werte von z, die der Bedingung $|z| < 1$ genügen, der absolute Betrag R_n kleiner als eine vorgegebene Größe σ ist.

Die Summe einer gleichmäßig konvergierenden Reihe ist jedenfalls eine in der Fläche E stetige Funktion der reellen Variabeln xy.

Um dies zu beweisen, stellen wir die Reihensumme

$$S(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu(z)$$

in der Form

$$S(z) = \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu(z) + R_{n+1}(z)$$

dar und wählen n so groß, daß der absolute Betrag $R_{n+1}(z)$ für alle Punkte der Fläche E kleiner als σ ist. Nun ist

$$S(z + \Delta z) - S(z) = \sum_{\nu=0}^{n} [w_\nu(z + \Delta z) - w_\nu(z)] + R_{n+1}(z + \Delta z) - R_{n+1}(z).$$

Der absolute Betrag des zweiten und des dritten Gliedes rechts ist $< \sigma$.

Dadurch daß wir den absoluten Betrag von $\Delta(z)$ hinreichend klein wählen, können wir bewirken, daß auch der absolute Betrag der voranstehenden Summe auf der rechten Seite $< \sigma$ wird.

Der absolute Betrag der Differenz $S(z + \Delta z) - S(z)$ wird also, wenn der absolute Betrag $|\Delta z|$ hinreichend klein gewählt wird, kleiner als die beliebig zu wählende Größe 3σ.

Um zu beweisen, daß die Reihensumme S eine reguläre analytische Funktion der komplexen Variabeln z ist, müssen wir zeigen, daß sie eine stetige Derivierte besitzt. Zu dem Zweck weisen wir zunächst nach, daß die Reihe gliedweise integriert werden darf.

Bezeichnen wir mit L einen die Punkte z_0 und z_1 verbindenden Kurvenbogen, der ganz innerhalb der Fläche E verläuft.

Da die Reihensumme $S(z)$ eine stetige Funktion der reellen Variabeln xy ist, so hat das Kurvenintegral

$$\int \overset{z_1}{\underset{z_0}{L}} S(z)\,dz = \int \overset{z_1}{\underset{z_0}{L}} \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu(z)\,dz$$

einen bestimmten Sinn.

Wir zerlegen nun wieder die Summe $S(z)$ in zwei Teile

$$S_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu \quad \text{und} \quad R_{n+1}(z) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} w_\nu.$$

Die Zahl n wählen wir so groß, daß für jeden Punkt auf dem Integrationsweg $R_{n+1} < \sigma$ ist, wo σ eine beliebig zu wählende positive Größe bedeutet. Die Summe S_n umfaßt nur eine endliche Anzahl von Gliedern, daher ist ihre gliedweise Integration ohne weiteres zulässig. Der absolute Betrag des Integrals

$$\int \overset{z_1}{\underset{z_0}{L}} R_{n+1}\,dz$$

ist nicht größer als das Produkt der Größe σ in die Länge des Integrationswegs. Daraus folgt: Der absolute Betrag der Differenz

$$\int \overset{z_1}{\underset{z_0}{L}} S\,dz - \sum_{\nu=0}^{n} \int \overset{z_1}{\underset{z_0}{L}} w_\nu\,dz$$

sinkt bei wachsendem n unter jede vorgegebene Größe; das heißt aber nichts anderes als: die Reihe (2) darf gliedweise integriert werden.

Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (2) ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{w_\nu(\zeta)}{\zeta - z}$$

vorausgesetzt daß der absolute Betrag $|\zeta - z|$ über einer angebbaren Größe bleibt. Daher darf auch diese Reihe gliedweise integriert werden. Als Integrationsweg wählen wir die Peripherie eines kleinen Kreises um den Punkt z, dessen Fläche ganz innerhalb der Fläche E liegt. Da die Funktionen w_ν im Innern und auf der Peripherie dieses Kreises regulär sind, so ist (§ 22)

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=0}^{\infty}\int \frac{w_\nu(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu(z).$$

Folglich ist für jeden Punkt im Innern der Fläche $\mathfrak{E}$

$$S(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{S(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

wo die Integration über einen Kreis um den Punkt z zu erstrecken ist.

Aus dieser Darstellung folgt, daß die Reihensumme S eine reguläre analytische Funktion der komplexen Variabeln z ist (vergl. die Bemerkung am Schluß von § 22).

Die n^{te} Derivierte der Funktion $S(z)$ läßt sich in der Form

$$S^{(n)}(z) = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int \frac{S(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta$$

darstellen (s. § 22 Nr. 3), wo wieder über die Peripherie eines Kreises um den Punkt z zu integrieren ist. Da nun

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int \frac{w_\nu(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta = w_\nu^{(n)}(z)$$

ist, so folgt

$$S^{(n)}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} w_\nu^{(n)}(z).$$

Die Reihe (2) darf also beliebig oft gliedweise differenziert werden.

Wir fassen die Ergebnisse der vorangehenden Ausführungen zusammen.

Vorausgesezt daß die Reihe

$$S = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$$

in der Fläche F gleichmäßig konvergiert und daß die Funktionen u_ν in dieser Fläche regulär sind, so ist die Reihensumme eine reguläre analytische Funktion.

Die Reihe S darf gliedweise integriert und differenziert werden.

Von der größten Bedeutung für die Funktionentheorie sind die „Potenzreihen“, d. h. Reihen der Form

$$P(z\ a) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 \cdots.$$

Für diese gilt der Satz:

Konvergiert eine Potenzreihe für einen bestimmten Wert $z = z_0$, so konvergiert sie gleichmäßig für alle Werte von z, die der Bedingung $|z-a| < |z_0 - a|$ genügen.

Bezeichnen wir zur Abkürzung den absoluten Betrag $|z_0 - a|$ mit r.

Damit die Potenzreihe für $z = z_0$ konvergiert, ist erforderlich — wenn auch nicht hinreichend — daß wenigstens für alle Indizes, die eine bestimmte Zahl übersteigen, die Ungleichung $|c_n| < \frac{1}{r^n}$ gilt. Denn wäre diese Bedingung nicht erfüllt, so würden sich in der Reihe Glieder mit beliebig großem Index vorfinden, deren absoluter Betrag > 1 wäre.

Ist nun $|z-a| < r_1 < r$ so ist die Summe

$$\left|\sum_{\mu=0}^{m} c_{n+\mu}(z-a)^{n+\mu}\right| < \sum_{\mu=0}^{m} \left(\frac{r_1}{r}\right)^{n+\mu} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \frac{r}{r-r_1}.$$

Diese Summe sinkt also bei wachsendem n unter jede gegebene Größe.

Die Potenzreihe stellt demnach, soweit sie konvergiert, eine reguläre Funktion dar.

Die obere Grenze der absoluten Beträge $|z-a|$, für die die Potenzreihe konvergiert, heißt der Konvergenzradius der Reihe.

Man beweist in derselben Weise, daß für Reihen, die nach absteigenden Potenzen von $z - a$ fortschreiten, also für Reihen der Form

$$\frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots$$

der Satz gilt:

Konvergiert eine nach absteigenden Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe für einen bestimmten Wert $z = z_0$, so konvergiert sie gleichmäßig für alle Werte von z, die der Bedingung

$$|z - a| > |z_0 - a| \quad \text{genügen.}$$

§ 25. Unendliche Produkte von regulären Funktionen. Für unendliche Produkte gelten ganz analoge Definitionen und Sätze.

Ein unendliches Produkt

$$w_0\, w_1\, w_2 \cdot \cdot \cdot, \tag{1}$$

dessen Faktoren komplexe Größen sind, heißt konvergent, wenn man nach Annahme einer beliebig kleinen, reellen positiven Größe σ die Zahl n der Art bestimmen kann, daß die Ungleichung

$$\left|\prod_{\mu=0}^{m} w_{n+\mu} - 1\right| < \sigma \tag{2}$$

besteht, wie groß auch immer die Zahl m gewählt werden mag.

Nehmen wir nun an die Faktoren w_ν seien Funktionen der komplexen Größe z, die sich in der gegebenen Fläche E regulär verhalten.

Wenn die Zahl n, die in der eben aufgestellten Definition auftritt, so gewählt werden kann, daß die Ungleichung (2) für alle Punkte der Fläche E besteht, so heißt das Produkt (1) gleichmäßig konvergent.

Ein gleichmäßig konvergierendes Produkt stellt jedenfalls eine stetige Funktion der reellen Variabeln xy dar.

Um dies zu beweisen zerlegen wir das unendliche Produkt

$$P(z) = \prod_{\nu=0}^{\infty} w_\nu(z) \tag{1}$$

in die beiden Teile

$$P_n(z) = \prod_{\nu=0}^{n} w_\nu(z) \quad \text{und} \quad R_{n+1}(z) = \prod_{\nu=n+1}^{\infty} w_\nu(z)$$

und wählen n so groß, daß für alle Punkte der Fläche E

$$R_{n+1}(z) - 1 < \sigma \text{ ist.}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} P(z + \Delta z) - P(z) &= P_n(z + \Delta z) R_{n+1}(z + \Delta z) - P_n(z) R_{n+1}(z) \\ &= [P_n(z + \Delta z) - P_n(z)] R_{n+1}(z + \Delta z) \\ &\quad + [R_{n+1}(z + \Delta z) - R_{n+1}(z)] P_n(z). \end{aligned}$$

Die Funktion $P_n(z)$ ist als Produkt einer endlichen Anzahl von regulären Funktionen selbst eine reguläre Funktion, also sicher eine stetige Funktion der reellen Variabeln xy. Indem wir den absoluten Betrag der Größe Δz hinreichend klein wählen, können wir daher bewirken, daß der absolute Betrag der Differenz

$$P_n(z + \Delta z) - P_n(z)$$

kleiner als σ wird. Der absolute Betrag der Differenz

$$\begin{aligned} R_{n+1}(z + \Delta z) - R_{n+1}(z) &= [R_{n+1}(z + \Delta z) - 1] \\ &\quad - [R_{n+1}(z) - 1] \end{aligned}$$

ist zufolge der Wahl der Zahl n kleiner als 2σ. Demnach ist der absolute Betrag der Differenz $P(z + \Delta z) - P(z)$ kleiner als

$$\sigma [\, R_{n+1}(z + \Delta z) + P_n(z) \,].$$

Er konvergiert also mit σ gegen Null.

Um zu beweisen, daß P nicht nur stetige Funktion der reellen Variabeln xy, sondern auch eine reguläre analytische Funktion der komplexen Variabeln $z = x + iy$ ist, weisen wir nach, daß für jeden Punkt der Fläche E die Gleichung

$$(3) \qquad P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{P(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

gilt, wo die Integration über die Peripherie eines kleinen Kreises um den Punkt z zu erstrecken ist.

Es gilt nun einerseits die Gleichung

$$(4) \qquad P(z) - P_n(z) = P_n(z)[R_{n+1}(z) - 1],$$

andererseits ist

$$(5)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int \frac{P(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int \frac{P_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{P_n(\zeta)\,[R_{n+1}(\zeta) - 1]}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Wir bezeichnen mit ϱ den Radius des Kreises um den Punkt z, über den integriert wird, mit M das Maximum des absoluten Betrages, den $P_n(\zeta)$ im Innern oder auf der Peripherie des Kreises erreicht.

Die Zahl n wählen wir so groß, daß der absolute Betrag der Differenz $R_{n+1}(\zeta) - 1$ im Innern und auf der Peripherie des Kreises die gegebene positive Größe σ nicht übersteigt. Der absolute Betrag des Ausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung (5) ist nicht größer als

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{M\sigma}{\varrho}\,\varrho\, d\vartheta = M\sigma.$$

Da $P_n(\zeta)$ das Produkt aus einer endlichen Anzahl von regulären Funktionen ist, so ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{P_n(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = P_n(z).$$

Aus (5) folgt somit

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int \frac{P(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - P_n(z)\right| < M\sigma.$$

Aus (4) folgt

$$|P(z) - P_n(z)| < M\sigma,$$

folglich ist der absolute Betrag der Differenz

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{P(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - P(z)$$

nicht größer als $2M\sigma$, wie klein auch immer σ gewählt werden mag.

Daraus ergibt sich, daß die Gleichung (3) besteht und daraus folgt, daß $P(z)$ eine reguläre analytische Funktion der komplexen Größe ist.

Damit ist bewiesen:

Ein gleichmäßig konvergierendes unendliches Produkt, dessen Faktoren innerhalb der Fläche E

reguläre Funktionen der komplexen Variabeln z sind, stellt eine innerhalb dieser Fläche reguläre Funktion dar.

§ 26. Die Taylorsche Reihe. Nehmen wir an die Funktion $w = f(z)$ verhalte sich im Innern und auf der Peripherie eines Kreises K, dessen Mittelpunkt der Punkt a und dessen Radius gleich ϱ ist, regulär. Mit z bezeichnen wir einen beliebigen Punkt im Innern des Kreises, es sei also

$$r = |z - a| < \varrho.$$

Unter dieser Voraussetzung ist

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

wo die Integration im positiven Sinn über die Kreisperipherie zu erstrecken ist. Wir machen nun von der bekannten Formel

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 \cdots + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q}$$

Gebrauch, indem wir $q = \frac{z-a}{\zeta - a}$ setzen. Es folgt

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\zeta - a}} = \frac{1}{\zeta - a} + \frac{z-a}{(\zeta - a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(\zeta-a)^3} \cdots$$
$$+ \frac{(z-a)^n}{(\zeta - a)^{n+1}} + \frac{1}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^{n+1}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Gleichung (1) ein, so erhalten wir für die Funktion $f(z)$ einen Ausdruck der Form

$$(2) \quad f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 \cdots + c_n(z-a)^n + R_{n+1}.$$

Hier ist

$$(3)\ c_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{\nu+1}}\, d\zeta \text{ und } R_{n+1} = \frac{1}{2\pi i}\int \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^{n+1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

wo die Integrationen über die Peripherie des Kreises K zu erstrecken sind.

Auf der Peripherie dieses Kreises ist

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < \frac{r}{\varrho}, \quad |d\zeta| = \varrho\, d\vartheta \text{ und } \left|\frac{1}{\zeta - z}\right| < \frac{1}{\varrho - r}.$$

Mit M bezeichnen wir den größten Wert, den der absolute Betrag $|f(\zeta)|$ auf der Peripherie des Kreises K erreicht.

Der absolute Betrag des Restgliedes R_{n+1} ist kleiner als

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1}\frac{M}{\varrho-r}\varrho\,d\vartheta=\frac{\varrho}{\varrho-r}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+1}M.$$

Da nach Voraussetzung $r<\varrho$ ist, konvergiert also das Restglied bei wachsendem n gegen Null. Die Funktion $f(z)$ wird also durch die Potenzreihe (3)

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots \text{ in inf.} \tag{4}$$

dargestellt, die konvergiert, solange der Punkt z im Innern des Kreises K bleibt. Der Radius ϱ dieses Kreises unterliegt nur der Bedingung, daß er kleiner ist als die Entfernung des Punktes a von dem nächsten Begrenzungspunkte des Definitionsbereiches der Funktion $f(z)$.

Der „Konvergenzradius“ der Reihe (4) ist also gleich dieser Entfernung.

Die Koeffizienten der Reihe (4) haben eine einfache Bedeutung. Es ist (§ 22) $c_0=f(a)$

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}.$$

Die Potenzreihe (4) ist also nichts anderes als die bekannte Taylorsche Reihe.

Damit ist der wichtige Satz bewiesen:

Verhält sich die analytische Funktion $f(z)$ in der Umgebung des Punktes a regulär, so läßt sie sich in eine nach Potenzen von $z-a$ fortschreitende Taylorsche Reihe entwickeln. Der Konvergenzradius dieser Reihe ist gleich der Entfernung des Punktes a vom nächsten Begrenzungspunkt des Definitionsbereichs der Funktion $f(z)$.

Wir wollen ausdrücklich auf den Unterschied hinweisen, der zwischen der Theorie der Funktionen einer reellen Variabeln und der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln besteht:

solange man sich auf reelle Variable beschränkt, kann man daraus, daß eine Funktion stetige Derivierte jeder Ordnung besitzt, noch nicht schließen, daß sich die Funktion durch eine Taylorsche Reihe darstellen läßt, und falls eine solche

Darstellung existiert, muß der Konvergenzradius in jedem Fall besonders festgestellt werden.

Im Fall der Funktionen einer komplexen Variabeln steht die Darstellbarkeit durch eine Taylorsche Reihe und der Konvergenzradius dieser Reihe von vornherein fest. Nur darüber ob die Reihe auch noch auf der Peripherie des Konvergenzkreises oder wenigstens auf einem Teil derselben konvergiert, gibt unser Theorem keinen Aufschluß.

Sofern sich die Funktion $f(z)$ für alle endlichen Werte von z regulär verhält, darf der Radius ϱ des Kreises K beliebig groß gewählt werden; die Taylorsche Reihe konvergiert für alle endlichen Werte von z.

In diesem Fall bezeichnet man die Funktion $f(z)$ als „ganze“ Funktion.

Besteht die Reihe nur aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, so ist $f(z)$ eine ganze rationale Funktion; ist die Anzahl der Glieder unendlich, so wird $f(z)$ als ganze transzendente Funktion bezeichnet.

Als Beispiel einer ganzen transzendenten Funktion kann die Exponentialfunktion

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots \text{ dienen.}$$

Nehmen wir an die Funktion $w = f(z)$ verhalte sich in jedem Punkte regulär, der außerhalb eines um den Punkt a mit dem Radius ϱ beschriebenen Kreises K liegt. Wir bilden die z-Ebene mittelst der Transformation $\zeta = \frac{1}{z-a}$ auf die ζ-Ebene ab. Den Punkten der z-Ebene, die außerhalb des Kreises K liegen, entsprechen in der ζ-Ebene Punkte, die innerhalb eines um den Nullpunkt mit dem Radius $\frac{1}{\varrho}$ beschriebenen Kreises C liegen. Demnach läßt sich w als Funktion von ζ betrachtet durch eine Potenzreihe

$$w = c_0 + c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + \cdots$$

darstellen, die für alle innerhalb des Kreises C liegenden Punkte ζ konvergiert. Daraus folgt: w als Funktion von z betrachtet läßt sich durch die Reihe

$$w = c_0 + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots$$

darstellen, die für alle Punkte konvergiert, die außerhalb des Kreises K liegen.

Aus der Taylorschen Reihenentwicklung (4) ergibt sich eine bemerkenswerte Folgerung.

Nehmen wir an, die Funktion $f(z)$ verschwinde für $z = a$, es sei also $c_0 = 0$.

Es kann noch eine Anzahl von weiteren Koeffizienten der Reihe $c_1\, c_2\, c_3 \ldots$ den Wert Null haben, aber es können nicht alle Koeffizienten der Reihe verschwinden, weil sonst die Funktion identisch gleich Null wäre. Es sei c_n der erste nicht verschwindende Koeffizient der Reihe. Der Quotient $\frac{f(z)}{(z-a)^n}$ wird weder Null noch unendlich, wenn $z - a$ gegen Null konvergiert. Man sagt deshalb: die Funktion $f(z)$ wird für $z = a$ Null zur n^{ten} Ordnung und drückt dies kurz durch die symbolische Gleichung $f(z) = 0^n$ für $z = a$ aus.

Ein Nullpunkt n^{ter} Ordnung der Funktion $f(z)$ ist Nullpunkt $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung der ersten Derivierten $f'(z)$, Nullpunkt $n - 2^{\text{ter}}$ Ordnung der zweiten Derivierten $f''(z)$ usw.

Unter der Voraussetzung, daß $c_0 = 0 \quad c_1 = 0 \cdots \quad c_{n-1} = 0$ dagegen c_n von Null verschieden ist, können wir die Gleichung (4) in der Form schreiben

$$f(z) = c_n(z-a)^n \left[1 + \frac{c_{n+1}}{c_n}(z-a) + \frac{c_{n+2}}{c_n}(z-a)^2 + \cdots\right]$$

Es sei $\frac{1}{k}$ die obere Grenze der positiven Größen

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \qquad \sqrt{\left|\frac{c_{n+2}}{c_n}\right|} \qquad \sqrt[3]{\left|\frac{c_{n+3}}{c_n}\right|} \quad \ldots$$

Der absolute Betrag der Summe

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}(z-a) + \frac{c_{n+2}}{c_n}(z-a)^2 + \frac{c_{n+3}}{c_n}(z-a)^3$$

ist, wenn der absolute Betrag $r = |z - a| < \frac{1}{2}k$ angenommen wird,

$$< \frac{\frac{r}{k}}{1 - \frac{r}{k}} < 1.$$

Daraus folgt: Für $0 < r < \frac{1}{2}k$ kann die Funktion $f(z)$ nicht gleich Null werden. Die Nullpunkte einer regulären Funktion liegen somit isoliert. In einer endlichen Fläche, in der sich die Funktion $f(z)$ regulär verhält, kann daher nur eine endliche Anzahl von Nullpunkten der Funktion liegen.

Die Koeffizienten

$$c_0 = f(a) \quad c_1 = f'(a) \quad c_2 = \frac{f''(a)}{1 \cdot 2} \cdots$$

sind bestimmt, wenn die Funktion $f(z)$ längs eines noch so kleinen durch den Punkt a gehenden Linienstücks gegeben sind. Daraus ist zu schließen: verhalten sich zwei Funktionen in jedem Punkt eines kontinuierlichen Bereichs A regulär und haben sie längs eines dem Bereich angehörenden Linienstücks dieselben Werte, so nehmen sie in jedem Punkt des Bereichs A denselben Wert an.

§ 27. Die Laurentsche Reihe. Bei der Herleitung der Taylorschen Reihe sind wir von der Voraussetzung ausgegangen, die Funktion $w = f(z)$ verhalte sich im Innern und auf der Peripherie eines Kreises regulär; wir wollen nunmehr annehmen, die Funktion verhalte sich im Innern und auf dem Rande eines Ringgebietes regulär, das von zwei konzentrischen Kreisen um den Punkt a begrenzt wird. Wir bezeichnen den inneren Grenzkreis mit K_1, seinen Radius mit ϱ_1, den äußeren Grenzkreis mit K_2, seinen Radius mit ϱ_2; mit z möge ein Punkt im Innern des Ringgebietes, mit r sein Abstand vom Punkt a bezeichnet werden (s. Fig. 16).

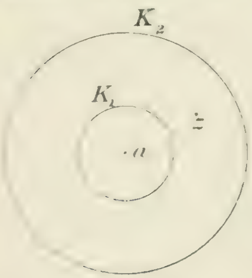


Fig. 16.

Es ist also $\varrho_1 < r < \varrho_2$. Wir gehen wieder von der Gleichung

$$(1) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

aus, wo das Integral über die vollständige Begrenzung des Ringgebietes, d. h. über die Kreise K_1 und K_2 in dem Sinn zu erstrecken ist, daß das Ringgebiet zur Linken liegt. Über den Kreis K_2 ist also in dem Sinn zu integrieren, daß die

Kreisfläche zur Linken liegt, über den Kreis K_1 so, daß die Kreisfläche zur Rechten liegt. Wir integrieren auch über den Kreis K_1 so, daß die Kreisfläche zur Linken liegt und geben dafür dem Integral das negative Vorzeichen.

Wir schreiben also die Gleichung (1) in der Form

$$(2) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Im ersten Integral führen wir wie im vorigen Paragraphen für $\frac{1}{\zeta - z}$ den Wert ein

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(z-a)^\nu}{(\zeta - a)^{\nu+1}} + \frac{1}{\zeta - z}\left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^{n+1}.$$

Im zweiten Integral setzen wir

$$\frac{1}{z - \zeta} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(\zeta-a)^\nu}{(z - a)^{\nu+1}} + \frac{1}{z - \zeta}\left(\frac{\zeta-a}{z - a}\right)^{n+1}.$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(3) \qquad c_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{\nu+1}}\, d\zeta \qquad \nu = 0, 1, 2 \cdots n.$$

$$(4) \qquad c_{-\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_1} (\zeta - a)^{\nu-1} f(\zeta)\, d\zeta \qquad \nu = 1, 2 \cdots n.$$

$$(5) \qquad R^{(2)}_{n+1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_2} \left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^{n+1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

$$(6) \qquad R^{(1)}_{n+1} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K_1} \left(\frac{\zeta-a}{z - a}\right)^{n+1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Bei Benutzung dieser Bezeichnungen erhält die Gleichung (2) die Form

$$f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 \cdots + c_n(z-a)^n + R^{(2)}_{n+1}$$
$$+ \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} \cdots + \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + R^{(1)}_{n+1}.$$

Bezeichnen wir mit M den größten Wert, den der absolute Betrag der Funktion $f(\zeta)$ auf der Begrenzung des Ringgebietes erreicht. Auf der Peripherie des Kreises K_2 ist

$$\zeta = \varrho_2 e^{i\vartheta} \qquad d\zeta = \varrho_2 e^{i\vartheta} i\, d\vartheta;$$

der absolute Betrag von $R^{(2)}_{n+1}$ (5) ist demnach kleiner als

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{r}{\varrho_2}\right)^{n+1} \frac{M}{\varrho_2 - r}\, \varrho_2\, d\vartheta = \frac{\varrho_2}{\varrho_2 - r}\left(\frac{r}{\varrho_2}\right)^{n+1} M.$$

Das Restglied $R_{n+1}^{(2)}$ konvergiert also bei wachsendem n gegen Null. In derselben Art ist zu zeigen, daß

$$R_{n+1}^{(1)} < \frac{\varrho_1}{r - \varrho_1} \left(\frac{\varrho_1}{r}\right)^{n+1} M \text{ ist.}$$

Auch dieses Restglied konvergiert also bei wachsendem n gegen Null.

Die Funktion $f(z)$ läßt sich somit im Ringgebiet durch die konvergente Reihe

$$(7) \qquad \begin{aligned} f(z) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \\ + \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots \end{aligned} \quad \text{in inf.}$$

darstellen. Diese Reihe bezeichnet man als Laurentsche Reihe.

Die Integrale (3) und (4), die zur Berechnung der Koeffizienten der Reihenentwicklung dienen, kann man statt über den Kreis K_2 beziehungsweise den Kreis K_1 über einen beliebigen Kreis um den Punkt a, der dem Ringgebiet angehört erstrecken, weil die unter dem Integralzeichen stehenden Funktionen sich in diesem Gebiet regulär verhalten.

Wir können also die sämtlichen Koeffizienten durch die eine Formel

$$(8) \qquad c_\nu = \int K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{\nu+1}} d\zeta \qquad \nu = \begin{matrix} 0, & 1, & 2, \ldots \\ & -1, & -2, \ldots \end{matrix}$$

darstellen. Der Radius ϱ des Kreises K_1, über dessen Peripherie zu integrieren ist, unterliegt nur der Bedingung $\varrho_1 \leqq \varrho \leqq \varrho_2$.

Zerlegen wir die Reihe (7) in zwei Teile, indem wir

$$\psi(z\ a) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

und

$$\varphi(z\ a) = \frac{c_{-1}}{z-a} - \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots$$

setzen. Die beiden Reihen konvergieren, so lange der Punkt z innerhalb des durch die Kreise K_1 und K_2 begrenzten Gebiets liegt. Daraus folgt (s. § 24 Schluß): Die erstere Reihe konvergiert innerhalb der ganzen Kreisfläche K_2, also auch innerhalb der Kreisfläche K_1, die außerhalb des Ringgebietes liegt; die zweite Reihe konvergiert in dem Teil der z-Ebene, der außerhalb des Kreises K_1 liegt. Die Funktion $f(z)$, von der wir nur vorausgesetzt haben, daß sie sich in dem durch die Kreise

K_1 und K_2 begrenzten Ringgebiet regulär verhält, läßt sich also als Summe zweier Funktionen $\varphi(z-a)$ und $\psi(z-a)$ darstellen, von denen sich die erste in der Kreisfläche K_2, die zweite außerhalb des Kreises K_1 regulär verhält.

Wir wollen die Reihenentwicklung (7) auf einen speziellen Fall anwenden. Es sei eine ganze transzendente Funktion $w = f(z)$ gegeben. Diese Funktion sei periodisch, und zwar habe die Periode den Wert 2ω; es sei also für beliebige Werte von z

$$f(z + 2\omega) = f(z).$$

Dieselbe Periode besitzt die Exponentialfunktion

$$\zeta = e^{\frac{\pi i}{\omega} z}.$$

Einem gegebenen von Null verschiedenen Wert ζ_0 der Variabeln ζ entsprechen unendlich viele Werte z; ist z_0 einer derselben, so läßt sich ihre Gesamtheit in der Form $z = z_0 + 2n\omega$ darstellen, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Allen diesen Werten z entspricht derselbe Funktionswert $w = f(z)$. Jedem endlichen von Null verschiedenem Werte ζ entspricht somit ein vollkommen bestimmter Wert w. Daher kann w auch als einwertige Funktion der Variabeln ζ betrachtet werden. Daß w als Funktion von ζ, vom Nullpunkt abgesehen, in jedem im Endlichen liegenden Punkt eine Derivierte besitzt, ergibt sich ohne weiteres aus der Gleichung:

$$\frac{\frac{dw}{dz}}{\frac{d\zeta}{dz}} = \frac{dw}{d\zeta} = \frac{\omega}{\pi i} \frac{1}{\zeta} \frac{dw}{dz}.$$

In einem Ringgebiet, das von zwei konzentrischen Kreisen um den Nullpunkt der ζ-Ebene begrenzt wird, verhält sich die Funktion w der Variabeln ζ regulär; der Radius des inneren Grenzkreises darf beliebig klein, der des äußeren beliebig groß gewählt werden. Daher läßt sich die Funktion w durch eine Laurentsche Reihe

(9) $$w = c_0 + c_1\zeta + c_2\zeta^2 + \cdots$$
$$+ \frac{c_{-1}}{\zeta} + \frac{c_{-2}}{\zeta^2} + \cdots$$

darstellen. Die Koeffizienten der Reihe sind durch die Gleichung

$$(10) \qquad c_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{w}{\zeta^{\nu+1}}\, d\zeta$$

bestimmt. Der Radius des Kreises K, über dessen Peripherie zu integrieren ist, darf beliebig gewählt werden. Wir wollen ihn gleich 1 annehmen. Demnach ist auf der Peripherie dieses Kreises $\zeta = e^{i\vartheta}$, $d\zeta = e^{i\vartheta}\, i\, d\vartheta$.

Führen wir an Stelle der Variabeln ϑ die Variable $z = \frac{\omega}{\pi}\vartheta$ ein, so erhält die Gleichung (10) die Form

$$(11) \qquad c_\nu = \frac{1}{2\omega}\int_0^{2\omega} e^{-\frac{\nu\pi i}{\omega}z} f(z)\, dz \qquad \nu = \begin{matrix} 0, & 1, & 2, \cdots \\ & -1, & -2, \cdots \end{matrix}$$

Die Reihe (9) erhält, wenn wir an Stelle der Variabeln ζ wieder die Variable z einführen, die Form

$$\begin{aligned} f(z) = c_0 &+ c_1 e^{\frac{\pi i}{\omega}z} + c_2 e^{\frac{2\pi i}{\omega}z} + \cdots \\ &+ c_{-1} e^{-\frac{\pi i}{\omega}z} + c_{-2} e^{-\frac{2\pi i}{\omega}z} + \cdots \end{aligned}$$

Hierfür können wir auch schreiben

$$(12) \qquad \begin{aligned} f(z) = \tfrac{1}{2}a_0 &+ a_1 \cos\frac{\pi}{\omega}z + a_2 \cos\frac{2\pi}{\omega}z + \cdots \\ &+ b_1 \sin\frac{\pi}{\omega}z + b_2 \sin\frac{2\pi}{\omega}z + \cdots \end{aligned}$$

Hier ist (11)

$$a_\nu = c_\nu + c_{-\nu} = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\omega} \cos\frac{\nu\pi}{\omega} z\, f(z)\, dz,$$

$$b_\nu = i(c_\nu - c_{-\nu}) = \frac{1}{\omega}\int_0^{2\omega} \sin\frac{\nu\pi}{\omega} z\, f(z)\, dz.$$

Die Reihe (12) wird bekanntlich als Fouriersche Reihe bezeichnet.

Fünfter Abschnitt.

Einwertige Funktionen einer komplexen Variabeln.

§ 28. Unstetigkeit einer Funktion in einem isolierten Punkt. In § 22 ist bewiesen worden, daß eine Funktion, die für die ganze z-Ebene eindeutig definiert ist und sich überall regulär verhält, eine Konstante ist. Der Definitionsbereich einer Funktion im eigentlichen Sinn des Wortes muß daher notwendig Begrenzungspunkte besitzen. Der einfachste Fall ist der, daß die Begrenzung des Definitionsbereichs aus isolierten Punkten besteht. Wir untersuchen daher zunächst, wie sich die Funktion in der Umgebung eines isolierten Begrenzungspunkts verhält.

Wir nehmen an der Punkt a sei ein Begrenzungspunkt des Definitionsbereiches der Funktion $w = f(z)$; die Funktion sei aber für ein Ringgebiet, das von zwei konzentrischen Kreisen um den Punkt a, K_1 und K_2 begrenzt wird, eindeutig definiert und verhalte sich in jedem Punkte dieses Gebietes regulär, und zwar gelte dies, wie klein auch immer der Radius des inneren Grenzkreises K_1 gewählt werden mag, sofern er nur eine angebbare Größe besitzt.

Wie im vorigen Paragraphen gezeigt worden ist, läßt sich die Funktion $f(z)$ im Ringgebiet in der Form

$$f(z) = \varphi(z-a) + \psi(z-a)$$

darstellen. Die Funktion $\varphi(z-a)$ verhält sich in dem Teil der z-Ebene, der außerhalb des Kreises K_1 liegt, regulär; die Funktion $\psi(z-a)$ verhält sich innerhalb des Kreises K_1 also insbesondere im Punkt a regulär. Die Unstetigkeit, die die Funktion $f(z)$ im Punkt a darbietet, wird daher durch die Funktion $\varphi(z-a)$ charakterisiert; wir bezeichnen deshalb diese Funktion als „charakteristische Funktion" für den Unstetigkeitspunkt a. Die charakteristische Funktion läßt sich durch eine nach absteigenden Potenzen von $z-a$ fortschreitende Potenzreihe

$$(1) \qquad \varphi(z-a) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-3}}{(z-a)^3} + \cdots$$

darstellen. Wenn diese Reihe nicht abbricht, wenn sie also nicht eine rationale Funktion von z ist, so konvergiert sie in jedem Punkt, der eine angebbare Entfernung vom Punkte a besitzt. Die Funktion $\varphi(z\,a)$ ist demnach eine ganze — rationale oder transzendente — Funktion der Größe $\frac{1}{z-a}$.

Die Koeffizienten der Reihe sind durch die Gleichung

$$(2) \qquad c_{-\nu} = \frac{1}{2\pi i}\int_K \zeta^{\nu-1} f(\zeta)\,d\zeta \qquad \nu = 1, 2, 3 \cdots$$

bestimmt. Die Integration ist über die Peripherie eines beliebigen Kreises K zu erstrecken, dessen Radius ϱ kleiner als der Radius des äußeren Grenzkreises K_2 ist. Der Wert des Koeffizienten $c_{-\nu}$ ist von ϱ unabhängig, wenn auch diese Größe in der Darstellung von $c_{-\nu}$ durch das Integral (2) vorkommt. Der Koeffizient c_{-1} ist das Residuum der Funktion $f(z)$ für den Punkt a (s. § 21).

Bezeichnen wir mit $M(\varrho)$ den größten Wert, den der absolute Betrag der Funktion $f(z)$ auf der Peripherie des Kreises K erreicht. Der absolute Betrag des Koeffizienten $c_{-\nu}$ (2) ist kleiner als

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varrho^{\nu-1} M(\varrho)\,\varrho\, d\vartheta = \varrho^{\nu} M(\varrho).$$

Es sind nun zwei Fälle vorzusehen: entweder kann $M(\varrho)$ zu unendlich großen Werten ansteigen, wenn ϱ gegen Null konvergiert, oder aber $M(\varrho)$ bleibt unter einer endlichen Größe M_0, wie klein auch ϱ gewählt werden mag. Verfolgen wir zunächst die letztere Annahme. In diesem Fall ist $|c_{-\nu}| < \varrho^{\nu} M_0$. Da der Wert von $c_{-\nu}$ nicht von ϱ abhängt, so folgt hieraus, daß alle Koeffizienten $c_{-\nu}$ gleich Null sind, daß also die Funktion $\varphi(z\,a)$ (1) identisch verschwindet. In jedem Punkt der Kreisfläche K_2, der nicht mit dem Punkt a zusammenfällt, gilt somit die Gleichung $f(z) = \psi(z\,a)$. Im Punkt a dagegen nimmt die Funktion $f(z)$, da sie sich ja nach Voraussetzung in diesem Punkt nicht regulär verhält, einen von $\psi(a\,a)$ verschiedenen Wert an. Die im Punkt a auftretende Unstetigkeit kann durch Abänderung des Funktionswertes in diesem einzelnen Punkt aufgehoben werden: es liegt also eine hebbare Unstetigkeit vor (vgl. § 4). Derartige Unstetigkeiten schließen wir im Folgenden aus. Es kommt das darauf hinaus, daß wir festsetzen:

sofern ein bestimmter Grenzwert $\lim\limits_{z=a} f(z)$ existiert, soll der Funktionswert $f(a)$ nicht von diesem Grenzwert verschieden sein.

Nehmen wir nunmehr an, der Maximalwert $M(\varrho)$ steige bei abnehmendem ϱ zu unendlich großen Werten an. In diesem Fall können nicht alle Koeffizienten $c_{-\nu}$ verschwinden, wohl aber kann die Reihe mit einem bestimmten Glied $\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ abbrechen. Wenn dieser Fall eintritt, bezeichnet man den Punkt a als einen „Pol" der Funktion $f(z)$. In einem Pol wird also die Funktion in derselben Weise unstetig, wie eine rationale Funktion. Wenn die Zahl n, der Grad der rationalen Funktion, die die Unstetigkeit charakterisiert, hervorgehoben werden soll, so sagt man, die Funktion $f(z)$ wird im Punkt a zur n^{ten} Ordnung unendlich und drückt dies kurz durch die symbolische Gleichung

$$f(z) = \infty^n \text{ für } z = a$$

aus (vergl. die analoge Bezeichnungsweise für Nullpunkte § 26).

Die Funktion $(z-a)^n f(z)$ verhält sich in der Umgebung des Punktes a regulär und nimmt in diesem Punkt den von Null verschiedenen Wert c_{-n} an. Daraus folgt zunächst: die Funktion $1 : f(z)$ verhält sich im Punkt a regulär und wird in diesem Punkt Null zur n^{ten} Ordnung.

Sodann ist zu bemerken: wir können die Größe r so klein wählen, daß für alle Punkte z, die der Bedingung $|z-a| < r$ genügen, der absolute Betrag der Differenz $(z-a)^n f(z) - c_{-n}$ kleiner als eine vorgegebene Größe σ wird. Für alle Punkte auf der Peripherie eines Kreises vom Radius r um den Punkt a ist demnach der absolute Betrag

$$|f(z)| > \frac{|c_{-n}| - \sigma}{r^n}.$$

Der absolute Betrag der Funktion $f(z)$ wächst somit, auf welchem Weg man sich dem Punkt a nähern mag, gleichmäßig ins Unendliche.

Insbesondere ist ersichtlich, daß die Entfernung eines Pols vom nächsten Nullpunkt eine angebbare Größe besitzt.

Wesentlich anders verhält sich die Sache, wenn sich die Reihe (1) ins Unendliche fortsetzt, wenn also die charakteristische Funktion $\varphi(z-a)$ eine transzendente Funktion ist. In diesem Fall wird der absolute Betrag des Produktes $(z-a)^n f(z)$, wie groß auch der Exponent n gewählt werden mag, in der Umgebung des Punktes a zu Werten ansteigen, die jede vorgegebene Größe übertreffen. Dieses Ansteigen erfolgt aber nicht gleichmäßig, es gibt vielmehr in der Umgebung des Punktes a Punkte, in denen die Funktion einem vorgegebenen Wert w_0 beliebig nahe kommt.

Um dies zu beweisen, nehmen wir einen Augenblick an, für alle Punkte z, die der Bedingung $|z-a| < \varrho$ genügen, bleibe der absolute Betrag der Differenz $f(z) - w_0$ über einer angebbaren Größe σ. Der absolute Betrag der Funktion $\frac{1}{f(z) - w_0}$ bleibt daher in der Umgebung des Punktes a unter einer angebbaren Größe $1:\sigma$ und daraus folgt, nachdem hebbare Unstetigkeiten ausgeschlossen sind, daß diese Funktion sich in der Umgebung des Punktes a regulär verhält. Es sei n die Ordnung, zu der sie im Punkt a verschwindet (nimmt sie im Punkt a einen von Null verschiedenen Wert an, so ist $n = 0$ zu setzen). Der Quotient

$$\frac{\dfrac{1}{f(z) - w_0}}{(z-a)^n}$$

wird im Punkt a weder Null noch unendlich; dasselbe gilt für das Produkt $(z-a)^n [f(z) - w_0]$. Unsere Annahme führt somit zu der Folgerung, daß der Punkt a höchstens ein Pol der Funktion $f(z)$ ist und dies verstößt gegen unsere Voraussetzung.

Wenn die charakteristische Funktion $\varphi(z\ a)$ eine transzendente Funktion ist, bezeichnet man den Punkt a als wesentlich singulären Punkt.

Die Definition des Pols und des wesentlich singulären (isolierten) Punktes läßt sich leicht auf den Fall ausdehnen, daß der Unstetigkeitspunkt in den unendlich fernen Punkt der z-Ebene fällt. Zu dem Zweck betrachten wir die Funktion $w = f(z)$ als Funktion der Variabeln $\zeta = \frac{1}{z}$. Ist der Punkt $\zeta = 0$ Pol oder wesentlich singulärer Punkt der Funktion w, so bezeichnen wir auch den unendlich fernen Punkt der z-Ebene als Pol beziehungsweise wesentlich singulären Punkt von w.

Wird w als Funktion von ζ betrachtet, so läßt sich die zum Nullpunkt der ζ-Ebene gehörige charakteristische Funktion in der Form

$$\varphi(\zeta\,0) = \frac{c_{-1}}{\zeta} + \frac{c_{-2}}{\zeta^2} + \frac{c_{-3}}{\zeta^3} + \cdots$$

darstellen. Wird dagegen w als Funktion der Variabeln z betrachtet, so wird die im unendlich fernen Punkt der z-Ebene stattfindende Unstetigkeit durch die Funktion

$$\varphi(z\,\infty) = c_{-1}z + c_{-2}z^2 + c_{-3}z^3 \cdots$$

charakterisiert. Eine zum unendlich fernen Punkt gehörige charakteristische Funktion ist somit eine ganze Funktion. Je nachdem diese Funktion rational oder transzendent ist, ist der unendlich ferne Punkt ein Pol oder ein wesentlich singulärer Punkt der Funktion.

Die vorausgehenden Betrachtungen führen zu bemerkenswerten Folgerungen.

Nehmen wir an, die Begrenzung des Definitionsbereichs der Funktion $w = f(z)$ bestehe aus einer endlichen Anzahl von Punkten, nämlich den Punkten $a_1\, a_2 \cdots a_n$ und dem unendlich fernen Punkt.

Die charakteristischen Funktionen, die zu diesen Unstetigkeitspunkten gehören, bezeichnen wir mit

$$\varphi(z\,a_1) \qquad \varphi(z\,a_2) \cdots \varphi(z\,\infty).$$

Betrachten wir die Differenz

$$\psi(z) = f(z) - [\varphi(z\,a_1) + \varphi(z\,a_2) \cdots + \varphi(z\,a_n) + \varphi(z\,\infty)].$$

Im Punkt a_ν werden die Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z\,a_\nu)$ unstetig, aber die Differenz $f(z) - \varphi(z\,a_\nu)$ bleibt stetig und regulär; dasselbe gilt für die Funktion $\psi(z)$. Ebenso verhält sich die Funktion $\psi(z)$ auch im unendlich fernen Punkt regulär. Die Funktion $\psi(z)$ verhält sich also in jedem Punkt der z-Ebene regulär, sie ist somit eine Konstante. Daher gilt für die ganze z-Ebene die Gleichung

$$f(z) = \text{Konst.} + \varphi(z\,a_1) + \varphi(z\,a_2) \cdots + \varphi(z\,a_n) + \varphi(z\,\infty).$$

Wenn die Funktion $f(z)$ sich im unendlich fernen Punkt regulär verhält, so fällt selbstverständlich das letzte Glied auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung weg.

Nehmen wir insbesondere an, die Begrenzungspunkte $a_1\, a_2 \cdots a_n$ und ∞ seien Pole, dann sind die charakteristischen Funktionen φ sämtlich rationale Funktionen und dasselbe gilt für die Funktion $f(z)$.

Es gilt also der Satz:

Eine Funktion der komplexen Variabeln z, die nur eine endliche Anzahl von Polen besitzt, im übrigen aber sich in der ganzen z-Ebene regulär verhält, ist eine rationale Funktion.

§ 29. Das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{e}\frac{df(z)}{f(z)}$. Die Funktion $f(z)$ werde im Innern der gegebenen Fläche E nur in den Punkten $a_1\, a_2 \cdots a_n$ unstetig, und zwar seien diese Punkte Pole der Funktion (vgl. den vorigen Paragraphen); im übrigen verhalte sie sich in der Fläche E überall regulär. Die Funktion werde in der Fläche E gleich Null in den Punkten $b_1\, b_2 \cdots b_m$. Auf der Berandung der Fläche E (die auch aus mehreren getrennten Teilen bestehen kann) werde die Funktion weder 0 noch ∞. Die Ordnung, zu der die Funktion im Punkt a_ν ∞ wird, bezeichnen wir mit α_ν, die Ordnung, zu der sie im Punkt b_ν 0 wird, mit β_ν.

Die „logarithmische Derivierte" der Funktion $f(z)$

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

wird nur in den Nullpunkten und in den Unstetigkeitspunkten der Funktion $f(z)$ unstetig, verhält sich aber im übrigen in der Fläche E regulär. Auf der Berandung der Fläche E ist die Funktion $F(z)$ stetig.

Um das Verhalten der Funktion $F(z)$ in der Umgebung des Punktes b_ν zu untersuchen, setzen wir $f(z) = (z - b_\nu)^{\beta_\nu}\psi(z)$. Die Funktion $\psi(z)$ verhält sich in der Umgebung des Punktes b_ν regulär und nimmt in diesem Punkt einen von Null verschiedenen Wert an. Nun ist

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\beta_\nu}{z - b_\nu} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Das zweite Glied rechts verhält sich im Punkt b_ν regulär, daher ist das Residuum der Funktion $F(z)$ für den Punkt b_ν gleich β_ν.

Setzen wir sodann

$$f(z) = \frac{\chi(z)}{(z-a_\nu)^{\alpha_\nu}},$$

woraus

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{\alpha_\nu}{z-a_\nu} + \frac{\chi'(z)}{\chi(z)}$$

folgt.

Die Funktion $\chi(z)$ verhält sich in der Umgebung des Punktes a_ν regulär und $\chi(a_\nu)$ ist von Null verschieden. Folglich verhält sich auch die Funktion $\frac{\chi'(z)}{\chi(z)}$ im Punkt a_ν regulär. Daher ist das Residuum der Funktion $F(z)$ für den Punkt a_ν gleich $-\alpha_\nu$.

Infolge des Residuensatzes (§ 21) ist somit das über die Begrenzung der Fläche E erstreckte Integral

$$(1)\quad \frac{1}{2\pi i}\int F(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{df(z)}{f(z)} = (\beta_1+\beta_2\cdots+\beta_m)-(\alpha_1+\alpha_2\cdots+\alpha_n).$$

Das Integral ist also gleich der Differenz zwischen der Summe der Ordnungszahlen der Nullpunkte und der Summe der Ordnungszahlen der Pole.

Wir wollen übereinkommen jeden Punkt, in dem die Funktion 0^β wird, als β einfachen Nullpunkten äquivalent zu betrachten, wie dies in der Theorie der algebraischen Gleichungen üblich ist; dementsprechend ist jeder Punkt, in dem die Funktion ∞^α wird, als α einfachen Polen äquivalent zu betrachten. Auf Grund dieser Übereinkunft können wir den eben bewiesenen Satz kürzer in der Form aussprechen:

Das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{df(z)}{f(z)}$, erstreckt über die vollständige Begrenzung der Fläche E, ist gleich der Differenz zwischen der Anzahl der Nullpunkte und der Anzahl der Pole, die innerhalb der Fläche E liegen.

Aus dem eben bewiesenen Satz läßt sich leicht der folgende ableiten, der mannigfaltiger Anwendungen fähig ist:

Es sei eine Funktion $f(z) = g(z) + h(z)$ gegeben; die Funktion $f(z)$ verhalte sich im Innern und auf der Berandung der Fläche E überall regulär und dasselbe gelte von den Funktionen $g(z)$ und $h(z)$. Auf der Berandung der Fläche E werde die Funktion $g(z)$ nirgends gleich Null und es sei

$$g(z) > h(z).$$

Unter diesen Annahmen besitzen die Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ gleichviel Nullpunkte innerhalb der Fläche E.

Die Anzahl der innerhalb E liegenden Nullpunkte der Funktion $f(z)$ ist nämlich gleich dem Integral $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{df(z)}{f(z)}$, die Anzahl der Nullpunkte der Funktion $g(z)$ ist gleich dem Integral $\frac{1}{2\pi i}\int\frac{dg(z)}{g(z)}$; wo die beiden Integrale über die Berandung der Fläche E zu erstrecken sind. Da nun

$$\int\frac{df(z)}{f(z)} = \int\frac{dg(z)}{g(z)} + \int\frac{d\left[1+\frac{h(z)}{g(z)}\right]}{1+\frac{h(z)}{g(z)}}$$

ist, so ist zum Beweis des Satzes nur zu zeigen, daß das zweite Integral rechts den Wert Null hat.

Setzen wir $1 + \frac{h(z)}{g(z)} = w$.

Der Berandung der Fläche E entsprechen — je nachdem sie aus einer oder mehreren Randkurven besteht — in der w-Ebene eine oder mehrere in sich zurücklaufende Kurven. Da nach Voraussetzung für alle Punkte der Berandung der Fläche E die Ungleichung $\frac{h(z)}{g(z)} < 1$ besteht, so liegen die entsprechenden Punkte der w-Ebene innerhalb eines Kreises, dessen Zentrum der Punkt 1 und dessen Radius die Längeneinheit ist. Das Integral $\int\frac{dw}{w}$ erstreckt über eine in sich zurücklaufende Kurve, die ganz im Innern dieses Kreises liegt, hat den Wert Null w. z. b. w.

Wir wenden den Satz zunächst an, um den Fundamentalsatz der Algebra zu beweisen, nämlich den Satz, daß jede algebraische Gleichung n Wurzeln besitzt.

Es sei

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} \dots + c_{n-1} z + c_n$$

eine ganze rationale Funktion der Variabeln z. Wir setzen

$$g(z) = z^n \quad \text{und} \quad h(z) = c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} \cdots + c_n.$$

Bezeichnen wir den absoluten Betrag z mit r und mit k die größte unter den positiven Größen

$$|c_1| \quad \sqrt{|c_2|} \quad \sqrt[3]{|c_3|} \cdots \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Der absolute Betrag $\left|\frac{h(z)}{g(z)}\right|$ ist nicht größer als die Summe

$$\frac{k}{r} + \frac{k^2}{r^2} \cdots + \frac{k^n}{r^n} = \frac{\frac{k}{r} - \frac{k^{n+1}}{r^{n+1}}}{1 - \frac{k}{r}},$$

also wenn $r \geqq 2k$ kleiner als 1. Auf der Peripherie eines Kreises um den Nullpunkt, dessen Radius $= 2k$ ist, ist demnach $|g(z)| > |h(z)|$. Da nun die Funktion $g(z) = z^n$ im Nullpunkt zur n^{ten} Ordnung verschwindet, so besitzt auch die Funktion $f(z)$ n innerhalb des Kreises liegende Nullpunkte.

§ 30. Umkehrung der funktionalen Beziehung. Der im vorigen Paragraphen bewiesene Satz führt zur Beantwortung der Frage: Inwieweit ist die Beziehung zwischen der unabhängigen Variabeln z und der regulären Funktion $w = f(z)$ eine gegenseitige? Mit anderen Worten: inwieweit kann die Variable z als Funktion der unabhängigen Variabeln w aufgefaßt werden?

Es sei z_0 ein beliebiger Punkt, in dessen Umgebung sich die Funktion $f(z)$ regulär verhält. Wir lassen die Möglichkeit offen, daß im Punkt z_0 eine Anzahl von Derivierten der Funktion $f(z)$ verschwinden, und bezeichnen mit n die Ordnung der ersten nicht verschwindenden Derivierten.

Wir bestimmen nun zunächst eine den Punkt z_0 einschließende Fläche, die, vom Punkt z_0 abgesehen, keinen Nullpunkt der Derivierten $f'(z)$ enthält (im Fall $n = 1$ enthält die Fläche überhaupt keinen Nullpunkt von $f'(z)$). Zu dem Zweck gehen wir von der Taylorschen Reihe aus:

$$(1) \qquad f(z) - f(z_0) = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + c_{n+2}(z - z_0)^{n+2} + \cdots$$

und setzen

$$(2)\qquad \begin{aligned} g(z) &= c_n(z-z_0)^n \\ h_1(z) &= c_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + c_{n+2}(z-z_0)^{n+2} + \cdots \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit r den absoluten Betrag $|z-z_0|$, mit $\frac{1}{2k}$ die obere Grenze der positiven Größen

$$(3)\qquad \sqrt[\nu]{\left|\frac{n+\nu}{n}\,\frac{c_{n+\nu}}{c_n}\right|} \qquad \nu = 1, 2, 3 \cdots$$

Die Größe $2k$ kann nicht größer als der Konvergenzradius der Reihe (1) sein, wohl aber kleiner. Der absolute Betrag der Derivierten

$$h_1'(z) = (n+1)c_{n+1}(z-z_0)^n + (n+2)c_{n+2}(z-z_0)^{n+1} + \cdots$$

ist nicht größer als die Summe

$$n\,|c_n|\,r^{n-1}\left(\frac{r}{2k} + \frac{r^2}{4k^2} + \cdots\right).$$

Nun ist (2): $n\,|c_n|\,r^{n-1} = |g'(z)|$

und unter der Voraussetzung, daß $r < k$ ist, ist

$$\frac{r}{2k} + \frac{r^2}{4k^2} + \cdots < 1.$$

Daraus folgt: innerhalb eines Kreises K um den Punkt z_0, dessen Radius $= k$ ist, ist

$$|h_1'(z)| < |g'(z)|.$$

Innerhalb des Kreises K liegt demnach vom Punkte z_0 abgesehen kein Nullpunkt der Derivierten $f'(z)$.

Wir beweisen nun, daß auf der Peripherie des Kreises K die Differenz $|g(z)| - |h_1(z)|$ über einer angebbaren Größe bleibt. Es ist nämlich (s. (1) und (2))

$$h_1(z) = g(z)\left[\frac{c_{n+1}}{c_n}(z-z_0) + \frac{c_{n+2}}{c_n}(z-z_0)^2 + \cdots\right]$$

also da (3)

$$\left|\frac{c_{n+\nu}}{c_n}\right| < \frac{n}{n+\nu}\,\frac{1}{(2k)^\nu} \text{ ist,}$$

$$|h_1(z)| < |g(z)|\left[\frac{n}{n+1}\,\frac{r}{2k} + \frac{n}{n+2}\left(\frac{r}{2k}\right)^2 + \cdots\right]$$

folglich

$$|h_1(z)| < |g(z)|\,\frac{n}{n+1}\,\frac{r}{2k-r}.$$

Insbesondere ist auf der Peripherie des Kreises K

$$|h_1(z)| < |g(z)| \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1}\,|c_n| \cdot k^n$$

also
$$g(z) - h_1(z) > \frac{c_n k^n}{n+1}.$$

Bezeichnen wir mit σ den Minimalwert, den die Differenz $g(z) - h_1(z)$ auf der Peripherie des Kreises K erreicht.

Mit w bezeichnen wir eine komplexe Konstante, die der Bedingung
$$0 < w - f(z_0) < \sigma$$
genügt, im übrigen aber beliebig gewählt werden kann. Wir beweisen nun:

Die Funktion $f(z)$ nimmt den Wert w in n Punkten der Kreisfläche K an.

Zum Beweis ist zu bemerken: es ist (1) und (2))
$$\begin{aligned} f(z) - w &= f(z_0) + g(z) + h_1(z) - w \\ &= g(z) + h(z) \end{aligned}$$
wo $h_1(z) + f(z_0) - w = h(z)$ gesetzt ist.

Nach Voraussetzung ist $w - f(z_0) < \sigma$ also
$$h(z) < h_1(z) + \sigma.$$
Auf der Peripherie des Kreises K ist $g(z) \geqq h_1(z) + \sigma$, also $g(z) > h(z)$. Also ist die Anzahl der Nullpunkte der Funktion $f(z) - w$, die innerhalb des Kreises K liegen, gleich der Anzahl n der einfachen Nullpunkte der Funktion $g(z) = c_n(z - z_0)^n$ innerhalb dieses Kreises.

Für die weitere Betrachtung ist es zweckmäßig, die Fälle $n = 1$ und $n > 1$ zu unterscheiden.

Nehmen wir zunächst an, die Derivierte $f'(z)$ verschwinde nicht im Punkt z_0, es sei also $n = 1$. In diesem Fall entspricht jedem Wert w, der der Bedingung $w - f(z_0) < \sigma$ genügt, ein Wert z, der der Bedingung $z - z_0 < k$ genügt. Da außerdem z als Funktion der Variabeln w betrachtet eine bestimmte Derivierte $\frac{dz}{dw} = \frac{1}{f'(z)}$ besitzt, so verhält sich die Funktion z in der Umgebung des Punktes $w_0 = f(z_0)$ regulär. Wir können daher z durch eine nach aufsteigenden Potenzen von $w - w_0$ fortschreitende Potenzreihe darstellen, deren Konvergenzradius nicht kleiner als σ ist. Nachdem die Möglichkeit einer derartigen Reihenentwicklung nachgewiesen ist, kann man die Werte der Koeffizienten leicht mittelst der Methode der unbestimmten Koeffizienten bestimmen.

Eine in der w-Ebene liegende Kreisfläche C, deren Mittelpunkt der Punkt w_0 und deren Radius gleich σ ist, wird konform auf eine in der z-Ebene liegende, den Punkt z_0 einschließende Fläche E abgebildet, die innerhalb des Kreises K liegt. Jedem Punkt der Fläche C entspricht ein Punkt der Fläche E und umgekehrt.

Nehmen wir nunmehr an, es sei $n > 1$, es verschwinden also im Punkt z_0 die Derivierten $f'(z_0)\; f''(z_0) \cdots f^{(n-1)}(z_0)$.

In diesem Fall entsprechen jedem Wert w, der der Bedingung $|w - f(z_0)| < \sigma$ genügt, n Werte z_ν $(\nu = 1, 2, \cdots n)$, die der Bedingung $|z_\nu - z_0| < k$ genügen. Legen wir wieder um den Punkt $w_0 = f(z_0)$ in der w-Ebene einen Kreis C vom Radius σ. Jedem Punkt im Innern dieses Kreises entsprechen n Punkte z_ν im Innern des Kreises K in der z-Ebene. Diese n Punkte fallen alle in den Punkt z_0 zusammen, wenn der Punkt w in den Mittelpunkt w_0 des Kreises C rückt; andernfalls können keine zwei derselben zusammenfallen. Denn wenn dies einträte, entstünde ein Nullpunkt zweiter Ordnung der Funktion $f(z)$ und in diesem müßte auch die Derivierte $f'(z)$ verschwinden. Aber dies ist unmöglich, weil z_0 der einzige Nullpunkt der Derivierten $f'(z)$ innerhalb des Kreises K ist.

Solange der Punkt w nicht mit dem Punkt w_0 zusammenfällt, verschwindet also keine der Derivierten $f'(z_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \cdots n)$; daraus folgt, daß sich die Punkte $z_1\; z_2 \cdots z_n$ mit w nach der Stetigkeit ändern, und daß jedem Linienelement innerhalb der Kreisfläche C n Linienelemente in der z-Ebene, jeder Kurve in der Kreisfläche C n Bildkurven in der z-Ebene entsprechen. Geht die Kurve in der w-Ebene durch den Punkt w_0, so gehen die n Bildkurven durch den Punkt z_0. Sofern aber die Kurve in der w-Ebene weder geschlossen ist noch sich überkreuzt, können zwei der Bildkurven, abgesehen vom Punkt z_0, keinen Punkt gemein haben.

Insbesondere entsprechen dem Radius λ des Kreises C, der mit der positiven Abszissenachse parallel und gleichgerichtet ist, in der z-Ebene n vom Punkt z_0 ausgehende, im übrigen getrennt verlaufende Kurven $l_1\; l_2 \cdots l_n$, die eine den Punkt z_0 einschließende Fläche in n Sektoren $S_1\; S_2 \cdots S_n$ zerlegen. Einer Kurve in der w-Ebene, die den Radius λ nicht überschreitet, entsprechen n Bildkurven, von denen keine eine der Kurven $l_1\, l_2 \cdots l_n$ überschreitet.

Daraus folgt: Die n Bildpunkte $z_1\, z_2 \cdots z_n$, die einem Punkt w entsprechen, verteilen sich derart auf die n Sektoren $S_1\, S_2 \cdots S_n$, daß jedem Sektor ein Bildpunkt angehört. Die Kreisfläche C wird somit n-fach auf die z-Ebene abgebildet, auf jeden der n Sektoren $S_1\, S_2 \cdots S_n$ einmal. Eine jede dieser Abbildungen ist im allgemeinen konform; eine Ausnahme tritt nur im Punkt z_0 ein, weil nur in diesem Punkt die Derivierte $f'(z)$ verschwindet (§ 18).

Die n Abbildungen setzen sich zu einer Fläche E zusammen, die ein den Punkt z_0 einschließendes Stück der z-Ebene einfach überdeckt. Um nun umgekehrt die Fläche E auf die w-Ebene abzubilden, legen wir n Exemplare der w-Ebene aufeinander. Auf das oberste Blatt wird der Sektor S_1 abgebildet, auf das zweite der Sektor S_2 usw. Sodann schneiden wir jedes Blatt längs des Radius λ auf und heften den Schnittrand des obersten Blattes, der auf der Seite der abnehmenden Ordinaten liegt, an den Schnittrand des zweiten Blattes, der auf der Seite der wachsenden Ordinaten liegt. Die negative Seite des Schnittrandes des zweiten Blattes wird an die positive Seite des Schnittrandes des dritten Blattes geheftet usw., endlich wird die negative Seite des Schnittrandes des untersten Blattes an die positive Seite des Schnittrandes des obersten Blattes geheftet.

Diese n-blättrige „Windungsfläche" gibt uns nun ein konformes Abbild der Fläche E.

Wir bilden nun die Windungsfläche mittels der Funktion $w - w_0 = \zeta^n$ auf die ζ-Ebene ab (vergl. § 18 erstes Beispiel).

Jedem der n Blätter der Windungsfläche entspricht in der ζ-Ebene ein Sektor Σ_ν, der von zwei vom Nullpunkt ausgehenden Radien Vektoren begrenzt ist, die den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ einschließen. Ordnen wir nun jedem Punkt der Fläche E den Punkt der ζ-Ebene zu, der demselben Punkt der Windungsfläche entspricht, so erhalten wir eine wechselseitig eindeutige konforme Abbildung der z-Ebene auf die ζ-Ebene. Demnach kann die Variable z in der Umgebung des Punktes z_0 als reguläre Funktion der unabhängigen Variabeln ζ betrachtet werden und wir können daher z durch eine nach steigenden Potenzen von ζ fortschreitende Potenzreihe darstellen.

Wir haben also den Satz:

Verschwindet im Punkt z_0 die Derivierte der regulären Funktion $w = f(z)$ zur Ordnung $n-1$, so läßt sich z als Funktion von w durch eine nach steigenden Potenzen von $(w - w_0)^{\frac{1}{n}}$ fortschreitende Potenzreihe darstellen.

Weil in dem Punkt w_0 die n „Zweige" $z_1\, z_2 \cdots z_n$ der unabhängigen Variabeln w zusammenhängen, bezeichnet man diesen Punkt als Verzweigungspunkt.

§ 31. Die Funktion log z. Nachdem wir in § 28 die Unstetigkeiten untersucht haben, die eine eindeutig definierte Funktion in einem isolierten Punkt darbieten kann, wenden wir uns nun zur Untersuchung der Integrale eindeutiger Funktionen. Wir beginnen mit der Untersuchung des Integrals $\int \frac{dz}{z}$. Für reelle positive Werte der Variabeln z gilt bekanntlich die Gleichung

$$\log z = \int_1^z \frac{dz}{z}.$$

Diese Definition des Logarithmus durch ein bestimmtes Integral dehnen wir nun auf komplexe Werte der Variabeln aus. Dabei erscheint es zweckmäßig, für die Integrationsvariable und die obere Grenze verschiedene Bezeichnungen anzuwenden.

Wir setzen

$$(1) \qquad \log z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \qquad \zeta = \xi - i\eta \qquad z = x + iy.$$

Das Integral $\int \frac{d\zeta}{\zeta}$ erstreckt über eine geschlossene, sich nicht überkreuzende Kurve hat den Wert $2\pi i$ oder 0, je nachdem die Kurve den Nullpunkt einschließt oder nicht (§ 21). Daraus folgt, daß der Wert des Integrals (1) nicht nur von der oberen Grenze z, sondern auch vom Integrationsweg abhängig ist. Um die Abhängigkeit des Integrals vom Weg besser zu übersehen, ziehen wir vom Nullpunkt ausgehend eine beliebige sich nicht überkreuzende Kurve S, die sich bis ins Unendliche erstreckt und setzen fest, daß der Integrationsweg diese Kurve nicht überschreiten soll. Bei der stereographischen Projektion auf die Kugel entspricht der Kurve S eine beliebige sich nicht überkreuzende Kurve, die die beiden Pole verbindet.

Cauchy bezeichnet eine derartige Kurve S als „ligne d'arrêt", wir wollen sie als Sperrlinie bezeichnen.

Wir unterscheiden eine „positive" und eine „negative" Seite der Sperrlinie und wählen die Bezeichnung so, daß man durch einen positiven Umlauf um den Nullpunkt von der $-$-Seite auf die $+$-Seite gelangt. Lassen wir die Sperrlinie mit dem negativen Teil der x-Achse zusammenfallen, so ist die positive Seite der Sperrlinie diejenige, auf der die Ordinaten positiv sind.

In der durch die Sperrlinie zerschnittenen z-Ebene ist nun das Integral (1) einwertige Funktion der oberen Grenze z. Denn zwei vom Punkt 1 zum selben Punkt z führende Kurven können nicht eine Fläche begrenzen, die den Nullpunkt einschließt. Aber längs der Sperrlinie wird die Funktion $\log z$ unstetig.

Bezeichnen wir, um dies nachzuweisen, einen beliebigen Punkt der Sperrlinie, je nachdem er als dem positiven oder dem negativen Rand angehörig betrachtet wird, mit $\overset{+}{z}$ bzw. $\overset{-}{z}$. Nun ist

$$\log \overset{+}{z} - \log \overset{-}{z} = \int \frac{d\zeta}{\zeta},$$

wo die Integration über eine beliebige von $\overset{-}{z}$ nach $\overset{+}{z}$ führende Kurve, die die Sperrlinie nicht schneidet, zu erstrecken ist.

Da diese Kurve den Nullpunkt einschließt, ist der Wert des Integrals $= 2\pi i$, es ist also

$$\log \overset{+}{z} - \log \overset{-}{z} = 2\pi i,$$

d. h. in einem Punkt auf der positiven Seite der Sperrlinie ist der Logarithmus um $2\pi i$ größer als in dem gegenüberliegenden Punkt auf der negativen Seite.

Nehmen wir insbesondere an, die Sperrlinie falle mit dem negativen Teil der Abszissenachse zusammen. Wir führen Polarkoordinaten ein und setzen

$$\zeta = \varrho e^{i\vartheta} \qquad z = r e^{i\varphi}.$$

Da der Punkt z den negativen Teil der Abszissenachse nicht überschreiten soll, können wir ohne gegen das Prinzip der Stetigkeit zu verstoßen, festsetzen es sei $-\pi \leqq t \leqq \pi$.

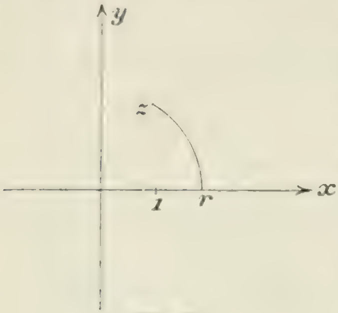


Fig. 17.

Den Integrationsweg setzen wir aus zwei Teilen zusammen, nämlich aus dem Stück der Abszissenachse, das von den Punkten mit den Abszissen 1 und $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ begrenzt wird, und einem Kreisbogen, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt und dessen Radius r ist (s. Fig. 17).

Längs des ersten Teils des Integrationsweges ist $\vartheta = 0$, $\zeta = \varrho$, $d\zeta = d\varrho$, längs des zweiten Teils ist

$$\varrho = r,\ \zeta = re^{i\vartheta},\ d\zeta = re^{i\vartheta} i\,d\vartheta.$$

Folglich ist

$$\log z = \int_1^r \frac{d\varrho}{\varrho} + i\int_0^t d\vartheta = \log r + it,$$

wo unter $\log r$ der reelle Logarithmus der reellen positiven Größe r zu verstehen ist. Den auf diese Weise definierten Wert des Logarithmus pflegt man als Hauptwert zu bezeichnen.

Es ist nun leicht zu übersehen, welchen Wert das Integral $\log z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ annimmt, wenn der Integrationsweg L nicht auf die zerschnittene z-Ebene beschränkt wird, sondern die Sperrlinie wiederholt überschreitet.

Gehen wir von dem Punkt z auf der negativen Seite der Sperrlinie die Sperrlinie überschreitend zu dem Punkt $\overset{+}{z}$ auf der positiven Seite über, so wird diesem Punkt an Stelle des Hauptwertes $\log \overset{+}{z} = \log r + \pi i$ der Wert

$$\log z = \log r - \pi i = \log \overset{+}{z} - 2\pi i$$

zugeordnet: es tritt also eine Verminderung des Funktionswertes um $2\pi i$ ein. Dementsprechend wird der Funktionswert um $2\pi i$ vermehrt, wenn wir die Sperrlinie von der positiven zur negativen Seite hin überschreiten.

Nehmen wir an, der Integrationsweg L führe n-mal von der negativen Seite der Sperrlinie auf die positive und m-mal von der positiven auf die negative. Wir erhalten

$$(2) \qquad \log z = \int_1^z L \frac{d\zeta}{\zeta} = \log r + it + (m-n) \cdot 2\pi i,$$

wo $-\pi \leqq t < \pi$ ist.

Der reelle Teil des Logarithmus ist also gleich dem reellen Logarithmus des absoluten Betrags der Variabeln z, der Koeffizient von i ist identisch mit der Funktion arc z (vgl. § 12).

Die Gesamtheit der Funktionswerte, die einem beliebig zu wählenden, aber festen Wert der ganzen Zahl $m-n$ entspricht, bezeichnet man als „Zweig" der Funktion $\log z$.*)

Um den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Funktionszweigen anschaulich zu machen, setzen wir

$$\log z = \log r + i\,[t + 2(m-n)\pi] = w = u + iv$$

und deuten u und v als kartesische Koordinaten eines Punktes in der w-Ebene. Indem wir Reelles und Imaginäres trennen, erhalten wir

$$u = \log r, \quad v = t + 2(m-n)\pi, \quad \text{wo } -\pi < t < \pi \text{ ist.}$$

Diese Gleichungen zeigen: Der Zweig der Funktion $\log z$, der durch die Gleichungen (2) dargestellt wird, bildet die z-Ebene auf einen Streifen der w-Ebene ab, der durch die Parallelen zur Abszissenachse

$$v = (2(m-n)-1)\pi \quad \text{und} \quad v = (2(m-n)+1)\pi$$

begrenzt wird. Diese beiden Parallelen sind die Bilder der beiden Ränder der Sperrlinie in der z-Ebene. Dem Nullpunkt und dem unendlich fernen Punkt der z-Ebene entspricht der unendlich ferne Punkt des Parallelstreifens. Im übrigen entspricht jedem Punkt der z-Ebene eindeutig ein Punkt des Parallelstreifens und umgekehrt.

*) Die Definition des einzelnen Funktionszweiges ist bis zu einem gewissen Grad willkürlich; sie hängt nämlich von der Gestalt der Sperrlinie ab. Ändern wir diese, so erfährt auch die Definition des Funktionszweiges eine Modifikation.

Die Abbildungen, welche die verschiedenen Zweige der Funktion log z liefern, legen sich glatt nebeneinander und bedecken die ganze w-Ebene.

Jedem Punkt der z-Ebene entsprechen also unendlich viele Punkte der w-Ebene, die auf einer Parallelen zur Ordinatenachse im Abstand 2π von einander liegen. Dagegen entspricht jedem Punkt der w-Ebene ein einziger Punkt der z-Ebene (vergl. § 18 drittes Beispiel).

Betrachten wir nun die obere Grenze des Integrals

$$w = \log z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$$

als Funktion des Integralwertes w und setzen wir dementsprechend

$$z = f(w).$$

Die Derivierte $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}$ besitzt, vom Nullpunkt und dem unendlich fernen Punkt abgesehen, in jedem Punkt der z-Ebene einen von Null verschiedenen endlichen Wert; den beiden genannten singulären Punkten entspricht der unendlich ferne Punkt der w-Ebene. Daraus folgt: Die Funktion $f(w)$ verhält sich in der Umgebung eines jeden im Endlichen liegenden Punktes der w-Ebene regulär. Da jedem im Endlichen liegenden Punkt der w-Ebene ein Punkt der z-Ebene entspricht, so ist $z = f(w)$ eine eindeutig definierte, im Endlichen überall reguläre Funktion der komplexen Variabeln w.

Diese Funktion genügt der Differentialgleichung

$$(3) \qquad \frac{dz}{dw} = z \quad \text{oder} \quad f'(w) = f(w)$$

und der Anfangsbedingung $f(0) = 1$.

Hieraus ergibt sich leicht eine charakteristische Eigenschaft der Funktion $f(w)$. Setzen wir, unter w_0 eine beliebig zu wählende komplexe Konstante verstehend

$$\psi(w) = \frac{f(w + w_0)}{f(w)}.$$

Die Derivierte

$$\psi'(w) = \frac{f'(w + w_0)}{f(w)} - \frac{f(w + w_0) f'(w)}{(f(w))^2}$$

verschwindet wegen (3), also ist $\psi(w)$ eine Konstante. Für

$w = 0$ ergibt sich $\varphi(w) = \varphi(0) = f(w_0)$. Die Funktion $f(w)$ genügt also der Funktionalgleichung

$$(4) \qquad f(w)f(w_0) = f(w + w_0).$$

Für reelle Werte von u ist bekanntlich

$$f(w) = f(u) = e^u.$$

Da die Funktionalgleichung (4), die für die reelle Exponentialfunktion charakteristisch ist, auch für komplexe Werte der Variabeln gilt, so steht nichts im Weg, die Definition der Exponentialfunktion auf komplexe Werte auszudehnen und zu setzen

$$f(w) = e^w$$

(vergl. die früher gegebene Definition der Exponentialfunktion. § 17).

Aus der Differentialgleichung (3) folgt durch wiederholte Differentiation

$$f^{(n)}(w) = f^{(n-1)}(w) = f(w),$$

also insbesondere $f^{(n)}(0) = 1$. Hieraus ergibt sich sofort die bekannte Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$e^w = 1 + \frac{w}{1} + \frac{w^2}{1 \cdot 2} + \frac{w^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

Da jedem Werte der Variabeln $z = f(w)$ unendlich viele Werte der Variabeln w entsprechen, die sich um Multipla von $2\pi i$ unterscheiden, so ist $f(w + 2\pi i) = f(w)$, die Exponentialfunktion besitzt also die Periode $2\pi i$.

Von der Exponentialfunktion ausgehend gelangt man sofort zur Definition der trigonometrischen Funktionen einer komplexen Variabeln: wir setzen fest, daß die für eine reelle Variable geltenden Formeln

$$\sin w = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw}), \quad \cos w = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})$$

auch für komplexe Werte der Variabeln in Kraft bleiben sollen.

Aus der Definition des Logarithmus und der Exponentialfunktion eines komplexen Arguments ergibt sich die Definition einer Potenz mit beliebigem reellen oder komplexen Exponenten. Wir setzen

$$e^{n \log z} = z^n.$$

Wenn der Exponent n eine ganze positive oder negative Zahl ist, so stimmt diese Definition mit der gewöhnlichen

Definition einer Potenz mit ganzzahligem Exponenten überein: wegen der Funktionalgleichung (4) führt sie auch dann, wenn dies nicht der Fall ist, zu keinem Widerspruch.

Führt der Punkt z einen positiven Umlauf um den Nullpunkt der z-Ebene aus, so wächst der Logarithmus um $2\pi i$; Anfangs- und Endwert der Potenz unterscheiden sich demnach um den Faktor $e^{n\cdot 2\pi i}$. Wenn der Exponent n eine reelle rationale Zahl $= p:q$ ist, so gelangen wir somit durch wiederholte Umkreisung des Nullpunkts zu q verschiedenen Werten der Potenz; in dem Fall dagegen, daß der Exponent eine reelle irrationale oder eine komplexe Zahl ist, ergibt sich eine unendliche Anzahl von verschiedenen Werten.

Wir haben bei allen unseren bisherigen Entwicklungen den Logarithmus und die trigonometrischen und zyklometrischen Funktionen eines reellen Arguments als bekannt vorausgesetzt. Es ist dies im Interesse der Einfachheit der Darstellung geschehen, ist aber keineswegs notwendig; wir hätten vielmehr auch von dem Integral $\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$ ausgehend zur Definition dieser Funktionen gelangen können.

Wir wollen dies etwas weiter ausführen.

Indem wir Reelles und Imaginäres trennen, erhalten wir

$$\log z = w = u + iv = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{d\xi + i\,d\eta}{\xi + i\eta}$$

$$= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{\xi\,d\xi + \eta\,d\eta}{\xi^2 + \eta^2} + i \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{\xi\,d\eta - \eta\,d\xi}{\xi^2 + \eta^2}\,{}^{*)},$$

also

$$(5) \qquad u = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{\xi\,d\xi + \eta\,d\eta}{\xi^2 + \eta^2} \qquad v = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{\xi\,d\eta - \eta\,d\xi}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Längs eines Kreises um den Nullpunkt ist $x\,dx + y\,dy = 0$, daher erfährt der Wert u keine Änderung, wenn der Punkt (x, y) auf der Peripherie des Kreises fortrückt. Da das Integral u in keinem Punkt des Kreises sinnlos wird, so hat es

*) Bezüglich der Bezeichnungen vergl. die Festsetzungen § 10.

auf dem ganzen Kreis denselben Wert; demnach hängt die Größe u nur von dem Radius des Kreises ab, sie ist also eindeutige Funktion der einen Variabeln $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Wir definieren nun den reellen Logarithmus einer reellen positiven Größe r durch die Gleichung

$$(6) \qquad \log r = \int_1^r \frac{d\varrho}{\varrho},$$

wo die Integrationsvariable ϱ reelle Werte zu durchlaufen hat, und erhalten

$$(7) \qquad u(x, y) = \log \sqrt{x^2 + y^2} = \log |z|.$$

Längs einer Geraden durch den Nullpunkt ist $x dy - y dx = 0$, daher erfährt der Wert v keine Änderung, wenn der Punkt (x, y) auf der Geraden fortrückt. Im Nullpunkt und im unendlich fernen Punkt wird das Integral v sinnlos, über diese Stellen hinweg dürfen wir daher den Punkt (x, y) nicht fortrücken lassen. Daraus folgt: Das Integral v ändert sich nicht, wenn der Punkt (x, y) längs eines vom Nullpunkt ausgehenden Vektors fortrückt, aber es kann auf entgegengesetzt gerichteten Vektoren verschiedene Werte annehmen; daher ist das Integral keine eindeutige Funktion des Quotienten $y : x$.

Um das Integral eindeutig zu machen, ziehen wir längs des negativen Teils der Abszissenachse eine Sperrlinie: den Punkten der zerschnittenen Ebene können wir, wie aus unseren allgemeinen Sätzen hervorgeht, die Integralwerte eindeutig zuordnen.

Zwei Linienelementen, die zur Abszissenachse symmetrisch liegen, entsprechen entgegengesetzt gleiche Werte des Differentials

$$dv = \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Daher gelangen wir auf Wegen, die zur Abszissenachse symmetrisch liegen, zu entgegengesetzt gleichen Integralwerten v; wir

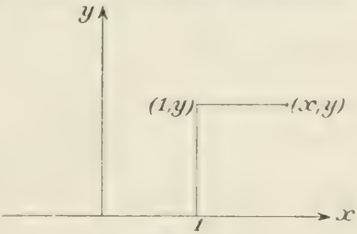


Fig. 18

können uns daher darauf beschränken, die Integralwerte zu betrachten, die in Punkten der positiven Halbebene stattfinden.

Als Integrationsweg wählen wir eine gebrochene Linie, deren erster Teil der Ordinatenachse und deren zweiter Teil der Abszissenachse parallel ist (s. Fig. 18).

Längs des ersten Teils ist $\xi = 1$, η wächst von 0 bis y, längs des zweiten Teils ist $\eta = y$, ξ geht von 1 bis x. Es ist somit

$$(8) \qquad v(x, y) = \int_0^y \frac{d\eta}{1+\eta^2} - \int_1^x \frac{y\,d\xi}{y^2+\xi^2}.$$

Wir definieren nun eine reelle Transzendente durch die Gleichung

$$(9) \qquad \operatorname{arc\,tg} t = \int_0^t \frac{d\tau}{1+\tau^2},$$

wo die Integrationsvariable τ auf reelle Werte beschränkt ist, und setzen

$$\int_0^\infty \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Jedem Wert von t entspricht ein vollkommen bestimmter Wert der Funktion $\operatorname{arc\,tg} t$ und umgekehrt jedem Funktionswert, der dem Intervall $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$ angehört, ein vollkommen bestimmter Wert von t.

Aus der Definition ergibt sich weiter, daß $\operatorname{arc\,tg}(-t) = -\operatorname{arc\,tg} t$ ist.

Führen wir in (9) an Stelle der Integrationsvariabeln τ die Variable $\frac{1}{\tau}$ ein, so folgt, wenn t positiv ist

$$\operatorname{arc\,tg} t = \int_{\frac{1}{t}}^\infty \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \int_0^\infty \frac{d\tau}{1+\tau^2} - \int_0^{\frac{1}{t}} \frac{d\tau}{1+\tau^2},$$

also

$$(10) \qquad \operatorname{arc\,tg} t + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2} \quad (t \text{ positiv}).$$

Ist dagegen t negativ, so erhalten wir

$$\operatorname{arc\,tg} t = -\int_{-\infty}^{\frac{1}{t}} \frac{d\tau}{1+\tau^2} = -\int_{-\infty}^{0} \frac{d\tau}{1+\tau^2} - \int_{0}^{\frac{1}{t}} \frac{d\tau}{1+\tau^2},$$

also

$$\operatorname{arc\,tg} t + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{t} = -\frac{\pi}{2}.$$

Mit Rücksicht darauf, daß die Funktion $\operatorname{arc\,tg} t$ ungerade ist, folgt hieraus

(11) $$\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{t} = -\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} |t| \qquad (t \text{ negativ}).$$

Im zweiten Integral auf der rechten Seite der Gleichung (8) setzen wir nun $\xi = y\tau$ und erhalten

$$\int_1^x \frac{y\,d\xi}{y^2+\xi^2} = \int_{\frac{1}{y}}^{\frac{x}{y}} \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{y}.$$

Substituieren wir diesen Wert in die Gleichung (8), so erhalten wir mit Rücksicht auf (10)

$$v = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y} \quad (y \text{ positiv}).$$

Ist x positiv, so ist diese Gleichung wegen (10) gleichbedeutend mit $v = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$.

Ist dagegen x negativ, so folgt aus (11)

$$v = \pi - \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

Unter der Voraussetzung, daß der Integrationsweg die Sperrlinie nicht überschreitet, ergeben sich somit für die Funktion v in den 4 Quadranten die folgenden Werte:

$$\begin{array}{lll} x \text{ positiv} & y \text{ positiv} & v = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \\ x \text{ negativ} & y \text{ positiv} & v = \pi - \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \\ x \text{ negativ} & y \text{ negativ} & v = -\pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \\ x \text{ positiv} & y \text{ negativ} & v = -\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}. \end{array}$$

Der Fall, daß der Punkt (x, y) auf dem negativen Teil der Abszissenachse liegt, ist als Grenzfall zu betrachten. Je nachdem wir uns der Achse von der positiven oder der negativen Seite aus nähern, gelangen wir zu dem Wert π oder $-\pi$.

§ 32. Die Integrale einwertiger Funktionen. In § 20 ist nachgewiesen worden: wenn die Funktion $w = f(z)$ für eine einfach zusammenhängende Fläche eindeutig definiert ist und sich in derselben überall regulär verhält, so ist das Integral

$$J(z) = \int_{z_0}^{z} w\,dz$$

eine eindeutig definierte überall reguläre Funktion der oberen Integrationsgrenze z, vorausgesetzt, daß nur solche Integrationswege in Betracht gezogen werden, die nicht aus der Fläche heraustreten.

Für mehrfach zusammenhängende Flächen — beispielsweise für eine Ringfläche — gilt dieser Satz nicht mehr (bezüglich der Definition der einfach- und mehrfach zusammenhängenden Flächen vergl. § 8).

Wir wollen nun untersuchen, wie sich das Integral $J(z)$ in einer Ringfläche verhält, die einen isolierten Unstetigkeitspunkt a der Funktion $w = f(z)$ einschließt.

Wir setzen voraus, die Funktion w sei für eine Ringfläche, die durch zwei konzentrische Kreise um den Punkt a begrenzt wird, eindeutig definiert und verhalte sich in derselben überall regulär. Nach dem Laurentschen Satz (§ 27) läßt sich die Funktion in der Form

$$w = \varphi(z|a) + \psi(z|a)$$

darstellen, wo $\varphi(z|a)$ eine Reihe der Form

$$\varphi(z|a) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{c_{-3}}{(z-a)^3} + \cdots$$

und $\psi(z|a)$ eine Reihe der Form

$$\psi(z|a) = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

bedeutet.

Wir bezeichnen mit z_0 einen festen, mit z einen variabeln Punkt des Ringgebietes, mit L eine beliebige diese beiden Punkte verbindende Kurve, die nicht aus dem Ringgebiet heraustritt. Im vorliegenden Fall ist die gliedweise Integration zulässig und wir erhalten

$$(1)\quad J(z) = \int_{z_0\,(L)}^{z} w\,dz = c_{-1} \log \frac{z-a}{z_0-a} - c_{-2}\left[\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z_0-a}\right]$$
$$- \frac{c_{-3}}{2}\left[\frac{1}{(z-a)^2} - \frac{1}{(z_0-a)^2}\right] \cdots$$
$$+ c_0\left[(z-a) - (z_0-a)\right] + \frac{c_1}{2}\left[(z-a)^2 - (z_0-a)^2\right]$$
$$+ \frac{c_2}{3}\left[(z-a)^3 - (z_0-a)^3\right] \cdots$$

Der Wert des ersten Gliedes auf der rechten Seite: $c_{-1} \log \frac{z-a}{z_0-a}$ ist vom Integrationsweg L abhängig, die Werte aller übrigen Glieder sind davon unabhängig. Wählen wir als Integrationsweg eine geschlossene, sich nicht überkreuzende Kurve, die den Punkt a einschließt, und integrieren wir im positiven Sinn, so erhält das erste Glied auf der rechten Seite den Wert $c_{-1} \cdot 2\pi i$, alle übrigen Glieder verschwinden. Bei einem positiven Umlauf um den Unstetigkeitspunkt a wächst also das Integral um die Konstante $c_{-1} \cdot 2\pi i$.

Die Konstante c_{-1} bezeichnet man als „Gewicht der logarithmischen Unstetigkeit“; sie ist identisch mit dem Residuum der Funktion für den Punkt a (§ 24).

Um die Werte des Integrals $J(z)$ den Punkten des Ringgebietes eindeutig zuordnen zu können, verbinden wir die beiden Randkurven des Ringgebietes durch einen Querschnitt S (Fig. 19). Die Ränder des Querschnitts unterscheiden wir wieder als + Rand und — Rand derart, daß ein positiver Umlauf um den Punkt a vom — Rand zum + Rand führt. Das durch den Querschnitt S zerschnittene Ringgebiet ist eine einfach zusammenhängende Fläche; in dieser Fläche ist daher das Integral $J(z)$ eine eindeutig definierte Funktion der Variabeln z. Zu beiden Seiten des Querschnitts S nimmt das Integral $J(z)$ verschiedene Werte an: es ist

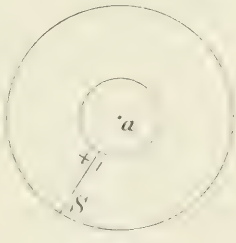


Fig. 19.

$$J(\overset{+}{z}) - J(\overset{-}{z}) = c_{-1} \cdot 2\pi i.$$

Sofern das Residuum $c_{-1} = 0$ ist, findet im Punkt a keine logarithmische Unstetigkeit statt und es sind dann die Integralwerte den Punkten des unzerschnittenen Ringgebietes eindeutig zugeordnet.

Die vorausgehenden Ausführungen stützen sich nur auf die Laurentsche Reihenentwicklung, machen aber keinen Gebrauch von der Annahme, daß das Ringgebiet nur einen Unstetigkeitspunkt a der Funktion w einschließt; sie bleiben daher in Kraft, wenn das Ringgebiet eine endliche oder unendliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten einschließt, vorausgesetzt, daß die Funktion für das Ringgebiet eindeutig definiert ist und sich in demselben überall regulär verhält. Nur die Bemerkung, daß die Konstante c_{-1} das Residuum der Funktion w für den Punkt a ist, verliert in diesem Fall ihre Geltung.

Es bleibt das Verhalten des Integrals $\int w\,dz$ in der Umgebung des unendlich fernen Punkts zu untersuchen. Zu dem Zweck bilden wir die z-Ebene mittels der involutorischen Substitution $z = \frac{1}{\zeta}$ auf die ζ-Ebene ab und betrachten w als Funktion der Variabeln ζ.

Wir nehmen an, die Funktion w sei für ein Ringgebiet P, das durch zwei konzentrische Kreise um den Nullpunkt der ζ-Ebene begrenzt ist, eindeutig definiert und verhalte sich in diesem Gebiet überall regulär.

Die Radien der Grenzkreise bezeichnen wir mit ϱ_1 und ϱ_2, und zwar sei $\varrho_1 < \varrho_2$. In der z-Ebene entspricht diesem Ringgebiet ein Ringgebiet R, das von zwei konzentrischen Kreisen um den Nullpunkt der z-Ebene begrenzt wird. Die Grenzkreise haben die Radien $1 : \varrho_1$ bzw. $1 : \varrho_2$. Einem innerhalb des Ringgebiets R verlaufenden Weg L, der die Punkte z_0 und z verbindet, entspricht in der ζ-Ebene ein Weg Λ, der innerhalb des Ringgebiets P verläuft und die Punkte ζ_0 und ζ verbindet.

Als Funktion der Variabeln z betrachtet ist w für das Ringgebiet R eindeutig definiert und verhält sich in demselben überall regulär.

Als Funktion der Variabeln ζ wird w durch die Laurentsche Reihe

$$w = \frac{c_{-1}}{\zeta} + \frac{c_{-2}}{\zeta^2} + \frac{c_{-3}}{\zeta^3} + \dots$$
$$+ c_0 + c_1 \zeta + c_2 \zeta^2 + \dots$$

dargestellt, als Funktion der Variabeln z durch die Reihe

$$w = c_{-1} z + c_{-2} z^2 + c_{-3} z^3 + \dots$$
$$+ c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \dots$$

Durch gliederweise Integration ergibt sich

$$\int_{z_0}^{z}{}_{L}\, w\,dz = -\int_{\zeta_0}^{\zeta}{}_{\Lambda}\, \frac{w}{\zeta^2}\,d\zeta$$
$$= \tfrac{1}{2} c_{-1}(z^2 - z_0^2) + \tfrac{1}{3} c_{-2}(z^3 - z_0^3) + \tfrac{1}{4} c_{-3}(z^4 - z_0^4) + \dots$$
$$+ c_0(z - z_0) + c_1 \log\frac{z}{z_0} - c_2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right) - \dots$$

Von den rechts auftretenden Gliedern ist nur eines, nämlich das Glied $c_1 \log \frac{z}{z_0}$ vom Integrationsweg abhängig, alle anderen sind davon unabhängig. Führt der Punkt ζ einen positiven Umlauf um den Nullpunkt der ζ-Ebene aus, so führt der entsprechende Punkt z einen positiven Umlauf um den unendlich fernen Punkt der z-Ebene, oder was dasselbe sagen will, einen negativen Umlauf um den Nullpunkt der z-Ebene aus. Demnach hat das Integral $\int w\,dz$, in dem Sinn über eine geschlossene, den unendlich fernen Punkt einschließende Kurve erstreckt, daß dieser Punkt zur Linken liegt, den Wert $-2\pi i \cdot c_1$. Sofern der unendlich ferne Punkt ein isolierter Unstetigkeitspunkt der Funktion w ist, ist $-c_1$ das zugehörige Residuum (§ 21). Man bezeichnet in diesem Fall die Konstante $-c_1$ auch als Gewicht der logarithmischen Unstetigkeit.

Um die Integralwerte den Punkten der Ringfläche R eindeutig zuordnen zu können, müssen wir wieder die beiden Grenzkreise der Ringfläche durch einen Querschnitt S verbinden und den Integrationsweg auf das Innere der zerschnittenen Ringfläche beschränken.

Wir wollen nun annehmen, die Funktion $w = f(z)$ sei von isolierten Punkten abgesehen in der ganzen z-Ebene eindeutig definiert und regulär. Die Anzahl der Begrenzungspunkte des Definitionsbereichs kann endlich oder unendlich sein, wesentlich ist nur, daß sie eine diskrete Punktmenge bilden.

Man bezeichnet eine Funktion, für die diese Voraussetzung erfüllt ist, als eine in der ganzen Ebene einwertige oder eindeutige Funktion, oder auch schlechthin als einwertige Funktion.

Bleiben wir zunächst bei der Voraussetzung stehen, es existiere nur eine endliche Anzahl von Begrenzungspunkten $a_1\ a_2 \cdots a_n$.

Wir ziehen von einem beliebigen Punkt c aus, der mit keinem der Begrenzungspunkte zusammenfällt, nach einem jeden der Punkte a_ν eine Sperrlinie S_ν (s. Fig. 20). Keine dieser Sperrlinien darf sich selbst überkreuzen oder eine andere schneiden, im übrigen können sie beliebig konstruiert werden. Gehört auch der unendlich ferne Punkt der z-Ebene zu den Begrenzungspunkten, so tritt zu den Sperrlinien S_ν, die zu den im Endlichen liegenden Punkten a_ν führen, noch eine ins Unendliche reichende Sperrlinie S_∞ hinzu. Bei jeder Sperrlinie unterscheiden wir wieder einen $+$ Rand und einen $-$ Rand derart, daß ein positiver Umlauf um ihren Endpunkt vom $-$ Rand zum $+$ Rand führt.

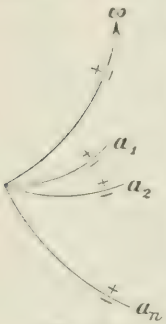


Fig. 20.

Die mit den Schnitten $S_1\ S_2 \cdots S_n\ S_\infty$ versehene z-Ebene ist eine einfach zusammenhängende Fläche, sie möge mit E' bezeichnet werden. In dieser Fläche verhält sich die Funktion w überall regulär, daher ist das Integral $J(z) = \int\limits_{z_0}^{z} w\,dz$ eine eindeutig definierte, überall reguläre Funktion der oberen Grenze z, vorausgesetzt daß der Integrationsweg auf das Innere der Fläche E' beschränkt wird.

Bezeichnen wir mit $\overset{+}{z}$ einen Punkt auf dem $+$ Rand der Sperrlinie S_ν, mit $\bar{z}$ den gegenüberliegenden Punkt auf dem $-$ Rand. Wir können die Punkte $\bar{z}$ und $\overset{+}{z}$ durch eine innerhalb der Fläche E' verlaufende Kurve verbinden, die den Punkt a_ν aber keinen weiteren Begrenzungspunkt der Funktion w einschließt; das Integral $\int w\,dz$, im positiven Sinn über diese Kurve erstreckt, hat den Wert $2\pi i\ R(a_\nu)$, wo $R(a_\nu)$ das zum Punkt a_ν gehörige Residuum bedeutet (§ 21). Daher besteht zwischen den Integralwerten, die in den Punkten $\overset{+}{z}$ und

z stattfinden, die Beziehung

$$J(\overset{+}{z}) - J(z) = 2\pi i\, R(a_\nu).$$

Wenn das Residuum $R(a_\nu) = 0$ ist, so ist die Sperrlinie S_ν nicht erforderlich, um das Integral $J(z)$ eindeutig zu machen und kann daher weggelassen werden.

Die konstante Differenz $J(\overset{+}{z}) - J(z)$ bezeichnet man als Periodizitätsmodul der Funktion $J(z)$ längs der Sperrlinie S_ν.

Es ist nun leicht anzugeben, welchen Wert das Integral $\int_{z_0}^{z} L\, w\, dz$ annimmt, wenn der Integrationsweg L die Sperrlinie beliebig oft überschreitet.

Wir bezeichnen nach wie vor mit $J(z)$ den Wert, den das Integral erlangt, wenn der Integrationsweg auf die Fläche E' beschränkt wird und nehmen an, der Weg L überschreite den Querschnitt S_1 p_1 mal von der — Seite zur + Seite hin und q_1 mal in der umgekehrten Richtung. Unter dieser Voraussetzung ist (vergl. die Ausführungen zur Gleichung (2) des vorigen Paragraphen)

$$\int_{z_0}^{z} L\, w\, dz = J(z) + 2\pi i \left[(q_1 - p_1) R(a_1) + (q_2 - p_2) R(a_2) + \dots \right.$$
$$\left. + (q_n - p_n) R(a_n) + (q_\infty - p_\infty) R(\infty) \right].$$

Wenn die sämtlichen Residuen $R(a_1)\, R(a_2) \cdots R(a_n)\, R(a_\infty)$ den Wert Null haben, so ist das Integral auch in der unzerschnittenen z-Ebene eine einwertige Funktion der Variabeln z; anderenfalls kann das Integral in jedem Punkt unendlich viele verschiedene Werte annehmen. Es kann sogar der Fall eintreten, daß das Integral in jedem Punkt bei geeigneter Wahl des Integrationswegs einem vorgeschriebenen Wert beliebig nahe kommen kann.

Den Inbegriff der Werte des Integrals $\int w\, dz$, die festen Werten der Differenzen $p_1 - q_1$, $p_2 - q_2 \dots$ entsprechen, bezeichnet man als „Zweig" der Funktion. Dabei kommen selbstverständlich nur diejenigen Differenzen in Betracht, die zu nicht verschwindenden Residuen gehören.

Um die verschiedenen Funktionszweige geometrisch zu repräsentieren, legen wir unendlich viele Exemplare der z-Ebene übereinander und ordnen die einem Funktionszweig angehörenden Werte den Punkten eines Blattes zu. Längs einer jeden Sperrlinie hängt jedes Blatt mit zwei anderen Blättern zusammen, indem der + Rand der Sperrlinie des einen Blattes mit dem — Rand der entsprechenden Sperrlinie eines zweiten, und der — Rand der Sperrlinie des ersteren Blattes mit dem + Rand der Sperrlinie eines dritten Blattes verbunden ist. Man bezeichnet diese aus unendlich vielen Blättern bestehende Fläche als Riemannsche Fläche (vergl. § 18 drittes Beispiel). Die Punkte a_ν heißen Verzweigungspunkte der Fläche.

Die Gestalt der Fläche E' und damit auch die Gestalt der Riemannschen Fläche kann in mannigfaltiger Weise modifiziert werden. So können wir, statt die Sperrlinien S_ν von einem Punkt α ausgehen zu lassen, die Begrenzungspunkte a_ν durch eine fortlaufende Kurve verbinden. Die Stücke, in die diese Kurve durch die Begrenzungspunkte zerlegt wird, treten an Stelle der Sperrlinien S_ν. Wesentlich ist nur, daß das System der Sperrlinien so angelegt wird, daß die Fläche E' einfach zusammenhängend ist und daß im Innern derselben kein Begrenzungspunkt des Definitionsbereichs der Funktion w liegt.

Nehmen wir nunmehr an, der Definitionsbereich der Funktion w besitze unendlich viele Begrenzungspunkte, die eine diskrete Punktmenge bilden. Diese Punktmenge muß mindestens eine Häufungsstelle haben, sie kann deren jedoch auch eine größere — endliche oder unendliche — Anzahl besitzen (siehe § 8). Wir beschränken uns auf den Fall, daß die Anzahl der Häufungsstellen endlich ist: sie mögen mit $b_1\, b_2 \cdots b_m$ bezeichnet werden. Um jede der Häufungsstellen legen wir einen kleinen Kreis vom Radius ϱ. Dem Teil der z-Ebene, der außerhalb dieser Kreise liegt, gehört nur eine endliche Anzahl von Begrenzungspunkten der Funktion w an; wir bezeichnen sie mit $a_1\, a_2 \cdots a_n$. Ob einer dieser Punkte mit dem unendlich fernen Punkt der z-Ebene zusammenfällt, kommt nicht in Betracht. Die Anzahl n hängt selbstverständlich von der Wahl des Radius ϱ ab: sie wächst bei abnehmendem ϱ über alle Grenzen.

Wir ziehen nun wieder von einem beliebig zu wählenden Punkt α der z-Ebene aus Sperrlinien $S_1\, S_2 \cdots S_n$ nach den Punkten $a_1\, a_2 \cdots a_n$ und verbinden außerdem den Punkt α durch

Sperrlinien $T_1\, T_2 \cdots T_m$ mit den Kreisen um die Häufungsstellen. Die durch die Sperrlinien S_ν und T_ν und die kleinen Kreise begrenzte Fläche bezeichnen wir mit F. Diese Fläche ist einfach zusammenhängend und sie enthält keinen Begrenzungspunkt des Definitionsbereichs der Funktion w.

Daher ist das Integral

$$J(z) = \int_{z_0}^{z} w\,dz$$

in der Fläche F einwertig und überall regulär. Längs der Sperrlinie S_ν besitzt die Funktion $J(z)$ den konstanten Periodizitätsmodul $2\pi i\, R(a_\nu)$, wo $R(a_\nu)$ das zum Punkt a_ν gehörige Residuum bedeutet. Aber auch längs der Sperrlinien T_ν besitzt die Funktion $J(z)$ konstante Periodizitätsmoduln. Bezeichnen wir, um dies zu beweisen, mit $\bar{z}_1\, \bar{z}_2$ zwei Punkte auf dem $-$ Rand der Sperrlinie T_ν, mit $\overset{+}{z}_1\, \overset{+}{z}_2$ die gegenüberliegenden Punkte auf dem $+$ Rand. Nun ist

$$J(\bar{z}_2) - J(\bar{z}_1) = \int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_2} w\,dz$$

und

$$J(\overset{+}{z}_2) - J(\overset{+}{z}_1) = \int_{\overset{+}{z}_1}^{\overset{+}{z}_2} w\,dz.$$

Die erste Integration ist über den $-$ Rand, die zweite über den $+$ Rand der Sperrlinie zu erstrecken. Da aber die Funktion w auch in der unzerschnittenen z-Ebene einwertig ist, so haben die beiden rechts stehenden Integrale denselben Wert. Es ist daher

$$J(\overset{+}{z}_2) - J(\bar{z}_2) = J(\overset{+}{z}_1) - J(\bar{z}_1) \quad \text{w. z. b. w.}$$

Wenn die Residuen, die zu den isolierten Unstetigkeitspunkten der Funktion w gehören, sämtlich verschwinden, so sind die Sperrlinien S_ν nicht erforderlich, um das Integral $J(z)$ eindeutig zu machen und können daher weggelassen werden und zwar gilt dies, wie klein auch der Radius ϱ gewählt werden mag. Die Begrenzung der Fläche F besteht in diesem Fall nur aus den Sperrlinien T_ν und den kleinen Kreisen. Sofern nur eine Häufungsstelle, also auch nur eine Sperrlinie T vorhanden ist, so kann auch diese weggelassen werden, weil die durch einen kleinen Kreis um die Häufungsstelle begrenzte Fläche an sich schon einfach zusammenhängend ist. In diesem Fall ist das Integral $J(z)$ auch in der unzerschnittenen z-Ebene einwertig.

Wir haben bisher stillschweigend vorausgesetzt, daß die Häufungsstellen $b_1\, b_2\, \ldots\, b_m$ sämtlich im Endlichen liegen. Fällt eine derselben mit dem unendlich fernen Punkt der z-Ebene zusammen, so begrenzen wir ihre Umgebung durch einen Kreis um den Nullpunkt vom Radius $1 : \varrho$. Im übrigen erleiden die vorausgehenden Ausführungen keine Änderung.

§ 33. Die Funktion $e^{\int w\,dz}$. Die Exponentialfunktion $e^{\int\frac{dz}{z}} =$ Konst. z ist eine in der ganzen Ebene einwertige Funktion der Variabeln z; wir wollen nun zusehen, wie sich die allgemeinere Exponentialfunktion $Z = e^{\int w\,dz}$ verhält.

Soweit die Funktion w regulär ist, gilt dasselbe für das Integral $J(z) = \int w\,dz$ und für die Exponentialfunktion $Z = e^{J(z)}$; es bleibt zu untersuchen, wie sich die Funktion Z in der Umgebung eines Unstetigkeitspunktes a_ν der Funktion w verhält.

In einem Ringgebiet, daß den Unstetigkeitspunkt a_ν einschließt, läßt sich das Integral $J(z)$ in der Form

$$(1) \qquad J(z) = c_{-1} \log(z - a_\nu) + \omega(z)$$

darstellen. Hier bedeutet c_{-1} das zum Punkt a_ν gehörige Residuum und $\omega(z)$ die Reihe (s. Gleichung (1) des vorigen Paragraphen):

$$(2) \quad \omega(z) = c_0[(z-a_\nu)-(z_0-a_\nu)] + \frac{c_1}{2}[(z-a_\nu)^2-(z_0-a_\nu)^2] + \cdots$$
$$- c_{-2}\left[\frac{1}{z-a_\nu} - \frac{1}{z_0-a_\nu}\right] - \frac{c_{-3}}{2}\left[\frac{1}{(z-a_\nu)^2} - \frac{1}{(z_0-a_\nu)^2}\right] \cdots.$$

Daraus folgt: die Funktion Z läßt sich in der Umgebung des Punktes a_ν in der Form

$$(3) \qquad Z = (z - a_\nu)^{c_{-1}}\, \Omega(z)$$

darstellen und hier bedeutet $\Omega(z) = e^{\omega(z)}$ eine in der Umgebung des Punktes a_ν einwertige Funktion. Sofern in der Entwicklung der Funktion $\omega(z)$ nach Potenzen von $z - a_\nu$

negative Potenzen auftreten, ist der Punkt a_ν für die Funktion $\Omega(z)$ ein wesentlich singulärer Punkt; kommen in der Reihenentwicklung nur positive Potenzen vor, so verhält sich die Funktion $\Omega(z)$ im Punkt a_ν regulär. Damit dieser letztere Fall eintritt, ist erforderlich und hinreichend, daß die Funktion u im Punkt a_ν nur zur ersten Ordnung unendlich wird. Wenn das Residuum c_{-1} Null oder eine ganze positive oder negative Zahl ist, so ist auch die Potenz $(z-a_\nu)^{c_{-1}}$ einwertig; in diesem Fall hat daher die Funktion Z in der Umgebung des Punktes a_ν den Charakter einer einwertigen Funktion.

Nehmen wir insbesondere an, die Funktion u werde im Punkt a_ν zur ersten Ordnung unendlich und das Residuum c_{-1} sei eine ganze Zahl. In diesem Fall ist der Punkt a_ν für die Funktion Z ein Nullpunkt oder ein Pol der Ordnung c_{-1}, je nachdem die Zahl c_{-1} positiv oder negativ ist.

Wenn das Residuum keine ganze Zahl ist, so ist der Punkt a_ν ein Verzweigungspunkt der Funktion Z. Lassen wir den Punkt z einen positiven Umlauf um den Punkt a_ν ausführen, so unterscheiden sich Anfangs- und Endwert der Funktion Z um den Faktor $e^{c_{-1}\cdot 2\pi i}$.

Auf Grund des Laurentschen Satzes gilt eine Reihenentwicklung der Form (1) auch in dem Fall, daß das Ringgebiet nicht nur den isolierten Unstetigkeitspunkt a_ν der Funktion u, sondern eine endliche oder unendliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten einschließt, sofern sich nur die Funktion im Ringgebiet selbst überall regulär verhält. Daher läßt sich die Exponentialfunktion Z auch in diesem Fall in der Form (3) darstellen und sie verhält sich daher, wenn der Punkt z einen Umlauf um das Zentrum a_ν des Ringgebietes ausführt, ebenso wie die Potenz $(z-a_\nu)^{c_{-1}}$.

An den vorstehenden Überlegungen ändert sich nichts wesentliches, wenn der Punkt a_ν mit dem unendlich fernen Punkt der Ebene zusammenfällt.

Im Innern der Fläche F ist die Funktion $J(z)$ einwertig und überall regulär, dasselbe gilt daher auch für die Funktion Z. Überschreitet der Punkt z eine der Sperrlinien S oder T, die die Begrenzung der Fläche F bilden, so wächst die Funktion $J(z)$ sprungweise um den entsprechenden Periodizitätsmodul (s. den vorhergehenden Paragraphen), daher ändert sich die Funktion Z beim Überschreiten einer Sperrlinie um einen konstanten Faktor. In dem Fall, daß das Residuum, das zum Endpunkt a_1 der Sperrlinie S_1 gehört, eine ganze Zahl ist, ist die Sperrlinie S_1 nicht erforderlich, um die Funktion Z eindeutig zu machen, und kann demnach weggelassen werden.

Nehmen wir an, die sämtlichen Residuen seien ganze Zahlen und es existiere nur eine Häufungsstelle von Unstetigkeitspunkten. In diesem Fall können sämtliche Sperrlinien weggelassen werden und die Funktion Z ist auch in der unzerschnittenen Ebene einwertig (vergl. die Bemerkung am Schluß des vorhergehenden Paragraphen). Nehmen wir insbesondere an, die isolierten Unstetigkeitspunkte seien sämtlich Pole erster Ordnung, die zugehörigen Residuen seien ganze positive Zahlen, es existiere nur eine Häufungsstelle und diese falle ins Unendliche. Unter dieser Voraussetzung ist die Funktion Z in der ganzen Ebene einwertig und wird im Endlichen nirgends unstetig: sie ist daher eine ganze Funktion.

Da $\frac{dZ}{dz} = e^{J(z)} \frac{dJ(z)}{dz}$ ist, so genügt die Funktion Z der linearen und homogenen Differentialgleichung erster Ordnung.

$$\frac{dZ}{dz} = wZ. \tag{4}$$

Bezüglich des Koeffizienten w dieser Differentialgleichung haben wir nun vorausgesetzt:

1) die Funktion w ist in der ganzen Ebene einwertig und

2) die Unstetigkeitspunkte dieser Funktion besitzen höchstens eine endliche Anzahl von Häufungsstellen.

Alle Differentialgleichungen der Form (4), die dieser Bedingung genügen, können mit Hilfe der vorausgehenden Entwicklungen integriert werden.

§ 34. Partialbruchzerfällung der Funktionen ctg z und $\frac{1}{\sin z}$. In § 28 ist nachgewiesen worden, daß sich jede in der ganzen z-Ebene einwertige Funktion, die nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig wird, als Summe der zu den Unstetigkeitspunkten gehörigen charakteristischen Funktionen und einer additiven Konstanten darstellen läßt. Auf Funktionen, die unendlich viele Unstetigkeitspunkte besitzen, läßt sich dieser Satz nicht ohne weiteres ausdehnen, weil die Reihe, deren Glieder die charakteristischen Funktionen sind, durchaus nicht in allen Fällen konvergiert. Bevor wir an die Diskussion des allgemeinen Problems gehen, betrachten wir zwei Beispiele.

Die Funktion ctg z ist in der ganzen Ebene einwertig; sie wird unstetig in den Punkten $z = \nu\pi$, wo ν eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Für $z = \nu\pi$ wird

$$\lim\,(z - \nu\pi)\operatorname{ctg} z = \cos\nu\pi \lim \frac{z - \nu\pi}{\sin z} = 1,$$

die Funktion wird also ∞^1 und die charakteristische Funktion ist $\frac{1}{z - \nu\pi}$.

Wir bilden nun das Cauchysche Integral

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\operatorname{ctg}\zeta}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

Als Integrationsweg wählen wir die Begrenzung eines Rechtecks, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind (Fig. 21). Die Eckpunkte des Rechtecks bezeichnen wir mit $z_1 z_2 z_3 z_4$ und zwar sei

$$z_1 = -\frac{2n+1}{2}\pi - bi$$

$$z_2 = \frac{2n+1}{2}\pi - bi$$

$$z_3 = \frac{2n+1}{2}\pi + bi$$

$$z_4 = -\frac{2n+1}{2}\pi + bi.$$

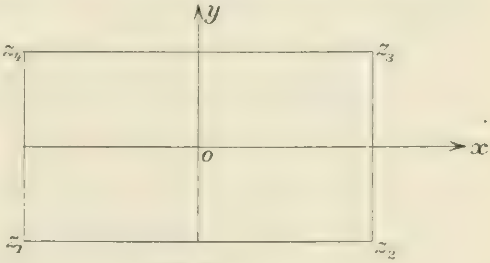


Fig. 21.

Hier bedeutet n eine ganze positive Zahl und b eine positive Konstante. Der Punkt z liege im Innern des Rechtecks.

Das Integral J ist gleich der Summe der Residuen der Funktion $\frac{\operatorname{ctg}\zeta}{\zeta - z}$ für die im Innern des Rechtecks liegenden Unstetigkeitspunkte (§ 21).

Es sind das die Punkte

$$\zeta = z \quad \zeta = \nu\pi \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \pm n.$$

Das Residuum für den Punkt z ist $\operatorname{ctg} z$, das Residuum für den Punkt $\nu\pi$

$$\lim (\zeta - \nu\pi) \frac{\operatorname{ctg} \zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{\nu\pi - z}.$$

Demnach ist

$$J = \operatorname{ctg} z + \sum_{\nu=-n}^{\nu=+n} \frac{1}{\nu\pi - z}.$$

Indem wir das dem Index $\nu = 0$ entsprechende Glied der Summe herausheben und jedesmal die beiden Glieder, die zu entgegengesetzten Indiceswerten gehören, vereinigen, erhalten wir

$$J = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{2z}{\nu^2 \pi^2 - z^2}.$$

Es läßt sich nun beweisen, daß das Integral J gegen Null konvergiert, wenn die Zahl n und die Konstante b über alle Grenzen wachsen.

Zu dem Zweck bemerken wir zunächst: wenn der Punkt ζ die Rechtecksseite $z_4 z_1$ durchläuft, so durchläuft der Punkt, der den Wert $-\zeta$ repräsentirt, die gegenüberliegende Rechtecksseite $z_2 z_3$. Daher ist

$$\int_{z_2}^{z_3} \frac{\operatorname{ctg} \zeta}{\zeta - z} d\zeta + \int_{z_4}^{z_1} \frac{\operatorname{ctg} \zeta}{\zeta - z} d\zeta = \int_{z_2}^{z_3} \operatorname{ctg} \zeta \left[\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta + z}\right] d\zeta$$

$$= \int_{z_2}^{z_3} \operatorname{ctg} \zeta \frac{2z}{\zeta^2 - z^2} d\zeta.$$

Durch eine analoge Überlegung ergibt sich

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\operatorname{ctg} \zeta}{\zeta - z} d\zeta + \int_{z_3}^{z_4} \frac{\operatorname{ctg} \zeta}{\zeta - z} d\zeta = \int_{z_1}^{z_2} \operatorname{ctg} \zeta \frac{2z}{\zeta^2 - z^2} d\varrho \cdot$$

Folglich ist

$$J = \int_{z_1}^{z_2} \operatorname{ctg} \zeta \frac{2z}{\zeta^2 - z^2} d\zeta + \int_{z_2}^{z_3} \operatorname{ctg} \zeta \frac{2z}{\zeta^2 - z^2} d\zeta$$

Längs der Seite $z_1 z_2$ ist $\zeta = \xi - bi$,

$$\text{also } \operatorname{ctg}\zeta = i\,\frac{e^{i\zeta}+e^{-i\zeta}}{e^{i\zeta}-e^{-i\zeta}} = i\,\frac{e^{2i\zeta}+1}{e^{2i\zeta}-1},$$

$$\text{demnach } \operatorname{ctg}\zeta = i\,\frac{e^{2b+2i\xi}+1}{e^{2b+2i\xi}-1}, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{ctg}\zeta < \frac{e^{2b}+1}{e^{2b}-1}.$$

Es ist ferner $|\zeta^2 - z^2| > \xi^2 + b^2 - r^2$, wo r den absoluten Betrag von z bezeichnet und endlich ist $d\zeta = d\xi$. Demnach ist der absolute Betrag des Integrals

$$\int_{z_1}^{z_2} \operatorname{ctg}\zeta\,\frac{2z}{\zeta^2 - z^2}\,d\zeta \text{ kleiner als}$$

$$\int_{-\frac{2n+1}{2}\pi}^{\frac{2n+1}{2}\pi} \frac{e^{2b}+1}{e^{2b}-1}\,\frac{2r}{\xi^2+b^2-r^2}\,d\xi \quad (\S\ 19)$$

und dies Integral ist kleiner als

$$\frac{e^{2b}+1}{e^{2b}-1}\,\frac{2r}{\sqrt{b^2-r^2}}\,\pi,$$

wie sich sofort ergibt, wenn wir die Integration von $-\infty$ bis $+\infty$ ausdehnen. Das Integral konvergiert also in der Tat gegen Null, wenn b über alle Grenzen wächst.

Längs der Seite $z_2 z_3$ ist $\zeta = \frac{2n+1}{2}\pi + i\eta$ also

$$\operatorname{ctg}\zeta = -\operatorname{tg} i\eta = i\,\frac{e^{\eta}-e^{-\eta}}{e^{\eta}+e^{-\eta}} \text{ folglich } \operatorname{ctg}\zeta < 1.$$

Ferner ist

$$|\zeta^2 - z^2| > \left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 + \eta^2 - r^2 \text{ und } d\zeta = i\,d\eta.$$

Der absolute Betrag des Integrals

$$\int_{z_2}^{z_3} \operatorname{ctg}\zeta\,\frac{2z}{\zeta^2 - z^2}\,d\zeta$$

ist demnach kleiner als

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2r}{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 + \eta^2 - r^2}\,d\eta = \frac{2r}{\sqrt{\left(\frac{2n+1}{2}\pi\right)^2 - r^2}}\,\pi.$$

Das Integral konvergiert bei wachsendem n gegen Null und wir erhalten somit wegen (1)

$$(2)\qquad \operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{\nu^2\pi^2 - z^2}.$$

Diese Darstellung der Funktion $\operatorname{ctg} z$ durch eine unendliche Reihe, deren Glieder gebrochene rationale Funktionen sind, erscheint als eine Verallgemeinerung der Zerlegung einer rationalen Funktion in Partialbrüche und wird daher auch als Partialbruchzerlegung bezeichnet.

In durchaus analoger Weise läßt sich die Funktion $\frac{1}{\sin z}$ in Partialbrüche zerlegen. Wir gehen wieder von dem Integral

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{1}{\sin\zeta}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} \text{ aus.}$$

Den Integrationsweg wählen wir in derselben Weise wie oben.

Innerhalb des Rechtecks wird die Funktion unter dem Integralzeichen unstetig 1) im Punkt z und 2) in den Punkten

$$\zeta = \nu\pi,\ \nu = 0,\ \pm 1,\ \pm 2 \cdots \pm n.$$

Das Residuum für den Punkt z ist $\frac{1}{\sin z}$, das Residuum für den Punkt $\nu\pi$ ist $\lim \frac{\zeta - \nu\pi}{\sin\zeta}\,\frac{1}{\zeta - z} = (-1)^\nu \frac{1}{\nu\pi - z}$.

Demnach ist

$$(3)\qquad J = \frac{1}{\sin z} + \sum_{\nu=-n}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu\pi - z} = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-1)^\nu \cdot 2z}{\nu^2\pi^2 - z^2}.$$

Andererseits ist wieder

$$J = \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\sin\zeta}\,\frac{2z}{\zeta^2 - z^2}\,d\zeta + \int_{z_2}^{z_3} \frac{1}{\sin\zeta}\,\frac{2z}{\zeta^2 - z^2}\,d\zeta.$$

Längs der Rechtecksseite $z_1 z_2$ ist

$$\sin\zeta = \frac{e^{i\zeta} - e^{-i\zeta}}{2i} = \frac{e^{b+i\xi} - e^{-b-i\xi}}{2i},$$

folglich
$$\frac{1}{\sin\zeta} < \frac{2}{e^b - e^{-b}}.$$

Längs der Rechtecksseite $z_2 z_3$ ist

$$\sin \zeta = \sin\left(\frac{2n+1}{2}\pi + i\eta\right) = (-1)^n \cos i\eta = (-1)^n \frac{e^{\eta} + e^{-\eta}}{2},$$

folglich

$$\left|\frac{1}{\sin \zeta}\right| < 1.$$

Man zeigt leicht, daß J gegen Null konvergiert, wenn die Zahl n und die Konstante b über alle Grenzen wachsen. Folglich ist wegen (3)

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}\, 2z}{\nu^2 \pi^2 - z^2}.$$

Fassen wir die Glieder der Summe, die geraden Index-Zahlen entsprechen, zusammen, und ebenso diejenigen, die ungeraden Indices entsprechen, so erhält die Gleichung die Form

$$(4) \qquad \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{4\nu^2\pi^2 - z^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2z}{(2\nu-1)^2\pi^2 - z^2}.$$

Von der Gleichung (3) ausgehend gelangt man leicht zu der Eulerschen Darstellung der Funktion $\sin z$ durch ein unendliches Produkt.

Wir ziehen in der z-Ebene vom Punkt π ausgehend eine Sperrlinie L_1, die längs der $+x$-Achse ins Unendliche läuft, und vom Punkt $-\pi$ ausgehend eine zweite Sperrlinie L_2, die sich der $-x$-Achse entlang ins Unendliche erstreckt. Bei der stereographischen Projektion auf die Kugel werden diese beiden Sperrlinien zusammen in einen Meridianbogen abgebildet, der die Punkte $+\pi$ und $-\pi$ des Äquators verbindet und durch den dem unendlich fernen Punkt entsprechenden Pol geht.

Das Integral

$$\int_0^z \left(\operatorname{ctg} \zeta - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta$$

ist — sofern der Integrationsweg auf die zerschnittene z-Ebene beschränkt wird — eine einwertige Funktion der oberen Grenze. Dasselbe gilt für jedes Integral der Form

$$\int_0^z \frac{d\zeta}{\zeta - a},$$

wo a eine reelle Konstante bedeutet, deren absoluter Betrag $> \pi$ ist. Durch gliedweise Integration erhalten wir aus (2)

$$\log \frac{\sin z}{z} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{z^2}{\nu^2 \pi^2}\right)$$

und hieraus ergibt sich die Eulersche Formel (vergleiche den vorigen Paragraphen)

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\nu^2 \pi^2}\right).$$

Aus der Gleichung (4) können wir ähnliche Folgerungen ziehen.

Beschränken wir den Integrationsweg auf die zerschnittene z-Ebene, so erhalten wir

$$\int_0^z \left(\frac{1}{\sin \zeta} - \frac{1}{\zeta}\right) d\zeta$$

$$= \log \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} z}{\frac{1}{2} z} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{z^2}{4 \nu^2 \pi^2}\right) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{z^2}{(2\nu - 1)^2 \pi^2}\right),$$

wo alle vorkommenden Logarithmen eindeutig definiert sind.

Wir lassen $2z$ an Stelle von z treten und erhalten

$$\log \frac{\operatorname{tg} z}{z} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{z^2}{\nu^2 \pi^2}\right) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \log\left(1 - \frac{z^2}{\left(\frac{2\nu - 1}{2}\right)^2 \pi^2}\right)$$

und hieraus

$$\operatorname{tg} z = \frac{z \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)}{\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\left(\frac{2\nu - 1}{2}\right)^2 \pi^2}\right)}.$$

Die Funktion $\operatorname{tg} z$, die unendlich viele Pole besitzt, läßt sich somit als Quotient zweier unendlicher Produkte darstellen, die in der ganzen z-Ebene gleichmäßig konvergieren.

§ 35. Funktionen mit unendlich vielen Unstetigkeitspunkten. Spezielle Fälle. Wir stellen uns nun die Aufgabe eine einwertige Funktion herzustellen, die in unendlich vielen gegebenen Punkten in vorgeschriebener Weise unstetig wird. Formulieren wir die Aufgabe genauer.

Es sei eine unendliche diskrete Punktmenge M gegeben. Die Punkte der Menge mögen mit $a_1\ a_2\ a_3\ldots$ bezeichnet werden; wir nehmen an, sie seien nach ihrer Entfernung vom Nullpunkt geordnet, so daß $|a_\nu| < |a_{\nu+1}|$ ist.

Für jeden Punkt a_ν sei eine charakteristische Funktion

$$\varphi(z\,|\,a_\nu) = \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{z-a_\nu} + \frac{c_{-2}^{(\nu)}}{(z-a_\nu)^2} + \frac{c_{-3}^{(\nu)}}{(z-a_\nu)^3} + \cdots$$

gegeben. Es soll nun eine Funktion $w = f(z)$ hergestellt werden, die den folgenden Bedingungen genügt:

1) Die Funktion $f(z)$ ist von den Punkten der Menge M und ihren Häufungsstellen abgesehen für die ganze z-Ebene, eindeutig definiert und verhält sich überall regulär.

2) Im Punkt a_ν bleibt die Differenz $f(z) - \varphi(z\,|\,a_\nu)$ stetig.

Was die erste Bedingung betrifft, so ist zu bemerken: eine Häufungsstelle b der Punktmenge M ist notwendig ein wesentlich singulärer Punkt der Funktion $f(z)$. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßte sich ein Exponent n der Art bestimmen lassen, daß das Produkt $(z-b)^n f(z)$ in der Umgebung des Punktes a endlich und stetig ist (§ 28). Dies ist aber unmöglich, weil jede noch so kleine Umgebung der Häufungsstelle unendlich viele Unstetigkeitspunkte der Funktion $f(z)$ enthält.

Bei der Lösung dieser Aufgabe gehen wir schrittweise vor und machen zunächst die beiden folgenden vereinfachenden Voraussetzungen:

3) Die Punktmenge M besitze nur eine Häufungsstelle und diese falle mit dem unendlich fernen Punkt zusammen.

4) Es lasse sich eine ganze positive Zahl n der Art bestimmen, daß die Reihe

$$\frac{1}{|a_1|^n} + \frac{1}{|a_2|^n} + \frac{1}{|a_3|^n} + \cdots \text{ konvergiert.}$$

Wir behaupten nun: die Reihe

$$1)\quad f(z) = \frac{1}{(z-a_1)^n} + \frac{1}{(z-a_2)^n} + \frac{1}{(z-a_3)^n} + \cdots$$

konvergiert unbedingt und gleichmäßig, sofern der Punkt z nicht mit einem der Punkte a_ν zusammenfällt.

Zum Beweis legen wir um den Nullpunkt der z-Ebene einen Kreis K, dessen Radius mit R bezeichnet werden möge. In der Reihe der Unstetigkeitspunkte $a_1\ a_2\ a_3 \ldots$ sei a_λ der letzte, der im Innern oder auf der Peripherie des Kreises K liegt. Alle folgenden Unstetigkeitspunkte a_ν genügen der Bedingung

$$|a_\nu| \geqq |a_{\lambda+1}| > R.$$

Bezeichnen wir mit k die zwischen 0 und 1 liegende positive Größe $1 - \frac{R}{|a_{\lambda+1}|}$.

So lange der Punkt z im Innern des Kreises K bleibt, ist für $\nu \geqq \lambda + 1$

$$|z - a_\nu| = |a_\nu| \cdot \left|1 - \frac{z}{a_\nu}\right| > |a_\nu| \cdot k,$$

also ist der absolute Betrag der Größe $\frac{1}{(z-a_\nu)^n}$ kleiner als $\frac{1}{k^n |a_\nu|^n}$.

Wir zerlegen nun die Reihe (1) in zwei Teile:

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\lambda} \frac{1}{(z-a_\nu)^n} + \sum_{\nu=\lambda+1}^{\infty} \frac{1}{(z-a_\nu)^n}.$$

Die erste Summe rechts ist eine rationale Funktion, die in den Punkten $a_1\ a_2 \ldots a_\lambda\ \infty^n$ wird; die an zweiter Stelle stehende unendliche Reihe konvergiert unbedingt und gleichmäßig, so lange der Punkt z im Innern des Kreises K bleibt, denn der absolute Betrag des allgemeinen Gliedes der Reihe ist kleiner als das Produkt von $1 : k^n$ in das allgemeine Glied der Reihe

$$\sum_{\nu=\lambda+1}^{\infty} \frac{1}{|a_\nu|^n},$$

die nach Voraussetzung konvergiert.

Der Radius R des Kreises K kann beliebig groß gewählt werden, daher wird durch die Voraussetzung, daß der Punkt z im Innern des Kreises K liegt, die Variabilität der Größe z nicht beschränkt. Die ausgesprochene Behauptung ist somit bewiesen.

Die Glieder der Reihe (1) sind einwertige Funktionen, die sich, von den Punkten a_ν abgesehen, überall regulär verhalten, daher ist die Reihensumme $f(z)$ eine einwertige Funktion, die sich von den Punkten a_ν und dem unendlich fernen

Punkt abgesehen, überall regulär verhält (§ 24). Im Punkt a_ν bleibt die Differenz $f(z) - \frac{1}{(z - a_\nu)^n}$ stetig.

Unter der Voraussetzung, daß die Punkte der Menge M den Bedingungen 3) und 4) genügen, und daß die charakteristische Funktion $\varphi(z, a_\nu) = \frac{1}{(z - a_\nu)^n}$ ist, ist somit die gestellte Aufgabe gelöst.

Nehmen wir nun an, es sei $n \geq 2$.

Durch gliedweise Integration ergibt sich

$$f_1(z) = -(n-1)\int\limits_0^z f(z)\,dz = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z - a_\nu)^{n-1}} - \frac{1}{(-a_\nu)^{n-1}}\right].$$

Die Reihe rechts konvergiert unbedingt und gleichmäßig in der Umgebung eines jeden Punktes, der mit keinem der Punkte a_ν zusammenfällt, weil dies für die Reihe (1) gilt, aus der sie durch gliedweise Integration hervorgegangen ist. Die Funktion $f_1(z)$ ist in der ganzen Ebene einwertig und von den Punkten a_ν abgesehen, überall regulär. Die Differenz

$$f_1(z) - \frac{1}{(z - a_\nu)^{n-1}}$$

bleibt im Punkte a_ν stetig.

Unter der Voraussetzung, daß $n \geq 3$ ist, erhalten wir durch abermalige Integration

$$f_2(z) = -(n-2)\int\limits_0^z f_1(z)\,dz$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z - a_\nu)^{n-2}} + \frac{(n-2)z}{(-a_\nu)^{n-1}} - \frac{1}{(-a_\nu)^{n-2}}\right].$$

Die Funktion $f_2(z)$ ist ebenfalls in der ganzen Ebene einwertig und, von den Punkten a_ν abgesehen, überall regulär. Im Punkt a_ν bleibt die Differenz $f_2(z) - \frac{1}{(z - a_\nu)^{n-2}}$ stetig.

Der Fortgang dieser Schlußweise ist offensichtlich. Wir können das Resultat unter teilweiser Änderung der Bezeichnungsweise in dem Satz aussprechen:

Unter der Voraussetzung daß die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{a_\nu^{\,n+p}}$$

wo n und p ganze positive Zahlen bedeuten konvergiert, konvergiert auch die Reihe

$$(2)\; f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(z-a_\nu)^n} - \left(\frac{1}{(-a_\nu)^n} + n\frac{z}{(-a_\nu)^{n+1}}\cdots\right.\right.$$
$$+\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\frac{z^2}{(-a_\nu)^{n+2}} + (n+p-3)_{p-2}\frac{z^{p-2}}{(-a_\nu)^{n+p-2}}\cdots$$
$$\left.\left.+(n+p-2)_{p-1}\frac{z^{p-1}}{(-a_\nu)^{n+p-1}}\right)\right]$$

sofern der Punkt z nicht mit einem der Punkte a_ν oder dem unendlich fernen Punkt zusammenfällt, und zwar konvergiert sie unbedingt und gleichmäßig. Sie stellt daher eine in der ganzen z-Ebene einwertige Funktion dar, die im Endlichen nur in den Punkten a_ν unstetig wird. Die Differenz $f(z) - \frac{1}{(z-a_\nu)^n}$ bleibt im Punkt a_ν stetig.

Um den Satz zu verifizieren braucht man nur zu zeigen, daß die Reihe (2) durch p-malige gliedweise Integration aus der gleichmäßig konvergierenden Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(z-a_\nu)^{n+p}} \text{ hervorgeht.}$$

Um den eben bewiesenen Satz auf ein Beispiel anzuwenden, stellen wir eine Funktion $f(z)$ her, die in den Punkten $z = \pm\nu\pi$ (ν ganze positive Zahl) unendlich wird wie die Funktion $\frac{1}{z \mp \nu\pi}$, im übrigen aber im Endlichen stetig bleibt.

Wir haben in diesem Fall

$$a_{2\nu-1} = \nu\pi,\; a_{2\nu} = -\nu\pi,\; (\nu = 1, 2, 3\cdots) \text{ und } n = 1$$

zu setzen.

Die Reihe $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}$ stimmt bis auf den Faktor $2:\pi$ mit der harmonischen Reihe überein, sie konvergiert also nicht. Dagegen konvergiert die Reihe

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{1}{a_3^2} + \frac{1}{a_4^2} + \cdots = 2\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\right),$$

wir haben also $p = 1$ zu setzen. Wir setzen diese Werte in (2) ein und fassen die Glieder, die positiven Indices entsprechen, zusammen und ebenso diejenigen, die negativen Indices entsprechen. Wir erhalten

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-\nu\pi}+\frac{1}{\nu\pi}\right]+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z+\nu\pi}-\frac{1}{\nu\pi}\right].$$

Vereinigen wir beide Summen, so ergibt sich

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-\nu^2\pi^2}.$$

Die Funktion $f(z)$ wird im Endlichen in derselben Weise unstetig wie die Funktion $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$ (§ 34). Daraus folgt, daß die Differenz

$$\operatorname{ctg} z - \left[\frac{1}{z} + f(z)\right]$$

im Endlichen nirgends unstetig wird, also eine ganze rationale oder transzendente Funktion ist. Um nachzuweisen, daß diese Differenz verschwindet, muß man sich entweder auf die Peridizitätseigenschaften der Funktion $\operatorname{ctg} z$ stützen, oder man muß den im vorigen Paragraphen benützten Weg einschlagen.

§ 36. Funktionen mit unendlich vielen Unstetigkeitspunkten. Allgemeiner Fall. Von den speziellen Voraussetzungen, die wir im vorigen Paragraphen eingeführt haben, behalten wir nun nur die bei, daß die Unstetigkeitspunkte der Funktion $w = f(z)$ nur eine Häufungsstelle im Unendlichen besitzen; im übrigen machen wir weder bezüglich der Lage der Unstetigkeitspunkte a_ν noch bezüglich der charakteristischen Funktionen $\varphi_\nu(z|a_\nu)$, die zu den einzelnen Unstetigkeitspunkten gehören, eine beschränkende Annahme.

Wenn die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(z|a_\nu)$ gleichmäßig konvergiert, so stellt sie eine Funktion dar, die den gegebenen Bedingungen genügt.

Im allgemeinen aber wird diese Reihe nicht konvergieren. Der im vorigen Paragraphen bewiesene Satz gibt uns nun einen Fingerzeig, wie wir zu einer konvergenten Reihe gelangen können, die eine Funktion von der verlangten Beschaffenheit darstellt: wir ziehen von einer jeden Funktion $\varphi_\nu(z|a_\nu)$ eine ganze rationale Funktion $g_\nu(z)$ ab und suchen über diese der Art zu verfügen, daß die Reihe, deren allgemeines Glied die Differenz $F_\nu(z) = \varphi_\nu(z\,|\,a_\nu) - g_\nu(z)$ ist, konvergiert. Wir gelangen dazu durch folgende Überlegung: die Funktion $\varphi_\nu(z\,|\,a_\nu)$ wird nur im Punkt a_ν unstetig, sie läßt sich daher in eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_\nu(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} C_\mu^{(\nu)} z^\mu$$

entwickeln, die für alle Werte von z konvergiert, deren absoluter Betrag $< |a_\nu|$ ist (§ 26). Daraus folgt: nach Annahme einer positiven Größe ϱ, die < 1 sein muß, im übrigen aber beliebig gewählt werden kann, kann man eine Zahl m_ν der Art bestimmen, daß für alle Werte von z, die der Bedingung $|z| < \varrho\,|a_\nu|$ genügen, der absolute Betrag der Summe

$$\sum_{\mu=m_\nu+1}^{\infty} C_\mu^{(\nu)} z^\mu$$

kleiner als eine vorgegebene positive Größe ε_ν ist.

Wir setzen nun die Summe der $m_\nu + 1$ ersten Glieder der Potenzreihe $\mathfrak{P}_\nu(z)$

$$\sum_{\mu=0}^{m_\nu} C_\mu^{(\nu)} z^\mu = g_\nu(z).$$

Die eben getroffenen Festsetzungen können wir dahin aussprechen:

der absolute Betrag der Funktion $F_\nu(z) = \varphi_\nu(z\,|\,a_\nu) - g_\nu(z)$ ist $< \varepsilon_\nu$, wenn die Variable z der Bedingung $|z| \leq \varrho\,|a_\nu|$ genügt.

Wir ordnen nun jedem Unstetigkeitspunkt a_ν eine positive Größe ε_ν zu. Diese Größen sind so zu wählen, daß die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu$ konvergiert, unterliegen aber keiner weiteren Beschränkung.

Wir behaupten nun: die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z)$ konvergiert gleichmäßig, sofern nur der Punkt z in angebbarer Entfernung von jedem der Punkte a_ν bleibt.

Den Beweis führen wir wieder in der Weise, daß wir die

Reihe in zwei Teile zerlegen. Wir wählen nach Belieben eine positive Größe R und beschränken die Variable z auf solche Werte, die der Bedingung $|z| < \varrho R$ genügen. Es sei a_λ die letzte Größe der Reihe $a_1\ a_2\ a_3 \ldots$, die der Bedingung $|a_\lambda| < R$ genügt. Für $\nu \geqq \lambda + 1$ ist daher $|z| < \varrho R < \varrho\,|a_\nu|$, folglich ist $|F_\nu(z)| < \varepsilon_\nu$. Folglich konvergiert die Reihe $\sum\limits_{\nu=\lambda+1}^{\infty} F_\nu(z)$ gleichmäßig, weil die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon_\nu$ konvergiert.

Da die Größe R beliebig gewählt werden kann, so besagt die Bedingung $|z| < \varrho R$ nur, daß der Punkt z nicht ins Unendliche rücken darf.

Die Reihe

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} [\varphi_\nu(z\ a_\nu) - g_\nu(z)]$$

konvergiert somit, wenn der Punkt z weder mit einem der Punkte a_ν noch mit dem unendlich fernen Punkt zusammenfällt. Im Punkt a_ν bleibt die Differenz $f(z) - \varphi_\nu(z\ a_\nu)$ endlich und stetig.

Die Funktion $f(z)$ genügt also den gestellten Bedingungen.

Damit ist der Satz bewiesen: **Es gibt eine in der ganzen z-Ebene einwertige Funktion $f(z)$, die in den gegebenen Punkten $a_1\ a_2\ a_3 \ldots$ in vorgeschriebener Weise unstetig wird, im übrigen aber sich im Endlichen überall regulär verhält.**

Die Funktion $f(z)$ ist durch die gegebenen Bedingungen nicht vollständig bestimmt: wir können zu $f(z)$ noch eine beliebige ganze rationale oder transzendente Funktion $G(z)$ hinzufügen, ohne daß eine der gegebenen Bedingungen verletzt würde. Es rührt dies daher, daß der unendlich ferne Punkt als Häufungsstelle der Unstetigkeitspunkte ein wesentlich singulärer Punkt der Funktion ist (vergl. den Anfang des vorigen Paragraphen).

Der eben bewiesene Satz läßt sich nun leicht erweitern.

Wir behalten zunächst die Voraussetzung bei, die Unstetigkeitspunkte der Funktion $w = f(z)$ besitzen nur **eine** Häufungsstelle, nehmen aber nunmehr an, die Häufungsstelle falle in einen im Endlichen liegenden Punkt b.

Um diesen Fall auf den bereits erledigten zurückzuführen, bilden wir die z-Ebene mittels der Substitution

$$z - b = \frac{1}{\zeta}$$

auf die ζ-Ebene ab und betrachten w als Funktion von ζ.

Dem Unstetigkeitspunkt a_ν entspricht in der ζ-Ebene der Punkt $\alpha_\nu = \frac{1}{a_\nu - b}\cdot$ Die Häufungsstelle der Punkte α_ν ist der unendlich ferne Punkt der ζ-Ebene. Daher läßt sich w, als Funktion von ζ betrachtet, in der Form

$$w = \sum_{\nu=1}^{\infty} [\varphi_\nu(\zeta\ \alpha_\nu) - g_\nu(\zeta)] + G(\zeta)$$

darstellen.

Hier bedeuten $g_\nu(\zeta)$ und $G(\zeta)$ ganze Funktionen von ζ; $\varphi_\nu(\zeta\ \alpha_\nu)$ bedeutet eine ganze Funktion der Größe $\frac{1}{\zeta - \alpha_\nu}\cdot$

Führen wir an Stelle der Variabeln ζ wieder die Variable z ein, so stellen sich g_ν und G als ganze Funktionen der Größe $\frac{1}{z - b}$ dar; φ_ν ist eine ganze Funktion der Größe $\frac{z - b}{z - a_\nu}\cdot$

Wir nehmen nunmehr an, die Unstetigkeitspunkte der Funktion $w = f(z)$ besitzen eine größere Anzahl von Häufungsstellen, halten aber an der Voraussetzung fest, daß diese Anzahl endlich ist. Die Häufungsstellen mögen mit $b_1\, b_2 \cdots b_m$ bezeichnet werden. Der Einfachheit wegen sehen wir von dem Fall ab, daß eine derselben im Unendlichen liegt.

Wir ordnen nun jeden der gegebenen Unstetigkeitspunkte einer der Häufungsstellen zu, etwa der nächstliegenden. Sofern ein Unstetigkeitspunkt von mehreren Häufungsstellen gleichweit entfernt ist, müssen besondere Festsetzungen getroffen werden.

Wir können nun, wie im Vorausgehenden gezeigt worden ist, eine Funktion $\Phi_u(z)$ herstellen, die in den Unstetigkeitspunkten, die der Häufungsstelle b_u zugeordnet sind, in vorgeschriebener Weise unstetig wird.

Die Funktion

$$f(z) = \sum_{u=1}^{m} \Phi_u(z)$$

ist in der ganzen Ebene einwertig und wird in den gegebenen Punkten in der vorgeschriebenen Weise unstetig. Von diesen Punkten und ihren Häufungsstellen abgesehen verhält sie sich überall regulär.

Damit ist die zu Anfang des vorigen Paragraphen gestellte Aufgabe für den Fall, daß die Punktmenge M nur eine endliche Anzahl von Häufungsstellen besitzt, vollständig gelöst.

Mittag-Leffler hat das Problem auch für den Fall gelöst, daß bezüglich der Häufungsstellen keine beschränkende Voraussetzung gemacht wird (Acta mathem. Bd. 4). Diese Lösung stützt sich auf die Cantorschen Sätze über Punktmengen, auf die wir hier nicht eingehen können.

§ 37. Funktionen mit gegebenen Nullpunkten und Unstetigkeitspunkten. Wir haben im Vorausgehenden eine Darstellung der einwertigen Funktionen nachgewiesen, die ihre Unstetigkeitspunkte und die zugehörigen charakteristischen Funktionen in Evidenz setzt; wir gehen nun zu einer andern Art der Darstellung über, bei der die Unstetigkeitspunkte und die Nullpunkte als Bestimmungsstücke auftreten. Wir beginnen mit der Darstellung einer ganzen transzendenten Funktion.

Da die Entfernung zweier Nullpunkte einer regulären Funktion immer einen angebbaren Wert besitzt (§ 26), so können die Nullpunkte einer ganzen transzendenten Funktion nur eine Häufungsstelle im Unendlichen besitzen.

Es sei nun eine unendliche diskrete Punktmenge gegeben, deren Häufungsstelle im Unendlichen liegt. Wir bezeichnen die einzelnen Punkte der Menge mit $a_1\, a_2\, a_3 \cdots$ und nehmen wieder an, sie seien nach ihrer Entfernung vom Nullpunkt geordnet. Der Einfachheit wegen nehmen wir an, daß keiner dieser Punkte in den Nullpunkt fällt.

Wir stellen uns die Aufgabe: eine ganze transzendente Funktion $f(z)$ zu bestimmen, die in jedem Punkt der Menge M Null zur ersten Ordnung wird.

Diese Aufgabe läßt sich sofort auf eine schon erledigte zurückführen.

Wenn die Funktion $f(z)$ im Punkt a_ν zur ersten Ordnung verschwindet, so wird ihre logarithmische Derivierte in diesem Punkt unendlich wie die Funktion $\frac{1}{z-a_\nu}$. Die logarithmische Derivierte läßt sich daher in der Form

$$(1) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = G(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-a_\nu} - g_\nu(z)\right]$$

darstellen.

Hier bedeutet $G(z)$ eine nicht näher bestimmte ganze, rationale oder transzendente Funktion; die Funktionen $g_\nu(z)$ sind ganze rationale Funktionen, die so zu bestimmen sind, daß die Reihe konvergiert (vergl. den vorigen Paragraphen). Wenn die Reihe $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots$ konvergiert, können wir die sämtlichen Funktionen $g_\nu(z) = 0$ setzen; wenn wenigstens die Reihe $\frac{1}{a_1^{\,p+1}} + \frac{1}{a_2^{\,p+1}} + \frac{1}{a_3^{\,p+1}} + \cdots$ konvergiert, wo p eine ganze positive Zahl bedeutet, so können wir

$$g_\nu(z) = \frac{1}{a_\nu} - \frac{z}{a_\nu^{\,2}} + \frac{z^2}{a_\nu^{\,3}} \cdots + (-1)^p \frac{z^{p-1}}{a_\nu^{\,p}}$$

setzen (s. § 35).

Aus der Gleichung (1) folgt durch gliedweise Integration

$$(2) \qquad \log\frac{f(z)}{f(0)} = \int_0^z G(z) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\log\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right) - \int_0^z g_\nu(z)\right].$$

Um die hier auftretenden Logarithmen eindeutig zu machen, legen wir um den Nullpunkt einen Kreis K mit sehr großem Radius und ziehen von einem Punkt a im Innern des Kreises Sperrlinien S_ν nach denjenigen Punkten a_ν, die im Innern des Kreises liegen, und eine Sperrlinie T nach einem Punkt der Kreisperipherie. In der Fläche E', die durch den Kreis K und die Sperrlinien S_ν und T begrenzt wird, sind die sämtlichen Logarithmen eindeutig bestimmt, wenn wir festsetzen, daß sie im Nullpunkt den Wert Null annehmen sollen (vergl. § 32).

Da die Residuen, die zu den Unstetigkeitspunkten der Funktion $\frac{f'(z)}{f(z)}$ gehören, sämtlich ganze Zahlen, nämlich $= 1$ sind, so ist die Funktion

$$e^{\int\limits_0^z \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz} = \frac{f(z)}{f(0)}$$

auch in der unzerschnittenen z-Ebene einwertig.

Wir setzen zur Abkürzung

$$(3)\qquad \int\limits_0^z g_\nu(z)\,dz = \frac{z}{a_\nu} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{a_\nu^2} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{a_\nu^3} \cdots + \frac{(-1)^p}{p}\frac{z^p}{a_\nu^p} = \gamma_\nu(z)$$

$$\int\limits_0^z G(z)\,dz = \Gamma(z).$$

Hier bedeutet $\Gamma(z)$ wie $G(z)$ eine nicht näher bestimmte ganze Funktion. Wir erhalten somit aus (2) die für alle endlichen Werte von z giltige Formel

$$(4)\qquad f(z) = f(0)\,e^{\Gamma(z)} \prod_{\nu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_\nu}\right) e^{-\gamma_\nu(z)}.$$

Bei der Ableitung dieser Formel haben wir vorausgesetzt, daß die Punkte a_ν unter einander verschieden sind. Für die Konvergenz des rechts stehenden unendlichen Produkts ist diese Annahme nicht wesentlich: die Konvergenz bleibt erhalten, wenn die Punkte a_ν gruppenweise zusammenrücken, nur darf sich immer nur eine endliche Anzahl von Nullpunkten zu einem Nullpunkt höherer Ordnung vereinigen.

Aus der Darstellung der ganzen transzendenten Funktionen durch ein unendliches Produkt ergibt sich eine bemerkenswerte Darstellung derjenigen einwertigen Funktionen, die im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle besitzen.

Nehmen wir an, die einwertige Funktion $w = f(z)$ besitze unendlich viele Pole $a_1\, a_2\, a_3 \ldots$ und unendlich viele Nullpunkte $b_1\, b_2\, b_3 \ldots$

Jede dieser beiden Punktmengen besitze nur eine Häufungsstelle und diese falle in den unendlich fernen Punkt. Der Einfachheit wegen wollen wir ferner annehmen, die Pole und die Nullpunkte seien sämtlich von der ersten Ordnung.

Wir bilden nun zwei ganze transzendente Funktionen $G_1(z)$ und $G_2(z)$, von denen die erste in den Punkten a_ν, die zweite in den Punkten b_ν zur ersten Ordnung verschwindet.

Die Funktion

$$(5) \qquad Q(z) = f(z) \cdot \frac{G_1(z)}{G_2(z)}$$

kann im Endlichen nirgends verschwinden oder unendlich werden, denn in den Nullpunkten der Funktionen $f(z)$ und $G_2(z)$ nimmt der Quotient $\frac{f(z)}{G_2(z)}$ einen von Null verschiedenen endlichen Wert an, und in den Polen der Funktion $f(z)$ bleibt das Produkt $f(z) \cdot G_1(z)$ endlich und von Null verschieden. Daher ist die Funktion $H(z) = \log Q(z)$ eine in der ganzen Ebene einwertige und im Endlichen überall reguläre Funktion; $H(z)$ ist also eine ganze Funktion. Solange nur die Pole und die Nullpunkte der Funktion $f(z)$ gegeben sind, aber keine weiteren Angaben zur Verfügung stehen, bleibt diese ganze Funktion $H(z)$ vollständig unbestimmt.

Aus (5) ergibt sich nun für die Funktion $f(z)$ die Darstellung

$$f(z) = e^{H(z)} \frac{G_2(z)}{G_1(z)}.$$

Jede einwertige Funktion, die im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle besitzt, läßt sich also als Quotient zweier ganzer Funktionen darstellen.

Ein Beispiel zu diesem Satz bietet die § 34 abgeleitete Darstellung der Funktion $\operatorname{tg} z$, zu weiteren Beispielen werden wir im nächsten Abschnitt kommen.

Sechster Abschnitt.

Doppelt periodische Funktionen.

§ 38. Periodische Funktionen. Eine einwertige Funktion $w = f(z)$ heißt periodisch, wenn sie einer identischen Gleichung der Form

$$f(z + 2\omega) = f(z) \text{ genügt.}$$

Die Konstante 2ω wird als Periode der Funktion bezeichnet.

Zwei Punkte z_0 und z heißen homolog, wenn die Differenz $z - z_0$ ein Multiplum der Periode 2ω ist.

Alle zum Punkt z_0 homologen Punkte liegen auf einer Geraden g; der Abstand zweier aufeinanderfolgender Punkte ist gleich dem absoluten Betrag $|2\omega|$. Die Gerade g ist der Geraden g_0 parallel, die den Nullpunkt mit dem Punkt 2ω verbindet.

Durch die homologen Punkte

$$z_0 + 2\nu\omega \; (\nu = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

legen wir parallele Gerade h_ν. Die Richtung dieser Geraden kann beliebig gewählt werden, nur dürfen sie nicht der Geraden g_0 parallel sein, weil sie sonst zusammenfallen würden.

Zu jedem Punkt auf der Geraden h_ν gibt es auf jeder der übrigen Geraden h_μ einen homologen Punkt.

Den Flächenstreifen II_ν, den zwei aufeinander folgende Gerade h_ν und $h_{\nu-1}$ begrenzen, bezeichnet man als Periodenstreifen. Es ist zweckmäßig festzusetzen, daß von den beiden begrenzenden Geraden h_ν und $h_{\nu-1}$ nur die eine — etwa h_ν — zum Periodenstreifen II_ν gerechnet werden soll.

Zu jedem gegebenen Punkt gibt es einen und nur einen homologen Punkt, der dem Periodenstreifen II_ν angehört.*) Daher nimmt die Funktion $w = f(z)$ jeden Wert, den sie überhaupt erreicht, auch in einem Punkt des Periodenstreifens II_ν an. Wir können uns daher bei der Untersuchung der Funktion w darauf beschränken nur solche Punkte z in Betracht zu ziehen, die dem Periodenstreifen II_ν angehören.

Insbesondere gibt es zu jedem im Endlichen liegenden Unstetigkeitspunkt der Funktion einen homologen im Periodenstreifen II_ν.

Für jedes System homologer Punkte

$$z_0 + \nu \cdot 2\omega \; (\nu = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

ist der unendlich ferne Punkt eine Häufungsstelle: in der Umgebung dieses Punktes nimmt daher die Funktion w jeden Wert an, den sie überhaupt erreicht. Daraus folgt, daß der unendlich ferne Punkt eine wesentlich singuläre Stelle der Funktion w ist.

Die Exponentialfunktion $\zeta = e^{\frac{\pi i}{\omega} z}$ besitzt ebenfalls die Pe-

*) Würden wir die beiden Geraden h_ν und $h_{\nu-1}$ zum Periodenstreifen II_ν rechnen, so würde diese Bemerkung nur für die Punkte im Innern von II_ν gelten.

riode 2ω und sie nimmt jeden endlichen von Null verschiedenen Wert nur in einem Punkt des Periodenstreifens Π_ν an, daher ist die Funktion w eine einwertige Funktion der Variabeln ζ, Sie möge mit $F(\zeta)$ bezeichnet werden.

Einem im Endlichen liegenden Unstetigkeitspunkt a der Funktion $w = f(z)$ entspricht ein Unstetigkeitspunkt $\alpha = e^{\frac{\pi i}{\omega} a}$ der Funktion $w = F(\zeta)$ und zwar ist α endlich und von Null verschieden.

Der Grenzwert $\lim\limits_{z=a} \dfrac{\zeta - \alpha}{z - a} = \dfrac{\pi i}{\omega}\alpha$ ist endlich und von Null verschieden.

Demnach folgt aus der Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{z=a} (z - a)^n f(z)$$

die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\zeta=\alpha} (\zeta - \alpha)^n F(\zeta).$$ Daraus folgt:

1) Ist der Punkt a ein Pol n^{ter} Ordnung der Funktion $w = f(z)$, so ist der entsprechende Punkt α ein Pol n^{ter} Ordnung der Funktion $w = F(\zeta)$; ebenso entspricht einem wesentlich singulären Punkt der Funktion $f(z)$ ein wesentlich singulärer Punkt der Funktion $F(\zeta)$.

Es bleibt das Verhalten der Funktion $F(\zeta)$ im Nullpunkt und im unendlich fernen Punkt zu untersuchen.

Wir setzen $\omega = ke^{i\gamma}$ und bezeichnen mit β den Winkel, den die Geraden h_ν mit der Abszissenachse bilden. Da wir an Stelle der Periode 2ω auch die Periode -2ω treten lassen können, so dürfen wir annehmen, es sei $0 < \gamma < \pi$. Den Winkel β wählen wir so, daß $\gamma - \pi < \beta < \gamma$ ist.

Lassen wir nun den Punkt z im Periodenstreifen Π_0 nach der einen oder der anderen Richtung der Geraden h_0 hin ins Unendliche rücken, so wird sich $\operatorname{arc} z$ entweder dem Grenzwert β oder dem Grenzwert $+\pi + \beta$ nähern, demnach wird $\operatorname{arc} \frac{\pi i}{\omega} z$ entweder gegen den Grenzwert $\frac{\pi}{2} + \beta - \gamma$ oder gegen den Grenzwert $\frac{3\pi}{2} + \beta - \gamma$ konvergieren. Der erste Grenzwert liegt zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, der zweite zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$. Im ersten Fall wird daher der reelle Teil des Quotienten $\frac{\pi i}{\omega} z$

positiv unendlich, im zweiten wird er negativ unendlich. Daher rückt im ersten Fall der Punkt $\zeta = e^{\frac{\pi i}{\omega} z}$ in den unendlich fernen Punkt der ζ-Ebene, im zweiten Fall rückt er in den Nullpunkt.

Damit die Funktion $w = F(\zeta)$ sich im Nullpunkt und im unendlich fernen Punkt regulär verhält, müssen die Grenzwerte

$$\lim_{\zeta = 0} F(\zeta) \quad \text{und} \quad \lim_{\zeta = \infty} F(\zeta) \quad \text{existieren.}$$

Soll die Funktion in diesen Punkten wenigstens nur polare Unstetigkeiten besitzen, so müssen die Grenzwerte

$$\lim_{\zeta = 0} \frac{1}{F(\zeta)} \quad \text{und} \quad \lim_{\zeta = \infty} \frac{1}{F(\zeta)} \quad \text{existieren (§ 28).}$$

Sind diese Bedingungen für den einen oder den anderen Punkt nicht erfüllt, so ist der betreffende Punkt eine wesentlich singuläre Stelle der Funktion $w = F(\zeta)$.

Für die Funktion $w = f(z)$ ergeben sich hieraus die folgenden Bedingungen:

2) Damit für die Funktion $w = F(\zeta)$ der unendlich ferne Punkt der ζ-Ebene keine wesentlich singuläre Stelle ist, muß für unendlich wachsende Werte von z, die der Bedingung $\lim \operatorname{arc} z = \beta$ genügen, wenigstens einer der beiden Grenzwerte $\lim f(z)$ oder $\lim \frac{1}{f(z)}$ existieren.

3) Damit auch der Nullpunkt der ζ-Ebene für die Funktion $w = F(\zeta)$ keine wesentlich singuläre Stelle ist, muß für unendlich wachsende z, die der Bedingung $\lim \operatorname{arc} z = \pi + \beta$ genügen, wenigstens einer dieser beiden Grenzwerte existieren.

Hierzu ist zu bemerken: der Winkel β unterliegt nur der Bedingung, daß

$$\operatorname{arc} \omega - \pi < \beta < \operatorname{arc} \omega,$$

wobei vorausgesetzt ist, daß

$$0 < \operatorname{arc} \omega < \pi \quad \text{ist.}$$

Sind die Bedingungen (2) und (3) für einen Wert von β erfüllt, so sind sie für jeden Wert von β erfüllt.

Wir ziehen aus dem Vorangehenden einige Folgerungen.

Wird die Funktion $w = f(z)$ im Endlichen nirgends unstetig, so wird die Funktion $w = F(\zeta)$ nur im Nullpunkt und im unendlich fernen Punkt der ζ-Ebene unstetig; sie läßt sich daher in eine Laurentsche Reihe entwickeln, die von diesen Punkten abgesehen, überall konvergiert.

Aus dieser Darstellung der Funktion $w = F(\zeta)$ ergibt sich die Darstellung der Funktion $w = f(z)$ durch eine Fouriersche Reihe (vergl. § 27).

Damit die Funktion $w = F(\zeta)$ eine rationale Funktion der Variabeln ζ ist, ist erforderlich und hinreichend, daß sie nur eine endliche Anzahl von Polen, aber keinen wesentlich singulären Punkt besitzt (s. § 28).

Für die Funktion $w = f(z)$ ergeben sich hieraus die Bedingungen:

Die Funktion $f(z)$ darf im Endlichen nur in einer endlichen Anzahl von nicht homologen Punkten unstetig werden und keiner dieser Punkte darf eine wesentlich singuläre Stelle sein. Im unendlich fernen Punkt der z-Ebene müssen die Bedingungen (2) und (3) erfüllt sein.

§ 39. Allgemeine Sätze über die Perioden einer einwertigen Funktion. Eine Funktion $f(z)$, die die Periode $2\omega_1$ besitzt, besitzt auch die Periode $\mu \cdot 2\omega_1$, wo μ irgend eine ganze positive oder negative Zahl bedeutet.

Besitzt die Funktion außer den Perioden der Form $\mu \cdot 2\omega_1$ noch eine weitere Periode $2\omega_2$, so besitzt sie auch die Periode $\mu \cdot 2\omega_1 + \nu \cdot 2\omega_2$, wo ν ebenfalls eine ganze Zahl bedeutet. Es entsteht nun die Frage: wie viele voneinander unabhängige Perioden kann eine einwertige Funktion besitzen? Diese Frage wird beantwortet durch den Satz:

Alle Perioden einer einwertigen Funktion lassen sich entweder in der Form $\mu \cdot 2\omega_1$ darstellen, wo ω_1 eine Konstante und μ eine beliebige ganze, positive oder negative Zahl bedeutet, oder sie lassen sich in der Form $\mu \cdot 2\omega_1 + \nu \cdot 2\omega_2$ darstellen; hier bedeuten ω_1 und ω_2 Konstante, die nur der Bedingung unterliegen, daß ihr Quotient keine reelle Größe ist; μ, ν bedeuten beliebige ganze Zahlen, von denen die eine auch gleich Null sein kann.

Je nachdem der erste oder der zweite Fall eintritt, wird die Funktion als einfach periodisch oder als doppelt periodisch bezeichnet.

Der Beweis des Satzes stützt sich auf zwei Hilfssätze. Der erste lautet:

I. Die absoluten Beträge aller Perioden einer einwertigen Funktion $f(z)$ müssen größer als eine angebbare positive Größe sein.

Wir beweisen dies indirekt. Nehmen wir an, die Behauptung sei unrichtig, dann muß sich nach Annahme einer beliebig zu wählenden kleinen positiven Größe σ eine Periode 2ω der Funktion $f(z)$ nachweisen lassen, deren absoluter Betrag $< \sigma$ ist. Nun können wir σ so klein wählen, daß für alle Inkremente Δz, deren absoluter Betrag $< \sigma$ ist, der absolute Betrag der Differenz

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} - f'(z)$$

kleiner als eine vorgegebene positive Größe ε ist. Setzen wir $\Delta z = 2\omega$, so ist wegen der Periodizität der Funktion

$$f(z + \Delta z) - f(z) = 0 \quad \text{also} \quad |f'(z)| < \varepsilon.$$

Es ist also der absolute Betrag der Derivierten in einem beliebigen Punkt kleiner als jede vorgegebene Größe ε. Dies ist nur möglich, wenn die Derivierte identisch verschwindet und somit die Funktion eine Konstante ist.

Der zweite Hilfssatz lautet:

II. Zwei Perioden $2\omega_1$ $2\omega_2$ einer einwertigen Funktion $f(z)$, deren Quotient eine reelle Zahl ist, sind notwendig Multipla einer und derselben Periode 2ω.

Nehmen wir zunächst an, der Quotient $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ sei eine rationale Zahl $\frac{m}{n}$, wo m, n ganze Zahlen bedeuten, die wir als relativ prim voraussetzen dürfen. Wir setzen $\frac{\omega_1}{m} = \frac{\omega_2}{n} = \omega$. Sodann bestimmen wir zwei ganze Zahlen m', n', die der Gleichung $mn' - nm' = 1$ genügen, was bekanntlich immer möglich ist. Da die Funktion die Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_2$ besitzt, so besitzt sie auch die Periode

$$n' \cdot 2\omega_1 - m' \cdot 2\omega_2 = (mn' - nm') \cdot 2\omega = 2\omega.$$

Für den Fall daß der Quotient $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ eine rationale Zahl ist, ist somit unsere Behauptung bewiesen; wir nehmen nunmehr an, dieser Quotient sei eine reelle irrationale Zahl. Wir entwickeln diese Zahl in einen Kettenbruch und bezeichnen mit $\frac{P_\nu}{Q_\nu}$ den ν^{ten} Näherungsbruch. Bekanntlich ist die Differenz zwischen einer beliebigen reellen Größe und dem Näherungsbruch, den die Kettenbruchentwicklung liefert, dem absoluten Wert nach kleiner als ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Quadrat des Nenners des Näherungsbruches ist. Wie können also die Gleichung

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{P_\nu}{Q_\nu} + \frac{\varepsilon}{Q_\nu^2}$$

ansetzen, wo ε eine reelle Größe bedeutet, deren absoluter Wert < 1 ist.

Da die Funktion $f(z)$ die beiden Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_2$ besitzt, so besizt sie auch die Periode

$$Q_\nu \cdot 2\omega_1 - P_\nu \cdot 2\omega_2 = Q_\nu \cdot 2\omega_2 \left[\frac{P_\nu}{Q_\nu} + \frac{\varepsilon}{Q_\nu^2} - \frac{P_\nu}{Q_\nu}\right] = \frac{\varepsilon}{Q_\nu} \cdot 2\omega_2.$$

Indem wir die Kettenbruchentwicklung hinreichend weit fortsetzen, können wir bewirken, daß die Zahl Q_ν beliebig groß, also der absolute Betrag der Periode $\frac{\varepsilon}{Q_\nu} \cdot 2\omega_2$ beliebig klein wird. Aber dies steht im Widerspruch mit dem ersten Hilfssatz. Der Quotient $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ kann daher keine reelle irrationale Zahl sein.

Wir bezeichnen wieder zwei Punkte z_0 und z als homolog, wenn die Differenz $z - z_0$ eine Periode der einwertigen Funktion $f(z)$ ist.

Ein System homologer Punkte kann im Endlichen keine Häufungsstelle haben, denn sonst müßte die Funktion unendlich kleine Perioden besitzen, was nach dem ersten Hilfssatz ausgeschlossen ist.

Es gibt daher unter den zum Punkt z_0 homologen Punkten eine endliche Anzahl, deren Abstand vom Punkt z_0 ein Minimum ist. Unter diesen wählen wir nach Belieben einen — z_1 — aus. Die Differenz $z_1 - z_0$, die Periode der Funktion $f(z)$ ist, bezeichnen wir mit $2\omega_1$.

Auf der Verbindungslinie der Punkte z_0 und z_1 — wir wollen sie mit g bezeichnen — liegen die zum Punkt z_0 homologen Punkte

$$z_0 + 2\omega_1 = z_1 \quad z_0 + 4\omega_1 \quad z_0 + 6\omega_1 \cdots$$
$$z_0 - 2\omega_1 \quad z_0 - 4\omega_1 \quad z_0 - 6\omega_1 \cdots$$

aber es gibt auf dieser Geraden keinen weiteren zum Punkt z_0 homologen Punkt. Läge nämlich zwischen den Punkten $z_0 + 2\nu\omega_1$ und $z_0 + 2(\nu + 1)\omega_1$ ein weiterer zu z_0 homologer Punkt z, so wäre auch der zwischen z_0 und z_1 liegende Punkt $z - 2\nu\omega_1$ zu z_0 homolog. Aber dies widerspricht unserer Annahme, daß kein zu z_0 homologer Punkt näher an z_0 liegt als der Punkt z_1.

Gibt es außerhalb der Geraden g keine weiteren zu z_0 homologen Punkte, so ist die Funktion $f(z)$ einfach periodisch. Diesen bereits im vorhergehenden Paragraphen betrachteten Fall schließen wir nun aus.

Wir nehmen also an, es gebe außerhalb der Geraden g zum Punkt z_0 homologe Punkte. Ist ζ einer derselben, so sind auch die Punkte

$$\zeta + 2\omega_1 \quad \zeta + 4\omega_1 \cdots \zeta - 2\omega_1 \quad \zeta - 4\omega_1 \cdots$$

zum Punkt z_0 homolog. Diese Punkte liegen alle auf einer durch den Punkt ζ gehenden Parallelen zur Geraden g. Die zum Punkt z_0 homologen Punkte ordnen sich also in Reihen der Art, daß die Punkte einer Reihe entweder auf der Geraden g selbst oder auf einer Parallelen zu dieser Geraden liegen. Der Abstand von zweien dieser Parallelen kann nicht unter eine angebbare Größe sinken, weil andernfalls das System der zum Punkt z_0 homologen Punkte eine Häufungsstelle im Endlichen haben müßte, was unmöglich ist.

Die Gerade g teilt die z-Ebene in zwei Halbebenen: in derjenigen Halbebene, die man zur Linken hat, wenn man auf der Geraden g vom Punkt z_0 zum Punkt z_1 geht, sei g_1 die nächste Parallele zur Geraden g, die zum Punkt z_0 homologe Punkte enthält und es sei z_2 derjenige dieser Punkte, der dem Punkt z_0 zunächst liegt. Die Periode $z_2 - z_0$ möge mit $2\omega_2$ bezeichnet werden. Wir markieren nun auf der Geraden h, die durch die Punkte z_0 und z_2 geht, neben dem Punkt

$$z_2 = z_0 + 2\omega_2$$

die Punkte

$$z_0 + 4\omega_2 \;\; z_0 + 6\omega_2 \cdots z_0 - 2\omega_2 \;\; z_0 - 4\omega_2 \;\; z_0 - 6\omega_2 \cdots$$

und legen durch diese Punkte beziehungsweise die Geraden

$$g_2 g_3 \cdots g_{-1} \;\; g_{-2} \;\; g_{-3} \cdots$$

parallel zu den Geraden g und g_1.

Analog markieren wir auf der Geraden g die Punkte

$$z_1 = z_0 + 2\omega_1 \;\; z_0 + 4\omega_1 \;\; z_0 + 6\omega_1 \cdots$$
$$z_0 - 2\omega_1 \;\; z_0 - 4\omega_1 \;\; z_0 - 6\omega_1 \cdots$$

und ziehen durch diese Punkte die Geraden

$$h_1 \;\; h_2 \;\; h_3 \cdots h_{-1} \;\; h_{-2} \;\; h_{-3}$$

parallel zur Geraden h (s. Fig. 22).

Die beiden Geraden g_ν und h_μ schneiden sich in dem zum Punkt z_0 homologen Punkt $z_0 + 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_2$. Die beiden Parallelensysteme bestimmen somit ein „Gitter" von homologen Punkten.

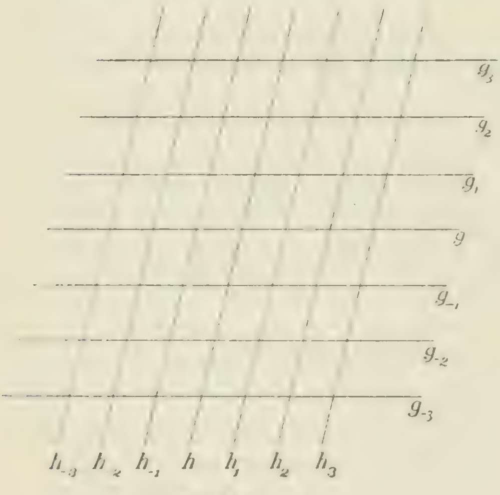


Fig. 22.

Außer diesen Gitterpunkten gibt es keinen zum Punkt z_0 homologen Punkt.

Nehmen wir an, um dies zu beweisen, es gebe noch einen weiteren homologen Punkt ζ. Dann müßte in der Reihe der zu z_0 ebenfalls homologen Punkte

$$\zeta + 2\omega_2 \;\; \zeta + 4\omega_2 \;\; \zeta + 6\omega_2 \cdots \zeta - 2\omega_2 \;\; \zeta - 4\omega_2 \;\; \zeta - 6\omega_2 \cdots$$

einer vorkommen, der entweder auf der Geraden g oder zwischen den Geraden g und g_1 läge. Das erstere ist ausgeschlossen, weil auf der Geraden z außer den Gitterpunkten

$$z_0 + 2\omega_1 \;\; z_0 + 4\omega_1 \cdots z_0 - 2\omega_1 \;\; z_0 - 4\omega_1 \cdots$$

kein zum Punkt z_0 homologer Punkt liegt, das letztere ist ausgeschlossen, weil die Gerade g_1 so gewählt ist, daß zwischen den Geraden g und g_1 überhaupt kein zum Punkt z_0 homologer Punkt liegt.

Da es sonach außer den Gitterpunkten keinen zum Punkt z_0 homologen Punkt gibt, so hat die Funktion $f(z)$ keine anderen Perioden als die, die sich in der Form $2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_2$ darstellen lassen. Damit ist der Eingangs ausgesprochene Satz bewiesen.

Die beiden Parallelensysteme zerlegen die z-Ebene in kongruente Parallelogramme, die man als Periodenparallelogramme bezeichnet. Insbesondere nennt man das Parallelogramm, das durch die Geraden $gg_1\ hh_1$ bestimmt ist, das fundamentale Periodenparallelogramm.

Durch eine Translation, deren Größe und Richtung durch den Vektor z_0z_1 bestimmt ist, wird ein jedes dieser Parallelogramme mit einem benachbarten zur Deckung gebracht und dasselbe gilt für die Translation, die durch den Vektor z_0z_2 bestimmt ist. Indem wir diese beiden Translationen — beziehungsweise die Translationen von gleicher Größe und entgegengesetzter Richtung — wiederholt ausführen, können wir ein beliebiges Periodenparallelogramm mit dem fundamentalen zur Deckung bringen. Dabei wird offenbar ein jeder Punkt der z-Ebene in einen homologen Punkt verschoben werden. Daraus ergibt sich: zu jedem beliebigen Punkt der z-Ebene gibt es in jedem Periodenparallelogramm einen homologen Punkt. Die 4 Eckpunkte eines Periodenparallelogramms sind homologe Punkte und zu jedem Punkt auf einer Seite desselben, der nicht Eckpunkt ist, gibt es auf der gegenüberliegenden Seite einen homologen Punkt. Dagegen können nicht zwei homologe Punkte im Innern eines und desselben Periodenparallelogramms liegen. Um die Ausnahmestellung der Randpunkte aufzuheben ist es zweckmäßig festzusetzen, daß von den 4 Eckpunkten immer nur einer und von den 4 Seiten immer nur die beiden, die sich in diesem Eckpunkt schneiden, zum Periodenparallelogramm gerechnet werden sollen. Nachdem diese Bestimmung getroffen ist, können wir allgemein sagen: ein Periodenparallelogramm enthält von jedem System homologer Punkte einen und nur einen Punkt.

Um die Gestalt des Periodenparallelogramms genauer zu untersuchen, setzen wir

$$2\omega_1 = \varrho_1 e^{i\alpha} \qquad 2\omega_2 = \varrho_2 e^{i\beta}.$$

Die beiden Arcuse seien so gewählt, daß sie dem Intervall $0, 2\pi$ angehören, wobei der Endwert 2π ausgeschlossen bleibt.

Die Periode $2\omega_1$ ist so gewählt, daß ihr absoluter Betrag nicht größer ist als der irgend einer anderen Periode. Folglich ist $\varrho_2 > \varrho_1$.

Wir haben uns ferner so eingerichtet, daß man auf der Geraden g vom Punkt z_0 nach dem Punkt $z_1 = z_0 + 2\omega_1$ gehend den Punkt $z_2 = z_0 + 2\omega_2$ zur Linken hat. Daraus folgt: der Vektor $z_0 z_1$ wird durch eine Drehung im positiven Sinn um weniger als 180^0 mit dem Vektor $z_0 z_2$ zur Deckung gebracht. Nun ist aber dieser Drehungswinkel $= \beta - \alpha$, folglich ist $0 < \beta - \alpha < \pi$.

Den Punkt z_2 haben wir so gewählt, daß kein zum Punkt z_0 homologer Punkt auf der Geraden g_1 diesem Punkt näher liegt als der Punkt z_2. Daraus folgt: die Entfernung des Punktes z_2 von dem Fußpunkt des Perpendikels vom Punkt z_0 auf die Gerade g_1 darf nicht größer als $\frac{1}{2}\varrho_1$ sein, denn sonst würde entweder der Punkt $z_2 + 2\omega_1$ oder der Punkt $z_2 - 2\omega_1$ näher am Punkt z_0 liegen als der Punkt z_2 (siehe Fig. 23).

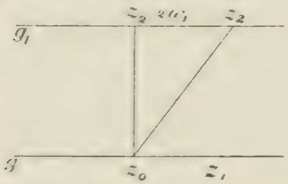


Fig. 23.

Der spitze Winkel, den dieses Perpendikel mit der Geraden $z_0 z_2$ bildet, kann daher nicht größer als 30^0 sein, demnach ist $\frac{\pi}{3} \leq \beta - \alpha < \frac{2\pi}{3}$ und folglich

$$\sin(\beta - \alpha) \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$ Daraus folgt:

Der reelle Teil des Quotienten

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} i = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\left[i \cos(\beta - \alpha) - \sin(\beta - \alpha)\right]$$

ist negativ und dem absoluten Wert nach $\geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Eine Funktion $f(z)$, die die Perioden $2\omega_1$ $2\omega_2$ besitzt,

besitzt auch die Periode $2\omega_1' = \mu \cdot 2\omega_1 + \nu \cdot 2\omega_2$, wo μ, ν beliebige ganze Zahlen bedeuten.

Unter der Voraussetzung, daß die Zahlen μ, ν relativ prim sind, können wir zwei ganze Zahlen $\varkappa$, λ der Art bestimmen, daß

$$\lambda\mu - \varkappa\nu = 1 \text{ ist.}$$

Auch $2\omega_2' = \varkappa \cdot 2\omega_1 + \lambda \cdot 2\omega_2$ ist eine Periode der Funktion $f(z)$.

Wir erhalten somit ein neues Periodenpaar, bestimmt durch die Gleichungen

$$(1) \qquad 2\omega_1' = \mu \cdot 2\omega_1 + \nu \cdot 2\omega_2 \quad 2\omega_2' = \varkappa \cdot 2\omega_1 + \lambda \cdot 2\omega_2$$
$$\lambda\mu - \varkappa\nu = 1.$$

Indem wir diese Gleichungen nach $2\omega_1$, $2\omega_2$ auflösen, erhalten wir

$$(2) \quad 2\omega_1 = \lambda \cdot 2\omega_1' - \nu \cdot 2\omega_2' \quad 2\omega_2 = -\varkappa \cdot 2\omega_1' + \mu \cdot 2\omega_2'.$$

Es lassen sich somit nicht nur die Perioden $2\omega_1'$, $2\omega_2'$ aus den Perioden $2\omega_1$, $2\omega_2$ sondern auch umgekehrt die Perioden $2\omega_1$, $2\omega_2$ aus den Perioden $2\omega_1'$, $2\omega_2'$ zusammensetzen.

Man bezeichnet ein Paar von Perioden $2\omega_1'$, $2\omega_2'$, aus denen sich alle anderen Perioden zusammensetzen lassen, als primitives Periodenpaar. Die Bezeichnung erste und zweite Periode wird jederzeit so gewählt, daß der reelle Teil des Quotienten $\frac{\omega_2'}{\omega_1'} i$ negativ ist, daß man also von einem beliebigen Punkt z_0 aus nach dem Punkt $z_0 + 2\omega_1'$ hin fortschreitend den Punkt $z_0 + 2\omega_2'$ zur Linken hat.

Sehen wir zu, welcher Zusammenhang zwischen zwei beliebigen Paaren primitiver Perioden $2\omega_1$ $2\omega_2$ und $2\omega_1'$ $2\omega_2'$ besteht.

Damit sich die Perioden $2\omega_1'$ $2\omega_2'$ aus den Perioden $2\omega_1$ $2\omega_2$ zusammensetzen lassen, müssen Gleichungen der Form (1) bestehen, wo $\varkappa\lambda\mu\nu$ ganze Zahlen bedeuten. Damit sich auch die Perioden $2\omega_1$ $2\omega_2$ aus den Perioden $2\omega_1'$ $2\omega_2'$ zusammensetzen lassen, darf bei der Auflösung dieser Gleichungen nach $2\omega_1$ $2\omega_2$ kein Nenner auftreten, es muß also die Auflösungsdeterminante $\lambda\mu - \varkappa\nu = \pm 1$ sein.

Setzen wir einen Augenblick

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \xi + i\eta \qquad \frac{\omega_2'}{\omega_1'} = \xi' + i\eta'.$$

Aus (1) folgt:

$$\xi' + i\eta' = \frac{\varkappa + \lambda(\xi + i\eta)}{\mu + \nu(\xi + i\eta)} = \frac{[\varkappa + \lambda\xi)(\mu + \nu\xi) + \lambda\nu\eta^2] + i\eta[\lambda\mu - \varkappa\nu]}{(\mu + \nu\xi)^2 + \nu^2\eta^2}$$

und hieraus

$$\eta' = \frac{\lambda\mu - \varkappa\nu}{(\mu + \nu\xi)^2 + \nu^2\eta^2} \cdot \eta.$$

Die Größen η und η' haben also gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem die Determinante $\lambda\mu - \varkappa\nu$ positiv oder negativ ist. Weil die imaginären Bestandteile der Quotienten $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ und $\frac{\omega_2'}{\omega_1'}$ beide positiv sind, muß demnach die Determinante $\lambda\mu - \varkappa\nu = +1$ sein.

Die eben nachgewiesenen Beziehungen zwischen zwei primitiven Periodenpaaren haben eine einfache geometrische Bedeutung.

Betrachten wir einerseits das Periodenparallelogramm Π, das die Punkte 0 $2\omega_1$ $2\omega_2$ $2\omega_1 + 2\omega_2$ zu Eckpunkten hat, und andererseits das Periodenparallelogramm Π' mit den Eckpunkten 0 $2\omega_1'$ $2\omega_2'$ $2\omega_1' + 2\omega_2'$.

Zunächst ist klar, daß die Eckpunkte beider Parallelogramme demselben System homologer Punkte angehören. Setzen wir sodann einen Augenblick

$$2\omega_1 = x_1 + iy_1 \qquad 2\omega_2 = x_2 + iy_2$$
$$2\omega_1' = x_1' + iy_1' \qquad 2\omega_2' = x_2' + iy_2'.$$

Die Fläche des Parallelogramms Π ist $F = x_1 y_2 - y_1 x_2$, die Fläche des Parallelogramms Π' ist $F' = x_1' y_2' - y_1' x_2'$. Infolge unserer Festsetzung über die Orientierung unserer Perioden sind die Ausdrücke F und F' positiv.

Aus der Gleichung (1) folgt

$$F' = (\lambda\mu - \varkappa\nu)F \quad \text{also } F' = F.$$

Die Periodenparallelogramme, die verschiedenen Paaren primitiver Perioden entsprechen, haben also denselben Flächeninhalt.

§ 40. Sätze über doppelt periodische Funktionen.

Es sei $f(z)$ eine doppelt periodische, in der ganzen Ebene einwertige Funktion und $2\omega_1$, $2\omega_2$ ein beliebig zu wählendes Paar primitiver Perioden derselben. Wir konstruieren ein fundamentales Periodenparallelogramm, dessen Eckpunkte mit $z_0 z_1 z_2 z_3$ bezeichnet werden mögen und zwar sei

$$z_1 = z_0 + 2\omega_1 \quad z_2 = z_0 + 2\omega_2 \quad z_3 = z_0 + 2(\omega_1 + \omega_2).$$

Den Eckpunkt z_0 denken wir so gewählt, daß keine der Seiten des Periodenparallelogramms durch einen Nullpunkt oder einen Unstetigkeitspunkt der Funktion $f(z)$ hindurchgeht. Wir setzen voraus, daß die Funktion $f(z)$ im Endlichen keinen wesentlich singulären Punkt, sondern nur Pole besitzt.

An dieser Voraussetzung wird im folgenden durchweg festgehalten, und es sind daher, wenn von doppelt periodischen Funktionen die Rede ist, immer Funktionen gemeint, die dieser Bedingung genügen.

Wir beweisen nun eine Reihe von allgemeinen Sätzen, die von Liouville aufgestellt worden sind.

I. Eine doppelt periodische Funktion, die in keinem Punkt des Periodenparallelogramms unstetig wird, ist eine Konstante.

Nehmen wir um den Satz zu beweisen, einen Augenblick an, der absolute Betrag der Funktion $f(z)$ bleibe unter der positiven Größe M, so lange der Punkt z dem Periodenparallelogramm Π angehört.

Da es zu jedem Punkt der Ebene einen homologen Punkt im Parallelogramm Π gibt (s. den vorhergehenden Paragraphen), so muß der absolute Betrag $|f(z)| < M$ bleiben, wie auch immer der Punkt z gewählt werden mag. Hieraus folgt aber, wie in § 22 nachgewiesen worden ist, die aufgestellte Behauptung.

II. Die Summe der Residuen, die zu den im Innern des Periodenparallelogramms liegenden Unstetigkeitspunkten gehören, ist gleich Null.

Die Summe der Residuen ist nämlich gleich dem Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Pi)} f(z)\,dz,$$

wo die Integration, wie durch die Bezeichnung angedeutet ist, über die Begrenzung des Parallelogramms II zu erstrecken ist (s. Fig. 24). Dieses Integral ist gleich dem Aggregat

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz + \int\limits_{z_1}^{z_3} f(z)\,dz - \int\limits_{z_2}^{z_3} f(z)\,dz - \int\limits_{z_0}^{z_2} f(z)\,dz\right].$$

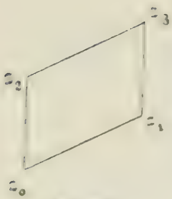


Fig. 24.

Nun hat die Funktion $f(z)$ in homologen Punkten auf den Seiten $z_0 z_1$ und $z_2 z_3$ denselben Wert und ebenso in homologen Punkten auf den Seiten $z_1 z_3$ und $z_0 z_2$.

Daher ist

$$\int\limits_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz = \int\limits_{z_2}^{z_3} f(z)\,dz \quad \text{und} \quad \int\limits_{z_0}^{z_2} f(z)\,dz = \int\limits_{z_1}^{z_3} f(z)\,dz.$$

Wenden wir den eben bewiesenen Satz auf die logarithmische Derivierte $\frac{f'(z)}{f(z)}$ an, die ja ebenfalls die Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_2$ besitzt. Die Summe der Residuen dieser Funktion ist gleich der Differenz zwischen der Anzahl der einfachen Nullpunkte und der Anzahl der einfachen Pole der Funktion $f(z)$, die im Periodenparallelogramm liegen (s. § 29).

Demnach ist die Anzahl der Nullpunkte im Periodenparallelogramm gleich der Anzahl der Unstetigkeitspunkte.

Man bezeichnet diese Zahl als „Ordnung" der doppelt periodischen Funktion $f(z)$.

Die Funktion $f(z)$ —Konstans hat dieselbe Ordnung wie die Funktion $f(z)$, also ebensoviele Nullpunkte. Daraus folgt:

III. Eine doppelt periodische Funktion nimmt im Periodenparallelogramm jeden vorgeschriebenen Wert in soviel Punkten an, als ihre Ordnungszahl angibt.

Bezeichnen wir die innerhalb des Periodenparallelogramms II liegenden einfachen Pole der doppelt periodischen Funktion $f(z)$ mit $a_1\, a_2 \ldots a_n$, ihre einfachen Nullpunkte mit $b_1 b_2 \ldots b_n$.

Die Funktion $F(z) = z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}$ wird in jedem Pol und in jedem Nullpunkt der Funktion $f(z)$ zur ersten Ordnung unendlich, verhält sich aber im übrigen im Innern und auf der Begrenzung des Periodenparallelogramms Π regulär. Das zum Punkt a_ν gehörige Residuum ist $-a_\nu$, das zum Punkt b_ν gehörige $+b_\nu$. Es ergibt sich das sofort aus den Gleichungen

$$\lim_{z=a_\nu}(z-a_\nu)\cdot z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}=a_\nu\lim(z-a_\nu)\frac{f'(z)}{f(z)}=-a_\nu$$

und

$$\lim_{z=b_\nu}(z-b_\nu)\cdot z\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}=b_\nu\lim(z-b_\nu)\frac{f'(z)}{f(z)}=b_\nu$$

(vergl. § 29).

Es ist daher (§ 21)

$$(1)\qquad \begin{aligned}&(b_1+b_2\cdots+b_n)-(a_1+a_2\cdots+a_n)\\&=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Pi)} z\frac{d\log f(z)}{dz}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\Pi)} F(z)\,dz\end{aligned}$$

wo die Integration über die Begrenzung des Parallelogramms Π zu erstrecken ist. Andererseits ist

$$(2)\qquad \int\limits_{(\Pi)}F(z)dz=\int_{z_0}^{z_1}F(z)dz-\int_{z_2}^{z_3}F(z)dz+\int_{z_1}^{z_3}F(z)dz$$
$$-\int_{z_0}^{z_2}F(z)dz.$$

Durchläuft der Punkt z die Seite z_0z_1 des Parallelogramms Π, so durchläuft der homologe Punkt $z+2\omega_2$ die Seite z_2z_3. Folglich ist

$$(3)\qquad \int_{z_0}^{z_1}F(z)dz-\int_{z_2}^{z_3}F(z)dz=-\int_{z_0}^{z_1}[F(z+2\omega_2)-F(z)]dz.$$

Nun ist wegen der Periodizität der Funktion $f(z)$

$$F(z+2\omega_2)-F(z)=(z+2\omega_2)\frac{f'(z+2\omega_2)}{f(z+2\omega_2)}-z\frac{f'(z)}{f(z)}=2\omega_2\frac{f'(z)}{f(z)},$$

folglich ist das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (3)

$$=-2\omega_2\int_{z_0}^{z_1}\frac{f'(z)}{f(z)}dz=-2\omega_2\int_{z_0}^{z_1}d\log f(z).$$

Der Wert dieses Integrals läßt sich nicht berechnen, so lange über die Funktion $f(z)$ keine weiteren Voraussetzungen gemacht werden, aber weil

$f(z_1) = f(z_0)$ ist, so ist $\log f(z_1) - \log f(z_0)$

jedenfalls ein Multiplum von $2\pi i$. Demnach ist (3)

$$\int_{z_0}^{z_1} F(z)\,dz - \int_{z_2}^{z_3} F(z) = 2\nu\pi i \cdot 2\omega_2, \tag{4}$$

wo ν eine ganze Zahl bedeutet.

Analog ergibt sich

$$\int_{z_1}^{z_3} F(z)\,dz - \int_{z_0}^{z_2} F(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_2} [F(z+2\omega_1) - F(z))]\,dz$$

$$= 2\omega_1 \int_{z_0}^{z_2} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

und hieraus folgt

$$\int_{z_1}^{z_3} F(z)\,dz - \int_{z_0}^{z_2} F(z)\,dz = 2\mu\pi i \cdot 2\omega_1, \tag{5}$$

wo μ eine ganze Zahl bedeutet.

Substituieren wir die Werte (4) und (5) in die Gleichung (1), so erhalten wir den Satz:

IV. Für die im Periodenparallelogramm liegenden Nullpunkte und Pole der einwertigen doppelt periodischen Funktion $f(z)$ gilt die Gleichung

$$(b_1 + b_2 \cdots + b_n) - (a_1 + a_2 \cdots + a_n) = 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_2,$$

wo μ und ν ganze Zahlen bedeuten.

Der Satz gilt auch dann noch, wenn unter den Größen $a_1\ a_2 \ldots a_n$ oder unter den Größen $b_1\ b_2 \ldots b_n$ eine Anzahl einander gleiche vorkommen, wenn sich also eine Anzahl Pole zu einem mehrfachen Pol oder eine Anzahl Nullpunkte zu einem mehrfachen Nullpunkt vereinigen.

§ 41. Die Weierstraßsche $\wp$-Funktion. Wir stellen uns nun die Aufgabe eine doppelt periodische Funktion von möglichst einfachem Charakter herzustellen.

Eine doppelt periodische Funktion muß wenigstens in einem Punkt des Periodenparallelogramms unstetig werden

(Satz I des vorigen Paragraphen) und sie kann nicht nur in einem Punkt ∞^1 werden. Denn wenn dies einträte, so müßte das zugehörige Residuum verschwinden (Satz II des vorigen Paragraphen), aber damit fiele die Unstetigkeit weg.

Eine doppelt periodische Funktion von möglichst niedriger Ordnung muß daher entweder in zwei Punkten des Periodenparallelogramms ∞^1 oder in einem Punkt ∞^2 werden.

Wenn eine Funktion in einem Punkt ∞^n wird, so wird ihre Derivierte in diesem Punkt ∞^{n+1}; somit wird die Derivierte einer doppelt periodischen Funktion, die in zwei Punkten des Periodenparallelogramms ∞^1 wird, in diesen beiden Punkten ∞^2 und ist daher von der vierten Ordnung. Wird dagegen die doppelt periodische Funktion in einem Punkt des Periodenparallelogramms ∞^2, so wird die Derivierte in diesem Punkt ∞^3 und ist daher von der dritten Ordnung. Aus diesem Grund ist eine doppelt periodische Funktion zweiter Ordnung, deren Pole zusammenfallen, als einfacher zu betrachten als eine Funktion, deren Pole getrennt liegen.

Es sei nun $p(z)$ eine doppelt periodische Funktion zweiter Ordnung, die nur in einem Punkt des Periodenparallelogramms unstetig wird.

Der Unstetigkeitspunkt kann nach Belieben gewählt werden: wir wollen festsetzen, er falle in den Nullpunkt. Das fundamentale Periodenparallelogramm können wir uns in diesem Fall so gewählt denken, daß sich seine Diagonalen im Nullpunkt schneiden.

In der Umgebung des Nullpunkts der z-Ebene läßt sich die Funktion $p(z)$ durch eine Reihe der Form

$$p(z) = \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-1}}{z} + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots \text{ darstellen.}$$

Der Koeffizient c_{-1} ist das Residuum der Funktion für den Unstetigkeitspunkt $z = 0$, er muß daher nach Satz II des vorigen Paragraphen verschwinden.

Über die Koeffizienten c_{-2} und c_0 kann nach Belieben verfügt werden.

Wir setzen $c_{-2} = 1$ und $c_0 = 0$. Damit ist die Funktion $p(z)$ vollkommen bestimmt.

Nehmen wir um dies zu beweisen an, es gebe eine zweite doppelt periodische Funktion $f(z)$ mit denselben charakteristischen Eigenschaften.

Da für $z = 0$ sowohl die Differenz $p(z) - \frac{1}{z^2}$ als auch die Differenz $f(z) - \frac{1}{z^2}$ stetig bleibt, so gilt dasselbe für die Funktion $p(z) - f(z)$.

Diese Funktion wird im Periodenparallelogramm nirgends unstetig, ist also eine Konstante (Satz I des vorigen Paragraphen) und zwar $= 0$, weil für $z = 0$ sowohl $\lim\left[p(z) - \frac{1}{z^2}\right]$ als auch $\lim\left[f(z) - \frac{1}{z^2}\right]$ verschwindet.

Demnach ist die p-Funktion durch folgende Eigenschaften vollständig bestimmt:

1) Die Funktion $p(z)$ ist in der ganzen Ebene einwertig; sie besitzt die beiden Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_2$.

2) Die Funktion $p(z)$ wird nur im Nullpunkt der z-Ebene und in den homologen Punkten unstetig und zwar der Art, daß für $z = 0$

$$\lim\left[p(z) - \frac{1}{z^2}\right] = 0 \text{ ist.}$$

Bezeichnen wir mit b_1 b_2 die beiden Punkte des Periodenparallelogramms, in denen die p-Funktion den beliebig zu wählenden Wert c annimmt (s. Satz III des vorigen Paragraphen). Da die Pole der Funktion $p(z) - c$ in den Nullpunkt der z-Ebene zusammenfallen, so ist nach Satz IV des vorigen Paragraphen

$$b_1 + b_2 = 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_2,$$

folglich ist

$$p(-b_1) = p(b_2) = c.$$

Die p-Funktion nimmt also in den Punkten b_1 und $-b_1$ denselben Wert an, sie ist somit eine gerade Funktion.

Die Derivierte $p'(z)$ wird nur im Punkt $z = 0$ und in den homologen Punkten unstetig. Da im Punkt $z = 0$ die Funktion $p(z) - \frac{1}{z^2}$ stetig bleibt, so gilt dasselbe für die Derivierte $p'(z) + \frac{2}{z^3}$, folglich ist

$$\lim_{z=0} z^3 p'(z) = -2.$$

Als Derivierte einer geraden Funktion ist $p'(z)$ ungerade Funktion, daher ist $p'(\omega_1) = -p'(-\omega_1)$. Andererseits ist $p'(z+2\omega_1) = p'(z)$, woraus für $z = -\omega_1$ $p'(\omega_1) = p'(-\omega_1)$ folgt. Da sich die Funktion $p'(z)$ in der Umgebung des Punktes ω_1 regulär verhält, folgt hieraus $p'(\omega_1) = 0$.

In gleicher Weise ist zu zeigen, daß

$$p'(\omega_2) = 0 \quad \text{und} \quad p'(\omega_1 + \omega_2) = 0 \text{ ist.}$$

Die Punkte ω_1 ω_2 $\omega_1 + \omega_2$ gehören dem fundamentalen Periodenparallelogramm an, daher kann die Funktion dritter Ordnung $p'(z)$ in keinem weiteren Punkt dieses Parallelogramms verschwinden und sie kann in keinem dieser Punkte zu höherer als der ersten Ordnung Null werden.

Die Funktion $p(z) - p(\omega_1)$ verschwindet offenbar ebenfalls für $z = \omega_1$ und da in diesem Punkt auch ihre Derivierte $p'(z)$ verschwindet, so wird sie 0^2. Sie besitzt daher als Funktion zweiter Ordnung im Periodenparallelogramm keine weiteren Nullpunkte.

Analog ergibt sich, daß die Funktionen

$$p(z) - p(\omega_2) \quad \text{und} \quad p(z) - p(\omega_1 + \omega_2)$$

in den Punkten ω_2 beziehungsweise $\omega_1 + \omega_2$ zur zweiten Ordnung verschwinden und daß dies die einzigen Nullpunkte der beiden Funktionen im fundamentalen Periodenparallelogramm sind.

Es ist üblich die Werte $p(\omega_1)$ $p(\omega_2)$ $p(\omega_1 + \omega_2)$ beziehungsweise mit e_1 e_2 e_3 zu bezeichnen. Dementsprechend setzt man $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$.

Betrachten wir nun den Quotienten

$$f(z) = \frac{[p'(z)]^2}{[p(z) - e_1][p(z) - e_2][p(z) - e_3]}.$$

Die Funktion $f(z)$ kann nur unstetig werden, wenn der Nenner Null oder der Zähler unendlich wird. Der Nenner verschwindet im fundamentalen Periodenparallelogramm nur in den Punkten ω_1 ω_2 ω_3 und wird in diesen Punkten 0^2. Aber in denselben Punkten wird auch der Zähler 0^2, die Funktion $f(z)$ bleibt daher stetig. Der Zähler wird im Punkt $z = 0$ ∞^6 aber in diesem Punkt wird auch der Nenner zur selben Ordnung unendlich, der Quotient bleibt wieder stetig. Da für $z = 0$

$\lim z^3 p'(z) = -2$ und $\lim z^2 p(z) = 1$ ist, so ist $f(o) = 4$.

Die Funktion $f(z)$ wird im Periodenparallelogramm nirgends unstetig und ist daher eine Konstante (Satz I des vorigen Paragraphen). Die Konstante hat den Wert 4.

Die p-Funktion genügt somit der Differentialgleichung

$$(1) \qquad p'(z)^2 = 4(p(z) - e_1)(p(z) - e_2)(p(z) - e_3).$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite ordnen wir nach Potenzen von $p(z)$ und setzen

$$(2) \qquad p'(z)^2 = 4p(z)^3 - g_1 p(z)^2 - g_2 p(z) - g_3.$$

Hier ist

$$g_1 = \frac{1}{4}(e_1 + e_2 + e_3) \quad g_2 = -\frac{1}{4}(e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2)$$

$$g_3 = \frac{1}{4}\, e_1 e_2 e_3.$$

Die Koeffizienten $g_1\ g_2\ g_3$ lassen sich leicht durch die Koeffizienten der Reihe ausdrücken, die die Funktion $p(z)$ in der Umgebung des Punktes $z = 0$ darstellt.

Da $p(z)$ eine gerade Funktion ist, so können in dieser Reihe nur gerade Potenzen von z vorkommen. Die Reihe hat demnach die Form (s. oben)

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \cdots.$$

Hieraus folgt:

$$p(z)^2 = \quad \frac{1}{z^4} + 2c_2 + \cdots$$

$$p(z)^3 = \quad \frac{1}{z^6} + 3\frac{c_2}{z^2} + 3c_4 + \cdots$$

$$p'(z) = -\frac{2}{z^3} + 2c_2 z + 4c_4 z^3 + \cdots$$

$$p'(z)^2 = \quad \frac{4}{z^6} - 8\frac{c_2}{z^2} - 16c_4 \cdots$$

Substituieren wir diese Werte in (2), so erhalten wir die Identität:

$$\frac{4}{z^6} - 8\frac{c_2}{z^2} - 16c_4 \cdots = \frac{4}{z^6} - g_1\frac{1}{z^4} + (12c_2 - g_2)\frac{1}{z^2}$$
$$+ (12c_4 - 2g_1 c_2 - g_3) \cdots.$$

Aus derselben folgt:

$$g_1 = 0$$
$$-\;8c_2 = 12c_2 - g_2 \quad g_2 = 20c_2$$
$$-\;16c_4 = 12c_4 - g_3 \quad g_3 = 28c_4.$$

Wir fassen das Resultat in den Satz zusammen:

Die doppelt periodische Funktion $p(z)$, die durch die Bedingungen (1) und (2) charakterisiert ist, genügt der Differentialgleichung

$$p'(z)^2 = 4(p(z) - e_1)(p(z) - e_2)(p(z) - e_3)$$
$$= 4p(z)^3 - g_2 p(z) - g_3.$$

Hier ist $e_\nu = p(\omega_\nu)$ $\nu = 1, 2, 3$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad g_2 = -\frac{1}{4}(e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2) \quad g_3 = \frac{1}{4}e_1e_2e_3.$$

Die Reihenentwicklung, die die Funktion $p(z)$ in der Umgebung der Nullpunkte darstellt, beginnt mit den Gliedern

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{g_2}{20}z^2 + \frac{g_3}{28}z^4 + \cdots.$$

§ 42. Darstellung der doppelt periodischen Funktionen durch die Funktionen $p(z)$ und $p'(z)$. Es sei $f(z)$ eine doppelt periodische Funktion, die ebenfalls die Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_2$ besitzt. Wir wollen überdies annehmen, $f(z)$ sei eine gerade Funktion.

Die Funktion werde im fundamentalen Periodenparallelogramm ∞^1 in den Punkten $\pm a_1 \;\pm a_2 \cdots \pm a_n$ und 0^1 in den Punkten $\pm b_1 \;\pm b_2 \cdots \pm b_n$.

Wir setzen vorerst voraus, daß keiner dieser Punkte in den Nullpunkt der z-Ebene falle. Unter dieser Voraussetzung läßt sich die Funktion $f(z)$ in der Form

$$(1) \quad f(z) = \text{Konst.}\frac{[p(z) - p(b_1)][p(z) - p(b_2)]\cdots[p(z) - p(b_n)]}{[p(z) - p(a_1)][p(z) - p(a_2)]\cdots[p(z) - p(a_n)]}$$

darstellen.

Um dies zu beweisen, betrachten wir die Funktion

$$F(z) = f(z)\cdot\frac{[p(z) - p(a_1)][p(z) - p(a_2)]\cdots[p(z) - p(a_n)]}{[p(z) - p(b_1)][p(z) - p(b_2)]\cdots[p(z) - p(b_n)]}.$$

Die Funktion $F(z)$ kann in keinem der Punkte $\pm b_i$ unstetig werden, denn in einem dieser Punkte verschwindet zwar ein Faktor des Nenners, aber gleichzeitig verschwindet auch die Funktion $f(z)$ und der Quotient $\frac{f(z)}{p(z) - p(b_1)}$ bleibt stetig.

Die Funktion $F(z)$ kann auch in keinem der Punkte $\pm a_\nu$ unstetig werden.

Denn in einem dieser Punkte wird zwar die Funktion $f(z)$ ∞^1, aber gleichzeitig wird der Faktor $p(z) - p(a_\nu)$ des Zählers 0^1, das Produkt $f(z) \cdot [p(z) - p(a_1)]$ bleibt stetig. Für $z = 0$ wird zwar die Funktion $p(z)$ ∞^2 aber der Quotient

$$\frac{p(z) - p(a_1)}{p(z) - p(b_1)}$$

bleibt stetig. In jedem anderen Punkt bleibt der Zähler von $F(z)$ stetig und der Nenner verschwindet nicht. Folglich wird die Funktion $F(z)$ in keinem Punkt des Periodenparallelogramms unstetig, sie ist somit eine Konstante, was zu beweisen war.

Die Schlüsse, die zum Beweis der Gleichung (1) geführt haben, erfordern nur eine unwesentliche leicht zu übersehende Modifikation, wenn eine Anzahl der Pole a_ν oder der Nullpunkte b_ν zusammenfallen. Die Gleichung (1) behält auch in diesem Fall unverändert ihre Geltung.

Eine gerade Funktion kann im Punkt $z = 0$ nur zu einer geraden Ordnung unendlich werden, denn die Reihe, die sie in der Umgebung dieses Punktes darstellt, kann offenbar nur gerade Potenzen von z enthalten. Nehmen wir an, von den n Punkten $a_1\, a_2 \ldots a_n$ rücken ν in den Nullpunkt der z-Ebene, während die übrigen $a_1\, a_2 \ldots a_{n-\nu}$ vom Nullpunkt verschieden bleiben. In diesem Fall tritt an die Stelle der Gleichung (1) die folgende:

$$f(z) = \text{Konst.} \frac{[p(z) - p(b_1)][p(z) - p(b_2)] \cdots [p(z) - p(b_n)]}{[p(z) - p(a_1)][p(z) - p(a_2)] \cdots [p(z) - p(a_{n-\nu})]}.$$

Es hat keine Schwierigkeit diese Gleichung zu verifizieren: die Funktion $f(z)$ und der rechts stehende Quotient haben die Nullpunkte und die Pole $\pm a_1 \pm a_2 \cdots \pm a_{n-\nu}$ gemein. Für $z = 0$ wird der Zähler des Quotienten ∞^{2n}, der Nenner $\infty^{2(n-\nu)}$, der Quotient wird demnach ebenso wie die Funktion $f(z)$ $\infty^{2\nu}$. Daher kann sich die Funktion $f(z)$ von dem rechts stehenden Quotienten nur um eine multiplikative Konstante unterscheiden.

Der Fall, daß die Funktion $f(z)$ im Punkt $z = 0$ verschwindet, läßt sich auf den eben besprochenen durch die einfache Bemerkung zurückführen, daß in diesem Fall $\frac{1}{f(z)}$ für $z = 0$ unendlich wird.

Damit ist bewiesen: eine gerade Funktion, die dieselben Perioden wie die p-Funktion besitzt, läßt sich als rationale Funktion der p-Funktion darstellen.

Die am Schluß des vorigen Paragraphen nachgewiesene Darstellung der Funktion $p'(z)^2$ als ganze Funktion von $p(z)$ erscheint als Spezialfall dieses Satzes.

Nehmen wir nunmehr an, die doppelt periodische Funktion $f(z)$ sei eine ungerade Funktion. Der Quotient $\frac{f(z)}{p'(z)}$ ist alsdann eine gerade Funktion und läßt sich demnach als rationale Funktion von $p(z)$ darstellen. Daraus folgt: eine ungerade Funktion, die dieselben Perioden wie die p-Funktion besitzt, läßt sich als Produkt einer rationalen Funktion von $p(z)$ und der Derivierten $p'(z)$ darstellen.

Eine Funktion $f(z)$, die weder gerade noch ungerade ist, kann man als Summe der geraden Funktion $\frac{1}{2}[f(z) + f(-z)]$ und der ungeraden Funktion $\frac{1}{2}[f(z) - f(-z)]$ betrachten. Diese Bemerkung im Zusammenhalt mit dem eben Bewiesenen führt zu dem Satz:

Eine doppelt periodische Funktion, die dieselben Perioden wie die p-Funktion hat und im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle besitzt, läßt sich in der Form

$$f(z) = \frac{G_1(p(z)) + G_2(p(z)) \cdot p'(z)}{G_3(p(z))}$$

darstellen, wo G_1 G_2 G_3 ganze rationale Funktionen des angezeigten Arguments bedeuten.

Nehmen wir an, auch die Funktion $F(z)$ besitze dieselben Perioden und habe im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle. Auch $F(z)$ läßt sich daher in der Form

$$F(z) = \frac{H_1(p(z)) + H_2(p(z)) \cdot p'(z)}{H_3(p(z))}$$

darstellen, wo H_1 H_2 H_3 ganze rationale Funktionen bedeuten.

Eliminieren wir aus dieser Gleichung, der für $f(z)$ geltenden und der Gleichung, die zwischen $p(z)$ und $p'(z)$ besteht, die Funktionen $p(z)$ und $p'(z)$, so gelangen wir zu einer algebraischen Gleichung zwischen $f(z)$ und $F(z)$.

Damit ist der Satz bewiesen:

Zwischen zwei doppelt periodischen Funktionen mit denselben Perioden, die beide im Endlichen keinen wesentlich singulären Punkt haben, besteht eine algebraische Gleichung.

Nehmen wir an, die Funktion $f(z)$ sei von der Ordnung n, die Funktion $F(z)$ von der Ordnung m. Die Funktion $f(z)$ nimmt einen gegebenen Wert in n Punkten des Periodenparallelogramms an. Die Werte, die $F(z)$ in diesen Punkten annimmt, sind im allgemeinen untereinander verschieden. Es entsprechen also im allgemeinen einem Werte von $f(z)$ n verschiedene Werte von $F(z)$ und analog entsprechem einem Werte von $F(z)$ m verschiedene Werte von $f(z)$. Die Gleichung, der die Funktionen $f(z)$ und $F(z)$ genügen, ist daher im allgemeinen in $F(z)$ vom Grade n und in $f(z)$ vom Grade m. In besonderen Fällen können diese Gradzahlen kleiner sein; dies tritt z. B. ein, wenn die beiden Funktionen $f(z)$ und $F(z)$ gerade sind.

Wir leiten aus dem oben bewiesenen Satz noch das sogenannte Additionstheorem der p-Funktion ab. Die Funktion $p(z+z_0)$ hat als Funktion von z betrachtet dieselben Perioden wie die Funktion $p(z)$ und muß sich daher als rationale Funktion von $p(z)$ und $p'(z)$ darstellen lassen.

Die Konstanten, die in diesen rationalen Ausdruck eingehen, werden von der Größe z_0 abhängen. Die Funktion $p(z+z_0)$ muß sich aber auch als Funktion von z_0 betrachtet als rationale Funktion von $p(z_0)$ und $p'(z_0)$ darstellen lassen. Daraus folgt:

Die Funktion $p(z+z_0)$ läßt sich als rationale Funktion der Größen $p(z)$ $p'(z)$ $p(z_0)$ $p'(z_0)$ darstellen.

Um die Darstellung auszuführen, betrachten wir zunächst z_0 als konstant, z als variabel und bilden die Funktion

$$f(z) = p(z+z_0) - p(z_0).$$

Diese Funktion ist von der zweiten Ordnung. Sie wird im Punkt $z = -z_0$ ∞^2 und zwar der Art, daß

$$\lim_{z=-z_0} (z+z_0)^2 f(z) = 1$$

ist und sie wird 0^1 im Punkt $z = 0$. Der zweite Nullpunkt ist durch den Satz IV des § 40 bestimmt.

Wir gehen nun von dem allgemeinen Ansatz

$$(2) \qquad f(z) = \frac{G_1(p(z)) + G_2(p(z)) \cdot p'(z)}{G_3(p(z))} \text{ aus.}$$

Der Nenner muß für $z = -z_0$ 0^2 werden, wir setzen daher

$$(3) \qquad G_3(p(z)) = [p(z) - p(z_0)]^2.$$

Für $z = 0$ wird $p(z) = \infty^2$ also $G_3(p(z)) = \infty^4$; da in diesem Punkt $f(z) = 0^1$ ist, so darf der Zähler höchstens ∞^3 werden. Daher muß G_1 eine lineare Funktion und G_2 eine Konstante sein.

Wir setzen

$$(4) \qquad G_1(p(z)) = ap(z) + b, \quad G_2(p(z)) = c.$$

Der Nenner des Quotienten auf der rechten Seite der Gleichung (2) wird nicht nur im Punkt $z = -z_0$, sondern auch im Punkt $z = z_0$ $0^2(3)$. Da die Funktion $f(z)$ im letzteren Punkt stetig bleibt, muß auch der Zähler des Quotienten im Punkt z_0 0^2 werden. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit der Bedingung, daß für $z = z_0$ der Zähler selbst und seine erste Derivierte verschwinden. Es ist also (4)

$$ap'(z_0) + cp''(z_0) = 0 \quad \text{und} \quad ap(z_0) + b + cp'(z_0) = 0.$$

Wir genügen der ersten Gleichung, indem wir

$$a = \varrho p''(z_0) \quad c = -\varrho p'(z_0) \text{ setzen.}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt

$$b = \varrho[-p(z_0)p''(z_0) + p'(z_0)^2].$$

Führen wir diese Werte in (4) ein und substituieren wir sodann (3) und (4) in (2), so folgt

$$(5) \qquad f(z) = \varrho\left[\frac{p''(z_0)}{p(z) - p(z_0)} - p'(z_0)\frac{p'(z) - p'(z_0)}{[p(z) - p(z_0)]^2}\right].$$

Um den Proportionalitätsfaktor ϱ zu bestimmen, benützen wir die Gleichung

$$\lim_{z=-z_0} (z+z_0)^2 f(z) = 1.$$

Es ist
$$\lim_{z=-z_0} \frac{p(z)-p(z_0)}{z+z_0} = -p'(z_0), \text{ folglich}$$
$$\varrho \cdot \frac{2p'(z_0)^2}{p'(z_0)^2} = 1 \quad \text{also } \varrho = \frac{1}{2} \cdot$$

Zufolge der Differentialgleichung, der die Funktion $p(z)$ genügt (s. den Schluß des vorigen Paragraphen) ist
$$2p'(z)p''(z) = 12p(z)^2p'(z) - g_2p'(z) \text{ also } p''(z) = 6p(z)^2 - \frac{1}{2}g_2.$$

Substituieren wir die Werte von ϱ und $p''(z_0)$ in (5) so folgt:
$$f(z) = p(z+z_0) - p(z_0)$$
$$= \frac{3p(z_0)^2 - \frac{1}{4}g_2}{p(z) - p(z_0)} - \frac{1}{2}p'(z_0)\frac{p'(z) - p'(z_0)}{[p(z) - p(z_0)]^2}.$$

Um dieser Formel eine mehr symmetrische Gestalt zu geben, vertauschen wir zunächst die Größen z und z_0. Wir erhalten
$$p(z+z_0) - p(z) = -\frac{3p(z)^2 - \frac{1}{4}g_2}{p(z) - p(z_0)} + \frac{1}{2}p'(z)\frac{p'(z) - p'(z_0)}{[p(z) - p(z_0)]^2}.$$

Indem wir die beiden letzten Gleichungen addieren und dann mit 2 dividieren, erhalten wir nach einer einfachen Reduktion die in den Größen z und z_0 symmetrische Gleichung
$$p(z+z_0) = \frac{1}{4}\left[\frac{p'(z) - p'(z_0)}{p(z) - p(z_0)}\right]^2 - p(z) - p(z_0).$$

§ 43. Partialbruchzerfällung der p-Funktion. Im vorigen Abschnitt sind zwei Arten der Darstellung einer einwertigen Funktion, die im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle besitzt, nachgewiesen worden: die Zerlegung in Partialbrüche, die die Pole und die zugehörigen charakteristischen Funktionen in Evidenz setzt, und die Darstellung als Quotient zweier ganzer Funktionen, die die Pole und die Nullpunkte dafür aber nicht die zu den Polen gehörigen charakteristischen Funktionen ersichtlich macht.

Diese beiden Arten der Darstellung sollen nun für die doppelt periodischen Funktionen durchgeführt werden. Wir beginnen mit der Partialbruchzerfällung der p-Funktion.

Die p-Funktion wird ∞^2 in den Punkten
$$w_{\mu\nu} = 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_2 \quad \mu, \nu = 0 \pm 1 \pm 2 \cdots.$$

Wir lassen den Pol $w_{00} = 0$ beiseite und ordnen die übrigen Punkte in eine einfache Reihe. Zu dem Zweck greifen wir auf die in § 39 konstruierte Figur 22 zurück: wir legen durch den Nullpunkt der z-Ebene und den Punkt $2\omega_1$ eine Gerade g, durch den Nullpunkt und den Punkt $2\omega_2$ eine Gerade h. Dann ziehen wir durch die Punkte

$$2\omega_2 \; 4\omega_2 \; 6\omega_2 \; \ldots \; -2\omega_2 \; -4\omega_2 \; -6\omega_2$$

die Geraden $g_1 \; g_2 \; g_3 \; \ldots \; g_{-1} \; g_{-2} \; g_{-3}$ parallel zur Geraden g und durch die Punkte $2\omega_1 \; 4\omega_1 \; 6\omega_1 \ldots -2\omega_1 \; -4\omega_1 \; -6\omega_1 \ldots$ die Geraden $h_1 \; h_2 \; h_3 \ldots h_{-1} \; h_{-2} \; h_{-3} \ldots$ parallel zur Geraden h. Der Punkt $w_{\mu\nu}$ ist offenbar der Schnittpunkt der Geraden h_μ und g_ν. Wir fassen nun zunächst die Punkte $w_{\mu\nu}$ zusammen, die auf den Seiten des Parallelogramms P_1 liegen, das durch die Geraden $g_1 \; g_{-1} \; h_1 \; h_{-1}$ bestimmt ist. Es sind das die Punkte $w_{1-1} \; w_{10} \; w_{11} \; w_{-1-1} \; w_{-10} \; w_{-11} \; w_{0-1} \; w_{01}$. Hierauf fassen wir die Punkte $w_{\mu\nu}$ auf den Seiten des Parallelogramms P_2 zusammen, das durch die Geraden $g_2 \; g_{-2} \; h_2 \; h_{-2}$ bestimmt ist, dann die Punkte auf den Seiten des Parallelogramms P_3, das durch die Geraden $g_3 \; g_{-3} \; h_3 \; h_{-3}$ bestimmt ist usw. Auf den Seiten des Parallelogramms P_ν liegen 8ν Punkte $w_{\lambda\mu}$, nämlich die $2(2\nu+1)$ Schnittpunkte der $2\nu+1$ Geraden $h_{-\nu} \; h_{-(\nu-1)} \ldots h_{-1} \; h \, h_1 \ldots h_{\nu-1} \; h_\nu$ mit den Geraden g_ν und $g_{-\nu}$ und die $2(2\nu-1)$ Schnittpunkte der Geraden $g_{-(\nu-1)} \ldots g_{-1} \; g \, g_1 \ldots g_{(\nu-1)}$ mit den Geraden h_ν und $h_{-\nu}$.

Es sei $2l$ die kleinere der beiden Höhen des Parallelogramms P_1, $2d$ die größere Diagonale. Der Abstand des Nullpunkts von einem Punkt auf einer Seite des Parallelogramms P_1 liegt zwischen den Größen l und d.

Die Parallelogramme $P_1 \; P_2 \; P_3 \ldots$ sind alle untereinander ähnlich und ihre Seiten verhalten sich wie $1:2:3\ldots$, daher ist der Abstand des Nullpunkts von einem Punkt, der auf einer Seite des Parallelogramms P_ν liegt, nicht kleiner als νl und nicht größer als νd.

Wir bilden nun die Summe

$$S = \sum{}' \frac{1}{w_{\mu\nu}{}^{n}}.$$

Hier sind für μ, ν alle ganzen Zahlen zu setzen, nur die

Kombination $\mu = 0$, $\nu = 0$ ist auszuschließen. An diese Ausnahme soll der Akzent am Summenzeichen erinnern. n sei eine positive Zahl, von der wir vorerst noch nicht voraussetzen, daß sie ganz ist.

Jeder der 8ν Punkte, die auf den Seiten des Parallelogramms P_ν liegen, liefert zur Summe S einen Beitrag, der zwischen den Grenzen $\frac{1}{(\nu l)^n}$ und $\frac{1}{(\nu d)^n}$ liegt. Daher ist

$$S < \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{8\nu}{(\nu l)^n} = \frac{8}{l^n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{n-1}} \text{ und}$$

$$S > \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{8\nu}{(\nu d)^n} = \frac{8}{d^n} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{n-1}}.$$

Bekanntlich konvergiert oder divergiert die Reihe $\sum_\nu \frac{1}{\nu^{n-1}}$ je nachdem $n > 2$ oder $n < 2$ ist. Dasselbe gilt somit für die Summe S.

Soll also n eine ganze Zahl sein, so muß n mindestens den Wert 3 haben.

Aus der Konvergenz der Reihe $S = \sum' \frac{1}{|w_{\mu\nu}|^3}$ folgt (§ 35), daß die Reihe

$$\frac{1}{z^3} + \sum' \frac{1}{(z - w_{\mu\nu})^3} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z - w_{\mu\nu})^3}$$

eine in der ganzen z-Ebene einwertige Funktion $f(z)$ darstellt.

Die Form des allgemeinen Gliedes der Reihe bleibt ungeändert, wenn man die Variable z durch $z + 2\omega_1$ ersetzt und gleichzeitig an Stelle des Summationsindex μ den Index $\mu + 1$ einführt, der ebenfalls alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ zu durchlaufen hat. Daher hat die Funktion $f(z)$ die Periode $2\omega_1$ und ebenso ist ersichtlich, daß sie auch die Periode $2\omega_2$ besitzt.

Die Funktion $f(z)$ ist ungerade, denn das allgemeine Glied der Reihe wechselt nur sein Vorzeichen, wenn man die Variable z durch $-z$ ersetzt und gleichzeitig an Stelle der Summationsindizes $\mu\nu$ die Indizes $-\mu$ $-\nu$ treten läßt. Die Funktion $f(z)$ wird nur im Punkt $z = 0$ des fundamentalen Periodenparallelogramms unstetig und zwar der Art, daß die Differenz

$f(z) - \frac{1}{z^3}$ stetig bleibt. Die Funktion $p'(z)$ wird ebenfalls nur im Punkt $z = 0$ des Periodenparallelogramms unstetig; die Summe $p'(z) + \frac{2}{z^3}$ bleibt stetig. Daher ist die doppelt periodische Funktion $p'(z) + 2f(z)$ im Periodenparallelogramm nirgends unstetig; sie ist somit konstant (Satz I des § 40) und zwar $= 0$, weil die beiden Funktionen $f(z)$ und $p'(z)$ ungerade sind.

Wir erhalten somit für die Funktion $p'(z)$ die Partialbruchzerlegung

(1) $$p'(z) = -2 \sum \frac{1}{(z - w_{\mu\nu})^3},$$

wo die Summation über alle ganzen Zahlen $\mu\,\nu$ zu erstrecken ist.

Die Funktion $p(z)$ wird für $z = 0$ unstetig der Art, daß

$$\lim_{z=0} \left[p(z) - \frac{1}{z^2}\right] = 0 \text{ ist.}$$

Daher ist

$$p(z) - \frac{1}{z^2} = \int_0^z \left[p'(z) + \frac{2}{z^3}\right] dz.$$

Hieraus ergibt sich durch gliedweise Integration der Reihe (1)

(2) $$p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(z - w_{\mu\nu})^2} - \frac{1}{w_{\mu\nu}^2}\right],$$

wo die Summation wieder über alle ganzen Zahlen μ, ν mit Ausschluß der Kombination $\mu = 0$, $\nu = 0$ zu erstrecken ist.

Es ist leicht zu verifizieren, daß die Reihe (2) eine doppelt periodische Funktion darstellt. Zunächst ist nämlich klar, daß die Reihensumme eine gerade Funktion ist, denn ersetzt man den Wert z durch $-z$, so werden nur die Glieder der Reihe, die den Indizes μ, ν und $-\mu$, $-\nu$ entsprechen, miteinander vertauscht. Sodann folgt aus der Periodizität der Funktion $p'(z)$, daß die beiden Differenzen

$$p(z + 2\omega_1) - p(z) \text{ und } p(z + 2\omega_2) - p(z)$$

konstant sind. Setzt man $z = -\omega_1$ beziehungsweise $= -\omega_2$, so erkennt man, daß die beiden Konstanten gleich Null sind.

In den vorausgehenden Paragraphen haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß es doppelt periodische Funktionen gibt und unter dieser Annahme die Eigenschaften dieser Funktionen untersucht; durch die eben durchgeführte Darstellung der p-Funktion ist der bisher fehlende Existenzbeweis erbracht.

§ 44. Die Funktion $\zeta(z)$. Um die Partialbruchzerfällung einer doppelt periodischen Funktion beliebiger Ordnung durchführen zu können, stellen wir uns zunächst die Aufgabe, eine einwertige Funktion der Variabeln z der Art zu bestimmen, daß sie in jedem der Punkte $w_{\mu\nu}$ unendlich wird wie die Funktion $\frac{1}{z - w_{\mu\nu}}$.

Eine Funktion, die dieser Bedingung genügt, kann allerdings nicht doppelt periodisch sein, da sie ja nur in einem Punkt des Periodenparallelogramms ∞^1 wird (s. § 40 Satz II), wir können aber, wie sich sofort zeigen wird, eine der genannten Bedingung genügende Funktion der Art bestimmen, daß sie in einer sehr einfachen Beziehung zu den doppelt periodischen Funktionen steht.

Die Derivierte einer Funktion, die in jedem der Punkte $w_{\mu\nu}$ unendlich wird wie die Funktion $\frac{1}{z - w_{\mu\nu}}$, wird im Punkt $w_{\mu\nu}$ unstetig wie die Funktion $-\frac{1}{(z - w_{\mu\nu})^2}$, sie wird also im Punkt $w_{\mu\nu}$ genau in derselben Art unstetig wie die Funktion $-p(z)$. Wir erhalten daher eine Funktion der verlangten Art — sie möge mit $\zeta(z)$ bezeichnet werden — wenn wir festsetzen, es sei

$$(1) \qquad \zeta'(z) = -p(z).$$

Über die additive Konstante, die hiernach noch willkürlich bleibt, verfügen wir durch die Bestimmung, es sei

$$(2) \qquad \lim_{z=0}\left[\zeta(z) - \frac{1}{z}\right] = 0.$$

Die Funktion $p(z) - \frac{1}{z^2}$ verhält sich in der Umgebung des Nullpunkts regulär, dasselbe gilt daher auch für die Funktion $\zeta'(z) + \frac{1}{z^2}$. Wir erhalten somit

$$\int_0^z \left[\zeta'(z) + \frac{1}{z^2}\right] dz = \zeta(z) - \frac{1}{z} = -\int_0^z \left[p(z) - \frac{1}{z^2}\right] dz.$$

Durch gliedweise Integration ergibt sich (s. Gleichung (2) des vorigen Paragraphen)

$$(3)\qquad \zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum{}' \left[\frac{1}{z - w_{\mu\nu}} + \frac{z}{w_{\mu\nu}^2} + \frac{1}{w_{\mu\nu}} \right],$$

wo für μ, ν alle ganzen Zahlen mit Ausnahme der Kombination $\mu = 0$, $\nu = 0$ zu setzen sind.

Daß die rechts stehende Reihe in jedem Punkt z, der mit keinem der Punkte $w_{\mu\nu}$ zusammenfällt, gleichmäßig konvergiert, braucht nicht erst bewiesen zu werden: es ergibt sich das aus der Herleitung der Reihe (s. § 24).

Aus der Gleichung (3) geht hervor, daß die Funktion $\zeta(z)$ in der ganzen Ebene einwertig und von den Punkten $w_{\mu\nu}$ und dem unendlich fernen Punkt abgesehen regulär ist. Im Punkt $w_{\mu\nu}$ bleibt die Differenz $\zeta(z) - \frac{1}{z - w_{\mu\nu}}$ stetig. Die Funktion $\zeta(z)$ genügt somit den aufgestellten Bedingungen.

Es ist ferner ersichtlich, daß die Funktion $\zeta(z)$ ungerade ist. Ersetzt man nämlich den Wert z durch den Wert $-z$ und läßt gleichzeitig an Stelle der Summationsindizes μ, ν die Indizes $-\mu$, $-\nu$ treten, so wechselt der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (3) nur das Vorzeichen.

Die Funktion $\zeta(z)$ kann nicht doppelt periodisch sein, daher können nicht gleichzeitig die beiden Differenzen

$$\zeta(z + 2\omega_1) - \zeta(z) = 2\eta_1 \quad \text{und} \quad \zeta(z + 2\omega_2) - \zeta(z) = 2\eta_2$$

verschwinden. Da aber die Derivierten

$$\zeta'(z + 2\omega_1) - \zeta'(z) = -[p(z + 2\omega_1) - p(z)] \quad \text{und}$$
$$\zeta'(z + 2\omega_2) - \zeta'(z) = -[p(z + 2\omega_2) - p(z)]$$

gleich Null sind, so sind die Größen η_1 und η_2 Konstante. Setzt man einmal $z = -\omega_1$, das andere Mal $z = -\omega_2$, so ergibt sich, weil $\zeta(z)$ eine ungerade Funktion ist

$$(4)\qquad \eta_1 = \zeta(\omega_1) \quad \eta_2 = \zeta(\omega_2).$$

Zwischen den Konstanten η_1 und η_2 besteht eine einfache Beziehung.

Wir gelangen am leichtesten zu derselben, indem wir das Integral

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(\Pi)} \zeta(z)\, dz$$

bilden, wo die Integration im positiven Sinn über die Begrenzung des fundamentalen Periodenparallelogramms zu erstrecken ist. Die Eckpunkte desselben bezeichnen wir wieder mit $z_0\ z_1\ z_2\ z_3$ (s. Fig. 24 § 40) und wir nehmen wieder an, daß sich seine Diagonalen im Nullpunkt schneiden.

Durchläuft der Punkt z die Seite $z_0 z_1$, so durchläuft der homologe Punkt $z + 2\omega_2$ die Seite $z_2 z_3$. Daher ist

$$\int_{z_0}^{z_1} \zeta(z)\,dz + \int_{z_3}^{z_2} \zeta(z)\,dz$$

$$= \int_{z_0}^{z_1} [\zeta(z) - \zeta(z + 2\omega_2)]\,dz = -2\eta_2(z_1 - z_0) = -4\eta_2\omega_1.$$

Durchläuft der Punkt z die Seite $z_0 z_2$, so durchläuft der homologe Punkt $z + 2\omega_1$ die Seite $z_1 z_3$. Daher ist

$$\int_{z_1}^{z_3} \zeta(z)\,dz + \int_{z_2}^{0} \zeta(z)\,dz = \int_{z_0}^{z_2} [\zeta(z + 2\omega_1) - \zeta(z)]\,dz = 4\eta_1\omega_2.$$

Demnach ist

$$J = \frac{2}{\pi i}(\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1).$$

Im fundamentalen Periodenparallelogramm wird die Funktion $\zeta(z)$ nur im Punkt $z = 0$ unstetig und das zugehörige Residuum ist $= 1$, also ist $J = 1$. Folglich ist

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

Wir fassen das im Vorstehenden Bewiesene zusammen.

4) Die Funktion $\zeta(z)$ genügt den Relationen

$$\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\eta_1 \qquad \zeta(z + 2\omega_2) = \zeta(z) + 2\eta_2.$$

Die hier auftretenden Größen $\eta_1\,\eta_2$ sind konstant und zwar ist

$$\eta_1 = \zeta(\omega_1) \qquad \eta_2 = \zeta(\omega_2).$$

Diese Konstanten genügen der Gleichung

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

Mittels der Funktion $\zeta(z)$ kann man nunmehr leicht eine beliebige doppelt periodische Funktion in Partialbrüche zerfällen.

Es sei $f(z)$ eine doppelt periodische Funktion, die in den

Punkten $a_1\, a_2 \ldots a_n$ des fundamentalen Periodenparallelogramms unstetig wird. Die zum Punkt a_ν gehörige charakteristische Funktion sei

$$\varphi_\nu(z \mid a_\nu) = \frac{c_{-1}^{(\nu)}}{z - a_\nu} + \frac{c_{-2}^{(\nu)}}{(z - a_\nu)^2} \cdots + \frac{c_{-\mu}^{(\nu)}}{(z - a_\nu)^\mu}.$$

Die Funktion $\zeta(z)$ wird im Punkt $z = 0$ unendlich wie die Funktion $\frac{1}{z}$, ihre $(\mu - 1)^{\text{te}}$ Derivierte wird daher unendlich wie die Funktion

$$\frac{(-1)^{\mu-1}\, 1 \cdot 2 \cdots (\mu - 1)}{z^\mu}.$$

Daher wird die Funktion

$$\Phi_\nu(z) = c_{-1}^{(\nu)}\, \zeta(z - a_\nu) - c_{-2}^{(\nu)}\, \zeta'(z - a_\nu) + \frac{c_{-3}^{(\nu)}}{1 \cdot 2}\, \zeta''(z - a_\nu) \cdots$$
$$+ (-1)^{\mu-1} \frac{c_{-\mu}^{(\nu)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (\mu - 1)}\, \zeta^{(\mu-1)}(z - a_\nu)$$

im Punkt a_ν in derselben Weise unstetig wie die Funktion $f(z)$; die Differenz $f(z) - \Phi_\nu(z)$ bleibt im Punkt a_ν stetig.

Wir bilden nun die Funktion

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_\nu(z)$$

und beweisen, daß diese Funktion die Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_2$ besitzt.

Zunächst ist zu bemerken: die Derivierten der ζ-Funktion besitzen diese Perioden, weil $\zeta'(z) = -\wp(z)$ ist. Daher ist

$$\Phi_\nu(z + 2\omega_1) - \Phi_\nu(z) = c_{-1}^{(\nu)}[\zeta(z - a_\nu + 2\omega_1) - \zeta(z - a_\nu)] = c_{-1}^{(\nu)} \cdot 2\eta_1.$$

Folglich ist

$$F(z + 2\omega_1) - F(z) = 2\eta_1 \sum_{\nu=1}^{n} c_{-1}^{(\nu)}.$$

Die rechts stehende Summe

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_{-1}^{(\nu)}$$

ist die Summe der Residuen für die dem Periodenparallelogramm angehörenden Pole der Funktion $f(z)$. Sie verschwindet also zufolge Satz II des § 40. Daher ist, wie behauptet wurde $F(z + 2\omega_1) = F(z)$ und aus den gleichen Gründen ergibt sich, daß die Funktion $F(z)$ auch die Periode $2\omega_2$ besitzt.

Die Funktion $f(z) - F(z)$ ist daher doppelt periodisch; im Periodenparallelogramm wird sie nirgends unstetig, daher ist sie konstant.

Damit ist bewiesen:

Eine jede doppelt periodische Funktion $f(z)$ läßt sich in der Form darstellen

$$f(z) = \text{Konst.} + \sum_{\nu=1}^{n} \Big[c_{-1}^{(\nu)} \zeta(z-a_\nu) - c_{-2}^{(\nu)} \zeta'(z-a_\nu) + \frac{c_{-3}^{(\nu)}}{1\cdot 2} \zeta''(z-a_\nu)$$

$$+ \cdots + (-1)^{\alpha-1} \frac{c_{-\alpha}^{(\nu)}}{1\cdot 2 \cdots (\alpha-1)} \zeta^{(\alpha-1)}(z-a_\nu) \Big].$$

§ 45. Die Funktion $\sigma(z)$.

Es erübrigt nun noch eine gegebene doppelt periodische Funktion als Quotient zweier ganzer Funktionen darzustellen. Zu dem Zweck ist es nötig eine ganze Funktion zu konstruieren, die in jedem Punkt eines Gitters homologer Punkte zur ersten Ordnung verschwindet. Ein Punkt des Gitters kann beliebig gewählt werden; wir wollen festsetzen, daß der Punkt $z = 0$ dem Gitter angehöre.

Die logarithmische Derivierte einer ganzen Funktion wird im Endlichen nur in den Nullpunkten der Funktion unstetig und zwar ∞^1; das Residuum, das zu diesem Pol gehört, ist gleich der Ordnung des Nullpunkts, im vorliegenden Fall also $= 1$ (§ 29). Die logarithmische Derivierte der zu bestimmenden Funktion wird somit in denselben Punkten und in derselben Art unstetig wie die Funktion $\zeta(z)$; es ist daher zulässig sie $= \zeta(z)$ zu setzen. Wir setzen also, der von Weierstraß eingeführten Bezeichnungsweise folgend

$$(1) \qquad \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z)$$

und bestimmen die noch zur Verfügung stehende multiplikative Konstante durch die Bedingung

$$\lim_{z=0} \frac{\sigma(z)}{z} = 1.$$

Folglich ist

$$\int_0^z \left[\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} - \frac{1}{z}\right] dz = \log \frac{\sigma(z)}{z} = \int_0^z \left[\zeta(z) - \frac{1}{z}\right] dz.$$

Wir drücken $\zeta(z)$ durch die Reihe (3) des vorigen Paragraphen aus und erhalten durch gliedweise Integration

$$\log \frac{\sigma(z)}{z} = \sum{}' \left[\log\left(1 - \frac{z}{w_{\mu\nu}}\right) + \frac{1}{2} \frac{z^2}{w_{\mu\nu}^2} + \frac{z}{w_{\mu\nu}} \right].$$

Hieraus folgt

$$(2) \quad \sigma(z) = z \prod{}' \left(1 - \frac{z}{w_{\mu\nu}}\right) e^{\frac{z}{w_{\mu\nu}} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{w_{\mu\nu}^2}}, \quad w_{\mu\nu} = 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_2$$

$$\mu, \nu = 0 \pm 1 \pm 2 \cdots$$

ausgenommen $\mu = 0$, $\nu = 0$.

Die Funktion $\sigma(z)$ ist in der ganzen Ebene einwertig und im Endlichen überall regulär. Sie verschwindet — wie verlangt ist — in den Punkten des Gitters $w_{\mu\nu}$. Man überzeugt sich leicht, daß $\sigma(z)$ eine ungerade Funktion ist. Der allgemeine Faktor des Produkts Π' ändert nämlich seine Form nicht, wenn man die Variable z durch $-z$ und gleichzeitig die Indizes μ, ν durch $-\mu$, $-\nu$ ersetzt.

Aus der Gleichung $\zeta(z + 2\omega_1) - \zeta(z) = 2\eta_1$ (Nr. 4 des vorigen Paragraphen) folgt mit Rücksicht auf (1)

$$\frac{d \log \frac{\sigma(z + 2\omega_1)}{\sigma(z)}}{dz} = 2\eta_1 \text{ und hieraus}$$

$$\log \frac{\sigma(z + 2\omega_1)}{\sigma(z)} = 2\eta_1(z + \alpha),$$

wo α eine Konstante bedeutet.

Es ist somit $\sigma(z + 2\omega_1) = e^{2\eta_1(z+\alpha)}\sigma(z)$.

Um die Konstante α zu bestimmen, setzen wir $z = -\omega_1$. Da $\sigma(z)$ eine ungerade Funktion ist, so folgt

$$e^{2\eta_1\alpha} = -e^{2\eta_1\omega_1}.$$

Wir erhalten also

$$(3) \qquad \sigma(z + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(z+\omega_1)}\sigma(z)$$

und auf demselben Wege ergibt sich

$$\sigma(z + 2\omega_2) = -e^{2\eta_2(z+\omega_2)}\sigma(z).$$

Mittels der σ-Funktion können wir nun leicht eine beliebige doppelt periodische Funktion $f(z)$ darstellen.

Die Funktion $f(z)$ werde im fundamentalen Periodenparallelogramm ∞^1 in den Punkten $a_1\, a_2 \ldots a_n$ und 0^1 in den Punkten $b_1\, b_2 \ldots b_n$.

Die Größen a_λ und b_λ müssen der Relation (§ 40 Satz IV)

$$(4)\qquad (b_1 + b_2 \cdots + b_n) - (a_1 + a_2 \cdots + a_n) = 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_2$$

genügen, wo μ und ν ganze Zahlen bedeuten; im übrigen dürfen sie willkürlich gewählt werden. Wir lassen insbesondere die Möglichkeit offen, daß die Größen a_λ und die Größen b_λ nicht alle untereinander verschieden sind, daß also Pole und Nullpunkte höherer Ordnung auftreten.

Wir bilden nun die Funktion

$$(5)\qquad F(z) = e^{\gamma z}\,\frac{\sigma(z-b_1)\sigma(z-b_2)\cdots\sigma(z-b_n)}{\sigma(z-a_1)\sigma(z-a_2)\cdots\sigma(z-a_n)}$$

und beweisen, daß wir über die Konstante γ der Art verfügen können, daß die Funktion $F(z)$ die Perioden $2\omega_1$ und $2\omega_2$ besitzt.

Zufolge (3) ist

$$\sigma(z - a_\lambda + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1(z-a_\lambda+\omega_1)}\sigma(z-a_\lambda),$$

folglich ist

$$\frac{\sigma(z-b_\lambda+2\omega_1)}{\sigma(z-a_\lambda+2\omega_1)} = e^{2\eta_1(a_\lambda-b_\lambda)}\frac{\sigma(z-b_\lambda)}{\sigma(z-a_\lambda)}.$$

Daher ist

$$\frac{F(z+2\omega_1)}{F(z)} = e^{2\eta_1\Sigma(a_\lambda-b_\lambda)+2\gamma\omega_1},$$

also wegen (4)

$$(6)\qquad \frac{F(z+2\omega_1)}{F(z)} = e^{4\eta_1(\mu\omega_1+\nu\omega_2)+2\gamma\omega_1}.$$

Dementsprechend ist

$$(7)\qquad \frac{F(z+2\omega_2)}{F(z)} = e^{4\eta_2(\mu\omega_1+\nu\omega_2)+2\gamma\omega_2}.$$

Zwischen den Exponenten

$$E_1 = 4\eta_1(\mu\omega_1+\nu\omega_2) + 2\gamma\omega_1 \quad \text{und}$$
$$E_2 = 4\eta_2(\mu\omega_1+\nu\omega_2) + 2\gamma\omega_2$$

besteht auf Grund der Gleichung $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$ (Nr. 4 des vorigen Paragraphen) die Relation

$$\omega_2 E_1 - \omega_1 E_2 = 2\pi i(\mu\omega_1 + \nu\omega_2).$$

Bestimmen wir also die Konstante γ durch die Gleichung $E_1 = \nu\cdot 2\pi i$, so wird $E_2 = -\mu\cdot 2\pi i$. Die Exponentialgrößen auf der rechten Seite der Gleichungen (6) und (7) werden also $= 1$.

Die Funktionen $f(z)$ und $F(z)$ besitzen somit dieselben

Perioden und sie haben die Pole und die Nullpunkte gemein, ihr Quotient ist daher notwendig eine Konstante.

Damit ist bewiesen:

Die doppelt periodische Funktion $f(z)$ läßt sich in der Form

$$f(z) = \text{Konst.}\, e^{\gamma z} \frac{\sigma(z - b_1)\sigma(z - b_2)\cdots\sigma(z - b_n)}{\sigma(z - a_1)\sigma(z - a_2)\cdots\sigma(z - a_n)}$$

darstellen. Die Konstante γ ist durch eine der beiden Gleichungen

$$4\eta_1(\mu\omega_1 + \nu\omega_2) + 2\gamma\omega_1 = \nu \cdot 2\pi i$$

$$4\eta_2(\mu\omega_1 + \nu\omega_2) + 2\gamma\omega_2 = -\mu \cdot 2\pi i$$

bestimmt. μ, ν sind die in der Gleichung (4) vorkommenden ganzen Zahlen.

Wir wenden den eben bewiesenen Satz auf die Funktion $p(z) - p(z_0)$ an.

Die Funktion wird ∞^2 für $z = 0$ und sie wird 0^1 für $z = z_0$ und ebenso für $z = -z_0$, da ja $p(z)$ eine gerade Funktion ist. Im vorliegenden Fall sind die durch die Gleichung (4) bestimmten Zahlen μ und ν gleich Null, folglich verschwindet auch γ und wir erhalten

$$p(z) - p(z_0) = C \cdot \frac{\sigma(z + z_0)\sigma(z - z_0)}{\sigma^2(z)}.$$

Der Wert der Konstanten C ergibt sich mit Hilfe der Bemerkung, daß

$$\lim_{z=0} z^2 p(z) = 1 \text{ und } \lim \frac{\sigma(z)}{z} = 1 \text{ ist.}$$

Es ist demnach

$$\frac{1}{C} = -\sigma^2(z_0) \text{ und folglich}$$

$$p(z) - p(z_0) = -\frac{\sigma(z + z_0)\sigma(z - z_0)}{\sigma^2(z)\sigma^2(z_0)}.$$

Wir haben im vorausgehenden stillschweigend vorausgesetzt, daß die Punkte z_0 und $-z_0$ nicht homolog sind. Tritt dieser Fall ein, so muß $2z_0 = 2\mu\omega_1 + 2\nu\omega_2$ sein, wo μ und ν ganze Zahlen bedeuten. Der Punkt z_0 muß also mit einem der Punkte $0\ \omega_1\ \omega_2\ \omega_3$ homolog sein. Der erste Punkt ist auszuschließen, weil $p(z_0)$ einen endlichen Wert haben muß. Ist dagegen $z_0 = \omega_\lambda (\lambda = 1, 2, 3)$, so verschwindet die Funktion $p(z) - p(z_0)$ für $z = z_0$ zur zweiten Ordnung (§ 41) und die vorstehende Gleichung bleibt daher richtig. Wir können ihr in diesem Fall noch eine andere Form geben. Aus (3) ergibt sich, wenn wir z durch $z - \omega_1$ ersetzen

$$\sigma(z + \omega_\lambda) = - e^{2\eta_\lambda z} \sigma(z - \omega_\lambda).$$

Daraus folgt

$$p(z) - e_\lambda = \left[e^{\eta_\lambda z} \cdot \frac{\sigma(z - \omega_\lambda)}{\sigma(z)\sigma(\omega_\lambda)} \right]^2 = \left[e^{-\eta_\lambda z} \frac{\sigma(z + \omega_\lambda)}{\sigma(z)\sigma(\omega_\lambda)} \right]^2.$$

Diese Gleichung zeigt, daß sich die drei Wurzelgrößen $\sqrt{p(z) - e_\lambda}$ als einwertige Funktionen der Variabeln z darstellen lassen. Diese Funktionen spielen in der Theorie der elliptischen Funktionen eine wichtige Rolle; an diesem Ort können wir darauf nicht weiter eingehen.

§ 46. Die Funktion $H(z)$. Die σ-Funktion ist eine ganze transzendente Funktion, sie läßt sich daher durch eine im Endlichen überall konvergierende Potenzreihe darstellen. Diese Reihe ist aber wegen des komplizierten Baues ihrer Koeffizienten zur nummerischen Berechnung wenig geeignet. Zu praktisch sehr brauchbaren Reihen gelangt man, wenn man an Stelle der Funktion $\sigma(z)$ eine Funktion einführt, die wenigstens einfach periodisch ist.

Wir setzen unter C und γ Konstante verstehend

$$H(z) = Ce^{\gamma z^2} \sigma(z).$$

Aus der Gleichung (3) des vorigen Paragraphen folgt

$$\frac{H(z + 2\omega_\nu)}{H(z)} = - e^{(4\gamma\omega_\nu + 2\eta_\nu)(z + \omega_\nu)} \qquad \nu = 1,2,3$$

Setzen wir $\gamma = -\frac{\eta_1}{2\omega_1}$ so verschwindet für $\nu = 1$ der Exponent der Exponentialfunktion auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung, für $\nu = 2$ erhält er den Wert

$$-2 \frac{\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1}{\omega_1} (z + \omega_2) = -\frac{\pi i}{\omega_1}(z + \omega_2)$$

(s. § 44 Nr. 4).

Die Funktion

(1) $$H(z) = Ce^{-\frac{\eta_1}{2\omega_1} z^2} \sigma(z)$$

genügt also den Gleichungen

(2) $$H(z + 2\omega_1) = - H(z) \quad H(z + 2\omega_2) = - e^{-\frac{\pi i}{\omega_1}(z + \omega_2)} H(z).$$

Die Funktion $H(z)$ besitzt demnach die Periode $4\omega_1$. Daraus folgt: die Funktion $H(z)$ kann als einwertige Funktion der Größe $u = e^{\frac{\pi i z}{2\omega_1}}$ betrachtet werden und sie läßt sich — da sie eine ganze transzendente Funktion der Variabeln z ist — durch eine nach Potenzen von u fortschreitende Laurentsche Reihe darstellen, die vom Nullpunkt und dem unendlich fernen Punkt abgesehen, in der ganzen u-Ebene konvergiert. Wir setzen

$$H(z) = F(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu u^\nu. \tag{3}$$

Ersetzen wir die Größe z durch $-z$, so tritt an Stelle der Größe u ihr reziproker Wert. Da die Funktion $H(z)$ ebenso wie die Funktion $\sigma(z)$ ungerade ist, ist demnach

$$F\left(\frac{1}{u}\right) = -F(u) \quad \text{also}$$

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} c_\nu u^\nu = -\sum_{-\infty}^{\infty} c_\nu u^{-\nu}, \quad \text{folglich ist}$$

$$c_{-\nu} = -c_\nu \quad \text{und insbesondere } c_0 = 0. \tag{4}$$

Ersetzen wir die Größe z durch die Größe $z + 2\omega_2$, so tritt an Stelle der Größe $u = e^{\frac{\pi i z}{2\omega_1}}$ die Größe qu, wo zur Abkürzung

$$e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}} = q \quad \text{gesetzt ist.} \tag{5}$$

Aus der zweiten Gleichung (2) folgt

$$F(qu) = -\frac{1}{qu^2} F(u), \quad \text{also ist}$$

$$F(u) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu u^\nu = -qu^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} c_\nu q^\nu u^\nu = -\sum_{-\infty}^{+\infty} c_{\nu-2} q^{\nu-1} u^\nu.$$

Folglich ist $\qquad c_\nu = -c_{\nu-2} q^{\nu-1}.$

Wegen (4) verschwinden daher alle Koeffizienten mit geradem Index und für die Koeffizienten mit positivem ungeraden Index gilt die Gleichung

$$c_{2\nu+1} = (-1)^\nu q^{\nu(\nu+1)} c_1. \tag{6}$$

Mit Rücksicht auf (4) und (6) ergibt sich aus (3)

$$H(z) = F(u) = c_1 \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu q^{\nu(\nu+1)} \left(u^{2\nu+1} - \left(\frac{1}{u}\right)^{2\nu+1}\right).$$

Nun ist $u^{2\nu+1} - \left(\frac{1}{u}\right)^{2\nu+1} = 2i \sin\frac{(2\nu+1)\pi}{2\omega_1} z$.

Wir erteilen der zur Verfügung stehenden Konstanten c_1 den Wert $iq^{\frac{1}{4}} = ie^{\frac{\omega_2 \pi i}{4\omega_1}}$ und erhalten

$$H(z) = 2\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2} \sin\frac{(2\nu+1)\pi}{2\omega_1} z. \tag{7}$$

Die Funktion $H(z)$ wird nach dem Begründer der doppelt periodischen Funktionen die Jacobische H-Funktion genannt.

Um die in der Gleichung (1) auftretende Konstante C zu bestimmen, differenzieren wir nach z und setzen dann $z = 0$. Wegen $\sigma'(0) = 1$ erhalten wir $C = H'(0)$. Andererseits folgt aus (7)

$$H'(0) = \frac{\pi}{\omega_1}\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1}(2\nu+1)\, q^{\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)^2}.$$

Der reelle Teil des Quotienten $\frac{\omega_2 i}{\omega_1}$ ist auf jeden Fall negativ, also ist sicher $|q| < 1$ (§ 39); wir können aber die primitiven Perioden $2\omega_1$ $2\omega_2$ der Art wählen, daß der reelle Teil des Quotienten $\frac{\omega_2 i}{\omega_1}$ nicht größer als $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist. Es ist dann $|q| \leqq e^{-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,\pi} < \frac{1}{15}$ und die Reihe (7) konvergiert außerordentlich schnell.

Siebenter Abschnitt.

Mehrwertige Funktionen.

§ 47. Das Prinzip der analytischen Fortsetzung.

Im Vorausgehenden haben wir uns fast ausschließlich mit den einwertigen Funktionen einer komplexen Variabeln beschäftigt: mit den Funktionen, die in jedem Punkt, für den sie überhaupt definiert sind, nur einen vollkommen bestimmten Wert annehmen. In den Integralen der einwertigen Funktionen sind uns aber schon Funktionen von einer wesentlich anderen Art entgegengetreten: als Funktion der oberen Grenze betrachtet zeigt das Integral zwar in jedem Punkt, für den es überhaupt definiert ist, das reguläre Verhalten einer analytischen

Funktion, aber es kann, allgemein zu reden, in einem Punkt je nach der Wahl des Integrationsweges unendlich viele verschiedene Werte annehmen. Als einfachstes Beispiel kann das Integral $\int_1^z \frac{dz}{z} = \log z$ dienen. Die Funktion $\log z$ verhält sich in allen Punkten der z-Ebene mit Ausnahme des Nullpunkts und des unendlich fernen Punktes regulär, sie besitzt aber in einem jeden Punkt unendlich viele verschiedene Werte, die sich um Multipla von $2\pi i$ unterscheiden.

Um die Grundlagen für eine Theorie der mehrwertigen Funktionen zu gewinnen, gehen wir von der folgenden Überlegung aus:

Eine Funktion der komplexen Variabeln z, die sich im Punkt a regulär verhält, läßt sich in der Umgebung dieses Punktes durch eine nach aufsteigenden Potenzen von $z - a$ fortschreitende Potenzreihe $\mathfrak{P}(z \mid a)$ — die Taylorsche Reihe — darstellen. Umgekehrt definiert die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z \mid a)$, soweit sie konvergiert, eine einwertige Funktion $w = f(z)$, die sich in jedem Punkt innerhalb des Konvergenzkreises regulär verhält. In der Umgebung eines beliebigen Punktes a_1 im Innern dieses Konvergenzkreises wird die Funktion durch eine nach Potenzen von $z - a_1$ fortschreitende Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(z \mid a_1)$ dargestellt. Die Koeffizienten dieser neuen Reihenentwicklung ergeben sich ohne weiteres, wenn wir eine jede in der Reihenentwicklung $\mathfrak{P}(z \mid a)$ auftretende Potenz $(z - a)^n$ nach Potenzen von $z - a_1$ entwickeln und dann nach Potenzen von $z - a_1$ ordnen. Aus dieser Herleitung der Reihe $\mathfrak{P}_1(z \mid a_1)$ ergibt sich unmittelbar, daß sie in jedem Punkt, der innerhalb des Konvergenzkreises der Reihe $\mathfrak{P}(z \mid a)$ liegt, denselben Funktionswert darstellt wie die letztere Reihe. Die Reihe $\mathfrak{P}_1(z \mid a_1)$ muß notwendigerweise in jedem Punkt konvergieren, der innerhalb des Konvergenzkreises der Reihe $\mathfrak{P}(z \mid a)$ liegt, sie kann aber möglicherweise auch noch außerhalb dieses Kreises konvergent bleiben. Wenn dieser Fall eintritt, so wird durch die Reihenentwicklung $\mathfrak{P}_1(z \mid a_1)$ der Bereich für den die Funktion w definiert ist, über den Konvergenzkreis der Reihe $\mathfrak{P}(z \mid a)$ hinaus erweitert.

Innerhalb dieses erweiterten Definitionsbereiches der Funktion w wählen wir einen weiteren Punkt a_2 und stellen die Potenzreihe $\mathfrak{P}_2(z|a_2)$ her, die die Funktion in der Umgebung des Punktes a_2 darstellt. Sofern der Konvergenzkreis dieser Reihe über das Gebiet, für das die Funktion bisher definiert war, hinausreicht, erhalten wir eine neue Erweiterung des Definitionsbereiches usw. Man bezeichnet dieses Verfahren den Definitionsbereich der Funktion w schrittweise zu erweitern, als Prinzip der analytischen Fortsetzung. Die einzelnen Potenzreihen $\mathfrak{P}(z|a)$ $\mathfrak{P}_1(z|a_1)$ $\mathfrak{P}_2(z|a_2)\ldots$ bezeichnet Weierstraß als Funktionselemente.

Ein beliebiger Punkt b der z-Ebene, zu dem man überhaupt mittels des Fortsetzungsprinzips gelangen kann, kann offenbar auf verschiedene Arten erreicht werden und dementsprechend besteht die Möglichkeit, daß die Funktion w im Punkt b verschiedene Werte annimmt. Um dies genauer zu untersuchen, verbinden wir die Punkte a und b durch eine sich nicht überkreuzende Kurve L und definieren die Funktion w zunächst für die Punkte der Kurve L. Eine reguläre Funktion ist in der Umgebung eines gegebenen Punktes vollkommen bestimmt, sobald sie für ein beliebig kleines durch diesen Punkt gehendes Linienelement definiert ist (§ 26 Schluß). Folglich ist die Potenzeihe, die die Funktion w in der Umgebung eines beliebigen Punktes der Kurve L darstellt, vollkommen bestimmt, sobald die Funktion für jeden Punkt dieser Kurve definiert ist.

Wir wählen nun auf dem Stück der Kurve L, das in den Konvergenzkreis der Reihe $\mathfrak{P}(z|a)$ fällt, einen Punkt a_1 aus und definieren die Funktion w für die Punkte des Bogens aa_1 durch die Reihe $\mathfrak{P}(z|a)$. Sodann wählen wir auf dem Stück des noch übrig bleibenden Kurventeils $a_1\,b$, das in den Konvergenzbereich der Reihe $\mathfrak{P}_1(z|a_1)$ fällt, einen Punkt a_2 aus und definieren die Funktion w für die Punkte des Bogens $a_1 a_2$ durch die Reihe $\mathfrak{P}_1(z|a_1)$. In dieser Weise fortfahrend müssen wir schließlich entweder zu einem Punkt der Kurve L gelangen, über den hinaus sich unser Verfahren nicht fortsetzen läßt — man bezeichnet einen derartigen Punkt als Begrenzungspunkt des Definitionsbereiches der Funktion — oder aber wir gelangen schließlich zu einer Potenzreihe $\mathfrak{P}_n(z|a_n)$, deren Konvergenzkreis den Bogen $a_n b$ einschließt, die somit die Funktion w für das letzte Stück der Kurve L definiert.

Nehmen wir an, auf der Kurve L liege kein Begrenzungspunkt, so wird durch das auseinandergesetzte Verfahren die Funktion w für alle Punkte der Kurve L eindeutig definiert. Man bezeichnet dieses Verfahren als analytische Fortsetzung **längs der Kurve** L.

Es bleibt nachzuweisen, daß unsere Definition der Funktionswerte von der Auswahl der Teilpunkte $a_1 a_2 \ldots a_n$ unabhängig ist. Zu dem Zweck bemerken wir zunächst, daß wir zwischen zwei Teilpunkte $a_\nu a_{\nu+1}$ (oder auch zwischen a_n und b) einen neuen Teilpunkt c einschalten dürfen, ohne daß an der Definition der Funktionswerte irgend etwas geändert wird. Denn wenn wir zwischen die Punkte a_ν und $a_{\nu+1}$ den Punkt c einschalten, so heißt das: anstatt die Funktion w für den ganzen Bogen $a_\nu a_{\nu+1}$ durch die Potenzreihe $\mathfrak{P}_\nu(z|a_\nu)$ zu definieren, definieren wir sie nur für den Bogen $a_\nu c$ durch diese Reihe, für den Bogen $c a_{\nu+1}$ dagegen durch die aus ihr abgeleitete Potenzreihe $\mathfrak{P}(z|c)$. Da nun der Bogen $a_{\nu+1} c$ dem gemeinsamen Konvergenzgebiet der beiden Potenzreihen $\mathfrak{P}_\nu(z|a_\nu)$ und $\mathfrak{P}(z|c)$ angehört, liefern beide Reihen für diesen Bogen dieselben Funktionswerte. Sodann ist zu bemerken: wenn der Bogen $a_{\nu+1}\, a_{\nu+2}$ ganz in den Konvergenzkreis der Reihe $\mathfrak{P}_\nu(z|a_\nu)$ fällt, also dem gemeinsamen Konvergenzbereich dieser Reihe und der Reihe $\mathfrak{P}_{\nu+1}(z|a_{\nu+1})$ angehört, so können wir den Punkt $a_{\nu+1}$ aus der Reihe der Teilpunkte weglassen, weil die zum Punkt a_ν gehörige Reihe $\mathfrak{P}_\nu(z|a_\nu)$ für den Bogen $a_{\nu+1}\, a_{\nu+2}$ dieselben Funktionswerte liefert wie die zum Punkt $a_{\nu+1}$ gehörige Potenzreihe $\mathfrak{P}_{\nu+1}(z|a_{\nu+1})$.

Es ist nun klar, daß wir von dem System der Teilpunkte $a_1 a_2 \ldots a_n$ zu einem beliebigen anderen zulässigen System von Teilpunkten $a'_1 a'_2 \ldots a'_m$ übergehen können, indem wir zunächst die Punkte des zweiten Systems zwischen die des ersten einschieben und dann diese als überzählig weglassen.

Die vorstehenden Betrachtungen erleiden nur eine unwesentliche Modifikation, wenn der Punkt b in den unendlich fernen Punkt rückt oder wenn die Kurve L durch den unendlich fernen Punkt geht. Um diesen Fall auf den schon erledigten zurückzuführen, wählen wir einen beliebigen nicht auf der Kurve L liegenden Punkt z_0 aus und bilden die z-Ebene mittels der Transformation $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ auf die ζ-Ebene ab. Der Kurve L in der z-Ebene entspricht eine ganz im Endlichen liegende Kurve Λ in der ζ-Ebene. Können wir w als Funktion von ζ längs der Kurve Λ fortsetzen, so ergibt sich sofort auch die Fortsetzung von w als Funktion von z längs der Kurve L.

Aus dem Vorausgehenden ergibt sich, daß der Wert der Funktion im Punkt b eindeutig bestimmt ist, wenn der Weg angegeben wird, auf dem die analytische Fortsetzung der Funktion nach diesem Punkt erfolgen soll. Es ist einleuchtend, daß das Verfahren der analytischen Fortsetzung eindeutig umkehrbar ist: wenn die analytische Fortsetzung des Funktionselementes $\mathfrak{P}(z | a)$ längs der Kurve L zum Funktionselement $\mathfrak{P}(z | b)$ führt, so werden wir umgekehrt das Funktionselement $\mathfrak{P}(z | b)$ längs L fortsetzend wieder zum Funktionselement $\mathfrak{P}(z | a)$ zurückgelangen.

Bezeichnen wir wieder mit a_ν, $a_{\nu+1}$ zwei aufeinanderfolgende Teilpunkte auf der Kurve L. Die Funktionswerte in den Punkten des Bogens $a_\nu a_{\nu+1}$ sind durch die Potenzreihe $\mathfrak{P}_\nu(z | a_\nu)$ definiert. Der dem Endpunkt $a_{\nu+1}$ zugeordnete Funktionswert bleibt demnach ungeändert, wenn wir den Bogen $a_\nu a_{\nu+1}$ deformieren, vorausgesetzt daß auch der deformierte Bogen innerhalb des Konvergenzkreises der Reihe $\mathfrak{P}_\nu(z | a_\nu)$ liegt. Da der Funktionswert im Punkt $a_{\nu+1}$ ungeändert bleibt, so bleiben auch die den Punkten des Bogens $a_{\nu+1} b$ zugeordneten Funktionswerte und insbesondere der Funktionswert im Punkt b ungeändert.

Die Teilpunkte auf der Kurve können beliebig gewählt werden, mit der einzigen Einschränkung, daß ein jeder Teilpunkt in dem Konvergenzbereich der Reihe liegen muß, die die Funktion in der Umgebung des vorangehenden Teilpunkts darstellt. Wir können daher durch wiederholte Deformationen der eben beschriebenen Art die Gestalt der die Punkte ab verbindenden Kurve L beliebig ändern, mit der einzigen Einschränkung: bei der Deformation der Kurve L darf kein Grenzpunkt, für den keine Taylorsche Reihenentwicklung gilt, überschritten werden.

Damit ist der Satz bewiesen:

Vorausgesetzt daß der die Punkte ab verbindende Weg L durch stetige Deformation in den Weg L' übergeführt werden kann, ohne daß ein Grenzpunkt überschritten wird, so führt die analytische Fortsetzung der Funktion w längs des Weges L' zum selben Funktionswert im Punkt b wie die Fortsetzung längs des Weges L.

Wir haben vorausgesetzt, daß die Kurve L sich nicht überkreuzt; das schließt nicht aus, daß Anfangspunkt und Endpunkt der Kurve zusammenfallen, daß also die Kurve geschlossen ist. Wenden wir den vorstehenden Satz auf diesen Fall an, so ergibt sich:

Die analytische Fortsetzung einer Funktion längs eines geschlossenen, sich nicht überkreuzenden Weges führt zum Anfangswert zurück, wenn der Weg keinen Grenzpunkt der Funktion einschließt.

Denn unter dieser Voraussetzung kann der Weg auf einen Punkt zusammengezogen werden.

Der eben bewiesene Satz über die Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung einer Funktion bildet die größte Analogie mit dem Fundamentalsatz in der Theorie der komplexen Integration. Es greift daher auch hier wieder die Unterscheidung zwischen einfach- und mehrfachzusammenhängenden Flächen Platz. Unter Benutzung dieses Begriffes können wir unseren Satz auch in folgender Form aussprechen:

Vorausgesetzt daß die analytische Fortsetzung der Funktion w zu keinem Grenzpunkt führt, solange wir innerhalb der einfach zusammenhängenden Fläche E bleiben, so ist die Funktion w innerhalb der Fläche E einwertig.

Denn zwei Wege L und L', die dieselben Punkte ab der Fläche E verbinden und nicht aus der Fläche heraustreten, können stetig ineinander übergeführt werden.

Wir ziehen hieraus noch die Folgerung: wenn eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(z-a)$ nicht für alle endlichen Werte von z konvergiert, sondern einen endlichen Konvergenzradius r besitzt, so muß die Funktion w, die durch die Potenzreihe dargestellt wird, mindestens einen Grenzpunkt auf der Peripherie des Konvergenzkreises haben. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so müßte sich die Funktion w in der Umgebung eines jeden Punktes der Peripherie durch eine Taylorsche Reihe darstellen lassen und die Konvergenzradien dieser Reihenentwicklungen müßten eine von Null verschiedene untere Grenze ϱ besitzen (vergl. § 5). Die Funktion verhielte sich also innerhalb eines Kreises mit dem Radius $r + \varrho$ um den Punkt a regulär und die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z-a)$ müßte innerhalb dieses Kreises konvergieren. Ihr Konvergenzradius wäre also nicht r sondern $r + \varrho$.

§ 48. Die Sternfläche. Wir halten an der Annahme fest, die Funktion w sei zunächst nur für die Umgebung des Punktes a durch die Potenzreihe $\mathfrak{P}(z|a)$ definiert und wir stellen uns die Aufgabe eine möglichst ausgedehnte einfach zusammenhängende Fläche nachzuweisen, innerhalb welcher kein Begrenzungspunkt des Definitionsbereichs der Funktion w liegt. Dabei wollen wir von vornherein den Fall ausschließen, daß die Reihe $\mathfrak{P}(z-a)$ für alle endlichen Werte von z konvergiert, weil dieser Fall keiner weiteren Erläuterung bedarf.

Wir denken uns das Funktionselement $\mathfrak{P}(z-a)$ längs eines jeden vom Punkt a ausgehenden Vektors l soweit als möglich fortgesetzt: wenn es möglich ist, setzen wir die Funktion bis in den unendlich fernen Punkt fort; wenn dies nicht möglich ist, bis zu einem auf dem Radius l liegenden Grenzpunkt e. Von einem jeden Vektor l, auf dem ein Grenzpunkt e liegt, denken wir uns nun das jenseits des Grenzpunktes liegende Stück abgeschnitten. Die übrig bleibenden Teile der Vektoren erfüllen eine zusammenhängende Fläche A; Mittag-Leffler bezeichnet sie als Stern; die Grenzpunkte e heißen Ecken des Sterns.

Welche Gestalt auch immer die Begrenzung des Sterns haben mag, auf jeden Fall ist die Sternfläche einfach zusammenhängend und im Innern der Fläche liegt kein Grenzpunkt der Funktion w. Die Funktion ist daher in der Sternfläche einwertig und verhält sich überall regulär.

Betrachten wir nun die verschiedenen Möglichkeiten, die sich bezüglich der Begrenzung des Sterns darbieten.

Am einfachsten gestaltet sich die Sache, wenn nur eine endliche Anzahl von Eckpunkten $e_1 e_2 \dots e_n$ vorhanden ist. In diesem Fall besteht die Begrenzung des Sterns aus den Teilen der Vektoren $ae_1 ae_2 \dots ae_n$, die sich von den Punkten $e_1 e_2 \dots e_n$ aus ins Unendliche erstrecken (s. Fig. 25). Ein derartiger Stern ergibt sich beispielsweise, wenn w eine rationale Funktion oder der Logarithmus einer rationalen Funktion ist.

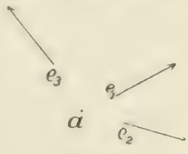


Fig. 25.

Nehmen wir an, die Eckpunkte $e_1 e_2 \dots$ bilden zwar eine diskrete Punktmenge, diese Punktmenge besitze aber eine im Endlichen liegende Häufungsstelle ε, so wird die Begrenzung des Sterns immer noch aus Stücken von geraden Linien bestehen, von denen keine zwei einen Punkt gemeinsam haben; um den vom Punkt ε ausgehenden Vektor wird sich aber eine unendliche Anzahl derselben zusammendrängen.

Ein Beispiel bieten die Sterne, die zu der Funktion $\sin \frac{1}{z}$ und zum Logarithmus dieser Funktion gehören.

Es ist auch der Fall vorzusehen, daß die Eckpunkte ein Kurvenstück pq dicht erfüllen, der Art daß jeder noch so kleine Bogen der Kurve unendlich viele Eckpunkte enthält. In diesem Fall gehören das Kurvenstück pq und die beiden von den Punkten pq ausgehenden Vektoren, die rückwärts verlängert durch den Punkt a gehen würden, zur Begrenzung des Sterns (s. Fig. 26).

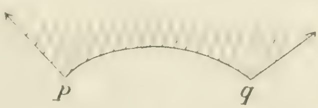


Fig. 26.

Endlich kann der Fall eintreten, daß die Eckpunkte eine geschlossene Kurve erfüllen. In diesem Fall ist es unmöglich die Funktion über diese Kurve hinaus fortzusetzen: die Kurve bildet eine „natürliche Grenze“ für die Funktion.

Als Beispiel kann die Funktion

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1 + z^{2n}}$$

dienen. Die rechts stehende Reihe konvergiert gleichmäßig für alle Werte von z, deren absoluter Betrag < 1 ist. Die Reihe definiert daher eine Funktion w, die sich im Innern des Einheitskreises überall regulär verhält. Für jeden Wert von z, der Wurzel der Gleichung $z^{2^n} + 1 = 0$ ist, wo n eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet, wird ein Glied der Reihe unendlich. Jeder einen derartigen Wert repräsentierende Punkt ist daher ein Grenzpunkt der Funktion w und ein Eckpunkt des zugehörigen Sterns. Da diese Punkte die Peripherie des Einheitskreises dicht erfüllen, so bildet derselbe eine natürliche Grenze für die Funktion.*)

Im folgenden schließen wir den Fall aus, daß die Eckpunkte des Sterns A ein Kurvenstück dicht erfüllen, wir setzen also voraus, daß die Eckpunkte des Sterns eine diskrete Punktmenge bilden.

Die Figur des Sterns, der dieser Annahme entspricht, wird der Anschauung noch leichter zugänglich, wenn wir ihn stereographisch auf die Kugel projizieren. Den den Stern begrenzenden geraden Strecken entsprechen auf der Kugel Kreisbogen, die von dem Pol ausgehen, der dem unendlich fernen Punkt der Ebene entspricht; verlängert man diese Kreisbogen über ihre Endpunkte hinaus, so gehen sie alle durch den Punkt der Kugel, der dem Punkt a der Ebene entspricht. Da ist nun ohne weiteres ersichtlich, daß wir an Stelle des Pols, in dem die Begrenzungslinien des Sterns zusammenlaufen, einen beliebigen anderen Punkt der Kugel treten lassen können. Wir können übrigens auch unmittelbar zu dieser abgeänderten Figur des Sterns gelangen. Zu dem Zweck nehmen wir in der z-Ebene außer dem Punkt a noch einen zweiten festen Punkt b an und setzen nun die Funktion w nicht längs der von a ausgehenden geradlinigen Vektoren fort, sondern längs der Kreisbogen, die die Punkte a und b verbinden.

*) Beiläufig bemerkt konvergiert die vorstehende Reihe auch für alle Werte von z gleichmäßig, deren absoluter Betrag > 1 ist. Die Reihe definiert daher auch für die Außenfläche des Einheitskreises eine überall reguläre Funktion. Aber von den beiden Funktionen, die die Reihe innerhalb und außerhalb des Kreises darstellt, kann keine als analytische Fortsetzung der andern betrachtet werden.

Es ist einleuchtend, daß wir an Stelle des Systems von Kreisbogen durch die Punkte a und b auch ein allgemeineres Kurvensystem treten lassen können, das die beiden Eigenschaften besitzt:

1) alle Kurven des Systems gehen durch die beiden Punkte a und b.
2) durch jeden anderen Punkt der Ebene geht eine und nur eine Kurve des Systems.

In dem Fall, daß die Grenzpunkte von vornherein bekannt sind, können wir das Kurvensystem so wählen, daß alle Grenzpunkte auf einer und derselben Kurve des Systems liegen. In diesem Fall besteht die Begrenzung der Sternfläche aus einem Kurvenbogen. Dieser Bogen ist endlich, wenn der unendlich ferne Punkt nicht zu den Grenzpunkten gehört, andernfalls erstreckt er sich ins Unendliche.

In den folgenden Paragraphen behalten wir der Einfachheit wegen die Annahme bei, daß die Begrenzung der Sternfläche aus Kreisbogen besteht, die in einem Punkte zusammenlaufen.

§ 49. Unstetigkeits- und Verzweigungspunkte. Riemannsche Fläche. Wir halten an der Voraussetzung fest, daß die Eckpunkte des Sterns A eine diskrete Punktmenge bilden und wir wollen überdies annehmen, daß keiner der Kreisbogen, die die Begrenzung der Sternfläche bilden, außer dem Eckpunkt, in dem er endigt, einen zweiten Grenzpunkt enthält; mit anderen Worten: wir nehmen an, daß die Funktion w längs eines beliebigen Linienelements, das die Begrenzung der Fläche A überkreuzt, analytisch fortgesetzt werden kann, sofern nur das Linienelement nicht gerade durch einen Eckpunkt der Sternfläche geht.

Wäre diese Voraussetzung nicht erfüllt, so würden, wenn wir den willkürlich zu wählenden Punkt b, in dem die Begrenzungsstücke zusammenlaufen, unendlich wenig verschieben, zu den vorhandenen Begrenzungsstücken neue hinzukommen: es würden nämlich an Stelle jedes Kreisbogens, auf dem mehrere Grenzpunkte liegen, eine der Anzahl dieser Grenzpunkte gleiche Anzahl von Kreisbogen treten. Daß wir diese

Möglichkeit ausschließen, bedeutet offenbar keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit der Untersuchung.

Ebenso wie wir das früher bei den Sperrlinien getan haben, unterscheiden wir auch die beiden Ränder eines jeden Kreisbogens be_ν, der zur Begrenzung der Sternfläche gehört, als $+$ Rand und $-$ Rand, und zwar wählen wir die Bezeichnung wieder so, daß ein positiver Umlauf um den Punkt e_ν von dem $-$ Rand zum $+$ Rand führt. Die Werte der Funktion w, die in zwei einander gegenüberliegenden Punkten der Berandung stattfinden, bezeichnen wir wieder mit $\overset{+}{w}$ beziehungsweise $\overline{w}$.

Um die Beziehung zwischen den Funktionswerten $\overset{+}{w}$ und $\overline{w}$, die längs des Kreisbogens be_ν stattfinden, genauer zu untersuchen, konstruieren wir ein krummliniges Dreieck bpq (Fig. 27).

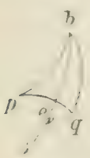


Fig. 27

Die Dreieckseite pq schneide den Bogen be_ν in einem Punkt e'_ν, der beliebig nahe am Punkt e_ν liegt. Die Seiten bp und bq verlaufen zu beiden Seiten des Bogens be'_ν in beliebig kleiner Entfernung von demselben. Die beiden Seiten bp und bq haben vom Punkt b abgesehen mit der Begrenzung der Sternfläche A keinen Punkt gemein. Die Funktion $\overline{w}$ ist zunächst nur für das Dreieck bpe'_ν definiert. Wir können sie aber auf Grund der eingangs eingeführten Voraussetzung über die Seite be'_ν hinweg fortsetzen und sie also für das ganze Dreieck bpq definieren. Analog können wir die Funktion $\overset{+}{w}$, die ursprünglich nur für das Dreieck bqe'_ν definiert war, für das ganze Dreieck bpq definieren. Die beiden Funktionen $\overline{w}$ und $\overset{+}{w}$ haben in dem Dreieck bpq überall den Charakter einer regulären analytischen Funktion und dasselbe gilt daher auch für ihre Differenz $D = \overset{+}{w} - \overline{w}$.

Die Funktion D ist für das ganze Dreieck bpq vollständig definiert, wenn ihre Werte längs eines beliebig kleinen Linienelements gegeben sind. Insbesondere besitzt die Funktion in dem ganzen Dreieck bpq den Wert Null, wenn sie längs eines beliebig kleinen Stücks des Bogens be'_ν verschwindet. Wenn dieser Fall eintritt, so hat die Funktion w in einem Ringgebiet, das durch zwei hinreichend kleine Kreise um den Punkt e_ν begrenzt ist, den Charakter einer einwertigen Funktion.

Daher wird die Funktion in diesem Ringgebiet durch eine Laurentsche Reihe

$$w = c_0 + c_1(z - e_\nu) + c_2(z - e_\nu)^2 \cdots + \frac{c_{-1}}{z - e_\nu} + \frac{c_{-2}}{(z - e_\nu)^2} + \cdots$$

dargestellt (§ 27). Die Koeffizienten c_{-1} c_{-2} . . . können nicht alle verschwinden, denn sonst verhielte sich die Funktion w in der Umgebung des Punktes e_ν regulär, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Der Punkt e_ν ist somit ein Unstetigkeitspunkt der Funktion w, und zwar ein Pol oder ein wesentlich singulärer Punkt, je nachdem in der vorstehenden Reihenentwicklung eine endliche oder unendliche Anzahl von Potenzen mit negativem Exponenten auftreten.

In dem Fall, daß die Differenz $D = \overset{+}{w} - \overset{-}{w}$ längs des Bogens be'_ν nicht identisch verschwindet, bezeichnet man den Punkt e_ν als Verzweigungspunkt.

Aus der Gegenüberstellung von Unstetigkeitspunkten und Verzweigungspunkten darf nicht geschlossen werden, daß der Funktionswert endlich bleibt, wenn sich der variable Punkt einem Verzweigungspunkt nähert: dies kann eintreten, ist aber nicht notwendig der Fall.

Wie sich die Funktion in der Umgebung eines Verzweigungspunktes verhält, welche Änderung sie erfährt, wenn man den Verzweigungspunkt umkreist, darüber lassen sich keine allgemeinen Sätze aufstellen. Die einfachsten Arten von Verzweigungspunkten werden im folgenden genauer untersucht werden.

Besitzt die Funktion w nur Unstetigkeitspunkte aber keine Verzweigungspunkte, so ist sie in der ganzen z-Ebene einwertig: die Theorie dieser einwertigen Funktionen ist im fünften Abschnitt behandelt worden.

Nehmen wir an, die Funktion w besitze Verzweigungspunkte in endlicher oder unendlicher Anzahl. Neben diesen Verzweigungspunkten können auch noch Unstetigkeitspunkte in beliebiger Anzahl auftreten. Nehmen wir von der Begrenzung der Sternfläche A diejenigen Kreisbogen weg, die den Punkt b mit Unstetigkeitspunkten verbinden, und behalten wir nur die Kreisbogen bei, die zu Verzweigungspunkten führen;

wir erhalten so eine Sternfläche A', in der sich die Funktion w zwar nicht überall regulär verhält, in der sie aber wenigstens überall den Charakter einer einwertigen Funktion hat.

Die Gesamtheit der Funktionswerte, die den Punkten der Sternfläche A' eindeutig zugeordnet sind, bezeichnet man als Funktionszweig.

Zufolge der eingangs gemachten Voraussetzung ist es möglich, die Funktion w über die Begrenzung der Sternfläche A' hinweg analytisch fortzusetzen. Diese Fortsetzung führt zu einem neuen Funktionszweig und zwar werden wir — allgemein zu reden — verschiedene Funktionszweige erhalten, je nachdem wir das eine oder das andere Stück der Begrenzung des Sterns A' überschreiten.

Um die Zuordnung der Funktionswerte, die die verschiedenen Zweige der Funktion liefern, zu den Werten der unabhängigen Variabeln z anschaulich zu machen, denken wir uns beliebig viele Exemplare der z-Ebene übereinander gelegt. Den Punkten eines bestimmten Blattes werden nun die Werte eines bestimmten Funktionszweiges zugeordnet. In jedem Blatt wird der dem betreffenden Funktionszweig entsprechende Stern konstruiert. Die in verschiedenen Blättern liegenden Sterne können wesentlich verschiedene Gestalt besitzen, es ist keineswegs notwendig, daß ihre Begrenzungen sich decken.

Der Gedanke, die verschiedenen Funktionszweige verschiedenen Blättern der z-Ebene zuzuordnen, stammt von Riemann. Man nennt deswegen die aus den verschiedenen Blättern zusammengesetzte Fläche Riemannsche Fläche.

Wenn ein Funktionszweig durch analytische Fortsetzung über ein bestimmtes Stück der Begrenzung seiner Sternfläche hinweg in einen anderen übergeführt wird, so hängen die entsprechenden Blätter der Riemannschen Fläche längs dieses Begrenzungsstücks zusammen.

Die Untersuchung einer mehrwertigen Funktion erfordert in erster Linie die Feststellung des Zusammenhangs zwischen den verschiedenen Blättern ihrer Riemannschen Fläche, der „Verzweigung" der Riemannschen Fläche.

Für den einfachsten Fall der mehrwertigen Funktionen, die algebraischen Funktionen, werden wir im folgenden die Riemannsche Fläche genauer untersuchen.

Die Tatsache, daß alle Zweige einer Funktion durch analytische Fortsetzung aus einem derselben hervorgehen, wird geometrisch dadurch veranschaulicht, daß wir von jedem Blatt der Riemannschen Fläche in jedes andere übergehen können, daß also die Fläche zusammenhängend ist.

An die vorausgehenden Begriffsbestimmungen knüpft sich eine wichtige Bemerkung.

Wir bezeichnen mit $F(u v w \ldots)$ eine ganze rationale Funktion der angezeigten Argumente, mit

$$\mathfrak{P}_0(z \mid a) \quad \mathfrak{P}_1(z \mid a) \quad \mathfrak{P}_2(z \mid a) \ldots$$

Potenzreihen, die in der Umgebung des Punktes a konvergieren, endlich mit $\varphi(z)$ $\psi(z)$ $\chi(z) \ldots$ die analytischen Fortsetzungen dieser Potenzreihen. Der Weg, längs dessen die Fortsetzung erfolgt, kommt nicht in Betracht, wesentlich ist nur, daß die sämtlichen Funktionselemente längs desselben Weges L fortgesetzt werden.

Substituieren wir in die Funktion $F(u v w \ldots)$ an Stelle der Variabeln $u v w \ldots$ die Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_0(z \mid a) \quad \mathfrak{P}_1(z \mid a) \quad \mathfrak{P}_2(z \mid a) \ldots,$$

so erhalten wir eine Potenzreihe $Q(z \mid a)$, die ebenfalls in der Umgebung des Punktes a konvergiert. Die analytische Fortsetzung dieser Potenzreihe können wir entweder direkt nach dem gewöhnlichen Verfahren bilden oder wir können in die Funktion $F(u v w \ldots)$ an Stelle der Größen $u v w \ldots$ die analytischen Fortsetzungen $\varphi \psi \chi \ldots$ der Potenzreihen $\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots$ substituieren. Es ist einleuchtend, daß die beiden Verfahren zu demselben Resultat führen müssen.

Nehmen wir nun an, es bestehe die identische Gleichung

$$F(\mathfrak{P}_0 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots) = 0.$$

Unter dieser Voraussetzung verschwindet die Potenzreihe $Q(z \mid a)$ identisch und dasselbe gilt für jede analytische Fortsetzung dieser Reihe.

Damit ist bewiesen:

Genügen die Potenzreihen

$$u = \mathfrak{P}_0(z \mid a) \quad v = \mathfrak{P}_1(z \mid a) \quad w = \mathfrak{P}_2(z \mid a) \ldots$$

identisch der Gleichung $F(u v w \ldots) = 0$, so genügen auch ihre analytischen Fortsetzungen dieser Gleichung.

Nehmen wir insbesondere an, es sei

$$v = \frac{du}{dz}, \quad w = \frac{d^2 u}{dz^2} \cdots$$

also auch

$$\mathfrak{P}_1(z\,|\,a) = \frac{d\mathfrak{P}_0(z\,|\,a)}{dz}, \quad \mathfrak{P}_2(z\,|\,a) = \frac{d^2\mathfrak{P}_0(z\,|\,a)}{dz^2} \cdots.$$

Auf diesen Fall angewendet lautet die eben gemachte Bemerkung:

Genügt eine Potenzreihe $u = \mathfrak{P}_0(z\,|\,a)$ der Differentialgleichung

$$F\left(u, \frac{du}{dz}, \frac{d^2 u}{dz^2} \cdots\right) = 0,$$

so genügt auch die analytische Fortsetzung der Reihe der Differentialgleichung.

§ 50. Das Prinzip der Spiegelung. Der Wert des in § 47 auseinandergesetzten Fortsetzungsprinzips liegt darin, daß es zu einer klaren Definition der mehrwertigen Funktionen führt. Bei der praktischen Anwendung des Prinzips stößt man schon in sehr einfachen Fällen auf kaum zu überwindende Schwierigkeiten. Um die analytische Fortsetzung einer Funktion wirklich durchzuführen, muß man sich deshalb nach anderen Hilfsmitteln umsehen.

Nehmen wir an, die Funktion $w = u + iv = f(z)$ sei für eine Fläche E, die ein Stück der z-Ebene einfach bedeckt, eindeutig definiert.

Zur Begrenzung von E gehöre ein Stück $\alpha\beta$ der Abszissenachse; längs der Strecke $\alpha\beta$ nehme die Funktion w reelle Werte an.

Wir setzen voraus, auf der Strecke $\alpha\beta$ liege kein Begrenzungspunkt des Definitionsbereichs der Funktion w. Es reichen also die Konvergenzkreise der Reihen, die die Funktion w in dem an der Abszissenachse anliegenden Teil der Fläche E darstellen, über die Strecke $\alpha\beta$ hinaus. Wir können deshalb zur analytischen Fortsetzung der Funktion w eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(z\,|\,a)$ benutzen, deren Entwicklungszentrum a auf der x-Achse liegt. Weil nach Voraussetzung in der Umgebung des Punktes a reellen Werten der Variabeln z reelle Werte der Funktion w entsprechen, so müssen die Koeffizienten dieser Potenzreihe reell sein und daraus folgt dann weiter, daß konjugiert imaginären Werten von z konjugiert imaginäre Werte von w entsprechen. Geometrisch ausgedrückt heißt das: die analytische Fortsetzung der Funktion w über die Strecke $\alpha\beta$ hinweg erfolgt in der Weise, daß Punkten der z-Ebene, die zur x-Achse symmetrisch liegen, Punkte der w-Ebene zugeordnet werden, die zur u-Achse symmetrisch liegen. Unter der Voraussetzung also, daß einem Stück der x-Achse ein Stück der u-Achse entspricht, entspricht einer Spiegelung an der x-Achse eine Spiegelung an der u-Achse.

Man bezeichnet deshalb die in Rede stehende analytische Fortsetzung der Funktion w als Fortsetzung nach dem Spiegelungsprinzip. Dieses Prinzip ist zuerst von H. A. Schwarz zur Anwendung gebracht worden.

Die geometrische Auffassung des Spiegelungsprinzips führt sofort zu einer Verallgemeinerung desselben:

Vorausgesetzt daß einem geradlinigen Begrenzungsstück l der Fläche E, für die die Funktion w zunächst definiert ist, in der w-Ebene eine gerade Strecke l' entspricht, entsprechen Punkten der z-Ebene, die zur Geraden l symmetrisch liegen, Punkte der w-Ebene, die zu der Bildgeraden l' symmetrisch liegen.

Zu einer weiteren Ausdehnung des Spiegelungsprinzips führt die folgende Überlegung: Bilden wir die z-Ebene mittels der Transformation

$$z = \frac{aZ + b}{cZ + d}$$

in die Z-Ebene ab, so entspricht einem Kreis oder einer Geraden der einen Ebene in der anderen Ebene wieder ein Kreis oder eine Gerade und wir können uns so einrichten, daß einer gegebenen Geraden der einen Ebene ein gegebener Kreis in der anderen Ebene entspricht. Punkten der z-Ebene, die in Beziehung auf einen Kreis symmetrisch liegen, entsprechen in der Z-Ebene Punkte, die in Beziehung auf den entsprechenden Kreis symmetrisch liegen (vergl. § 14).

Nehmen wir nun an zur Begrenzung der Fläche E, für die die Funktion w ursprünglich definiert ist, gehöre ein Kreisbogen K; diesem Kreisbogen entspreche in der w-Ebene ein Kreisbogen K'.

Wir bilden nun die ebenen Systeme z und w in kreisverwandte ebene Systeme Z und W der Art ab, daß den Kreisbogen K und K' beziehungsweise die geraden Strecken l und l' entsprechen. Der funktionalen Beziehung zwischen den Variabeln z und w entspricht eine Beziehung zwischen den Variabeln Z und W. Setzen wir die Funktion W über die Strecke l hinweg fort, so werden Punkten der Z-Ebene, die zur Strecke l symmetrisch liegen, Punkte der W-Ebene, die zur Geraden l' symmetrisch liegen zugeordnet; dementsprechend sind Punkten der z-Ebene, die zum Kreisbogen K symmetrisch liegen, Punkte der w-Ebene zugeordnet, die zum Kreisbogen K' symmetrisch liegen.

Sofern einem geradlinigen Stück der Begrenzung der Fläche $E\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots$ in der w-Ebene eine gebrochene Linie $\alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3\alpha'_4\ldots$ entspricht, die die Punkte $\alpha'_2\alpha'_3\alpha'_4\ldots$ zu Eckpunkten hat, wird das Spiegelungsprinzip zu verschiedenen analytischen Fortsetzungen führen, je nachdem wir an der einen oder der anderen der Strecken $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4\ldots$ spiegeln. Wir wollen dies durch ein Beispiel erläutern; wir setzen

$$w = f(z) = \sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)}.$$

Die vier Konstanten α_ν seien reell und zwar sei

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4.$$

Für den Teil der z-Ebene, in dem die Ordinaten positiv sind — die positive Halbebene — können wir die Funktion w leicht eindeutig definieren.

Zu dem Zweck setzen wir

$$(1)\qquad z-\alpha_\nu = r_\nu e^{\vartheta_\nu i}\quad 0 \leqq \vartheta_\nu \leqq \pi\quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

und definieren nun w durch die Gleichung

$$(2)\qquad w = \sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4}\, e^{\frac{1}{2}(\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_3+\vartheta_4)i},$$

wo die Quadratwurzel rechts positiv zu nehmen ist.

Längs der Abschnitte $\alpha_2\alpha_3$ und $\alpha_4\infty\alpha_1$ der Abszissenachse nimmt die Funktion w reelle Werte an, längs der Abschnitte $\alpha_1\alpha_2$ und $\alpha_3\alpha_4$ nimmt sie rein imaginäre Werte an. Den beiden ersteren Abschnitten entsprechen also in der w-Ebene Abschnitte der Abszissenachse, den letzteren entsprechen Abschnitte der Ordinatenachse.

Wir dehnen nun die Definition der Funktion w mittels des Spiegelungsprinzips auf die negative z-Halbebene aus. Je nachdem wir an einer der Strecken $\alpha_2\alpha_3$ und $\alpha_4 \infty \alpha_1$ oder an einer der Strecken $\alpha_1\alpha_2$ und $\alpha_3\alpha_4$ spiegeln, werden Punkten der z-Ebene, die zur x-Achse symmetrisch liegen, in der w-Ebene Punkte, die zur u-Achse symmetrisch liegen, oder Punkte, die zur v-Achse symmetrisch liegen, zugeordnet. In Formeln ausgedrückt heißt dies: erfolgt die analytische Fortsetzung über eine der Strecken $\alpha_2\alpha_3$ und $\alpha_4 \infty \alpha_1$, so bestehen gleichzeitig die Gleichungen

$$f(x + iy) = u + iv \quad f(x - iy) = u - iv,$$

erfolgt die Fortsetzung über eine der Strecken $\alpha_1\alpha_2$ und $\alpha_3\alpha_4$, so bestehen gleichzeitig die Gleichungen

$$f(x + iy) = u + iv \quad f(x - iy) = -u + iv.$$

Wir gelangen also zu entgegengesetzt gleichen Funktionswerten, je nachdem wir die Spiegelung auf die eine oder die andere Art vornehmen.

Um die Sachlage geometrisch anschaulich zu machen, legen wir zwei Exemplare der z-Ebene aufeinander; wir bezeichnen diese beiden Blätter mit $A_1 A_2$, die Halbebenen, in die sie durch die x-Achse zerschnitten werden, mit $\overset{+}{A}_1 \overset{+}{A}_2 \bar{A}_1 \bar{A}_2$.

Wir heften nun längs der Strecken $\alpha_2\alpha_3$ und $\alpha_4 \infty \alpha_1$ die Halbebenen $\overset{+}{A}_1$ und $\bar{A}_1$ aneinander und ebenso die Halbebenen $\overset{+}{A}_2$ und $\bar{A}_2$. Längs der Strecken $\alpha_1\alpha_2$ und $\alpha_3\alpha_4$ heften wir $\overset{+}{A}_1$ an $\bar{A}_2$ und $\bar{A}_1$ an $\overset{+}{A}_2$. Auf diese Weise erhalten wir eine zweiblättrige Riemannsche Fläche.

Von der Halbebene $\overset{+}{A}_1$ ausgehend gelangen wir durch Spiegelung an einer der Strecken $\alpha_2\alpha_3$ und $\alpha_4 \infty \alpha_1$ nach $\bar{A}_1$; durch Spiegelung an einer der Strecken $\alpha_1\alpha_2$ und $\alpha_3\alpha_4$ nach $\bar{A}_2$. Nehmen wir die beiden Arten von Spiegelung nacheinander vor, so gelangen wir von $\overset{+}{A}_1$ — je nach der Reihenfolge, in der die Spiegelungen erfolgen; — über $\bar{A}_1$ oder $\bar{A}_2$ nach $\overset{+}{A}_2$.

Bringen wir nunmehr unser Spiegelungsprinzip zur Anwendung, so gelangen wir zu einer eindeutigen Zuordnung der Funktionswerte w zu den Punkten der zweiblättrigen Riemannschen Fläche.

§ 51. Abbildung eines Rechtecks auf eine Halbebene. Zu einer interessanten Anwendung des Spiegelungsprinzips führt die Aufgabe ein in der w-Ebene liegendes Rechteck auf die positive z-Halbebene abzubilden.

Wir bezeichnen die Eckpunkte des Rechtecks in der Reihenfolge, in der sie bei einem positiven Umlauf um das Rechteck erreicht werden, mit $a_1 a_2 a_3 a_4$, die Punkte der Abszissenachse, die in der z-Ebene den Eckpunkten des Rechtecks entsprechen, mit $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4$: die Bezeichnung sei so gewählt, daß

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4 \text{ ist.}$$

Wir betrachten zunächst die vier Punkte α_i als gegeben, machen aber bezüglich der Lage und der Gestalt des Rechtecks keine Voraussetzung. Es wird nun, wenn die Funktion $w = f(z)$ den Bedingungen der Aufgabe genügt, auch jede lineare Funktion von w ihnen genügen. Daraus folgt: durch die Bedingungen der Aufgabe ist die Derivierte $\frac{dw}{dz}$ nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt.

Durchläuft der Punkt z einen der Achsenabschnitte $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3 \ldots$, so durchläuft der Punkt w die entsprechende Seite des Rechtecks, der Arcus des Differentials dw ist daher konstant, nämlich gleich dem Winkel, den die betreffende Seite mit der u-Achse bildet. Daraus folgt:

Durchläuft der Punkt z die x-Achse im Sinn der wachsenden Abszissen, so hat der Arcus der Derivierten $\frac{dw}{dz}$ längs der Strecken $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_3 \ldots$ einen konstanten Wert; sobald aber der Punkt z eine der Stellen α_i überschreitet, nimmt der Arcus sprungweise um $\frac{\pi}{2}$ zu.

Analoge Unstetigkeiten bietet der Arcus der Funktion

$$s = \sqrt{(z - \alpha_1)(z - \alpha_2)(z - \alpha_3)(z - \alpha_4)} \text{ dar.}$$

Setzen wir, die im vorigen Paragraphen getroffenen Bestimmungen beibehaltend

$$(1) \qquad z - \alpha_\nu = r_\nu e^{\vartheta_\nu i} \quad 0 \leqq \vartheta_\nu \leqq \pi \quad \nu = 1, 2, 3, 4$$

$$s = \sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4}\, e^{-\frac{1}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4) i}$$

Wenn der Punkt z die x-Achse im Sinn der wachsenden x durchlaufend durch die Stelle α_ν hindurchgeht, sinkt der Winkel ϑ_ν von π auf 0 und es nimmt daher arc s um $\frac{\pi}{2}$ ab. Daher bleibt der Arcus des Produkts

$$\varphi(z) = s \cdot \frac{dw}{dz}$$

im Punkt α_ν stetig.

Die Umgebung eines jeden Punkts der positiven z-Halbebene wird konform auf die w-Ebene abgebildet, folglich wird die Derivierte $\frac{dw}{dz}$ im Innern der Halbebene nirgends Null oder unendlich; dasselbe gilt für die Funktion s und daher auch für die Funktion $\varphi(z)$. Von der Umgebung der Punkte α_ν abgesehen wird auch der Teil der positiven Halbebene, der an die Abszissenachse angrenzt, konform auf die w-Ebene abgebildet.

Um das Verhalten der Funktion w in der Umgebung des unendlich fernen Punkts der z-Ebene zu untersuchen, bilden wir die z-Ebene mittels der Transformation $z = \frac{1}{Z}$ in die Z-Ebene ab. Dem unendlich fernen Punkt der z-Ebene, also auch dem Nullpunkt der Z-Ebene entspricht in der w-Ebene ein Punkt auf der Seite $a_4 a_1$ des Rechtecks, der mit keinem der Endpunkte dieser Seite zusammenfällt. Die Umgebung dieses Punktes wird daher in die Z-Ebene konform abgebildet, folglich wird die Derivierte $\frac{dw}{dZ}$ für $Z = 0$ weder Null noch unendlich. Demnach wird das Produkt $z^2 \frac{dw}{dz}$ im unendlich fernen Punkt der z-Ebene weder Null noch unendlich und dasselbe gilt für die Funktion $\varphi(z)$.

Die Funktion $\varphi(z)$ ist somit im Innern der positiven z-Halbebene überall regulär und sie wird nirgends gleich Null; längs der x-Achse besitzt ihr Arcus einen konstanten Wert. Daraus folgt: die Funktion $i \log \varphi(z)$ verhält sich im Innern der positiven z-Halbebene überall regulär; ihr reeller Teil ist längs der Abszissenachse konstant. Da die Funktion durch die Werte, die ihr reeller Teil auf der Berandung der positiven z-Halbebene annimmt, bis auf eine rein imaginäre Konstante bestimmt ist (§ 17 Schluß), so muß die Funktion $i \log \varphi(z)$ und folglich auch die Funktion $\varphi(z)$ selbst, in der ganzen positiven Halbebene einen konstanten Wert besitzen.

Es ist demnach $s\frac{dw}{dz} = c$ und

$$(2) \qquad w = \int^{z} \frac{c\,dz}{s} = \int \frac{c\,dz}{\sqrt{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)(z-\alpha_4)}},$$

wo die Quadratwurzel durch die Gleichungen (1) eindeutig bestimmt ist.

Wir haben bisher die Lage und die Gestalt des Rechtecks in der w-Ebene unbestimmt gelassen. Wir wollen nunmehr annehmen, der Eckpunkt a_4 falle in den Nullpunkt der w-Ebene, der Punkt a_1 liege auf der positiven u-Achse, der Punkt a_3 auf der positiven v-Achse. Die Längen der Seiten des Rechtecks bezeichnen wir mit K und K'. Es ist demnach

$$a_1 = K \quad a_2 = K + iK' \quad a_3 = iK' \quad a_4 = 0.$$

Damit ist für das Integral (2) die untere Integrationsgrenze bestimmt; es ist

$$(3) \qquad w = \int_{\alpha_4}^{z} \frac{c\,dz}{s}.$$

Der Integrationsweg ist auf die positive Halbebene beschränkt; unter dieser Einschränkung ist das Integral vom Integrationsweg unabhängig.

Nach unseren Festsetzungen entspricht einem reellen Wert der Variabeln z, der $> \alpha_4$ ist, ein reeller positiver Wert von s und ein reeller positiver Wert von w, folglich ist die Konstante c reell und positiv.

Für die Seitenlängen K und K' gelten die Gleichungen

$$K = a_1 = a_2 - a_3 = \int_{\alpha_4}^{\infty} \frac{c\,dz}{s} + \int_{-\infty}^{\alpha_1} \frac{c\,dz}{s} = \int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \frac{c\,dz}{s},$$

$$iK' = a_2 - a_1 = a_3 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{c\,dz}{s} = \int_{\alpha_4}^{\alpha_3} \frac{c\,dz}{s}$$

und hieraus folgt bei Berücksichtigung unserer Zeichenbestimmung (1)

$$K = \int\limits_{\alpha_4}^{\infty} \frac{c\,dx}{\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)}}$$

(4)
$$+ \int\limits_{-\infty}^{\alpha_1} \frac{c\,dx}{\sqrt{(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x)(\alpha_4 - x)}}$$

$$= \int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{c\,dx}{\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(\alpha_3 - x)(\alpha_4 - x)}}.$$

(5)
$$K' = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{c\,dx}{\sqrt{(x-\alpha_1)(\alpha_2 - x)(\alpha_3 - x)(\alpha_4 - x)}}$$

$$= \int\limits_{\alpha_3}^{\alpha_4} \frac{c\,dx}{\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(\alpha_4 - x)}}.$$

In diesen Integralen ist die Integrationsvariable x reell; die Wurzeln sind positiv zu nehmen.*)

Die Funktion ist zunächst nur für die positive Halbebene definiert.

Um ihren Definitionsbereich auszudehnen, benützen wir das Spiegelungsprinzip.

Um zu geometrisch anschaulichen Resultaten zu kommen, dürfen wir das Prinzip nicht auf die schlichte z-Ebene anwenden, sondern wir müssen von der im vorigen Paragraphen konstruierten zweiblätterigen Riemannschen Fläche ausgehen, der die Werte der Wurzel s eindeutig zugeordnet sind. Wir wollen diese Fläche mit T bezeichnen, für die vier Halbebenen, aus denen sie sich zusammensetzt, behalten wir die Bezeichnungen $\overset{+}{A}_1 \bar{A}_1 \overset{+}{A}_2 \bar{A}_2$ bei.

Die Halbebene $\overset{+}{A}_1$ geht durch Spiegelung an der Strecke

---

*) Um zu verifizieren, daß die beiden Ausdrücke für K einander gleich sind, braucht man nur mit Hilfe der Gleichung

$$(\alpha_2 - \alpha_1)\frac{x-\alpha_4}{x-\alpha_1} = (\alpha_3 - \alpha_4)\frac{x'-\alpha_2}{x'-\alpha_3}$$

eine neue Integrationsvariable x' einzuführen. Eine analoge Bemerkung gilt für die Gleichung (5).

$\alpha_4 \infty \alpha_1$ in die Halbebene $\bar{A}_1$ und durch Spiegelung an der Strecke $\alpha_3\alpha_4$ in die Halbebene $\bar{A}_2$ über; indem wir sodann die Halbebene $\bar{A}_1$ an der Strecke $\alpha_3\alpha_4$ oder die Halbebene $\bar{A}_2$ an der Strecke $\alpha_4 \infty \alpha_1$ spiegeln, erhalten wir die Halbebene $\overset{+}{A}_2$.

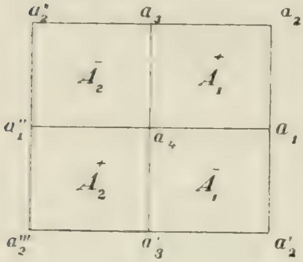


Fig. 28.

Nehmen wir die entsprechenden Spiegelungen in der w-Ebene vor, so erhalten wir der Reihe nach die Rechtecke (s. Fig. 28)

$$a_4a_1a_2'a_3'; \quad a_4a_3'a_2''a_1''; \quad a_4a_3a_2'''a_1''.$$

Diese Rechtecke bilden zusammen mit dem Rechteck $a_4a_1a_2a_3$, von dem wir ausgegangen sind, ein Rechteck Π mit den Seitenlängen $2K$ und $2K'$.

In der Figur ist in jedes der vier Rechtecke die Bezeichnung der Halbebene der Fläche T, die ihm entspricht, eingetragen.

Die Begrenzung des Rechtecks Π setzt sich aus den 8 geradlinigen Strecken $a_2'a_1$, a_1a_2, a_2a_3, a_3a_2'' ... zusammen. Denjenigen von diesen Strecken, die der Abszissenachse parallel sind, entspricht in der z-Ebene die Strecke $\alpha_2\alpha_3$, denjenigen die zur Ordinatenachse parallel sind, die Strecke $\alpha_1\alpha_2$. Auf der zweiblättrigen Fläche T entsprechen den Strecken $\alpha_2\alpha_3$ und $\alpha_1\alpha_2$ je zwei einander bedeckende Strecken und wir müssen überdies noch bei jeder dieser 4 Strecken die beiden Ränder unterscheiden. Wir erhalten demnach auch auf der Riemannschen Fläche 8 Begrenzungsstücke. Insofern wir die Riemannsche Fläche als begrenzt durch die Bilder der Seiten des Rechtecks Π ansehen, wollen wir sie mit T' bezeichnen, während die Bezeichnung T für die unbegrenzte Fläche vorbehalten bleibt.

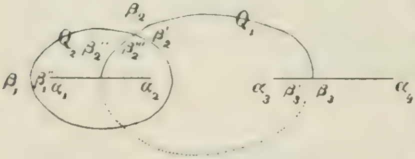


Fig. 29.

Um die Zuordnung der Begrenzungsstücke der Fläche T' und des Rechtecks Π zueinander anschaulicher zu machen, begrenzen wir die Fläche T zunächst durch zwei ovale Sperrlinien Q_1 und Q_2 (Fig. 29), von denen die eine die beiden Übergangslinien $\alpha_1\alpha_2$ und $\alpha_3\alpha_4$, längs deren das obere Blatt mit dem unteren zusammenhängt, durchsetzt, die andere im oberen Blatt um die Strecke $\alpha_1\alpha_2$ herumläuft. Der im unteren Blatt verlaufende Teil der Kurve Q_1 ist in der Figur punktiert gezeichnet.

Ziehen wir das Oval Q_1 um die Strecke $\alpha_2\alpha_3$, das Oval Q_2 um die Strecke $\alpha_1\alpha_2$ zusammen, so erhalten wir die Fläche T'. In der Grenzlage erscheinen die Punkte $\beta_2\beta_3\beta_2''\beta_1''\beta_2'''\beta_3'\beta_2'\beta_1$ als Bilder der Punkte $a_2a_3a_2''a_1''a_2'''a_3'a_2'a_1$.

Die Punkte des Rechtecks II und die Punkte der Fläche T' sind einander eindeutig zugeordnet, demnach ist w eine eindeutige Funktion des Orts in der Fläche T'.

Wir betrachten nun umgekehrt die Variabe z als Funktion der unabhängigen Variabeln w und setzen dementsprechend $z = F(w)$.

Die Funktion $F(w)$ ist vorerst nur für das Rechteck II definiert; um ihren Definitionsbereich auszudehnen, spiegeln wir das Rechteck II zuerst an der Strecke $a_2''a_1'a_2$ und dann an der Strecke $a_3'a_4a_3$.

Diese beiden Spiegelungen setzen sich zu einer Translation in der Richtung der wachsenden Abszissen zusammen; die Größe derselben ist gleich dem doppelten Abstand zwischen den beiden spiegelnden Geraden also $= 2K$.

Der Spiegelung des Rechtecks II an der Strecke $a_2''a_1a_2'$ entspricht eine Spiegelung der Fläche T' an den beiden einander bedeckenden Strecken $\alpha_1\alpha_2$, der Spiegelung von II an der Strecke $a_3'a_4a_3$ entspricht eine Spiegelung von T' an den beiden einander bedeckenden Strecken $\alpha_3\alpha_4$. Längs der beiden Strecken $\alpha_1\alpha_2$ und $\alpha_3\alpha_4$ hängen dieselben Halbebenen der Fläche T zusammen, daher heben sich die beiden Spiegelungen der Fläche T' auf: nacheinander angewendet, lassen sie jeden Punkt dieser Fläche auf seinem Platz.

Unsere zweifache Spiegelung führt demnach zu einer Abbildung der Fläche T' auf ein zum Rechteck II kongruentes Rechteck, das sich an II längs der Seite $a_2'a_2$ anschließt. Spiegeln wir zuerst an der Strecke $a_2'a_1a_2$ und dann an der Strecke $a_3'a_1a_3$, so ergibt sich eine Verschiebung des Recht ecks Π in der Richtung der abnehmenden Abszissen; ihre Größe ist wieder $= 2K$. Das entsprechende Paar von Spiegelungen der Fläche T' läßt diese Fläche wieder ungeändert. Diese beiden Spiegelungen führen also zu einer Abbildung der Fläche T' auf ein zum Rechteck Π kongruentes Rechteck, das sich an Π längs der Seite $a_2''' a_2''$ anschließt.

Spiegeln wir das Rechteck Π zuerst an der Strecke $a_2''' a_3 a_2$ oder an der Strecke $a_2'' a_3 a_2$ und dann an der Strecke $a_1 a_4 a_1$, so ergibt sich eine Verschiebung des Rechtecks um die Strecke $2K'$; im ersten Fall erfolgt sie in der Richtung der wachsenden Ordinaten, im zweiten Fall in der Richtung der abnehmenden Ordinaten. Die entsprechenden Paare von Spiegelungen der Fläche T' lassen diese Fläche wieder ungeändert. Wir erhalten somit Abbildungen der Fläche T' auf zwei zum Rechteck Π kongruente Rechtecke, die sich an Π längs der Seiten $a_2'' a_2$ und $a_2''' a_2'$ anschließen.

Wenn wir die besprochenen Paare von Spiegelungen wiederholt vornehmen, so wird schließlich die ganze w-Ebene mit kongruenten Rechtecken bedeckt; jedes derselben liefert eine konforme Abbildung der Fläche T'.

Einem Punkt der Fläche T' entsprechen demnach unendlich viele homologe Punkte $w = w_0 + 2\mu K + 2\nu K' i$ der w-Ebene; hier bedeuten μ und ν beliebige ganze Zahlen. Analytisch ausgedrückt heißt das: es ist

$$F(w_0 + 2\mu K + 2\nu K' i) = F(w_0).$$

Die Funktion $z = F(w)$ ist also eine einwertige doppelt periodische Funktion.

Wir haben die Funktion $w = f(z)$ ursprünglich für die positive Halbebene — die Halbebene $\overset{+}{A}_1$ der Fläche T — durch das Integral (3) definiert.

Bei dieser Definition bleibt der Integrationsweg auf die Halbebene $\overset{+}{A}_1$ beschränkt. Sodann haben wir den Definitionsbereich der Funktion w auf die ganze Fläche T' ausgedehnt. Dementsprechend müssen wir nun für den Weg, über den das Integral (3) zu erstrecken ist, die ganze Fläche T' offen lassen.

Die Fläche T' ist einfach zusammenhängend; in der Umgebung eines jeden Punktes im Innern der Fläche ist das

Integral eine reguläre Funktion der oberen Integrationsgrenze Daraus folgt: sofern der Integrationsweg auf die Fläche T' beschränkt wird, ist das Integral (3) vom Weg unabhängig, es ist demnach eine einwertige überall reguläre Funktion der oberen Integrationsgrenze. Die Sachlage ändert sich, wenn der Integrationsweg die Begrenzung der Fläche T' überschreitet.

Wählen wir als Integrationsweg das in Fig. 29 gezeichnete Oval Q_1; dasselbe werde in der Richtung $\beta_2\beta_3\beta_2''$ durchlaufen. Wir können das Oval, ohne den Integralwert zu ändern, um die Strecke $\alpha_2\alpha_3$ zusammenziehen; die Integrationsvariable hat dann das Intervall $\alpha_2\alpha_3$ zweimal zu durchlaufen, das eine Mal in der Richtung $\alpha_2\alpha_3$, das andere Mal in der entgegengesetzten Richtung. Diesen Intervallen entsprechen auf der Fläche T verschiedene Strecken: dem ersten Intervall entspricht eine Strecke, die der Halbebene $\overset{+}{A}_1$ angehört, dem zweiten eine Strecke, die der Halbebene A_2 angehört. Daher hat die Größe s in entsprechenden Punkten der beiden Intervalle entgegengesetzte Vorzeichen. Es ist demnach der Wert des Integrals gleich

$$2\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{c\,dx}{\sqrt{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(\alpha_3-x)(\alpha_4-x)}} = 2K.$$

In derselben Art ist zu zeigen, daß das Integral $\int \frac{c\,dz}{s}$ über das Oval Q_2 in der Richtung $\beta_2'\beta_1\beta_2$ erstreckt den Wert

$$2i\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{c\,dx}{\sqrt{(x-\alpha_1)(\alpha_2-x)(\alpha_3-x)(\alpha_4-x)}} = 2iK' \text{ besitzt.}$$

Der Wert eines bestimmten Integrals bleibt ungeändert, wenn man zum Integrationsweg ein Kurvenstück hinzufügt, das zweimal in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen wird. Auf Grund dieser Bemerkung können wir an Stelle eines beliebigen Integrationsweges, der vom Punkt α_4 zu einem gegebenen Punkt γ der Fläche T führt, einen Weg treten lassen, der sich aus einem innerhalb der Fläche T' von α_4 nach γ führenden Weg und einer Anzahl geschlossener Wege zusammensetzt, von denen jeder die Begrenzung der Fläche T' nur einmal überschreitet. Jeder dieser letzteren Wege läßt sich entweder um die Strecke $a_1 a_2$ oder um die Strecke $a_2 a_3$ zusammenziehen. Daher besteht zwischen dem Wert, den das Integral auf einem beliebigen Weg erreicht, und dem Wert w_0, den es auf einem in der Fläche T' verlaufenden Weg erreicht, die Beziehung

$$w = w_0 + 2\mu K + 2\nu K' i,$$

wo μ und ν ganze Zahlen bedeuten.

Es ist das dieselbe Gleichung, zu der wir oben durch Anwendung des Prinzips der Spiegelung geführt worden sind.

Man bezeichnet das Integral einer rationalen Funktion der Größen z und s als elliptisches Integral, weil die Rektifikation der Ellipse zuerst zu derartigen Integralen geführt hat. Aus diesem Grund bezeichnet man die doppelt periodischen Funktionen, zu denen man durch Umkehrung der funktionalen Beziehung zwischen dem Integralwert und der oberen Integrationsgrenze gelangt, auch als elliptische Funktionen.

Achter Abschnitt.

Algebraische Funktionen.

§ 52. Sätze aus der Theorie der algebraischen Gleichungen. Bevor wir dazu übergehen die im Vorausgehenden entwickelte allgemeine Theorie auf die algebraischen Funktionen anzuwenden, müssen wir an einige Sätze aus der Theorie der algebraischen Gleichungen erinnern.

Es sei eine algebraische Gleichung

$$(1) \qquad f(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0$$

vorgelegt. Damit der Grad der Gleichung nicht unter die Zahl n sinkt, setzen wir voraus, daß der leitende Koeffizient nicht gleich Null ist, im übrigen können die Koeffizienten beliebige Werte haben.

Auf Grund des Fundamentalsatzes der Algebra (s. § 29) besitzt die Gleichung (1) n Wurzeln $s_1 s_2 \ldots s_n$, unter denen eine beliebige Anzahl einander gleicher vorkommen kann, und es läßt sich infolgedessen das Polynom $f(s)$ in n Linearfaktoren zerlegen.

(2) $$f(s) = a_0(s - s_1)(s - s_2)\ldots(s - s_n).$$

Wir stellen zunächst die Bedingungen fest, unter denen die Gleichung (1) mehrfache Wurzeln besitzt.

Damit eine der Wurzeln $s_2 s_3 \ldots s_n$ mit der Wurzel s_1 zusammenfällt ist erforderlich und hinreichend, daß die Derivierte

$$f'(s) = n a_0 s^{n-1} + (n-1) a_1 s^{n-2} \cdots + 2 a_{n-2} s + a_{n-1}$$

für $s = s_1$ verschwindet. Damit die drei Wurzeln $s_1 s_2 s_3$ denselben Wert besitzen, müssen gleichzeitig die Gleichungen

$$f(s_1) = 0 \quad f'(s_1) = 0 \quad f''(s_1) = 0$$

bestehen usw.

Mehrfache Wurzeln der Gleichung (1) sind also jedenfalls gemeinschaftliche Wurzeln der Gleichungen $f(s) = 0$ und $f'(s) = 0$.

Der größte gemeinschaftliche Divisor $\varphi(s)$ der beiden Polynome $f(s)$ und $f'(s)$ läßt sich bekanntlich durch rationale Operationen bestimmen. Die mehrfachen Wurzeln der Gleichung (1) genügen also gleichzeitig einer Gleichung niedrigeren Grades $\varphi(s) = 0$, deren Koeffizienten rationale Funktionen der Koeffizienten der Grundgleichung sind.

Eine gemeinschaftliche Wurzel der beiden Gleichungen $f(s) = 0$ und $f'(s) = 0$ ist auch Wurzel der Gleichung

$$f_1(s) = n f(s) - f'(s) = a_1 s^{n-1} + 2 a_2 s^{n-2} + 3 a_3 s^{n-3} \cdots + (n-1) a_{n-1} s + n a_n = 0.$$

Die mehrfachen Wurzeln der Gleichung (1) sind demnach gemeinschaftliche Wurzeln der beiden Gleichungen $n-1^{\text{ten}}$ Grades $f'(s) = 0$ und $f_1(s) = 0$. Um die Bedingung für die Existenz einer gemeinschaftlichen Wurzel dieser beiden Gleichungen aufzustellen, gehen wir von dem Gleichungssystem aus:

$$1)\ s^{n-2} f'(s) = 0 =$$
$$n a_0 s^{2n-3} + (n-1) a_1 s^{2n-4} \cdots + 2 a_{n-2} s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2}$$
$$2)\ s^{n-3} f'(s) = 0 =$$
$$n a_0 s^{2n-4} \cdots + 3 a_{n-3} s^{n-1} + 2 a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-1} s^{n-3}$$

. . . .

$$n-1)\ f'(s) = 0 =$$
$$n a_0 s^{n-1} + (n-1) a_1 s^{n-2} + (n-2) a_2 s^{n-3} \cdots + a_{n-1}$$

$$n)\; s^{n-2} f_1(s) = 0 =$$
$$a_1 s^{2n-3} + 2a_2 s^{2n-4} \cdots + (n-1)a_{n-1} s^{n-1} + n a_n s^{n-2}$$
$$n+1)\; s^{n-3} f_1(s) = 0 =$$
$$a_1 s^{2n-4} \cdots + (n-2)a_{n-2} s^{n-1} + (n-1)a_{n-1} s^{n-2} + n a_n s^{n-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$2n-2)\; f_1(s) = 0 =$$
$$a_1 s^{n-1} + 2a_2 s^{n-2} + 3a_3 s^{n-3} \cdots + n a_n$$

Diese $2n-2$ Gleichungen sind in den $2n-3$ Unbekannten $s s^2 s^3 \dots s^{2n-3}$ linear. Die Eliminationsdeterminante

(3) $D =$

$$\begin{vmatrix}
n a_0 & (n-1)a_1 & \dots 2a_{n-2} & a_{n-1} & & \\
 & n a_0 & \dots 3a_{n-3} & 2a_{n-2} & a_{n-1} & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & n a_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & a_{n-1} \\
a_1 & 2a_2 & \dots (n-1)a_{n-1} & n a_n & & \\
 & a_1 & \dots (n-2)a_{n-2} & (n-1)a_{n-1} & n a_n & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & a_1 & 2a_2 & 3a_3 \;.\; & .\; n a_n
\end{vmatrix}$$

bezeichnet man als Diskriminante der Grundgleichung.

Das Verschwinden der Diskriminante ist nicht nur notwendig sondern auch hinreichend, damit die Grundgleichung wenigstens eine Doppelwurzel besitzt.

Zum Beweis multiplizieren wir die Elemente der

$$1^{\text{ten}},\ 2^{\text{ten}} \dots 2n-3^{\text{ten}} \text{ Spalte}$$

der Determinante beziehungsweise mit $s^{2n-3}\; s^{2n-4} \dots s$ und addieren sie zu denen der letzten; es stehen dann in der letzten Spalte die Elemente

$$1)\; s^{n-2} f'(s) \qquad 2)\; s^{n-3} f'(s) \dots \quad n-1)\; f'(s)$$
$$n)\; s^{n-2} f_1(s) \quad n+1)\; s^{n-3} f_1(s) \dots 2n-2)\; f_1(s).$$

Entwickeln wir die Determinante nach den Unterdeterminanten, die den Elementen der letzten Spalte adjungiert sind, so erhalten wir einen Ausdruck der Form

$$D = M(s) f'(s) + N(s) f_1(s)$$

und hier bedeuten $M(s)$ und $N(s)$ ganze Funktionen $n-2^{\text{ten}}$ Grades von s.

Verschwindet die Diskriminante, so besteht die identische Gleichung

$$M(s) = -\frac{N(s) f_1(s)}{f''(s)},$$

es ist also das Produkt $N(s) f_1(s)$ durch $f''(s)$ teilbar. Da $N(s)$ nur vom Grade $n-2$ ist, müssen demnach die Funktionen $f''(s)$ und $f_1(s)$ wenigstens einen Linearfaktor gemein haben, was zu beweisen war.

Zwischen den Koeffizienten der Grundgleichung und ihren Wurzeln bestehen bekanntlich die Beziehungen

$$s_1 + s_2 \cdots + s_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$s_1 s_2 + s_1 s_3 \cdots + s_1 s_n + s_2 s_3 \cdots + s_2 s_n \cdots + s_{n-1} s_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$s_1 s_2 s_3 + s_1 s_2 s_4 \cdots + s_1 s_2 s_n \cdots + s_{n-2} s_{n-1} s_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_1 s_2 s_3 \cdots s_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Substituieren wir diese Werte in den Ausdruck (3) der Diskriminante, so erhalten wir einen Ausdruck der Form

$$D = a_0^{2n-2} G(s_1 s_2 \cdots s_n), \tag{4}$$

wo G eine ganze rationale Funktion der angezeigten Argumente bedeutet.

Bezüglich des Grades der Funktion in den Größen $s_1 s_2 \cdots s_n$ ist zu bemerken: der Quotient $\frac{a_\nu}{a_0}$ ist eine homogene Funktion ν^{ten} Grades, daher ist

das λ_1^{te} Element der ersten Zeile vom Grade $\lambda_1 - 1$
das λ_2^{te} Element der zweiten Zeile vom Grade $\lambda_2 - 2$
. . . .
das $\lambda_{n-1}^{\text{te}}$ Element der $n-1^{\text{ten}}$ Zeile vom Grade $\lambda_{n-1} - (n-1)$
das μ_1^{te} Element der n^{ten} Zeile vom Grade μ_1
das μ_2^{te} Element der $n+1^{\text{ten}}$ Zeile vom Grade $\mu_2 - 1$
. . . .
das μ_{n-1}^{te} Element der $2n-2^{\text{ten}}$ Zeile vom Grade $\mu_{n-1} - (n-2)$.

Das Glied der Determinante D, das das Produkt dieser Elemente ist, ist demnach in den Wurzeln homogen vom Grade

$$\gamma = \lambda_1 + \lambda_2 \cdots + \lambda_{n-1} + \mu_1 + \mu_2 \cdots + \mu_{n-1} - \frac{1}{2} n(n-1)$$
$$- \frac{1}{2}(n-1)(n-2).$$

Die Zahlen $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1} \mu_1 \mu_2 \ldots \mu_{n-1}$ sind eine Permutation der Zahlen $1\ 2 \ldots 2(n-1)$, folglich ist

$$\gamma = (n-1)(2n-1) - (n-1)^2 = n(n-1).$$

Die Funktion G (4) ist demnach homogen vom Grade $n(n-1)$.

Als Funktion von s_1 betrachtet verschwindet G, wenn s_1 einen der Werte $s_2 s_3 \ldots s_n$ annimmt, folglich ist G durch eine jede der Differenzen $s_2 - s_1\ s_3 - s_1 \ldots s_n - s_1$ teilbar und in gleicher Weise ist zu zeigen, daß G durch jede der Differenzen $s_\lambda - s_\mu$ teilbar ist. Folglich ist G auch durch das Produkt

(5) $$\begin{aligned} P = (s_2 - s_1)(s_3 - s_1) \ldots (s_{n-1} - s_1)(s_n - s_1) \\ (s_3 - s_2) \ldots (s_{n-1} - s_2)(s_n - s_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (s_{n-1} - s_{n-2})(s_n - s_{n-2}) \\ (s_n - s_{n-1}) \end{aligned}$$

teilbar: der Quotient $Q = \frac{G}{P}$ ist ebenfalls eine ganze rationale Funktion der Wurzeln und zwar ist diese Funktion homogen vom Grade $\frac{1}{2} n(n-1)$.

Die Funktion G ist als ganze rationale Funktion der Koeffizienten der Grundgleichung eine symmetrische Funktion der Wurzeln. Die Funktion P dagegen ist eine alternierende Funktion der Wurzeln: sie wechselt das Vorzeichen, wenn man zwei Wurzeln miteinander vertauscht. Daher ist auch der Quotient Q eine alternierende Funktion, und verschwindet somit, wenn zwei Wurzeln einander gleich werden. Hieraus schließt man in derselben Weise wie oben, daß auch Q durch P teilbar ist. Da diese beiden Funktionen vom selben Grad in den Wurzeln sind, so ist ihr Quotient eine von den Wurzeln unabhängige Konstante. Es ist demnach

$$G = C \cdot P^2$$

und zufolge (4)

(6) $$D = C a_0^{2n-2} P^2.$$

Hier bedeutet C eine rein numerische Konstante.

Wir können die Diskriminante noch in anderer Form darstellen.

Da nämlich, wie aus (2) folgt

$$f'(s_\nu) = a_0(s_\nu - s_1)(s_\nu - s_2) \ldots (s_\nu - s_{\nu-1})(s_\nu - s_{\nu+1})(s_\nu - s_n)$$

ist, so ist

$$f'(s_1)f'(s_2) \cdots f'(s_n) = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_0^n P^2,$$

folglich ist

(7) $$D = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} C a_0^{n-2} f'(s_1)f'(s_2) \cdots f'(s_n).$$

Um die Konstante C zu bestimmen, setzen wir

$$f(s) = s^n + 1.$$

Aus (3) folgt $D = n^{2n-2}$.

Es ist ferner $f'(s_\nu) = n s_\nu^{n-1} = -\frac{n}{s_\nu}$, demnach

$$f'(s_1)f'(s_2) \cdots f'(s_n) = (-1)^n \frac{n^n}{s_1 s_2 \cdots s_n} = n^n.$$

Substituieren wir diese Werte in (7), so folgt

(8) $$C = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} n^{n-2}.$$

An Stelle der Variabeln s führen wir nun eine neue Variable σ mittels der Substitution

(9) $$s = \frac{\alpha\sigma + \beta}{\gamma\sigma + \delta} \text{ ein.}$$

Damit diese Gleichung eine Beziehung zwischen den Variabeln s und σ begründet, darf die Substitutionsdeterminante

(10) $$r = \alpha\delta - \beta\gamma$$

nicht verschwinden. Im übrigen unterliegen die Werte der Substitutionskoeffizienten keiner Beschränkung.

Durch Auflösung der Gleichung (9) erhalten wir

(11) $$\sigma = \frac{\delta s - \beta}{-\gamma s + \alpha}.$$

Den Wert (9) substituieren wir in die Grundgleichung (1) und heben den Nenner $(\gamma\sigma + \delta)^n$ weg; wir erhalten für σ eine Gleichung der Form

(12) $$F(\sigma) = A_0\sigma^n + A_1\sigma^{n-1} + A_2\sigma^{n-2} \cdots + A_{n-1}\sigma + A_n = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung bezeichnen wir mit

$$\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n.$$

Zwischen den Polynomen $f(s)$ und $F(\sigma)$ besteht die Beziehung

$$F(\sigma) = (\gamma\sigma + \delta)^n f(s)$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf (12) und (9)

$$\lim_{\sigma = \infty} \frac{F(\sigma)}{\sigma^n} = A_0 = \gamma^n f\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right).$$

Es ist also

(13) $$A_0 = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1}\gamma + a_2\alpha^{n-2}\gamma^2 \cdots + a_{n-1}\alpha\gamma^{n-1} + a_n\gamma^n$$
$$= a_0(\alpha - \gamma s_1)(\alpha - \gamma s_2) \cdots (\alpha - \gamma s_n).$$

Zwischen den Wurzeln σ_λ und s_λ besteht wegen (11) die Beziehung

$$\sigma_\lambda = \frac{\delta s_\lambda - \beta}{-\gamma s_\lambda + \alpha}.$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (10)

(14) $$\sigma_\lambda - \sigma_\mu = \frac{r(s_\lambda - s_\mu)}{(\alpha - \gamma s_\mu)(\alpha - \gamma s_\lambda)}.$$

Bezeichnen wir mit D' die Diskriminante des Polynoms $F(\sigma)$, mit P' das Differenzenprodukt, das aus P (5) hervorgeht, wenn man die Wurzeln $s_1 s_2 \cdots s_n$ durch die Wurzeln $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ ersetzt. Es ist (6)

$$D' = C A_0^{2n-2} P'^2, \text{ also}$$

(15) $$\frac{D'}{D} = \left(\frac{A_0}{a_0}\right)^{2n-2} \left(\frac{P'}{P}\right)^2.$$

Aus (14) folgt mit Rücksicht auf (13)

$$\frac{P'}{P} = \frac{r^{\frac{1}{2}n(n-1)}}{[(\alpha - \gamma s_1)(\alpha - \gamma s_2) \cdots (\alpha - \gamma s_n)]^{n-1}} = r^{\frac{1}{2}n(n-1)} \left(\frac{a_0}{A_0}\right)^{n-1}.$$

Substituieren wir diesen Wert in die Gleichung (15), so erhalten wir

(16) $$D' = r^{\frac{1}{2}n(n-1)} D.$$

Mit Worten: die Diskriminante des transformierten Polynoms $F(\sigma)$ ist das Produkt der Diskriminante des ursprünglichen Polynoms $f(s)$ in eine Potenz der Substitutionsdeterminante.

Die beiden Diskriminanten unterscheiden sich also nur um einen Faktor, der von ihren Koeffizienten unabhängig ist.

§ 53. Algebraische Gleichungen, deren Koeffizienten rationale Funktionen der komplexen Variabeln z sind. Wir nehmen nun an, die Koeffizienten des Polynoms

$$f(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

seien rationale Funktionen der komplexen Variabeln z.

Wenn sich zwei ganze Funktionen $\varphi(s)$ und $\psi(s)$, deren Koeffizienten ebenfalls rationale Funktionen der Variabeln z sind, der Art bestimmen lassen, daß $f(s) = \varphi(s) \cdot \psi(s)$ ist, so heißt das Polynom $f(s)$ reduzibel, andernfalls heißt es irreduzibel. Diese Bezeichnungen werden auch auf die Gleichung $f(s) = 0$ übertragen.

Nehmen wir an, die irreduzible Gleichung $f(s) = 0$ habe mit der Gleichung $g(s) = 0$, deren Koeffizienten ebenfalls rationale Funktionen von z sind, eine oder mehrere Wurzeln gemein. Die gemeinsamen Wurzeln genügen einer Gleichung $\varphi(s) = 0$, deren Koeffizienten rationale Funktionen der Koeffizienten der Polynome $f(s)$ und $g(s)$*), also auch rationale Funktionen von z sind, und es muß daher eine Gleichung $f(s) = \varphi(s)\psi(s)$ bestehen, wo auch $\psi(s)$ eine ganze Funktion von s bedeutet, deren Koeffizienten rationale Funktionen von z sind.

Dies ist mit unserer Voraussetzung, daß die Gleichung $f(s)$ irreduzibel ist, nur dann verträglich, wenn $\psi(s) =$ Konst. ist. Es muß also das Polynom $g(s)$ das Polynom $f(s)$ als Faktor enthalten.

Aus dieser Bemerkung ergibt sich, daß die Wurzeln einer irreduzibeln Gleichung $f(s) = 0$ nur für spezielle Werte der Variabeln z einander gleich werden können, denn andernfalls müßten die Gleichungen $f(s) = 0$ und $f'(s) = 0$ bei unbeschränkt variablem z Wurzeln gemein haben, was unmöglich ist. Daher kann die Diskriminante der Gleichung $f(s) = 0$ nicht identisch verschwinden.

Im folgenden setzen wir durchgehends voraus, die Gleichung $f(s) = 0$ sei irreduzibel. Wir nehmen ferner an die Koeffi-

*) Zum Beweis ist an das bekannte Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Divisors zweier ganzer Funktionen zu erinnern.

zienten $a_0 a_1 \cdots a_n$ seien ganze rationale Funktionen der Variabeln z; den Grad, bis zu dem diese Funktionen ansteigen, bezeichnen wir mit m.

Um die Abhängigkeit des Polynoms von den Größen s und z zum Ausdruck zu bringen, bezeichnen wir dasselbe fortan mit $f(s\,z)$ oder, wenn die Gradzahlen hervorgehoben werden sollen, mit $f(\begin{smallmatrix}n\\s\end{smallmatrix}|\begin{smallmatrix}m\\z\end{smallmatrix})$.

Einem bestimmten Werte von z entsprechen im Allgemeinen n verschiedene Wurzeln $s_1 s_2 \cdots s_n$ der Gleichung $f(s\,z) = 0$. Ausnahmen treten ein, wenn für den betreffenden Wert von z der leitende Koeffizient a_0 verschwindet — in diesem Fall sinkt die Gradzahl der Gleichung — und dann, wenn für den betreffenden Wert von z die Diskriminante D verschwindet — in diesem Fall treten mehrfache Wurzeln auf.

Wir können uns so einrichten, daß diese beiden Singularitäten nicht gleichzeitig eintreten, daß also die Gleichungen $a_0 = 0$ und $D = 0$ keine Wurzel gemein haben, und es ist zweckmäßig das zu tun, weil alsdann gewisse Fallunterscheidungen überflüssig werden.

Zum Beweis ist zu bemerken: führen wir in die Gleichung $f(s\,z) = 0$ mittels der Substitution

$$(1) \qquad s = \frac{\alpha\sigma + \beta}{\gamma\sigma + \delta}$$

eine neue Variable ein, so erhalten wir, nachdem der Nenner $(\gamma\sigma + \delta)^n$ weggehoben ist, eine Gleichung

$$F(\begin{smallmatrix}n\\\sigma\end{smallmatrix}\,\begin{smallmatrix}m\\z\end{smallmatrix}) = A_0\sigma^n + A_1\sigma^{n-1} \cdots + A_n = 0$$

und es macht offenbar keinen wesentlichen Unterschied, ob wir der Untersuchung diese Gleichung oder die ursprüngliche zugrunde legen.

Der leitende Koeffizient der Gleichung $F = 0$ hat den Wert (s. Gl. 13 des vorigen Paragraphen)

$$A_0 = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1}\gamma \cdots + a_{n-1}\alpha\gamma^{n-1} + a_n\gamma^n.$$

Zwischen der Diskriminante D der Gleichung $f(s\,z) = 0$ und der Diskriminante D' der Gleichung $F(\sigma\,z) = 0$ besteht die Beziehung (s. Gl. 16 des vorigen Paragraphen)

$$D' = r^{\frac{1}{2}n(n-1)} D.$$

Die Koeffizienten $a_0 a_1 \cdots a_n$ besitzen keinen gemeinschaftlichen Faktor, weil sonst die Gleichung $f(s, z) = 0$ gegen unsere Voraussetzung reduzibel wäre. Deshalb können wir die Konstanten α und γ so wählen, daß die Gleichungen $A_0 = 0$ und $D' = 0$ keine gemeinschaftliche Wurzel besitzen.

Wir können nunmehr unbeschadet der Allgemeinheit der Untersuchung voraussetzen, daß schon der leitende Koeffizient a_0 der ursprünglichen Gleichung $f(s, z) = 0$ mit der Diskriminante D keinen Linearfaktor gemein hat.

Die Diskriminante ist vom Grad $2(n-1)$ in den Koeffizienten $a_0 a_1 a_2 \cdots$, sie ist daher in z höchstens vom Grade $2m(n-1)$. Wir können uns so einrichten, daß dieser Grad auch wirklich erreicht wird. Zu dem Zweck führen wir an Stelle von z die Variable ζ mittels der Substitution

$$(2) \qquad z = \frac{\varkappa\zeta + \lambda}{\mu\zeta + \nu}$$

in die Gleichung $f(s, z) = 0$ ein und heben den Nenner $(\mu\zeta + \nu)^m$ weg. Wir erhalten eine Gleichung der Form

$$G\left(\overset{n}{s}\ \overset{m}{\zeta}\right) = B_0 s^n + B_1 s^{n-1} \cdots + B_n = 0.$$

Die Koeffizienten $B_0 B_1 B_2 \cdots$ sind ganze rationale Funktionen m^{ten} Grades von ζ und zwar ist

$$(3) \qquad B_i = (\mu\zeta + \nu)^m a_i.$$

Zwischen der Diskriminante $D''(\zeta)$ der Gleichung $G(s, \zeta) = 0$ und der Diskriminante $D(z)$ der Gleichung $f(s, z) = 0$ besteht die Beziehung

$$(4) \qquad D''(\zeta) = (\mu\zeta + \nu)^{2m(n-1)} D(z).$$

Aus dieser Gleichung folgt mit Rücksicht auf (2)

$$\lim_{\zeta = \infty} \frac{D''(\zeta)}{\zeta^{2m(n-1)}} = \mu^{2m(n-1)} D\left(\frac{\varkappa}{\mu}\right).$$

Wählen wir also die Konstanten $\varkappa$ und μ der Art, daß die Diskriminante D für $z = \frac{\varkappa}{\mu}$ nicht verschwindet, so kommt in der Diskriminante D'' die Potenz $\zeta^{2m(n-1)}$ wirklich vor wie zu beweisen war.

Nehmen wir an, die höchste Potenz von z, die in D vorkommt, sei die $(2m(n-1) - k)^{\text{te}}$.

Aus der Gleichung (2) folgt

$$\mu\zeta + \nu = \frac{\varkappa\nu - \lambda\mu}{\varkappa - \mu z},$$

und hieraus

$$(\mu\zeta + \nu)^{2m(n-1)} = \left(\frac{\varkappa\nu - \lambda\mu}{\varkappa - \mu z}\right)^{2m(n-1)-k}(\mu\zeta + \nu)^k.$$

Aus (4) folgt

$$D(z) = \left(\frac{\varkappa - \mu z}{\varkappa\nu - \lambda\mu}\right)^{2m(n-1)-k}\frac{D''(\zeta)}{(\mu\zeta + \nu)^k}.$$

Also ist mit Rücksicht auf (2)

$$\lim_{z=\infty}\frac{D(z)}{z^{2m(n-1)-k}} = \left(\frac{\mu}{\lambda\mu - \varkappa\nu}\right)^{2m(n-1)-k}\lim_{\zeta=-\frac{\nu}{\mu}}\frac{D''(\zeta)}{(\mu\zeta+\nu)^k}.$$

Der Grenzwert links ist nach Voraussetzung endlich und von Null verschieden. Daher muß $D''(\zeta)$ für $\zeta = -\frac{\nu}{\mu}$ zur k^{ten} Ordnung Null werden.

Da dem Punkt $\zeta = -\frac{\nu}{\mu}$ der ζ-Ebene der unendlich ferne Punkt der z-Ebene entspricht, so können wir sagen: wenn der Grad der Diskriminante D um k Einheiten unter die im allgemeinen Fall stattfindende Gradzahl $2m(n-1)$ sinkt, so rücken k Nullpunkte der Diskriminante in den unendlich fernen Punkt.

Aus (3) folgt mit Rücksicht auf (2)

$$\lim_{\zeta=\infty}\frac{B_0}{\zeta^m} = \mu^m a_0\left(\frac{\varkappa}{\mu}\right).$$

Hieraus ist ersichtlich: wir können die Substitutionskoeffizienten $\varkappa\mu$ der Art wählen, daß B_0 in ζ vom m^{ten} Grade ist.

In folgendem setzen wir, soweit nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird, durchgehends voraus:

erstens daß der leitende Koeffizient a_0 der Grundgleichung $f(s, z) = 0$ keinen Nullpunkt mit der Diskriminante D gemein hat,

zweitens daß kein Nullpunkt der Diskriminante in den unendlich fernen Punkt fällt

und drittens daß der leitende Koeffizient a_0 in z vom Grade m und nicht von niedrigerem Grade ist.

§ 54. Definition der algebraischen Funktionen.

Es ist zunächst zu beweisen, daß die Wurzeln unserer Grundgleichung $f(s|z) = 0$ analytische Funktionen der komplexen Variabeln z sind.

Den Beweis stützen wir auf folgenden Hilfssatz:

Angenommen einem bestimmten Wert $z = \beta$ entspreche eine ν-fache Wurzel $s = \alpha$ der Grundgleichung; unter dieser Voraussetzung können wir eine positive Größe r der Art bestimmen, daß für alle Werte von z, die der Ungleichung $|z - \beta| < r$ genügen, die Grundgleichung genau ν Wurzeln $s_1 s_2 \cdots s_\nu$ besitzt, die der Bedingung $|s_k - \alpha| < \varrho$ genügen, wo ϱ eine beliebig zu wählende positive Größe bedeutet.

Zur Vereinfachung der Bezeichnungen transformieren wir zunächst die Grundgleichung durch die Substitution

$$z = \zeta + \beta \quad s = \sigma + \alpha.$$

Die transformierte Gleichung sei

$$F(\sigma|\zeta) = A_0(\zeta)\sigma^n + A_1(\zeta)\sigma^{n-1} \cdots + A_n(\zeta) = 0.$$

Da nach Voraussetzung die Gleichung $f(s|\beta) = 0$ die ν-fache Wurzel $s = \alpha$ besitzt, so besitzt die Gleichung $F(\sigma|0) = 0$ die ν-fache Wurzel $\sigma = 0$. Es ist daher

$$A_n(0) = 0 \;\; A_{n-1}(0) = 0 \cdots A_{n-\nu+1}(0) = 0,$$

dagegen ist $A_{n-\nu}(0)$ von Null verschieden.

Wir setzen nun

$$A_0(0)\sigma^n + A_1(0)\sigma^{n-1} \cdots + A_{n-\nu}(0)\sigma^\nu = g(\sigma).$$

Die Summe der übrigen Glieder der ganzen Funktion $F(\sigma|\zeta)$, die alle den Faktor ζ enthalten, bezeichnen wir mit $h(\sigma|\zeta)$, so daß

(1) $$F(\sigma|\zeta) = g(\sigma) + h(\sigma|\zeta) \text{ ist.}$$

Da $A_{n-\nu}(0)$ von Null verschieden ist, so ist die dem absoluten Betrag nach kleinste Wurzel der Gleichung

$$\frac{g(\sigma)}{\sigma^\nu} = A_0(0)\sigma^{n-\nu} + A_1(0)\sigma^{n-\nu-1} \cdots + A_{n-\nu}(0) = 0$$

von Null verschieden. Bezeichnen wir mit ϱ eine positive Größe, die kleiner als der absolute Betrag dieser Wurzel ist: für alle Werte von σ, deren absoluter Betrag $= \varrho$ ist, liegt der absolute Betrag des Polynoms auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung über einer angebbaren positiven Größe p, folglich ist

$$(2) \qquad |g(\sigma)| > \varrho^{\nu} p \quad \text{wenn} \quad |\sigma| = \varrho \text{ ist.}$$

Die ganze Funktion $h(\sigma, \zeta)$ der Variabeln σ und ζ ordnen wir nach Potenzen von ζ. Wir schreiben sie in der Form

$$h(\sigma, \zeta) = B_0(\sigma)\zeta^m + (m-1)_1 B_1(\sigma)\zeta^{m-1} + (m-1)_2 B_2(\sigma)\zeta^{m-2} \dots + B_{m-1}(\sigma)\zeta.$$

Ein von ζ freies Glied kommt nicht vor, weil $h(\sigma, \zeta)$ durch ζ teilbar ist.

Wir bestimmen nun eine positive Größe k durch die Bedingungen

$$|B_\mu(\sigma)| \leq k^{\mu+1} \text{ für } \mu = 0, 1, 2 \cdots m-1$$

für alle der Bedingung $|\sigma| = \varrho$ genügenden Werte von σ.

Für diese Werte von σ ist

$$(3) \qquad |h(\sigma, \zeta)| \leq k \cdot |\zeta| (k + |\zeta|)^{m-1}.$$

Bezeichnen wir mit r die reelle positive Wurzel der Gleichung

$$\varrho^{\nu} p = kr(k+r)^{m-1}.$$

Unter der Bedingung $|\sigma| = \varrho$, $|\zeta| < r$ ist mit Rücksicht auf (2) und (3)

$$|h(\sigma, \zeta)| < \varrho^{\nu} p < |g(\sigma)|.$$

Erteilen wir der Variabeln ζ einen festen Wert ζ_0, der der Bedingung $|\zeta_0| < r$ genügen muß, im übrigen aber beliebig gewählt werden darf. Da für alle Punkte auf der Peripherie eines Kreises vom Radius ϱ um den Nullpunkt der σ-Ebene $|g(\sigma)| > |h(\sigma, \zeta_0)|$ ist, so besitzt die Funktion (1)

$$F(\sigma | \zeta_0) = g(\sigma) + h(\sigma, \zeta_0)$$

im Innern des Kreises ebenso viele Nullpunkte als die Funktion $g(\sigma)$ (§ 29).

Die Anzahl der letzteren Nullpunkte ist aber $= \nu$, da ja ϱ kleiner ist als der absolute Betrag der kleinsten von Null verschiedenen Wurzel der Gleichung $g(\sigma) = 0$.

Damit ist unser Hilfssatz bewiesen.

Wir wenden den Hilfssatz zunächst auf den Fall an, daß für $x = \beta$ weder der leitende Koeffizient a_0 noch auch die Diskriminante D verschwindet.

Unter dieser Annahme besitzt die Gleichung $f(s\,\beta) = 0$ n verschiedene Wurzeln $\alpha_1\,\alpha_2 \cdots \alpha_n$.

Wir bezeichnen mit 2ϱ eine positive Größe, die kleiner ist als der kleinste der absoluten Beträge $|\alpha_\mu - \alpha_\nu|$, im übrigen aber beliebig gewählt werden kann.

Sodann bestimmen wir eine positive Größe r der Art, daß eine jede der n Wurzeln s_ν der Ungleichung $|s_\nu - \alpha_\nu| \leqq \varrho$ genügt, so lange der absolute Betrag $|z - \beta| < r$ ist. Durch diese Ungleichung wird die Wurzel s_ν der Größe α_ν zugeordnet und zwar ist diese Zuordnung eindeutig. Denn wenn die Wurzel s_ν auch noch einer zweiten Ungleichung $|s_\nu - \alpha_\mu| \leqq \varrho$ genügte, so müßte $|\alpha_\mu - \alpha_\nu| = |(s_\nu - \alpha_\nu) - (s_\nu - \alpha_\mu)| \leqq 2\varrho$ sein, was unserer Festsetzung widerspricht. Daraus folgt:

die Wurzel s_ν der Grundgleichung ist für alle Werte von z, die der Bedingung $|z - \beta| \leqq r$ genügen, durch die Ungleichung $|s_\nu - \alpha_\nu| \leqq \varrho$ eindeutig als Funktion der Variabeln z definiert.

Jedem gegebenen noch so kleinen Wert von ϱ entspricht ein bestimmter Wert r.

Daraus folgt: der absolute Betrag $|s_\nu - \alpha_\nu|$ konvergiert mit dem absoluten Betrag $|z - \beta|$ gegen Null. Die Wurzel s_ν ist daher eine stetige Funktion der Variabeln z.

Die Wurzel s_ν besitzt eine Derivierte, die durch die Gleichung

$$f'(s_\nu\,z) \cdot s'_\nu + \frac{\partial f(s_\nu\,z)}{\partial z} = 0$$

bestimmt ist.

So lange der Punkt innerhalb des Kreises bleibt, der durch die Ungleichung $|z - \beta| = r$ definiert ist, kann die Derivierte $f'(s_\nu\,z)$ nicht verschwinden und es ist daher s'_ν eine stetige Funktion der Variabeln z.

Damit ist der Satz bewiesen:

In der Umgebung eines Punktes der z-Ebene, in dem weder der leitende Koeffizient a_0 noch die Diskriminante D verschwindet, ist eine jede der n Wurzeln s_ν eine reguläre analytische Funktion der Variabeln z.

Wir haben bisher stillschweigend vorausgesetzt, daß der

Punkt β, auf dessen Umgebung sich unsere Betrachtungen bezogen haben, im Endlichen liegt.

Um auch den Fall, daß er ins Unendliche rückt, zu erledigen, bilden wir die z-Ebene mittels der Substitution $z = \frac{1}{\zeta}$ auf die ζ-Ebene ab.

Durch diese Substitution wird die Grundgleichung $f(s|z)=0$ in die Gleichung

$$G(s|\zeta) = B_0(\zeta)s^n + B_1(\zeta)s^{n-1} \cdots + B_n(\zeta) = 0$$

transformiert, wo $B_i(\zeta) = \zeta^m a_i(z)$ eine ganze Funktion der Variabeln ζ ist.

Weil kein Nullpunkt der Diskriminante der Gleichung $f(s|z) = 0$ in den unendlich fernen Punkt der z-Ebene fällt (s. den Schluß des vorigen Paragraphen), so verschwindet die Diskriminante der Gleichung $G(s|\zeta) = 0$ nicht im Nullpunkt der ζ-Ebene und weil der leitende Koeffizient $a_0(z)$ in z vom Grade m ist, so verschwindet der leitende Koeffizient $B_0(\zeta)$ nicht für $\zeta = 0$. Daher sind die Wurzeln $s_1 s_2 \cdots s_n$ der Gleichung $G(s|\zeta) = 0$ in der Umgebung des Punktes $\zeta = 0$ eindeutig definierte reguläre Funktionen der Variabeln ζ. Daraus folgt: die Wurzeln $s_1 s_2 \cdots s_n$ verhalten sich als Funktionen der Variabeln z betrachtet in der Umgebung des unendlich fernen Punkts der z-Ebene regulär.

Nunmehr hat es keine Schwierigkeit eine Sternfläche A_1 zu konstruieren, in der die Wurzel s_1 überall einwertige und reguläre Funktion der Variabeln z ist.

Zu dem Zweck markieren wir in der z-Ebene zwei Punkte β und γ, in denen weder der leitende Koeffizient a_0 noch die Diskriminante D verschwindet.

Wir können die Wurzel s_1 für die Umgebung des Punktes β als einwertige und reguläre Funktion der Variabeln z definieren und durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_1(z|\beta)$ darstellen. Dieses Funktionselement setzen wir nun längs der Kreisbogen durch die Punkte β und γ fort (vergl. § 48).

Die analytische Fortsetzung genügt ebenfalls der Gleichung $f(s|z) = 0$ (s. § 49). Die einzigen Grenzpunkte, auf die wir stoßen können, sind die Nullpunkte des leitenden Koeffizienten a_0 und der Diskriminante D.

Damit soll keineswegs gesagt sein, daß jeder dieser Nullpunkte auch wirklich ein Begrenzungspunkt des Definitionsbereichs der Funktion s_ν ist — im allgemeinen trifft dies nicht zu. Auf jeden Fall aber ist die Funktion s_ν in der Sternfläche einwertig und überall regulär, deren Begrenzung von den Kreisbogen gebildet wird, die vom Punkt γ nach den Nullpunkten von a_ν und D hin führen.

Es steht nichts im Wege den Punkt β ins Unendliche rücken zu lassen; alsdann gehen die Kreisbogen, die die Begrenzung der Sternfläche A_ν bilden, in Gerade über. Diese Gestalt der Sternfläche legen wir den weiteren Betrachtungen zugrunde.

Zu jeder der n Wurzeln s_ν gehört eine Sternfläche A_ν, deren Punkten die Werte von s_ν eindeutig zugeordnet sind; wir müssen also n Exemplare der z-Ebene übereinander gelegt denken. Die Begrenzungen der übereinander liegenden Sternflächen decken einander.

Um festzustellen, in welcher Weise die n Sternflächen A_ν miteinander zusammenhängen, müssen wir zunächst untersuchen, wie sich die Wurzeln s_ν in der Umgebung der Nullpunkte des leitenden Koeffizienten a_0 und der Diskriminante D verhalten.

§ 55. Unstetigkeitspunkte und Verzweigungspunkte der Wurzeln. Nehmen wir an, im Punkt e verschwinde der leitende Koeffizient a_0.

Wir transformieren die Gleichung $f(s\,|\,z) = 0$ durch die Substitution

$$s = \delta + \frac{1}{\sigma}$$

und setzen

$$\sigma^n f(s\,|\,z) = a_0(\sigma\delta + 1)^n + a_1(\sigma\delta + 1)^{n-1}\sigma \cdots + a_n\sigma^n = F(\sigma\,|\,z).$$

Es sei nach Potenzen von σ geordnet

$$F(\sigma\,|\,z) = A_0\sigma^n + A_1\sigma^{n-1} \cdots + A_n.$$

Hier ist $\qquad A_0 = a_0\delta^n + a_1\delta^{n-1} \cdots + a_n$

und $\qquad A_n = a_0.$

Die Konstante δ wählen wir so, daß der leitende Koeffizient A_0 für $z = e$ nicht verschwindet.

Nach Voraussetzung verschwindet die Diskriminante der Gleichung $f(s\,z) = 0$ für $z = e$ nicht (s. § 53 Schluß) und dasselbe gilt für die Diskriminante der Gleichung $F(\sigma\,z) = 0$. Daher besitzt die Gleichung $F(\sigma\,e) = 0$ n verschiedene Wurzeln, von denen eine — etwa die erste — den Wert Null hat, weil $A_n(e) = a_0(e) = 0$ ist. Die Wurzel σ_1 der Gleichung $F(\sigma\,z) = 0$ wird durch eine Potenzreihe der Form

$$(1) \qquad \sigma_1 = \frac{1}{s_1 - \delta} = c_\lambda (z-e)^\lambda + c_{\lambda+1}(z-e)^{\lambda+1} \ldots$$

dargestellt, wo λ eine positive ganze Zahl bedeutet.

Der Punkt e ist somit ein Pol der Funktion s_1. Umgekehrt gehört jeder Punkt e, in dem eine Wurzel s_1 unendlich wird, zu den Nullpunkten des leitenden Koeffizienten a_0.

Zum Beweis schreiben wir die Grundgleichung in der Form

$$a_0 s + a_1 + \frac{a_2}{s} + \frac{a_3}{s^2} \cdots + \frac{a_n}{s^{n-1}} = 0.$$

Wird für $z = e$ die Wurzel s_1 unendlich, so muß

$\lim\limits_{z=e} a_0(z) \cdot s_1 = -a_1(e)$ sein und hieraus folgt $a_0(e) = 0$.

Aus unserer Voraussetzung, daß der leitende Koeffizient und die Diskriminante keinen Nullpunkt gemein haben, folgt daß auch die Koeffizienten a_0 und a_1 keinen Nullpunkt gemein haben (s. § 52 Gleichung (3)).

Daher verschwindet $a_1(e)$ nicht und es ist deshalb die Ordnung, zu der s_1 unendlich wird, gleich der Ordnung, zu der a_0 verschwindet.

Wir sprechen das soeben Bewiesene in dem Satz aus:

Die Wurzeln der algebraischen Gleichung $f(s\,z) = 0$ besitzen nur polare Unstetigkeiten; die Pole fallen mit den Nullpunkten des leitenden Koeffizienten zusammen.

Nehmen wir nunmehr an, im Punkt e verschwinde die Diskriminante D. Wir grenzen in der z-Ebene durch zwei Kreise um den Punkt e ein Ringgebiet R ab, in dem weder die Diskriminante noch der leitende Koeffizient verschwindet. In der Umgebung eines jeden Punktes dieses Ringgebietes zeigen die n Wurzeln $s_1 s_2 \cdots s_n$ das reguläre Verhalten analytischer Funktionen, aber hieraus darf nicht geschlossen werden, daß die Funktionswerte den Punkten des Gebietes eindeutig zugeordnet sind, da ja das Ringgebiet keine einfach zusammenhängende Fläche ist (vergl. § 47).

Um das Ringgebiet R in eine einfach zusammenhängende Fläche zu verwandeln, verbinden wir die beiden Grenzkreise durch eine Sperrlinie L (Fig. 30). Die Ränder der Sperrlinie unterscheiden wir wieder als + Rand und − Rand derart, daß ein positiver Umlauf um den Punkt e vom − Rand zum + Rand führt. In der zerschnittenen Ringfläche — sie möge mit R' bezeichnet werden — ist eine jede der n Wurzeln $s_1 s_2 \ldots s_n$ eine einwertige Funktion der Variabeln z. Die n Wurzelwerte

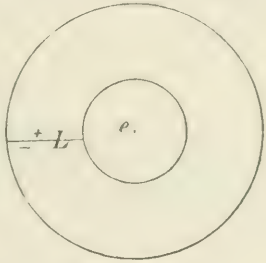


Fig. 30

$\overset{+}{s}_1 \overset{+}{s}_2 \ldots \overset{+}{s}_n$, die in einem Punkt auf dem + Rand der Sperrlinie stattfinden, können nur eine Permutation der Werte $\bar{s}_1 \bar{s}_2 \ldots \bar{s}_n$ sein, die im gegenüberliegenden Punkt auf dem − Rand stattfinden. Es sei etwa

$$(2) \qquad \overset{+}{s}_1 = \bar{s}_2 \quad \overset{+}{s}_2 = \bar{s}_3 \ldots \overset{+}{s}_\nu = \bar{s}_1 .$$

Man sagt in diesem Fall: die ν Wurzeln $s_1 s_2 \ldots s_\nu$ bilden einen „ν-gliedrigen Zyklus“. Sofern $\nu > 1$ ist, bezeichnen wir den Zyklus als „eigentlichen“ Zyklus, wenn dagegen $\nu = 1$, also $\overset{+}{s}_1 = \bar{s}_1$ ist, als „uneigentlichen“. Die Gesamtheit der n Wurzeln verteilt sich demnach auf eine gewisse Anzahl von Zyklen, die dem Nullpunkt e der Diskriminante zugeordnet sind. Für diejenigen Wurzeln, die zu einem eigentlichen Zyklus gehören, ist der Punkt e ein Verzweigungspunkt; diejenigen Wurzeln dagegen, die für sich einen uneigentlichen Zyklus bilden, verhalten sich im Punkt e regulär.

Setzen wir

$$\sigma^\nu = z - e .$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind in der einfach zusammenhängenden Fläche R' einwertig (vergl. § 18 erstes Beispiel). Bei einem positiven Umlauf um den Punkt e wächst $\operatorname{arc}(z - e)$ um 2π, also $\operatorname{arc} \sigma$ um $\frac{2\pi}{\nu}$. Demnach ändert sich eine jede Wurzel σ bei einem positiven Umlauf um den Verzweigungspunkt e um den Faktor $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{\nu}}$. Verstehen wir unter σ eine bestimmte, übrigens aber beliebig zu wählende Wurzel der binomischen Gleichung und setzen wir

$$\sigma_\lambda = \varepsilon^{\lambda - 1}\sigma \quad (\lambda = 1, 2, \ldots \nu).$$

Längs der Sperrlinie L besteht die Beziehung

$$(3) \qquad \overset{+}{\sigma} = \varepsilon \overline{\sigma}.$$

Es ist also

$$\overset{+}{\sigma}_1 = \overline{\sigma}_2 \quad \overset{+}{\sigma}_2 = \overline{\sigma}_3 \cdots \overset{+}{\sigma}_\nu = \overline{\sigma}_1.$$

Von diesem einfachsten Zyklus ausgehend, gelangen wir leicht zu einer analytischen Darstellung der Wurzeln $s_1 s_2 \ldots s_\nu$ im Ringgebiet R. Wir setzen

$$(4) \quad \psi_\lambda = s_1 + \varepsilon^{-\lambda} s_2 + \varepsilon^{-2\lambda} s_3 \cdots + \varepsilon^{-(\nu-1)\lambda} s_\nu \quad \lambda = 0, 1, 2, \ldots \nu - 1.$$

Längs der Sperrlinie L ist

$$\overset{+}{\psi}_\lambda = \overset{+}{s}_1 + \varepsilon^{-\lambda}\overset{+}{s}_2 + \varepsilon^{-2\lambda}\overset{+}{s}_3 \cdots + \varepsilon^{-(\nu-1)\lambda}\overset{+}{s}_\nu,$$

also wegen (2)

$$\begin{aligned}\overset{+}{\psi}_\lambda &= \overline{s}_2 + \varepsilon^{-\lambda}\overline{s}_3 + \varepsilon^{-2\lambda}\overline{s}_4 \quad \cdots \varepsilon^{-(\nu-1)\lambda}\overline{s}_1 \\ &= \varepsilon^\lambda[\overline{s}_1 + \varepsilon^{-\lambda}\overline{s}_2 + \varepsilon^{-2\lambda}\overline{s}_3 \cdots \varepsilon^{-(\nu-1)\lambda}\overline{s}_\nu].\end{aligned}$$

Es ist demnach

$$\overset{+}{\psi}_\lambda = \varepsilon^\lambda \overline{\psi}_\lambda.$$

Andererseits ist wegen (3)

$$(\overset{+}{\sigma})^\lambda = \varepsilon^\lambda (\overline{\sigma})^\lambda.$$

Folglich ist

$$\frac{\overset{+}{\psi}_\lambda}{(\overset{+}{\sigma})^\lambda} = \frac{\overline{\psi}_\lambda}{(\overline{\sigma})^\lambda} \quad \text{für } \lambda = 0, 1, 2 \ldots \nu - 1.$$

Die Funktion $\frac{\psi_\lambda}{\sigma^\lambda}$ wird also längs der Sperrlinie L nicht unstetig, sie ist daher nicht nur in der einfach zusammenhängenden Fläche R', sondern auch in der unzerschnittenen Ringfläche R einwertig und zwar gilt dies, wie klein auch immer der Radius des inneren Grenzkreises gewählt werden mag.

Man überzeugt sich leicht, daß die Funktionen $\frac{\psi_\lambda}{\sigma^\lambda}$ im Punkt e nicht unendlich werden. Für den Index $\lambda = 0$ ist dies von vornherein klar, da ja die Wurzeln $s_1 s_2 \ldots s_\nu$ im Punkt e einen endlichen Wert annehmen.

Bezüglich der Funktionen $\frac{\psi_1}{\sigma}\ \frac{\psi_2}{\sigma^2} \cdots$ ist zu bemerken: das

Produkt $M = (z-e)\frac{\psi_\lambda}{\sigma^\lambda} = \sigma^{\nu-\lambda}\psi_\lambda$ konvergiert gegen Null, wenn sich der Punkt z dem Punkt e nähert, weil ψ_λ endlich bleibt.

Nun kann die im Ringgebiet R einwertige und überall reguläre Funktion M im Punkt e nur wie eine ganze Potenz von $z-e$ verschwinden (§ 26), es muß daher der Quotient $\frac{M}{z-e} = \frac{\psi_\lambda}{\sigma^\lambda}$ einen endlichen Wert besitzen.

Da sich die Funktion $\frac{\psi_\lambda}{\sigma^\lambda}$ in der Umgebung des Punktes e regulär verhält, so läßt sie sich durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_\lambda(z|e)$ darstellen, die nach steigenden Potenzen von $z-e$ fortschreitet. Es bestehen demnach Gleichungen der Form

$$\psi_\lambda = s_1 + \varepsilon^{-\lambda}s_2 + \varepsilon^{-2\lambda}s_3 \cdots + \varepsilon^{-(\nu-1)\lambda}s_\nu = \sigma^\lambda\mathfrak{P}_\lambda(z|e)$$
$$\text{für } \lambda = 0, 1, 2, \ldots \nu-1.$$

Die Summe

$$1 + \varepsilon^\varkappa + \varepsilon^{2\varkappa} \cdots + \varepsilon^{(\nu-1)\varkappa} = \frac{\varepsilon^{\nu\varkappa}-1}{\varepsilon^\varkappa - 1} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots \nu-1)$$

ist $=\nu$ oder $=0$, je nachdem $\varkappa = 0$ ist oder nicht. Daher ist

$$\psi_0 + \varepsilon^\mu\psi_1 + \varepsilon^{2\mu}\psi_2 \cdots + \varepsilon^{(\nu-1)\mu}\psi_{\nu-1}$$
$$= \sum_{\iota=1}^{\nu}(1 + \varepsilon^{\mu-\iota+1} + \varepsilon^{2(\mu-\iota+1)} \cdots + \varepsilon^{(\nu-1)(\mu-\iota+1)})s_\iota$$
$$= s_{\mu+1} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots \nu-1).$$

Es ist folglich

$$s_\mu = \mathfrak{P}_0(z|e) + \varepsilon^{\mu-1}\sigma\mathfrak{P}_1(z|e) + \varepsilon^{2(\mu-1)}\sigma^2\mathfrak{P}_2(z|e) \cdots$$
$$+ \varepsilon^{(\nu-1)(\mu-1)}\sigma^{\nu-1}\mathfrak{P}_{\nu-1}(z|e).$$

Wir setzen, von der oben eingeführten Bezeichnung Gebrauch machend, $\varepsilon^{\mu-1}\sigma = \sigma_\mu$ und ordnen nach Potenzen von σ_μ. Wir erhalten eine Reihe der Form

$$(5) \qquad s_\mu = c_0 + c_1\sigma_\mu + c_2\sigma^2_\mu + c_3\sigma^3_\mu + \cdots \qquad \mu = 1, 2, \ldots \nu.$$

Es werden somit im Ringgebiet R die ν Wurzeln $s_1 s_2 \ldots s_\nu$, die demselben Zyklus angehören, durch eine und dieselbe nach Potenzen von $(z-e)^{\frac{1}{\nu}}$ fortschreitende Reihe dargestellt: wir erhalten die ν Wurzeln des Zyklus, wenn wir der Potenz $(z-e)^{\frac{1}{\nu}}$ ihre ν verschiedenen Werte beilegen.

Die Reihenentwicklungen (1) und (5) erfahren leicht zu übersehende Modifikationen, wenn einer der speziellen Fälle eintritt, die wir am Schluß des § 53 der Einfachheit wegen ausgeschlossen haben.

Wenn der Grad des leitenden Koeffizienten a_0 unter den Maximalgrad m sinkt, so rückt einer der Pole der Wurzeln ins Unendliche. An Stelle der Reihenentwicklung (1) tritt in diesem Fall eine Entwicklung der Form

$$\sigma_1 = \frac{1}{s_1 - \delta} = \frac{c_\lambda}{z^\lambda} + \frac{c_{\lambda+1}}{z^{\lambda+1}} + \frac{c_{\lambda+2}}{z^{\lambda+2}} \cdots$$

Wenn der Grad der Diskriminante unter den Maximalgrad $2m(\nu-1)$ sinkt, so rückt ein Nullpunkt der Diskriminante in den unendlich fernen Punkt. Ein ν-gliedriger Zyklus $s_1 s_2 \ldots s_\nu$, für den der unendlich ferne Punkt Verzweigungspunkt ist, wird durch eine Reihe der Form

$$s_\mu = \frac{c_1}{z^{\frac{1}{\nu}}} + \frac{c_2}{z^{\frac{2}{\nu}}} + \frac{c_3}{z^{\frac{3}{\nu}}} \cdots \qquad \mu = 1, 2, \ldots \nu$$

dargestellt, wo für $z^{\frac{1}{\nu}}$ der Reihe nach die ν verschiedenen Wurzelwerte einzusetzen sind.

Nehmen wir endlich an ein Nullpunkt e der Diskriminante falle mit einem Nullpunkt des leitenden Koeffizienten a_0 zusammen, und zwar sei dieser Punkt e ein Verzweigungspunkt für den ν-gliedrigen Zyklus $s_1 s_2 \ldots s_\nu$. Im Punkt e werden unter dieser Voraussetzung die ν Wurzeln des Zyklus sämtlich unendlich. Für die Umgebung des Punktes e gilt die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{s_\mu} = c_1 (z-e)^{\frac{1}{\nu}} + c_2 (z-e)^{\frac{2}{\nu}} + c_3 (z-e)^{\frac{3}{\nu}} \cdots \qquad \mu = 1, 2, \ldots \nu.$$

Rückt der Punkt e ins Unendliche, so tritt an Stelle dieser Reihenentwicklung die folgende:

$$\frac{1}{s_\mu} = \frac{c_1}{z^{\frac{1}{\nu}}} + \frac{c_2}{z^{\frac{2}{\nu}}} + \frac{c_3}{z^{\frac{3}{\nu}}} + \cdots \qquad \mu = 1, 2, \ldots \nu.$$

§ 56. Über die Bestimmung der Wurzelzyklen.

Es erübrigt ein Verfahren anzugeben, um die zu einem jeden Nullpunkt der Diskriminante gehörigen Zyklen zu finden. Dabei wollen wir der Kürze halber an den vereinfachenden Voraussetzungen festhalten, die am Schluß des § 53 ausgesprochen sind.

Nehmen wir an, im Punkt e finde eine k-fache Wurzel $s_1 = s_2 = s_3 \cdots = s_k = a$ statt. Die Ordnungszahlen der zugehörigen Zyklen bezeichnen wir mit $\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_p$, so daß also

$$\nu_1 + \nu_2 \cdots + \nu_p = k \text{ ist.}$$

Für die Wurzeln, die dem ersten ν_1-gliedrigen Zyklus angehören, gilt eine Reihenentwicklung der Form

$$s - a = c_1 (z - e)^{\frac{1}{\nu_1}} + c_2 (z - e)^{\frac{2}{\nu_1}} + \cdots$$

Von den Koeffizienten $c_1 c_2 \ldots$ kann eine Anzahl den Wert Null haben; es sei c_λ der erste nicht verschwindende Koeffizient.

Unter dieser Annahme ist der Grenzwert

$$\lim_{z=e} \frac{s-a}{(z-e)^{\frac{\lambda}{\nu_1}}}$$

für die dem Zyklus angehörigen Wurzeln endlich und von Null verschieden. Für eine jede Wurzel, die im Punkt e den Wert a annimmt, läßt sich also eine positive rationale Zahl q der Art bestimmen, daß der Grenzwert

$$\lim_{z=e} \frac{s-a}{(z-e)^q}$$

existiert und einen von Null verschiedenen Wert besitzt.

Jede Wurzel, für die dieser Grenzwert gilt, gehört notwendig einem Zyklus an, dessen Ordnung gleich dem Nenner von q oder gleich einem Multiplum dieses Nenners ist. Es tritt offenbar der erste oder der zweite Fall ein, je nachdem die oben mit λ und ν_1 bezeichneten Zahlen relativ prim sind oder einen gemeinschaftlichen Divisor besitzen. Zu einem Wert von q können selbstverständlich mehrere Zyklen gehören; ihre Ordnungszahlen können einander gleich sein, sie können aber auch verschiedene Multipla des Nenners von q sein.

Die Aufgabe, die Wurzeln $s_1 s_2 \ldots s_k$ in Zyklen zu ordnen, zerfällt somit in zwei einfachere: wir haben erstens die Exponenten q zu bestimmen und wir haben dann zweitens für jeden dieser Exponenten die zugehörigen Zyklen zu bilden.

Um die erste dieser Aufgaben zu lösen, transformieren wir die Grundgleichung durch die Substitution $s = S + a$ $z = Z + c$ in die Gleichung $F(S|Z) = 0$. Da die Gleichung $f(s|c) = 0$ die k-fache Wurzel a besitzt, so besitzt die Gleichung $F(S|0) = 0$ die k-fache Wurzel 0.

Soll der Gleichung $F(S|Z) = 0$ ein endlicher von Null verschiedener Grenzwert

$$\lim_{Z=0} \frac{S}{Z^q}$$

genügen, so müssen, wenn man die Substitution $S = Z^q$ ausführt, die Glieder niedrigster Ordnung für sich verschwinden.

Damit das Glied Konst. $Z^\lambda S^\mu$ des Polynoms $F(S|Z)$ zu den Gliedern niedrigster Ordnung gehört, müssen die Exponenten $\lambda\mu$ der Bedingung $\lambda + q\mu < \lambda' + q\mu'$ genügen, wo $\lambda'\mu'$ die in irgend einem Glied des Polynoms vorkommenden Exponenten bedeuten.

Diese Bedingung läßt sich sehr einfach geometrisch anschaulich machen. Wir betrachten den Exponenten der Variabeln Z als Abszisse, den Exponenten der Variabeln S als Ordinate eines Punktes in Beziehung auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, so daß jedes Glied des Polynoms $F(S|Z)$ durch einen Punkt der Ebene repräsentiert wird. Durch den Punkt, der das Glied Konst. $Z^\lambda S^\mu$ repräsentiert, legen wir nun eine Gerade g, die mit der Ordinatenachse den Winkel arc tg q bildet.

Alle Glieder des Polynoms F, deren Exponenten $\lambda'\mu'$ der Bedingung $\lambda' + q\mu' = \lambda + q\mu$ genügen, werden durch Punkte auf der Geraden g repräsentiert, alle Glieder, für deren Exponenten die Ungleichung $\lambda' + q\mu' > \lambda + q\mu$ erfüllt ist, durch Punkte, die durch die Gerade g vom Anfangspunkt der Koordinaten getrennt sind. Da mindestens zwei Glieder niedrigster Ordnung auftreten müssen, so geht die Gerade g mindestens durch zwei Punkte, die Glieder des Polynoms repräsentieren.

Wir erhalten somit zur Bestimmung des Exponenten q die folgende einfache Regel:

Man repräsentiere jedes Glied Konst. $Z^{\lambda} S^{\mu}$ des Polynoms $F(S, Z)$ durch einen Punkt mit den Koordinaten λ, μ und konstruiere alle Geraden g, die den beiden Bedingungen genügen: die Gerade g geht mindestens durch zwei Punkte unseres Punktsystems; alle Punkte des Systems liegen entweder auf g oder auf der entgegengesetzten Seite von g wie der Anfangspunkt der Koordinaten. Verbindet einer dieser Geraden g die Punkte λ, μ und λ', μ', so ist $q = -\frac{\lambda' - \lambda}{\mu' - \mu}$ ein zulässiger Exponent.

Sei beispielsweise

$$F = C_{31} Z^3 S + C_{22} Z^2 S^2 + C_{13} Z S^3 + C_{50} Z^5 + C_{05} S^5$$
$$+ \text{Gliedern, deren Exponentensumme} > 5 \text{ ist.}$$

Im Punkt $Z = 0$ findet eine fünffache Wurzel $S = 0$ statt; es sind die zugehörigen Zyklen zu bestimmen.

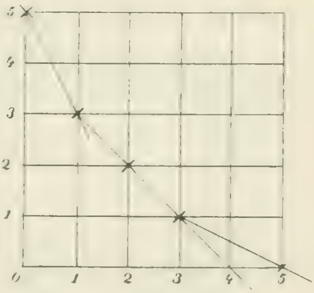


Fig. 31.

Wie die nebenstehende Figur 31 zeigt, gibt es in diesem Fall drei Gerade g:

die erste g_1 verbindet die Punkte 5,0 und 3,1;

g_2 geht durch die drei Punkte 3,1; 2,2; 1,3;

g_3 geht durch die Punkte 1,3 und 0,5.

Der Geraden g_1 entspricht der Exponent $q_1 = 2$, der Geraden g_2 der Exponent $q_2 = 1$, der Geraden g_3 der Exponent $q_3 = \frac{1}{2}$.

Es treten demnach mindestens drei verschiedene Zyklen auf.

Da sich auf diese drei Zyklen nur fünf Wurzeln verteilen, kann die Ordnung keines Zyklus > 3 sein und es kann höchstens ein eigentlicher Zyklus existieren. Die Ordnung des Zyklus, der zum Exponenten $q_3 = \frac{1}{2}$ gehört, ist ein Multiplum von 2, sie muß also $= 2$ sein.

Sofern die Koeffizienten $C_{\lambda \mu}$ nicht speziellen Bedingungen genügen, gehören zum Exponenten $q_2 = 1$ zwei verschiedene Grenzwerte

$$G = \lim_{Z=0} \frac{S}{Z}$$

also auch zwei verschiedene Zyklen, die selbstverständlich nur eingliedrig sein können. Die beiden Grenzwerte G sind durch die quadratische Gleichung $C_{13}G^2 + C_{22}G + C_{31} = 0$ bestimmt.

Wenn die Diskriminante dieser Gleichung nicht verschwindet, erhalten wir demnach einen dem Exponenten 2 zugeordneten eingliedrigen Zyklus, zwei zum Exponenten 1 gehörige eingliedrige Zyklen und einen zum Exponenten $\frac{1}{2}$ gehörigen zweigliedrigen Zyklus.

Für die Wurzeln des zweigliedrigen Zyklus ist der Punkt $Z = 0$ ein Verzweigungspunkt, die übrigen drei Wurzeln verhalten sich in der Umgebung dieses Punktes regulär.

Es muß nun noch ein allgemeines Verfahren nachgewiesen werden, um die Zyklen, die zu einem bestimmten Exponenten q gehören, zu bestimmen. Zu dem Zweck greifen wir auf die Reihenentwicklung zurück, die die Wurzeln eines dieser Zyklen darstellt.

Die Reihenentwicklung hat jedenfalls die Form

$$(1)\qquad S = cZ^q + c_1 Z^{q_1} + c_2 Z^{q_2} \cdots$$

Die Exponenten $q_1 q_2 \ldots$ sind ebenso wie q positive rationale Zahlen und zwar ist $q < q_1 < q_2 \ldots$

Sei auf die kleinste Benennung gebracht

$$q = \frac{\lambda}{\mu} \qquad q_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \qquad q_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} \cdots$$

Die Ordnung des Zyklus, der durch die Reihe (1) dargestellt wird, ist das kleinste gemeinschaftliche Multiplum der Zahlen $\mu \mu_1 \mu_2 \ldots$

Um den Koeffizienten c zu bestimmen, berechnen wir aus der Gleichung $F(S|Z) = 0$ den Grenzwert

$$\lim_{Z=0} \frac{S}{Z^q}.$$

Es ist einleuchtend, daß dieser Grenzwert nur bis auf eine μ^{te} Einheitswurzel bestimmt ist, weil dies auch für die Potenz Z^q gilt. Es kann aber der Fall eintreten, daß auch c^μ nicht eindeutig, sondern durch eine Gleichung höheren Grades bestimmt ist. In diesem Fall entsprechen den verschiedenen Werten von c^{μ} verschiedene Zyklen; jeder dieser Zyklen muß für sich untersucht werden.

Wir setzen nun in (1)

$$(2) \qquad Z = Z'^{\mu} \quad S = cZ'^{\lambda} + S'$$

und erhalten für S' die Reihenentwicklung

$$S' = c_1 Z'^{q'} + c_2 Z'^{q_1'} + \cdots.$$

Hier ist

$$q' = q_1 \mu = \frac{\lambda_1 \mu}{\mu_1} \quad q_1' = q_2 \mu = \frac{\lambda_2 \mu}{\mu_2} \cdots.$$

Um den Exponenten q' zu bestimmen, transformieren wir die Gleichung $F(S\ Z) = 0$ durch die Substitution (2) in $F(S', Z') = 0$.

Der Exponent q' muß nun der Bedingung genügen, daß der Grenzwert

$$\lim_{Z'=0} \frac{S'}{Z'^{q'}}$$

einen endlichen von Null verschiedenen Wert besitzt.

Er kann durch das oben auseinander gesetzte Verfahren ermittelt werden. Da $q_1 > q$ ist, so ist $q' = q_1 \mu > q\mu = \lambda$. Der Exponent q' unterliegt also noch der Nebenbedingung $q' > \lambda$.

Wenn die Bestimmung des Exponenten $q_1 = \frac{q'}{\mu}$ noch nicht genügt, um die Ordnung des Zyklus festzustellen, so muß auch noch der nächste Exponent q_2 bestimmt werden usw.

Wir wollen das Verfahren durch ein Beispiel erläutern. Es sei $F = (S^2 - Z)^2 - SZ^2 - Z^4$ + Gliedern, deren Exponentensumme > 4 ist.

Im Punkt $Z = 0$ findet eine vierfache Wurzel $S = 0$ statt.

Wie leicht zu sehen ist, erhalten wir in diesem Fall nur einen Exponenten $q = \frac{1}{2}$, die vier Wurzeln müssen daher entweder einen viergliedrigen Zyklus oder zwei zweigliedrige Zyklen bilden. Für $Z = 0$ ist

$$\lim_{Z=0} \frac{S}{\sqrt{Z}} = \pm 1.$$

Das doppelte Vorzeichen rührt von der Unbestimmtheit des Vorzeichens von $\sqrt{Z}$ her.

Die Reihenentwicklung der Wurzeln besitzt die Form

$$S = Z^{\frac{1}{2}} + c_1 Z^{q_1} + \cdots.$$

Wir setzen $Z = Z'^2$ $S = S' + Z'$ und erhalten

$$S' = c_1 Z'^{q'} + \cdots.$$

Hier ist $q' = 2q_1 > 2q$ also $q' > 1$.

Die Transformation der Grundgleichung ergibt

$$F(S\,Z) = \bar{F}(S'\,Z') = (S'^2 + 2S'Z')^2 - (S' + Z')Z'^4 - Z'^8 \cdots$$
$$= S'^4 + 4S'^3 Z' + 4S'^2 Z'^2 - S' Z'^4 - Z'^5 \cdots.$$

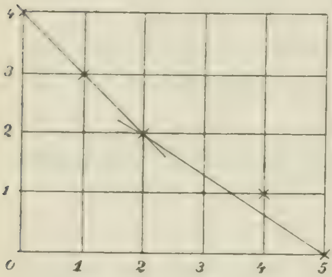


Fig. 32.

Wir genügen der Gleichung $\bar{F} = 0$ sowohl durch die Annahme $q' = 1$ als auch durch die Annahme $q' = \frac{3}{2}$ (s. die nebenstehende Fig. 32). Die erste Annahme ist wegen der Bedingung $q' > 1$ unzulässig, es ist daher $q' = \frac{3}{2}$ zu setzen.

Die Glieder niedrigster Ordnung in $\bar{F}$ sind

$$4S'^2 Z'^2 - Z'^5 = Z'^5\left[4\frac{S'^2}{Z'^3} - 1\right] \text{ folglich ist}$$

$$c_1 = \lim \frac{S'}{Z'^{\frac{3}{2}}} = \pm \frac{1}{2}.$$

Wir erhalten somit die Reihenentwicklungen

$$S' = \frac{1}{2} Z'^{\frac{3}{2}} + \cdots$$

$$S = Z' + S' = Z' + \frac{1}{2} Z'^{\frac{3}{2}} \text{ oder}$$

$$S = Z^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} Z^{\frac{3}{4}} + \cdots.$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß die vier Wurzeln, die im Punkt $Z = 0$ den Wert 0 annehmen, einen Zyklus vierter Ordnung bilden.

§ 57. Doppelpunkte und mehrfache Punkte. Es kann der Fall eintreten, daß zu einem Nullpunkt der Diskriminante D nur uneigentliche Zyklen gehören, daß sich also in diesem Punkt alle n Wurzeln der Grundgleichung regulär verhalten. In diesem Fall gehört der betreffende Punkt nicht zu den singulären Punkten der Funktionen s_ν.

Wir wollen die Bedingungen hierfür feststellen.

Nehmen wir an für $z = e$ sei $s_1 = s_2 \cdots = s_k = \alpha$ und es verhalte sich jede dieser k Wurzeln in der Umgebung des Punktes e regulär.

Für jede der k Wurzeln gilt in diesem Fall eine Reihenentwicklung der Form

$$(1) \qquad s_\varkappa - \alpha = c_1^{(\varkappa)}(z-e) + c_2^{(\varkappa)}(z-e)^2 + c_3^{(\varkappa)}(z-e)^3 + \cdots$$
$$\varkappa = 1, 2, \ldots k.$$

Die Koeffizienten $c_1^{(\varkappa)} c_2^{(\varkappa)} \ldots$ sind die Werte, die die Derivierten

$$s' = \frac{ds}{dz} \quad \frac{1}{2} s'' = \frac{1}{2} \frac{d^2 s}{dz^2} \cdots$$

für $z = e$ $s = \alpha$ annehmen. Um sie zu berechnen differenziieren wir die Grundgleichung und erhalten:

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial s} s' + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial s} s'' + \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} s'^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial z} s' + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial s} s''' + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} s' s'' + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial z} s'' + \frac{\partial^3 f}{\partial s^3} s'^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial s^2 \partial z} s'^2$$
$$+ 3 \frac{\partial^3 f}{\partial s \partial z^2} s' + \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = 0$$

$$(5) \qquad \frac{\partial f}{\partial s} s'''' + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} s' s''' + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial z} s''' + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} s''^2 + 6 \frac{\partial^3 f}{\partial s^3} s'^2 s''$$
$$+ 12 \frac{\partial^3 f}{\partial s^2 \partial z} s' s'' + 6 \frac{\partial^3 f}{\partial s \partial z^2} s'' + \frac{\partial^4 f}{\partial s^4} s'^4 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial s^3 \partial z} s'^3$$
$$+ 6 \frac{\partial^4 f}{\partial s^2 \partial z^2} s'^2 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial s \partial z^3} s' + \frac{\partial^4 f}{\partial z^4} = 0.$$

. . . .

Nehmen wir zunächst an, es sei $k = 2$. In diesem Fall muß für $z = e$ $s = \alpha$ die erste Derivierte $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ sein, dagegen besitzt die zweite Derivierte $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$ einen von Null verschiedenen Wert.

Weil $s' = c_1^{(\varkappa)} (\varkappa = 1, 2)$ einen endlichen Wert hat, folgt aus (2) $\frac{\partial f}{\partial z} = 0$.

Der Gleichung (3), aus der der erste Term links wegen $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ wegfällt, genügen im allgemeinen zwei verschiedene Werte $s' = c_1^{(1)}$ und $s' = c_1^{(2)}$.

Zu jedem dieser beiden Koeffizienten $c_1^{(\varkappa)}$ werden durch die folgenden Gleichungen eindeutig die weiteren Koeffizienten $c_2^{(\varkappa)}\, c_3^{(\varkappa)} \dots$ bestimmt: jedem der beiden Werte $c_1^{(\varkappa)}$ enspricht also eine vollständig bestimmte Reihenentwicklung der Form (1).

Wenn die Wurzeln der Gleichung (3) zusammenfallen, so ist $c_1^{(2)} = c_1^{(1)}$ und zwar ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} c_1^{(1)} + \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial z} = 0.$$

Es fällt deswegen aus der Gleichung (4) s'' heraus und aus der Gleichung (5) fallen s'''' und s''' heraus. Der Gleichung (5) genügen zwei im allgemeinen verschiedene Werte $s'' = c_2^{(1)}$ und $s'' = c_2^{(2)}$ und jedem dieser Werte entspricht eine Reihenentwicklung der Form (1).

Wenn auch die Wurzeln der Gleichung (5) zusammenfallen, so fällt aus der folgenden Gleichung nicht nur die Derivierte fünfter Ordnung $\left(\text{wegen } \frac{\partial f}{\partial s} = 0\right)$, sondern auch die der vierten Ordnung heraus und es ergibt sich eine quadratische Gleichung zur Bestimmung der Koeffizienten $c_3^{(\varkappa)}$ usw.

Auf jeden Fall erhalten wir, wenn die partiellen Derivierten $\frac{\partial f}{\partial s}$ und $\frac{\partial f}{\partial z}$ verschwinden, aber die Derivierte $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$ von Null verschieden ist, zwei verschiedene Reihenentwicklungen der Form (1) und damit ist bewiesen, daß sich die Wurzeln $s_1 s_2$ in der Umgebung des Punktes e regulär verhalten.

Man bezeichnet in diesem Fall den Punkt e als Doppelpunkt.

Nehmen wir nunmehr an, es sei $k = 3$.

In diesem Fall verschwinden im Punkt e die Derivierten $\frac{\partial f}{\partial s}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$, dagegen bleibt $\frac{\partial^3 f}{\partial s^3}$ von Null verschieden.

Aus (2) folgt wieder wegen der Stetigkeit von s', daß die partielle Derivierte $\frac{\partial f}{\partial z}$ verschwindet. Wir behaupten: im Punkt e ist außerdem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Beim Beweis unterscheiden wir, ob die Anfangskoeffizienten der Reihenentwicklungen (1) $c_1^{(1)}\, c_1^{(2)}\, c_1^{(3)}$ alle denselben Wert besitzen oder nicht.

Wenn der letztere Fall eintritt, so müssen der Gleichung (3), aus der nunmehr die beiden ersten Terme fortfallen, wenigstens zwei verschiedene Werte s' genügen. Dies ist nur möglich, wenn die beiden vorstehenden Gleichungen bestehen.

Nehmen wir nun einen Augenblick an, es sei $c_1^{(1)} = c_1^{(2)} = c_1^{(3)}$ und die Derivierte $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial z}$ verschwinde nicht. Unter dieser Annahme bestimmt die Gleichung (4), aus der die beiden ersten Terme wegfallen, eindeutig den Wert der Derivierten s'' für $z = e$, $s = \alpha$; die Gleichung (5) bestimmt eindeutig die Derivierte s''' usw.

Wir erhalten daher nur eine einzige Reihenentwicklung der Form (1) und nicht, wie dies unsere Voraussetzung fordert, deren drei. Es muß daher $\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial z} = 0$ sein und aus (3) folgt dann weiter $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$.

Damit also die drei Wurzeln, die im Punkt e denselben Wert α annehmen, sich in der Umgebung dieses Punktes regulär verhalten, ist erforderlich und wie man sich leicht überzeugt auch hinreichend, daß im Punkt e die partiellen Derivierten erster und zweiter Ordnung des Polynoms $f(s\, z)$ sämtlich verschwinden.

Man bezeichnet den Punkt e, wenn diese Bedingung erfüllt ist, als dreifachen Punkt.

Der Fortgang dieser Schlußweise ist offensichtlich. Wir fassen das Resultat in den Satz zusammen:

Damit genau k Wurzeln der Grundgleichung in einem Punkt e denselben Wert α annehmen und sich in der Umgebung dieses Punktes regulär verhalten, müssen für $z = e$, $s = \alpha$ die sämtlichen partiellen Derivierten des Polynoms $f(s\, z)$, deren Ordnung $< k$ ist, verschwinden, dagegen muß die Derivierte $\frac{\partial^k f}{\partial s^k}$ von Null verschieden bleiben.

Die Unterscheidung zwischen Verzweigungspunkten und Doppelpunkten gestaltet sich in dem Fall sehr einfach, daß in jedem Nullpunkt der Diskriminante nur zwei Wurzeln einander gleich werden.

Ist der Nullpunkt e, in dem $s_1 = s_2$ ist, ein Doppelpunkt, so verhält sich jede der beiden Wurzeln $s_1 s_2$ in der Umgebung dieses Punktes regulär und dasselbe gilt daher auch für ihre Differenz. Deshalb kann die Differenz $s_2 - s_1$ nur wie eine ganze Potenz von $z - e$ Null werden, das Quadrat $(s_2 - s_1)^2$ wird daher zu gerader Ordnung Null.

Ist dagegen der Punkt e für die Wurzeln $s_1 s_2$ ein Verzweigungspunkt, so verhält sich der Quotient $\frac{s_2 - s_1}{\sqrt{z - e}}$ in der Umgebung dieses Punktes regulär (s. § 55), daher wird der Quotient $\frac{(s_2 - s_1)^2}{z - e}$ zu gerader Ordnung Null und das Quadrat $(s_2 - s_1)^2$ wird zu ungerader Ordnung Null.

Nun ist (§ 52 Gleichung (6)) $D = \text{Konst.}\, a_0^{2n-2} P^2$, wo P das Produkt der sämtlichen Wurzeldifferenzen bedeutet. Da nach Voraussetzung der leitende Koeffizient a_0 mit der Diskriminante keinen Nullpunkt gemein hat, so wird die Diskriminante im Punkt e zur selben Ordnung Null wie das Quadrat $(s_2 - s_1)^2$. Daraus folgt:

Unter der Voraussetzung, daß in jedem Nullpunkt der Diskriminante nur zwei Wurzeln der Grundgleichung denselben Wert annehmen, sind die Nullpunkte gerader Ordnung Doppelpunkte, diejenigen ungerader Ordnung Verzweigungspunkte.

§ 58. Die Riemannsche Fläche. In § 54 ist gezeigt worden, daß sich die Werte einer jeden der n Wurzeln s_ν den Punkten einer Sternfläche A_ν eindeutig zuordnen lassen. Die Begrenzung einer jeden Sternfläche A_ν besteht aus den geradlinigen Strecken, die einen beliebig zu wählenden Punkt γ mit den Nullpunkten der Diskriminante und des leitenden Koeffizienten verbinden. Inzwischen haben wir nachgewiesen, daß auf Grund unserer Voraussetzungen (§ 53, S. 257) die Nullpunkte des leitenden Koeffizienten nur Pole aber nicht Verzweigungspunkte der Funktionen s_ν sind, und daß auch unter den Nullpunkten der Diskriminante solche vorkommen können, die keine Verzweigungspunkte sind. Wir behalten nun von der Begrenzung der Sternflächen A_ν nur diejenigen

Strecken bei, die den Punkt γ mit Verzweigungspunkten verbinden, die übrigen werden weggenommen. Die so modifizierten Sternflächen mögen mit A'_ν bezeichnet werden. In der Fläche A'_ν verhält sich die Wurzel s_ν nicht mehr überall regulär, aber sie hat wenigstens den Charakter einer einwertigen Funktion (vergl. § 49).

Es muß nun untersucht werden, in welcher Weise die n Sternflächen A'_ν zusammenhängen. Zu dem Zweck erinnern wir an die Überlegungen, die wir in § 55 durchgeführt haben.

Wir haben um einen beliebigen Verzweigungspunkt e zwei Kreise gelegt, die eine Ringfläche R begrenzen, und haben sodann diese Fläche R durch eine die Grenzkreise verbindende Sperrlinie L in eine einfach zusammenhängende Fläche R' verwandelt. Innerhalb R' sind die Wurzeln s_ν einwertig; sie werden aber — wenigstens zum Teil — längs der Sperrlinie L unstetig. Die Wurzelwerte, die in einem Punkt auf dem + Rand der Sperrlinie stattfinden, sind eine Permutation der Wurzelwerte, die in dem gegenüberliegenden Punkt auf dem — Rand stattfinden. Es besteht also längs L eine Relation der Form

$$(1) \qquad \overset{+}{s}_1 = \overset{-}{s}_{\lambda_1} \quad \overset{+}{s}_2 = \overset{-}{s}_{\lambda_2} \; \ldots \; \overset{+}{s}_n = \overset{-}{s}_{\lambda_n},$$

wo $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$ eine Permutation der Zahlen $1, 2 \ldots n$ bedeuten.

Es steht nichts im Wege, daß wir die Sperrlinie L in die Verbindungslinie der Punkte γ und e fallen lassen. Unter der Voraussetzung, daß auf dieser Verbindungslinie außer dem Punkt e kein Verzweigungspunkt liegt — eine Voraussetzung, an der wir durchweg festhalten — gilt die Beziehung (1) nicht nur für den Teil der Strecke γe, der in die Ringfläche R fällt, sondern für die ganze Strecke (vergl. § 49). Demnach stimmt der Funktionswert $s = s_1$, der in der Sternfläche A'_1 auf der + Seite der Strecke γe stattfindet, mit dem Funktionswert $s = s_{\lambda_1}$ überein, der in der Sternfläche A'_{λ_1} auf der — Seite der Strecke γe stattfindet. Ebenso stimmt der Funktionswert, der in A'_2 auf der + Seite von γe stattfindet, mit dem Funktionswert überein, der in A'_{λ_2} auf der — Seite von γe stattfindet usw.

Wir schneiden nun eine jede der n-Sternflächen A'_ν längs der Verbindungslinie γe auf und heften sodann den + Rand der Fläche A'_1 an den − Rand von A'_{λ_1}, den + Rand von A'_2 an den − Rand von A'_{λ_2} ... endlich den + Rand von A'_n an den − Rand von A'_{λ_n}. Dieselbe Operation ist für einen jeden Teil der Begrenzung der Sternflächen A'_ν durchzuführen.

Wir gelangen so zu einer n-blättrigen Fläche, der „Riemannschen Fläche“.

Dem Vorgang Riemanns folgend bezeichnen wir sie mit T.

Die Fläche T besitzt keine Begrenzung, denn die Sperrlinien, die die n Sternflächen A'_ν begrenzen, sind dadurch, daß ihre Ränder paarweise aneinander geheftet worden sind, in Wegfall gekommen.

In einem Verzweigungspunkt, zu dem ein $\mu + 1$-facher Wurzelzyklus gehört, hängen $\mu + 1$ Blätter der Fläche T zusammen. Man bezeichnet den Punkt deswegen als μ-fachen Windungspunkt der Fläche T.

Sofern zu demselben Verzweigungspunkt mehrere Zyklen gehören, liegen mehrere Windungspunkte der Fläche T übereinander.

In einem μ-fachen Windungspunkt endigen μ Übergangslinien, längs denen je zwei der Flächen A'_ν zusammenhängen. Da der Punkt γ so gewählt ist, daß er kein Verzweigungspunkt also auch kein Windungspunkt der Fläche T ist, so kann in ihm auch keine Übergangslinie endigen. Eine jede Übergangslinie besteht demnach aus zwei geradlinigen Strecken, die im Punkt γ zusammenstoßen.[1]

Die Werte der Funktion s sind den Punkten der Fläche T eindeutig zugeordnet: den n Werten $s_1 s_2 \ldots s_n$, die einem Wert der unabhängigen Variabeln z entsprechen, sind n übereinander liegende Punkte der n-blättrigen Fläche T zugeordnet.

Es ist einleuchtend, daß jede Voraussetzung, die wir bezüglich unserer Grundgleichung $f(s\,|\,z) = 0$ gemacht haben, in der Gestaltung der Fläche T ihren geometrischen Ausdruck finden muß.

Wir wollen zusehen, welche geometrische Eigenschaft sich aus unserer Voraussetzung, daß die Grundgleichung irreduzibel ist, ergibt.

Nehmen wir einen Augenblick an, die Grundgleichung sei reduzibel und es sei $g(s\,z)$ ein Faktor von $f(s\,z)$. Die Wurzeln der Gleichung $g(s\,z) = 0$ seien die Wurzeln $s_1 s_2 \ldots s_k$. Wir ziehen nun in der einfachen z-Ebene eine geschlossene sich nicht überkreuzende Kurve C, und setzen von einem Punkt z_0 dieser Kurve aus die Funktionszweige $s_1 s_2 \ldots s_k$ längs der Kurve analytisch fort. Die Endwerte, zu denen wir nach dem Punkt z_0 zurückkehrend gelangen, können nur eine Permutation der Anfangswerte sein.

Die Funktionszweige $s_1 s_2 \ldots s_k$ sind den Blättern $A'_1 A'_2 \ldots A'_k$ der Fläche T eindeutig zugeordnet. Aus der Tatsache, daß die analytische Fortsetzung dieser k Funktionszweige nur zu einer Permutation derselben unter sich führt, folgt daß die k Blätter $A'_1 A'_2 \ldots A'_k$ nur unter sich aber mit keinem der übrigen Blätter zusammenhängen. Die Fläche T besteht daher aus mindestens zwei getrennten Stücken.

Diese Schlußfolgerungen sind offenbar umkehrbar.

Nehmen wir an, die Fläche T zerfalle in zwei getrennte Stücke, von denen das erste aus den Blättern $A'_1 A'_2 \ldots A'_k$, das zweite aus den $n-k$ übrigen Blättern besteht. Unter dieser Voraussetzung werden wir, wenn wir die Funktionszweige $s_1 s_2 \ldots s_k$ in der einfachen z-Ebene längs einer geschlossenen Kurve fortsetzen, immer nur zu einer Permutation dieser k Funktionszweige gelangen. Daraus folgt: jede symmetrische Funktion der Funktionswerte $s_1 s_2 \ldots s_k$ ist eine in der einfachen z-Ebene einwertige Funktion. Die Wurzeln $s_1 s_2 \ldots s_k$ besitzen nur eine endliche Anzahl polarer Unstetigkeiten aber keine wesentlich singulären Stellen. Dies überträgt sich auf ihre symmetrischen Funktionen: es sind dies also einwertige Funktionen der Variabeln z, die nur eine endliche Anzahl von Polen besitzen. Daraus folgt: die symmetrischen Funktionen der Wurzeln $s_1 s_2 \ldots s_k$ sind rationale Funktion der Variabeln z (§ 28). Die Größen $s_1 s_2 \ldots s_k$ sind also Wurzeln einer algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten rationale Funktionen der Variabeln z sind. Dies ist unmöglich, wenn die Grundgleichung $f(s\,z) = 0$ irreduzibel ist. Damit ist bewiesen:

Die Riemannsche Fläche, die der Grundgleichung

$f(s|z) = 0$ entspricht, ist zusammenhängend oder zerfällt in Stücke, je nachdem die Grundgleichung irreduzibel oder reduzibel ist.

Die Konstruktion der Riemannschen Fläche kann in mannigfaltiger Weise modifiziert werden, ohne daß ihr Zweck, die Verzweigung der Funktion s geometrisch anschaulich zu machen, beeinträchtigt wird. Die eben durchgeführte Art der Konstruktion bietet den Vorteil, daß sie die Rolle, die der einzelne Verzweigungspunkt spielt, besonders klar hervortreten läßt.

Dem steht der Nachteil gegenüber, daß jede Übergangslinie durch einen der n Punkte geht, in denen $z = \gamma$ ist, was für die Anschauung etwas störend wirkt. Dieser Übelstand wird bei der folgenden viel benutzten Art der Konstruktion vermieden.

Wir ordnen die Verzweigungspunkte nach Belieben in eine Reihe $c_1\, c_2\, c_3 \ldots$ und verbinden sie durch eine sich nicht überkreuzende Sperrlinie L, bei der wir wieder eine $+$ Seite und eine $-$ Seite unterscheiden. In der durch die Sperrlinie L zerschnittenen Ebene ist eine jede der n Wurzeln s_r einwertig (vergl. die Ausführungen in § 48). Die Wurzelwerte, die in einem Punkt auf der $+$ Seite der Sperrlinie stattfinden, sind eine Permutation der Wurzelwerte, die im gegenüberliegenden Punkt auf der $-$ Seite stattfinden. Längs des Abschnittes der Sperrlinie, der von zwei aufeinander folgenden Verzweigungspunkten $c_\nu\, c_{\nu+1}$ begrenzt wird, bleibt die Permutation unverändert, aber sie wechselt von einem Abschnitt der Sperrlinie zum andern. Wir legen nun wieder n Exemplare der mit der Sperrlinie L versehenen z-Ebene aufeinander und ordnen jedem Blatt die Werte einer Wurzel zu. Sodann schneiden wir jedes Blatt längs der Linie L auf und wenden das oben erörterte Heftungsprinzip an. Auf diese Weise gelangen wir zu einer neuen Gestalt der Riemannschen Fläche T: sie bietet für die Anschauung den Vorteil, daß sich die Übergangslinien nicht überkreuzen.

Wir wollen diese Gestalt der Riemannschen Fläche etwas genauer untersuchen, dabei aber die vereinfachende Voraussetzung machen, daß in einem Nullpunkt der Diskriminante immer nur zwei Wurzeln denselben Wert annehmen. Unter dieser Voraussetzung besitzt die Riemannsche Fläche nur Windungspunkte erster Ordnung; ihre Anzahl möge mit w bezeichnet werden. Da die Diskriminante in einem Verzweigungspunkt zu ungerader Ordnung, in einem Doppelpunkt aber zu gerader Ordnung verschwindet (s. den Schluß des vorigen Paragraphen), so ist die Differenz zwischen der Gesamtzahl der Nullpunkte der Diskriminante $2m(n-1)$ und der Anzahl der Verzweigungspunkte w jedenfalls eine gerade Zahl: wir bezeichnen sie mit $2d$. Aus der Gleichung $w = 2m(n-1) - 2d$ folgt, daß die Zahl w gerade ist. Jeder einfache Verzweigungspunkt ist Endpunkt einer und nur einer Übergangslinie: die w Verzweigungspunkte ordnen sich also zu

$$\frac{1}{2}w = m(n-1) - d$$

Paaren, von denen jedes eine Übergangslinie begrenzt. Um den Zusammenhang zwischen den n Blättern der Riemannschen Fläche herzustellen, sind nur $n-1$ Übergangslinien erforderlich, die übrigen

$$p = \frac{1}{2}w - (n-1) = (m-1)(n-1) - d$$

sind überzählig. Diese Zahl p spielt bei tieferen Untersuchungen über algebraische Funktionen eine fundamentale Rolle: man bezeichnet sie als „Geschlecht“ der Grundgleichung. Eine eingehendere Erörterung der Bedeutung von p würde uns zu weit führen, wir wollen sie aber wenigstens durch zwei Beispiele erläutern. Wir beschränken uns dabei auf den Fall $n = 2$ und nehmen zunächst $p = 0$ an. Unter dieser Annahme besteht die Riemannsche Fläche aus zwei Blättern, die durch eine Übergangslinie verbunden sind. Jede geschlossene Kurve bildet für sich die vollständige Begrenzung eines Stücks der Fläche T und kann dementsprechend durch stetige Deformation auf einen Punkt zusammengezogen werden. Die drei

Fig. 33.

Kurven ABC in der vorstehenden Figur 33 veranschaulichen die drei möglichen Typen geschlossener Kurven auf der Fläche T.

Der im unteren Blatt verlaufende Teil der Kurve B ist punktiert gezeichnet. Die Kurven B und C begrenzen das eingeschlossene Flächenstück, die Kurve A begrenzt den außerhalb liegenden Teil des oberen Blattes. Um die letztere Kurve durch stetige Deformation auf einen Punkt zusammenzuziehen, müssen wir den unendlich fernen Punkt überschreiten.

Die Fläche T ist einfach zusammenhängend. In zweiten Beispiel des § 18 ist die Abbildung einer zweiblättrigen Fläche vom Geschlecht Null auf die einfache Ebene durchgeführt worden.

Nehmen wir nunmehr an, es sei $p = 1$. In diesem Fall sind die beiden Blätter der Riemannschen Fläche durch zwei Übergangslinien verbunden. Es gibt in diesem Fall geschlossene Kurven, die nicht die vollständige Begrenzung eines Teils der Fläche T bilden. Als Beispiel können die in Fig. 29 § 51 verzeichneten Kurven Q_1 und Q_2 dienen.

Die Fläche T ist in diesem Fall nicht einfach zusammenhängend; sie wird dies aber, wenn wir sie durch die Sperrlinien Q_1 und Q_2 begrenzen.

Die begrenzte Fläche kann auf ein einblättriges einfach zusammenhängendes Flächenstück abgebildet werden. In § 51 ist diese Abbildung unter der Voraussetzung durchgeführt worden, daß die beiden Übergangslinien in die Achse der reellen Zahlen fallen.

§ 59. Beispiel einer Riemannschen Fläche. Um die Konstruktion der Riemannschen Fläche durch ein Beispiel zu erläutern, gehen wir von der Grundgleichung aus

$$\begin{aligned} f(s\,z) &= (s-1)^3 + (z^2-1)(2s^3+3s-1) \\ &= z^2(2s^3+3s-1) - (s^3+3s^2) = 0. \end{aligned}$$

Die Diskriminante des Polynoms

$$a_0 s^3 + 3a_1 s^2 + 3a_2 s + a_3 \text{ ist}$$

$$= 81\left[(a_0 a_3 - a_2^{\,2})^2 - 4(a_0 a_2 - a_1^{\,2})(a_1 a_3 - a_2^{\,2})\right]$$

wie man leicht mit Hilfe der Gleichung (3) des § 52 verifiziert.

Demnach ist die Diskriminante des Polynoms $f(s\,z)$

$$D = 4 \cdot 81\, z^2(z^2-1)^2(3z^2+1).$$

Sie besitzt den Normalgrad $2m(n-1) = 8$.

Der leitende Koeffizient ist $2z^2 - 1$, daher fallen die Pole der Wurzeln in die Punkte $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Es ist nun das Verhalten der Wurzeln in der Umgebung der verschiedenen Nullpunkte der Diskriminante zu untersuchen.

1) Dem Wert $z = 0$ entspricht die Doppelwurzel $s = 0$ und die einfache Wurzel $s = -3$.

Die Glieder niedrigster Ordnung des Polynoms $f(s, z)$ sind die Terme $-z^2 - 3s^2$. Daher gilt für die Doppelwurzel die Gleichung

$$\lim_{z=0} \frac{s}{z} = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}.$$

Der Punkt $z = 0$ ist daher kein Verzweigungspunkt, sondern ein Doppelpunkt und es verhalten sich demnach in seiner Umgebung alle drei Wurzeln regulär.

2) Den beiden Werten $z = +1$ und $z = -1$ entspricht die dreifache Wurzel $s = 1$.

Um das Verhalten der Wurzeln in der Umgebung des Punktes $z = +1$ zu untersuchen, transformieren wir die Grundgleichung durch die Substitution

$$z = 1 + Z \quad s = 1 + S.$$

Wir erhalten

$$f(s, z) = F(S, Z) = S^3 - (Z^2 + 2Z)(2S^3 + 6S^2 + 9S + 4).$$

Die in § 56 erörterte geometrische Repräsentation der Glieder des Polynoms F durch Punkte liefert das nebenstehende Schema (Fig. 34). Aus demselben ergibt sich, daß der Grenzwert

$$\lim_{Z=0} \frac{S}{\sqrt[3]{Z}}$$

endlich sein muß. Dieser Grenzwert ist gleich einem der drei Werte von $\sqrt[3]{-8}$. In der Umgebung des Punktes $z = 1$ bilden demnach die drei Wurzeln einen Zyklus dritter Ordnung und dasselbe gilt für die Umgebung des Punktes $z = -1$.

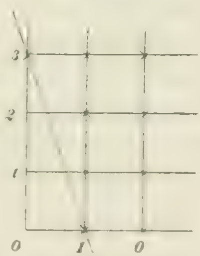


Fig. 34.

3) Für $z^2 = -\frac{1}{3}$ ist

$$5s^3 + 9s^2 + 3s - 1 = 0.$$

Die Gleichung besitzt die Doppelwurzel $s = -1$ und die einfache Wurzel $s = \frac{1}{5}$.

Um das Verhalten der Wurzeln, die im Punkt $z = \frac{i}{\sqrt{3}}$ denselben Wert annehmen, zu untersuchen, transformieren wir die Grundgleichung durch die Substitution

$$z = \frac{i}{\sqrt{3}} + Z \quad s = -1 + S.$$

Wir erhalten

$$f(s, z) = F(S, Z) = 2S^2 - 10S^3$$
$$+ \left(\frac{2i}{\sqrt{3}} Z + Z^2\right)(-6 - 9S - 12S^2 + 12S^3).$$

Die Glieder niedrigster Ordnung lauten

$$2S^2 - 4\sqrt{3}\, iZ.$$

Daher ist

$$\lim_{Z=0} \frac{S}{\sqrt{Z}} = \pm \sqrt[4]{3}\,(1 + i).$$

Die beiden Wurzeln der Grundgleichung, die im Punkt $z = \frac{i}{\sqrt{3}}$ einander gleich werden, bilden somit einen zweigliedrigen Zyklus.

Analoges gilt für den Punkt $z = -\frac{i}{\sqrt{3}}$: auch in diesem Punkt bleibt eine Wurzel regulär, die beiden anderen bilden einen Zyklus.

Nach diesen Vorbereitungen konstruieren wir die Sternfläche A', deren Punkten die Werte einer jeden der drei Wurzeln eindeutig zugeordnet werden können. Wir wählen für den im vorigen Paragraphen mit γ bezeichneten Punkt den Nullpunkt, begrenzen also die Sternfläche durch die Verbindungslinien des Nullpunktes mit den vier Verzweigungspunkten ± 1, $\pm \frac{i}{\sqrt{3}}$.

Zunächst müssen nun die drei Wurzeln s_ν eindeutig definiert werden. Zu dem Zweck schicken wir eine Bemerkung über die Werte voraus, die die Wurzeln auf den Koordinatenachsen annehmen. Die Koeffizienten der Grundgleichung haben auf den Koordinatenachsen reelle Werte. Nun hat bekanntlich eine Gleichung dritten Grades mit reellen Koeffizienten drei reelle Wurzeln oder eine reelle und zwei konjugiert imaginäre Wurzeln, je nachdem die Diskriminante negativ oder positiv ist.

Demnach entsprechen jedem Punkt der Abszissenachse mit Ausnahme des Nullpunktes eine reelle und zwei konjugiert imaginäre Wurzeln; dasselbe gilt für den Teil der Ordinatenachse, der außerhalb der durch die Punkte $z = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$ begrenzten Strecke liegt, dagegen entsprechen jedem Punkt dieser Strecke drei reelle Wurzeln.

Sodann bemerken wir: in der Umgebung des unendlich fernen Punktes verhalten sich die drei Wurzeln regulär: sie lassen sich daher durch drei Potenzreihen $\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{1}{z}\right)$ darstellen, die nach absteigenden Potenzen von z fortschreiten (§ 54 Schluß). Diese Reihen konvergieren, so lange der absolute Betrag $|z| > 1$ ist, weil außerhalb des Einheitskreises kein singulärer Punkt liegt.

Da reellen Werten von z eine reelle und zwei konjugiert imaginäre Wurzeln entsprechen, so muß eine der drei Reihen — es sei dies die Reihe $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right)$ — reelle Koeffizienten besitzen; entsprechende Koeffizienten der beiden Reihen $\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{z}\right)$ und $\mathfrak{P}_3\left(\frac{1}{z}\right)$ sind konjugiert imaginär. Die imaginären Teile der beiden Reihen können in keinem Punkt des Teiles der Abszissenachse, der in ihren Konvergenzkreis fällt, verschwinden, weil sonst eine Doppelwurzel auftreten würde, sie haben daher längs dieses Teiles der Abszissenachse ein unveränderliches Vorzeichen. Wir wählen die Bezeichnung so, daß der imaginäre Teil von $\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{z}\right)$ das positive, also der von $\mathfrak{P}_3\left(\frac{1}{z}\right)$ das negative Vorzeichen hat.

Wir setzen nun bezüglich der Bezeichnung der Wurzeln fest: in der Umgebung des unendlich fernen Punktes sei

$$s_\nu = \mathfrak{P}_\nu\left(\frac{1}{z}\right) \quad (\nu = 1, 2, 3).$$

Damit sind die drei Wurzeln für die Sternfläche A' vollständig definiert.

In der Umgebung des Punktes $z = \frac{i}{\sqrt{3}}$ verhält sich eine der drei Wurzeln regulär (s. Nr. 3); diese Wurzel läßt sich daher durch eine nach Potenzen von $z - \frac{i}{\sqrt{3}}$ fortschreitende Reihe $\mathfrak{P}'\left(z - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$ darstellen. Der Konvergenzkreis dieser Reihe reicht bis zum Nullpunkt. Die Reihe muß für den Abschnitt der Ordinatenachse zwischen dem Nullpunkt und dem Punkt $\frac{i}{\sqrt{3}}$ reelle Werte liefern. Sie nimmt deshalb auch auf dem in den Konvergenzkreis fallenden Teil der Ordinatenachse, der auf der andern Seite des Punktes $z = \frac{i}{\sqrt{3}}$ liegt, reelle Werte an. Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nur die Reihe in der Form

$$\mathfrak{P}'\left(z - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) = c_0 + c_2\left(z - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^2 + c_4\left(z - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^4 + \cdots$$
$$+ i\left[c_1\left(z - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) + c_3\left(z - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^3 + \cdots\right]$$

zu schreiben. Damit die Reihe für positiv imaginäre Werte von z, deren absoluter Betrag $< \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, einen reellen Wert besitzt, müssen die Koeffizienten c_λ sämtlich reell sein; ist diese Bedingung erfüllt, so hat die Reihe auch für rein imaginäre Werte, die dem absoluten Betrag nach $> \frac{1}{\sqrt{3}}$ sind, einen reellen Wert.

Der Teil der Ordinatenachse zwischen den Punkten $z = i$ und $z = \frac{2i}{\sqrt{3}}$ fällt in das gemeinschaftliche Konvergenzgebiet der Reihen $\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{1}{z}\right)$ und $\mathfrak{P}'\left(z - \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$. Da für diese Strecke nur die Reihe $\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{z}\right) = s_1$ reelle Werte liefert, so ist

$$\mathfrak{P}'\left(z - \frac{i}{\sqrt{3}}\right) = s_1.$$

Demnach verhält sich die Wurzel s_1 in der Umgebung des Punktes $z = \frac{i}{\sqrt{3}}$ regulär, die Wurzeln s_2 und s_3 bilden einen Zyklus.

Auf dieselbe Art ist zu beweisen, daß sich die Wurzel s_1

auch in der Umgebung des Punktes $z = -\frac{i}{\sqrt{3}}$ regulär verhält, während die beiden Wurzeln s_2 und s_3 einen Zyklus bilden.

In der Umgebung des Punktes $z = 1$ bilden die drei Wurzeln einen Zyklus (s. Nr. 2), sie lassen sich daher durch eine nach Potenzen von $\sqrt[3]{z-1}$ fortschreitende Reihe $\mathfrak{P}''(\sqrt[3]{z-1})$ darstellen. Diese Reihe stellt die drei Wurzeln dar, wenn wir der Wurzel $\sqrt[3]{z-1}$ der Reihe nach ihre drei Werte beilegen.

Die Werte der Wurzeln $\sqrt[3]{z-1}$ lassen sich — wenigstens soweit die Umgebung des Punktes $z = 1$ in Betracht kommt — der Sternfläche A' eindeutig zuordnen. Wir bezeichnen mit ζ diejenige der drei Wurzeln $\sqrt[3]{z-1}$, die für reelle, die Einheit übersteigende Werte von z einen reellen Wert hat, mit ε die Einheitswurzel $e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Bei Anwendung dieser Bezeichnungen erhalten wir zur Darstellung der Wurzeln die drei Reihen

$$\mathfrak{P}''(\zeta) \qquad \mathfrak{P}''(\varepsilon\zeta) \qquad \mathfrak{P}''(\varepsilon^2\zeta).$$

Die Anfangsglieder der Reihen lauten (s. Nr. 2)

$$1 - 2\zeta \ldots \qquad 1 - 2\varepsilon\zeta \ldots \qquad 1 - 2\varepsilon^2\zeta \ldots$$

Damit längs der Abszissenachse eine Wurzel reell ist, müssen die Koeffizienten der Reihe $\mathfrak{P}''$ reell sein.

In den Punkten der Achse, deren Abszissen > 1 sind, ist die Wurzel s_1 reell, die Wurzel s_2 hat einen positiven, die Wurzel s_3 einen negativen imaginären Bestandteil. Daher ist

$$s_1 = \mathfrak{P}''(\zeta) = 1 - 2\zeta \cdots \qquad s_2 = \mathfrak{P}''(\varepsilon^2\zeta) = 1 - 2\varepsilon^2\zeta \cdots$$
$$s_3 = \mathfrak{P}''(\varepsilon\zeta) = 1 - 2\varepsilon\zeta \cdots$$

Setzen wir $z - 1 = re^{\varphi i}$ wo $-\pi < \varphi \leqq +\pi$ ist.

Längs des Abschnittes der Abszissenachse zwischen den Punkten $z = 0$ und $z = 1$ ist

auf der + Seite

$$\varphi = \pi \qquad \zeta = \sqrt[3]{r}\, e^{\frac{\pi i}{3}} \qquad \varepsilon\zeta = -\sqrt[3]{r} \qquad \varepsilon^2\zeta = \sqrt[3]{r}\, e^{-\frac{\pi i}{3}}$$

auf der — Seite

$$\varphi = -\pi \qquad \zeta = \sqrt[3]{r}\, e^{-\frac{\pi i}{3}} \qquad \varepsilon\zeta = \sqrt[3]{r}\, e^{\frac{\pi i}{3}} \qquad \varepsilon^2\zeta = -\sqrt[3]{r}.$$

Folglich ist

$$\overset{+}{s}_1 = 1 - 2\sqrt[3]{r}\,e^{\frac{\pi i}{3}}\cdots,\quad \overset{+}{s}_2 = 1 + 2\sqrt[3]{r}\cdots,\quad \overset{+}{s}_3 = 1 - 2\sqrt[3]{r}\,e^{-\frac{\pi i}{3}}\cdots$$

$$\overset{-}{s}_1 = 1 - 2\sqrt[3]{r}\,e^{-\frac{\pi i}{3}}\cdots,\quad \overset{-}{s}_2 = 1 - 2\sqrt[3]{r}\,e^{\frac{\pi i}{3}}\cdots,\quad \overset{-}{s}_3 = 1 + 2\sqrt[3]{r}\cdots$$

Es gelten also längs der Sperrlinie 0, 1 die Beziehungen:

$$(1)\qquad \overset{+}{s}_1 = \overset{-}{s}_2 \quad \overset{+}{s}_2 = \overset{-}{s}_3 \quad \overset{+}{s}_3 = \overset{-}{s}_1 .$$

Man beweist auf demselben Wege, daß längs der Sperrlinie, die die Punkte $z = 0$ und $z = -1$ verbindet, die Beziehungen

$$(2)\qquad \overset{+}{s}_1 = \overset{-}{s}_3 \quad \overset{+}{s}_3 = \overset{-}{s}_2 \quad \overset{+}{s}_2 = \overset{-}{s}_1 \text{ stattfinden.}$$

Hierzu ist zu bemerken: wir haben festgesetzt, daß ein positiver Umlauf um den Verzweigungspunkt, in dem eine Sperrlinie endigt, von der $-$ Seite auf die $+$ Seite derselben führen soll. Demnach fällt die $+$ Seite der Sperrlinie 0, 1 mit der Seite der wachsenden Ordinaten, die $+$ Seite der Sperrlinie 0, -1 mit der Seite der abnehmenden Ordinaten zusammen.

Setzen wir unter Abänderung der bisher gebrauchten Bezeichnung fest, daß als $+$ Seite der ganzen Strecke -1, $+1$ die Seite der wachsenden Ordinaten betrachtet werden soll, so gelten für die ganze Strecke die Beziehungen (1).

Damit ist die Verzweigung der Wurzeln festgestellt.

Nun legen wir für jede Wurzel s_ν ein eigenes Blatt A'_ν an, schneiden diese Blätter längs der Sperrlinien auf und heften sie dann zur Fläche T zusammen. Längs der Sperrlinie, die in die Ordinatenachse fällt, hängen die Blätter A'_2 und A'_3 zusammen, der Zusammenhang des Blattes A'_1 ist nicht unterbrochen. Längs der Sperrlinie, die in die Abszissenachse fällt, erfolgt die Heftung derart, daß man im Sinne der abnehmenden Ordinaten fortschreitend vom Blatt A'_1 ins Blatt A'_2, von A'_2 nach A'_3 und von A'_3 nach A'_1 gelangt.

Um den Zusammenhang zwischen den drei Blättern der Fläche T herzustellen, genügen die beiden Übergangslinien, die in die Abszissenachse fallen; die in die Ordinatenachse fallende Übergangslinie ist überzählig.

Daher ist das Geschlecht der Grundgleichung $= 1$.

§ 60. Über die Funktionen, die auf der Fläche T einwertig sind. Da die Werte der algebraischen Funktion s den Punkten der Fläche T eindeutig zugeordnet sind, so ist auch jede rationale Funktion der beiden Variabeln z und s auf dieser Fläche einwertig.

Nehmen wir nun umgekehrt an, es sei eine auf der Fläche T einwertige Funktion σ gegeben, die nur in isolierten Punkten unstetig wird; die Werte, die sie in n einander bedeckenden Punkten der Fläche T annimmt, bezeichnen wir mit $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$.

Um die analytische Bedeutung unserer Annahme klar zu stellen, sehen wir zu, wie die Punkte der Funktion σ den Punkten der schlichten z-Ebene zugeordnet sind. Zu dem Zweck ziehen wir in der z-Ebene von einem beliebigen Punkt z ausgehend eine in sich zurücklaufende, sich nicht überkreuzende Kurve L. Projizieren wir diese Kurve auf die Fläche T, so erhalten wir n Kurven $L_1 L_2 \ldots L_n$; die Kurve L_ν beginnt in dem den Punkt z bedeckenden Punkt z, s_ν und endigt entweder in demselben Punkt oder in einem andern ebenfalls den Punkt z bedeckenden Punkt z, s_{λ_ν}. Es ist offenbar nur eine verschiedene Ausdrucksweise derselben Sache, ob wir sagen wir verfolgen auf der Fläche T den Verlauf der Funktion σ längs der Wege $L_1 L_2 \ldots L_n$, oder ob wir sagen, wir setzen in der schlichten z-Ebene die n Funktionswerte, die im Punkt z stattfinden, längs der Kurve L fort. Aus unserer Voraussetzung, daß die Funktion σ auf der Fläche T einwertig ist, folgt nun sofort: setzen wir in der schlichten z-Ebene vom Punkt z ausgehend den Funktionszweig s_ν und den Funktionszweig σ_ν längs der Kurve L analytisch fort, so gelangen wir zu den Funktionszweigen s_{λ_ν} und σ_{λ_ν}. Mit anderen Worten: die n Funktionszweige σ_ν werden bei dieser analytischen Fortsetzung in derselben Weise permutiert wie die Funktionszweige s_ν.

Wir bilden nun, unter t einen verfügbaren Parameter verstehend, die Funktion

$$(1) \qquad \Phi(t, z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sigma_\nu}{f'(s_\nu, z)} \, \frac{f(t, z)}{t - s_\nu}.$$

Wir halten zunächst den Wert der Variabeln z fest und betrachten t als unabhängig variabel. Da $f(s_\nu | z) = 0$ ist, ist Φ eine ganze Funktion $n-1^{\text{ten}}$ Grades von t. Es sei

$$(2) \qquad \Phi(t\, z) = A_0 t^{n-1} + A_1 t^{n-2} \cdots + A_{n-1}.$$

Die Koeffizienten $A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ sind Funktionen der Variabeln z.

Nun halten wir den Wert des Parameters t fest und lassen den Punkt z die Kurve L durchlaufen. Bei der analytischen Fortsetzung längs der Kurve L werden die Anfangswerte σ_ν in derselben Weise permutiert wie die Anfangswerte s_ν. Daher kehrt die Funktion Φ, wie aus der Darstellungsform (1) hervorgeht, zu ihrem Ausgangswert zurück. Bei konstantem t ist also Φ eine einwertige Funktion der Variabeln z, folglich sind auch die Koeffizienten $A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$ einwertige Funktionen von z. Setzen wir nun den verfügbaren Parameter $t = s_\nu$, so folgt aus (1) und (2)

$$(3) \qquad \sigma_\nu = A_0 s_\nu^{n-1} + A_1 s_\nu^{n-2} \cdots + A_{n-1} \quad \nu = 1, 2, \cdots n$$

Die Funktion σ läßt sich also als ganze Funktion $n-1^{\text{ten}}$ Grades von s darstellen; die Koeffizienten sind einwertige Funktionen der Variabeln z.

Nehmen wir nun weiter an, die Funktion σ besitze nur eine endliche Anzahl von Polen, aber keine wesentliche singuläre Stelle, so gilt dasselbe für die Koeffizienten $A_0 A_1 \ldots A_{n-1}$. Unter dieser Annahme sind also die Koeffizienten rationale Funktionen der Variabeln z. Damit ist bewiesen:

Eine Funktion, die auf der Fläche T einwertig ist und nur eine endliche Anzahl von Polen besitzt, läßt sich als rationale Funktion der Variabeln z und s darstellen.

Riemann bezeichnet eine Funktion, deren Werte den Punkten der Fläche T eindeutig zugeordnet werden können als verzweigt wie die Fläche T und faßt die Gesamtheit dieser gleichverzweigten Funktionen in eine Klasse zusammen. Diejenigen Funktionen der Klasse, die nur eine endliche Anzahl von Polen besitzen, also sich als rationale Funktionen von z und s darstellen lassen, bezeichnet man als algebraische Funktionen der Klasse.

Eine Funktion σ der Klasse, die auf der Fläche T nirgends unstetig wird, ist eine Konstante.

Zum Beweis ist zu bemerken: eine symmetrische Funktion der Werte $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n$, die die Funktion σ ineinander bedeckenden Punkten der Fläche T annimmt, ist zufolge (3) einwertige Funktion der Variabeln z. Auf diese Funktion überträgt sich die Eigenschaft der Funktion σ nirgends unstetig zu werden, daher ist diese Funktion eine Konstante (§ 29).

Folglich ist σ Wurzel einer algebraischen Gleichung mit konstanten Koeffizienten, also selbst konstant.

Von der Darstellung (3) der Funktion σ ausgehend gelangt man leicht zu den Reihenentwicklungen, die eine Funktion der Klasse in der Umgebung eines Punktes der Fläche T darstellen. Dabei wollen wir, um Weitläufigkeiten zu vermeiden, nur solche Funktionen in Betracht ziehen, die nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten besitzen.

Die Koeffizienten $A_0 A_1 A_2 \ldots A_{n-1}$ lassen sich in der Umgebung eines Punktes β der Fläche T, in dem sie sich regulär verhalten, durch eine nach Potenzen von $z - \beta$ fortschreitende Taylorsche Reihe darstellen.

Wird im Punkt β einer der Koeffizienten unstetig, so tritt an Stelle der betreffenden Taylorschen Reihe eine nach auf- und absteigenden Potenzen von $z - \beta$ fortschreitende Laurentsche Reihe. Die Wurzel s_1 läßt sich in der Umgebung des Punktes β ebenfalls durch eine nach Potenzen von $z - \beta$ fortschreitende Reihe darstellen, wenn der Punkt β nicht in einen Windungspunkt der Fläche T fällt; ist dagegen der Punkt β ein μ-facher Windungspunkt, so wird s_1 durch eine nach Potenzen der Wurzel $(z - \beta)^{\frac{1}{\mu}}$ fortschreitende Reihe dargestellt. Diese Reihen enthalten nur positive Potenzen von $z - \beta$, wenn die Wurzel s_1 im Punkt β stetig ist; ist dagegen der Punkt β ein Pol der Wurzel s_1, so treten auch negative Potenzen von $z - \beta$ auf, aber nur in endlicher Anzahl.

Daraus folgt:

Eine Funktion σ der Klasse läßt sich in der Umgebung des Punktes β der Fläche T durch eine Reihe darstellen, die nach Potenzen von $z - \beta$ oder nach

Potenzen von $(z-\beta)^{\frac{1}{\mu}}$ fortschreitet, je nachdem der Punkt β ein gewöhnlicher Punkt der Fläche oder ein μ-facher Windungspunkt ist.

Die Reihe enthält nur positive Potenzen, wenn die Funktion σ im Punkt β stetig ist; ist dagegen der Punkt β ein Unstetigkeitspunkt der Funktion σ, so treten auch negative Potenzen auf und zwar in endlicher oder unendlicher Anzahl, je nachdem der Punkt β ein Pol oder ein wesentlich singulärer Punkt der Funktion σ ist.

Für die Umgebung der n unendlich fernen Punkte der Fläche T treten an Stelle dieser Reihen Reihen, die nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ fortschreiten.

Eine einwertige Funktion w der Variabeln z, die sich in der Umgebung des Punktes β regulär verhält, kann in diesem Punkt nur wie eine ganze Potenz von $z-\beta$ verschwinden: es läßt sich eine ganze positive Zahl k der Art bestimmen, daß der Quotient $\frac{w}{(z-\beta)^k}$ im Punkt β weder 0 noch ∞ wird. Diese Zahl k haben wir als Ordnung des Nullwerdens der Funktion w bezeichnet (§ 26). Eine wie die Fläche T verzweigte Funktion σ hat, so weit es sich um gewöhnliche Punkte der Fläche T handelt, dieselbe Eigenschaft, weil für die Umgebung dieser Punkte dieselbe Art der Reihenentwicklung gilt. Wir können daher für diesen Fall die für einwertige Funktionen geltende Definition beibehalten.

Da die Funktion σ in der Umgebung eines μ-fachen Windungspunktes β durch eine nach Potenzen von $(z-\beta)^{\frac{1}{\mu}}$ fortschreitende Reihe dargestellt wird, so kann sie nur wie eine ganze Potenz von $(z-\beta)^{\frac{1}{\mu}}$ Null werden. Wir stellen deshalb die Definition auf:

> die Funktion σ wird in einem μ-fachen Windungspunkt Null zur k^{ten} Ordnung, wenn der Quotient $\frac{\sigma}{(z-\beta)^{\frac{k}{\mu}}}$ in diesem Punkt weder 0 noch ∞ wird.

Bezüglich der Pole stellen wir im Einklang mit den für einwertige Funktionen getroffenen Bestimmungen die Definition auf:

ein Nullpunkt k^{ter} Ordnung der Funktion σ ist für die Funktion $\frac{1}{\sigma}$ ein Pol der Ordnung k.

Diese Definitionen lassen sich leicht geometrisch anschaulich machen.

Wenn der Punkt β ein gewöhnlicher Punkt der Fläche T ist, so wächst bei einem positiven Umlauf um diesen Punkt $\operatorname{arc}(z-\beta)$ um 2π also $\log(z-\beta)$ um $2\pi i$. Ist dagegen der Punkt ein Windungspunkt der Ordnung μ, so muß sich ein Punkt, der einen positiven Umlauf ausführt, durch die μ im Punkt β zusammenhängenden Blätter bewegen und die μ in diesem Punkt endigenden Übergangslinien überschreiten, bevor er zur Ausgangsstelle zurückkehrt.

Es wächst demnach in diesem Fall $\operatorname{arc}(z-\beta)$ um $\mu \cdot 2\pi$, also $\operatorname{arc}(z-\beta)^{\frac{1}{\mu}}$ um 2π und $\log(z-\beta)^{\frac{1}{\mu}}$ um $2\pi i$. Wir können demnach die für alle Punkte der Fläche T gültige Definition aufstellen:

eine wie die Fläche T verzweigte Funktion σ wird im Punkt β Null zur k^{ten} Ordnung, wenn bei einem positiven Umlauf um diesen Punkt $\frac{1}{2\pi i}\log\sigma$ um k Einheiten wächst; sie wird unendlich zur k^{ten} Ordnung, wenn $\frac{1}{2\pi i}\log\sigma$ bei einem positiven Umlauf um k Einheiten abnimmt.

Diese Definitionen gelten auch für den Fall, daß der Punkt β ins Unendliche rückt.

Man überzeugt sich leicht, daß die früher bewiesenen Integralsätze und insbesondere der Residuensatz (§ 20 und 21) auch für die Fläche T gelten; daher bleibt für die Fläche T auch der Satz (§ 29) in Geltung:

das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int d\log\sigma$ erstreckt über die vollständige Begrenzung eines Flächenstücks, das keine wesentlich singuläre Stelle der Funktion σ enthält, ist gleich der Differenz zwischen der Anzahl der einfachen Nullpunkte und der Anzahl der einfachen Pole, die innerhalb des Flächenstücks liegen.

Bei der Abzählung ist selbstverständlich wieder ein Nullpunkt oder ein Pol der Ordnung k als k einfachen Nullpunkten beziehungsweise Polen äquivalent zu betrachten.

Der Satz gilt auch in dem Fall, daß sich die Fläche ins Unendliche erstreckt.

Wir wenden den Satz auf den Fall an, daß die Funktion σ algebraisch ist und wählen als Fläche die Außenfläche eines Kreises um einen Punkt β, in dem die Funktion weder 0 noch ∞ wird.

Wenn der Kreisradius gegen Null konvergiert, so konvergiert auch das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int d \log \sigma$ gegen Null. Daraus folgt:

die Gesamtzahl der einfachen Nullpunkte der Funktion σ ist gleich der Gesamtzahl der einfachen Pole.

Die Funktionen σ und σ — Konst. besitzen dieselben Pole. Daraus folgt:

Eine algebraische Funktion der Klasse nimmt jeden vorgeschriebenen Wert in gleichviel Punkten der Fläche T an.

Diese Anzahl bezeichnet man als Ordnung der Funktion.

Zwischen zwei algebraischen Funktionen der Klasse σ und ζ besteht eine algebraische Gleichung $F(\sigma\ \zeta) = 0$.

Man erhält diese Gleichung, indem man aus den beiden Gleichungen, die σ und ζ als rationale Funktionen von z und s ausdrücken, und der Grundgleichung die Größen s und z eliminiert.

Nehmen wir an die Funktion σ sei von der Ordnung μ, die Funktion ζ von der Ordnung ν. Einem gegebenen Wert ζ entsprechen ν Punkte der Fläche T: in diesen Punkten nimmt die Funktion σ im allgemeinen verschiedene Werte an. Es entsprechen also im allgemeinen einem Werte ζ ν Werte σ und analog entsprechen im allgemeinen einem Wert σ μ Werte ζ. Die Gleichung $F(\sigma\ \zeta) = 0$ ist daher allgemein zu reden vom Grade ν in Beziehung auf σ und vom Grade μ in Beziehung auf ζ.

In besonderen Fällen können sich diese Gradzahlen erniedrigen, so ist z. B. $\nu = 1$, wenn σ eine rationale Funktion von ζ ist.

Wenn die Gradzahlen des Polynoms F ihre normalen Werte haben, so ist ein Punkt der Fläche T eindeutig durch die Werte bestimmt, die die Funktionen σ und ζ in ihm annehmen. Es sind daher nicht nur die Größen σ und ζ rationale Funktionen von s und z, sondern es lassen sich auch umgekehrt die letzteren Größen als rationale Funktionen von σ und ζ darstellen. Anders ausgedrückt heißt das:

die Gleichungen $f(s, z) = 0$ und $F(\sigma, \zeta) = 0$ lassen sich durch eindeutig umkehrbare rationale Substitutionen ineinander transformieren.*)

Diese beiden Gleichungen bestimmen demnach dieselbe Klasse gleich verzweigter Funktionen, aber die geometrische Repräsentation durch Riemannsche Flächen gestaltet sich wesentlich verschieden, je nach der Grundgleichung, von der wir ausgehen.

In der Theorie der einwertigen Funktionen hat es sich als zweckmäßig erwiesen, die Untersuchung auf die Integrale dieser Funktionen auszudehnen: bei einer eingehenderen Untersuchung der algebraischen Funktionen tritt die Notwendigkeit auch ihre Integrale in Betracht zu ziehen, noch stärker hervor.

Einen Einblick in dieses interessante Gebiet gewährt die in § 51 behandelte Abbildungsaufgabe. Bezüglich der allgemeinen Theorie müssen wir auf die Lehrbücher über Abelsche Funktionen verweisen.

Neunter Abschnitt.

Die homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung.

§ 61. Fundamentalsysteme von Integralen. Wir wollen zum Schluß die allgemeinen Ausführungen des siebenten Abschnitts zur Untersuchung der einfachsten Art von Differentialgleichungen verwenden. Unter allen Differentialgleichungen

*) Die in Rede stehenden Substitutionen brauchen nicht eindeutig umkehrbar zu sein, wenn die Größen s und z unabhängig variabel sind; bei der Umkehrung muß die Gleichung $f(s, z) = 0$ herangezogen werden.

haben die homogenen linearen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten einwertige, insbesondere rationale Funktionen der unabhängigen Variabeln z sind, den einfachsten Charakter.

Die linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung können wir beiseite lassen; genügt nämlich die Funktion w der Differentialgleichung $w' + bw = 0$, wo b eine einwertige Funktion der Variabeln z bedeutet, so ist

$$\log w = -\int b\,dz$$

das Integral einer einwertigen Funktion. Diese Integrale sind aber bereits im fünften Abschnitt eingehend untersucht worden (vergl. insbesondere § 33).

Wir wenden uns daher sofort zur Untersuchung der linearen und homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung. Auf die Theorie der Differentialgleichungen höherer Ordnung gehen wir nicht ein. Eine genauere Darstellung derselben würde uns zu weit führen und die Fundamentalsätze ergeben sich ohne wesentliche Schwierigkeit durch Verallgemeinerung der entsprechenden Sätze über Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Es sei die Differentialgleichung

$$w'' + aw' + bw = 0 \tag{1}$$

vorgelegt. Wir werden uns später auf den Fall beschränken, daß die Koeffizienten a und b rationale Funktionen der unabhängigen Variabeln z sind; vorerst genügt es anzunehmen, daß sie einwertige Funktionen sind und nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten besitzen.

Wir beweisen zunächst einige allgemeine Sätze über die Integrale dieser Differentialgleichung.

I. Nehmen wir an die Koeffizienten a, b verhalten sich in der Umgebung des Punktes z_0 regulär und nehmen wir weiter an, die der Differentialgleichung genügende Funktion w verhalte sich in der Umgebung dieses Punktes ebenfalls regulär, dann kann die Funktion w im Punkt z_0 nicht zur zweiten Ordnung verschwinden, wenn sie nicht identisch $= 0$ ist.

Wäre nämlich im Punkt z_0 $w = 0$ und $w' = 0$, so müßte zufolge (1) auch $w'' = 0$ sein. Indem man die Gleichung (1) wiederholt differenziert und dann $z = z_0$ setzt, überzeugt man sich, daß im Punkt z_0 alle Derivierten der Funktion verschwinden. Da sich die Funktion w in der Umgebung dieses Punktes nach Voraussetzung regulär verhält, folgt hieraus, daß sie identisch verschwindet.

II. Wir halten an der Voraussetzung fest, daß sich die Koeffizienten a und b in der Umgebung des Punktes z_0 regulär verhalten und wir nehmen weiter an, die drei Funktionen $w_1\, w_2\, w_3$ genügen der Differentialgleichung (1) und verhalten sich in der Umgebung des Punktes z_0 regulär. Unter dieser Annahme besteht eine Relation der Form

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = 0,$$

wo $c_1 c_2 c_3$ Konstante bedeuten, die nicht alle drei verschwinden.

Zum Beweis ist zu bemerken: wir können über die drei Konstanten $c_1 c_2 c_3$ der Art verfügen, daß die Funktion

$$w = c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3$$

und ihre erste Derivierte für $z = z_0$ verschwinden. Da nun die Funktion w der Differentialgleichung (1) genügt, so muß sie nach Satz I identisch verschwinden.

Zwei Integrale der Differentialgleichung (1) heißen linear unabhängig, wenn ihr Quotient nicht eine Konstante ist; man sagt in diesem Fall auch: die beiden Integrale bilden ein Fundamentalsystem.

Aus dem Satz II folgt: ein beliebiges Integral der Differentialgleichung (1) läßt sich als lineare und homogene Funktion der Integrale eines Fundamentalsystems darstellen.

Die Integrale w_1 und w_2 eines Fundamentalsystems können in mannigfaltiger Weise gewählt werden; man kann beispielsweise festsetzen, daß im Punkt z_0 $w_1 = 1$ $w'_1 = 0$ $w_2 = 0$ $w'_2 = 1$ sein soll.

Wenn die Integrale w_1 und w_2 ein Fundamentalsystem bilden, so bilden auch die Integrale

$$(2) \qquad W_1 = c_{11} w_1 + c_{12} w_2 \quad \text{und} \quad W_2 = c_{21} w_1 + c_{22} w_2$$

ein Fundamentalsystem. Hier bedeuten $c_{11}\, c_{12}\, c_{21}\, c_{22}$ Konstante, die nur der Bedingung unterliegen, daß ihre Determinante nicht verschwindet.

III. Vorausgesetzt daß die Koeffizienten a, b und die beiden linear unabhängigen Integrale w_1, w_2 sich in der Umgebung des Punktes z_0 regulär verhalten, kann der Ausdruck $\varphi = w_1 w'_2 - w_2 w'_1$ in diesem Punkt nicht verschwinden.

Würde nämlich der Ausdruck φ im Punkt z_0 verschwinden, so gälte dasselbe wegen (2) für den Ausdruck

$$\Phi = W_1 W'_2 - W_2 W'_1 = (c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}) \varphi.$$

Wir können nun über die Konstanten $c_{\lambda\mu}$ der Art verfügen, daß für $z = z_0$

$$W_1 = 1 \quad W'_1 = 0 \quad W_2 = 0 \quad W'_2 = 1, \text{ also } \Phi = 1 \text{ ist.}$$

Die Annahme, daß φ verschwindet, führt somit zu einem Widerspruch.

Diesem Satz können wir einen anderen an die Seite stellen, der als teilweise Umkehrung desselben zu betrachten ist.

IV. Genügen der Differentialgleichung (1) zwei linear unabhängige Funktionen w_1 und w_2, die sich in der Umgebung des Punktes z_0 regulär verhalten, und hat der Ausdruck $w_1 w'_2 - w_2 w'_1$ im Punkt z_0 einen von Null verschiedenen Wert, so verhalten sich die Koeffizienten a, b in der Umgebung des Punktes z_0 regulär.

Infolge unserer Voraussetzung bestehen nämlich die beiden Gleichungen $w''_1 + a w'_1 + b w_1 = 0 \quad w''_2 + a w'_2 + b w_2 = 0$.

Aus diesen folgt:

$$(3) \qquad a = \frac{w_2 w''_1 - w_1 w''_2}{w_1 w'_2 - w_2 w'_1} \qquad b = \frac{w'_1 w''_2 - w'_2 w''_1}{w_1 w'_2 - w_2 w'_1}.$$

Da nach Voraussetzung Zähler und Nenner dieser beiden Brüche in der Umgebung des Punktes z_0 reguläre Funktionen sind und ihr gemeinsamer Nenner im Punkt z_0 nicht verschwindet, so ist unsere Behauptung bewiesen.

§ 62. Nachweis eines Funktionselementes, das der Differentialgleichung genügt. Die Sternfläche. Im vorausgehenden haben wir die Existenz von regulären Funktionen vorausgesetzt, die der Differentialgleichung

$$(1) \qquad w'' + a w' + b w = 0$$

genügen und haben gewisse Eigenschaften nachgewiesen, die diesen Funktionen notwendig zukommen müssen. Um nun die Existenz derartiger Funktionen nachzuweisen, beweisen wir den Satz:

V. Vorausgesetzt, daß sich die Koeffizienten a, b in der Umgebung des Punktes z_0 regulär verhalten, können wir eine in der Umgebung dieses Punktes reguläre Funktion $w = f(z)$ derart bestimmen, daß sie der Differentialgleichung (1) genügt und daß sie selbst und ihre erste Derivierte im Punkt z_0 vorgeschriebene Werte annehmen.

Zum Beweis legen wir um den Punkt z_0 einen Kreis, dessen Radius r kleiner ist als die Entfernung des Punktes z_0 vom nächsten Unstetigkeitspunkt der Koeffizienten a, b. Innerhalb dieses Kreises und auf seiner Peripherie verhalten sich die Funktionen a und b regulär. Bezeichnen wir mit A und B die Maxima der Werte, die die absoluten Beträge der Koeffizienten auf der Peripherie annehmen. Die absoluten Beträge der Werte, die die Derivierten $\frac{d^n a}{dz^n}$ und $\frac{d^n b}{dz^n}$ im Punkt z_0 annehmen, sind kleiner als $n!\frac{A}{r^n}$ bezw. $n!\frac{B}{r^n}$ (§ 22). Wir können daher eine positive Größe k derart wählen, daß für $z = z_0$ die Ungleichungen

$$(2)\qquad \begin{array}{ll} |a| \leqq \dfrac{1}{k} & \left|\dfrac{d^n a}{dz^n}\right| \leqq \dfrac{n!}{k^{n+1}} \\[2ex] |b| \leqq \dfrac{1}{k^2} & \left|\dfrac{d^n b}{dz^n}\right| \leqq \dfrac{(n+1)!}{k^{n+2}} \end{array} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

bestehen. Wir bezeichnen ferner mit M den größeren der beiden absoluten Beträge

$$|f(z_0)| \quad \text{und} \quad |k \cdot f'(z_0)|.$$

Wir behaupten nun, es besteht für jeden Wert der Zahl n die Ungleichung

$$(3)\qquad |f^{(n)}(z_0)| \leqq n!\frac{M}{k^n}.$$

Für $n = 1$ ist diese Behauptung auf Grund unserer Festsetzung richtig; wir beweisen sie allgemein durch die vollständige Induktion.

Wir nehmen also an, die Ungleichung (3) gelte für alle Derivierten, deren Ordnung kleiner als eine bestimmte Zahl n ist.

Durch $n-2$-malige Differentiation der Differentialgleichung (1) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
(4)\qquad -w^{(n)} &= a w^{(n-1)} + (n-2)_1 a' w^{(n-2)} + (n-2)_2 a'' w^{(n-3)} \dots \\
&\qquad\qquad + (n-2) a^{(n-3)} w'' + a^{(n-2)} w' \\
&\quad + b w^{(n-2)} + (n-2)_1 b' w^{(n-3)} + (n-2)_2 b'' w^{(n-4)} \dots \\
&\qquad\qquad + (n-2) b^{(n-3)} w' + b^{(n-2)} w \\
&= a w^{(n-1)} + [(n-2)_1 a' + b] w^{(n-2)} \\
&\qquad\qquad + [(n-2)_2 a'' + (n-2) b'] w^{(n-3)} \dots \\
&\quad + [(n-2)_\nu a^{(\nu)} + (n-2)_{\nu-1} b^{(\nu-1)}] w^{(n-1-\nu)} \dots \\
&\qquad\qquad + [a^{(n-2)} + (n-2) b^{(n-3)}] w' + b^{(n-2)} w .
\end{aligned}
$$

Der absolute Betrag der Summe $(n-2)_\nu a^{(\nu)} + (n-2)_{\nu-1} b^{(\nu-1)}$ ist wegen (2) nicht größer als

$$[(n-2)_\nu + (n-2)_{\nu-1}] \frac{\nu!}{k^{\nu+1}} = (n-1)(n-2)\cdots(n-\nu)\cdot\frac{1}{k^{\nu+1}} .$$

Nach Voraussetzung gilt für die Derivierten $w^{(n-1-\nu)}$, die auf der rechten Seite der Gleichung (4) auftreten, die Ungleichung (3); es ist also

$$|w^{(n-1-\nu)}| \leqq (n-1-\nu)! \frac{M}{k^{n-1-\nu}} .$$

Folglich ist der absolute Betrag des Produktes

$$((n-2)_\nu a^{(\nu)} + (n-2)_{\nu-1} b^{(\nu-1)}) w^{(n-1-\nu)}$$

nicht größer als

$$(n-1)! \frac{M}{k^n} .$$

Aus (4) folgt nun: für $z = z_0$ ist

$$|w_n| \leqq n! \frac{M}{k^n} , \quad \text{w. z. b. w.}$$

Hieraus ergibt sich: die Potenzreihe

$$w = f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(z_0) + (z - z_0)^2 \frac{f''(z_0)}{1 \cdot 2} + \cdots$$

deren Koeffizienten aus den gegebenen Anfangswerten $f(z_0)$ und $f'(z_0)$ mit Hilfe der Differentialgleichung (1) berechnet sind, konvergiert für alle Werte von z, die der Bedingung $|z - z_0| < k$ genügen; diese Potenzreihe stellt somit innerhalb eines Kreises vom Radius k um den Punkt z_0 eine reguläre Funktion dar, die unserer Differentialgleichung genügt.

Da die Größen $f(z_0)$ und $f'(z_0)$ beliebig gewählt werden können, gibt es zwei linear unabhängige Integrale unserer Differentialgleichung, die sich in der Umgebung des Punktes z_0 regulär verhalten.

Es bleibt zu untersuchen, unter welchen Bedingungen auch in der Umgebung des unendlich fernen Punktes der Differentialgleichung (1) zwei linear unabhängige reguläre Funktionen genügen.

Zu dem Zweck führen wir an Stelle der unabhängigen Variabeln z die Variable $\zeta = \frac{1}{z}$ ein. Nun ist

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{d\zeta}\frac{d\zeta}{dz} = -\zeta^2 \frac{dw}{d\zeta}$$

und

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d^2w}{d\zeta^2}\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2 + \frac{dw}{d\zeta}\frac{d^2\zeta}{dz^2} = \zeta^4 \frac{d^2w}{d\zeta^2} + 2\zeta^3 \frac{dw}{d\zeta}.$$

Setzen wir diese Werte in die Differentialgleichung (1) ein, so erhalten wir nach Division mit ζ^4:

$$\frac{d^2w}{d\zeta^2} + \left(\frac{2}{\zeta} - \frac{a}{\zeta^2}\right)\frac{dw}{d\zeta} + \frac{b}{\zeta^4}w = 0. \tag{5}$$

Damit die Koeffizienten dieser Differentialgleichung sich in der Umgebung des Punktes $\zeta = 0$ regulär verhalten, ist erforderlich, daß in diesem Punkt die Differenz $a - 2\zeta$ zur zweiten Ordnung und der Koeffizient b zur vierten Ordnung verschwindet. Wir können also den Satz aussprechen:

VI. Damit sich die Integrale der Differentialgleichung (1) im unendlich fernen Punkt der z Ebene normal verhalten, ist erforderlich und hinreichend, daß in diesem Punkt die Differenz $a - \frac{2}{z}$ zur zweiten Ordnung und der Koeffizient b zur vierten Ordnung verschwindet.

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun ohne Schwierigkeit eine Sternfläche A konstruieren, deren Punkten die Werte eines Zweiges der Funktion w eindeutig zugeordnet werden können.

Aus den Sätzen V und VI geht hervor, daß Grenzpunkte der Funktion, nur in die Unstetigkeitspunkte der Koeffizienten

a und b und — sofern die Bedingungen des Satzes VI nicht erfüllt sind — in den unendlich fernen Punkt der z-Ebene fallen können. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, daß diese Bedingungen erfüllt sind, so kommen nur im Endlichen gelegene Grenzpunkte in Betracht. Wir wählen nun nach Belieben zwei Punkte z_0 und z_1 aus, in deren Umgebung sich die Koeffizienten a und b regulär verhalten, und verbinden den Punkt z_1 mit den Unstetigkeitspunkten der Koeffizienten durch Bogen von Kreisen, die auch noch durch den Punkt z_0 gehen. Die Sternfläche A, die wir auf diese Weise erhalten, hat die verlangte Eigenschaft.

Auf Grund des Satzes V können wir nämlich eine in der Umgebung des Punktes z_0 konvergierende Potenzreihe bilden, die unserer Differentialgleichung genügt. Das Funktionselement w können wir längs eines jeden innerhalb der Sternfläche A verlaufenden Weges analytisch fortsetzen; wir können demnach für die ganze Sternfläche einen Funktionszweig eindeutig definieren (vergl. § 48).

Die Lage der Eckpunkte der Sternfläche A hängt nicht von den beliebig zu wählenden Anfangswerten der Funktion und ihren ersten Derivierten ab; daher besitzen die Sternflächen, die zur Repräsentation der verschiedenen Funktionszweige dienen, dieselben Eckpunkte. Wir können deshalb diese verschiedenen Sternflächen als einander kongruent annehmen.

§ 63. Verhalten der Integrale in der Umgebung eines singulären Punktes. Es bleibt festzustellen, in welchem Zusammenhang die verschiedenen Funktionszweige stehen, die durch analytische Fortetzung aus einem unserer Differentialgleichung genügenden Funktionselement hervorgehen. Zu diesem Zweck müssen wir untersuchen, wie sich die Integrale unserer Differentialgleichung in der Umgebung der „singulären Punkte“ verhalten. Es sind das die Unstetigkeitspunkte der Koeffizienten a, b und — sonfern die Bedingungen des Satzes VI nicht erfüllt sind — der unendlich ferne Punkt. Bei dieser Untersuchung erweist es sich als notwendig, nicht ein einzelnes Integral, sondern ein Fundamentalsystem in Betracht zu ziehen.

Nehmen wir an, im Punkt e werden die Koeffizienten a und b oder wenigstens der eine von beiden unstetig. Wir legen um den Punkt e zwei Kreise K_1 und K_2: der Radius des kleineren Kreises K_1 kann beliebig klein gewählt werden, der des größeren Kreises K_2 muss so klein gewählt werden, daß weder im Innern noch auf der Peripherie desselben ein weiterer Unstetigkeitspunkt der Koeffizienten liegt.

Das Ringgebiet R, das durch die beiden Kreise K_1 und K_2 begrenzt ist, zerschneiden wir durch einen Radius L: die zerschnittene Fläche möge mit R' bezeichnet werden. Die Ränder der Geraden L unterscheiden wir wieder als + Rand und − Rand derart, daß ein positiver Umlauf um den Punkt e vom − Rand zum + Rand führt.

Für einen Punkt des Ringgebiets R' sei ein Fundamentalsystem von Integralen unserer Differentialgleichung definiert; wir bezeichnen sie mit w_1 und w_2. Da die Fläche R' einfach zusammenhängend ist und innerhalb derselben kein Grenzpunkt der Funktionen w_1, w_2 liegt, so können wir diese Funktionen durch analytische Fortsetzung für die ganze Fläche eindeutig definieren. Die Werte, die die Funktionen w_1, w_2 in einander gegenüber liegenden Punkten der Ränder $\overset{+}{L}$ und $\overset{-}{L}$ annehmen, bezeichnen wir mit $\overset{+}{w}_1\ \overset{+}{w}_2$ bezw. $\overset{-}{w}_1\ \overset{-}{w}_2$.

In der Umgebung des betreffenden Punktes der Sperrlinie L verhalten sich die Koeffizienten a, b unserer Differentialgleichung regulär, demnach läßt sich ein beliebiges Integral derselben in der Umgebung dieses Punktes als lineare und homogene Funktion der Integrale $\overset{-}{w}_1$ und $\overset{-}{w}_2$ darstellen, und zwar sind die Koeffizienten der Linearform Konstante (Satz II).

Insbesondere lassen sich die Integrale $\overset{+}{w}_1$ und $\overset{+}{w}_2$ in der Form

$$(1)\qquad \overset{+}{w}_1 = c_{11}\overset{-}{w}_1 + c_{12}\overset{-}{w}_2, \qquad \overset{+}{w}_2 = c_{21}\overset{-}{w}_1 + c_{22}\overset{-}{w}_2$$

darstellen, wo die Koeffizienten $c_{\lambda\mu}$ Konstante bedeuten.

Die Determinante $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ kann nicht verschwinden, weil sich offenbar auch umgekehrt $\overset{-}{w}_1$ und $\overset{-}{w}_2$ als lineare und homogene Funktionen von $\overset{+}{w}_1$ und $\overset{+}{w}_2$ darstellen lassen müssen.

Um die Bedeutung des Gleichungssystems (1) klar zu stellen, betrachten wir zunächst zwei spezielle Fälle.

Nehmen wir an, es sei $c_{12} = 0$ und $c_{21} = 0$ und setzen wir $c_{11} = \varrho_1$, $c_{22} = \varrho_2$. Die Gleichungen (1) lauten in diesem Fall

(2) $$\overset{+}{w}_1 = \varrho_1 w_1 \qquad \overset{+}{w}_2 = \varrho_2 w_2 .$$

Wir können leicht zwei Funktionen φ_1 und φ_2 bilden, die ebenso wie die Funktionen w_1 und w_2 im Gebiet R' einwertig und stetig sind und die ebenfalls den Relationen (2) genügen. Wir setzen zur Abkürzung

(3) $$\frac{1}{2\pi i} \log \varrho_1 = \sigma_1 \qquad \frac{1}{2\pi i} \log \varrho_2 = \sigma_2$$

und bilden die Funktionen

(4) $$\varphi_1 = (z-e)^{\sigma_1} \qquad \varphi_2 = (z-e)^{\sigma_2} .$$

Die Größen σ_1 und σ_2 sind nur bis auf additive ganze Zahlen bestimmt und dementsprechend ist eine jede der beiden Funktionen φ_1 und φ_2 nur bis auf einen Faktor bestimmt, der eine ganze positive oder negative Potenz von $z - e$ ist.

Wenn die Werte der Funktionen φ_1, φ_2 für einen Punkt des Gebietes R' fixiert sind, so sind die beiden Funktionen im ganzen Gebiet R' eindeutig definiert.

Wenn der variable Punkt z einen positiven Umlauf um den Punkt e ausführt, so nimmt der Wert von $\log(z-e)$ um $2\pi i$ zu. Daher ist mit Rücksicht auf (3)

(5) $$\overset{+}{\varphi}_1 = \varrho_1 \varphi_1 \qquad \overset{+}{\varphi}_2 = \varrho_2 \varphi_2 \quad (\text{vgl. § 33}).$$

Wir bilden nun die Quotienten

(6) $$\Omega_1 = \frac{w_1}{\varphi_1}, \qquad \Omega_2 = \frac{w_2}{\varphi_2} .$$

Aus (2) und (5) folgt:

$$\overset{+}{\Omega}_1 = \Omega_1 \qquad \overset{+}{\Omega}_2 = \Omega_2 .$$

Die Funktionen Ω_1 und Ω_2 sind somit nicht nur in der zerschnittenen Ringfläche R', sondern auch in der unzerschnittenen Ringfläche R einwertig. Diese beiden Funktionen lassen sich daher innerhalb der Fläche R durch Reihen der Form

(7) $$\Omega_\nu = \gamma_0^{(\nu)} + \gamma_1^{(\nu)}(z-e) + \gamma_2^{(\nu)}(z-e)^2 + \gamma_3^{(\nu)}(z-e)^3 + \cdots$$
$$+ \frac{\gamma_{-1}^{(\nu)}}{z-e} + \frac{\gamma_{-2}^{(\nu)}}{(z-e)^2} + \frac{\gamma_{-3}^{(\nu)}}{(z-e)^3} + \cdots$$

darstellen (§ 27).

Für die Integrale w_1 und w_2 ergibt sich aus den Gleichungen (3), (4) und (6) die Darstellung

(8) $$w_1 = (z-e)^{\frac{\log \varrho_1}{2\pi i}} \Omega_1 \qquad w_2 = (z-e)^{\frac{\log \varrho_2}{2\pi i}} \Omega_2 .$$

Nehmen wir in zweiter Linie an, es sei

$$c_{12} = 0 \qquad c_{11} = c_{22} = c_{21} = \varrho ,$$

also

(9) $$\overset{+}{w}_1 = \varrho w_1 \qquad \overset{+}{w}_2 = \varrho(\bar{w}_1 + \bar{w}_2) .$$

Wir setzen ebenso wie oben

(10) $$\frac{1}{2\pi i} \log \varrho = \sigma \quad \text{und} \quad q = (z-e)^{\sigma} .$$

Es sei ferner

(11) $$\Omega_1 = \frac{w_1}{q} \qquad \Omega_2 = \frac{w_2 - \frac{1}{2\pi i}\log(z-e)\, w_1}{q} .$$

Wir erhalten wie oben

(12) $$\overset{+}{\Omega}_1 = \Omega_1 .$$

Ferner ist

$$\Omega_2 = \frac{w_2 - \frac{1}{2\pi i}\log(z-e)\bar{w}_1}{\bar{q}}$$

und

$$\overset{+}{\Omega}_2 = \frac{\overset{+}{w}_2 - \frac{1}{2\pi i}(\log(z-e) + 2\pi i)\overset{+}{w}_1}{\overset{+}{q}} ,$$

also mit Rücksicht auf (9)

$$\overset{+}{\Omega}_2 = \frac{\varrho(\bar{w}_1 + \bar{w}_2) - \frac{1}{2\pi i}(\log(z-e) + 2\pi i)\varrho \bar{w}_1}{\varrho \bar{q}}$$
$$= \Omega_2 .$$

Die Funktionen Ω_1 und Ω_2 sind demnach wieder nicht nur in der zerschnittenen Ringfläche R', sondern auch in der unzerschnittenen Ringfläche R einwertig, sie lassen sich daher durch Reihen der Form (3) darstellen.

Für die Funktionen w_1 und w_2 erhalten wir in diesem Fall die Darstellung

(13) $$w_1 = (z-e)^{\frac{\log \varrho}{2\pi i}} \Omega_1 \quad w_2 = (z-e)^{\frac{\log \varrho}{2\pi i}} \left[\Omega_2 + \frac{1}{2\pi i}\log(z-e)\Omega_1\right].$$

Auf diese beiden speziellen Fälle läßt sich der allgemeine Fall der Gleichungen (1) leicht zurückführen. Zu dem Zweck multiplizieren wir die erste der beiden Gleichungen mit einer Konstanten s_1, die zweite mit einer Konstanten s_2 und addieren. Wir erhalten

$$(14)\qquad s_1 \overset{+}{w}_1 + s_2 \overset{+}{w}_2 = (c_{11} s_1 + c_{21} s_2)\bar{w}_1 + (c_{12} s_1 + c_{22} s_2)\bar{w}_2 .$$

Über die Konstanten s_1 und s_2 können wir nach Belieben verfügen; wir setzen fest, es sei

$$(15)\qquad \varrho s_1 = c_{11} s_1 + c_{21} s_2 \qquad \varrho s_2 = c_{12} s_1 + c_{22} s_2 .$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Elimination der Größen s_1 und s_2 für ϱ die Bedingungsgleichung

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} c_{11} - \varrho & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} - \varrho \end{vmatrix} = \varrho^2 - (c_{11} + c_{22})\varrho + (c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}) = 0.$$

Diese Gleichung bezeichnet man als „Fundamentalgleichung“.

Eliminiert man aus den Gleichungen (15) die Größe ϱ, so erhält man zur Bestimmung des Quotienten $\frac{s_1}{s_2}$ die Gleichung

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} s_1 & c_{11} s_1 + c_{21} s_2 \\ s_2 & c_{12} s_1 + c_{22} s_2 \end{vmatrix} = c_{12} s_1{}^2 + (c_{22} - c_{11}) s_1 s_2 - c_{21} s_2{}^2 = 0 .$$

Die Gleichungen (16) und (17) besitzen dieselbe Diskriminante

$$(18)\quad \Delta = 4(c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}) - (c_{11} + c_{22})^2 = -4 c_{12} c_{21} - (c_{22} - c_{11})^2.$$

Die weitere Untersuchung gestaltet sich verschieden, je nachdem die Diskriminante Δ verschwindet oder nicht.

Nehmen wir zunächst an, die Diskriminante sei von Null verschieden. In diesem Fall besitzt die Gleichung (16) zwei verschiedene Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 und dementsprechend genügen der Gleichung (17) zwei verschiedene Werte des Quotienten $\frac{s_1}{s_2}$. An Stelle des einen Gleichungssystems (15) können wir daher die beiden Gleichungssysteme

$$(19)\quad \varrho_\nu s_1^{(\nu)} = c_{11} s_1^{(\nu)} + c_{21} s_2^{(\nu)} \qquad \varrho_\nu s_2^{(\nu)} = c_{12} s_1^{(\nu)} + c_{22} s_2^{(\nu)} \qquad \nu = 1, 2$$

ansetzen. Dementsprechend treten an Stelle der einen Gleichung (14) die beiden Gleichungen

$$(20)\quad s_1^{(\nu)} \overset{+}{w}_1 + s_2^{(\nu)} \overset{+}{w}_2 = (c_{11} s_1^{(\nu)} + c_{21} s_2^{(\nu)})\bar{w}_1 + (c_{12} s_1^{(\nu)} + c_{22} s_2^{(\nu)})\bar{w}_2$$
$$\nu = 1, 2 .$$

An Stelle des Fundamentalsystems w_1, w_2 führen wir nun mittels der Substitution

$$W_\nu = s_1^{(\nu)} w_1 + s_2^{(\nu)} w_2 \qquad \nu = 1, 2$$

ein neues Fundamentalsystem ein. Für dieses neue Fundamentalsystem gelten wegen (19) und (20) die Gleichungen

$$\overset{+}{W}_1 = \varrho_1 \overline{W}_1 \qquad \overset{+}{W}_2 = \varrho_2 \overline{W}_2 \,.$$

Diese Gleichungen stimmen mit den Gleichungen (2) überein; wir kommen daher auf den ersten der oben behandelten Spezialfälle zurück.

Nehmen wir nunmehr an, die Diskriminante Δ verschwinde, die Gleichung (16) besitze also zwei gleiche Wurzeln. Wir haben zwei Unterfälle zu unterscheiden, je nachdem die beiden Substitutionskoeffizienten c_{12} und c_{21} gleichzeitig verschwinden oder nicht.

Ist $c_{12} = c_{21} = 0$, so muß, damit die Gleichung (16) zwei gleiche Wurzeln besitzt, $c_{11} = c_{22} = \varrho$ sein. In diesem Fall haben die Gleichungen (1) die Form

$$\overset{+}{w}_1 = \varrho \overline{w}_1 \qquad \overset{+}{w}_2 = \varrho \overline{w}_2 \,.$$

Wir kommen also auch in diesem Fall auf unseren ersten Spezialfall zurück, nur tritt hier die Besonderheit ein, daß die vorstehenden Gleichungen für jedes beliebige Fundamentalsystem gelten, während im allgemeinen Fall ein jedes der Integrale W_1, W_2 bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt ist. Damit steht ein anderer Unterschied im Zusammenhang. Wenn $\varrho_2 = \varrho_1$ ist, so hat der Quotient $\frac{w_2}{w_1}$ im unzerschnittenen Ringgebiet R den Charakter einer einwertigen Funktion; für diesen Quotienten ist somit der Punkt e kein Verzweigungspunkt, sondern höchstens ein Unstetigkeitspunkt. Im allgemeinen Fall dagegen, wenn die Größen ϱ_1 und ϱ_2 verschieden sind, ist der Punkt e auch für den Quotienten $\frac{W_2}{W_1}$ — und folglich auch für den Quotienten $\frac{w_2}{w_1}$ — ein Verzweigungspunkt.

In dem Fall, daß die Faktoren ϱ_1 und ϱ_2 verschieden sind, bezeichnet man den Punkt e als „eigentlichen" singulären Punkt, wenn dagegen $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$ ist, bezeichnet man ihn als scheinbaren singulären Punkt.

Ein scheinbarer singulärer Punkt braucht nicht notwendig ein Verzweigungspunkt zu sein: wenn der Faktor $\varrho = 1$ ist, so sind die Integrale unserer Differentialgleichung in dem Ringgebiet R, das den Punkt e einschließt, einwertig und es kann der Fall eintreten, daß sie sämtlich im Punkt e stetig sind. Es muß dann aber wenigstens ein Integral unserer Differentialgleichung geben, das im Punkt e zur zweiten oder zu noch höherer Ordnung verschwindet, denn sonst könnte keiner der Koeffizienten a, b in diesem Punkt unstetig werden (Satz IV), was unserer Voraussetzung widerspricht.

Wenn die sämtlichen singulären Punkte unserer Differentialgleichung scheinbare sind, und wenn überdies die Faktoren ϱ, die zu diesen verschiedenen Punkten gehören, alle den Wert 1 haben, so tritt überhaupt keine Verzweigung ein: die Integrale unserer Differentialgleichung sind in der ganzen z-Ebene einwertig.

Es bleibt noch der Fall zu erledigen, daß die Wurzeln der Gleichung (16) einander gleich sind, aber nicht gleichzeitig die Substitutionskoeffizienten c_{12} und c_{21} verschwinden.

Um zu sehen, wie unter dieser Voraussetzung die Gleichungen (19) zu modifizieren sind, nehmen wir zunächst die Wurzeln der Gleichung (16) als verschieden an und lassen dann die Differenz $\varrho_2 - \varrho_1$ gegen Null konvergieren.

Wir setzen den Grenzwert

$$\lim_{\varrho_2 = \varrho_1} \frac{s_\lambda^{(2)} - s_\lambda^{(1)}}{\varrho_2 - \varrho_1} = \frac{t_\lambda}{\varrho_1} \qquad (\lambda = 1, 2)$$

und lassen nach Ausführung des Grenzübergangs die Indizes, die entbehrlich werden weg. Schreiben wir das zweite der Gleichungssysteme (19) in der Form

$$c_{11}(s_1^{(2)} - s_1^{(1)}) + c_{21}(s_2^{(2)} - s_2^{(1)}) = (\varrho_2 - \varrho_1)s_1^{(2)} + \varrho_1(s_1^{(2)} - s_1^{(1)})$$
$$c_{12}(s_1^{(2)} - s_1^{(1)}) + c_{22}(s_2^{(2)} - s_2^{(1)}) = (\varrho_2 - \varrho_1)s_2^{(2)} + \varrho_1(s_2^{(2)} - s_2^{(1)}),$$

so wird sofort ersichtlich, daß diese Gleichungen für $\varrho_2 = \varrho_1$ in die folgenden übergehen:

$$(21)\qquad \begin{aligned} c_{11}s_1 + c_{21}s_2 &= \varrho s_1 & \qquad c_{12}s_1 + c_{22}s_2 &= \varrho s_2 \\ c_{11}t_1 + c_{21}t_2 &= \varrho(t_1 + s_1) & \qquad c_{12}t_1 + c_{22}t_2 &= \varrho(t_2 + s_2). \end{aligned}$$

Es ist leicht zu verifizieren, das wir diesen Gleichungen immer genügen können, wenn die Gleichung (16) zwei gleiche

Wurzeln besitzt, vorausgesetzt, daß nicht die beiden Koeffizienten c_{12} und c_{21} verschwinden.

Unter dieser Annahme ist $\varrho = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{22})$, und zwar ist diese Größe von Null verschieden, weil die Substitutionsdeterminante $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ nicht verschwindet. Wir genügen den Gleichungen (21) sowohl durch die Werte

$$s_1 = c_{11} - c_{22} \qquad s_2 = 2c_{12} \qquad t_1 = c_{11} + c_{22} \qquad t_2 = 0,$$

als auch durch die Werte

$$s_1 = 2c_{21} \qquad s_2 = c_{22} - c_{11} \qquad t_1 = 0 \qquad t_2 = c_{11} + c_{22}.$$

Da die Gleichungen (21) homogen sind, genügen wir ihnen auch durch die Werte

$$\begin{aligned} s_1 &= \lambda(c_{11} - c_{22}) + \mu \cdot 2c_{21} \qquad & s_2 &= \lambda \cdot 2c_{12} + \mu(c_{22} - c_{11}) \\ t_1 &= \lambda(c_{11} + c_{22}) & t_2 &= \mu(c_{11} + c_{22}), \end{aligned}$$

wo λ und μ beliebig zu wählende Konstante bedeuten.

Über diese Konstanten können wir derart verfügen, daß die Größen t_1 und t_2 vorgeschriebene Werte annehmen, es darf nur nicht $\frac{t_2}{t_1} = \frac{s_2}{s_1}$ werden. Wird diese Annahme ausgeschlossen, so sind die Integrale

$$W_1 = s_1 w_1 + s_2 w_2 \quad \text{und} \quad W_2 = t_1 w_1 + t_2 w_2$$

linear unabhängig.

Aus den Gleichungen (1) und (21) folgt zunächst wie oben

$$\overset{+}{W}_1 = \varrho \overline{W}_1$$

und ferner

$$\begin{aligned} \overset{+}{W}_2 &= t_1 \overset{+}{w}_1 + t_2 \overset{+}{w}_2 = (c_{11} t_1 + c_{21} t_2)\overline{w}_1 + (c_{12} t_1 + c_{22} t_2)\overline{w}_2 \\ &= \varrho[(t_1 + s_1)\overline{w}_1 + (t_2 + s_2)\overline{w}_2] = \varrho(\overline{W}_2 + \overline{W}_1). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen stimmen mit den Gleichungen (9) überein, es liegt somit der zweite der oben behandelten Spezialfälle vor.

Da die Größen t_1 und t_2 beliebig gewählt werden dürfen, so ist W_2 ein beliebiges Integral unserer Differentialgleichung; das Integral W_1 dagegen ist vollkommen bestimmt, wenn über das Integral W_2 verfügt ist.

Wir fassen die Ergebnisse der vorausgehenden Untersuchung zusammen:

VII. Durchläuft der Punkt z einen geschlossenen, sich nicht überkreuzenden Weg, der einen Unstetigkeitspunkt e der Koeffizienten unserer Differentialgleichung einschließt, so findet zwischen den Anfangs- und den Endwerten der Integrale w_1, w_2 eines Fundamentalsystems die Beziehung

$$(1) \qquad \overset{+}{w}_1 = c_{11}\overline{w}_1 + c_{12}\overline{w}_2 \qquad \overset{+}{w}_2 = c_{21}\overline{w}_1 + c_{22}\overline{w}_2$$

statt. Die Substitutionsdeterminante $c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ verschwindet nicht. An Stelle des beliebig zu wählenden Fundamentalsystems w_1, w_2 können wir ein kanonisches Fundamentalsystem W_1, W_2 einführen, für das entweder die Gleichungen

$$(A) \qquad \overset{+}{W}_1 = \varrho_1\overline{W} \qquad \overset{+}{W}_2 = \varrho_2\overline{W}_2$$

oder die Gleichungen

$$(B) \qquad \overset{+}{W}_1 = \varrho\overline{W}_1 \qquad \overset{+}{W}_2 = \varrho(\overline{W}_2 + \overline{W}_1)$$

gelten.

Die in den vorstehenden Gleichungen auftretenden Größen ϱ_1, ϱ_2, ϱ sind Wurzeln der Gleichung

$$(16) \qquad \varrho^2 - (c_{11} + c_{22})\varrho + (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) = 0.$$

Die Gleichungen (A) gelten dann, wenn die Fundamentalgleichung (16) zwei verschiedene Wurzeln besitzt und dann, wenn sie eine Doppelwurzel besitzt und gleichzeitig $c_{12} = c_{21} = 0$ ist. Im letzteren Fall ist der Punkt e ein scheinbarer singulärer Punkt.

Die Gleichungen (B) gelten, wenn die Fundamentalgleichung eine Doppelwurzel besitzt, ohne daß gleichzeitig $c_{12} = c_{21} = 0$ ist.

Im Fall (A) lassen sich die Integrale W_1 und W_2 in der Form

$$W_1 = (z - e)^{\frac{\log\varrho_1}{2\pi i}}\,\Omega_1 \qquad W_2 = (z - e)^{\frac{\log\varrho_2}{2\pi i}}\,\Omega_2$$

darstellen, im Fall (B) in der Form

$$W_1 = (z - e)^{\frac{\log\varrho}{2\pi i}}\,\Omega_1 \qquad W_2 = (z - e)^{\frac{\log\varrho}{2\pi i}}\left[\Omega_2 + \frac{1}{2\pi i}\log(z - e)\,\Omega_1\right].$$

In beiden Fällen bedeuten Ω_1 und Ω_2 Laurentsche Reihen, die in einem den Punkt e einschließenden Ringgebiet konvergieren.

Beim Beweis des Satzes VII haben wir angenommen, daß der singuläre Punkt e im Endlichen liegt. Er gilt aber auch dann noch, wenn der Punkt e ins Unendliche rückt, nur tritt dann an Stelle der Größe $z - e$ die Größe $\frac{1}{z}$. Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nur die z-Ebene mittels der Transformation $z = \frac{1}{\zeta}$ in die ζ-Ebene abzubilden.

Die eben nachgewiesene Darstellung der Integrale unserer Differentialgleichung führt zu einer wichtigen Fallunterscheidung.

In der Theorie der einwertigen Funktionen hat es sich als notwendig gezeigt zu unterscheiden, ob die Laurentsche Reihe, die eine Funktion in der Umgebung eines Unstetigkeitspunktes darstellt, eine endliche oder unendliche Anzahl von negativen Potenzen enthält. Eine ähnliche Unterscheidung greift in der Theorie der linearen Differentialgleichungen Platz.

Wir bezeichnen ein kanonisches Integral vom Typus (A)

$$W = (z - e)^{\varrho}\, \Omega$$

als normal oder als nicht normal, je nachdem die Reihe Ω eine endliche oder unendliche Anzahl von negativen Potenzen enthält.

Analog bezeichnen wir ein Integral vom Typus (B)

$$W = (z - e)^{\varrho} \left[\Omega_2 + \frac{1}{2\pi i} \log (z - e) \Omega_1 \right]$$

als normal oder nicht normal, je nachdem in beiden Reihen Ω_1 und Ω_2 nur eine endliche Anzahl von negativen Potenzen vorkommen oder wenigstens die eine eine unendliche Anzahl derselben enthält.

Sofern wenigstens das eine der beiden kanonischen Integrale, die zum singulären Punkt e gehören, nicht normal ist, bezeichnen wir den Punkt e als „Unbestimmtheitsstelle“.

Die Normalintegrale vom Typus (A) und (B) unterscheidet man als „eigentlich“ und „uneigentlich“ normal*).

*) Die Integrale, die wir normal genannt haben, werden vielfach als „reguläre“ Integrale bezeichnet. Diese Bezeichnung führt leicht zu einer Verwechslung zwischen der Aussage: einem singulären Punkt e ist ein reguläres Integral zugeordnet, und der Aussage: es gibt ein Integral, das im Punkt e das reguläre Verhalten analytischer Funktionen zeigt (einwertig und stetig ist). Wir haben deshalb lieber eine abweichende Bezeichnung gewählt.

Um die Theorie unserer Differentialgleichung vollständig durchzuführen, wäre in erster Linie erforderlich, eine Methode anzugeben, nach der für jeden Unstetigkeitspunkt c der Koeffizienten a, b die Reihen Ω_1 und Ω_2, deren Existenz im Vorausgehenden nachgewiesen worden ist, wirklich zu bilden. Dies ist für den Fall, daß der Punkt c eine Unbestimmtheitsstelle ist, bisher nicht gelungen. Es besteht demnach zur Zeit in der Theorie der linearen Differentialgleichungen noch eine große Lücke.

Für Verzweigungspunkte, zu denen zwei normale kanonische Integrale gehören, kann man die Reihen Ω_1 und Ω_2 mit Hilfe des Prinzips der unbestimmten Koeffizienten bilden; dies wird im folgenden nachgewiesen werden.

Die vorausgehende Untersuchung gibt uns die Mittel an die Hand, um zu beurteilen, wie sich die analytische Fortsetzung der Integrale unserer Differentialgleichung über die Begrenzung der Sternfläche hinaus gestaltet. Um den Sachverhalt möglichst durchsichtig darstellen zu können, ist es notwendig einige Bemerkungen über lineare Substitutionen voraus zu schicken.

§ 64. Über binäre lineare Substitutionen. Es sei eine lineare Substitution

$$(A) \qquad x_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \quad x_2 = a_{21} y_1 + a_{22} y_2$$

vorgelegt; ihre Determinante $a = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ setzen wir als von Null verschieden voraus.

Die Substitution (A) bezeichnen wir abgekürzt durch

$$(x_1, x_2) = A(y_1, y_2).$$

Die inverse Substitution, die sich durch Auflösung der Gleichungen (A) nach y_1, y_2 ergibt, wird mit

$$(y_1, y_2) = A^{-1}(x_1, x_2) \text{ bezeichnet.}$$

Die Gleichungen

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2$$

stellen die „identische" Substitution dar; sie wird mit 1 bezeichnet.

Führen wir nach der Substitution A die Substitution

$$(B) \qquad (y_1, y_2) = B(z_1, z_2)$$

aus, so erhalten wir durch Elimination der Größen y_1, y_2 die Substitution

$$\text{(P)} \qquad (x_1, x_2) = P(z_1, z_2).$$

Die Koeffizienten dieser Substitution haben die Werte

$$(1) \qquad p_{\lambda\mu} = a_{\lambda 1} b_{1\mu} + a_{\lambda 2} b_{2\mu} \qquad \lambda, \mu = 1, 2.$$

Die Determinante der Substitution P ist das Produkt der Determinanten der Substitutionen A und B.

Den Zusammenhang zwischen den Substitutionen A, B und P stellt man symbolisch durch die Gleichung

$P = AB$ dar und man bezeichnet P als Produkt der Substitutionen A und B.

Es ist wohl zu bemerken, daß für Substitutionen-Produkte zwar das assoziative Gesetz gilt aber nicht das kommutative; in Zeichen: es ist zwar

$$(AB)C = A(BC) = ABC,$$

es ist aber nicht

$$AB = BA.$$

Nehmen wir an, es seien drei Substitutionen vorgelegt:

$(x_1, x_2) = S(x'_1, x'_2) \quad (y_1, y_2) = S(y'_1, y'_2) \quad (x_1, x_2) = A(y_1, y_2)$

Durch Elimination der Größen x_1, x_2 und y_1, y_2 ergebe sich die Substitution

$$(x'_1, x'_2) = B(y'_1, y'_2).$$

Zwischen diesen Substitutionen besteht die Beziehung

$$(2) \qquad B = S^{-1} A S,$$

woraus

$$(3) \qquad SB = AS \text{ folgt.}$$

Man sagt in diesem Falle: die Substitution A wird durch die Substitution S in die Substitution B transformiert.

Die Beziehungen, die durch (3) symbolisch dargestellt werden, lauten, wie sich aus (1) ergibt:

$$(4) \qquad \begin{aligned} s_{11} b_{11} + s_{12} b_{21} &= a_{11} s_{11} + a_{12} s_{21} \qquad & s_{11} b_{12} + s_{12} b_{22} &= a_{11} s_{12} + a_{12} s_{22} \\ s_{21} b_{11} + s_{22} b_{21} &= a_{21} s_{11} + a_{22} s_{21} \qquad & s_{21} b_{12} + s_{22} b_{22} &= a_{21} s_{12} + a_{22} s_{22}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen behalten ihre Geltung, wenn gleichzeitig die Größen a_{11} a_{22} b_{11} b_{22} um dieselbe Größe ϱ vermehrt werden, während die übrigen Größen unverändert bleiben.

Da nun, wie aus (2) folgt, die Determinante der Substitution B gleich der Determinante der Substitution A ist, so gilt auch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\varrho & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}-\varrho \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\varrho \end{vmatrix}.$$

Zu den Substitutionen A und B gehören also dieselben Fundamentalgleichungen (vergl. Gleichung (16) des vorigen Paragraphen).

Wenn $a_{12}=a_{21}=0$ und $a_{11}=a_{22}$ ist, so ist auch $b_{12}=b_{21}=0$ und $b_{11}=b_{22}=a_{11}=a_{22}$.

Wegen dieser Beziehungen, die zwischen der Substitution A und der transformierten Substitution B bestehen, bezeichnet man diese Substitutionen als ähnlich.

Man bezeichnet ein System von Substitutionen

$$S_1\ S_2\ S_3 \ldots$$

als „Gruppe“, wenn es die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

1) Die zu einer Substitution des Systems inverse Substitution gehört ebenfalls dem System an.

2) Das Produkt zweier Substitutionen des Systems gehört ebenfalls dem System an.

Die Anzahl der Substitutionen, die der Gruppe angehören, kann endlich oder unendlich sein.

Betrachten wir beispielsweise die Substitutionen, die sich in der Form

$$x_1 = e^{2\pi i \cdot \frac{p}{n}}\, y_1 \qquad x_2 = e^{2\pi i \cdot \frac{q}{n}}\, y_2$$

darstellen lassen, und zwar möge n eine gegebene positive ganze Zahl bedeuten, p, q seien beliebige ganze Zahlen.

Es ist einleuchtend, daß die Gesamtheit dieser Substitutionen eine Gruppe bildet und daß ihre Anzahl endlich ist, nämlich n^2.

Die Gesamtheit der Substitutionen, deren Koeffizienten ganze Zahlen sind und deren Determinante den Wert 1 hat, bildet ebenfalls eine Gruppe; diese Gruppe umfaßt aber unendlich viele Substitutionen.

Wenn sich alle Substitutionen einer Gruppe aus den Substitutionen $S_1\ S_2 \ldots S_n$ und den zu ihnen inversen Substitutionen zusammensetzen lassen, so bezeichnet man diese Substitutionen als „erzeugende Substitutionen“ der Gruppe. Diese erzeugenden Substitutionen kann man immer so wählen, daß sich keine von ihnen aus den übrigen zusammensetzen läßt.

Damit soll nicht gesagt sein, daß sich jede Gruppe durch eine endliche Anzahl von Substitutionen erzeugen läßt: dies ist nicht der Fall.

§ 65. Die Verzweigung der Integrale der Differentialgleichung. Wir haben am Schluß des § 62 eine Sternfläche Λ konstruiert, in der ein jeder unserer Differentialgleichung genügende Funktionszweig den Charakter einer einwertigen, regulären Funktion besitzt.

Wir definieren nun für die Sternfläche nicht nur ein einzelnes Integral, sondern ein Fundamentalsystem von Integralen w_1, w_2.

Längs des Teiles L_ν der Begrenzung der Sternfläche, der im Punkte e_ν endigt, (s. Fig. 35), besteht zwischen den Funktionswerten, die in gegenüberliegenden Punkten auf dem — Rand und auf dem + Rand stattfinden, die Beziehung

$$
(C_\nu)\quad \begin{aligned} \overset{+}{w}_1 &= c_{11}^{(\nu)}\,\overline{w}_1 + c_{12}^{(\nu)}\,\overline{w}_2 \\ \overset{+}{w}_2 &= c_{21}^{(\nu)}\,\overline{w}_1 + c_{22}^{(\nu)}\,\overline{w}_2. \end{aligned}
$$

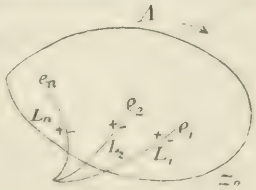


Fig. 35.

Diese Beziehung ist für den Teil der Sperrlinie L_ν, der in die Umgebung des Punktes e_ν fällt, im § 63 nachgewiesen worden: daß sie für die ganze Sperrlinie gilt, folgt aus den allgemeinen Überlegungen des § 49. Es ist also einer jeden Sperrlinie eine „Fundamentalsubstitution“ C_ν zugeordnet.

Es ist nun leicht zu übersehen, wie sich die analytische Fortsetzung des Fundamentalsystems längs eines beliebigen vom Punkt z_0 ausgehenden Weges Λ gestaltet. Bezeichnen wir mit w_1, w_2 die Werte, die die beiden Integrale in einem gegebenen Punkt annehmen, wenn die Fortsetzung innerhalb der Sternfläche erfolgt, mit w_1^*, w_2^* die Werte, zu denen die Fortsetzung längs des Weges Λ führt.

Wenn der Weg Λ die Sperrlinie L_ν in der Richtung von der + Seite zur — Seite überschreitet, aber keine weitere Sperrlinie durchsetzt, so ist

$$(w_1^*, w_2^*) = C_\nu(w_1, w_2).$$

Erfolgt die Überschreitung der Sperrlinie in der entgegengesetzten Richtung, so ist

$$(w_1^*, w_2^*) = C_\nu^{-1}(w_1, w_2).$$

Überschreitet der Weg A der Reihe nach die Sperrlinien $L_\lambda L_\mu L_\nu$ in der Richtung von der + Seite zur — Seite, so ist

$$(w_1^*, w_2^*) = C_\lambda C_\mu C_\nu(w_1, w_2) \text{ usw.}$$

Nehmen wir an, der Weg A überschreite der Reihe nach die sämtlichen Sperrlinien $L_1 L_2 \ldots L_n$ in der Richtung von der + Seite zur — Seite und kehre, ohne sich zu überkreuzen, zum Ausgangspunkt zurück.

Unter dieser Voraussetzung ist

$$(w_1^*, w_2^*) = C_1 C_2 \ldots C_n(w_1, w_2).$$

Nun können wir aber den Weg A, ohne einen singulären Punkt zu überschreiten, um den Punkt z_0 zusammenziehen (s. Fig. 35). Daraus folgt, daß $w_1^* = w_1$ und $w_2^* = w_2$ ist (vergl. § 47). Folglich ist

(1) $$C_1 C_2 \ldots C_n = 1$$

in Worten: die Substitutionen $C_1, C_2 \ldots C_n$ nacheinander ausgeführt ergeben die identische Substitution.

Die Fundamentalsubstitutionen C_ν sind von der Wahl des Fundamentalsystems w_1, w_2 abhängig. Lassen wir an Stelle dieses Fundamentalsystems das Fundamentalsystem

$$(v_1, v_2) = S(w_1, w_2)$$

treten und bezeichnen wir die zu demselben gehörigen Fundamentalsubstitutionen mit C'_ν.

Aus den Gleichungen

$$(\bar v_1, \bar v_2) = S(\bar w_1, \bar w_2) \quad (\overset{+}{v}_1, \overset{+}{v}_2) = S(\overset{+}{w}_1, \overset{+}{w}_2)$$

$$(\overset{+}{w}_1, \overset{+}{w}_2) = C_\nu(\bar w_1, \bar w_2) \quad (\overset{+}{v}_1, \overset{+}{v}_2) = C'_\nu(\bar v_1, \bar v_2)$$

ergibt sich, daß

(2) $$C'_\nu = S^{-1} C_\nu S \text{ ist.}$$

Die auf das System w_1, w_2 bezüglichen Fundamentalsubstitutionen werden also durch die Substitution S in die auf das System v_1, v_2 bezüglichen transformiert.

Die Substitutionen C_ν und C''_ν sind ähnlich (vergl. den vorigen Paragraphen).

Die Substitutionen $C_1, C_2 \ldots C_n$ erzeugen eine Gruppe G und ebenso erzeugen die Substitutionen $C''_1, C''_2 \ldots C''_n$ eine Gruppe G'. Weil jede Substitution der Gruppe G' aus einer Substitution der Gruppe G durch Transformation mittels der Substitution S hervorgeht, sagt man die Gruppe G' gehe durch Transformation aus der Gruppe G hervor.

Betrachtet man zwei Gruppen, die ineinander transformiert werden können, als nicht wesentlich verschieden, so können wir sagen, daß jeder linearen und homogenen Differentialgleichung eine bestimmte Gruppe von Substitutionen entspricht.

Wir haben im § 63 jedem singulären Punkt e_ν zwei kanonische Integrale $W_1^{(\nu)}$, $W_2^{(\nu)}$ zugeordnet. Auch diese kanonischen Integrale, die zunächst nur für die Umgebung des Punktes e_ν definiert sind, können durch analytische Fortsetzung für die ganze Sternfläche definiert werden. Da sich jedes Integral unserer Differentialgleichung als lineare, homogene Funktion der Fundamentalintegrale w_1, w_2 darstellen läßt, so bestehen für jedes kanonische System Gleichungen der Form

$$(3) \qquad (W_1^{(\nu)}, W_2^{(\nu)}) = S_\nu(w_1, w_2) \qquad \nu = 1, 2 \ldots n.$$

Für das kanonische System $W_1^{(\nu)}$, $W_2^{(\nu)}$ erhält die zum Punkt e_ν gehörige Fundamentalsubstitution eine besonders einfache Gestalt: sie lautet entweder

$$\bar{W}_1^{(\nu)} = \varrho_1^{(\nu)} W_1^{(\nu)} \qquad \bar{W}_2^{(\nu)} = \varrho_2^{(\nu)} W_2^{(\nu)} \quad \text{oder}$$

$$\bar{W}_1^{(\nu)} = \varrho^{(\nu)} W_1^{(\nu)} \qquad \bar{W}_2^{(\nu)} = \varrho^{(\nu)} (W_2^{(\nu)} + W_1^{(\nu)}).$$

Diese „kanonische" Form der Fundamentalsubstitution wollen wir mit B_ν bezeichnen. Zwischen den Substitutionen B_ν und C_ν besteht wegen (2) und (3) die Beziehung

$$(4) \qquad C_\nu = S_\nu^{-1} B_\nu S_\nu.$$

Die Substitution S_ν bezeichnet man als „Übergangssubstitution".

Die Determinante der Substitution B_ν ist wegen (4) gleich der Determinante der Substitution C_ν. Das Produkt der Determinanten der Substitutionen C_ν ist wegen (1) $= 1$. Die Determinante der Substitution B_ν ist $= \varrho_1^{(\nu)} \varrho_2^{(\nu)}$, wobei es dahin gestellt bleibt, ob die Größen $\varrho_1^{(\nu)}$, $\varrho_2^{(\nu)}$ verschieden oder gleich sind. Folglich ist das Produkt

$$(5) \qquad \prod_{\nu=1}^{n} \varrho_1^{(\nu)} \varrho_2^{(\nu)} = 1.$$

Die Gruppe der Differentialgleichung ist durch die kanonischen Fundamentalsubstitutionen und die Übergangssubstitutionen vollständig bestimmt. Von den letzteren kann eine beliebig gewählt werden: wir brauchen nur an Stelle des Fundamentalsystems w_1, w_2 das kanonische System $W_1^{(1)}$, $W_2^{(1)}$ treten zu lassen; alsdann geht die Übergangssubstitution S_1 in die identische Substitution über.

Von den noch übrigen $4(n-1)$ Koeffizienten der Übergangssubstitutionen sind drei durch die übrigen bestimmt. Die symbolische Gleichung (1) repräsentiert nämlich vier Gleichungen zwischen den Koeffizienten der Substitutionen B_ν und S_ν. Eine dieser Gleichungen ist mit der Gleichung (5) äquivalent, die sich nur auf die Substitutionen B_ν bezieht.

Die übrigen drei sind — wenn wir die Substitutionen B_ν als gegeben betrachten — Bedingungsgleichungen für die Substitutionen S_ν.

Die kanonischen Integrale, die zu einem scheinbaren singulären Punkt gehören, dürfen beliebig gewählt werden (§ 63). Daher kann auch die zugehörige Übergangssubstitution beliebig gewählt werden; wir können uns insbesondere so einrichten, daß sie sich auf die identische Substitution reduziert.

Das System der kanonischen Integrale, das zu einem eigentlichen singulären Punkt gehört, hängt von zwei willkürlichen Konstanten ab, die in die zugehörige Übergangssubstitution eingehen.

Bezeichnen wir die Anzahl der scheinbaren singulären Punkte mit k, also die Anzahl der eigentlichen singulären Punkte mit $n-k$. In die $n-1$ Übergangssubstitutionen, die ein kanonisches Fundamentalsystem mit den übrigen $n-1$ verbinden, gehen $4k + 2(n-k) = 2(n+k)$ willkürlich zu wählende Konstante ein.

Eine derselben ist außer Ansatz zu lassen, weil sich die Übergangssubstitutionen nicht ändern, wenn man alle $2n$ kanonischen Integrale mit derselben Konstanten multipliziert. Demnach hängt die Gruppe der Differentialgleichung, wenn die Fundamentalsubstitutionen gegeben sind, noch von

$$4(n-1)-3-(2(n+k)-1)=2(n-k-3)$$

wesentlichen Konstanten ab.

Ist $n-k=3$, so ist die Gruppe durch die kanonischen Fundamentalsubstitutionen vollständig bestimmt.

§ 66. Über die singulären Punkte, die nicht Unbestimmtheitsstellen sind. Wir haben in § 63 zwischen singulären Punkten unterschieden, die Unbestimmtheitsstellen sind, und solchen, in denen sich die Integrale bestimmt verhalten. Wir fragen nun nach den notwendigen und ausreichenden Bedingungen dafür, daß ein gegebener singulärer Punkt e nicht eine Unbestimmtheitsstelle ist.

Nehmen wir zunächst an, zum Punkt e gehören zwei eigentlich normale kanonische Integrale:

$$(1)\qquad W_1=(z-e)^{\frac{\log \varrho_1}{2\pi i}}\,\Omega_1 \qquad W_2=(z-e)^{\frac{\log \varrho_2}{2\pi i}}\,\Omega_2 .$$

Ω_ν bedeutet eine Reihe

$$(2)\ \Omega_\nu=\gamma_{n_\nu}^{(\nu)}(z-e)^{n_\nu}+\gamma_{n_\nu+1}^{(\nu)}(z-e)^{n_\nu+1}+\gamma_{n_\nu+2}^{(\nu)}(z-e)^{n_\nu+2}\cdots \qquad \nu=1,2.$$

Die Exponenten n_1, n_2 sind ganze — positive oder negative — Zahlen.

Die Größen $\frac{\log \varrho_\nu}{2\pi i}$ sind nur bis auf eine beliebige ganze Zahl bestimmt; wir können daher von Ω_ν den Faktor $(z-e)^{n_\nu}$ abtrennen und ihn mit der Potenz $(z-e)^{\frac{\log \varrho_\nu}{2\pi i}}$ vereinigen. Wir erhalten für unsere Integrale die Darstellung

$$(3)\qquad W_\nu=(z-e)^{\sigma_\nu}\,\Omega_\nu \qquad \nu=1,2.$$

Hier bedeutet σ_ν einen geeignet gewählten Wert des Logarithmus $\frac{1}{2\pi i}\log \varrho_\nu$; Ω_ν bedeutet eine gewöhnliche Potenzreihe:

$$(4)\qquad \Omega_\nu=\gamma_0^{(\nu)}+\gamma_1^{(\nu)}(z-e)+\gamma_2^{(\nu)}(z-e)^2+\cdots.$$

Der erste Koeffizient in dieser Potenzreihe — $\gamma_0^{(\nu)}$ — verschwindet nicht.

Die Exponenten σ_1, σ_2 bezeichnen wir nach Riemanns Vorgang als zum Punkt e gehörige Exponenten.

Wir haben eben stillschweigend vorausgesetzt, daß die in (1) auftretenden Größen ϱ_1 und ϱ_2 ungleich sind. Nehmen wir an es sei $\varrho_2 = \varrho_1$, der Punkt e sei also ein scheinbarer singulärer Punkt.

Wir dürfen in diesem Fall voraussetzen, daß die Zahlen n_1 und n_2, die in den Gleichungen (2) vorkommen, ungleich sind. Wäre nämlich $n_1 = n_2$, so könnten wir an Stelle des Integrals W_1 das Integral

$$W_1 - \frac{\gamma_{n_1}^{(1)}}{\gamma_{n_2}^{(2)}} W_2$$

treten lassen und für dieses ist unsere Voraussetzung sicher erfüllt.

Trennen wir nun wieder von Ω_1 die Potenz $(z-e)^{n_1}$ ab und vereinigen sie mit der Potenz $(z-e)^{\frac{\log \varrho_1}{2\pi i}}$, so gelangen wir auch in diesem Fall zu der Darstellung (3) der kanonischen Integrale W_1 und W_2.

Wir heben nochmals ausdrücklich hervor: die Exponenten σ_1 und σ_2, die in dieser Darstellung auftreten, sind auf jeden Fall verschieden.

Wenn $\varrho_1 = \varrho_2$ ist, so ist die Differenz $\sigma_1 - \sigma_2$ eine ganze Zahl, im allgemeinen Fall aber nicht. Im allgemeinen Fall sind die Koeffizienten einer jeden der beiden Reihen Ω_ν (4) bis auf einen gemeinschaftlichen Faktor bestimmt; ist dagegen $\varrho_1 = \varrho_2$, so sind zwar die Koeffizienten der Reihe, die dem Exponenten mit größerem reellen Bestandteil entspricht, bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt, von den Koeffizienten der anderen Reihe aber bleiben zwei unbestimmt. Denn diese Reihe kann, ohne daß die Form der Gleichungen (3) geändert wird, durch

$$\alpha \Omega_1 + \beta \Omega_2$$

ersetzt werden, wo α und β beliebig zu wählende Konstante bezeichnen.

Wir berechnen nun die Koeffizienten a und b unserer Differentialgleichung aus den für die Integrale W_1 und W_2 geltenden Reihenentwicklungen (4).

Es ist (§ 61 Nr. 3)

$$a = -\frac{W_2 W_1'' - W_1 W_2''}{W_1 W_2' - W_2 W_1'}, \qquad b = \frac{W_1' W_2'' - W_2' W_1''}{W_1 W_2' - W_2 W_1'}.$$

Aus (3) und (4) folgt:

$$W_1 = \gamma_0^{(1)}(z-e)^{\sigma_1} + \gamma_1^{(1)}(z-e)^{\sigma_1+1} + \cdots$$

$$W_1' = \sigma_1 \gamma_0^{(1)}(z-e)^{\sigma_1-1} + (\sigma_1+1)\gamma_1^{(1)}(z-e)^{\sigma_1} + \cdots$$

$$W_1'' = \sigma_1(\sigma_1-1)\gamma_0^{(1)}(z-e)^{\sigma_1-2} + (\sigma_1+1)\sigma_1\gamma_1^{(1)}(z-e)^{\sigma_1-1} + \cdots$$

und hieraus ergibt sich

$$W_1 W_2' - W_2 W_1' = (\sigma_2-\sigma_1)\gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}(z-e)^{\sigma_1+\sigma_2-1} + \cdots$$

$$W_1 W_2'' - W_2 W_1'' = (\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_2+\sigma_1-1)\gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}(z-e)^{\sigma_1+\sigma_2-2} + \cdots$$

$$W_1' W_2'' - W_2' W_1'' = (\sigma_2-\sigma_1)\sigma_1\sigma_2\gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}(z-e)^{\sigma_1+\sigma_2-3} + \cdots$$

Die Koeffizienten $\gamma_0^{(1)}$, $\gamma_0^{(2)}$ und die Differenz $\sigma_2 - \sigma_1$ verschwinden nicht. Folglich ist

$$\lim_{z=e}(z-e)a = 1 - \sigma_1 - \sigma_2$$

$$\lim_{z=e}(z-e)^2 b = \sigma_1\sigma_2.$$

Im Punkt e wird also der Koeffizient a höchstens zur ersten, der Koeffizient b höchstens zur zweiten Ordnung unendlich.

Nehmen wir nunmehr an, von den kanonischen Integralen W_1, W_2 sei zwar das erste eigentlich normal, das zweite aber uneigentlich normal; es gelten also für die Umgebung des Punktes e Reihenentwicklungen der Form

$$W_1 = (z-e)^{\frac{\log\varrho}{2\pi i}}\Omega_1 \qquad W_2 = (z-e)^{\frac{\log\varrho}{2\pi i}}\left(\Omega_2 + \frac{1}{2\pi i}\log(z-e)\Omega_1\right)$$

(Fall B des vorigen Paragraphen), wo Ω_1 und Ω_2 Reihen der Form (2) bedeuten.

Indem wir wieder von Ω_1 und Ω_2 geeignete Potenzen von $z-e$ abspalten, können wir dieser Darstellung die Gestalt geben:

$$(5)\quad W_1 = (z-e)^{\sigma_1}\Omega_1 \quad W_2 = (z-e)^{\sigma_2}\Omega_2 + \frac{1}{2\pi i}\log(z-e)(z-e)^{\sigma_1}\Omega_1,$$

wo nun Ω_1 und Ω_2 Potenzreihen bedeuten, die für $z = e$ nicht verschwinden.

Die Zahlen σ_1 und σ_2 bezeichnen wir wieder als zum singulären Punkt e gehörige Exponenten. Während in dem Fall, daß zwei eigentlich normale Integrale existieren, die beiden Exponenten gleichberechtigt sind, müssen wir im vorliegenden Fall zwischen dem ersten Exponenten σ_1, dem ein eigentlich normales Integral W_1 entspricht, und dem zweiten Exponenten σ_2 unterscheiden.

Die Exponenten σ_1 und σ_2 sind geeignet gewählte Werte von $\frac{1}{2\pi i}\log\varrho$, daher ist die Differenz $\sigma_1 - \sigma_2$ eine ganze Zahl. Wir können uns so einrichten, daß diese Differenz nicht verschwindet.

Wenn nämlich die in den Gleichungen (5) vorkommenden Exponenten σ_1 und σ_2 einander gleich sind, so ersetzen wir — was offenbar zulässig ist — das Integral W_2 durch das Integral $W_3 = W_2 + \text{Konst.}\, W_1$. Es tritt dann an Stelle der Reihe Ω_2 die Reihe $\Omega_3 = \Omega_2 + \text{Konst.}\, \Omega_1$. Die verfügbare Konstante wählen wir so, daß die Funktion Ω_3 im Punkt e verschwindet. Wir setzen, die Ordnung, zu der sie verschwindet mit k bezeichnend, $\Omega_3 = (z-e)^k H$. An Stelle der Gleichungen (5) treten nun die Gleichungen

$$W_1 = (z-e)^{\sigma_1}\Omega_1 \quad W_3 = (z-e)^{\sigma_1+k}H + \frac{1}{2\pi i}\log(z-e)(z-e)^{\sigma_1}\Omega_1.$$

Wir dürfen deshalb unbeschadet der Allgemeinheit der Untersuchung voraussetzen, daß die in den Gleichungen (5) auftretenden Exponenten σ_1 und σ_2 verschieden sind.

Wir setzen zur Abkürzung $(z-e)^{\sigma_2}\Omega_2 = U$, woraus

$$W_2 = U + \frac{1}{2\pi i}\log(z-e)\, W_1 \text{ folgt,}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned}
&W_1\, W_2' - W_2\, W_1' \\
&\qquad = W_1\, U' - W_1'\, U + \frac{1}{2\pi i}\,\frac{W_1^2}{z-e} \\
&W_1\, W_2'' - W_2\, W_1'' \\
&\qquad = W_1\, U'' - W_1'' U + \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{2\, W_1 W_1'}{z-e} - \frac{W_1^2}{(z-e)^2}\right] \\
&W_1'\, W_2'' - W_2' W_1'' \\
&\qquad = W_1'\, U'' - W_1'' U' + \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{2\, W_1'^2 - W_1 W_1''}{z-e} - \frac{W_1 W_1'}{(z-e)^2}\right].
\end{aligned}$$

$$W_1 W_2' - W_2 W_1' = (\sigma_2 - \sigma_1)\gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}(z-e)^{\rho_1+\rho_2-1} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\gamma_0^{(1)2}(z-e)^{2\rho_1-1} + \cdots$$
$$W_1 W_2'' - W_2 W_1'' = (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 + \sigma_1 - 1)\gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}(z-e)^{\rho_1+\rho_2-2} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}(2\sigma_1 - 1)\gamma_0^{(1)2}(z-e)^{2\rho_1-2} + \cdots$$
$$W_1' W_2'' - W_2' W_1'' = (\sigma_2 - \sigma_1)\sigma_1\sigma_2\gamma_0^{(1)}\gamma_0^{(2)}(z-e)^{\rho_1+\rho_2-3} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\sigma_1^2\gamma_0^{(1)2}(z-e)^{2\rho_1-3} + \cdots.$$

Wenn die Differenz $\sigma_1 - \sigma_2$ positiv ist, so haben die Anfangsglieder der drei Reihenentwicklungen dieselben Werte wie in dem vorher behandelten Fall und es gelten daher dieselben Schlußfolgerungen.

Nehmen wir an, die Differenz $\sigma_1 - \sigma_2$ sei negativ, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen mit Rücksicht auf (5)

$$\lim_{z=e}(z-e)a = 1 - 2\sigma_1$$
$$\lim_{z=e}(z-e)^2 b = \sigma_1^2.$$

Es kann also auch unter dieser Annahme der Koeffizient a höchstens zur ersten und der Koeffizient b höchstens zur zweiten Ordnung unendlich werden.

Im nächsten Paragraphen wird sich herausstellen, daß die Annahme $\sigma_1 - \sigma_2 < 0$ unzulässig ist.

Wir sprechen das Resultat der vorausgehenden Betrachtungen in einem Satz aus:

VIII. Damit zum singulären Punkt e zwei normale kanonische Integrale gehören, darf der Koeffizient a in diesem Punkt höchstens zur ersten, der Koeffizient b höchstens zur zweiten Ordnung unendlich werden.

Wir werden sofort beweisen, daß diese Bedingungen nicht nur notwendig, sondern auch ausreichend sind.

§ 67. Beweis daß der Satz VIII umkehrbar ist.

Wir entwickeln die Koeffizienten a und b in Reihen, die nach Potenzen von $z - e$ fortschreiten. Es sei

$$(1)\quad a = \frac{\alpha_{-1}}{z-e} + \alpha_0 + \alpha_1(z-e) + \alpha_2(z-e)^2 + \cdots$$
$$b = \frac{\beta_{-2}}{(z-e)^2} + \frac{\beta_{-1}}{z-e} + \beta_0 + \beta_1(z-e) + \beta_2(z-e)^2 + \cdots.$$

Für das Integral W setzen wir die Reihe an

(2) $$W = \gamma_0(z-e)^\sigma + \gamma_1(z-e)^{\sigma+1} + \gamma_2(z-e)^{\sigma+2} + \cdots.$$

Den ersten Koeffizienten γ_0 setzen wir als von Null verschieden voraus.

Wir setzen ferner zur Abkürzung

$$W'' + aW' + bW = \delta_{-2}(z-e)^{\sigma-2} + \delta_{-1}(z-e)^{\sigma-1} + \delta_0(z-e)^\sigma + \delta_1(z-e)^{\sigma+1} + \cdots.$$

Eine einfache Rechnung ergibt

(3) $$\begin{aligned} \delta_{-2} &= [\sigma(\sigma-1) + \sigma\alpha_{-1} + \beta_{-2}]\gamma_0 \\ \delta_{-1} &= [(\sigma+1)\sigma + (\sigma+1)\alpha_{-1} + \beta_{-2}]\gamma_1 + [\sigma\alpha_0 + \beta_{-1}]\gamma_0 \\ \delta_0 &= [(\sigma+2)(\sigma+1) + (\sigma+2)\alpha_{-1} + \beta_{-2}]\gamma_2 \\ &\quad + [(\sigma+1)\alpha_0 + \beta_{-1}]\gamma_1 + [\sigma\alpha_1 + \beta_0]\gamma_0 \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta_{\nu-2} &= [(\sigma+\nu)(\sigma+\nu-1) + (\sigma+\nu)\alpha_{-1} + \beta_{-2}]\gamma_\nu \\ &\quad + [(\sigma+\nu-1)\alpha_0 + \beta_{-1}]\gamma_{\nu-1} + \cdots \\ &\quad + [(\sigma+\mu)\alpha_{\nu-\mu-1} + \beta_{\nu-\mu-2}]\gamma_\mu + \cdots + [\sigma\alpha_{\nu-1} + \beta_{\nu-2}]\gamma_0 \\ &= [(\sigma+\nu)(\sigma+\nu-1) + (\sigma+\nu)\alpha_{-1} + \beta_{-2}]\gamma_\nu \\ &\quad + \sum_{\mu=0}^{\nu-1} [(\sigma+\mu)\alpha_{\nu-\mu-1} + \beta_{\nu-\mu-2}]\gamma_\mu. \end{aligned}$$

Da γ_0 nicht verschwindet, folgt aus $\delta_{-2} = 0$ für σ die Gleichung

(4) $$\sigma^2 + (\alpha_{-1} - 1)\sigma + \beta_{-2} = 0.$$

Diese Gleichung bezeichnen wir als die zum singulären Punkt e gehörige „charakteristische Gleichung". Die Koeffizienten dieser Gleichung stehen in einer einfachen Beziehung zu den Koeffizienten a, b unserer Differentialgleichung:

der Koeffizient von σ ist $\lim\limits_{z=e} (z-e)a - 1$,

das absolute Glied ist $\lim\limits_{z=e} (z-e)^2 b$.

Nehmen wir zunächst an, die charakteristische Gleichung besitze zwei verschiedene Wurzeln σ_1 und σ_2 und die Differenz $\sigma_1 - \sigma_2$ sei keine ganze Zahl.

Der Koeffizient von γ_ν in dem Ausdruck $\delta_{\nu-2}$ (3) ist

(5) $$(\sigma+\nu)^2 + (\alpha_{-1} - 1)(\sigma+\nu) + \beta_{-2} = (\sigma+\nu-\sigma_1)(\sigma+\nu-\sigma_2).$$

Er verschwindet daher weder für $\sigma = \sigma_1$ noch für $\sigma = \sigma_2$. Daher sind durch die Gleichungen (3)

$$\delta_{-2} = 0 \quad \delta_{-1} = 0 \quad \delta_0 = 0 \quad \delta_1 = 0 \ldots$$

die Verhältnisse der Koeffizienten $\gamma_0\ \gamma_1\ \gamma_2 \ldots$ eindeutig bestimmt.

Den beiden Werten σ_1 und σ_2 entsprechend erhalten wir daher zwei unserer Differentialgleichung genügende Reihen der Form (2).

Es bleibt zu beweisen, daß diese Reihen konvergieren.

Zu dem Zweck bemerken wir: die beiden Reihen (1) konvergieren, so lange der absolute Betrag $|z-e|$ kleiner als die Entfernung r des Punktes e vom nächsten singulären Punkt ist; die Produkte $\alpha_\nu r^\nu$ und $\beta_\nu r^\nu$ bleiben daher alle unter einer angebbaren Größe. Wir können daher eine positive Größe k der Art bestimmen, daß

$$(6) \qquad |\alpha_{\nu-1}| < \frac{1}{k^\nu} \quad \text{und} \quad |\beta_{\nu-2}| < \frac{1}{k^\nu} \quad \text{ist für } \nu = 1, 2, 3 \cdots$$

Nun wenden wir den Schluß von n auf $n+1$ an: wir nehmen an, es sei

$$(7) \qquad |\gamma_\nu| < \frac{M}{k^\nu} \quad \text{für } \nu \leq n,$$

wo M eine positive Größe bezeichnet, und beweisen, daß diese Ungleichung auch noch für $\nu = n+1$ gilt.

Setzen wir in der Gleichung $\delta_{\nu-2} = 0$ (3)

$$\sigma = \sigma_1 \quad \nu = n+1,$$

so erhalten wir mit Rücksicht auf (5)

$$(n+1)(n+1+\sigma_1-\sigma_2)\gamma_{n+1} = -\sum_{\mu=0}^{n} [(\sigma_1+\mu)\alpha_{n-\mu} + \beta_{n-\mu-1}]\gamma_\mu.$$

Der absolute Betrag der rechts stehenden Summe ist wegen (6) und (7) nicht größer als die Summe

$$\sum_{\mu=0}^{n} \left[(\mu + |\sigma_1| + 1) \frac{1}{k^{n-\mu+1}} \right] \cdot \frac{M}{k^\mu}$$
$$= \left[\frac{1}{2}(n+1)(n+2) + (n+1)|\sigma_1| \right] \frac{M}{k^{n+1}}.$$

Folglich ist

$$|\gamma_{n+1}| \leq \frac{\frac{1}{2}(n+2) + |\sigma_1|}{|n+1+\sigma_1-\sigma_2|} \cdot \frac{M}{k^{n+1}}.$$

Die Größe M können wir so groß wählen, daß die Ungleichung (7) für eine beliebig zu bestimmende Anzahl von Koeffizienten erfüllt ist. Wir dürfen daher bei unserem Beweis die Zahl n so groß voraussetzen, daß

$$\frac{1}{2}(n+2)+\sigma_1 < n+1+\sigma_1-\sigma_2 \text{ ist.}$$

Unter dieser Voraussetzung ist

$$\gamma_{n+1} < \frac{M}{k^{n+1}}.$$

Damit ist bewiesen, daß die Reihe (2) für $\sigma = \sigma_1$ konvergiert, vorausgesetzt, daß der absolute Betrag $|z-e| \leqq k$ ist. Da wir es unentschieden gelassen haben, welche der beiden Wurzeln der charakteristischen Gleichung unter σ_1 zu verstehen ist, so gilt unser Konvergenzbeweis auch für $\sigma = \sigma_2$.

Die Funktion $\Omega_\nu = (z-e)^{-\sigma_\nu} W_\nu$ verhält sich innerhalb des ganzen Kreises um den Punkt e regulär, der durch den nächstliegenden singulären Punkt geht. Innerhalb dieses Kreises muß daher auch die Potenzreihe, die Ω_ν darstellt, konvergieren.

Demnach reicht der Konvergenzkreis der Reihe (2) bis zum nächsten singulären Punkt.

Nehmen wir nunmehr an, die charakteristische Gleichung (4) besitze zwar zwei verschiedene Wurzeln σ_1 und σ_2, aber die Differenz $\sigma_1 - \sigma_2$ sei eine ganze Zahl m. Wir wählen die Bezeichnung so, daß m positiv ist.

Für $\sigma = \sigma_1$ wird der Koeffizient von γ_ν im Ausdruck $\delta_{\nu-2}$ (5) $\nu(\nu+m)$; er verschwindet also für keinen Wert des Index ν.

Daher entspricht der Wurzel σ_1 auf jeden Fall eine konvergente Reihe der Form (2). Die Koeffizienten dieser Reihe sind bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt. Dagegen verschwindet für $\sigma = \sigma_2$ der Koeffizient von γ_m in dem Ausdruck δ_{m-2}.

Daher müssen in diesem Fall die m Koeffizienten $\gamma_0 \gamma_1 \cdots \gamma_{m-1}$ den m linearen und homogenen Gleichungen

$$\delta_{-1} = 0 \quad \delta_0 = 0 \cdots \delta_{m-2} = 0 \text{ genügen.}$$

Da γ_0 nicht gleich Null ist, so ist dies nur möglich, wenn die Determinante dieser Gleichungen verschwindet. Wenn dieser Fall eintritt, so bleiben von den Koeffizienten $\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \dots$ zwei unbestimmt, nämlich γ_0 und γ_m. Der Punkt e ist in diesem Fall ein scheinbarer singulärer Punkt. Wenn dagegen die genannte Determinante nicht verschwindet, so entspricht der Wurzel σ_2 kein Integral der Form (2); es existiert also nur ein eigentlich normales Integral.

Wenn die charakteristische Gleichung (4) zwei gleiche Wurzeln besitzt, so ist der Koeffizient von γ_ν in dem Ausdruck $\delta_{\nu-2}$ (3) gleich ν^2; wir erhalten auch in diesem Fall eine Reihe der Form (2), deren Koeffizienten bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt sind.

Wir haben nun für den Fall, daß dem singulären Punkt e nur ein eigentlich normales Integral zugeordnet ist, die Existenz eines uneigentlich normalen Integrals nachzuweisen.

Wie soeben gezeigt worden ist, kann dieser Fall nur eintreten, wenn die Differenz der Wurzeln der charakteristischen Gleichung eine ganze Zahl ist. Wir wählen die Bezeichnung der Wurzeln wieder so, daß die Differenz $\sigma_1 - \sigma_2 = m$ Null oder eine ganze positive Zahl ist.

Wir benützen wieder die Methode der unbestimmten Koeffizienten und setzen die Reihe an

$$(8) \qquad W_2 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu^{(2)} (z-e)^{\sigma_2+\nu} + \log(z-e) \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu^{(1)} (z-e)^{\sigma_1+\nu}$$
$$= U + \log(z-e) \,.\, W_1 .$$

Hier bedeutet W_1 das zum Exponenten σ_1 gehörige eigentlich normale Integral, dessen Existenz im Vorausgehenden nachgewiesen worden ist.

Substituieren wir den Ausdruck (8) in unsere Differentialgleichung, so fallen die in $\log(z-e)$ multiplizierten Glieder weg und wir erhalten zur Bestimmung der Funktion U die Differentialgleichung

$$(9) \qquad U'' + aU' + bU + \frac{2W_1'}{z-e} - \frac{W_1}{(z-e)^2} + \frac{aW_1}{z-e} = 0.$$

Wir setzen, die oben benützte Bezeichnung beibehaltend

$$(10) \qquad U'' + aU' + bU = \sum_{\nu=-2}^{\infty} \delta_\nu (z-e)^{\sigma_2+\nu}.$$

Hier ist (vergl. (3))

$$(11)\qquad \delta_{-2} = \sigma_2^2 + (\alpha_{-2} - 1)\sigma_2 + \beta_{-2} = 0$$

wegen (4) und

$$(12)\qquad \delta_{\nu-2} = \nu(\nu - m)\gamma_\nu^{(2)} + \sum_{\mu=0}^{\nu-1}[(\sigma_2 + \mu)\alpha_{\nu-\mu-1} + \beta_{\nu-\mu-2}]\gamma_\mu^{(2)}$$

$$\nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Wir setzen ferner den zweiten Teil des Ausdrucks auf der linken Seite der Gleichung (9)

$$(13)\quad \frac{2W_1'}{z-e} - \frac{W_1}{(z-e)^2} + \frac{\alpha W_1}{z-e} = \sum_{\nu=-2}^{\infty}\varepsilon_\nu(z-e)^{\sigma_1+\nu} = \sum_{\nu=-2}^{\infty}\varepsilon_\nu(z-e)^{\sigma_2+m+\nu}.$$

Der erste Koeffizient rechts hat den Wert

$$(14)\qquad \varepsilon_{-2} = (2\sigma_1 - 1 + \alpha_{-1})\gamma_0^{(1)} = (\sigma_1 - \sigma_2)\gamma_0^{(1)}.$$

Die Werte der übrigen Koeffizienten kommen für die folgenden Auseinandersetzungen nicht weiter in Betracht.

Wir substituieren die Ausdrücke (10) und (14) in die Gleichung (9) und erhalten, indem wir die Koeffizienten der verschiedenen Potenzen von $z - e$ gleich Null setzen, die Gleichungen

$$(15)\qquad \delta_\nu + \varepsilon_\nu = 0 \quad \text{für } \nu = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$$

Bei der Diskussion dieser Gleichungen ist es zweckmäßig, die Fälle $m = 0$ und $m > 0$ getrennt zu behandeln.

Nehmen wir zunächst an, es sei $m = \sigma_1 - \sigma_2 = 0$. In diesem Fall ist wegen (14) $\varepsilon_{-2} = 0$. Da zufolge (11) auch $\delta_{-2} = 0$ ist, so fällt die erste der Gleichungen (15) weg.

Der Ausdruck $\delta_{\nu-2}$ ist eine lineare und homogene Funktion der Größen $\gamma_0^{(2)}, \gamma_1^{(2)} \ldots \gamma_\nu^{(2)}$, und zwar ist der Koeffizient der Größe $\gamma_\nu^{(2)}$ gleich ν^2 (12). Daher werden durch die Gleichungen (15) der Reihe nach die Koeffizienten $\gamma_1^{(2)}, \gamma_2^{(2)} \ldots$ bestimmt; der Koeffizient $\gamma_0^{(2)}$ bleibt unbestimmt.

Nehmen wir nunmehr an, es sei $m > 0$.

In diesem Fall fehlen in der Reihe (13) die Potenzen

$$(z-e)^{\sigma_2-2}(z-e)^{\sigma_2-1}\cdots(z-e)^{\sigma_2+m-3},$$

die in der Reihe (10) vorkommen. Die Gleichungen (15) lauten daher

$$\delta_{-2} = 0 \quad \delta_{-1} = 0 \quad \delta_0 = 0 \quad \delta_1 = 0 \cdots \delta_{m-3} = 0$$

$$\delta_{m-2} + \varepsilon_{-2} = 0 \quad \delta_{m-1} + \varepsilon_{-1} = 0 \cdots \delta_{m+\mu} + \varepsilon_{-\mu} = 0 \cdots$$

Die in der ersten Zeile stehenden Gleichungen bestimmen die Verhältnisse der Koeffizienten $\gamma_0^{(2)}\ \gamma_1^{(2)} \cdots \gamma_{m-1}^{(2)}$ (im Fall $m = 1$ läßt die Gleichung $\delta_{-2} = 0$ den Koeffizienten $\gamma_0^{(2)}$ unbestimmt); die erste Gleichung in der zweiten Zeile (vergl. (12) und (14))

$$\delta_{m-2} + \varepsilon_{-2} = \sum_{\mu=0}^{m-1} [(\sigma_2 + \mu)\alpha_{1,-\mu-1} + \beta_{1,-\mu-2}]\gamma_\mu^{(2)} + m\gamma_0^{(1)} = 0$$

bestimmt die absoluten Werte dieser Koeffizienten.

Diese Gleichung kann zu keinem Widerspruch führen, denn wenn die Auflösungsdeterminante verschwände, so wäre, wie oben nachgewiesen worden ist, der Punkt e ein scheinbarer singulärer Punkt und es wären ihm zwei eigentlich normale Integrale zugeordnet. Diesen Fall haben wir schon oben erledigt und schließen ihn deshalb jetzt aus.

In der Gleichung

$$\delta_{m+\mu} + \varepsilon_\mu = 0 \qquad \mu \geqq -1$$

hat die letzte der Größen $\gamma_\nu^{(2)}$, die in ihr vorkommt — die Größe $\gamma_{m+\mu+2}^{(2)}$ — den Koeffizienten $(m+\mu+2)(\mu+2)$ (s. (12)): durch diese Gleichung wird aber diese Größe eindeutig bestimmt; die Größe $\gamma_m^{(2)}$ bleibt unbestimmt.

Um zu beweisen, daß die Reihe (8) konvergiert, bemerken wir zunächst: die Funktionen W_1 und a verhalten sich innerhalb eines Ringgebietes regulär, dessen Mittelpunkt der Punkt e ist und dessen äußerer Grenzkreis durch den nächsten singulären Punkt geht. Innerhalb dieses Ringgebietes konvergiert sicher die Reihe (13). Da der Radius des äußeren Grenzkreises nicht kleiner als die Größe k ist, die den Ungleichungen (6) genügt, muß das Produkt $\varepsilon_\nu k^\nu$ für alle Indizeswerte unter einer angebbaren Größe bleiben; wir können also eine positive Größe M derart bestimmen, daß

$$(16) \qquad \varepsilon_\nu < \frac{\nu M}{k^{\nu+m}}$$

ist. Die Größe M wählen wir überdies so groß, daß

$$\gamma_\nu^{(2)} < \frac{M}{k^\nu} \text{ ist, für } \nu < n.$$

Die Zahl n nehmen wir $\geqq m + 2$ an.

Nun wenden wir wieder den Schluß von n auf $n + 1$ an.

Da wegen (12) und (15)

$$(n+1)(n+1-m)\gamma_{n+1}^{(2)} = -\sum_{\mu=0}^{n}[(\sigma_2+\mu)\alpha_{n-\mu}+\beta_{n-\mu-1}]\gamma_{\mu}^{(2)} - \varepsilon_{n+1}$$

ist, so folgt mit Rücksicht auf (16) (vergl. die oben durchgeführte Rechnung)

$$(n+1)(n+1-m)|\gamma_{n+1}^{(2)}| <$$
$$[(n+1)|\sigma_2| + \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2)]\frac{M}{k^{n+1}} + \frac{(n+1)M}{k^{n+1}},$$

also

$$|\gamma_{n+1}^{(2)}| \leqq \frac{\frac{1}{2}(n+2)+1+|\sigma_2|}{n+1-m}\cdot\frac{M}{k^{n+1}}.$$

Bezüglich der Zahl n, die wir nach Belieben wählen können, haben wir zunächst nur vorausgesetzt, es sei $n \geqq m+1$. Wir nehmen nun weiter an, es sei

$$n+1-m > \tfrac{1}{2}(n+2)+1+|\sigma_2|.$$

Unter dieser Voraussetzung ist

$$|\gamma_{n+1}^{(2)}| < \frac{M}{k^{n-1}}.$$

Damit ist bewiesen, daß die Reihe (8) innerhalb eines Kreises vom Radius k um den Punkt c konvergiert. Man zeigt wie oben, daß der Konvergenzkreis bis zum nächsten singulären Punkt reicht.

Wir haben früher bewiesen (§ 62, Satz VI), daß die Integrale unserer Differentialgleichung in der Umgebung des unendlich fernen Punktes den Charakter regulärer Funktionen besitzen, wenn in diesem Punkt der Koeffizient b zur vierten Ordnung und die Differenz $a-\frac{2}{z}$ zur zweiten Ordnung verschwindet. Wir wollen nun zusehen, unter welchen Bedingungen dem unendlich fernen Punkt wenigstens ein normales kanonisches Integralsystem zugeordnet ist.

Zu dem Zweck transformieren wir unsere Differentialgleichung durch die Substitution $z=\frac{1}{\zeta}$. Es ist (vgl. § 62, S. 303)

$$\frac{d^2w}{dz^2} - a\frac{dw}{dz} + bw = \zeta^4\left(\frac{d^2w}{d\zeta^2} + A\frac{dw}{d\zeta} + Bw\right), \quad \text{wo}$$

$$A = \frac{2}{\zeta} - \frac{a}{\zeta^2} \quad \text{und} \quad B = \frac{b}{\zeta^4} \text{ ist.}$$

Damit die Differentialgleichung

$$(17)\qquad \frac{d^2w}{d\zeta^2} + A\frac{dw}{d\zeta} + Bw = 0$$

in der Umgebung des Punktes $\zeta = 0$ zwei normale Integrale besitzt, ist erforderlich und hinreichend, daß der Koeffizient A höchstens zur ersten, der Koeffizient B höchstens zur zweiten Ordnung unendlich wird. Nun ist

$$(18)\qquad \lim_{\zeta=0} \zeta A = 2 - \lim_{\zeta=0} \frac{a}{\zeta} = 2 - \lim_{z=\infty} az \quad \text{und}$$

$$\lim_{\zeta=0} \zeta^2 B = \lim_{z=\infty} z^2 b.$$

Diese beiden Grenzwerte müssen endlich sein. Daraus folgt:

IX. Damit der unendlich ferne Punkt keine Unbestimmtheitsstelle ist, muß in diesem Punkt der Koeffizient a mindestens zur ersten und der Koeffizient b mindestens zur zweiten Ordnung verschwinden.

Die Exponenten, die in Beziehung auf die ursprüngliche Differentialgleichung dem unendlich fernen Punkt der z-Ebene zugeordnet sind, stimmen mit den Exponenten überein, die in Beziehung auf die Differentialgleichung (17) dem Nullpunkt der ζ-Ebene zugeordnet sind. Die letzteren sind Wurzeln einer quadratischen Gleichung, in der der Koeffizient der ersten Potenz der Unbekannten den Wert $\lim\limits_{\zeta=0} \zeta A - 1$ und das absolute Glied den Wert $\lim\limits_{\zeta=0} \zeta^2 B$ hat (vergl. die Bemerkung zu Gleichung (4)). Nun ist (18)

$$\lim_{\zeta=0} \zeta A - 1 = 1 - \lim_{z=\infty} az \quad \text{und} \quad \lim_{\zeta=0} \zeta^2 B = \lim_{z=\infty} bz^2.$$

Die in Rede stehenden Exponenten sind die Wurzeln einer quadratischen Gleichung, in der der Koeffizient der ersten Potenz der Unbekannten den Wert $1 - \lim\limits_{z=\infty} az$ und das absolute Glied den Wert $\lim\limits_{z=\infty} bz^2$ hat.

Durch die Entwicklungen, die wir in diesem Paragraphen durchgeführt haben, ist nicht nur die Umkehrbarkeit des Satzes VIII bewiesen, sondern wir haben noch ein weiteres Resultat gewonnen, das wir in einem Satz aussprechen:

X. Für jeden singulären Punkt, der keine Unbestimmtheitsstelle ist, läßt sich eine charakteristische Gleichung

$$\sigma^2 + p\sigma + q = 0$$

bilden, deren Wurzeln die zugehörigen Exponenten sind. Ist der betreffende singuläre Punkt ein im Endlichen liegender Punkt e, so ist

$$p = \lim_{z=e} (z-e)a - 1 \qquad q = \lim_{z=e} (z-e)^2 b,$$

fällt er in den unendlich fernen Punkt, so ist

$$p = 1 - \lim_{z=\infty} za \qquad q = \lim_{z=\infty} z^2 b.$$

Wenn die Differenz der Wurzeln der charakteristischen Gleichung keine ganze Zahl ist, so ist der singuläre Punkt ein eigentlicher Verzweigungspunkt und es sind ihm zwei eigentlich normale Integrale zugeordnet.

Wenn dagegen diese Differenz eine von Null verschiedene ganze Zahl ist, so ist der singuläre Punkt entweder ein scheinbarer — in diesem Fall muß noch eine Nebenbedingung erfüllt sein — oder es ist von den ihm zugeordneten kanonischen Integralen nur das eine eigentlich normal, das andere uneigentlich normal. Besitzt die charakteristische Gleichung eine Doppelwurzel, so ist immer das eine der zugeordneten kanonischen Integrale uneigentlich normal.

§ 68. Differentialgleichungen, die keine Unbestimmtheitsstelle besitzen. Wir haben in § 61 nur die Voraussetzung gemacht, daß die Koeffizienten unserer Differentialgleichung in der ganzen z-Ebene einwertig sind und daß sie nur eine endliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten besitzen. Um zu Differentialgleichungen zu gelangen, deren Theorie vollständig durchgeführt werden kann, machen wir nun die weitere Annahme, die Differentialgleichung besitze keine Unbestimmtheitsstelle.

Man bezeichnet diese einfachste Klasse von Differentialgleichungen als „Fuchssche Klasse“.

Sehen wir zu, welche Folgerungen sich aus unserer Annahme ergeben. Wir lassen die Möglichkeit offen, daß der unendlich ferne Punkt zu den singulären Punkten gehört; die im Endlichen liegenden singulären Punkte bezeichnen wir mit $e_1\, e_2 \ldots e_n$ und setzen

$$\varphi(z) = (z - e_1)(z - e_2) \ldots (z - e_n).$$

Der Koeffizient a darf im Endlichen nur zur ersten Ordnung unendlich werden (§ 66, Satz VIII) und muß im Unendlichen zur ersten Ordnung verschwinden (§ 67, Satz IX). Daher wird das Produkt $\varphi(z) \cdot a = \psi(z)$ im Endlichen nirgends unstetig und im Unendlichen höchstens zur $n - 1^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich, folglich ist die Funktion $\psi(z)$, wenn sie nicht identisch verschwindet, eine ganze rationale Funktion von z, deren Grad höchstens $n - 1$ ist.

Der Koeffizient b darf in den Punkten $e_1\, e_2 \ldots e_n$ höchstens zur zweiten Ordnung unendlich werden (Satz VIII) und muß im Unendlichen zur zweiten Ordnung verschwinden (Satz IX). Daher ist das Produkt $\chi(z) = [\varphi(z)]^2 b$, wenn es nicht identisch verschwindet, eine ganze rationale Funktion, deren Grad höchstens $2n - 2$ ist.

Wenn die Grade der Funktionen ψ und χ die angegebenen Grenzwerte wirklich erreichen, so ist der unendlich ferne Punkt ein singulärer Punkt. Soll das nicht der Fall sein, so muß die Funktion $a - \frac{2}{z} = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} - \frac{2}{z}$ im Unendlichen zur zweiten Ordnung verschwinden und es muß der Koeffizient $b = \frac{\chi(z)}{[\varphi(z)]^2}$ im Unendlichen zur vierten Ordnung verschwinden. Der Grad der ganzen Funktion $\chi(z)$ darf also nicht größer als $2n - 4$ sein.

Die allgemeine Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse hat also die Form

$$(1) \qquad w'' + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}\, w' + \frac{\chi(z)}{[\varphi(z)]^2}\, w = 0.$$

Hier bedeutet $\varphi(z)$ eine ganze rationale Funktion n^{ten} Grades, die keine Doppelwurzel besitzt; $\psi(z)$ und $\chi(z)$ sind ganze rationale Funktionen vom Grade $n - 1$ bezw. $2n - 4$.

Die Funktion $\psi(z)$ genügt außerdem der Bedingung

$$\lim_{z = \infty} \frac{z\,\psi(z)}{\varphi(z)} = 2.$$

Das Exponentenpaar, das zum Punkt e_i gehört, ist durch die quadratische Gleichung

$$(2) \qquad \sigma^2 + p_\nu \sigma + q_\nu = 0$$

bestimmt; hier ist

$$p_\nu = -(\sigma_1' + \sigma_2') = \lim_{z=e_\nu}(z-e_\nu)a - 1 = \frac{\psi(e_\nu)}{\varphi'(e_\nu)} - 1,$$

$$q_\nu = \sigma_1' \sigma_2' = \lim_{z=e_\nu}(z-e_\nu)^2 b = \frac{\chi(e_\nu)}{[\varphi'(e_\nu)]^2}.$$

Der Koeffizient von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung der Funktion $a = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$ nach absteigenden Potenzen von z ist $= 2$, folglich ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\psi(e_\nu)}{\varphi'(e_\nu)} = \sum_{\nu=1}^{n}(p_\nu + 1) = 2.$$

Hieraus folgt:

$$(3) \qquad \sum_{\nu=1}^{n}(\sigma_1^{(\nu)} + \sigma_2^{(\nu)}) = n - 2.$$

Wenn einer der singulären Punkte — etwa der Punkt e_n — ins Unendliche rückt, so ändern sich die eben nachgewiesenen Gradzahlen. Wir setzen in diesem Falle

$$\varphi_1(z) = (z-e_1)(z-e_2)\ldots(z-e_{n-1}), \quad a = \frac{\psi_1(z)}{\varphi_1(z)}, \quad b = \frac{\chi_1(z)}{[\varphi_1(z)]^2}.$$

Die Funktion $\psi_1(z)$ wird im Endlichen nirgends unstetig; im Unendlichen wird a mindestens 0^1. Daher ist $\psi_1(z)$ eine ganze rationale Funktion, deren Grad höchstens $= n-2$ ist.

Die Funktion $\chi_1(z)$ wird im Endlichen nirgends unstetig; im Unendlichen wird sie mindestens 0^2. Daher ist $\chi_1(z)$ eine ganze rationale Funktion, deren Grad höchstens $= 2n-4$ ist.

Unsere Differentialgleichung hat also die Form

$$(4) \qquad w'' + \frac{\psi_1(z)}{\varphi_1(z)} w' + \frac{\chi_1(z)}{[\varphi_1(z)]^2} w = 0.$$

Hier bedeuten $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$, $\chi_1(z)$ ganze rationale Funktionen von den Graden $n-1$, $n-2$, $2n-4$.

Die Koeffizienten der Differentialgleichung (1) hängen außer von den n singulären Punkten noch von $3n-4$ willkürlich zu wählenden Konstanten ab, nämlich von den $n-1$ verfügbaren Koeffizienten der Funktion $\psi(z)$ und den $2n-3$ Koeffizienten der Funktion $\chi(z)$; im Ganzen enthält also die Gleichung (1) $4(n-1)$ Parameter. $2n-1$ von diesen Parametern sind durch die $2n$ zu den singulären Punkten gehörigen Exponenten, von denen $2n-1$ vorgeschriebene Werte annehmen können (vergl. Gl. (3)), bestimmt. Die Bestimmungsstücke, von denen die Koeffizienten der Differentialgleichung (1) abhängen, lassen sich demnach in drei Gruppen verteilen:

1) die Verzweigungspunkte, 2) die Exponenten, 3) $n-3$ weitere, „akzessorische" Konstante, auf deren Bedeutung wir nicht weiter eingehen wollen.

Indem wir an Stelle der unabhängigen Variabeln z und der abhängigen Variabeln w neue Variable einführen, können wir bewirken, daß 3 von den Konstanten der ersten Gruppe und $n-1$ von den Konstanten der zweiten Gruppe vorgeschriebene Werte annehmen: die Form der Differentialgleichung bleibt bei dieser Transformation ungeändert.

Von den $4n-4$ Konstanten, die in der Differentialgleichung (1) vorkommen, sind daher nur $4n-4-3-(n-1) = 3(n-2)$ als wesentlich zu betrachten.

Um dies nachzuweisen, führen wir zunächst an Stelle der unabhängigen Variabeln z mittels der Substitution

$$z = \frac{\gamma_{11}\zeta + \gamma_{12}}{\gamma_{21}\zeta + \gamma_{22}} \tag{5}$$

eine neue Variable ein.

Ohne daß wir die Transformation der Gleichung (1) wirklich ausführen, können wir von vornherein übersehen, daß w, als Funktion von ζ betrachtet, keine anderen singulären Punkte besitzen kann als die den Punkten e_1 der z-Ebene entsprechenden Punkte ε_1 der ζ-Ebene und daß keiner dieser Punkte eine Unbestimmtheitsstelle sein kann. Wir beweisen, daß überdies die Exponenten, die zu den singulären Punkten gehören, ungeändert bleiben. Zu dem Zweck bemerken wir zunächst: wenn dem singulären Punkt e_1 in der z-Ebene ein im Endlichen liegender Punkt ε_1 der ζ-Ebene entspricht, so nimmt der Quotient $\frac{z-e_1}{\zeta-\varepsilon_1}$ im Punkt ε_1 den endlichen, von Null verschiedenen Wert

$$\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=\varepsilon_1} = \frac{\gamma_{11}\gamma_{22}-\gamma_{12}\gamma_{21}}{(\gamma_{21}\varepsilon_1+\gamma_{22})^2}$$

an. Daraus folgt: wenn der Quotient

$$\Omega_1 = \frac{W_1}{(z - e_\nu)^{\sigma_1^{(\nu)}}}$$

sich in der Umgebung des Punktes e_ν regulär verhält und in diesem Punkt nicht verschwindet, so verhält sich auch der Quotient

$$\Pi_1 = \frac{W_1}{(\zeta - \varepsilon_\nu)^{\sigma_1^{(\nu)}}}$$

in der Umgebung des Punktes ε_ν regulär und verschwindet in diesem Punkt nicht.

Der Exponent eines eigentlich normalen Integrals wird also nicht geändert. Nehmen wir nun an, zum Punkt ε_ν gehöre außer dem eigentlich normalen Integral W_1 auch das uneigentlich normale Integral

$$W_2 = (z - e_\nu)^{\sigma_2^{(\nu)}} \Omega_2 + \frac{1}{2\pi i} \log (z - e_\nu) W_1 .$$

In diesem Fall muß die Differenz $\sigma_1^{(\nu)} - \sigma_2^{(\nu)}$ Null oder eine ganze positive Zahl sein. Wir schreiben die vorstehende Gleichung in der Form

$$W_2 = (\zeta - \varepsilon_\nu)^{\sigma_2^{(\nu)}} \Pi_2 + \frac{1}{2\pi i} \log (\zeta - \varepsilon_\nu)(\zeta - \varepsilon_\nu)^{\sigma_1^{(\nu)}} \Pi_1 .$$

Hier ist

$$\Pi_2 = \left(\frac{z - e_\nu}{\zeta - \varepsilon_\nu}\right)^{\sigma_2^{(\nu)}} \Omega_2 + \frac{1}{2\pi i} \log \frac{z - e_\nu}{\zeta - \varepsilon_\nu} \cdot (\zeta - \varepsilon_\nu)^{\sigma_1^{(\nu)} - \sigma_2^{(\nu)}} \Pi_1 .$$

Die Funktion Π_2 verhält sich in der Umgebung des Punktes ε_ν regulär und verschwindet in diesem Punkt nicht.

Damit ist bewiesen, daß auch der zweite Exponent ungeändert bleibt.

Wenn der Punkt ε_ν in den unendlich fernen Punkt der ζ-Ebene fällt, so ist in den vorstehenden Betrachtungen die Größe $\zeta - \varepsilon_\nu$ durch die Größe $\frac{1}{\zeta}$ zu ersetzen; im übrigen bleiben sie in Geltung.

Wir können über die Koeffizienten der Substitution (5) derart verfügen, daß dreien der singulären Punkte e_ν gegebene Punkte der ζ Ebene entsprechen; von den n Werten e_ν sind also nur $n - 3$ als wesentliche Bestimmungsstücke zu betrachten.

Um zu einer Änderung der Exponenten zu gelangen, setzen wir

$$(6)\qquad u = (z - e_1)^{\alpha_1} (z - e_2)^{\alpha_2} \cdots (z - e_n)^{\alpha_n}\, v = Mv,$$

wo $\alpha_1\ \alpha_2 \cdots \alpha_n$ Konstante bedeuten.

Die Funktion v besitzt im Endlichen außer den Punkten $e_1\ e_2 \cdots e_n$ keinen singulären Punkt. Um ihr Verhalten im Unendlichen zu untersuchen, setzen wir zur Abkürzung

$$\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_n = s \text{ und } \frac{M}{z^s} = N.$$

Die Funktion

$$N = \left(1 - \frac{e_1}{z}\right)^{\alpha_1} \left(1 - \frac{e_2}{z}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(1 - \frac{e_n}{z}\right)^{\alpha_n}$$

verhält sich in der Umgebung des unendlich fernen Punktes regulär und dasselbe gilt nach Voraussetzung für jedes Integral u der Differentialgleichung (1). Folglich verhält sich die Funktion

$$\frac{v}{\left(\frac{1}{z}\right)^s} = \frac{u}{N}$$

in der Umgebung des unendlich fernen Punktes regulär. Daher ist, wenn die Summe s von Null verschieden ist, der unendlich ferne Punkt für die Funktion v ein scheinbarer singulärer Punkt. Um dies auszuschließen, setzen wir

$$(7)\qquad s = \alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_n = 0.$$

Unter dieser Bedingung besitzt die Funktion v genau dieselben singulären Punkte wie die Funktion u und sie genügt daher einer Differentialgleichung der Form (1), in der nur an Stelle der ganzen Funktionen $\psi(z)$ und $\chi(z)$ andere ganze Funktionen gleichen Grades treten. Es ist einleuchtend, daß infolge der Transformation (6) an Stelle der zum singulären Punkt e_i gehörigen Exponenten $\sigma_1{}'$, $\sigma_2{}'$ die Exponenten

$$\tau_1{}' = \sigma_1{}' - \alpha_i \quad \text{und} \quad \tau_2{}' = \sigma_2{}' - \alpha_i$$

treten; die Differenz der Exponenten eines Paares bleibt ungeändert. Da über $n - 1$ von den Konstanten α_i verfügt werden kann, so können wir bewirken, daß die zur transformierten Differentialgleichung gehörigen Exponenten $n - 1$ Bedingungen genügen. Es sind demnach — wie oben behauptet worden ist — von den $2n-1$ verfügbaren Exponenten nur n als wesentliche Bestimmungsstücke zu betrachten.

Wir führen nun die Substitutionen (5) und (6) gleichzeitig aus. Die Koeffizienten der Substitution (5) wählen wir derart, daß dem Punkt e_n der z-Ebene der unendlich ferne Punkt der ζ-Ebene entspricht und daß den Punkten e_1, e_2 der z-Ebene gegebene Punkte der ζ-Ebene — etwa die Punkte 0 und 1 — entsprechen.

Weil einer der singulären Punkte der transformierten Gleichung in den unendlich fernen Punkt fällt, so besitzt sie die Form (vergl. Gl. (4)):

$$(8) \qquad v'' - \frac{\Psi(\zeta)}{\Phi(\zeta)} v' + \frac{X(\zeta)}{[\Phi(\zeta)]^2} v = 0.$$

Hier ist

$$\Phi(\zeta) = (\zeta - \varepsilon_1)(\zeta - \varepsilon_2) \cdots (\zeta - \varepsilon_{n-1}).$$

$\Psi(\zeta)$ und $X(\zeta)$ sind ganze Funktionen von den Graden $n-2$ bezw. $2n-4$.

Um zu einer zweckmäßigen Bestimmung der in der Substitution (6) vorkommenden Konstanten α_ν zu gelangen, erinnern wir daran, daß die Exponenten, die zum singulären Punkt ε_ν gehören ($\nu = 1, 2, \ldots n-1$) die Werte

$$\tau_1^{(\nu)} = \sigma_1^{(\nu)} - \alpha_\nu \quad \text{und} \quad \tau_2^{(\nu)} = \sigma_2^{(\nu)} - \alpha_\nu$$

besitzen. Andererseits sind diese Exponenten die Wurzeln einer quadratischen Gleichung

$$\tau^2 + p_\nu \tau + q_\nu = 0,$$

deren Koeffizienten die Werte

$$p_\nu = -(\tau_1^{(\nu)} + \tau_2^{(\nu)}) = \frac{\Psi(\varepsilon_\nu)}{\Phi'(\varepsilon_\nu)} - 1$$

und

$$q_\nu = \tau_1^{(\nu)} \tau_2^{(\nu)} = \frac{X(\varepsilon_\nu)}{[\Phi'(\varepsilon_\nu)]^2}$$

besitzen (2).

Setzen wir

$$\alpha_\nu = \tfrac{1}{2}(\sigma_1^{(\nu)} + \sigma_2^{(\nu)} - 1) \quad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots n-1,$$

so wird

$$\tau_1^{(\nu)} + \tau_2^{(\nu)} = \sigma_1^{(\nu)} + \sigma_2^{(\nu)} - 2\alpha_\nu = 1;$$

folglich ist

$$\Psi(\varepsilon_\nu) = 0 \quad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots n-1.$$

Da die ganze Funktion Ψ höchstens den Grad $n-2$ besitzt, so muß sie identisch verschwinden.

Die Differentialgleichung (8) erhält somit die Form

$$(9) \qquad v'' + \frac{X(\zeta)}{[\Phi(\zeta)]^2}\, v = 0.$$

Die erste Derivierte fällt also aus der Differentialgleichung heraus. Man bezeichnet diese Gleichung als erste Normalform der Differentialgleichung (1).

Eine andere zweckmäßige Bestimmung der Konstanten erhalten wir, wenn wir $\alpha_\nu = \sigma_1^{(\nu)}$ oder $= \sigma_2^{(\nu)}$ setzen ($\nu = 1, 2, \ldots n-1$). Es verschwindet dann der eine der beiden Exponenten $\tau_1^{(\nu)}, \tau_2^{(\nu)}$, folglich ist $X(\varepsilon_\nu) = 0$ für $\nu = 1, 2, \ldots n-1$. Daraus folgt: die ganze Funktion $2n-4^{\text{ten}}$ Grades $X(\zeta)$ ist durch die ganze Funktion $n-1^{\text{ten}}$ Grades $\Phi(\zeta)$ teilbar. Die Differentialgleichung (7) erhält die Form:

$$(10) \qquad \Phi(\zeta)v'' + \Psi(\zeta)v' + X_1(\zeta)v = 0.$$

Die ganzen Funktionen Φ Ψ X haben die Grade $n-1$, $n-2$, $n-3$.

Die Differentialgleichung (9) bezeichnen wir als zweite Normalform der Differentialgleichung (1).

Bezüglich dieser zweiten Normalform ist zu bemerken: Gehören zum singulären Punkt e_ν der Differentialgleichung (1) zwei eigentlich normale kanonische Integrale, so gilt dasselbe für den singulären Punkt ε_ν der Differentialgleichung (10). Das eine der zum Punkt ε_ν gehörigen Normalintegrale besitzt den Exponenten 0. Dieses Normalintegral verhält sich also in der Umgebung des Punktes ε_ν regulär und verschwindet in diesem Punkt nicht.

Nehmen wir nun an, es sei nur das eine der zum Punkt e_ν gehörigen kanonischen Integrale eigentlich normal, das andere dagegen uneigentlich normal; dasselbe gilt dann wieder für den Punkt ε_ν. In diesem Fall muß die Exponentendifferenz

$$\sigma_1^{(\nu)} - \sigma_2^{(\nu)}$$

eine ganze Zahl sein. Wir wählen die Bezeichnung so, daß diese Differenz Null oder positiv ist, so daß das eigentlich normale Integral den Exponenten $\sigma_1^{(\nu)}$ besitzt.

Setzen wir

$$\alpha_\nu = \sigma_1^{(\nu)},$$

so sind

$$\tau_1^{(1)} = 0, \quad \tau_2^{(1)} = -(\sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(1)}).$$

Der zweite Exponent ist also entweder ebenfalls Null oder eine negative ganze Zahl. Das zum singulären Punkt ε_1 gehörige eigentlich normale Integral der Differentialgleichung (10) besitzt also den Exponenten Null, es verhält sich also in der Umgebung des Punktes ε_1 regulär und verschwindet in diesem Punkt nicht.

Nehmen wir an, die Exponenten $\sigma_1^{(1)}$ und $\sigma_2^{(1)}$ seien verschieden und setzen wir $\alpha_1 = \sigma_2^{(1)}$. In diesem Fall ist der Exponent $\tau_1^{(1)} = \sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(1)}$, dem das eigentlich normale Integral entspricht, eine positive ganze Zahl; dieses Integral verhält sich in der Umgebung des Punktes ε_1 regulär, aber es verschwindet in diesem Punkt.

Betrachten wir nun die einfachsten Fälle.

Für $n = 1$ müssen die Funktionen Ψ und X_1 identisch verschwinden, folglich ist r eine lineare Funktion der Variabeln ζ.

Für $n = 2$ verschwindet X_1 identisch und Ψ reduziert sich auf eine Konstante c. Je nachdem c von 1 verschieden oder $= 1$ ist, ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung (10)

$$= \text{Konst.}\,(\zeta - \varepsilon)^{1-c} + \text{Konst.} \quad \text{oder} = \text{Konst.}\log(\zeta - \varepsilon) + \text{Konst.}$$

Diese beiden Fälle sind trivial; von Interesse sind nur die Fälle, in denen $n \geqq 3$ ist. Wir beschränken uns im folgenden auf den einfachsten von diesen Fällen, nämlich den Fall $n = 3$.

An diesem einfachsten Beispiel hat Riemann die Grundlagen der allgemeinen Theorie entwickelt.

§ 69. Die hypergeometrische Reihe. Die erste Aufgabe, die wir zu erledigen haben, ist die, die kanonischen Integrale, die zu den singulären Punkten gehören, analytisch darzustellen. In § 67 ist gezeigt worden, wie man mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten Reihen bilden kann, die diesem Zweck dienen, und es ist der Konvergenzbereich dieser Reihen nachgewiesen worden. Wenn man dieses Verfahren auf die allgemeine Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse mit drei singulären Punkten anwendet, so gelangt man zu Reihen, deren Bildungsgesetz wenig durchsichtig ist. In dieser Differentialgleichung kommen nämlich $4(n-1) = 8$ von einander unabhängige Koeffizienten vor (vergl. Gl. (1) des vorigen Paragraphen); betrachtet man diese als verfügbare Parameter, so sind die Koeffizienten der Reihenentwicklungen Funktionen von 8 Variabeln. Die Aufgabe vereinfacht sich ganz erheblich, wenn wir von einer der beiden Normalformen ausgehen: in diesem Fall treten nur drei verfügbare Parameter auf. Welche der beiden Normalformen wir wählen wollen, steht frei; die Wahl der zweiten Normalform erweist sich aber als zweckmäßiger.

Die zweite Normalform lautet im vorliegenden Fall:

(1) $$\zeta(\zeta-1)v'' + [\gamma(\zeta-1) + \delta\zeta]v' - \nu v = 0$$

(vergl. Gl. (10) des vorigen Paragraphen).

Die Fundamentalgleichungen, die zu den singulären Punkten $0, 1, \infty$ gehören, lauten (s. Gl. (2) des vorigen Paragraphen; vergl. auch die Bemerkungen S. 341):

$$\tau^2 + (\gamma - 1)\tau = 0 \qquad \text{für } \zeta = 0$$

$$\tau^2 + (\delta - 1)\tau = 0 \qquad \text{für } \zeta = 1$$

$$\tau^2 + (1 - \gamma - \delta)\tau + \nu = 0 \qquad \text{für } \zeta = \infty.$$

Wir bezeichnen die zum unendlich fernen Punkt gehörigen Exponenten mit α, β, setzen also

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta - 1 \qquad \alpha\beta = \nu.$$

Wir stellen die Exponentenpaare in einer kleinen Tabelle zusammen:

(2) $$\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & \infty \\ 0,\ 1-\gamma & 0,\ 1-\delta & \alpha,\ \beta \end{array}.$$

Zwischen den 4 Konstanten $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ besteht die Beziehung

(3) $$\gamma + \delta = \alpha + \beta + 1,$$

die nur eine Umformung der Gleichung (3) des vorigen Paragraphen ist.

An Stelle der Konstanten δ, ν führen wir in die Gleichung (1) die Konstanten α, β ein: wir erhalten:

(4) $$\zeta(\zeta - 1) + [(\alpha + \beta + 1)\zeta - \gamma]v' + \alpha\beta v = 0.$$

Wenn der zweite zum Nullpunkt gehörige Exponent $1 - \gamma$ keine ganze Zahl ist, so besitzt die vorstehende Differentialgleichung ein Integral, daß sich in der Umgebung des Nullpunkts regulär verhält und in diesem Punkt nicht verschwindet (s. den vorigen Paragraphen S. 342). Dies ist auch dann der Fall, wenn der Exponent $1-\gamma$ Null oder eine ganz negative Zahl ist. Ist dagegen der Exponent $1-\gamma$ eine ganze positive Zahl, so gehört im allgemeinen — d. h. wenn nicht noch eine Nebenbedingung erfüllt ist — zum Exponenten 0 ein uneigentlich normales Integral, das eigentlich normale Integral aber verschwindet zur Ordnung $1-\gamma$.

Von dem Fall abgesehen, daß γ Null oder eine negative ganze Zahl ist, können wir also der Gleichung (4) durch eine Potenzreihe

$$(5) \qquad v = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$$

genügen, deren erster Koeffizient c_0 nicht verschwindet. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\zeta(\zeta-1)v'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n\zeta^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n\zeta^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [n(n-1)c_n - n(n+1)c_{n+1}]\zeta^n$$

$$\{(\alpha+\beta+1)\zeta-\gamma\}v' = \sum_{n=0}^{\infty} [(\alpha+\beta+1)nc_n - \gamma(n+1)c_{n+1}]\zeta^n.$$

Setzen wir diese Werte in (4) ein, so erhalten wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+\alpha)(n+\beta)c_n - (n+1)(n+\gamma)c_{n+1}]\zeta^n = 0.$$

Der erste Koeffizient c_0 bleibt unbestimmt; wir setzen ihn $=1$. Für die folgenden Koeffizienten gilt die Rekursionsformel

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)}.$$

Wir erhalten somit

$$(6) \qquad c_0 = 1$$

$$c_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2 \cdots n \quad \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}.$$

Die Reihe (5), deren Koeffizienten durch die vorstehenden Gleichungen bestimmt sind, nennt man die hypergeometrische oder auch die Gaußsche Reihe. Man bezeichnet sie nach Gauß Vorgang mit $F(\alpha, \beta, \gamma, \zeta)$.

Die Größen $\alpha, \beta, \gamma, \zeta$ unterscheidet man als erstes, zweites, drittes, viertes „Element" der Reihe.

Wenn einer der Parameter α, β verschwindet, so reduziert sich F auf die Konstante 1, ist einer dieser Parameter eine negative ganze Zahl, so ist F eine ganze rationale Funktion vom Grade $-\alpha$ bezw. $-\beta$. Ist der Parameter γ Null oder eine negative ganze Zahl, so versagt unsere Reihendarstellung außer wenn gleichzeitig auch einer der Parameter α, β eine negative ganze Zahl und dem absoluten Wert nach nicht größer als γ ist. Auf diesen Fall werden wir unten zurückkommen.

Wenn die Reihe nicht von selbst abbricht, so ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1.$$

Die Reihe konvergiert also, wenn $|\zeta| < 1$ ist, sie divergiert, wenn $|\zeta| > 1$ ist.

Wir werden später beweisen, daß die Reihe für $|\zeta| = 1$ noch konvergiert, wenn der reelle Teil der Größe $\gamma - \alpha - \beta$ positiv ist.

Von dem Spezialfall, daß γ Null oder eine negative ganze Zahl ist, abgesehen, stellt die hypergeometrische Reihe das zum Nullpunkt gehörige kanonische Integral dar, das den Exponenten Null besitzt. Um das zweite zum Nullpunkt gehörige kanonische Integral, das den Exponenten $1-\gamma$ besitzt, zu finden, führen wir an Stelle der Variabeln v die Variable

$$(7) \qquad u = \frac{v}{\zeta^{1-\gamma}}$$

ein. Die Variable u genügt ebenfalls einer Differentialgleichung der Form (4)

$$(8) \qquad \zeta(\zeta - 1)u'' + [(\alpha' + \beta' + 1)\zeta - \gamma']u' + \alpha'\beta' u = 0.$$

Um die Konstanten $\alpha' \beta' \gamma'$ zu bestimmen, bemerken wir: da die Potenz $\zeta^{1-\gamma}$ sich in der Umgebung des Punktes 1 regulär verhält, so werden die Exponenten, die zu diesem Punkt gehören, durch die Transformation (7) nicht geändert; dagegen wachsen die zum unendlich fernen Punkt gehörigen Exponenten um $1-\gamma$. Mit Rücksicht auf (2) ist daher

$$1 - \delta' = \gamma' - \alpha' - \beta' = 1 - \delta = \gamma - \alpha - \beta \quad \text{und}$$
$$\alpha' = \alpha + 1 - \gamma \qquad \beta' = \beta + 1 - \gamma.$$

Folglich ist $\gamma' = 2 - \gamma$.

Die Differentialgleichung (8) besitzt das in der Umgebung des Nullpunktes reguläre Integral

$$F(\alpha', \beta', \gamma', \zeta) = F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, \zeta).$$

Folglich besitzt die Differentialgleichung (4) das Integral

(9) $$\zeta^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, \zeta).$$

Wenn γ keine ganze Zahl ist, so bildet dieses Integral zusammen mit dem Integral (5) $F(\alpha, \beta, \gamma, \zeta)$ das zum Nullpunkt gehörige kanonische Fundamentalsystem.

Ist $\gamma = 1$, so sind die beiden Integrale identisch und wir erhalten nur ein eigentlich normales Integral.

Ist γ Null oder eine negative ganze Zahl, so wird die Reihe (5) unbrauchbar, außer wenn gleichzeitig α oder β eine Zahl aus der Reihe $0, -1, -2, \ldots \gamma$ ist.

Ist γ eine positive ganze Zahl > 2, also γ' Null oder negativ, so wird die Reihe (9) unbrauchbar, außer wenn gleichzeitig $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$ oder $\beta' = \beta - \gamma + 1$ eine Zahl aus der Reihe $0, -1, -2, \ldots \gamma'$ ist. In diesem Fall ist α bezw. β eine Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots \gamma - 1$.

Wenn γ eine ganze von 1 verschiedene Zahl ist, so erhalten wir also nur unter der Bedingung zwei eigentlich normale Integrale, daß eines der Elemente α, β ebenfalls eine ganze Zahl ist, und daß dieses Element entweder Null ist oder daß es dasselbe Vorzeichen wie $\gamma - 1$ besitzt und dem absoluten Betrag nach kleiner als $\gamma - 1$ ist.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ist der Nullpunkt ein scheinbarer Doppelpunkt, da ja die Exponentendifferenz in diesem Fall eine ganze Zahl ist; sind sie nicht erfüllt, so ist nur das eine der zum Nullpunkt gehörigen kanonischen Integrale eigentlich normal, das andere ist uneigentlich normal.

Im folgenden schließen wir den Fall, daß scheinbare Doppelpunkte auftreten, der Einfachheit wegen aus.

§ 70. Grenzfälle. Wir haben nun in dem Fall, daß zum Nullpunkt ein uneigentlich normales Integral gehört, die entsprechende Reihenentwicklung herzustellen. Zu dem Zweck könnten wir wieder die Methode der unbestimmten Koeffizienten benutzen, wir gelangen aber einfacher durch einen Grenzübergang zum Ziel.

Um zunächst den Fall $\gamma = 1$ zu erledigen, betrachten wir die Größen α, β und ζ als konstant, die Größe γ aber als variabel. Wir beschränken γ auf Werte, die der Bedingung $|1-\gamma| < 1$ genügen.

Da $1-\gamma' = -(\gamma-1)$ ist, so ist auch $|1-\gamma'| < 1$ und es konvergieren deshalb die beiden Reihen

$$S(\gamma) = F(\alpha, \beta, \gamma, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(\gamma)\zeta^n \qquad \text{und}$$

$$T(\gamma) = \zeta^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, \zeta) = \zeta^{1-\gamma}\sum_{n=0}^{\infty} k_n(\gamma)\zeta^n.$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig, folglich dürfen die beiden Reihen gliedweise nach γ differenziert werden. Wir bilden nun den Grenzwert

$$(1) \qquad Q = \lim_{\gamma=1} \frac{T(\gamma)-S(\gamma)}{1-\gamma}$$
$$= \log\zeta\, S(1) + \sum_{n=0}^{\infty}[c_n'(1) - k_n'(1)]\zeta^n.$$

Hier bedeuten die Akzente Differentiationen nach γ.

Aus der Gleichung

$$c_n(\gamma) = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots n\;\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$$

folgt

$$\frac{c_n'(\gamma)}{c_n(\gamma)} = -\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma+1}+\cdots+\frac{1}{\gamma+n-1}\right)$$

und hieraus

$$(2) \qquad c_n'(1) = -c_n(1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

Aus der Gleichung

$$k_n(\gamma) = \frac{\alpha'(\alpha'+1)\cdots(\alpha'+n-1)\,\beta'(\beta'+1)\cdots(\beta'+n-1)}{1\cdot 2\cdots n\;\gamma'(\gamma'+1)\cdots(\gamma'+n-1)}$$

folgt mit Rücksicht auf die Beziehungen

$$\alpha' = \alpha-\gamma+1 \qquad \beta' = \beta-\gamma+1 \qquad \gamma' = 2-\gamma$$

$$\frac{k_n'(\gamma)}{k_n(\gamma)} = -\left(\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\alpha'+1}+\cdots+\frac{1}{\alpha'+n-1}\right)-\left(\frac{1}{\beta'}+\frac{1}{\beta'+1}+\cdots+\frac{1}{\beta'+n-1}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{\gamma'}+\frac{1}{\gamma'+1}+\cdots+\frac{1}{\gamma'+n-1}\right),$$

und hieraus

$$(3)\quad k_n'(1) = c(1)\Big[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}-$$
$$-\Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\cdots+\frac{1}{\alpha+n-1}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta+1}\cdots+\frac{1}{\beta+n-1}\Big)\Big].$$

Setzen wir die Werte (2) und (3) in (1) ein, so erhalten wir

$$(4)\quad Q = -\sum_{n=1}^{\infty}\Big[2\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{n}\Big)-$$
$$-\Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\cdots+\frac{1}{\alpha+n-1}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta+1}\cdots+\frac{1}{\beta+n-1}\Big)\Big]c_n(1)\zeta^n$$
$$+\log\zeta\, S(1).$$

Wir bezeichnen die rechts an erster Stelle stehende Reihe mit

$$2\pi i\, G(\alpha,\beta,1,\zeta).$$

Es ist also

$$(5)\quad G(\alpha,\beta,1,\zeta)$$
$$=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{(1\cdot 2\cdots n)^2}\Big[2\Big(1+\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{n}\Big)-$$
$$-\Big(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}\cdots+\frac{1}{\alpha+n-1}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta+1}\cdots+\frac{1}{\beta+n-1}\Big)\Big]\zeta^n.$$

Aus der Herleitung der Reihe folgt, daß sie konvergiert, wenn $|\zeta|<1$ ist; man kann dies auch leicht direkt verifizieren.

Da $c_n(1)$ durch jede der Größen

$$\alpha,\ \alpha+1,\ \ldots\ \alpha+n-1,\ \beta,\ \beta+1,\ \ldots\ \beta+n-1$$

teilbar ist, so bleibt die Reihe G auch in dem Fall brauchbar, daß einer der Parameter α, β Null oder eine negative ganze Zahl ist.

Nunmehr betrachten wir wieder ζ als variabel. Da die Reihen S und T unserer Differentialgleichung genügen, so gilt dies auch für den Grenzwert Q. Übrigens kann man leicht direkt verifizieren, daß unter der Voraussetzung $\gamma=1$ die Reihe Q (4) unserer Differentialgleichung genügt. Für $\gamma=1$ ist also

$$(6)\qquad G(\alpha,\beta,1,\zeta)+\frac{\log\zeta}{2\pi i}F(\alpha,\beta,1,\zeta)$$

ein uneigentlich normales Integral unserer Differentialgleichung.

Es ist nun noch der Fall zu betrachten, daß γ eine positive ganze Zahl $\geqq 2$ ist. Wir dürfen voraussetzen, daß keiner der Parameter α, β eine ganze positive Zahl $\leqq \gamma - 1$ ist, denn dieser Fall ist bereits im vorigen Paragraphen erledigt worden.

Wir gehen von der folgenden Bemerkung aus: durch Differentiation der Differentialgleichung

$$(7) \qquad \zeta(\zeta - 1)u'' + [(\alpha + \beta + 1)\zeta - \gamma]u' + \alpha\beta u = 0$$

ergibt sich

$$\zeta(\zeta - 1)u''' + [(\alpha + \beta + 3)\zeta - \gamma - 1]u'' + (\alpha\beta + \alpha + \beta + 1)u' = 0$$

oder etwas anders geschrieben

$$\zeta(\zeta - 1)\frac{d^2 u'}{d\zeta^2} + [((\alpha + 1) + (\beta + 1))\zeta - (\gamma + 1)]\frac{du'}{d\zeta} + \\ + (\alpha + 1)(\beta + 1)u' = 0.$$

Die Derivierte u' genügt also einer Differentialgleichung derselben Form wie die Funktion u, nur treten an Stelle der Parameter α, β, γ die Parameter $\alpha + 1$, $\beta + 1$, $\gamma + 1$. Durch wiederholte Differentiation ergibt sich: genügt die Funktion u der Differentialgleichung (7), so genügt die p^{te} Derivierte $u^{(p)}$ der Differentialgleichung

$$\zeta(\zeta - 1)\frac{d^2 u^{(p)}}{d\zeta^2} + [(\alpha + \beta + 2p + 1)\zeta - (\gamma + p)]\frac{du^{(p)}}{d\zeta} + \\ + (\alpha + p)(\beta + p)u^{(p)} = 0.$$

Wir ersetzen α durch $\alpha - \gamma + 1$, β durch $\beta - \gamma + 1$, γ durch 1 und setzen $p = \gamma - 1$.

Es folgt: genügt u der Differentialgleichung

$$(8) \qquad \zeta(\zeta - 1)\frac{d^2 u}{d\zeta^2} + [(\alpha + \beta - 2\gamma + 3)\zeta - 1]\frac{du}{d\zeta} + \\ + (\alpha - \gamma + 1)(\beta - \gamma + 1)u = 0,$$

so genügt $v = u^{(\gamma - 1)}$ der Differentialgleichung

$$(9) \qquad \zeta(\zeta - 1)\frac{d^2 v}{d\zeta^2} + [(\alpha + \beta + 1)\zeta - \gamma]\frac{dv}{d\zeta} + \alpha\beta v = 0.$$

Nun besitzt die Differentialgleichung (8) das uneigentlich normale Integral (s. (6))

$$u = G(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 1, \zeta) + \frac{\log \zeta}{2\pi i} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 1, \zeta).$$

Folglich genügt der Differentialgleichung (9) die Funktion

$$v = u^{(\gamma - 1)} = \frac{d^{\gamma - 1}}{d\zeta^{\gamma - 1}}\Big[G(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 1, \zeta) + \\ + \frac{\log \zeta}{2\pi i} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 1, \zeta)\Big].$$

Wir denken uns die Differentiation ausgeführt und fassen alle in $\log \zeta$ multiplizierten Glieder zusammen und ebenso die von $\log \zeta$ freien. Der Faktor von $\log \zeta$ ist

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d^{\gamma-1}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,1,\zeta)}{d\zeta^{\gamma-1}}.$$

Nun ist

$$\frac{dF(\alpha,\beta,\gamma,\zeta)}{d\zeta}=\frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,\zeta),$$

demnach

$$\frac{d^{\gamma-1}F(\alpha,\beta,\gamma,\zeta)}{d\zeta^{\gamma-1}}=$$

$$=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+\gamma-2)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+\gamma-2)}{\gamma\cdot(\gamma+1)\cdots(2\gamma-1)}F(\alpha+\gamma-1,\beta+\gamma-1,2\gamma-1,\zeta).$$

Folglich der Faktor von $\log \zeta$

$$\frac{C}{2\pi i}F(\alpha,\beta,\gamma,\zeta),$$

wo zur Abkürzung

$$C=\frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)\cdots(\alpha-1)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)\cdots(\beta-1)}{1\cdot 2\cdots(\gamma-1)}$$

gesetzt ist.

Da wir den Fall ausgeschlossen haben, daß einer der Parameter α, β gleich einer der positiven ganzen Zahlen $1, 2, \cdots \gamma-1$ ist, so verschwindet C nicht und wir können deshalb an Stelle des Integrals $u^{(\gamma-1)}$ das Integral $\frac{1}{C}u^{(\gamma-1)}$ treten lassen. Wir setzen

$$\frac{1}{C}u^{\gamma-1}=\frac{1}{C}\frac{d^{\gamma-1}}{d\zeta^{\gamma-1}}\Big[G(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,1,\zeta)+$$
$$+\frac{\log\zeta}{2\pi i}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,1,\zeta)\Big]$$
$$=G(\alpha,\beta,\gamma,\zeta)+\frac{\log\zeta}{2\pi i}F(\alpha,\beta,\gamma,\zeta).$$

Die beiden Integrale

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\zeta) \quad \text{und} \quad G(\alpha,\beta,\gamma,\zeta)+\frac{\log\zeta}{2\pi i}F(\alpha,\beta,\gamma,\zeta)$$

bilden ein zum Nullpunkt gehöriges kanonisches Fundamentalsystem. Das zweite dieser Integrale ist uneigentlich normal.

§ 71. Darstellung der kanonischen Fundamentalintegrale. Nachdem die zum Nullpunkt gehörigen kanonischen Integrale durch Reihen dargestellt sind, müssen auch die zu den beiden anderen singulären Punkten gehörigen in Reihen entwickelt werden. Anstatt diese Aufgabe direkt in Angriff zu nehmen, wollen wir, um das wesentliche des Gedankenganges mehr hervortreten zu lassen, einen anderen Weg einschlagen.

Wir gehen von der allgemeinen Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse mit drei singulären Punkten aus (vergl. § 68, Gleichung (1)):

$$(1) \qquad \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}\frac{dw}{dz} + \frac{\chi(z)}{[\varphi(z)]^2}\, w = 0.$$

Hier ist $\varphi(z) = (z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)$; $\psi(z)$ und $\chi(z)$ sind ganze Funktionen zweiten Grades, die erstere genügt der Bedingung $\lim\limits_{z=\infty} \frac{z\,\psi(z)}{\varphi(z)} = 2$.

Riemann bezeichnet das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung mit

$$P\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \\ \sigma_1^{(1)} & \sigma_1^{(2)} & \sigma_1^{(3)} & z \\ \sigma_2^{(1)} & \sigma_2^{(2)} & \sigma_2^{(3)} & \end{pmatrix}^{*)}.$$

Wir nehmen zunächst an, die sämtlichen kanonischen Integrale der Differentialgleichung (1) seien eigentlich normal und wir stellen uns die Aufgabe, das zum singulären Punkt e_1 gehörige Normalintegral $W_1^{(1)}$, das den Exponenten $\sigma_1^{(1)}$ besitzt, darzustellen. Zu dem Zweck transformieren wir die Gleichung (1) in die zweite Normalform

$$(2) \qquad \zeta(\zeta - 1)\frac{d^2 v}{d\zeta^2} + [(\alpha + \beta + 1)\zeta - \gamma]\frac{dv}{d\zeta} + \alpha\beta\zeta = 0.$$

Wir setzen

$$(3) \qquad w = C\cdot(z - e_1)^{\sigma_1^{(1)}}(z - e_2)^{\sigma_1^{(2)}}(z - e_3)^{-\sigma_1^{(1)} - \sigma_1^{(2)}}\, v$$

(s. § 68, Gleichungen (6) und (7)).

Über die multiplikative Konstante C kann nach Belieben verfügt werden.

*) Riemann bezeichnet die singulären Punkte mit a, b, c; die zugehörigen Exponenten mit $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$. Wir sind von dieser Bezeichnung abgewichen, um für die hypergeometrische Reihe die Gaußsche Bezeichnung $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ beibehalten zu können.

Wir setzen ferner:

$$\zeta = \frac{e_2 - e_3}{e_2 - e_1} \cdot \frac{z - e_1}{z - e_3}. \tag{4}$$

Die Substitution ist so gewählt, daß den Punkten $e_1\, e_2\, e_3$ der z-Ebene beziehungsweise die Punkte 0, 1, ∞ der ζ-Ebene entsprechen.

Aus (4) folgt

$$1 - \zeta = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2} \cdot \frac{z - e_2}{z - e_3}.$$

Folglich ist

$$w = \text{Konst.}\, \zeta^{\sigma_1^{(1)}} (1 - \zeta)^{\sigma_1^{(2)}}\, v.$$

Die zu den singulären Punkten 0, 1, ∞ gehörigen kanonischen Integrale der Differentialgleichung (2) bezeichnen wir mit

$$V_\nu^{(0)},\ V_\nu^{(1)},\ V_\nu^{(\infty)} \quad (\nu = 1, 2);$$

die zugehörigen Exponenten haben beziehungsweise die Werte

$$\begin{aligned} &0 \text{ und } 1 - \gamma = \sigma_2^{(1)} - \sigma_1^{(1)} \\ &0 \text{ und } \gamma - \alpha - \beta = \sigma_2^{(2)} - \sigma_1^{(2)} \\ &\alpha = \sigma_1^{(3)} + \sigma_1^{(1)} + \sigma_1^{(2)} \text{ und } \beta = \sigma_2^{(3)} + \sigma_1^{(1)} + \sigma_1^{(2)} \end{aligned} \tag{5}$$

(s. § 69 (2) und (3)).

Dem kanonischen Integral $W_1^{(1)}$ der Differentialgleichung (1) entspricht das Integral $V_1^{(1)} = F(\alpha, \beta, \gamma, \zeta)$ der Differentialgleichung (2). Wir können demnach — über die noch unbestimmte multiplikative Konstante verfügend —

$$\begin{aligned} &W_1^{(1)} \\ &= \zeta^{\sigma_1^{(1)}} (1-\zeta)^{\sigma_1^{(2)}} F(\sigma_1^{(1)} + \sigma_1^{(2)} + \sigma_1^{(3)},\ \sigma_1^{(1)} + \sigma_0^{(2)} + \sigma_2^{(3)},\ \sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(1)} + 1, \zeta) \end{aligned} \tag{6}$$

setzen. Die Potenz $(1 - \zeta)^{\sigma_1^{(2)}}$ wird für die Umgebung des Punktes $\zeta = 0$ eindeutig durch die Festsetzung definiert, daß sie für $\zeta = 0$ den Wert 1 annimmt.

Für $\zeta = 0$ ist demnach

$$\lim \frac{W_1^{(1)}}{\zeta^{\sigma_1^{(1)}}} = 1.$$

Wir erhalten eine zweite Reihenentwicklung für das Integral $W_1^{(1)}$, indem wir die Exponenten $\sigma_1^{(2)}$ und $\sigma_2^{(2)}$ vertauschen:

$$\begin{aligned} &W_1^{(1)} \\ &= \zeta^{\sigma_1^{(1)}} (1 - \zeta)^{\sigma_2^{(2)}} F(\sigma_1^{(1)} + \sigma_2^{(2)} + \sigma_1^{(3)},\ \sigma_1^{(1)} + \sigma_2^{(2)} + \sigma_2^{(3)},\ \sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(1)} + 1,\ \zeta). \end{aligned} \tag{7}$$

Aus jeder der beiden Reihenentwicklungen ergibt sich eine neue, wenn wir die Größen $e_2\, \sigma_1^{(2)}\, \sigma_2^{(2)}$ beziehungsweise mit den Größen $e_3\sigma_1^{(3)}\sigma_2^{(3)}$ vertauschen. Bei diesen Vertauschungen tritt an Stelle der Größe

$$\zeta = \frac{e_2 - e_3}{e_2 - e_1} \cdot \frac{z - e_1}{z - e_3} \text{ die Größe } \frac{\zeta}{\zeta - 1} = \frac{e_3 - e_2}{e_3 - e_1} \cdot \frac{z - e_1}{z - e_2},$$

folglich an Stelle der Größe $1 - \zeta$ die Größe $\frac{1}{1 - \zeta}$. Wir erhalten also die beiden weiteren Darstellungen

$$(8) \qquad W_1^{(1)} = \zeta^{\sigma_1^{(1)}} (1 - \zeta)^{\sigma_1^{(1)} - \sigma_1^{(3)}}$$

$$F\left(\sigma_1^{(1)} + \sigma_1^{(2)} + \sigma_1^{(3)},\ \sigma_1^{(1)} + \sigma_2^{(2)} + \sigma_1^{(3)},\ \sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(1)} + 1, \frac{\zeta}{\zeta - 1}\right)$$

$$(9) \qquad W_1^{(1)} = \zeta^{\sigma_1^{(1)}} (1 - \zeta)^{\sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(3)}}$$

$$F\left(\sigma_1^{(1)} + \sigma_1^{(2)} + \sigma_2^{(3)},\ \sigma_1^{(1)} + \sigma_2^{(2)} + \sigma_2^{(3)},\ \sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(1)} + 1, \frac{\zeta}{\zeta - 1}\right).$$

Die multiplikativen Konstanten, die rechts hinzugefügt werden können, sind wieder so bestimmt, daß

$$\lim_{z = e_1} \frac{W_1^{(1)}}{\zeta^{\sigma_1^{(1)}}} = 1 \text{ ist.}$$

Um Reihenentwicklungen für das zweite zum Punkt e_1 gehörige kanonische Integral zu erhalten, brauchen wir nur die Exponenten $\sigma_1^{(1)}$ und $\sigma_2^{(1)}$ zu vertauschen.

Um Reihenentwicklungen für die kanonischen Integrale, die zu den Punkten e_2 und e_3 gehören, zu erhalten, vertauschen wir die Größen $e_1\,\sigma_1^{(1)}\sigma_2^{(1)}$ zuerst mit den Größen $e_2\,\sigma_1^{(2)}\sigma_2^{(2)}$ und dann mit den Größen $e_3\sigma_1^{(3)}\sigma_2^{(3)}$.

Bei der Vertauschung der Größen e_1 und e_2 tritt an Stelle der Größe ζ (4) die Größe $1 - \zeta = \frac{e_1 - e_3}{e_1 - e_2} \cdot \frac{z - e_2}{z - e_3}$, folglich an Stelle der Größe $\frac{\zeta}{\zeta - 1}$ die Größe $\frac{\zeta - 1}{\zeta}$; bei der Vertauschung der Größen e_1 und e_3 tritt an Stelle der Größe ζ die Größe $\frac{1}{\zeta}$, folglich an Stelle der Größe $\frac{\zeta}{\zeta - 1}$ die Größe $\frac{1}{1 - \zeta}$.

Wir erhalten im Ganzen 24 analytische Ausdrücke, die der Differentialgleichung (1) genügen. Je vier derselben stellen dasselbe kanonische Integral dar.

Wir wollen nun annehmen, daß schon die Differentialgleichung (1) die Normalform besitzt, daß also die Differentialgleichungen (1) und (2) von der Bezeichnung der Variabeln abgesehen identisch sind.

Die Reihenentwicklungen für das kanonische Integral $V_1^{(0)}$ ergeben sich aus den Gleichungen (5) bis (8), wenn wir

$$e_1 = 0,\ e_2 = 1,\ e_3 = \infty,\ \sigma_1^{(1)} = 0,\ \sigma_2^{(1)} = 1-\gamma,\ \sigma_1^{(2)} = 0$$
$$\sigma_2^{(2)} = \gamma-\alpha-\beta,\ \sigma_1^{(3)} = \alpha,\ \sigma_2^{(3)} = \beta,\ \zeta = z$$

setzen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\text{I} & V_1^{(0)} &= F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)\\
&\text{II} & &= (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ z)\\
&\text{III} & &= (1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ \frac{z}{z-1}\right)\\
&\text{IV} & &= (1-z)^{-\beta} F\left(\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma,\ \frac{z}{z-1}\right).
\end{aligned}$$

Um die Reihenentwicklungen für $V_2^{(0)}$ zu erhalten, müssen wir die Exponenten $\sigma_1^{(1)}$ und $\sigma_2^{(1)}$ vertauschen. Es treten daher an Stelle der Elemente

$$\alpha = \sigma_1^{(1)} + \sigma_1^{(2)} + \sigma_1^{(3)},\ \beta = \sigma_1^{(1)} + \sigma_1^{(2)} + \sigma_2^{(3)},\ \gamma = \sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(1)} + 1$$

die Elemente

$$\sigma_2^{(1)} + \sigma_1^{(2)} + \sigma_1^{(3)} = \alpha-\gamma+1,\ \sigma_2^{(1)} + \sigma_1^{(2)} + \sigma_2^{(3)} = \beta-\gamma+1,$$
$$\sigma_2^{(1)} - \sigma_1^{(1)} + 1 = 2-\gamma.$$

Außerdem tritt an Stelle des Faktors $\zeta^{\sigma_1^{(1)}} = 1$ der Faktor $\zeta^{\sigma_2^{(1)}} = \zeta^{1-\gamma}$.

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned}
&\text{V} & V_2^{(0)} &= z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ z)\\
&\text{VI} & &= z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ z)\\
&\text{VII} & &= z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha-\gamma+1,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ \frac{z}{z-1}\right)\\
&\text{VIII} & &= z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta-\gamma+1,\ 1-\alpha,\ 2-\gamma,\ \frac{z}{z-1}\right).
\end{aligned}$$

Die Reihenentwicklungen für die kanonischen Integrale $V_1^{(1)}$ und $V_2^{(1)}$ erhalten wir, wenn wir die Größen $e_1\ \sigma_1^{(1)}\ \sigma_2^{(1)}$ beziehungsweise mit den Größen $e_2\ \sigma_1^{(2)}\ \sigma_2^{(2)}$ vertauschen. Bei dieser Vertauschung bleiben die Elemente α und β ungeändert, an Stelle der Elemente γ und z treten die Elemente (5)

$$\sigma_1^{(2)} - \sigma_2^{(2)} + 1 = \alpha+\beta-\gamma+1 \quad \text{und} \quad 1-z.$$

Es ergibt sich:

IX $V_1^{(1)} = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z)$

X $\quad = z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z)$

XI $\quad = z^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \frac{z-1}{z}\right)$

XII $\quad = z^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \frac{z-1}{z}\right)$

XIII $V_2^{(1)} = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z)$

XIV $\quad = z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(1-\alpha, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z)$

XV $\quad = z^{\alpha-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\alpha, \gamma-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1, \frac{z-1}{z}\right)$

XVI $\quad = z^{\beta-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\beta, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \frac{z-1}{z}\right)$.

Um endlich die Reihenentwicklungen für die kanonischen Integrale $V_1^{(\infty)}$ $V_2^{(\infty)}$ zu erhalten, vertauschen wir in den Gleichungen I bis VIII die Größen e_1 $\sigma_1^{(1)}$ $\sigma_2^{(1)}$ beziehungsweise mit den Größen e_3 $\sigma_1^{(3)}$ $\sigma_2^{(3)}$. Bei dieser Vertauschung bleibt das Element α ungeändert, an Stelle der Elemente β, γ, z treten die Elemente

$$\sigma_1^{(3)} + \sigma_1^{(2)} + \sigma_2^{(1)} = \alpha-\gamma+1,\ \sigma_1^{(3)} - \sigma_2^{(3)} + 1 = \alpha-\beta+1,\ \frac{1}{z}.$$

Folglich ist

XVII $V_1^{(\infty)} = z^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{z}\right)$

XVIII $\quad = z^{\beta-\gamma}(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\beta, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1, \frac{1}{z}\right)$

XIX $\quad = (z-1)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1, \frac{1}{1-z}\right)$

XX $\quad = z^{1-\gamma}(z-1)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha-\gamma+1, 1-\beta, \alpha-\beta+1, \frac{1}{1-z}\right)$

XXI $V_2^{(\infty)} = z^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{1}{z}\right)$

XXII $\quad = z^{\alpha-\gamma}(z-1)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\alpha, \gamma-\alpha, \beta-\alpha+1, \frac{1}{z}\right)$

XXIII $\quad = (z-1)^{-\beta} F\left(\beta, \gamma-\alpha, \beta-\alpha+1, \frac{1}{1-z}\right)$

XXIV $\quad = z^{1-\gamma}(z-1)^{\gamma-\beta-1} F\left(\beta-\gamma+1, 1-\alpha, \beta-\alpha+1, \frac{1}{1-z}\right)$.

Bezüglich des Konvergenzbereichs dieser Reihen ist zu bemerken: die hypergeometrische Reihe konvergiert, so lange der absolute Betrag ihres vierten Elementes < 1 ist. Demnach konvergieren die nach Potenzen von z fortschreitenden Reihen innerhalb eines Kreises vom Radius 1 um den Nullpunkt; die nach Potenzen von $\frac{1}{z}$ fortschreitenden Reihen konvergieren außerhalb dieses Kreises.

Die nach Potenzen von $1 - z$ fortschreitenden Reihen konvergieren innerhalb eines Kreises vom Radius 1 um den Punkt 1; die nach Potenzen von $\frac{1}{1 - z}$ fortschreitenden Reihen konvergieren außerhalb dieses Kreises.

Die nach Potenzen von $\frac{z}{z - 1}$ fortschreitenden Reihen konvergieren in der Halbebene, die durch eine Parallele zur Ordinatenachse durch den Punkt $z = \frac{1}{2}$ begrenzt wird und auf der Seite der abnehmenden Abszissen liegt; die nach Potenzen von $\frac{z - 1}{z}$ fortschreitenden Reihen konvergieren in der anderen Halbebene.

Die Parallele zur Ordinatenachse und die beiden Kreise zerlegen die z-Ebene in 6 Gebiete; in der nebenstehenden Figur 36 sind sie mit den Nummern 1 bis 6 bezeichnet. Innerhalb eines jeden Gebietes konvergiert die Hälfte der 24 Reihen; auf der Begrenzung eines Gebietes konvergieren mindestens 8 Reihen. Jedes der 6 kanonischen Integrale kann mittels der 4 Reihen, die für dasselbe gelten, in 4 von den 6 Gebieten dargestellt werden.

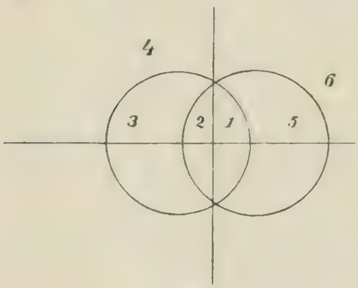


Fig. 36.

Beispielsweise können die Integrale $V_1^{(0)}$ und $V_2^{(0)}$ in den Gebieten 1, 2, 3, 4 dargestellt werden.

Bezüglich der in den vorstehenden Gleichungen auftretenden Potenzen der Größen z, $1 - z$ und $z - 1$ ist zu bemerken:

Die Potenzen von $1 - z$, die in den Gleichungen I bis VIII vorkommen und die Potenzen von z, die in den Gleichungen XI bis XVI vorkommen, sind für das Konvergenzgebiet der

Reihen, in die sie multipliziert sind, eindeutig durch die Festsetzung definiert, daß sie den Wert 1 annehmen sollen, wenn das vierte Element der betreffenden hypergeometrischen Reihe verschwindet. Die Werte der Potenzen von z, die in den Reihen V bis VIII und XVII bis XXIV auftreten, und ebenso die Potenzen von $1 - z$ und $z - 1$, die in den Reihen XIII bis XVI und XVII bis XXIV auftreten, können den Punkten der Sternfläche, in der die Integrale der Differentialgleichung (2) einwertig sind, eindeutig zugeordnet werden; in der unzerschnittenen z-Ebene sind sie allgemein zu reden unendlich vieldeutig.

Wir haben diese Sternfläche in der Weise konstruiert (§ 48), daß wir durch zwei beliebig zu wählende Punkte z_0 und z_1 und je einen der singulären Punkte Kreise legten. Die Begrenzung der Sternfläche besteht aus den Bogen dieser Kreise, die den Punkt z_1 mit den singulären Punkten verbinden. Es steht nun nichts im Wege, den Punkt z_1 mit einem der singulären Punkte zusammenfallen zu lassen; dadurch kommt eines von den Begrenzungsstücken der Sternfläche in Wegfall. Im voliegenden Fall wollen wir den Punkt z_1 ins Unendliche rücken lassen; der Punkt z_0 liege auf der Abszissenachse zwischen den Punkten 0 und 1. Die Begrenzung der Sternfläche besteht dann aus dem negativen Teil der Abszissenachse und dem Teil der positiven Abszissenachse, der zwischen den Punkten 1 und ∞ liegt. Das erste Begrenzungsstück möge mit L_0, das zweite mit L_1 bezeichnet werden.

Es ist zweckmäßig gleichzeitig auch eine Änderung in der Bezeichnung der Ränder der Sperrlinien eintreten zu lassen. Wir haben bisher die Bezeichnung so gewählt, daß ein positiver Umlauf um den Endpunkt einer Sperrlinie von der $-$ Seite auf die $+$ Seite führt. Wir wollen nunmehr festsetzen, der $+$ Rand der Sperrlinien falle mit der Seite der wachsenden Ordinaten zusammen.

Zufolge dieser Festsetzung führt ein positiver Umlauf um den Nullpunkt nach wie vor vom $-$ Rand nach dem $+$ Rand der Sperrlinie L_0, dagegen führt ein positiver Umlauf um den Punkt 1 vom $+$ Rand von L_1 nach dem $-$ Rand.

Die Potenz z^a definieren wir nun durch die Gleichung

$$z^{\varrho} = e^{\varrho \log z}$$

und in analoger Weise werden auch die Potenzen $(1-z)^{\varrho}$ und $(z-1)^{\varrho}$ definiert.

Es erübrigt die Funktionen $\log z$, $\log(z-1)$ und $\log(1-z)$ — oder, was auf dasselbe hinauskommt — die Funktionen arc z usw. für unsere Sternfläche eindeutig zu definieren. Zu dem Zweck setzen wir fest:

(10) in der positiven z-Halbebene sei

$$0 \leqq \operatorname{arc} z \leqq \pi \quad \text{und} \quad 0 < \operatorname{arc}(z-1) < \pi.$$

Wenn der Punkt z, die Abszissenachse zwischen den Punkten 0 und 1 überschreitend, in die negative z-Halbebene rückt, so dreht sich der vom Punkt 1 nach dem Punkt z gerichtete Vektor im positiven Sinn um den Punkt 1

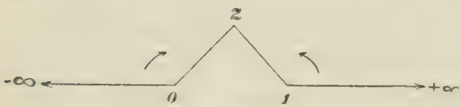


Fig. 37.

(s. die Figur 37), folglich nimmt arc $(z-1)$ zu. Der vom Punkt 0 nach dem Punkt z führende Vektor dreht sich im negativen Sinn, folglich nimmt arc z ab.

Daraus folgt:

(11) in der negativen z-Halbebene ist

$$-\pi < \operatorname{arc} z < 0, \quad \pi \leqq \operatorname{arc}(z-1) \leqq 2\pi.$$

Wir setzen ferner

(12) $\operatorname{arc}(-z) = \operatorname{arc} z + \pi, \quad \operatorname{arc}(1-z) = \operatorname{arc}(z-1) - \pi.$

Zufolge dieser Bestimmung ist längs des Abschnittes 0,1 der Abszissenachse

$$\operatorname{arc} z = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{arc}(1-z) = 0 \quad \text{also}$$

$$\log z \quad \text{und} \quad \log(1-z) \text{ reell.}$$

Auf Grund der getroffenen Bestimmungen können wir nun leicht verifizieren, daß die 4 Reihen, in die wir ein jedes der 6 kanonischen Integrale entwickelt haben, in der Tat dieselbe Funktion darstellen. Um dies beispielsweise für die 4 Reihenentwicklungen XVI bis XX nachzuweisen, bemerken wir: weil nach Voraussetzung die Exponentendifferenz $\beta - \alpha$ keine ganze Zahl ist (s. § 69 Schluß), ist das Integral $V_1^{(z)}$ vollständig durch die Bedingung charakterisiert, daß das Produkt $z^{\alpha} V_1^{(z)}$

sich in der Umgebung des unendlich fernen Punktes regulär verhält und in diesem Punkt den Wert 1 annimmt. Dieser Bedingung genügen die 4 genannten Reihenentwicklungen.

An die oben gegebene Definition der in Betracht kommenden Arcuse knüpft sich eine für das folgende wichtige Bemerkung.

Bilden wir die z-Ebene mittels der Transformation

$$z = 1 - \zeta$$

in die ζ-Ebene ab, so erhalten wir als Bild der Sternfläche A eine zu ihr kongruente Sternfläche A'; der positiven z-Halbebene entspricht die negative ζ-Halbebene und vice versa.

Definieren wir die Funktionen $\operatorname{arc}\zeta$, $\operatorname{arc}(\zeta - 1)$, $\operatorname{arc}(1 - \zeta)$ durch die Gleichungen

$$\operatorname{arc}\zeta = \operatorname{arc}(1 - z) \quad \operatorname{arc}(\zeta - 1) = \operatorname{arc}(-z) \quad \operatorname{arc}(1 - \zeta) = \operatorname{arc} z$$

so sind die Werte dieser Funktionen der Sternfläche A' genau in derselben Weise zugeordnet wie die Werte der entsprechenden Funktionen von z der Sternfläche A. Mit anderen Worten: die Gleichungen (10), (11) und (12) behalten ihre Geltung, wenn man die Variable z durch $1 - z$ ersetzt.

Bilden wir die Sternfläche A mittels der Transformation

$$(13) \qquad z = \frac{1}{1 - \zeta}$$

auf die ζ-Ebene ab, so ist allerdings die Abbildung A' der Sternfläche A zu dieser nicht kongruent, aber es wird wenigstens die positive z-Halbebene auf die positive ζ-Halbebene abgebildet.

Setzen wir — in Übereinstimmung mit der Gleichung (13) — für die positive Halbebene

$$(14) \operatorname{arc} z = \operatorname{arc}\frac{1}{1 - \zeta}, \operatorname{arc}(-z) = \operatorname{arc}\frac{1}{\zeta - 1} = \operatorname{arc}\frac{1}{1 - \zeta} - \pi (12),$$

$$\operatorname{arc}\frac{z - 1}{z} = \operatorname{arc}(z - 1) - \operatorname{arc} z = \operatorname{arc}\zeta,$$

so sind zufolge der Gleichungen (10), (11) und (12) die Funktionen $\operatorname{arc}\zeta$ usw. für die positive ζ-Halbebene in derselben Weise definiert wie die entsprechenden Funktionen $\operatorname{arc} z$ usw. für die positive z-Halbebene. Weil die Sternflächen A und A' nicht kongruent sind, so sind in den Teilen derselben, die auf der Seite der abnehmenden Ordinaten liegen, die Gleichungen (10) bis (12) nicht mehr mit den Gleichungen (14) verträglich, vorausgesetzt daß man an der Stetigkeit der in Rede stehenden Funktionen innerhalb der Sternflächen A und A' festhält.

§ 72. Darstellung der uneigentlich normalen Integrale. Es bleibt noch zu erörtern, wie die Reihenentwicklungen des vorigen Paragraphen zu modifizieren sind, wenn unter den kanonischen Integralen auch uneigentlich normale vorkommen.

Wir gehen wieder von der allgemeinen Gleichung (1) des vorigen Paragraphen aus und nehmen an, zum singulären Punkt e_1 gehöre ein uneigentliches Normalintegral. In diesem Fall muß die Exponentendifferenz $\sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(1)}$ eine ganze Zahl sein: wir wählen die Bezeichnung so, daß sie Null oder positiv ist, daß also das eigentliche Normalintegral, das zum Punkt e_1 gehört, den Exponenten $\sigma_1^{(1)}$ besitzt (vergl. § 67). Nun transformieren wir wieder die allgemeine Gleichung durch die Substitutionen (3) und (4) des vorigen Paragraphen in die Normalform (2). Da nach Voraussetzung die Differenz $\sigma_1^{(1)} - \sigma_2^{(1)}$ Null oder positiv ist, so ist γ eine positive ganze Zahl (siehe Gleichung (5) des vorigen Paragraphen). Den zum Punkt e_1 gehörigen kanonischen Integralen der Differentialgleichung (1) entsprechen die zum Punkt $\zeta = 0$ gehörigen kanonischen Integrale der Differentialgleichung (2). Für diese letzteren haben wir im § 70 Reihenentwicklungen hergestellt. Wir setzen

$$(1) \qquad W_1^{(1)} = \zeta^{\sigma_1^{(1)}} (1-\zeta)^{\sigma_1^{(2)}} F(\sigma_1^{(1)}+\sigma_1^{(2)}+\sigma_1^{(3)}, \sigma_1^{(1)}+\sigma_1^{(2)}+\sigma_2^{(3)}, \sigma_1^{(1)}-\sigma_2^{(1)}+1, \zeta)$$

$$(2) \qquad W_2^{(1)} = \zeta^{\sigma_1^{(1)}} (1-\zeta)^{\sigma_1^{(2)}} G(\sigma_1^{(1)}+\sigma_1^{(2)}+\sigma_1^{(3)}, \sigma_1^{(1)}+\sigma_1^{(2)}+\sigma_2^{(3)}, \sigma_1^{(1)}-\sigma_2^{(1)}+1, \zeta) + \frac{1}{2\pi i} \log \zeta \, W_1^{(1)}.$$

Die kanonischen Integrale sind so normiert, daß für $\zeta = 0$

$$\lim \frac{W_1^{(1)}}{\zeta^{\sigma_1^{(1)}}} = 1 \text{ und } \lim \frac{W_2^{(1)} - \frac{1}{2\pi i} \log \zeta \, W_1^{(1)}}{\zeta^{\sigma_1^{(1)}}} = 0 \text{ ist;}$$

sie sind für die Sternfläche A eindeutig definiert, sobald die

Werte der Logarithmen $\log \zeta$ und $\log(1-\zeta)$ eindeutig bestimmt sind.

Wir erhalten eine zweite Darstellung der beiden kanonischen Integrale $W_1^{(1)}$ und $W_2^{(1)}$, wenn wir die Indizes $\sigma_1^{(2)}$ und $\sigma_2^{(2)}$ vertauschen. Zwei weitere Darstellungen ergeben sich durch Vertauschung der Größen e_2 $\sigma_1^{(2)}$ $\sigma_2^{(2)}$ mit den Größen e_3 $\sigma_1^{(3)}$ $\sigma_2^{(3)}$.

Wenn die Exponenten $\sigma_1^{(2)}$ und $\sigma_2^{(2)}$ einander gleich sind, so werden zwei von diesen vier Darstellungen identisch, und wenn auch noch $\sigma_1^{(3)} = \sigma_2^{(3)}$ ist, so bleiben nur zwei verschiedene Darstellungen übrig.

Wir sehen davon ab, alle die verschiedenen Möglichkeiten, die sich bieten, zu diskutieren und beschränken uns darauf einen speziellen Fall, der im Hinblick auf die Theorie der Modulfunktionen ein besonderes Interesse bietet, genauer zu erörtern.

Wir nehmen an, daß alle drei Exponentendifferenzen verschwinden: es sei also $\sigma_1^{(\nu)} = \sigma_2^{(\nu)} = \sigma^{(\nu)}$ für $\nu = 1, 2, 3$. Infolge dieser Annahme gehört zu jedem der drei singulären Punkte ein uneigentlich normales Integral.

Da die Summe sämtlicher Exponenten $= 1$ ist (§ 68 Gleichung (3)), so ist in diesem Fall $\sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} + \sigma^{(3)} = \frac{1}{2}$ folglich (s. Gleichung (5) des vorigen Paragraphen)

$$\gamma = 1, \quad \alpha = \beta = \frac{1}{2}\cdot$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(3) \qquad F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) = F(z) \text{ und } G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, z\right) = G(z).$$

Diese Reihen haben die einfache Form (vergl. § 69 Gleichung (6) und § 70 Gleichung (5))

$$(4)\; F(z) = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 z^2 \cdots + \left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\right)^2 z^n + \cdots$$

und

$$G(z) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\right)^2\Big[2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$-4\left(1+\frac{1}{3}\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\Big]z^n$$

oder

$$(5)\quad G(z) = \frac{2}{\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\right)^2\left[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right]z^n.$$

Bei Benützung dieser abgekürzten Bezeichnung lauten die Gleichungen (1) und (2)

$$W_1^{(1)} = \zeta^{\sigma^{(1)}}(1-\zeta)^{\sigma^{(2)}}F(\zeta)$$

$$W_2^{(1)} = \zeta^{\sigma^{(1)}}(1-\zeta)^{\sigma^{(2)}}\left[G(\zeta)+\frac{1}{2\pi i}\log\zeta F(\zeta)\right].$$

Um Reihenentwicklungen für die kanonischen Integrale der Differentialgleichung

$$\zeta(\zeta-1)\frac{d^2v}{d\zeta^2}+(2\zeta-1)\frac{dv}{d\zeta}+\frac{1}{4}\zeta=0$$

— so lautet im vorliegenden Fall die Differentialgleichung (2) des vorigen Paragraphen — zu erhalten, machen wir in den vorstehenden Gleichungen der Reihe nach die Substitutionen

$e_1=0$	$e_2=1$	$e_3=\infty$	$\zeta=\frac{e_2-e_3}{e_2-e_1}\,\frac{z-e_1}{z-e_3}=z$	$1-\zeta=1-z$	$\sigma^{(1)}=0$	$\sigma^{(2)}=0$
$e_1=0$	$e_2=\infty$	$e_3=1$	$\zeta=\frac{z}{z-1}$	$1-\zeta=\frac{1}{1-z}$	$\sigma^{(1)}=0$	$\sigma^{(2)}=\frac{1}{2}$
$e_1=1$	$e_2=0$	$e_3=\infty$	$\zeta=1-z$	$1-\zeta=z$	$\sigma^{(1)}=0$	$\sigma^{(2)}=0$
$e_1=1$	$e_2=\infty$	$e_3=0$	$\zeta=\frac{z-1}{z}$	$1-\zeta=\frac{1}{z}$	$\sigma^{(1)}=0$	$\sigma^{(2)}=\frac{1}{2}$
$e_1=\infty$	$e_2=1$	$e_3=0$	$\zeta=\frac{1}{z}$	$1-\zeta=\frac{z-1}{z}$	$\sigma^{(1)}=\frac{1}{2}$	$\sigma^{(2)}=0$
$e_1=\infty$	$e_2=0$	$e_3=1$	$\zeta=\frac{1}{1-z}$	$1-\zeta=\frac{z}{z-1}$	$\sigma^{(1)}=\frac{1}{2}$	$\sigma^{(2)}=0.$

Um die 6 kanonischen Integrale für die Sternfläche A eindeutig zu definieren, setzen wir fest:

(6) für $z=0$ sei $V_1^{(0)}=1$ und $\lim\left[V_2^{(0)}-\frac{1}{2\pi i}\log z\right]=0$

für $z=1$ sei $V_1^{(1)}=1$ und $\lim\left[V_2^{(1)}-\frac{1}{2\pi i}\log(1-z)\right]=0$

für $z=\infty$ sei $\lim\sqrt{z}\,V_1^{(\infty)}=1$ und $\lim\sqrt{z}\left[V_2^{(\infty)}-\frac{1}{2\pi i}\log\frac{1}{z}\right]=0.$

Für die auftretenden Logarithmen und die Quadratwurzel $\sqrt{z}$ gelten die am Schluß des vorigen Paragraphen getroffenen Bestimmungen.

Mittels der oben angegebenen Substitutionen erhalten wir die Formeln:

$$\text{I}\quad V_1^{(0)} = F(z) \qquad V_2^{(0)} = G(z) + \frac{1}{2\pi i}\log z\, F(z)$$

$$\text{II}\quad V_1^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{1-z}}\,F\left(\frac{z}{z-1}\right) \qquad V_2^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{1-z}}\left[G\left(\frac{z}{z-1}\right) + \frac{1}{2\pi i}\log\frac{z}{1-z}\,F\left(\frac{z}{z-1}\right)\right]$$

$$\text{III}\quad V_1^{(1)} = F(1-z) \qquad V_2^{(1)} = G(1-z) + \frac{1}{2\pi i}\log(1-z)\,F(1-z)$$

$$\text{IV}\quad V_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{z}}\,F\left(\frac{z-1}{z}\right) \qquad V_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{z}}\left[G\left(\frac{z-1}{z}\right) + \frac{1}{2\pi i}\log\frac{1-z}{z}\,F\left(\frac{z-1}{z}\right)\right]$$

$$\text{V}\quad V_1^{(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{z}}\,F\left(\frac{1}{z}\right) \qquad V_2^{(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{z}}\left[G\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2\pi i}\log\frac{1}{z}\,F\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\text{VI}\quad V_1^{(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{z-1}}\,F\left(\frac{1}{1-z}\right) \qquad V_2^{(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{z-1}}\left[G\left(\frac{1}{1-z}\right) + \frac{1}{2\pi i}\log\frac{1}{z-1}\,F\left(\frac{1}{1-z}\right)\right].$$

§ 73. Die Werte der kanonischen Integrale in den singulären Punkten. Wir haben nun noch die Übergangssubstitutionen zu berechnen (vergl. die allgemeinen Ausführungen § 65). Zu dem Zweck bestimmen wir zunächst — unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen — die Werte, die die kanonischen Integrale in den singulären Punkten annehmen.

Die hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ konvergiert jedenfalls, wenn der absolute Betrag des vierten Elementes < 1 ist.

Wir beweisen nun:

die hypergeometrische Reihe konvergiert auch noch für $z = 1$, wenn der reelle Teil der Größe $\gamma - \alpha - \beta$ positiv ist.

Der Beweis ergibt sich leicht aus dem bekannten Konvergenzkriterium:

eine Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$ deren Glieder reelle positive Größen sind, konvergiert wenn

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 1 \text{ ist.}$$

Das allgemeine Glied der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ ist

$$c_n z^n = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots n\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} z^n,$$

also ist für $|z| = 1$ der Quotient der absoluten Beträge zweier aufeinander folgender Glieder

$$q_n = \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \frac{\left|1+\frac{\alpha}{n}\right| \cdot \left|1+\frac{\beta}{n}\right|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left|1+\frac{\gamma}{n}\right|}.$$

Um unser Konvergenzkriterium anwenden zu können, entwickeln wir q_n in eine nach absteigenden Potenzen von n fortschreitende Reihe; dabei reichen wir mit den beiden ersten Gliedern aus.

Wir setzen — reelles und imaginäres trennend —

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \qquad \beta = \beta_1 + i\beta_2 \qquad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2$$

und erhalten

$$\left|1 + \frac{\alpha}{n}\right| = \sqrt{\left(1+\frac{\alpha_1}{n}\right)^2 + \frac{\alpha_2^{\,2}}{n^2}} = 1 + \frac{\alpha_1}{n} + \cdots$$

Dementsprechend ist

$$\left|1 + \frac{\beta}{n}\right| = 1 + \frac{\beta_1}{n} + \cdots$$

und

$$\frac{1}{\left|1 + \frac{\gamma}{n}\right|} = 1 - \frac{\gamma_1}{n} + \cdots$$

Demnach ist bis auf Glieder von der Ordnung $\frac{1}{n^2}$ genau

$$q_n = 1 + \frac{\alpha_1 + \beta_1 - 1 - \gamma_1}{n} + \cdots$$

Folglich ist

$$\lim n(1 - q_n) = 1 + \gamma_1 - \alpha_1 - \beta_1.$$

Die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ konvergiert also für $|z| = 1$ unbedingt, wenn $\gamma_1 - \alpha_1 - \beta_1$ positiv ist, was zu beweisen war.

Um den eben bewiesenen Satz anwenden zu können, führen wir eine vereinfachende Voraussetzung ein: wir nehmen an, keine der drei Größen

$$1-\gamma, \quad \gamma-\alpha-\beta, \quad \beta-\alpha$$

sei eine ganze Zahl und wir nehmen überdies an, die reellen Teile dieser drei Größen seien von Null verschieden und positiv.

Die drei genannten Größen sind die Exponentendifferenzen, die zu den drei singulären Punkten gehören (§ 69 Gleichung (2)); infolge unserer Annahme können also weder scheinbare Doppelpunkte noch uneigentlich normale kanonische Integrale auftreten.

Von den 24 hypergeometrischen Reihen (§ 71), die zur Darstellung der kanonischen Integrale dienen, konvergiert also zufolge unserer Voraussetzung die Hälfte auch dann noch, wenn das vierte Element der Reihe den absoluten Betrag 1 besitzt. Es sind das die Reihen

I III V VII IX XI XIII XVI XVII XIX XXI XXIII.

Für jedes kanonische Integral stehen also zwei Reihen zur Verfügung, die zur Bestimmung des Wertes des Integrals im zugehörigen singulären Punkt dienen können.

Bezüglich der Werte, die den Potenzen von z, $1-z$ und $z-1$ beizulegen sind, erinnern wir an die in § 71 getroffenen Bestimmungen.

Wir beschränken uns darauf die Werte anzugeben, die die vier Integrale $V_i^{(0)}$, $V_i^{(1)}$ in den Punkten 0 und 1 annehmen; dabei setzen wir zur Abkürzung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = f(\alpha, \beta, \gamma).$$

Für $z=0$ ist

$$(1) \qquad \begin{aligned} &V_1^{(0)} = 1 && V_2^{(0)} = 0 \\ &V_1^{(1)} = f(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1) && V_2^{(1)} = f(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1). \end{aligned}$$

Für $z=1$ ist

$$(2) \qquad \begin{aligned} &V_1^{(0)} = f(\alpha, \beta, \gamma) && V_2^{(0)} = f(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma) \\ &V_1^{(1)} = 1 && V_2^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Gauß hat gezeigt, daß die Funktion $f(\alpha, \beta, \gamma)$, die von drei Variabeln abhängt, sich mittels einer Funktion einer einzigen Variabeln darstellen läßt. Um zu dieser Darstellung zu gelangen, bemerken wir zunächst:

In der Umgebung des Punktes 1 läßt sich das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$z(z-1)u'' - (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)u' + \alpha\beta u = 0$$

in der Form

$$u = \text{Konst.}\ F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z)$$

$$+ \text{Konst.}\ (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-z)$$

darstellen (§ 71 Formel IX und XIII). Daraus ergibt sich: weil nach Voraussetzung der reelle Teil des Exponenten $\gamma-\alpha-\beta$ positiv ist, so ist das allgemeine Integral u in der Umgebung des Punktes 1 stetig. Falls der reelle Teil des Exponenten $\gamma-\alpha-\beta$ größer als 1 ist, so ist auch noch die erste Derivierte u' in der Umgebung des Punktes 1 stetig; die zweite Derivierte u'' kann in diesem Punkt unstetig werden, aber das Produkt $(1-z)u''$ bleibt stetig und verschwindet im Punkt 1. Diese Bemerkung wenden wir auf die Funktion $u = F(\alpha, \beta, \gamma+1, z)$ an. Die Funktion u genügt der Differentialgleichung

$$(3) \qquad z(z-1)u'' - (\gamma+1-(\alpha+\beta+1)z)u' + \alpha\beta u = 0.$$

Weil nach Voraussetzung der reelle Teil der Größe $\gamma+1-\alpha-\beta$ größer als 1 ist, so sind die Funktionen u und u' im Punkt 1 stetig und es ist

$$\lim_{z=1} (1-z)u'' = 0.$$

Setzen wir in der Gleichung (3)

$$z = 1, \quad u = f(\alpha, \beta, \gamma+1), \quad u' = f'(\alpha, \beta, \gamma+1),$$

so folgt:

$$(4) \qquad (\gamma-\alpha-\beta)f'(\alpha, \beta, \gamma+1) = \alpha\beta f(\alpha, \beta, \gamma+1).$$

Der Koeffizient von z^n in der hypergeometrischen Reihe $u = F(\alpha, \beta, \gamma+1, z)$ ist

$$c_n(\gamma+1) = \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{1\cdot 2\cdots n(\gamma+1)(\gamma+2)\cdots(\gamma+n)}.$$

Folglich ist der Koeffizient von z^n in der Reihe zu'

$$nc_{n-1}(\gamma+1) = n\cdot c_n(\gamma)\cdot\frac{\gamma}{\gamma+n} = \gamma[c_n(\gamma) - c_n(\gamma+1)].$$

Hieraus folgt

$$z\cdot\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma+1, z)}{dz} = \gamma[F(\alpha, \beta, \gamma, z) - F(\alpha, \beta, \gamma+1, z)].$$

Wir setzen $z = 1$ und erhalten

$$f'(\alpha, \beta, \gamma + 1) = \gamma[f(\alpha, \beta, \gamma) - f(\alpha, \beta, \gamma + 1)].$$

Substituieren wir diesen Wert in (4), so folgt

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma - \alpha - \beta)} f(\alpha, \beta, \gamma + 1).$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Formel erhalten wir

(5) $$f(\alpha, \beta, \gamma)$$

$$= \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma+1-\alpha)\cdots(\gamma+k-1-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma+1-\beta)\cdots(\gamma+k-1-\beta)}{\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+k-1)(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma+1-\alpha-\beta)\cdots(\gamma+k-1-\alpha-\beta)} f(\alpha,\beta,\gamma+k).$$

Wir definieren nun nach Gauß Vorgang eine Funktion $\Pi(k, z)$ durch die Gleichung

(6) $$\Pi(k, z) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}{(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+k)} \cdot k^z;$$

k bedeutet eine positive ganze Zahl. Die Größe z darf nicht eine negative ganze Zahl sein, im übrigen darf z jeden reellen oder komplexen Wert annehmen. Die Potenz k^z wird durch die Gleichung

$$k^z = e^{z \log k}$$

und die Zusatzbedingung, daß dem Logarithmus sein reeller Wert beizulegen ist, eindeutig bestimmt.

Es läßt sich leicht die Existenz eines Grenzwertes

(7) $$\Pi(z) = \lim_{k=\infty} \Pi(k, z)$$

nachweisen.*) Dieser Grenzwert ist eine in der ganzen z-Ebene einwertige Funktion der komplexen Variabeln z, die nur in den Punkten $-1, -2, -3, \cdots$ unstetig wird. Unter der Voraussetzung, daß der reelle Teil der Variabeln z größer als -1 ist, läßt sich $\Pi(z)$ auch durch das bestimmte Integral

$$\Pi(z) = \int_0^\infty s^z e^{-s} ds$$

darstellen, wo die Integrationsvariable s reelle Werte zu durchlaufen hat.

Die Funktion $\Pi(z)$ ist somit mit der Eulerschen Funktion $\Gamma(z+1)$ identisch.

*) Gauß, Disquisitiones generales circa seriem infinitam $1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \cdots$ Werke Bd. 3 Art. 18 u. ff.

Für die Funktion $\Pi(z)$ gelten die beiden Funktionalgleichungen

$$(8) \qquad \Pi(z+1) = (z+1)\,\Pi(z) \quad \text{und}$$

$$(9) \qquad \Pi(z)\,\Pi(-z) = \frac{z\pi}{\sin z\pi}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt mit Rücksicht auf die vorausgehende

$$(10) \qquad \Pi(z-1)\,\Pi(-z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}.$$

Insbesondere ergibt sich für $z = \frac{1}{2}$ $\Pi(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, wo die Wurzel — wie aus (6) und (7) folgt — positiv zu nehmen ist.

Wir können nun die Funktion $f(\alpha, \beta, \gamma)$ durch Π-Funktionen ausdrücken. Zunächst folgt aus (6)

$$(z+1)(z+2)\ldots(z+k) = \frac{1\cdot 2 \ldots k}{\Pi(k, z)}\,k^z.$$

Wir setzen z der Reihe nach $= \gamma - \alpha - 1$, $\gamma - \beta - 1$, $\gamma - 1$, $\gamma - \alpha - \beta - 1$ und substituieren in (5). Wir erhalten

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Pi(k, \gamma - 1)\,\Pi(k, \gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(k, \gamma - \alpha - 1)\,\Pi(k, \gamma - \beta - 1)}\,f(\alpha, \beta, \gamma + k).$$

Da nun, wie man leicht sieht,

$$\lim_{k=\infty} f(\alpha, \beta, \gamma + k) = 1$$

ist, so folgt mit Rücksicht auf (6)

$$(11) \qquad f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Pi(\gamma - 1)\cdot\Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1)\,\Pi(\gamma - \beta - 1)}.$$

Ersetzen wir in dieser Gleichung die Größen α, β, γ bzw. durch die Größen $-\alpha$, $-\beta$, $\gamma - \alpha - \beta$, so ergibt sich

$$(12) \qquad f(-\alpha, -\beta, \gamma - \alpha - \beta) = f(\alpha, \beta, \gamma).$$

§ 74. Die Übergangssubstitutionen. Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns zur Bestimmung der Übergangssubstitutionen (vergl. § 65). Als Fundamentalsystem, von dem wir ausgehen, wählen wir das System der Integrale $V_1^{(0)}, V_1^{(1)}$.

Wir bezeichnen die Übergangssubstitutionen mit S_0, S_1, S_∞ und setzen

$$(1) \qquad U_1 = V_1^{(0)} \qquad U_2 = V_1^{(1)}$$

$$(U_1, U_2) = S_0^{-1}(V_1^{(0)}, V_2^{(0)}) = S_1^{-1}(V_1^{(1)}, V_2^{(1)}) = S_\infty^{-1}(V_1^{(\infty)}, V_2^{(\infty)}).$$

Um zunächst die Koeffizienten der Substitution S_0^{-1} zu berechnen, setzen wir die Gleichung an

$$(2) \qquad V_2 = p V_1^0 + q V_2^0 .$$

Wir setzen erst $z = 0$ und dann $z = 1$ und führen die im vorigen Paragraphen unter (1) und (2) angegebenen Werte ein. Wir erhalten

$$(3) \quad p = f(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1)$$

und

$$p \cdot f(\alpha, \beta, \gamma) + q \cdot f(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma) = 1,$$

woraus

$$(4) \quad q = \frac{1}{f(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma)}[1 - f(\alpha,\beta,\gamma)\cdot f(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1)]$$

folgt.

Nun ist (Gl. (11) des vorigen Paragraphen)

$$f(\alpha, \beta, \gamma) \cdot f(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1) =$$
$$= \frac{\Pi(\gamma - 1)\, \Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)\, \Pi(\alpha + \beta - \gamma)\, \Pi(-\gamma)}{\Pi(\gamma - \alpha - 1)\, \Pi(\gamma - \beta - 1)\, \Pi(\beta - \gamma)\, \Pi(\alpha - \gamma)}.$$

Setzt man in der Gleichung (10) des vorigen Paragraphen der Reihe nach

$$z = \gamma, \quad = \gamma - \alpha - \beta, \quad = \gamma - \alpha, \quad = \gamma - \beta,$$

so ergibt sich

$$1 - f(\alpha, \beta, \gamma) \cdot f(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1) =$$
$$= 1 - \frac{\sin(\gamma - \alpha)\pi \sin(\gamma - \beta)\pi}{\sin \gamma\pi \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi},$$
$$= 1 - \frac{\cos(\alpha - \beta)\pi - \cos(2\gamma - \alpha - \beta)\pi}{\cos(\alpha + \beta)\pi - \cos(2\gamma - \alpha - \beta)\pi},$$
$$= - \frac{\sin \alpha\pi \sin \beta\pi}{\sin \gamma\pi \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi}.$$

Setzen wir diesen Wert in die Gleichung (4) ein und drücken wir gleichzeitig den ersten Faktor auf der rechten Seite durch Π-Funktionen aus, so erhalten wir

$$q = - \frac{\Pi(-\alpha)\, \Pi(-\beta)}{\Pi(1 - \gamma)\, \Pi(\gamma - \alpha - \beta - 1)} \cdot \frac{\sin \alpha\pi \sin \beta\pi}{\sin \gamma\pi \sin(\gamma - \alpha - \beta)\pi}.$$

Um diese Gleichung zu vereinfachen, benutzen wir wieder die Gleichung (10) des vorigen Paragraphen und setzen in derselben z der Reihe nach

$$= \alpha, \quad = \beta, \quad = \gamma - 1, \quad = \gamma - \alpha - \beta.$$

Es ergibt sich

$$q = -\frac{\Pi(\gamma-2)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}\cdot\frac{\sin(\gamma-1)\pi}{\sin\gamma\pi}$$
$$= f(\gamma-\alpha-1,\ \gamma-\beta-1,\ \gamma-1)$$

(Gleichung (11) des vorigen Paragraphen).

Setzen wir diesen Wert und den Wert (3) von p in die Gleichung (2) ein, so erhalten wir mit Rücksicht auf (1) für die Substitution S_0^{-1} den Ausdruck

$$S_0^{-1}) \quad \begin{aligned} U_1 &= V_1^{(0)} \\ U_2 &= f(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma-1)\,V_1^{(0)} + f(\gamma-\alpha-1,\gamma-\beta-1,\gamma-1)\,V_2^{(0)}. \end{aligned}$$

Um die Substitution S_1^{-1} zu berechnen, brauchen wir nicht das eben benutzte, etwas umständliche Verfahren anzuwenden: wir gelangen kürzer auf dem folgenden Weg zum Ziel. Wir drücken in den vorstehenden Gleichungen die Funktionen $U_1 = V_1^{(0)}, V_2^{(0)}$, $U_2 = V_1^{(1)}$ durch die Reihen I, V und IX des § 71 aus. Innerhalb des gemeinsamen Konvergenzgebietes dieser Reihen (es sind die in der Fig. 36, S. 356 mit 1 und 2 bezeichneten Gebiete) sind die Gleichungen in den Größen α, β, γ, z identisch. Wir dürfen deshalb die Größen γ und z durch die Größen $\alpha+\beta-\gamma+1$ und $1-z$ ersetzen. Bei diesen Vertauschungen werden die Integrale $V_1^{(0)}, V_2^{(0)}, V_1^{(1)}$ mit den Integralen $V_1^{(1)}, V_2^{(1)}, V_1^{(0)}$ vertauscht (siehe außer den eben genannten Formeln die Formel XIII des § 71; vergl. auch die Bemerkung am Schluß dieses Paragraphen).

Wir erhalten mittels dieser Vertauschungen für die zur zweiten Übergangssubstitution inverse Substitution den Ausdruck:

$$S_1^{-1}) \quad \begin{aligned} U_1 &= f(\alpha,\beta,\gamma)\,V_1^{(1)} + f(\beta-\gamma,\ \alpha-\gamma,\ \alpha+\beta-\gamma)\,V_2^{(1)} \\ U_2 &= V_2^{(1)}. \end{aligned}$$

Die Giltigkeit dieser Gleichungen ist zunächst nur für den gemeinsamen Konvergenzbereich der benutzten hypergeometrischen Reihen erwiesen; aus dem Prinzip der analytischen Fortsetzung ergibt sich, daß sie für die ganze Sternfläche gelten.

Durch ein analoges Verfahren leiten wir aus der Substitution S_0^{-1} die Substitution S_∞^{-1} ab.

In der zweiten Gleichung der Substitution S_0^{-1} stellen wir die Integrale $V_1^{(0)}, V_2^{(0)}, U_2$ durch die Reihen I, V und XI des § 71 dar.

Die Variable z beschränken wir auf den Teil des gemeinsamen Konvergenzgebietes dieser Reihen, der der positiven Halbebene angehört.

Wir ersetzen nun die Größen β, γ, z durch die Größen $\gamma - \beta,\ \alpha - \beta + 1,\ \frac{1}{1-z}$, während die Größe α unverändert bleibt. Dabei ist zu bemerken: wenn wir die positive z-Halbebene mittels der Transformation

$$z = \frac{1}{1-\zeta}$$

auf die positive ζ-Halbebene abbilden, so müssen wir, damit die Definition der auftretenden Logarithmen ungeändert bleibt

$$\log z = \log \frac{1}{1-\zeta} = \log \frac{1}{\zeta - 1} - \pi i$$

setzen (S. 359, Gl. (14)).

Daraus folgt: wenn wir die eben angegebenen Vertauschungen in der Formel V ausführen, so ist die Potenz

$$z^{1-\gamma} = e^{(1-\gamma)\log z} \text{ durch } e^{(\beta-\alpha)\left(\log \frac{1}{z-1} - \pi i\right)} = e^{(\alpha-\beta)\pi i}(z-1)^{\alpha-\beta}$$

zu ersetzen. Dementsprechend ist in XI

$$z^{-\alpha} \text{ durch } e^{\alpha \pi i}(z-1)^{\alpha}$$

zu ersetzen. Es tritt demnach an Stelle der Funktion

$$V_1^{(0)} = F(\alpha, \beta, \gamma, z)$$

die Funktion

$$F\left(\alpha, \gamma - \beta, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{1-z}\right) = (z-1)^{\alpha} V_1^{(\infty)} \quad \text{(Formel XIX)},$$

an Stelle der Funktion

$$V_2^{(0)} = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$$

die Funktion

$$e^{(\alpha-\beta)\pi i}(z-1)^{\alpha-\beta} F\left(\beta, \gamma - \alpha, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{1-z}\right) =$$

$$= e^{(\alpha-\beta)\pi i}(z-1)^{\alpha} V_2^{(\infty)} \quad \text{(Formel XXIII)}.$$

Endlich tritt an Stelle der Funktion

$$V_1^{(1)} = z^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha + \beta - \gamma + 1, \frac{z-1}{z}\right)$$

die Funktion

$$e^{\alpha\pi i}(z-1)^{\alpha} F(\alpha, \beta, \gamma, z) = e^{\alpha\pi i}(z-1)^{\alpha} V_1^{(0)}.$$

Wir substituieren diese Werte in die zweite Gleichung der

Substitution S_0^{-1}. Gleichzeitig sind auch in den Koeffizienten die entsprechenden Vertauschungen vorzunehmen. Es ergibt sich nach einer leichten Umformung

$$(5)\quad U_1 = e^{-\alpha\pi i} f(\alpha, \gamma-\beta, \gamma) V_1^{(\infty)} + e^{-\beta\pi i} f(-\beta, \alpha-\gamma, \alpha-\beta) V_2^{(\infty)}.$$

Die vorstehende Gleichung haben wir nur für ein beschränktes Gebiet der Variabeln z bewiesen; auf Grund des Prinzips der analytischen Fortsetzung schließt man, daß sie für die ganze Sternfläche A gilt.

Um eine entsprechende Gleichung für das Integral U_2 zu erhalten, stellen wir in der Gleichung (5) die Integrale U_1, $V_1^{(\infty)}$, $V_2^{(\infty)}$ mittels der Formeln I, XVII und XXI dar und ersetzen dann die Größen γ, z durch die Größen $\alpha+\beta-\gamma+1$, $1-z$; α und β bleiben unverändert. Die Potenz $z^{-\alpha} = e^{-\alpha \log z}$ ist durch

$$e^{-\alpha(\log(z-1)-\pi i)} = e^{\alpha\pi i}(z-1)^{-\alpha}$$

zu ersetzen und entsprechend

$$z^{-\beta} \text{ durch } e^{\beta\pi i}(z-1)^{-\beta}.$$

Bei diesen Vertauschungen werden die Integrale $U_1 = V_1^{(0)}$ und $U_2 = V_1^{(1)}$ mit einander vertauscht.

An Stelle des Integrals

$$V_1^{(\infty)} = z^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{z}\right)$$

tritt das Integral

$$e^{\alpha\pi i}(z-1)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1, \frac{1}{1-z}\right) = e^{\alpha\pi i} V_1^{(\infty)}$$

und entsprechend ist $V_2^{(\infty)}$ durch $e^{\beta\pi i} V_2^{(\infty)}$ zu ersetzen.

Wir erhalten somit, wenn wir in (5) die angegebenen Vertauschungen vornehmen

$$(6)\quad U_2 = f(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1) V_1^{(\infty)} + \\ + f(-\beta, \gamma-\beta-1, \alpha-\beta) V_2^{(\infty)}.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (12) des vorigen Paragraphen können wir die Gleichungen (5) und (6) auch in der mehr symmetrischen Form schreiben

$$(S_\infty^{-1})\quad \begin{aligned} U_1 &= e^{-\alpha\pi i} f(\alpha, \gamma-\beta, \gamma) V_1^{(\infty)} + e^{-\beta\pi i} f(\beta, \gamma-\alpha, \gamma) V_2^{(\infty)} \\ U_2 &= f(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1) V_1^{(\infty)} + \\ &\quad + f(\beta, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1) V_2^{(\infty)}. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Übergangssubstitutionen sind wir von zwei beschränkenden Voraussetzungen ausgegangen (S. 365): Wir haben erstens vorausgesetzt, daß keine der Exponentendifferenzen $1-\gamma$, $\gamma-\alpha-\beta$, $\beta-\alpha$ eine ganze Zahl ist, und wir haben zweitens vorausgesetzt, daß die reellen Bestandteile derselben positiv sind. Von dieser zweiten Voraussetzung können wir uns durch die folgende Überlegung frei machen. Die Koeffizienten der Übergangssubstitutionen haben eindeutig bestimmte, endliche Werte, so lange unsere erste Voraussetzung erfüllt ist. Drücken wir die kanonischen Integrale, die in den verschiedenen Substitutionsgleichungen vorkommen, durch hypergeometrische Reihen aus, so gehen diese Gleichungen in Identitäten über.

Diese Gleichungen gelten daher — wie aus dem Prinzip der analytischen Fortsetzung folgt — so lange die benutzten Reihenentwicklungen konvergieren. Nun konvergiert eine jede der 24 Reihenentwicklungen des § 71, wenn das vierte Element der Reihe dem absoluten Betrag nach < 1 ist und wenn die ersten drei Elemente unserer ersten Voraussetzung genügen. Demnach gelten unsere Substitutionsgleichungen unter der Bedingung, daß die Variable z den für die Konvergenz der benutzten Reihen erforderlichen Bedingungen genügt und daß für die Größen α, β, γ unsere erste Voraussetzung gilt.

Die erste dieser Bedingungen ist unwesentlich: wir können uns vermittels des Prinzips der analytischen Fortsetzung von ihr frei machen.

Auch unsere zweite Voraussetzung läßt sich noch etwas einschränken: sie ist nicht mehr erfüllt, wenn einer der singulären Punkte ein scheinbarer ist (§ 63); trotzdem bleiben in diesem Fall die oben angegebenen Ausdrücke für die Übergangssubstitutionen unverändert in Geltung. Auf den Beweis dieser Behauptung wollen wir der Kürze halber nicht eingehen.

Dagegen versagt die im vorausgehenden nachgewiesene Darstellung der Übergangssubstitutionen, wenn unter den kanonischen Integralen uneigentlich normale vorkommen. Diese Fälle können als Grenzfälle betrachtet werden. Wir führen die Rechnung nur für den Fall durch, daß die drei Exponentendifferenzen verschwinden, daß also $\gamma = 1$ und $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ist.

§ 75. Ein spezieller Fall. In der zweiten der Gleichungen, die die Substitution S_0^{-1} darstellen

$$U_2 = V_1^1 = f(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1) V_1^{(0)} + \\ + f(\gamma - \alpha - 1, \gamma - \beta - 1, \gamma - 1) V_2^{(0)}$$

setzen wir $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, nehmen aber zunächst γ als von 1 verschieden an.

Unter Benutzung der Formeln I und V des § 71 schreiben wir die vorstehende Gleichung in der Form

$$(1) \quad U_2 = [f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 2 - \gamma) + f(\gamma - \tfrac{3}{2}, \gamma - \tfrac{3}{2}, \gamma - 1)] F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \gamma, z)$$

$$+ (1 - \gamma) f(\gamma - \tfrac{3}{2}, \gamma - \tfrac{3}{2}, \gamma - 1) \cdot \frac{z^{1-\gamma} F(\frac{3}{2} - \gamma, \frac{3}{2} - \gamma, 2 - \gamma, z) - F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \gamma, z)}{1 - \gamma}.$$

Nun ist (§ 70)

$$(2) \quad \lim_{\gamma = 1} \frac{z^{1-\gamma} F(\frac{3}{2} - \gamma, \frac{3}{2} - \gamma, 2 - \gamma, z) - F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \gamma, z)}{1 - \gamma} =$$

$$= 2\pi i \left[G(z) + \frac{\log z}{2\pi i} F(z) \right] = 2\pi i V_2^{(0)}$$

(bezüglich der Bezeichnung vergl. § 72).

Es ist ferner (§ 73, Gl. (11))

$$(1 - \gamma) f(\gamma - \tfrac{3}{2}, \gamma - \tfrac{3}{2}, \gamma - 1) = (1 - \gamma) \frac{\Pi(\gamma - 2) \Pi(1 - \gamma)}{[\Pi(-\frac{1}{2})]^2}.$$

Zufolge der Gleichungen (6), (7), (8) und (10) des § 73 ist

$$\Pi(0) = 1 \qquad (\gamma - 1) \Pi(\gamma - 2) = \Pi(\gamma - 1) \qquad \Pi(-\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Folglich ist

$$(3) \qquad \lim_{\gamma = 1} (1 - \gamma) \cdot f(\gamma - \tfrac{3}{2}, \gamma - \tfrac{3}{2}, \gamma - 1) = -\frac{1}{\pi}.$$

Aus der Gleichung (11) des § 73 ergibt sich ferner

$$(4) \quad f(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 2 - \gamma) + f(\gamma - \tfrac{3}{2}, \gamma - \tfrac{3}{2}, \gamma - 1) =$$

$$= \frac{\Pi(1 - \gamma) \Pi(-\gamma)}{[\Pi(\frac{1}{2} - \gamma)]^2} + \frac{\Pi(\gamma - 2) \Pi(1 - \gamma)}{[\Pi(-\frac{1}{2})]^2}.$$

Wegen $\Pi(-\gamma) = \frac{\pi}{\sin \gamma\pi \, \Pi(\gamma - 1)}$ (§ 73, Gl. (10)) ist

$$(5) \qquad \frac{\Pi(1 - \gamma) \Pi(-\gamma)}{[\Pi(\frac{1}{2} - \gamma)]^2} = \frac{\pi}{\sin \gamma\pi} \cdot \frac{\Pi(1 - \gamma)}{\Pi(\gamma - 1) [\Pi(\frac{1}{2} - \gamma)]^2}.$$

Nach Potenzen von $\gamma - 1$ entwickelt ist bis auf Glieder zweiter Ordnung genau

$$\Pi(1-\gamma) = \Pi(0)\left[1-(\gamma-1)\frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)}+\cdots\right],$$

$$\frac{1}{\Pi(\gamma-1)} = \frac{1}{\Pi(0)}\left[1-(\gamma-1)\frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)}+\cdots\right],$$

$$\frac{1}{[\Pi(\tfrac{1}{2}-\gamma)]^2} = \frac{1}{[\Pi(-\tfrac{1}{2})]^2}\left[1+2(\gamma-1)\frac{\Pi'(-\tfrac{1}{2})}{\Pi(-\tfrac{1}{2})}+\cdots\right].$$

Setzen wir diese Werte in (5) ein, so erhalten wir

$$(6)\quad \frac{\Pi(1-\gamma)\,\Pi(-\gamma)}{[\Pi(\tfrac{1}{2}-\gamma)]^2} = \frac{\pi}{\sin\gamma\pi}\left[1-2(\gamma-1)\left(\frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)}-\frac{\Pi'(-\tfrac{1}{2})}{\Pi(-\tfrac{1}{2})}\right)+\cdots\right].$$

Endlich ist

$$\Pi(\gamma-2)\,\Pi(1-\gamma) = \frac{\pi}{\sin(\gamma-1)\pi} = -\frac{\pi}{\sin\gamma\pi}.$$

Setzen wir diesen Wert und den Wert (6) in (4) ein, so erhalten wir rechts

$$-\frac{2(\gamma-1)\pi}{\sin\gamma\pi\,[\Pi(-\tfrac{1}{2})]^2}\left(\frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)}-\frac{\Pi'(-\tfrac{1}{2})}{\Pi(-\tfrac{1}{2})}\right).$$

Nun ist $\Pi(-\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und (Gauß a. a. O. Art. 32)

$$\frac{\Pi'(0)}{\Pi(0)}-\frac{\Pi'(-\tfrac{1}{2})}{\Pi(-\tfrac{1}{2})} = 2\log 2.$$

Folglich ist der zu bestimmende Grenzwert

$$(7)\quad \lim_{\gamma=1}\,[f(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},2-\gamma)+f(\gamma-\tfrac{3}{2},\gamma-\tfrac{3}{2},\gamma-1)] = \frac{4\log 2}{\pi}.$$

Wir lassen nun in der Gleichung (1) γ gegen 1 konvergieren und substituieren die Werte (2), (3) und (7). Wir erhalten für die Übergangssubstitution die Darstellung

$$S_0^{-1})\qquad \begin{aligned} V_1 &= V_1^0,\\ V_2 &= \frac{4\log 2}{\pi}V_1^0 - 2i\,V_2^0. \end{aligned}$$

Um die Substitution S_1^{-1} zu erhalten, die zum singulären Punkt 1 gehört, drücken wir in den vorstehenden Gleichungen die Integrale V_1^0, V_2^0 und $V_2 = V_1^1$ durch die Reihen I und III des § 72 aus.

Bei dieser Substitution werden die Integrale V_1^0, V_2^0 mit den Integralen V_1^1, V_2^1 vertauscht. Wir erhalten daher für die Substitution S_1^{-1} die Gleichungen

$$S_1^{-1})\qquad \begin{aligned} V_1 &= \frac{4\log 2}{\pi}V_1^1 - 2i\,V_2^1,\\ V_2 &= V_1^1. \end{aligned}$$

Um zu der Übergangssubstitution S_∞ zu gelangen, stellen wir in der zweiten Gleichung der Substitution S_0^{-1} die Integrale $V_1^{(0)}, V_2^{(0)}$ durch die Reihen I des § 72, die Funktion U_2 durch die erste der Reihen III dar. Wir ersetzen die Variable z durch $\frac{1}{1-z}$, gleichzeitig haben wir $\log z$ durch

$$\log \frac{1}{1-z} = \log \frac{1}{z-1} - \pi i$$

zu ersetzen (§ 71, Gl. (14)). Es tritt nun an Stelle des Integrals $V_1^{(0)} = F(z)$ das Integral

$$F\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sqrt{z-1}\, V_1^{(\infty)} \quad (\text{§ 72, Formel VI})$$

und an Stelle des Integrals

$$V_2^{(0)} = G(z) + \frac{1}{2\pi i} \log z\, F(z)$$

tritt das Integral

$$G\left(\frac{1}{1-z}\right) + \frac{1}{2\pi i}(\log(z-1) - \pi i) F\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sqrt{z-1}\,[V_2^{(\infty)} - \tfrac{1}{2} V_1^{(\infty)}].$$

An Stelle des Integrals $U_2 = V_1^{(1)} = F(1-z)$ tritt das Integral

$$F\left(\frac{z}{z-1}\right) = \sqrt{1-z}\, V_1^{(0)} \quad (\text{§ 72, Formel II}).$$

Da nach unseren Festsetzungen (§ 71, Gl. (12))

$$\log(1-z) = \log(z-1) - \pi i$$

ist, so ist

$$\sqrt{1-z} = -i\sqrt{z-1}.$$

Führen wir die Werte, die der vorgenommenen Vertauschung entsprechen, in die zweite Gleichung der Substitution S_0^{-1} ein, so erhalten wir nach einer leichten Reduktion

$$U_1 = \left(-1 + \frac{4 \log 2}{\pi} i\right) V_1^{(\infty)} + 2 V_2^{(\infty)}. \tag{8}$$

Um eine analoge Gleichung für U_2 zu erhalten, ersetzen wir die Variable z durch $1-z$. Es tritt dann an Stelle des Integrals

$$U_1 = F(z) \text{ das Integral } U_2 = F(1-z),$$

an Stelle des Integrals

$$V_1^{(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{z}} F\left(\frac{1}{z}\right)$$

das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} F\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{i}{\sqrt{z-1}} F\left(\frac{1}{1-z}\right) = i V_1^{(\infty)},$$

und an Stelle des Integrals

$$V_2^{(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{z}}\left[G(z) + \frac{1}{2\pi i}\log\frac{1}{z}\,F\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

das Integral

$$\frac{i}{\sqrt{z-1}}\left[G\left(\frac{1}{1-z}\right) + \frac{1}{2\pi i}\left(\log\frac{1}{z-1} + \pi i\right)F\left(\frac{1}{1-z}\right)\right] =$$
$$= i\left[V_2^{(\infty)} + \tfrac{1}{2}V_1^{(\infty)}\right].$$

Setzen wir diese Werte in (8) ein, so ergibt sich

$$(9) \qquad U_2 = -\frac{4\log 2}{\pi}V_1^{(\infty)} + 2iV_2^{(\infty)}.$$

Für die dritte Übergangssubstitution erhalten wir somit aus (8) und (9) die Darstellung

$$(S_\infty^{-1}) \qquad \begin{aligned} U_1 &= \left(-1 + \frac{4\log 2}{\pi}i\right)V_1^{(\infty)} + 2V_2^{(\infty)} \\ U_2 &= -\frac{4\log 2}{\pi}V_1^{(\infty)} + 2iV_2^{(\infty)}. \end{aligned}$$

Wir wollen noch feststellen, wie sich die Integrale U_1, U_2 beim Überschreiten der Begrenzungsstücke L_0, L_1 der Sternfläche A verhalten.

Von der $-$ Seite der Sperrlinie L_0 gelangen wir durch einen positiven Umlauf um den Punkt 0 auf die $+$ Seite (siehe S. 357), daher ist

$$\text{an } L_0\colon\quad \overset{+}{V}_1^{(0)} = \overline{V}_1^{(0)} \qquad \overset{+}{V}_2^{(0)} = \overline{V}_2^{(0)} + \overline{V}_1^{(0)}.$$

Unter Benutzung der Übergangssubstitution S_0 erhalten wir daher:

$$(10) \quad \text{an } L_0\colon\quad \overset{+}{U}_1 = \overline{U}_1$$
$$\overset{+}{U}_2 = \frac{4\log 2}{\pi}\overset{+}{V}_1^{(0)} - 2i\overset{+}{V}_2^{(0)} = \frac{4\log 2}{\pi}\overline{V}_1^{(0)} - 2i\left(\overline{V}_2^{(0)} + \overline{V}_1^{(0)}\right),$$

also

$$(11) \qquad \overset{+}{U}_2 = -2i\overline{U}_1 + \overline{U}_2$$

Von der $-$ Seite der Sperrlinie L_1 gelangen wird durch einen negativen Umlauf um den Punkt 1 auf die $+$ Seite, daher ist

$$\text{an } L_1\colon\quad \overset{+}{V}_1^{(1)} = \overline{V}_1^{(1)} \qquad \overset{+}{V}_2^{(1)} = \overline{V}_2^{(1)} - \overline{V}_1^{(1)}.$$

Unter Benutzung der Übergangssubstitution S_1^{-1} erhalten wir:

$$(12) \qquad \text{an } L_1\colon\quad \overset{+}{U}_1 = \overline{U}_1 - 2i\overline{U}_2 \qquad \overset{+}{U}_2 = \overline{U}_2.$$

Die Gleichungen (10), (11) und (12) erhalten eine übersichtlichere Gestalt, wenn wir an Stelle des Fundamentalintegrals U_2 das Integral iU_2 treten lassen. Es ergeben sich dann die Substitutionen

$$
\begin{array}{lll}
(C_0) \qquad & \overset{+}{U}_1 = \overset{-}{U}_1 \qquad & i\overset{+}{U}_2 = 2\overset{-}{U}_1 + i\overset{-}{U}_2 \\
(C_1) \qquad & \overset{+}{U}_1 = \overset{-}{U}_1 + 2i\overset{-}{U}_2 \qquad & i\overset{+}{U}_2 = i\overset{-}{U}_2 .
\end{array}
$$

Die erste gilt längs der Sperrlinie L_0, die zweite längs der Sperrlinie L_1.

Die beiden Substitutionen C_0 und C_1 erzeugen die Gruppe der Differentialgleichung (vergl. § 65).

Die beiden Substitutionen C_0 und C_1 haben die folgenden charakteristischen Eigenschaften:

Erstens: die Substitutionsdeterminante ist $= 1$.

Zweitens: die Substitutionskoeffizienten sind ganze Zahlen.

Drittens: der erste und vierte Koeffizient sind ungerade Zahlen, der zweite und dritte Koeffizient sind gerade Zahlen.

Besitzen zwei Substitutionen diese Eigenschaften, so kommen sie auch ihrem Produkt zu und sie kommen auch den inversen Substitutionen zu. Demnach besitzt eine jede Substitution der Gruppe G, die durch die Substitutionen C_0 und C_1 erzeugt wird, die genannten Eigenschaften.

Es läßt sich unschwer beweisen, daß auch umgekehrt eine jede Substitution, die diese Eigenschaften besitzt, der Gruppe G angehört. Durch diese drei Eigenschaften ist also die Gruppe der Differentialgleichung vollständig bestimmt. Auf den Beweis können wir hier nicht eingehen.

Die spezielle Differentialgleichung, mit der wir uns in diesem Paragraphen beschäftigt haben, spielt in der Theorie der elliptischen Funktionen eine hervorragende Rolle: die beiden Fundamentalintegrale U_1 und iU_2 stimmen bis auf den Faktor $\frac{\pi}{2}$ mit den Perioden eines elliptischen Integrals erster Gattung, dessen Modul $\sqrt{z}$ ist, überein. Um dies kurz nachzuweisen, gehen wir von der bekannten Gleichung

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi \, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

aus. Unter Benutzung dieser Gleichung können wir die hypergeometrische Reihe

$$F(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right)^2 z^n \quad (\S\ 72,\ \text{Gl. } 4)$$

in der Form schreiben

$$F(z) = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\varphi\, d\varphi\cdot z^n\right].$$

Indem wir die Reihenfolge der Summation und Integration vertauschen, erhalten wir auf Grund des binomischen Satzes

$$\frac{\pi}{2}U_1 = \frac{\pi}{2}F(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-z\sin^2\varphi}}$$

und dementsprechend

$$i\frac{\pi}{2}U_2 = i\frac{\pi}{2}F(1-z) = i\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-z)\sin^2\varphi}}.$$

Die rechts stehenden Integrale sind die Perioden eines elliptischen Integrals erster Gattung.

§ 76. Die Schwarzsche Differentialgleichung. Der Quotient zweier Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung

(1) $$w'' + aw' + bw = 0$$

genügt einer Differentialgleichung dritter Ordnung, die zuerst von H. A. Schwarz untersucht worden ist.

Wir setzen unter $w_1\ w_2$ ein beliebiges Fundamentalsystem von Integralen dieser Differentialgleichung verstehend

(2) $$\eta = \frac{w_1}{w_2}.$$

Aus dieser Gleichung folgt

$$\eta' = \frac{w_2 w_1' - w_1 w_2'}{w_2^2},$$

und hieraus ergibt sich durch logarithmische Differentiation

$$\frac{\eta''}{\eta'} = \frac{w_2 w_1'' - w_1 w_2''}{w_2 w_1' - w_1 w_2'} - 2\frac{w_2'}{w_2}, \quad \text{also } (\S\ 61,\ \text{Gl. } 3)$$

(3) $$\frac{\eta''}{\eta'} = -a - 2\frac{w_2'}{w_2}.$$

Durch abermalige Differentiation dieser Gleichung folgt

$$(4)\qquad \frac{\eta'''}{\eta'} - \left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = -a' - 2\frac{w_2''}{w_2} + 2\left(\frac{w_2'}{w_2}\right)^2.$$

Substituieren wir in diese Gleichung den aus (3) folgenden Wert

$$2\left(\frac{w_2'}{w_2}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 - \tfrac{1}{2}a^2 - 2a\frac{w_2'}{w_2},$$

so folgt mit Rücksicht darauf, daß die Funktion w_2 der Differentialgleichung (1) genügt

$$(5)\qquad \frac{\eta'''}{\eta'} - \tfrac{3}{2}\left(\frac{\eta''}{\eta'}\right)^2 = 2b - a' - \tfrac{1}{2}a^2.$$

Der Wert der rechten Seite dieser Gleichung ist von der Wahl des Fundamentalsystems $w_1\ w_2$ unabhängig, daher kann auch der links stehende Ausdruck — man pflegt ihn nach Kleins Vorgang mit $[\eta]_z$ zu bezeichnen — seinen Wert nicht ändern, wenn man an Stelle des Fundamentalsystems $w_1\ w_2$ ein beliebiges anderes Fundamentalsystem

$$(6)\qquad W_1 = p_{11}w_1 + p_{12}w_2 \qquad W_2 = p_{21}w_1 + p_{22}w_2$$

und dementsprechend an Stelle der Größe η die Größe

$$(7)\qquad H = \frac{p_{11}\eta + p_{12}}{p_{21}\eta + p_{22}}.$$

treten läßt; es ist also

$$[H]_z = [\eta]_z.$$

Lassen wir den Punkt z einen Umlauf um einen singulären Punkt der Differentialgleichung (1) ausführen. Zwischen den Anfangswerten $w_1\ w_2$ der Integrale eines Fundamentalsystems und ihren Endwerten $W_1\ W_2$ bestehen Gleichungen der Form (6); dementsprechend besteht zwischen dem Anfangswert

$$\eta = \frac{w_1}{w_2} \text{ und dem Endwert } H = \frac{W_1}{W_2}$$

die Gleichung (7).

Ist der betreffende singuläre Punkt ein scheinbarer, so ist

$$p_{12} = p_{21} = 0 \text{ und } p_{11} = p_{22}, \text{ folglich ist } H = \eta.$$

Einem scheinbaren singulären Punkt der Differentialgleichung (1) entspricht also kein Verzweigungspunkt der Differentialgleichung (5).

Nehmen wir an, die Differentialgleichung (1) gehöre der Fuchsschen Klasse an (s. § 68 S. 334). Unter dieser Voraussetzung darf in einem singulären Punkt, der im Endlichen liegt, der Koeffizient a nur zur ersten Ordnung und der Koeffizient b nur zur zweiten unendlich werden (§ 66 Satz VIII); im Unendlichen muß der Koeffizient a zur ersten und der Koeffizient b zur zweiten Ordnung verschwinden (§ 67 Satz IX). Daraus folgt: der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (5) ist eine rationale Funktion der Variabeln z, die in keinem Punkt zu einer höheren als der zweiten Ordnung verschwindet; der Grad des Nenners ist mindestens um zwei Einheiten höher als der des Zählers.

§ 77. Abbildung eines Kreisbogendreiecks auf eine Halbebene. Wir untersuchen einen speziellen Fall der Schwarzschen Differentialgleichung genauer. Wir gehen von der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe

$$(1)\qquad w'' + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{z-1}\right)w' + \alpha\beta\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right)w = 0$$

aus und beschränken uns auf den Fall, daß die drei Exponentendifferenzen

$$(2)\qquad \lambda = 1-\gamma \qquad \mu = \gamma-\alpha-\beta \qquad \nu = \beta-\alpha$$

reell, nicht negativ und < 1 sind.

Für die rechte Seite der Gleichung (5) des vorigen Paragraphen erhalten wir in diesem Fall den Ausdruck

$$2\alpha\beta\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right) + \frac{\gamma}{z^2} + \frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{(z-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{z^2}$$
$$- \frac{1}{2}\frac{(\alpha+\beta-\gamma+1)^2}{(z-1)^2} - \frac{\gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}{z(z-1)}.$$

Führen wir an Stelle der Größen $\alpha\beta\gamma$ die Größen $\lambda\mu\nu$ (2) ein, so lautet die Differentialgleichung

$$(3)\qquad \{\eta\}_z = \frac{1-\lambda^2}{2z^2} + \frac{1-\mu^2}{2(z-1)^2} - \frac{1+\nu^2-\lambda^2-\mu^2}{z(z-1)}.$$

Unter den beschränkenden Voraussetzungen, die wir eingeführt haben, läßt sich die Beziehung zwischen den Variabeln z und η geometrisch in sehr einfacher Weise anschaulich machen: wir werden beweisen: d u r c h j e d e n Z w e i g d e r F u n k t i o n η w i r d d i e p o s i t i v e z-H a l b e b e n e a u f e i n v o n K r e i s b o g e n begrenztes Dreieck mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ abgebildet.

Wenn der Punkt z auf die positive Halbebene beschränkt wird, so sind die Integrale w_1, w_2 der Differentialgleichung (1) einwertige Funktionen der Variabeln z und dasselbe gilt daher auch für die Funktion $\eta = \frac{w_1}{w_2}$.

Es entspricht daher einem jeden Punkt der positiven z-Halbebene nur ein Punkt in der η-Ebene. Wir behaupten, daß auch umgekehrt jedem Punkt der η-Ebene, der überhaupt zu den Bildpunkten gehört, nur ein Punkt in der positiven z-Halbebene entspricht.

Zum Beweis ist zu bemerken: von den singulären Punkten 0, 1, ∞ und den Nullpunkten des Integrals w_2 abgesehen, verhält sich die Funktion η überall regulär und ihre Derivierte

$$\eta' = \frac{w_2 w_1' - w_1 w_2'}{w_2^2}$$

verschwindet nicht (§ 61 Satz III). Daher wird nicht nur die Umgebung eines jeden Punktes z_0, der mit keinem der genannten Ausnahmepunkte zusammenfällt, eindeutig auf die Umgebung des entsprechenden Punktes η_0 abgebildet, sondern diese Beziehung ist gegenseitig (§ 30).

Nehmen wir an, der Punkt z_0 falle zwar mit keinem der Punkte 0, 1, ∞ zusammen, er sei aber Nullpunkt des Integrals w_2. Unter dieser Annahme verhält sich die Funktion

$$\frac{1}{\eta} = \frac{w_2}{w_1}$$

in der Umgebung dieses Punktes regulär und ihre Derivierte verschwindet nicht. Daher ist in der Umgebung des unendlich fernen Punktes der η-Ebene die Variable z eine reguläre Funktion der Variabeln η.

Daraus folgt: die Abbildung der positiven z-Halbebene auf die η-Ebene bildet einen kontinuierlichen Bereich Δ. Im Innern dieses Bereichs liegt kein singulärer Punkt der Funktion $z = \varphi(\eta)$.

Diese Funktion ist daher innerhalb des Bereichs Δ einwertig und überall regulär (§ 47).

Um die Begrenzung des Bereichs Δ zu bestimmen, müssen wir die Abszissenachse der z-Ebene auf die η-Ebene abbilden.

Es ist von vornherein einleuchtend, daß sich diese Abbildung für die drei Strecken, in die die Abszissenachse durch die Punkte 0, 1, ∞ zerlegt wird, verschieden gestaltet.

Die beiden im Nullpunkt zusammenstoßenden Strecken bilden wir zunächst mittels des Quotienten

$$(4) \qquad H = \frac{Y_2^{(0)}}{Y_1^{(0)}}$$

der beiden kanonischen Integrale, die zu diesem Punkt gehören, auf die H-Ebene ab. Wir schließen vorerst den Fall aus, daß die Exponentendifferenz $\lambda = 1 - \gamma$ verschwindet, und stellen die beiden Integrale $Y_1^{(0)}$, $Y_2^{(0)}$ für reelle positive Werte der Variabeln z durch die Reihen

$$(5) \qquad Y_1^{(0)} = F(\alpha, \beta, \gamma, z) \quad Y_2^{(0)} = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z)$$

(§ 71 I und V)

dar, für reelle negative Werte durch die Reihen (III und VII)

$$(6) \qquad Y_1^{(0)} = (1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma - \beta, \gamma, \frac{z}{z-1}\right)$$

$$Y_2^{(0)} = z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma-\alpha-1} F\left(\alpha - \gamma + 1, 1 - \beta, 2 - \gamma, \frac{z}{z-1}\right).$$

Die Strecke 0, 1 der Abszissenachse liegt im Konvergenzbereich der Reihen (5), die Strecke 0, $-\infty$ im Konvergenzbereich der Reihen (6).

Die Koeffizienten der hypergeometrischen Reihen sind reell, daher entsprechen reellen Werten der Variabeln reelle Werte der Reihensummen. Zufolge unserer Festsetzungen (s. § 71 Schluß) ist für reelle positive Werte der Variabeln z arc $z = 0$, für reelle negative Werte ist arc $z = \pi$, folglich ist längs der Strecke 0, 1 der Abszissenachse arc $z^{1-\gamma} = 0$, längs der Strecke 0, $-\infty$ ist arc $z^{1-\gamma} = (1-\gamma)\pi = \lambda\pi$.

Längs der negativen Abszissenachse ist arc $(1-z) = 0$, also auch arc $(1-z)^{\gamma-1} = 0$.

Hieraus folgt: liegt der Punkt z auf dem Abschnitt 0, 1 der Abszissenachse, so ist arc $H = 0$, liegt der Punkt z auf dem negativen Teil der Abszissenachse, so ist arc $H = \lambda\pi$.

Für $z = 0$ ist $Y_2^{(0)} = 0$ also $H = 0$.

Im Punkt $z = 1$ und im unendlich fernen Punkt der z-Ebene besitzt H einen endlichen von Null verschiedenen

Wert. Man verifiziert dies leicht mittels der Gleichungen (5) und (6).

Der Strecke 0, 1 der Abszissenachse in der z-Ebene entspricht demnach in der H-Ebene eine vom Nullpunkt ausgehende endliche Strecke der positiven Abszissenachse; der negativen Abszissenachse in der z-Ebene entspricht in der H-Ebene eine vom Nullpunkt ausgehende geradlinige endliche Strecke, die auf der Seite der wachsenden Ordinaten liegt und mit der Richtung der wachsenden Abszissen den Winkel $\lambda\pi$ bildet.

Nunmehr bilden wir die H-Ebene auf die η-Ebene ab, dadurch erhalten wir auch eine Abbildung der z-Ebene auf die η-Ebene.

Zwischen den Funktionen η und H besteht eine Gleichung der Form

$$H = \frac{p_{11}\eta + p_{12}}{p_{21}\eta + p_{22}} \tag{7}$$

mit konstanten Koeffizienten. Die H-Ebene und ihre Abbildung auf die η-Ebene sind somit kreisverwandt (vergl. § 14). Den geradlinigen Strecken in der H-Ebene, auf die die Abschnitte 0, 1 und $0, -\infty$ der Abszissenachse in der z-Ebene abgebildet werden, entsprechen daher in der η-Ebene zwei Kreisbogen $\omega_0\omega_1$ und $\omega_0\omega_\infty$, die ebenso wie diese Strecken den Winkel $\lambda\pi$ einschließen.

In derselben Weise läßt sich zeigen, daß auch dem Abschnitt $1, +\infty$ der Abszissenachse in der z-Ebene in der η-Ebene ein Kreisbogen $\omega_1\omega_\infty$ entspricht; dieser Kreisbogen schließt mit den beiden Kreisbogen $\omega_1\omega_0$ und $\omega_\infty\omega_0$, beziehungsweise die Winkel $\mu\pi$ und $\nu\pi$ ein.

Damit ist der oben ausgesprochene Satz für den Fall, daß keine der Exponentendifferenzen λ, μ, ν verschwindet, bewiesen.

Nehmen wir nun an, es sei $\lambda = 0$ also $\gamma = 1$. In diesem Fall ist das eine der beiden kanonischen Integrale, die zum Nullpunkt gehören, uneigentlich normal.

Wir bilden wieder die Umgebung des Nullpunkts zunächst mittels der Funktion

$$H = \frac{Y_2^{(0)}}{Y_1^{(0)}}$$

auf die H-Ebene und dann diese mittels der Transformation (7) auf die η-Ebene ab.

In der Umgebung des Nullpunktes können wir die Integrale $V_1^{(0)}$, $V_2^{(0)}$ mittels der Reihen

$$V_1^{(0)} = F(\alpha, \beta, 1, z), \quad V_2^{(0)} = G(\alpha, \beta, 1, z) + \frac{\log z}{2\pi i} F(\alpha, \beta, 1, z)$$

darstellen, die für $|z| < 1$ konvergieren. Hieraus ergibt sich für die Funktion H die Darstellung

$$H = \frac{G(\alpha, \beta, 1, z)}{F(\alpha, \beta, 1, z)} + \frac{\log z}{2\pi i}.$$

Die Koeffizienten der Reihe F sind reell, die der Reihe G rein imaginär (§ 70 Gl. (5)). Reellen, positiven Werten der Variabeln z entspricht ein reeller Wert des Logarithmus; für reelle negative Werte ist sein imaginärer Bestandteil $= \pi i$ (s. die am Schluß des § 71 getroffenen Bestimmungen).

Die Abbildung der Strecke $0, 1$ der Abszissenachse in der z-Ebene fällt daher in die Ordinatenachse in der H-Ebene, die Abbildung der Strecke $0, -\infty$ in eine Parallele zur Ordinatenachse in der H-Ebene.

Diesen beiden Parallelen entsprechen in der η-Ebene zwei sich berührende Kreise.

Unser Satz bleibt somit auch dann unverändert in Geltung, wenn eine oder mehrere der Exponentendifferenzen verschwinden.

Wir wollen den Fall, daß alle drei Exponentendifferenzen verschwinden, eingehender betrachten.

Wir setzen, die Bezeichnungen des § 75 beibehaltend

$$\eta = \frac{V_1}{i V_2} = -i \frac{V_1}{V_2}.$$

Um die Eckpunkte des Dreiecks Δ in der η-Ebene zu bestimmen, bemerken wir, daß in jedem der singulären Punkte $0, 1, \infty$ der z-Ebene der Quotient

$$\frac{V_2^{(\nu)}}{V_1^{(\nu)}}$$

der zugehörigen kanonischen Integrale unendlich wird. Es geht das unmittelbar aus den Formeln I bis VI des § 72 hervor.

Indem man die Integrale V_1, V_2 mittels der Substitutionen S_0^{-1}, S_1^{-1}, S_∞^{-1} durch die drei Paare kanonischer Integrale ausdrückt (s. § 75), überzeugt man sich leicht, daß den Punkten 0, 1, ∞ der z-Ebene beziehungsweise die Punkte 0, ∞, -1 der η-Ebene entsprechen.

Die beiden vom unendlich fernen Punkt der η-Ebene ausgehenden Seiten des Dreiecks Δ sind Gerade und zwar weil sie sich unter dem Winkel 0 schneiden, parallele Gerade. Die Seite des Dreiecks Δ, die die Punkte 0, -1 verbindet, ist ein Kreisbogen, der in seinen Endpunkten die beiden parallelen Geraden berührt; folglich ist der Kreisbogen ein Halbkreis und die Strecke 0, -1 ein Durchmesser derselben. Die beiden Parallelen stehen auf der Abszissenachse senkrecht (s. die nebenstehende Figur 38). Durchläuft der Punkt z die Abszissenachse im Sinn der wachsenden Abszissen, so daß die positive z-Halbebene zur Linken liegt, so durchläuft der entsprechende Punkt η die Begrenzung des Dreiecks Δ ebenfalls in dem Sinn, daß die Dreiecksfläche zur Linken liegt. Da den Punkten 0, 1, ∞ der z-Ebene die Punkte 0, ∞, -1 der η-Ebene entsprechen, muß das Dreieck Δ auf der Seite der wachsenden Ordinaten liegen.

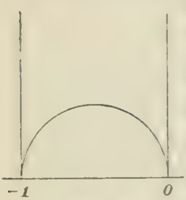


Fig. 38.

§ 78. Anwendung des Prinzips der Spiegelung. Um auch den Teil der Sternfläche A, der auf der Seite der abnehmenden Ordinaten liegt, abzubilden, machen wir von dem Prinzip der Spiegelung Gebrauch (s. § 50). Wir spiegeln einerseits die positive z-Halbebene an der Strecke 0, 1 der Abszissenachse und andererseits das entsprechende Dreieck Δ in der η-Ebene an dem Kreisbogen $\omega_0\,\omega_1$, der dieser Strecke entspricht. Wir erhalten so als Bild der negativen z-Halbebene ein Dreieck Δ', das zum Dreieck Δ in Beziehung auf den Kreisbogen $\omega_0\,\omega_1$ symmetrisch ist.

Die Dreiecke Δ und Δ' liegen auf verschiedenen Seiten des Kreises, dem der Bogen $\omega_0\,\omega_1$ angehört, sie können daher von der gemeinschaftlichen Seite $\omega_0\,\omega_1$ abgesehen, keinen Punkt gemein haben.

Als Bild der Sternfläche A erhalten wir somit ein Kreisbogenviereck H (s. die nebenstehende Figur). Drei Eckpunkte des Vierecks fallen mit den Eckpunkten $\omega_0\ \omega_1\ \omega_\infty$ des Dreiecks Δ zusammen, der vierte Eckpunkt möge mit ω'_∞ bezeichnet werden. Die Winkel an den Eckpunkten ω_0, ω_1 sind bzw. $= 2\lambda\pi$, $2\mu\pi$, die an den Eckpunkten ω_∞ und ω'_∞ sind $= \nu\pi$.

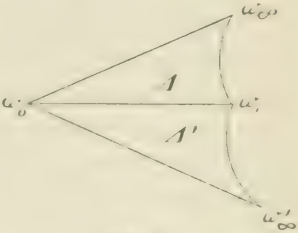


Fig. 39.

Der $+$ Rand der Sperrlinie L_0, die mit der negativen Abzissenachse der z-Ebene zusammenfällt, wird auf den Bogen $\omega_0\ \omega_\infty$ abgebildet, ihr $-$ Rand auf den Bogen $\omega_0\ \omega'_\infty$.

Entsprechend wird der $+$ Rand der Sperrlinie L_1, die vom Punkt 1 längs der positiven Abszissenachse ins Unendliche läuft, auf den Bogen $\omega_1\ \omega_\infty$, ihr $-$ Rand auf den Bogen $\omega_1\ \omega'_\infty$ abgebildet.

Zwischen den Werten $\overset{+}{w}_1$, $\overset{+}{w}_2$ und $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$, die die Integrale eines Fundamentalsystems in gegenüberliegenden Punkten auf den Rändern der Sperrlinie L_i $(i = 0, 1)$ annehmen, bestehen Gleichungen der Form

$$(1)\qquad \overset{+}{w}_1 = c^{(i)}_{11}\bar{w}_1 + c^{(i)}_{12}\bar{w}_2 \qquad \overset{+}{w}_2 = c^{(i)}_{21}\bar{w}_1 + c^{(i)}_{22}\bar{w}_2 \qquad (i = 0, 1).$$

Folglich besteht zwischen den Werten

$$\overset{+}{\eta}_i = \frac{\overset{+}{w}_1}{\overset{+}{w}_2} \quad \text{und} \quad \bar{\eta}_i = \frac{\bar{w}_1}{\bar{w}_2},$$

die gegenüberliegenden Punkten auf den Rändern von L_i entsprechen, die Beziehung

$$(C_i)\qquad \overset{+}{\eta}_i = \frac{c^{(i)}_{11}\bar{\eta}_i + c^{(i)}_{12}}{c^{(i)}_{21}\bar{\eta}_i + c^{(i)}_{22}} \qquad i = 0, 1.$$

Demnach führt die Transformation C_0 den Bogen $\omega_0\ \omega'_\infty$ in den Bogen $\omega_0\ \omega_\infty$ und die Transformation C_1 den Bogen $\omega_1\ \omega'_\infty$ in den Bogen $\omega_1\ \omega_\infty$ über.

Wir bilden nun das ganze Viereck H mittels der Transformation

$$\eta = \frac{c^{(0)}_{11}\eta_1 + c^{(0)}_{12}}{c^{(0)}_{21}\eta_1 + c^{(0)}_{22}}$$

auf ein kreisverwandtes Viereck H_1 ab und repräsentieren auch die Werte der neuen Variabeln η_1 durch Punkte der η-Ebene.

Das Viereck Π_1 hat mit dem Viereck Π, die Seite $\omega_0\,\omega_x$ aber keinen weiteren Punkt gemein.

Transformieren wir statt mittels der Substitution C_0 mittels der inversen Substitution C_0^{-1}, so erhalten wir ein zum Viereck Π kreisverwandtes Viereck Π_{-1}, das mit Π die Seite $\omega_0\,\omega_x'$ aber keinen weiteren Punkt gemein hat.

Analog erhalten wir, wenn wir mittels der Substitution C_1 und mittels der inversen Substitution C_1^{-1} transformieren, zwei Vierecke Π_2 und Π_{-2}, von denen das eine die Seite $\omega_1\,\omega_x'$, das andere die Seite $\omega_1\,\omega_x$ mit dem Viereck Π gemein hat. Geht man von der in Fig. 39 (S. 387) gezeichneten Gestalt des Ausgangsdreiecks Δ aus, so stellt die Substitution C_0 eine Drehung um den Punkt ω_0 durch den Winkel $2\lambda\pi$ dar, die Substitution C_1 eine Drehung um den Punkt ω_1 durch den Winkel $2\mu\pi$. Die erstere Drehung erfolgt im positiven, die letztere im negativen Sinn.

Indem wir der Reihe nach die Substitutionen der Gruppe G, die von den Substitutionen C_0 und C_1 erzeugt wird (s. § 64), zur Anwendung bringen, erhalten wir eine — allgemein zu reden — unbegrenzte Anzahl von Vierecken Π_j, von denen ein jedes mit dem Viereck Π, von dem wir ausgegangen sind, kreisverwandt ist.

Jedes dieser Vierecke liefert eine konforme Abbildung der Sternfläche A. Punkte der η-Ebene, die demselben Punkt der Sternfläche A entsprechen, bezeichnet man als homologe Punkte. Jedes Viereck Π_j enthält also von jedem System homologer Punkte einen und nur einen Punkt.

Jedes Viereck Π_j besteht aus zwei Dreiecken Δ_j und Δ_j', von denen das erste mit dem Dreieck Δ, das zweite mit dem Dreieck Δ' kreisverwandt ist; das Dreieck Δ_j liefert also eine konforme Abbildung der positiven z-Halbebene, das Dreieck Δ_j' eine Abbildung der negativen z-Halbebene.

Wir haben das Ausgangsviereck Π aus den Dreiecken Δ und Δ' zusammengesetzt, die die Seite $\omega_0\,\omega_1$ gemein haben. Setzen wir statt dessen das Dreieck Δ mit dem Dreieck Δ_1', das mit ihm die Seite $\omega_0\,\omega_x$ gemein hat, zu einem Viereck Π' zusammen. Der vierte Eckpunkt dieses Vierecks möge mit ω_1' bezeichnet werden.

Der Seite $\omega_0\,\omega_1$ des Vierecks Π' entspricht in der z-Ebene die + Seite des Abschnitts 0, 1 der Abszissenachse, der Seite $\omega_0\, \omega_1'$ die − Seite dieses Abschnitts; der Seite $\omega_2\, \omega_1$ entspricht die + Seite des Abschnitts 1, ∞ der positiven Abszissenachse, der Seite $\omega_2\, \omega_1'$ die − Seite derselben.

Das Viereck Π' ist daher das Bild der längs der positiven Abszissenachse aufgeschnittenen z-Ebene.

In derselben Weise läßt sich zeigen: das Viereck Π'', das aus dem Dreieck Δ und dem längs der Seite $\omega_1\, \omega_2$ angrenzenden symmetrischen Dreieck Δ_2' zusammengesetzt ist, ist das Bild der längs des Abschnitts $-\infty$, 1 der Abszissenachse aufgeschnittenen z-Ebene.

§ 79. Automorphe Funktionen. Nehmen wir an, die Vierecke Π_ν, in die das Viereck Π durch die Substitutionen der Gruppe G transformiert wird, überdecken die η-Ebene nur einfach. Dabei bleibt dahingestellt, ob der Bereich B, den sie erfüllen, begrenzt ist oder ob er die ganze η-Ebene umfaßt.

Unter dieser Annahme entsprechen zwar einem Punkt der z-Ebene mehrere Punkte der η-Ebene — im allgemeinen sogar unendlich viele — aber einem Punkt der η-Ebene, der dem Bereich B angehört, entspricht nur ein einziger Punkt der z-Ebene. Anders ausgedrückt heißt das: die Variable z ist eine einwertige Funktion der Variabeln η.

Weil einem System homologer Punkte in der η-Ebene ein und derselbe Punkt der z-Ebene entspricht, so genügt die Funktion $z = \varphi(\eta)$ den Gleichungen

$$\varphi\left(\frac{c_{11}^{(i)}\eta + c_{12}^{(i)}}{c_{21}^{(i)}\eta + c_{22}^{(i)}}\right) = \varphi(\eta) \qquad (i = 0, 1).$$

Mit Worten: die Funktion $\varphi(\eta)$ wird durch die beiden Substitutionen C_0 und C_1 und folglich auch durch eine jede Substitution der von ihnen erzeugten Gruppe G in sich selbst transformiert.

Man bezeichnet eine Funktion, die durch eine Gruppe von Substitutionen ersten Grades in sich selbst transformiert wird, als „automorphe" Funktion.

Ein einfaches Beispiel derartiger Funktionen ist uns bereits in den doppelt periodischen Funktionen entgegengetreten: die Funktion $\varphi(\eta)$ repräsentiert einen weit allgemeineren Typus.

Weil durch die Funktion $q(\eta)$ die z-Halbebene auf ein Kreisbogendreieck abgebildet wird, bezeichnet man sie als Dreiecksfunktion.

Wir wollen nun die Bedingungen feststellen, unter denen die Vierecke Π_j die η-Ebene nur einfach bedecken.

Dazu ist offenbar in erster Linie erforderlich, daß alle die Dreiecke Δ_j und Δ_j', die einen Eckpunkt ω gemein haben, sich glatt nebeneinander legen. Diese Dreiecke gehen aus einem derselben — es möge mit Δ_1 bezeichnet werden — durch wiederholte Spiegelung an den vom Punkt ω ausgehenden Seiten hervor. Je zwei nebeneinander liegende Dreiecke Δ_j und Δ_j' liefern ein Bild der in geeigneter Weise zerschnittenen z-Ebene (vgl. die Ausführungen im vorigen Paragraphen). Daher muß die Anzahl der um den Punkt ω herumliegenden Dreiecke Δ_j' ebenso groß sein wie die der Dreiecke Δ_j, vorausgesetzt daß diese Zahlen endlich sind.

An den in Betracht kommenden Verhältnissen ändert sich nichts, wenn wir zu einer kreisverwandten Figur übergehen. Wir können daher, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen, annehmen daß die im Punkt ω zusammenstoßenden Seiten des Ausgangsdreiecks Δ_1 geradlinig sind. Wenn der Winkel, den sie einschließen — es sei etwa der Winkel $\lambda\pi$ — von Null verschieden ist, so muß, damit keine mehrfache Überdeckung der Ebene eintritt, $\frac{1}{\lambda}$ eine ganze Zahl sein. Es stoßen dann im Punkt w λ Dreiecke Δ_j und ebenso viele Dreiecke Δ_j' zusammen, die sich glatt nebeneinander legen.

Nehmen wir nun an, der dem Eckpunkt ω anliegende Dreieckswinkel sei $= 0$; unter dieser Voraussetzung sind die ihn einschließenden Seiten — wenn wir sie wieder als geradlinig annehmen — parallel und der Punkt ω fällt in den unendlich fernen Punkt. In diesem Fall gehen aus dem Ausgangsdreieck Δ_1 durch wiederholte Spiegelung unendlich viele Dreiecke Δ_j und Δ_j' hervor, die sich ebenfalls glatt nebeneinander legen.

Damit die Vierecke Π_j die η-Ebene einfach überdecken, ist also erforderlich, daß jede der drei Zahlen

$\lambda\ \mu\ \nu$ entweder ein rationaler Bruch mit dem Zähler 1 oder Null ist.

Das Verhalten der Funktion $z = \varphi(\eta)$ in der Umgebung des Punktes $\eta = \omega$ gestaltet sich wesentlich verschieden, je nachdem der Dreieckswinkel, dessen Scheitel dieser Punkt ist, gleich Null oder ein Bruchteil von π ist. Im letzteren Fall verhält sich die Funktion $\varphi(\eta)$ in der Umgebung des Punktes ω regulär, wenn derselbe das Bild eines der Punkte 0, 1 der z-Ebene ist; ist er das Bild des unendlich fernen Punktes der z-Ebene, so verhält sich wenigstens die Funktion $\frac{1}{\varphi(\eta)}$ regulär, für die Funktion $\varphi(\eta)$ selbst ist er ein Pol. Wenn dagegen der in Rede stehende Dreieckswinkel gleich Null ist, so ist der Punkt ω eine wesentlich singuläre Stelle der Funktion $\varphi(\eta)$.

§ 80. Arteinteilung der Dreiecksfunktionen. Wir betrachten die Kreisbogendreiecke, die der Bedingung des vorigen Paragraphen genügen, genauer. Dabei legen wir der Untersuchung wieder ein Dreieck mit zwei geradlinigen Seiten zu Grunde. Wir schließen vorerst den Fall aus, daß alle drei Winkel des Dreiecks gleich Null sind und können infolgedessen annehmen, daß die beiden geradlinigen Seiten einen von Null verschiedenen Winkel bilden, also sich im Endlichen schneiden.

Es macht nun einen wesentlichen Unterschied, ob der Kreis, dem die dritte Dreiecksseite angehört, den gegenüberliegenden Eckpunkt einschließt oder ausschließt. Zwischen diesen beiden Fällen steht der Grenzfall, daß auch die dritte Dreiecksseite geradlinig ist.

Wenn der an zweiter Stelle genannte Fall eintritt, so gibt es einen Kreis, der die drei Seiten des Dreiecks unter einem rechten Winkel schneidet. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der beiden geraden Seiten, sein Radius ist gleich der Länge der Tangente aus diesem Punkt an den Kreis, dem die dritte Seite angehört (Fig. 40). Diese dritte Seite wendet dem gegenüberliegenden Eck-

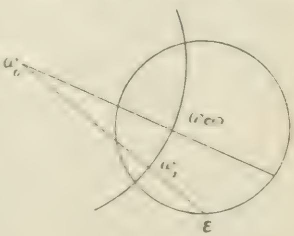


Fig. 40

punkt ihre konkave Seite zu, denn andernfalls müßte wenigstens einer der Dreieckswinkel stumpf sein (in der Figur der Winkel ε), was durch die Bedingung des vorigen Paragraphen ausgeschlossen ist. Die Summe der Dreieckswinkel ist in diesem Fall (Fig. 40) $< \pi$, denn sie ist kleiner als die Summe der Winkel des geradlinigen Dreiecks $\omega_0 \omega_1 \omega_\varepsilon$. Wenn einer der Dreieckswinkel Null ist, so geht der Orthogonalkreis durch den Scheitel dieses Winkels.

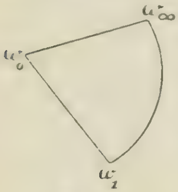


Fig. 41.

Wenn der Kreis, dem die dritte Dreiecksseite angehört, den gegenüberliegenden Eckpunkt einschließt, so gibt es keinen Kreis, der die drei Seiten rechtwinklig schneidet; in diesem Fall ist die Summe der Dreieckswinkel $> \pi$ (s. Fig. 41).

Ein geradliniges Dreieck kann als Spezialfall eines Kreisbogendreiecks betrachtet werden, dessen drei Seiten verlängert durch einen Punkt gehen. Dieser gemeinschaftliche Punkt erscheint als Grenzfall des gemeinschaftlichen Orthogonalkreises.

Wenn drei Kreise sich paarweise berühren, so schneiden sich ihre gemeinschaftlichen Tangenten im Mittelpunkt des Kreises, der dem Dreieck der Berührungspunkte umschrieben ist. Dieser Kreis schneidet daher die drei Seiten unter rechten Winkeln. Demnach besitzen die Seiten eines Kreisbogendreiecks, dessen Winkel sämtlich gleich Null sind, einen gemeinschaftlichen Orthogonalkreis, nämlich den Kreis durch die drei Eckpunkte.

Die eben nachgewiesenen drei Arten von Kreisbogendreiecken können wir kurz in folgender Weise charakterisieren:

In den Dreiecken erster Art ist die Winkelsumme $> \pi$; die Seiten besitzen keinen gemeinschaftlichen Orthogonalkreis.

In den Dreiecken zweiter Art ist die Winkelsumme $= \pi$; die drei Seiten gehen durch einen Punkt.

In den Dreiecken dritter Art ist die Winkelsumme $< \pi$; die Seiten besitzen einen gemeinschaftlichen Orthogonalkreis.

Wenn wir kreisverwandte Dreiecke als nicht wesentlich verschieden betrachten, so gibt es nur viererlei Dreiecke erster

Art. Wir stellen die Werte von $\lambda\ \mu\ \nu$, die ihnen entsprechen, in einer Tabelle zusammen.

	λ	μ	ν
1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{n}$
2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
3)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
4)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$

Der in der ersten Zeile an letzter Stelle stehende Buchstabe n bedeutet eine beliebige ganze positive Zahl.

Die Dreiecke, die den unter 2), 3) und 4) genannten Werten von $\lambda\ \mu\ \nu$ entsprechen, stehen in einer sehr nahen Beziehung zu der Einteilung der Kugel, die durch die regulären Körper bewirkt wird.

Markieren wir auf der Kugel, die einem bestimmten regulären Polyeder umschrieben ist, außer den Eckpunkten (e) auch noch die Punkte (f) und (k), in denen die Perpendikel auf die Flächen und die Kanten des Polyeders die Kugel treffen. Dabei brauchen wir nur das Tetraeder, das Oktaeder und das Ikosaeder in Betracht zu ziehen. Denn wenn wir an Stelle des Oktaeders den Würfel treten lassen, dessen Flächen auf den Oktaederdiagonalen senkrecht stehen, so vertauschen nur die Punkte (e) und (f) ihre Rollen und dasselbe findet statt, wenn wir an Stelle des Ikosaeders das Dodekaeder treten lassen.

Verbinden wir jeden der Punkte (f) mit den drei Punkten (e) und den drei Punkten (k), die in der dem gewählten Punkt entsprechenden Polyederfläche liegen, durch größte Kreise, so wird die ganze Kugel mit sphärischen Dreiecken bedeckt, die alle untereinander kongruent oder symmetrisch sind. Um jeden der Punkte (k) liegen 4, um jeden der Punkte (f) 6 Dreiecke; die entsprechenden Dreieckswinkel haben daher die Größe $\frac{\pi}{2}$ beziehungsweise $\frac{\pi}{3}$; um einen der Punkte (e) liegen im Fall des Tetraeders 6 Dreiecke, in dem des Oktaeders 8, in dem des Ikosaeders 10.

Die Größe der entsprechenden Dreieckswinkel ist daher beziehungsweise $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$. Diese drei Arten von Dreiecken besitzen somit die in unserer Tabelle unter 2), 3) und 4) genannten Winkel.

Um auch Dreiecke mit den unter 1) genannten Winkeln zu erhalten, teilen wir den Äquator der Kugel in $2n$ gleiche Teile und verbinden die Teilpunkte mit den beiden Polen durch größte Kreise. Wir erhalten so eine Einteilung der Kugel in $4n$ Dreiecke, die zu einem als Ausgangsdreieck gewählten abwechslungsweise kongruent oder symmetrisch sind.

Projizieren wir diese verschiedenen Dreiecksteilungen auf der Kugel stereographisch auf die Ebene, so erhalten wir jedesmal eine Einteilung der ganzen Ebene in Dreiecke Δ_j und Δ_j', die alle aus einem Ausgangsdreieck Δ durch wiederholte Spiegelung hervorgehen.

Den Substitutionen der Gruppe G, die das Ausgangsviereck II in die zu ihm kreisverwandten Vierecke II_j überführen, entsprechen die Drehungen, die das entsprechende reguläre Polyeder mit sich selbst zur Deckung bringen (im Fall (1) tritt an Stelle des Polyeders das aus den Polen und den Teilpunkten des Äquators bestehende Punktsystem).

Da wir nur eine endliche Anzahl von Vierecken II_j erhalten, so entspricht einem gegebenen Wert der Variabeln z nur eine endliche Anzahl von Werten η. In diesem Fall ist daher η eine algebraische Funktion der Variabeln z und z ist eine rationale Funktion der Variabeln η.

Bezüglich der weiteren Ausführung dieser Beziehungen muß auf Kleins Werk über das Ikosaeder verwiesen werden.

Auch Dreiecke der zweiten Art gibt es nur viererlei; sie entsprechen den folgenden Werten der Zahlen λ, μ, ν:

	λ	μ	ν
1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
3)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
4)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

In diesem Fall können wir das Ausgangsdreieck Δ geradlinig annehmen und es ist dann ohne weiteres ersichtlich, daß die Dreiecke, die durch wiederholte Spiegelung aus Δ hervorgehen, die ganze η-Ebene einfach und lückenlos bedecken.

Vom Standpunkt der Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung betrachtet, bietet dieser Fall kein wesentliches Interesse.

Setzen wir nämlich die oben angegebenen Werte von λ, μ, ν in die Gleichungen (2) des § 97

$$\lambda = 1 - \gamma \quad \mu = \gamma - \alpha - \beta \quad \nu = \beta - \alpha$$

ein, so ergibt sich $\alpha = 0$. Die entsprechende Differentialgleichung zweiter Ordnung lautet:

$$w'' + \left(\frac{1-\lambda}{z} + \frac{1-\mu}{z-1}\right) w' = 0.$$

Hieraus folgt:

$$w = \text{Konst.} \int \frac{dz}{z^{1-\lambda}(z-1)^{1-\mu}}.$$

Die Funktion w ist also in diesem Fall das Integral einer algebraischen Funktion. Im Fall (1) läßt sich das Integral durch einen Logarithmus ausdrücken, in den drei übrigen Fällen läßt es sich auf ein elliptisches Integral erster Gattung zurückführen.

Wir können hierauf nicht weiter eingehen.

Zu einem wesentlich verschiedenen Ergebnis gelangen wir, wenn wir das Spiegelungsprinzip auf ein Dreieck dritter Art anwenden.

Es beruht dies darauf, daß die Seiten eines Dreiecks dritter Art einen gemeinschaftlichen Orthogonalkreis K besitzen.

Nehmen wir an irgend einem Kreis K', der zum Kreis K orthogonal ist, eine Spiegelung vor, so fällt das Spiegelbild des Kreises K mit diesem selbst zusammen. Man überzeugt sich hiervon durch die Überlegung, daß der durch Spiegelung des Kreises K erzeugte Kreis ebenfalls zum Kreis K' orthogonal ist, und daß er durch die Schnittpunkte der Kreise K und K' geht, weil jeder Punkt von K' sich selbst entspricht.

Das Spiegelbild eines Punktes im Innern des Orthogonalkreises K liegt ebenfalls im Innern dieses Kreises.

Einem jeden Kreis, der zum Orthogonalkreis K orthogonal ist, entspricht ein ebenfalls zu K orthogonaler Kreis.

Diese Verhältnisse werden unmittelbar anschaulich, wenn wir eine kreisverwandte Figur betrachten, in der dem spiegelnden Kreis K' eine Gerade entspricht.

Aus diesen Bemerkungen folgt: spiegeln wir ein Dreieck dritter Art Δ an einer seiner Seiten, so sind auch die Seiten des Spiegelbildes Δ' zum gemeinschaftlichen Orthogonalkreis K der Seiten von Δ orthogonal. Weil das Dreieck Δ im Innern des Orthogonalkreises K liegt, so gilt dasselbe für das Dreieck Δ'.

Alle Dreiecke Δ_j, Δ_j', die wir mittels des Spiegelungsverfahrens erhalten, liegen somit innerhalb des Orthogonalkreises K und ihre Seiten sind zu diesem Kreis normal.

Da im vorliegenden Fall die Anzahl der Dreiecke Δ_j, Δ_j' unendlich groß ist, so müssen unendlich viele darunter sein, die unendlich klein sind, und die Eckpunkte dieser Dreiecke — die Punkte $\omega_0^{(j)}$ $\omega_1^{(j)}$ $\omega_\infty^{(j)}$, die den Punkten 0, 1, ∞ der z-Ebene entsprechen, müssen Häufungsstellen besitzen.

Sehen wir zu, welche Schlüsse wir aus diesen geometrischen Tatsachen in Beziehung auf das Verhalten der Funktion $z = \varphi(\eta)$ ziehen können.

Wenn der dem Eckpunkt $\omega_\nu (\nu = 0, 1, \infty)$ des Dreiecks Δ anliegende Winkel von Null verschieden ist, so verhält sich die Funktion $\varphi(\eta)$ in der Umgebung dieses Punktes regulär (für $\nu = 1, 2$) oder sie besitzt in diesem Punkt einen Pol (für $\nu = \infty$) (s. § 78 Schluß).

Wenn dagegen dieser Winkel $= 0$ ist, so liegt der Punkt ω_ν auf dem Orthogonalkreis (S. 392).

Dasselbe gilt für die Punkte $\omega_\nu^{(j)}$, die zu dem Punkte ω_ν homolog sind. Daraus folgt: die Funktion $\varphi(\eta)$ besitzt im Innern des Orthogonalkreises keine wesentlich singuläre Stelle, sondern höchstens isolierte Pole. Deswegen kann im Innern des Orthogonalkreises auch keine Häufungsstelle der Punkte $\omega_\nu^{(j)}$ liegen.

Da diese Häufungsstellen sich aber auch nicht außerhalb des Orthogonalkreises befinden können, so müssen sie auf dem Orthogonalkreis liegen, und zwar müssen sie denselben dicht bedecken.

Enthielte nämlich ein beliebig kleines Stück der Peripherie des Orthogonalkreises weder einen der Punkte $\omega_i^{(\nu)}$ noch eine Häufungsstelle dieser Punkte, so könnten wir die Funktion $\varphi(\eta)$ über dieses Stück der Peripherie hinweg analytisch fortsetzen und diese Fortsetzung müßte notwendig dem Spiegelungsprinzip gemäß erfolgen. Aber dies ist aus geometrischen Gründen unmöglich.

Die Funktion $\varphi(\eta)$ kann demnach nur für die Fläche des Orthogonalkreises definiert werden; eine analytische Fortsetzung darüber hinaus ist unmöglich. Der Orthogonalkreis bildet somit für die Funktion $\varphi(\eta)$ eine natürliche Grenze (vgl. § 48).

Wir können diese interessante Theorie hier nicht weiter verfolgen.

Eine eingehende Darstellung derselben findet man in den von Fricke herausgegebenen Vorlesungen Kleins über Modulfunktionen.

Verzeichnis der bemerkten Druckfehler.

S. 69. In Fig. 6 sind die Buchstaben $\varphi_{\lambda\mu}$ und $\varphi_{\mu\lambda}$ zu vertauschen.

S. 81. In der ersten Formel l. $\lim\limits_{\vartheta=\pm\pi} \sqrt{r}\, e^{\frac{1}{2} i\vartheta}$.

S. 85. Zeile 8 v. u. l. $\vartheta = nt \pm 2\nu\pi$ statt $\vartheta = 2nt \pm 2\nu\pi$.

S. 101. Zeile 3 v. u. l. $d\zeta = R d\vartheta$ statt $d\zeta = r d\vartheta$.

S. 107. In Fig. 14 sind die Buchstaben z_1 und z_2 nicht unterhalb der Abszissenachse, sondern auf ihr anzubringen.

S. 128. In Formel (8) ist vor dem Integralzeichen der Faktor $\frac{1}{2\pi i}$ einzufügen.

S. 164. Zeile 12 v. u. l. „haben wir nur vorausgesetzt" statt nun.

S. 166. In der Gleichung Zeile 3 v. u. ist rechts $d\varrho$ durch $d\zeta$ zu ersetzen.

S. 317. In Fig. 35 ist die Pfeilrichtung umzukehren und die Indizes 1 und n sind zu vertauschen.

S. 340. In Gleichung (8) l. $+\frac{\Psi(\zeta)}{\Phi(\zeta)}$ statt $-\frac{\Psi(\zeta)}{\Phi(\zeta)}$.

S. 375. In Gleichung (6) ist rechts der Faktor $\frac{1}{\left[\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^2}$ hinzuzufügen.