MANUALI HOEPLI

ESERCIZII CRITICI
DI
CALCOLO DIFFERENZIALE
E
INTEGRALE

PER

ERNESTO PASCAL

Professore ordinario di Analisi superiore nella R. Università di Napoli.

Seconda edizione riveduta.

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA
MILANO

1909

" TECNOGRAFICA " - *Milano.*

PREFAZIONE ALLA SECONDA EDIZIONE

Nella prefazione alla prima edizione di questa opera comparsa nel 1895 io scrissi:

" È necessario dire qualche parola sullo scopo " che mi sono proposto nel comporre e pubblicare " questo volume.

" Se avessi voluto comporre solo una raccolta di " esercizii, avrei fatto cosa già stata fatta varie " volte e con gran senno da varî Autori, special- " mente dagli Autori francesi. Ma io mi sono pro- " posto uno scopo diverso.

" Si può affermare che presentemente non esista " capitolo o teorema del Calcolo infinitesimale che, " sottoposto ad una critica minuta, non abbia dato " luogo ad una serie di dubbi, discussioni, e di " nuove ricerche, alcune volte assai complicate. " Una grandissima quantità di teoremi e di proce- " dimenti, che prima si credevano generali, hanno " perduto la loro generale validità, e sono stati " circondati da molte riserve e da molte restrizioni.

" Ora può dirsi che gli studi critici di tal na- " tura sono cominciati quasi sempre colla scoperta " di esempi, pei quali quei teoremi non sussiste- " vano, ovvero quei procedimenti non potevano

" applicarsi. E del resto è naturale che sia stato
" così; perchè non vi è mezzo migliore e più convincente per persuadere della inapplicabilità generale di un dato teorema o procedimento, che
" il presentare senz'altro un esempio su cui esso
" non è applicabile; e diremmo anzi, non c'è mezzo
" più fecondo di ricerca, perchè non sono gli studi
" di questo genere quelli nei quali si può procedere con criterii e con vedute di carattere generale.

" Onde io in questo volume mi son proposto appunto principalmente questo: *di raccogliere molti*
" *di quegli esempi trovati dai vari Autori e che presentano qualche singolarità rispetto ai diversi teoremi*
" *fondamentali del Calcolo infinitesimale.*

" Con ciò credo di aver fatto un lavoro utile agli
" studiosi, tanto più che ho poi aggiunto qua e là
" numerose notizie bibliografiche, per comodo di
" quelli che volessero più profondamente penetrare
" in qualche argomento, potendosi affermare che
" non c'è quasi argomento fra quelli qui trattati,
" su cui sia stata ancora detta l'ultima parola „.

L'accoglienza che il pubblico matematico fece a questo mio lavoro fu delle più favorevoli, e fra i varii giudizii mi piace riportare quello autorevole di Cantor che lo giudicò *unico nella letteratura matematica* (.... *eine Sammlung, welche bis jetzt einzig in der Mathematische Literatur dasteht, und gewiss zahlreiche Wünsche befriedigt* .... Zeitsch. für Math. und Physik, t. XLI, 1896, p. 190).

Così questa mia Opera soddisfaceva ad un bisogno, e potea poi specialmente riuscire assai utile per quelle lezioni complementari di Calcolo infinitesimale che in molte Università si sogliono dare ai giovani iscritti per le Matematiche pure, e pei quali non può essere sempre sufficiente, nè rispondente ai fini di una più profonda cultura matematica informata a principii critici, il corso di Calcolo che essi devon seguire in comune coi giovani che si avviano alle Scuole d'ingegneria.

E a questo scopo infatti il mio libro mi è per tanti anni servito per le esercitazioni speciali agli studenti di Matematiche dell'università di Pavia. Esso è stato come un complemento utile alle *Lezioni di Calcolo infinitesimale* da me pubblicate da molti anni in due volumi, e di cui ora è in corso la terza edizione.

In questa seconda edizione io non ho creduto pertanto di mutare sostanzialmente la struttura del mio lavoro, e vi ho solamente tolto qua e là alcune cose che l'esperienza mi avea dimostrato inutili, aggiungendovene e correggendovene poi qualchedun'altra; spero così che il pubblico non vorrà fargli accoglienza meno benevola di quella già fattagli altra volta.

Napoli, febbraio del 1908.

Ernesto Pascal.

INDICE

Rappresentazione analitica e continuità delle funzioni. — Teoria dei limiti.

§. 1.

La funzione di Dirichlet. — È interessante il seguente esempio sulla rappresentazione analitica delle funzioni.

Definiamo *una funzione di x che per tutti i valori razionali di x sia zero, e sia invece eguale ad 1 per tutti i valori irrazionali di x.* Una tal funzione può rappresentarsi analiticamente nel seguente modo. Poniamo:

$$\varphi(x) = \lim_{t=0} \frac{x^2}{x^2 + t^2}.$$

Per x qualunque diverso da zero è evidente che il valore della funzione è 1, cioè:

$$\varphi(x) = 1 \qquad \left(x \lessgtr 0\right).$$

Ma per $x = 0$ il valore di $\varphi(x)$ non è più 1, perchè esso è:

$$\lim_{t=0} \frac{0}{0 + t^2}.$$

Ora la espressione:

$$\frac{0}{0+t^2}$$

è costantemente zero per ogni valore di t, quindi il suo limite per $t=0$ non può essere che zero. Onde abbiamo:

$$\varphi(0)=0.$$

Consideriamo ora l'altra funzione di x:

$$y=\lim_{n=\infty}\varphi(\operatorname{sen}(n!\,\pi\,x))$$

dove si intenda che il limite per $n=\infty$ bisogna prenderlo dando ad n valori positivi *interi* crescenti indefinitamente.

Per ogni x *razionale,* cioè della forma:

$$\frac{p}{q}$$

dove p, q sono numeri *interi,* nell'espressione:

$$n!\,\pi\frac{p}{q}$$

si potrà sempre dare ad n un tale valore, che essa risulti eguale ad un multiplo intero di π; basta perciò prendere $n>q$. Il *seno* di un tale arco sarà zero, e quindi la funzione φ, presa per un tale valore di x, e per un tale $n>q$ sarà zero, e sarà costantemente zero se si fa crescere, per quanto si voglia, il numero n; il limite della φ per $n=\infty$ non potrà dunque che essere zero, e quindi ne concludiamo che *per ogni x razionale la funzione y è zero.*

Per un x irrazionale invece il numero:

$$n!\,\pi x$$

non potrà mai essere un multiplo *intero* di π, qualunque sia il valore di n (intero) che si scelga: quindi la φ presa per un tale argomento è costantemente eguale ad 1, qualunque sia il numero n, e perciò il suo limite per $n = \infty$ non può essere che 1; cioè *per ogni x irrazionale la funzione y è eguale ad 1.*

La funzione qui considerata si suol chiamare la funzione di Dirichlet (*Crelle's Journ.* t. IV, p. 169).

§. 2.

Nella teoria dei limiti delle funzioni si dice che quando si parla di *limite* senz'altra aggiunta, s'intende sempre che la variabile indipendente si avvicini al suo valore limite *in una maniera arbitraria.*

Sia a il valore limite della variabile indipendente x. Potrà accadere però che non esista il limite in questo senso così generale, ma che invece esso esista quando si fa percorrere alla variabile x un cammino *determinato,* per esempio, quando si stabilisca che x debba giungere ad a percorrendo *saltuariamente* tutti i punti di un gruppo di punti di cui a sia un *punto limite.*

Un esempio di ciò lo possiamo trovare nella seguente funzione:

$$y = \operatorname{sen} \frac{1}{x-a}.$$

Per ogni valore di x diverso da a il valore di y è perfettamente determinato, ma è invece *indeterminato* per $x = a$, e non esiste neanche il limite dei valori di y per $x = a$ *se x si avvicina ad a in un modo arbitrario;* giacchè prendendo x vicino per quanto si voglia ad a, la funzione y oscilla continuamente fra i due valori -1 e $+1$.

Invece facciamo percorrere ad x il gruppo dei punti del tipo:

$$a + \frac{1}{\alpha + 2n\pi} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Variando n si hanno infiniti punti x, prossimi per quanto si vuole al punto a, cioè a è un punto limite di tal gruppo di punti.

Ora per ogni x di tal forma la y ha per valore $\operatorname{sen} \alpha$; dunque il suo limite per $n = \infty$ cioè per $x = a$ sarà $\operatorname{sen} \alpha$.

§. 3.

Sia y funzione di x, ed esista il limite A di y per $x = a$. Quando x si avvicina ad a, y tenderà ad A; però il modo di tendere di y ad A può essere di varie specie. Il caso più ovvio è che y si avvicini indefinitivamente al valore A; ma può anche accadere che y si avvicini e allontani alternativamente infinite volte da A e anche che raggiunga infinite volte il valore A prima che x abbia raggiunto il valore a.

È notevole il seguente esempio:

$$y = A + \frac{1}{2x} \cos \frac{\pi x}{2}.$$

Consideriamo il limite di y per $x = \infty$.

Essendo $\cos \frac{\pi x}{2}$, per qualunque valore di x, sempre compreso fra -1 e $+1$, la quantità:

$$\frac{1}{2^x} \cos \frac{\pi x}{2}$$

per x crescente, diminuisce costantemente, e acquista valori alternativamente positivi e negativi passando anche per infiniti valori zero.

Per x fra zero e 1, quella quantità è compresa fra $+1$ e zero, e per x fra 1 e 2 quella quantità è compresa fra zero e $-\frac{1}{4}$, fra i quali medesimi limiti è compresa per x fra 2 e 3, mentre per x fra 3 e 4, esso torna ad avere valori positivi e propriamente resta compresa fra 0 e $+\frac{1}{16}$; e così di seguito.

Restringendosi dunque continuamente i limiti positivi e negativi fra i quali resta compreso il secondo termine della espressione di y, ne concludiamo che il limite di y per $x = \infty$ è A; ma questo stesso valore A, la y lo raggiunge anche infinite volte prima che x raggiunga il suo valore limite.

§. 4.

Se $f(x+1) - f(x)$ tende ad un limite determinato A quando x tende all'infinito, e se $f(x)$ è sempre finita per ogni x finito, diventando solo ∞ per $x = \infty$, si avrà:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

Per la definizione di limite si ha che, per le fatte ipotesi, dato un numero σ piccolo a piacere, deve potersi trovare un punto x' tale che per ogni $x_1 > x'$ sia in valore assoluto:

$$|A - [f(x_1 + 1) - f(x_1)]| < \sigma$$

e quindi anche:

$$|A - [f(x_1 + 2) - f(x_1 + 1)]| < \sigma$$
$$|A - [f(x_1 + 3) - f(x_1 + 2)]| < \sigma$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|A - [f(x_1 + n) - f(x_1 + n - 1)]| < \sigma$$

donde:

$$|n A - [f(x_1 + n) - f(x_1)]| < n \sigma$$

e quindi:

$$\left| \frac{f(x_1 + n) - f(x_1)}{n} - A \right| < \sigma.$$

Poniamo ora $x_1 + n = x$; lasciando fisso x_1 e facendo variare n, la x varierà sino all'infinito.

La formola di sopra diventa allora:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = A \right| < \sigma$$

ed essendo $f(x_1)$ sempre finita qualunque sia x_1 finito, e non alterandosi il limite del rapporto di due *infiniti* quando ad essi si aggiungano rispettivamente *infiniti* di ordine minore o in particolare quantità finite, ne ricaviamo che il limite di:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

è lo stesso del limite di:

$$\frac{f(x)}{x}.$$

Ma per la relazione di sopra il primo limite è A, dunque resta dimostrato l'assunto.

Osserviamo che in questa dimostrazione, fissato il numero x_1, la variabile x non può variare con continuità perchè n deve essere un numero *intero*. Se x_1 resta fisso, x non può raggiungere qualunque valore, ma tende all'infinito percorrendo il gruppo di punti della forma:

$$x = x_1 + n \qquad (n = \text{intero}).$$

Quindi in fondo si è riusciti a dimostrare che si ha:

$$\lim \frac{f(x)}{x} = A,$$

quando x percorre tutti i punti del gruppo soprasegnato, dove però x_1 è un numero *arbitrario*.

Ma non è difficile completare la dimostrazione, e far vedere che lo stesso limite ha la espressione $\frac{f(x)}{x}$ qualunque sia il modo col quale x tenda all'infinito.

Infatti supponiamo dato σ piccolo a piacere; allora la dimostrazione precedente dice che si può trovare un valore x' tale che scelto arbitrariamente $x_1 > x'$ sia sempre:

$$\frac{f(x)}{x} - A < \sigma$$

per ogni x della forma $x = x_1 + n$ ($n =$ intero).

Fissiamo uno qualunque degli x di questa forma, e consideriamo un *qualunque* altro valore y, maggiore di un tale x.

Sarà $y - n = y_1$ maggiore di x', e quindi, per la relazione di sopra, sarà:

$$\frac{f(y)}{y} - A < \sigma$$

supposto di scegliere per il valore arbitrario x_1 proprio il valore y_1.

La precedente relazione, dove y è arbitrario, dimostra il nostro assunto.

Si può osservare che può dimostrarsi lo stesso teorema anche per il caso in cui $A = \infty$.

Abbiamo messa la condizione che $f(x)$ sia sempre finita per ogni x finito. Per mostrare le opportunità di questa condizione consideriamo la funzione:

$$f(x) = tg\, \pi x,$$

la quale non soddisfa a questa proprietà. La espressione:

$$f(x+1) - f(x) = \operatorname{tg} \pi (x+1) - \operatorname{tg} \pi x = 0$$

e quindi il suo limite per $x = \infty$ è zero; eppure è facile vedere che $\frac{\operatorname{tg} \pi x}{x}$ non converge ad alcun limite.

Osserviamo inoltre che, mentre l'esistenza del limite di:

$$f(x+1) - f(x)$$

porta con sè quella del limite di $\frac{f(x)}{x}$, non si ha il reciproco.

Così, p. es., per la funzione:

$$f(x) = \operatorname{sen} \pi x$$

esiste il secondo limite, ed è zero, e il primo non esiste.

Dal teorema dimostrato se ne può ricavare subito un altro.

Si abbia una funzione $f(x)$ diversa da zero e da infinito per ogni valore finito di x maggiore di una quantità fissata, e che sia zero o infinita solo per $x = \infty$, e sia:

$$\lim_{x=\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = A;$$

sarà allora anche:

$$\lim_{x=\infty} \sqrt[x]{f(x)} = A.$$

Infatti ponendo:

$$\log f(x) = \varphi(x),$$

la funzione $\varphi(x)$ non sarà infinita per alcun valore finito di x, e inoltre, per le ipotesi fatte, per essa esiste il limite:

$$\lim [\varphi(x+1) - \varphi(x)] = \lim \log \frac{f(x+1)}{f(x)} = \log A.$$

Applicando dunque il teorema dimostrato possiamo dire che:

$$\lim \frac{\varphi(x)}{x} = \lim \frac{\log f(x)}{x} =$$

$$= \lim \log \sqrt[x]{f(x)} = \log A$$

cioè:

$$\lim \sqrt[x]{f(x)} = A.$$

Vogliamo osservare che questi teoremi ci riconducono a teoremi noti nella teoria delle serie.

Si abbia una successione di quantità:

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$$

in numero infinito.

Formiamo, mediante questa, l'altra successione:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Per ogni valore di n è stabilito il valore di a_n e di s_n; quindi queste quantità possono considerarsi funzioni di n.

Applicando il primo teorema alla successione delle quantità s, abbiamo che, *se esiste*:

$$\lim (s_{n+1} - s_n) = \lim a_{n+1} = \lim a_n$$

esso sarà eguale a:

$$\lim \frac{s_n}{n},$$

cioè:

$$\lim a_n = \lim \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

purchè esista il primo limite.

Formiamo ancora la successione:

$$p_1 = a_1$$
$$p_2 = a_1\, a_2$$
$$p_3 = a_1\, a_2\, a_3$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$p_n = a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_n$$

e applichiamovi il secondo teorema; abbiamo che *se esiste*:

$$\lim \frac{p_n}{p_{n-1}}$$

sarà:

$$\lim \sqrt[n]{p_n} = \sqrt[n]{a_1\, a_2 \ldots a_n} = \lim a_n.$$

Applichiamo infine il primo teorema alla successione dei numeri a; e abbiamo che *se esiste*:

$$\lim \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

sarà:

$$\lim \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim \sqrt[n]{a_n}\ .$$

§. 5.

Si voglia trovare la forma più generale di una funzione continua di una variabile, che resti finita per ogni valore della variabile, e che soddisfi sempre alla relazione:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

dove x, y sieno due qualunque valori della variabile.

Ponendo $y = 0$ si ricava:

$$f(x) = f(x) + f(0)$$

donde prima di tutto:

$$f(0) = 0.$$

Inoltre si può far vedere che la funzione cercata deve essere una funzione *dispari*, cioè che muta di segno col mutare di segno dell'argomento. Infatti poniamo $y = -x$; e allora si ha:

$$0 = f(x) + f(-x)$$

donde:

$$f(-x) = -f(x).$$

Infine la funzione f deve soddisfare alla relazione:

$$f(nx) = nf(x) \qquad (n = \text{intero posit. o neg.}).$$

Giacchè evidentemente:

$$f(2x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$$
$$f(3x) = f(2x+x) = 2f(x) + f(x) = 3f(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f(-nx) = -f(nx) = -nf(x).$$

Una simile relazione vale anche se n è un numero frazionario.

Infatti, ponendo $nx = y$ si ha la relazione:

$$f\left(\frac{y}{n}\right) = \frac{1}{n} f(y)$$

che dà ancora, unita alla precedente,

$$f\left(\frac{m}{n} y\right) = m f\left(\frac{y}{n}\right) = \frac{m}{n} f(y) \cdot$$

Ponendo:

$$f(1) = a,$$

si ha dunque in generale:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a\,\frac{m}{n}$$

se $\frac{m}{n}$ è un numero *razionale*.

La richiesta funzione ha dunque per valore:

$$f(x) = a\,x$$

in ogni punto x razionale. Dovendo intanto essere una funzione *continua*, il suo valore sarà sempre dato dall'espressione $a\,x$.

Concludiamo perciò che la sola funzione continua soddisfacente alla relazione:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

è la funzione *lineare*:

$$f(x) = a\,x$$

dove a è costante.

§. 6.

Si voglia trovare la funzione continua più generale soddisfacente alla relazione:

$$f(x+y) = f(x)\,f(y).$$

Prendendo i logaritmi in base A di ambo i membri abbiamo:

$$\log_A f(x+y) = \log_A f(x) + \log_A f(y)$$

e ponendo in generale:

$$\log_A f(x) = \varphi(x)$$

cioè:

$$A^{\varphi(x)} = f(x)$$

si ha:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

e quindi per l'esercizio del §. 5 si ha che:

$$\varphi(x) = a\,x,$$

donde:

$$f(x) = A^{\varphi(x)} = A^{a\,x}.$$

§. 7.

Si voglia trovare la funzione continua più generale soddisfacente alla relazione:

$$f(x\,y) = f(x) + f(y).$$

Poniamo:

$$x = a^X.$$

Allora la funzione di x diventerà una funzione di X, e si avrà:

$$f(a^X a^Y) = f(a^X) + f(a^Y).$$

Ponendo in generale:

$$f(x) = f(a^X) = \varphi(X) = \varphi(\log_a x)$$

si ha:

$$\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y),$$

donde in virtù dell'esercizio del §. 5, si ha:

$$f(x) = \varphi(X) = A\,X = A\log_a x.$$

Dunque *la funzione più generale richiesta è la funzione logaritmica.*

Coi principii del Calcolo integrale i risultati di questo e dei §§. precedenti potrebbero trovarsi più speditamente, ma meno elementarmente.

§. 8.

Se $f(x)$ tende ad un limite finito per $x = \infty$, qual'è il limite di:

$$\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^x$$

per $x = \infty$?

Si sa che:

$$\lim_{x=\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a,$$

ma in questa formola, a si suppone una quantita fissa, non variabile con x.

Che cosa possiamo conchiudere, quando a è una funzione di x avente un limite determinato per $x = \infty$?

Poniamo:

$$x = y\, f(x),$$

dove y sia la nuova variabile da sostituire ad x. Per $x = \infty$ anche y diventa infinito, perchè, per ipotesi, $f(x)$ tende ad una quantità finita. Allora possiamo scrivere:

$$\left(1 + \frac{f(x)}{x}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y\, f(x)} = \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right]^{f(x)}$$

e, passando al limite per $x = \infty$, $y = \infty$, si ha:

$$e^{\lim f(x)}.$$

Dunque infine:

$$\lim_{x=\infty}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^x = e^{\lim f(x)}$$

§. 9.

Se $f(x)$ ha un limite determinato e finito per $x=\infty$, trovare il limite di:

$$x\left(\sqrt[x]{f(x)}-1\right).$$

Poniamo:

$$y = x\left(\sqrt[x]{f(x)}-1\right)$$

donde:

$$f(x) = \left(1+\frac{y}{x}\right)^x.$$

Di qui si ha:

$$\lim f(x) = e^{\lim y}$$

e quindi:

$$\lim y = \log_e \lim f(x).$$

Si può osservare qui che basta supporre l'esistenza del limite di $f(x)$ per dedurre l'esistenza del limite di y; perchè, se y non ammettesse limite, ma oscillasse fra limiti determinati e finiti, allora, ripetendo il ragionamento del §. precedente, se ne dedurrebbe che neanche $f(x)$ ammetterebbe un limite, contro l'ipotesi.

§. 10.

Qual'è il limite di $\dfrac{\log(n)}{n}$ *per* $n=\infty$?

In virtù del risultato del §. 4 possiamo scrivere:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log(n)}{n} = \lim_{n=\infty} [\log(n+1) - \log(n)]$$

$$= \lim_{n=\infty} \log \frac{n+1}{n}$$

$$= \lim_{n=\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

§. 11.

Trovare il limite di:

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n}$$

per $n = \infty$.

Poniamo:

$$\varphi(n) = \frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n}{n^n}$$

per modo che:

$$\sqrt[n]{\varphi(n)} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{1 \,.\, 2 \ldots n}.$$

Consideriamo il rapporto:

$$\frac{\varphi(n)}{\varphi(n-1)} = \frac{n!(n-1)^{n-1}}{(n-1)!\, n^n} = \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-1}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

Per $n = \infty$ si ha:

$$\lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = e^{-1}$$

onde possiamo conchiudere, per un teorema del

§. 4 che si ha anche:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\varphi(n)} = \frac{1}{e}$$

e con ciò resta trovato il limite richiesto.

In maniera simile si può trovare che:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots 2n} = \frac{4}{e}\,.$$

§. 12.

Trovare il limite di:

$$\frac{\varphi(n)}{\psi(n)} = \frac{1^r + 2^r + \dots + n^r}{n^{r+1}}$$

per $n=\infty$, *supposto che* $r+1$ *sia positivo.*

Si può dimostrare che, se esiste il limite di:

$$\frac{\varphi(n) - \varphi(n-1)}{\psi(n) - \psi(n-1)}$$

esisterà anche quello di:

$$\frac{\varphi(n)}{\psi(n)}$$

e sarà ad esso uguale.

Applicando dunque questo principio, si ha che il limite richiesto è eguale a:

$$\lim \frac{\varphi(n) - \varphi(n-1)}{\psi(n) - \psi(n-1)} = \lim \frac{n^r}{n^{r+1} - (n-1)^{r+1}} =$$

$$= \lim \frac{1}{n\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r+1}\right)}$$

$$= \lim \frac{1}{r+1 - \frac{(r+1)_2}{n} + \frac{(r+1)_3}{n^2} - \dots} = \frac{1}{r+1}\,.$$

Se $r+1$ non è un numero positivo, allora si può far vedere che il limite di cui si parla è l'infinito.

§. 13.

Si voglia trovare il limite:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log(1+n\,x)}{n}.$$

Consideriamo la differenza:

$$\log(1+n\,x) - \log(1+(n-1)\,x)$$

$$= \log \frac{1+n\,x}{1+(n-1)\,x} = \log \frac{\frac{1}{n}+x}{\frac{1}{n}+\left(1-\frac{1}{n}\right)x}.$$

Il limite di questa quantità per $n=\infty$ è log 1 cioè zero, dunque, in forza del teorema del §. 4, si ha che:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log(1+n\,x)}{n} = 0.$$

§. 14.

Si voglia trovare il limite:

$$\lim_{n=\infty} n\,e^{-nx^2}$$

dove x sia diverso da zero.

Anche qui possiamo applicare lo stesso teorema applicato nel §. precedente.

Consideriamo il limite di:

$$e^{nx^2} - e^{(n-1)x^2} = e^{nx^2}(1-e^{-x^2}).$$

Per $n = \infty$ il limite di questa quantità è evidentemente l'infinito, dunque il limite di:

$$\frac{e^{nx^2}}{n}$$

sarà l'infinito, e perciò:

$$\lim_{n=\infty} n\, e^{-nx^2} = 0.$$

§. 15.

Vogliamo dare l'esempio di una funzione per la quale esistono i due limiti, a destra e a sinistra rispetto a un certo punto, ma tali due limiti sono fra loro disuguali.

Si abbia la funzione:

$$f(x) = \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{e^{\operatorname{tg} x} + 1}.$$

Per $x = \frac{\pi}{2}$ il valore della funzione si presenta sotto la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Esaminiamo il limite a destra della funzione nel punto $\frac{\pi}{2}$. Supponiamo dato ad x, prima un valore maggiore di $\frac{\pi}{2}$, e poi facciamo decrescere questo valore. Allora $\operatorname{tg} x$ è negativo, ed $e^{\operatorname{tg} x}$ decresce indefinitamente e tende a zero; il valore della funzione tende dunque alla quantità -1.

Diamo invece ad x un valore minore di $\frac{\pi}{2}$ e facciamo poi crescere tal valore; il valore di $\operatorname{tg} x$ cresce verso l'infinito positivo. Scrivendo l'espressione della funzione sotto la forma:

$$\frac{1 - e^{-\operatorname{tg} x}}{1 + e^{-\operatorname{tg} x}}$$

si vede che, tendendo $e^{-\operatorname{tg} x}$ a zero, il valore della funzione tende a $+1$. È utile per esercizio costruire la curva che rappresenta geometricamente questa funzione.

§. 16.

Vogliamo ancora studiare l'andamento della funzione:

$$f(x) = \lim_{t=\infty} \frac{(1 + \operatorname{sen} \pi x)^t - 1}{(1 + \operatorname{sen} \pi x)^t + 1}\,.$$

Per ogni $x = 0, 1, 2, \ldots$ si ha $\operatorname{sen} \pi x = 0$, e quindi $f(x) = 0$. Per un valore di x fra 0 e 1, il $\operatorname{sen} \pi x$ è positivo ed è compreso fra 0 e 1, escluso il primo di questi valori estremi. Allora $1 + \operatorname{sen} \pi x$ è sempre maggiore di 1, e quindi si vede subito che per ogni siffatto x, la $f(x) = +1$.

Invece, per ogni x compreso fra 1 e 2, $\operatorname{sen} \pi x$ è sempre negativo, e $1 + \operatorname{sen} \pi x$ è sempre minore di 1, e quindi $f(x) = -1$. Dunque la funzione data, nei punti $x = 0, 1, 2, \ldots$ è discontinua; il suo valore in tali punti è zero, il suo limite da una parte è $+1$, e il suo limite dall' altra parte è -1. In ogni altro punto è una funzione continua. Sarà un utile esercizio eseguire la rappresentazione geometrica di questa funzione.

§. 17.

Sappiamo che la funzione esponenziale e^x si può considerare come il limite di una funzione algebrica:

$$\lim_{n=\infty} 1 + \frac{x}{n}^{\;n}.$$

Nella stessa maniera possiamo facilmente rappresentare anche la funzione inversa di e^x, cioè la funzione logaritmica $\log_e x$, come il limite di un'altra funzione algebrica, e propriamente:

$$\lim_{n=\infty} n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right).$$

Poniamo infatti:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = y$$

donde:

$$y^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{x}{n}$$

$$n\left(y^{\frac{1}{n}} - 1\right) = x.$$

Quando n converge all' infinito, y diventa e^x, e quindi x diventa $\log_e y$; passando al limite per $n = \infty$, possiamo dire:

$$\lim_{n=\infty} n\left(e^{\frac{x}{n}} - 1\right) = x$$

o anche:

$$\lim n\left(y^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \log y.$$

§. 18.

Una funzione di *due* variabili $x_1\ x_2$, è continua in un punto $(x_1^0\ x_2^0)$, quando il valore della funzione in quel punto è eguale al limite dei valori della funzione, avvicinandosi a quel punto in qualunque *maniera*.

Si noti che le maniere di avvicinarsi al punto possono essere di varie specie; così si può immaginare che si percorra un tratto di curva che vada a finire nel punto, e si può immaginare anche che si percorra una curva p. es. a forma di spirale attorno al punto in quistione, cui perciò ci avvicineremo indefinitamente senza poterlo mai raggiungere, o anche si può immaginare un'altra qualunque specie di movimento che si faccia indefinitivamente avvicinare al punto in quistione.

Non si può conchiudere che la funzione è *continua* se, avvicinandosi al punto solo mediante qualunque retta passante per il punto, si trova che il limite della funzione è sempre il medesimo.

Molto meno quindi può conchiudersi che una funzione di due variabili $x_1\ x_2$, è continua in un punto, o anche che esiste il suo limite in un punto, se tal limite esiste ed è lo stesso immaginando la variabilità solo della variabile x_1 o solo della variabile x_2; in altri termini non si può dire che è continua una funzione di una o più variabili se è continua considerandola separatamente come funzione di ciascuna delle variabili.

Diamo alcuni esempi.

Consideriamo la funzione:

$$f(x_1\ x_2) = \frac{x_1\ x_2}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Per $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ questa funzione non ha alcun valore determinato; attribuiamole il valore zero. È facile allora vedere che, dato ad x_2 un valore fisso, la funzione di x_1 che si viene a ottenere è una funzione continua anche per $x_1 = 0$. Se poniamo $x_2 = 0$ si ha una funzione di x_1 costantemente zero, e che, per le ipotesi fatte, resta zero anche per $x_1 = 0$; cioè possiamo dire che si ha una funzione continua di x_1; e così si avrebbe una funzione continua di sola x_2; eppure può farsi vedere che la f, considerata come funzione di ambo le variabili, non è continua nel punto (0, 0), cioè che il suo limite per $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ non è zero. Giacchè supponiamo x_1 x_2 piccolissimi, e scriviamo la funzione sotto la forma:

$$\frac{1}{\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}}.$$

Avviciniamoci al punto (0, 0) lungo la retta di equazione:

$$\frac{x_1}{x_2} = a$$

essendo a qualunque. Allora il valore della funzione sarà costantemente:

$$\frac{1}{a + \dfrac{1}{a}} = \frac{a}{a^2 + 1}$$

e quindi il suo limite sarà dato da questa stessa espressione.

Dando dunque ad a un valore diverso si ha un limite diverso e quindi la funzione non è continua nel punto $(0, 0)$. Dando ad a i valori zero e ∞ si ha sempre per la funzione il valore zero; dando il valore 1 ad a, si ha pel limite il valore $\frac{1}{2}$, e dando il valore -1 si ha il valore $-\frac{1}{2}$.

Tutti gli altri valori sono compresi fra:

$$-\frac{1}{2} \text{ e } + \frac{1}{2}.$$

§. 19.

Diamo un altro esempio di funzione di due variabili, continua rispetto a ciascuna presa separatamente, ma non continua rispetto al complesso delle due variabili.

Indichiamo con:

$$I\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \psi(x)$$

il più grande intero contenuto in $\frac{1}{1+x^2}$. Evidentemente allora per ogni x positivo o negativo (reale), essendo la frazione $\frac{1}{1+x^2}$ minore di 1, il valore di I è zero: invece è eguale ad 1 per $x = 0$.

Formiamo:

$$f(x_1 \, x_2) = \text{sen} \left[\text{arc tg} \frac{x_2 (1 - \psi(x_1))}{x_1 + \psi(x_1)} \right].$$

Per $x_1 = x_2 = 0$ si ha $f(0, 0) = 0$, e inoltre per x_1 qualunque e $x_2 = 0$ si ha $f(x_1 \, 0) = 0$, e per $x_1 = 0$ e x_2 qualunque si ha anche $f(0 \, x_2) = 0$. Quindi possiamo dire che le due funzioni $f(x_1\,0)$, $f(0\,x_2)$ sono due funzioni rispettivamente di x_1, x_2 continue nel punto 0; ma la $f(x_1\,x_2)$ non è continua nello stesso punto. Giacchè la differenza:

$$f(x_1\,x_2) - f(0\,0) = \operatorname{sen}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{x_2}{x_1}\right]$$

non converge a zero, perchè converge ad una quantità dipendente dal modo con cui $x_1\,x_2$ si fanno contemporaneamente convergere a zero. Così, se il punto di coordinate $x_1\,x_2$ lo facciamo muovere su di una retta di equazione:

$$\frac{x_2}{x_1} = a$$

quella differenza converge alla quantità:

$$\operatorname{sen}\,[\operatorname{arc\,tg}\,a].$$

§. 20.

Diamo ancora un esempio di funzione di due variabili, per la quale esiste, ed è sempre il medesimo, il limite avvicinandosi al punto limite in qualunque direzione, eppure la funzione non è continua, perchè per essere tale dovrebbe esistere il limite ed essere lo stesso non solo avvicinandosi al punto limite in qualunque *direzione*, ma più generalmente in qualunque *maniera*.

Consideriamo la funzione semplicissima:

$$f(x_1\,x_2) = \frac{x_1\,x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$$

che possiamo scrivere:

$$= \frac{x_2}{\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}\, x_2^2}.$$

Avviciniamoci al punto $(0,0)$ percorrendo una qualunque retta partente da quel punto, cioè una retta di equazione:

$$\frac{x_1}{x_2} = a.$$

Per ogni punto di una tal retta il valore della funzione è:

$$\frac{x_2}{a + \dfrac{x_2^2}{a}} = \frac{1}{\dfrac{a}{x_2} + \dfrac{x_2}{a}}$$

e per il punto $(0,0)$ il suo valore limite è zero qualunque sia il valore di a.

Però per la funzione data di due variabili non esiste il limite pel punto $(0,0)$, cioè non esiste il limite facendo avvicinare il punto (x_1, x_2) al punto $(0,0)$ in un'altra qualunque *maniera*. Giacchè p. es., poniamo fra $x_1\, x_2$ la relazione:

$$x_1 = x_2 \operatorname{sen} \frac{1}{x_2},$$

colla quale effettivamente possiamo avvicinarci al punto $(0,0)$ perchè per $x_2 = 0$ il limite di x_1 è anche zero.

Ora con questa relazione fra $x_1\ x_2$ il limite della funzione è il limite di:

$$\frac{1}{\dfrac{1}{x_2} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{x_2} \operatorname{sen} \dfrac{1}{x_2}}} = x_2 \operatorname{sen} \frac{1}{x_2} \left[\frac{1}{\operatorname{sen}^2 \dfrac{1}{x_2} + x_2^2} \right]$$

il quale limite non esiste.

Se invece facciamo percorrere al punto la parabola $x_2^2 = x_1$, la f ha costantemente il valore $\frac{1}{2}$, e quindi tale è anche il suo limite per $x_1 = x_2 = 0$.

Da questo esempio risulta che il limite della funzione di due variabili può essere diverso anche avvicinandosi al punto limite secondo due curve diverse ma aventi la medesima tangente.

§. 21.

Un altro esempio simile al precedente lo possiamo avere nella funzione che per x_2 diversa da zero è:

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^{\alpha}}{x_2^{\beta}} \qquad (\beta < \alpha)$$

e per $x_2 = 0$ è sempre zero.

Avvicinandosi al punto $(0, 0)$ in qualunque direzione, si ha sempre per limite zero, perchè se questa direzione è quella della retta $x_2 = 0$, il valore della funzione è allora per ipotesi sempre zero, e quindi è zero anche il suo limite; e se invece questa direzione è quella della retta:

$$\frac{x_1}{x_2} = a \qquad (a \neq \infty)$$

si ha:

$$f = a^{\beta}\, x_1^{\alpha - \beta}$$

e questa funzione di x_1 ha per limite zero nel punto $x_1 = 0$. Però la funzione data, considerata come funzione di due variabili *non* è continua nel punto $(0, 0)$.

Infatti facciamo con continuità avvicinare il punto $(x_1\, x_2)$ al punto $(0, 0)$ seguendo la curva di equazione:

$$\frac{x_2}{x_1} = \operatorname{sen} \frac{1}{x_1}.$$

La f diventa:

$$f = x_1^{\,\alpha-\beta} \frac{1}{\operatorname{sen}^\beta \frac{1}{x_1}}$$

e per $x_1 = 0$ non ha alcun limite determinato.

Avvicinandosi invece per la curva $x_2 = x_1^{\,\gamma}$ dove sia $\gamma\, \beta > \alpha$, la f ha per limite l'infinito.

§. 22.

Consideriamo il seguente altro esempio:

$$f(x, y) = \frac{xy}{(1+y)^x}$$

dove y sia sempre compresa fra 0 e 1:

$$o \leq y \leq 1.$$

Per $x = \infty$ il limite di f è zero, se y si suppone fissa, qualunque del resto sia il valore che gli si dia fra 0 e 1.

Invece se si pone:

$$y = \frac{1}{x}$$

colla quale apposizione, y resta anche sempre compresa fra zero e 1 (supposto $x \geq 1$), allora il limite di f è $\frac{1}{e}$ diverso da zero.

Così l'altra funzione:

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{1 + x^3 y^3}$$

dove y sia ancora compreso fra 0 e 1, ha ancora per limite zero per $x = +\infty$; ma se y si suppone variabile con x e si pone:

$$y = \frac{1}{x}$$

allora il limite di $f(x\, y)$ diventa $+\infty$ per $x = \infty$.

Questi esempi mostrano che, avvicinandosi al punto all'infinito sull'asse delle x, seguendo l'asse delle x stesso, ovvero il ramo di iperbole avente per assintoto quell'asse, si può avere un valore diverso per il limite della funzione.

§. 23.

Nel seguente esempio:

$$f(x, y) = \frac{x + (x + y)^2}{2\,x + y - (x + y)^2}$$

se si fa tendere a zero prima x e poi y si ha per valore del limite, zero; se prima y e poi x, si ha per valore del limite, $\frac{1}{2}$, e finalmente se si fanno tendere x, y a zero, in modo però che il limite del loro rapporto sia α (qualunque), cioè se si pone $y = \alpha\, x$, e poi si fa tendere x a zero si ha per limite $\frac{1}{2 + \alpha}$.

§. 24.

È interessante la seguente osservazione sulla continuità delle funzioni di una sola variabile.

Si sa che se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo da a a b e se $A = f(a)$ e $B = f(b)$ sono due valori diversi fra loro, essa prende nell'interno dell'intervallo almeno una volta tutti i valori compresi fra A e B. Ora il teorema reciproco a questo non è vero; vi possono cioè essere delle funzioni che, divenendo rispettivamente A e B per $x = a$, e $x = b$, soddisfanno alla proprietà di assumere nell'intervallo da a a b tutti i valori intermedi fra A e B, eppure sono funzioni discontinue.

Esempio semplicissimo di ciò è la funzione che per x diverso da zero è data da:

$$y = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

ed è zero per $x = 0$. Questa funzione è naturalmente *discontinua* nel punto $x = 0$, eppure in un qualunque intorno comprendente il punto zero essa prende tutti i valori fra -1 e $+1$.

§. 25.

Parità e disparità delle funzioni. Una funzione reale di una variabile reale x, si dice *pari* se mutando x in $-x$ il suo valore resta immutato, e si dice *dispari* se invece collo stesso mutamento, il suo valore resta cambiato di segno. Della prima specie è la funzione $\cos x$, e della seconda specie è la funzione sen x. Vi sono invece funzioni che non sono nè pari nè dispari, p. es., la funzione e^x. Mutando in questa x in $-x$ la funzione per un x qualunque non resta inalterata nel suo valore assoluto, ma resta cambiata di valore.

É facile però far vedere che ogni funzione può sempre comporsi come somma di due funzioni una pari e una dispari.

Immaginiamo una funzione definita in tutto un campo da $x = -a$ sino a $x = +a$; e sia $f(x)$.

Evidentemente la funzione:

$$f(x) + f(-x)$$

è una funzione pari perchè resta inalterata collo scambio di x in $-x$; e analogamente:

$$f(x) - f(-x)$$

è una funzione dispari. Chiamandole rispettivamente $\varphi(x), \psi(x)$ si ha:

$$f(x) = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x)].$$

Una funzione razionale *pari* non può essere che una funzione di x^2, e una funzione razionale *dispari* non può essere che il prodotto di x per una funzione di x^2, giacchè il suo quoziente con x deve essere una funzione pari.

INFINITESIMI.

§. 26.

Sappiamo che una somma di infiniti infinitesimi può essere una quantità finita. Diamo un esempio di ciò.

Vogliamo considerare il limite della somma:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^2}+\ldots+\frac{x}{x^2}.$$

Ciascuno dei termini di questa somma è un infinitesimo per $x=\infty$, ma il limite della loro somma è diverso da zero.

Infatti quella somma è uguale a:

$$\frac{1}{x^2}(1+2+3+\ldots+x)=$$

$$=\frac{1}{x^2}\,\frac{x(x+1)}{2}=\frac{1}{2}+\frac{x}{2x^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}.$$

Per $x=\infty$ il limite della somma è dunque $\frac{1}{2}$.

§. 27.

Si sa una condizione *sufficiente* perchè una somma di infiniti infinitesimi sia essa stessa un infinitesimo, cioè tenda a zero, donde poi risulta una condizione sufficiente perchè il limite di una somma di infiniti infinitesimi non resti alterato sostituendo a questi, altri infinitesimi che differiscano dai dati rispettivamente per infinitesimi di ordine superiore.

Si sa che basta che le differenze fra i primi e i secondi infinitesimi non solo sieno infinitesimi di ordine superiore rispetto ai primi, ma sieno *uniformemente* di ordine superiore.

Mostriamo un esempio in cui non verificandosi questa condizione, non si verifica neanche il teorema di cui parliamo, cioè il cosidetto *teorema della sostituzione di infinitesimi.*

Consideriamo la somma:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n ,$$

dove in generale sia:

$$\alpha_p = \frac{1}{n} ,$$

e l'altra somma:

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n ,$$

dove sia in generale:

$$\beta_p = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{p}{n}\right).$$

Per $n = \infty$ tutti gli α e tutti i β sono infinitesimi, cioè tendono a zero.

La differenza fra α_p e β_p cioè:

$$\varepsilon_p = \beta_p - \alpha_p = \frac{p}{n^2}$$

è un infinitesimo di ordine superiore rispetto ad α_p, β_p che sono infinitesimi del medesimo ordine, perchè infatti il loro rapporto è dato da:

$$\frac{\beta_p}{\alpha_p} = 1 + \frac{p}{n}$$

e quindi tende ad una quantità finita:

$$\lim \frac{\beta_p}{\alpha_p} = 1.$$

Però gli infinitesimi $\varepsilon_p = \beta_d - \alpha_p$, pure essendo di ordine superiore rispetto ad α_p, non sono uniformemente di ordine superiore, perchè i rapporti:

$$\frac{\varepsilon_p}{\alpha_p} = \frac{p}{n}$$

non sono infinitesimi equiconvergenti a zero; data infatti una quantità piccola a piacere σ, qualunque sia il numero n grande finchè si vuole, si potrà sempre scegliere l'indice p in modo che sia:

$$\frac{p}{n} > \sigma.$$

La somma degli infinitesimi β_p non è sostituibile a quella degli infinitesimi α_p. Ed infatti la somma degli α_p è uguale a 1, e la somma dei β_p è:

$$\Sigma \beta_p = 1 + \frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$

$$= 1 + \frac{n(n+1)}{2n^2} = 1 + \frac{n+1}{2n}$$

e quindi i limiti delle due somme sono rispettivamente 1 e $\frac{3}{2}$.

§. 28.

Del resto per la validità del teorema di sostituzione degli infinitesimi, la condizione di cui abbiamo parlato nel numero precedente, è solo una condizione sufficiente, come abbiamo già avvertito, e non una condizione necessaria. Mostriamo infatti un esempio in cui, pure non verificandosi quella condizione, il teorema però resta valido.

Consideriamo le seguenti somme di infinitesimi:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n$$

dove:

$$\alpha_p = \frac{1}{n}$$

e:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$$

dove:

$$\gamma_p = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

Il limite della somma delle α è 1, e il limite della somma delle γ è:

$$\lim \left[1 + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)\right]$$

$$= 1 + \lim \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

e si può dimostrare che:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = 0.$$

Infatti supponiamo n compreso fra 2^k e 2^{k+1}. La somma:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

può scindersi in tante parti come segue:

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \text{ ecc.}$$

cioè in tante parti della forma:

$$\frac{1}{2^r+1}+\frac{1}{2^r+2}+\cdots+\frac{1}{2^{r+1}}$$

composte di 2^r termini ciascuna. Se in ciascuna di queste somme in luogo di ciascun termine poniamo il primo di essi, abbiamo quantità rispettivamente maggiori di ciascuna di quelle somme, e siccome d'altra parte, così facendo, otteniamo:

$$\frac{2^r}{2^r+1}$$

cioè una frazione minore dell'unità, possiamo conchiudere che ciascuna di quelle somme è minore dell'unità.

Ora se n è minore o eguale a 2^{k+1} (ma sempre maggiore di 2^k) evidentemente si otterranno *al più* $k+1$ di tali somme, dunque possiamo conchiudere che:

$$\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<k+1$$

e quindi:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}<k+2.$$

D' altra parte:

$$2^k=(1+1)^k=1+k+\frac{k(k-1)}{2}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}k+\frac{k^2}{2}+\cdots$$

e quindi, essendo tutti positivi gli altri termini del secondo membro, si ha:

$$2^k > \frac{k^2}{2}.$$

Perciò possiamo scrivere:

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right) < \frac{k+2}{2^k} < \frac{2}{2^k}+\frac{2}{k}.$$

Il secondo membro converge a zero per $k=\infty$, e quindi il limite del primo membro è zero.

Possiamo dunque dire che:

$$\lim \Sigma\, \alpha_p = \lim \Sigma\, \gamma_p = 1.$$

Intanto le differenze:

$$\varepsilon_p = \gamma_p - \alpha_p = \frac{1}{n\,p}$$

non sono neanche tutte infinitesimi di ordine superiore rispetto ad α_p e β_p perchè:

$$\lim \frac{\varepsilon_p}{\alpha_p} = \frac{1}{p}$$

che per p diverso da ∞, è una quantità finita.

§. 29.

Si abbia un cerchio di equazione $x^2+y^2=r^2$, e si considerino su di esso due punti vicini la cui distanza si faccia tendere a zero. Da uno dei punti si conduca la tangente al cerchio e dall'altro punto si conduca la perpendicolare a questa tangente. *La lunghezza di questa perpendicolare sarà un in-*

finitesimo di secondo ordine se la distanza fra i due punti si considera infinitesimo di primo ordine.

Sieno (x', y'), $(x'+h, y'+k)$ le coordinate dei due punti del cerchio la cui distanza sia dunque:

$$\delta = \sqrt{h^2 + k^2}.$$

La tangente nel punto $x'\ y'$ avrà per equazione:

$$x\,x' + y\,y' - r^2 = 0$$

e la distanza dell' altro punto da questa retta è data da:

$$d = \frac{(x'+h)\,x' + (y'+k)\,y' - r^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

che, per effetto dell'equazione del cerchio diventa:

$$d = \frac{h\,x' + k\,y'}{r}.$$

Intanto si ha:

$$(x'+h)^2 + (y'+k)^2 = r^2$$

donde:

$$2\,x'\,h + 2\,y'\,k + h^2 + k^2 = 0$$

e quindi il valore assoluto dell' espressione di sopra resta trasformato in quest' altro indipendente da $x'\ y'$:

$$|d| = \frac{h^2 + k^2}{2\,r} = \frac{\delta^2}{2\,r}$$

donde si vede che d rispetto a δ è infinitesimo di 2.° ordine.

FUNZIONI RAPPRESENTATE DA SERIE.

SERIE EQUICONVERGENTI.

§. 30.

Sappiamo che se una serie i cui termini sono funzioni di una variabile, è *equiconvergente (convergente uniformemente o in egual grado)*, essa è una funzione *continua* dei suoi termini, e quindi, in particolare, se i termini sono funzioni continue della variabile, allora la serie rappresenta una funzione *continua* della variabile stessa.

La condizione della *equiconvergenza*, è una condizione sufficiente, ma non necessaria. Daremo qui alcuni esempi di serie che non sono equiconvergenti e non sono funzioni continue in un punto, oppure che non sono equiconvergenti eppure sono funzioni continue.

Consideriamo la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+n\,x)\,(1+(n+1)\,x)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{1+n\,x} - \frac{1}{1+(n+1)\,x}\right].$$

Evidentemente la somma della serie è:

$$\lim_{n=\infty} \left(1 - \frac{1}{1+n\,x}\right).$$

Per x diverso da zero questo limite è 1; mentre che per $x = 0$ questo limite è zero. Dunque la serie in quistione rappresenta una funzione continua in ogni punto x diverso da zero (e propriamente è una funzione costante) e discontinua nel punto $x = 0$.

Esaminiamo se la serie è equiconvergente o no in un intervallo che comprenda il punto zero.

Evidentemente il resto R_n della serie ha per espressione:

$$R_n = \frac{1}{1 + n\,x}.$$

Se noi immaginiamo che x varii in un intervallo che non comprenda il punto zero, sia p. es. sempre positiva, maggiore di a, si avrà:

$$\frac{1}{1 + n\,x} < \frac{1}{1 + n\,a}$$

e, determinando n in modo che:

$$\frac{1}{1 + n\,a} < \sigma,$$

per tutti gli $x > a$ si ha sempre:

$$R_n(x) < \sigma$$

e perciò la serie è equiconvergente.

Ma se invece $a = 0$, allora per quanto si prenda grande n si potrà sempre prendere x così piccolo che il prodotto $n\,x$ sia piccolo a piacere e quindi che:

$$\frac{1}{1 + n\,x}$$

sia maggiore di una qualunque quantità data piccola a piacere (e quindi minore di 1); perciò la serie non è equiconvergente in un intervallo che comprenda o che abbia per estremo, il punto zero.

§. 31.

Diamo ora invece l'esempio di una serie che è funzione continua della variabile, senza essere una serie equiconvergente.

Consideriamo il seguente esempio di Cantor:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n\,x}{1+n^2\,x^2}-\frac{(n+1)\,x}{1+(n+1)^2\,x^2}\right].$$

È evidente che la somma della serie è la funzione continua (anche per $x=0$):

$$\frac{x}{1+x^2}.$$

La serie è funzione continua di x anche per $x=0$, eppure si può mostrare che essa non è equiconvergente in un intervallo che comprenda il punto zero. Infatti:

$$R_n(x)=\frac{n\,x}{1+n^2\,x^2};$$

ora si prenda n grande quanto si vuole; se x è compresa in un intervallo che comprenda il punto zero, si potrà sempre prendere $x=\frac{1}{n}$, e allora R_n sarà eguale ad $\frac{1}{2}$, e quindi non si potrà mai trovare un n in modo che *per tutti gli* x sia sempre $R_n<\sigma$ essendo σ piccola a piacere.

§. 32.

Un altro esempio della stessa specie del precedente è dato dalla serie:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} (2\, n\, x\, e^{-nx^2} - (2\, n + 2)\, x\, e^{-(n+1)x^2}).$$

La somma di questa serie è evidentemente eguale a:

$$2\, x\, e^{-x^2}$$

e questa serie rappresenta una funzione continua di x; eppure essa non è una serie equiconvergente, perchè il resto R_n ha per espressione in valore assoluto:

$$R_n = 2\,(n+1)\, x\, e^{-(n+1)x^2}$$

e per $x = \dfrac{1}{n+1}$ il limite di R_n per $n = \infty$ è 2, e quindi la serie non è equiconvergente in un intervallo che comprenda il punto zero.

§. 33.

Si sa degli elementi del Calcolo (v. p. es. il mio *Calcolo infinit.* vol. I, Cap. I, §. 7) che se k è un punto interno al campo di convergenza di una serie di potenze:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n,$$

la serie rappresenta in tal punto una funzione *continua* di x.

Si presenta ora la domanda: una tal serie di potenze è anche funzione continua per il punto x che è l'*estremo* del campo di convergenza della serie stessa, supposto che per tal punto la serie data sia convergente?

Un teorema conosciuto sotto il nome di *teorema di* Abel risponde a questa domanda e dice che: *se i punti del campo di convergenza hanno per punto limite b, e se la serie di potenze è convergente per $x = b$, il suo valore in b è proprio il limite dei valori della serie per x tendente a b.*

Vogliamo dimostrare questo teorema.

Consideriamo la differenza:

$$\sum_0^\infty a_n b^n - \sum_0^\infty a_n x^n = \sum_0^\infty a_n (b^n - x^n)$$

che, ponendo $x = bt$, può scriversi:

$$\sum_0^\infty a_n b^n (1 - t^n).$$

Ora si può dimostrare che per $t = 1$ il limite del valore di questa serie è zero e così resta dimostrato l'assunto.

Poniamo:

$$\Sigma_{n+p} = \sum_{n+1}^{n+p} a_n b^n (1 - t^n)$$

$$s_{n+1} = a_{n+1} b^{n+1}$$

$$s_{n+2} = a_{n+1} b^{n+1} + a_{n+2} b^{n+2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_{n+p} = a_{n+1} b^{n+1} + \ldots + a_{n+p} b^{n+p}$$

donde:

$$\Sigma_{n+p} = (1 - t^{n+1}) s_{n+1} + (1 - t^{n+2}) (s_{n+2} - s_{n+1}) + \dots$$
$$\dots + (1 - t^{n+p}) (s_{n+p} - s_{n+p-1})$$
$$= s_{n+1} (t^{n+2} - t^{n+1}) + s_{n+2} (t^{n+3} - t^{n+2}) + \dots$$
$$+ \dots + s_{n+p} (1 - t^{n+p})$$

e, chiamando s_n il massimo dei valori assoluti di $s_{n+1} \dots s_{n+p}$, possiamo scrivere:

$$\Sigma_{n+p} \leqq s_n (1 - 2\, t^{n+p} + t^{n+1})$$

osservando che le parentesi:

$$(t^{n+2} - t^{n+1}), \quad (t^{n+3} - t^{n+2}) \dots$$

sono tutte negative, e che l'ultima cioè $(1 - t^{n+p})$ è invece positiva.

Dall' ultima relazione si ricava ancora, osservando che, essendo $t < 1$, si ha $t^{n+p} < t^{n+1}$:

$$\Sigma_{n+p} \leqq 2\, s_n$$

ed essendo convergente la serie:

$$\sum_0^\infty a_n\, b^n$$

e potendosi quindi trovare un n tale che le somme $s_{n+1} \dots s_{n+p}$ (n qualunque) sieno minori di σ piccolo a piacere, e quindi lo sia anche s_n, si ha:

$$\Sigma_{n+p} < 2\, \sigma.$$

Ora, trovato un tale indice n, si può scegliere x così vicino a b, e quindi t così vicino ad 1, che la somma (di un numero finito di termini)

$$\sum_0^n = \sum_0^n a_n b^n (1 - t^n)$$

sia minore di σ, perchè ciascuno di questi termini è infinitesimo per $t = 1$. Ricaviamo dunque che dato σ piccolo a piacere si può sempre fare che:

$$\sum_0^n + \Sigma_{n+p} < 3\,\sigma$$

cioè che:

$$\sum_0^{n+p} < 3\,\sigma$$

essendo p un indice *qualunque*. Ciò basta per conchiudere che $\sum\limits_0^{\infty}$ tende a zero.

Come applicazione di questo teorema possiamo dire che, essendo convergente la serie:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

essa è il limite per $x = 1$ della serie:

$$x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4 + \ldots,$$

che, come si sa, è uguale a:

$$\log\,(1 + x).$$

Quindi la serie data sarà eguale a $\log\,(1 + 1)$ cioè $\log 2$.

Considieriamo tutti i punti, a partire dal punto zero, in cui una serie di potenze è convergente *assolutamente;* tali punti potranno avere un punto limite a distanza finita; sia b. Ora noi *a priori* non possiamo dir nulla sulla natura della serie per $x = b$. Potrà accadere che in b la serie sia convergente *assolutamente,* come succede per la serie:

$$\frac{x}{1^2} - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \cdots$$

per $x = 1$; può accadere che sia convergente *semplicemente,* come si verifica per la serie:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

per $x = +1$; e può accadere infine che la serie sia divergente, come accade per:

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$$

per $x = +1$.

Non sussiste il reciproco del teorema di Abel sopra dimostrato; cioè una serie di potenze può rappresentare una funzione che abbia un limite per $x = b$, eppure la serie, convergente per ogni x minore di b, è divergente in b. (Vedi: Pringsheim, *Functionen mit endlichen Differentialquotienten,* etc. *Math. Ann.,* vol. XLIV, p. 41, §. 3).

§. 34.

Cauchy aveva creduto che una serie convergente i cui termini fossero funzioni continue di una variabile, fosse sempre una funzione continua della variabile stessa. *(Cours d' Analyse,* etc., p. 131). ABEL trovò falsa questa asserzione *(Crelle's J.,* vol. I, p. 316, nota) portando l'esempio della funzione:

$$\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \ldots$$

Vedi a questo proposito CAUCHY nei *Comptes Rendus de l'Acad. de Paris,* t. 36, p. 455; e inoltre:

DU BOIS REYMOND, *Notiz über einen Cauchy'schen satz, etc. Math. Ann.,* vol. IV, p. 135.

SEIDEL, *Note über eine Eigenschaft der Reihen welche discontinuirlichen Functionen darstellen. Abh. der Münch. Akad.,* vol. V, p. 380.

CANTOR, in *Math. Ann.,* vol. XVI, p. 269.

VELTMANN, in *Schlömilch's Zeitschrift,* (3), 27, p.196.

HÖLDER, *Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze. Math. Ann.* vol. XX, (1882).

DU BOIS REYMOND, *Abhandlungen der Münch. Akad.,* vol. XII.

DERIVATE DI UNA FUNZIONE.

§. 35.

Un teorema, che va sotto il nome di CAUCHY, dice che se per $x = \infty$ la $f(x)$ tende all'infinito, e se esiste il limite della derivata $f'(x)$ per $x = \infty$, tale limite si ottiene calcolando quello di:

$$\frac{f(x)}{x}$$

per $x = \infty$, (v. le mie *Lezioni di Calcolo,* I, Cap. II, §. 1).

Ora facciamo vedere come possa esistere questo limite senza che esista il limite della derivata.

Sia:

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \operatorname{sen}(x^2)$$

che per $x = \infty$ diventa infinita con segno determinato.

Formiamo il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$

$$= \frac{h + \frac{1}{x+h} \operatorname{sen}(x+h)^2 - \frac{1}{x} \operatorname{sen}(x^2)}{h},$$

la derivata di $f(x)$ per x diverso da infinito è:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}(x^2) + 2 \cos(x^2)$$

il cui limite per $x = \infty$ è indeterminato, mentre che il limite del rapporto incrementale per $x = \infty$ e per h qualunque, è indipendente da h, ed è evidentemente eguale ad 1.

Se formiamo il limite di $\frac{f(x)}{x}$ cioè di:

$$1 + \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}(x^2)$$

per $x = \infty$, troviamo anche 1 per valore del limite.

Consideriamo ora un esempio in cui esiste il limite della derivata per $x = \infty$.

Sia $f(x) = \log x$, la cui derivata è $\frac{1}{x}$, che per $x = \infty$ è zero.

Il rapporto incrementale è:

$$\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right).$$

Per $x=\infty$ questo rapporto incrementale è zero, e quindi è zero anche il suo limite per $h=0$. Tale è anche il valore del limite:

$$\lim_{x=\infty}\frac{\log x}{x}.$$

Su questo argomento possono vedersi:

Du Bois Reymond, *Annali di Mat.*, (2) vol. IV.
» *Math. Ann.*, vol. XVI.
Stolz, *Math. Ann.*, vol. XV.
Rouquet, *Nouv. Ann. de Math.*, vol. XVI.

§. 36.

Si abbia una funzione di x contenente un parametro y:

$$f(x, y),$$

si formi la derivata di f rispetto ad x, e si calcoli il limite di questa derivata per $y=a$; indi si faccia il procedimento inverso, cioè si calcoli prima il limite di f per $y=a$, e poi di questo limite se ne faccia la derivata. I due risultati saranno fra loro eguali? È cioè invertibile il segno di limite rispetto ad y, col segno di derivazione rispetto ad x? È facile vedere che in generale ciò non si verifica.

Sia p. es.:

$$f(x\,y) = \frac{\operatorname{sen}(y\,x)}{y}$$

e quindi:

$$\frac{d}{d\,x} f(x\,y) = \cos(y\,x)$$

il cui limite per $y = \infty$ è indeterminato.

Invece il limite per $y = \infty$ di $\frac{\operatorname{sen}(y\,x)}{y}$ è zero per qualunque valore di x, e quindi la sua derivata è zero.

§. 37.

Sappiamo che il limite del rapporto incrementale:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

quando esiste, è la derivata della funzione nel punto x.

Vediamo ora che cosa è il limite:

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+n\,h) - f(x+(n-1)\,h)}{h}$$

essendo n un numero finito.

Noi possiamo scrivere identicamente:

$$\frac{f(x+n\,h) - f(x+(n-1)\,h)}{h}$$

$$= n\,\frac{f(x+n\,h) - f(x)}{n\,h} -$$

$$-(n-1)\,\frac{f(x+(n-1)\,h) - f(x)}{(n-1)\,h}.$$

Per $h=0$ il secondo membro diventa:

$$n f'(x) - (n-1) f'(x) = f'(x),$$

quindi concludiamo che il limite dell'espressione soprascritta è lo stesso del limite del semplice rapporto incrementale.

§. 38.

Possiamo trovare una condizione *sufficiente* perchè una funzione continua ammetta derivata in ogni punto di un intervallo. Propriamente daremo una condizione sufficiente perchè la funzione ammetta una derivata destra, e una derivata sinistra; poi sarà facile stabilire un'altra condizione perchè queste due derivate sieno anche fra loro eguali.

Supponiamo che per ogni x compreso fra a e b *si possa trovare un h in modo che per esso e per ogni altro minore (meno per $h=0$) la espressione*:

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \tag{1}$$

sia diversa da zero e di segno costante, qualunque sia x; allora si può dimostrare che la $f(x)$ (che si suppone naturalmente funzione continua) ha una derivata a destra e una derivata a sinistra. (Stolz, *Grundzuge der Diff. u. Int. Rechn.*, p. 35; vedi anche Stolz, *Arithmetik*, I, p. 195).

Prima di tutto dimostriamo che, per l'ipotesi fatta, se x_1 x_2 sono due punti qualunque dell'intervallo da a a b ($x_1 < x_2$), e se x è un punto compreso fra essi, anche la espressione:

$$(x_2 - x) f(x_1) + (x_1 - x_2) f(x) + (x - x_1) f(x_2) \tag{2}$$

avrà segno costante, e propriamente lo stesso segno della espressione (1).

Consideriamo infatti la espressione:

$$f(x_1)+\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)-f(x)=\varphi(x)$$

la quale si ottiene da (2) ponendo in questa:

$$x_2-x=(x_2-x_1)-(x-x_1)$$

e poi dividendo per x_2-x_1 che è quantità positiva. La $\varphi(x)$ avrà sempre il medesimo segno di (2); se noi quindi dimostriamo che, per le ipotesi fatte, la $\varphi(x)$ ha sempre il medesimo segno di (1) per qualunque x, resta dimostrato che (1) (2) hanno sempre lo stesso segno per qualunque x.

Ora è evidente intanto che:

$$\varphi(x_1)=0$$
$$\varphi(x_2)=0$$

e inoltre essendo la $f(x)$ e quindi anche la $\varphi(x)$ una funzione continua, vi sarà sempre un punto nell'intervallo da a a b in cui $\varphi(x)$ prende effettivamente il valore corrispondente al limite inferiore o al limite superiore dei valori che essa ha in tutto un tale intervallo.

Ora, per fissare le idee, supponiamo che la (1) abbia sempre valore positivo; allora essendo, come è facile verificare:

$$\varphi(x+h)+\varphi(x-h)-2\varphi(x)=$$
$$=-[f(x+h)+f(x-h)-2f(x)]$$

si ha che il primo membro di questa espressione deve avere sempre valore negativo qualunque sia x per un h convenientemente scelto e per tutti gli h ad esso minori; se vi fosse nell'*interno* dell'intervallo da x_1 ad x_2 un punto in cui $\varphi(x)$ assuma per valore quello del limite *inferiore*, e sia x_0 un tale punto:

$$\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$$
$$\varphi(x_0-h)-\varphi(x_0)$$

sarebbero due quantità positive, e quindi la loro somma sarebbe positiva, contro quello che abbiamo detto sopra; si ricava che il punto x_0 non può essere che il punto x_1 o il punto x_2 in cui la φ ha valore zero; dunque il limite *inferiore* dei valori di φ nell'intervallo da x_1 a x_2 è zero, cioè φ in tutto un tale intervallo è *sempre positiva*. Per le osservazioni fatte ne ricaviamo perciò che anche la (2) per qualunque x è sempre positiva, e quindi:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$

è anche sempre positiva per qualunque x; cioè il rapporto incrementale:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

è sempre maggiore del rapporto incrementale:

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1},$$

qualunque sia x_2, e qualunque sia x *compreso* fra x_1 e x_2. Dunque il rapporto incrementale destro della funzione $f(x)$ nel punto x_1 cioè:

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

diminuisce continuamente di valore col diminuire di h, e perciò esso tenderà certamente ad un limite che o sarà una quantità finita o sarà $-\infty$.

Analogamente si può far vedere che nella stessa ipotesi che la (1) sia sempre positiva, il rapporto incrementale sinistro in x_2 tenderà ad un limite che sarà o una quantità finita o $+\infty$. Ed essendo x_1 x_2 due punti arbitrari di tutto l'intervallo da a a b ne ricaviamo che per ogni punto esiste la derivata destra e la derivata sinistra.

Queste due derivate saranno poi fra loro eguali, cioè esisterà un unico limite finito del rapporto incrementale nel punto x_0, quando si potrà sempre trovare un intorno a destra e a sinistra di x_0 in modo che la differenza dei rapporti incrementali in due punti qualunque di tale intorno, p. es. la differenza di:

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

e di:

$$\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

si possa rendere piccolo a piacere; cioè quando:

$$\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h}$$

si possa rendere piccola a piacere.

Ciò deriva da quanto è noto circa la condizione d'esistenza di un limite unico destro e sinistro per una funzione in un punto.

DERIVAZIONE PER SERIE.

§. 39.

È ben noto un teorema che dà una condizione sufficiente perchè una serie di funzioni sia derivabile termine a termine. Tale condizione è che *la serie delle derivate sia una serie equiconvergente* (v. le mie *Lezioni di Calcolo,* I, Cap. II, §. 2).

Diamo un esempio di una serie la cui derivata esiste, ma non è espressa dalla serie delle derivate dei singoli termini della serie data.

Si abbia la serie:

$$\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \dots$$

che è convergente per ogni x in valore assoluto minore di π, e ha per valore $\frac{1}{2}x$. La sua derivata dunque per ogni valore di x è sempre uguale ad $\frac{1}{2}$. Ma la serie delle derivate cioè:

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots$$

non è neanche una serie convergente, ma è indeterminata perchè è indeterminato il limite del termine generale di questa serie.

È facile mostrare ciò che abbiamo asserito che la serie sopraindicata è una serie convergente, ed ha per valore $\frac{1}{2}x$.

Consideriamo la serie logaritmica per z complesso:

$$\log(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

dove:

$$z = \rho(\cos x + i \operatorname{sen} x) = \rho\, e^{ix}$$

e che è convergente per $\rho < 1$ e per $\rho = 1$ purchè x sia diverso da π.

Poniamo:

$$1 + z = r\, e^{iy}$$

donde:

$$1 + \rho \cos x = r \cos y$$

$$\rho \operatorname{sen} x = r \operatorname{sen} y$$

$$r = \sqrt{1 + \rho^2 + 2\rho \cos x}$$

$$\log(1+z) = \log r + i\, y + 2\, k\, \pi\, i.$$

Supponiamo che x, y sieno ambedue compresi fra $-\pi$ e $+\pi$ (esclusi gli estremi); allora da queste formole si vede che x, y sono ambedue positivi o ambedue negativi. Se $z = o$ cioè se $\rho = o$, y deve essere zero, e r deve essere eguale ad 1; quindi dall' ultima formola si ricava che k deve essere zero. Dalle ipotesi fatte per y e x si ha dunque:

$$\log(1+z) = \log r + i\, y$$

Poniamo $\rho = 1$; allora:

$$r = \sqrt{2(1 + \cos x)} = 2 \cos \frac{1}{2} x$$

$$r \cos y = 1 + \cos x = \cos^2 \frac{1}{2} x$$

$$\cos y = \cos \frac{1}{2} x$$

$$r \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x$$

$$\operatorname{sen} y = \operatorname{sen} \frac{1}{2} x,$$

quindi possiamo dire che per $\rho = 1$ si ha:

$$y = \frac{1}{2} x.$$

Nella serie logaritmica precedente sostituendo a primo e secondo membro i loro valori e poi eguagliando fra loro le parti reali e le parti immaginarie dei due membri si hanno le due formole:

$$\log\left(2 \cos \frac{1}{2} x\right) = \frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} - \dots$$

$$\frac{1}{2} x = \frac{\operatorname{sen} x}{1} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} - \dots$$

e, per le cose dette, queste formole sussistono per x compreso fra $-\pi$ e $+\pi$. Per un x esterno a questo campo si potrebbero subito di qui ricavare formole analoghe. È facile vedere che queste serie rappresentano delle funzioni *discontinue* di x, perchè, per esempio, la seconda di esse per $x = \pi$ ha valore zero, mentre che il primo membro converge ad $\frac{1}{2} \pi$.

§. 40.

Diamo un esempio di una serie tale che la serie delle derivate non sia equiconvergente pure essendo la derivata della serie data.

Consideriamo la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n\, x^2\, e^{-nx^2} - (n+1)\, x^2\, e^{-(n+1)x^2}\right)$$

il cui valore è:

$$x^2\, e^{-x^2}.$$

Derivando termine a termine si ha la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(2\, n\, x\, e^{-nx^2} - 2\, n^2\, x^3\, e^{-nx^2}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(2\,(n+1)\, x\, e^{-(n+1)x^2} - 2\,(n+1)^2\, x^3\, e^{-(n+1)x^2}\right)\right]$$

il cui valore è:

$$2\, x\, e^{-x^2} - 2\, x^3\, e^{-x^2}$$

che è la derivata della serie data anche per $x = o$; intanto ambedue queste serie non sono equiconvergenti in un intervallo che comprenda $x = o$.

§. 41.

Un altro esempio simile è dato dalla serie:

$$\Sigma \left(\frac{1}{2\, n} \log\,(n^2\, x^2 + 1) - \right.$$
$$- \frac{1}{2\,(n+1)} \log\,[\,(n+1)^2\, x^2 + 1\,]$$

il cui valore è:

$$\frac{1}{2}\log(x^2+1).$$

Questa serie è equiconvergente; ma la serie delle derivate cioè:

$$\Sigma\left[\frac{n\,x}{n^2\,x^2+1}-\frac{(n+1)\,x}{(n+1)^2\,x^2+1}\right]$$

non è equiconvergente, mentre il suo valore:

$$\frac{x}{x^2+1}$$

è esattamente la derivata della serie data. Il limite per $n=\infty$ del resto della serie delle derivate cioè:

$$\lim_{n=\infty}\frac{n\,x}{n^2\,x^2+1}$$

è zero.

§. 42.

D'altra parte diamo un esempio di una serie di cui la serie delle derivate non è equiconvergente e che *non* rappresenta la derivata della data.

Consideriamo:

$$\Sigma\left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$$

la cui somma è x.

La serie delle derivate è:

$$\Sigma(x^{n-1}-x^n)=\Sigma\,x^{n-1}(1-x)$$

ed ha per valore 1 per ogni x diverso da 1 e per valore zero per $x = 1$. In un campo attorno il punto $x = 1$, la serie non può dunque essere equiconvergente perchè non è una funzione continua di x. Intanto la derivata della serie data è sempre eguale ad 1 anche per $x = 1$.

FUNZIONI SENZA DERIVATA.

§. 43.

Sappiamo che la continuità non è una condizione sufficiente per la derivabilità di una funzione. Daremo ora i principali esempi di funzioni continue che non ammettono derivata, o che hanno rispetto alla derivata della singolarità di varia natura.

Il seguente è il classico esempio di Weierstrass di una funzione continua che in *nessun* punto ammetta derivata.

Consideriamo la serie:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(\pi\, a^n\, x)$$

dove a è un intero dispari, e b è un numero positivo minore di 1. Con queste ipotesi evidentemente la serie non solo è convergente, ma è equiconvergente, perchè la serie dei massimi è:

$$\Sigma\, b^n$$

ed è convergente essendo $b < 1$. Di qui si ricava che $f(x)$ è anche una funzione *continua* di x.

Sia x_0 un valore qualunque di x. Cominciamo a stabilire in una certa maniera un gruppo di punti a destra e a sinistra del punto x_0 e aventi per punto limite il punto x_0 stesso. Faremo vedere che il limite del rapporto incrementale non esiste facendo convergere x ad x_0 passando per tutti i punti del gruppo di cui si parla; allora potrà dedursi che non esiste la derivata nel senso vero della parola, perchè se questa esistesse dovrebbe essere il limite del rapporto incrementale, limite preso col far convergere in *una qualunque maniera* x ad x_0.

Dato un numero intero positivo m, possiamo determinare sempre un numero intero a_m in modo che la differenza:

$$a^m x_0 - a_m = x_{m+1}$$

sia compresa fra $-\frac{1}{2}$ e $+\frac{1}{2}$ inclusivamente; giacchè se $a^m x_0$ non è intero basterà prendere per a_m il numero intero più vicino ad esso; e se esso è intero basta prendere a_m esattamente eguale a $a^m x_0$, e in tal caso x_{m+1} sarebbe zero.

Poniamo allora:

$$x' = \frac{a_m - 1}{a^m} \qquad , \qquad x'' = \frac{a_m + 1}{a^m}$$

e si avrà:

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m} \quad , \quad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m}.$$

Essendo x_{m+1} in valore assoluto minore od eguale ad $\frac{1}{2}$ si ha che $1 + x_{m+1}$, $1 - x_{m+1}$ saranno in ogni caso delle quantità positive, e quindi $x' - x_0$ sarà negativo, e $x'' - x_0$ sarà positivo cioè i punti x' e x'' stanno da parti opposte del punto x_0; e inoltre, aumentando il numero m, essi si avvicinano indefinitivamente al punto x_0. Abbiamo dunque così costruito dalle due parti di x_0 due gruppi di punti, i cui punti limiti sono il punto x_0 stesso.

Formiamo ora il rapporto incrementale. Si ha:

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = \sum_0^\infty b^n \frac{\cos \pi a^n x' - \cos \pi a^n x_0}{x' - x_0}$$

$$= \sum_0^{m-1} (a\, b)^n \frac{\cos a^n \pi x' - \cos a^n \pi x_0}{a^n (x' - x_0)} +$$

$$+ \sum_0^\infty b^{m+n} \frac{\cos a^{m+n} \pi x' - \cos a^{m+n} \pi x_0}{x' - x_0}.$$

Esaminiamo la prima parte di questo sommatorio. Possiamo scrivere:

$$\frac{\cos a^n \pi x' - \cos a^n \pi x_0}{a^n (x' - x_0)} =$$

$$= - \pi \operatorname{sen} \frac{1}{2} a^n \pi (x' + x_0) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a^n \pi (x' - x_0)}{\frac{1}{2} a^n \pi (x' - x_0)}$$

e i due ultimi fattori del secondo membro oscillano fra -1 e $+1$; il primo può raggiungere questi limiti, ma il secondo no, ammenochè x' non coincida con x_0.

Possiamo quindi scrivere in valore assoluto:

$$\sum_{n=0}^{m-1} (a\, b)^n \frac{\cos a^n \pi x' - \cos a^n \pi x_0}{a^n (x' - x_0)} <$$

$$< \sum_0^{m-1} (a\, b)^n \pi < \frac{\pi (a\, b)^m}{a\, b - 1}.$$

Esaminiamo ora la seconda parte del sommatorio.

Essendo a un numero intero dispari si ha:

$$\cos a^{m+n} \pi x' = \cos a^n (a_m - 1) \pi = (-1)^{a_m - 1}$$

$$\cos a^{m+n} \pi x_0 = \cos a^n (a_m \pi + \pi x_{m+1}) =$$
$$= (-1)^{a_m} \cos a^n \pi x_{m+1}.$$

Abbiamo dunque:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b^{m+n} \frac{\cos a^{m+n} \pi x' - \cos a^{m+n} \pi x_0}{x' - x_0} =$$

$$= (-1)^{a_m - 1} (a\, b)^m \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{1 + \cos a^n \pi x_{m+1}}{a^m (x' - x_0)}$$

$$= (-1)^{a_m} (a\, b)^m \sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{1 + \cos a^n \pi x_{m+1}}{1 + x_{m+1}}.$$

I termini racchiusi sotto il sommatorio sono tutti positivi, perchè, essendo x_{m+1} compreso sempre fra $-\frac{1}{2}$ e $+\frac{1}{2}$, il denominatore sarà sempre positivo, e sarà compreso fra $\frac{1}{2}$, e $\frac{3}{2}$; mentre il numeratore sarà evidentemente sempre compreso fra 0 e 2. Il primo di tali termini cioè il termine:

$$\frac{1 + \cos \pi x_{m+1}}{1 + x_{m+1}}$$

sarà compreso fra $\frac{2}{3}$ e 4 perchè il numeratore è compreso fra 1 e 2 non potendo $\cos \pi x_{m+1}$ essere mai negativo, perchè x_{m+1} è minore od eguale ad $\frac{1}{2}$ in valore assoluto.

Raccogliendo possiamo dunque dire che:

$$\frac{f(x') - f(x_0)}{x' - x_0} = \varepsilon' \frac{\pi (a\,b)^m}{a\,b - 1} + (-1)^{a_m} (a\,b)^m \frac{2}{3} \eta'$$

dove ε' è un numero compreso fra -1 e $+1$, e η' è un numero *positivo* maggiore di 1.

Analogamente si può trovare:

$$\frac{f(x'') - f(x_0)}{x'' - x_0} = \varepsilon'' \frac{\pi (a\,b)^m}{a\,b - 1} - (-1)^{a_m} (a\,b)^m \frac{2}{3} \eta''$$

dove ε'' η'' hanno gli analoghi significati che ε' η'.

Se quindi noi scegliamo due numeri a, b tali che:

$$\frac{\pi}{a\,b - 1} < \frac{2}{3}$$

cioè:

$$a\,b > \frac{3}{2}\pi + 1\,,$$

allora evidentemente in ciascuna di queste due ultime espressioni prevarrà il segno del secondo termine, e quindi i due rapporti incrementali avranno costantemente segni opposti, ed, essendo $(a\,b)$ maggiore di 1, i loro valori assoluti cresceranno oltre ogni limite col crescere di m, cioè coll'avvicinarsi dei due punti x' x'' al punto x_0. Quindi la funzione $f(x)$ non avrà per alcun valore di x_0, derivata determinata finita o infinita.

Ciò non toglie però che per certi valori di x_0 si possa determinare uno speciale gruppo di punti aventi per punto limite x_0, e tale che per esso il limite del rapporto incrementale è determinato, ma ciò non significa, come già abbiamo osservato in principio, che esiste la derivata propriamente detta. Su questo malinteso è fondata un' obbiezione che Wiener fece alle conclusioni di Weierstrass (*Crelle's J.* 1881, t. XC). Vedi la risposta di Weierstrass (*Abhandl. aus der Funct.*, p. 100). Del resto il lavoro di Wiener, considerato come uno studio dettagliato geometrico e analitico della funzione di Weierstrass, è un lavoro pregevole.

§. 44.

Passiamo ora ad esporre un esempio proposto da Hankel (*Math. Ann.*, vol. XX, pag. 78) di una funzione che non ammette derivata non in *tutti* i punti, ma in *infiniti* punti di qualunque tratto finito.

Sia $\varphi(y)$ una funzione che per i valori di y fra -1 e $+1$ (tranne per $y=0$) è finita continua e sempre inferiore ad un numero A, e per $y=0$ è zero. Allora ponendo:

$$y = \operatorname{sen}(n\pi x), \qquad (n = \text{intero}),$$

per ogni x della forma razionale $\frac{m}{n}$ (m = intero), la y (e quindi la φ) è zero, e per ogni x di altra forma la y è diversa da zero e compresa fra -1 e $+1$.

Formiamo allora la serie:

$$f(x) = \Sigma \frac{\varphi(\operatorname{sen} n\pi x)}{n^s} \qquad (s > 1)$$

che sarà equiconvergente, perchè i suoi termini sono minori di quelli della serie:

$$A \sum \frac{1}{n^s}$$

che è convergente.

La $f(x)$ rappresenta dunque una funzione continua di x in tutti i punti x meno quelli che corrispondono ad $y = 0$ in cui la φ *non* si è supposta continua, cioè meno nei punti della forma $x = \frac{m}{n}$; se poi ammettiamo che $\varphi(y)$ è continua anche in $y = 0$, allora la $f(x)$ è continua in tutti i punti x. Il numero n nella espressione di $f(x)$ non è un numero fisso, ma dipende dal posto del termine che si considera, quindi in qualunque punto della forma $\frac{m}{n}$ saranno *discontinui* alcuni termini della serie, cioè il termine n^{mo}, il termine $2n^{mo}$ etc., e quindi sarà discontinua la serie; possiamo perciò dire che la serie sarà discontinua in *tutti i punti razionali* se $\varphi(y)$ si suppone discontinua in $y = 0$, e sarà continua in tutti i punti, se $\varphi(y)$ è continua in $y = 0$.

Esaminiamo il valore della serie per un x razionale della forma $\frac{\nu}{\mu}$. Tutti i termini in cui l'indice n è multiplo di μ sono evidentemente zero per ipotesi, e quindi li possiamo sopprimere, e possiamo scrivere:

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \sum_{1}^{\infty}{}_{(\mu)} \frac{\varphi\left[\operatorname{sen}\left(n \frac{\nu}{\mu} \pi\right)\right]}{n^s}$$

dove con $\Sigma_{(\mu)}$ vogliamo intendere che bisogna estendere il sommatorio per tutti i valori di n meno per quelli multipli di μ.

Formiamo $f\left(\frac{\nu}{\mu}+h\right)$. Si ha:

$$f\left(\frac{\nu}{\mu}+h\right)=\sum_{1}^{\infty}{}_{(\mu)}\frac{\varphi\left[\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu}+h\right)\pi\right]}{n^s}+$$

$$+\frac{1}{\mu^s}\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi\left[\pm\operatorname{sen}(n\,\mu\,h\,\pi)\right]}{n^s}$$

dove nel secondo termine bisogna considerare il segno $+$ quando il prodotto $n\,\nu$ è pari, e il segno $-$ quando $n\,\nu$ è dispari.

Si ha quindi per espressione del rapporto incrementale in un punto x razionale della forma $\frac{\nu}{\mu}$:

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu}+h\right)-f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{h}=$$

$$=\sum_{1}^{\infty}{}_{(\mu)}\left\{\frac{\varphi\left[\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu}+h\right)\pi\right]-\varphi\left[\operatorname{sen} n\frac{\nu}{\mu}\pi\right]}{h\;n^s}\right\}$$

$$+\frac{1}{\mu^s}\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi\left[(-1)^{n\nu}\operatorname{sen}(n\,\mu\,h\,\pi)\right]}{h\;n^s}$$

mentre poi in un punto x irrazionale l'espressione del rapporto incrementale è:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$$

$$=\sum_{1}^{\infty}\frac{\varphi\left[\operatorname{sen} n\,(x+h)\,\pi\right]-\varphi\left[\operatorname{sen} n\,x\,\pi\right]}{h\;n^s}.$$

Ora la esistenza della derivata della funzione $f(x)$ in tutti i punti x razionali dipende dalla ipotesi che si fa sulla esistenza della derivata della funzione $\varphi(y)$ nel punto $y = 0$.

Se noi supponiamo che la funzione $\varphi(y)$ abbia derivata finita per ogni y fra -1 e $+1$ anche per $y = 0$, possiamo formare la serie delle derivate dei termini della serie data, e troviamo:

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi'[\text{sen}\, n\, x\, \pi]}{n^{s-1}} \cos n\, x\, \pi.$$

Per $s > 2$ i termini di questa sono minori di quelli della serie convergente:

$$\pi A' \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}}$$

[in cui A' è il massimo valore che può assumere $\varphi'(y)$] e quindi la serie delle derivate per $s > 2$ è una serie equiconvergente. Per un teorema noto possiamo allora dire che essa rappresenta la derivata di $f(x)$, la quale perciò, nelle ipotesi fatte, è una funzione che ammette derivata finita determinata in tutti i punti.

Ma se noi supponiamo che la funzione $\varphi(x)$, pure essendo sempre continua, e ammettendo derivata per tutti i punti, non ammetta derivata determinata solo in $y = 0$, nel qual punto il rapporto incrementale di $\varphi(y)$ oscilli però fra limiti finiti, allora possiamo far vedere che la funzione $f(x)$, pure essendo sempre continua, come già sappiamo, non ha derivata determinata in nessun punto razionale, e l'ha invece nei punti irrazionali.

Per questa seconda parte del nostro assunto si può procedere così:

Consideriamo un punto x irrazionale e la serie dei rapporti incrementali:

$$\sum_1^{\infty} \frac{\varphi[\text{sen}\, n(x+h)\pi] - \varphi[\text{sen}\, n x \pi]}{h\ n^s}$$

che possiamo scrivere:

$$\sum_1^{\infty} \frac{\pi}{n^{s-1}} \frac{\varphi[\text{sen}\, n(x+h)\pi] - \varphi[\text{sen}\, n x \pi]}{\text{sen}\, n(x+h)\pi - \text{sen}\, n x \pi} \times$$

$$\times \cos n\left(x + \frac{h}{2}\right)\pi \frac{\text{sen}\, n \frac{h}{2} \pi}{n \frac{h}{2} \pi}.$$

Ora, per le ipotesi fatte sulla esistenza della derivata determinata e finita per la funzione $\varphi(y)$ per y diverso da zero, la quantità:

$$\frac{\varphi(y+k) - \varphi(y)}{k}$$

(che è uguale al primo fattore di ciascun termine del sommatorio superiore) avendo per limite una quantità finita per y diverso da zero, e oscillando fra limiti finiti per $y = 0$, si conserverà in un opportuno intorno del punto y (cioè per ogni k minore di una certa determinata quantità) minore di una quantità A', e quindi possiamo dire che tutti i termini dell'ultima serie sono in valore assoluto minori dei termini della serie:

$$\pi A' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}}$$

che per $s > 2$ è convergente. La prima serie è dunque equiconvergente in un intorno del punto x; e, come sappiamo, ciò basta per conchiudere che il limite di quella serie per $h=0$, è uguale alla serie dei limiti, e quindi per un x irrazionale la serie data ha derivata determinata e finita.

Invece per un punto x razionale della forma $\frac{\nu}{\mu}$ il rapporto incrementale ha l'altra forma scritta sopra; tale espressione risulta di due parti; la prima parte è un $\Sigma_{(\mu)}$, cioè un sommatorio esteso da $n=1$ sino a $n=\infty$, ma dove si intendono soppressi tutti i termini corrispondenti ad indici n multipli di μ, e la seconda parte è:

$$\frac{1}{\mu^s} \sum_1^\infty \frac{\varphi\left[(-1)^{n\nu} \operatorname{sen}(n\,\mu\,h\,\pi)\right]}{h\ n^s}.$$

La prima parte può considerarsi come il rapporto incrementale della funzione:

$$\psi(x) = \sum_{1\ (\mu)}^\infty \frac{\varphi\left[\operatorname{sen} n\,x\,\pi\right]}{n^s}$$

per $x=\frac{\nu}{\mu}$. Tutti i termini di questo sommatorio hanno derivata finita e determinata, perchè, dovendo escludere fra i valori di n quelli che sono multipli di μ, per alcun valore di n, verrà zero il valore dell'argomento di φ. Su questa funzione può dunque ripetersi esattamente lo stesso ragionamento fatto sopra per il limite del rapporto incrementale di $f(x)$ per un x irrazionale, e ne ricaviamo che $\psi(x)$ ha derivata determinata e finita. Occupiamoci quindi solo della seconda parte della espressione del rapporto incrementale di $f(x)$.

I termini di quella serie possono scriversi:

$$\frac{1}{\mu^s}\left\{\frac{(-1)^{n\nu}\,\mu\,\pi}{n^{s-1}}\,\frac{\varphi\left[(-1)^{n\nu}\operatorname{sen} n\,\mu\,h\,\pi\right]}{(-1)^{n\nu}\operatorname{sen} n\,\mu\,h\,\pi}\,\frac{\operatorname{sen} n\,\mu\,h\,\pi}{n\,\mu\,h\,\pi}\right\}.$$

Il primo di questi termini, cioè quello che corrisponde ad $n=1$ è:

$$\frac{1}{\mu^s}\left\{(-1)^\nu\,\mu\,\pi\,\frac{\varphi\left[(-1)^\nu\operatorname{sen}\mu\,h\,\pi\right]}{(-1)^\nu\operatorname{sen}\mu\,h\,\pi}\,\frac{\operatorname{sen}\mu\,h\,\pi}{\mu\,h\,\pi}\right\}$$

e la quantità entro parentesi è indipendente da s.

Supposto che non esista la derivata di $\varphi\,(y)$ nel punto zero, ma che il rapporto incrementale $\frac{\varphi\,(y)}{y}$ possa oscillare fra due limiti *finiti*, cioè in valore assoluto si conservi sempre minore di una quantità A, si ha che uno qualunque dei termini soprasegnati sarà sempre in valore assoluto minore di:

$$\frac{\pi\,A}{\mu^{s-1}}\,\frac{1}{n^{s-1}}$$

e quindi possiamo dire che la somma di tutti quei termini dal 2° in poi, cioè a cominciare da quello corrispondente a $n=2$, è minore della somma:

$$\frac{\pi\,A}{\mu^{s-1}}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{s-1}}$$

che per $s>2$ è una serie convergente.

Abbiamo perciò che la seconda parte dell'espressione del rapporto incrementale di $f\,(x)$ è eguale a:

$$\frac{\pi}{\mu^{s-1}}\left\{(-1)^\nu\,\frac{\varphi\,(y)}{y}\,\frac{\operatorname{sen}\mu\,h\,\pi}{\mu\,h\,\pi}+\varepsilon\,A\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{s-1}}\right\}$$

ponendo $y = (-1)^\nu \operatorname{sen} \mu h \pi$ ed essendo ε una quantità compresa fra -1 e $+1$.

Ma:

$$\sum_2^\infty \frac{1}{n^{s-1}}$$

col crescere del numero s diminuisce indefinitamente, e si può rendere piccola finchè si vuole, mentre, col diminuire di h, la quantità:

$$\frac{\operatorname{sen} \mu h \pi}{\mu h \pi}$$

si può rendere differente da 1 di tanto poco quanto si vuole.

Onde si vede che si potrà sempre scegliere un tale s e una tale h che il primo termine di quella parentesi prevalga sul secondo, cioè che il segno di tutta la parentesi sia il segno del primo termine, e il valore di tutta la parentesi differisca pochissimo dal valore del primo termine. Siccome tal primo termine non tende ad alcun limite, lo stesso farà tutta l'espressione.

Resta con ciò dimostrato che nei punti x razionali la $f(x)$ non ha derivata.

Per costruire dunque una funzione $f(x)$ senza derivata in tutti i punti razionali, basta costruire una $\varphi(y)$ continua e finita nel tratto da -1 e $+1$, zero nel punto $y = 0$, avente derivata finita in tutto un tale intervallo, meno solamente nel punto $y = 0$, in cui il rapporto incrementale oscilli fra limiti finiti.

Un esempio di una tale funzione $\varphi(y)$ è la funzione:

$$\varphi(y) = y \operatorname{sen} \frac{1}{y}$$

a cui si assegni il valore zero per $y = 0$. Si ha allora una funzione sempre finita e continua e che ammette derivata in ogni punto meno che per $y = 0$; il valore del rapporto incrementale nel punto $y = 0$ cioè:

$$\frac{h \operatorname{sen} \frac{1}{h}}{h} = \operatorname{sen} \frac{1}{h}$$

oscilla fra -1 e $+1$.

Un altro simile esempio ci è dato dalla funzione:

$$\varphi(y) = y \operatorname{sen} [\log y^2]$$

colla supposizione che sia $\varphi(0) = 0$.

Per ogni y compreso fra -1 e $+1$ la φ è una funzione continua, ed ha derivata determinata in tutti i punti, meno nel punto $y = 0$, in cui il valore del rapporto incrementale:

$$\frac{h \operatorname{sen} [\log h^2]}{h} = \operatorname{sen} [\log h^2]$$

oscilla fra -1 e $+1$.

§. 45.

Possiamo trovare un altro esempio di funzione che non ammette derivata in nessun punto razionale.

Indichiamo in generale con $E(x)$ il massimo *intero* contenuto in x, e consideriamo la serie:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \log \frac{(n x)^{E(nx)}}{E(n x)!}$$

per $s > 2$.

Si può mostrare che questa serie è convergente ed è una funzione continua di x.

Che essa sia convergente si dimostra facendo vedere che l'espressione:

$$\frac{1}{n} \log \frac{(n\,x)^{E(nx)}}{E\,(n\,x)} = \frac{1}{n}\,[E\,(n\,x) \log (n\,x) - \log E\,(n\,x)!]$$

non cresce indefinitivamente con n, ma ha un limite determinato pur $n = \infty$. Infatti ricordiamo il risultato ottenuto nel §. 11, cioè che:

$$\lim_{y=\infty} \frac{1}{y} \sqrt[y]{y!} = \frac{1}{e}$$

donde:

$$\lim_{y=\infty} \left(\frac{1}{y} \log (y!) - \log y \right) = -1.$$

In forza di questo risultato possiamo scrivere:

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{E\,(n\,x) \log E\,(n\,x) - \log E\,(n\,x)!}{E\,(n\,x)} \right) = +1.$$

Ma:

$$E\,(n\,x) \log (n\,x) - \log E\,(n\,x)! =$$

$$= E\,(nx) \log E\,(nx) - \log E\,(nx)! + (n\,x) \log \frac{n\,x}{E\,(n\,x)}$$

onde:

$$\lim \frac{E\,(n\,x) \log (n\,x) - \log E\,(n\,x)!}{n} =$$

$$= \lim \frac{E\,(n\,x)}{n} \left[\lim \frac{E\,(nx) \log E\,(n\,x) - \log E\,(n\,x)!}{E\,(n\,x)} + \right.$$

$$\left. + \lim \log \frac{n\,x}{E\,(n\,x)} \right].$$

Ora possiamo porre:

$$n\,x = E(n\,x) + \varepsilon$$

dove ε sia *minore* di 1, e positivo, ed allora:

$$\frac{n\,x}{E(n\,x)} = 1 + \frac{\varepsilon}{E(nx)}$$

$$\frac{E(n\,x)}{n} = x - \frac{\varepsilon}{n}$$

donde:

$$\lim \frac{n\,x}{E(n\,x)} = 1$$

$$\lim \frac{E(n\,x)}{n} = x.$$

Si ha quindi:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n} \log \frac{(n\,x)^{E(nx)}}{E(n\,x)!} = x.$$

Abbiamo perciò che la serie $f(x)$, la quale si forma moltiplicando i termini della serie convergente:

$$\Sigma \frac{1}{n^{s-1}} \qquad (s > 2)$$

per quantità che non crescono oltre ogni limite, è una serie convergente. È poi anche equiconvergente, perchè se A è il massimo valore che può avere l'espressione:

$$\frac{1}{n} \log \frac{(n\,x)^{E(nx)}}{E(n\,x)!}$$

i termini della serie saranno in valore assoluto tutti minori o eguali dei termini della serie convergente:

$$\Sigma \frac{A}{n^{s-1}}\,.$$

Per le proprietà note, possiamo dunque dire che $f(x)$ è una funzione *continua* di x.

Esaminiamo ora il rapporto incrementale della funzione $f(x)$ in un punto x.

Tal rapporto ha la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} \left\{ \frac{1}{n\,h} \log \frac{(n\,x + n\,h)^{E(nx+nh)}}{E(n\,x + n\,h)\,!} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{n\,h} \log \frac{(n\,x)^{E(nx)}}{E(n\,x)!} \right\}$$

e poichè per le cose dette sopra, il limite per $n = \infty$ dell'espressione in parentesi è:

$$\frac{x + h}{h} - \frac{x}{h} = 1\,,$$

così possiamo dire che esisterà un numero finito A' di cui sono sempre minori le espressioni in parentesi, qualunque sia n e qualunque sia h; e quindi essendo i termini di quella serie sempre minori di quelli della serie convergente:

$$\sum \frac{A'}{n^{s-1}}$$

possiamo dedurre che quella serie è equiconvergente per ogni valore di h; esiste pertanto il limite della serie per $h = 0$ ed è eguale alla serie dei limiti. In un qualunque punto x, esiste dunque la derivata a *destra* e esiste la derivata a *sinistra* della funzione $f(x)$; ma in un punto x *razionale* le due derivate, a destra e a sinistra, sono fra loro *disuguali,* come ora mostreremo, e quindi *non* possiamo dire che la funzione $f(x)$ ha propriamente la derivata nel punto x.

Sia infatti $x = \frac{\nu}{\mu}$ dove ν, μ sieno numeri interi. Allora dividiamo in due parti il sommatorio dei rapporti incrementali: in un sommatorio esteso a indici n che non sieno mai multipli di μ, e in un altro sommatorio esteso a tutti gli indici n multipli di μ.

Questo secondo sommatorio può scriversi, ponendo $n\,\mu$ in luogo di n, e sviluppando i logaritmi:

$$\frac{1}{\mu^s}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^s\,h}\Big(E(n\,\nu+n\,\mu\,h)\log(n\,\nu+n\,\mu\,h)-\\ -E(n\,\nu)\log(n\,\nu)+\log[E(n\,\nu)!]-\\ -\log[E(n\,\nu+n\,\mu\,h)!]\Big).$$

Per trovare il limite di questo sommatorio sappiamo già che dobbiamo trovare i limiti dei singoli termini. Ora qualunque sia il numero n, si potrà sempre trovare un h così piccolo che $n\,\mu\,h$ sia minore di 1, e allora per un h *positivo* abbiamo che $E(n\,\nu+n\,\mu\,h)=E(n\,\nu)=n\,\nu$, mentre per un h negativo abbiamo che:

$$E(n\,\nu+n\,\mu\,h)=E(n\,\nu)-1=n\,\nu-1.$$

Il termine n^{mo} del sommatorio di sopra diventa, per un h positivo opportunamente piccolo:

$$\frac{1}{n^s}\left\{n\,\nu\,\frac{\log(n\,\nu+n\,\mu\,h)-\log(n\,\nu)}{h}\right\}$$

e per un h negativo:

$$\frac{1}{n^s}\left\{(n\,\nu-1)\frac{\log(n\,\nu+n\,\mu\,h)-\log(n\,\nu)}{h}\right\}$$

i cui limiti per $h = 0$ sono rispettivamente:

$$\frac{\mu}{n^{s-1}}$$

e:

$$\frac{(n\nu - 1)\, n\, \mu}{n^s \cdot n\nu} = \frac{\mu}{n^{s-1}} - \frac{1}{n^s}\,\frac{\mu}{\nu}.$$

I limiti dei due sommatorii sono dunque, per h positivo:

$$\frac{1}{\mu^{s-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}}$$

e per h negativo:

$$\frac{1}{\mu^{s-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} - \frac{1}{\mu^{s-1}\,\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

e, come si vede, sono fra loro *disuguali.* In quanto poi alla sommatoria corrispondente agli indici n non multipli di μ, ripetendo considerazioni analoghe a quelle fatte qui, si ricava che i due limiti sono eguali sia per h positivo che per h negativo; perchè se $n\,x$ non è un numero *intero,* si può scegliere h sempre così piccolo che:

$$E(n\,x \pm n\,h) = E(n\,x)$$

e lo stesso si verifica se x è irrazionale.

Possiamo dunque conchiudere che la derivata della funzione $f(x)$ esiste per ogni x *irrazionale,* e non esiste per ogni x razionale.

Per un x razionale esistono bensì i due limiti dei rapporti incrementali, destro e sinistro, ma essi non sono fra loro eguali.

§. 46.

Diamo ora un altro esempio proposto da Schwarz (*Math. Abhand.* Berlin 1890, vol. II, p. 269) in cui si verifica che per ogni punto razionale di una certa determinata forma (e dei quali ne esistono infiniti in ogni tratto finito) la derivata destra della funzione è infinita, e la derivata sinistra è determinata e finita.

Indichiamo al solito con $E(x)$ il massimo numero intero contenuto in x; è facile vedere che la funzione:

$$\varphi(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$$

dove il radicale deve essere preso sempre col segno $+$, è *una funzione continua di x;* perchè se x è compresa fra n e $n+1$, il valore di quella funzione è:

$$n + \sqrt{x - n}$$

che, per ogni x interna al tratto da n a $n+1$, è funzione continua di x. Se x diventa eguale ad $n+1$, il valore della funzione $\varphi(x)$ è eguale ad $n+1$, e questo medesimo valore si ottiene anche dalla formola:

$$n + \sqrt{x - n}$$

per $x = n + 1$. Se poniamo poi $x = n + 1 + h$ (dove h sia minore di 1 e positivo) il valore della funzione diventa:

$$n + 1 + \sqrt{h}$$

che converge ad $n+1$ per $h=0$; dunque la funzione $\varphi(x)$ è continua sia a destra che a sinistra dei punti x *numeri interi,* ed è poi naturalmente anche continua per un qualunque altro x.

È notevole che, sebbene $E(x)$ sia una funzione *discontinua*, pure la $\varphi(x)$ formata colla $E(x)$ è *continua.*

La funzione $\varphi(x)$ ha le seguenti proprietà:

$$\varphi(x) \overline{\overline{<}} x + \frac{1}{4}.$$

Infatti per un x compreso fra n e $n+1$, la $\varphi(x)$ ha il valore:

$$n + \sqrt{x-n},$$

che sottratto da $x + \frac{1}{4}$ dà:

$$(x-n) + \frac{1}{4} - \sqrt{x-n} = \left(\sqrt{x-n} - \frac{1}{2}\right)^2$$

quantità *positiva* o *zero;* e per $x=n$ si ha $\varphi(x)=n$ che è anche minore di $x + \frac{1}{4}$.

Inoltre per un h positivo opportunamente piccolo, se x è compreso fra n e $n+1$ esclusi gli estremi, anche $x+h$ sarà compreso fra questi limiti, e quindi:

$$\varphi(x+h) = n + \sqrt{x+h-n}$$

$$\varphi(x) = n + \sqrt{x-n}$$

donde:

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \sqrt{x+h-n} - \sqrt{x-n}.$$

E avendosi identicamente:

$$x+h-n \leqq (x-n)+h+2\sqrt{h}\,\sqrt{x-n}$$
$$\leqq (\sqrt{x-n}+\sqrt{h})^2$$

si ha:

$$\sqrt{x+h-n} \leqq \sqrt{x-n}+\sqrt{h}$$

(dove i radicali per le ipotesi fatte si devono intendere tutti *positivi*) donde:

$$\varphi(x+h)-\varphi(x) \leqq \sqrt{h}$$

Se poi $x=n$ si ha:

$$\varphi(x)=n,$$
$$\varphi(x+h)=n+\sqrt{h}$$

e quindi:

$$\varphi(x+h)-\varphi(x)=\sqrt{h}$$

cioè *la relazione*:

$$\varphi(x+h)-\varphi(x) \leqq \sqrt{h}$$

sussiste per qualunque x, e per h opportunamente piccolo.

La funzione $\varphi(x)$ è infine una funzione *crescente* per ogni x.

Considеriamo ora la funzione:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(2^n x)}{2^n\, 2^n}.$$

Si può dimostrare che questa funzione è continua e non ammette derivata in infiniti punti di un intervallo piccolo a piacere.

Infatti la serie di cui si tratta è formata moltiplicando i termini della serie convergente:

$$x \sum_0^\infty \frac{1}{2^n}$$

per le quantità:

$$\frac{\varphi(2^u x)}{2^n x}$$

il cui limite per $n = \infty$ è 1.

Coi soliti teoremi deduciamo dunque che $f(x)$ è una serie equiconvergente per qualunque tratto di variabilità di x, e quindi rappresenta una funzione *continua* di x.

Consideriamo ora un numero intero m', e tutti i punti x della forma:

$$x' = \frac{m'}{2^m},$$

e calcoliamo il rapporto incrementale di $f(x)$ relativo a questo punto. Si ha:

$$\frac{f(x'+h) - f(x')}{h} = \sum_{n=0}^\infty \frac{\varphi(2^n x' + 2^n h) - \varphi(2^n x')}{2^n . 2n . h}.$$

Tutti i termini del secondo membro sono positivi per un h *positivo*, perchè la funzione φ è una funzione continua *crescente*.

Ne deduciamo che il primo membro è maggiore di ciascuno dei termini positivi del secondo membro, cioè in particolare di quello per cui $n = m$, cioè:

$$\frac{f(x'+h) - f(x')}{h} > \frac{\varphi(2^m x' + 2^m h) - \varphi(2^m x')}{2^m . 2^m . h}$$

per h positivo.

Ora essendo:

$$2^m x' = m'$$

dove m' è un numero intero, ed essendo $\varphi(m') = m'$, e potendo scegliere h così piccolo che $2^m h < 1$ si ha:

$$\varphi(2^m x' + 2^m h) = m' + \sqrt{2^m h}$$

e perciò:

$$\varphi(2^m x' + 2^m h) - \varphi(2^m x') = \sqrt{2^m h}$$

donde, per un h *positivo,* si ha:

$$\frac{f(x' + h) - f(x')}{h} > \sqrt{2^m h}\, \frac{1}{2^m .\, 2^m .\, h}$$

$$> \frac{1}{(2\sqrt{2})^m \sqrt{h}}.$$

Di qui si vede che, diminuendo h, il rapporto incrementale *destro* per il punto x' cresce oltre ogni limite.

Esaminiamo invece il rapporto incrementale *sinistro.* Troveremo che il suo limite per $h = 0$ è una quantità finita.

Consideriamo prima di tutto la espressione:

$$\frac{\varphi(2^n x' - 2^n h) - \varphi(2^n x')}{-2^n .\, h} = u_n$$

e ricerchiamo il limite di questa espressione per $h = 0$. Per un n minore di m, $2^n x'$ non è un numero intero, e quindi si può scegliere h così piccolo che:

$$E(2^n x' - 2^n h) = E(2^n x'),$$

ed allora:

$$\varphi(2^n x' - 2^n h) - \varphi(2^n x') = \sqrt{2^n x' - 2^n h - E(2^n x')}$$
$$- \sqrt{2^n x' - E(2^n x')}$$

Ora dai principi della risoluzione delle forme indeterminate $\frac{0}{0}$ si ricava che il limite:

$$\lim_{h=0} \frac{\sqrt{N - 2^n h} - \sqrt{N}}{-h} = \lim_{h=0} \frac{2^{n-1}}{\sqrt{N - 2^n h}} = \frac{2^{n-1}}{\sqrt{N}}.$$

Ponendo:

$$N = 2^n x' - E(2^n x')$$

si ha la formola:

$$\lim_{h=0} \frac{\sqrt{2^n x' - E(2^n x') - 2^n h} - \sqrt{2^n x' - E(2^n x')}}{-h} =$$
$$= \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2^n x' - E(2^n x')}}$$

e quindi possiamo scrivere:

$$\lim_{h=0} u_n = \frac{1}{2\sqrt{2^n x' - E(2^n x')}} \qquad (n < m).$$

Perciò, essendo in numero finito le espressioni u_n di indice $n < m$, noi potremo trovare sempre un numero A di cui, per tutto un campo di variabilità da h sino a zero, sieno sempre minori tutte le u_n di indice $n < m$.

Esaminiamo ora le u_n di indice $n \geqq m$.

Per $n \geqq m$ la quantità $2^n x'$ è un numero *intero*; si può far vedere che u_n per qualunque h e qualunque n è sempre compreso fra due limiti finiti, e il suo limite per $h = 0$ è $\frac{1}{2}$.

Infatti supponiamo fissato un h e un n; e distinguiamo il caso in cui $2^n h$ sia maggiore di 1, da quello in cui $2^n h$ sia minore o eguale ad 1.

Chiamando k il primo numero intero superiore a $2^n h$, il valore di u_n diventa in ogni caso uguale a:

$$\frac{\sqrt{k - 2^n h} - k}{- 2^n h}.$$

Se $2^n h$ è maggiore di 1, il valore di questa espressione è inferiore a:

$$\frac{2^n h + 1}{2^n h} = 1 + \frac{1}{2^n h}$$

cioè è inferiore a 2; e se $2^n h \leqq 1$ allora $k = 1$; e l'espressione:

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2^n h}}{2^n h}$$

è minore o uguale ad 1 per ogni $2^n h$ minore o eguale ad 1; e per $2^n h$ tendente a zero, questa espressione ha per limite $\frac{1}{2}$, come è facile verificare coi principii della risoluzione delle indeterminazioni $\frac{0}{0}$.

Possiamo dunque dire che la serie dei rapporti incrementali sinistri dei termini della serie data è:

$$\sum_{n=0}^{m-1} \frac{u_n}{2^n} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{u_n}{2^n},$$

dove i termini del secondo sommatorio sono minori, per un qualunque h fisso, dei termini della serie convergente:

$$2 \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

e quindi la serie rappresentata dal secondo sommatorio è una serie equiconvergente; di qui ne deduciamo che il limite della serie per $h = 0$ è eguale alla serie dei limiti la quale, per le cose dette, è:

$$\sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{\sqrt{2^n x' - E(2^n x')}} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$$

di cui il secondo termine è eguale semplicemente a:

$$\frac{1}{2^m}.$$

Si ha così il valore della derivata sinistra della funzione $f(x)$ nel punto $x' = \frac{m'}{2^m}$.

La funzione $f(x)$ è dunque tale che nei punti di questa forma non ha derivata: la derivata destra è l'infinito, e la derivata sinistra ha un valore finito. In qualunque tratto finito esistono infiniti punti di quella forma.

§. 47.

Passiamo ad esporre quest'altro esempio di Hankel in cui si verifica, in quanto alla derivata, una singolarità diversa che negli esempi precedenti, inquantochè in quest'esempio pei valori razionali di x, i limiti dei rapporti incrementali destro e sinistro sono rispettivamente $+\infty$ e $-\infty$, e quindi non si può dire che esista la derivata determinata per ogni punto razionale.

Dobbiamo far capo alla teoria generale sviluppata nel §. 44, ponendo:

$$\varphi(y) = y^{\frac{2}{3}}$$

che è una funzione soddisfacente alla proprietà di essere finita e continua per ogni y fra -1 e $+1$, d'essere zero per $y = 0$, d'avere derivata determinata e finita per ogni y diverso da zero, e di non avere derivata determinata nel punto $y = 0$, perchè in tal punto la derivata destra è $+\infty$, mentre la derivata sinistra è $-\infty$.

Formiamo la serie:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\operatorname{sen} n\pi x]^{\frac{2}{3}}}{n^8}$$

e calcoliamo colle formole trovate nel §. 44, il rapporto incrementale di questa $f(x)$ in un punto razionale $\frac{\nu}{\mu}$.

Possiamo scrivere:

$$\frac{f\left(\frac{\nu}{\mu} + h\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right)}{h} =$$

$$= \sum_{1}^{\infty}{}_{(\mu)} \frac{\left[\operatorname{sen} n\left(\frac{\nu}{\mu} + h\right)\pi\right]^{\frac{2}{3}} - \left[\operatorname{sen} n\,\frac{\nu}{\mu}\,\pi\right]^{\frac{2}{3}}}{h\,n^8} +$$

$$+ \frac{1}{\mu^8} \sum_{1}^{\infty} \frac{[\operatorname{sen} n\,\mu\,h\,\pi]^{\frac{2}{3}}}{h\,n^8}$$

dove col simbolo $\Sigma_{(\mu)}$ si intende il sommatorio *esteso a tutti i valori di n meno quelli che sono multipli di* μ.

Nel citato §. 44 si supponeva che, pur non esistendo la derivata di $\varphi(y)$ in $y=0$, il rapporto incrementale φ oscillasse però tra limiti finiti. Sotto questa ipotesi si poteva dimostrare che esisteva senz'altro il limite per $h=0$ di $\Sigma_{(\mu)}$ perchè allora si poteva dire che il rapporto incrementale di $\varphi(y)$ si conservava sempre minore di una quantità A' anche che y si avvicinasse indefinitivamente al punto zero.

Nel caso di $\varphi(y)=y^{\frac{2}{3}}$ noi non possiamo più dire lo stesso, perchè il rapporto incrementale di $\varphi(y)$ per y tendente a zero, può crescere oltre ogni limite. Però possiamo dimostrare che anche in tal caso il primo termine della formola superiore converge ad una quantità finita.

Perciò consideriamo la funzione:

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}{}_{(\mu)}\frac{[\operatorname{sen} n\, x\, \pi]^{\frac{2}{3}}}{n^{s}} \quad \text{per} \quad x=\frac{\nu}{\mu}.$$

I termini di questa serie hanno derivata determinata e finita nel punto $x=\dfrac{\nu}{\mu}$.

La serie delle derivate è:

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}_{(\mu)}\frac{1}{n^{s-1}}\,\frac{2}{3}\,\pi \operatorname{sen}^{-\frac{1}{3}}\left(n\,\frac{\nu}{\mu}\,\pi\right)\cos\left(n\,\frac{\nu}{\mu}\,\pi\right)$$

che si può dimostrare essere *equiconvergente.*

Infatti, per quanto grande sia il numero n, non potendo esso mai essere un multiplo di μ per la natura di $\Sigma_{(\mu)}$, il numero $n\dfrac{\nu}{\mu}$ differirà sempre da un numero intero di una quantità non minore di $\dfrac{1}{\mu}$; propriamente se dividiamo $n\nu$ per μ, abbiamo:

$$n\nu = N\,.\,\mu + r$$

dove $1 \leq r < \mu$, e quindi:

$$\frac{n\nu}{\mu} = N + \frac{r}{\mu}$$

$$\operatorname{sen} \frac{n\nu}{\mu}\pi = \pm \operatorname{sen} \frac{r}{\mu}\pi$$

ed in valore assoluto abbiamo:

$$\operatorname{sen} \frac{n\nu}{\mu}\pi \geq \operatorname{sen} \frac{1}{\mu}\pi\,;$$

onde sarà, in valore assoluto:

$$\operatorname{sen}^{-\frac{1}{3}} \frac{n\nu}{\pi}\pi \leq \operatorname{sen}^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{\mu}\pi\,,$$

e il secondo membro è una quantità indipendente da n. Si vede così che i termini del sommatorio di sopra sono rispettivamente in valore assoluto minori di quelli della serie:

$$\frac{2}{3}\pi \operatorname{sen}^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{\mu}\pi \sum_{n=1}^{\infty}{}_{(\mu)} \frac{1}{n^{s-1}} =$$

$$= \frac{2}{3}\pi \left(1 - \frac{1}{\mu^{s-1}}\right) \operatorname{sen}^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{\mu}\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}}\,,$$

che rappresenta una serie convergente per $s > 2$.

Possiamo dunque dedurre che la serie delle derivate è una serie equiconvergente, e quindi esprime la derivata della serie data, $\psi(x)$, cioè la prima parte dell'espressione del rapporto incrementale di $f(x)$ converge ad una quantità finita.

Occupiamoci ora della seconda parte.

Essa può scriversi:

$$\frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\mu^{s-\frac{2}{3}}} \sum_1^\infty \left[\frac{\operatorname{sen} n\,\mu\,h\,\pi}{n\,\mu\,h\,\pi}\right]^{\frac{2}{3}} \frac{1}{n^{s-\frac{2}{3}}}.$$

La serie rappresentata dal terzo fattore, considerata come funzione di h, è una serie *equiconvergente,* perchè i suoi termini sono minori di quelli della serie convergente:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{s-\frac{2}{3}}}.$$

Quindi il suo limite per $h=0$ sarà la serie dei limiti dei suoi termini, cioè sarà la serie ultimamente scritta; si vede perciò che tutta l'espressione ha per limite:

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}} \frac{\pi^{\frac{2}{3}}}{\mu^{s-\frac{2}{3}}} \sum_1^\infty \frac{1}{n^{s-\frac{2}{3}}}$$

che è uguale a $+\infty$, o a $-\infty$ secondochè h abbia segno positivo o negativo.

Resta con ciò dimostrato che la funzione $f(x)$ in tutti i punti razionali ha la derivata a destra eguale a $+\infty$, e la derivata a sinistra eguale a $-\infty$.

§. 48.

Tutte le funzioni non aventi derivata in un numero infinito di punti compresi in tratti finiti, studiate nei §§. precedenti, erano espresse mediante serie.

Possiamo ora dare altri esempi rimarchevoli di funzioni espresse con un numero *finito* di operazioni analitiche, e che non hanno derivata in infiniti punti compresi in un tratto piccolo a piacere attorno al punto zero. (Stolz, *Grundzüge der Diff. u. Integr. Rech.*, Leipzig, 1893, vol. I, p. 33).

Formiamo la funzione:

$$f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}$$

colla supposizione che ad $f(x)$ si assegni il valore *zero* in tutti i punti della forma:

$$x = 0, \quad x = \frac{1}{m\pi}$$

dove m sia un numero *intero* qualunque.

Questi punti sono quelli in cui la $f(x)$, mediante la rappresentazione analitica che ne abbiamo data, si presenta sotto forma indeterminata. La funzione risulta così *continua* in ogni punto.

Il rapporto incrementale della funzione nel punto $x = 0$ è:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{h} \operatorname{sen} \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{1}{h}},$$

e questa espressione per $h=0$ non ha nessun limite determinato.

Il rapporto incrementale in un punto della forma:

$$x=\frac{1}{m\,\pi}$$

ha la forma:

$$\frac{1+m\,\pi\,h}{m\,\pi\,h}\ \mathrm{sen}\ \frac{m\,\pi}{1+m\,\pi\,h}\ \mathrm{sen}\ \frac{1}{\mathrm{sen}\,\dfrac{m\,\pi}{1+m\,\pi\,h}}\,.$$

Intanto (come si può facilmente calcolare coi principi della risoluzione delle indeterminazioni):

$$\lim_{h=0}\frac{\mathrm{sen}\,\dfrac{m\,\pi}{1+m\,\pi\,h}}{h}=-\,m^2\,\pi^2\,,$$

onde il limite di quel rapporto incrementale è:

$$-\,m\,\pi\lim_{h=0}\mathrm{sen}\,\frac{1}{\mathrm{sen}\,\dfrac{m\,\pi}{1+m\,\pi\,h}}$$

cioè è indeterminato, e oscilla fra $+\,m\,\pi$ e $-\,m\,\pi$.

In un intorno piccolo a piacere del punto zero vi sono infiniti punti della forma $\frac{1}{m\,\pi}$; e quindi la funzione continua data non ha derivata in infiniti punti di un qualunque intorno del punto zero.

Consideriamo l'altra funzione continua:

$$f(x)=x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\ \mathrm{sen}\,\frac{1}{\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x}}\ \mathrm{sen}\,\frac{1}{\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{x}}}$$

ponendo che:

$$f(0)=0,\ f\left(\frac{1}{m\pi}\right)=0,\ f\left(\frac{1}{\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{m\pi}}\right)=0\,.$$

Questa non ha derivata in tutti i punti della forma:

$$x=0,\quad x=\frac{1}{m\pi}\ (m=\text{intero})$$

e inoltre nei punti x che rendono:

$$\operatorname{sen}\frac{1}{x}=\frac{1}{m\pi}\,,$$

cioè nei punti:

$$x=\frac{1}{\operatorname{arc\,sen}\frac{1}{m\pi}}\,.$$

Questi ultimi punti hanno per punti limiti i punti $\frac{1}{m\pi}$ stessi; quindi questa nuova funzione non ha derivata in infiniti punti i cui punti limiti sono infiniti, e sono tutti quelli della forma $\frac{1}{m\pi}$.

§. 49.

Supponiamo una funzione derivabile in ogni punto di un campo.

Possiamo dedurre la derivabilità anche del valore assoluto della funzione stessa?

La facile considerazione geometrica di una curva che tagli l'asse delle x sotto un angolo diverso da zero, fa subito vedere che ciò non è, perchè nei punti zero della funzione, il valore assoluto verrà in generale ad avere una derivata destra diversa dalla derivata sinistra. Quindi, ammenochè la derivata, nei punti zero della funzione, non sia anche zero, il valore assoluto della funzione non avrà in ogni punto derivata unica.

§. 50.

Vogliamo raccogliere in questo §. alcune notizie storiche e bibliografiche sulla teoria delle funzioni senza derivata.

Si era creduto per un tempo che la continuità fosse condizione sufficiente perchè una funzione fosse derivabile, meno in un numero *finito* di punti.

Non erano mancati dei lavori per dimostrare ciò; vedi p. es.:

Ampère, *Journal de l'Ecole politéchnique;* cahier XIII, p. 148.

Lamarle, *Etude approfondi* etc., *Mémoires de Belgique,* t. XXIX, 1854.

Gilbert, *Mémoire sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues. Mémoires couronnés* etc. *de l'Acad. de Belgique,* t. XXIII, 1872.

Gilbert, *Rectification au sujet d'une mémoire precedent. Bulletin de l'Acad. de Belgique,* t. XXXV, 1873.

Duhamel, *Eléments de Calcul infinitesimal,* Paris, 1856, t. I, p. 94-97.

Bertrand, *Traité,* etc. Paris, 1864, t. I, p. 2-4.

Fu Riemann il primo che nel suo lavoro sulle serie di Fourier *(Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigon. Reihe. Abh. der Götting. Gesell.* t. XIII, 1867) dette l'esempio di una funzione infinite volte discontinua e che pure era integrabile; di qui ne derivava, per i principii del calcolo integrale, l'esistenza di una funzione non avente derivata in infiniti punti, e propriamente in tutti i punti razionali.

Le idee di Riemann diedero occasione ad Hankel di pubblicare un lavoro su di un cosidetto *principio di condensazione,* per mezzo del quale, data una funzione con una singolarità in un punto, p. es. nel punto zero, se ne può costruire un'altra avente l'analoga singolarità in tutti i punti razionali. (Hankel, *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen.* Tubingen, 1870. *Math. Ann.,* vol. XX, p. 63).

Funzioni senza derivata costruite con questo principio di condensazione ne abbiamo esposte nei §§. precedenti (V. i §§. 44-47).

Dopo ciò il Weierstrass pubblicò il lavoro sulla funzione da noi esposta in un §. precedente, e che non solo non ha derivata in infiniti punti, ma in tutti i punti (P. Du Bois Reymond, *Crelle's Journ.,* t. 79, p. 21). Le conclusioni di Weierstrass furono oppugnate da Wiener, (*Crelle's Journ.,* 1881, t. XC, p. 221, 252), ma a torto. (Vedi la risposta di Weierstrass, *Abhandlungen aus der Functionenlehre,* 1886, p. 100).

Dopo il lavoro di Weierstrass comparve un lavoro del Dini in cui questi generalizzò i risultati di Weierstrass trovando una funzione molto più generale, non avente derivata in nessun punto, e che, come caso particolare, contiene quella di WEIERSTRASS. (DINI, *Sulle funzioni senza derivata*, *Annali di Mat.* (2) t. 8).

Come caso particolare dai risultati del DINI si ricava ancora che le due funzioni continue:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1 \,.\, 3 \ldots (2\,n+1)} \cos\,[1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots . (2\,n-1) \,.\, x]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1 \,.\, 5 \,.\, 9 \ldots . (4\,n+1)} \operatorname{sen}\,[1 \,.\, 5 \,.\, 9 \ldots (4\,n+1)\, x]$$

per $\alpha > 1 + \frac{3}{2}\pi$, non hanno mài derivata. (Vedi anche: DINI, *Fondamenti per la teorica di funzioni di variabili reali*, Pisa, 1878, §. 119, p. 147).

Altri lavori sulle funzioni senza derivata sono i seguenti:

SCHWARZ, *Beispiel einer stetigen nicht differentiirbaren Function, Math. Abhand.*, vol. II, p. 269. Vedi anche: *Archives des sciences physiques*, etc. 1873, p. 33-38; *Verhandlungen der Schwerischen Naturforschenden Gesellsch.* 1873, p. 252-258.

DARBOUX, *Annales de l'Ecole normale*, 1875, t. IV, p. 57-112.

KLEIN, *Ueber den allg. Functionsbegriff, Erlangener Berichte*, 1873.

KÖPCKE, *Math. Ann.*, vol. XXIX, p. 123, vol. XXXIV, p. 161, vol. XXXV, p. 104.

LERCH, *Ueber die nichtdifferentiirbarkeit gewisser Funct. Crelle's Journ.*, v. 103.

L'esempio di SCHWARZ lo abbiamo già trattato nei §§. precedenti.

Le ricerche di Köpcke da noi sopracitate tendono a risolvere questo problema: i vari esempi di funzioni senza derivata in infiniti punti, si riferiscono a funzioni che in qualunque tratto, piccolo per quanto si voglia, fanno infinite oscillazioni. (Vedi p. es. Jordan, *Analyse*, vol. III, p. 580; Harnack, *Notiz über die Abbildung einer stetigen linearen Mannigfaltigkeit auf eine unstetige, Math. Ann.*, t. XXIII, p. 285).

Ora si domanda se questa è una condizione sufficiente perchè la derivata non esista, cioè se vi possano esistere funzioni continue e derivabili in ogni punto, e che facciano infinite oscillazioni in ogni intervallo finito.

L'Hankel nel lavoro citato credette di poter rispondere affermativamente a questa domanda mediante la teoria generale del principio di condensazione; ponendo nell'esempio del nostro §. 44:

$$\varphi(y) = y^2 \operatorname{sen} \frac{1}{y}$$

si ha una funzione avente derivata determinata in tutti i punti; ma la funzione che si ottiene non è infinitamente oscillante, come afferma l'Hankel, (v. *Math. Ann.*, vol. XX, p. 83), non bastando perciò che lo sia $\varphi(y)$ nell'intorno del punto zero. (Vedi per questo Dini, *Fondamenti*, ecc., p. 139, §. 115).

Ora il Dini opinò che possano effettivamente esistere funzioni della natura indicata (v. *Fondamenti*, ecc., p. 283, §. 200, in fine), e il Köpcke nei lavori citati assicura d'aver trovato un esempio di una siffatta funzione. Ad alcuni errori incorsi nel suo primo lavoro l'Autore ha rimediato coi due altri lavori sopra citati. Sarebbe però desiderabile che le considerazioni di quest' Autore fossero espresse sotto una forma più chiara e più facile.

Altri lavori sul medesimo soggetto sono quelli di: Brodèn, *Crelle's Journ.*, t. CXVIII; Steinitz, *Math. Ann.*, t. LII; Schoenflies, *Math. Ann.*, t. LIV.

Prima di terminare vogliamo notare il seguente altro esempio del Dini (*Fondamenti*, ecc., p. 171) di una funzione non avente derivata in infiniti punti.

La funzione:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sqrt{\operatorname{sen}^2 n \pi x} \pm A x$$

in cui si prenda A abbastanza grande, è l'esempio di una funzione sempre crescente o sempre decrescente, eppure non avente derivata in tutti i punti *razionali.*

§. 51.

Recentemente Helge von Koch (*Archiv for Math.*, t. I, Stockolm, 1904) ha costruito una curva continua senza tangente in alcun punto. Sullo stesso soggetto si sono poi succeduti i lavori di Cesàro (*Atti della R. Accad. di Napoli*, (2), t. XII; *Archiv für Math. und Physik*, (3), t. X) e di Broglio (*Giorn. di Mat. di Battaglini*, t. XLIV).

Il principio della costruzione di questa curva è il seguente:

Si divida un segmento AB in tre parti eguali $AC = CD = DB$, e sul tratto intermedio CD si costruisca il triangolo equilatero il cui terzo vertice sia M. Si ripeta la stessa costruzione sui segmenti AC, CM, MD, DB, e si ottengano i punti M'_1, M'_2, M'_3, M'_4, come terzi vertici dei triangoli equilateri. Si proceda così sempre nello stesso modo.

Il luogo di tutti i punti M è una curva continua non avente in alcun punto tangente unica. Questa è la curva di von Koch.

DERIVAZIONE.

§. 52.

Alcune volte per fare la derivazione di una funzione prodotto di vari fattori, può essere utile calcolare prima la derivata del logaritmo della funzione, e poi da questa passare a quella della funzione stessa.

Così si abbia da derivare:

$$y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5\,(x-3)^{11}}}.$$

Abbiamo:

$$\log y = 9\log(x-2) - \frac{5}{2}\log(x-1) - \frac{11}{2}\log(x-3)$$

e derivando si ha:

$$\frac{\dfrac{dy}{dx}}{y} = \frac{9}{x-2} - \frac{5}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{11}{2}\,\frac{1}{x-3} =$$

$$= \frac{x^2 - 7x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)},$$

donde potremo ricavare il valore di $\frac{dy}{dx}$ cioè:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-2)^8}{\sqrt{(x-1)^7\ (x-3)^{13}}}(x^2 - 7x + 1).$$

§. 53.

Dalla relazione finita tra x e y:

$$y = \frac{1-x}{1+x},$$

risulta l'altra differenziale:

$$\frac{dy}{\sqrt{y - y^3}} + \frac{dx}{\sqrt{x - x^3}} = 0.$$

Infatti derivando la data si ha:

$$dy = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}\, dx = \frac{-2\,dx}{(1+x)^2}.$$

D'altra parte:

$$1 - y^2 = \frac{4x}{(1+x)^2}$$

donde:

$$\sqrt{y - y^3} = \frac{2x\sqrt{1-x}}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

e quindi, dividendo:

$$\frac{dy}{\sqrt{y-y^3}} = -\frac{dx}{x\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} = -\frac{dx}{\sqrt{x-x^3}}.$$

Si può osservare che la relazione data fra x e y è *reciproca*, cioè x si esprime mediante y colla formola simile:

$$x = \frac{1-y}{1+y}.$$

§. 54.

Come nel §. precedente, si può far vedere che dalla relazione:

$$y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

(anche questa *reciproca*) si ricava l'altra relazione

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} + \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 0.$$

§. 55.

Si sa che in generale non è facile trovare una formola che dia la derivata n^{ma} di una funzione.

Molte volte si cerca di trovare delle formole di ricorrenza mediante cui la derivata n^{ma} resti espressa mediante quelle di ordine inferiore.

Cerchiamo la formola per la derivata n^{ma} della funzione:

$$y = \text{arc } tg\, x.$$

Si ha:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\text{tg}^2\, y} = \cos^2 y$$

$$= \cos y \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Derivando ancora rispetto ad x abbiamo:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \left[-\operatorname{sen} y \operatorname{sen}\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \cos y \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] \frac{d y}{d x}$$

$$= \cos\left(2 y + \frac{\pi}{2}\right) \cos^2 y = \cos^2 y \operatorname{sen} 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Derivando ancora si ha:

$$\frac{d^3 y}{d x^3} = \left[-2 \cos y \operatorname{sen} y \operatorname{sen} 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2 \cos^2 y \cos 2\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right] \frac{d y}{d x}$$

$$= 2 \cos^3 y \cos (3 y + \pi)$$

$$= 2 \cos^3 y \operatorname{sen} 3\left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Si vede dunque che in generale si ha:

$$\frac{d^n y}{d x^n} = 1 . 2 \ldots (n-1) \cos^n y \operatorname{sen} n\left(y + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= (n-1)! \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \operatorname{sen} n\left(\operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{2}\right).$$

§. 56.

Diamo un esempio di ciò cui abbiamo accennato, cioè della ricerca di formole di ricorrenza per il calcolo della derivata n^{ma} di una funzione.

Il seguente esempio è notevole.

Sia:

$$y = \operatorname{arc\,sen} x.$$

Si ha:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

cioè:

$$\sqrt{1 - x^2}\,\frac{d\,y}{d\,x} = 1.$$

Derivando primo e secondo membro rispetto ad x, abbiamo:

$$-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,\frac{d\,y}{d\,x} + \sqrt{1 - x^2}\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = 0$$

donde:

$$-x\,\frac{d\,y}{d\,x} + (1 - x^2)\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = 0\,;$$

e derivando ancora si ha:

$$-\frac{d\,y}{d\,x} - 3\,x\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2} + (1 - x^2)\,\frac{d^3\,y}{d\,x^3} = 0$$

$$-4\,\frac{d^2\,y}{d\,x^2} - 5\,x\,\frac{d^3\,y}{d\,x^3} + (1 - x^2)\,\frac{d^4\,y}{d\,x^4} = 0.$$

In generale si avrà:

$$-(n-2)^2\,\frac{d^{n-2}\,y}{d\,x^{n-2}} - (2\,n - 3)\,x\,\frac{d^{n-1}\,y}{d\,x^{n-1}} +$$

$$+ (1 - x^2)\,\frac{d^n\,y}{d\,x^n} = 0\,.$$

Infatti abbiamo visto che questa formola sussiste per $n=2$, $n=3$, $n=4$. Possiamo ora far vedere che, se questa formola sussiste per l'indice $n-1$, sussiste anche per l'indice n, e ciò si mostra semplicemente derivando la:

$$-(n-3)^2 \frac{d^{n-3} y}{d x^{n-3}} - (2n-5)\, x \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \\ + (1-x^2) \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} = 0 .$$

La formola trovata costituisce una notevole formola di ricorrenza contenente solo *tre derivate successive.*

§. 57.

Esaminiamo la derivata della funzione:

$$x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$$

nel punto $x=0$, nel qual punto la funzione è zero.

Supponiamo che l'arco si debba scegliere sempre fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$. Il rapporto incrementale è:

$$\frac{h \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{h}}{h} = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{h} .$$

Se h è negativo, e tende a zero, la tangente dell'arco richiesto tende all'infinito negativo, e quindi l'arco tende a $-\frac{\pi}{2}$; invece tende a $+\frac{\pi}{2}$ se h è positivo e tende a zero. Si vede quindi che nel caso che la funzione:

$$x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$$

sia definita in maniera che l'arco debba scegliersi fra i limiti $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$, nel punto zero la derivata destra è diversa dalla derivata sinistra. Se invece supponiamo che l'arco debba prendersi tra i limiti 0 e π (fra i quali limiti la tangente riceve anche tutti i possibili valori), le due derivate, destra e sinistra, nel punto zero sono fra loro eguali, ed eguali a $+\frac{\pi}{2}$.

§. 58.

Mediante la derivazione si possono ottenere delle nuove identità, da altre già note.

Per esempio si sa che si ha identicamente:

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n.$$

Deriviamo primo e secondo membro ed abbiamo:

$$\frac{1-(n+1)\,x^n + n\,x^{n+1}}{(1-x)^2} = 1 + 2\,x + 3\,x^2 + \\ + \ldots + n\,x^{n-1}.$$

§. 59.

Le due funzioni:

$$+ \operatorname{arc\,tg} x$$
$$- \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$$

hanno la medesima derivata, come è facile verificare. Come si spiega questo risultato?

§. 60.

Un problema che ha dato luogo a molti lavori è stato quello della ricerca delle formole che danno la derivata n^{ma} di una funzione composta.

Se si tratti del prodotto di funzioni, la legge di formazione della derivata n^{ma} è data dal cosidetto teorema di *Leibnitz.*

È notevole sull'argomento della derivata n^{ma} di una funzione composta, la seguente formola detta di *Jacobi*:

$$\frac{d^{n-1}}{d\,x^{n-1}}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} =$$

$$= (-1)^{n-1}\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots 2\,n-1}{n}\,\mathrm{sen}\,(n \,\mathrm{arc}\cos x).$$

(v. Hermite, *Lettre à M. Gordan, Math. Ann.* t. X).

Ecco una lista di lavori sull'argomento della derivata n^{ma} di una funzione composta:

Faà di Bruno, *Annali di Tortolini*, t. VI (1855).

Fergola, *Annali di Tortolini*, vol. VIII (1858).

Cayley, *Ann. di Matematica*, (1) t. II, (1859).

Tardy, *Sulle derivate di ordine superiore, ecc. Giorn. di Mat.* II, (1864).

Götting, *Diff. des Ausdrucks x^k wenn x eine Function irgend einer unab. veränd. bedeutet, Math. Ann.*, t. III.

Most, *Ueber die höheren Different. Math. Ann.* t. IV (1871).

Hoppe, *Ueber indipendente Darstellung der höheren Differentialquotienten, Math. Ann.* IV, (1871).

Studnička, *Sitz. berichte der Böhm. Gesellschaft*, (1874).

Fais, *Intorno alle derivate di ordine superiore delle funzioni di funzioni, Giorn. di Mat. di Batt.*, vol. XIII, (1875).

Mossa, *Sulla derivazione successiva delle funzioni composte. Giorn. di Mat. di Batt.*, vol. XIII, (1875).

Teixeira, *Sur le derivées d'ordre quelconque, Giorn. di Mat. di Batt.*, vol. XVIII, (1880).

Königsberger, *Ueber das Bildungsgesetz der höheren Differentiale einer Function der Functionen, Math. Ann.*, vol. XXVII, (1886).

Meyer, *Ueber die höheren Ableitungen eines Quotienten, etc., Monatshefte f. Math. u. Phys.*, (1890).

Meyer, *Ueber algeb. Relationen zwischen den Entwicklungscoefficienten höherer Diff. Math. Ann.* XXXVI, (1890).

Meyer, *Ueber Theilbarkeiteigenschaften ganzer Functionen höherer Diff. Math. Ann.* XXXVI, (1890).

SUL TEOREMA DEL VALOR MEDIO
E SUE CONSEGUENZE.

§. 61.

Sia $f(x)$ una funzione che in tutto un intervallo da a a b abbia derivata finita e *continua*.

Per ogni punto x formiamo il rapporto incrementale e indi formiamo la funzione:

$$\varphi(x, h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x).$$

Si ha così una funzione di due variabili x, h, il cui limite per qualunque x dell'intervallo e per $h = 0$ ha valore zero.

Si può dimostrare che, colle ipotesi fatte, l'espressione $\varphi(x, h)$ *non solo converge a zero con* h, *ma converge a zero uniformemente, cioè, dato* σ *piccolo a piacere, si può sempre trovare un* h *tale che per esso e per tutti gli* h *minori, e per un qualunque* x, *la* φ *sia minore di* σ.

Infatti, pel teorema del valor medio la φ può scriversi:

$$\varphi(x, h) = f'(x + \vartheta h) - f'(x).$$

Ora abbiamo supposto che $f'(x)$ sia una funzione *continua* di x, e si sa d'altra parte che una funzione continua è anche *uniformemente* continua; quindi, dato σ piccolo a piacere, si può trovare un h tale che per qualunque σ, la differenza fra due valori di f' in tutto l'intorno da x ad $x \pm h$ sia sempre minore di σ.

Trovato un tale h e sostituendolo nell'espressione di $\varphi(x, h)$, si vede così che, per qualunque x, la φ resta minore di σ, ciò che si doveva dimostrare.

Si può dimostrare anche il reciproco, cioè che se la $\varphi(x, h)$ converge *uniformemente* a zero, la $f'(x)$ è una funzione *continua* di x (si ponga in relazione questo teorema colle osservazioni fatte alla fine del §. 4 del Cap. II, vol. I delle mie *Lezioni di Calcolo infinitesimale*).

Infatti se per qualunque x (dell'intervallo) si può trovare un medesimo h tale che sia:

$$\frac{f(x \pm h) - f(x)}{\pm h} - f'(x) < \sigma$$

mutando in questa relazione x rispettivamente in $x \mp h$, in corrispondenza col doppio segno che esiste nella formola, si ha:

$$\frac{f(x)-f(x-h)}{h} - f'(x-h) < \sigma$$

$$\frac{f(x)-f(x+h)}{-h} - f'(x+h) < \sigma$$

e quindi certamente:

$$f'(x)-f'(x-h)+ \\ + \left[\frac{f(x)-f(x-h)}{h} - \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] < 2\sigma$$

$$f'(x)-f'(x+h)+ \\ + \left[\frac{f(x)-f(x+h)}{-h} - \frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right] < 2\sigma.$$

Ora siccome le espressioni:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\frac{f(x-h)-f(x)}{-h},$$

tendono per ipotesi allo stesso limite, cioè alla derivata di f in x, così può diminuirsi h in tal modo che la loro differenza sia minore di σ; e quelle relazioni di sopra seguitano a sussistere perchè esse valgono per un h e per tutti gli h ad esso inferiori. Si ha così:

$$f'(x)-f'(x-h) < 3\sigma$$

$$f'(x)-f'(x+h) < 3\sigma$$

cioè $f'(x)$ è una funzione continua di x.

§. 62.

Si può osservare che la formola del valor medio può servire a dimostrare una proprietà assai caratteristica della funzione derivata.

Consideriamo la relazione:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'[a+\vartheta(x-a)] \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

e supponiamo che la funzione derivata f' abbia limite determinato per $x=a$; facendo tendere x ad a, il secondo membro tenderà al valore di tal limite, e il primo tenderà invece al valore della derivata nel punto a; *dunque la funzione derivata è tale che, ammesso solo che avvicinandosi ad un punto essa tenda ad un limite, se ne deduce la sua continuità in tal punto.*

Però il limite dei valori della derivata potrebbe non esistere ed esistere invece la derivata; come lo prova p. es. la funzione $f(x)=x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$, $f(0)=0$, per $x=0$.

Dal teorema di sopra ne viene che, per trovare il valore della derivata in un punto, basta limitarsi a trovare il limite dei valori della derivata, *supposto che questo limite esista.*

§. 63.

Si può dimostrare un teorema più generale di quello del valor medio.

Sieno date tre funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ aventi derivate determinate in tutto un tratto da a a b; esisterà fra a e b un punto x_1 tale che sia identicamente:

$$\begin{vmatrix} f'(x_1), & \varphi'(x_1), & \psi'(x_1) \\ f(a), & \varphi(a), & \psi(a) \\ f(b), & \varphi(b), & \psi(b) \end{vmatrix} = 0.$$

Infatti la funzione:

$$\begin{vmatrix} f(x), & \varphi(x), & \psi(x) \\ f(a), & \varphi(a), & \psi(a) \\ f(b), & \varphi(b), & \psi(b) \end{vmatrix} = F(x)$$

si annulla per $x = a$, e per $x = b$, ed è formata linearmente mediante le tre date, e quindi avrà derivata determinata in tutto l'intervallo; perciò, per il teorema di *Rolle*, esisterà un punto x_1 nell'interno dell'intervallo in cui la derivata della funzione avrà il valore zero. Di qui si ricava la formola di sopra.

§. 64.

Possiamo ancora dimostrare un'altra formola dovuta a *Waring*.

Se $f(x)$ ha derivata determinata per tutti i punti di un intervallo da a a b nei quali estremi il valore di $f(x)$ sia zero, esisterà un valore di x compreso fra a e b in cui sarà:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = k,$$

dove k sia una qualunque costante arbitraria.

Infatti consideriamo la funzione:

$$\varphi(x) = f(x)\, e^{-kx}$$

che, per ipotesi, si annulla per $x = a$ e $x = b$.

Applicando a questa funzione il teorema di *Rolle*, e sopprimendo un fattore esponenziale comune ai due termini dell'equazione che si viene a ottenere si ha proprio la relazione di sopra.

§. 65.

Il teorema del valor medio si può applicare alla teoria delle serie.

Sia $f(x)$ una funzione sempre positiva e finita per ogni x maggiore di a, e che decresca indefinitivamente quando x cresce; formiamo la serie:

$$f(a) + f(a+1) + f(a+2) + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} f(a+m);$$

questa serie è convergente o divergente secondochè il valore della funzione $F(x)$ di cui la derivata sia $f(x)$, tende col crescere di n ad un limite finito oppure ad un limite infinito.

Osserviamo che la funzione $F(x)$, avendo per derivata $f(x)$, ha una derivata positiva; quindi si sa che essa è una funzione *crescente*, e dovrà perciò tendere ad un limite per $n = \infty$, il quale limite potrà essere o finito e l'infinito positivo.

Avendosi:

$$\begin{aligned} F(x+1) - F(x) &= F'(x+\theta) \\ &= f(x+\theta), \end{aligned}$$

e inoltre per ipotesi:

$$f(x) \geqq f(x+\theta) \geqq f(x+1)$$

si ha:

$$f(x) \geqq F(x+1) - F(x) \geqq f(x+1)$$

e facendo $x = a, a+1, a+2, \ldots$ e poi sommando si ha:

$$\sum_{m=0}^{m=n} f(a+m) \geqq F(x+n) - F(a) \geqq$$

$$\geqq \sum_{m=1}^{m=n+1} f(a+m) - f(a).$$

Concludiamo che se $F(x+n)$ ha per limite l'infinito, anche:

$$\sum_{m=0}^{n} f(a+m)$$

per $n = \infty$ ha per limite l'infinito, e la serie è divergente; se poi $F(x+n)$ ha per limite una quantità finita, allora, tenendo presente la seconda parte della formola di sopra, si ricava che la stessa somma tende ad una quantità finita e quindi la serie è convergente.

Così per esempio sia:

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad , \quad (\alpha > 0);$$

sarà:

$$F(x) = -\frac{1}{(\alpha-1)\, x^{\alpha-1}}$$

che per $\alpha > 1$ tende a zero per $x = \infty$, e per $\alpha \leqq 1$ tende a ∞.

Dunque la serie:

$$\frac{1}{a^\alpha}+\frac{1}{(a+1)^\alpha}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)^\alpha}$$

è convergente o divergente secondochè α è maggiore di 1 ovvero eguale o minore di 1 (sempre però positivo).

Sia in secondo luogo:

$$f(x)=\frac{1}{x(\log x)^\alpha}$$

sarà:

$$F(x)=-\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(\log x)^{\alpha-1}}$$

e per $\alpha\leq 1$, il limite di $F(x)$ per $x=\infty$ è l'infinito, mentre per $\alpha>1$ il limite di $F(x)$ è zero. Quindi ne deduciamo che la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a+n)[\log(a+n)]^\alpha}$$

dove $a>1$, è convergente o divergente secondochè α è maggiore di 1, oppure è uguale o minore di 1.

SUL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE.

§. 66.

Diamo degli esempi nei quali non sussiste il teorema del differenziale totale.

Il seguente è di Thomae. (*Abriss einer Theorie der complexen Funct.*, Halle, 1873, p. 17):

$$f(x\,y)=\sqrt{|x\,y|}$$

dove il radicale si prenda sempre positivo, e il prodotto $x\,y$ si consideri sempre in valore assoluto.

Nel punto $x=0$, $y=0$ le due derivate parziali di f sono ambedue zero, come è facile riconoscere direttamente formando i limiti dei rapporti incrementali nel punto $(0, 0)$.

Il differenziale totale di f è zero nel punto $(0, 0)$, e perciò l'incremento di f sarebbe espresso solo da termini di ordine superiore al primo in x, y.

Poniamo:

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \operatorname{sen} \varphi$$

dove $r > 1$ e φ è compreso fra $-\pi$ e $+\pi$; allora:

$$f(x\,y) = r \sqrt{\frac{1}{2} |\operatorname{sen} 2\,\varphi|}\,.$$

Ora se una tale espressione potesse esprimersi solo con termini di ordine superiore al primo in x e y, il secondo membro avrebbe per fattore almeno r^2; e quindi, sopprimendo un fattore comune r, si avrebbe:

$$\sqrt{\frac{1}{2} |\operatorname{sen} 2\,\varphi|}$$

espresso con termini aventi tutti per fattore r. Quindi per un qualunque φ il secondo membro si annullerebbe per $r=0$ e il primo no. Ciò costituisce una contraddizione.

§. 67.

Un altro esempio simile è dato dalla funzione:

$$f(x\,y) = \frac{x\,y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

cui si attribuisca il valore zero per $x = y = 0$.

Le derivate parziali di questa funzione non hanno limite determinato per $x = y = 0$, pure essendo esse determinate in tal punto, in cui hanno propriamente valore zero.

Per modo che il differenziale totale di $f(x\,y)$ risulta zero, e quindi l'incremento della funzione risulterebbe composto di termini almeno di 2.° ordine in x, y. Intanto evidentemente:

$$\Delta f = \frac{d\,x\,d\,y}{\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2}}$$

e se si fanno convergere $d\,x$, $d\,y$ a zero in modo che il limite del loro rapporto sia k si ha:

$$\lim \frac{\Delta\,f}{d\,x} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^2} + 1}}$$

donde:

$$d\,f = \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}\,d\,x\,,$$

e si vede perciò che non è zero la parte di 1.° ordine nello sviluppo dell'incremento di f.

§. 68.

Negli esempi precedenti erano discontinue ambedue le derivate parziali. Nel seguente esempio invece una delle derivate parziali è continua, ma l'altra no.

Sia:

$$f(x\,y) = x \operatorname{sen}\left(4 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right)$$

colla supposizione che per $x=0$ e $y=0$ la f sia anche zero.

Questa funzione è continua nel punto $x=0$ $y=0$; la sua derivata parziale rispetto ad x è funzione continua di y nel punto zero, mentre la derivata parziale rispetto ad y non è funzione continua di x nel punto zero. Non sussisterà il teorema del differenziale totale.

SUL TEOREMA DELL'INVERSIONE DELLE DERIVAZIONI.

§. 69.

Su questo teorema sono stati pubblicati diversi lavori, fra cui alcuni tendenti a stabilire un numero minimo di condizioni fra loro indipendenti perchè il teorema sussista. Le condizioni che risultano dalla dimostrazione da noi riprodotta nelle citate *Lezioni di Calcolo,* sono:

1.° che esistano e sieno finite le derivate prime della funzione in tutto un intorno del punto;

2.° che esista la derivata seconda $f''_{x_1 x_2}$ (derivando cioè prima rispetto ad x_2 e poi rispetto ad x_1) in tutto un intorno del punto $x_1\, x_2$;

3.° che una tal derivata sia continua nel punto $x_1\, x_2$, rispetto ad ambedue le variabili.

Da queste ipotesi ne risulta naturalmente che anche la f'_{x_1} è *continua rispetto a x_1 in tutto l'intorno.* Siccome poi ne risulta anche l'esistenza di $f''_{x_2 x_1}$ così si ricava ancora che f'_{x_1} è certamente *continua rispetto a x_2 nel punto* $x_1\, x_2$, perchè ammette la derivata rispetto a x_2.

Per questo teorema si possono vedere i seguenti lavori:

Blanchet, *Extrait d'une lettre à M. Liouville, Journal de Liouville*, vol. VI, p. 65 (1841).

Lindelöf, *Acta societatis Fennicae*, vol. VIII, pars I, p. 205 (1867).

Genocchi, *Intorno ad un teorema di Calcolo differenziale. Atti Acc. Torino*, vol. IV, p. 327 (1869).

Schwarz, *Math. Abhandl.*, vol. II, p. 275 (1873).

Dini, *Lezioni di Analisi infinit.* Pisa, 1907, vol. I, p. 164.

Bettazzi, *Giorn. di mat. di Batt.*, vol. XXVI (1888).

Peano, *Mathesis* (1890), p. 153.

Stolz, *Grundzüge der Diff. und Integr. Rech.*, Leipzig, 1893, t. I, p. 146.

Daremo nei §§. seguenti vari esempi in cui non sussiste il teorema di cui parliamo.

§. 70.

Consideriamo la funzione:

$$f(x\,y) = x^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - y^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}$$

dove si intenda che l'arco tangente debba scegliersi sempre fra $-\frac{\pi}{2}$ e $+\frac{\pi}{2}$.

Le prime derivate sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2\,x \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - 2\,y \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y},$$

e i valori di queste derivate per $x = 0$ $y = 0$ sono zero. Queste derivate sono sempre finite e continue anche nel punto (0, 0).

La seconda derivata in un punto x, y qualunque è:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

che non è una funzione *continua* nel punto (0, 0).

In tal punto il valore delle seconde derivate è dato dalle formole:

$$f''_{yx} = -1 \qquad f''_{xy} = +1,$$

donde si vede che tali seconde derivate esistono ambedue, ma non sono eguali.

§. 71.

Consideriamo la funzione che per y diverso da zero è definita dalla formola:

$$f(x\,y) = y^2 \operatorname{sen} \frac{x}{y}$$

e per $y = 0$ è zero.

Le derivate parziali sono per x, y diversi da zero:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2\,y \operatorname{sen} \frac{x}{y} - x \cos \frac{x}{y}$$

mentre per $y = 0$ e x qualunque, le derivate sono

$$\frac{\partial f(x\,0)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f(x\,0)}{\partial y} = \lim_{k=0} k \operatorname{sen} \frac{x}{k} = 0$$

e per $y=0$, $x=0$ le stesse derivate sono:

$$\frac{\partial f(0\,0)}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial f(0\,0)}{\partial y}=0\,.$$

Esaminiamo la derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

nel punto x, y qualunque; poi nel punto x qualunque e $y=0$; e poi nel punto $x=0$, $y=0$.

Per x, y diversi da zero la derivata seconda è:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\cos\frac{x}{y}+\frac{x}{y}\operatorname{sen}\frac{x}{y}$$

e poichè questa è una funzione continua nel punto che si considera, così possiamo dire che in un punto di coordinate x, y qualunque (diversi da zero) sussiste il teorema dell'invertibilità.

Per x qualunque e $y=0$ si ha:

$$\frac{\partial^2 f(x\,0)}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f(x\,0)}{\partial y}=0$$

che non è certamente il limite della espressione soprascritta per $y=0$, perchè per $y=+0$ e $x>0$ la espressione di sopra converge a $+\infty$, e per $y=-0$ e $x>0$ la espressione di sopra converge a $-\infty$. In ogni caso quindi il limite a destra non è eguale al limite a sinistra.

Non sussiste il teorema dell'inversione; perchè la derivata:

$$\frac{\partial^2 f(x\,0)}{\partial y\,\partial x}$$

è uguale alla derivata nel punto $y = 0$ della funzione:

$$\frac{\partial f(x\,y)}{\partial x},$$

cioè è eguale a:

$$\lim_{k=0} \frac{\dfrac{\partial f(x\,k)}{\partial x}}{k} = \lim_{k=0} \cos\frac{x}{k}$$

che è indeterminato. Dunque delle due derivate di 2.° ordine una non esiste e l'altra è zero.

Vediamo ora che cosa succede nel punto (0, 0).

In tal punto la

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$$

è ancora eguale a zero; mentre la

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

è eguale a:

$$\lim_{k=0} \frac{\dfrac{\partial f(0\,k)}{\partial x}}{k} = 1\,.$$

Quindi nel punto (0, 0) le due derivate parziali esistono ambedue, ma sono disuguali.

RAPPORTI INCREMENTALI DI ORDINE SUPERIORE.

§. 72.

È interessante la seguente considerazione sulle derivate di 2.° ordine e di ordine superiore. Come la prima derivata si può esprimere come limite del rapporto incrementale della funzione, così la seconda derivata è definita come limite del rapporto incrementale della prima derivata; ma può anche esprimersi come limite di una espressione formata colla funzione stessa.

Essendo:

$$f''(x) = \lim_{k=0} \frac{f'(x+k) - f'(x)}{k}$$

e:

$$f'(x) = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si ha:

$$f''(x) =$$
$$= \lim_{k=0} \lim_{h=0} \frac{f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x)}{h\,k}\,.$$

In questa espressione h, k devono convergere a zero in un modo qualunque e indipendentemente l'uno dall'altro, e *prima l'uno e poi l'altro.* È indifferente poi se deve convergere a zero prima h o prima k, perchè il secondo membro è simmetrico in h, k.

Ora prima di tutto si può far vedere che il limite dell'espressione soprascritta è lo stesso del limite che si ottiene ponendo prima $k = h$ e poi $h = 0$.

[In generale non potrebbe affermarsi che per una funzione $\varphi(h\,k)$ di due variabili $h\,k$ il limite $\lim\limits_{h=0} \varphi(h, h)$ è lo stesso del limite $\lim\limits_{h=0} \lim\limits_{k=0} \varphi(h\,k)$].

Infatti ponendo $k = h$ si ha:

$$\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}\,.$$

Ma per il teorema del valor medio (supposta l'esistenza della derivata prima in tutto un intorno del punto x, ipotesi che risulta come conseguenza della supposta esistenza della derivata seconda nel punto x) e ponendo:

$$\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$$

si ha:

$$\begin{aligned} & f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) = \\ & = \varphi(x+h) - \varphi(x) \\ & = h\,\varphi'(x+\vartheta h) \\ & = h\,[f'(x+(1+\vartheta)h) - f'(x+\vartheta h)] \end{aligned}$$

dove al solito il numero ϑ è compreso fra 0 e 1.

Possiamo quindi scrivere identicamente:

$$\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} =$$

$$= \frac{f'(x+(1+\vartheta)h) - f'(x)}{(1+\vartheta)h} +$$

$$+ \vartheta\left[\frac{f'(x+(1+\vartheta)h) - f'(x)}{(1+\vartheta)h} - \frac{f'(x+\vartheta h) - f'(x)}{\vartheta h}\right].$$

Passando al limite per $h=0$, essendo:

$$\begin{aligned} & \lim_{h=0} \frac{f'(x+(1+\vartheta)h) - f'(x)}{(1+\vartheta)h} = \\ & = \lim_{h=0} \frac{f'(x+\vartheta h) - f'(x)}{\vartheta h} = f''(x) \end{aligned}$$

si ha infine, esista o no il limite di ϑ, semplicemente $f''(x)$.

Con ciò resta dimostrato il nostro assunto. Nella dimostrazione data dal Dini (*Fondamenti*, ecc. p. 89-90) di questo teorema dovea supporsi la esistenza di $f''(x)$ anche nell'intorno di x. La dimostrazione da noi data si trova nell'Harnack. (*Elemente der Diff. u. Int. Rech.* Leipzig, 1881, p. 56).

Possiamo ora dimostrare ancora che la derivata seconda (supposto che esista) può anche considerarsi come il limite dell'altra espressione (v. Dini, cit., p. 89):

$$\lim_{h=0} \frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

Infatti nelle stesse notazioni precedenti si ha:

$$\begin{aligned} f(x+h)+f(x-h)-2f(x) &= \varphi(x)-\varphi(x-h) \\ &= h\,\varphi'(x-\vartheta h) \\ &= h\,[f'(x+(1-\vartheta)h)-f'(x-\vartheta h)]. \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere identicamente:

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=$$

$$=\frac{f'(x+(1-\vartheta)h)-f'(x)}{(1-\vartheta)h}(1-\vartheta)+$$

$$+\frac{f'(x-\vartheta h)-f'(x)}{-\vartheta h}\vartheta$$

e il limite del secondo membro per $h=0$ è esattamente $f''(x)$. Anche qui osserviamo che per la dimostrazione data dal Dini di questo teorema deve supporsi in più la esistenza della derivata seconda nell'*intorno* del punto.

Un'interessante osservazione è la seguente:

Noi abbiamo visto che, se esiste la derivata seconda nel punto x, essa è il limite per $h=0$ di una delle due espressioni:

$$\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2} \qquad (a)$$

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}. \qquad (b)$$

Di qui però non si può dedurre che se esistono questi limiti, essi rappresentano la derivata seconda della funzione, perchè questa invece potrebbe non esistere. Un' osservazione di questo genere non si presenta nel caso delle derivate prime perchè ivi, se esiste il limite del rapporto incrementale, se ne ricava senz'altro la esistenza della derivata.

Invece potrebbe esistere il limite di una delle due espressioni segnate, senza che esista la derivata prima della funzione, e quindi senza che esista la derivata seconda; oppure, potrebbe esistere il limite di (a) o (b) senza che esista la derivata seconda, *pure esistendo la derivata prima.*

Daremo qui sotto degli esempi per ambedue questi casi.

Si potrebbero fare poi considerazioni analoghe per la derivata di ordine n^{mo} di una funzione di una variabile, e inoltre per le derivate parziali delle funzioni di più variabili.

Consideriamo il seguente esempio:

La funzione $f(x) = x \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}$, colla ipotesi che $f(0) = 0$, è una funzione senza *derivata prima* nel punto $x = 0$. Non avrà dunque neanche la derivata seconda.

Intanto se formiamo il rapporto incrementale (b)

troviamo:

$$\frac{h \operatorname{sen}^2 \frac{1}{h} - h \operatorname{sen}^2 \frac{1}{h}}{h^2}$$

che è zero per qualunque h e che quindi ha per limite zero per $h = 0$. Dunque il limite del rapporto incrementale (b) esiste senza che esista la derivata seconda.

Esaminiamo ora se per la medesima funzione esiste il limite del rapporto (a). Esso diventa:

$$\frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2h} - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{h}}{h} = \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2h}\left(1 - 4 \cos^2 \frac{1}{2h}\right)}{h} =$$

$$= \frac{-2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2h}\left(1 + 2 \cos \frac{1}{h}\right)}{h}$$

e per $h = 0$ questa espressione ha limite indeterminato; essa oscilla fra $-\infty$ e $+\infty$.

È notevole quindi che mentre per il caso in cui esista la derivata seconda, i limiti di (a) (b) sono eguali, se la derivata non esiste i limiti delle espressioni (a) (b) possono essere tra loro diversi.

Consideriamo ancora il seguente altro esempio (Stolz, *Grundzüge der Diff. und Int. Rech.*, vol. I, p. 93):

Si definisca la funzione:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \left(c_2 + x \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right) x^2$$

colla ipotesi $f(0) = c_0$. Questa funzione *ha la derivata prima, ma manca della derivata seconda*, come è facile verificare.

Intanto il limite del rapporto (a), cioè:

$$\lim_{h=0} \frac{2\, c_2\, h^2 + 8\, h^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{2\, h} - 2\, h^3 \operatorname{sen} \dfrac{1}{h}}{h^2}$$

esiste ed è eguale a $2\, c_2$.

Su questo argomento si può vedere, oltre il Dini citato, Harnack, *Math. Ann.*, vol. XXIII, p. 260; Peano, *Rivista di mat.*, vol. II, p. 32.

DERIVABILITÀ INDEFINITA DELLE FUNZIONI E FORMOLA DI TAYLOR-MACLAURIN.

§. 73.

Il problema della sviluppabilità in serie di Taylor di una funzione è uno dei più importanti del Calcolo differenziale.

Supponiamo data una funzione $f(x)$ definita in tutto un tratto da $x = a$ sino ad $x = a + H$. A quali condizioni deve essere sottoposta la funzione $f(x)$ perchè il valore $f(a + h)$ per ogni $h < H$ sia espresso dalla serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\,!} f^n\,(a)\, h^n \;?$$

Come si vede, perchè questo si verifichi, non solo è necessario che questa serie sia convergente, ma che il suo valore sia $f(a + h)$. In seguito daremo un esempio pel quale la serie è convergente, ma il suo valore non è $f(a + h)$.

Supposta la sviluppabilità in serie di Taylor ne vengono le seguenti conseguenze, che si possono ricavare dai noti teoremi sulle serie di potenze:

1.° Per ogni $h < H$ la derivata r^{ma} di $f(x)$ in un punto $a+h$, è anche sviluppabile in serie di Taylor.

2.° Se $f(a+h)$ è sviluppabile in serie riferita al punto a (diremo che una serie di Taylor è *riferita al punto a,* quando nei vari termini dello sviluppo compariscono le derivate di f prese nel punto a) la serie che si ottiene mutando h in $-h$ è anche convergente, ma non possiamo dire che il suo valore sia $f(a-h)$.

3.° Se si sa che $f(a+H)$ è sviluppabile in serie di Taylor, e che quindi la serie:

$$\sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\, H^n$$

è convergente e ha per valore $f(a+H)$, si può dedurre che la stessa serie per un $|h| < |H|$ è anche convergente, ma non si può dedurre che il suo valore sia $f(a+h)$.

4.° Se $f(a+h)$ per ogni $h < H$ è sviluppabile in serie di Taylor *riferita al punto a,* sarà per gli stessi valori di h sviluppabile in serie riferita ad un altro qualunque punto fra a e $a+h$ p. es. $a+k$ dove sia $|k| < |h|$.

5.° Di qui si ricava che devono necessariamente *esistere* ed essere *finite* tutte le derivate di qualunque ordine finito della funzione $f(x)$ in un qualunque punto x *compreso* fra a e $a+H$. Però ciò non toglie che, crescendo all'infinito l'ordine di derivazione, il valore della derivata stessa diventi ∞; cioè che $\lim_{n=\infty} f^{(n)}(x) = \infty$.

6.° Si ricava ancora che la serie:

$$\sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\, k'^n$$

dove $a < x + k' < H$, deve essere convergente per ogni x e k' soddisfacenti all'indicata limitazione.

§. 74.

Per la sviluppabilità in serie di Taylor, abbiamo detto nel §. precedente che *è necessario* che la $f(x)$ abbia *finite* le derivate di qualunque ordine finito per un qualunque x dell'intervallo.

Il Lagrange *(Oeuvres complètes,* vol. IX, p. 65; vol. X, p. 72) avea creduto che questa fosse una condizione anche sufficiente; ma il Cauchy *(Leçons sur le Calcul infinit.,* (1823) p. 152, (1826) p. 105) trovò per il primo un esempio in cui, pur essendo finite le derivate, non si ha la sviluppabilità.

L'esempio di Cauchy è quello della funzione che per $x = 0$ è zero e per x diverso da zero è:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Noi vogliamo sviluppare qui i dettagli di questo esempio, e riserbiamo al prossimo §. le osservazioni che sono state fatte ad esso.

Essendo zero il limite dei valori della funzione per $x = 0$, si ha che la $f(x)$ risulta una funzione continua anche per $x = 0$.

Esaminiamo le successive derivate della funzione $f(x)$.

Per un x diverso da zero si ha:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f''(x) = \left[-\frac{2 \cdot 3}{x^4} + \frac{2 \cdot 2}{x^6}\right] e^{-\frac{1}{x^2}}$$

. . . .

e queste derivate sono tutte finite; per $x = 0$ le derivate sono:

$$f'(0) = \lim_{h=0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h=0} \frac{1}{h} e^{-\frac{1}{h^2}} = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \frac{1}{e^{\frac{1}{h^2}}}$$

e sviluppando $e^{\frac{1}{h^2}}$ in serie si ha:

$$f'(0) = \lim_{h=0} \frac{1}{h} \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{2!\, h^4} + \ldots} =$$

$$= \lim_{h=0} \frac{1}{h + \frac{1}{h} + \frac{1}{2\, h^3} + \ldots} = 0 .$$

Così:

$$f''(0) = \lim_{h=0} \frac{f'(x+h) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h=0} \frac{2\, e^{-\frac{1}{h^2}}}{h^4} = 0 .$$

Analogamente si troverebbe $f^{(n)}(0) = 0$. Dunque nel punto zero sono zero tutte le derivate della funzione; se si forma quindi lo sviluppo di Taylor della funzione riferito al punto zero, un tale sviluppo si presenta con tutti i suoi coefficienti zero. È evidente allora che la funzione $e^{-\frac{1}{x^2}}$ non potrà svilupparsi in serie di Taylor ordinata secondo le potenze ascendenti di x.

§. 75.

La legittimità o, dirò così, la purezza dell'esempio contenuto nel §. precedente è stata oppugnata da qualche Autore, in quantochè si è detto che per quell'esempio il valore della funzione nel punto zero non è dato dalla stessa formola che dà i valori della funzione negli altri punti, ma è dato da una nuova ipotesi che noi siamo costretti ad aggiungere alla formola analitica che rappresenta la funzione, perchè quella formola analitica diventa illusoria per $x = 0$.

Ora a tutto rigore, e volendo dare al concetto di funzione tutta l'estensione che gli si suole ora dare, questa non è un'obbiezione; però è opportuno trovare un altro esempio in cui non possa più aver luogo un'obbiezione del genere indicato, acciocchè non si possa credere che, restringendo il concetto di funzione, (intendendo p. es. per funzioni, quelle i cui valori devono essere sempre rappresentati dalla medesima formola analitica), l'esistenza delle derivate finite basti per conchiudere la sviluppabilità in serie di Taylor.

Il seguente esempio trovato da Du Bois Reymond

(*Math. Ann.* vol. XXI, p. 111) dissipa anche questo dubbio.

Sia:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{2p!} \frac{x^{2p}}{x^2 + a^2_p}$$

dove a_p sono delle quantità tendenti a zero per $p = \infty$; p. es.:

$$a_p = \frac{1}{2^p}.$$

La serie del secondo membro è convergente per ogni x, perchè i suoi termini sono inferiori a quelli della serie convergente:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{2p!}.$$

Le derivate di qualunque ordine di questa funzione hanno sempre un valore finito; ma essa non è sviluppabile in serie di Taylor riferita al punto $x = 0$.

Troviamo le derivate n^{me} dei termini di cui si compone il secondo membro di $f(x)$.

Poniamo:

$$\frac{x^{2p}}{x^2 + a^2_p} = \frac{x^{2p-1}}{2} \left\{ \frac{1}{x + i\,a_p} + \frac{1}{x - i\,a_p} \right\}$$

dove $i = \sqrt{-1}$, e applichiamo a:

$$x^{2p-1} \cdot \frac{1}{x \pm i\,a_p}$$

la formola di Leibnitz sulla derivazione di un prodotto. Abbiamo così:

$$\frac{d^n}{d\,x^n}\frac{x^{2p-1}}{x \pm i\,a_p} = n!\,(-1)^n\,x^{2p-n-2}\,\mathrm{A}$$

dove $\left(\text{ponendo } \dfrac{x}{x \pm i\,a_p} = \gamma\right)$:

$$A = \gamma^{n+1} - (2p-1)\,\gamma^n + \frac{(2p-1)\,(2p-2)}{1\,.\,2}\,\gamma^{n-1} + \dots$$
$$+ (-1)^n\,\frac{(2p-1)\dots(2p-n)}{1\,.\,2\dots n}\,\gamma.$$

Di qui si ha:

$$\frac{d^n}{d\,x^n}\,\frac{x^{2p}}{x^2 + a^2_p} = (-1)^n\,\frac{n\,!}{2}\,x^{2p-n-2}\,\Sigma$$

dove:

$$\Sigma = \sum_{r=0}^{r=n} (-1)^r\,\frac{(2p-1)\dots(2p-r)}{1\,.\,2\dots r} \times$$
$$\times \left[\left(\frac{x}{x+i\,a_p}\right)^{n+1-r} + \left(\frac{x}{x-i\,a_p}\right)^{n+1-r}\right].$$

Intanto si ha:

$$\left(\frac{x}{x+i\,a_p}\right)^{n+1-r} + \left(\frac{x}{x-i\,a_p}\right)^{n+1-r} =$$
$$= 2\left(\frac{x^2}{x^2 + a^2_p}\right)^{\frac{n+1-r}{2}} \cos\left((n+1-r)\,\text{arc tg}\,\frac{a_p}{x}\right).$$

[Questa formola si dimostra subito osservando che:

$$\cos\left(\text{arc tg}\,\frac{a_p}{x}\right) = \left(\frac{x^2}{a^2_p + x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{sen}\left(\text{arc tg}\,\frac{a_p}{x}\right) = \left(\frac{a^2_p}{a^2_p + x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

e che in conseguenza della formola di Moivre, può scriversi:

$$\cos[(n+1-r)\omega] = \cos^{n+1-r}\omega -$$
$$-(n+1-r)_2 \cos^{n-1-r}\omega \operatorname{sen}^2\omega + \text{ecc.}]$$

Ma il secondo membro dell' ultima formola per qualunque x reale si conserva sempre minore di 2; quindi possiamo dire che:

$$\frac{d^n}{dx^n}\frac{x^{2p}}{x^2+a^2_p}$$

per qualunque n e p è sempre minore in valore assoluto di:

$$n!\,x^{2p-n-2}\left[1+(2p-1)+\frac{(2p-1)(2p-2)}{1.2}+\right.$$
$$\left.+\ldots\frac{(2p-1)\ldots(2p-n)}{1.2\ldots n}\right],$$

che a sua volta per un indice:

$$2p > n$$

è minore [ponendo in luogo di ciascuno degli $n+1$ termini della parentesi la quantità maggiore $(2p-1)\ldots(2p-n)$] di:

$$n!\,x^{2p-n-2}[(2p-1)\ldots(2p-n)+$$
$$+(2p-1)\ldots(2p-n)+\ldots]$$

cioè di:

$$(n+1)!\,(2p-1)(2p-2)\ldots(2p-n)\,x^{2p-n-2};$$

per modo che:

$$\frac{(-1)^{p+1}}{2p!}\frac{d^n}{d\,x^n}\frac{x^{2p}}{x^2+a^2_p}$$

è minore di:

$$\frac{1}{2p}\frac{\overline{n+1}\,!}{\overline{2p-n-1}\,!}x^{2p-n-2}$$

che per $p=\infty$ converge a zero.

Onde possiamo dire che, se formiamo la serie delle derivate n^{me} dei termini della serie data, si potrà sempre trovare un indice p (basta prendere $2p>n$) tale che per esso e per tutti gli altri ad esso maggiori, i termini di una tal serie delle derivate sieno minori, a cominciare dal p^{mo} in poi, in valore assoluto dei termini della serie:

$$\frac{(n+1)!}{2}\sum_{p=p}^{p=\infty}\frac{1}{p}\frac{x^{2p-n-2}}{\overline{2p-n-1}!}$$

che è una serie convergente; dunque la serie delle derivate n^{me} è una serie *equiconvergente;* per un teorema sulla derivazione per serie che si può facilmente adattare al caso nostro, si ha perciò che la derivata n^{ma} della serie data è eguale alla serie delle derivate n^{me}; dunque la serie data è derivabile termine a termine qualunque numero di volte si voglia. Il risultato resta vero anche per $x=0$. Esistono dunque e sono finite le derivate di $f(x)$ di qualunque ordine e per qualunque x.

Intanto si può far vedere che $f(x)$ non è sviluppabile in serie di Taylor.

Infatti, sviluppando il secondo membro di $f(x)$ colla formola binomiale, noi potremo avere una espressione ordinata secondo le potenze ascendenti di x.

Avendosi:

$$\frac{x^{2p}}{x^2+a^2_p}=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q\,x^{2p+2q}}{\overline{2p}\,!\,a_p{}^{2q+2}}$$

si avrebbe per $f(x)$ l'espressione:

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+q+1} x^{2p+2q}}{2\, p!\, a_p^{2q+2}}$$

che, ordinata secondo le potenze ascendenti di x, dà, ponendo $p + q = r$:

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^{r+1} x^{2r} \sum_{p=1}^{r} \frac{1}{2\, p!\, a_p^{2(r-p+1)}}.$$

Ora si può far vedere che *per qualunque* x, questa è una serie *divergente,* e quindi non rappresenta $f(x)$ che perciò non può svilupparsi in serie ordinata secondo le potenze ascendenti di x.

Giacchè abbiamo detto che le a_p sono quantità tendenti a zero; dunque qualunque sia l'x dato, piccolo finchè si vuole, si potrà sempre trovare un indice λ tale che $a_\lambda\ a_{\lambda+1}\ a_{\lambda+2} \ldots$ sieno tutte minori di x.

Allora la somma precedente la possiamo scrivere così:

$$\sum_{r=1}^{r=\lambda-1} (-1)^{r+1} x^{2r} \sum_{p=1}^{p=r} \frac{1}{2\, p!\, a_p^{2r-2p+2}} +$$

$$+ \sum_{r=\lambda}^{r=\infty} (-1)^{r+1} x^{2r} \sum_{p=1}^{p=\lambda-1} \frac{1}{2\, p!\, a_p^{2r-2p+2}} +$$

$$+ \sum_{r=\lambda}^{\infty} (-1)^{r+1} x^{2r} \sum_{p=\lambda}^{p=r} \frac{1}{2\, p!\, a_p^{2r-2p+2}}.$$

Il primo di questi sommatori doppi è evidentemente una quantità finita, perchè somma di un numero finito di termini. Il secondo rappresenta anche una serie convergente, perchè esso può scriversi:

$$\sum_{r=\lambda}^{\infty} (-1)^{r+1} \sum_{p=1}^{\lambda-1} \left(\frac{x}{a_p}\right)^{2r} \frac{1}{a^2_p} \frac{a_p{}^{2p}}{2p!} =$$
$$= \sum_{p=1}^{\lambda-1} \frac{1}{a_p{}^2} \frac{a_p{}^{2p}}{2\,p!} \sum_{r=\lambda}^{\infty} (-1)^{r+1} \left(\frac{x}{a_p}\right)^{2r}.$$

Essendo $\frac{x}{a_p} < 1$ per qualunque p fra 1 e $\lambda - 1$, la serie rappresentata dal Σ interno è una serie convergente, e quindi tutta l'espressione diventa una combinazione lineare di $\lambda - 1$ serie convergenti.

L'ultimo sommatorio invece rappresenta una serie divergente. Perchè esso può scriversi:

$$\sum_{r=\lambda}^{\infty} (-1)^{r+1} \sum_{p=\lambda}^{r} \left(\frac{x}{a_p}\right)^{2r} \frac{1}{a_p{}^2} \frac{a_p{}^{2p}}{2\,p!}.$$

Essendo a_λ maggiore di $a_{\lambda+1}$ $a_{\lambda+2}\ldots$ il termine generale di questa serie è certamente maggiore in valore assoluto di:

$$\frac{1}{a_\lambda{}^2} \left(\frac{x}{a_\lambda}\right)^{2r} \sum_{p=\lambda}^{r} \frac{a_p{}^{2p}}{2\,p!}$$

che, come si vede, non può tendere a zero per $r = \infty$, anzi tende ad ∞ perchè $\frac{x}{a_\lambda}$ è una quantità maggiore di 1, e inoltre il $\sum\limits_{p=\lambda}^{r}$ risulta della somma di tanti termini tutti positivi, e quindi non può convergere a zero.

Percio con più ragione possiamo affermare che il termine generale della serie in quistione non converge a zero ma all'∞, e la detta serie è divergente.

§. 76.

Diamo ora un esempio di funzione per cui la serie di Taylor corrispondente, converge, ma non rappresenta il valore della funzione, eccettuati al massimo alcuni punti in numero infinito.

Colle considerazioni riportate nel §. 74 possiamo già assegnare un siffatto esempio; infatti la funzione:

$$f(x) = \varphi(x) + e^{-\frac{1}{x^2}}$$

dove si suppone che $\varphi(x)$ sia sviluppabile in serie di Taylor nell'intorno del punto $x = 0$, è di tale specie; perchè se formiamo la serie di Taylor colle derivate successive di $f(x)$ nel punto $x = 0$, abbiamo una serie il cui valore per ogni x non è $f(x)$, ma $\varphi(x)$; ciò in forza di quanto abbiamo dimostrato nel citato §. 74.

Un altro esempio è quello della funzione:

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^r}{r!} \frac{a^{-r}}{a^{-2r} + x^2} \qquad (a > 1)$$

considerata da Pringsheim (*Münchener Berichte*, 1892, p. 222).

La serie del secondo membro converge *assolutamente* per ogni x, perchè i suoi termini sono minori di quelli della serie:

$$\Sigma \frac{a^r}{r!}$$

che è una serie convergente.

Esaminiamo la serie delle derivate n^{me} dei termini della serie data.

Si ha identicamente:

$$\frac{a^{-r}}{a^{-2r}+x^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{i}{x+a^{-r}\,i} - \frac{i}{x-a^{-r}\,i}\right]$$

e quindi:

$$\frac{d^n}{d\,x^n}\frac{a^{-r}}{a^{-2r}+x^2} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2}\,n!\left[\frac{i}{(x+a^{-r}\,i)^{n+1}} - \frac{i}{(x-a^{-r}\,i)^{n+1}}\right].$$

Le due quantità complesse coniugate del secondo membro hanno il medesimo modulo che è:

$$\frac{1}{(x^2+a^{2r})^{\frac{n+1}{2}}}$$

e quindi, essendo il modulo della somma minore della somma dei moduli, ed essendo d'altra parte, reale il primo membro, possiamo dire che:

$$\frac{d^n}{d\,x^n}\frac{a^{-r}}{a^{-2r}+x^2} \leq n!\,\frac{1}{(x^2+a^{-2r})^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$\leq n!\,a^{(n+1)r}.$$

Si vede dunque che la serie delle derivate n^{me} dei termini della serie data ha i suoi termini minori dei termini della serie:

$$n! \sum_0^\infty \frac{1}{r!} [a^{(n+1)}]^r$$

che è una serie convergente; perciò la serie delle derivate n^{me} è *equiconvergente,* e rappresenta la derivata n^{ma} di $f(x)$.

Dunque per ogni x la derivata di qualunque ordine di $f(x)$ è finita.

Per $x=0$ la derivata n^{ma} di un termine qualunque è (come risulta dalla formola precedente):

$$\left(\frac{d^n}{d\,x^n}\frac{a^{-r}}{a^{-2r}+x^2}\right)_{x=0} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2}\, n!\, a^{r(n+1)}(1-(-1)^{n+1})$$

cioè, per $n=$ dispari la derivata n^{ma} di qualunque termine è zero, e per $n=$ pari la derivata n^{ma} del termine r^{mo} è:

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\, n!\, a^{(n+1)r}.$$

La derivata n^{ma} di $f(x)$ nel punto $x=0$ è pertanto zero per n dispari ed è:

$$(-1)^{\frac{n}{2}}\, n! \sum_0^\infty (-1)^r \frac{[a^{(n+1)}]^r}{r!} = (-1)^{\frac{n}{2}}\, n!\, e^{-a^{n+1}}.$$

per n pari.

Formiamo ora la serie di Taylor riferita al punto $x=0$, cioè la serie (ponendo $n=2k$):

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty (-1)^k e^{-a^{2k+1}} x^{2k}.$$

Questa è una serie convergente perchè è facile riconoscere che il rapporto di un termine al precedente ha per limite zero.

Ma essa non può rappresentare il valore di $f(x)$, perchè si può dimostrare che $f(x)$ non è sviluppabile in serie di Taylor attorno al punto $x = 0$.

Quest'asserzione si può dimostrare mediante la teoria delle funzioni analitiche di variabili complesse, perchè si può osservare che, se si intende la funzione $f(x)$ estesa al piano complesso, in un qualunque intorno del punto zero nel piano complesso esistono sempre punti in cui la $f(x)$ diventa infinita. (La $f(x)$ diventa ∞ nei punti $x = i\,a^{-2r}$).

Stando nei limiti delle variabili reali il Pringsheim (*Math. Ann.* t. 42. p. 162) ha cercato di dimostrare la impossibilità della relazione $f(x) = \varphi(x)$ per ogni x, non partendo però dalla funzione $f(x)$ quale l'abbiamo data sopra, ma da un'altra $f(x)$ assai simile. Però alla dimostrazione del Pringsheim si può osservare che essa vale per $a \geqq \left(\frac{e+1}{e-1}\right)^2$, mentre che il fatto sussiste per ogni $a > 1$.

Noi non insisteremo però su questa discussione.

Vogliamo notare solo che, se formiamo la funzione:

$$F(x) = f(x) - \varphi(x),$$

abbiamo l'esempio di una funzione che per $x = 0$ è zero, e ha zero tutte le derivate di qualunque ordine; e che pure non è una funzione identicamente zero.

Questa osservazione è importante perchè il Lagrange nel V capitolo della sua *Théorie des fonc-*

tions analytiques, (Oeuvres complètes, t. IX, p. 63) aveva creduto che una funzione continua che si annulli per un valore della variabile, insieme a tutte le sue derivate di qualunque ordine, dovesse identicamente annullarsi per qualunque valore della variabile.

§. 77.

Se applichiamo le analoghe considerazioni fatte nel §. precedente alla funzione:

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{1}{r!} \frac{a^{-r}}{a^{-2r} + x^2} \qquad (a > 1)$$

troviamo che anche questa è una funzione sempre finita per ogni x, e ha le derivate sempre finite.

Intanto la serie di Taylor corrispondente sarebbe (facendo calcoli perfettamente analoghi a quelli del §. precedente):

$$\sum_0^\infty (-1)^k e^{a^{2k+1}} x^{2k}$$

che è una serie divergente, perchè il rapporto di un termine al precedente può crescere oltre ogni limite; perciò questa serie non può certamente rappresentare il valore della funzione per ogni x.

Si ha così un altro esempio analogo a quello di Du Bois Reymond trattato nel §. 75 e più semplice di quello.

§. 78.

Poichè le funzioni date precedentemente dipendono dal quadrato di x, e non dalla semplice x, i risultati restano inalterati mutando sempre $+x$ in $-x$. Quindi possiamo dire che le conclusioni dei §§. precedenti si possono riferire allo sviluppo della funzione sia alla destra che alla sinistra del punto $x = 0$. Sia a destra che a sinistra quelle funzioni sono continue e hanno derivate finite, e da ambo le parti non è possibile per esse la sviluppabilità in serie di TAYLOR.

Ora vogliamo mostrare un altro esempio in cui la funzione è continua *solo da una parte del punto* $x = 0$, *e non dall'altra.*

Il PRINGSHEIM propone il seguente esempio (*Math. Ann.*, vol. XLII, p. 161; vol. XLIV, p. 41):

$$f(x) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \frac{1}{1 + a^\nu x} \qquad (a > 1).$$

Per un x positivo si possono su questa funzione fare considerazioni analoghe a quelle fatte per la funzione del §. 76 cui questa rassomiglia moltissimo.

Si trova che le derivate destre di ordine n di questa funzione sono:

$$f^{(n)}(+0) = (-1)^n \, n! \, e^{-a^n}$$

e che lo sviluppo di TAYLOR:

$$\sum_0^\infty (-1)^k \left(\frac{1}{e}\right)^{a^k} x^k,$$

sebbene convergente, pure non rappresenta il valore della funzione, perchè questa non è sviluppabile in serie di Taylor come potrebbe vedersi con considerazioni analoghe a quelle del §. precedente.

Invece per un x negativo, la $f(x)$ non è continua nel punto zero, perchè essa diventa infinita in tutti gli infiniti punti $x = -a^{-\nu}$, di cui ne esiste un numero infinito in qualunque intorno *a sinistra* piccolo a piacere del punto zero.

§. 79.

Raccogliamo in questo §. altri esempi di funzioni non sviluppabili in serie di Taylor.

Le due funzioni:

$$f_1(x) = \sum_0^\infty a_k \cos k x$$

$$f_2(x) = \sum_0^\infty a_k \operatorname{sen} k x$$

dove sia p. es.:

$$a_k = k^{-\log k}$$

non sono sviluppabili in serie di Taylor nell'intorno del punto $x = 0$ (Pringsheim *Math. Ann.*, vol. XLIV, p. 41, §. 2; Du Bois Reymond, *Math. Ann.*, vol. XXI, p. 117, §. 9).

La funzione:

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty a^k x^{k^2}$$

dove $|a| < 1$, non è sviluppabile in serie nell'intorno del punto $x = \pm 1$ (Mittag Leffler, *Acta Math.*, vol. XV, p. 279).

Vogliamo poi finalmente notare che si possono anche trovare esempi di funzioni che non solo, come negli esempi precedenti, non sono sviluppabili in serie di Taylor nell'intorno di un determinato punto, ma neppure nell'intorno di *qualunque* punto di un intervallo finito.

Noi sappiamo che se $f(x+h)$ si può sviluppare in serie di Taylor riferita al punto x, si potrà sviluppare ancora in serie di Taylor riferita a qualunque altro punto fra x e $x+h$ (v. §. 73). Naturalmente se la prima sviluppabilità non esiste, la seconda potrà esistere e non esistere.

Il Du Bois Reymond si è occupato di trovare un esempio al proposito. (*Math. Ann.*, vol. XXI, p. 16, §. 8).

Si trova una funzione definita insieme a tutte le sue derivate in tutto il tratto da $-1+1$, eppure non sviluppabile mai in serie di Taylor nell'intorno di qualunque punto di questo tratto.

§. 80.

Stante l'importanza dell'argomento, vogliamo qui esporre la ricerca di Pringsheim, (*Math. Ann.*, vol. XLIV, p. 57) riguardante la condizione necessaria e sufficiente perchè si abbia la sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor in tutto un intervallo.

Dobbiamo perciò premettere un teorema generale sulla teoria delle serie.

Si sa dagli elementi del Calcolo, che se una serie, i cui termini sieno funzioni continue di una o più variabili, è equiconvergente per tutti i valori delle variabili compresi in un certo campo, allora essa è una funzione continua delle variabili in tutto quel campo.

La equiconvergenza della serie non è però una condizione *necessaria* per la continuità, ma solo *sufficiente;* per modo che il teorema reciproco non sussiste.

Noi infatti nei §§. precedenti abbiamo potuto dare esempi di serie che sono funzioni continue delle variabili, senza essere serie equiconvergenti.

Se però i termini della serie abbiano valore *positivo* per qualunque sistema di valori delle variabili compresi nel campo, allora il teorema reciproco è anche vero.

Propriamente:

Si abbia una serie assolutamente convergente in tutto un campo, (compresi gli estremi):

$$\sum_0^\infty u_n(x_1\, x_2 \ldots),$$

i cui termini sieno funzioni continue delle variabili, e la serie dei valori assoluti:

$$\sum_0^\infty |u_n|$$

sia una funzione continua delle variabili; questa seconda serie, e quindi anche la prima, è una serie equiconvergente.

Immaginiamo un punto del campo di coordinate $x_1\, x_2 \ldots$. In questo punto la serie dei valori assoluti è convergente, e quindi, dato σ, può sempre trovarsi un indice n in modo che sia:

$$R_n(r_1\, x_2 \ldots) < \sigma$$

indicando con R il resto della serie dei valori assoluti. D'altra parte essendo:

$$R_n = \sum_0^{\infty} |u_n| - \sum_0^{n} |u_n|$$

ed essendo per ipotesi, il primo termine del secondo membro una funzione continua di x, come anche il secondo termine del secondo membro, perchè somma di un numero finito di funzioni continue, si ha che $R_n\,(x)$ è una funzione continua delle x, e quindi possono sempre trovarsi dei valori finiti e diversi da zero $h_1\ h_2 \ldots$ in modo che sia:

$$R_n(x_1 \pm \theta_1\, h_1 \ldots) - R_n(x_1 \ldots) < \sigma$$

per qualunque sistema di valori delle $\theta_1 \ldots$ comprese fra 0 e 1.

Combinando colla precedente disuguaglianza, otteniamo:

$$R_n(x_1 \pm \theta_1\, h_1 \ldots) < 2\,\sigma;$$

e osservando che R_n risulta di termini tutti positivi, possiamo anche conchiudere che, dato σ, si può sempre trovare un indice n e un sistema di valori $h_1\ h_2 \ldots$ cioè un intorno del punto, in modo che sia:

$$R_{n+\nu}(x_1 \pm \theta_1\, h_1 \ldots) < 2\,\sigma$$

qualunque sia il valore di ν purchè positivo, e qualunque sieno le $\theta_1\ \theta_2 \ldots$ purchè comprese fra 0 e 1.

Però variando σ non solo varia n, ma *variano anche le* h.

Ad ogni σ corrisponderà certamente un valore di n e un sistema di valori delle h; ma vi potrebbero corrispondere parecchi valori per la n e in corrispondenza parecchi sistemi di valori per le h.

Partiamo allora da uno qualunque dei punti del supposto campo di convergenza assoluta della serie, e per esso troviamo l'indice n e le quantità h che determineranno un certo *intorno* di quel punto.

Consideriamo un punto estremo di quest'*intorno*, e ripetiamo rispetto ad esso la stessa considerazione: si troverà un nuovo indice n e un nuovo intorno, che sarà una continuazione del primo; quello fra i due indici n che sarà il maggiore, varrà evidentemente per ambedue quegli intorni; quindi possiamo conchiudere che si può trovare un n unico tale che per tutti i punti del campo totale costituito dalla somma dei due intorni sopra costruiti, sia sempre $R_{n+\nu} < 2\sigma$ qualunque sia ν positivo, e qualunque sia il punto. Così continuando, si può sempre fare in tal maniera la ricerca dei singoli campi parziali, da giungere a riempire tutto il campo totale con un numero *finito* di campi parziali.

Infatti se si potesse continuare indefinitivamente l'indicato procedimento, e quindi trovare *infiniti* campi parziali, vi sarebbero anche infiniti punti che funzionano da centri di tali campi, e questi infiniti punti dovrebbero ammettere almeno un punto limite:

$$x' \equiv (x'_1\, x'_2 \ldots).$$

A questo punto x' apparterrà anche un intorno colla solita proprietà, e un indice n'.

Inoltre per la sua stessa natura di punto limite, in questo intorno esisteranno infiniti punti, centri di campi parziali; sieno:

$$x^{(k)} \equiv (x_1^{(k)}\, x_2^{(k)} \ldots)$$
$$x^{(k+1)} \equiv (x_1^{(k+1)}\, x_2^{(k+1)} \ldots)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Per la stessa ipotesi che dà luogo all' esistenza di tutti questi punti è naturale che il campo parziale attorno $x^{(k)}$ non comprende i punti $x^{(k+1)} \ldots x'$; ma invece, avendo presente la proprietà del costruito campo parziale relativo ad x', si vede che alterando, al massimò, il valore dell'indice $n^{(k)}$ relativo ad $x^{(k)}$, si può trovare un intorno entro cui sieno compresi tutti quanti quegli infiniti punti.

Infatti se per valore dell'indice n relativo ad $x^{(k)}$ prendiamo quello trovato per il punto x', cioè prendiamo n', allora, poichè:

$$R_{n'}\,(x^{(k+1)}) < 2\,\sigma$$
$$R_{n'}\,(x^{(k+2)}) < 2\,\sigma$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$R_{n'}\,(x') < 2\,\sigma$$

si ha che tutti i punti:

$$x^{(k+1)}, x^{(k+2)}, \ldots x'$$

possono racchiudersi nell'intorno relativo ad $x^{(k)}$.

Si vede così, che alterando la costruzione che per avventura fosse stata già fatta, si potrà sempre sostituire un unico campo parziale, ad infiniti di essi; e quindi distruggere il supposto punto limite x'.

Ripetendo questo processo per tutti i punti limiti, resta dimostrato l'assunto.

Così tutto il campo totale resta diviso in un numero *finito* di campi parziali ad ognuno dei quali corrisponde un indice n; il maggiore di tutti sia N; esso evidentemente varrà per tutti i campi parziali, e quindi per tutto il campo totale; concludiamo perciò che, dato σ, si può sempre trovare un indice N in modo che:

$$R_N(x)$$

per un qualunque x del campo assegnato sia sempre minore di 2σ; di qui si ricava la equiconvergenza della serie dei valori assoluti, e quindi di quella data.

Di questo teorema ci interessa un corollario.

Essendo $R_N(x)$ composto di termini tutti positivi, con più ragione ciascuno di essi sarà minore di 2σ, e ciò per qualunque punto x del campo; dunque:

Nelle stesse ipotesi del teorema precedente si può sempre trovare un indice n in modo che sia:

$$u_n(x) < 2\sigma$$

qualunque sia il punto x; possiamo cioè dire che in una serie assolutamente convergente in tutto un campo, il termine generale converge a zero uniformemente.

Prima di terminare questa discussione vogliamo ricavare due importanti corollari del teorema qui dimostrato.

1.° *Se i termini di una serie convergente sono funzioni continue di un certo numero di variabili, e, per qualunque sistema di valori di queste variabili, compresi in un certo campo (gli estremi inclusi) hanno sempre valori del medesimo segno, condizione necessaria e sufficiente per la continuità* *della funzione rappresentata dalla serie, è che la serie stessa sia equiconvergente.*

2.° *Se i termini di una serie convergente sono funzioni continue di una variabile, e sono inoltre in un certo punto, o tutte funzioni crescenti o tutte funzioni decrescenti, per modo che la serie dei rapporti incrementali in quel punto risulti di termini tutti del medesimo segno, condizione necessaria e sufficiente perchè in quel punto sia possibile la derivazione per serie, è che la serie dei rapporti incrementali sia equiconvergente in tutto un intorno del punto.*

Applichiamo ora il teorema precedente alla serie di Taylor.

Supponiamo che per qualunque $h < H$ si abbia sempre:

$$f(a+h) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\, h^n .$$

Scegliamo *arbitrariamente* un limite superiore dei valori di h; e sia $r < H$. Abbiamo allora che la precedente relazione sussiste per ogni $h \leq r$.

Sappiamo (v. §. 73) che, come conseguenza necessaria se ne ricava che sarà ancora:

$$f(a+h) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(a+k)\, k'^n$$

dove:

$$h = k + k' \leq r < H$$

e la serie del secondo membro è convergente *assolutamente* essendo una serie di potenze.

Per la stessa ragione essa sarà una serie derivabile termine a termine, cioè essendo:

$$f'(a+h) = \frac{d\,f(a+h)}{d\,(a+h)} = \frac{\partial\, f(a+k+k')}{\partial\, k'}$$

si ha che:

$$f'(a+h) = \sum_1^\infty \frac{1}{n-1\,!} f^{(n)}(a+k)\, k'^{n-1}$$

e la serie del secondo membro per i medesimi sistemi di valori di k, k' sarà anche assolutamente convergente. Applicando dunque il teorema dimostrato possiamo dire *che il termine:*

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(a+k)\, k'^{n}$$

ovvero il termine:

$$\frac{1}{n-1\,!} f^{(n)}(a+k)\, k'^{n-1}$$

devono essere uniformemente convergenti a zero per qualunque sistema di valori di k, k' soddisfacenti alla relazione $k+k' \leq r < H$.

Poniamo:

$$k = \vartheta\, h$$

$$k' = (1-\vartheta)\, h$$

che soddisfano alla relazione:

$$k + k' = h \leq r < H$$

per ogni $h \leq r$ e per ogni ϑ compreso fra 0 e 1.

Si ha allora che:

$$\frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{n-1\,!} f^{(n)}(a+\vartheta\, h)\, h^{n-1}$$

deve convergere a zero uniformemente per ogni $h \leqq r$ *e per ogni* ϑ *compreso fra* 0 *e* 1.

Ora quest'ultima espressione moltiplicata per h non è altro che il cosidetto *Resto di Cauchy* della serie di Taylor, corrispondente allo sviluppo di $f(a+h)$ secondo le potenze intere positive di h; indicando quindi con $R_n(\vartheta, h)$ tale resto di Cauchy, possiamo conchiudere *che per la sviluppabilità di* $f(a+h)$ *in serie di Taylor per ogni valore di* $h \leqq r < H$, *è necessario che* $R_n(\vartheta, h)$ *converga uniformemente a zero per tutti i* ϑ *e tutti gli* h *soddisfacenti alle solite condizioni.*

D'altra parte se questo si verifica è chiaro che ha luogo appunto la sviluppabilità per *ogni* h, perchè allora, fissato un qualunque h, e fatto anche ϑ variabile con n, si potrà sempre trovare un n per cui R_n sia minore della quantità che più ci piace, e, come si sa dagli elementi del Calcolo, ciò basta per conchiudere la sviluppabilità.

Possiamo dunque dire *che, condizione necessaria e sufficiente perchè* $f(a+h)$ *sia sviluppabile in serie di Taylor per ogni* $h < H$, *è che il cosidetto resto di Cauchy*:

$$R_n = \frac{(1-\vartheta)^{n-1}}{n-1\,!} f^{(n)}(a+\vartheta h)\, h^n$$

sia convergente uniformemente a zero per ogni ϑ *(compreso fra* 0 *e* 1) *e per ogni* $h \leqq r < H$.

Per $h = H$ la convergenza a zero *uniforme* di R_n non è più una condizione *necessaria* perchè la serie che si ottiene per $h = H$ *può essere non assolutamente convergente,* quindi allora cade il ragionamento fatto sopra.

Quella condizione diventa invece *necessaria* anche per $h = H$, se la serie che dà il valore di $f(a+H)$ non solo deve essere convergente, ma deve essere *assolutamente convergente.*

Quindi possiamo dire:

Se $f(a+h)$ deve essere sviluppabile in serie di Taylor per ogni h minore o eguale ad H, e la serie corrispondente deve essere assolutamente convergente anche per $h = H$, condizione necessaria e sufficiente perchè ciò sia possibile è che $R_n(\vartheta, h)$ converga a zero uniformemente per ogni ϑ (fra 0 e 1) e per ogni $h \leq H$.

Ne possiamo dedurre:

Se il resto di Cauchy per $h = H$ non converge uniformemente a zero per tutti i valori di ϑ, allora certamente la serie di Taylor per $h = H$, o sarà divergente o sarà semplicemente convergente.

Così p. es. nella serie logaritmica il resto di Cauchy è:

$$R_n = \frac{x^n}{1+\vartheta x}\left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta x}\right)^{n-1}$$

che per ogni ϑ e per ogni x positivo minore di 1 è sempre minore di:

$$(1-\vartheta)^{n-1} x^n$$

che, col crescere di n può rendersi, per *qualunque* ϑ, minore di qualunque quantità assegnabile, dunque R_n per ogni x minore di 1, converge uniformemente a zero per ogni ϑ. Ma per $x = 1$ e $\vartheta = 0$, ha invece valore 1, onde la serie logaritmica per $x = 1$ non può essere assolutamente convergente: risultato notissimo.

Invece nella serie binomiale il resto è:

$$R_n = \frac{m \,.\, m-1 \ldots m-n+1}{n-1\,!} \times$$
$$\times\, x^n (1-\vartheta)^{n-1} (1+\vartheta\, x)^{m-n}$$

e si dimostra che:

$$u_n = \frac{m \,.\, m-1 \ldots m-n+1}{n-1\,!}\, x^n$$

per ogni m positivo e $x \overline{\gtrless} 1$, converge sempre a zero. Si vede allora che anche per $x=1$, R_n converge a zero per qualunque ϑ, e ne deduciamo, come del resto è ovvio, che la serie binominale per m positivo è *assolutamente convergente* anche per $x=1$.

Queste applicazioni sono semplicissime; noi le facciamo per illustrare la teoria esposta.

Si può infine osservare che, fra le condizioni preliminari che noi avremmo dovuto stabilire negli enunciati, vi doveva essere questa: che la funzione $f(x)$ abbia le derivate di qualunque ordine per qualunque x dell'intervallo da a ad $a+H$, e che queste derivate abbiano sempre valore finito. Come abbiamo osservato al §. 73 è ciò una conseguenza immediata della possibilità di sviluppare in serie di Taylor la funzione; ora mi sembra ozioso ripetere continuamente nei vari enunciati questa condizione necessaria, perchè essa può ritenersi inclusa nella condizione che R_n deve convergere uniformemente a zero per qualunque ϑ e h; non potendo evidentemente quest'ultima condizione verificarsi se la prima non è anche verificata.

Tutta la trattazione di questo §. è ricavata da un mio lavoro intitolato: *Un capitolo di Calcolo differenziale.* (*Rivista di Mat.*, vol. V, p. 37, Torino, 1895).

§. 81.

Gli studii sulla serie di Taylor si confondono con quelli sulle serie di potenze e sui principii delle funzioni analitiche.

Una bibliografia estesa si trova al principio della recente opera di J. Hadamard, *La série de Taylor et son prolongement analytique,* Paris, 1901.

Tra i lavori più notevoli citeremo quelli di:

Du Bois Reymond, *Math. Ann.*, t. XXI; *Abhand. der k. Bayer. Akad.,* 2ter Classe, t. XII, 2a parte.

König, *Math. Ann.*, t. XXIII.

Mittag Leffler, *Acta Math.,* XV, XXIII, XXIV.

Pringsheim, *Math. Ann.,* XLII, XLIV, L.

Hadamard, *Comptes Rendus de l'Acad. de Paris*, 1888, 1889, 1897; *Acta Math.,* t. XXII.

Borel, *Comptes Rendus de l'Acad. de Paris,* 1896, 1898, 1899, 1900; *Journ. de Math.* (5), t. II; *Bull. de la Societé Math.,* t. XXVI, XXVIII.

Porter, *Annals of Math.* (2), t. VIII, 1906, p. 45.

Al cosidetto *Resto della serie di Taylor* si possono dare svariate forme.

La forma:

$$R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-p}}{(n-1)!\,p} f^n (x_o + \theta h)$$

donde, particolarizzando p, si hanno le due forme dette di Lagrange e di Cauchy, si suol chiamare la forma di Schlömilch.

Per altre forme (dette di Roche, di Liouville, ecc.), vedi:

Roche, *Mém. de l'Acad. de Montpellier*, 1858, 1863.
Mansion, *Analyse Infinites.*, Paris, 1887, p. 103 e seg.
Peano, *Mathesis*, t. IX, p. 182.
Darboux, *Bull. de la Soc. math.*, t. XXI, p. 12.

§. 82.

Passando ora alla pratica dello sviluppo in serie di Taylor, è interessante la seguente osservazione.

Se si ha una funzione sviluppabile ma di cui non sia facile trovare la formola generale per la derivata di ordine n, allora conviene scindere la funzione nelle sue parti o nei suoi fattori, e sviluppare separatamente le diverse parti, e poi riunire le serie che si vengono ad ottenere (sempre però naturalmente supposto che tutti questi procedimenti possano effettuarsi senza obbiezioni).

Così p. es., si abbia da sviluppare in serie:

$$\frac{\log(1+x)}{1+x}.$$

Per $|x| < 1$ si ha:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

e queste serie sono assolutamente convergenti; quindi per un teorema sulle serie si può effettuare il loro prodotto secondo la regola ordinaria di moltiplicazione delle serie, e si ha:

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^2 + \\ + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) x^3 + \dots$$

e questa formola varrà per ogni $|x| < 1$.

§. 83.

Volendo sviluppare:

$$\frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$$

secondo le potenze di x, si potrà considerare questa espressione come eguale a:

$$\frac{1 - x}{1 - x^4}$$

e per $|x| < 1$ applicare il procedimento del §. precedente. Si ha così:

$$1 - x + x^4 - x^5 + x^8 - x^9 + \dots$$

§. 84.

Sviluppare in serie $\log\sqrt{1 + x^2}$.

La prima derivata di questa funzione è:

$$\frac{x}{1 + x^2}$$

che possiamo scrivere:

$$x \frac{d}{dx} \operatorname{arc\,tg} x$$

di cui la derivata $n+1^{ma}$ è:

$$x \frac{d^n}{d x^n} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + (n-1) \frac{d^{n-1}}{d x^{n-1}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

e noi conosciamo la formola che dà la derivata m^{ma} della funzione *arco tangente* (v. p. es. le mie *Lezioni di Calcolo infinit.*, I, Cap. III, §. 3).

Si ha così che la derivata n^{ma} della funzione data è:

$$\frac{\overline{n-1}\,!\,x}{(1-x^2)^{\frac{n}{2}}} \operatorname{sen} n\left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+ \frac{\overline{n-1}\,!}{(1+x^2)^{\frac{n-1}{2}}} \operatorname{sen} (n-1)\left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Per $x=0$ la derivata n^{ma} della funzione data diventa:

$$(n-1)! \operatorname{sen} (n-1) \frac{\pi}{2}$$

e quindi se n è dispari si ha zero, e se n è pari si ha:

$$(-1)^{\frac{n+2}{2}} (n-1)!$$

Il resto della serie è (sotto la forma di Cauchy):

$$R_n = \frac{x^n (1-\vartheta)^{n-1}}{(1+\vartheta^2 x^2)^{\frac{n}{2}}} \left[\operatorname{sen} n\left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \vartheta x + \frac{\pi}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + (1+\vartheta^2 x^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} (n-1)\left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \vartheta x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

che per $x^2 < 1$ e per qualunque ϑ, è sempre minore di:

$$\left(\frac{x^2}{1+\vartheta^2 x^2}\right)^{\frac{n}{2}} (1+\sqrt{2})$$

quantità che per $n = \infty$ e per $x^2 < 1$ converge a zero. Dunque possiamo conchiudere che per $x^2 < 1$ è applicabile lo sviluppo in serie. Si ha così la serie:

$$\log \sqrt{1 + x^2} - \frac{x^2}{2} = \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6} - \dots$$

Si può trovare di qui che:

$$x \operatorname{arc\,tg} x - \log \sqrt{1 + x^2} = \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.6} - \dots$$

§. 85.

Raccogliamo in questo paragrafo alcuni sviluppi in serie di funzioni.

1.° $$\log (x + \sqrt{1 + x^2} = x - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\frac{x^5}{5} - \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\,\frac{x^7}{7} + \dots$$

valevole per $|x| < 1$.

2.° $$\cos^2 x = 1 - \frac{2\,x^2}{1\,.\,2} + \frac{2^3\,x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \frac{2^5\,x^6}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6} + \dots$$

valevole per ogni x finito.

3.° $$\cos (m \operatorname{arc\,sen} x) = 1 - \frac{m^2}{1.2}\,x^2 + \frac{m^2\,(m^2 - 2^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,x^4 - \frac{m^2\,(m^2 - 2^2)\,(m^2 - 4^2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,.\,6}\,x^6 + \dots$$

valevole per $|x| < 1$.

4.° $$e^{ax} \cos b\,x = 1 + r \cos \varphi\,.\,x + \frac{r^2 \cos^2 \varphi}{1\,.\,2}\,x^2 + \dots$$

dove:

$$a = r \cos \varphi$$
$$b = r \operatorname{sen} \varphi.$$

FUNZIONI CRESCENTI E DECRESCENTI.

MASSIMI E MINIMI.

§. 86.

La teoria dei massimi e minimi e delle funzioni crescenti e decrescenti nel modo con cui l'abbiamo sviluppata nelle *Lezioni di Calc. infin.*, suppone essenzialmente l'esistenza di tutte le derivate che occorrono nei calcoli, e il loro valore *finito.*

Ciò però non significa che non si possano fare delle ricerche analoghe anche nel caso in cui le derivate *nel senso puro* non esistono affatto.

Consideriamo questo esempio.

Sia $E(x)$ il massimo intero contenuto in x; la funzione:

$$\varphi(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)},$$

già considerata da Schwarz per altra occasione (v. §. 46) è una funzione continua in tutto l'intervallo da $x = 0$ sino a $x = \infty$. Essa ha derivata in ogni punto x, meno nei punti x eguali a numeri *interi;* in tali punti possiamo dire che la derivata a destra è $+\infty$, e la derivata a sinistra è una quantità finita. (V. §. citato).

Per esaminare quindi in un tal punto, p. es. nel punto $x = n$, l'andamento della funzione, il criterio che noi conosciamo ci vien meno.

Ma noi possiamo surrogarlo colla seguente considerazione.

Il rapporto incrementale destro della funzione per un $h < 1$ cioè per un h tale che sia $E(x+h) = E(x) = n$, è:

$$\frac{\sqrt{n+h-E(n+h)}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h}$$

ed è positivo per un h positivo per quanto piccolo si voglia. Il rapporto incrementale sinistro è (scegliendo anche $h < 1$):

$$\frac{E(n-h) - E(n) + \sqrt{n-h-E(n-h)}}{-h} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-h} - 1}{-h}$$

che, per qualunque h più piccolo di quello scelto, è anche positivo; dunque possiamo conchiudere che la funzione è *crescente* nel punto $x = n$.

§. 87.

Una considerazione simile si presenta pei massimi e minimi delle funzioni di una sola variabile.

Se la prima derivata della funzione esiste, allora essa deve essere zero in un punto di massimo o minimo; ma ci potrebbe essere il massimo o minimo, cioè un punto che risponda esattamente alla definizione di massimo o minimo, senza che in esso la derivata della funzione abbia valore finito, oppure anche senza che la derivata esista.

Così p. es. consideriamo la funzione:

$$f(x) = 1 + x^{\frac{2}{3}}.$$

Per $x = 0$ la funzione ha valore 1, e la derivata diventa *infinita;* intanto si può vedere che il punto $x = 0$ corrisponde ad un punto di *minimo* per la funzione. Perchè l'incremento della funzione è:

$$f(0 + h) - f(0) = h^{\frac{2}{3}}$$

ed è sempre positivo qualunque sia il segno ed il valore di h; dunque $f(0)$ è un *minimo.*

Questo è un esempio in cui la derivata esiste, ma ha valore infinito; diamo un altro esempio in cui la derivata non esiste, o propriamente esistono le due derivate a destra e a sinistra ma sono fra loro disuguali.

La funzione:

$$f(x) = x \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$$

e che per $x = 0$ è zero, nel punto $x = 0$ ha per derivata a destra $+1$, e per derivata a sinistra -1; quindi non esiste propriamente la derivata nel punto.

Intanto:

$$f(0 + h) - f(0) = h \frac{e^{\frac{1}{h}} - 1}{e^{\frac{1}{h}} + 1}$$

ha sempre segno positivo qualunque sia il segno di h; perchè per un h positivo opportunamente piccolo, $e^{\frac{1}{h}}$ è positivo e maggiore di 1, e per un h negativo, $e^{\frac{1}{h}}$ è compreso fra 0 a 1; quindi $f(0)$ è un minimo per la funzione.

A questo proposito si può facilmente dimostrare, *che se in un punto esistono, sono finite diverse da zero e sono fra loro disuguali le derivate a destra e a sinistra di una funzione, vi sarà in quel punto un massimo o minimo se i valori di tali due derivate hanno segni contrarii; e propriamente vi sarà un massimo se la derivata sinistra è positiva, e un minimo se la derivata sinistra è negativa. Se poi le due derivate non sono di segno contrario, ma dello stesso segno, allora la funzione sarà crescente se le due derivate sono ambedue positive, e decrescente nell'altro caso.* (Vedi Stolz, *Gründzuge der Diff. und. Integr. Rech.*, t. I, p. 207).

§. 88.

Sappiamo che per esaminare se in un punto una funzione abbia un massimo o minimo bisogna calcolare le derivate successive della funzione, supposto che esistano, in quel punto, e riconoscere poi qual'è la prima di esse che per quel punto è *diversa* da zero.

Ora si presenta una difficoltà nel caso in cui le derivate della funzione sono tutte zero nel punto, il che sappiamo che può effettivamente accadere.

Per esempio la funzione:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

coll'ipotesi $f(0) = 0$, ha le sue derivate tutte zero nel punto $x = 0$. Ma siccome quella funzione ha sempre valore positivo per ogni x reale, così possiamo dire che il punto zero rappresenta un *minimo* per quella funzione.

§. 89.

Consideriamo ora l'esempio di una funzione che ha infiniti massimi e infiniti minimi.

Sia la funzione:

$$f(0) = 0, \quad f(x) = x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}.$$

Per un x diverso da zero le derivate della funzione sono:

$$f'(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x} \cos \frac{\pi}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{x^3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}.$$

Per un x tale che $f'(x) = 0$ cioè:

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{x} - \frac{\pi}{x} = 0$$

la seconda derivata è certamente diversa da zero.

Quindi tutti i punti radici di quest'ultima equazione trascendente, sono punti di massimo o di minimo.

Se $\frac{\pi}{x}$ è compreso fra:

$$k\pi, \text{ e } k\pi + \frac{1}{2}\pi$$

allora la seconda derivata è negativa o positiva secondochè k è dispari o pari; quindi i punti corrispondenti ai k dispari sono punti di massimo, e quelli corrispondenti ai k pari sono punti di minimo.

§. 90.

Consideriamo ora un esempio in cui esiste la derivata prima della funzione ma *non esiste* la derivata seconda.

In tal caso se la derivata prima si annulla in un punto, in quel punto potrà esserci un massimo o minimo, ma non possiamo decidere se è un massimo o minimo dal segno della derivata seconda, la quale non esiste; e non si può neanche considerare il segno del rapporto incrementale di 2° ordine, perchè questo potrebbe anche oscillare attorno lo zero, pur esistendo il massimo o minimo.

Sia:

$$f(0) = 1, \quad f(x) = 1 - x^2 \left(a - \operatorname{sen} \frac{1}{x}\right)$$

dove:

$$1 < a < 2.$$

Nel punto $x = 0$ il rapporto incrementale è:

$$-h\left(a - \operatorname{sen}\frac{1}{h}\right)$$

che per h positivo o negativo, tendente a zero, tende anche a zero; dunque la derivata prima della funzione esiste ed è zero per il punto $x = 0$.

Intanto se formiamo:

$$\frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} =$$

$$= -4\left(a - \operatorname{sen}\frac{1}{2h}\right) + 2\left(a - \operatorname{sen}\frac{1}{h}\right) =$$

$$= -4\left[\frac{a}{2} - \operatorname{sen}\frac{1}{2h}\left(1 - \cos\frac{1}{2h}\right)\right]$$

troviamo che questa espressione per $h = 0$ non ha limite determinato, e può acquistare valore negativo e positivo, secondo il grado di piccolezza di h, perchè essendo $1 - \cos\frac{1}{2h}$ sempre positivo, ed essendo $\frac{a}{2}$ minore di 1, la parentesi non ha segno determinato.

Intanto nel punto $x = 0$ la funzione ha un massimo, perchè:

$$f(0+h) - f(0) = -h^2\left(a - \operatorname{sen}\frac{1}{h}\right) < 0$$

è minore di zero, qualunque sia il segno e il valore di h (essendo $a > 1$). (Vedi: Harnack, *Math. Ann.*, t. XXIII, p. 261).

§. 91.

In questo §. raccoglieremo alcuni risultati di massimi e minimi di funzioni di una sola variabile.

1. La funzione $x^{\frac{1}{x}}$ ha un *massimo* per $x = e$.

2. La funzione:

$$\frac{(x-a)(b-x)}{a\,b\,x}$$

ha un *massimo* per $x = +\sqrt{a\,b}$ e un *minimo* per $x = -\sqrt{a\,b}$.

3. La funzione:

$$\frac{1 + 2\,x \operatorname{arc\,tg} x}{1 + x^2}$$

ha un *massimo* per $x = -1$ e per $x = +1$, e un *minimo* per $x = 0$.

4. La funzione:

$$e^x - 2\cos x + e^{-x}$$

ha un minimo per $x = 0$.

5. Il triangolo di massima area in cui è costante la somma $x + y = c$ dell'altezza x e della base corrispondente y, è il triangolo in cui $x = y$, cioè l'altezza è uguale alla base.

6. Fra tutti i rettangoli iscritti in una ellisse, quello avente l'area massima ha per lati le diagonali dei quadrati costruiti sui due semiassi dell' ellisse.

7. Fra tutti i triangoli rettangoli aventi la stessa ipotenusa, il massimo è l'isoscele.

8. Fra tutti i cilindri iscritti in un cono retto circolare il massimo è quello la cui altezza è la terza parte dell'altezza del cono.

9. Fra tutti i coni retti circolari circoscritti ad

una data sfera, quello di minima area laterale ha il suo vertice distante dalla superficie sferica della quantità $r\sqrt{2}$, se r è il raggio della sfera.

10. Se ai quattro angoli di un foglio rettangolare di dimensioni a, b si vuol tagliare un medesimo quadrato in modo che, colla parte rimasta, si possa formare una scatola della massima capacità, l'altezza di questa scatola, cioè il lato del quadrato da togliere ai quattro angoli, è:

$$\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2-ab}}{b}.$$

11. La funzione:

$$\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$$

non ha massimi o minimi corrispondenti a valori finiti di x. Per $x=0$ la derivata non esiste, ma esistono le derivate, destra e sinistra. La funzione è sempre crescente.

12. Il punto $x=0$ è un punto di minimo per la funzione $x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x}$. Non esistono altri punti di massimo o minimo.

13. Dati quattro segmenti, il quadrilatero di area massima avente per lati i quattro segmenti dati, è quello iscrittibile in un cerchio.

14. Fra tutti i trapezi aventi tre lati uguali quello di area massima è l'isoscele di cui l'angolo alla base è $\frac{\pi}{3}$.

15. Data un'ellisse, di semiassi a, b, se si vo-

gliono determinare i punti di contatto di quelle tangenti, di cui è minima la parte intercetta tra gli assi dell'ellisse, si trovano i quattro punti di coordinate (riferite agli assi):

$$x = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}, \quad y = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}.$$

16. Se si dividono similmente i lati di un quadrato, in due parti aventi fra loro un medesimo rapporto, e si congiungono i quattro punti di divisione, si ha un nuovo quadrato iscritto nel primo. Se i punti di divisione sono i punti medi dei lati, questo nuovo quadrato è di area minima.

MASSIMI E MINIMI PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI.

§. 92.

Sulla teoria dei massimi e minimi per le funzioni di più variabili si sono fatte molte ricerche. Daremo qui una nota bibliografica dei vari lavori su quest'argomento.

Stolz, *Wiener Berichte,* vol. LXIII (1868); vol. XCIX, p. 495 (1890); vol. C, p. 1167 (1891); vol. CII, p. 85 (1893).

Scheeffer, *Math. Ann.,* vol. XXXV, p. 541 (1889).

Mayer, *Leipziger Berichte* (1892), p. 85.

Dantscher, *Math. Ann.,* vol. XLII, p. 89, vol. LI (1899).

Si può poi anche vedere una esposizione abbastanza dettagliata dei risultati dei vari Autori, data da Stolz, *Grundzüge der Diff. und. Integr. Rech.* I, p. 211-258.

Lo Stolz seguendo un'espressione di Baltzer e di Du Bois Reymond, chiama *estremi* i massimi e minimi delle funzioni.

Si può riscontrare anche il *Calcolo diff.* di Genocchi-Peano (Torino, 1886), p. 29, 187 e seg.

§. 93.

Si sa che data una funzione di più variabili, p. es. di *due*, $f(x_1, x_2)$, e supposto che *non tutte* le derivate di 2° ordine della funzione sieno zero in un certo punto, il criterio per riconoscere se la funzione in quel punto ammette un massimo o minimo si riduce all'esame della natura della *forma quadratica*:

$$A\,h_1^2 + 2\,B\,h_1\,h_2 + C\,h_2^2$$

dove A, B, C sono le tre derivate seconde della funzione. Quando questa forma è *definita* allora esiste il massimo o minimo; quando è *indefinita* non esiste nè massimo nè minimo, e quando questa forma è *semidefinita* (v. le mie *Lezioni di Calc. infinit.*, I, Cap. IV, §. 3) allora non può nulla dirsi *a priori* sulla esistenza del massimo o minimo. La forma semidefinita si ha quando il discriminante $B^2 - A\,C$ è zero.

Gli esempii che seguono si riferiscono appunto a questo caso eccezionale.

Il primo esempio semplice è quello che si trova nelle note di Peano al *Calcolo differ.* di Genocchi

(Torino, 1884), ed è:

$$f(x_1\, x_2) = x_1^{\,2} - (p^2 + q^2)\, x_1\, x_2^{\,2} + p^2\, q^2\, x_2^{\,4}.$$

Per il punto $x_1 = 0$ $x_2 = 0$ le derivate di 1° ordine sono zero, e delle derivate del 2° ordine due sono zero e la terza è:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\, x_1^{\,2}}\right)_0 = 2.$$

Dunque il discriminante della teoria generale è zero. Ora per il punto $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ la f non è nè massima nè minima.

Infatti possiamo scrivere:

$$f(0 + h_1,\, 0 + h_2) - f(0\, 0) =$$
$$= h_1^{\,2} - (p^2 + q^2)\, h_1\, h_2^{\,2} + p^2\, q^2\, h_2^{\,4}$$

e ponendo:

$$\rho\, h_2^{\,2} = h_1$$

si ha:

$$= \rho^2\, h_2^{\,4} - (p^2 + q^2)\, \rho\, h_2^{\,4} + p^2\, q^2\, h_2^{\,4} =$$
$$= h_2^{\,4}\, (\rho^2 - (p^2 + q^2)\, \rho + p^2\, q^2) \qquad = h_2^{\,4}\, (\rho - p^2)\, (\rho - q^2)$$

e qualunque sia l'intorno del punto zero, si possono sempre prendere h_1 h_2 così piccoli che il punto $0 + h_1$, $0 + h_2$ sia compreso in esso, e inoltre che:

$$\rho = \frac{h_1}{h_2^{\,2}}$$

sia o minore di p^2 e di q^2, o compreso fra p^2, q^2, e quindi in modo che la espressione di sopra sia o positiva o negativa. Con ciò resta dimostrata la nostra asserzione.

In questo caso colla stabilita dipendenza fra h_1 h_2, si è fatto in modo che l'assieme dei termini di più basso grado in h_1 h_2, non risulti di quei soli che *apparentemente* figuravano come tali nella funzione data.

In questa l'assieme dei termini di 2° grado in h_1, h_2, è formato dall'unico termine h_1^2. Ora questo diventa zero per h_2 qualunque, e $h_1 = 0$, e *non solamente* per $h_1 = h_2 = 0$; perciò siamo nel caso di una *forma semidefinita.*

§. 94.

Nel citato lavoro di Scheeffer, che si è poi per il primo occupato diffusamente della quistione, si trovano moltissimi esempi.

La funzione:

$$f(x_1\, x_2) = x_1^2\, x_2^4 - 3\, x_1^4\, x_2^3 + \\ + x_1^6\, x_2^2 - 3\, x_1\, x_2^7 + x_2^8 - 10\, x_1^{10}\, x_2 + 5\, x_2^{12}.$$

nel punto $(x_1 = 0,\ x_2 = 0)$ non ha nè un massimo nè un minimo.

Si può ripetere la considerazione di sopra ponendo:

$$h_1^2 = \rho\, h_2$$

e allora sui tre primi termini si può fare una considerazione simile a quella del §. precedente (vedi anche Dantscher, *Math. Ann.*, vol. XLII, p. 99).

§. 95.

Il problema della minima distanza di due rette nello spazio. — Se a, b, c sono le coordinate di un punto della prima retta, e $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ i coseni di direzione rispetto agli assi, le equazioni della prima retta sono:

$$\frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma}=u.$$

E analogamente le equazioni della seconda retta sono:

$$\frac{x-a'}{\cos\alpha'}=\frac{y-b'}{\cos\beta'}=\frac{z-c'}{\cos\gamma'}=u'.$$

Se x, y, z; x', y', z' sono le coordinate di un punto della prima retta, rispett. di un punto della seconda retta, il quadrato della loro distanza è:

$$\delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

espressione che bisogna rendere *minima*.

Mediante le equazioni delle rette, le coordinate x, y, z; x', y', z' possono considerarsi funzioni di u, e u', e quindi δ^2 diventa una funzione delle due variabili u, u'.

Poniamo eguali a zero le sue due derivate parziali rispetto a u, u'. Si ha:

$$(x-x')\cos\alpha+(y-y')\cos\beta+(z-z')\cos\gamma=0$$
$$(x-x')\cos\alpha'+(y-y')\cos\beta'+(z-z')\cos\gamma'=0.$$

Queste due equazioni mostrano che la retta di lunghezza minima che congiunge i punti delle due rette date è intersezione di piani perpendicolari rispettivamente a ciascuna delle due rette, e quindi è una retta perpendicolare a ciascuna delle due date.

Chiamando rispett. A B C i minori della matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\alpha' & \cos\beta' & \cos\gamma' \end{matrix} \right\|$$

si hā:

$$\frac{x-x'}{A} = \frac{y-y'}{B} = \frac{z-z'}{C} = \frac{\delta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= \frac{A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')}{A^2+B^2+C^2}.$$

Servendosi delle equazioni delle due rette date ed osservando che:

$$A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0$$

$$A\cos\alpha' + B\cos\beta' + C\cos\gamma' = 0$$

si ha infine dall'ultima relazione:

$$\delta = \frac{A(a-a')+B(b-b')+C(c-c')}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Resta poi a verificare, giovandosi delle derivate seconde, che effettivamente questa espressione, ottenuta eguagliando a zero le derivate prime, corrisponde ad un *minimo*.

FORME INDETERMINATE.

§. 96.

La teoria completa della cosidetta risoluzione delle forme indeterminate $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, ... non è così semplice come era riportata negli antichi Trattati di Calcolo, ma occorrono non poche riserve per potere sostituire il limite del rapporto delle derivate al limite del rapporto delle funzioni.

I teoremi da noi riportati nelle *Lezioni di Calc. infinit.* sono i più semplici della teoria e quelli di più comune applicazione.

Alcuni lavori su questo argomento sono quelli di:

Du Bois Reymond, *Ann. di Mat.* (2), t. IV, p. 346.
Stolz, *Math. Ann.* v. XIV, p. 235, XV, p. 558, XXXIII, p. 244; *Grundzüge der Diff. und Integr. Rech.* I, p. 113.
Rouquet, *Nouvelles Annales de Math.*, t. XVI, p. 113.

§. 97.

Un esempio in cui si verifica che non esiste il limite del rapporto delle derivate eppure esiste il limite del rapporto delle funzioni è:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x} \quad (\text{per } x = \infty).$$

Il rapporto delle derivate è:

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$$

il cui limite per $x = \infty$ non esiste; invece il limite del rapporto delle funzioni si può scrivere:

$$\lim_{x=\infty} \frac{1 - \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}} = 1.$$

Un altro esempio è il seguente:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}}{x} \quad (\text{per } x = 0).$$

Il rapporto delle derivate è:

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{2\,x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} - \pi \cos \frac{\pi}{x}}{1}$$

il cui limite per $x = 0$ è indeterminato.

Intanto il limite del rapporto delle funzioni è:

$$\lim_{x=0} x \operatorname{sen} \frac{\pi}{x} = 0.$$

Un altro esempio è il seguente:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\log(1+x)} \quad (\text{per } x = 0).$$

Il rapporto delle derivate è:

$$\frac{2\,x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\frac{1}{1+x}}$$

che non tende ad alcun limite per $x = 0$.

Invece scrivendo:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x}{\log(1+x)}\, x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$$

e osservando che:

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\log(1+x)} = 1$$

si vede che:

$$\lim_{x=0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

Si può anche considerare il seguente altro esempio in cui *non esiste il limite del rapporto delle derivate sebbene esistano i limiti delle derivate stesse:*

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x^3 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x^2} \qquad (\text{per } x = 0).$$

Le derivate sono:

$$\varphi'(x) = 3\, x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$$
$$\psi'(x) = 2\, x$$

i cui limiti sono ambedue zero, e il limite del loro rapporto non esiste.

§. 98.

Un esempio in cui il procedimento fondamentale è applicabile, ma le due derivate sono zero per gli stessi infiniti punti di qualunque intorno del punto limite è il seguente:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{e^{x + \operatorname{sen} x}}{x + \operatorname{sen} x} \qquad (\text{per } x = \infty).$$

Le due derivate sono:

$$\varphi'(x) = (1 + \cos x)\, e^{x + \operatorname{sen} x}$$
$$\psi'(x) = 1 + \cos x$$

e sono zero per gli stessi punti, cioè tutti quelli in cui $1 + \cos x = 0$. Inoltre esiste il limite del rapporto delle derivate ed è $+\infty$, e $\psi'(x)$ ha sempre lo stesso segno. Quindi possiamo conchiudere che il limite del rapporto delle funzioni è l'∞.

§. 99.

Diamo un esempio in cui si verifica che esiste il limite del rapporto delle derivate, ma non esiste quello del rapporto delle funzioni, perchè $\psi(x)$ diventando zero infinite volte, muta anche infinite volte di segno.

Sia:

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{x + \operatorname{sen} x \cos x}{e^{\operatorname{sen} x}(x + \operatorname{sen} x \cos x)}$$

che per $x = \infty$ si presenta sotto la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Essendo questo rapporto eguale a:

$$e^{-\operatorname{sen} x}$$

esso non ha limite per $x = \infty$.

Intanto le derivate sono:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= 1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \\ &= 2\cos^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= e^{\operatorname{sen} x}(x \cos x + \operatorname{sen} x \cos^2 x + 2\cos^2 x) \\ &= e^{\operatorname{sen} x} \cos x\, (x + \operatorname{sen} x \cos x + 2 \cos x). \end{aligned}$$

Da un certo x in poi il valore dell'espressione in parentesi non passa mai per zero, resta sempre positivo, e cresce all'infinito. Le due derivate diventano zero nei medesimi punti, che sono quelli in cui cos x diventa zero. Però $\psi'(x)$ *muta infinite volte di segno;* è questa la ragione per cui, come si vede, non sussiste il teorema, perchè si può subito far vedere che il limite del rapporto delle derivate esiste ed è zero.

§. 100.

Diamo inoltre quest'altro esempio in cui il procedimento ordinario neppure è applicabile:

$$\varphi(x) = x$$
$$\psi(x) = e^{\operatorname{sen} x}(x + \operatorname{sen} x \cos x).$$

Il rapporto delle funzioni si presenta qui sotto la forma $\frac{\infty}{\infty}$; occorre quindi, oltre l'esistenza del limite del rapporto delle derivate, che $\psi'(x)$ non cambi infinite volte di segno.

Ora:

$$\psi'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x (x + \operatorname{sen} x \cos x + 2 \cos x)$$

cambia infinite volte di segno quando x cresce all'infinito; dunque il procedimento ordinario non sarà applicabile. Si trova poi nel fatto che, mentre il limite del rapporto delle derivate esiste ed è zero, non esiste il limite del rapporto delle funzioni.

§. 101.

Invece in quest'altro esempio il procedimento è applicabile perchè $\psi'(x)$ sebbene diventi zero infinite volte senza che lo diventi $\varphi'(x)$, pure non cambia infinite volte di segno. Questo esempio si riferisce al tipo $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\varphi(x) = x^2$$
$$\psi(x) = x + \operatorname{sen} x \cos x.$$

Si ha:

$$\psi'(x) = 2\cos^2 x$$

e

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \infty.$$

È facile intanto verificare che anche:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty.$$

§. 102.

Possiamo invece assegnare quest'altro esempio simile al precedente, ma che si riferisce al tipo $\frac{0}{0}$:

$$\varphi(x) = x^3 \cos^3 \frac{1}{x}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \operatorname{sen}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}}.$$

Si ha:

$$\varphi'(x) = 3x^2\cos^2\frac{1}{x}\left(\cos\frac{1}{x} - x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)$$

$$\psi'(x) = \frac{2\cos^2\frac{1}{x}}{\left(1 + x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right)^2}.$$

La derivata $\psi'(x)$ acquista infinite volte il valore zero, quando x tende a zero, ma non cambia mai segno. Il limite per $x=0$ del rapporto delle derivate esiste ed è zero; anche a zero è eguale il limite del rapporto delle funzioni.

SULLA DEFINIZIONE DI INTEGRALE DEFINITO.

§. 103.

È utile fare la seguente osservazione sulla definizione di integrale definito.

Si definisce l'integrale definito come il limite del sommatorio:

$$\Sigma f_r \delta_r$$

dove per f_r si può intendere *non solo un qualunque valore che la f ha nell' intervallo δ_r ma anche il limite superiore o inferiore dei valori che la f ha in δ_r*.

Però si può far vedere che se invece si fa l'ipotesi, in apparenza più ristretta, che i valori f_r debbano essere solo valori di f in un punto dell'intervallo δ_r, e non i limiti superiori e inferiori, allora, *se esiste l'integrale con questa ipotesi più ristretta, il suo valore sarà eguale ancora al limite di*:

$$\Sigma L_r \delta_r \quad \text{ovvero} \quad \Sigma l_r \delta_r$$

dove con L_r, l_r si intendono i limiti superiori e inferiori di f in δ_r.

Ed infatti se L_r è il limite superiore dei valori di f in δ_r, si potrà trovare in δ_r un punto tale che il valore in esso, che chiamiamo f_r differisca da L_r di una quantità σ piccola a piacere.

Cioè:

$$L_r \geqq f_r > L_r - \sigma .$$

E ripetendo questa operazione per tutti i δ_r, lasciando sempre il medesimo σ, si ha:

$$\Sigma L_r \delta_r \geqq \Sigma f_r \delta_r > \Sigma L_r \delta_r - \sigma (b - a)$$

se a, b sono i limiti d'integrazione.

Se ora si suppone che esiste il limite di $\Sigma f_r d_r$, e che sia A, vuol dire che si possono trovare tali δ_r che:

$$A + \varepsilon > \Sigma f_r \delta_r > A - \varepsilon$$

e quindi colle disuguaglianze di sopra si ha:

$$\Sigma L_r \delta_r > A - \varepsilon$$

$$A + \varepsilon > \Sigma L_r \delta_r - \sigma (b - a)$$

da cui:

$$\varepsilon > A - \Sigma L_r \delta_r > - \varepsilon - \sigma (b - a)$$

ed essendo ε, σ piccole a piacere, da questa disuguaglianza appare appunto che $\Sigma L_r \delta_r$ ha per limite A.

§. 104.

È stata data una definizione di integrale definito che differisce da quella da noi adoperata nelle *Lezioni*, la quale risale a Cauchy (che però supponeva la funzione sempre *continua; J. éc. polyt.*, cah. 19, p. 571 e 590, (1823) e più completamente a Riemann

(*Hab. Schrift.*, Göttingen 1854; *Werke*, Leipzig, 1876, p. 225).

Consideriamo le due somme:

$$\Sigma L_r \delta_r , \quad \Sigma l_r \delta_r .$$

Ognuna delle prime somme è maggiore di ognuna delle seconde; se il limite inferiore dei valori delle prime somme è eguale al limite superiore dei valori delle seconde, un tal valore si dice *integrale definito della funzione data.*

Per una bibliografia sulla definizione di integrale definito e sulle condizioni di integrabilità, citeremo:

Thomae, *Th. der bestimmten Integr.*, Halle, 1875, p. 12.

Du Bois Reymond, *Abth. d. Zeits. für Math. u. Ph.*, vol. XX, p. 123.

— *Crelle's Journ.*, vol. LXXIX, p. 259.

Darboux, *Ann. de l'École norm. sup.*, vol. IV, p. 65, (1875).

Pasch, *Math. Ann.*, vol. XXX, p. 144 (1887).

Genocchi-Peano, *Calcolo diff.*, Torino 1884, p. 298.

Stolz, *Grundzüge der Diff. u. Int. Rech.*, I, p. 349 e seg.

Ascoli, *Atti Lincei*, t. II, (1875).

— *Annali di matem.* (2) vol. XXIII (1895).

Volterra, *Giorn. di matem.*, vol. XIX (1881).

Bettazzi, *Giorn. di matem.*, vol. XXII (1884).

Peano, *Atti Acc. Torino*, 1883.

— *Ann. di matem.*, (2) t. XXIII, p. 153 (1895).

Ultimamente Lebesgue (*Ann. di Mat.* (2), t. VII, p. 265; *Leçons sur l'integration*, Paris 1904; vedi anche le altre note dello stesso Lebesgue e di Beppo Levi in *Rend. Lincei*, 1906) ha introdotto una definizione più generale, rendendo così possibile l'integrazione di funzioni che non lo sarebbero coll'antica definizione di Riemann; e una riduzione importante della condizione di integrabilità delle funzioni è stata fatta contemporaneamente da Lebesgue stesso e da Vitali *(Boll. dell'Accad. Gioenia di Catania*, 1904; *Rend. Ist. Lomb.*, 1904, p. 69) osservando che tale condizione dipende esclusivamente dalla natura del gruppo dei punti di discontinuità della funzione, e non dalla natura delle discontinuità stesse.

§. 105.

Il calcolo di un integrale definito applicando puramente la definizione risulta in generale molto difficile. Cerchiamo di eseguire un tale calcolo in alcuni casi semplici. Sceglieremo due esempi, nell'uno dei quali sceglieremo gli intervalli δ_r tutti fra loro eguali, e nell'altro con una legge diversa.

Si voglia calcolare l'integrale fra a, b della funzione sen x. Scegliamo gli intervalli d_r tutti eguali fra loro, cioè eguali a:

$$\frac{b-a}{n} = \delta$$

e scegliamo i valori della funzione nei punti estremi dei singoli intervalli. Allora il sommatorio diventa:

$$\Sigma = \delta \left[\operatorname{sen} a + \operatorname{sen}(a+\delta) + \operatorname{sen}(a+2\delta) + \ldots + \right. \\ \left. + \operatorname{sen}(a+(n-1)\delta)\right].$$

E mediante la formola:

$$2 \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) \operatorname{sen}(a+r\delta) = \cos\left(a+(2r-1)\frac{\delta}{2}\right) - \\ - \cos\left(a+(2r+1)\frac{\delta}{2}\right)$$

quel sommatorio diventa:

$$\Sigma = \frac{\frac{\delta}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\delta}{2}} \left\{ \cos\left(a - \frac{\delta}{2}\right) - \cos\left(b - \frac{\delta}{2}\right) \right\}.$$

Per $\delta = 0$ il limite di Σ è:

$$\cos a - \cos b\,.$$

La medesima divisione dell'intervallo totale sarebbe utile se si volesse calcolare l'integrale di c^x. Si avrebbe:

$$\Sigma = (c^a + c^{a+\delta} + \ldots + c^{a+(n-1)\delta})\,.$$

I termini della parentesi formano una progressione geometrica la cui ragione è c^δ, e quindi la loro somma si sa calcolare. Si ha:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \delta\,\frac{c^a\,(c^{n\delta} - 1)}{c^\delta - 1} \\ &= \frac{\delta}{c^\delta - 1}\,(c^b - c^a)\,.\end{aligned}$$

Ora:

$$\lim_{\delta=0} \frac{c^\delta - 1}{\delta} = \log c$$

dunque:

$$\lim \Sigma = \log c\,(c^b - c^a).$$

Se vogliamo invece calcolare l'integrale, corrispondente alla funzione x^m, conviene fare un'altra divisione dell'intervallo, e propriamente prendere i punti di divisione nei punti:

$$a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^r$$

per modo che l'ampiezza dell'intervallo δ_r sarà:

$$\delta_r = a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^r - a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{r-1} =$$

$$= a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{r-1}\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right).$$

Allora il sommatorio ha la forma (assumendo al solito per valori f_r della funzione quelli negli estremi degli intervalli):

$$\sum_{r=1}^{n} a\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{r-1}\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right) a^m \left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{(r-1)m} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} a^{m+1}\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{(r-1)(m+1)}\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right).$$

Ora i termini di questo sommatorio formano una progressione geometrica la cui somma è:

$$a^{m+1}\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1\right)\frac{\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{n(m+1)} - 1}{\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{m+1} - 1} =$$

$$= (b^{m+1} - a^{m+1})\,\frac{\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1}{\left(\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\right)^{m+1} - 1}$$

ed essendo $b > a$ e quindi:

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = 1,$$

il secondo fattore per $n = \infty$ ha per limite $\frac{1}{m+1}$, onde si ha infine per risultato:

$$\frac{1}{m+1}(b^{m+1} - a^{m+1}).$$

§. 106.

È notevole la seguente osservazione.

Si abbia una funzione $f(x)$ integrabile in tutto un tratto da a a b. *Il valore dell'integrale definito corrispondente non muta se si muta in un qualunque punto il valore della funzione lasciandolo però sempre finito.*

Infatti sia c un tale punto, e circondiamolo con un intervallo piccolo a piacere di ampiezza δ, che sceglieremo per uno degli intervalli δ_r. Allora se l'antico valore della funzione in c era $f(c)$ e ora si è invece mutato nel valore C, la differenza fra l'antico sommatorio e il nuovo potrà, al più, essere la quantità:

$$(f(c) - C)\,\delta$$

che tende a zero insieme con δ.

Lo stesso teorema si verifica se mutiamo il valore della funzione in ∞ punti, purchè però in qualunque intervallo piccolo a piacere vi sia almeno un punto in cui la funzione abbia conservato lo stesso valore di prima.

Infatti, essendo arbitraria la scelta dei valori f_r, si potrà allora sempre farla in modo da evitare quei punti in cui è stato mutato il valore della funzione.

§. 107.

Si voglia calcolare:

$$\int_a^b \frac{dx}{E^2(x)} \qquad (a < b)$$

essendo $E(x)$ il massimo intero contenuto in x. Sia r il primo intero dopo a, e $r+s$ l'ultimo intero prima di b. Possiamo scrivere:

$$\int_a^b = \int_a^r + \int_r^{r+1} + \dots + \int_{r+s}^b$$

In ciascuno di tali intervalli la funzione sotto il segno è costante meno che per il limite superiore. Mutando per tal punto il valore della funzione, l'integrale, come sappiamo (v. §. prec.) non muta, e quindi possiamo scrivere come valore dell'integrale proposto:

$$\frac{(r-a)}{(r-1)^2} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+1)^2} + \dots + \frac{(b-r-s)}{(r+s)^2}\,.$$

Per $b = \infty$ si avrebbe una serie *convergente*, e quindi esiste anche l'integrale improprio $\int_a^\infty$.

INTEGRABILITÀ.

§. 108.

Dimostriamo il seguente teorema:

Se una funzione è sempre crescente o sempre decrescente in tutto l'intervallo d'integrazione, essa è una funzione integrabile.

Infatti dividiamo prima l'intervallo a, b in parti eguali; prendiamo cioè:

$$\delta_r = \frac{b-a}{n}.$$

Per l'ipotesi fatta riguardo alla natura della funzione, il massimo e il minimo valore che la funzione ha nell'intervallo δ_r sono quelli che essa ha nei punti estremi dello stesso intervallo; quindi l'oscillazione D_r è eguale alla differenza fra i due valori che la funzione ha negli estremi di δ_r. Chiamando:

$$a,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ x_{r-1},\ x_r,\ \ldots\ x_{n-1},\ b$$

i diversi punti di divisione, si ha:

$$\begin{aligned}\Sigma D_r\,\delta_r &= \frac{b-a}{n}\Big\{[f(x_1)-f(a)]+[f(x_2)-f(x_1)]\\ &\qquad +\cdots+[f(b)-f(x_{n-1})]\Big\}\\ &= \frac{b-a}{n}\Big\{f(b)-f(a)\Big\}\end{aligned}$$

che col crescere di n tende a zero; dunque possiamo conchiudere che $\Sigma D_r\,\delta_r$ tende a zero, quando però si scelgano i δ_r tutti eguali fra loro.

A tutto rigore non possiamo di qui dedurre che la funzione è integrabile, se non dimostriamo che quel sommatorio tende a zero, *in qualunque maniera* si scelgano i δ_r.

Ma una tal dimostrazione si può fare facilmente nel seguente modo:

Fra tutti i $\delta_1\,\delta_2\ldots\delta_n$ scegliamo il maggiore e sia δ; allora evidentemente:

$$\begin{aligned}\Sigma D_r\,\delta_r &\leqq \Sigma D_r\,\delta\\ &\leqq \delta\,\Sigma D_r.\end{aligned}$$

Ma per la stessa considerazione di avanti:

$$\Sigma D_r = f(b) - f(a)$$

dunque, poichè δ tende a zero, resta dimostrato il teorema.

§. 109.

Dall'essere integrabile il valore assoluto di una funzione si può dedurre che è integrabile anche la funzione?

Evidentemente no, e un facile esempio può porre subito fuori discussione la quistione. Consideriamo la funzione che per tutti i valori razionali di x è eguale a $+1$, ed è eguale a -1 per i valori irrazionali. Il valore assoluto della funzione è sempre $+1$ e quindi integrabile, ma la funzione è evidentemente non integrabile.

§. 110.

Si sa che il prodotto di due funzioni integrabili è anche una funzione integrabile (si intende però che non si tratti di integrali definiti corrispondenti ai casi singolari).

Si può più generalmente dimostrare il seguente semplice teorema di Du Bois Reymond (*Math. Ann.*, vol. XVI e XX).

Una funzione continua di più funzioni integrabili (in numeno finito) è anche una funzione integrabile.

La dimostrazione del teorema è fondata sul fatto noto che una funzione continua di più variabili, è anche *uniformemente* continua.

Supponiamo infatti che si abbia la funzione continua $f(\varphi_1\ \varphi_2 \ldots)$ dove $\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\ldots$ sieno funzioni integrabili nel tratto da $x = a$ sino ad $x = b$. Supponiamo che variando x da a a b il punto, le cui coordinate sieno $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \ldots$, si muova nell'interno di un certo spazio per ogni punto del quale la funzione f sia una funzione *continua.*

Dato allora un numero ε piccolo a piacere si può fare la divisione di quello spazio in un numero *finito* di spazi parziali, tali che la differenza fra due qualunque valori di f in ciascuno di questi spazi parziali (e quindi, se si vuole, anche l'*oscillazione* di f in tali spazi parziali) sia minore di ε.

Prendiamo in considerazione tutti questi spazi parziali; la minima loro ampiezza nel senso della coordinata φ_1 sia ω_1, la minima nel senso della coordinata φ_2 sia ω_2, ecc.; e sia ω una quantità minore di $\omega_1\ \omega_2 \ldots$; per modo che possiamo dire che, se facciamo variare $\varphi_1\ \varphi_2 \ldots$ di quantità tutte *minori di* ω, il cangiamento di $f(\varphi_1\ \varphi_2 \ldots)$ sarà certamente minore di ε, e dato ε può sempre trovarsi l'ω diverso da zero.

Se ora $\varphi_1(x)$ è una funzione integrabile di x, ciò vuol dire che dato ω e σ si può fare una divisione dell'intervallo a, b in intervalli parziali δ' in modo che chiamando τ_1 la somma degli intervalli in cui l'oscillazione di $\varphi_1(x)$ sia *maggiore* di ω, si abbia:

$$\tau_1 < \sigma$$

e lo stesso per le funzioni $\varphi_2(x)\ldots$ per le quali possono immaginarsi assegnati i medesimi valori ω e σ.

Pertanto se sulla retta x da a a b immagino segnate tutte le divisioni in intervalli parziali δ_r' corrispondenti alla funzione φ_1; δ_r'' corrispondenti alla funzione φ_2 ecc., e considero come punti di un'ultima divisione dell'intervallo totale tutti quelli relativi alle divisioni già fatte, ho una divisione dell'intervallo totale in intervalli parziali δ ognuno dei quali è minore o eguale ad un certo intervallo δ', ad un certo intervallo δ'', ecc.... ; e perciò se considero un δ che non fa parte di uno di quei δ', o di uno di quei δ''... che compongono le somme τ_1 τ_2..., movendosi x in quel δ, le $\varphi_1 \varphi_2 \ldots$ si alterano evidentemente di quantità minori di ω, onde, per le cose dette sopra, l'oscillazione di f sarà certamente minore di ε.

Quindi la somma τ degli intervalli δ in cui l'oscillazione di f può essere maggiore di ε è data da:

$$\tau \leqq \tau_1 + \tau_2 + \ldots$$

di cui il secondo membro è minore di $m\,\sigma$ supposto m il numero (finito) delle funzioni $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_m$.

Come si vede, τ converge a zero con σ, e perciò la f è una *funzione integrabile.*

È notevole la seguente osservazione riguardo alla integrabilità delle funzioni composte: *Un prodotto di due funzioni non integrabili, può rappresentare una funzione integrabile.*

Un esempio semplicissimo di ciò ci è fornito dalla cosidetta funzione di Dirichlet (v. §. 1). Sia $\varphi(x)$ la funzione il cui valore è zero per tutti i valori razionali di x, e 1 per tutti i valori irrazionali, e sia $\psi(x)$ la funzione il cui valore è 1 per tutti i valori razionali di x, ed è zero per tutti i valori irrazionali. Il prodotto delle due funzioni è zero costantemente, e quindi rappresenta una funzione integrabile, mentre ciascuno dei fattori non è integrabile, come è evidente applicando il noto criterio. (Vedi a questo proposito: Du Bois Reymond, *Crelle's Journ.*, t. LXXIX, p. 24-25).

INTEGRALI IMPROPRII.

§. 111.

Facciamo qualche considerazione, rischiarandola con opportuni esempi, relativa agli integrali improprii (v. *Lezioni di Calc. infinit.*, t. II).

Quando la funzione da integrare diventa infinita in un punto c interno al tratto d'integrazione, allora noi, per definizione, abbiamo posto:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon'=0} \int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon''=0} \int_{c+\varepsilon''}^b f(x)\,dx,$$

naturalmente quando ambedue i termini del secondo membro sieno finiti. Ora è notevole questa osservazione: può accadere che ambedue i termini del secondo membro sieno infiniti, eppure che si possa ancora assegnare una definizione al primo membro. È possibile cioè che, ponendo ε'' eguale ad una funzione di ε' e tale che per $\varepsilon'=0$ sia anchè $\varepsilon''=0$, o in particolare ponendo addirittura $\varepsilon''=\varepsilon'$, il secondo membro abbia un limite per $\varepsilon'=0$, e allora naturalmente possiamo assegnare al primo membro il valore di tal limite.

Consideriamo l'integrale definito:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}.$$

Poichè nel punto $x=0$ vi è un punto d'infinito della funzione $\frac{1}{x}$, così questo integrale lo dobbiamo spezzare nei due:

$$\lim_{\varepsilon'=0}\int_{-1}^{-\varepsilon'}\frac{d\,x}{x}+\lim_{\varepsilon''=0}\int_{\varepsilon''}^{+1}\frac{d\,x}{x}.$$

Ma:

$$\int_{-1}^{-\varepsilon'}\frac{d\,x}{x}=\log\frac{-\varepsilon'}{-1}$$

$$=\log\varepsilon'$$

e per $\varepsilon'=0$ il valore di questo integrale è l'∞; e così analogamente per l'altro integrale.

Invece se poniamo $\varepsilon''=\varepsilon'$, il valore della somma dei due integrali sarà:

$$\log\frac{(-\varepsilon')(+1)}{(-1)(+\varepsilon')}=0.$$

Siffatti integrali definiti improprii si sogliono chiamare *singolari*. Essi furono considerati per la prima volta da Cauchy.

§. 112.

La stessa considerazione si può fare per il secondo caso di integrali *improprii*, quelli cioè in cui uno o ambedue i limiti d'integrazione sieno l'infinito.

Per definizione si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}=\lim_{x'=+\infty}\int_{-x'}^{a}+\lim_{x''=+\infty}\int_{a}^{x''}.$$

Ora può accadere che, sebbene ciascuno dei termini del secondo membro non abbia limite finito, pure, ponendo $x'' = x'$ il secondo membro abbia un limite finito per $x' = \infty$.

Così, p. es., si debba calcolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\,d\,x}{x^2+1}.$$

Se noi poniamo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{x'=\infty} \int_{-x'}^{0} + \lim_{x''=0} \int_{0}^{+x''}$$

e se calcoliamo il primo degli integrali del secondo membro abbiamo:

$$-\lim_{x'=\infty} \frac{1}{2} \log(x'^2+1)$$

il qual limite ha valore infinito; e così anche il secondo dei due integrali del secondo membro.

Invece se poniamo $x'' = x'$ e calcoliamo:

$$\int_{-x'}^{+x'}$$

che è allora:

$$\frac{1}{2} \log \frac{x'^2+1}{x'^2+1} = 0,$$

il limite di questa espressione per $x' = \infty$ è pure zero; siamo perciò qui in presenza di un integrale definito improprio *singolare*.

§. 113.

Sugli integrali definiti *improprii* c' è da fare la seguente osservazione. Si sa che, perchè essi abbiano un valore *finito* è necessario che sieno soddisfatte certe condizioni relative alla funzione $f(x)$ che sta sotto il segno d' integrale.

Se un tale integrale ha un valore finito lo chiameremo *convergente;* si presenta quindi qui una distinzione fondamentale che si presenta anche in tante altre quistioni analoghe. Può cioè accadere che sia *convergente* l'integrale corrispondente alla funzione $f(x)$, e non lo sia quello corrispondente alla funzione $|f(x)|$, intendendo al solito con questa notazione che si considerino i valori assoluti di $f(x)$. Nel primo caso diremo che l'integrale improprio è *semplicemente convergente*, e nel secondo che è *assolutamente convergente*, ed è chiaro che, se è convergente l'integrale corrispondente ad $|f(x)|$, sarà convergente con più ragione quello corrispondente ad $f(x)$, supposto che $f(x)$ sia integrabile (v. §. 109).

Diamo qui l' esempio di un integrale improprio che è solo *semplicemente convergente.*

Consideriamo l'integrale:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

Esso è finito, ma l'integrale del valore assoluto della funzione $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ cioè:

$$\int_0^\infty \frac{\overline{\operatorname{sen} x}}{x} dx$$

è infinito.

Infatti la funzione $|\text{sen}\, x|$ diventa zero in infiniti punti tutti equidistanti fra loro; circondiamo questi con tratti tutti eguali, e aventi quei punti per punti medii, e indichiamo con m le ordinate tutte eguali negli estremi di tali tratti; è chiaro che nei tratti restanti si ha sempre:

$$|\text{sen}\, x| \geqq m.$$

L'integrale esteso a tutti i tratti restanti è perciò maggiore di:

$$\int \frac{m}{x}\, d_x = m \log x$$

esteso negli stessi tratti.

Chiamando:

$$\pi - \varepsilon\ ,\ \pi + \varepsilon$$
$$2\pi - \varepsilon\ ,\ 2\pi + \varepsilon$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

le ascisse dei punti di divisione, si ha che il predetto integrale sarà perciò maggiore di:

$$m\left[\log \frac{2\pi - \varepsilon}{\pi + \varepsilon} + \log \frac{3\pi - \varepsilon}{2\pi + \varepsilon} + \ldots\ldots\right] =$$
$$= m \log \frac{(2\pi - \varepsilon)\ (3\pi - \varepsilon)\ldots\ldots}{(\pi + \varepsilon)\ (2\pi + \varepsilon)\ldots\ldots}$$

Ma il prodotto infinito:

$$\frac{2\pi - \varepsilon}{\pi + \varepsilon}\ \frac{3\pi - \varepsilon}{2\pi + \varepsilon}\ldots\ldots$$

è divergente perchè è divergente la serie:

$$\left(\frac{2\pi - \varepsilon}{\pi + \varepsilon} - 1\right) + \left(\frac{3\pi - \varepsilon}{2\pi + \varepsilon} - 1\right) + \ldots\ldots =$$
$$= \frac{\pi - 2\varepsilon}{\pi}\left\{\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{\pi}} + \frac{1}{2 + \frac{\varepsilon}{\pi}} + \ldots\ldots\right\}$$

di cui i termini contenuti nella parentesi sono rispettivamente maggiori di quelli della serie notoriamente divergente:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots$$

Dunque l'integrale:

$$\int \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx$$

esteso ai tratti:

$$\begin{array}{c} \pi+\varepsilon\ ,\ 2\pi-\varepsilon \\ 2\pi+\varepsilon\ ,\ 3\pi-\varepsilon \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

ha per valore l'infinito.

L'altra parte dello stesso integrale estesa ai rimanenti punti del campo $(0,\infty)$ non può essere negativa perchè la funzione sotto il segno è sempre positiva, perciò possiamo conchiudere che è:

$$\int_0^\infty \frac{|\operatorname{sen} x|}{x}\, dx=\infty .$$

Mostriamo ora che è invece finito:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx.$$

Infatti possiamo scrivere:

$$\int_0^\infty=\int_0^a+\int_a^\infty \quad ; \qquad (a>o)$$

il primo di questi integrali è evidentemente finito, e l'altro può trasformarsi colla integrazione per parti in:

$$\int_a^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = -\left[\frac{\cos x}{x}\right]_a^{\infty} - \int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

$$= \frac{\cos a}{a} - \int_a^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

e poichè all'integrale improprio del secondo membro può applicarsi il teorema che dice che, se esiste un numero $\nu > 1$ tale che x^{ν} moltiplicato per la funzione sotto il segno, oscilli fra limiti finiti per $x = \infty$, l'integrale è finito; (v. le mie *Lezioni di Calc. infinit.* t. II, Cap. I, §. 4), così resta provato l'assunto.

Si può aggiungere che il valore dell' integrale proposto è $+\frac{\pi}{2}$, come si può calcolare con considerazioni di altra natura. (Vedi in seguito il §. 133).

La stessa considerazione potrebbe farsi per un integrale della forma:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x} d\,x.$$

Invece un integrale della forma:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x^{\nu}} d\,x.$$

dove $\nu > 1$ è *assolutamente convergente.*

§. 114.

Mediante lo stesso teorema ultimamente citato ed applicato, si può facilmente mostrare che:

$$\int_{x'}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\, dx$$

ha un valore *finito;* infatti si sa che è:

$$\lim_{x=\infty} (x^{\nu}\, e^{-x}) = 0$$

qualunque sia ν positivo (v. le mie *Lezioni di Calcolo infinit.* t. I, Cap, V, §. 1) onde si potrà sempre fare che da un certo x in poi sia in valore assoluto:

$$x^{\nu}\; e^{-x} < A.$$

§. 115.

Una nota bibliografica sugli integrali impropri è la seguente:

Riemann, *Darstellbarkeit einer Function durch eine Fourier'sche Reihe. Werke,* Leipzig, 1876, p. 229.
Dirichlet, *Crelle's Journ.,* vol. XVII, p. 60, nota.
Du Bois Reymond, *Crelle's Journ.,* vol. LXXVI, p. 88. — *Math. Ann.,* vol. XIII, p. 251.
Pringsheim, *Math. Ann.,* vol. XXXVII, p. 591.
Worpitzky, *Ueber die Endlichkeit von bestimmten Integralen,* ecc., Berlin, 1867.
Thomae, *Zeitschrift f. Math.,* vol. XXIII, p. 68.
Hočevar, *Monatshefte für Math.,* vol. IV, p. 177.
Padè, *Annales de l'Ecole normale,* vol. VI (1889).

Un esempio di Du Bois Reymond, pubblicato nella *Zeitschrift für Math.*, (vol. XX. Recensione di un libro di Thomae) è erroneo (v. *Math. Ann.*, t. XIII, p. 252.

Nel primo dei lavori citati di Du Bois Reymond, e in quello di Pringsheim, si rettifica un'asserzione di Riemann riguardo al cosidetto *criterio logaritmico.*

La teoria degli integrali improprii di cui uno dei limiti è l'infinito ha molta affinità colla teoria delle serie; vedi p. es.:

Du Bois Reymond, *Crelle's Journ.*, vol. LXXVI.
Bonnet, *Journ. de Liouville,* vol. VIII.
Bertrand, *Journ. de Liouville*, vol. VII.
Pringsheim, *Math. Ann.*, vol. XXXVII.

§. 116.

Esponiamo il seguente esempio di Du Bois Reymond:

$$\int_a^\infty x\, e^{-x^6 \operatorname{sen}^2 x}\, d\, x\,.$$

Se x cresce all'∞ per numeri $m\pi$ dove m è intero, allora il limite della funzione per $x=\infty$ è infinito; facendo invece passare x per numeri che non sono di quella forma, è facile vedere che il limite della funzione è zero.

La funzione oscilla dunque fra 0 e ∞, ed è soddisfatta perciò la condizione dell'ultimo dei teoremi dimostrati nel §. 4, Cap. I, vol. II delle mie *Lezioni di Calcolo infinit.*

Osserviamo prima di tutto che per un

$$|x|<1$$

si ha:

$$\operatorname{sen}^2 x > \frac{2}{3} x^2,$$

perchè essendo:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots > x\left(1 - \frac{x^2}{3!}\right),$$

si ha:

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} > 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{3!\,3!} > 1 - \frac{x^2}{3} > 1 - \frac{1}{3}.$$

Scindiamo ora l'integrale dato in tanti integrali dei due tipi:

$$j_n = \int_{n\pi-\varepsilon}^{n\pi+\varepsilon} \qquad j'_n = \int_{n\pi+\varepsilon}^{(n+1)\pi-\varepsilon}$$

dove n sia un numero intero.

L'integrale dato sarà una somma di infiniti integrali di questi tipi, cioè sarà:

$$\Sigma j_n + \Sigma j'_n.$$

Consideriamo gli integrali j'_n.

Il valore di sen x quando x varia da $n\pi + \varepsilon$ sino a $(n+1)\pi - \varepsilon$ è sempre maggiore di una certa quantità μ, che si può ritenere fissa per qualunque n.

Quindi possiamo dire che ogni j'_n è sempre minore di:

$$\int_{n\pi+\varepsilon}^{(n+1)\pi-\varepsilon} x\, e^{-\mu x^6}\, d\, x$$

e quindi con più ragione:

$$\Sigma j'_n < \int_{x'}^{\infty} x\, e^{-\mu x^6}\, d\, x$$

e l'integrale del secondo membro è convergente, come si può riconoscere mediante il penultimo dei teoremi ora citati. Quindi con più ragione sarà convergente $\Sigma j'_n$.

Consideriamo ora j_n. Possiamo scrivere con una trasformazione di variabili:

$$j_n = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (n\pi + x)\, e^{-\operatorname{sen}^2 x . (n\pi + x)^6}\, dx$$

e prendendo ε minore di 1, possiamo ancora scrivere, in forza di un'osservazione fatta sopra:

$$j_n < \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} (n\pi + x)\, e^{-\frac{2}{3} x^2 . (n\pi + x)^6}\, dx .$$

Se ora nel fattore:

$$n\pi + x$$

che moltiplica l'esponenziale, pongo il massimo valore che esso può avere nel cammino d'integrazione che è $n\pi + \varepsilon$, e in luogo di $(n\pi + x)^6$ che comparisce all'esponente di e, pongo il suo minimo valore $(n\pi - \varepsilon)^6$, vengo ad accrescere il valore dell'integrale e quindi con più ragione si può scrivere:

$$j_n < (n\pi + \varepsilon) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} e^{-\frac{2}{3} x^2 (n\pi - \varepsilon)^6}\, dx$$

che, con una facile trasformazione di variabile, diventa $\left(\text{ponendo } c = \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$$j_n < \frac{n\pi + \varepsilon}{c(n\pi - \varepsilon)^3} \int_{-\varepsilon c (n\pi - \varepsilon)^3}^{+\varepsilon c (n\pi - \varepsilon)^3} e^{-x^2}\, dx .$$

L'integrale che comparisce in questa formola, qualunque sieno i limiti, anche che n cresca indefinitivamente, è sempre una quantità finita, perchè col penultimo dei teoremi citati è facile vedere che:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, d\, x$$

è convergente assolutamente. Quegli integrali, tendendo ad un limite finito per $n = \infty$ si manterranno sempre inferiori in valore assoluto a un certo numero finito A, quindi la somma di tutte le j_n sarà:

$$\Sigma\, j_n < \frac{A}{c} \sum_n \frac{n\,\pi + \varepsilon}{(n\,\pi - \varepsilon)^3} .$$

Ora il sommatorio del secondo membro rappresenta una serie *convergente per qualunque* ε *fisso.*

Infatti consideriamo:

$$\int_0^{\infty} \frac{x + \varepsilon}{(x - \varepsilon)^3}\, d\, x$$

e applichiamo il citato penultimo teorema. Poichè per un ν che soddisfi alla relazione:

$$1 < \nu < 2$$

il prodotto:

$$x^{\nu} \cdot \frac{x + \varepsilon}{(x - \varepsilon)^3}$$

tende a zero per $x = \infty$, così quell'integrale è convergente.

Intanto se consideriamo questo integrale scomposto in:

$$\int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \cdots$$

e osserviamo che la funzione $\frac{x+\varepsilon}{(x-\varepsilon)^3}$ è continuamente descrescente e quindi che ciascuno di questi integrali è maggiore di ciascuno dei termini della serie:

$$\pi \frac{\pi+\varepsilon}{(\pi-\varepsilon)^3} + \pi \frac{2\pi+\varepsilon}{(2\pi-\varepsilon)^3} + \dots$$

veniamo a conchiudere la convergenza di questa serie.

§. 117.

Nell'ultimo dei teoremi dimostrati nel §. 4, Cap. I, t. II delle mie *Lezioni di Calc. infinit.*, abbiamo messa come condizione necessaria, per l'applicazione del criterio ivi esposto, che la funzione sotto il segno d'integrale non muti di segno infinite volte per x crescente.

Onde se $f(x)$ muta di segno infinite volte, allora può accadere che l'integrale sia finito senza che $xf(x)$ per $x=\infty$ abbia per limite zero, oppure senza che sia lo zero uno dei limiti fra cui oscilli.

Come esempio scegliamo:

$$\int_a^\infty x^{-\frac{1}{2}} \cos x \, d\,x.$$

La espressione $xf(x)=x^{\frac{1}{2}} \cos x$ per $x=\infty$ tende ad ∞; eppure l'integrale è finito.

Perchè facendo l'integrazione per parti si ha:

$$= \left[x^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x\right]_a^\infty + \frac{1}{2}\int_a^\infty x^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sen} x \, d\,x.$$

Considerando ora il secondo integrale, si vede che esso soddisfa alle condizioni del penultimo teorema perchè, ponendo:

$$1 < \nu < \frac{3}{2}$$

si ha evidentemente:

$$\lim_{x=\infty} x^{\nu} \cdot x^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sen} x = 0,$$

e quindi concludiamo che il secondo integrale, e perciò anche il dato, è finito.

§. 118.

Un altro esempio simile al precedente è:

$$\int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)\, d\, x$$

che ha un valore finito sebbene sia:

$$\lim_{x=\infty} x \operatorname{sen}(x^2) = \infty \,.$$

Questo esempio si può trattare come il precedente. Esso è di Dirichlet (*Crelle's Journal*, vol. XVII, p. 60).

L'altro esempio seguente è di Riemann, (*Werke*, p. 230):

$$\int_a^{\infty} \frac{\cos e^x + x\, e^x \operatorname{sen} e^x}{x^2}\, d\, x = \left[-\frac{\cos e^x}{x}\right]_a^{\infty}.$$

§. 119.

Sappiamo che per la convergenza dell'integrale

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

quando la funzione $f(x)$ diventa ∞ per $x = b$, è *necessario* che $(x-b)f(x)$ per $x = b$, o sia zero o oscilli fra due limiti di cui uno sia lo zero. Ma questa naturalmente non è condizione sufficiente; può farsi vedere che se $f(x)$ per $x = b$ diventa ∞ senza infiniti massimi e minimi, allora, perchè l'integrale sia finito, occorre necessariamente che il limite di $(x-b)f(x)$ esista e sia zero; in tal caso cioè, se si vuole che l'integrale sia finito, la quantità $(x-b)f(x)$ non può oscillare fra due limiti di cui uno sia lo zero.

Un esempio di ciò è quello dato da Pringsheim (*Math. Ann.*, vol. XXXVII, p. 599) ed è:

$$\int_0^a \frac{e^{\left(1+\sqrt{\log\frac{1}{x}}\right)^2}}{\left(1+\sqrt{\log\frac{1}{x}}\right)^2}\,dx$$

che ha valore *infinito* (v. il lavoro citato di Pringsheim.

§. 120.

Il teorema, che il prodotto di funzioni integrabili è anche una funzione integrabile, vale quando non si tratti di *integrali improprii;* ma se si tratti di funzioni integrabili, che diventino infinite in qualche punto del cammino d'integrazione, quel teorema può anche non più sussistere.

Può p. es. non più sussistere quando ambedue i fattori del prodotto diventino infiniti per il medesimo punto. Così il quadrato di una funzioue integrabile che diventi ∞ in uno dei due limiti d'integrazione può non essere integrabile, cioè, a dir meglio, l'integrale può avere valore infinito.

L'integrale:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

ha valore finito e propriamente è eguale a $\frac{\pi}{2}$; mentre che l'integrale del quadrato cioè:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$$

ha valore infinito, perchè:

$$\lim_{x=1} \frac{(x-1)}{(1-x^2)} = -\frac{1}{2},$$

donde per un teorema noto si ricava che quell'integrale è infinito; il che del resto può vedersi facilmente anche per via diretta.

§. 121.

Se la funzione sotto il segno integrale non è una funzione continua in un punto, allora la derivata della funzione integrale non è il valore della funzione sotto il segno in quel punto.

Diamo un esempio di ciò scegliendolo fra gli integrali impropri.

L'integrale:

$$\int_0^x \left[2\,x \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + \operatorname{sen}\left(e^{\frac{1}{x}}\right) e^{\frac{1}{x}}\right] d\,x = \left[x^2 \cos\left(e^{\frac{1}{x}}\right)\right]_0^x$$

per $x = 0$ ha per derivata:

$$\lim_{h=0} \left[h \cos\left(e^{\frac{1}{h}}\right)\right] = 0\,.$$

Intanto la funzione data per $x = 0$ non ha limite determinato; oscilla fra $-\infty$ e $+\infty$.

I TEOREMI DEL VALOR MEDIO.

§. 122.

Nel §. 2, Cap. I, vol. II delle *Lezioni di Calc. infinit.*, abbiamo dimostrata una formola semplice relativa agli integrali definiti, cioè la formola:

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = (b-a)\,f(a + \vartheta\,(b-a))\,,\ (0 \leqq \vartheta \leqq 1)$$

valevole per il caso in cui f sia una funzione continua. Ora questo teorema si può estendere nel seguente modo.

I. *Se $f(x)$, $\varphi(x)$ sono continue nell'intervallo di integrazione, e $\varphi(x)$ non muta mai di segno nell'intervallo, allora:*

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,d\,x = f(a + \vartheta\,(b-a)) \int_a^b \varphi(x)\,d\,x$$

supposto naturalmente che esistano gli integrali che compariscono nella formola.

Questo teorema è noto da molto tempo (v. Moigno, *Leçons de Calcul Diff. et int.*, Paris, 1840-44, vol. II, p. 48. Dirichlet, *Werke*, Berlin, 1889-97, vol. I, p. 137).

Il Du Bois Reymond trovò altre condizioni per la sussistenza dello stesso teorema (*Math. Ann.*, vol. VII, p. 605).

Dal teorema precedente si possono ricavare questi altri assai notevoli.

II. *Sotto le medesime ipotesi del teorema precedente si ha l'altra formola:*

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^{a+\vartheta(b-a)} \varphi(x)\,dx\,.$$

III. *Sotto l'ipotesi della continuità delle due funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$, e supposto ancora che $f(x)$ sia una funzione sempre crescente o sempre decrescente, potendo poi $\varphi(x)$ anche mutare infinite volte di segno, si ha:*

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a)\int_a^{a+\vartheta(b-a)} \varphi(x)\,dx + \\ + f(b)\int_{a+\vartheta(b-a)}^b \varphi(x)\,dx$$

dove al solito ϑ è un numero compreso fra 0 e 1.

Omettiamo le dimostrazioni di questi teoremi pei quali rimandiamo alle opere di Harnack, *Die elemente der Diff. u. Int. Rech.*, Leipzig, 1881, p. 270, e Stolz, *Grundzüge der Diff. u. Int. Rech.*, Leipzig, 1893, t. I, p. 420.

Per essi possono vedersi i seguenti lavori:

Bonnet, *Journal de Math. de Liouville*, t. XIV.

Du Bois Reymond, *Crelle's Journ.*, vol. LXIX, p. 78-82 e vol. LXXIX, p. 42, nota.

Meyer, *Math. Ann.*, vol. VI, p. 315.

I teoremi enunciati valgono anche nei casi in cui le due funzioni abbiano un numero finito di punti di discontinuità, e anche se $\varphi(x)$ diventi infinita in uno dei limiti, purchè naturalmente sieno convergenti gli integrali che entrano nelle formole.

SULLA TRASFORMAZIONE DELL'INTEGRALE SEMPLICE.

§. 123.

Non si creda che la trasformazione dell'integrale semplice colle formole ordinarie, si possa fare senz'altro qualunque sia la funzione di trasformazione. Occorre invece applicare le formole con certe avvertenze senza di che si potrebbe cadere in errori.

Ponendo $x = \varphi(y)$ si ha:

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = \int_{a'}^{b'} f(\varphi(y))\,\varphi'(y)\,d\,y$$

dove a', b' sono i valori di y per $x = a$, $= b$.

Dobbiamo prendere in considerazione, la relazione fra x e y, la quale deve essere tale che ad ogni y corrisponda un x, e viceversa ad ogni x del campo corrisponda un solo y. Se essa non è una siffatta relazione bisogna spezzare l'intervallo d'integrazione in tante parti in modo che per ognuno di questi intervalli parziali si verifichi la corrispondenza univoca indicata.

Immaginiamo, per fissare le idee, che ad ogni x

corrisponda un y, ma che ad ogni y corrispondano vari x; in altri termini che la funzione inversa di $x = \varphi(y)$ abbia dei massimi o dei minimi quando x va da a sino a b.

È chiaro che la funzione $\varphi'(y)$ che comparisce nel secondo termine non è determinata dato che sia y; e quindi allora bisognerà spezzare l'intervallo da a a b in tante parti in modo che per ogni y vi sia in ciascuna di queste parti una sola x che vi corrisponda.

Un esempio rischiarerà meglio la cosa.

Si trasformi l'integrale:

$$\int_{-1}^{+1} x^2\, dx = \frac{2}{3}$$

colla sostituzione:

$$x^2 = y + b$$

che per $x = -1$ dà $y = 1 - b$ e per $x = 1$ dà lo stesso $y = 1 - b$.

Si ha quindi:

$$\frac{1}{2}\int_{1-b}^{1-b} \sqrt{y + b}\, dy = 0\,.$$

La ragione di ciò deriva dal fatto che non si è tenuto conto della duplicità dei valori di x, dato che sia y.

La y ha fra i limiti -1 e $+1$ di x, un minimo e propriamente per $x = 0$.

Se noi spezziamo il primo integrale nel punto $x = 0$ e poniamo:

$$\int_{-1}^{+1} = \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{+1}$$

e teniamo conto che per il primo degli integrali del secondo membro la x deve essere sempre negativa, e quindi per esso bisogna porre:

$$x = -\sqrt{y+b}$$

mentre per il secondo integrale la x è positiva dovendo essere compresa fra 0 e 1, e quindi per esso bisogna porre:

$$x = +\sqrt{y+b}$$

resta tolta ogni ambiguità.

Si può esaminare similmente l'esempio:

$$\int_0^\infty f\left(a\,x + \frac{b}{x}\right) d\,x \quad (a > 0, b > 0)$$

dove si faccia la sostituzione:

$$a\,x + \frac{b}{x} = y\,.$$

La y riceve un valore minimo fra 0 e ∞ per

$$x = +\sqrt{\frac{b}{a}}$$

per il quale:

$$y = 2\sqrt{a\,b}.$$

Spezzando allora l'integrale dato in due parti da 0 sino $+\sqrt{\frac{b}{a}}$, e da $+\sqrt{\frac{b}{a}}$ sino ad ∞, e riducendo, si trova infine che l'integrale dato è eguale a:

$$\frac{1}{a}\int_{2\sqrt{a\,b}}^{\infty} f(y)\,\frac{y}{\sqrt{y^2 - 4\,a\,b}}\,d\,y.$$

INTEGRAZIONE PER SERIE.

§. 124.

Una volta si credeva che una serie convergente fosse sempre integrabile termine a termine; Cauchy era caduto in un tale errore.

Il Weierstrass per il primo ha dato il teorema fondamentale sull'integrazione per serie. Esistono i seguenti lavori su questo argomento:

Weierstrass, *Crelle's Journ.*, vol. LXXI, p. 353.
Kronecker. *Berl. Berich.*, 1878, p. 54.
Dini, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.* Pisa, 1878, §. 286 e seg.
Darboux, *Annales de l'Ecole normale super.* 1875.
Arzelà, *Rendiconti dei Lincei*, (4), vol. I, p. 321 e 532 (1885).
Du Bois Reymond, *Berliner Berich.*, 1886, p. 359.
— *Abhandl., der bayer. Akad.*, vol. XII.
— *Math. Ann.*, vol. XXII, p. 260.
Osgood, *Gött. Nachrichten*, 1896; *American Journ. of Math.* t. XIX, 1896.

§. 125.

Quando la serie data è *equiconvergente*, in tutto l'intervallo d'integrazione, allora è possibile l'integrazione per serie. Ma la equiconvergenza non è condizione necessaria.

Come esempio scegliamo questo:

$$\int_0^1 \frac{x^{\mu-1} + x^{\nu-\mu-1}}{(1+x)^\nu}\, dx\,, \quad (\mu, \nu \text{ positivi e } \mu < \nu)$$

di cui la funzione sotto il segno può svilupparsi in serie, mediante la formola binomiale:

$$(1+x)^{-\nu} = 1 + (-\nu)_1\, x + (-\nu)_2\, x^2 + \ldots$$

per $\nu < 1$, e per ogni x fra 0 e 1.

Si ha allora da integrare la serie:

$$\Sigma\, (-\nu)_n\, (x^{n+\mu-1} + x^{n+\nu-\mu-1})$$

la quale (per $\nu < 1$) sarà equiconvergente in tutto l'intervallo d'integrazione. Quindi si può fare la integrazione per serie.

Se invece $\nu \geqq 1$ allora la serie sarà divergente per $x = 1$, per quanto si sa sulla serie binomiale, e quindi essa non sarà equiconvergente in tutto l'intervallo d'integrazione, ma lo sarà solo in qualunque intervallo $(0,\ 1 - \varepsilon)$ dove ε può essere una quantità piccola finchè si vuole, ma determinata.

Non possiamo perciò applicare il solito teorema; intanto possiamo dimostrare che la serie anche in questo caso è integrabile termine a termine per quanto non sia equiconvergente. (Stolz, *Grundzüge*, etc., I, p. 432).

Consideriamo il caso di $\nu < 2$.

Noi possiamo porre mediante la formola di Taylor:

$$\frac{1}{(1+x)^{\nu}} = \sum_{r=0}^{n-1} (-\nu)_r\, x^r + (-\nu)_n \frac{x^n}{(1+\theta x)^{n+\nu}}$$

dove al solito $0 \leqq \theta \leqq 1$.

Onde l'integrale dato diventa:

$$\sum_0^{n-1} \int_0^1 (x^{r+\mu-1} + x^{r+\nu-\mu-1})\, d\,x\, +$$

$$+ (-\nu)_n \int_0^1 \frac{x^{n+\mu-1} + x^{n+\nu-\mu-1}}{(1+\theta x)^{n+\nu}}\, d\,x.$$

Se noi dimostriamo che il limite per $n = \infty$ dell'ultimo termine è zero, abbiamo dimostrato che si può fare l'integrazione per serie della funzione data.

Ora evidentemente quell'ultimo termine è minore in valore assoluto di:

$$(-\nu)_n \int_0^1 (x^{n+\mu-1} + x^{n+\nu-\mu-1})\, d\, x =$$

$$= (-\nu)_n \left[\frac{1}{n+\mu} + \frac{1}{n+\nu-\mu}\right].$$

Si può mostrare che per $\nu < 2$ il limite:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(-\nu)_n}{n+\mu}$$

è zero, e così anche:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(-\nu)_n}{n+\nu-\mu}.$$

Infatti il valore della prima espressione è, a meno del segno:

$$\frac{\nu\,(\nu+1)\ldots(\nu+n-1)}{1\,.\,2\ldots n\,(n+\mu)} = \varphi\,(n),$$

ed è facile verificare che il limite del rapporto:

$$\frac{\varphi\,(n+1)}{\varphi\,(n)}$$

è l' unità. Possiamo far vedere, giovandoci di un teorema sulle serie, che il limite del termine generale della serie, i cui termini sono $\varphi\,(n)$, è zero. Giacchè si sa che la serie è convergente o divergente secondochè:

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 - \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}\right)$$

è maggiore o minore di 1; e in quest'ultimo caso il limite del termine generale è zero o infinito secondochè quel limite è positivo o negativo.

Ora:

$$n\left(1 - \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}\right) = n\left(1 - \frac{(n+\mu)(n+\nu)}{(n+1)(n+1+\mu)}\right)$$

$$= \frac{n}{n+1}\left[(2-\nu)\frac{n}{n+1+\mu} + \frac{1+(1-\nu)\mu}{n+1+\mu}\right]$$

e questa espressione per $n = \infty$ ha per limite $2 - \nu$, quantità che, per le ipotesi fatte, è una quantità minore di 1, ma positiva. Dunque, in forza del citato teorema, possiamo conchiudere:

$$\lim_{n=\infty} \varphi(n) = 0.$$

Nella stessa maniera si dimostrerebbe che:

$$\lim_{n=\infty} \frac{(-\nu)_n}{n+\nu-\mu} = 0$$

e quindi resta dimostrata l'integrabilità della serie data.

Se poi $\nu > 2$ allora, per mezzo delle formole di riduzione dei differenziali binomi, possiamo ridurci al caso di $\nu < 2$ e quindi possiamo allora effettuare per serie la voluta integrazione.

Su questo esempio si può vedere Stolz, loc. cit.

§. 126.

Un altro esempio simile al precedente, in cui cioè la serie non è equiconvergente in tutto l'intervallo d'integrazione, eppure si può fare l'integrazione per serie, è il seguente:

$$\int_0^\pi \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \cos(n\,x)\,d\,x$$

La serie sotto il segno integrale, per $x = 0$ è divergente, mentre è convergente per ogni altro x fra 0 e π; dunque non sarà equiconvergente in tutto l'intervallo d'integrazione.

Questo integrale è un integrale improprio, in cui la funzione sotto il segno diventa infinita per $x = 0$ che è uno dei limiti d'integrazione.

Calcolare la somma della serie che sta sotto il segno d'integrale.

Sviluppiamo in serie la funzione:

$$\log(2 - 2\cos x).$$

Introducendo per $\cos x$ la sua espressione mediante gli esponenziali si ha:

$$\begin{aligned} &= \log[2 - (e^{ix} + e^{-ix})] = \\ &= \log(1 - e^{ix})(1 - e^{-ix}) \\ &= \log(1 - e^{ix}) + \log(1 - e^{-ix}), \end{aligned}$$

e sviluppando in serie ciascuno di questi termini si ha:

$$\log 2(1 - \cos x) = -\sum_1^\infty \frac{e^{nix}}{n} - \sum_1^\infty \frac{e^{n-ix}}{n}$$
$$= -2\sum_1^\infty \frac{\cos(n\,x)}{n}.$$

Per ottenere questo sviluppo ci siamo serviti per semplicità di trasformazioni con *immaginarii,* ma alla fine del calcolo questi sono scomparsi. Si potrebbe però fare anche un procedimento evitando gli immaginarii (v. perciò Stolz, loc. cit. vol. I, p. 435, nota).

Si vede dunque che il nostro integrale è:

$$-\frac{1}{2}\int_0^\pi \log 2(1-\cos x)\,dx.$$

Ora si può far vedere che questo integrale è zero; dunque la serie data è integrabile, sebbene non sia equiconvergente.

La serie degli integrali indefiniti è:

$$-\Sigma\,\frac{\operatorname{sen}(n\,x)}{n^2}$$

che fra i limiti 0 e π dà appunto zero.

Che l'integrale definito:

$$A=\int_0^\pi \log 2(1-\cos x)\,dx$$

sia zero si dimostra nel seguente modo: colla sostituzione $x=\pi-y$, e col mutamento di y in x si ha:

$$A=\int_0^\pi \log 2(1+\cos x)\,dx$$

donde, sommando:

$$2A=\int_0^\pi \log 4(1-\cos^2 x)\,dx=\int_0^\pi \log(4\operatorname{sen}^2 x)\,dx=$$

$$=\int_0^\pi \log 2(1-\cos 2x)\,dx,$$

e ponendo $2x = y$ e indi mutando ancora y in x, si ha:

$$2A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \log 2(1 - \cos x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log 2(1 - \cos x)\, dx + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \log 2(1 - \cos x)\, dx.$$

Ma il secondo integrale ridiventa il primo colla sostituzione $y = 2\pi - x$, onde resta $2A = A$, cioè $A = 0$.

§. 127.

Sviluppiamo il seguente esempio di DARBOUX in cui non si ha la equiconvergenza, e non si ha neppure la integrabilità per serie.

$$\int_0^b \sum_0^{\infty} (n^2 x e^{-n^2x^2} - (n+1)^2 x e^{-(n+1)^2x^2})\, dx.$$

Il valore della serie è zero, come è facile verificare, quindi il suo integrale è zero. La serie non è equiconvergente in un intervallo che comprenda il punto $x = 0$ (v. esempio §. 32).

La serie degli integrali dei vari termini è:

$$\sum_0^n \int_0^b [n^2 x e^{-n^2x^2} - (n+1)^2 x e^{-(n+1)^2x^2}]\, dx =$$

$$= \sum_0^n \left[-\frac{1}{2} e^{-n^2b^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-(n+1)^2b^2} - \frac{1}{2}\right]$$

la cui somma si riduce evidentemente solo alla prima parte del primo termine, cioè a $-\frac{1}{2}$ e invece sappiamo che l'integrale è zero.

§. 128.

Si abbia da calcolare l'integrale indefinito:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} d x$$

Con lo sviluppo in serie della funzione sotto il segno si ha:

$$\int \left[1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\ldots\right] d x =$$

$$= x-\frac{x^3}{3!\,3}+\frac{x^5}{5!\,5}-\ldots$$

La integrazione per serie è permessa perchè la serie dello sviluppo del *seno* vale per qualunque valore di x, e quindi è equiconvergente in qualunque intervallo.

La funzione che si è venuta ad ottenere colla integrazione è una nuova funzione trascendente che non si può esprimere con un numero finito di funzioni ordinarie, e si suol chiamare l'*integralseno*.

Dienger, *Diff. u. Integr. Rech.* Stuttgart, 1857. t. II, p. 311.

Besso, *Giorn. di mat.*, t. VI.

§. 129.

L'integrale $\int \frac{e^x}{x}\,d\,x$, si calcola collo stesso procedimento e si ha la funzione:

$$\log x + x + \frac{x^2}{2!\,2} + \frac{x^3}{3!\,3} + \cdots$$

che costituisce una nuova funzione trascendente chiamata *Integral-logaritmo.*

Questa funzione fu così chiamata da Soldner *(Theorie et tables d'une nouvelle trascend.* München, 1809); ma era già stata introdotta da Mascheroni *(Adnot. ad Euleri Calc. Int.*, 1790) e da T. Caluso (Mem. Soc. it. delle scienze, t. XII, 1805, p. 268).

Ponendo $x = \log y$ si ha:

$$\int \frac{d\,y}{\log y}$$

e sotto questa forma fu studiata da Bessel e da Gauss *(Werke*, t. II, p. 444), che trovò che il numero dei numeri primi inferiori ad n è prossimo al valore dell'integrale:

$$\int_2^n \frac{d\,n}{\log n}.$$

INTEGRALI DI FUNZIONI CONTENENTI UN PARAMETRO.

§. 130.

Consideriamo un integrale della forma:

$$\int f(x\,y)\,d\,x.$$

Sappiamo che se la funzione sotto il segno, e la sua prima derivata rispetto ad y sono continue rispetto ad ambedue le variabili in ciascun punto di coordinate (x, y_1) dove x sia un valore qualunque nei limiti d'integrazione, la derivata rispetto ad y, nel punto $y = y_1$, dell'integrale, si può calcolare col principio della derivazione sotto il segno.

Nel seguente esempio non esiste la continuità indicata e non può farsi la derivazione sotto il segno:

$$\varphi(y) = \int_0^1 \log(x^2 + y^2)\, d\, x.$$

La derivata della funzione sotto il segno rispetto ad y è:

$$\frac{2\, y}{x^2 + y^2}$$

che non è continua nel punto $x = 0$ $y = 0$.

Ora la derivata di φ nel punto $y = 0$ non è eguale a:

$$\left[2\, y \int_0^1 \frac{d\, x}{x^2 + y^2} \right]_{y=0} = 0$$

Giacchè colla formola di integrazione per parti si ha:

$$\int_0^1 \log(x^2 + y^2)\, d\, x = \Big[x \log(x^2 + y^2) \Big]_0^1 -$$

$$- 2 \int_0^1 \frac{x^2\, d\, x}{x^2 + y^2}$$

ed essendo:

$$\int_0^1 \frac{x^2\,d\,x}{x^2+y^2}+\int_0^1 \frac{y^2\,d\,x}{x^2+y^2}=\int_0^1 d\,x=1$$

si ha:

$$\int_0^1 \log(x^2+y^2)\,d\,x=\log(1+y^2)-2+2\int_0^1 \frac{y^2\,d\,x}{x^2+y^2}$$

$$=\log(1+y^2)-2+2\,y\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}.$$

La derivata di questa espressione nel punto $y=0$ è:

$$\left[\frac{2\,y}{1+y^2}+2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{y}-\frac{2}{y}\,\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}}\right]_{y=0}=\pm\pi$$

mentre che coll'altro procedimento si era ottenuto zero.

§. 131.

Il seguente è un esempio in cui neppure si può fare la derivazione sotto il segno, ed è diverso dal precedente nel senso che l'integrale che si otterrebbe colla derivazione sotto il segno non ha senso determinato.

Consideriamo l'integrale:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(y\,x)}{x}\,d\,x.$$

Il valore di questo integrale è $\frac{\pi}{2}$ qualunque sia

y, come sarà dimostrato in un paragrafo seguente (vedi §. 133). Quindi la sua derivata rispetto ad y è zero per qualunque y; intanto facendo la derivazione sotto il segno si ha:

$$\int_0^\infty \cos(y\,x)\,d\,x$$

che non ha valore determinato, perchè è eguale per definizione a:

$$\lim_{x'=\infty}\int_0^{x'} \cos(y\,x)\,d\,x = \lim_{x'=\infty}\left[\frac{1}{y}\operatorname{sen}(y\,x)\right]_0^{x'}$$

$$= \lim_{x'=\infty}\frac{1}{y}\operatorname{sen}(y\,x')$$

il qual limite è indeterminato.

§. 132.

Ecco un altro esempio in cui neppure sussiste il teorema della derivazione sotto il segno.

Si abbia:

$$\int_0^x \left[\operatorname{sen}\left(4 \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right) - \frac{4\,y\,x}{x^2+y^2}\cos\left(4\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)\right]dx;$$

si può subito verificare che questo integrale è:

$$x \operatorname{sen}\left(4\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right),$$

perchè la derivata di questa funzione è proprio quella scritta sotto il segno integrale.

Vogliamo calcolare la derivata dell'integrale nel punto $y = 0$. Facendo direttamente la derivata dell'integrale si ha:

$$\frac{4}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cos\left(4 \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}\right),$$

che per $y = 0$ ha per valore 4.

Invece facendo la derivazione sotto il segno in $y = 0$ si ha:

$$\int_0^x \lim_{k=0} \left[\frac{\operatorname{sen}\left(4 \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{x}\right)}{k} - \right.$$

$$\left. - \frac{4\,x}{x^2 + k^2} \cos\left(4 \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{x}\right)\right] d\,x\,.$$

Ora la funzione che comparisce sotto il segno integrale è zero perchè:

$$\lim_{k=0} \frac{\operatorname{sen}\left(4 \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{x}\right)}{k} =$$

$$= \lim_{k=0} \frac{\operatorname{sen}\left(4 \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{x}\right)}{4 \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{x}} \; \frac{4 \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{x}}{k} =$$

$$= \lim_{k=0} \frac{4 \operatorname{arc\,tg} \frac{k}{x}}{k} = \frac{4}{x}$$

e il limite del secondo termine è anche $\frac{4}{x}$ col segno negativo; dunque quell'integrale è zero, risultato che non è d'accordo con quello di prima.

Il disaccordo dipende dal fatto che la funzione sotto il segno d'integrale, e la sua derivata rispetto ad y, non sono continue nel punto $x=0$, $y=0$ e che $x=0$ è uno dei limiti di integrazione.

Se si pone invece per limite inferiore dell'integrale un punto x' diverso da zero, calcolando direttamente la derivata dell'integrale si ha anche zero.

§. 133.

La derivazione sotto il segno può servire, applicata in vari modi, a trovare i valori di integrali definiti.

Se si conosce un integrale definito, e si deriva sotto il segno rispetto ad un parametro, si ha il valore di un altro integrale definito.

Si può anche fare il procedimento inverso, cioè ricavare il valore di un certo integrale definito dato, da quello della sua derivata.

Si voglia calcolare:

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\operatorname{sen}(y\,x)}{x}\, d\,x\,.$$

Facendo la derivata rispetto ad y si ha:

$$\int_0^\infty e^{-x} \cos(y\,x)\, dx$$

il cui valore lo possiamo calcolare con integrazione per parti, scrivendo:

$$\int e^{-x} \cos(y\,x)\, d\,x = e^{-x} \frac{\operatorname{sen}(y\,x)}{y} + \\ + \frac{1}{y} \int e^{-x} \operatorname{sen}(y\,x)\, d\,x$$

$$\int e^{-x}\operatorname{sen}(y\,x)\,d\,x = -\,e^{-x}\,\frac{\cos(y\,x)}{y} - \\ -\frac{1}{y}\int e^{-x}\cos(y\,x)\,d\,x$$

donde:

$$\int e^{-x}\cos(y\,x)\,d\,x = \frac{e^{-x}\,(y\operatorname{sen}(y\,x) - \cos(y\,x))}{1+y^2}$$

e quindi:

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos(y\,x)\,d\,x =$$

$$= \lim_{x'=\infty} \frac{e^{-x'}\,(y\operatorname{sen}(y\,x') - \cos(y\,x'))}{1+y^2} + \frac{1}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2}\,.$$

Onde possiamo conchiudere che l'integrale dato è:

$$\int_0^y \frac{d\,y}{1+y^2} = \operatorname{arc\,tg} y\,.$$

Se ora nell'integrale dato poniamo:

$$x = \frac{z}{y}$$

abbiamo:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z}{y}}\,\frac{\operatorname{sen} z}{z}\,d\,z = \operatorname{arc\,tg} y$$

e per $y = +\infty$ si ha:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} z}{z}\,d\,z = \frac{1}{2}\,\pi$$

formola che noi abbiamo già adoperato nei §§. 113, 131:

Ponendo $z = y\,x$ si ha ancora:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(y\,x)}{x}\,d\,x = \frac{1}{2}\,\pi$$

§. 134.

Considerando similmente l'integrale:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\frac{1 - \cos(y\,x)}{x}\,d\,x\,,$$

e procedendo in maniera analoga si trova:

$$\frac{1}{2}\log(1 + y^2)\,.$$

§. 135.

Poniamo:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2\,y\,x)\,d\,x = \varphi(y).$$

Si ha:

$$\varphi'(y) = -2\int_0^\infty e^{-x^2}\,x\operatorname{sen}(2\,y\,x)\,d\,x$$

e integrando per parti si ha:

$$\varphi'(y) = \Big[e^{-x^2}\operatorname{sen}(2\,y\,x)\Big]_0^\infty - 2\,y\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2\,y\,x)\,d\,x$$

e quindi possiamo scrivere:

$$\varphi'(y) = -2\,y\,\varphi(y)\,,$$

donde integrando:

$$\log\varphi(y) = -\,y^2 + \text{costante}$$

cioè:

$$\varphi(y) = c\, e^{-y^2}.$$

La costante c può determinarsi ponendo $y = 0$ nell'integrale dato; così si ha infine:

$$\varphi(y) = e^{-y^2} \int_0^\infty e^{-x^2}\, d\, x.$$

Resterebbe solo a calcolare la costante:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, d\, x,$$

che si dimostra eguale a:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ciò che sarà fatto nel §. seguente.

§. 136.

Sia:

$$\psi(y) = \int_0^\infty e^{-x^2} \frac{\operatorname{sen} 2\, y\, x}{x}\, d\, x$$

donde:

$$\psi'(y) = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2\, y\, x)\, d\, x.$$

Per i risultati del §. precedente si ha:

$$\psi'(y) = 2\, e^{-y^2} \int_0^\infty e^{-x^2}\, d\, x$$

donde:

$$\psi(y) = 2 \int e^{-y^2}\, d\, y \int_0^\infty e^{-x^2}\, d\, x + \text{cost.}$$

Per $y = 0$ si ha $\psi(y) = 0$ come si vede direttamente considerando l'integrale dato, quindi possiamo togliere la costante e fare l'integrazione rispetto ad y fra 0 e y. Si ha:

$$\psi(y) = 2\int_0^y e^{-y^2}\,dy \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\,.$$

Ora nell'integrale dato poniamo:

$$2\,y\,x = z$$
$$2\,y\,dx = dz.$$

Esso diventa:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{4y^2}}\,\frac{\operatorname{sen} z}{z}\,dz$$

che per $y = \infty$ ha per limite l'integrale del limite cioè:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} z}{z}\,dz$$

il cui valore sappiamo già essere $\frac{1}{2}\pi$ (v. §. 133); possiamo dunque scrivere:

$$\frac{1}{2}\pi = 2\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx =$$

$$= 2\left[\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right]^2$$

e con ciò resta calcolata la costante

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

INTEGRALI INDEFINITI

§. 137.

È utile la seguente osservazione sugli integrali indefiniti. Potendo porre la costante arbitraria sotto una forma qualunque, si può dare all'integrale forme diverse.

Quindi facendo l'integrazione con metodi diversi si possono avere funzioni apparentemente diverse ma che in fondo non sono differenti fra loro che per una costante.

Così p. es.:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + \text{costante}.$$

Intanto ponendo l'integrale dato sotto quest'altra forma equivalente:

$$\int \frac{\dfrac{2\,dx}{(x+1)^2}}{\dfrac{2\,(x^2+1)}{(x+1)^2}} = \int \frac{d\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)}{1-\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}$$

si ha per risultato:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x-1}{x+1} + \text{cost.}$$

Ora questa funzione, a meno di una costante, è la stessa di prima, perchè ponendo:

$$x = \operatorname{tg} y$$

si ha:

$$\operatorname{tg}\left(y - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} y \operatorname{tg} \dfrac{\pi}{4}} = \frac{x-1}{x+1}$$

e quindi:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x-1}{x+1} = y - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc\,tg} x - \frac{\pi}{4}.$$

§. 138.

È notevole quest'altra osservazione.

Volendo stare nei limiti delle quantità *reali* e delle funzioni *reali*, non si potrà sempre trovare una *medesima* funzione *reale* che sia l'integrale indefinito di una data, cioè che abbia per derivata una data funzione reale.

Potrà accadere che una certa funzione che rappresenti un integrale indefinito, diventi immaginaria per certi valori della variabile. Si potrebbe credere allora, in forza del principio che non vi possono essere due funzioni diverse aventi la medesima derivata (astrazione fatta da una costante), che l'integrale della funzione data reale non possa mettersi sotto forma reale in quell'intervallo in cui esistono quei valori; però bisogna pensare che alla costante arbitraria si può dare un qualunque valore, anche complesso, e quindi fare in modo che la funzione che si presenta sotto forma complessa, diventi invece una funzione *reale* di x.

Così, p. es.:

$$\int \frac{dx}{x-a}$$

dà:

$$\log(x-a) + \text{cost.}$$

In un tratto in cui $x < a$, questa funzione non è più reale; intanto in un tal intervallo scrivendo l'integrale dato sotto la forma equivalente:

$$-\int \frac{dx}{a-x} = \int \frac{d(-x)}{a-x}$$

si ottiene:

$$\log(a-x) + \text{cost.}$$

che è una funzione reale nell'intervallo di cui si tratta.

Ora, considerate nel medesimo intervallo, le due funzioni ottenute differiscono effettivamente per una costante *complessa*, perchè:

$$\log(x-a) = \log[(-1)(a-x)] = \\ = \log(a-x) + \log(-1)$$

Che due funzioni che abbiano la stessa derivata in un intervallo differiscano per una costante, è vero se si suppone che le due derivate sieno finite in tutto l'intervallo.

Per le modificazioni di questo principio fondamentale vedi SCHOENFLIES, *Jahresbericht der Deuts. Math. Verein.* t. VIII, p. 206; LEBESGUE, *Leçons sur l'integration*, Paris, 1904, p. 74; SCHEEFFER, *Acta Math.*, t. V, e HANS HAHN, *Monatshefte für Math. und Physik*, XVI. Jahrg., p. 161.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

§. 139.

Dalla equazione di una conica cerchiamo di eliminare mediante le derivate successive le cinque costanti che funzionano da coefficienti. Si ha allora una equazione differenziale, che può chiamarsi quella delle sezioni coniche.

Se l'equazione data è sotto la forma:

$$y = a x + b + \sqrt{p x^2 + 2 q x + r}$$

si ottiene:

$$\frac{d^3}{d x^3} \left[\left(\frac{d^2 y}{d x^2} \right)^{-\frac{2}{3}} \right] = 0$$

cioè l'equazione di 5.° ordine:

$$9 \left(\frac{d^2 y}{d x^2} \right)^2 \frac{d^5 y}{d x^5} - 45 \frac{d^2 y}{d x^2} \frac{d^3 y}{d x^3} \frac{d^4 y}{d x^4} + 40 \left(\frac{d^3 y}{d x^3} \right)^3 = 0 .$$

Nel caso della parabola si ha $p = 0$ e quindi si ha solo l'equazione di 4.° ordine:

$$\frac{d^2}{d x^2} \left[\left(\frac{d^2 y}{d x^2} \right)^{-\frac{2}{3}} \right] = 0 .$$

Vedi su questo argomento:

CUNNINGHAM, *Messenger of Math.*, vol. XVIII.

ELLIOTT, *Messenger of Math.*, vol. XIX.

§. 140.

Una serie di coniche omofocali ha per equazione finita:

$$\frac{x^2}{a^2 + c} + \frac{y^2}{b^2 + c} = 1 ,$$

e per equazione differenziale:

$$\left(\frac{d y}{d x} \right)^2 + \frac{x^2 - y^2 - a^2 + b^2}{x y} \frac{d y}{d x} - 1 = 0.$$

§. 141.

Diamo in questo paragrafo e nei seguenti, alcuni esempi di integrazione di equazioni differenziali.

Sia data l'equazione:

$$(x + y + 1)\, d\,x + (3\,x + 4\,y + 4)\, d\,y = 0.$$

Cerchiamo di fare una trasformazione delle due variabili in modo che l'equazione si riduca ad una equazione *omogenea*. Poniamo:

$$x = x' + \alpha$$
$$y = y' + \beta.$$

Sostituendo e volendo che l'equazione si riduca omogea, risulta:

$$\alpha = 0, \qquad \beta = -1.$$

Si ha allora:

$$(x' + y')\, d\,x' + (3\,x' + 4\,y')\, d\,y' = 0,$$

che è omogenea di 1° grado. Dividiamo per x' e poniamo:

$$\frac{y'}{x'} = z'$$

donde:

$$d\,y' = x'\,d\,z' + z'\,d\,x'.$$

Si ha:

$$(4\,z'^2 + 4\,z' + 1)\, d\,x' + (3 + 4\,z')\, x'\, d\,z' = 0$$

donde separando le variabili e integrando:

$$\log x' = -\int \frac{3 + 4\,z'}{4\,z'^2 + 4\,z' + 1}\, d\,z' + \text{cost.}$$

Ma:

$$\frac{3+4z'}{4z'^2+4z'+1} = \frac{1}{4\left(z'+\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(z'+\frac{1}{2}\right)}$$

dunque si ha infine per risultato:

$$\log x' + \log\left(z'+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4\left(z'+\frac{1}{2}\right)} = \log c$$

cioè:

$$e^{-\frac{x}{4y+2x+4}}[x+2y+2] = c.$$

§. 142.

$$(3x-6y+1)\,dx + (12x-24y+3)\,dy = 0.$$

Poniamo:

$$x - 2y = z$$

e eliminiamo la variabile y.

Si ha allora l'equazione:

$$(18z+5)\,dx - (12z+3)\,dz = 0.$$

da cui:

$$x - 3\int\frac{4z+1}{18z+5}\,dz = \text{cost.}$$

Ma:

$$\int\frac{4z+1}{18z+5}\,dz = \frac{1}{9}\int\left(2-\frac{1}{18z+5}\right)dz$$

$$= \frac{2}{9}z - \frac{1}{9.18}\log(18z+5),$$

dunque infine l'integrale della equazione proposta è:

$$e^{x+4y}[18(x-2y)+5]^{\frac{1}{18}}=c.$$

§. 143.

$$2xy\,dx+(y^2-3x^2)\,dy=0.$$

Trattandosi di un'equazione omogenea seguiamo il metodo generale. Poniamo $\frac{x}{y}=z$ e allora l'equazione data diventa:

$$\frac{2z\,dz}{1-z^2}+\frac{dy}{y}=0$$

donde:

$$-\log(1-z^2)+\log y=\log c$$

$$\frac{y^3}{y^2-x^2}=\text{cost.}$$

Applicando la teoria dei fattori integranti si può trovare che la data equazione ha un fattore integrante funzione di sola y, e che è:

$$\mu=-y^4.$$

Inoltre, essendo essa equazione omogenea ha anche per fattore integrante $\frac{1}{Mx+Ny}$, che è nel nostro caso $\mu'=\frac{1}{y^3-x^2y}$; onde l'integrale è dato dal rapporto dei due fattori integranti, cioè:

$$\frac{\mu}{\mu'}=\frac{y^3}{y^2-x^2}=\text{cost.}$$

§. 144.

$$y(x^2+y^2)\,dx + x(x\,dy - y\,dx) = 0.$$

Ponendo:

$$\frac{y}{x} = z$$

e eliminando la variabile y, si ha:

$$x^3 z(1+z^2)\,dz + x^3\,dz = 0.$$

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{1}{z(1+z^2)}$$

e quindi:

$$x = \log\frac{1+z^2}{2z} + \log c$$

$$c\,\frac{x^2+y^2}{2yx} = e^x.$$

§. 145.

$$x\frac{dy}{dx} - ay + y^2 = x^{-2a}.$$

Facciamo la sostituzione:

$$y = a + \frac{x^{-2a}}{z}, \quad \frac{dy}{dx} = -2a\frac{x^{-2a-1}}{z} - \frac{x^{-2a}}{z^2}\frac{dz}{dx}.$$

L'equazione data diventa:

$$x\frac{dz}{dx} + az + z^2 = x^{-2a},$$

cui si giungerebbe anche ponendo più semplicemente $y = a + z$.

Poniamo in questa equazione:

$$z = x^{-a}\, v$$

e si ha:

$$\frac{dv}{dx} + x^{-a-1}\,(v^2 - 1) = 0$$

che integrata dà:

$$\left(\frac{v+1}{v-1}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{x^{-a}}{a}} = c.$$

L'integrale dell'equazione data è dunque:

$$\frac{x^{-a} + y - a}{x^{-a} - y + a}\, e^{\frac{2}{a x^{a}}} = \text{cost.}$$

Per questa equazione vedi più sotto §. 155.

§. 146.

$$x\frac{dy}{dx} - a\,y + y^2 = x^{\frac{2a}{3}}.$$

Poniamo:

$$y = \frac{x^{\frac{2a}{3}}}{z}.$$

Procedendo come sopra si ha per risultato finale:

$$\frac{3\,x^{\frac{2a}{3}} + a\,y + 3\,y\,x^{\frac{a}{3}}}{-3\,x^{\frac{2a}{3}} - ay + 3\,y\,x^{\frac{a}{3}}}\, e^{-\frac{6}{a} x^{-\frac{a}{3}}} = \text{cost.}$$

§. 147.

Un metodo che può riuscire molte volte per la ricerca dell' integrale generale dell' equazione differenziale di 1° ordine è il seguente:

Si abbia un' equazione differenziale di 1° ordine:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

e si ponga sotto la forma:

$$F(\varphi, \psi) = 0$$

dove φ, ψ sieno funzioni di $x, y, \frac{dy}{dx}$.

Si ponga $\varphi = a$, $\psi = b$, e si derivino i primi membri di queste due relazioni; con ciò restano eliminate le costanti a, b, e si avranno due equazioni differenziali di 2° ordine. Supponiamo che queste sieno identiche; si abbia cioè un' equazione di 2° ordine unica:

$$\omega\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = 0.$$

L' integrale di questa sarà una relazione fra x, y e due costanti arbitrarie che chiameremo a, b.

Eliminando tra essa e la sua derivata, la costante b o la costante a si devono avere due relazioni contenenti $x, y, \frac{dy}{dx}$ e le costanti a, b, e tali relazioni risolute rispetto alle costanti non possono che essere esattamente le due:

$$\varphi = a$$
$$\psi = b$$

per il modo con cui da queste si è ricavata la relazione $\omega = 0$. Se fra queste due elimino $\frac{d\,y}{d\,x}$ si ha una relazione fra x, y, a, b che è l'integrale generale dell'equazione differenziale di 2° ordine $\omega = 0$.

Se ora immagino le due costanti a, b legate dalla relazione data:

$$F(a\,b) = 0$$

ovvero elimino una delle costanti fra questa relazione e l'integrale generale ora ottenuto, ho una relazione fra x, y e una costante arbitraria che è l'integrale generale dell'equazione data.

Sia p. es.:

$$\left(y - x\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 - 1 = 0.$$

Poniamo:

$$y - x\frac{d\,y}{d\,x} = a \tag{1}$$

$$\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 - 1 = b. \tag{2}$$

Si ha la relazione:

$$a^2 + b = 0. \tag{3}$$

Derivando le due ultime equazioni si ha la medesima equazione differenziale di 2° ordine, cioè:

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = 0.$$

Dunque l'integrale generale dell'equazione data si otterrà eliminando $\frac{d\,y}{d\,x}$ fra (1) (2), e immaginando poi a, b legate dalla (3). Si ha così:

$$(y-a)^2+x^2(a^2-1)=0$$

che è l'integrale generale dell'equazione data, e a è la costante arbitraria.

§. 148.

Lo stesso metodo lo adoperiamo per l'equazione:

$$y\frac{dy}{dx}-x=\frac{m}{y^2-y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ponendo:

$$y\frac{dy}{dx}-x=a$$

$$y^2-y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=b,$$

si trova, derivando i primi membri, la medesima equazione di 2.° ordine:

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0.$$

Quindi l'integrale generale della data si trova eliminando $\frac{dy}{dx}$ fra le due equazioni precedenti, con che si ha:

$$y^2-(a-x)^2=b=\frac{m}{a}$$

come integrale generale della data.

§. 149.

$$\left(\frac{dy}{dx} - y\right)^2 - 2x^3 y \left(\frac{dy}{dx} - y\right) = 4x^3 y^2 - 4x^2 y^2 \log y.$$

Poniamo:

$$y = e^z$$

$$\frac{dy}{dx} = e^z \frac{dz}{dx}$$

e si ha riducendo:

$$\left[\frac{1}{2x}\left(\frac{dz}{dx} - 1\right)\right]^2 = \frac{x}{2}\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) + x - z.$$

Poniamo:

$$\frac{1}{2x}\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = a$$

$$\frac{x}{2}\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) + x - z = b.$$

e osserviamo che le derivate di queste due relazioni sono le stesse; quindi applicando lo stesso metodo di avanti si ha per risultato:

$$x^2 - 2x \log y - 2a^2 x + 2ax + 1 = 0$$

dove a funziona da costante arbitraria.

§. 150.

$$y - 2x\frac{dy}{dx} + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0.$$

Ponendo:

$$y - 2x\frac{dy}{dx} = a$$

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = b$$

si trova che queste danno luogo alla medesima equazione differenziale di 2.° ordine. Onde col solito metodo, eliminando $\frac{dy}{dx}$ e b si ha:

$$\frac{(y-a)^4}{16x^2} = -a.$$

§. 151.

L'equazione di 2.° ordine della forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Q\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

dove P, Q non contengono le derivate di y rispetto ad x, può abbassarsi al 1.° ordine nei seguenti casi:

1) Se P, Q sono funzioni di sola x.

Poniamo $\frac{dy}{dx} = p$, e l'equazione diventa allora:

$$\frac{dp}{dx} + Pp + Qp^2 = 0$$

che è del tipo delle equazioni di Bernoulli, e che, con una sostituzione si riduce subito al tipo delle equazioni *lineari* di 1.° ordine. Integrata questa equazione di primo ordine e eliminando p fra il suo integrale e l'equazione $\frac{dy}{dx} = p$, non ci sarà da eseguire ulteriormente che delle quadrature.

2) Se P, Q sono funzioni di sola y.

Facciamo il mutamento di variabili considerando x come funzione e y come variabile. Allora:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{\dfrac{d^2 x}{d y^2}}{\left(\dfrac{d x}{d y}\right)^3}$$

e quindi sostituendo si rientra nel caso precedente.

3) Sia P funzione di sola x, e Q funzione di sola y, cioè $P = \varphi(x)$, $Q = \psi(y)$.

Scrivendo l'equazione sotto la forma:

$$\frac{\dfrac{d^2 y}{d x^2}}{\dfrac{d y}{d x}} + \varphi(x) + \psi(y) \frac{d y}{d x} = 0$$

si vede che integrando si ha:

$$\log \left(\frac{d y}{d x}\right) + \int \varphi(x)\, d x + \int \psi(y)\, d y = \log c$$

$$\frac{d y}{d x} = c\, e^{-\int \varphi(x) dx - \int \psi(y) dy}.$$

Si ha così una relazione fra x, y, $\frac{d y}{d x}$ e una costante arbitraria. Integrando questa equazione di 1.° ordine si ha l'integrale generale della data.

Oppure possiamo procedere anche col metodo cosidetto della *variazione della costante*.

Consideriamo per un momento l'altra equazione:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \varphi(x) \frac{d y}{d x} = 0$$

che divisa per $\frac{d y}{d x}$ e integrata dà:

$$\log \frac{d y}{d x} + \int \varphi(x)\, d x = \log c$$

$$\frac{d y}{d x} = c\, e^{-\int \varphi(x) dx}.$$

Consideriamo ora c anzichè costante, funzione di y, e cerchiamo di determinarla in maniera che la derivata seconda di y ricavata da questa espressione coincida con quella ricavata dall'equazione differenziale data. Si ha:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d c}{d y} \frac{d y}{d x} e^{-\int \varphi(x) dx} - c\, e^{-\int \varphi(x) dx} \varphi(x)$$

e dal paragone coll'equazione data, risulta:

$$\frac{d c}{d y} = - c\, \psi(y)$$

$$c = e^{-\int \psi(y) dy}.$$

Coll'integrazione del secondo membro si viene a introdurre un'altra costante, e si è così ricondotta l'integrazione dell'equazione data di 2.° ordine a quella di una di 1.° ordine.

§. 152.

Si abbia:

$$x^3 \frac{d^2 y}{d x^2} = \left(y - x \frac{d y}{d x}\right)^2.$$

Poniamo:

$$x = e^{\theta}$$

$$y = z\, e^{\theta}$$

donde:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{d z}{d \theta} + z$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \left(\frac{d^2 z}{d \theta^2} + \frac{d z}{d \theta}\right) e^{-\theta}$$

e l'equazione data diventa:

$$\frac{d^2 z}{d\,\theta^2} + \frac{d\,z}{d\,\theta} = \left(\frac{d\,z}{d\,\theta}\right)^2.$$

Siamo così ricondotti ad un'equazione del tipo considerato nel §. precedente.

Ponendo:

$$\frac{d\,z}{d\,\theta} = u$$

si ha l'equazione di 1.° ordine:

$$\frac{d\,u}{d\,\theta} + u - u^2 = 0$$

che integrata dà:

$$u = \frac{1}{1 - c\,e\theta} = \frac{d\,z}{d\,\theta}$$

e quindi infine:

$$d\,z = \frac{d\,x}{x\,(1 - c\,x)}$$

$$z = \log \frac{x}{c'(1 - c\,x)} = \frac{y}{x}.$$

§. 153.

Si abbia l'equazione lineare completa di 2.° ordine:

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) y = x^2.$$

Cerchiamo due soluzioni particolari di:

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) y = 0.$$

Poniamo:

$$y = u + \frac{v}{x}$$

dove u, v sieno funzioni di x, di una delle quali possiamo poi arbitrariamente disporre.

Allora si ha:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,u}{d\,x} + \frac{1}{x}\frac{d\,v}{d\,x} - \frac{v}{x^2}$$

$$\frac{d^2\,y}{d\,x^2} = \frac{d^2\,u}{d\,x^2} + \frac{1}{x}\frac{d^2\,v}{d\,x^2} - \frac{2}{x^2}\frac{d\,v}{d\,x} + \frac{2\,v}{x^3}.$$

E quindi sostituendo:

$$\left(\frac{d^2\,u}{d\,x^2} + u\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{d^2\,v}{d\,x^2} + v\right) - \frac{2}{x^2}\left(\frac{d\,v}{d\,x} + u\right) = 0.$$

Ponendo:

$$\frac{d\,v}{d\,x} + u = 0$$

e indi eliminando u, resta la equazione.

$$-\left(\frac{d^3\,v}{d\,x^3} + \frac{d\,v}{d\,x}\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{d^2\,v}{d\,x^2} + v\right) = 0.$$

Due soluzioni particolari di questa equazione sono:

$$v = \operatorname{sen} x$$

$$v = \cos x$$

che dànno rispettivamente:

$$u = -\cos x$$

$$u = \operatorname{sen} x.$$

Ricaviamo quindi che la equazione in y ha per soluzioni particolari:

$$y = \frac{-x\cos x + \operatorname{sen} x}{x}$$

$$y = \frac{x\operatorname{sen} x + \cos x}{x}.$$

Intanto è facile verificare che $y = x^2$ è una soluzione particolare della equazione data; quindi, per un noto teorema, si ha che l'integrale generale della equazione data è:

$$y = x^2 + c\,\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x} + c_1\,\frac{x\operatorname{sen} x + \cos x}{x}.$$

§. 154.

Si abbia:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - \frac{4x^2 - 8x + 6}{(1-x)^2}\,y = 0.$$

Questa equazione può scriversi più semplicemente:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - \left[4 + \frac{2}{(1-x)^2}\right] y = 0.$$

Poniamo:

$$y = z + \frac{v}{1-x}$$

avendo presente che potremo poi ancora disporre di una delle due funzioni z, v.

Eseguendo i calcoli l'equazione diventa:

$$\left(\frac{d^2 z}{d x^2} - 4z\right) + \frac{1}{1-x}\left(\frac{d^2 v}{d x^2} - 4v\right) +$$

$$+ \frac{2}{(1-x)^2}\left(\frac{d v}{d x} - z\right) = 0,$$

e determinando z in modo che sia:

$$\frac{d\,v}{d\,x} - z = 0$$

resta:

$$\left(\frac{d^3\,v}{d\,x^3} - 4\,\frac{d\,v}{d\,x}\right) + \frac{1}{1-x}\left(\frac{d^2\,v}{d\,x^2} - 4\,v\right) = 0$$

di cui due integrali particolari sono:

$$v = e^{-2x}$$

$$v = e^{2x}$$

cui corrispondono:

$$z = -\,2\,e^{-2x}$$

$$z = 2\,e^{2x}.$$

L'integrale dell'equazione data è dunque:

$$y = c_1\,\frac{-\,e^{-2x} + 2\,x\,e^{-2x}}{1-x} + c_2\,\frac{3\,e^{2x} - 2\,x\,e^{2x}}{1-x}.$$

Allo stesso risultato possiamo giungere per altra via.

Poniamo:

$$y = \frac{v}{1-x}$$

e l'equazione diventa:

$$\frac{d^2\,v}{d\,x^2} + \frac{2}{1-x}\,\frac{d\,v}{d\,x} - 4\,v = 0.$$

Proviamo se questa equazione è soddisfatta da:

$$v = (a + b\,x)\,e^{kx}$$

dove a, b, k sono costanti da determinarsi.

Sostituendo e riducendo si ha:

$$(1-x)\,[k^2\,(a+b\,x) + 2\,k\,b - 4\,(a+b\,x)] +$$
$$+ 2\,k\,(a+b\,x) + 2\,b = 0.$$

Perchè l'equazione sia soddisfatta è necessario che sieno zero in questa espressione i coefficienti delle diverse potenze di x. Si ha:

$$-k^2 b + 4 b = 0$$
$$-k^2 a + 4 a + k^2 b - 4 b = 0$$
$$k^2 a + 2 k b - 4 a + 2 k a + 2 b = 0$$

le quali danno:

$$4 - k^2 = 0$$
$$2 k (a + b) + 2 b = 0$$

donde prima di tutto:

$$k = \pm 2,$$

e in quanto poi alle altre due costanti a, b, una di esse resta arbitraria. Per far risultare lo stesso integrale già ottenuto, poniamo:

$$k = +2 \qquad b = -2 \qquad a = +3$$
$$k = -2 \qquad b = +2 \qquad a = -1$$

e quindi:

$$v = (3 - 2 x) e^{2x}$$
$$v = (-1 + 2 x) e^{-2x}$$

sono due integrali particolari dell'equazione in v, donde otteniamo l'integrale generale dell'equazione proposta.

§. 155.

Si chiamano, come si sa, *equazioni di Riccati* tutte quelle del tipo $\dfrac{d y}{d x} = P y^2 + Q y + R$, essendo

P, Q, R funzioni di x, ma l' equazione particolare considerata da Riccati è propriamente la seguente:

$$\frac{dy}{dx} + b\,y^2 = c\,x^{n-2} \tag{1}$$

dove b, c sono due costanti.

Ponendo:

$$y = \frac{z}{x}$$

si ha:

$$x\frac{dz}{dx} - z + b\,z^2 = c\,x^n. \tag{2}$$

In luogo di questa consideriamo l'equazione più generale:

$$x\frac{dz}{dx} - a\,z + b\,z^2 = c\,x^n. \tag{3}$$

Se $n = 2\,a$ questa equazione si può integrare ponendo:

$$z = x^a\,v$$

il che dà:

$$\frac{dv}{c\,x^{n-2a} - b\,v^2} = x^{a-1}\,dx$$

e quindi, se $n = 2\,a$, il primo membro risulta funzione di sola v, e si compie l'integrazione.

Se ciò non si verifica, poniamo:

$$z = A + \frac{x^n}{z_1}$$

dove:

$$A = \frac{a}{b}\;;$$

allora la (3) diventa:

$$x \frac{d z_1}{d x} - (n + a) z_1 + c z^2{}_1 = b x^n \qquad (4)$$

e si è tornati ad un'equazione della forma (3).

Se in questa è:

$$n = 2 (n + a)$$

cioè se:

$$\frac{n - 2a}{2n}$$

è eguale ad 1, allora colla sostituzione $z_1 = x^{n+a} v$ si integra questa equazione.

Se la precedente relazione non si verifica, facciamo un'altra sostituzione del tipo:

$$z_1 = A_1 + \frac{x^n}{z_2} \qquad \left(A_1 = \frac{n + a}{c}\right)$$

e si ha similmente un'equazione:

$$x \frac{d z_2}{d x} - (2n + a) z_2 + b z_2{}^2 = c x^n$$

che si integra ponendo $z_2 = x^{2n+a} v$ se:

$$\frac{n - 2a}{2n} = 2.$$

Così seguitando si vede che con questo metodo si giungerà alla integrazione se:

$$\frac{n - 2a}{2n}$$

è un numero intero positivo o zero.

Facciamo ora invece la sostituzione:

$$z = \frac{x^n}{z_1}.$$

Allora la (3) diventa invece:

$$x \frac{d z_1}{d x} - (n - a) z_1 + c z_1{}^2 = b x^n \tag{5}$$

e seguitando poi, come avanti, colle sostituzioni del tipo:

$$z_1 = A_1 + \frac{x^n}{z_2}, \text{ ecc., ecc.}$$

si giunge collo stesso metodo alla conclusione che se:

$$\frac{n + 2a}{2n}$$

è un numero intero positivo allora si può compiere la integrazione.

Si ha dunque che l'equazione di Riccati è integrabile con un numero finito di termini mediante le funzioni elementari quando $\frac{n-2}{2n}$ è numero intero positivo o zero, ovvero $\frac{n+2}{2n}$ è un intero positivo; e osservando che:

$$\frac{n+2}{2n} = 1 - \frac{n-2}{2n}$$

possiamo anche dire che per l'integrabilità dell'equazione di Riccati è sufficiente che:

$$\frac{n-2}{2n}$$

sia un numero intero qualunque positivo, negativo o zero.

Ponendo $n = 2m$, da:

$$\frac{n-2}{2n} = \pm r = \text{intero}$$

si ha:

$$\frac{2m-2}{4m} = \pm r$$

cioè:

$$\frac{1}{m} = \pm (2r \pm 1)$$

cioè il criterio d'integrabilità diventa questo: *che* $\frac{1}{m}$ *deve essere un numero intero dispari positivo o negativo.*

Si presenterebbe ora la quistione se esistono altri casi di integrabilità, ma il Liouville dimostrò (*Journ. de Math.*, t. VI, 1841, p. 13) che quello ora enunciato è l'unico caso in cui l'equazione di Riccati è integrabile con un numero finito di termini.

§. 156.

L'equazione generale di Riccati:

$$\frac{dy}{dx} = Py^2 + Qy + R \tag{1}$$

colle sostituzioni:

$$y = z\,e^{\int Q\,dx}$$

$$x = -\int P\,e^{\int Q\,dx}\,dx$$

diventa:

$$\frac{dz}{dx} + z^2 = S \tag{2}$$

dove S è una funzione di x; cioè possiamo sempre trasformare l'equazione generale di RICCATI in un'altra in cui sia $Q=0$, $P=-1$.

L'equazione classica di Riccati considerata nel §. precedente è della forma (2) in cui S è una potenza di x, $S=x^{2m-2}$.

Se si pone:

$$S=x^{2m-2}+b\,x^{-2}$$

si ha un'equazione studiata da MALMSTÉN *(Cambridge and Dublin Math. Journ.*, t. V, 1850, p. 180; *Crelle's Journ.* t. XXXIX, 1850, p. 114) e da BRIOSCHI (*Annali di scienze fisiche e mat.*, t. II, 1851, p. 497; *Opere mat.*, Milano 1901, t. I, p. 1). Se invece si pone:

$$S=x^{2m-2}+a\,x^{m-2}$$

si ha un'equazione di SIACCI *(Rend. Accad. delle scienze di Napoli,* 1901), e se infine si pone:

$$S=x^{2m-2}+a\,x^{m-2}+b\,x^{-2}$$

si ha un'equazione più generale comprendente quella particolare di RICCATI, quella di MALMSTÉN-BRIOSCHI, e quella di SIACCI, e che fu considerata da me *(Rend. Accad. delle scienze di Napoli*, 1903, 1908) e di cui io studiai il generale criterio di integrabilità, comprendente quindi tutti quelli determinati dai precedenti Autori per le loro particolari equazioni

Il criterio generale d'integrabilità è che:

$$\frac{a+\sqrt{1+4b}}{m} \quad \text{e} \quad \frac{a-\sqrt{1+4b}}{m}$$

sieno due numeri interi dispari di segni opposti. Per $a = b = 0$ si torna al criterio del §. 155.

È bene osservare che l'equazione:

$$\frac{dz}{dx} + A z^2 = B x^{2m-2} + a x^{m-2} + b x^{-2}$$

essendo A, B, a, b costanti, non è più generale di quella studiata di sopra in cui A e B sono eguali ad 1. Perchè colla sostituzione:

$$z = A^{\frac{1-2m}{2m}} B^{\frac{1}{2m}} . \zeta$$

$$x = A^{-\frac{1}{2m}} B^{-\frac{1}{2m}} . \xi$$

da questa equazione ci riduciamo a quella.

§. 157.

Si sa che l'equazione generale lineare omogenea di ordine k, può abbassarsi all' ordine $k-1$, perdendo però il carattere della linearità. Quindi l'equazione lineare omogenea di 2.° ordine può abbassarsi al primo. Di che tipo è questa equazione abbassata?

Si fa vedere subito che è precisamente del tipo di Riccati.

Infatti trasformando l'equazione:

$$y'' - Q_1 y' + R_1 = 0$$

colla sostituzione:

$$y = e^{-\int P z dx}$$

(essendo P una qualunque funzione di x) donde:

$$y' = -e^{-\int P z\,dx} P.\,z$$

$$y'' = e^{-\int P z\,dx}\left[P^2 z^2 - P z' - P' z\right]$$

si trova:

$$z' = P z^2 + \left(-Q_1 - \frac{P'}{P}\right) z + \frac{R_1}{P}$$

che è del tipo:

$$z' = P z^2 + Q z + R$$

se si pone:

$$Q = -Q_1 - \frac{P'}{P}$$

$$R = \frac{R_1}{P}.$$

§. 158.

Una proprietà importante delle equazioni di Riccati è che *il rapporto anarmonico di quattro integrali particolari è indipendente da x, cioè è costante.*

Questa proprietà che è *caratteristica* per l'equazione di Riccati, nel senso che *ogni equazione differenziale avente questa proprietà è un'equazione di* Riccati, fu scoperta da Ed. Weyr nel 1875 (*Abhand. der Böhm. Gesell. d. Wiss.* I. (6), t. VIII, B, n° 1, 1875; p. 30) e indi ritrovata da Picard nel 1877 (*Annales de l'École norm. sup.* (1), t. VI, 1877, p. 341).

La sua dimostrazione si può fare semplicemente mediante l'osservazione fatta nel §. precedente.

Colla sostituzione:

$$z = -\frac{1}{P}\,\frac{y'}{y},$$

trasformando l'equazione di Riccati in una lineare omogenea di 2.º ordine, a quattro integrali suoi z_1, z_2, z_3, z_4 corrisponderanno quattro integrali di questa y_1, y_2, y_3, y_4.

Il rapporto anarmonico delle quattro z cioè:

$$\lambda = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$$

sarà eguale a:

$$\lambda = \frac{\frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_3'}{y_3}}{\frac{y_2'}{y_2} - \frac{y_3'}{y_3}} \cdot \frac{\frac{y_2'}{y_2} - \frac{y_4'}{y_4}}{\frac{y_1'}{y_1} - \frac{y_4'}{y_4}} = \frac{d\frac{y_1}{y_3} \; d\frac{y_2}{y_4}}{d\frac{y_2}{y_3} \; d\frac{y_1}{y_4}}.$$

Ora essendo le $z_1 \; z_2 \; z_3 \; z_4$ fra loro diverse, due delle y sono sempre lineamente indipendenti, nel senso che fra esse, p. es. y_3, y_4, non può esistere alcuna relazione del tipo $c_1 \, y_3 + c_2 \, y_4 = 0$ dove le c sieno costanti; infatti da $y_3 = -\frac{c_2}{c_1} y_4$ si dedurrebbe $z_3 = z_4$. Allora sarà sempre, (ricordando che ogni integrale dell'equazione lineare omogenea di 2.º ordine è sempre esprimibile come una combinazione lineare a coefficienti costanti di due integrali particolari indipendenti):

$$y_1 = a_1 \, y_3 + b_1 \, y_4$$
$$y_2 = a_2 \, y_3 + b_2 \, y_4$$

donde immediatamente:

$$\lambda = \frac{b_1 \, a_2}{b_2 \, a_1} = \text{cost.}$$

(vedi una mia Nota in *Rend. Ist. Lomb.* (2), t. XXXVI, 1903, p. 322).

Che la proprietà enunciata sia *caratteristica* per l'equazione di RICCATI, si può far vedere nel seguente modo: supposto z_1, z_2, z_3, tre date funzioni di x, e z una funzione indeterminata, l'equazione differenziale:

$$(1) \qquad \frac{d}{dx}\left[\frac{y-y_2}{y-y_3} \cdot \frac{y_1-y_3}{y_1-y_2}\right] = 0$$

è, a meno di un fattore:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} y' \,, & y^2 \,, & y \,, & 1 \\ y_1' \,, & y_1^2 \,, & y_1 \,, & 1 \\ y_2' \,, & y_2^2 \,, & y_2 \,, & 1 \\ y_3' \,, & y_3^2 \,, & y_3 \,, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

che è una equazione di RICCATI, di cui $y_1\, y_2\, y_3$ sono integrali particolari, e y è la funzione incognita.

Collo stesso principio cioè colla equivalenza delle due equazioni (1) (2) si ha un'altra dimostrazione del teorema del rapporto anarmonico. Perchè, supposto che y, y_1, y_2, y_3, sieno quattro integrali particolari, esprimendo che essi soddisfanno l'equazione di RICCATI, e fra le quattro relazioni così ottenute eliminando i coefficienti, si ha precisamente il determinante (2), donde si ricava (1) cioè $d\lambda = 0$, e quindi $\lambda =$ cost.

La proprietà dimostrata mostra che, conosciuti tre integrali particolari dell'equazione di RICCATI, è conosciuto l'integrale generale, che è l'y ricavato dall'equazione:

$$\frac{y-y_2}{y-y_3} \cdot \frac{y_1-y_3}{y_1-y_2} = \text{cost.} = c$$

cioè:

$$y = \frac{y_1 (y_2 - c\, y_3) - (1 - c)\, y_2\, y_3}{c\, y_2 - y_3 - (1 - c)\, y_1}.$$

§. 159.

Si dirà che un'equazione differenziale è *integrabile algebricamente*, quando il calcolo del suo integrale generale si fa con un numero finito di operazioni algebriche applicate alla variabile indipendente e ai coefficienti dell' equazione medesima, cioè p. es. dipende, con un numero finito di operazioni algebriche, dalle radici di un'equazione algebrica risolubile per radicali, i cui coefficienti possano determinarsi, mediante quelli dell' equazione differenziale, con un numero finito delle medesime operazioni.

Le equazioni di Riccati considerate nei §§. precedenti, sono integrabili algebricamente quando sono soddisfatte le indicate condizioni di integrabilità.

Io ho trovato una estesa classe di equazioni di Riccati che si integrano algebricamente, cioè che si integrano risolvendo un' equazione algebrica di 3.° grado. *(Rend. Ist. Lomb. (2)*, t. XXXVI, 1903, p. 322).

Tali equazioni sono del seguente tipo generale:

$$\begin{vmatrix} \frac{dy}{dx} & \varphi' & \psi' & \chi' \\ -1 & 3 & 2\varphi & \psi \\ y & \varphi & 2\psi & 3\chi \\ -y^2, & \varphi^2 - 2\psi, & \varphi\psi - 3\chi, & \varphi\chi \end{vmatrix} = 0$$

in cui φ, ψ, χ sieno funzioni qualunque di x, colle sole condizioni, che non sieno naturalmente zero i coefficienti di $\frac{dy}{dx}$, e di y^2 nello sviluppo del precedente determinante.

Questa equazione di Riccati ha per integrali particolari le tre radici dell'equazione algebrica:

$$z^3 + \varphi \,.\, z^2 + \psi \,.\, z + \chi = 0$$

la quale ha radici distinte perchè il suo discriminante è precisamente il coefficiente di $\frac{dy}{dx}$ nel suddetto determinante.

Nella classe precedente di equazioni di Riccati rientra un'equazione studiata da Cayley *(Messenger of Math.* (2), t. IV, 1875, p. 69, 110, t. VI, 1876, p. 29; *Math. Papers*, Cambridge 1896, t. IX, p. 244, 253, t. X, p. 24) e da Darboux *(Collectanea Mathem. in Mem. Chelini*, Mediolani 1881, p. 199), e che si presenta nella teoria della trasformazione delle funzioni ellittiche.

Essa è:

$$3\,(x^2 - 4)\frac{dy}{dx} + y^2 - x\,y - 3 = 0\,.$$

Ora questa si ottiene dalla precedente equazione generale prendendo per φ una radice dell'equazione:

$$z^4 - 6\,z^2 - 4\,x\,z - 3 = 0$$

e inoltre:

$$\psi = \varphi^2 - 6$$

$$\chi = \frac{3}{\varphi}\,.$$

Il calcolo a ciò relativo si trova nel mio citato lavoro.

L'equazione di Cayley *resta dunque risoluta cercando le tre radici di:*

$$z^3 + \varphi z^2 + (\varphi^2 - 6) z + \frac{3}{\varphi} = 0$$

in cui φ *sia a sua volta una delle radici della equazione biquadratica suindicata.*

Ponendo invece:

$$\varphi = 0 \ , \ \psi = -12 \ , \ \chi = -8x$$

si ha l'altra equazione:

$$3(x^2 - 4)\frac{dy}{dx} + y^2 - xy - 8 = 0,$$

che presenta una grande analogia con quella di Cayley, e che è integrata nel solito modo mediante le tre radici dell'equazione cubica:

$$z^3 - 12z - 8x = 0.$$

§. 160.

L'equazione:

$$P\,dx + Q\,dy + R(x dy - y\,dx) = 0$$

dove P, Q sono *omogenee* di grado p, e R è *omogenea* di grado q, ponendo:

$$\frac{y}{x} = v$$

ed eliminando la variabile y si riduce ad una equazione del tipo di Bernoulli:

$$\frac{dv}{dx} + Xv = X_1 v^n.$$

§. 161.

Si dice equazione di Jacobi la seguente:

$$(A + A'x + A''y)(x\,dy - y\,dx) -$$
$$-(B + B'x + B''y)\,dy + (C + C'x\,C''y)\,dx = 0.$$

Colle sostituzioni:

$$x = u + \alpha$$
$$y = v + \beta$$

si possono determinare α, β in modo che l'espressione si riduca a quella del §. precedente.

Si trova che deve essere:

$$A + A'\alpha + A''\beta = \frac{C + C'\alpha + C''\beta}{\beta} =$$
$$= \frac{B + B'\alpha + B''\beta}{\alpha} = k$$

donde l'equazione in k:

$$\begin{vmatrix} A - k & A' & A'' \\ B & B' - k & B'' \\ C & C' & C'' - k \end{vmatrix} = 0,$$

che dà il valore di k; dalle relazioni precedenti si determineranno poi le α, β.

§. 162.

(Equazione di Eulero). — Dal punto di vista teorico, quando in un'equazione differenziale le variabili sono separate allora il problema dell'integra-

zione è ridotto alle quadrature, e quindi è teoricamente risoluto. Ma dal punto di vista pratico la cosa è diversa, perchè può accadere che le singole quadrature non si possano o non si sappiano calcolare mediante le funzioni ordinarie, eppure l'integrale dell'equazione differenziale si possa esprimere mediante le funzioni ordinarie.

Un esempio di ciò ci è fornito dalla equazione di EULERO che si può sempre ridurre alla forma:

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}+\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}=0$$

dove:

$$f(x)=(1-x^2)(1-k^2 x^2).$$

Ora in questa equazione le variabili sono separate; ma le quadrature cui quell'equazione darebbe immediatamente luogo sono integrali ellittici, e quindi non esprimibili mediante le funzioni ordinarie; si avrebbe cioè l' integrale della equazione differenziale espresso mediante *funzioni ellittiche.*

Invece si può mostrare che l' integrale di quella equazione è un integrale algebrico, cioè una relaziene algebrica fra x e y.

Ponendo:

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}}=du$$

$$\frac{dy}{\sqrt{f(y)}}=dv$$

sarà:

$$dv=-du$$

$$\frac{dx}{du}=\sqrt{f(x)}$$

$$\frac{d\,y}{d\,u} = -\frac{d\,y}{d\,v} = -\sqrt{f(y)}\,.$$

Di qui si ha:

$$\frac{d^2\,x}{d\,u^2} = \frac{d}{d\,x}\sqrt{f(x)}\,\frac{d\,x}{d\,u}$$

$$= \sqrt{f(x)}\,\frac{d}{d\,u}\sqrt{f(x)} = 2\,k^2\,x^3 - (1 + k^2)\,x$$

$$\frac{d^2\,y}{d\,u^2} = 2\,k^2\,y^3 - (1 + k^2)\,y$$

$$y\,\frac{d^2\,x}{d\,u^2} - x\,\frac{d^2\,y}{d\,u^2} = 2\,k^2\,x\,y\,(x^2 - y^2)$$

$$y^2\left(\frac{d\,x}{d\,u}\right)^2 - x^2\left(\frac{d\,y}{d\,u}\right)^2 = (1 - k^2\,x^2\,y^2)(y^2 - x^2)$$

$$\frac{y\,\frac{d^2\,x}{d\,u^2} - x\,\frac{d^2\,y}{d\,u^2}}{y\,\frac{d\,x}{d\,u} - x\,\frac{d\,y}{d\,u}} = -\,\frac{2\,k^2\,x\,y\left(y\,\frac{d\,x}{d\,u} + x\,\frac{d\,y}{d\,u}\right)}{1 - k^2\,x^2\,y^2},$$

e integrando si ha:

$$\frac{y\,\frac{d\,x}{d\,u} - x\,\frac{d\,y}{d\,u}}{1 - k^2\,x^2\,y^2} = \text{cost.}$$

cioè:

$$y\sqrt{f(x)} + x\sqrt{f(y)} = c\,(1 - k^2\,x^2\,y^2)$$

che rappresenta l'integrale dell'equazione data, e che, come si vede, è algebrico.

§. 163.

Una cosa perfettamente analoga si verifica per l'equazione:

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

che si ricaverebbe dalla precedente per $k=0$.

L'integrale sotto forma *trascendente* è:

$$\text{arc sen } x + \text{arc sen } y = C;$$

ma si può trovare una relazione *algebrica* fra x e y e che rappresenta anche l'integrale di quella equazione. Infatti calcolando il *seno* del primo e secondo membro si ha:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\text{sen } C=c$$

e questo si ottiene appunto ponendo $k=0$ nell'integrale algebrico dell'equazione di Eulero.

Determinanti Wronskiani.

§. 164.

Si sa che la condizione necessaria e sufficiente perchè fra n funzioni $y_1 \dots y_n$ di una variabile x, esista una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti è che il determinante Wronskiano delle n funzioni sia identicamente zero.

Questa condizione equivale a quell' altra (v. una mia Nota in *Atti Acc. di Torino*, t. XLI, 1906, p. 1081):

che *sia zero la somma algebrica coi segni alternati dei prodotti di ciascuna funzione per l'integrale del wronskiano di tutte le altre,* intendendo che tale somma sia da reputarsi zero quando sia possibile determinare in essa le costanti arbitrarie d'integrazione in modo che essa sia zero.

Indicando con w_i il wronskiano delle $y_1 \cdots y_{i-1}$ $y_{i+1} \cdots y_n$, dalla relazione:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} y_i \int w_i \, d\, x = 0$$

con successive derivazioni, e coll'osservare che è identicamente:

$$\Sigma (-1)^{i-1} y_i' w_i = 0$$
$$\Sigma (-1)^{i-1} y_i' w_i = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma (-1)^{i-1} y_i^{(n-2)} w_i = 0$$

si deducono le equazioni:

$$(2) \qquad \begin{array}{l} \Sigma (-1)^{i-1} y_i' \int w_i \, d\, x = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Sigma (-1)^{i-1} y_i^{(n-1)} \int w_i \, d\, x = 0 \end{array}$$

e da queste colla (1) si ricava che è eguale a zero il determinante w di tutte le z.

Viceversa supposto $w = 0$, se ne deduce:

$$(3) \qquad y_n = \sum_{i=1}^{n-1} c_i y_i \qquad (c_i = \text{cost.})$$

donde:

$$w_i = (-1)^{n-i-1} c_i w_n$$

e perciò il primo membro di (1) si riduce a:

$$(-1)^{n-1}\left[y_n - \sum_{i=1}^{n-1} c_i\, y_i\right]\int w_n\, d\, x$$

che è zero in forza di (3).

Formiamo un'equazione differenziale lineare omogenea di ordine n avente per integrali particolari le $y_1 \cdots y_n$ e avente eguale a 1 il coefficiente di $y^{(n)}$, e indi formiamo l'altra equazione non omogenea avente lo stesso primo membro della precedente, e il secondo membro eguale a w.

È facile vedere che l'integrale generale dell'equazione non omogenea è dato dall'integrale generale dell'equazione omogenea più il primo membro della relazione (1); ciò si verifica subito osservando che la derivata n^{ma} del primo membro di (1) è data da:

$$w + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\, y_i{}^{(n)} \int w_i\, d\, x$$

e che le derivate precedenti sono espresse dai primi membri di (2).

Se dunque il w è diverso da zero, la seconda equazione differenziale è essenzialmente *non omogenea,* e perciò il suo integrale generale non può essere omogeneo nelle costanti arbitrarie, onde non può aver luogo la (1); se invece è $w = 0$ allora la seconda equazione differenziale è la stessa della prima, e perciò deve verificarsi la (1). Così il teorema resta guardato da un altro punto di vista.

§. 165.

Ponendo:

$$y_1 = f(x)$$
$$y_2 = f'(x)$$
$$\cdots\cdots$$
$$y_n = f^{(n-1)}(x)$$

il determinante wronskiano diventa:

$$w = \begin{vmatrix} f & f' \ldots\ldots & f^{(n-1)} \\ f' & f'' \ldots\ldots & f^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \\ f^{(n-1)} & f^{(n)} \ldots & f^{(2n-2)} \end{vmatrix}$$

Consideriamo ora l'equazione differenziale di ordine $2n-2$.

$$w = 0.$$

Qual'è il suo integrale generale?

Come si sa dalla proprietà del Wronskiano, l'annullarsi di w è condizione necessaria e sufficiente perchè fra $f, f', \ldots f^{(n-1)}$ sussista una relazione lineare a coefficienti costanti, cioè una relazione della forma:

(1) $$a_1 f + a_2 f' + \ldots + a_n f^{(n-1)} = 0$$

le a essendo costanti qualunque.

D' altra parte si sa che l'integrale generale di quest'ultima equazione è della forma:

(2) $$f = c_1 e^{\alpha_1 x} + \ldots + c_{n-1} e^{\alpha_{n-1} x}$$

dove le c sono costanti, e le α sono anche costanti e radici dell'equazione algebrica:

$$a_1 + a_2 z + \ldots + a_n z^{n-1} = 0, \tag{3}$$

onde possiamo dire che (2), *contenente appunto* $2n-2$ *costanti*, rappresenta l' integrale generale dell' equazione differenziale $w = 0$.

§. 166.

Poniamo ora:

$$y_1 = f(x\, y)$$

$$y_2 = \frac{d\, f(x\, y)}{d\, y}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = \frac{d^{n-1} f(x\, y)}{d\, y^{n-1}}.$$

Il determinante w diventa:

$$w = \begin{vmatrix} f & \dfrac{d\, f}{d\, y} & \ldots\ldots\ldots & \dfrac{d^{n-1} f}{d\, y^{n-1}} \\ \dfrac{d\, f}{d\, x} & \dfrac{d^2 f}{d\, x\, d\, y} & \ldots\ldots & \dfrac{d^n f}{d\, x\, d y^{n-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{d^{n-1} f}{d\, x^{n-1}} & \dfrac{d^n f}{d\, x^{n-1}\, d\, y} & \ldots & \dfrac{d^{2n-2} f}{d\, x^{n-1}\, d\, y^{n-1}} \end{vmatrix}$$

Che cosa esprime l'annullarsi identico di questo determinante?

Ragionando come nel §. precedente si ha che fra la f e le sue derivate rispetto ad y deve sussistere una relazione lineare omogenea e coefficienti costanti rispetto ad x cioè funzioni di sola y:

$$(1) \qquad A_1 f + A_2 \frac{df}{dy} + \dots + A_n \frac{df^{n-1}}{dy^{n-1}} = 0.$$

L' integrale generale di questa equazione differenziale lineare è del tipo:

$$(2) \qquad f = \varphi_1(x)\psi_1(y) + \dots + \varphi_{n-1}(x)\psi_{n-1}(y)$$

dove le ψ sieno integrali particolari; onde ne deduciamo che la condizione necessaria e sufficiente perchè la f sia esprimibile sotto la forma (2), cioè come somma di prodotti di funzioni di sola x per funzioni di sola y, è che sia zero il determinante w scritto al principio di questo paragrafo.

L'espressione (2) rappresenterebbe l'integrale generale (con $2n-2$ funzioni arbitrarie) dell'equazione a derivate parziali di ordine $2n-2$, e a due variabili, $w = 0$.

Sulle applicazioni di questo risultato v. STEPHANOS *Rend. Cir. mat. di Palermo,* t. XVIII, 1904.

ELENCO COMPLETO DEI MANUALI HOEPLI

Disposti in ordine alfabetico per materia.

	L. C.
Abitazione degli animali domestici, del Dott. U. Barpi, di pag. xvi-372, con 168 incisioni	4 —
Abitazioni — *vedi* Casa avvenire - Città moderna - Fabbricati.	
Abitazioni popolari (Le) Case operaie dell'Ing. E. Magrini, di pag. xvi-312 con 151 incisioni	3 50
Abiti per signora. L'Arte del taglio e la confezione d'abiti per signora. Manuale teorico-pratico ad uso delle Scuole Normali e Professionali femminili e famiglie, di E. Bonetti, di pag. xx-296 con 55 tavole, 31 figurini e diversi prospetti per ingrandimento e impicciolimento dei modelli	4 —
— *Vedi* Biancheria.	
Abiti per uomo — *vedi* Sarto (Manuale del).	
Abbreviature — *vedi* Dizion. abbreviature — Dizion. stenografico	
Acciaieria — *vedi* Stampaggio a caldo e bolloneria.	
Acetilene (L') di L. Castellani, 2ª ediz. di pag. xvi-164	2 —
Aceto — *vedi* Adulterazione vino - Alcool industr. - Distillaz. legno.	
Acido solforico, acido nitrico, solfato sodico, acido muriatico (Fabbricazione dell'), del Dott. V. Vender, di pag. viii-312, con 107 incisioni . .	3 50
Acquavite — *vedi* Alcool.	
Acque (Le) **minerali e termali del Regno d'Italia,** di L. Tioli. Topografia - Analisi - Denominazione - Malattie - Stabilimenti e loro proprietari - Acque e fanghi in commercio - Negozianti, di pag. xxii-552	5 50
Acquerello — *vedi* Pittura ad olio, ecc.	
Acrobatica e atletica di A. Zucca, di pag. xxx-267, con 100 tavole e 42 incisioni nel testo	6 50
Acustica — *vedi* Luce e suono.	
Adulterazioni e falsificazioni (Dizionario delle) **degli alimenti,** di G. Gabba (in lavoro la 2ª ediz.).	
Adulterazioni (Le) **del vino e dell'aceto** e mezzi come scoprirle, di A. Aloi, di pag. xii-227, con 10 incis.	2 50
Agricoltore (Prontuario dell') e dell'ingegnere rurale, di V. Niccoli, 4ª ediz. riveduta e ampliata, di pag. xl-566, con 41 incisioni	6 —
Agricoltore (Il libro dell') Agronomia, agricoltura, industrie agricole del Dott. . Bruttini, 2ª ediz. con aggiunte, di pag. xxiii-446. con 303 figure. . . .	3 50
Agrimensura (Elementi di), con speciale riguardo all'insegnamento nelle Scuole di agricoltura ed ai bisogni pratici dell'agricoltore, di S. Ferreri Mitoldi, di pag. xvi-257, con 183 incisioni e una tavola colorata .	2 50
Agronomia, del Prof. Carega di Muricce, 3ª ediz. riveduta ed ampliata dall'autore, di pag. xii-210. . . .	1 50
Agronomia e agricoltura moderna, di G. Soldani, 3ª ediz. di pag. viii-416 con 134 inc. e 2 tav. cromolit.	3 50

L. C.

Agrumi (Coltivazione, malattie e commercio degli), di A. ALOI, con 22 inc. e 5 tav. cromolit., pag. XII-238 . . 3 50

Alcool (Fabbricazione e materie prime) di F. CANTAMESSA, di pag. XII-307, con 24 incisioni . . . . . . 3 —

Alcool industriale, di G. CIAPETTI. Produzione dell'alcole industriale, applicazione alla fabbricazione dell'aceto e delle vinacce, alla produzione della forza motrice, al riscaldamento, ecc. con 105 illustraz., di pag. XII-262. 3 —

— *vedi* Birra - Cantiniere - Cognac - Distillazione - Enologia - Liquorista - Mosti - Vino.

Alcoolismo (L') di G. ALLEVI, di pag. XI-221 . . . 2 —

Algebra complementare, del Prof. S. PINCHERLE:
Parte I. *Analisi algebrica* 2ª ediz. di pag. VIII-174 . 1 50
Parte II. *Teoria d. equazioni*, 2ª ediz., di p. IV-16, 4 inc. 1 50

Algebra elementare, del Prof. S. PINCHERLE, 9ª ediz. riveduta di pag. VIII-210 e 2 incisioni nel testo . . . 1 50

— **(Esercizi di),** del Prof. S. PINCHERLE, di pag. VIII-135 1 50

Alighieri Dante — *vedi* Dantologia - Divina commedia.

Alimentazione, di G. STRAFFORELLO, di pag. VIII-122. 2 —

Alimentazione del bestiame, dei Proff. MENOZZI e NICCOLI, di pag. XVI-400 (la 2ª ediz è in lavoro).

Alimenti — *vedi* Adulterazione degli - Aromatici - Conserv. sostanze aliment. - Bromatologia - Gastronomo - Pane.

Allattamento — *vedi* Nutrizione del bambino.

Alligazione (Tavole di) **per l'oro e per l'argento** con esempi pratici, di F. BUTTARI, di pag. XII-220 2 50

— *vedi* Leghe - Metalli preziosi.

Alluminio (L') di C. FORMENTI, di pag. XXVIII-324 . . 3 50

Aloe — *vedi* Prodotti agricoli.

Alpi (Le) di J. BALL, trad. di I. CREMONA, di pag. VI-120 . 1 50

Alpinismo, di G. BROCHEREL, di ag. VIII-312 . . . . 3 —

— *vedi* Dizionario alpino - Infortuni - Prealpi.

Amalgame — *vedi* Alligazione — Leghe metalliche.

Amatore (L') **di oggetti d'arte e di curiosità,** di L. DE MAURI (Pittura - Incisione - Scoltura in avorio - Piccola scoltura - Mobili - Vetri - Smalti - Orologi - Armi, ecc.). 2ª ediz. aumentata e corretta, di pag. XV-720, con 100 tavole e 280 incisioni nel testo 10 50

Amianto — *vedi* Imitazioni.

Amido — *vedi* Fecola.

Ampelografia, descrizione delle migliori varietà di viti per uve da vino, uve da tavola, porta-innesti e produttori diretti, di G. MOLON, 2 volumi inseparabili, di pag. XLIV-1243 in busta . . . . 18 —

— *vedi* Viticoltura.

Anagrammi — *vedi* Enimmistica.

L. C.

Analisi chimica qualitativa di sostanze minerali e organiche e ricerche tossicologiche, di P. E. ALESSANDRI, 2ª ediz. di pag. XII-384 con 14 incisioni e 5 tavole . 5 —

Analisi di sostanze alimentari — *vedi* Bromatologia - Chimica applicata all'Igiene - Igienista.

Analisi delle urine di F. JORIO (vedi Urina).

— *vedi* Chimica clinica.

Analisi del vino, ad uso dei chimici e dei legali, di M. BARTH, traduz. di E. COMBONI, 2ª ediz. di p. XVI-140 . 2 —

Analisi volumetrica applicata ai prodotti commerciali e industr. di P. E. ALESSANDRI di p. X-342, con incis. 4 50

Ananas *vedi* Prodotti agricoli.

Anatomia e fisiologia comparate, di R. BESTA, 2° ediz. riveduta di pag. VII-229 con 59 inc. . . . 1 50

Anatomia microscopica (Tecnica di), di D. CARAZZI, di pag. XI 211, con 5 inc. 1 50

Anatomia pittorica (Man. di), di A. LOMBARDINI, 3ª ed. per cura di V. LOMBARDINI, di p. XII-195 con 56 inc. 2 —

Anatomia topografica, di C. FALCONE, 2ª ediz. rifatta di pag. XI-625, con 48 incis. 6 50

Anatomia vegetale, di A. TOGNINI, p. XVI-274, 41 inc. 3 —

Animali da cortile. Polli, faraone, tacchini, fagiani, anitre, oche, cigni, colombi, tortore, conigli, di F. FAELLI, di pag. XVIII-372, con 56 incis. e 19 tav. color. . . . 5 50

Animali domestici — *vedi* Abitazione degli - Cane - Cani gatti - Cavallo - Maiale - Razze bovine, ecc.

Animali (Gli) **parassiti dell'uomo,** di F. MERCANTI, di pag. IV-179, con 33 incis. 1 50

Antichità greche, pubbliche, sacre e private di V. INAMA, 2ª ediz., pag. XV-224, 19 tav e 8 incis. 2 50

Antichità private dei romani, di N. MORESCHI, 3ª ed. rifatta del Manuale di W. KOPP, p. XVI-181, 7 inc. 1 50

Antichità pubbliche romane, di J. G. HUBERT, rifacimento delle antichità romane pubbliche, sacre e militari di W. KOPP, trad. di A. WITTGENS, di pag. XIV-324 3 —

Antisottici — *vedi* Medicatura antisettica.

Antologia stenografica, di E. MOLINA (sistema Gabelsberger-Noe), di pag. XI-199. . . . . 2 —

Antropologia, di G. CANESTRINI, 3ª ediz., di pag. VI-239 con 21 incisioni 1 50

Antropologia criminale (I principi fondamentali della) Guida per i giudizi medico-forensi nelle quistioni di imputabilità di G. ANTONINI, di pag. VIII-167. . . . 2 —

— *vedi* Psichiatria.

Antropometria. di R. LIVI, di pag. VIII-237, con 32 inc. 2 50

Apicoltura, di G. CANESTRINI, 5ª ediz. riveduta, di pag. IV-215, con 21 incisioni . . . . 2 —

L. C.

Arabo parlato (L') in Egitto, grammatica, frasi, dialoghi e raccolta di oltre 6000 vocaboli, di A. Nallino, pag. XXVIII-386 . . . . 4 —

Araldica (Grammatica), ad uso degli italiani, compilata da F. Tribolati, 4ª ediz. con introduzione ed agg. di G. Crollalanza, di pag. XI-187, con 274 incisioni . 2 50

— *vedi* Vocabolario araldico.

Araldica Zootecnica di E. Canevazzi. I libri geologici degli animali domestici. Stud - Herd - Flock - Books. 1904, di pag. XIX-342; con 43 incisioni 3 50

Aranci — *vedi* Agrumi.

Arazzo (L'arte dell') (Gobelins), di G. B. Rossi, con prefazione di U. Ojetti, di pag. XV-239, con 130 illustraz. . 5 —

Archeologia e storia dell'arte greca, di I. Gentile, 3ª ediz. rifatta da S. Ricci, di pag. XLVIII-270 con 215 tav. aggiunte e inserite nel testo 11 50

Archeologia e storia dell'arte italica, etrusca e romana. Un vol. di testo di pag. XXXIV-346 con 96 tav. e 1 vol. Atlante di 79 tav. a cura di S. Ricci 7 50

Architettura (Manuale di) **italiana,** antica e moderna, di A. Melani, 4ª ed. 136 tav. e 67 inc. p. XXV-559 . 7 50

Archivista (L'), di P. Taddei. Manuale teorico-pratico di pag, VIII-486 con modelli e tabelle. . . . . . . 6 —

Arenoliti — *vedi* Mattoni e pietre.

Argentatura — *vedi* Galvanizzazione - Galvanoplastica - Galvanostegia - Metallocromia - Metalli preziosi - Piccole industrie.

Argentina (La repubblica) nelle sue fasi storiche e nelle sue attuali condiz. geografiche, statistiche ed econom. di E. Colombo, di pag. XII-330 con 1 tav. e 1 carta 3 50

Argento — *vedi* Alligazione - Metalli preziosi - Leghe.

Aritmetica pratica, di F. Panizza, 2ª ediz. riveduta, di pag. VIII-188 . . . . I 50

Aritmetica razionale, F. Panizza, 4ª ediz., p. XII-210 1 50

— (Esercizi di). di F. Panizza, di pag. VIII-150 . . . 1 50

Aritmetica (L') **e la Geometria dell'operaio,** per le Scuole professionali, d'arte e mestieri, ferroviarie, ad uso degli operai e capi operai di E. Giorli .Seconda ediz. rifatta e ampliata, di pagine XII-228, con 76 figure 2 —

Armi antiche (Guida del raccoglitore e dell'amatore di) J. Gelli, di pag. VIII-389, con 9 tavole, 432 incisioni e 14 tavole di marche 6 50

— *vedi* Amatore d'oggetti d'arte — Storia dell'arte militare.

Armonia, di G. Bernardi, 2ª ediz. con prefazione di E. Rossi, di pag. XX-338 . . . . 3 50

Aromatici e Nervini nell'alimentazione. I Condimenti. L'Alcool (vino, birra, liquori, rosolii, ecc.). Caffè, Thè, Matè, Guarana. Noce di Kola, ecc. - Appendice sull'uso del Tabacco da fumo e da naso, di A. Valenti 3 —

Arte (Storia dell') — *vedi* Storia dell'arte.

L. C.

Arte decorativa antica e moderna. (Manuale di), di A. MELANI, 2ª ediz. rinnovata nel testo con molte incisioni nuove, 1907, di pag. XXVII-551, con 83 incisioni intercalate nel testo e 175 tavole . . . . . . 12 —

La prima edizione comparve col titolo: **Decorazioni e industrie artistiche.**

Arte del dire (L'), di D. FERRARI. Manuale di rettorica per lo studente delle Scuole secondarie. 6ª ediz. corr. pag. XVI-358 e quadri sinottici 1 50

Arte della memoria (L'), sua storia e teoria (parte scientifica). Mnemotecnia Triforme (parte pratica) di B. PLEBANI, di pag. XXXII-224 con 13 illustrazioni . . 2 50

Arte militare — *vedi* Armi antiche - Esplodenti - Nautica - Storia dell'.

Arte mineraria — *vedi* Miniere (Coltivazione delle) - Zolfo.

Arti (Le) **grafiche fotomeccaniche,** ossia la Eliografia nelle diverse applicaz. (Fotozincotipia, fotozincografia, fotocromolitografia, fotolitografia, tricromia, ecc.), con un Dizionarietto tecnico: 3ª ediz., di pag, XVI-238 . 2 —

Asfalto (L'), fabbricazione, applicazione, di E. RIGHETTI con 22 incisioni, di pag. VIII-152 . . . . 2 —

Assicurazione in generale, U. GOBBI, di p. XII-308 3 —

Assicurazione sulla vita, di C. PAGANI, di p. VI-161 1 50

Assicurazioni (Le) **e la stima dei danni** nelle aziende rurali, con appendice sui mezzi contro la grandine, di A. CAPILUPI, di pag. VIII-284, 17 incisioni . . 2 50

Assistenza degl'infermi nell'ospedale ed in famiglia, di C. CALLIANO, 2ª ediz., p. XXIV-448, 7 tav. 4 50

Assistenza dei pazzi nel manicomio e nella famiglia, di A. PIERACCINI e prefazione di E. MORSELLI, 2ª ediz., pag. XX-279 . . . . 2 50

Astrologia — *vedi* Occultismo.

Astronomia, di J. N. LOCKYER, nuova versione libera con note ed aggiunte di G. CELORIA, 5ª ediz. di p. XVI-255 con 54 incisioni 1 50

— *vedi* Gravitazione.

Astronomia (L') nell'antico testamento, di G. V. SCHIAPARELLI, di pag. 204 . . . . 1 50

Astronomia nautica, di G. NACCARI, di pag. XVI-320, con 45 incis. e tav. numeriche . . . . 3 —

Atene, Brevi cenni sulla città antica e moderna, seguiti da un saggio di Bibliografia Numismatica, di S. AMBROSOLI, di pag. LV-170, con 22 tavole 3 50

Atlante geografico-storico d'Italia, di G. GAROLLO. 24 tav. con pag. VIII-67 di testo e un'appendice . 2 —

Atlante geografico universale, di R. KIEPERT, 26 carte con testo. *Gli stati della terra* di G. GAROLLO. 10ª ediz. (dalla 91.000ª alla 100.000ª copia) pag. VIII-88 . 2 —

Atlante numismatico — *vedi* Numismatica.

Atletica — *vedi* Acrobatica.

Atmosfera *vedi* Igroscopi e igrometri.

L. C.

Attrezzatura, manovra navale, segnalazioni marittime e Dizionarietto di Marina, di F. IMPERATO, 3ª ediz. di pag. xx-751, con 427 incis. e 28 tav. in crom. e le bandiere maritt. di tutte le nazioni 7 50

Autografi (L'amatore d'), di E. BUDAN, con 361 facsimili di pag. XIV-426 . . . . 4 50

Autografi (Raccolte e raccoglit. di) in Italia, di C. VANBIANCHI, di pag. XVI-376, 102 tav. di facsimili e ritratti 6 50

Automobilista (Manuale dell') **e guida pei meccanici conduttori d'automobili.** Trattato sulla costr. dei veicoli semoventi, per gli automobilisti italiani amatori d'automobilismo in genere, inventori, dilettanti di meccanica ciclistica, automobile, colle norme pel compratore di automobili, di G. PEDRETTI. 3ª ediz. interamente rifatta, di pag. xx-900, con 984 illustraz. nel testo ed un modello scomponibile 9 50

Automobili — *vedi* Chauffeur - Ciclista - Locomobili - Motociclista - Trazione a vapore.

Avarie e sinistri marittimi (Manuale del regolatore e liquidatore di), di V. ROSSETTO. Appendice: Breve dizianario di terminologia tecnico-navale e commerciale marittimo inglese-italiano, di pag. xv-496, 25 fig. . 5 50

Avicoltura — *vedi* Animali da cortile - Colombi - Pollicoltura.

Avvelenamenti — *vedi* Analisi chim. - Chimica legale - Veleni.

Bachi da seta, di F. NENCI. 4ª ediz. con note ed aggiunte, di pag. XII-300, con 46 incis. e 2 tav. . . . 2 50

Balbuzie (Cura della) **e dei difetti della pronunzia,** di A. SALA, di pag. VIII-214 e tavole . . . 2 —

Balistica — *vedi* Armi antiche - Esplodenti - Pirotecnia - Storia dell'arte militare.

Ballo (Manuale del), di F. GAVINA, 2ª ediz. di pag. VIII-265, con 103 fig. 2 50

Bambini — *vedi* Balbuzie - Malattie d'infanzia - Nutrizione dei bambini - Ortofrenia - Rachitide.

Barbabietola (La) **da zucchero.** Cenni storici, lavorazione del terreno, concimazione, rotazione, semina, raccolta e conservazione, fabbricazione dello zucchero, di A. SIGNA, pag. XII-225, 29 inc. e 2 tav. colorate . . 2 50

— *vedi* Zucchero.

Batteriologia, di G. CANESTRINI, 2ª ediz. p. x-274, 37 inc. 1 50

Beneficenza (Manuale della), di L. CASTIGLIONI, con appendice sulla contabilità delle Istituzioni di pubblica beneficenza, di G. ROTA, di pag. XVI-340 . . . . . 3 50

Bestiame (Il) **e l'agricoltura in Italia,** di F. ALBERTI. 2ª ediz. rifatta di U. BARPI, di pag. XII-322, con 47 tavole e 118 incisioni 4 50

— *vedi* Abitazioni di animali - Alimentazione del bestiame - Araldica zootecnica - Cavallo - Coniglicoltura - Igiene veterinaria - Majale - Malattie infettive - Polizia sanitaria - Pollicoltura - Razze bovine - Veterinario - Zoonosi - Zootecnia.

L. C.

Biancheria (Disegno, taglio e confezione di), Manuale teorico pratico ad uso delle scuole normali e professionali femminili e delle famiglie, di E. Bonetti, 3ª ediz. con nuove tavole e prospetti per l'ingrandimento e l'impicciolim. dei mod., di pag. xx-234, 60 tav. e 6 prospetti 4 —

— *vedi* Abito per signora.

Bibbia (Man. della), di G. Zampini, di pag. xii-308 . . 2 50

Bibliografia, di G. Ottino, 2ª ediz., pag. iv-166, 17 incis. 2 —

— *vedi* Atene - Dizionario bibliografico.

Bibliotecario (Manuale del), di G. Petzholdt, tradotto sulla 3ª ediz. tedesca, per cura di G. Biagi e G. Fumagalli, di pag. xx-364-ccxiii 7 50

— *vedi anche* Dizionario bibliografico - Paleografia.

Bilance — *vedi* Strumenti metrici.

Biliardo (Il giuoco del), di J. Gelli, 2ª ediz. riveduta, di pag. xii-175, con 80 illustrazioni 2 50

Biografia — *vedi* C. Colombo - Dantologia - Dizionario biografico - Manzoni - Napoleone I - Omero - Shakespeare.

Biologia animale. Zoologia generale e speciale per Naturalisti, Medici e Veterinari, di G. Collamarini, di pag. x-426 con 23 tavole . . . . 3 —

Birra (La). Malto, luppolo, fabbricazione, analisi, di S. Rasio e di F. Samarani, di pag. 279 con 125 incisoni . 3 50

Bollo — *vedi* Codice del Bollo - Leggi registro e bollo.

Bolloneria — *vedi* Stampaggio a caldo.

Bonificazioni (Manuale amministrativo delle), di G. Mezzanotte, di pag. xii- 294 . . . . 3 —

Borsa — *vedi* Capitalista - Debito pubblico.

Boschi — *vedi* Consorzi - Selvicoltura.

Botanica, di I. D. Hooker, traduzione di N. Pedicino, 4ª ediz., di pag. viii-134, con 68 incis. 1 50

— *vedi* Dizionario di botanica - Ampelografia - Anatomia vegetale - Fisiologia vegetale - Floricoltura - Funghi - Garofano - Malattie crittogamiche - Orchidee - Orticoltura - Piante e fiori - Pomologia - Rose - Selvicoltura - Tabacco.

Botti — *vedi* Enologia.

Bromatologia. Dei cibi dell'uomo secondo le leggi dell'igiene, di S. Bellotti, di pag. xv-251, con 12 tav. . 3 50

Bronzatura — *vedi* Metallocromia - Galvanostegia.

Bronzo — *vedi* Fonditore - Leghe metalliche - Operaio.

Buddismo, di E. Pavolini, di pag. xvi-164 . . . 1 50

Buoi — *vedi* Bestiame - Razze bovine.

Burro — *vedi* Latte - Caseificio.

Caccia — *vedi* Cacciatore - Falconiere.

Cacciatore (Manuale del), di G. Franceschi, 3ª ediz. rifatta, di pag. ix-334 con 48 incis. 2 50

Cacio — *vedi* Bestiame - Caseificio - Latte, ecc.

Caffè — *vedi* Prodotti agricoli.

L. C.

Caffettiere e sorbettiere (Manuale del). Caffè, Thè, Liquori, Limonate, Sorbetti, Granite, Marmellate, Conservazione dei frutti, Ricette per feste da ballo, Vini, Cioccolata, di L. Manetti, di pag. XII-311, con 65 incis. . 2 50

Calcestruzzo (Costruzioni in) **ed in cemento armato,** di G. Vacchelli, 3ª ediz., pag. XVI-383, con 270 fig. 4 —

Calci e cementi (Impiego delle), di L. Mazzocchi, 2ª ediz. riveduta e corretta, pag. XII-225, con 56 fig. . . . 2 50

— *vedi anche* Capomastro - Mattoni e pietre.

Calcolazioni mercantili e bancarie — *vedi* Conti e calcoli fatti - Interesse e sconto - Prontuario del ragioniere - Monete inglesi - Usi mercantili.

Calcoli fatti — *vedi* Conti e

Calcolo (Manuale per il) **dei canali in terra e in muratura,** di C. Sandri. di pag. VIII-305 . . . 3 50

Calcolo infinitesimale, di E. Pascal:

I. *Calcolo differenz.* 2ª ediz., pag. XII-311, 10 incis. . 3 —

II. *Calcolo integrale*, 2ª ediz., di pag. VIII 329. . . . 3 —

III. *Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite*, di pag. XII-300 . . . . 3 —

— **(Esercizi di)** calcolo differenziale e integrale, di E. Pascal, di pag. XX-372 . . . . 3 —

— *vedi* Determinanti - Funzioni analitiche - Funzioni ellittiche - Gruppi di trasformazione - Matematiche superiori.

Caldaie a vapore (Le), con Istruzioni ai conduttori, di L. Cei, 2ª ediz., di pag. XVI-394, con 236 incis. e 31 tabelle 3 50

Calderaio pratico e costruttore di caldaie a vapore, e di altri apparecchi industriali, di G. Belluomini, di pag. XII-248, con 220 incis. . . . . . . 3 —

— *vedi anche* Locomobili - Macchinista.

Calligrafia. *Cenno storico, cifre numeriche, materiale adoperato per la scrittura e metodo d' insegnamento* con 48 fac-simile di scritture e 66 tav. dei principali caratteri conformi ai programmi governativi, di R. Percossi. 2ª ediz., di pag. XII-151 di testo 5 50

Calore (Il) di E. Jones. trad. di U. Fornari, di pag. VIII-296, con 98 incis . . . . 3 —

Camera di Consiglio Civile, di A. Formentano. I. Norme generali sul procedimento in Camera di Consiglio. II. Giurisdizione volontaria. III. Affari di giurisdizione contenziosa da trattarsi senza contradditore. IV. Materie da trattarsi in Cam. di Consiglio, p. XXXII-574 4 50

Campicello (Il) **scolastico.** Impianto e coltivazione. Manuale di agricotura pratica per i Maestri di E. Azimonti e C. Campi, di pag. XI-175, con 126 incis. . . . 1 50

Canali in terra e in muratura — *vedi* Calcolo dei. - Curve circ.

Cancelliere — *vedi* Conciliatore.

Candeggio — *vedi* Industria tintoria.

Candele — *vedi* Industria stearica.

L. C.

Cane (Il). Razze mondiali, allevamento, ammaestramento, malattie, con una appendice: I cani della spedizione polare *di S. A. R. Il Duca degli Abruzzi*, di A. Vecchio, 2ª ediz. di pag. XVI-442, con 152 inc. e 63 tav. 7 50

Cani e gatti, costumi e razze, di F. Faelli, di pag. XX-429, con 153 incis. 4 50

Canottaggio (Manuale di), del Cap. G. Croppi, di pag. XXIV-456 con 387 incis. e 91 tav. cromolit. 7 50

Cantante (Man. del), di L. Mastrigli, di pag. XII-132 . 2 —

Cantiniere (Il). Manuale di vinificazione per uso dei cantinieri, di A. Strucchi, 4ª ediz. con 62 incis. e una tabella per la riduz. del peso degli spiriti, pag. XII-260. 2 —

Canto (Il) **nel suo meccanismo,** di P. Guetta, di pag. VIII-253, con 24 incis.. . . . . 2 50

Canto (Arte e tecnica del), di G. Magrini, di pag. VI-166 2 —

Caoutchouc e gutta-perca, di L. Settimi, di pagine XVI-253, con 14 illustraz. . . . . 3 —

Capitalista (Il) nelle Borse e nel Commercio dei valori pubblici. Guida finanziaria per le Borse, Banche, Industrie, Società per azioni e Valori pubblici di F. Piccinelli, di pag. LI-1172 . . . . 12 —

Capomastro (Man. del). Impiego e prove dei materiali idraulici-cementizii, con riassunto della legge per gli infortuni degli operai sul lavoro e della legge sui fabbricati, di G. Rizzi, di pag. XII-263, con 19 incis. . 2 50

Cappellaio (Man. d.), di L. Ramenzoni, p. XII-222, 68 inc. 2 50

Capre — *vedi* Razze bovine, ecc.

Carboni fossili inglesi. Coke. Agglomerati, di G. Gherardi, di pag. XII-586 con fig. del testo e cinque carte geografiche dei bacini carboniferi inglesi . . 6 —

Carburo di calcio — *vedi* Acetilene.

Carta (Ind. della), L. Sartori. p. VII-326, 106 inc. e 1 tav. 5

Carte fotografiche, Preparazioni e trattamento, di L. Sassi. pag. XII-353 3

Carte geografiche — *vedi* Atlante.

Cartografia (Manuale teorico-pratico della), con un sunto storico, di E. Gelcich, di pag. VI-257, con 36 illustr. 2 —

Casa (La) **dell'avvenire,** di A. Pedrini. Vade-mecum dei costruttori, dei proprietari di case e degli inquilini. Raccolta di principî d'ingegneria per la costruzione di case igieniche, civili, operaie e rustiche e per la loro manutenzione, di p. XV-468, con 213 incis. 4 50

Case coloniche — *vedi* Fabbicati rurali.

Case operaie — *vedi* Abitazioni popolari.

Caseificio, di L. Manetti, 4ª ediz. nuovamente ampliata da G. Sartori, di pag. XII-280, con 49 incis. . . . . . . 2 —

— *vedi* — Bestiame - Latte, cacio e burro

Casette popolari e villini economici, di I. Casali. (In lavoro).

Catasto (Il nuovo) **italiano,** di E. Bruni, pag. VII-346 3 —

L. C.

Cavallo (Il), di C. Volpini, 3ª ediz. rived. ed ampliata di pag. VI-233 con 48 tavole 5 50

Cavalli — *vedi* Razze bovine, equine, ecc.

Cavi telegrafici sottomarini. Costruzione, immersione, riparazione. di E. Jona, pag. XVI-388, 188 fig. 5 50

Cedri — *vedi* Agrumi.

Celerimensura e tavole logaritmiche a quattro decimali, di F. Borletti, di pag. VI-148, con 29 incisioni . 3 50

Celerimensura (Manuale e tavole di), di G. Orlandi, di pag. 1200, con quadro generale d'interpolazioni . . 18 —

Celluloide — *vedi* Imitazioni.

Cellulosa. Celluloide, tessili artificiali, di G. Malatesta (In lavoro).

Cementazione — *vedi* Tempera.

Cemento armato — *vedi* Calcestruzzo - Calci e cementi - Mattoni.

Ceralacca — *vedi* Vernici e lacche.

Ceramiche — *vedi* Maioliche e Porcellane - Fotosmaltografia.

Chauffeur. Guida del meccanico conduttore d'automobili. di G. Pedretti, di pag. XVI-215. con 228 illustr. . 2 50

Chimica, di H. E. Roscoe, 6ª ediz. rifatta da E. Ricci, di pag. XII-231, con 47 incis. 1 50

Chimica agraria, di A. Aducco, 2ª ediz. di p. XII-515 50

— *vedi* Concimi - Fosfati - Humus - Terreno agrario.

Chimica analitica (Elementi scientifici di), di W. Ostwald, traduz del dott. Bolis, di pag. XVI-234 . . . 2 50

Chimica applicata all'igiene. Ad uso degli Ufficiali sanitari, Medici, Farmacisti, Commercianti, Laboratori d'igiene, di merceologia, ecc., di P. E. Alessandri, di pag. XX-515, con 49 incis. e 2 tav. 5 50

Chimica clinica, di R. Supino, di pag. XII-202 . . 2 —

Chimica cristallografica — *v.* Cristallografia - Fisica cristallog.

Chimica fotografica. Prodotti chimici usati in fotografia e loro proprietà, di R. Namias, di pag. VIII-230 . 2 50

Chimica legale (Tossicologia), N. Valentini, p. XII-243 2 50

— *vedi* Veleni ed avvelenamenti.

Chimica delle sostanze coloranti, di A. Pellizza (Teoria ed applic. alla tintura delle fibre tessili), di pag. VIII-480 . . . . 5 50

Chimico (Manuale del) **e dell'industriale.** Raccolta di tabelle, dati fisici e chimici e di processi d'analisi tecnica, ad uso dei chimici analitici e tecnici, dei direttori di fabbriche, ecc di L. Gabba, 4ª ediz. arricchita delle tavole analitiche di H. Will, di pag. XX-534, 12 tav. 6 —

— *vedi* Analisi volumetrica - Soda caustica.

Chiromanzia e tatuaggio, note di varietà, ricerche storiche e scientifiche, di G. L. Cerchiari, pag. XX-323, 29 tavole, 81 incis. 4 50

Chirurgia operativa (Man. di), di R. Stecchi, e A. Gardini, di pag. VIII-322, con 118 incis. . . . . . 3 —

Chitarra (Manuale pratico per lo studio della), di A. Pisani, di pag. XVI-116, 36 fig. e 25 esempi di musica . 2 —

		L. C.
Ciclista, di I. Ghersi. 2ª ediz. rifatta, pag. 244, 147 incis.		2 50
Cinematografo (Il) **e i suoi accessori.** Lanterna magica e apparecchi affini. Vocabolario delle proiezioni, di G. Re, di pag. xv-182, con 73 incis.		2 —
Città (La) **moderna,** ad uso degli Ingegneri, dei Sanitari, ecc., di A. Pedrini, pag. xx-510, 194 fig. e 19 tav. .		6 —
Classificazione delle scienze, di C. Trivero, di pag. xvi-292		3 —
Climatologia, di L. De Marchi. pag. x-204 e 6 carte .		1 50
Cloruro di sodio — *vedi* Sale.		
Codice del bollo (Il). Nuovo testo unico commentato colle risoluzioni amministrative e le massime di giurisprudenza, ecc., di E. Corsi, di pag. c-564		4 50
— *vedi* Leggi registro e bollo.		
Codice cavalleresco italiano (Tecnica del duello) di J. Gelli, 10ª ediz, riveduta, di pag. xvi-275 . . .		2 50
— *vedi* Duellante.		
Codice civile del regno d'Italia, riscontráto sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato da L. Franchi, 4ª ediz. di pag. 232		1 50
Codice di commercio, riscontrato sul testo ufficiale da L. Franchi, 4ª ediz., di pag. iv-158		1 50
Codice doganale italiano con commento e note, di E. Bruni, di pag. xx-1078 con 4 incis. . .		6 50
Codice (Nuovo) **dell' Ingegnere Civile-Industriale, Ferroviario, Navale, Elettrotecnico.** Raccolta di Leggi, Regol. e Circol. con annotaz. di E. Noseda, di pag. xii-1341		12 50
Codice (Nuovo) **del lavoro** — Contratto di lavoro - protezione, Igiene del lavoro - Giurisdizione ecc., di E. Noseda (In corso di stampa).		
Codice di marina mercantile, secondo il testo ufficiale, di L. Franchi, 3ª ediz., di pag. iv-290 . . .		1 50
Codice metrico internazionale — *vedi* Metrologia.		
Codice penale e di procedura penale, secondo il testo ufficiale, di L. Franchi, 3ª ediz., di pag. iv-230 .		1 50
Codice penale per l'esercito e penale militare marittimo secondo il testo ufficiale, di L. Franchi, 2ª ediz. di pag. 179		1 50
Codice del perito misuratore. Raccolta di norme e dati pratici per la misurazione e la valutazione d'ogni lavoro edile, preventivi, liquidazioni, collaudi, perizie, arbitramenti, di L. Mazzocchi e E. Marzorati, 2ª ediz. di pag. viii-530, con 169 illustraz.		5 50
Codice di procedura civile, riscontrato sul testo ufficiale da L. Franchi, 3ª ediz. di pag. 181		1 50
Codice sanitario — *vedi* Legislazione sanitaria		
Codice del teatro (Il). Vademecum legale per artisti lirici e drammatici, impresari, capicomici, direttori d'orchestra, direzioni teatrali, agenti teatrali, gli avvocati e per il pubblico, di N. Tabanelli, di pag. xvi-328 . .		3 —
Codici (I cinque) del Regno d'Italia (Civile - Procedura civile - Commercio - Penale e Procedura penale), edizione Vade-mecum, a cura di L. Franchi, di pag. IV-794, a due colonne, legato in pelle		5 —

L. C.

Codici e leggi usuali d'Italia, riscontrati sul testo ufficiale e coordinati e annotati da L. Franchi, raccolti in cinque grossi volumi legati in pelle.

Vol. I. Codici — Codice civile - di procedura civile - di commercio - penale - procedura penale - della marina mercantile - penale per l'esercito - penale militare marittimo *(otto codici)* 3ª ediz., di pag. VIII-1261 . 9 50

Vol. II. Leggi usuali d'Italia. Raccolta coordinata di tutte le leggi speciali più importanti e di più ricorrente ed estesa applicazione in Italia; con annessi decreti e regolam. e disposte secondo l'ordine alfabetico delle materie. 2ª ediz. riveduta ed aumentata, *divisa in 3 parti.*

Parte I. Dalla voce " Abbordi di mare " alla voce " Dominii collettivi " di pag. VIII-1458 a due colonne . 12 50

Parte II. Dalla voce " Ecclesiastici " alla voce " Polveri piriche " pag. 1459 a 2855 . . . . 12 50

Parte III. Dalla voce " Posta " alla voce " Zucchero " pag. 2857 a 4030 . . . . 12 50

Vol. III. Leggi e convenzioni sui diritti d'autore, raccolta generale delle leggi italiane e straniere di tutti i trattati e le convenzioni esistenti fra l'Italia ed altri Stati, 2ª ediz. di pag. VIII-617 . . . . 6 50

Vol. IV. Leggi e convenzioni sulle privative industriali. Disegni e modelli di fabbrica. Marchi di fabbrica e di commercio. Legislazione italiana e straniera. Convenzioni fra l'Italia ed altri Stati, di pag. VIII-1007 . . 8 50

Cognac (Fabbricazione del) **e dello spirito di vino e distillazione delle fecce e delle vinacce,** di Dal Piaz, con note di G. Prato, 2ª ed. con aggiunte e correz. di F. A. Sannino, di pag. XII-210, con 38 inc. . 2 —

— *vedi* Alcool - Distillazione - Enologia - Liquorista.

Coleotteri italiani, di A. Griffini (Entomologia, I), di pag. XVI-334, con 215 inc. . . . . 3 —

— *vedi* Ditteri - Imenotteri - Insetti - Lepidotteri.

Colle animali e vegetali, gelatine e fosfati d'ossa. Industria, Analisi, Commercio, di A. Archetti, di pagine XVI-195 . . . . 2 50

Colombi domestici e colombicoltura, di P. Bonizzi, 2ª edizione rifatta a cura della Società Colombofila fiorentina, di pag. X-211, con 26 figure . . . . . 2 —

Colorazione dei metalli — *vedi* Metallocromia.

Colori (La scienza dei) **e la pittura,** di L. Guaita, 2ª ed. ampliata, di pag. IV-368 . . . . 3 —

Colori e Vernici. Manuale ad uso dei Pittori, Verniciatori, Miniatori, Ebanisti e Fabbricanti di colori e vernici, di G. Gorini, 4ª ediz. per cura di G. Appiani, di pag. XV-301 con 39 inc. . . . . 3 —

Commedia — *vedi* Letteratura drammatica.

Commerciante (Manuale del) ad uso della gente di commercio e Istituti d'istruzione commerciale, con oltre 200 moduli, quadri, esempi, tavole e prontuari, di C. Dompè, 2ª ediz. riveduta ed ampliata di pag. X-649 . . 6 50

	L. C.
Commercio (Storia del), di R. Larice, di pag. XVI-336	3 —
— *vedi* Usi mercantili.	
Commissario giudiziale — *vedi* Curatore dei fallimenti.	
Compensazione degli errori con speciale applicazione ai rilievi geodetici, di F. Crotti, di pag. IV-160	2 —
Complementi di matematica — *vedi* Matematica.	
Computisteria, di V. Gitti: Vol. I. Computisteria commerciale, 6ª ediz., di pag. VIII-184	1 50
Vol. II. Computist. finanziaria, 4ª ediz., pag. VIII-156 .	1 50
Computisteria agraria, di L. Petri, 3ª ediz., riveduta, di pag. VIII-210 e 2 tabelle	1 50
— *vedi* Contabilità - Ragioneria - Logismografia.	
Concia delle pelli ed arti affini, di G. Gorini, 3ª ediz. rifatta da G. B. Franceschi e G. Venturoli, di pag. IX-210 (esaurito, la 3ª ediz. è in lavoro).	
Conciliatore (Manuale del), di G. Pattaccini. Guida teorico-pratica pel Conciliatore, Cancelliere, Usciere e Patrocinatore di cause, 4ª ediz. di pag. XII-461 . . .	3 —
Concimi, di A. Funaro, 3ª ediz. rinnovata di p. VIII-306,	2 50
Concimi fosfatici — *vedi* Fosfati - Chimica agraria - Humus - Terreno agrario.	
Concordato preventivo — *vedi* Curatore di fallimenti.	
Confettiere — *vedi* Pasticciere e confettiere moderno.	
Coniglicoltura pratica, di G. Licciardelli, 3ª ed., di pag. IX-274, con 62 incisioni e 12 tavole in tricr. .	2 50
Conservazione delle sostanze alimentari, di G. Gorini, 4ª ediz. intieramente rifatta da G. B. Franceschi e G. Venturoli, di pag. VIII-231	2 —
Conservazione dei prodotti agrari, di C. Manicardi, di pag. XV-220, con 12 incis.	2 50
Consigli pratici — *vedi* Caffettiere - Ricettario domestico - Industriale - Soccorsi d'urgenza.	
Consoli, Consolati e Diritto consolare, di M. Arduino, di pag. XV-277	3 —
Consorsi di difesa del suolo (Manuale dei). Sistemazioni idrauliche. Culture silvane e rimboschimento, A. Rabbeno, di pag. VIII-296	3 —
Contabilità (La) **delle aziende rurali,** per le fattorie e scuole agrarie d'Italia, di A. De Brun, a cura della Società degli Agricoltori italiani in Roma, di pag. XIV-539	4 50
— *vedi* Computisteria agraria.	
Contabilità comunale, secondo le nuove disposiz. legislative e regolamentari di A. De Brun. 2ª edizione rifatta ed ampliata di pag. XVI-650	5 50
— *vedi* Enciclopedia amministrativa.	
Contabilità domestica. Nozioni amministrativo-contabili ad uso delle famiglie e delle scuole femminili, di O. Bergamaschi, di pag. XVI-186	1 50
Contabilità generale dello Stato, di E. Bruni, 2ª ediz. rifatta, pag. XVI-420	3 —

L. C.

Contabilità d. istituz. pubbl. beneficenza — *vedi* Beneficenza.

Conti e calcoli fatti, di I. Ghersi, 93 tabelle e istruzioni pratiche sul modo di usarle, di pag. 204 . . . 2 50

Contrappunto, di G. G. Bernardi, di pag. XVI-238 . 3 50

Contratti agrari — *vedi* Mezzeria.

Conversazione italiana e tedesca (Manuale di), ossia guida per servire di *vade mecum* ai viaggiatori, di A. Fiori, 9ª ediz. rifatta da G. Cattaneo, pag. VIII-484 . 3 50

Conversazione italiana-francese — vedi *Dottrina popolare - Fraseologia.*

Cooperative rurali, di credito, di lavoro, di produzione, di assicurazione, di mutuo soccorso, di consumo, ecc. di V. Niccoli, pag. VIII-362 (esaurito, la 2ª edizione è in lavoro).

Cooperazione nella sociologia e nella legislazione, di F. Virgilii, pag. XII-228 . . . . . 1 50

Correnti elettriche (Impianti elettrici di), alternate semplici, bifasi e trifasi. Manuale pratico per lo studio, costruzione ed esercizio di essi, di A. Marro, 2ª ediz. riveduta e ampliata, di pag. XXXIV-774, 547 inc. e 71 tab. 8 50

Corrispondenza commerciale poliglotta, di G. Frisoni, compilata su di un piano speciale nelle lingue italiana, francese, tedesca, inglese e spagnuola.

I — PARTE ITALIANA: *Manuale di Corrispondenza Commerciale italiana* corredato di facsimili dei vari documenti di pratica giornaliera, seguito da un Glossario delle principali voci ed espressioni attinenti al Commercio, agli Affari marittimi, alle Operazioni bancarie ed alla Borsa, ad uso delle Scuole, dei Banchieri, Negozianti ed Industriali di qualunque nazione, che desiderano abilitarsi alla moderna terminologia e nella corretta fraseologia mercantile italiana, 3ª ediz. di pag. XX-478 . 4 —

II. — PARTE SPAGNUOLA: *Manual de Correspondencia Commercial Española,* pag. XX-440 . . . . 4 —

III. — PARTE FRANCESE: *Manuel de Correspondance commerciale française,* 2ª ediz., di pag. XX-499 . . . . . , 4 —

IV. — PARTE INGLESE: *A Manual of english Commercial correspondence.* pag. XVI-448 . . . . 4 —

V. — PARTE TEDESCA: *Handbuch der deutschen Handelskorrespondenz,* pag. XVI-460 . . . . 4 —

N.B. Sono 5 Manuali di corrispondenza, ognuno dei quali è la traduzione di uno qualunque degli altri quattro, per cui si fanno reciprocamente l'ufficio di chiave.

Corse (Le) con un dizionario delle voci più in uso, di G. Franceschi, di pag. XII-305 . . . . 2 5

— *vedi anche* Cavallo - Proverbi - Razze bovine, equine, ecc.

Cosmografia. *Uno sguardo all'universo,* di B. M. La Leta, di pag. XII-197, con 11 incic. e 3 tav. 1 50

— *vedi* Sfere cosmografiche.

Costituzione degli Stati — *vedi* Diritti e doveri - Diritto internazionale — Diritto costituzionale - Ordinamento di stati.

Costruttore navale (Manuale del), di G. Rossi, pagine XVI-517, con 231 fig. interc. nel testo e 65 tab. . . 6 —

L. C.

Costruzioni — *vedi* Abitazioni - Architettura - Calcestruzzo - Calci - Capomastro - Case dell'avvenire - Casette popolari - Città (La) moderna - Fabbricati civili - Fabbricati rurali - Fognatura - Ingegnere civile - Ingegnere costruttore meccanico - Lavori marittimi - Laterizi - Mattoni e pietre - Peso metalli - Resistenza dei materiali - Resistenza e pesi di travi metalliche - Scaldamento.

Cotone — *vedi* Filatura - Prodotti agricoli - Tintura - Tessitura.

Cremore di tartaro — *vedi* Distillazione - Industria tartarica.

Crestomazia neo-ellenica, di E. Brighenti (in lav.).

Cristallo — *vedi* Fotosmaltografia - Specchi - Vetro.

Cristallografia geometrica, fisica e chimica, di F. Sansoni, p. XVI-367, 284 inc. (esaurito).

— *vedi* Fisica cristallografica.

Cristo — *vedi* Imitazione di Cristo.

Cristoforo Colombo di V. Bellio, p. IV-136 e 10 inc. 1 50

Crittogame — *vedi* Funghi — Malattie crittogam. — Tartufi.

Crittografia (La) diplomatica, militare e commerciale, ossia l'arte di cifrare e decifrare le corrispondenze segrete, di L. Gioppi, pag. 177 . . . . 3 50

Cronologia e calendario perpetuo. Tavole cronografiche e quadri sinottici per verificare le date storiche dal principio dell'Era cristiana ai giorni nostri, di A. Cappelli, pag. XXXIII-421 . . . . 6 50

Cronologia delle scoperte e delle esplorazioni geografiche dal 1492 a tutto il secolo XX, di L Hugues, pag. VIII-437 . . . . 4 50

Cronologia — *vedi* Storia e cronologia.

Cubatura dei legnami (Prontuario per la), di G. Belluomini, 6ª ediz. corretta ed accresciuta, pag. 220 . 2 50

Cuoio — *vedi* Concia delle pelli - Imitazioni.

Cuore (Terapia fisica del) di L. Minervini (In corso di stampa)

Curatore dei fallimenti (Manuale teorico-pratico del) e del Commissario giudiziale nel concordato preventivo e procedura dei piccoli fallimenti, di L. Molina, di pag. XL-910 . . . . 8 50

Curve circolari e raccordi. Manuale pratico per il tracciamento delle curve in qualunque sistema e in qualsiasi caso particolare, nelle ferrovie, strade e canali, di C. Ferrario, pag. XI-264, con 94 incis. 3 50

Curve graduate e raccordi a curve graduate, con speciale riferimento ai tracciamenti ferroviari, di C. Ferrario, di pag. XX-251, 25 tav. e 41 fig. 3 50

Danese (Lingua) — *vedi* Grammatica — Letteratura.

Dante Alighieri — *vedi* Divina Commedia

Dantologia, di G. A. Scartazzini. Vita e opere di Dante Alighieri. 3ª ed. con ritocchi e agg. di N. Scarano, di pagine XVI-424 . . . . 3 —

Debito (Il) **pubblico italiano.** Regole e modi per le operazioni sui titoli che lo rappresentano, di F. Azzoni, di pag. VIII-376 . . . . 3 —

— *vedi* Capitalista - Notaio.

L. C.

Decorazione dei metalli — *vedi* Metallocromia.
Decorazioni del vetro — *vedi* Specchi - Fotosmaltologia - Vetro.
Denti — *vedi* Igiene della bocca.
Destrina — *vedi* Fecola.

Determinanti e applicazioni, di E. PASCAL, di pag. VII-330 . . . . 3 —

Diagnostica — *vedi* Semeiotica.

Dialetti italici. Grammatica, iscrizione, versione, e lessico, di O. NAZARI, di pag. XVI-364 . . . . . . 3 —
— *vedi* Gramm. storica della lingua e dei dialetti italiani.

Dialetti letterari greci (epico, neo-ionico, dorico, eolico) di G. BONINO, di pag. XXXII-214 . . . . . . 1 50

Didattica per gli alunni delle scuole normali e pei maestri elementari, di G. SOLI, pag. VIII-314 . . . 1 50

Digesto (Il), di G. FERRINI, di pag. IV-134 . . . . 1 50

Dinamica elementare, di G. CATTANEO, p. VIII-146, 26 figure 1 50

Dinamite — *vedi* Esplodenti.

Dinamometri, apparecchi per le misure delle forze e del lavoro eseguito mentre agiscono lungo determinate trajettorie di E. N. CAMPAZZI, pag. XX-273 e 132 inc. 3 —

Diritti e doveri dei cittadini, secondo le Istituzioni dello Stato, per uso delle scuole, di D. MAFFIOLI, 11ª ediz. con una appendice sul Codice penale, p. XVI-22 1 50

Diritti d'Autore — *vedi* Codici e Leggi usuali d'Italia, Vol. III.
Diritto — *vedi* Filosofia del Diritto.

Diritto amministrativo e cenni di Diritto costituzionale, giusta i programmi governativi ad uso di istituti tecnici, di G. LORIS, 7ª ediz. di p. XIV-424 3 —

Diritto civile (Compendio di), di G. LORIS, giusta i programmi ad uso degli Istit. tecnici, 3ª ed., p. XVI-397 3 —

Diritto civile italiano, di C. ALBICINI, (esaurito).

Diritto commerciale italiano, di E. VIDARI, 3ª ediz. diligentemente riveduta, pag. X-448 . . . . . 3 —

Diritto comunale e provinciale — *vedi* Contabilità comunale - Diritto amministrativo - Enciclopedia amministrativa - Legge comunale.

Diritto consolare — *vedi* Consoli.

Diritto costituzionale, di F. P. CONTUZZI, 3ª ediz. interamente rinnovata, di pag. XIX-456 . . . . . 3 —

Diritto ecclesiastico, vigente in Italia, 2ª ediz. riveduta ed ampliata di G. OLMO, di pag. XVI-483 . . . 3 —

Diritto internazionale privato, di F. P. CONTUZZI, di pag. XIII-391 . . . . 3 —

Diritto internazionale pubblico, di F. P. CONTUZZI, 2ª edizione rifatta, di pag. XXXII-412 . . . . 3 —

Diritto italiano (Introduzione allo studio del), ad uso degli studenti delle Scuole medie e delle persone colte, di G. L. ANDRICH, di pag. XV-227 . . . . . 1 50

	L. C.
Diritto marittimo italiano, ad uso degli Istituti nautici e della gente di mare, di Sisto A., di p. XII-566	3 —
Diritto penale romano, di C. Ferrini, 2ª ed., rif., di pag. VIII-360	3 —
Diritto romano, di C. Ferrini, 2ª ed. rif., p. XVI-178	1 50
Disegnatore meccanico e nozioni tecniche generali di Aritmetica, Geometria, Algebra, Prospettiva, Resistenza dei materiali, Apparecchi idraulici, Macchine semplici ed a vapore, ecc. di V. Goffi (esaurito, la 4ª ediz. è in lavoro).	
Disegno. I principi del disegno, di C. Boito, 5ª ediz., di pag. IV-206, con 61 silografie	2 —
Disegno (Grammatica del). Metodo pratico per imparare il disegno, di E. Ronchetti, di pag. IV-190, con 34 fig., 62 schizzi intercalati nel testo e un atlante a parte con 45 lavagnette, 27 foglietti e 34 tav. (Indivisibili) .	7 50
Disegno assonometrico, P. Paoloni, di pagine IV-122, con 21 tavole e 23 figure nel testo	2 —
Disegno geometrico, di A. Antilli, 3ª ed., p. XII-88, con 6 figure nel testo e 28 tavole litografiche . . .	2 —
Disegno, teoria e costruzione della nave, ad uso dei Progettisti e Costrut. di Navi - Capi tecnici - Istituti Nautici, di E. Giorli, pag. VIII-238, e 310 incis.	2 50
Disegno industriale, per uso R. Accad. Navale, Collegi Militari, Istituti Nautici e Tecnici, Scuole Professionali, Capitecnici, Macchinisti, ecc. di E. Giorli, 4ª ediz. con 480 probl. e 500 incis., di pagine VIII-366 . .	3 50
Disegno di proiezioni ortogonali, di D. Landi, di pag. VIII-152, con 192 incis.	2 —
Disegno di tessitura — *vedi* Tessuti.	
Disegno topografico, di G. Bertelli, 2ª ediz., di pag. VI-156, con 12 tavole e 10 incis.	2 —
Disinfezione (La pratica della) pubbl. e priv., P. E. Alessandri e L. Pizzini, 2ª ediz., pag. VIII-258, 29 incis. .	2 50
Distillazione del legno (Lavorazione dei prodotti della). Acetone, Alcool metilico, Aldeide formica, Cloroformio, Acido acetico, Acetato di piombo, di sodio. *Industrie elettrochimiche.* Ossidi di piombo, Minio, Biacca, Soda Caustica, di F. Villani, di pag. XIV-312 . . .	3 50
Distillazione delle vinacce e delle frutta fermentate. Fabbricazione razionale del Cognac, Estrazione del Cremore di Tartaro ed utilizzazione di tutti i residui della distillazione, di M. Da Ponte, 2ª ediz. contenente la legge italiana sugli spiriti e la legge Austro-Ungarica, di pag. XII-375, con 68 incis.. . . .	3 50
Ditteri italiani, di P. Lioy *(Entomologia III)*, pag. VII-356, con 227 incis.	3 —
Divina Commedia di Dante Alighieri (Tavole schematiche della), di L. Polacco, seguite da 6 tavole topogr. in cromolit. disegn. da G. Agnelli, pag. X-152 .	3 —
Dizionario alpino italiano. Parte 1ª *Vette e valichi italiani,* di E. Bignami-Sormani. — Parte 2ª *Ville lombarde e limitrofe alla Lombardia,* di C. Sgolari, pag. XXII-310 .	3 50

L. C.

Dizionario di abbreviature latine ed italiane usate nelle carte e codici specialmente del Medio Evo, riprodotte con 13000 segni incisi, un prontuario di *Sigle Epigrafiche*, i monogrammi, la numerazione romana ed arabica e i segni indicanti monete, pesi, misure, ecc., di A. CAPPELLI, di pag. LXII-433 7 50

Dizionario bibliografico, di C. ARLIA, pag. 100 . 1 50

Dizionario biografico universale, di G. GAROLLO, 2 vol. di complessive pag. 2118 a 2 colonne, legatura in $^1/_2$ pergamena . . . . 18 —

— Lo stesso, legatura in $^1/_2$ pelle . . . . 20 —

Dizionario di botanica generale, G. BILANCIONI. Istologia, Anatomia, Morfologia, Fisiologia, Biologia vegetale, *Appendice*, Biografie di illustri botanici, p. XX-926 10 —

Dizionario dei comuni del Regno d'Italia, secondo il Censimento del 10 febbraio 1901, compilato da B. SANTI, 2ª ediz., con le altezze sul livello del mare, di pag. VIII-222 . . . . 3 —

Dizionario enologico, di A. DARSO (in corso di stampa).

Dizionario Eritreo (Piccolo) **Italiano-Arabo-Amarico,** raccolta dei vocaboli più usati nelle principali lingue parlate nella Colonia Eritrea, di A. ALLORI, di pag. XXXIII-203 . . . . 2 50

Dizionario filatelico, per il raccoglitore di francobolli, di J. GELLI, 2ª ediz., di pag. LXIII-464 . . . . 4 50

Dizionario fotografico pei dilettanti e professionisti, con oltre 1500 voci in 4 lingue, 500 sinonimi e 600 formule di L. GIOPPI, di pag. VIII-600, 95 incis. e 10 tav. 7 50

Dizionario geografico universale, di G. GAROLLO, 4ª ediz., del tutto rifatta e molto ampliata, di pag. XII-1451 a due colonne . . . . 10 —

Dizionario gotico — *vedi* Lingua gotica.

Dizionario greco-moderno (neo-ellenico), di E. BRIGHENTI (In lavoro).

Dizionario Hoepli della Lingua Italiana compilato da G. MARI, in 2 vol. (In lavoro).

Dizionario tascabile italiano-inglese e inglese-italiano, di J. WESSELY, 16ª ediz. rifatta da G. RIGUTINI e G. PAYN, in-16, di pag. VI-226-199 . . 3 —

Dizionario milanese-italiano e repertorio italiano-milanese, di C. ARRIGHI, di pag. 912, a due colonne, 2ª ediz. 8 50

Dizionario Numismatico — *vedi* Vocabolarietto numismatico.

Dizionario italiano-olandese e olandese-italiano, di A. NUYENS, in-16, di pag. XI-948 (esaurito).

Dizionario rumeno — *v.* Grammatica rumena - Letterat. rumena.

Dizionario di scienze filosofiche. Termini di Filosofia generale, Logica, Psicologia, Pedagogia, Etica ecc., di C. RANZOLI, di pag. VIII-683 . . . . 6 50

L. C.

Dizionario Etimologico Stenografico, sistema Gabelsberger-Noë, di E. MOLINA preceduto da un sunto di grammatica teoretica, della stenografia Gabelsberger-Noë, di pagine XVI-624 . . . . 7 50

Dizionario stenografico. Sigle e abbreviature del sistema Gabelsberger-Noe, di A. SCHIAVENATO, p. XVI-156 1 50

Dizionario (Nuovo) **italiano-tedesco e tedesco-italiano,** coll'accentuazione per la pronunzia dell'Italiano di A. FIORI, 4ª ed., pag. 754, rifatta da G. CATTANEO 3 50

Dizionario tecnico in 4 lingue, di E WEBBER, 4 vol.:

I. Italiano-Tedesco-Francese-Inglese, 2ª ediz. riveduta e aumentata di circa 2000 termini tecnici, di pag. XII-533 6 —

II. Deutsch-Italienisch-Französisch-Englisch, 2ª ediz., di circa 2000 termini tecnici, di pag. VIII-611 . . . . 6 —

III. Français-Italien-Allemand-Anglais, 2ª ediz. completamente riveduta, di pag. VI-679 . . . . 6 —

IV. Englisch-Italian-German-French, di pag. 659 (esaurito, la 2ª ediz. è in lavoro).

— *vedi* Vocabolario tecnico illustrato.

Dizionario tecnico-navale — *vedi* Avarie e Sinistri marittimi.

Dizionario turco — *vedi* Grammatica turca.

Dizionario universale delle lingue italiana tedesca, inglese e francese, disposte in unico alfabeto, di pag. 1200 . . . . 8 —

Dogana — *vedi* Codice doganale - Trasporti e tariffe.

Doratura — *vedi* Galvanizzaz. - Galvanostegia - Metallocromia.

Dottrina popolare, in 4 lingue (Italiana, Francese, Inglese e Tedesca), Motti popolari, frasi commerciali e proverbi, raccolti da G. SESSA, 2ª ediz., pag. IV-112 . . 2 —

Doveri del macchinista navale, e condotta della macchina a vapore marina, di M. LIGNAROLO (esaurito).

Drammi — *vedi* Letteratura drammatica.

Droghiere (Manuale del), di L. MANETTI, di p. XXIV-322 3 —

Duellante (Manuale del), di J. GELLI, 2ª ed., di pagine VIII-250 con 26 tavole 2 50

— *vedi* Codice cavalleresco.

Ebanista — *vedi* Falegname - Modellatore mecc. - Operaio.

Ebraica (lingua) — *vedi* Grammatica - Letteratura.

Educazione dei bambini — *v.* Balbuzie - Ortofrenia - Sordom.

Economia matematica (Introduzione alla), di F. VIRGILII e C. GARIBALDI, di pag. XII-210, con 19 inc. . 1 50

Economia politica di W. JEVONS, traduzione di L. COSSA, 6ª ediz. riveduta, di pag. XV-180 . . . . . 1 50

Edilizia — *vedi* Costruzioni.

Elasticità dei corpi — *vedi* Equilibrio.

Elettricità, di FLEEMING JENKIN, trad. di R. FERRINI, 4ª ediz. riveduta, pag. XII-237, con 40 incis. 1 50

— *vedi* Cavi telegrafici - Correnti elettriche - Elettrotecnica - Elettrochimica - Fulmini - Galvanizzazione - Illuminazione - Ingegnere elettricista - Magnetismo - Metallocromia - Operaio elettrotec. - Röntgen - Telefono - Telegrafia - Unità assolute.

Elettricità e materia, di J. J. THOMPSON. Traduz. ed aggiunte di G. FAÈ, 1905, di pag. XIL-299, con 18 inc. 2 —

L. C.

Elettricità medica, Elettroterapia. Raggi Röntgen. Radioterapia. Fototerapia. Elettrodiagnostica, di A. D. BOCCIARDO, di pag. x-201, con 54 inc. e 9 tav. . . . 2 50
— *vedi* Luce e salute - Röntgen (Raggi).

Elettrochimica (Prime nozioni elem. di), di A. COSSA, di pag. VIII-104, con 10 incis. 1 50

Elettromotori campioni e metodi di misura delle forze elettromotrici, di G. P. MAGRINI, di pag. XVI-185, 76 figure . . . . 2 —

Elettrotecnica (Manuale di), di GRAWINKEL-STRECKER, traduz. italiana di F. DESSY, 2ª ed., pag. XIV-890, 360 fig. 9 50
— *vedi* Operaio elettrotecnico.

Elezioni politiche — *vedi* Legge elettorale politica.

Ematologia — *vedi* Malattie del sangue.

Embriologia e morfologia generale, di G. CATTANEO, di pag. x-242, con 71 incis. 1 50

Enciclopedia del giurista — *vedi* Codici e leggi usuali d'Italia.

Enciclopedia (Piccola) **amministrativa.** Manuale teorico-pratico per le amministrazioni comunali, provinciali e delle opere pie, di E. MARIANI, di pag. XV-1327 . 12 50

Enciclopedia Hoepli (Piccola), (146740 voci), 2 grossi volumi di 3375 pagine a 2 colonne (esaurita, è in preparazione la 2ª ediz.).

Energia fisica, di R. FERRINI, pag. VIII-187, con 47 incisioni, 2ª ediz. interamente rifatta 1 50

Enimmistica. Guida per comporre e spiegare Enimmi, Sciarade, Anagrammi, Rebus, ecc., di D. TOLOSANI (Bajardo), di pag. XII-516, con 29 illustr. e molti esempi 6 50

Enologia, precetti ad uso degli enologi italiani, di O. OTTAVI, 6ª ediz. interamente rifatta da A. STRUCCHI, con una Appendice sul metodo della Botte unitaria pei calcoli relativi alle botti circolari, di R. BASSI, di pagine XVI-283, con 42 incisioni 2 50
— *vedi* Adulterazione vino - Analisi vino - Cantiniere - Cognac - Distillazione - Dizionario enologico - Liquorista - Malattie vini - Mosti - Tannini - Uva - Vino.

Enologia domestica, di R. SERNAGIOTTO, p. VIII-233 2 —

Entomologia di A. GRIFFINI e P. LIOY, 4 vol. — *vedi* Coleotteri - Ditteri - Lepidotteri - Imenotteri.

Epigrafia cristiana, di O. MARUCCHI (In lavoro).

Epigrafia latina. Trattato elementare con esercizi pratici e facsimili, con 65 tav. di S. RICCI, pag. XXXII-448 6 50
— *vedi* Dizionario di abbreviature latine.

Epilessia. Eziologia, patogenesi, cura, di P. PINI, p. X-277 2 50

Equazioni — *vedi* Algebra complementare.

Equilibrio dei corpi elastici (Teoria matematica dello), di R. MARCOLONGO, di pag. XIV-366 . . . . . 3 —

Eritrea (L') dalle sue origini al 1901. Appunti con note geografiche e statist. e cenni sul Benadir e viaggi d'esploraz. di B. MELLI, di pag. XII-164 . . . . . . 2 —

Eritrea — *vedi* Arabo parlato - Dizionario eritreo - Grammatica galla - Lingue d'Africa - Prodotti del Tropico - Tigrè.

L. C.

Errori e pregiudizi volgari, confutati colla scorta della scienza e del raziocinio da G. STRAFFORELLO, 2ª ediz. accresciuta, di pag. XII-196 . . . . 1 50
Esattore comunale (Manuale dell'), ad uso anche dei Ricev. prov. ecc, di R. MAINARDI, 2ª ediz., p. XVI-480 5 50
Esercito — *vedi* Armi antiche - Codice penale per - Storia dell'arte militare - Ufficiale dell'.
Esercizi geografici e quesiti sull'Atlante geografico univ. di R. Kiepert, L. HUGUES, 3ª ediz. rifatta, di pag. VIII-208 . . . . 1 50
Esercizi sintattici francesi, con tracce di componimento, temi e un indice alfabetico delle parole e delle regole, di D. RODARI, di pag. XII-403 . . . . . . 3 —
Esercizi greci, per la 4ª classe ginnasiale in correlazione alle *Nozioni elem. di lingua greca,* di V. INAMA, di A. V. BISCONTI, 2ª ediz. rifatta, di pag. XXVI-234 . . 3 —
Esercizi latini con regole (Morfologia generale), di P. E. CERETI, di pag. XII-332 . . . . 1 50
Esercizi di stenografia — *vedi* Stenografia.
Esercizi di traduzione a complemento della grammatica francese. di G. PRAT, 2ª ed., p. VI-183 1 50
Esercizi di traduzione con vocabolario a complemento della Grammatica tedesca, di G. ADLER, 3ª ediz., di pag. VIII-244 . . . . . 1 50
Esplodenti e modi di fabbricarli, di R. MOLINA, 2ª ediz. rinnovata, con l'aggiunta di una ampia trattazione degli esplosivi moderni, di pag. XXXII-402 . . 4 —
Espropriazione — *vedi* Codice dell'ingegnere civile, ecc.
Espropriazioni per causa di pubblica utilità, di E. SARDI, pag. VII-212-83, con 5 inc. e 2 tav. col. 3 —
Essenze — *vedi* Distillaz. - Profum. - Liquorista - Ricettario.
Estetica. Lezioni sul bello, di M. PILO, pag. XXIII-257 . 2 50
— Lezioni sul gusto, di M. PILO, di pag. XII-255 . . . 2 50
— Lezioni sull'arte, di M. PILO, di pag. XV-286 . . . 2 50
Estimo rurale ad uso delle Scuole e dei Periti, di P. FICAI, di pag. XI-292. con 6 incisioni . . . . . 3 —
Estimo dei terreni. Garanzia dei prestiti ipotecari e della equa ripartizione dei terreni, di P. FILIPPINI, di pag. XVI-328, con 3 incis. . . . . 3 —
Etica (Elementi di). di G. VIDARI, 2ª ediz. riveduta ed ampliata, di pag. XVI-356 . . . . 3 —
Etnografia, di B. MALFATTI, 2ª ediz. rifusa, pag. VI-200 1 50
Euclide (L') **emendato,** del P. G. SACCHERI, traduzione e note di G. BOCCARDINI, di pag. XXIV-126, con 55 incis. 1 50
Europa — *vedi* Storia di
Evoluzione (Storia dell'), di C. FENIZIA, con breve saggio, di Bibliografia evoluzionistica, di pag. XIV-389 . . 3 —
Ex libris (3500) **italiani,** illustrati con 755 figure e da oltre 2000 motti, sentenze e divise che si leggono sugli stemmi e negli ex libris, di J. GELLI, p. XII-535, 139 tav. 9 —
Fabbricati civili di abitazione, di C. LEVI, 3ª ed.

L. C.

rifatta, con 200 incis., e i Capitolati d'oneri approvati dalle principali città d'Italia, di pag. xii-416 . . . 4 50

— *vedi* Abitazioni - Casette popolari.

Fabbricati rurali (Costr. ed economia dei), di V. Niccoli, 3ª ed. riveduta, di pag. xvi-335, con 159 fig. . . 3 50

Fabbro — *vedi* Aritmetica dell'operaio - Fonditore - Meccanico - Operaio - Saldature - Tornitore.

Fabbro-ferraio (Manuale pratico del), di G. Belluomini. Nozioni di Aritmetica, Geometria e Geom. pratica, Misura delle superfici, Acciaiaz. del ferro, Fucinatura dell'acciaio, Bollitura e saldatura, Cementazione, Tempera, Pulitura dei metalli, Fabbricazione delle lime. 2ª ediz., di pag. viii-242, con 224 incis. 2 50

Falconiere (Il) **moderno.** Descrizione dei falchi, cattura, educazione, volo e caccia alla selvaggina con gli uccelli di rapina di G. E. Chiorino, di p. xv-247 con 15 tav. a colori e 80 illustrazioni nel testo . . . 6 —

Falegname ed ebanista. Manuale sopra la natura dei legnami ed esotici, la maniera di conservarli, prepararli, colorirli e verniciarli, corred. del modo di farne la cubatura e delle nozioni di geometria pratica, per cura di G. Belluomini, 4ª ediz. diligentemente riveduta e ampliata, di pag. xii-218, con 104 incisioni . . . . 2 —

— *vedi* Legnami.

Fallimenti — *vedi* Curatore di

Farfalle — *vedi* Lepidotteri.

Farmacista (Manuale del), di P. E. Alessandri, 3ª ed. aumentata e corredata di tutti i nuovi medicamenti in uso nella terapeutica, loro proprietà, caratteri, alterazioni, usi, dosi, ecc., di pag. xx-784 con 154 tav. e 85 inc. 6 50

Farmacoterapia e formulario, di P. Piccinini, pag. viii-382 . . . . 3 50

Fecola (La), sua fabbricaz. e sua trasformaz. in Destrina Glucosio, Sagou e Tapioca artificiali, Amido di Mais, di Riso e di Grano. *Appendice:* Sulla coltura del Lupino, di N. Aducci, di p. xvi-285, con 41 inc. nel testo . 3 50

Ferrovie — *vedi* Automobili - Macchinista - Strade ferrate - Trazione a vapore - Trasporti e tariffe.

Figure grammaticali a complemento della grammatica greca, latina, italiana, G. Salvagni, di pag. vii-308 . . . . 3 —

Filatelia — *vedi* Dizionario filatelico.

Filatura (La) **del cotone.** Manuale teorico-pratico di G. Beltrami, di pag. xv-558, con 196 inc. e 24 tab. . 6 50

Filatura e torcitura della seta, di A. Provasi, di pag. vii-281, con 75 incis. 3 50

Filologia classica, greca e latina, di V. Inama, di pag. xii-195 . . . . 1 50

Filonauta. Quadro generale di navigazione da diporto e consigli ai principianti, con un Vocabolario tecnico, di G. Olivari, di pag. xvi-286 . . . . 2 50

Filosofia — *vedi* Dizionario di scienze filosofiche - Estetica - Etica - Evoluzione - Logica - Psicologia.

L. C.

Filosofia del diritto, di A. Groppali, pag. xi-378 . 3 —
Filosofia morale, di L. Friso, 2ª ed., di pag. xvi-350 3 —
Fillossera e le principali malattie crittogamiche della vite con speciale riguardo ai mezzi di difesa, di V. Peglion, di pag. viii-302, con 39 inc. . . . . . 3 —
Finanze (Scienza delle), T. Carnevali, (esaurito).
— *vedi* Matematica attuariale.
Fiori — *vedi* Floricoltura - Garofano - Orchidee - Orticoltura - Piante e fiori - Rose.
Fiori artificiali, Manuale del fiorista, di O. Ballerini, di pag. xvi-278, con 144 inc. e 1 tav. a 36 colori . . 3 50
— *vedi anche* Pomologia artificiale.
Fisica, di O. Murani, 8ª ediz. accresciuta e riveduta dall'autore di p. xvi-621, con 367 incisioni 3 50
Fisica cristallografica. Le proprietà fisiche dei cristalli, di W. Voigt, trad. di A. Sella, di pag. viii-392 3 —
— *vedi* Cristallografia.
Fisiologia, di Foster, traduz. di G. Albini, 4ª ediz., di pag. vii-223, con 35 inc. e 2 tavole 1 50
Fisiologia vegetale, di L. Montemartini, pag. xvi-230, con 68 inc. 1 50
Fisiologia comparata — *vedi* Anatomia.
Fisionomia e mimica. Note curiose, ricerche storiche e scientifiche, caratteri dai segni della fisionomia e dei sentimenti della mimica, di L. G. Cerchiari, di di pag. xii-335 con 77 inc. e xxxiii tavole 3 50
Floricoltura (Manuale di), di C. M. Fratelli Roda, 4ª ed. rived. ed ampliata da G. Roda, di pag. viii-262 . 2 50
Flotte moderne (Le) 1896-1900, di E. Bucci di Santafiora, a complemento del Manuale del Marino, di C. De Amezaga, di pag. iv-204 .. . . 5 —
Fognatura cittadina, di D. Spataro, pag. x-684, con 220 figure e 1 tavola in litografia . . . . 7 —
Fognatura domestica, di A. Cerutti, di pag. viii-421, con 200 incis. . . . . 4 —
Fonditore in tutti i metalli (Manuale del), di G. Belluomini, 3ª ediz., di pag. viii-178, con 45 inc. . . . 2 —
Fonologia italiana, di L. Stoppato, pag. viii-102 . 1 50
Fonologia latina, di S. Consoli, di pag. 208 . . . 1 50
Foot-Ball — *vedi* Giuoco del pallone - Lawn-tennis.
Foreste — *vedi* Consorzi - Selvicoltura.
Formaggio — *vedi* Caseificio - Latte.
Formole e tavole per il calcolo delle risvolte ad arco circolare, ad uso degli ingegneri, di F. Borletti, di pag. xii-69, leg. 2 50
Formulario scolastico di matemat. elem. aritmetica, algebra, geometria, trigonom.) M. A. Rossotti, 2ª ediz., di pag. xvi-192 . . . . 1 50
Fosfati, perfosfati e concimi fosfatici. Fabbricazione ed analisi, di A. Minozzi, di pag. xii-301 con 48 incis. 3 50

L. C.

Fotocalchi — *vedi* Arti grafiche - Chimica fotografica - Fotografia industriale - Processi fotomeccanici.

Fotocromatografia (La), di L. SASSI, di pag. XXI-138, con 19 inc. . . . . 2 —

Fotografia (I primi passi in), di L. SASSI, di pag XVI-183 con 21 inc. e 13 tavole . . . . 2 —

Fotografia industriale (La), fotocalchi economici per la riproduzione di disegni, piani, ecc. di L. GIOPPI, di pag. VIII-208, con 12 inc. e 5 tav. 2 50

Fotografia ortocromatica, di C. BONACINI, di pag. XVI-277, con inc. e 5 tavole 3 50

Fotografia pei dilettanti. (Come dipinge il sole), di G. MUFFONE, 6ª ediz. riveduta ed ampliata, di pagine XVI-428, con 290 incisioni e tavole 4 50

Fotografia senza obiettivo, di L. SASSI, di pagine XVI-135, con 127 incis. e 12 tavole fuori testo . . 2 50

Fotografia turistica, di T. ZANGHIERI, di pag. XVI-279, con 84 incis. e 18 tavole 3 50

Fotogrammetria, Fototopografia e applicazione della fotogrammetria all'Idrografia, di P. PAGANINI, di pagine XVI-288, con 200 figure e 4 tavole 3 50

Fotolitografia — *vedi* Arti grafiche - Processi fotomecc.

Fotosmaltografia (La), applicata alla decorazione industriale delle ceramiche e dei vetri, di A. MONTAGNA, di pag. VIII-200, con 16 inc. nel testo . . . . . . 2 —

Fototerapia e radioterapia — *vedi* Elettricità medica - Luce e salute - Radioattività - Röntgen (Raggi).

Fototipografia — *vedi* Arti grafiche - Processi fotomecc.

Fragole — *vedi* Frutta minori.

Francia — *vedi* Storia della Francia.

Fraseologia francese-italiana, di E. BAROSCHI SORESINI, di pag. VIII-262 . . . . 2 50

Fraseologia straniera — *vedi* Conversazione - Dottrina popol.

Frenastenia — *vedi* Ortofrenia.

Frodi nei misuratori elettrici — *vedi* Misuratori.

Frumento (Il) (come si coltiva o si dovrebbe coltivare in Italia), di E. AZIMONTI, 2ª ediz. di pag. XVI-276 . 2 50

Frutta minori. Fragole, poponi, ribes, uva spina e lamponi, di A. PUCCI, di pag. VIII-193, con 96 inc. . . 2 50

Frutta fermentate — *vedi* Distillazione.

Frutticoltura, di D. TAMARO, 5ª ediz. riveduta ed ampliata, di pag. XX-232, con 113 incisioni e tavole . . . 2 50

Frutti artificiali — *vedi* Pomologia artificiale.

Fulmini e parafulmini, di CANESTRINI, di pag. VIII-166, con 6 inc. . . . . 2 —

Funghi mangerecci e funghi velenosi, di F. CAVARA, di pag. XVI-192, con 43 tavole e 11 incis. . . 4 50

Funzioni analitiche (Teoria delle), di G. VIVANTI, di pag. VIII-432 . . . . 3 —

Funzioni ellittiche, di E. PASCAL, di pag. 240 . . 1 50

Funzioni poliedriche e modulari, (Elementi della teoria delle), di G. VIVANTI, di pag. VIII-437 . . 3 —

L. C.

Fuochista — *vedi* Chauffeur - Macchinista e Fuochista.

Fuochi artificiali — *vedi* Esplodenti - Pirotecnia.

Furetto (Il). Allevamento razionale. Ammaestramento, Utilizzazione per la caccia, Malattie, di G. Licciardelli, di pag. XII-172, con 39 inc. . . . . 2 —

Gallinacei — *vedi* Animali da cortile - Colombi - Pollicolt.

Galvanizzazione, pulitura e verniciatura dei metalli e galvanoplastica in generale. Manuale pratico per l'industriale e l'operaio, riguardante la nichelatura, ramatura, doratura, argentatura, stagnatura, ecc., in tutte le applicazioni pratiche, di F. Werth, 2ª ediz., rifatta, di pagine XXI-535, con 226 inc. 6 —

Galvanoplastica (La) **del rame, argento, oro,** di F. Werth (in lavoro).

Galvanoplastica ed altre applicazioni dell'elettrolisi. Galvanostegia, Elettrometallurgia, Affinatura dei metalli Preparazione dell'alluminio. Sbiancamento della carta e delle stoffe. Concia delle pelli, ecc. di R. Ferrini, 3ª ediz. completamente rifatta, pag. XII-417, con 45 incis. . 4 —

Galvanostegia, di I. Ghersi. Nichelat., argentat., doratura, ramatura, ecc.. p. XII-324 con 4 inc., L. 3,50 (esaurito).

Garofano (Il), (Dianthus) nelle sue varietà, coltura e propagazione, di G. Girardi, con appendice di A. Nonin, di pag. VI-179, con 98 inc. e 2 tavole colorate . . . 2 50

Gastronomo (Il) **moderno,** di E. Borgarello. Vademecum ad uso degli albergatori, cuochi, segretari e personale d'albergo corredato da 200 Menus originali e moderni, e da un dizionario di cucina di 4000 termini più in uso nel gergo di cucina francese, di pag. VI-411 3 50

Gatti — *vedi* Cani e gatti.

Gaz illuminante (Industria del), di V. Calzavara, di pagine XXXII-672, con 375 inc. e 216 tabelle 7 50

— *vedi* Incandescenza a gaz.

Gaz povero, ad esplosione, ecc. — *vedi* Motori.

Gelsicoltura, di D. Tamaro, 2ª ed. p. XXIX-245, 80 inc. 2 50

Geodesia — *vedi* Catasto - Celerimensura - Compensazione errori - Disegno topograf. - Estimo - Telemetria - Triangolaz.

Geografia, di G. Grove, traduzione di G. Galletti, 2ª ediz. riveduta, di pag. XII-160, con 26 inc. 1 50

Geografia classica, di H. Tozer, traduzione e note di I. Gentile, 5ª ediz., di pag. IV-168 . . . . . . 1 50

Geografia commerciale economica universale, di P. Lanzoni, 3ª edizione riveduta, pag. VII-400 3 —

Geografia fisica, di A. Geikie, trad. di A. Stoppani, 3ª ediz., pag. IV-132, con 20 inc. 1 50

Geografia matematica — *vedi* Sfere cosmografiche.

Geologia, di A. Geikie, traduz. di A. Stoppani, 4ª ediz. riveduta da G. Mercalli, pag. XII-176, con 47 inc. . . . 1 50

Geologo (Il) **in campagna e nel laboratorio,** di L. Seguenza, di pag. XV-305, con inc. . . . . . 3 —

Geometria analitica del piano e dello spazio, di L. Berzolari (in lavoro).

L. C.

Geometria descrittiva, di F. Aschieri, di pag. vi-222, con 180 inc., 2ª ediz. (esaurito).

Geometria elementare (Complementi di), di C. Alasia, di pag. xv-244 con 117 figure 1 50

Geometria e trigonometria della sfera, di C. Alasia, di pag. viii-208, con 34 inc. 1 50

Geometria metrica e trigonometria, di S. Pincherle, 6ª ediz., di pag. iv-158, con 47 inc. . . . 1 50

— *vedi* Trigonometria.

Geometria pratica, di G. Erede, 4ª ediz. riveduta ed aumentata, di pag. xvi-258, con 134 inc. . . . . 2 —

Geometria projettiva del piano e della stella, di F. Aschieri, 2ª ediz., pag. vi-228, con 86 inc. 1 50

Geometria projettiva dello spazio, di F. Aschieri, 2ª ediz. rifatta, di pag. vi-264, con 16 inc. . . 1 50

Geometria pura elementare, di S. Pincherle, 6ª ediz. con l'aggiunta delle figure sferiche, di pagine viii-176, con 121 inc. 1 50

Geometria elementare (Esercizi sulla), di S. Pincherle, di pag. viii-130, con 50 inc. 1 50

Geometria elementare (Problemi di), di I. Ghersi, (Metodi facili per risolverli), con circa 200 problemi risolti, e 119 inc., di pag. xii-160 . . . . 1 50

Geometria dell'Operaio — *vedi* Aritmetica.

Ghiaccio — *vedi* Industria frigorifera.

Giardiniere (Il libro del) di A. Pucci, 2 volumi.

I. Il Giardino e la cultura dei fiori, di pag. xii-325 con 141 incisioni 3 50

II. La Coltivazione delle piante ornamentali da giardino, con circa 150 incisioni 3 50

Giardino (Il) **infantile,** di P. Conti, p. iv-213, 27 tav. 3 —

Ginnastica (Storia della), di F. Valletti, pag. viii-184 1 50

Ginnastica femminile, di F. Valletti, p. vi-112, 67 ill. 2 —

Ginnastica maschile (Manuale di), per cura di J. Gelli, pag. viii-108, con 216 inc. (esaurito, la 2ª edizione è in preparazione).

— *vedi anche* Acrobatica - Giuochi ginnastici.

Gioielleria, oreficeria, oro, argento e platino — *vedi* Orefice..

— *vedi anche* Leghe metall. - Metallurgia dell'oro - Metalli preziosi - Saggiatore - Tavole alligazione.

Giuochi — *vedi* Biliardo - Lawn-Tennis - Scacchi.

Giuochi ginnastici per la gioventù delle Scuole e del popolo, di F. Gabrielli, pag. xx-218, con 24 tav. 2 50

Giuoco (Il) **del pallone e gli altri affini.** Giuoco del calcio (Foot-Ball), della palla a corda (Lawn-Tennis), della palla al muro (Pelota), della palla a maglio e dello sfratto, di G. Franceschi, di pag. viii-214, con 34 inc. . 2 50

Giurato (Manuale per il), di A. Setti, 2ª ediz. rifatta, di pag. xiv-246 . . . . 2 50

Giurisprudenza — *vedi* Avarie - Camera di consiglio - Codici - Conciliatore - Curatore fallimenti - Digesto - Diritto - Economia - Finanze - Enciclopedia amministrativa - Giurato - Giustizia - Leggi - Legislazione - Mandato commerciale - Notaio - Ragioneria - Socialismo - Strade ferrate - Testamenti.

L. C.

Giustizia amministrativa. Principî fondamentali. Competenze dei Tribunali ordinari, della IV Sezione del Consiglio di Stato e delle Giunte provinc. aministr. e relativa procedura, di C. Vitta, di pag. XII-427 4 —

Glottologia, di G. De Gregorio, pag. XXXII-318 . . 3 —

Glucosio — *vedi* Fecola - Zucchero.

Gnomonica ossia **l'arte di costruire orologi solari,** lezioni di B. M. La Leta, p. VIII-160, con 19 fig. 2 —

Gobelins (*vedi* Arazzo).

Gomma elastica — *vedi* Caoutchouc - Imitazioni.

Grafologia, di C. Lombroso, pag. V-245 e 470 facsimili 3 50

Grammatica albanese con le poesie rare di Variboda, di V. Librandi, pag. XVI-200 . . . 3 —

Grammatica araba — *vedi* Arabo parlato.

Grammatica araldica — *vedi* Araldica - Vocabol. araldico.

Grammatica ed esercizi pratici della lingua danese-norvegiana colle principali espressioni tecnico-nautiche, di G. Frisoni, pag. XX-488 . . 4 50

Grammatica ed esercizi pratici della lingua ebraica, di I. Levi fu Isacco, pag. 192 . . 1 50

Grammatica francese, di G. Prat, 2ª ed. p. XII-299 1 50

Grammatica e dizionario della lingua dei Galla (oromonica), di E. Viterbo; Vol. I. Galla-Italiano, p. VIII-152 . . . . 2 50

Vol. II. Italiano-Galla, pag. LXIV-106 . . . . . 2 50

Grammatica gotica — *vedi* Lingua gotica.

Grammatica greca. (Nozioni elementari di lingua greca), di V. Inama, 2ª ediz., pag. XIV-208 . . . . 1 50

Grammatica della lingua greca moderna, di R. Lovera, (2ª ediz., in lavoro).

— *vedi anche* Dizionario.

Grammatica inglese, di L. Pavia, 2ª ediz., p. XII-262 1 50

Grammatica italiana, di T. Concari, 2ª ed. (esaurito).

— *vedi* Dialetti italici - Figure grammaticali - Grammatica storica.

Grammatica latina, L. Valmaggi, 2ª ed., pag. VIII-256 1 50

Grammatica magiara, con esercizi e vocabolarietto, di A. Aly Belfàdel, di pag. XIX-332 . . . 3 —

Grammatica Norvegiana — *vedi* Gramm. Danese.

Grammatica della lingua olandese, di M. Morgana, pag. VIII-224 . . . . 3 —

Grammatica ed esercizi pratici della lingua portoghese-brasiliana, di G. Frisoni, di pag. XII-267 . . . . 3 —

Grammatica e vocabolario della lingua rumena, di R. Lovera, con l'aggiunta di un vocabolario delle voci più usate, 2ª ed. rived. e corretta, p. X-183 1 50

— *vedi* Letteratura rumena.

Grammatica russa, di Voinovich, di pag. X-272 . 3 —

— *vedi* Vocabolario russo.

L. C.

Grammatica sanscrita — *vedi* Sanscrito.

Grammatica della lingua croata-serbo, di G. ANDROVIC, di pag. XIV-299 . . . . 3 —

Grammatica della lingua slovena. Esercizi e vocabolario di B. GUYON, di pag. XIV-314 . . . . . 3 —

Grammatica spagnuola, L. PAVIA, 2ª ed.. p. XII-194 1 50

Grammatica della lingua svedese, di E. PAROLI, di pag. XV-293 . . . . 3 —

Grammatica storica della lingua e dei dialetti italiani, di F. D'OVIDIO e G. MEYER-LÜBKE. Trad. sulla 2ª ed. tedesca di E. POLCARI, di pag. XII-301 . . 3 —

Grammatica tedesca, di L. PAVIA, 2ª ed. p. XVIII-272 1 50

Grammatica del Tigrè — *vedi* Tigrè italiano.

Grammatica turca osmanli, con paradigmi, crestomazia e glossario di L. BONELLI, p. VIII-200 e 5 tavole 3 —

Grandine — *vedi* Assicurazioni.

Granturco — *vedi* Mais - Industria dei molini.

Gravitazione. Spiegazione elementare delle principali perturbazioni nel sistema solare, di Sir G. B. AIRY, traduzione di F. PORRO, con 50 inc., pag. XXII-176 . . 1 50

Greco moderno — *vedi* Crestomazia - Grammatica - Dizionario.

Grecia antica — *vedi* Archeologia (Arte greca) - Atene - Mitologia greca - Monete greche - Storia antica.

Gruppi continui di trasformazioni (Parte generale della teoria), di E. PASCAL, di pag. XI-378 . . . 3 —

Guida numismatica universale, cont 6278 indirizzi e cenni storico-statistici di collez. pubbliche e private, di numismatici, di società e riviste numism., di incisioni, di monete e medaglie e di negoz. di monete e libri di numismatica, di F. GNECCHI, 4ª ediz., di p. XV-612 8 —

Guttaperca — *vedi* Caoutchouc - Imitazioni.

Humus (L'), **la fertilità e l'igiene dei terreni culturali,** di A. CASALI, pag. XVI-210 2

Idraulica, di T. PERDONI (È in lavoro la 2ª ediz. rifatta da E. ZENI).

— *vedi* Consorzi di difesa del suolo.

Idrografia — *vedi* Fotogrammetria.

Idroterapia, di G. GIBELLI, pag. IV-238, con 30 inc. . 2 —

— *vedi anche* Acque minerali e termali del Regno d'Italia.

Igiene d. alimentazione — *v.* Bromatologia - Chimica applicata all'.

Igiene della bocca e dei denti, nozioni elementari di Odontologia, di L. COULLIAUX, p. XVI-330 e 23 inc. 2 50

Igiene del lavoro — *vedi* Malattie (Le) dei lavoratori.

Igiene del lavoro, di TRAMBUSTI A. e SANARELLI G., di pag. VIII-262, con 70 inc. 2 50

Igiene della mente e dello studio, di G. ANTONELLI, di pag. XXIII-410 . . . . 3 50

Igiene della pelle, di A. BELLINI, di p. XVI-240, 7 inc. 2 —

Igiene privata e medicina popolare ad uso delle famiglie, di C. BOCK, 2ª ed. ital. di G. GALLI, di p. XVI-272 2 50

L. C.

Igiene rurale, di A. CARRAROLI, di pag. x-470 . . . 3 —
Igiene scolastica, di A. REPOSSI, 2ª ediz., p. IV-246 2 —
Igiene del sonno, di G. ANTONELLI, p. VI-224 con 1 tav. 2 50
Igiene veterinaria, di U. BARPI, di pag. VIII-228 . 2 —
Igiene della vista sotto il rispetto scolastico, di A. LOMONACO, di pag. XII-272 . . . . . 2 50
Igiene della vita pubblica e privata, G. FARALLI, di pag. XII-250 . . . . 2 50
Igienista, (Man. pratico dell') per uso degli Ufficiali sanitari, degli allievi dei corsi complementari d'igiene e degli studenti di medicina, farmacia e veter., dei Dott. C. TONZIG e G. Q. RUATA con prefazione del Prof. A. SERAFINI, di pag. XII-374, 243 inc. . . . . , . 5 —
Igroscopi, igrometri, umidità atmosferica, di P. CANTONI, pag. XII-142, con 24 inc. e 7 tabelle . . 1 50
Illuminazione — *vedi* Acetilene - Gaz illum. - Incandescenza.
Illuminazione elettrica (Impianti di), Manuale pratico di E. PIAZZOLI, 5ª ediz. (esaurito, in ristampa).
Imbalsamatore — *vedi* Naturalista preparatore - Naturalista viaggiatore - Zoologia.
Imbianchimento — *vedi* Industria tintoria - Ricettario industr.
Imenotteri, Neurotteri, Pseudoneurotteri, Ortotteri e Rincoti italiani, di E. GRIFFINI (Entomologia IV), di pag. XVI-687, con 243 inc. . . . 4 50
Imitazione di Cristo (Della), Libri quattro di GIO. GERSENIO, volgarizzamento di CESARE GUASTI, con proemio e note di G. M. ZAMPINI, di pag. LVI-396 . . . 3 50
Imitazioni e succedanei nei grandi e piccoli prodotti industriali. Pietre e materiali da costruz. Amianto, Cuoio, Seta, Paste da carta, Gomma elastica, Avorio, Corno, Ambra e Madreperla, Celluloide, ecc. di I. GHERSI, di pag. XVI-591, con 90 inc. . 6 50
Immunità e resistenza alle malattie, di A. GALLI VALERIO, di pag. VIII-218 . . . . 1 50
Impalcature — *vedi* Costruzioni.
Impiego ipodermico (L') **e la dosatura dei rimedi,** Man. di terapeutica di G. MALACRIDA, (esaurito).
Imposte dirette (Riscos. delle), di E. BRUNI, p. VIII-158 1 50
Incandescenza a gas, (Fabbricazione delle reticelle) di L. CASTELLANI, di pag. X-140, con 33 inc. . . 2 —
Inchiostri — *vedi* Ricettario industriale - Vernici, ecc.
Indovinelli — *vedi* Enimmistica.
Industria (L') **frigorifera,** di P. ULIVI. Nozioni fondamentali, macchine frigorifere, raffreddamento dell'aria, ghiaccio e cenni sulla liquefazione dell'aria e dei gas, di pag. XII-168, con 36 fig. e 16 tabelle . . . . 2 —
Industria tartarica, di G. CIAPETTI. Materie derivanti dal vino. Fabbricaz. e raffinaz. del cremore di tartaro, del tartrato di calcio, dell'acido tartarico. Analisi d. sostanze tartariche dei derivati, di p. XV-276, con 52 inc. 3 —
Industria tintoria, di M. PRATO. — I. Imbianchi-

L. C.

mento e Tintura della Paglia; — II. Sgrassatura e imbianchimento della Lana; — III. Tintura e stampa del Cotone in indaco; — IV. Tintura e stampa del Cotone in colori azoici, di pag. XXI-292, con 7 inc. . . . 3 —

Industrie (Piccole). Scuole e musei industriali - Industrie agricole e rurali - Industrie manifatturiere ed artistiche, di I. Ghersi, di pag. XII-372 . . . . . . 3 50

Infanzia — *vedi* Rachitide - Malattie dell' - Giardino infantile - Nutrizione - Ortofrenia - Posologia della terapia infantile - Sordomuto.

Infermieri (Istruzioni per gli) *vedi* Assistenza.

Infezione — *vedi* Disinfezione - Medicatura antisettica.

Infortuni sul lavoro (Mezzi tecnici per prevenirli), di E. Magrini, di pag. XXXII-252, con 257 inc. . . . 3 —

— *vedi anche* Legge sugli infortuni.

Infortuni della montagna (Gli). Manuale pratico degli Alpinisti, delle guide e dei portatori, di O. Bernhard, trad. di R. Curti, di p. XVIII-60, 65 tav. e 175 fig. . 3 50

Ingegnere agronomo — *vedi* Agricoltore (Pront. dell') - Agronom.

Ingegnere civile. Manuale dell'ingegnere civile e industriale, di G. Colombo, 24ª ed. e aumentata (64° al 66° migliaio), con 231 fig. e una tav., di p. XII-458 . . . 5 50

Ingegnere costruttore meccanico (Vademecum per l'), di C. Malavasi, di p. XVIII-555, con 1131 figure e disegni costruttivi e 266 tabelle 6 50

Ingegnere elettricista, di A. Marro, di p. XV-689 192 inc. e 115 tabelle 7 50

Ingegnere navale, di A. Cignoni, di pag. XXXII-292, con 36 figure 5 50

Ingegnere rurale — *vedi* (Prontuario dell') - Agricoltore.

Ingegneria legale — *vedi* Codice dell'ingegnere.

Inghilterra — *vedi* Storia d'Inghilterra.

Insegnamento (L') **dell'italiano** nelle Scuole secondarie, di C. Trabalza, di pag XVI-254 . . . . 1 50

Insegnamento della Letteratura — *vedi* Letteratura.

Insetti nocivi, di F. Franceschini, p. VIII-264, 96 inc. 2 —

Insetti utili, F. Franceschini, p. XII-160, 42 inc., 1 tav. 2 —

Interesse e sconto. E. Gagliardi, 2ª ediz., p. VIII-198 2 —

Inumazioni — *vedi* Morte vera.

Ipnotismo — *vedi* Magnetismo - Occultismo - Spiritismo - Telepatia.

Ipoteche (Man. per le), di A. Rabbeno, di p. XVI-247 1 50

Islamismo (L'). di I. Pizzi, di pag. VIII-494 . . . 3 —

Ittiologia italiana, di A. Griffini, con 244 inc. Descriz. dei pesci di mare e d'acqua dolce, di p. XVIII-469 4 50

— *vedi anche* Pisciscoltura - Ostricoltura.

Lacche — *vedi* Vernici, ecc.

Lanterna magica — *vedi* Cinematografo.

Laringologia — *vedi* Malattie dell'orecchio, del naso e della gola.

Laterizi (I), di G. Revere, di p. XII-298, con 134 incis. 3 50

Latte (La produzione del) **e le latterie sociali cooperative.** di E. Reggiani, p. XII-444, con 96 inc. 4 —

L. C.

Latte, burro e cacio. Chimica analitica applicata al caseificio, di G. Sartori, pag, x-162, con 24 inc. . . 2 —

Lavorazione dei metalli e dei legnami. Elementi di tecnologia meccanica; di C. Arpesani, di pagine xii-317, con 274 incisioni nel testo . . . . 3 —

Lavori femminili — *vedi* Abiti per signora - Biancheria - Macchine da cucire - Monogrammi - Trine a fuselli.

Lavori marittimi ed impianti portuali, di F. Bastiani, di pag. xxiii-424, con 209 fig. 6 50

Lavori pubblici — *vedi* Leggi sui lavori pubblici.

Lavori in terra (Man. di), di B. Leoni, p. xi-305, 38 inc. 3 —

Lavoro — *vedi* Codice (Nuovo) del.

Lavoro delle donne e dei fanciulli. Nuova legge e regol. 19 giugno 1902 - 28 febbr. 1903. Testo, atti parlam. e commento, per cura di E. Noseda, p. xv-174 1 50

Lawn-Tennis, di V. Baddeley, prima traduz. italiana con note e aggiunte del trad., di p. xxx-206 con 13 ill. 2 50

Legatore di libri (Il dilettante), di G. G. Giannini, di pag. xi-204, 91 inc., 17 tav. fuori testo (2 a col.) . . 3 50

Legge (La nuova) **comunale e provinciale,** annotata da E. Mazzoccolo, 5ª ediz. coordinata coi decreti e leggi posteriori a tutto il 1904, con due indici, di p. 976 (esaurito, la 6ª ediz. è in corso di stampa).

— *vedi* Enciclopedia amministrativa.

Legge (La) **elettorale politica nelle sue fonti e nella sua giurisprudenza,** di C. Montalcini, di pag. xvi-496 . . . . 5 50

Legge sugli infortuni sul lavoro, di A. Salvatore, di pag. 312 . . . . 3 —

— *vedi* Codice (Nuovo) del lavoro.

Legge sui lavori pubblici e regolamenti, di L. Franchi, pag. iv-110-xlviii 1 50

Legge lavoro donne e fanciulli — *vedi* Lavoro.

Legge sull'ordinamento giudiziario, di L. Franchi, di pag. iv 92-cxxvi 1 50

Leggende popolari. di E. Musatti, 3ª ediz., p. viii-181 1 50

Leggi e convenzioni sui diritti d'autore — *vedi* Codici e Leggi usuali d'Italia, vol. III.

Leggi e convenzioni sulle privative industriali — *vedi* Codici e Leggi usuali d'Italia, vol. IV.

Leggi sulla sanità e sicurezza pubblica, di L. Franchi, pag. iv-108-xcii 1 50

Leggi sulle tasse di Registro e bollo, con appendice, di L. Franchi, pag. iv-124-cii 1 50

Leggi usuali d'Italia — *vedi* Codici e Leggi.

Leghe metalliche ed amalgame alluminio, nichelio, metalli preziosi e imitazione, bronzo, ottone, monete e medaglie, saldature, di I. Ghersi, p. xvi-431, 15 inc. 4 —

Legislazione sulle acque, D. Cavalleri, p. xv-274 2 50

Legislazione ferroviaria — *vedi* Strade ferrate - Trasporti e tariffe.

Legislazione mortuaria — *vedi* Morte.

Legislazione rurale, secondo il programma governativo per gli Istituti Tecnici, di E. Bruni, 2ª ed. p. xv-423 3 —

L. C.

Letteratura spagnuola, B. Sanvisenti, p. XVI-202 1 50

Letteratura tedesca, di O. Lange, 3ª ediz. rifatta da R. Minutti, di pag. XVI-188 . . . . 1 50

Letteratura ungherese, di Zigany Arpàd, p. XII-295 1 50

Letteratura universale (Compendio di), di P. Parisi, di pag. VIII-391 . . . . 3 —

Letterature slave, di D. Ciàmpoli, 2 volumi:
I. Bulgari, Serbo-Croati, Yugo-Russi, di pag. IV-144 . 1 50
II. Russi, Polacchi, Boemi, di pag. IV-142 . . . . . 1 50

Levatrice — *vedi* Ostetricia.

Limnologia. Studio scientifico dei laghi, di G. P. Magrini, di pag. XV-212, 53 inc. ed 1 tavola in cromo . . 3 —

Limoni — *vedi* Agrumi.

Lingua araba — *vedi* Arabo parlato - Dizionario eritreo - Grammatica Galla - Lingue dell'Africa - Tigrè.

Lingua cinese parlata. Elementi grammaticali e glossario di F. Magnasco, di pag. XVI-114 . . . . . 2 —

Lingua giapponese parlata. Elementi grammaticali e glossario di F. Magnasco, di pag. XVI-110 . . 2 —

Lingua gotica, grammatica, esercizi, testi, vocabolario comparato, di S. Friedmann, di pag. XVI-333 . . . 3 —

Lingua greca — *vedi* Crestomazia - Dialetti - Dizionario - Esercizi - Filologia - Florilegio - Grammatica - Letteratura - Morfologia - Verbi.

Lingua latina — *vedi* Dizionario di abbreviature latine - Epigrafia - Esercizi - Filologia classisa - Fonologia - Grammatica - Letteratura romana - Metrica - Verbi.

Lingua persiana, di D. Argentieri. Grammatica, crestomazia, glossario. (In lavoro).

Lingua Russa (Manualetto della) con la pronunzia figurata di P. G. Sperandeo, contenente la grammatica e gli esercizi, oltre 3000 vocaboli della lingua parlata, con le flessioni irregolari, una scelta di prose e di poesie, un frasario, 2ª ediz., di pag. IX-274 . . . 4 —

Lingua turca osmanli — *vedi* Grammatica.

Lingue dell'Africa, di R. Cust, versione italiana di A. De Gubernatis, di pag. IV-110 . . . . 1 50

Lingue Germaniche — *vedi* Grammatica danese-norvegiana, inglese, olandese, tedesca, svedese.

Lingue neo-elleniche — *v.* Crestomazia - Dizionario greco mod.

Lingue neo-latine, di E. Gorra (esaurito, la 2ª ediz. è in lavoro).

Lingue straniere (Studio delle), di C. Marcel, ossia l'arte di pensare in una lingua straniera, traduzione di G. Damiani, di pag. XVI-136 . . . . 1 50

Linguistica — *vedi* Grammatica storica della lingua e dei dialetti italiani - Figure (Le) grammaticali.

Linoleum — *vedi* Imitazioni.

Liquidatore di sinistri marittimi — *vedi* Avarie e sinistri marit.

Liquorista (Manuale del) di A. Rossi, con 1450 ricette pratche, 2ª ediz. con modificazioni ed aggiunte a cura di A. Castoldi, di pag. XVI-682 (esaurito, la 3ª edizione è in corso di stampa).

Litografia, di C. Doyen, di pag. VIII-261, con 8 tavole e 40 figure di attrezzi, ecc. occorrenti al litografo . . 4 —

L. C.

Liuto — *vedi* Chitarra - Mandolinista - Strumenti ad arco - Violino - Violoncello.

Locomobili (Manuale pei conduttori di), con appendice sulle trebbiatrici, di L. CEI, 2ª ediz., di pag. XII-314, con 147 incis. e 32 tabelle 2 50

— *vedi* Automobili - Caldaie - Macchinista - Trazione a vapore.

Logaritmi (Tavole di), con 5 decimali, di O. MÜLLER, 9ª ediz. aumentata dalle tavole dei logaritmi d'addizione e sottrazione per cura di M. RAINA, di pag. XXXVI-191 . 1 50

Logica, di W. STANLEY JEVONS, traduz. di C. CANTONI. 5ª ediz., di pag. VIII-156, con 15 incis. 1 50

Logica matematica, di C. BURALI-FORTI, p. VI-158 1 50

Logismografia, di C. CHIESA, 3ª ediz. (esaurito).

Logogrifi — *vedi* Enimmistica.

Lotta — *vedi* Pugilato.

Luce e colori, di G. BELLOTTI, pag. X-157, con 24 inc. 1 50

Luce e suono, di E. JONES, traduzione di U. FORNARI, di pag. VIII-336, con 121 inc. . . . . 3 —

Luce e salute. Fototerapia e radioterapia, di A. BELLINI, di pag. XII-362, con 65 figure . . . 3 50

Lupino — *vedi* Fecola.

Lupus — *vedi* Luce e salute.

Macchine (Atlante di) **e di Caldaie,** con testo e note di tecnologia, di S. DINARO, di pag. XV-80, con 112 tavole e 170 figure in iscala ridotta . . . . 3 —

Macchine (Il Montatore di), di S. DINARO. Seconda edizione intieramente rifatta ed ampliata, p. XVI-502, 62 inc. 4 —

Macchine agricole — *vedi* Meccanica agraria.

Macchine per cucire e ricamare, di A. GALASSINI, di pag. VII-230, con 100 inc. 2 50

Macchine a vapore (Manuale del costruttore di), di H. HAEDER, 2ª ediz. italiana di E. WEBBER (In lavoro).

Macchinista e fuochista, di G. GAUTERO e L. LORIA 11ª ediz., complet. rifatta dall'Ing. C. MALAVASI, con una append. sulle Locomobili e le Locomotive e col testo governativo del Regolamento sulle caldaie a papore e norme per gli esami dei macchinisti e fochisti, di pagine XVI-271, con 105 incisioni nel testo 2 50

Macchinista navale, per uso dei macchinisti della R. Marina, dei Macchinisti delle Compagnie di Navigazione, dei Periti e Costrutt. navali meccanici, Capitecnici, Capi-Offic., Capi-disegn., ecc. di E. GIORLI, di pag XV-879, con 960 formole, 630 fig. e molteplici problemi risolti 7 50

Macinazione — *vedi* Industrie dei molini - Panificazione.

Madreperla (La) e il suo uso nell'industria e nelle arti, di E. ORILIA, di pag. VIII-258, con 40 inc. e 4 tavole 4 50

Magiaro — *vedi* Grammatica magiara - Letteratura ungherese.

Magnetismo ed elettricità. Principi e applicazioni esposti elementarmente, di F. GRASSI, 3ª ediz., di pag. XVI-508, con 280 fig. (esaurito, la 4ª ediz. è in lavoro).

Magnetismo e ipnotismo, di G. BELFIORE, 2ª ediz. rifatta, di pag. VIII-396 . . . . 3 50

Maiale (Il). Razze, metodi di riproduzione, di allevamento, ingrassamento, commercio, salumeria, patologia

L. C.

suina e terapeutica, tecnica operatoria, tossicologia, dizionario suino-tecnico, di E. Marchi, 2ª ediz. (esaurito, è in lavoro la 3ª ediz.).

Maioliche e porcellane (L'amatore di), di L. De Mauri, illustrato da 3000 marche e da 12 tavole a colori. Contiene: Tecnica della fabbricazione - Cenni storici ed artistici - Dizionario di termini - Prezzi correnti - Bibliografia ceramica, di pag. XII-650 . . . . . . 12 50

Mais (Il) **o granoturco.** Norme per una buona coltivazione, di E. Azimonti, 2ª ediz., di pag. XII-196, 61 inc. 2 50

Malaria (La) **e le risaie in Italia,** di G. Ercolani, di pag. VIII-203 . . . . 2 —

Malattie dell'infanzia (Terapia delle), di G. Cattaneo, di pag. XII-506 . . . . 4 —

— *vedi* Balbuzie - Nutr. del bambino - Ortofrenia - Rachitide.

Malattie infettive (Profilassi delle) **degli animali,** di U. Ferretti, di pag XX-582 . . . . . . 4 50

Malattie (Le) **dei lavoratori e l'igiene industriale,** di G. Allevi, di pag. XII-421 . . . . . 3 50

Malattie della pelle (Le) di G. Franceschini, di pagine XVI-217 . . . . 2 50

Malattie mentali (Patologia speciale delle) di L. Mongeri, consideraz oni medico-legali per gli studenti, medici prat. e giuristi, pag. XVI-263, con 26 tav. . . . 3 50

Malattie dell'orecchio, del naso e della gola (Oto-rino-laringoiatria), di T. Mancioli, p. XXIII-540, 98 inc. 5 50

Malattie dei paesi caldi, loro profilassi ed igiene con un'appendice "La vita nel Brasile" - Regolamenti di sanità pubblica contro le infezioni esotiche, di C. Muzio, di pag. XII-562, con 154 inc. e 11 tavole . . . 7 50

Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate, di R. Wolf, traduz. con note ed aggiunte di P. Baccarini, di pag. X-268, con 50 inc. . . 2 —

Malattie della pelle — *vedi* (Igiene delle)

Malattie del sangue. Manuale d'Ematologia, di E. Rebuschini, di pag. VIII-432 . . . . 3 50

Malattie sessuali, di G. Franceschini, di pag. XV-216 2 50

Malattie, alterazioni e difetti del vino, di S. Cettolini, 2ª ediz., di pag. VIII-380, con 15 inc. . . . 3 —

Malattie dei vini (L'uva nelle). **Chiarificazione.** Per gli enotecnici e gli alunni delle Scuole sup. d'agricolt., di R. Averna Sacca, di pag. XII-400, con 23 incis. 3 50

Malattie della vite — *vedi* Fillossera - Malattie crittogam.

Mammiferi — *vedi* Zoologia.

Mandarini — *vedi* Agrumi.

Mandato commerciale, di E. Vidari, di pag. VI-160 1 50

Mandolinista (Manuale del), di A. Pisani, di pag. XX-140, con 13 figure, 3 tavole e 39 esempi . . . . 2 —

Manicomio — *vedi* Assistenza pazzi - Psichiatria.

Manzoni Alessandro. Cenni biografici di L. Beltrami, di pag. 109, con 9 autografi e 68 inc. 1 50

Marche di fabbrica — *vedi* Amatore oggetti d'arte - Leggi sulle privative - Maioliche.

Mare (Il), di V. Bellio, pag. IV-140, con 6 tav. lit. a col. 1 50

Marine (Le) **da guerra del mondo al 1897,** di L. D'Adda, di pag. XVI-320, con 77 illustr. 4 50

	L. C.
Marino (Manuale del) **militare e mercantile,** di DE AMEZAGA, con 18 xilografie, 2ª ediz.	5 —
Marmista (Man. del), A. RICCI, 2ª ediz., p. XII-154, 48 inc.	2 —
Marmo — *vedi* Imitazioni.	
Massaggio, di R. MAINONI, di pag. XII-179, con 51 inc.	2 —
Mastici — *vedi* Ricettario industriale - Vernici ecc.	
Matematica attuariale, Storia, Statist. delle mortalità, Matemat. delle Assicur. s. vita, U. BROGGI, p. XV-347	3 50
Matematica (Complementi di) ad uso dei chimici e dei naturalisti, di G. VIVANTI, di pag. X-381 . . .	3 —
Matematiche — *vedi* Algebra - Aritmetica - Astronomia - Calcolo - Celerimensura - Compensazione errori - Computisteria - Conti e calcoli fatti - Cubatura legnami ecc.	
Matematiche superiori (Repertorio di), Definizioni, formole, teoremi, cenni biografici, di E. PASCAL.	
Vol. I. *Analisi*, pag. XVI-642	6 —
Vol. II. *Geometria,* e indice per i 2 vol., pag. 950 . .	9 50
Materia medica moderna (Manuale di), di G. MALACRIDA, di pag. XI-761	7 50
Mattoni e pietre di sabbia e calce (Arenoliti), indurimento a vapore sotto alta pressione, di E. STOFFLER e M. GLASENAPP. con note ed aggiunte di G. REVERE, di pag. VIII-232, con 85 figure e 3 tavole . . .	3 —
— *vedi* Calcestruzzo - Calci e cementi - Imitazioni - Laterizi.	
Meccanica, di R. STAWELL BALL, traduz. di J. BENETTI, 5ª ediz., di pag. XVI-198, con 87 inc.	1 50
Meccanica agraria, di V. NICCOLI, in due volumi.	
Vol. I. *Lavorazione del terreno.* — I lavori del terreno - Strumenti a mano per la lavorazione delle terre - Dell'aratro e delle arature - Strumenti per lavori di maturamento e di colturamento - Trazione funicolare e meccanica - Strumenti da tiro per i trasporti, di pag. XII-410, con 257 incis.	4 —
Vol. II. *Dal seminare al compiere la prima manipolazione dei prodotti.* — Macchine e strumenti per seminare e concimare - Per il sollevamento delle acque - Per la raccolta dei prodotti - Per la conservazione e preparazione dei foraggi - Per trebbiare - Sgranare - Pulire - Dicanapulare e per la conservazione dei prodotti agrari, di pag. XII-426, con 175 incis.	4 —
Meccanica (La) **del macchinista di bordo,** per gli ufficiali macchinisti della R. Marina, i Costruttori e i Periti meccanici, gli Allievi degli Istituti Tecnici e Nautici, ecc., di E. GIORLI, con 92 figure	2 50
Meccanica industriale (Elementi di), con cenni sopra la metallurgia e la fusione ad uso delle scuole e dell'officina, di S. DINARO, illustrato da circa 100 disegni originali (in corso di stampa).	
Meccanica razionale, di R. MARCOLONGO, due vol.	
I. Cinematica-Statica, di pag. XII-271, con 3 inc. . .	3 —
II. Dinamica. Principi di Idromecc., pag. VI-324. 24 inc.	3 —
Meccanica (Tecnologia) — *v.* Lavoraz. dei metalli e dei legnami.	
Meccanico (Il), ad uso dei capi tecnici, macchinisti, elettricisti, disegnatori, capi operai, scuole industriali, capimeccanici, ecc. di E. GIORLI, 5ª ediz. con 377 incis.	4 50
— *vedi* Ingegnere costruttore meccanico.	

L. C.

Meccanismi (500), riferentisi alla dinamica, idraul., idrostat., pneumat., di T. Brown, trad. F. Cerruti, 4ª ed. ital., VIII-176, 500 inc. (esaurito, la 5ª ediz. è in lavoro).
Medicamenti — *vedi* Farmacista - Farmacoter. - Impiego ipodermico - Materia méd. - Medicat. antis. - Posologia - Sieroter.
Medicatura antisettica, di A. Zambler, con prefazione di E. Tricomi, di pag. XVI-124, con 6 incis. . 1 50
Medicina d'urgenza. Vademecum diagnostico e terapeutico ad uso dei medici pratici, di E. Trombetta. (in corso di stampa).
Medicina legale, di M. Carrara (In lavoro).
— *vedi* Antropol. criminale - Antropometria - Psicopatologia legale.
Medicina legale militare, E. Trombetta, p. XVI-430 4 —
Medico pratico (Il), di C. Muzio, 3ª ediz. del Nuovo memoriale pei medici pratici, di pag. XVI-492 . . . 5 —
Memoria — *vedi* Arte della memoria.
Merceologia tecnica, di P. Alessandri, due vol.
Vol. I. Materie prime (gregge e semilavorate) di uso commerciale e industriale, p. XI-530, 142 tav. e 93 inc. 6 —
Vol. II. Prodotti chimici inorganici ed organici, di uso commerc. ed industr., di pag. XI-515, 83 tavole e 16 inc. 6 —
Merceologia, ad uso delle Scuole e degli agenti di commercio, di O. Luxardo, di pag. XII-452 . . . . 4 —
— *vedi* Analisi volumetrica - Chimica applicata all'igiene.
Meridiane — *vedi* Gnomonica.
Metalli e legnami — *vedi* Lavorazione dei.
Metalli preziosi, di A. Linone. *Dell'argento*: Metallurgia - Argento puro - Leghe d'arg. - Saggi dell'arg. — *Dell'oro*; Giacimento - Affinamento - Leghe - Saggi. — *Platino*: estraz. e leghe di platino - Applicazione - Decorazione, di pag. XI-315 . . . . 3 —
Metalizzazione — *vedi* Galvanizz. - Galvanopl. - Galvanostegia.
Metallocromia. Color. e decor. chim. ed elettr. dei metalli, bronz., ossid., preserv. e pul., I. Ghersi, VIII-192 2 50
Metallurgia dell'oro, E. Cortese, p. XV-262, 35 inc. 3 —
Metallurgia — *vedi* Coltivazione delle miniere - Fonditore - Leghe metalliche - Ricettario di metallurgia - Siderurgia - Tempera e cementazione.
Meteorologia generale, di L. De Marchi, 2ª ediz. ampliata, di pag. XV-225, con 13 figure e 6 tavole . . 1 50
— *vedi anche* Climatologia - Igroscopi.
Metrica dei greci e dei romani, di L. Müller, 2ª ed. italiana confrontata colla 2ª tedesca ed annotata da G. Clerico, di pag. XVI-186. . . . . 1 50
Metrica italiana — *vedi* Ritmica e metrica italiana.
Metrologia Universale ed il **Codice Metrico Internazionale**, coll'indice alfabet. di tutti i pesi, misure, monete ecc., di A. Tacchini, di pag. XX-482 . 6 50
Mezzeria (Man. prat. della) e dei vari sistemi della colonia parziaria in Italia di A. Rabbeno, di pag VIII-196 1 50
Micologia — *vedi* Funghi - Malattie crittog. - Tartufi e funghi.
Microbiologia. Perchè e come dobbiamo difenderci dai microbi. Malattie infettive. Disinfezioni, Profilassi, di L. Pizzini, di pag. VIII-142 . . . . 2 —
Microscopia — *vedi* Anatomia microscopica - Animali parassiti - Bacologia - Batteriologia - Chimica clinica - Protistologia - Tecnica protistologica.

L. C.

Microscopio (Il), Guida elem. alle osservaz. di microscopia, di C. ACQUA, 2ª ediz. aumentata, di pag. XVI-230 2 —
Mimica — *vedi* Fisionomia.
Mineralogia descrittiva, di L. BOMBICCI, 2ª ediz., di pag. IV-300, con 110 inc. . . . . 3 —
Mineralogia generale, di L. BOMBICCI, 3ª ediz. per cura di P. VINASSA de REGNY, con 193 figure e 2 tavole a colori, di pag. XVI-220 . . . . 1 50
Miniere (Coltiv. delle), di S. BERTOGLIO, 2ª ediz. rifatta del Man. "*Arte Min.*„ di V. ZOPPETTI, di p. VIII-284 . 2 50
Miniere di zolfo — *vedi* Zolfo.
Misuratori elettrici (Le frodi nei), di M. LANFRANCO, di pag. XI-277, con 27 incisioni e 39 tavole 4 50
Misurazione delle botti — *vedi* Enologia.
Misure — *vedi* Avarie e sinistri marittimi - Codice del Perito misuratore - Metrologia - Monete - Strumenti metrici.
Mitilicoltura — *vedi* Ostricoltura - Piscicoltura.
Mitologia (Dizionario di), di F. RAMORINO (In lavoro).
Mitologia classica illustrata, di F. RAMORINO, 3ª ed. corretta e accresciuta, di pag. VII-338, con 91 inc. 3 —
Mitologia greca, di A. FORESTI: I. *Divinità*, II. *Eroi* (esaurito, la 2ª ediz. è in lavoro).
Mitologie orientali, di D. BASSI:
Vol. I. *Mitologia babilonese-assira*, di pag. XVI-219 . 1 50
Mnemotecnia — *vedi* Arte della memoria
Mobili artistici — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte.
Moda — *vedi* Abiti - Biancheria - Fiori artificiali - Sarto - Trine.
Modellatore meccanico, falegname ed ebanista, di G. MINA, (esaurito, la 2ª ediz. riveduta e corretta, vedrà la luce per cura di V. GOFFI).
Molini (L'Industria dei). Costruzioni, impianti, macinazione, di C. SIBER-MILLOT, 2ª ediz. rifatta, di pag. XVII-296, con 161 incisioni e 3 tavole . . . . 5 —
Moneta (La) **e la falsa monetazione,** di U. MANNUCCI, di pag. XI-271 . . . . 3 —
Monete greche, di S. AMBROSOLI, p. XIV-286, 200 fotoinc. 3 —
Monete papali moderne, di S. AMBROSOLI, in sussidio del CINAGLI, di pag. XII-131, 200 fotoinc. 2 50
Monete (Prontuario delle), **pesi e misure inglesi,** ragguagliate al sistema decimale, di I. GHERSI, di p. XII-196 con 47 tabelle di conti fatti e 40 facsimili 3 50
Monete romane, Manuale elementare di F. GNECCHI, con una appendice "Vade-mecum del raccoglitore in viaggio. 2ª ediz. riveduta, corretta e ampliata, di pagine XVI-418, con 25 tavole e 203 figure 5 50
Monete romane: I tipi monetari di Roma Imperiale, di F. GNECCHI, di pag. VIII-119, con 28 tavole eliograf. e 2 prospetti . . . . 5 —
— *vedi* Numismatica.
Monogrammi, di A. SEVERI, con 73 tavole divise in tre serie di due e di tre cifre 3 50
Monogrammi moderni di A. SORESINA, compilati in 32 tavole artistico-litografiche . . . . 3 —
Montatore di macchine — *vedi* Macchine.
Morfologia greca, di V. BETTEI, di pag. XX-376 . 3 —
Morfologia italiana, di E. GORRA, di pag. VI-142 . 1 50

L. C.

Morte (La) **vera e la morte apparente,** con appendice " *La legislazione mortuaria* ", di F. DELL'ACQUA, di pag. VIII-136 . . . . 2 —

Mosti (Densità dei), dei vini e degli spiriti ed i problemi che ne dipendono, di E. DE CILLIS, di pag. XVI-230, con figure e 46 tavole . . . . 2 —

Motociclista, (man. del), di P. BORRINO. Guida pratica pei dilettanti di Motocicletta, di pag. XI-124, con 38 inc. 2 —

— *vedi* Automobilista - Ciclista.

Motori a gas. Manuale teorico pratico dei motori a gas di carbone fossile - Acetilene - Petrolio - Alcool, con Monografie dei gazogeni per gaz d'acqua - Gaz povero - Gaz Richè, Gaz degli alti forni, Gaz Dowson, Gaz Strache - Gazogeni - Carburatori ecc., di V. CALZAVARA, di pag. XXXI-423, con 150 inc. 4 50

Motori ad esplosione a gas luce e gas povero. Man. pratico, di F. LAURENTI, p. XII-361, 162 inc. 4 50

Muli — *vedi* Razze bovine ecc.

Municipalizzazione dei servizi pubblici. Legge e regolamento riguardanti l'assunzione diretta dei servizi munic. con note, di C. MEZZANOTTE, pag. XX-324 . 3 —

Musei — *vedi* Amatore oggetti d'arte e curiosità - Amatore majoliche e porcellane - Armi antiche - Pittura - Raccoglitore - Rovine (Le) del Palatino - Scoltura.

Musica. Espressione e interpretaz., G. MAGRINI (Approvato dal Liceo Musicale), di pag. VIII-119, con 228 incis. 2 —

Musica (Manuale di) teorico pratico per le famiglie e per le scuole ad uso degli insegnanti e degli alunni, di G. MAGRINI, di pag. XII-414 . . . . 4 —

— *vedi* Armonia - Arte e tecnica del canto - Ballo - Cantante - Canto - Chitarra - Contrappunto - Mandolinista - Pianista - Psicologia musicale - Semiografia musicale - Storia della - Strumentazione - Strumenti ad arco - Violoncello - Violino.

Mutuo soccorso — *vedi* Società mutuo soccorso.

Napoleone I°, di L. CAPPELLETTI, 2ª edizione riveduta e corretta, di pag. XXXIV-272, con XXII fotoincisioni . 2 50

Naso (Malattie del) — *vedi* Oto-rino-laringojatria.

Naturalista preparatore (Il) (Imbalsamatore), di R. GESTRO, 4ª ediz. riveduta, pag. XIX-204, con 51 incis. 2 50

Naturalista viaggiatore, di A. ISSEL e R. GESTRO (Zoologia), di pag. VIII-144, con 38 inc. . . . . . . 2 —

Nautica — *vedi* Astronomia nautica - Attrezzatura navale - Avarie e sinistri marittimi - Canottaggio - Codice di marina - Costruttore navale - Disegno e costruzione navi - Doveri macchinista navale - Filonauta - Flotte moderne - Ingegnere navale - Lavori marittimi - Macchinista navale - Marine da guerra - Marino - Meccanica di bordo.

Nautica stimata o Navigazione piana, di F. TAMI, di pag. XXXII-179, con 47 inc. 2 50

Neologismi buoni e cattivi, di G. MARI (In lavoro).

Neurotteri — *vedi* Imenotteri.

Nevrastenia, di L. CAPPELLETTI, di pag. XX-490 . . 4 —

Nichelatura — *vedi* Galvanostegia.

Notaio (Manuale del), aggiunte le Tasse di registro, di bollo ed ipotecarie, norme e moduli pel Debito pubblico, di A. GARETTI, 6ª ediz., riveduta ed ampliata da BIANCOTTI, di pag. 464 . . . . 4 50

L. C.

Numeri — *vedi* Teoria dei numeri.

Numismatica. Atlante numismatico italiano. Monete moderne di S. Ambrosoli, di pag. xvi-428, 1746 fotoinc. 8 50

Numismatica (Manuale di), di S. Ambrosoli, 4ª ediz. riveduta, di pag. xvi-250, 250 fotoinc. e 4 tavole . . 1 50

— *vedi* Atene - Guida numismatica - Monete greche, papali, romane - Vocab. numismatico.

Nuotatore (Manuale del), di P. Abbo, p. xii-148, 97 inc. 2 50

Nutrizione del bambino. Allattamento naturale ed artificiale, di L. Colombo, di pag. xx-228, con 12 inc. . 2 50

Occultismo, di N. Licò, di pag. xvi-328, con tav. ill. . 3 —

— *vedi* Chiromanzia - Magnetismo - Spiritismo - Telepatia.

Oceanografia, di G. Magrini (In lavoro).

Oculistica — *vedi* Igiene della vista - Ottica.

Odontologia — *vedi* Igiene della bocca.

Oftalmojatria veterinaria, ad uso degli studenti e dei veterinari pratici, di P. Negri e V. Ricciarelli, di pag. xvi-279, con 87 illustraz. e 15 tavole 3 50

Olandese (lingua) — *vedi* Dizionario - Grammatica.

Olii vegetali, animali e minerali, di G. Corini, 2ª ediz. rifatta da G. Fabbris, di pag. viii-214, con 7 incis. 2 —

Olivo ed olio. Coltivazione dell'olivo, estrazione, purificazione e conservazione dell'olio, di A. Aloi, 5ª ediz. accresciuta e rinnovata, di pag. xvi-365, con 65 incis. . 3 —

Ombre — *vedi* Teoria delle ombre e del chiaroscuro.

Omero, di W. Gladstone, traduzione di R. Palumbo e C. Fiorilli, di pag. xii-196 (esaurito).

Onde Hertziane — *vedi* Telegrafo senza fili.

Operaio (Manuale dell'). Raccolta di cognizioni utili ed indispensabili agli operai tornitori, fabbri, calderai, fonditori di metalli, bronzisti, aggiustatori e meccanici, di G. Belluomini, 6ª ediz. di pag. xvi-272. . . . . . 2 —

Operaio elettrotecnico (Manale pratico per l'), di G. Marchi, 2ª ediz. di pag. xx-410, con 265 incis. . . 3 —

Operazioni doganali — *vedi* Codice dogan. - Trasporti e tariffe

Opere pie — *vedi* Enciclopedia amministrativa.

Oratoria — *vedi* Arte del dire - Rettorica - Stilistica.

Orchidee, di A. Pucci, di pag. vi-303, con 95 incis. . 3 —

Ordinamento degli Stati liberi d'Europa, di F. Racioppi, 2ª ediz. di pag. xii-316 . . . . . . 3 —

Ordinamento degli Stati liberi fuori d'Europa, di F. Racioppi, di pag. viii-376 . . . . 3 —

Ordinamento giudiziario — *vedi* Leggi sull'.

Orecchio (Malattie delle) — *vedi* Oto-rino-laringojatria.

Orefice (Manuale per l'), di E. Boselli. Metalli, utensili, pietre, valute e monete, tariffe doganali, marchio, dell'oreficeria; 2ª ediz. a cura di F. Boselli, di pag. xi-370 4 —

Oreficeria — *vedi* Leghe metall. - Metalli preziosi - Saggiatore.

Organista (Manuale dell'). I registri dell'organo con speciale riguardo al differente loro timbro di voce e relativi fenomeni acustici ad uso degli organisti ed organari, di C. Locher. 1ª ediz. ital., versione dell'originale tedesco di E. Locher e V. Hainisch, prefazione del maestro E. Bossi, di pag. xxiv-187 . . . . 2 50

L. C.

Organoterapia, di E. Rebuschini, pag. VIII-432 . . 3 50
Orienta antico — *vedi* Storia antica.
Orine — *vedi* Chimica clinica - Urina.
Ornatista Manuale dell'), di A. Melani. Raccolta di iniziali miniate e incise, d'inquadrature di pagina, di fregi e finalini. XXVIII tavole in colori per miniatori calligrafi, pittori, ricamatori, ecc. 2ª ediz. 4 50
Ornitologia italiana (Manuale di), di E. Arrigoni degli Oddi. Elenco descrittivo degli uccelli stazionari e di passaggio finora osservati in Italia, di pag. 907 con 36 tavole e 401 incis. da disegni originali . . . . 15 —
Oro — *vedi* Alligazione - Metalli preziosi - Metallurgia dell'oro.
Orologeria moderna, di E. Garuffa, 2ª ediz. aumentata di pag. VIII-384, con 366 incis. 5 50
Orologi artistici — *vedi* Amatore di oggetti d'arte.
Orologi solari — *vedi* Gnomonica.
Orticoltura, di D. Tamaro, 3ª ediz., pag. XVI-598, 128 inc. 4 50
Ortoepia e ortografia italiana moderna, di G. Malagoli, di pag. XVI-193 . . . . 1 50
Ortofrenia (Manuale di), per l'educazione dei fanciulli frenastenici o deficienti (idioti, imbecilli, tardivi, ecc.), di P. Parise, di pag. XII-231 . . . . 2 —
Ortografia — *vedi* Ortoepia.
Ortotteri — *vedi* Imenotteri ecc.
Ossidazione — *vedi* Metallocromia.
Ostetricia (Manuale di). *Ginecologia minore*, per levatrici, di L. M. Bossi, di pag. XV-493, con 113 incis. . 4 50
Ostricoltura e mitilicoltura, di D. Carazzi, di pag. VIII-302 . . . . 2 50
Oto-rino-laringoiatria — *vedi* Malattie orecchio, naso e gola.
Ottica, di E. Gelcich, di pag. XVI-576, 216 incis. e 1 tav. 6 —
— *vedi* Strumenti diottrici.
Ottone — *vedi* Leghe metalliche.
Paga giornaliera (Prontuario della), **da cinquanta centesimi a cinque lire,** di G. Negrin, di pag. XI-222 . . . . 2 50
Palatino (Le rovine del) — *vedi* Rovine.
Paleoetnologia, di J. Regazzoni, di p. XI-252, con 10 inc. 1 50
Paleografia, di E. Thompsom, con aggiunte e note di G. Fumagalli, 2ª ed. rifatta, pag. XII-178, con 30 inc. e 6 tav. 2 —
Paleografia musicale — *vedi* Semiografia.
Paleontologia (Compendio di), di P. Vinassa De Regny, di pag. XVI-512, con 356 figure 5 50
Pallone (Giuoco del) — *vedi* Giuoco.
Pane (Il) **e la panificazione**, di G. Ercolani (in lav.).
Parafulmini — *vedi* Elettricità - Fulmini.
Parassiti dell'uomo - *vedi* Animali.
Parrucchiere (Manuale del), di A. Liberati, di pagine XII-219, con 88 incis. 2 50
Pasticciere e confettiere moderno, di G. Ciocca. Raccolta completa di ricette per ogni genere di biscotti, torte, paste al lievito, petit fours, confetteria, creme, frutti canditi, gelati, ecc., con metodo pratico per la decoraz. delle torte e dolci fantasia, e prefazione di A. Cougnet, di pag. L-274, illustr. da circa 300 disegni e 36 tav. a colori 8 50

L. C.

Pastificio (Industria del), di R. Rovetta. Storia, fabbricazione, impastamento, gramolazione, raffinamento, torchiatura, tranciatura, asciugamento, conservazione, imballaggio, importazione, esportazione, di pag. XVI-240, con 107 incisioni e 4 tavole . . . . 3 —

Patate (Le) di gran reddito. Loro coltura, loro importanza nell'alimentaz. del bestiame, nell'econ. domest. e negli usi industr., di N. Aducci, di p. XXIV-221, con 20 inc. 2 50

Pazzia — *vedi* Assistenza pazzi - Psichiatra - Grafologia.

Pecore — *vedi* Razze bovine, ecc.

Pedagogia — *vedi* Balbuzie - Campicello scolastico - Didattica - Giardino infantile - Igiene scolastica - Ortofrenia.

Pediatria — *vedi* Nutrizione del bambino - Ortopedia - Terapia - Malattie infanzia.

Pellagra (La), Storia, eziologia, patogenesi, profilassi, di G. Antonini, di pag. VIII-166, con 2 tavole . . . 2 —

Pelle — (Malattie della) — *vedi* Igiene della - Malattie della.

Pelli — *vedi* Concia delle pelli.

Pensioni — *vedi* Società di mutuo soccorso.

Pepe — *vedi* Prodotti agricoli.

Perfosfati — *vedi* Fosfati - Concimi - Chimica agraria.

Perizia e stima — *vedi* Assicurazioni - Avarie - Codice del perito misuratore - Estimo.

Pesci — *vedi* Ittiologia - Ostricoltura - Piscicoltura.

Pesi e misure — *vedi* Avarie e sinistri marittimi - Metrologia - Misure e pesi inglesi - Monete - Strumenti metrici - Tecnologia monetaria.

Pescatore (Man. del), di L. Manetti, p. XV-241. c. 107 inc. 2 50

Peso dei metalli. Ferri quadrati, rettangolari-cilindrici, a squadra, a U, a Y, a Z, a T e a doppio T, e delle lamiere e tutti i metalli, di G. Belluomini, 2ª ediz. di pag. XXIV-248 . . . . 3 50

Pianista (Manuale del), di L. Mastrigli (esaurito).

Piante e fiori sulle finestre, sulle terrazze e nei cortili. Coltura e descrizione delle principali varietà, di A. Pucci, 3ª ediz. rived., pag. VIII-214 e 117 inc. . . . 2 50

Piante industriali. Delle piante zuccherine in generale, Piante saccarifiche, alcooliche, narcotiche, aromatiche e profumate, tintorie, da concia, tessili, da carta, da cardare, da spazzole e scope, da legare o intrecciare, da soda, medicinali, ecc. di A. Aloi, 3ª ediz. rifatta, di pag. XI-274 con 64 incis. 2 50

Piante tessili (Coltivazione ed industrie delle), propriamente dette e di quelle che danno materia per legacci, lavori di intreccio, sparteria, spazzole, scope. carta, ecc., di M. A. Savorgnan D'Osoppo, di pag. XII-476, con 72 incis. . . . . 5 —

Pietre artificiali — *vedi* Imitazioni.

Pietre preziose, classificazione, valore, arte del giojelliere, di G. Gorini, (esaurito, è in lavoro la 3ª ediz.).

Pirotecnia moderna, di F. Di Maio, 2ª ediz. riveduta ed ampliata, di pag. XV-183, con 21 incis. . . . 2 50

Piscicoltura d'acqua dolce, di E. Bettoni, di pag. VIII-318, con 85 incis. . . . . 3 —

L. C.

Pittura (L'arte di dipingere) **ad olio e a guazzo sulle stoffe,** di G. Ronchetti, di pag. . . . . . 3 —

Pittura ad olio, acquarello e miniatura (Manuale per dilettante di), (paesaggio, figura e fiori), di G. Ronchetti, 3ª ediz. rifatta, di pag. xv-379, con 30 incisioni nel testo, 14 tavole in zincotipia e 11 in cromo. 4 —

Pittura italiana antica e moderna, di A. Melani, 3ª ediz. riveduta e di molto arricchita di notizie e di incisioni, di pag. xvii-527, con 164 tav. e 24 figure . . . 9 50

— *vedi* Anatomia pittorica - Colori e pittura - Decorazione - Disegno - Luce e colori - Ristauratore dipinti - Scenografia.

Plastica — *vedi* Imitazioni.

Pneumonite crupale con speciale riguardo alla sua cura, di A. Serafini, di pag. xvi-222 . . 2 50

Polizia sanitaria degli animali (Manuale di), di A. Minardi, di pag. viii-333, con 7 incis. . . . . 3 —

Pollicoltura, G. Trevisani. 6ª ediz. pag. xvi-230, 90 incis. 2 50

Polveri piriche — *vedi* Esplodenti - Pirotecnia.

Pomologia, descrizione delle migliori varietà di Albicocchi, Ciliegi, Meli, Peri, Peschi, di G. Molon, con 86 incis. e 12 tav. colorate, di pag. xxxii-717 . . . . . 8 50

Pomologia artificiale, secondo il sistema Garnier-Valletti, di M. Del Lupo, di pag. vi-132 e 34 incis. . . 2 —

Poponi — *vedi* Frutta minori.

Porcellane — *vedi* Maioliche - Ricettario domestico.

Porco — *vedi* Maiale - Salsamentario.

Porti di mare — *vedi* Lavori marittimi.

Posologia (Prontuario di) **dei rimedi più usati nella terapia infantile,** di A. Conelli, p. viii-186 2 —

— *vedi* Impiego ipodermico - Materia medica.

Posta. Man. postale, di A. Palombi. Notizie storiche sulle Poste d'Italia, organizzazione, legislazione, posta militare, unione postale universale, con una appendice relativa ad alcuni servizi accessori, di pag. xxx-309 . . 3 —

Prato (Il), di G. Cantoni, di pag. 146, con 13 incis. . . 2 —

Prealpi bergamasche (Guida-itinerario alle), compresa la Valsassina ed i Passi alla Valtellina ed alla Valcamonica, prefaz. di A. Stoppani, e cenni geologici di A. Taramelli, 3ª ediz. per cura della Sezione di Bergamo del C. A. I., di pag. 290, con 15 tavole, due carte topogr., ed una carta e profilo geologico. 2 vol. in busta . 6 50

Pregiudizi — *vedi* Errori e pregiudizi - Leggende popolari.

Prestiti ipotecari — *vedi* Estimo dei terreni.

Previdenza — *vedi* Assicurazioni - Cooperazioni - Società di M. S.

Privative industriali — *vedi* Codice e leggi d'Italia. Volume IV.

Procedura civile - Procedura penale — *vedi* Codici.

Procedura dei piccoli fallimenti — *vedi* Curatore dei fallimenti.

Processi fotomeccanici (I moderni). Fotocollografia, fototipogr. fotocalcografia. fotomodellatura tricromia, di R. Namias, di pag. viii-316. 53 fig. 41 illustr. e 9 tav. 3 50

Prodotti agrari — *vedi* Conservazione dei.

Prodotti agricoli del Tropico (Manuale pratico del piantatore), di A. Gaslini. Il caffè, la canna da zucchero, il pepe, il tabacco, il cacao, il tè, il dattero, il cotone, ecc. di pag. xvi-270 . . . . 2 —

Produzione e commercio del vino in Italia, di S. Mondini, di pag. vii-303 . . . . 2 50

L. C.

Profumiere (Manuale del), di A. Rossi, con 700 ricette pratiche, di pag. IV-476 e 58 incis. . . . . . . 5 —
— *vedi* Ricettario domestico. - Ricett. industriale - Saponi.
Progettista (Il) **moderno.** Costruzioni architettoniche. Decorazioni. Analisi dei prezzi. Capitolati di appalto, di I. Andreani, con molte illustrazioni nel testo e 10 tavole fuori testo (in corso di stampa).
Proiezioni (Le). Materiali, Accessori, Vedute a movimento, Positive sul vetro, Proiezioni speciali, policrome, stereoscopiche, ecc. di L. Sassi, di p. XVI-447, con 141 inc. 5 —
— *vedi* Cinematografo.
Proiezioni ortogonali — *vedi* Disegno.
Prontuario di geografia e statistica, di G Garollo, di p. 62 . . . . 1 —
rontuario per le paghe — *vedi* Paghe - Conti fatti.
Proprietà letteraria, artistica e industriale — *vedi* Leggi.
Proprietario di case e di opifici. Imposta sui fabbricati, di G. Giordani, di pag. XX-264 . . . . 1 50
Prosodia — *vedi* Metrica dei greci e dei romani - Ritmica.
Prospettiva (Manuale di), di L. Claudi, 2ª ediz. riveduta di pag. XI-61 con 28 tavole . . . . 2 —
Protezione degli animali (La), di N. Licò, p. VIII-200 2 —
Protistologia, di L. Maggi, 2ª ediz. p. XVI-278 93, inc. 3 —
Proverbi in 4 lingue — *vedi* Dottrina popolare.
Proverbi e modi proverbiali italiani, raccolti da G. Franceschi, 1908, di pag. XIX-380 . . . 3 —
Proverbi (516) **sul cavallo,** raccolti ed annotati da C. Volpini, di pag. XIX-172 . . . . 2 50
Psichiatria. Confini, cause e fenomeni della pazzia. Concetto, classificazione, forme cliniche, diagnosi delle malattie mentali. Il manicomio, di J. Finzi, p. VIII-225 2 50
— *vedi* Antropologia criminale - Antropometria - Assistenza pazzi - Grafologia - Malattie mentali.
Psicologia, di C. Cantoni pag. VIII-168, 2ª ediz. . . 1 50
Psicologia fisiologica, di G. Mantovani, 2ª ediz. riveduta, di pag. XII-175, con 16 inc. 1 50
Psicologia musicale. Appunti, pensieri e discussioni, di M. Pilo, di pag. X-259 . . . . 2 50
Psicopatologia legale (Principi di) per gli studenti Medicina e Legge, Medici pratici e giuristi, con numerose osservazioni cliniche ed un vocabolario dei principali termini tecnici di L. Mongeri. (In corso di stampa).
Psicoterapia, G. Portigliotti, di p. XII-318, 22 inc. 3 —
Pugilato e lotta per la difesa personale. Box inglese e francese, A. Cougnet, p. XXIV-198, con 104 inc. 2 50
Raccoglitore (Il) **di oggetti minuti e curiosi.** Almanacchi, Anelli, Armi, Bastoni, Biglietti d'ingresso, d'invito, di visita, Chiavi, Cartelloni, Giarrettiere, Orologi, Pettini, ecc., di J. Gelli, p. X-344, 310 inc. . . . 5 50
Rachitide (La) **e le deformità da essa prodotte,** di P. Mancini, di p. XXVIII-300, 116 fig. nel testo 4 —
Radioattività di G. A. Blanc, con prefaz. del Prof. A. Sella, e append. del Dott. G. D'Ormea, p. VIII-266 e 72 inc. 3 —
Radioterapia — *vedi* Elettricità medica - Luce e salute - Raggi Röntgen.

L. C.

Ragioneria, di V. Gitti, 5ª ed., pag. VIII-141, con 2 tav. 1 50
— *vedi* Scrittura doppia all'americana.
Ragioneria delle cooperative di consumo (Manuale di) di G. Rota, di pag. XV-408 . . . . . 3 —
Ragioneria industriale (Aziende industriali), di O. Bergamaschi, 2ª ediz. di pag. XII-392, e tabelle . . 4 —
Ragioniere (Prontuario del). (Manuale di calcolazioni mercantili e bancarie), di E. Gagliardi, di p XII-603 6 50
Razze bovine, equine, suine, ovine e caprine, di F. Faelli, di p. XX-372, con 75 illustr., delle quali 16 colorate . . . . . , . . 5 50
Rebus — *vedi* Enimmistica.
Reclami ferroviari — *vedi* Trasporti e tariffe.
Registro e Bollo — *vedi* Codice del Bollo - Leggi sulle tasse di.
Regolo calcolatore e sue applicazioni nelle operazioni topografiche, di G. Pozzi, p. XV-238, con 182 inc. e 1 tav. 2 50
Religione — *vedi* Bibbia - Buddismo - Diritto ecclesiastico - Imitazione di Cristo.
Religioni e lingue dell'India inglese, di R. Cust, tradotto da A. De Gubernatis, di pag. IV-124 . 1 50
Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni, di P. Gallizia, 2ª ediz. rifatta da G. Sandrinelli, (esaurito, la 3ª ediz. è in corso di stampa).
Resistenza (Momenti di) **e pesi di travi metalliche composte.** Prontuario ad uso degli Ingegneri, Architetti e costruttori, con 10 figure ed una tabella per la chiodatura, di E. Schenck, di pag. XIX-188 . . . 3 50
Responsabilità — *vedi* Codice dell'ingegnere.
Rettili — *vedi* Zoologia.
Rettorica, ad uso delle Scuole, F. Capello, p. VI-122 1 50
Rhum — *vedi* Liquorista.
Ribes — *vedi* Frutta minori.
Ricami — *vedi* Biancheria - Macchine da cucire - Monogrammi - Piccole industrie - Ricettario domestico - Trine.
Ricchezza mobile, di E. Bruni, pag. VIII-218 . . 1 50
Ricettario domestico, di I. Ghersi. Adornamento della casa. Arti del disegno. Giardinaggio. Conservazione di animali, frutti, ortaggi, piante. Animali domestici e nocivi. Bevande. Sostanze alimentari. Combustibili e illuminazione. Detersione e lavatura, smacchiatura. Vestiario. Profumeria e toeletta. Igiene e Medicina. 3ª ed. rifatta da A. Castoldi, pag. XVI-854, con 4280 ricette e 59 inc. (Esaurito, la 4ª edizione è in corso di stampa).
Ricettario fotografico, di L. Sassi, 4ª ediz. riveduta e notevolmente accresciuta di nuove formole, di p. XXIV-329 3 —
Ricettario industriale, di I. Ghersi. Procedimenti utili per le arti e mestieri, caratteri; saggio e conservazione delle sostanze naturali ed artificiali di uso comune; colori, vernici, mastici, colle, inchiostri, gomma elastica, materie tessili, carta, legno, fiammiferi, fuochi d'artificio, vetro; metalli, bronzatura, nichelatura, argentatura, doratura, galvanoplastica, incisione, tempera, leghe; filtrazione; materiali impermeabili, incombustibili, artificiali; cascami, olii, saponi, profumeria, tintoria, smacchiatura, imbianchimento; agricoltura, elettri-

L. C.

città; 4ª ediz. riveduta e corretta dall'ing. P. MOLFINO, pag. VII-704 con 27 inc. e 2887 ricette 6 50

Ricettario per le industrie tessili e affini, di O. GIUDICI. Matematica, chimica, meccanica, telai meccanici, tecnologia, lana, cotone, titolo dei filati, saggi chimici, lavatura delle materie tessili, sbianca, carbonizzazione della lana, oliatura delle lane, cariche delle sete, imbozzimatura dei filati, tintura, apparecchiatura, finissaggio, pulitura delle macchine, inchiostri, adesivi, smacchiatori, vernici, cementi, ecc. di pag. VIII-270 . 3 50

Ricettario pratico di metallurgia. Raccolta di cognizioni utili ed indispensabili, dedicato agli studiosi e agli operai meccanici, aggiustatori, tornitori, fabbri ferrai, ecc., di G. BELLUOMINI, di pag. XII-328 . . . 3 50

Rilievi — *vedi* Cartografia - Telemetria - Topografia.

Rimboschimento — *vedi* Consorzi di difesa del suolo - Selvicolt.

Rimedi — *vedi* Impiego ipodermico - Mat. medica. - Posologia.

Risorgimento italiano (Storia del), **1814-1870,** con l'aggiunta di un sommario degli eventi posteriori, di L. BERTOLINI, 2ª ediz. di pag. XVIII-208 . . . . 1 50

Ristauratore dei dipinti (Il), di G. SECCO-SUARDO, 2 vol.. di pag. XVI-269 e XII-362 con 47 incis. . . . 6 —

Risvolte ad arco circolare — *vedi* Formole.

Ritmica e metrica razionale italiana, di R. MURARI, di pag. XVI-216 . . . . 1 50

Rivoluzione francese (La) (1789-1799), di G. P. SOLERIO, di pag. IV-176 . . . . 1 50

Roma antica — *vedi* Antichità priv. - Antichità pubbl. - Archeologia d'arte etrusca e rom. - Epigrafia - Mitologia - Monete - Rovine (Le) del Palatino - Topografia.

Röntgen (I raggi di) **e le loro pratiche applicazioni,** di I. TONTA, di pag. VIII-160, con 65 incis. e 14 tav. 2 50
— *vedi* Elettricità medica - Fototerapia e radioterapia.

Rose (Le). Storia, coltivazione, varietà, di G. GIRARDI, di pag. XVIII-284, con 96 illustraz. e 8 tavole cromolitogr. . 3 50

Rovine (Le) **del Palatino,** di D. CANCOGNI, con molte illustraz. (In corso di stampa).

Rumeno — *vedi* Grammatica rumena - Letteratura rumena.

Russo — *vedi* Grammatica russa - Lingua russa - Vocabol. russo.

Saggiatore (Man. del), di F. BUTTARI, di pag. VIII-245. 2 50

Saldature autogene dei metalli (La tecnologia delle), di S. RAGNO, di pag. IV-129, con 18 incis. . . . 2 —

Sale (Il) **e le saline.** di A. DE GASPARIS. (Processi industriali, usi del sale, prodotti chimici, industria manifatturiera, industria agraria, il sale nell'economia pubblica e nella legislazione), di pag. VIII-358, con 24 incis. 3 50

Salsamentario (Man. del), di L. MANETTI, p. 224, 76 incis. 2 —
— *vedi* Majale.

Sanatorii — *vedi* Tisici e sanatorii - Tubercolosi.

Sangue — *vedi* Malattie del.

Sanità e sicurezza pubblica — *vedi* Leggi sulla.

Sanscrito (Avviamento allo studio del), di F. G. FUMI, 3ª ediz. rinnovata, di pag. XVI-343 . . . . 4 —

Saponi (L'industria saponiera), con cenni sull'industria della soda e della potassa. Manuale pratico di E. MARAZZA, 2ª ediz., di pag. XII-477, con 132 figure . . . 6 50

L. C.

Sarto tagliatore italiano (Manuale del), di G. Peterlongo, con molte tavole (In corso di stampa).
Sarto da donna — *vedi* Abiti per signora - Biancheria.
Scacchi (Manuale del giuoco degli), di A. Seghieri, 3ª ediz. ampliata da E Miliani, con aggiunta della Teoria del giuoco, lo sviluppo delle aperture e 100 finali e 100 problemi, di pag. x-487 . . . . 4 50
Scaldamento e ventilazione degli ambienti abitati, di R Ferrini, 2ª ediz., di pag. VIII-300, con 98 incis. 3 —
Scenografia (La). Cenni storici dall'evo classico ai nostri giorni, di G. Ferrari, di pag. XXIV-327, con 16 incis. nel testo, 160 tavole e 5 tricromie . . . . 12 —
Scherma italiana, J. Gelli, 2ª ediz., p. VI-251, 108 fig. 2 50
Sciarade — *vedi* Enimmistica.
Scienze occulte — *vedi* Chiromanzia - Fisionomia - Grafologia - Magnetismo - Occultismo - Spiritismo - Telepatia.
Scoltura italiana antica e moderna (Manuale di), di A. Melani, 2ª ediz. rifatta con 24 incis. nel testo e 100 tavole, di pag. XVII- 248 . . . . 5 —
Scrittura doppia all'americana, detta a Giornale-Maestro, di E. Bellini (in corso di stampa).
Scritture d'affari (Precetti ed esempi di), per uso delle Scuole tecniche, popolari e commerciali, di D. Maffioli, 3ª ediz. ampliata e corretta, di pag. VIII-221 . . 1 50
Sconti — *vedi* Interesse e sconto.
Scoperte geografiche — *vedi* Cronologia.
Segretario comunale (Manuale del). *Vedi* Enciclopedia amministrativa, di E. Mariani, di pag. XV-1337 . 12 50
— *vedi* Esattore.
Selvicoltura, di A. Santilli, di pag. VIII-220, e 46 incis. 2 —
— *vedi* Consorzi di difesa del suolo.
Semeiotica. Breve compendio dei metodi fisici di esame degli infermi, di U. Gabbi, di p. XVI-216, con 11 inc. 2 50
Semiografia musicale, (Storia della), di G. Gasperini. Origine e sviluppo dalla scrittura musicale nelle varie epoche e nei vari paesi, di pag. VIII-317 . . . 3 50
Sericoltura — *vedi* Bachi da seta - Filatura - Gelsicoltura - Industria della seta - Tessitore - Tintura della Seta.
Servizi pubblici — *vedi* (Municipalizzazione dei).
Shakespeare, di Dowden, trad. di A. Balzani, p. XII-242 1 50
Seta (Industria della), di L. Gabba, 2ª ediz., di pag. VI-208 2 —
Seta — *vedi* Bachi da seta - Filatura e torcitura della seta - Gelsicoltura - Tessitore - Tessitura - Tintura della seta.
Seta artificiale, di G. B. Baccione, di pag. VIII-221 3 50
Sfere cosmografiche e loro applicazione alla risoluzione di problemi di geografia matematica, di L. A. Andreini, di p. XXIX-326, con 12 inc. 3 —
Sicurezza pubblica — *vedi* Leggi di sanità.
Siderurgia (Man. di), V. Zoppetti, pubblicato e completato per cura di E. Garuffa, di p. IV-368, con 220 incis. 5 50
Sieroterapia, di E. Rebuschini, di pag. VIII-424 . . 3 —
Sigle epigrafiche — *vedi* Dizionario di abbreviature.
Sindaci (Guida teorico pratica pei), Segretari comunali e prov. e delle opere pie, di E. Mariani — *vedi* Enciclopedia amministr.
Sinistri Marittimi — *vedi* Avarie.

	L. C.
Sintassi francese razionale pratica, arricchita della parte storico-etimologica, della metrica, della fraseologia commerciale, ecc., di D. Rodari, di pag. xvi-206	1 50
Sintassi francese — *vedi* Esercizi sintattici.	
Sintassi greca, di V. Quaranta, di pag. xviii-175 .	1 50
Sintassi latina, di T. G. Perassi, di pag. vii-168 . .	1 50
Sismologia, di L. Gatta, di pag. viii-175, con 16 inc.	1 50
Smalti — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte - Fotosmaltografia - Ricettario industriale.	
Soccorsi d'urgenza, di Calliano, 6ª ediz. riveduta ed ampliata, di pag. xl-428, con 131 incis. e 1 tav. . .	3 50
— *vedi* Infortuni della montagna.	
Socialismo, di G. Biraghi, di pag. xv-285 . . .	3 —
Società industriali per azioni, di F. Piccinelli, di pag. xxxvi-531	5 50
— *vedi* Capitalista - Debito pubb. - Prontuario del ragion.	
Società di mutuo soccorso. Norme per l'assicurazione delle pensioni e dei sussidi per malattia e per morte, G. Gardenghi, di pag. vi-152	1 50
Sociologia generale (Elementi di), E. Morselli, di pag. xii-172	1 50
Soda caustica, cloro e clorati alcalini per elettrolisi. Fabbricaz. chimica, P. Villani, p. viii-314	3 50
Sorbettiere — *vedi* Caffettiere.	
Sonno — *vedi* Igiene del.	
Sordomuto (Il) **e la sua istruzione.** Manuale per gli allievi e allieve delle R. Scuole normali, maestri e genitori, di P. Fornari, di p. viii-232, con 11 inc.	2 —
— *vedi anche* Ortofrenia.	
Sostanze alimentari — *vedi* Conservazione delle.	
Specchi (Fabbricazione degli) **e la decorazione del vetro e cristallo,** di R. Namias, p. xii-156, 14 inc.	2 —
— *vedi* Fotosmaltografia - Vetro.	
Speleologia Studio delle caverne, C. Caselli, p. xii-163	1 50
Spettrofotometria (La), applicata alla chimica fisiologica, alla Clinica e alla Medicina legale, di G. Gallerani, di pag. xix-395, con 92 inc. e tre tavole . .	3 50
Spettroscopio (Lo) **e le sue applicazioni,** di R. A. Proctor, traduzione con note ed aggiunte di F. Porro, di pag. vi-179, con 71 inc. e una carta di spettri	1 50
Spiritismo, di A. Pappalardo. Terza edizione aumentata, con 9 tavole, di pag. xvi-226	2 —
— *vedi anche* Magnetismo - Occultismo - Telepatia.	
Spirito di vino — *vedi* Alcool - Cognac - Distillaz. - Liquorista.	
Stagno (Vasellame di) — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità - Leghe metalliche.	
Stampa dei tessuti — *vedi* Industria tintoria.	
Stampaggio a caldo e bolloneria, di G. Scanferla, di pag. viii-160, con 62 incis.	2 —
Stabilità delle costruzioni — *vedi* Resistenza dei materiali - Resistenza e pesi di travi metalliche.	
Stabilimenti balneari — *vedi* Acque minerali.	
Stadere, Statica — *vedi* Metrologia - Strumenti metrici.	
Statistica, di F. Virgilii, 3ª ed. rifatta, di p. xix-225	1 50
Stearineria (L'industria stearica). Manuale pratico di E. Marazza, di pag. xi-284, con 70 incis.	5 —
Stelle — *vedi* Astron. - Cosmogr. - Gravitaz. - Spettroscopio.	

L. C.

Stemmi — *vedi* Araldica - Ex libris - Numismatica - Vocab. araldico.

Stenografia, di G. Giorgetti (secondo il sistema Gabelsberger-Noè), 3ª ediz. rifatta di pag. xv-239 . . . 3 —

Stenografia (Guida per lo studio della), sistema Gabelsberger-Noè, compilata in 35 lezioni da A. Nicoletti, 6ª ediz. riveduta e corretta, di pag. xv-160 . . . 1 50

Stenografia, Esercizi graduali di lettura e di scrittura stenografica (sistema Gabelsberger-Noè), di A. Nicoletti, 3ª ediz. di pag. viii-160 . . . . 1 50

Stenografia. Antologia stenografica, di E. Molina (sistama Gabelsberger-Noë), di pag. xi-199 . . . . 2 —

Stenografia. Dizionario etimologico stenografico (sistema Gabelsberger-Noë), preceduto da un sunto di grammatica teoretica della stenografia Gabelsberger-Noë, di E. Molina di pagine xvi-624 . . . . 7 50

— *vedi anche* Antologia stenografica - Diz. stenografico.

Stenografo pratico (Lo), di L. Cristofoli, p. xii-131 1 50

Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi e alle loro costruzioni in carta, di A. Rivelli, p. 90, 92 inc. e 41 tav. . . . . . 2 —

Stilistica, di F. Capello, di pag. xii-164 . . . . 1 50

Stilistica latina, di A. Bartoli, di pag. xii-210 . . 1 50

Stimatore d'arte — *vedi* Amatore oggetti d'arte - Amatore di maioliche - Armi antiche - Raccoglitore di oggetti.

Stomatojatria — *vedi* Oto-rino-laringojatria.

Storia antica. Vol. I. *L'Oriente antico*, di I. Gentile, di pag. xii-232 . . . . 1 50

Vol. II. *La Grecia*, di G. Toniazzo, di pag. iv-216 . . 1 50

Storia dell'arte (Corso element.) di G. Carotti. Vol. I. *L'Arte nell'evo antico*, di pag. lv-413, con 590 inc. . . 6 50

— Vol. II. *L'Arte del medio evo* — Parte 1ª Arte Cristiana neo-orientale ed europea d'oltr'Alpi, di pag. viii-421, con 360 incisioni 6 50

— Vol. III. *L'Arte del rinascimento* (in lavoro).

— Vol. IV. *L'arte dell'evo moderno* (in lavoro).

Storia dell'Arte militare antica e moderna, del Cap. V. Rossetto, con 17 tavole illustr. di p. viii-504 5 50

— *vedi* Armi antiche.

Storia e cronologia medioevale e moderna, in CC tavole sinottiche, di V. Casagrandi, 3ª ediz., con nuove correzioni ed aggiunte, di pag. viii-254 . . . 1 50

— *vedi* Cronologia universale.

Storia d'Europa, di E. A. Freeman. Edizione italiana per cura di A. Galante, di pag. xii-472 . . . 3 —

Storia della ginnastica — *vedi* Ginnastica.

Storia di Francia, dai tempi più remoti ai giorni nostri, di G. Bragagnolo, di pag. xvi-424 . . . . 3 —

Storia d'Inghilterra, dai tempi più remoti ai giorni nostri, di G. Bragagnolo, di pag. xvi-367 . . . . . 3 —

Storia d'Italia (Breve), di P. Orsi, 3ª ediz. di p. xii-281 1 50

Storia — *vedi* Argentina - Astronomia nell'antico testamento - Commercio - Cristoforo Colombo - Cronologia - Dizionario biografico - Etnografia - Islamismo - Leggende - Manzoni - Mitologia - Omero - Rivoluzione francese - Shakespeare.

Storia greca — *vedi* Antichità greche - Archeologia - Atene - Mitologia - Monete - Storia antica.

L. C.

Tecnologia e terminologia monetaria, di G. SACCHETTI, di pag. XVI-191 . . . . 2 —
Telefono (Il), di G. MOTTA. (Sostituisce il manuale, " Il Telefono „ di D. V. PICCOLI). p. 327, con 149 inc. e 1 tav. 3 50
Telegrafia, elettrica, aerea, sottomarina e senza fili, di R. FERRINI, 3ª ediz. pag. VIII-322, con 104 inc. . . . 2 50
— *vedi* Cavi telegrafici.
Telegrafo senza fili e **Onde Hertziane**, di O. MURANI, di pag. XV-341, con 172 inc. 3 50
Telemetria, misura delle distanze in guerra, di G. BERTELLI, di pag. XIII-145, con 12 zincotipie 2 —
Telepatia (Trasmissione del pensiero), di A. PAPPALARDO, 2ª ediz. di pag. XVI-279 . . . . 2 50
— *vedi anche* Magnetism. e Ipnotismo - Occultismo - Spiritismo.
Tempera e cementazione, di S. FADDA, p. VIII-108 con 20 inc. . . . . 2 —
Teoria dei numeri (Primi elementi della), di U. SCARPIS, di pag. VIII-152 . . . . 1 50
Teoria delle ombre, di E. BONCI, 2ª ediz. interamente rifatta, di pag. XIV-104, con 74 figure intercalate e 6 tavole fuori testo . . . . 2 —
Teosofia, di GIORDANO G., di pag. VIII-248 . . . . 2 50
Termodinamica, di G. CATTANEO, di pag. X-196, 4 fig. 1 50
Terremoti — *vedi* Sismologia - Vulcanismo.
Terreno agrario. Manuale di chimica del terreno, di A. FUNARO, di pag. VIII-200 . . . . 2 —
Tessitore (Manuale del), di P. PINCHETTI, 3ª edizione riveduta, di pag. XIV-298, con illustrazioni 3 50
Tessitura — *vedi* Ricettario per le industrie tessili.
Tessitura meccanica della seta, di P. PONCI, di p. XII-343, con 179 inc. 4 50
Tessuti di lana e di cotone (Analisi e fabbricaz. dei). Manuale pratico razionale, di O. GIUDICI, di pagine XII-864 con 1098 incisioni colorate 16 50
Testamenti (Manuale dei), per cura di G. SERINA, 2ª edizione riveduta ed aumentata di pag. XV-312 . . . 3 —
Tigrè-italiano (Manuale), con due dizionarietti italiani-tigrè e tigrè-italiano ed una cartina dimostrativa degli idiomi parlati in Eritrea, di M. CAMPERIO, di p. 180 2 50
Tintore (Manuale del), di R. LEPETIT, 4ª ediz. di pag. XVI-466, con 20 incisioni . . . . 5 —
Tintoria — *vedi* Industria tintoria.
Tintura della seta, studio chimico tecnico, di T. PASCAL, di pagine XV-432 . . . . 5 —
Tipografia (Vol. I). Guida per chi stampa e fa stampare. Compositori, Correttori, Revisori, Autori ed Editori, di S. LANDI, di pagine 280 . . . . 2 50
Tipografia (Vol II). Lezioni di composizione ad uso degli allievi e di quanti fanno stampare, di S. LANDI, di pag. VIII-271, corredato di figure e di modelli 2 50
Tisici e sanatori (La cura razionale dei), di A. ZUBIANI, prefaz. di B. SILVA, di pag. XLI-240, 4 incis. . . 2 —
— *vedi* Tubercolosi.
Titoli di rendita — *vedi* Debito pubblico - Valori pubblici.
Topografia (Manuale di) per pratica e per studio, di G. DEL FABRO, di pag XXXI-462, con 86 incis. e 1 tavola 5 50
Topografia e rilievi — *vedi* Cartografia - Catasto - Celerimen-

L. C.

sura - Codice del perito - Compensazioni errori - Curve - Disegno topografico - Estimo terreni - Estimo rurale - Fotogrammetria - Geometria pratica - Prospettiva - Regolo calcolatore - Telemetria - Triangolazioni.

Topografia di Roma antica, di L. BORSARI, di pag. VIII-436, con 7 tav. 4 50

Tornitore meccanico (Guida pratica del), ovvero sistema unico per la fabbricazione di viti, ingranaggi e ruote elicoidali, di S. DINARO, 4ª ediz., di pag. XV-157, con 16 incis . . . . 2 —

Tossicologia — *vedi* Analisi chimica - Chimica legale - Veleni.

Traduttore tedesco (Il), compendio delle principali difficoltà grammaticali della Lingua Tedesca, di R. MINUTTI, di pag. XVI-224. . . . . 1 50

Trasporti, tariffe, reclami ferroviari ed operazioni doganali. Manuale pratico ad uso dei commercianti e privati, colle norme per l'interpretazione delle tariffe vigenti, di A. G. BIANCHI, 2ª ediz. rifatta, di pag. XVI-208 . . . . 2 —

Travi metallici composti — *vedi* Peso dei metalli - Resistenza.

Trazione a vapore sulle ferrovie ordinarie, di G. OTTONE, di pag. LXVIIII-469. . . . . 4 50

Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali, di O. JACOANGELI, Modo di fondarle sulla rete geodetica, di rilevarle e calcolarle, di pag. XIV-340, con 33 incis., 4 quadri, 32 modelli pei calcoli . . 7 50

Trigonometria piana (Esercizi ed applicazione di) con 400 esercizi e problemi proposti da C. ALASIA, di pag. XVI- 292, con 30 incis. 1 50

Trigonometria — *vedi* Celerimensura - Geom. metr. - Logaritmi.

Trigonometria della sfera — *vedi* Geom. e trigonom. della.

Trine (Le) **a fuselli in Italia.** Loro origine, discussione, confronti, cenni bibliografici, analisi, divisione, istruzioni tecnico-pratiche con 200 illustr. nel testo di GIACINTA ROMANELLI-MARONE, di pag. VIII-331 . . . 4 50

Tubercolosi (La), di M. VALTORTA e G. FANOLI, con pref. del prof. AUGUSTO MURRI, di pag. XIX-291, con 11 tav. . 3 —

— *vedi* Tisici.

Turbine idrauliche moderne (Teoria e costruzione delle) e delle pompe centrifughe ad alto rendimento e cenni sull'idrodinamica, di C. MALALASI (in lav.).

Uccelli — *vedi* Ornitologia.

Uccelli canori (I nostri migliori). Loro caratteri e costumi Modo di abituarli e conservarli in schiavitù. Cura delle loro infermità, di L. UNTERSTEINER, di p. XII-175 . 2 —

Ufficiale (Manuale dell') del Regio Esercito Italiano, di U. MORINI. di pag. XX-388. . . . . 3 50

Ufficiale sanitario — *vedi* Igienista.

Ungherese — *vedi* Grammatica magiara - Letteratura ungherese.

Unità assolute. Definizione, Dimensioni, Rappresentazione, Problemi, di G. BERTOLINI, di pag. X-124 . . . 2 50

Urina (L') **nella diagnosi delle malattie.** Trattato di chimica e microscopia clinica dell'urina, di F. JORIO, di pag. XVI-216 . . . . 2 —

Usciere — *vedi* Conciliatore.

Usi mercantili (Gli). Raccolta di tutti gli usi di piazza

L. C.

riconosciuti dalle Camere di Commercio ed Arti in Italia, di G. Trespioli, di pag. xxxiv-689. . . . . . 6 —
— *vedi* Commerciante.
Uva — *vedi* Malattie dei vini.
Uva spina — *vedi* Frutta minori.
Uve da tavola. Varietà, coltivaz. e commercio, di D. Tamaro, 3ª ediz., pag. xvi-278, tav. col., 7 fototipie, 57 inc. 4 —
Vademecum per l'Ingegnere — *vedi* Ingegnere.
Valli lombarde — *vedi* Diz. Alpino - Prealpi bergamasche.
Valori pubblici - *vedi* Capitalista - Debito pubb. - Società per azioni.
Valutazione - *vedi* Prontuario del ragioniere.
Vasellame antico — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e curiosità.
Veleni ed avvelenamenti, di C. Ferraris, di pagine xvi-208, con 20 incis. 2 50
Velocipedi — *vedi* Ciclista.
Ventagli artistici — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e curiosità - Raccoglitore di oggetti minuti.
Ventilazione — *vedi* Scaldamento.
Verbi greci anomali (I). di P. Spagnotti, secondo le Grammatiche di Curtius e Inama, di pag. xxiv-107 . 1 50
Verbi latini di forma particolare nel perfetto e nel supino, di A. Pavanello, con indice alfabetico di dette forme, di pag. vi-215 . . . . 1 50
Vermouth — *vedi* Liquorista.
Vernici (Fabbricazione delle), **e prodotti affini, lacche, mastici, inchiostri da stampa, ceralacche,** di U. Fornari, 2ª ediz. ampliata di p. xii-244 2 —
Veterinario (Manuale per il), di C. Roux e V. Lari, di pag. xx-356, con 16 incis.. 3
— *vedi* Araldica zootecnica - Cavallo - Igiene veterinaria - Malattie infettive — Majale - Oftalmoiatria veterinaria - Polizia sanitaria - Razze bovine.
Vetri artistici - *vedi* Amat. ogg. d'arte - Specchi - Fotosmaltogr.
Vetro (Il). Fabbricazione, lavorazione meccanica, applicazione alle costruzioni, alle arti ed alle industrie, di G. D'Angelo, di pag. xix-527, con 325 figure . . . 9 50
— *vedi* Fotosmaltografia - Specchi
Vini bianchi da pasto e vini mezzo colore (Guida pratica per la fabbricazione, l'affinamento e la conservazione del), di G. A. Prato, pag. xii-276, 40 inc. 2 —
Vini (I miliori d'Italia) — Barbera, Barolo, Barbaresco, Nebbiolo, Freisa, Dolcetto, Grignolino, Gattinara, Brachetto, Caluso, Chianti, Montepulciano, ecc., di A. Strucchi, di pag. xx-258, con 42 tavole e 7 carte colorate . 3 50
Vino (Il) di G. Grassi-Soncini, di pag. xvi-152 . . . 2 —
Vino aromatizzato — *vedi* Adulteraz. - Cognac - Liquorista.
Violino (Storia del), **dei violinisti e della musica per violino,** di A. Untersteiner, con una appendice di A. Bonaventura, di pag. viii-228 . . . 2 50
Violoncello (Il), **il violoncellista ed i violoncellisti,** di S. Forino, di pag. xvii-444 . . . . . 4 50
Viticoltura. Precetti ad uso dei Viticultori italiani, di O. Ottavi, 6ª ed. riveduta ed ampliata da A. Strucchi, di pag. xvi-232, con 30 inc. . . . . 2 —
— *vedi* Ampelografia - Enologia.
Vocabolarietto pei numismatici (in 7 lingue), di S. Ambrosoli. di pag. viii-134 . . . . 1 50

L. C.

Vocabolario araldico ad uso degli italiani, di G. Guelfi, di pag. VIII-294, con 356 incis. 3 50

Vocabolario Hoepli della lingua italiana — *vedi* Dizionario.

Vocabolario compendioso della lingua russa, di V. Voinovich, di pag. XVI-238 . . . . . 3 —

Vocabolario tecnico illustrato nelle sei lingue: Italiana, Francese, Tedesca, Inglese, Spagnuola, Russa, sistema Deinardt-Schlomann, diviso in volumi per ogni singolo ramo della tecnica industriale, compilato da Ingegneri speciali dei vari paesi con la collaborazione di numerosi stabilimenti industriali.

VOLUME I. Elementi di macchine e gli utensili più usuali per la lavorazione del legno e del metallo, in-16, di p. VIII-403, con 823 inc. e una *Prefazione* dell'ing. Prof. G. Colombo . 6 50

VOLUME II. Elettrotecnica, con circa 4000 incisioni e numerose formule, di pag. XII-2100, a 2 e a 4 colonne . . 30 —

VOLUME III. Caldaie a vapore, Macchine a vapore, Turbine a vapore, di p. XI-1322, con 3500 incis. e numerose formole. 18 —

I volumi IV e seguenti sono in preparazione e comprendono le seguenti materie:

IV. Macchine idrauliche (turbine, ruote ad acqua, pompe a stantuffo e centrifughe. — V. Elevatori e trasportatori. VI. Utensili e macchine utensili. — VII. Ferrovie e costruzione di macchine ferroviarie. — VIII. Costruzioni in ferro e ponti. — IX. Metallurgia. — X. Forme architettoniche. — XI. Costruzioni navali. — XII. Industrie tessili.

Volapük (Dizion. Italiano-volapük), nozioni compendiose di grammat. della lingua, di C. Mattei, secondo i principî dell'inventore M. Schleyer, di pag. XXX-198 2 50

Volapük (Dizion. volapük-ital.), di C. Mattei, p. XX-204 2 50

Volapük, Manuale di conversazione e raccolta di vocaboli e dialoghi italiani-volapük, per cura di M. Rosa, Tommasi e A. Zambelli, di pag. 152 . . . . . . 2 50

Volatili — *vedi* Animali da cortile - Colombi - Pollicoltura.

Vulcanismo, di L. Gatta, di pag. VIII-268 e 28 inc. . 1 50

Zecche — *vedi* Terminologia monetaria.

Zolfo (Le min. di), G. Cagni, pag. XII-275, 34 inc., 10 tab. 3 —

Zoologia, di E. H. Giglioli e Cavanna G.

I. Invertebrati, di pag. 200, con 45 figure . . . 1 50

II. Vertebrati, Parte I, Generalità, Ittiopsidi (Pesci ed Anfibi), di pag. XVI-156, con 33 inc. 1 50

III. Vertebrati. Parte II, Sauropsidi, Teriopsidi (Rettili, Uccelli e Mammiferi, di pag. XVI-200, con 22 inc. . . 1 50

Zoonosi, di B. Galli Valerio, di pag. XV-227 . . . 1 50

Zootecnia, di G. Tampelini, 2ª ediz. interamente rifatta, di pag. XVI-444, con 179 inc. e 12 tavole 5 50

— *vedi* Araldica Zootecnica - Bestiame - Razze bovine.

Zucchero e alcool nei loro rapporti agricoli, fisiolog. e sociali, di S. Laureti, di pag. XVI-426 . . . 4 50

Zucchero (Industria dello):

I. *Coltivazione della barbabietola da zucchero,* di B. R. Debarbieri, di pag. XVI-220, con 12 inc. 2 50

II. *Commercio, importanza economica e legislazione doganale,* di L. Fontana-Russo, di pag. XII-244 . . . . 2 50

III. *Fabbricazione dello zucchero di barbabietola,* di A. Taccani, di pag. XII-228, con 71 inc. 3 50

— *vedi* Barbabietola.

INDICE ALFABETICO PER AUTORI