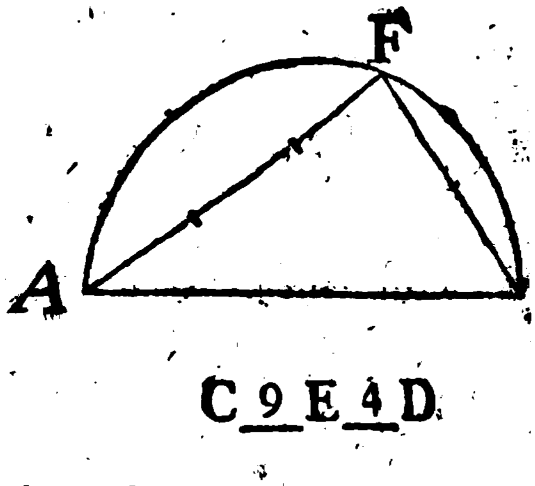
Es sey AB eine Rationallinie, und (10, 29. Lehns. 2.) CE, ED, zwey Quadratzahlen, deren Summe CD keine Quadratzahl ist. Ueber AB beschreibe den Halbkreis AFB, mache (10, 6. Zus.) DC : CE = □ AB : □ AF, und ziehe FB: so sind AB, AF, die gesuchten Rationallinien, und ist die der AB in Länge incommensurabele Linie, um d Quadrat die AB, über AF potenzirt.

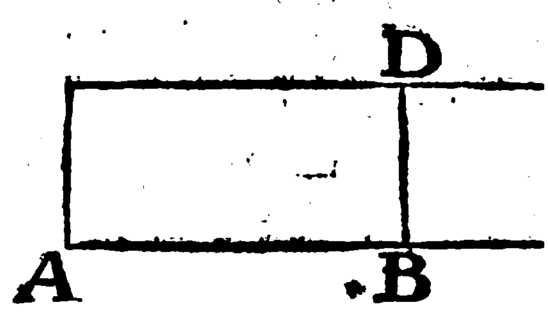


Denn man beweiset, wie im vorigen Satze, daß AB, rational bloß in Potenz commensurabel sind. Da nun [illegible] = □ AB : □ AF, also (5, 19. S. und 1, 47. S.) rückkehrend CD : DE = □ AB : □ BF; aber CD, keine Quadratzahlen sind: so ist (10, 9. S.) AB ∪ BF. nach ist, weil □ BF = □ AB — □ AF, das Gesucht funden.

Lehnsatz

Von zwey geraden Linien, AB, BC, verhält sic größere zur kleinern, wie das Rectangel unter b zum Quadrate der kleinern.

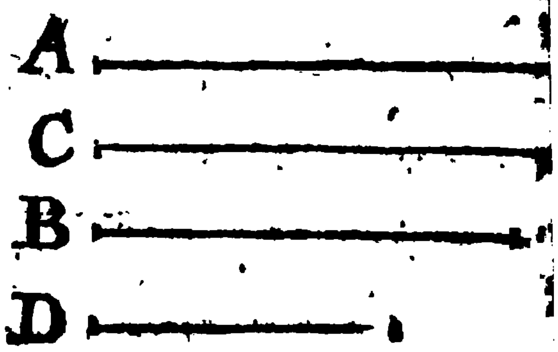
Denn macht man von BC das Quadrat BE, und vollendet das Parallelogramm AD: so ist (6, 1. S.) AB : BC = AD : BE. Nun ist AD = AB × BD = AB × BC; weil BD = BC. Folglich ist AB : BC = AB × BC : □ BC



Der 32. Satz. Aufgabe.

Zwey mediale bloß in Potenz commensurabele zu finden, die ein Rationales enthalten, und von die größere um das Quadrat einer ihr in Länge con surabelen Linie über die kleinere potenzirt.

Es seyen (10, 30. S.) A, B, zwey rationale bloß in Potenz commensurabele Linien, von denen die größere, A, um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie, über die kleinere B potenzirt. Mä



12. S.) A : C = C : B, und C : B = B : D, daß
B = □C, und C × D = □B: so sind C, D,
ten Linien.

Denn da (10, 22. S.) A × B medial ist, so ist
also C medial. Da C × D = □B, und □B r
ist auch C × D rational.

Da ferner (10, 31. Lehns.) A : B = A × B : □
A × B = □C, und □B = C × D: so ist A :
: C × D; aber auch (10, 31. Lehns.) C : D = □
D, folglich A : B = C : D, daß also C, D, so
bloß in Potenz commensurabel sind, folglich, weil
auch (10, 24. S.) D medial ist. Demnach sind C, D

Aus A : B = C : D, folgt auch (10, 15. S.),
das Quadrat einer ihr in Länge commensurabeln Lini
D potenzirt, weil dasselbe zwischen A, B, Statt find

Anmerkung.

Auf ähnliche Art findet man auch diese Linien,
größere um das Quadrat einer ihr in Länge incomm
len Linie über die kleinere potenziren soll; indem ma
so nimmt, daß die A um das Quadrat einer ihr in
commensurabelen Linie über die B potenzirt.

Lehnsatz.

Von drey geraden Linien, AB, BC, CD, ver
die erste zur dritten, wie das Rectangel unter d

Euclides

Euklid's Elemente

funfzehn Bücher,

aus dem Griechischen übersetzt

von

Johann Friedrich Lorenz.

Auf's neue herausgegeben

von

Dr. K. Mollweide.

Dritte verbesserte Ausgabe.

Halle, 1809.
Im Verlage der Waisenhaus-Buchhandlung.

Euklid's
Elemente
funfzehn Bücher.

Euclides

Euklid's Elemente

funfzehn Bücher,

aus dem Griechischen übersetzt

von

Johann Friedrich Lorenz.

Auf's neue herausgegeben

von

Dr. K. Mollweide.

Dritte verbesserte Ausgabe.

Halle, 1809.
Im Verlage der Waisenhaus-Buchhandlung.

Euklid's

Elemente

funfzehn Bücher.

Euklid's

Elemente

funfzehn Bücher.

Zur Deutung der Titelvignette.

Aristippus philosophus Socraticus, naufraugio cum eiectus ad Rhodiensium littus animadvertisset geometrica schemata descripta, exclamavisse ad comites ita dicitur: Bene speremus, *hominum* enim *vestigia* video.

Vitruv. de Archit. Lib. VI. Praef.

Einleitung

aus der ersten Ausgabe vom Jahr 1781.

Euklides, von dessen Vaterlande und übrigen Lebensumständen wir wenig oder nichts wissen, eröffnete zu Alexandrien, unter der Regierung des Königes Ptolemäus Soter, 300 Jahre vor der gemeinen Zeitrechnung, eine Schule der Mathematik, in welcher fast alle große Mathematiker des Alterthumes gezogen worden sind. Von seinen Schriften sind die Elemente allein ganz unverstümmelt auf die Nachwelt gekommen; gerade dasjenige Werk, welches seinem Verfasser die Unsterblichkeit erwerben mußte, und welches von den größten Geistern alter und neuer Zeiten als ein unverbesserliches Meisterstück erkannt und bewundert ward. Sie enthalten die ersten Lehren der gesammten Mathematik in einer solchen Vollkommenheit der Deutlichkeit und Verbindung, daß seit ihrer Erscheinung, das ist, seit 2000 Jahren, in Rücksicht auf Methode und System, nichts Vollkommneres geliefert worden ist. Das Studium des Euklides wird nicht nur von Männern empfohlen, welche selbst die größesten und ausgebreitetesten

Kenntnisse in der Mathematik besitzen; sondern auch in den Schulen der Philosophen wird, so oft von Methode die Rede ist, der Name desjenigen genannt, welcher ihre Vorschriften von der besten Lehrart alle beobachtet und ausgeübt hat, oder vielmehr, aus dessen Mustern diese Vorschriften alle hergenommen sind. Daß ein mathematisches Lehrbuch, welches nur diejenigen Kenntnisse umfasset, die man im Zeitalter Alexanders des Grossen hatte, die aber nachmals, und besonders in den beyden neuesten Jahrhunderten, zum Erstaunen vermehrt und erweitert worden sind, auch jetzt, da wir uns der vortrefflichsten Lehrbücher einer weit ausgebreitetern Mathematik rühmen können, immer noch seinen Werth behält, und von Kennern immer noch geschätzt und gelesen wird: dies ist wohl unstreitig ein Umstand, der für dasselbe ein sehr günstiges Vorurtheil erwecken, und manchen begierig machen muß, ein Buch von so seltner Art näher kennen zu lernen. Auch findet jeder Freund und Liebhaber der Mathematik darinnen Vieles, was ihm in seiner Wissenschaft besondre Dienste leistet; und überhaupt jeder denkende Kopf schöpfet daraus Nahrung für den Geist, und lernet besser, als aus allen Anweisungen zur Methode, dasjenige kennen, was mit Recht Methode genannt zu werden verdient. In allen Büchern der Elemente zeigt sich der Geist und Scharfsinn des Euklides, in keinem derselben aber mehr, als in dem zehnten; welches Buch dem, was wir irgend Scharfsinniges in der neuern Mathematik haben, wo nicht völlig gleichkommt, doch gewiß nicht gar weit nachstehen möchte. Schon bey seinen Lebzeiten, da seine Anfangsgründe freylich das erste vollständige Lehrbuch der Mathematik waren, verursachten sie so vieles Aufsehen, daß selbst Ptolemäus dadurch begierig gemacht ward, dem Namen eines großen Kriegers und mächtigen Königes auch den Ruhm eines Mathematikers beyzufügen, und noch in seinem Alter ein Schüler des Euklides zu werden. Nur schien es ihm, als ob der Gang des Gelehrten kein Gang für den König sey; allein er erhielt auf diese Aeußerung zur Antwort: daß die Mathematik keinen absonderlichen Zugang für Könige habe. So sehr war Euklides überzeugt, daß, so wie es für Jedermann nur Eine Wahrheit und nur Eine Tugend giebt, auch nur Eine Methode vorhanden sey, Wissenschaften zu lehren und zu lernen. Vielleicht wäre es für die Ehre und die Ausbreitung der Gelehrsamkeit zu wünschen, daß man zu allen Zeiten so gedacht hätte, und nie auf den Einfall gerathen wäre, zu versuchen, ob man nicht etwas Bequemeres für Herren und Damen ausfindig machen könne. Wem es ein Ernst ist, seinen Verstand recht zu bilden — und niemand anders sollte sich dem Heiligthum der Wissenschaften nahen — dem müßte ungemein viel daran liegen, die Begriffe und Sätze, die er ein für allemal ganz durchschauen muß, von denen er in der Folge so häufigen Gebrauch und Anwendung zu machen hat, die den Grund abgeben, auf den das ganze Gebäude seiner weitern Kenntnisse sich stützet, so zu lernen, wie sie gelernt werden müssen; und ihn wird es um so weniger verdrießen, alle Anstrengung des Verstandes dabey anzuwenden, je mehr diese Anstrengung selbst zur Bildung seines Geistes beyträgt, und demselben die zu allen weitern Fortschritten so nöthige und unentbehrliche Kraft und Richtung giebt. Auch scheinen dieses alle Mathematiker des Alterthums, welche nach dem Euklides lebten, erkannt zu haben; indem sie der Bahn, die Er ihnen vorgezeichnet hatte, schlechterdings folgten, und bey ihren weitern Untersuchungen das, was er vorgetragen und erwiesen hatte, auch als vorgetragen und erwiesen voraussetzten. So lebte Euklides noch lange nach seinem Tode in der Schule zu Alexandrien, welche, wie schon oben gesagt ist, eine Schule der Mathematik für die Welt war. Er lebt auch noch jetzt, wiewohl er, wenigstens in Deutschland, wo doch die mathematischen Wissenschaften vorzüglich blühen, nicht so allgemein genutzt wird, als er es verdient, und als es selbst für das Studium der neuern Mathematik zuträglich seyn würde. Doch vielleicht ist nicht so sehr Mangel an Geschmack und Lust, als vielmehr mancher äußerliche Umstand, Schuld daran, daß die Elemente des Euklides sich nicht in Vieler Händen befinden. Der griechische Text ist nicht für Jedermann, und auch nicht leicht zu

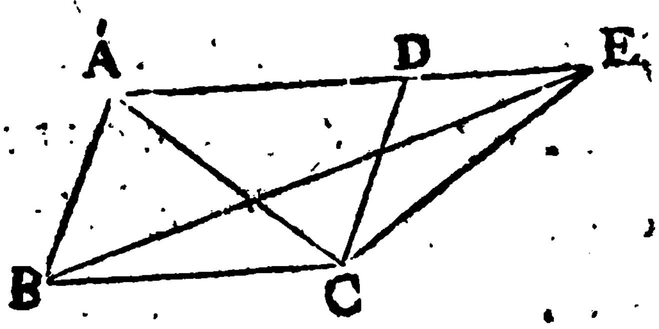
haben.

haben. Lateinische Ausgaben sind zwar vorhanden, und können von vielen benutzt werden, aber außerdem, daß noch mancher Freund der Mathematik übrig bleibt, der den Euklides in dieser Sprache nicht lesen kann: so behält der Vortrag der Wissenschaften in einer geläufigen neuern Sprache, in mancher Rücksicht, doch immer einen gewissen Vorzug. Die deutschen Dolmetschungen, die wir bis jetzt von allen Elementen oder, von einem Theile derselben, haben, sind fast gänzlich in Vergessenheit gerathen. Dies alles wird mich vermuthlich rechtfertigen, wenn ich meinem deutschen Vaterlande, zum gefälligen Gebrauche, eine neue Uebersetzung der Elemente darbiete, von der ich vor einigen Jahren schon einen Versuch bekannt gemacht habe. Weil ich dabey auf Materie und Form zugleich zu sehen hatte: so war mein eifriges Bemühen dahin gerichtet, nicht nur die Sachen, sondern, was das vorzüglichste ist, auch den Geist des Euklides aufs möglichste darzustellen. Ich bin daher bey meiner Uebersetzung der vortrefflichen Oxforder Ausgabe des griechischen Textes vom Jahre 1703 treulich gefolgt; nur daß ich, der Kürze wegen, mich der Citationen und allgemeinen Zeichen bedient habe, einer Gewohnheit, die in den neuern Schriften nun einmal eingeführt ist, und wodurch, wenn nur das gehörige Maaß nicht überschritten wird, die Verständlichkeit des Vortrags ungemein viel gewinnt. Damit ich jedoch durch diese Abkürzung einer rich-

richtigen Vorstellung vom Originale nicht hinderlich seyn möge, so will ich hier durch eine pünktliche Uebersetzung eines beliebigen Satzes eine Probe geben, was für einen Gang der griechische Text überall nimmt. Ich wähle dazu, der Kürze wegen, den 41. Satz des 1. Buchs.

Der 41. Satz.

Wenn ein Parallelogramm und ein Triangel auf einerley Grundlinie und in einerley Parallellinien sind: so ist das Parallelogramm doppelt so groß, als der Triangel.



Es sey das Parallelogramm ABCD und der Triangel EBC auf einerley Grundlinie BC und in einerley Parallellinien BC, AE: so behaupte ich, daß das Parallelogramm ABCD doppelt so groß sey, als der Triangel EBC.

Es werde AC gezogen.

Der Triangel ABC ist dem Triangel EBC gleich; denn beyde sind auf einerley Grundlinie BC und in einerley Parallellinien BC, AE. Nun ist das Parallelogramm ABCD doppelt so groß, als der Triangel ABC; indem dasselbe durch die Diagonale AC halbirt wird. Folglich ist das Parallelogramm ABCD doppelt so groß, als der Triangel EBC.

Wenn demnach ein Parallelogramm und ein Triangel auf einerley Grundlinie und in einerley Parallellinien sind: so ist das Parallelogramm doppelt so groß, als der Triangel. Welches zu beweisen war.

Wird

Wird dieser Satz, so wie er hier erscheint, mit dem nämlichen, wie er sich in den übersetzten Elementen zeigt, verglichen: so kann man sicher von diesem auf alle andre schließen, und daraus sehen, in wie weit ich vom Originale abgegangen bin, und was ich der Abkürzung des Vortrags aufgeopfert habe. Indeß wollte ich doch dieser beliebten Kürze nicht gern einen solchen Vorzug beylegen, aus dem der Weitläuftigkeit des Originals ein Vorwurf erwachsen könnte. Denn Euklid that es gewiß nicht ohne Ursache, wenn er jeden vorangeschickten Satz bey Construction der Figur, und abermal nach geendigter Demonstration wiederholte; auch that er es nicht ohne Ursache, wenn er beym Beweise der nachfolgenden Sätze nicht bloß die Nummern der vorhergehenden anzeigte, auf die ein solcher Beweis sich gründet, sondern die unter den Nummern befindlichen Sätze selbst immer wieder wörtlich vortrug. Denn außer den beträchtlichen Schwierigkeiten, welche damals die äußere Form der meisten Bücher dem Nachschlagen citirter Stellen in den Weg legte, war seine Absicht bey den erwähnten Wiederholungen unstreitig dahin gerichtet, die Lehren, die er dem Verstande seiner Schüler vorgelegt, zugleich ihrem Gedächtnisse einzuprägen, und sie ihnen recht geläufig zu machen; vorzüglich aber, welches nicht so sehr aus der Acht gelassen werden sollte, sie zu gewöhnen, daß sie die Sätze nicht an die Buchstaben der Figur allein binden, sondern sie, rein von aller indivi-

 duellen

duellen Vorstellung, in ihrer ganzen Allgemeinheit denken möchten. Ich habe mit dieser Absicht des grossen Mannes, wie es auch in den besten Schriften der Neuern geschiehet, dadurch die Kürze vereinigt, und die Wiederholung vermieden, daß ich durch Citationen auf die vorhergehenden Lehren verwiesen, und jedem Satze die Buchstaben der Figur unmittelbar beygefügt, doch so, daß der Satz auch ohne diese Buchstaben gelesen und verstanden werden kann. Ein andrer Umstand, worauf Euklid Rücksicht genommen hat, und den ich keinesweges vernachlässigen durfte, ist der, daß er, so wie überhaupt die Alten, die zu den Figuren gesetzten Buchstaben des Alphabets in ihrer gewöhnlichen Ordnung braucht, und dadurch einem etwas Geübten Anleitung giebt, die Auflösung der Aufgabe, oder den Beweis des Lehrsatzes, öfters, ohne den Text gelesen zu haben, bloß aus der Zeichnung zu errathen. Dies war der Grund, warum ich die griechischen Buchstaben nicht mit gleichlautenden deutschen verwechselte, wie ich sonst zur leichtern Vergleichung mit dem griechischen Texte gern gethan hätte; indem hierdurch obgedachte Bequemlichkeit fast gänzlich verloren gegangen wäre.

Eine große Schwierigkeit machten mir noch die Punkte in den sogenannten arithmetischen Büchern. Denn da mir alles daran lag, meinen Lesern eine völlig richtige Idee von der Lehrart des Euklid zu geben: so konnte es mir nicht gleichgültig seyn, als ich aus

man=

mancherley Gründen auf die Vermuthung gerieth, daß in diesen Büchern, also gerade in denen, worin der Gang, den Euklid genommen hat, uns nicht wenig interessirt, die Ausgaben, auch selbst die Oxforder, Aenderungen vorgenommen haben möchten, die eine irrige Vorstellung von der Methode der Alten in der Arithmetik erregen könnten. Alle meine Bemühungen, die ich anwendete, in dieser Sache mehreres Licht zu erhalten, und meine Conjecturen historisch bestätigt zu sehen, waren vergebens. Dennoch konnte ich mich unmöglich überwinden, die Punkte, wodurch man die Zahlen hat abbilden wollen, beyzubehalten; da ihre Ueberzählung nur Mühe macht, und ich aus dem Zeugnisse der Oxforder Edition gewiß wußte, daß sie in den Handschriften nicht befindlich gewesen *). Nach verschiedenen Versuchen, dem Originale hierinnen so nahe zu kommen, als es mir beym Mangel nöthiger Hülfsmittel möglich war, schien mir die Methode, die Punkte mit den gemeinen Ziffern zu verwechseln, die schicklichste zu seyn. Denkt man sich dabey statt dieser Ziffern die griechischen Buchstaben, so wie sich ihrer die Alten zur Bezeichnung der Zahlen bedienten: so kann man sich eine Idee vom Originale machen, welche demselben wenigstens gemäßer ist, als wenn man, durch die Ausgaben verführt, sich vor-

* Etwas Näheres hierüber kann ich gegenwärtig in einem Nachtrage zu dieser Einleitung mittheilen.

vorstellt, Euklid habe, wenn er z. B. die Zahl 32 anzeigen wollte, eben so viele Punkte hingemahlet. Ich fand um desto weniger Bedenken, mir diese Freyheit zu nehmen, da nichts in der Hauptsache dadurch geändert ward, und meine Leser bey Weglassung der Punkte nichts weiter verloren, als die Mühe, sie jedesmal nachzuzählen. Wenn ich nun noch hinzufüge, daß durch die unter die Ziffern gesetzten Striche eine unbestimmte Zahl von Einheiten, durch die Ziffern aber ein individuelles Beyspiel, welches unter die allgemeine Regel gehört, angezeigt werde: so wird meine Abänderung um desto eher sich Beyfall versprechen können.

Nach diesen Kleinigkeiten, die ich doch nicht gänzlich unberührt lassen durfte, weiß ich diese Einleitung nicht besser zu schließen, als wenn ich zum Besten derer, die den Euklid noch nicht kennen, den Inhalt und die Verbindung der Bücher, aus denen die Elemente bestehen, noch vorläufig anzeige, um dadurch die Uebersicht des Ganzen und die Vorstellung der einzelnen Theile zu erleichtern. Doch kann ich keine förmliche Tabelle darüber versprechen, als worein mathematische Lehren sich nicht bequemen, welche, ungeachtet sie der Schulmethode gar nicht abgeneigt sind, solche dennoch, so bald sie mit der natürlichen collidirt, auch sogleich hintansetzen.

Die gesammte Geometrie, oder, wie sie ganz vortrefflich, selbst dem Sinne und Vorschlage des Plato

gemäß,

gemäß, in unsrer Sprache genannt wird, die Meß-kunde, theilt sich in die Flächen- und Körper-Lehre. Letztere kann ohne die Lehre von der Commensurabilität und Incommensurabilität der Größen nicht verstanden werden; diese aber setzt die Lehre von den Zahlen voraus. Demnach bestehen die Elemente des Euklides aus vier Theilen. Der erste begreift die Lehre von den Flächen, in den sechs ersten Büchern; der zweyte, die Lehre von den Zahlen, im 7. 8. 9. Buche; der dritte, die Lehre von commensurabeln und incommensurabeln Größen, im 10. Buche; der vierte endlich die Lehre von den Körpern, im 11. 12. 13. Buche.

Der erste Theil handelt von den Flächen, in Absicht sowohl der Gleichheit, als Aehnlichkeit der Figuren. Jene ist in den 4 ersten Büchern; diese im 5. und 6. Buche enthalten.

Das erste Buch, von Triangeln und Parallelogrammen:

1. von Triangeln. Satz 1 — 26.
2. von Parallellinien und Parallelogrammen. Satz 27 — 36.
3. Vergleichung der Triangel mit den Parallelogrammen. Satz 37 — 48.

Das zweyte Buch, vom Rectangel, oder rechtwinkligen Parallelogramm. Hier werden die Oblonga und Quadrate, welche durch die verschiednen Schnitte einer geraden Linie entstehen, mit einander verglichen. Satz 1 — 14.

Das

Das dritte Buch, vom Kreise:

1. von geraden Linien in und an dem Kreise. S. 1 — 19.
2. von Winkeln in und an dem Kreise. Satz 20 — 36.

Das vierte Buch, von Beschreibung der Figuren in und um einander:

1. Triangel und Kreis. Satz 1 — 5.
2. Quadrat und Kreis. Satz 6 — 9.
3. Polygon und Kreis. Satz 10 — 16.

Das fünfte Buch, von den Proportionen stetiger Größen überhaupt:

1. von gleichvielfachen Größen. Satz 1 — 6.
2. von Proportionalgrößen. Satz 7 — 15.
3. Veränderungen der Proportion. Satz 16 — 25.

Das sechste Buch, von den Proportionen stetiger Größen insbesondere:

1. Proportionen beym Triangel und Parallelogramm. Satz 1 — 17.
2. Aehnlichkeit der Figuren. Satz 18 — 33.

Der zweyte Theil handelt von den Zahlen. Hier beweiset Euklid alle Sätze, die im fünften Buche von ausgedehnten Größen bewiesen worden, aufs neue von den Zahlen.

Das siebente Buch, von der discreten Proportion der Zahlen:

1. von gleichvielfachen Zahlen. Satz 1 — 10.
2. von discreten Proportionalzahlen. Satz 11 — 22.
3. Von den Primzahlen. Satz 23 — 41.

Das achte Buch, von der stetigen Proportion der Zahlen:

1. von stetigen Proportionalzahlen. Satz 1 — 13.

2. von

2. von ähnlichen Flächen- und Körperzahlen. Satz 14 — 27.

Das neunte Buch, von den besondern Arten der Zahlen:

1. Quadrat- und Kubikzahlen. Satz 1 — 10.
2. Primzahlen. Satz 11 — 20.
3. gerade und ungerade Zahlen. Satz 21 — 34.
4. vollständige Zahlen. Satz 35. 36.

Der dritte Theil handelt von der Commensurabilität der Größen, im zehnten Buche:

1. commensurabele und incommensurabele Größen. Satz 1 — 19.
2. rationale und mediale Größen. Satz 20 — 36.
3. Irrationalgrößen aus dem Zusammensetzen. Satz 37 — 73.
4. Irrationalgrößen aus dem Wegnehmen. Satz 74 — 111.
5. Vergleichung aller vorhergehenden Irrationalgrößen. Satz 112 — 117.

Der vierte Theil handelt von den Körpern.

Das eilfte Buch:

1. von der Lage der Ebenen. Satz 1 — 19.
2. von körperlichen Winkeln. Satz 20 — 23.
3. vom Parallelepipedon. Satz 24 — 40.

Das zwölfte Buch:

1. von der Pyramide und dem Prisma. Satz 1 — 9.
2. vom Kegel und Cylinder. Satz 10 — 15.
3. von der Kugel. Satz 16 — 18.

Das

Das dreyzehnte Buch:

1. von Linien, die nach stetiger Proportion geschnitten sind. Satz 1 — 6.
2. von regulären Flächen. Satz 7 — 12.
3. von den fünf regulären Körpern. Satz 13 — 18.

Mit diesem dreyzehnten Buche schließen sich die Elemente des Euklid's dergestalt, daß in dem letzten Satze dieses Buchs alles Vorhergehende sich concentrirt, und ein regelmäßiges Ganzes formirt, welches durch Zusätze nur verunstaltet wird. Dergleichen Zusätze enthalten das vierzehnte und funfzehnte Buch, welche dem Hypsikles, einem Mathematiker zu Alexandrien im zweyten Jahrhundert der gemeinen Zeitrechnung, zugeschrieben, und von keinem, der die Elemente gelesen hat, für eine Arbeit des Euklid's gehalten werden. Diese beyden Bücher habe ich, als ein Stück des Alterthums, und damit der Uebersetzung nichts zu fehlen schiene, als einen Anhang, der nur wenige Seiten anfüllet, beygefüget. Geschrieben, Kloster Berge, im September 1781.

Johann Friedrich Lorenz.

Nach-

Nachtrag
zu obiger Einleitung.

In Ευκλειδου τα σωζομενα, Euclidis quae supersunt omnia, ex recensione Davidis Gregorii. Oxoniae 1703. fol. praef. pag. IV. heißt es: In libro quinto quantitates literis designatae non magis debent esse lineae, quam aliae quaevis magnitudines; consuetudini tamen gerentes morem, rectas in schemate descripsimus, utpote imaginationi maxime accommodatas. In libris septimo octavo et nono, nulla debent esse schemata; literae enim non determinatos numeros designant, sed quovis incertis conditionibus: ad imaginationem tamen sublevandam, puncta depinximus ea multitudine, quae propositioni conveniant. At si quando numeri congrui tam magni sunt, ut punctorum multitudo statim non pateat, ipsos numeros apposuimus more communi notatos.

Ferner in einer Note am Anfange des siebenten Buches: Euclides in hoc libro literas adhibet alphabeticas pro numerorum symbolis: nos, alios editores secuti, tot adiecimus puncta, elucidandi gratia, quot numeris istis respondeant.

In jener Stelle der Vorrede, und noch mehr in dieser Note, giebt also Gregory deutlich zu verstehen, daß er Handschriften vor sich gehabt, welche in den arithmetischen Büchern nicht Punkte, sondern Buchstaben hatten, ohne sich jedoch näher darüber zu erklären. Als ich nun zum Behufe meiner ersten Ausgabe der 15 Bücher, gegen Herrn Professor Forster zu Halle, den Wunsch äußerte, aus einer der Handschriften, die Gregory wahrscheinlich verglichen hatte, eine belehrende Probe zu sehen: so hatte derselbe die Gewogenheit, nach England deshalb zu schreiben, und mir die erhaltene Antwort sogleich mitzutheilen. Sie war gegeben Oxford den 26. Aug. 1781. von

dem

dem Savilischen Professor Herrn Thom. Hornsby, welcher sich die Mühe gegeben hatte, aus der dortigen Handschrift Num. 13. (welche also im Catalogus librorum manuscriptorum Angliae et Hiberniae. Oxoniae 1697. fol. Tom. I. Part. I. pag. 300. num. 6560. aufgeführet ist) einige Figuren abzuzeichnen und mitzusenden. Da aber bey deren Ankunft meine Uebersetzung so eben bereits abgedruckt war: so mußte ich die weitere Bekanntmachung davon, mit der vielleicht Manchem gedient seyn möchte, auf eine andere Gelegenheit versparen, welche ich nunmehr benutze. Diese Figuren, (die auf der hier beyfolgenden Tafel zusammengestellt sind,) schreibt Herr Thom. Hornsby, sind einige von denen, die auf dem Rande gedachter Handschrift, welche mühsam zu lesen ist, mit weniger Genauigkeit gezeichnet sind. Man wird daran bald bemerken, daß die Linien, welche mit Buchstaben auf gewöhnliche Art bezeichnet sind, Zahlen bedeuten, deren Werthe durch andere Buchstaben, die einen Strich über sich haben, angegeben sind. Für diejenigen, denen etwa der Zahlenwerth der griechischen Buchstaben nicht gleich gegenwärtig seyn sollte, will ich denselben hier gleich beyfügen:

(7. B. 3. S.) $\alpha = \overline{\kappa\delta} = 24$; $\beta = \overline{\iota\eta} = 18$; $\gamma = \overline{\iota\beta} = 12$; $\delta = \overline{\varsigma} = 6$; $\varepsilon = \overline{\gamma} = 3$.

(7. B. 4. S.) $\alpha = \overline{\iota\beta} = 12$; $\beta\gamma = \beta\varepsilon + \varepsilon\zeta = \zeta\gamma = \overline{\gamma} + \overline{\gamma} + \overline{\gamma} = 3 + 3 + 3$; $\delta = \overline{\gamma} = 3$.

(7. B. 6. S.) $\alpha\beta = \overline{\beta} + \overline{\beta} = \overline{\delta} = 2 + 2 = 4$; $\gamma = \overline{\varsigma} = 6$; $\delta\varepsilon = \overline{\gamma} + \overline{\gamma} = \overline{\varsigma} = 3 + 3 = 6$; $\zeta = \overline{\vartheta} = 9$.

(7. B. 7. S.) $\alpha\beta = \alpha\varepsilon + \varepsilon\beta = \overline{\beta} + \overline{\delta} = 2 + 4$; $\gamma\delta = \gamma\zeta + \zeta\delta = \overline{\delta} + \overline{\eta} = 4 + 8$; $\gamma\eta = \overline{\eta} = 8$.

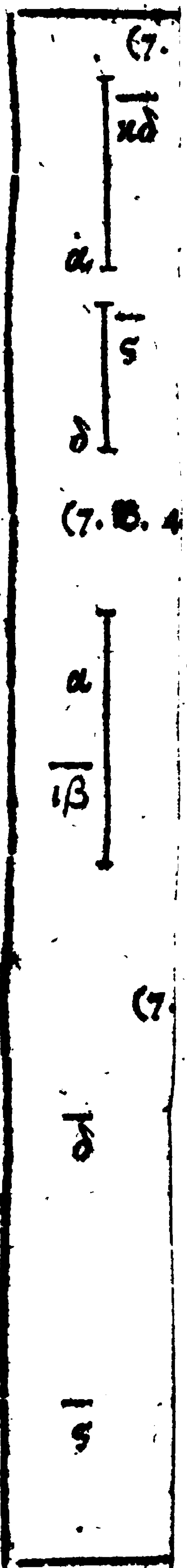
(8. B. 1. S.) $\alpha = \overline{\kappa\zeta} = 27$; $\beta = \overline{\iota\eta} = 18$; $\gamma = \overline{\iota\beta} = 12$; $\delta = \overline{\eta} = 8$.

(8. B. 2. S.) $\alpha = \overline{\gamma} = 3$; $\beta = \overline{\beta} = 2$; $\gamma = \overline{\vartheta} = 9$; $\delta = \overline{\varsigma} = 6$; $\varepsilon = \overline{\delta} = 4$; $\zeta = \overline{\kappa\zeta} = 27$; $\eta = \overline{\iota\eta} = 18$; $\theta = \overline{\iota\beta} = 12$; $\kappa = \overline{\eta} = 8$.

(9. B. 1. S.) $\alpha = \overline{\iota\eta} = 18$; $\beta = \overline{\eta} = 8$; $\gamma = \overline{\varrho\mu\delta} = 144$; $\delta = \overline{\tau\kappa\delta} = 324$.

(9. B. 2. B.) $\alpha = \overline{\kappa\delta} = 24$; $\beta = \overline{\varsigma} = 6$; $\overline{\iota\beta} = 12$; $\gamma = \overline{\varrho\mu\delta} = 144$; $\delta = \overline{\phi o\varsigma} = 576$; $\overline{\sigma\pi\eta} = 288$.

(9. B. 4. S.) $\alpha = \overline{\eta} = 8$; $\beta = \overline{\kappa\zeta} = 27$; $\gamma = \overline{\sigma\iota\varsigma} = 216$; $\delta = \overline{\xi\delta} = 64$.



es
er
ls
ch
in
ss
h
in
is
ir
ie
er
in
rs
es
ft
u
ts
er
ß
in
pr
id
es
en
in
it
on
es

[illegible]

Nachricht
von der zweyten Ausgabe.

Der von der Verlagshandlung an mich ergangene Bericht, daß sie eine neue Ausgabe meiner Uebersetzung der Elemente des Euklides vorhabe, war mir um desto willkommner, weil ich dadurch Gelegenheit erhielt, die noch vorhandenen Mängel aufzusuchen und zu verbessern, den deutschen Ausdruck überall dem Originale mehr anzupassen, mancherley zum Verständnisse bequemere Einrichtungen zu treffen, auch einige der an manchen Orten ausgelassenen zweyten Demonstrationen, und die Zuschrift vor dem vierzehnten Buche nachzuholen. Da mir darum zu thun war, eines der erheblichsten Bücher, die uns aus dem Alterthume aufbewahret worden, in einer deutschen Uebersetzung zu liefern, die dem musterhaften Originale möglichst nahe käme: so achtete ich mich verpflichtet, den griechischen Text abermals ganz durchzugehen, und ihn mit meiner vorigen Uebersetzung Punkt für Punkt zu vergleichen. Hierbey kam es mir sehr zu Statten, daß mein Freund, Herr Dom-Vicarius Matthias, von dem sich ein mit Beyfall aufgenommener Aufsatz, über eine Berechnungsmethode der Rotationszeiten, Abplattung und Dichtigkeiten der Planeten, in Herrn Bode's astronomischem Jahrbuche für das Jahr 1797 befindet, diese Mühe vor mir übernahm, und mir Buch für Buch seine mit Einsicht gemachten Bemerkungen mittheilte, die ich bey meiner nachmaligen eigenen Revision benutzte; weshalb ich demselben nun auch hier öffentlich den verbindlichsten Dank sage. Mit dem Originale verglich ich, außer den vormals schon ge-

gebrauchten Büchern, auch noch die lateinische und englische Ausgaben der 8 Bücher der Elemente von Robert Simson, welche mir zuvor gefehlt hatten, und die gewiß allgemeiner bekannt zu seyn verdienen *). Hierin finden sich viele erhebliche Veränderungen und Zusätze, die von dem Scharfsinne eines von dem Geiste der Alten so ganz belebten Kopfes zeugen, und zu deren Rechtfertigung die seinen Ausgaben angehängten lehrreichen Noten bestimmt sind. Beynahe wäre ich durch ihn gereizt worden, viele seiner getroffenen Veränderungen (denn in allen kann ich ihm nicht beypflichten) in meiner Uebersetzung aufzunehmen, wenn ich mich nicht noch zu rechter Zeit der Pflichten erinnert hätte, welche einem Uebersetzer erhebliche Abweichungen von dem Originale nicht erlauben. Dieser hat genug gethan, wenn er das Original aus der besten und correctesten Ausgabe, wie er es daselbst findet, in seine Sprache genau überträgt, und dadurch den Auctor, wie derselbe ist, nicht wie Er ihn haben wollte, seinen Lesern darstellet, ohne ihn ex

*) Euclidis elementorum libri priores sex, item undecimus et duodecimus, ex versione latina Federici Commandini, sublatis iis, quibus olim libri hi a Theone aliisve vitiati sunt, et quibusdam Euclidis demonstrationibus restitutis, a Roberto Simson, M. D. In Academia Glasguensi Matheseos Professore. Glasguae 1756. 4. — The elements of Euclid viz. the first six Books, together with the Eleventh and Twelfth. The errors, by which Theon or others have long ago vitiated these Books, are corrected, and some of Euclid's Demonstrations are restored. Also the Book of Euclid's Data in like manner corrected. By Robert Simson, M. D. Emeritus Professor of Mathematics in the University of Glasgow. To this fifth Edition are also annexed elements of plain and spherical Trigonometrie. Edinburgh 1775. 8. — Robert Simson starb am 1. October 1768 im 81. Jahre seines Alters.

ex ingenio zu corrigiren, und eigenmächtige Veränderungen mit ihm vorzunehmen, die, wenn sie auch noch so gut getroffen sind, doch das Buch, was man eigentlich lesen will, wenigstens in den veränderten Stellen, unkenntlich machen*). Daher blieb ich bey meinem ehemaligen Vorsatze, bloß eine getreue Uebersetzung meines Auctors zu liefern. Hiermit aber können gleichwohl einige Abweichungen von dem griechischen Texte, die ich mir, dem Original unbeschadet, schon in der vorigen und noch mehr in dieser Ausgabe verstattet habe, gar wohl bestehen, welche ich nun anzeigen, und zu rechtfertigen, oder doch zu entschuldigen suchen werde. Ich theile solche in zwey Classen.

Die erste Classe enthält außerordentliche Veränderungen, welche bloß die äußere Form betreffen, nämlich:

1. Bey der Ueberschrift eines jeden Satzes ist zugleich angezeigt, ob derselbe ein Lehrsatz, oder eine Aufgabe sey.

2. Bey den Aufgaben ist jedesmal die Auflösung von dem Beweise deutlich abgesondert worden.

3. In den Beweisen sind Absätze, als eben so viele Ruhepunkte, angebracht.

 4. Bey

*) Eine ganz andere Bewandtniß hat es mit Hrn. R. Simson, dessen Ausgaben gerade wegen dieser Verbesserungen, zu denen nicht jeder einen so vorzüglichen Beruf hat, wichtig sind; ob es gleich meines Erachtens besser wäre, wenn eine besonders veranstaltete Sammlung seiner getroffenen Veränderungen, und der dazu gehörigen Noten, einer getreuen Uebersetzung zugesellet würde, damit man beydes vor sich habe; wie Euklides selbst es gemacht, und wie es R. Simson zu verbessern gesucht habe. Auch hat oben genannter Herr Dom-Vicarius Matthias auf mein Anrathen dergleichen Sammlung übernommen, und wird solche mit seiner mir bekannten Einsicht und Geschicklichkeit vollenden, daß sie als ein Anhang zu meiner Uebersetzung bald in Druck erscheinen könne.

4. Bey einigen Demonstrationen, als 1. B. 7. S., 1. B. 35. S., 11. B. 21. S., sind die im Texte ausgelassenen leichten Fälle kurz erwähnt.

5. Einige zweyte Demonstrationen, als 3. B. 10. und 11. S., 10. B. 1. und 116. S., sind, entweder als unnütz, oder gar als unrichtig, weggelassen.

6. Einige Lehnsätze, als 11. B. 22. S., 12. B. 2. und 4. Satz, welche auf die ihnen zugehörigen Beweise folgten, sind diesen, wie Euklid sonst durchgängig gethan hat, vorangeschickt.

7. Einige Sätze, 9. B. 18. u. 19. S., 13. B. 13 bis 18. Satz, welche unschicklich als Aufgaben ausgedruckt waren, haben die ihnen zukommende Form der Lehrsätze erhalten. Des 3. B. 7. S. ist im Ausdrucke dem 8. Satze gemäß eingerichtet. Auch sind 7. B. 29. S., 8. B. 13. S., und 9. B. 1 bis 7. S. zu mehrerer Deutlichkeit und Kürze im Ausdrucke etwas verändert.

8. Den Erklärungen des 2, 6, 7, 10. Buches sind einige Erläuterungen beygefügt.

9. In den sogenannten arithmetischen Büchern habe ich bey einigen Sätzen Punkte, wenn sie die Deutlichkeit zu befördern schienen, anstatt der Ziffern gesetzt.

10. Eine Hauptveränderung der Form ist endlich das Zusammenziehen der θεσις und εκθεσις, nebst dem Gebrauche der Zeichen und der Citaten, wodurch der Auctor nichts verloren, sondern Vieles gewonnen hat. Zwar gebe ich gern zu, daß ein solcher Schriftsteller, wie Euklides, eben so sehr als andere Schriftsteller des Alterthums, gar wohl verdiente, von Wort zu Wort ganz übersetzt zu werden. Da es aber bey einem solchen Buche bloß um die Sachen und den Geist der Methode zu thun ist, denen eine kürzere Darstellung leichtere Erkenntniß und Uebersicht gewähret, und man bey der Uebersetzung eines solchen Auctors unmöglich die Absicht haben kann, ihn auch in den kleinsten Dingen zu copiren:

so

so blieb mir nicht das geringste Bedenken, einer beschwerlichen Weitschweifigkeit die nützliche Kürze vorzuziehen, und nach Barrow's und Bärmann's Beyspielen meinem Auctor eine solche Form zu geben, aus welcher selbst die ursprüngliche Form des Originales oder eine der wörtlichen Uebersetzungen mit der leichtesten Mühe wieder hergestellt werden kann. Zum Ueberflusse will ich obige Gründe noch etwas specieller entwickeln.

a. Jeden Satz lese man in der Uebersetzung ohne die Buchstaben, welche sich auf die Figur beziehen, im Zusammenhange, und deute ihn alsdann auf die Figur nach seinen einzelnen Theilen, welche durch die Buchstaben angegeben sind: so hat man die ursprüngliche Form des Originales unmittelbar aus der Uebersetzung selbst, in welcher also nichts davon verloren gegangen ist; wie sich sogleich aus 1. B. 41. Satz, verglichen mit dessen wörtlichen Uebersetzung in obiger Einleitung, ersehen läßt. Diese Einrichtung gewährt den Vortheil, daß man jeden Satz, den man im Originale zwey- auch dreymal lesen muß, in der Uebersetzung nur einmal zu lesen braucht, welches nicht nur durch das ganze Buch unzählige Wiederholungen ersparet, sondern auch insbesondere bey solchen Sätzen, welche, wie z. B. 2. Buch 12. und 13. Satz, ohne Vergleichung mit den Figuren bey dem erstenmale nicht leicht verständlich sind, unumgänglich nöthig ist.

b. In jeder Demonstration, auch in der Auflösung einer Aufgabe, drucke man die in der Uebersetzung gebrauchten Zeichen in Worten aus, und wiederhole von Wort zu Worte die citirten Sätze, die freylich derjenige, welcher sie vergessen hat, oder sich ihrer an der Figur aus dem Zusammenhange nicht wieder erinnert, nachschlagen muß: so hat man auch hierin den vollständigen Text wieder, wovon gleichfalls das zuerst angeführte

Beyspiel, 1. B. 41. S., eine Probe giebt. Auf diese Art läßt sich auch bey den Beweisen, und den Auflösungen der Aufgaben, die ursprüngliche Form des Originals aus der bloßen Uebersetzung wieder herstellen, in welchen also nichts davon verloren gegangen ist. Welche zahllose Wiederholungen aber dadurch vermieden sind, und wie viel die Erkenntniß und Uebersicht der Sache, praesuppositis praesupponendis, durch solche Kürze gewinne, ist an sich einleuchtend.

c. Wiederholt man nun am Ende des Beweises die Worte des Hauptsatzes, und setzt die feyerliche Formel: Welches zu verrichten, oder welches zu beweisen war, hinzu: so hat man das Original so vollständig, daß kein Wort mehr daran fehlet. Sollte nun Jemanden daran gelegen seyn, das griechische Costum ganz vollständig zu haben, so würde er bloß noch mit dem Stabe in der Hand die Figuren in Sand zeichnen müssen.

Die zweyte Classe enthält einige Abweichungen von dem Originale in der Sache selbst, welche ich mir, jedoch nur unter folgenden Einschränkungen, verstattet habe: Daß ihrer nicht zu viele wären; daß sie nur auf einzelne Sätze gingen, ohne eine Veränderung folgender Sätze nach sich zu ziehen; daß sie die Würde des Originales gegen die Fehler unverständiger Abschreiber behaupteten; daß endlich, wobey kein Critiker einiges Bedenken haben kann, die unrichtigen Stellen möglichst aus dem Auctor selbst emendirt wären. Ich will hiervon der Beurtheilung meiner Leser folgende Proben vorlegen:

1. Weggelassen: im 1. B. 17. Erkl. der gar nicht hergehörige Beysatz ητις και διχα τεμνει τον κυκλον — im 10. B. 20. Satz die ganz unnütze Einschaltung κατα τινα των προειρημενων τροπων — in dem auf 10. B. 22. S. folgenden Lehnsatze der nicht hergehörige Beysatz zur Demonstration, welcher sich anfängt ομοιως

δε

δε και — Im 12. Buche 12. S. ist zu Anfange des Beweises die ausführliche Construction, welche mit der im 11. Satze völlig einerley ist, weggelassen, und bloß das Resultat daraus angegeben worden.

2. Zugesetzt: im 1. B. 24. S. am Anfange des Beweises, zu dessen Vollständigkeit, die Worte: welche nicht größer als die andre DF ist. — Im 5. Buche 11. Erkl. mußte den Proportionalgrößen A, B, C, D, beygefügt werden, daß sie an einander hangend oder stetig sind. — Im 5. B. 13. Erkl. mußte angezeigt werden, daß von einer Proportion die Rede sey. — Im 5. B. 20. und 22. Satz mußte, wegen der darauf folgenden Sätze, beygefügt werden, daß hier die Proportion geordnet sey. — Im 10. Buche 78. u. 79. Satz sind ähnliche Anmerkungen, dergleichen sich beym 41. und 42. Satze im Texte selbst finden, angehängt.

3. Versetzt: Im 6. B. 8. Satz sind die dem Beweise beygemischten Proportionen in den Zusatz, wohin sie gehören, gebracht worden. — Im 10. B. 22. S. sind die letzten Worte des Beweises καλειϲθω δε μεση etc. als Anmerkung beygefügt, und darin bestimmter ausgedruckt. — Im 10. B. 33. S. ist das dem Beweise angehängte ομοιως δε παλιν δειχθησεται etc. in eine besondere Anmerkung gebracht worden. — Im 10. B. 92. S. ist die Construction mehr zusammengestellt, und der Anfang des Beweises in den zweyten Theil, wohin er gehört, gebracht worden. — Im 11. B. 23. S. ist das, was zu den Haupttheilen der Construction und des Beweises gehört, mehr zusammengestellt. — Im 12. B. 7. S. ist das Ende der Demonstration in den Zusatz gebracht.

4. Zusammengezogen: Im 10. B. 15. Satz sind die beyden von einander abgesonderten Theile in Einen Satz zusammengebracht.

5. Ver-

5. **Verändert**, welches der erheblichste Theil der Abweichungen, und daher besonders zu rechtfertigen ist:

a. Im 1. B. 15. S. ist im Zusatze anstatt geraden Linien, die einander schneiden, gesetzt worden: die von Einem Punkte ausgehen; welches z. E. mit 11. B. 23. S., wo in der zweyten Figur die drey Winkel um N vier rechten Winkeln gleich gesetzt werden, übereinstimmt.

b. Des 2. B. 13. S. ist im Texte unrichtig bloß auf spitzwinklige Triangel eingeschränkt, und daher in der Uebersetzung allgemein ausgedruckt worden, weshalb die kleine Erinnerung: Man nehme an u. s. w., dem Beweise voranzuschicken war.

c. Im 2. B. 14. S. ist die Erforderniß des Textes, daß die gerade Linie BE > ED sey, in der Uebersetzung weggelassen; indem auch BE < ED seyn kann, ohne daß solches in der Construction etwas ändere.

d. Im 3. B. 24. S. ist die Verknüpfung dieses Satzes mit dem vorhergehenden, welcher eben deswegen vorangeschickt war, aus dem Texte weggeblieben, und daher in der Uebersetzung wieder hergestellt.

e. Im 3. B. 26. u. 28. S. am Ende der Demonstration kommt der Satz: *εστι δε και ολος ο* ΑΒΓ *κυκλος ολῳ τῳ* ΔΕΖ *κυκλῳ ισος*, und die Folgerung daraus, offenbar von einem Irrthume der Abschreiber, oder Theons selbst, her. Denn die Bedingung des Satzes war zwar den Worten nach die Gleichheit der beyden Kreise, worunter aber Euklides nach der 1sten Erkl. dieses Buches bloß die Gleichheit ihrer Durchmesser oder Halbmesser verstehet; nicht die Gleichheit der Flächen und der Umkreise, welche nirgends erwiesen ist. Wohl aber war im 24sten Satze dieses Buches erwiesen, daß ähnliche Kreisabschnitte über gleichen Grundlinien gleich sind. Und hierauf beruhet der richtige Beweis des 26. und 28. Satzes, welchen ich wieder hergestellet habe.

f. Im

f. Im 6. B. 5. Erkl. ist των λογων πηλικοτητες von Wallisius noch am besten durch rationum exponentes übersetzt; aber diese ganze Erklärung, auch so genommen, paßt nicht zu dem Systeme des Euklides. Was sich dieser unter Zusammensetzung der Verhältnisse gedacht hat, erhellet deutlich aus dem 23. Satze dieses Buches, wornach ich auch die 5. Erklärung dieses Buches abgefaßt habe.

g. Beym 10. B. 117. S. ist anstatt des weithergeholten andern Beweises ein weit kürzerer gesetzt worden.

h. Im 12. B. 17. S. ist alles, was zur eigentlichen Construction, so wie das, was zu dem Beweise gehöret, mehr zusammengestellt worden, wodurch die Uebersicht sehr befördert ist. Auch ist der Zusatz, der Deutlichkeit unbeschadet, abgekürzt.

Durch obiges Detail der erheblichern Veränderungen, welche ich mir mit meinem Auctor verstattet, hoffe ich meinen Lesern nicht mißfallen zu haben. Um desto kürzer kann ich die Frage, die noch übrig zu seyn scheint, beantworten: Sind sämmtliche 15 Bücher der Elemente, oder nur diejenigen, welche zu gemeiner Anwendung dienen, namentlich die 6 ersten nebst dem 11. und 12., mit Ausschlusse der übrigen Bücher, ins Deutsche zu übersetzen? Denn an der Wichtigkeit und Unentbehrlichkeit der von manchem Uebersetzer, vielleicht aus persönlichen Gründen, weggelassenen Bücher kann kein Kenner im geringsten zweifeln: indem das 7., 8. und 9. Buch ein in seiner Art einziges, und von den Neuern wohl noch zu wenig genutztes, System der Arithmetik der Alten enthalten; das 10. Buch die Lehre von den Irrationalgrößen mit vorzüglichem Scharfsinne entwickelt, und gleichfalls das Einzige seiner Art aus dem ganzen Alterthume, so wie aus den neuern Zeiten, ist; das 13. Buch aber die regulären Körper, deren Betrachtung dem Geiste der Alten nicht ohne Grund wich-

tig

lig war, auf eine Art behandelt, wie man sie anderwärts nicht findet; und die letzten zwey Bücher, ob sie gleich fast augenscheinlich den Euklides nicht zum Urheber haben, dennoch nicht unwerth sind, seinem unsterblichen Werke, dessen Fortsetzung sie seyn sollten, beygefügt zu werden. Alle Gründe nun, welche Jemand gegen eine deutsche Uebersetzung der eben genannten Bücher anführen könnte, gelten gewiß auch gegen die Data des Euklides, und gegen die ebenen Oerter des Apollonius, um nur diese beyden Schriften zu nennen, deren jene vom Herrn Schwab, Stuttgart 1780, die andere vom Herrn Camerer, Leipzig 1796, mit allgemeinem Beyfalle ins Deutsche übersetzt worden ist; so daß auch ich, mit der deutschen Uebersetzung sämmtlicher funfzehn Bücher der Elemente etwas vergebliches unternommen zu haben, nicht im geringsten befürchten darf. Hierbey aber konnte ich auf keine Art dem Vorhaben der Verlagshandlung entgegen seyn, von oben erwähnten acht Büchern noch einen besondern Abdruck für ein größeres Publicum zu veranstalten, welcher den Nutzen haben kann, daß er den Euklides in mehrere Hände bringe, und bey Manchem auch die Lust nach dem Uebrigen erwecke. Geschrieben, Kloster Berge, am 28. October 1797.

Johann Friedrich Lorenz.

Vorbericht
zur dritten Ausgabe.

Was der sel. Lorenz, der das lobenswürdige Bestreben hatte, seine Schriften, bey neuen Auflagen derselben, immer vollkommner zu machen, bey dieser neuen Ausgabe seiner Uebersetzung der Elemente, wenn er solche erlebt hätte, geleistet haben würde, das habe ich, von der Verlagshandlung zu der Revision derselben aufgefordert, im Geiste des sel. Mannes und mit aller Gewissenhaftigkeit zu leisten gesucht. Zu dem Ende ist die Uebersetzung wiederum sorgfältig mit dem griechischen Original, so wie wir solches in der Gregoryschen Ausgabe besitzen, verglichen, und wo sie dasselbe nicht genau wieder zu geben schien, eine Aenderung vorgenommen worden. Diese Aenderungen betreffen nun theils die Uebertragung des griechischen Ausdrucks, theils den Zusammenhang und die Folge der Schlüsse, theils einige Abweichungen, welche sich der sel. Lorenz von dem Original erlaubt hatte. Ich werde sie einzeln durchgehen.

Bey einer so simpeln Sprache, als die Euklidische ist, sollte man kaum erwarten, daß der Sinn irgendwo verfehlt seyn könnte. Dennoch war dies der Fall bey der

Er-

Erklärung der Verhältniß 5. B. 3. E., wo alle Uebersetzer, so viele ich deren kenne, die Wörter προς αλληλα zu den folgenden ποια σχεσις gezogen haben, da sie doch, wenn anders ein schicklicher Sinn herauskommen soll, zu dem vorhergehenden πηλικοτητα gezogen werden müssen *). Die folgende vierte Erklärung konnte schon darauf führen, worin προς αλληλα ebenfalls zu dem vorhergehenden λογον, nicht aber zu dem folgenden μεγεθη, gehört.

* Hr. Hauff, der zwar eine getreue Uebersetzung des griechischen Textes zu liefern versprochen, hat hier bloß die Commandinische Version, welche nicht einmal das πηλικοτητα richtig ausdruckt, übersetzt, so wie er solches auch in des 12. B. 5. S. gethan hat. Es heißt nämlich S. 302 der zweyten Ausgabe seiner Uebersetzung: „die „durch diese Theilung erhaltenen Pyramiden theile man „wieder auf ähnliche Art, bis man eine Anzahl Pyramiden „genommen hat u. s. f.“ Im Texte steht εως οὑ λειφθωσι, nicht ληφθωσι, hingegen hat die latein. Uebersetzung: quoad *sumantur*. Derselbe Fehler kommt gleich noch einmal wieder vor, wo zwar der Text λεληφθωσαν hat, aber offenbar sowohl wegen des Vorhergehenden, als wegen 12. B. 1. 10. 11. u. 13. S. λελειφθωσαν gelesen werden muß. Auch 12. B. 17. S. hat Hr. Hauff einen andern Fehler der latein. Version getreulich übersetzt, welchen schon Robert Simson (m. s. Matthias Auszug S. 168) verbessert hat, und den Hr. Hauff nicht bloß, weil er Robert Simson's latein. Ausgabe von 1756 zur Hand hatte, sondern auch, weil die Sprachregeln und der Zusammenhang die Verbesserung fordern, wohl hätte vermeiden können.

gehört. Eine andere nicht richtig übertragene Stelle, war die des 6. B. 28. S. zugefügte Bedingung, welche der sel. Lorenz nach der latein. Uebersetzung doch mit einer aus der ἐκθέσις genommenen Berichtigung wieder gegeben hatte. Zwar weicht hier die Leseart, welche Pelletier und Steinmetz in ihren Ausgaben, in denen sie die προτάσεις griechisch mittheilen, aufgenommen haben, und der auch Commandini in seiner Version gefolgt ist, bedeutend von derjenigen der Gregory'schen Ausgabe ab. Allein jene Leseart: ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμμάτων τῷ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν ist in den letzten Worten offenbar verdorben, und das ὅμοιον auf jeden Fall auszustreichen. Denn mit ᾧ es zu verbinden, wie Commandini gethan zu haben scheint, geht wegen des vorhergehenden τῶν ἐλλειμμάτων nicht an, weil das Parallelogramm Δ keine Ergänzung eines andern ist. Zieht man es aber zu ἐλλείπειν, wozu es nach dem Sprachgebrauche Euklid's und wegen des Zusammenhanges gehört, so ist ὅμοιον ein den Sinn störender, mithin höchst überflüssiger, Beysatz. Denn man darf es nicht auf das zu entwerfende Parallelogramm, welches eine Ergänzung haben (ἐλλείπειν) soll, beziehen, weil nicht dieses, sondern seine Ergänzung, dem Parallelogramm Δ ähnlich seyn soll. Auch dürfte in diesem Falle der Artikel nicht fehlen. Die ganze Leseart scheint aus der schlecht interpungirten und noch schlechter verstandenen ἐκθέσις hervorgegangen zu

seyn.

seyn. Ich habe also der Leseart der Gregoryschen Ausgabe, welche allein einen passenden Sinn giebt, den Vorzug gegeben, und ihr gemäß die Uebersetzung geändert *). Zum bessern Verständniß der ganzen Proposition mag noch die Bemerkung dienen, daß Euklides in derselben die Auflösung einer quadratischen Gleichung von der Form $x^2 - ax + b^2 = 0$ gelehrt hat. — Eine dritte Stelle endlich, welche abgeändert werden mußte, war die in der Anm. zu 13. B. 1. S. dem Beweise vorangeschickte Bemerkung, die Analysis und Synthesis betreffend, welche so ausgedruckt war, als gäbe es eine besondere analytische, von der synthetischen verschiedene, Beweisart. Allein dergleichen brauchen die Geometer des Alterthums nicht, sondern nach ihnen gehören Analysis und Synthesis oder Composition immer zusammen, daher sie nie eine Analysis geben, ohne sogleich die Synthesis darauf folgen zu lassen. In der That, da bey der Analysis das zu Beweisende schon bekannt seyn muß, und man durch dieselbe unmittelbar zu keinem neuen Satze gelangt, so dient solche nur, bey einem vermuthungsweise angenommenen oder anderswoher schon bekannten Satze, diejenigen Sätze aufzufinden, welche in den Beweis des noch unbewiesenen Satzes eingehen, wel-

* Hr. Hauff hat hier zwar die Leseart des griechischen Textes vor Augen gehabt, aber weder in der προτασις noch in der ἐκθεσις den Sinn genau und richtig dargestellt.

welcher Beweis, wenn er auch nicht förmlich geführt werden sollte, doch der Idee nach wirklich eine Synthesis ist. Man vergleiche Klügels mathematisches Wörterbuch, Artikel **Analysis, als Methode und Beweis.**

Ich komme jetzt zu den Abänderungen in dem Zusammenhange und der Folge der Schlüsse. 9. B. 13. S. war im zweyten Absatze des Beweises gesagt, daß, wie vorhin, bewiesen werde, daß F keine Primzahl sey. Dieser Beweis gründet sich aber auf das, was erst nachher bewiesen wird, nämlich darauf, daß F mit keiner der Zahlen A, B, C einerley sey. Daher mußte der Beweis so geändert werden, wie geschehen ist. — 10. B. 29. S. 1. Lehns. war die Bedingung ausdrücklich zu erwähnen, daß die beyden angenommenen Flächenzahlen AB, BC zugleich entweder gerade oder ungerade seyen, weil sonst der Rest AC nicht gerade ist. Der Ausdruck, so wie er bisher war, „es mögen nun diese Zahlen entweder beyde „gerade oder beyde ungerade seyn," kann so gedeutet werden, als wenn zwey angenommene Flächenzahlen nothwendig allemal von selbst die angezeigte Beschaffenheit hätten, da doch, wenn sonst nichts hindert, die eine gerade, die andere ungerade seyn kann. — 13. B. 18. S. war der Beweis des Textes, daß CK > CD, also auch CL > CD und AL > AD ist, weggelassen, daher solcher an einem schicklichen Orte eingeschaltet werden mußte. — Ein ähnlicher Zusatz ist 14. B. 5. S. am

 Ende

Ende des Beweises gemacht, um denselben auf jede gerade Linie, wie der Satz fordert, auszudehnen.

Was endlich die Abweichungen von dem Originale, welche sich der sel. Lorenz erlaubt hat, betrifft, so sind die meisten derselben unverändert geblieben. Wieder hergestellt ist jedoch 1. B. 17. E. der Zusatz: „welche „auch den Kreis halbirt," welcher offenbar der folgenden Erklärung wegen da steht. In des 3. B. 7. S. war der Ausdruck nach dem des 8. S. eingerichtet, allein nicht ausdrücklich verlangt, daß eine der Linien durch den Mittelpunkt gezogen werde, welches doch nöthig ist. Da der Ausdruck dadurch weitläufiger geworden wäre, so habe ich denselben dem griechischen Texte gemäß wieder geändert, so wie solches auch mit 1. B. 15. S. Zus. geschehen ist, welcher in der jetzigen Gestalt ebenfalls zum Beweise von 11. B. 23. S. dient. — Des 9. B. 18. 19. S. sind wieder als Aufgaben ausgedruckt, da ich nichts unschickliches darin sehe, wenn eine Anweisung gegeben wird, zu erforschen, ob es zu zwey oder drey gegebenen Zahlen eine dritte oder vierte proportionale gebe oder nicht. Man muß sich ja eben so nach 7. B. 1. S. wegen des folgenden Satzes die Aufgabe: zu erforschen, ob zwey gegebene Zahlen Primzahlen zu einander sind oder nicht, denken. Uebrigens ist bey 9. B. 19. S. die Auflösung des griechischen Textes wieder an die Stelle der von Clavius gegebenen, welche der sel. Lorenz in der zweyten Ausgabe aufgenommen

hatte,

hatte, gesetzt, weil der 17. S. offenbar auf dieselbe Bezug hat. Bey 13. B. 13—18. S. kommt das Unschickliche des Ausdrucks nur auf Rechnung der Ueberschrift der lateinischen oder deutschen Uebersetzung, im Griechischen fällt es weg, da sowohl Lehrsätze als Aufgaben προτασεις überschrieben werden.

Die bisher aufgezählten Aenderungen zwecken alle dahin ab, die Uebersetzung dem Original so nahe zu bringen, als sich dies bey der gewählten Art der Abkürzung erhalten läßt. Andere von minderer Bedeutung, welche anzuführen zu weitläufig seyn würde, sind da angebracht, wo die Deutlichkeit oder der Wohllaut sie zu erfordern schien.

Ich glaube durch die auf diese Revision gewandte Mühe die anerkannte Güte und Brauchbarkeit der Uebersetzung des sel. Lorenz noch erhöhet zu haben, und es wird mir eine angenehme Belohnung seyn, wenn dieselbe in der Folge noch so, wie bisher, zur Ausbreitung ächter Wissenschaft und zur Ausbildung des Denkvermögens beyträgt. Ich habe außerdem Sorge getragen, den Abdruck so viel als möglich von Druckfehlern frey zu erhalten, und ich hoffe, es werden ihrer nur wenige stehen geblieben seyn. Ein Paar derselben werde ich nachher anzeigen.

Zum Schlusse bemerke ich noch, daß die von einem neueren Schriftsteller, welcher auf das Ansehen eines Philosophen das Princip der unendlichen Theilbarkeit der

 geome-

geometrischen Größen nicht will gelten lassen, gegen das Euklidische System erhobenen Einwendungen keinen, der sich nach dem Beyspiel aller vorzüglichen Geometer den Euklides zum Führer gewählt hat oder wählt, wofern sie etwa bekannt werden sollten, aufhalten müssen. Hier gilt der einst von D'Alembert ertheilte Rath: Allez en avant, et la foi vous viendra. Jenem Schriftsteller aber, der die Indivisibilia wieder hervorzog, kann man füglich die aus dem Trugschlusse des Zeno bekannte Verfolgung einer Schildkröte durch den schnellfüßigen Achill entgegen setzen, worüber *Keilii* Introductio ad ver. Phys. Lect. III. p. 33 nach zu sehen ist.

Geschrieben Halle im Königl. Pädagogium, am 22. Jun. 1808.

Karl Mollweide.

Verbesserungen.

S. 319. Z. 15. von unten statt in derem l. in dem.
S. 348. Z. 11. v. unten fehlt in einigen Exemplaren die Schlußfolge: Folglich ist AB = CD.

Erklä=

Erklärung der zur Abkürzung gebrauchten Zeichen.

$A = B$ Die Größe A ist der Größe B gleich.

$A > B$ Die A ist größer als die B.

$A < B$ Die A ist kleiner als die B.

$A \gtreqless B$ Die A ist entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner, als die B.

Wenn $A \gtreqless B$, so ist auch $C \gtreqless C$,

d. i. wenn $A = B$, so ist auch $C = D$,

wenn $A > B$, so ist auch $C > D$,

wenn $A < B$, so ist auch $C < D$.

$A \sim B$ Die A ist der B ähnlich.

$A \cong B$ Die A ist gleich und ähnlich der B.

$A + B$ Was kommt, wenn B zu A hinzugethan wird.

$A - B$ Was bleibt, wenn B von A hinweggenommen wird.

ABC Der Winkel, dessen Spitze B ist.

R. Ein rechter Winkel.

$\triangle$ ABC Der Triangel, dessen Spitzen, A, B, C, sind.

$\square$ AB Das Quadrat der geraden Linie AB.

$A \times B$ Das unter den geraden Linien, A, B, enthaltene Rectangel.

$A : B$ Die Verhältniß der A zu der B.

$A:B = C:D$, d. i. die A verhält sich zu B, wie C zu D.

$A:C = (A:B) + (B:C)$, d. i. die Verhältniß, $A:C$, ist zusammengesetzt aus den beyden Verhältnissen, $A:B$ und $B:C$.

2 (A:B)

2 (A:B)	Das Zwiefache der Verhältniß A:B.
3 (A:B)	Das Dreyfache der Verhältniß A:B.
A + B	Die Summe der Zahlen, A, B.
A — B	Die Differenz der Zahlen, A, B.
A . B	Das Product aus den Zahlen, A, B.
A^2	Die Quadratzahl von A.
A^3	Die Cubikzahl von A.
$A \cap B$	Die Flächen, A, B, sind commensurabel; oder die geraden Linien, A, B, sind in Länge commensurabel.
$A \cup B$	Die Flächen, A, B, sind incommensurabel; oder die geraden Linien, A, B, sind in Länge incommensurabel.
$A \frown\!\!\_ B$	Die geraden Linien, A, B, sind bloß in Potenz commensurabel.
$A \smile\!\!\bar{} B$	Die geraden Linien, A, B, sind in Potenz incommensurabel.

*) Bey den Citatis bedeutet E. Erklärung; F. Foderung; G. Grundsatz; S. Satz. Die Zahl des Buchs ist immer vorangesetzt, und durch ein Komma abgesondert.

Euklid's Elemente

Erstes Buch.

Erklärungen.

1. Ein **Punkt** ist, was keine Theile hat.
2. Eine **Linie** ist eine Länge ohne Breite.
3. Das Aeußerste einer Linie sind Punkte.
4. Eine **gerade Linie** ist, welche zwischen jeden in ihr befindlichen Punkten auf einerley Art liegt.
5. Eine **Fläche** ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Das Aeußerste einer Fläche sind Linien.
7. Eine **ebene Fläche** (**Ebene**) ist, welche zwischen jeden in ihr befindlichen geraden Linien auf einerley Art liegt.
8. Ein **ebener Winkel** ist die Neigung zweyer Linien gegen einander, wenn solche in einer Ebene zusammenlaufen, ohne in gerader Linie zu liegen.
9. Sind die Linien, welche den Winkel einschließen, gerade; so heißt derselbe ein **geradliniger Winkel**.
10. Steht eine gerade Linie auf einer andern so, daß sie gleiche Nebenwinkel macht; so heißt sie **perpendikular** auf der andern, und jeder der beyden gleichen Winkel heißt ein **rechter Winkel**.

11. **Ein stumpfer Winkel** heißt, der größer als ein rechter;
12. **Ein spitzer** aber, der kleiner als ein rechter ist.
13. **Gränze** heißt, was das Aeußerste eines Dinges ist;
14. **Figur**, was von einer oder mehrern Gränzen eingeschlossen wird.
15. Ein **Kreis** ist eine ebene Figur von einer einzigen Linie, **Umring** oder **Umkreis** genannt, so eingeschlossen, daß die geraden Linien, welche an dieselbe, aus einem innerhalb der Figur befindlichen Punkte, gezogen werden, alle einander gleich sind.
16. Dieser Punkt heißt des Kreises **Mittelpunkt**.
17. Des Kreises **Durchmesser** ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, und an beyden Seiten von dem Umringe begränzte, gerade Linie, welche auch den Kreis halbirt.
18. Ein **Halbkreis** ist die Figur, welche vom Durchmesser, und dem durch ihn abgeschnittenen Umkreise eingeschlossen wird.
19. Ein **Kreisabschnitt** ist die Figur, welche von einer geraden Linie und dem Umkreise eingeschlossen wird.
20. **Geradlinige Figuren** sind, die von geraden Linien eingeschlossen werden, und zwar
21. **dreyseitige** (**Triangel**) die, welche von dreyen,
22. **vierseitige**, welche von vieren,
23. **vielseitige** (**Polygone**) die, welche von mehr als vier geraden Linien eingeschlossen werden.
24. Unter den **Triangeln** heißt derjenige **gleichseitig**, welcher drey gleiche Seiten hat;

25. gleich-

25. gleichschenklig aber, welcher nur zwey gleiche Seiten hat;
26. ungleichseitig, welcher drey ungleiche Seiten hat.
27. Ferner heißt unter den Triangeln derjenige rechtwinklig, welcher einen rechten Winkel hat;
28. stumpfwinklig, welcher einen stumpfen Winkel hat;
29. spitzwinklig, welcher drey spitze Winkel hat.
30. Unter den vierseitigen Figuren heißt diejenige ein Quadrat, welche gleichseitig und rechtwinklig ist;
31. ein Oblongum, welche zwar rechtwinklig, aber nicht gleichseitig ist;
32. ein Rhombus, welche zwar gleichseitig, aber nicht rechtwinklig ist;
33. ein Rhomboid, deren einander gegenüberliegende Seiten und Winkel gleich sind, die aber weder gleichseitig, noch rechtwinklig ist.
34. Jede andere vierseitige Figur heiße Trapez.
35. Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen, und, soweit man sie auch an beyden Seiten verlängern mag, doch an keiner Seite zusammentreffen.

Foderungen.

1. Man fodere, von jedem Punkte nach jedem andern eine gerade Linie zu ziehen;
2. desgleichen, eine gerade begränzte Linie stetig gerade fort zu verlängern;
3. desgleichen aus jedem Punkte in jedem Abstande einen Kreis zu beschreiben.

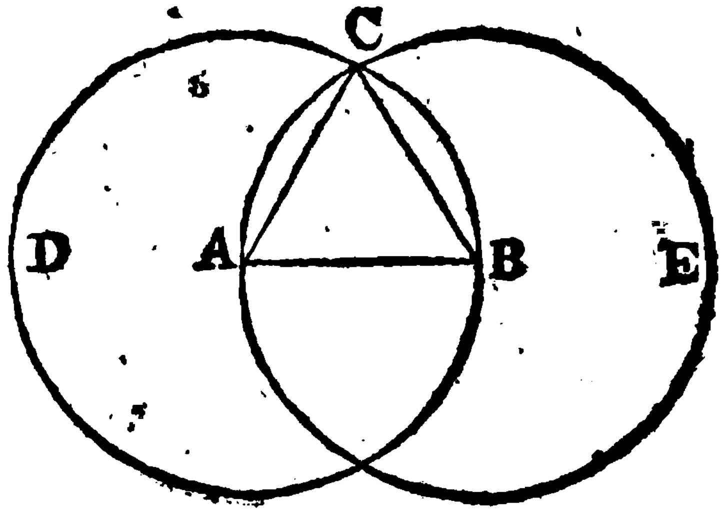
Grundsätze.

1. Was Einem und eben demselben gleich ist, ist selbst gleich.
2. Zu Gleichem Gleiches hinzugethan, bringt Gleiches.
3. Vom Gleichen Gleiches hinweggenommen, läßt Gleiches.
4. Zu Ungleichem Gleiches hinzugethan, bringt Ungleiches.
5. Von Ungleichem Gleiches hinweggenommen, läßt Ungleiches.
6. Gleiches verdoppelt, giebt Gleiches.
7. Gleiches halbirt, giebt Gleiches.
8. Was einander deckt, ist einander gleich.
9. Das Ganze ist größer als sein Theil.
10. Alle rechte Winkel sind einander gleich.
11. Zwey gerade Linien, die von einer dritten so geschnitten werden, daß die beyden innern an einerley Seite liegenden Winkel zusammen kleiner als zwey rechte sind, treffen genugsam verlängert an eben der Seite zusammen.
12. Zwey gerade Linien schließen keinen Raum ein.

Der

Der 1. Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen begränzten geraden Linie, AB, einen gleichseitigen Triangel zu errichten.

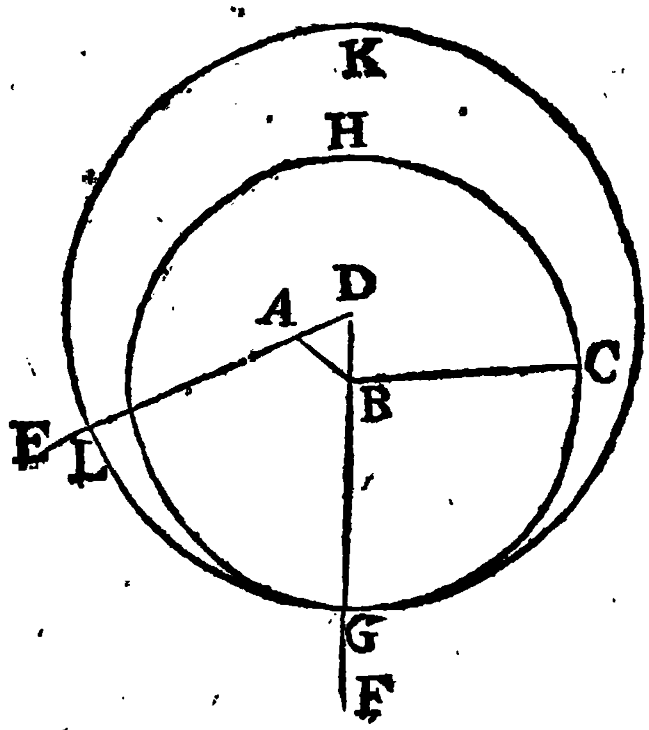


Aus dem Punkte A beschreibe (3. F.) mit AB den Kreis BCD, und aus dem Punkte B mit BA den Kreis ACE. Vom Punkte C, in welchem beyde Kreise einander schneiden, ziehe (1. F.) nach A, B, die geraden Linien CA, CB: so ist ACB der verlangte Triangel.

Denn da (15. E.) AC = AB, und BC = BA: so ist (1. G.) AC = BC. Demnach ist AC = AB = BC, folglich (24. E.) der auf AB errichtete △ CAB gleichseitig.

Der 2. Satz. Aufgabe.

An einen gegebenen Punkt, A, eine der gegebenen, BC, gleiche gerade Linie zu legen.



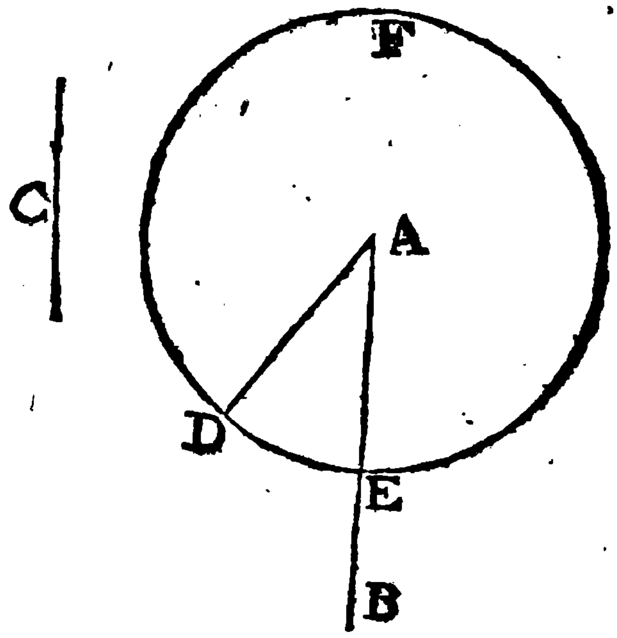
Ziehe von A nach B die gerade Linie AB. Auf dieser errichte (1. S.) den gleichseitigen Triangel DAB. Verlängere (2. F.) die geraden Linien DA, DB, nach E, F. Aus B beschreibe (3. F.) mit BC den Kreis CGH, und aus D mit DG den Kreis GKL: so ist AL = BC an A gelegt.

Denn da (15. E.) DL = DG, und (24. E.) DA = DB: so ist (3. G.) AL = BG. Nun ist (15. E.) BC = BG. Folglich ist (1. G.) AL = BC.

Der 3. Satz. Aufgabe.

Es sind zwey ungleiche gerade Linien, AB, C, gegeben; man soll von der größern, AB, eine der kleinern, C, gleiche Linie wegnehmen.

An A lege (2. S.) AD = C, und beschreibe (3. F.) aus A mit AD den Kreis DEF; so ist die von AB weggenommene Linie AE = C.

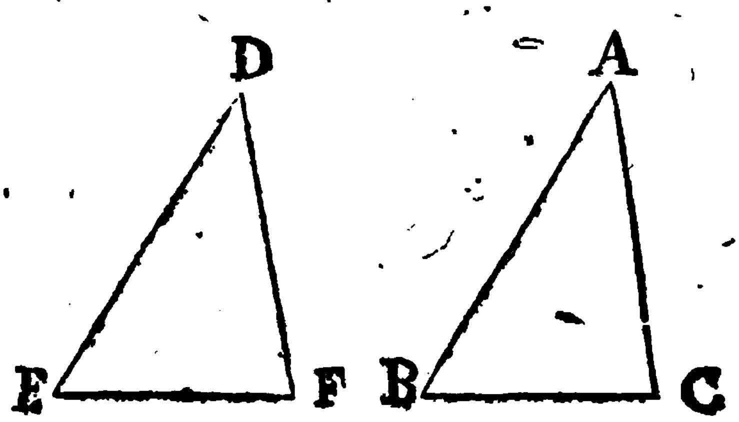


Denn es ist AD = C, und (15. E.) AD = AE, folglich (1. G.) AE = C.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten, AB, AC, zweyen Seiten, DE, DF, jede für sich, gleich sind, (die AB der DE, die AC der DF) und ein Winkel, BAC, einem Winkel, EDF, gleich ist, der nämlich, den die gleichen Seiten einschließen: so ist auch die dritte Seite BC, der dritten EF gleich; auch sind die Triangel, ABC, DEF, selbst einander gleich; und von den übrigen Winkeln sind die, welche gleichen Seiten gegenüber liegen, ABC, DEF; ACB, DFE, ebenfalls einander gleich.

Bringe den Triangel ABC auf den Triangel DEF, und lege A auf D, und AB auf DE.



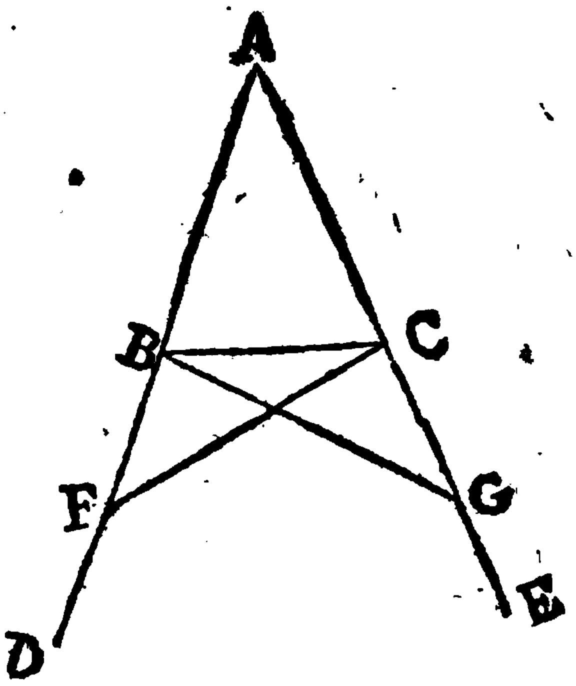
Da AB = DE, so fällt B auf E. Da BAC = EDF, so fällt AC auf DF. Da AC = DF, so fällt C auf F. Nun fällt nach Obigem auch B auf E. Folglich fällt BC auf EF. Denn sollte BC über

oder

oder unter EF fallen, so würden BC, EF, einen Raum einschliessen, welches (12. G.) unmöglich ist. Folglich ist (8. G.) BC = EF; △ ABC = △ DEF; ABC = DEF; ACB = DFE.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

In jedem gleichschenkligen Triangel, ABC, sind die Winkel an der Grundlinie, ABC, ACB, einander gleich. Auch sind, wenn man die Schenkel, AB, AC, verlängert, die Winkel unter der Grundlinie, DBC, ECB, einander gleich.



Auf BD nimm willkührlich einen Punkt F. Von AE nimm (3. G.) AG = AF, und ziehe FC, GB.

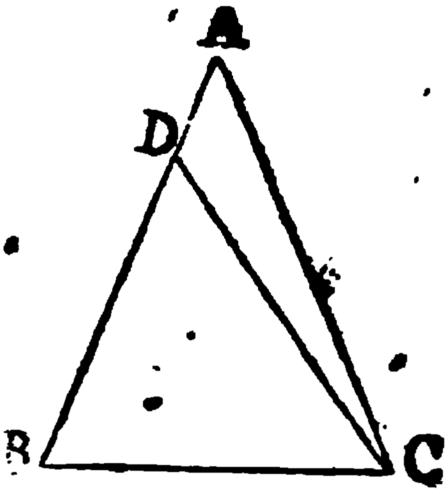
In den △ △ ACF, ABG, ist AF = AG, und AC = AB, auch der Winkel bey A beyden gemein; folglich (4. S.) FC = GB, ACF = ABG, AFC = AGB. Nun ist, weil AF = AG und AB = AC, (3. G.) BF = CG. Demnach ist (in den △ △ FBC, GCB) BF = CG, FC = GB, AFC = AGB. Folglich ist (4. S.) BCF = CBG, und FBC = GCB, das ist, die Winkel unter der Grundlinie sind gleich.

Da ABG = ACF, und CBG = BCF: so ist (3. G.) ABC = ACB, das ist, die Winkel an der Grundlinie sind gleich.

Der 6. Satz. Lehrsatz.

Wenn in einem Triangel, ABC, zwey Winkel, ABC, ACB, einander gleich sind: so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten, AC, AB, einander gleich.

 Wären

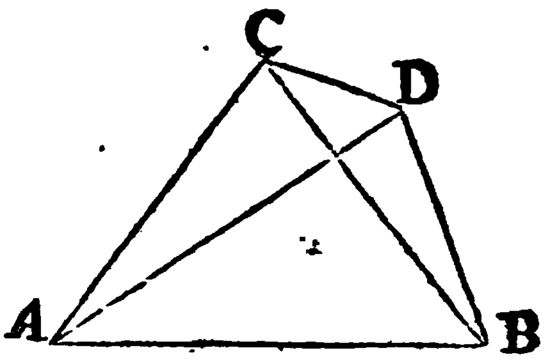


Wären AC, AB, ungleich, so wäre eine davon größer, etwa AB. Es sey daher (3. S.) BD = AC. Ziehe DC.

In den Triangeln ABC, DBC, wäre demnach BD = CA, BC beyden gemein, und DBC = ACB; folglich (4. S.) △ DBC = △ ABC, welches (9. G.) unmöglich ist. Demnach können AC, AB nicht ungleich seyn, und sind also gleich.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Wenn über einer geraden Linie, AB, aus ihren Endpunkten zwey gerade Linien, AC, BC, in einem Punkte, C, zusammenlaufen: so können nicht über derselben Linie, AB, aus eben den Punkten, zwey andere gerade Linien, die jenen jede für sich gleich sind, (die erste nämlich der ersten, AC, die zweyte der zweyten, BC) in einem andern Punkte an eben der Seite zusammenlaufen.



Gesetzt, die beyden andern Linien AD = AC, und BD = BC, liefen, wenn es möglich ist, in einem andern Punkte D zusammen. Ziehe CD.

Da AD = AC, so ist (5. S.) ADC = ACD, folglich (9. G.) ADC > BCD, folglich noch vielmehr BDC > BCD. Da aber auch BD = BC, so wäre (5. S.) BDC = BCD, welches mit dem Vorigen unmöglich bestehen kann.

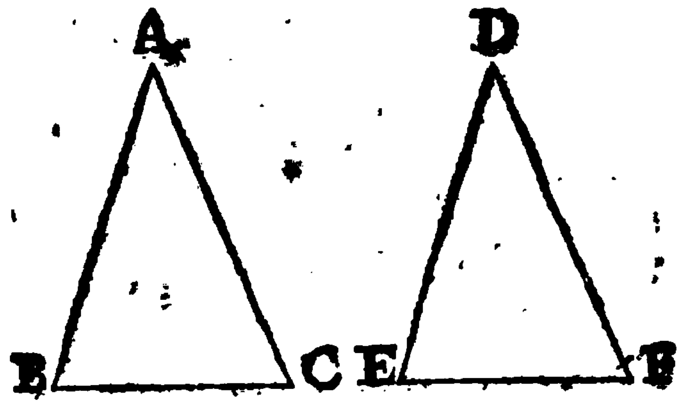
Auf ähnliche Art wird der Beweis geführt, wenn man den Punkt D innerhalb des △ CAB annähme.

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten, AB, AC, zweyen Seiten, DE, DF, jede für sich, gleich

sind,

sind, (die AB der DE, die AC der DF) und die dritte Seite, BC, der dritten, EF, gleich ist: so ist auch ein Winkel, BAC, einem Winkel, EDF, gleich, der nämlich, welchen die gleichen Seiten einschließen.

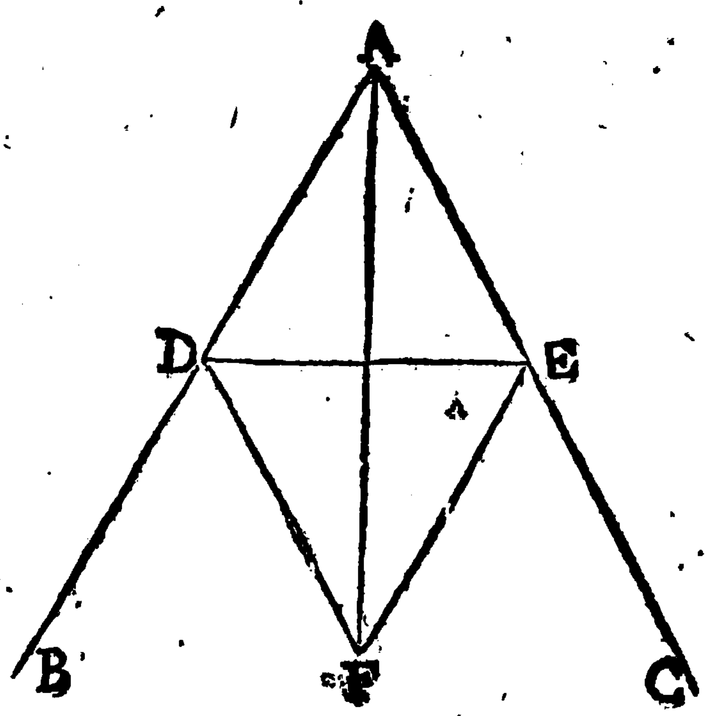


Bringe den Triangel ABC auf den △ DEF, und lege B auf E, und BC auf EF.

Da BC = EF, so fällt C auf F. Nun ist BA = ED, und CA = FD. Folglich fällt (7. S.) A auf D, und daher BA auf ED, und CA auf FD. Folglich ist (8. S.) BAC = EDF.

Der 9. Satz. Aufgabe.

Einen gegebenen geradlinigen Winkel, BAC, zu halbiren.

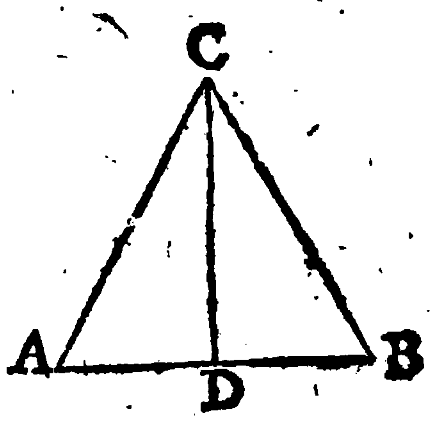


Auf AB nimm willkührlich den Punkt D. Von AC nimm (3. S.) AE = AD. Ziehe DE, und errichte (1. S.) auf derselben den gleichseitigen △ DEF. Ziehe AF: so halbiret diese den Winkel bey A.

Denn da DA = AE, auch AF beyden Triangeln gemein, und DF = FE; so ist (8. S.) DAF = EAF.

Der 10. Satz. Aufgabe.

Eine gegebene begränzte gerade Linie, AB, zu halbiren.

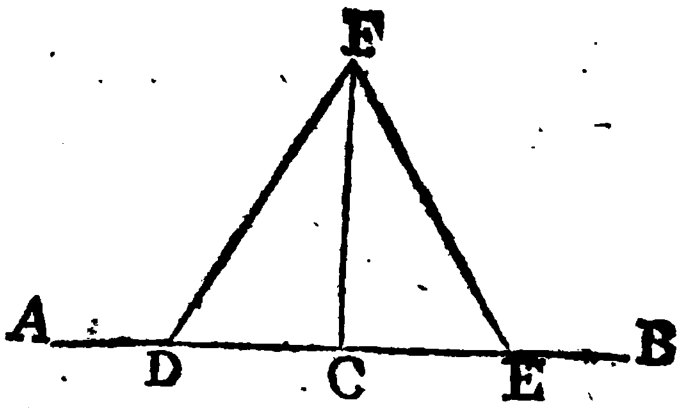


Auf AB errichte (1. S.) den gleichseitigen △ ABC. Halbire (9. S.) den Winkel ACB mit CD: so wird die AB in D halbiret.

Denn da AC = CB, und CD beyden Triangeln gemein, auch ACD = BCD: so ist (4. S.) AD = DB.

Der 11. Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie, AB, in einem in ihr gegebenen Punkte, C, einen Perpendikel zu errichten.

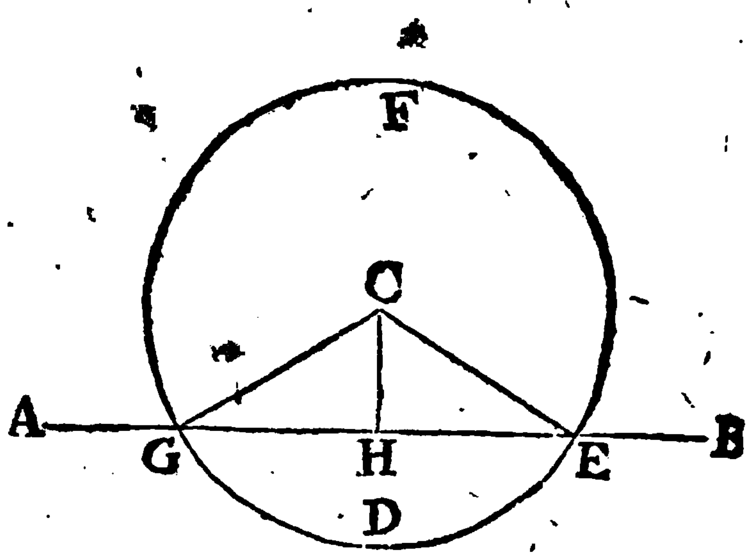


Auf AC nimm willkührlich einen Punkt D. Von CB nimm (3. S.) CE = CD. Auf DE errichte (1. S.) den gleichseitigen △ FDE, und ziehe FC: so ist diese perpendikular auf AB im Punkte C.

Denn da CD = CE, und CF beyden Triangeln gemein, auch DF = EF: so ist (8. S.) DCF = FCE, folglich (10. E.) FC perpendikular auf AB.

Der 12. Satz. Aufgabe.

Auf eine gegebene unbegränzte gerade Linie, AB, von einem außerhalb derselben gegebenen Punkte, C, einen Perpendikel zu fällen.



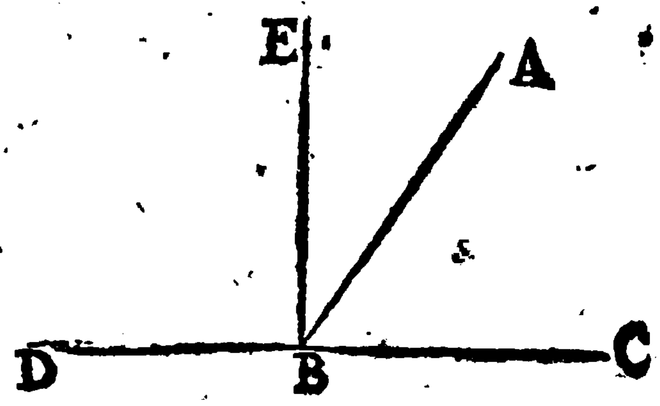
Nimm an der andern Seite von AB willkührlich einen Punkt D; beschreibe aus C mit CD den Kreis EFG; halbire (10. S.) GE in H, und ziehe CH: so ist diese perpendikular auf AB.

Denn ziehet man CG, CE, so ist GH = HE, CH gemeinschaftlich, und (15. E.) GC = CE; folglich (8. S.) GHC = CHE; folglich (10. E.) CH perpendikular auf AB.

Der

Der 13. Satz. Lehrsatz.

Die Winkel, welche eine gerade Linie, AB, die auf einer andern, CD, stehet, macht, sind entweder zwey rechte, oder zwey rechten gleich.

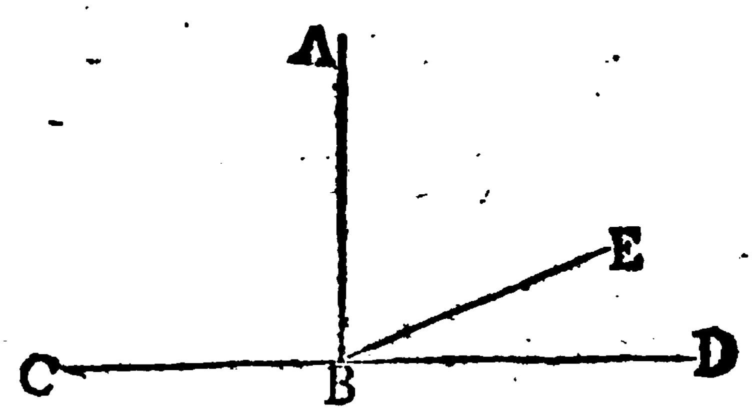


Sind diese Winkel einander gleich, so sind sie (10. E.) zwey rechte. Sind sie aber ungleich, wie ABC, ABD: so errichte (11. S.) auf CD in B den Perpendikel BE. Folglich sind (10. E.) CBE, EBD zwey rechte Winkel.

Da CBE = CBA + ABE, so ist, wenn EBD hinzukommt (2. G.) CBE + EBD = CBA + ABE + EBD Eben so, weil ABD = DBE + EBA, ist ABD + CBA = DBE + EBA + CBA. Folglich ist (1. G.) ABD + CBA = CBE + EBD, das ist = 2 R.

Der 14. Satz. Lehrsatz.

Machen mit einer geraden Linie, AB, in eben demselben Punkte, B, zwey andere, nicht an einerley Seite liegende gerade Linien, BC, BD, Nebenwinkel, CBA, DBA, welche zwey rechten Winkeln gleich sind: so liegen diese Linien in gerader Linie, CBD, an einander.

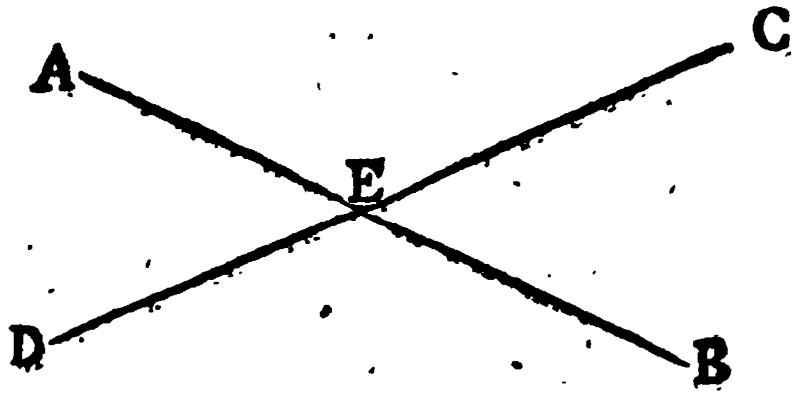


Wäre CBD keine gerade Linie, so sey es irgend eine andere, welche man will, etwa CBE. Folglich ist (13. S.) ABC + ABE = 2 R. Nun ist auch angenommen ABC + ABD = 2 R. Folglich ist (1. G.) ABC + ABE = ABC + ABD, folglich, wenn man ABC wegnimmt (3. G.) ABE = ABD, welches (9. G.) unmöglich. Demnach ist CBE keine gerade Linie, und aus eben den Gründen auch keine andere außer CBD. Folglich ist CBD eine gerade Linie.

Der

Der 15. Satz. Lehrsatz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, die einander schneiden, machen gleiche Scheitelwinkel, CEA, DEB; CEB, AED.



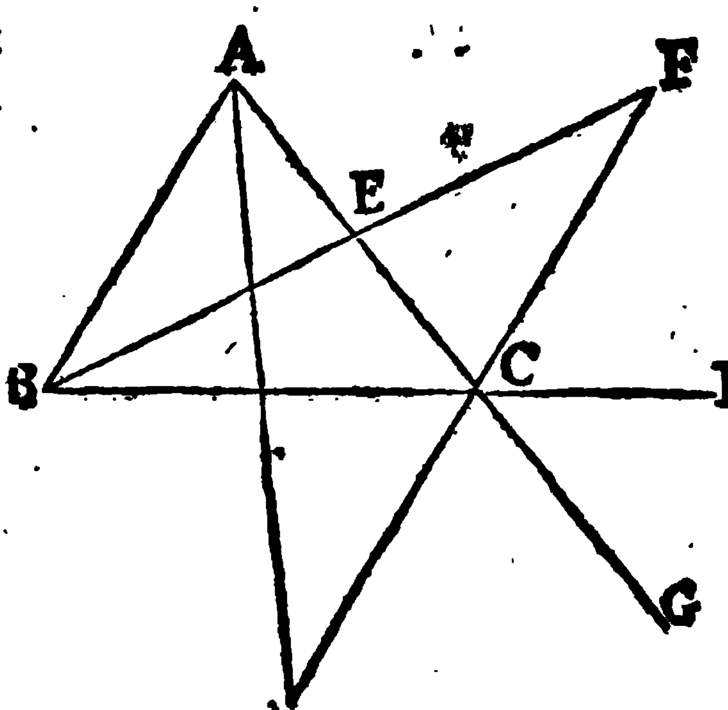
Da (13. S.) CEA + AED = 2 R., und AED + DEB = 2 R.: so ist (1. G.) CEA + AED = AED + DEB; folglich, wenn man AED wegnimmt, (3. G.) CEA = DEB. Eben so wird bewiesen, daß CEB = AED.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß, wenn gerade Linien, so viel ihrer seyn mögen, einander schneiden, alle Winkel an dem Durchschnittspunkte zusammen vier rechten Winkeln gleich sind.

Der 16. Satz. Lehrsatz.

An jedem Triangel, ABC, ist, wenn man eine seiner Seiten, BC, verlängert, der äußere Winkel, ACD, größer, als jeder der ihm gegenüber liegenden innern Winkel, CBA, BAC.



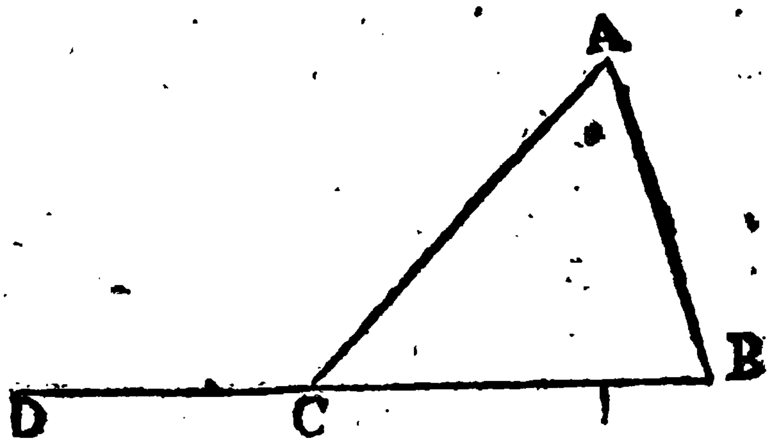
Halbire (10. S.) AC in E, ziehe BE, und verlängere sie, bis EF = EB. Ziehe FC.

Da BE = EF, AE = EC, und (15. S.) AEB = FEC: so ist (4. S.) BAE = ECF. Nun ist (9. G.) ACD > ECF. Folglich ist ACD > BAE.

Eben so wird auch BC halbiret, und, nachdem AC nach G verlängert worden, bewiesen, daß BCG, das ist (15. S.) ACD > CBA.

Der 17. Satz. Lehrsatz.

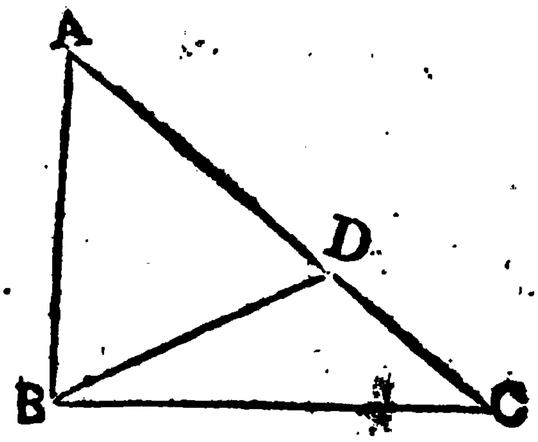
In jedem Triangel, ABC, sind jegliche zwey Winkel zusammen kleiner, als zwey rechte.



Verlängere BC nach D: so ist (16. S.) ABC < ACD, folglich (4. G.) ABC + ACB < ACD + ACB. Nun ist (13. S.) ACD + ACB = 2 R. Folglich ist ABC + ACB < 2 R. Eben so wird dieses von BAC + ACB, und von CAB + ABC, bewiesen.

Der 18. Satz. Lehrsatz.

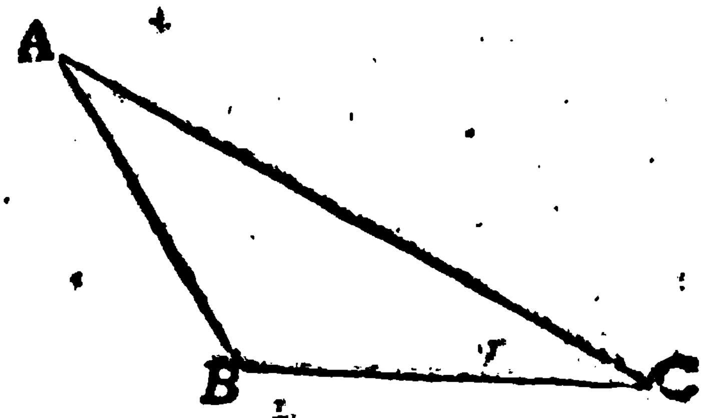
In jedem Triangel, ABC, liegt der größern Seite, AC, auch der größere Winkel, ABC, gegenüber.



Da AC > AB: so mache (3. S.) AD = AB, und ziehe BD: so ist (5. S.) ADB = ABD. Nun ist (16. S.) ADB > ACB. Folglich ist auch ABD, also noch mehr ABC, > ACB.

Der 19. Satz. Lehrsatz.

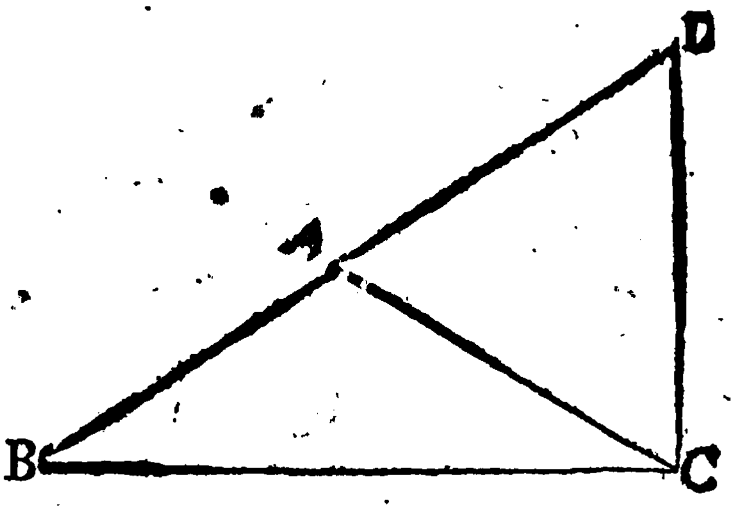
In jedem Triangel, ABC, liegt dem größern Winkel, ABC, auch die größere Seite, AC, gegenüber.



Wäre nicht AC > AB: so müßte man annehmen, entweder AC = AB, oder AC < AB. Im ersten Falle wäre (5. S.) ABC = ACB, im zweyten (18. S.) ABC < ACB; welches beydes dem Angenommenen, ABC > ACB, offenbar widerspricht. Folglich ist AC > AB.

Der 20. Satz. Lehrsatz.

In jedem Triangel, ABC, sind jegliche zwey Seiten zusammen größer, als die dritte.

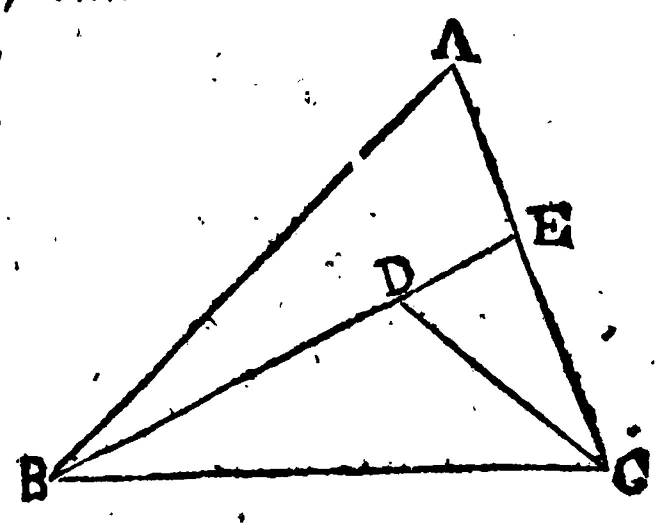


Verlängere BA nach D, mache AD = AC, und ziehe DC.

Da AD = AC, so ist (5. S.) ACD = ADC. Nun ist BCD > ACD, folglich BCD > ADC, folglich (19. S.) BD, das ist BA + AC > BC. Eben so wird bewiesen, daß AB + BC > AC, und daß BC + CA > AB.

Der 21. Satz. Lehrsatz.

Wenn von den Endpunkten B, C einer der Seiten eines Triangels, ABC, zwey gerade Linien BD, CD in einem Punkte innerhalb desselben, D, zusammenlaufen; so sind die zusammenlaufenden Linien kleiner, als des Triangels beyde übrige Seiten, AB, AC, schließen aber einen größern Winkel, BDC, ein.



Verlängert man BD bis E, so ist im △ ABE (20. S.) BA + AE > BE, folglich, wenn EC hinzukommt, BA + AC > BE + EC. Nun ist im △ CDE (20. S.) DE + EC > CD, und daher, wenn DB hinzukommt, BE + EC > CD + DB. Aber BA + AC > BE + EC, folglich ist noch vielmehr BA + AC > CD + DB.

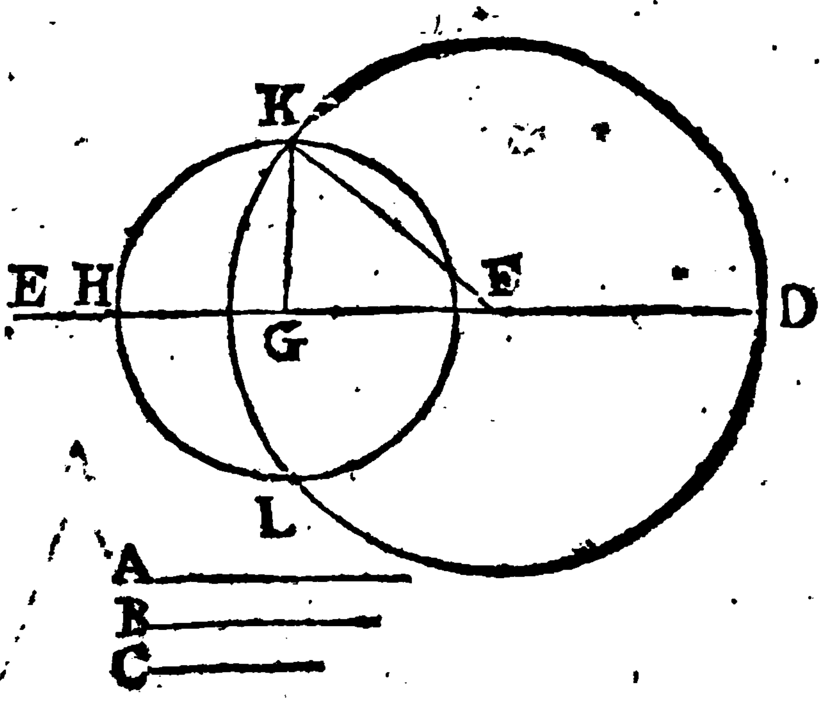
Da (16. S.) BDC > BEC, und BEC > BAC: so ist noch vielmehr BDC > BAC.

Der 22. Satz. Aufgabe.

Einen Triangel zu beschreiben, dessen Seiten drey gegebenen geraden Linien A, B, C gleich sind, wovon jedoch

doch je zwey zusammen genommen grösser seyn müssen, als die dritte.

Ziehe eine gerade Linie, DE, welche in D begränzt, nach E zu aber unbegränzt sey. Mache DF = A, FG = B, GH = C. Aus F beschreibe mit FD den Kreis DKL, und aus G mit GH den Kreis KLH. Von K, wo beyde Kreise einander schneiden, ziehe KF, KG: so ist KFG der verlangte Triangel.

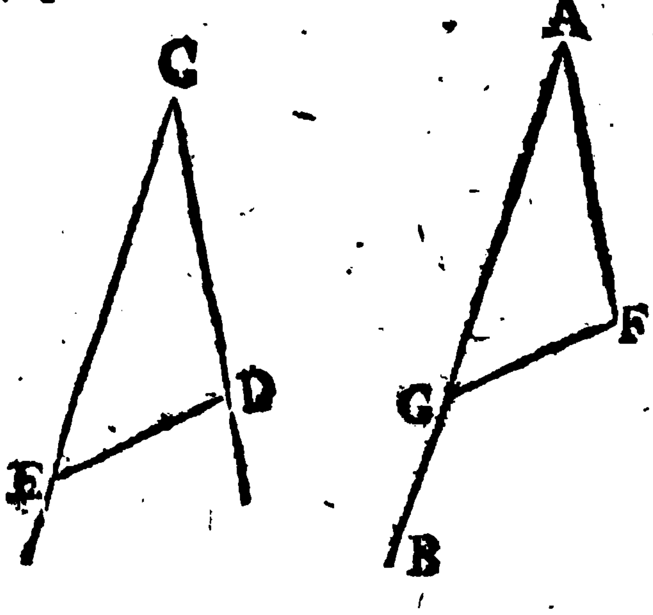


Denn da (15. E.) FD = FK, aber FD = A: so ist (1. G.) FK = A. Eben so, weil GH = GK und GH = C, ist GK = C. Nun war auch FG = B. Demnach sind die Seiten des △ KFG den gegebenen Linien, A, B, C, gleich.

Der 23. Satz. Aufgabe.

Auf eine gegebene gerade Linie, AB, an einen in ihr gegebenen Punkt, A, einen dem gegebenen, DCE, gleichen geradlinigen Winkel zu setzen.

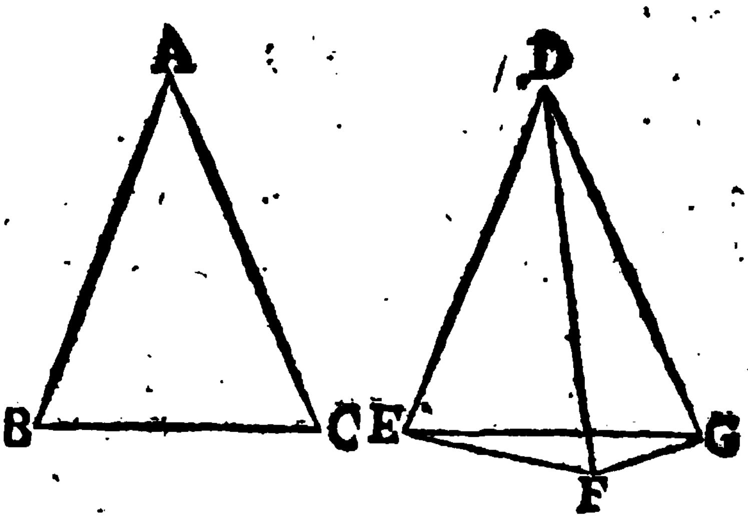
Auf CD sowohl, als CE, nimm willkührlich einen Punkt D, E, und ziehe DE. Beschreibe (22. S.) den Triangel AFG, daß AF = CD, AG = CE, FG = DE: so ist (8. S.) FAG = DCE.



Der

Der 24. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten, AB, AC, zweyen Seiten, DE, DF, jede für sich, gleich sind (die AB der DE, die AC der DF); ein Winkel des einen, BAC, aber größer ist, als ein Winkel des andern, EDF, der nämlich, welchen die gleichen Seiten einschließen: so ist auch in jenem die dritte Seite, BC, größer, als in diesem die dritte, EF.

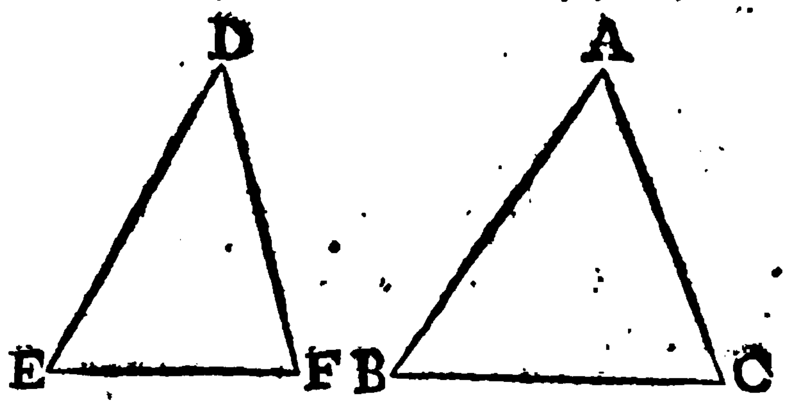


Da BAC > EDF, so lege (23. S.) an diejenige Seite DE, welche nicht größer als die andere DF ist, in dem Punkte D, den Winkel EDG = BAC; mache DG = AC = DF, und ziehe GE, GF.

Da AB = DE, AC = DG, und BAC = EDG: so ist (4. S.) BC = EG. Nun ist DG = DF, und daher (5. S.) DFG = DGF. Folglich ist DFG > EGF, folglich noch vielmehr EFG > EGF, folglich (19. S.) EG, das ist BC > EF.

Der 25. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Triangeln, ABC, DEF, zwey Seiten, AB, AC, zweyen Seiten, DE, DF, jede für sich, gleich sind, (die AB der DE, die AC der DF); die dritte Seite des einen, BC, aber größer ist, als die dritte des andern, EF; so ist auch in jenem ein Winkel, BAC, größer, als in diesem einer, EDF, der nämlich, den die gleichen Seiten einschließen.



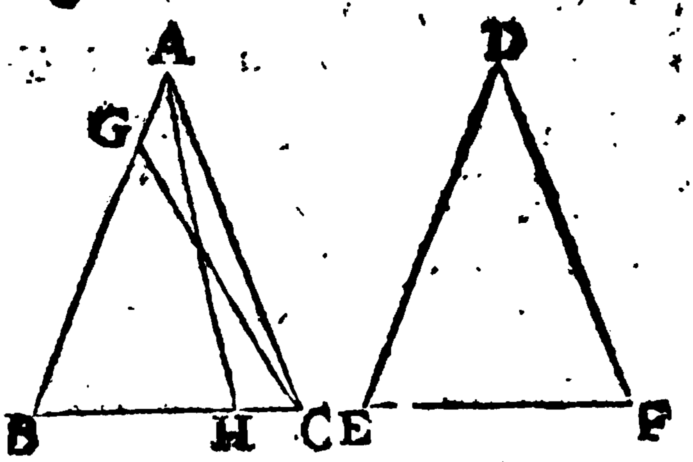
Wäre nicht BAC > EDF, so wäre entweder BAC = EDF, oder BAC < EDF, folglich im ersten Falle (4 S.) BC = EF, im zweyten (24. S.) BC < EF; welches beydes dem Angenommenen, BC > EF, widerspricht. Folglich ist BAC > EDF.

Der

Der 26. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwey Triangeln, ABC, DEF, zwey Winkel, ABC, BCA, zweyen Winkeln, DEF, EFD, jeder für sich, gleich sind (ABC dem DEF, und BCA dem EFD); und eine Seite einer Seite gleich ist, sie mag nun an den gleichen Winkeln, oder einem derselben gegenüber liegen: so sind auch die beyden übrigen Seiten den beyden übrigen, jede für sich, auch der dritte Winkel, BAC, dem dritten, EDF, gleich.

Erster Fall.



Wenn die an den gleichen Winkeln liegenden Seiten, BC, EF, einander gleich sind: so ist

1) AB = DE. Denn wären AB, DE, ungleich, so müßte eine davon, etwa AB, größer seyn. Es sey daher BG = ED. Ziehe GC. Da also BG = ED, BC = EF, GBC = DEF: so ist (4. S.) BCG = EFD. Nun war angenommen, BCA = EFD. Folglich wäre BCA = BCG, welches (9. G.) unmöglich ist. Demnach können AB, DE, nicht ungleich seyn, folglich ist AB = DE.

2) Da AB = DE, BC = EF, ABC = DEF: so ist (4. S.) AC = DF, und BAC = EDF.

Zweyter Fall.

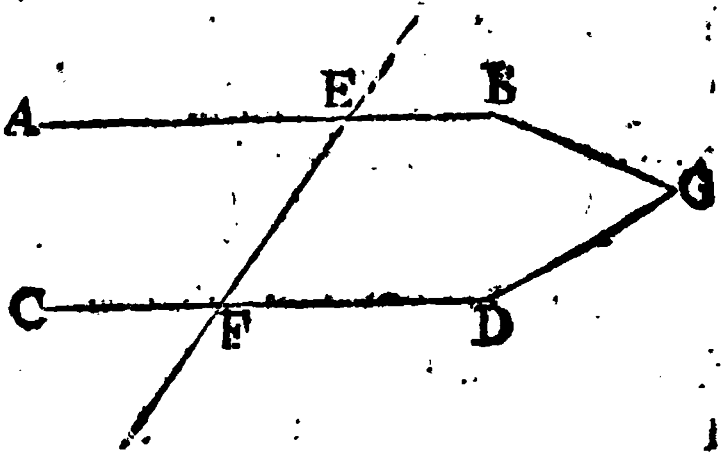
Wenn die einem der gleichen Winkel gegenüber liegenden Seiten, AB, DE, einander gleich sind: so ist

1) BC = EF. Denn wären BC, EF, ungleich, so müßte eine davon, etwa BC, größer seyn. Es sey daher BH = EF. Ziehe AH. Da also BH = EF, AB = DE, ABC = DEF: so ist (4. S.) BHA = EFD. Nun war angenommen BCA = EFD. Folglich wäre BHA = BCA, welches (16. S.) unmöglich. Demnach können BC, EF, nicht ungleich seyn. Folglich ist BC = EF.

2) Da BC = EF, AB = DE, ABC = DEF: so ist (4. S.) AC = DF, und BAC = EDF.

Der 27. Satz. Lehrsatz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, mit denen eine dritte sie schneidende, EF, gleiche Wechselwinkel, AEF, EFD, macht, sind parallel.

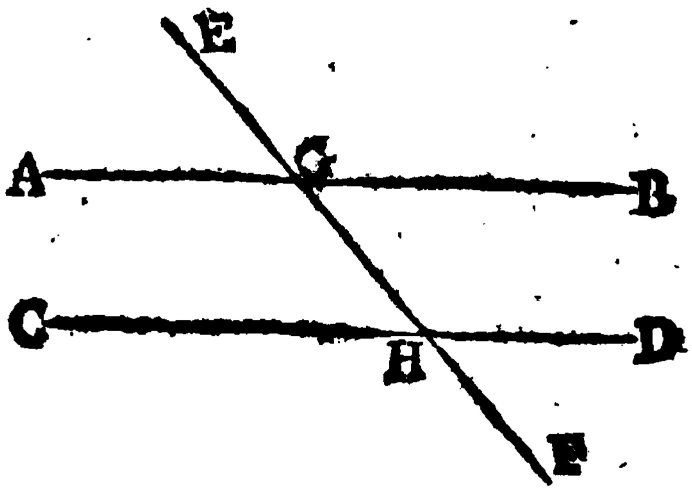


Wären AB, CD, nicht parallel, so würden sie, genugsam verlängert, an irgend einer Seite zusammentreffen. Gesetzt, es geschähe dies in G. Folglich wäre im △ EFG (16. S.) AEF > EFD, welches dem Angenommenen AEF = EFD, widerspricht. Demnach können AB, CD an dieser Seite nicht zusammentreffen; aus gleichen Gründen aber auch nicht an der entgegengesetzten Seite. Folglich sind (35. E.) AB, CD, parallel.

Der 28. Satz. Lehrsatz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, mit denen eine dritte sie schneidende, EF, den äußern Winkel EGB, dem ihm an derselben Seite gegenüber liegenden innern Winkel GHD, oder die beyden an einerley Seite liegenden innern Winkel, BGH, GHD, zweyen rechten gleich macht, sind parallel.

Erster Theil.



Da EGB = GHD, und (15. S.) EGB = AGH: so ist (1. G.) AGH = GHD. Folglich sind (27. S.) AB, CD, parallel.

Zwey=

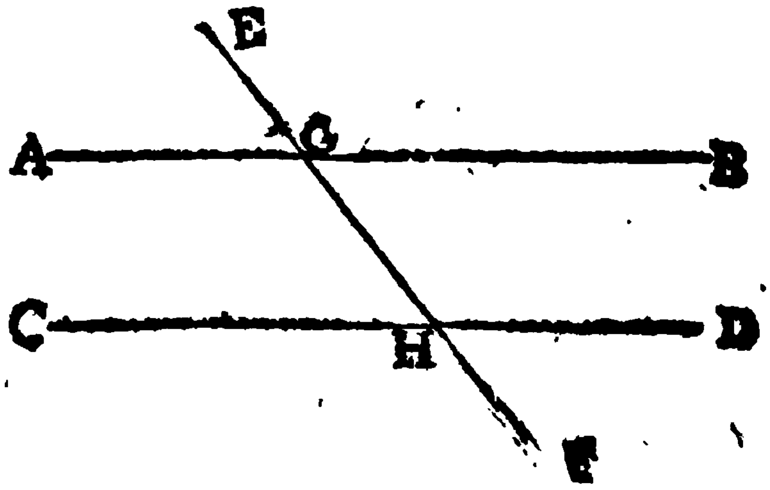
Zweyter Theil.

Da BGH + GHD = 2 R., und (13. S.) AGH + BGH = 2 R.: so ist (1. G.) AGH + BGH = BGH + GHD; folglich, wenn man BGH wegnimmt, (3. G.) AGH = GHD: folglich sind (27. S.) AB, CD, parallel.

Der 29. Satz. Lehrsatz.

Wenn zwey gerade Linien, AB, CD, parallel sind, so macht eine dritte sie schneidende, EF, mit ihnen die Wechselwinkel, AGH, GHD, einander; desgleichen den äußern Winkel, EGB, dem ihm an derselben Seite gegenüberliegenden innern Winkel, GHD; ferner die beyden an einerley Seite liegenden innern Winkel, BGH, GHD, zweyen rechten gleich.

Erster Theil.



Wären die Winkel AGH, GHD, ungleich, so müßte einer davon, etwa AGH, größer seyn. Folglich ist, wenn BGH, hinzukommt, (4. G.) AGH + BGH > BGH + GHD. Nun ist (13. S.) AGH + BGH = 2 R. Folglich ist BGH + GHD < 2 R. Folglich müßten (11. G.) AB, CD, verlängert zusammentreffen, und wären (35. E.) nicht parallel, gegen das Angenommene. Demnach können AGH, GHD, nicht ungleich seyn. Folglich ist AGH = GHD.

Zweyter Theil.

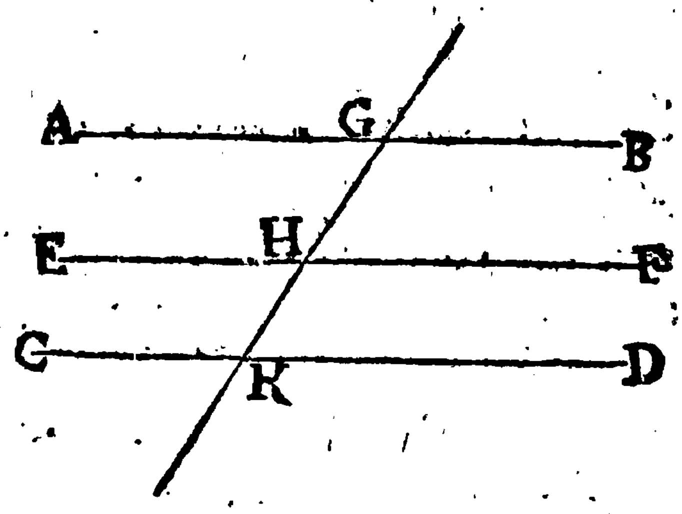
Da AGH = GHD, und (15. S.) AGH = EGB; so ist (1. G.) EGB = GHD.

Dritter Theil.

Da EGB = GHD, so ist, wenn BGH hinzukommt, (2. G.) EGB + BGH = BGH + GHD. Nun ist (13. S.) EGB + BGH = 2 R. Folglich ist (1. G.) BGH + GHD = 2 R.

Der 30. Satz. Lehrsatz.

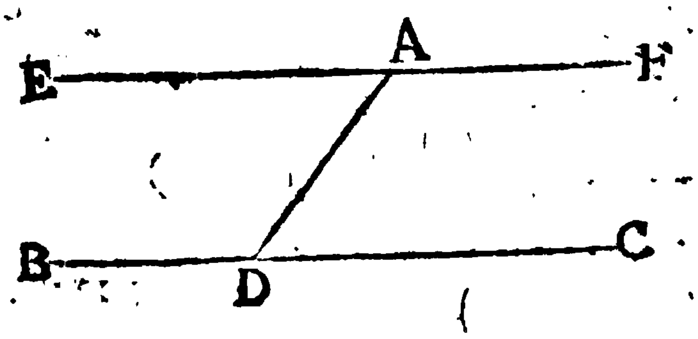
Gerade Linien, AB, CD, welche Einer dritten, EF, parallel sind, sind einander selbst parallel.



Es schneide sie die gerade Linie, GK. Da AB, EF, parallel, so ist (29. S.) AGH = GHF. Nun ist, weil EF, CD, parallel, (29. S.) GHF = GKD. Folglich ist (1. G.) AGH = GKD. Folglich sind (27. S.) AB, CD, parallel.

Der 31. Satz. Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt, A, eine gerade Linie einer gegebenen, BC, parallel zu ziehen.



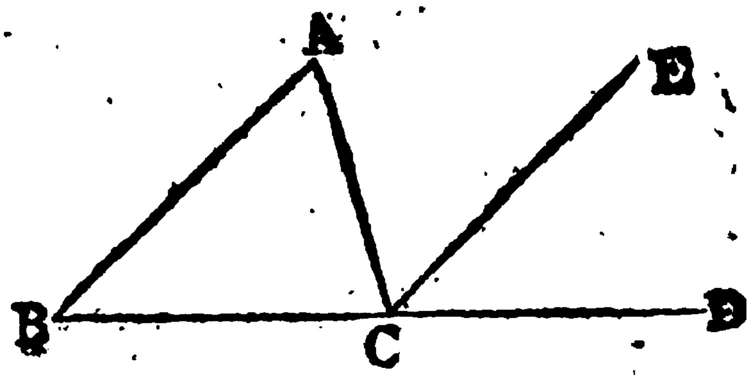
In BC nimm willkührlich einen Punkt D, ziehe DA, mache (23. S.) DAE = ADC, und verlängere EA nach F: so ist (27. S.) EF der BC parallel.

Der 32. Satz. Lehrsatz.

An jedem Triangel, ABC, ist, wenn man eine seiner Seiten, BC, verlängert, der äußere Winkel, ACD, den beyden ihm gegenüberliegenden innern Winkeln, CAB, ABC, gleich; auch sind die drey innern Winkel eines Triangels, ABC, BCA, CAB, zweyen rechten gleich.

Erster

Erster Theil.



Durch C ziehe (31. S.) der AB, die CE parallel.

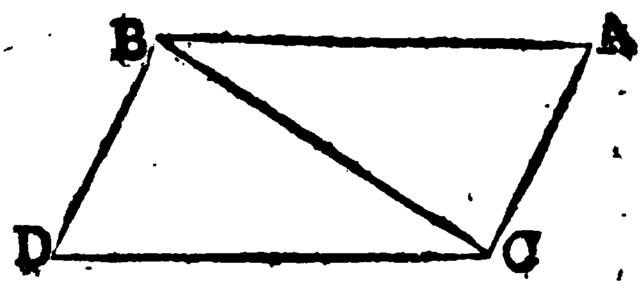
Da AB, CE, parallel sind: so ist (29. S.), weil AC sie schneidet, BAC = ACE, und weil auch BD sie schneidet, ABC = ECD. Folglich ist (2. G.) BAC + ABC = ACD.

Zweyter Theil.

Da BAC + ABC = ACD, so ist, wenn ACB hinzukommt, (2. G.) BAC + ABC + ACB = ACD + ACB. Nun ist (13. S.) ACD + ACB = 2. R. Folglich ist (1. G.) auch BAC + ABC + ACB = 2 R.

Der 33. Satz. Lehrsatz.

Die geraden Linien AC, BD, welche die Endpunkte gleicher und paralleler gerader Linien AB, CD an einerley Seite verbinden, sind selber gleich und parallel.



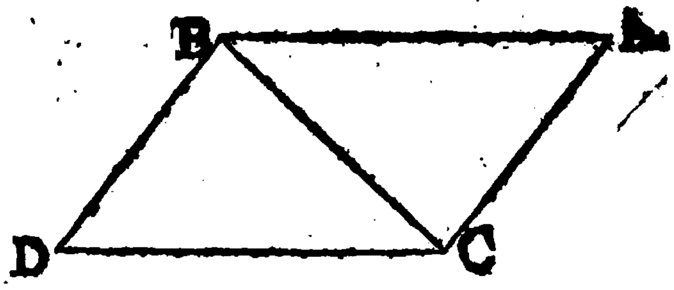
Ziehe BC, so ist, weil AB, CD, parallel, (29. S.) ABC = BCD, folglich, weil AB = CD, und BC gemein (4. S.) AC = BD; auch ACB = CBD, und daher (27. S.) AC der BD parallel.

Der 34. Satz. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme, ACDB, sind die gegenüberliegenden Seiten so wohl als Winkel einander gleich; auch wird das Parallelogramm von der Diagonale, BC, halbiret.

Erster Theil.

Da AB, CD, und so auch AC, BD, parallel: so ist (29. S.) ABC = BCD, und ACB = CBD. Nun ist BC gemein. Folglich ist (26. S.)



AB = CD, AC = BD, BAC = BDC. Auch ist, weil ABC = BCD, und CBD = ACB, (2. S.) ABC + CBD = BCD + ACB, das ist, ABD = ACD.

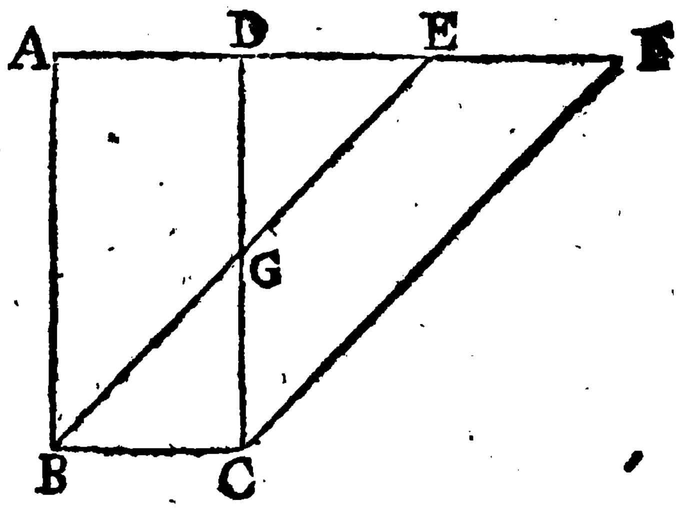
Zweyter Theil.

Da AB = CD, und BC gemein, auch ABC = BCD: so ist (4. S.) △ ABC = △ CBD.

Der 35. Satz. Lehrsatz.

Parallelogramme, ABCD, EBCF, auf einerley Grundlinie, BC, und in einerley Parallellinien, AF, BC, sind einander gleich.

Da (34. S.) AD = BC, und EF = BC: so ist (1. S.) AD = EF; folglich, wenn DE hinzukommt, (2. S.) AE = DF. Nun ist auch (34. S.) AB = DC, und (29. S.) EAB = FDC. Folglich ist (4. S.) △ ABE = △ CDF,



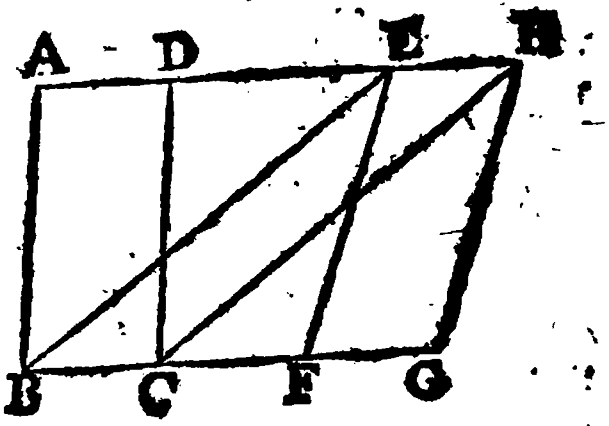
folglich, wenn △ EDG hinwegkommt, (3. S.) das Trapez ABGD = EGCF, folglich, wenn △ GBC hinzukommt, (2. S.) das Parallelogramm ABCD = EBCF.

Auf ähnliche Art, und noch leichter wird der Beweis geführt, wenn E in D, oder zwischen D und A liegt.

Der 36. Satz. Lehrsatz.

Parallelogramme, ABCD, EFGH, auf gleichen Grundlinien, BC, FG, und in einerley Parallellinien, AH, BG, sind einander gleich.

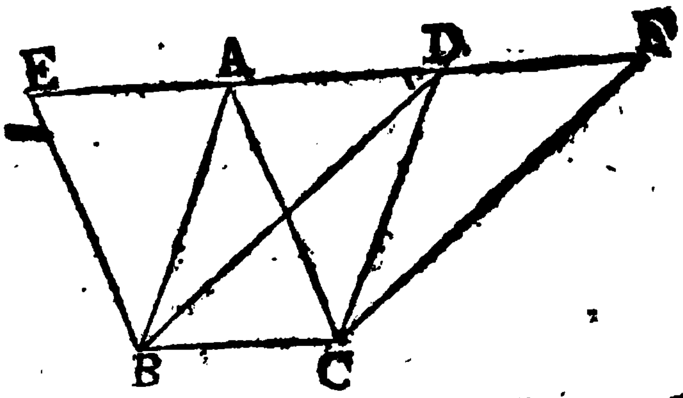
Ziehe



Ziehe BE, CH. Da BC = FG, und (34. S.) FG = EH: so ist (1. G.) BC = EH. Nun sind BC, EH, auch parallel. Folglich sind (33. S.) EB, CH gleich, und parallel. Folglich ist EBCH ein Parallelogramm, folglich (35. S.) ABCD = EBCH, und EFGH = EBCH, folglich (1. G.) ABCD = EFGH.

Der 37. Satz. Lehrsatz.

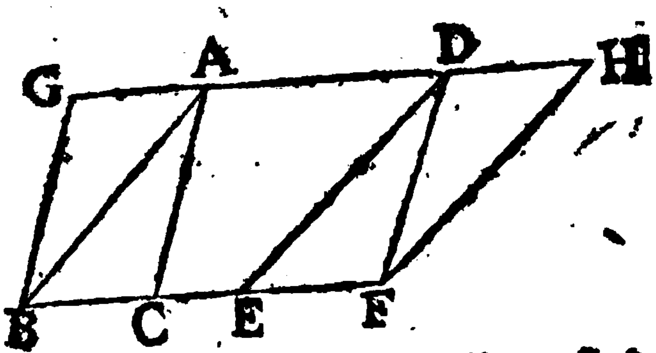
Triangel, ABC, DBC, auf einerley Grundlinie, BC, und in einerley Parallellinien, AD, BC, sind einander gleich.



Verlängert man AD an beyden Seiten, und ziehet (31. S.) durch B der AC die BE, und durch C der BD die CF parallel: so sind EBCA, DBCF, Parallelogramme, und (35. S.) einander gleich. Nun sind (34. S.) die Triangel ABC, DBC, die Hälften dieser Parallelogramme. Folglich sind (7. G.) die Triangel ABC, DBC auch einander gleich.

Der 38. Satz. Lehrsatz.

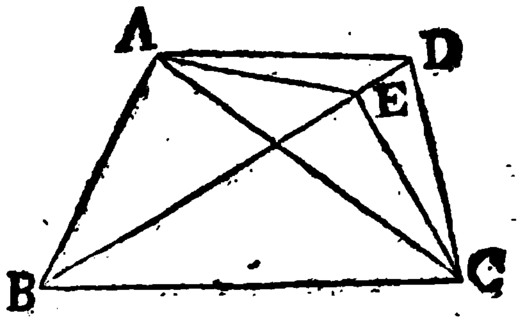
Triangel, ABC, DEF, auf gleichen Grundlinien, BC, EF, und in einerley Parallellinien, AD, BF, sind einander gleich.



Verlängert man AD an beyden Seiten, und ziehet (31. S.) durch B der AC die BG, und durch F der ED die FH parallel: so sind GBCA, DEFH, Parallelogramme, und (36. S.) einander gleich. Nun sind (34. S.) die Triangel ABC, DEF, die Hälften dieser Parallerallelogramme. Folglich sind (7. S.) die Triangel ABC, DEF, auch einander gleich.

Der 39. Satz. Lehrsatz.

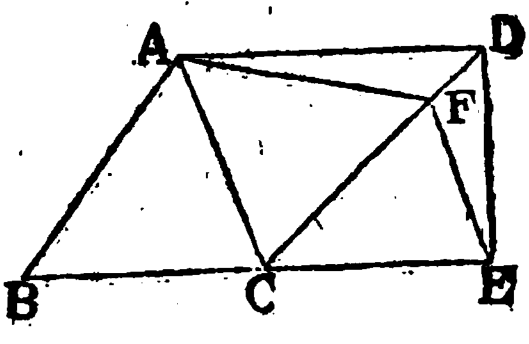
Gleiche Triangel, ABC, DBC, auf einerley Grundlinie, BC, und an einerley Seite sind in einerley Parallellinien, AD, BC.



Wäre der BC die AD nicht parallel, so sey es eine andere, etwa AE. Ziehet man EC, so ist (37. S.) △ ABC = △ EBC. Nun war angenommen, △ ABC = △ DBC. Folglich wäre (1. G.) △ DBC = △ EBC, welches (9. G.) unmöglich. Demnach ist AE der BC nicht parallel, und aus gleichen Gründen auch keine andere Linie außer AD. Folglich ist AD der BC parallel.

Der 40. Satz. Lehrsatz.

Gleiche Triangel, ABC, DCE, auf gleichen Grundlinien, BC, CE, und an einerley Seite, sind in einerley Parallellinien, AD, BE.



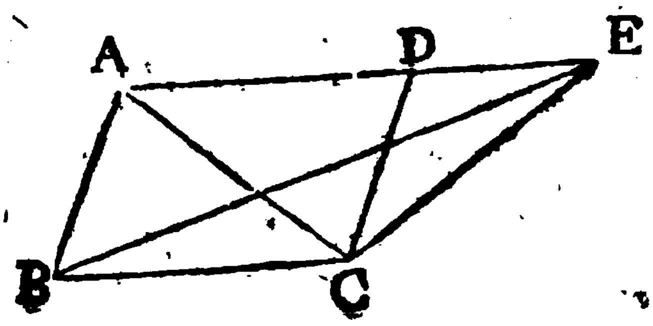
Wäre der BE die AD nicht parallel, so sey es eine andere, etwa AF. Ziehet man FE, so ist (38. S.) △ ABC = △ FCE. Nun ist angenommen, △ ABC = △ DCE. Folglich wäre (1. G.) △ DCE = △ FCE, welches (9. G.) unmöglich. Demnach ist AF der BE nicht parallel, und aus gleichen Gründen auch keine andere Linie außer AD. Folglich ist AD der BE parallel.

Der 41. Satz. Lehrsatz.

Wenn ein Parallelogramm, ABCD, und ein Triangel, EBC, auf einerley Grundlinie, BC, und in einerley

Paral-

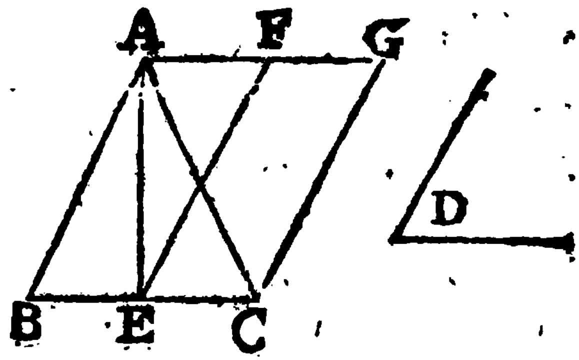
Parallellinien, BC, AE, sind: so ist das Parallelogramm doppelt so groß, als der Triangel.



Ziehet man AC, so ist (37. S.) △ABC = △EBC. Nun ist (34. S.) ABCD = 2△ABC. Folglich ist auch ABCD = 2△EBC.

Der 42. Satz. Aufgabe.

Ein dem gegebenen Triangel, ABC, gleiches Parallelogramm unter einem gegebenen geradlinigen Winkel, D, zu beschreiben.

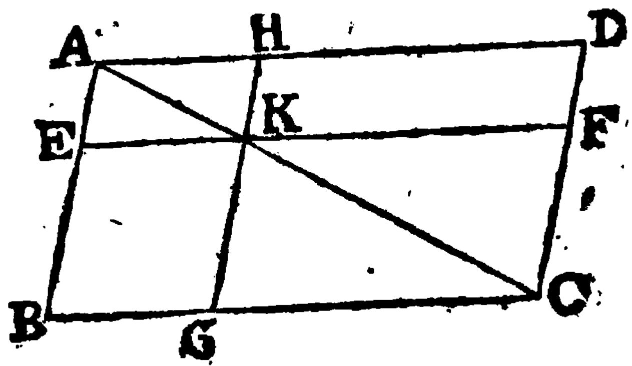


Halbire (10. S.) BC in E, und ziehe AE. Auf CE setze in E (23. S.) CEF = D. Ziehe (31. S.) durch A der BC die AG, und durch C der EF die CG parallel; so ist FECG das verlangte Parallelogramm.

Denn es ist FECG ein Parallelogramm unter dem Winkel CEF = D, auch (41. S.) FECG = 2△AEC. Nun ist (38. S.) △ABE = △AEC, und daher △ABC = 2△AEC. Folglich ist (6. G.) FECG = ABC.

Der 43. Satz. Lehrsatz.

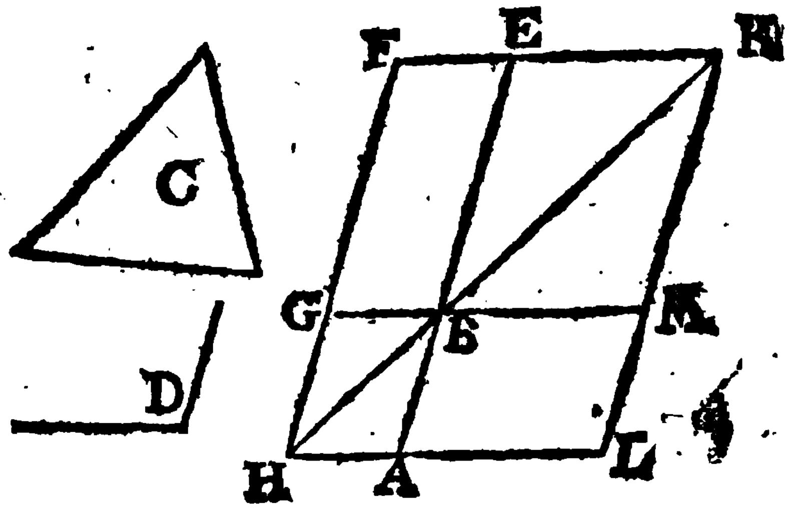
In jedem Parallelogramme, ABCD, sind die Ergänzungen, BK, KD, der um die Diagonale, AC, herumliegenden Parallelogramme, EH, FG, einander gleich.



Da (34. S.) △ABC = △CAD, und △AEK = △AHK: so ist (3. G.) EKCB = KHDC. Nun ist (34. S.) △KGC = △KCF. Folglich ist (3. G.) BK = KD.

Der 44. Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie, AB, ein, dem gegebenen Triangel, C, gleiches Parallelogramm, unter einem gegebenen geradlinigen Winkel, D, zu beschreiben.



Mache (42. S.) ein Parallelogramm BEFG $= \triangle$ C, so daß EBG $=$ D, und bringe solches an die gegebene Linie AB, dergestalt, daß AB, BE, in gerader Linie an einander liegen. Durch A ziehe (31. S.) der EF die AH parallel. Verlängere FG bis H, und ziehe HB: so ist (29. S.) AHF $+$ EFH $=$ 2 R. Folglich BHF $+$ EFH $<$ 2 R., folglich werden (11. G.) HB, FE, nach B, E zu verlängert zusammentreffen. Dieß geschehe in K. Ziehe (31. S.) durch K der EA oder FH die KL parallel, und verlängere HA, GB, nach L, M: so ist LB das verlangte Parallelogramm.

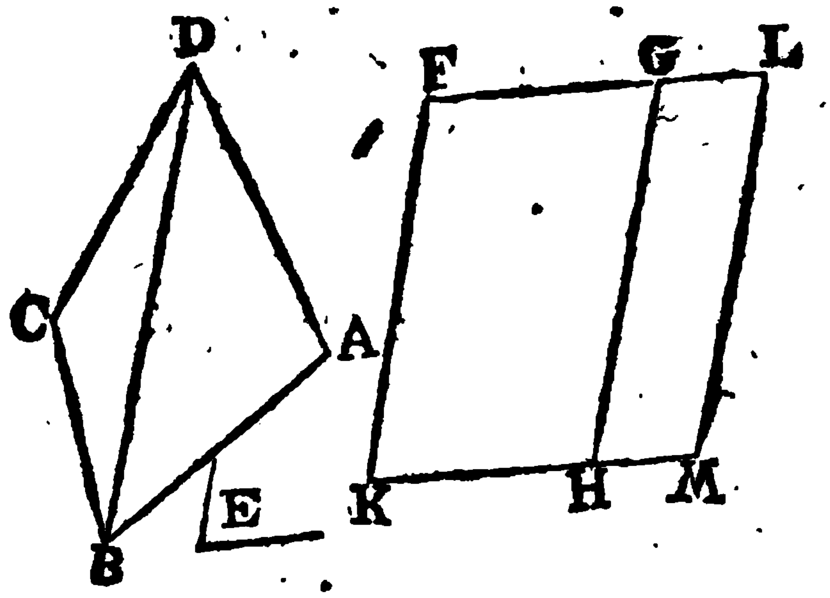
Denn hiernach ist HLKF ein Parallelogramm, dessen Diagonale HK, folglich (43. S.) LB $=$ BF. Auch ist (15. S.) ABM $=$ GBE. Nun war BF $= \triangle$ C, und GBE $=$ D. Folglich ist (1. G.) LB $= \triangle$ C, und ABM $=$ D.

Der 45. Satz. Aufgabe.

Ein der gegebenen geradlinigen Figur, ABCD, gleiches Parallelogramm unter einem gegebenen geradlinigen Winkel, E, zu beschreiben.

Ziehe DB. Mache (42. S.) das Parallelogramm FH $=$ $\triangle$ ABD, so daß FKH $=$ E. Auf GH beschreibe (44. S.) das Parallelogramm GM $= \triangle$ DBC, so daß GHM $=$ E: so ist KFLM das verlangte Parallelogramm.

Denn



Denn hiernach ist (1. G.) GHM = E = FKH, folglich, wenn GHK hinzukommt, (2. G.) GHM + GHK = FKH + GHK = (29. S.) 2 R. Folglich sind (14. S.) KH, HM, in gerader Linie.

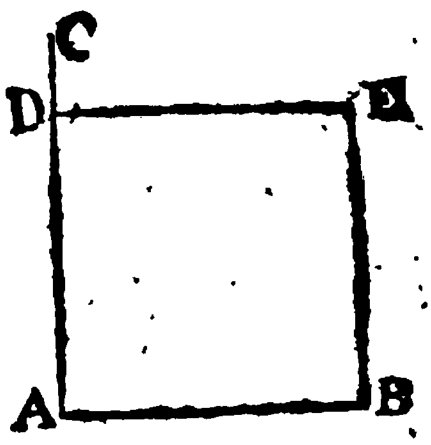
Da FG, KM, parallel: so ist (29. S.) FGH = GHM, folglich FGH + LGH = GHM + LGH = (29. S.) 2 R. Folglich sind (14. S.) FG, GL, in gerader Linie.

Da (34. S.) FK der GH, und GH der LM gleich und parallel: so ist (1. G. u. 30. S.) FK, der LM, gleich und parallel. Folglich sind (33. S.) FL, KM, auch gleich und parallel; folglich ist KFLM ein Parallelogramm, dessen Winkel FKM = E.

Da FH = △ ABD, und GM = △ BDC: so ist (2. G.) KFLM = ABCD.

Der 46. Satz. Aufgabe.

Einer gegebenen geraden Linie, AB, Quadrat zu beschreiben.



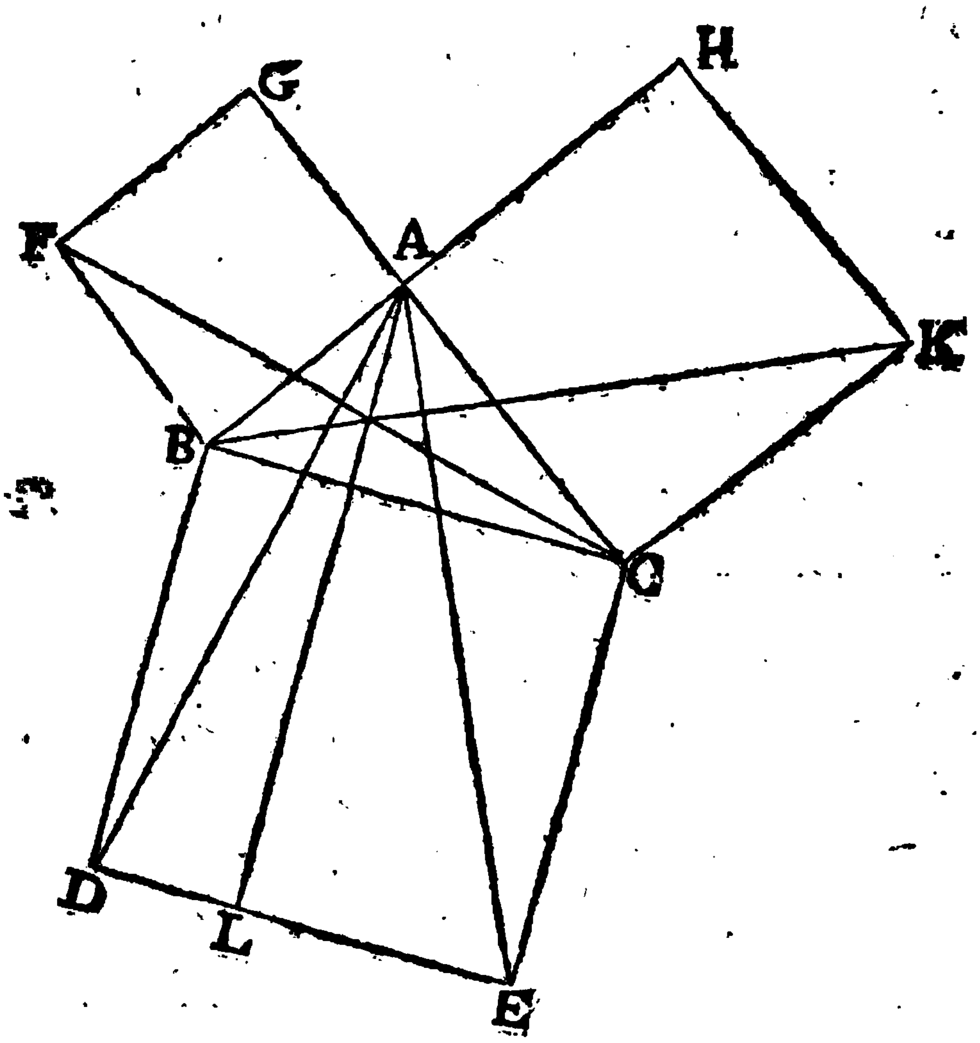
Auf AB errichte (11. S.) in A den Perpendikel AC. Mache AD = AB. Ziehe (31. S.) durch D der AB die DE, und durch B der AD die BE parallel; so ist ADEB das verlangte Quadrat.

Denn hiernach ist ADEB ein Parallelogramm, folglich (34. S.) die gegenüberliegenden Seiten einander gleich. Nun ist AB = AD. Folglich ist das Parallelogramm ADEB gleichseitig.

Da AB, DE, parallel: so ist (29. S.) A + D = 2 R., folglich, da A = R., auch D = R. Nun sind (34. S.) die gegenüberliegenden Winkel gleich. Folglich ist das Parallerallelogramm ADEB rechtwinklig. Nun war es nach Obigem auch gleichseitig. Folglich ist ADEB (30. E.) ein Quadrat.

Der 47. Satz. Lehrsatz.

In jedem rechtwinkligen Triangel, ABC, ist das Quadrat der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite, BC, den Quadraten der ihn einschließenden Seiten, BA, AC, gleich.



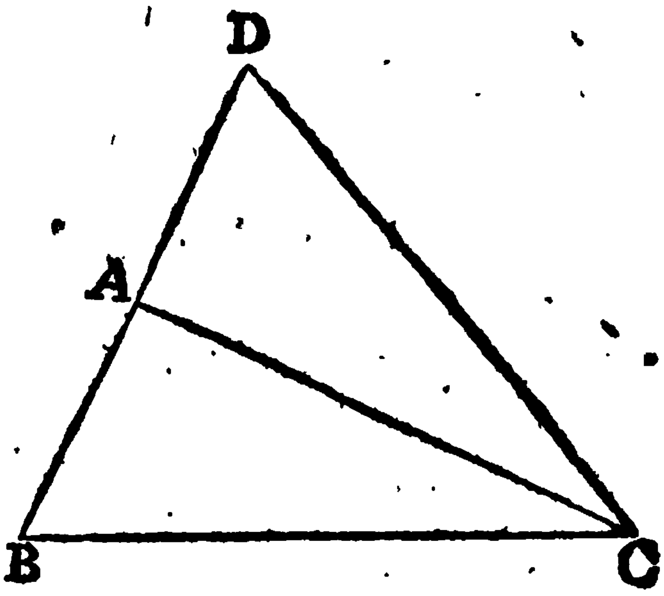
Beschreibe (46. S.) von BC das Quadrat BDEC, und von BA, AC, die Quadrate, GB, HC: so sind BAC, BAG, CAH, rechte Winkel, daß also (14. S.) sowohl CA mit AG, als auch BA mit AH, in gerader Linie ist. Ziehe AD, FC, und (31. S.) durch A der BD oder CE die AL parallel.

Da (10. G.) DBC = FBA, so ist, wenn CBA hinzukommt, (2. G.) DBA = FBC. Nun ist AB = BF, und DB = BC. Folglich ist (4. S.) △ ABD = △ FBC. Nun ist, weil AL der BD, und GC der FB parallel, (41. S.) BL = 2 △ ABD, und GB = 2 △ FBC. Folglich ist (6. G.) BL = GB. Nun ist, wenn man AE, BK, ziehet, aus eben den Gründen, CL = CH. Folglich ist (2. G.) BDEC = GB + CH.

Der

Der 48. Satz. Lehrsatz.

Wenn in einem Triangel, ABC, das Quadrat einer seiner Seiten, BC, den Quadraten der beyden übrigen Seiten, BA, AC, gleich ist: so ist der von diesen beyden übrigen Seiten eingeschlossene Winkel, BAC, ein rechter.



Errichte (11. S.) auf AC in A den Perpendikel AD. Mache AD $=$ AB, und ziehe DC: so ist auch $\square$ AD $=$ $\square$ AB, folglich, wenn $\square$ AC hinzukommt, (2. G.) $\square$ AD $+ \square$ AC $= \square$ AB $+ \square$ AC. Nun ist, weil DAC ein rechter Winkel, (47. S.) $\square$ AD $+$ AC $= \square$ DC, und nach dem Angenommenen $\square$ AB $+ \square$ AC $= \square$ BC. Folglich ist $\square$ DC $= \square$ BC, und daher DC $=$ BC.

Da AD $=$ AB, und AC gemein, auch DC $=$ BC: so ist (8. S.) DAC $=$ BAC. Nun ist DAC ein rechter Winkel. Folglich ist auch BAC ein rechter Winkel

Euklid's

Euklid's Elemente

Zweytes Buch.

Erklärungen.

1. Von jedem rechtwinkligen Parallelogramm sagt man, es sey unter den beyden den rechten Winkel einschließenden Seiten enthalten.

Der Kürze wegen soll in der Folge ein rechtwinkliges Parallelogramm ein **Rectangel** heißen, und wenn es z. E. unter den Seiten AB, BC, enthalten ist, durch AB×BC angedeutet werden.

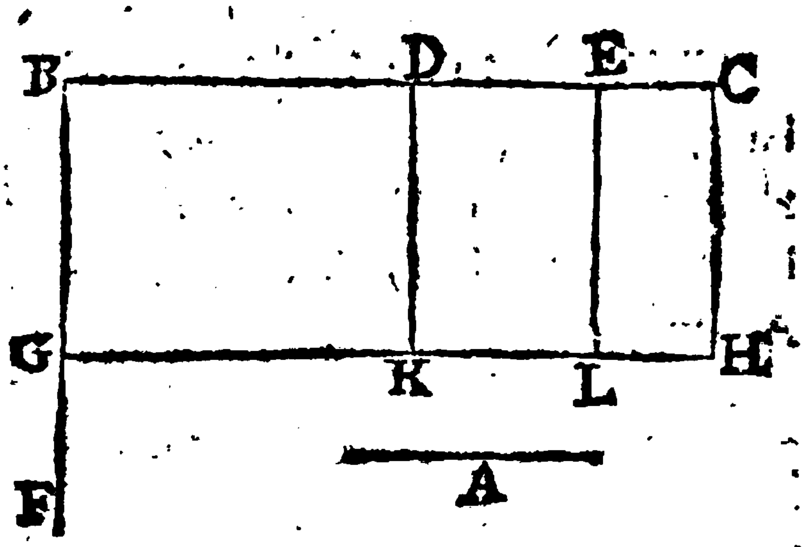
2. In einem Parallelogramm heiße ein jedes der um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme mit den beyden Ergänzungen zusammen ein **Gnomon**.

Der 1. Satz. Lehrsatz.

Wird von zwey geraden Linien, A, BC, die eine, BC, in beliebig viele Abschnitte, BD, DE, EC, getheilt: so ist das unter den beyden Linien enthaltene Rectangel, dem unter der Ungetheilten, A, und jedem der Abschnitte, BD, DE, EC, enthaltenen Rectangeln gleich.

Errichte (1, 11. S.) auf BC in B den Perpendikel BF, mache BG = A, ziehe (1, 31. S.) durch G der BC die GH, und durch D, E, C, der BG die DK, EL, CH, parallel.

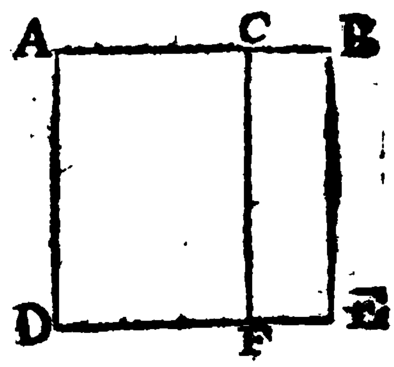
Hier:



Hiernach ist das Rectangel BH = BK + DL + EH. Nun ist BH = GB × BC = A × BC, weil GB = A; BK = GB × BD = A × BD; weil GB = A; DL = KD × DE = A × DE, weil KD = GB = A; EH = LE × EC = A × EC, weil LE = GB = A. Folglich ist A × BC = A × BD + A × DE + A × EC.

Der 2. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem beliebigen Punkte, C, geschnitten: so sind die unter der Ganzen, AB, und jedem der beyden Abschnitte, AC, CB, enthaltenen Rectangel, dem Quadrate der Ganzen, AB, gleich.

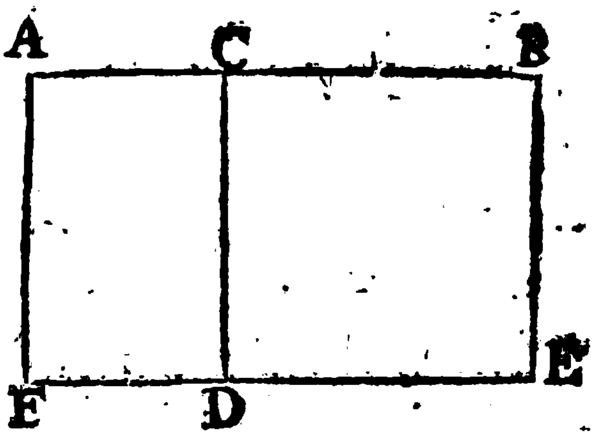


Beschreibe (1, 46. S.) von AB das Quadrat ADEB, und ziehe (1, 31. S.) durch C der AD, oder BE, die CF parallel.

Hiernach ist ADEB = AF + CE. Nun ist ADEB = □ AB; AF = DA × AC = AB × AC, weil DA = AB; CE = BE × CB = AB × CB, weil BE = AB. Folglich ist □ AB = AB × AC + AB × CB.

Der 3. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem beliebigen Punkte, C, geschnitten: so ist das unter der Ganzen, AB, und einem der beyden Abschnitte, BC, enthaltene Rectangel, dem unter beyden Abschnitten, AC, CB, enthaltenen Rectangel samt dem Quadrate des vorgedachten Abschnittes, BC, gleich.

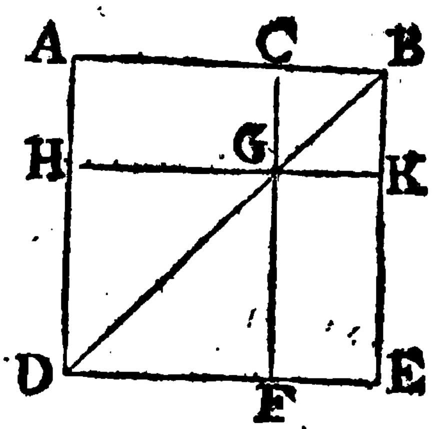


Beschreibe (1, 46. S.) von BC das Quadrat CE, verlängere ED nach F, und ziehe (1, 31. S.) durch A, der CD, oder BE, die AF parallel.

Hiernach ist AE = AD + CE. Nun ist AE = AB × BE = AB × BC, weil BE = BC; AD = AC × CD = AC × BC, weil CD = BC; CE = □ BC. Folglich ist AB × BC = AC × BC + □ BC.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem beliebigen Punkte, C, geschnitten; so ist das Quadrat der Ganzen, AB, den Quadraten beyder Abschnitte, AC, CB, samt dem zwiefachen unter beyden Abschnitten, AC, CB, enthaltenen Rectangel, gleich.



Beschreibe (1, 46. S.) von AB das Quadrat ADEB, und ziehe dessen Diagonale, BD. Ziehe (1, 31. S.) durch C der AD, oder BE, die CGF, und durch G der AB, oder DE, die HK parallel.

Da CF, AD parallel, so ist (1, 29. S.) BGC = BDA. Nun ist, weil AD = AB, (1, 5. S.) BDA = ABD. Folglich ist (1, 1. G.) BGC = ABD, folglich (1, 6. S.) BC = CG. Nun ist (1, 34. S.) BC der GK und CG der KB gleich. Folglich ist CK gleichseitig.

Da CG, BK, parallel: so ist (1, 29. S.) KBC + GCB = 2 R. Nun ist KBC, folglich auch GCB ein rechter Winkel, mithin auch (1, 34. S.) die ihnen gegenüberliegenden Winkel CGK, GKB rechte. Folglich ist CK rechtwinklig. Nun war es auch gleichseitig. Folglich ist (1, 30. E.) CK ein Quadrat, dessen Seite BC.

Auf

Auf eben die Art wird bewiesen, daß auch HF ein Quadrat, dessen Seite $HG = AC$.

Da (1, 43. S.) $AG = GE$, aber $AG = AC \times CG = AC \times CB$, weil $CG = CB$: so ist auch $GE = AC \times CB$, folglich $AG + GE = 2\,(AC \times CB)$. Nun ist $HF + CK + AG + GE = ADEB = \square AB$, und nach dem Erwiesenen $HF = \square AC$; $CH = \square CB$; $AG + GE = 2\,(AC \times CB)$. Folglich ist $\square AB = \square AC + \square CB + 2\,(AC \times CB)$.

Anderer Beweis.

Da $AB = AD$: so ist $ABD = ADB = \frac{1}{2}$ R., weil $ABD + ADB + BAD = 2$ R., und $BAD =$ R. Nun ist (1, 29. S.) $BCG = BAD =$ R. Folglich ist auch $BGC = \frac{1}{2}$ R. $= ABD$, folglich (1, 6. S.) $BC = CG$, folglich CK gleichseitig; aber, wegen $BCG =$ R., auch rechtwinklig; folglich ein Quadrat, dessen Seite BC. Eben so wird bewiesen, daß HF ein Quadrat, dessen Seite AC.

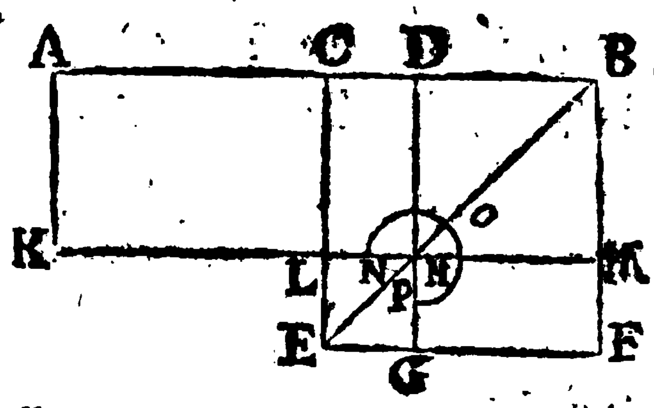
Nun ist (1, 43. S.) $AG = GE$ u. s. w., wie im ersten Beweise.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß in jedem Quadrate die um die Diagonale herumliegenden Parallelogramme auch Quadrate sind.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, bey C, in gleiche, und, bey D, in ungleiche Stücke geschnitten: so ist das unter den ungleichen Stücken, AD, DB, enthaltene Rectangel, samt dem Quadrate des zwischen den Theilpunkten befindlichen Stücks, CD, dem Quadrate der halben Linie, CB, gleich.

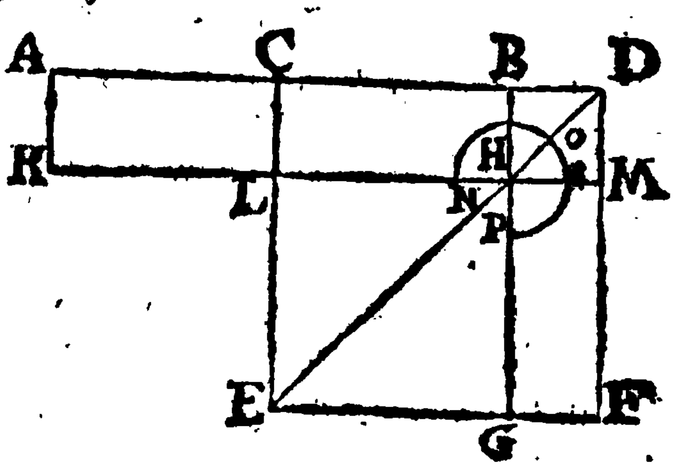


Beschreibe (1, 46. S.) von CB das Quadrat CEFB, dessen Diagonale EB. Ziehe (1, 31. S.) durch D der CE, oder BF, die DHG, durch H der CB, oder EF, die KLM, und durch A der CE, oder BF, die AK parallel.

Da (1, 43. S.) CH = HF: so ist, wenn DM hinzukommt, (1, 2. S.) CM = DF. Nun ist, weil AC = CB, (1, 36. S.) AL = CM. Folglich ist (1, 1. S.) AL = DF, folglich, wenn CH hinzukommt, AH = Gnomon NOP, folglich, wenn LG hinzukommt, AH + LG = CEFB. Nun ist AH = AD × DH = AD × DB, weil DH = DB; LG (2, 4. Zus.) = □ LH = □ CD, weil LH = CD; CEFB = □ CB. Folglich ist AD × DB + □ CD = □ CB.

Der 6. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in C, halbirt, und ihr eine andere, BD, gerade fort angesetzt: so ist das unter der Angesetzten, BD, und der aus der Ganzen und der Angesetzten bestehenden geraden Linie, AD, enthaltene Rectangel, samt dem Quadrate der Hälfte, CB, dem Quadrate der aus der Hälfte und der Angesetzten bestehenden geraden Linie, CD, gleich.



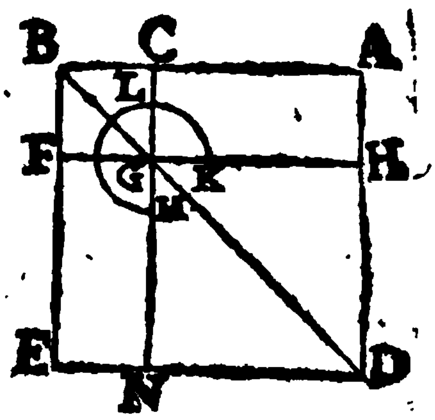
Beschreibe (1, 46. S.) von CD das Quadrat CEFD, dessen Diagonale DE. Ziehe (1, 31. S.) durch B der CE oder DF, die BHG; durch H der AD oder EF, die KLM; und durch A der CL oder DM, die AK parallel.

Da AC = CB, und daher (1, 36. S.) AL = CH, aber (1, 43. S.) CH = HF: so ist (1, 1. S.) AL = HF; folglich, wenn CM hinzukommt, (1, 2. S.) AM = Gnomon NOP,

NOP, folglich, wenn LG hinzukommt, $AM + LG = CEFD$. Nun ist $AM = AD \times DM = AD \times BD$, weil $DM = BD$; LG (2, 4. Zus.) $= \square\, LH = \square\, CB$; weil $LH = CB$; $CEFD = \square\, CD$. Folglich ist $AD \times BD + \square\, CB = \square\, CD$.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem beliebigen Punkte, C, geschnitten: so sind die beyden Quadrate der Ganzen, AB, und des einen Abschnitts, BC, zusammen, dem zwiefachen unter der Ganzen, AB, und dem gedachten Abschnitte, BC, enthaltenen Rectangel, samt dem Quadrate des übrigen Abschnitts, AC, gleich.

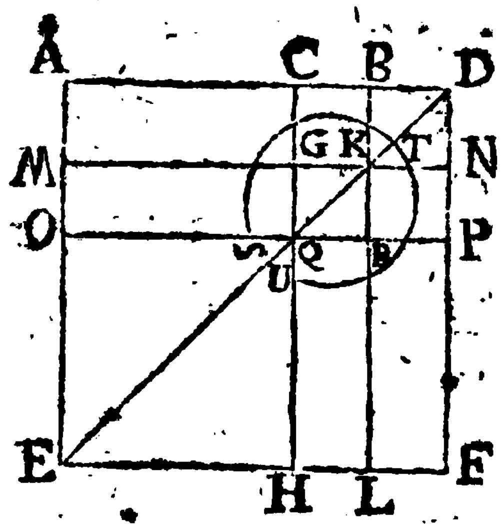


Beschreibe (1, 46. S.) von AB das Quadrat ADEB, und vollende die Figur.

Da (1, 43. S.) $AG = GE$, so ist, wenn CF hinzukommt, $AF = CE$, folglich $AF + CE = 2\, AF$. Nun ist $AF + CE =$ Gnomon $KLM + CF$. Folglich ist Gnomon $KLM + CF = 2\, AF$, folglich, wenn HN hinzukommt, $ADEB + CF = 2\, AF + HN$. Nun ist $ADEB = \square\, AB$; CF (2, 4. Zus.) $= \square\, BC$; $AF = AB \times BF = AB \times BC$, weil $BF = BC$; HN (2, 4. Zus.) $= \square\, HG = \square\, AC$, weil $HG = AC$. Folglich ist $\square\, AB + \square\, BC = 2\,(AB \times BC) + \square\, AC$.

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in einem beliebigen Punkte, C, geschnitten: so ist das vierfache unter der Ganzen, AB, und einem der Abschnitte, BC, enthaltene Rectangel, samt dem Quadrate des übrigen Abschnitts, AC, dem Quadrate der aus der Ganzen, AB, und dem erstgedachten Abschnitte, BC, bestehenden geraden Linie, AD, gleich.



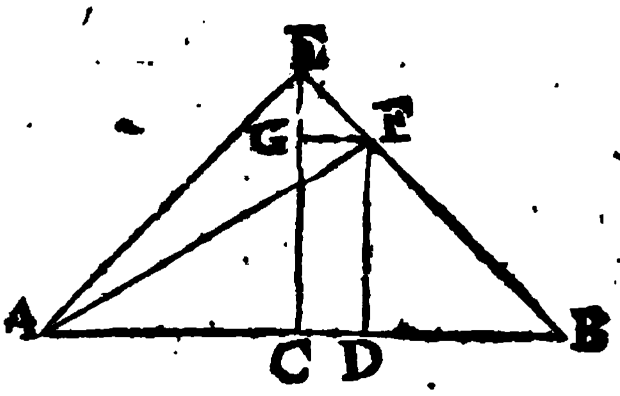
Verlängere AB bis BD = BC: so besteht AD aus der Ganzen AB, und dem erstgedachten Abschnitte BC = BD. Beschreibe (1, 46. S.) von AD das Quadrat AEFD, und vollende die Figur.

Da CB = BD, aber (1, 34. S.) BC = GK = QR, und BD = KN = RP: so ist (1, 1. G.) GK = KN, und QR = RP. Folglich (1, 36. S.) CK = BN, und GR = KP. Nun ist (1, 43. S.) CK = KP. Folglich sind alle vier Parallelogramme einander gleich; folglich CP = 4 CK.

Da CB = BD, aber (2, 4. Zus.) BD = BK = (1, 34. S.) CG, und CB = GK = GQ: so ist CG = GQ. Auch war QR = RP. Folglich ist (1, 36. S.) AG = MQ, und QL = RF. Nun ist im Parallelogramme ML (1, 43. S.) MQ = QL. Folglich ist auch AG = RF. Demnach sind alle vier Parallelogramme AG, MQ, QL, RF, einander gleich, und daher zusammen = 4 AG. Nun war CP = 4 CK. Folglich ist Gnomon STU = 4 AK; folglich, wenn OH hinzukommt, AEFD, das ist □ AD = 4 AK + OH. Nun ist AK = AB × BK = AB × BC, weil BK = BC, und OH (2, 4. Zus.) = □ OQ = □ AC, weil OQ = AC. Folglich ist □ AD = 4 (AB × BC) + □ AC.

Der 9. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, bey C, in gleiche, und, bey D, in ungleiche Stücke geschnitten: so sind die beyden Quadrate der ungleichen Stücke, AD, DB, doppelt so groß, als die beyden Quadrate der Hälfte, AC, und des zwischen den Theilpunkten befindlichen Stücks, CD.



Errichte (1, 11. S.) auf AB in C den Perpendikel CE, mache CE = CA = CB, und ziehe AE, BE. Ziehe (1, 31. S.) durch D der CE die DF, und durch F der AB die FG parallel. Ziehe AF.

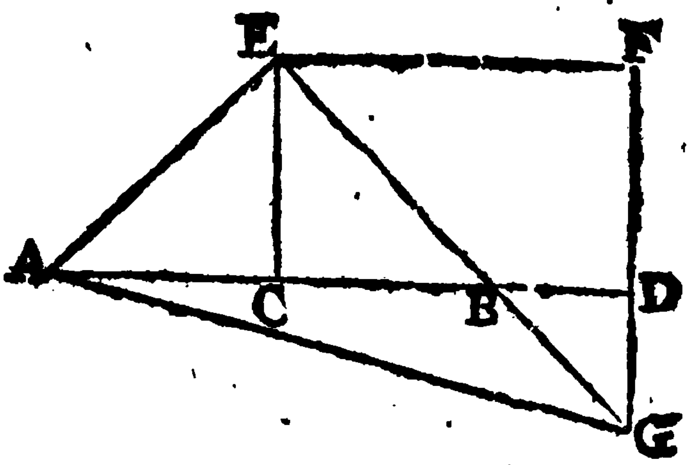
Da CE der AC und CB gleich ist, und bey C rechte Winkel sind: so ist (1, 5. S.) CEA = CAE, CEB = CBE, und (1, 32. S.) jeder dieser vier Winkel = $\frac{1}{2}$ R.

Da DF der CE, und FG der CD parallel: so ist (1, 29. S.) FDB sowohl als EGF dem rechten Winkel ECB gleich, folglich beyde rechte Winkel; auch DFB = CEB = $\frac{1}{2}$ R., und GFE = DBF = $\frac{1}{2}$ R., folglich (1, 6. S.) DF = DB, und EG = GF.

Da AEC = CEB = $\frac{1}{2}$ R., also AEF = R.: so ist (1, 47. S.) □ AF = □ AE + □ EF. Nun ist, da auch bey D, C, G, rechte Winkel sind, (1, 47. S.) □ AF = □ AD + □ DF = □ AD + □ DB, weil DF = DB; □ AE = □ AC + □ CE = 2 □ AC, weil AC = CE; □ EF = □ EG + □ GF = 2 □ CD, weil EG = GF = CD. Folglich ist □ AD + □ DB = 2 □ AC + 2 □ CD.

Der 10. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in C, halbirt, und ihr eine andere, BD, gerade fort angesetzt: so sind die beyden Quadrate der Angesetzten, BD, und der aus der Ganzen und der Angesetzten bestehenden geraden Linie, AD, doppelt so groß, als die beyden Quadrate der Hälfte, BC, und der aus der Hälfte, und der Angesetzten bestehenden geraden Linie, CD.



Errichte (1, 11. S.) auf AB in C den Perpendikel CE, mache CE = CA = CB, und ziehe AE, EB. Ziehe (1, 31. S.) durch E der AD die EF, und durch D der CE die DF parallel: so ist (1, 29. S.) CEF + EFD = 2 R., folglich BEF + EFD < 2 R., folglich werden (1, 11. G.) EB, FD nach BD zu verlängert zusammentreffen. Dieß geschehe in G. Ziehe AG.

Da CE der AC und CB gleich ist, und bey C rechte Winkel sind: so ist (1, 5. S.) CEA = CAE, CBE = CEB, und (1, 32. S.) jeder dieser vier Winkel = $\frac{1}{2}$ R.

Da EF der AD, und FG der CE parallel: so ist (1, 29. S.) D = F = C = R.; DGB = BEC = $\frac{1}{2}$ R.; FEB = DBG = EBC = $\frac{1}{2}$ R. Folglich ist (1, 6. S.) DB = DG, und FG = FE.

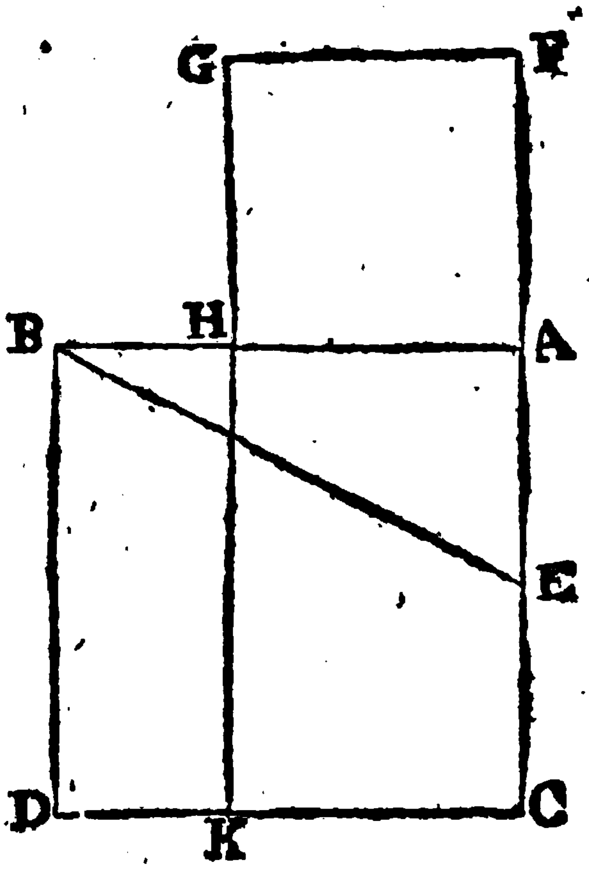
Da AEC = CEB = $\frac{1}{2}$ R., also AEG = R.: so ist (1, 47. S.) □ AG = □ AE + □ EG. Nun ist, da auch bey D, C, F, rechte Winkel sind, (1, 47. S.) □ AG = □ AD + □ DG = □ AD + □ BD, weil DG = BD; □ AE = □ AC + □ CE = 2 □ AC, weil CE = AC; □ EG = □ FG + □ FE = 2 □ CD, weil FG = FE = CD. Folglich ist □ AD + □ BD = 2 □ AC + 2 □ CD.

Der 11. Satz. Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie, AB, so zu schneiden, daß das unter der Ganzen und einem der beyden Abschnitte enthaltene Rectangel dem Quadrate des übrigen Abschnitts gleich sey.

Bes

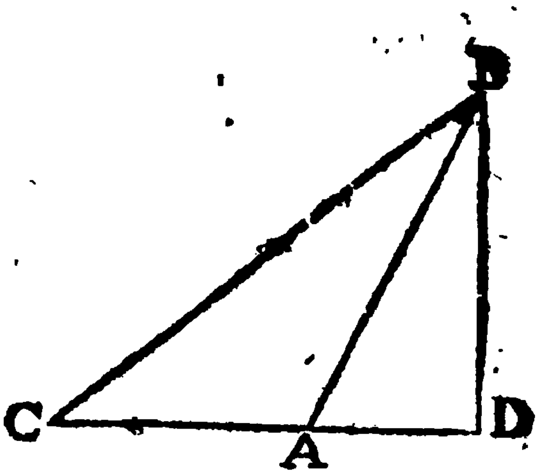
Beschreibe (1, 46. S.) von AB das Quadrat ABDC, halbire (1, 10. S.) AC in E, und ziehe BE. Verlängere CA nach F, bis $EF = EB$. Beschreibe von AF das Quadrat FH, und verlängere GH bis K: so ist AB in H so geschnitten, daß $AB \times BH = \square AH$.



Denn da CA in E halbirt, und ihr die AF gerade fort angesetzt ist, so ist (2, 6. S.) $CF \times AF + \square AE = \square EF = \square EB$, weil $EF = EB$. Nun ist $BAE = R.$, und daher (1, 47. S.) $\square EB = \square AB + \square AE$. Folglich ist $CF \times AF + \square AE = \square AB + \square AE$, folglich, wenn man $\square AE$ wegnimmt, (1, 3. S.) $CF \times AF = \square AB$, oder, (weil $AF = FG$) $FK = AD$; folglich, wenn man AK wegnimmt, (1, 3. S.) $FH = HD$. Nun ist $FH = \square AH$, und $HD = DB \times BH = AB \times BH$, weil $DB = AB$. Folglich ist $AB \times BH = \square AH$.

Der 12. Satz. Lehrsatz.

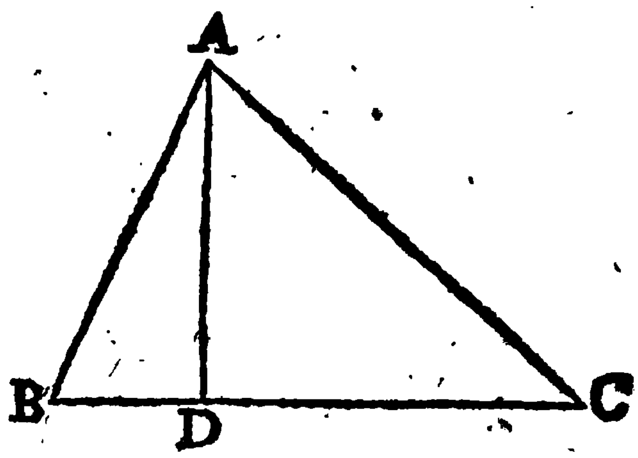
In jedem stumpfwinkligen Triangel, ABC, ist das Quadrat der dem stumpfen Winkel, A, gegenüber liegenden Seite, BC, größer, als die Quadrate der solchen Winkel einschließenden Seiten, CA, AB; und zwar um das zwiefache Rectangel, welches unter einer der einschließenden Seiten, CA, auf deren Verlängerung der Perpendikel, BD, fällt, und dem äußern, zwischen dem Perpendikel und dem stumpfen Winkel, A, liegenden Abschnitte, AD, enthalten ist.



Da CD willkührlich in A geschnitten: so ist (2, 4. S.) □ CD = □ CA + □ AD + 2 (CA × AD), folglich, wenn □ DB hinzukommt, (1, 2. G.) □ CD + □ DB = □ CA + □ AD + □ DB + 2 (CA × AD). Nun ist, weil bey D ein rechter Winkel, (1, 47. S.) □ CD + □ DB = □ CB, und □ AD + □ DB = □ AB. Folglich ist □ CB = □ CA + □ AB + 2 (CA × AD). Demnach ist □ CB > □ CA + □ AB, und zwar um 2 (CA × AD).

Der 13. Satz. Lehrsatz.

In jedem Triangel, ABC, ist das Quadrat der einem von den spitzen Winkeln, B, gegenüber liegenden Seite, AC, kleiner, als die Quadrate der diesen Winkel einschließenden Seiten, AB, BC, und zwar um das zwiefache Rectangel, welches unter einer der einschließenden Seiten, BC, auf welche der Perpendikel, AD, fällt, und dem innern, zwischen dem Perpendikel und dem spitzen Winkel, B, liegenden Abschnitte, BD, enthalten ist.



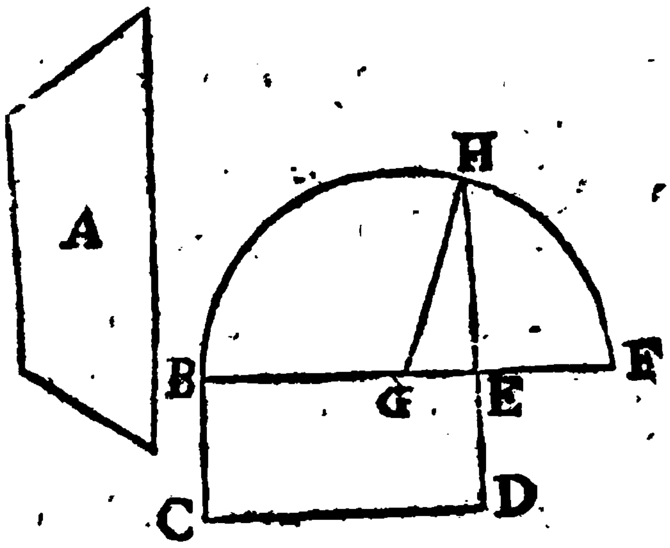
Man nehme an, daß B und C spitze Winkel sind, A mag ein spitzer, oder rechter, oder stumpfer Winkel seyn; daß folglich der Perpendikel, AD, von A auf BC, innerhalb des △ ABC falle.

Da also CB willkührlich in D geschnitten: so ist (2, 7. S.) □ CB + □ BD = 2 (CB × BD) + □ DC, folglich, wenn □ AD hinzukommt, □ CB + □ BD + □ AD = 2 (CB × BD) + □ DC + □ AD. Nun ist, weil bey D rechte Winkel, (1, 47. S.) □ BD + □ AD = □ AB, und □ DC + □ AD = □ AC. Folglich ist

ist □ CB + □ AB = 2 (CB × BD) + □ AC. Demnach ist □ AC < □ CB + □ AB, und zwar um 2 (CB × BD).

Der 14. Satz. Aufgabe.

Ein, jeder gegebenen geradlinigen Figur, A, gleiches Quadrat zu beschreiben.



Beschreibe (1, 45. S.) ein Rectangel BD = A. Sind nun BE, ED, einander gleich, so ist BD das verlangte Quadrat. Sind aber BE, ED, ungleich, so verlängere eine derselben, BE, nach F, und mache EF = ED. Halbire FB in G, und beschreibe aus G mit GB, oder GF, den Halbkreis BHF. Verlängere DE bis H, und ziehe GH: so ist □ HE das Verlangte.

Denn da BF bey G in gleiche, und bey E in ungleiche Stücke geschnitten, so ist (2, 5. S.) BE × EF + □ EG = □ GF = (1, 15. E.) □ GH. Nun ist, weil bey E ein rechter Winkel, (1, 47. S.) □ GH = □ HE + □ EG. Folglich ist BE × EF + □ EG = □ HE + □ EG, folglich, wenn man □ EG wegnimmt, BE × EF, oder, weil EF = ED, das Rectangel BD = □ HE. Nun war BD = A. Folglich ist A = □ HE.

Euklid's Elemente

Drittes Buch.

Erklärungen.

1. **Gleiche Kreise** sind, in denen die Durchmesser, oder die vom Mittelpunkte an den Umkreis gezogenen geraden Linien (die **Halbmesser**) gleich sind.
2. Von einer geraden Linie wird gesagt, sie **berühre** den Kreis, wenn sie ihn trifft und verlängert ihn nicht schneidet.
3. Von Kreisen sagt man, sie **berühren einander**, wenn sie einander treffen, ohne einander zu schneiden.
4. Im Kreise heißen gerade Linien **gleichweit vom Mittelpunkte entfernt**, wenn die aus dem Mittelpunkte auf sie gefällten Perpendikel gleich sind.
5. **Entfernter** aber heißt diejenige, auf welche der größere Perpendikel fällt.
6. Ein **Kreisabschnitt** ist die von einer geraden Linie, (der **Grundlinie**) und dem (von ihr abgeschnittenen) Umkreise begränzte Figur.
7. Der **Winkel des Abschnitts** ist der von der Grundlinie und dem Umkreise eingeschlossene.
8. Der **Winkel im Abschnitte** hingegen ist derjenige, welchen die geraden Linien einschließen, die von irgend einem Punkte auf dem Umkreise des Abschnitts nach den Endpunkten der Grundlinie gezogen sind.
9. Wenn aber die den Winkel einschließenden geraden Linien ein Stück des Umkreises (einen **Bogen**) abschneiden, so sagt man, der Winkel **stehe auf demselben**.

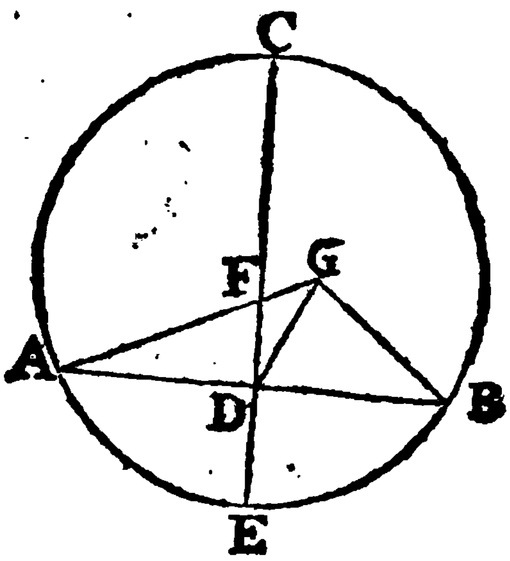
10. Ein

10. Ein **Kreisausschnitt** ist die Figur, welche von den geraden, einen Winkel am Mittelpunkte des Kreises einschließenden, Linien und dem von ihnen abgeschnittenen Bogen begränzt wird.

11. **Aehnliche Kreisabschnitte** sind, welche gleiche Winkel fassen, oder in denen die Winkel beyderseits gleich sind.

Der 1. Satz. Aufgabe.

Eines gegebenen Kreises, ABC, Mittelpunkt zu finden.



Im Kreise ziehe willkührlich eine gerade Linie AB, halbire sie in D, und errichte auf ihr in D den Perpendikel DC. Verlängere CD bis E, und halbire CE in F: so ist F der gesuchte Mittelpunkt.

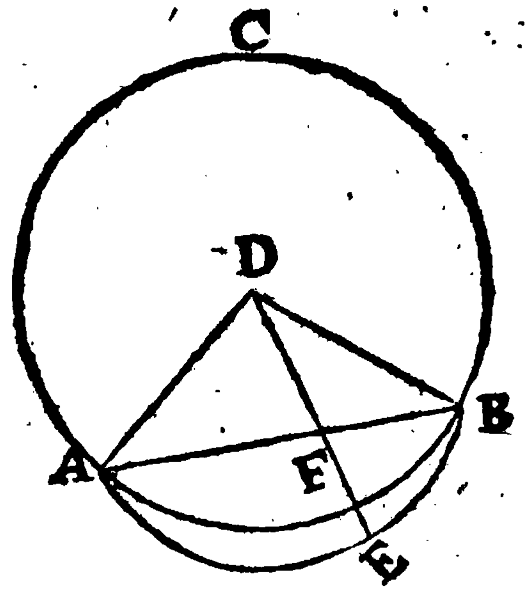
Denn wäre F nicht der Mittelpunkt, so sey es irgend ein anderer, etwa G. Ziehe GA, GD, GB. Da AD = DB, und GD gemein, auch (1, 15. E.) AG = GB: so ist (1, 8. S.) ADG = GDB, folglich (1, 10. E.) beyde rechte Winkel. Nun ist auch CDB = R. Folglich ist (1, 10. G.) CDB = GDB, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Demnach ist G nicht der Mittelpunkt des Kreises, und aus eben den Gründen auch kein anderer Punkt außer F. Folglich ist F des gegebenen Kreises Mittelpunkt.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß, wenn im Kreise eine gerade Linie von einer andern in der Mitte und unter rechten Winkeln geschnitten wird, in der schneidenden Linie der Mittelpunkt des Kreises sey.

Der 2. Satz. Lehrsatz.

Eine gerade Linie, welche zwey beliebige Punkte, A, B, in dem Umringe eines Kreises, ABC, verbindet, fällt innerhalb dieses Kreises.

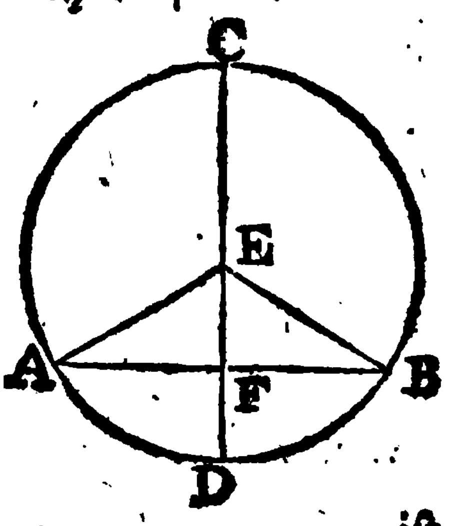


Fiele diese gerade Linie nicht innerhalb des Kreises, so falle sie außerhalb, wie AEB. Nimm (3, 1. S.) des Kreises Mittelpunkt D, und ziehe DA, DB. Zwischen A, B, nimm in dem Umkreise willkührlich einen Punkt F, ziehe DF, und verlängere sie bis E.

Da (1, 15. E.) DA = DB, so ist (1, 5. S.) DAE = DBE. Nun ist (1, 16. S.) DEB > DAE. Folglich ist DEB > DBE, folglich (1, 19. S.) DB > DE. Nun ist (1, 15. E.) DB = DF. Folglich ist DF > DE, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Demnach kann die gerade Linie, welche A und B verbindet, nicht außerhalb des Kreises fallen. Eben so beweiset man, daß sie nicht auf den Umkreis fallen könne. Folglich muß sie innerhalb des Kreises fallen.

Der 3. Satz. Lehrsatz.

Wenn im Kreise, ABC, eine durch den Mittelpunkt gehende gerade Linie, CD, eine andere, nicht durch den Mittelpunkt gehende, AB, halbirt: so schneidet sie dieselbe unter rechten Winkeln; und wenn sie dieselbe unter rechten Winkeln schneidet: so halbirt sie auch dieselbe.



Nimm (3, 1. S.) des Kreises Mittelpunkt E, und ziehe EA, EB.

Erster Theil.

Wenn CD die AB in F halbirt: so ist AF = FB. Nun ist EF gemein, und (1, 15. E.) AE = EB. Folglich

ist

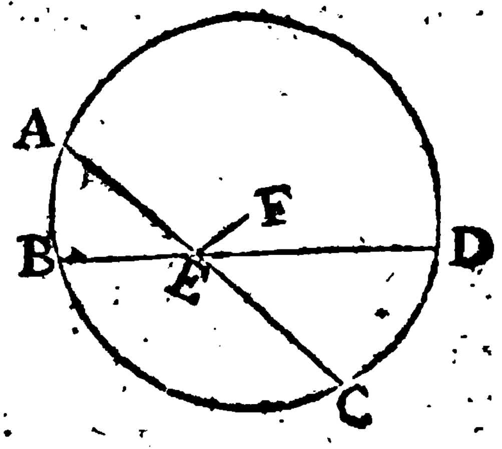
ist (1, 8. S.) AFE = EFB, folglich (1, 10. E.) schneidet CD die AB unter rechten Winkeln.

Zweyter Theil.

Wenn CD die AB unter rechten Winkeln schneidet: so ist (1, 10. E.) AFE = EFB. Nun ist, weil (1, 15. E.) AE = EB, (1, 5. S.) EAF = EBF, auch ist EF gemein. Folglich ist (1, 26. S.) AF = FB, das ist, CD halbirt die AB.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

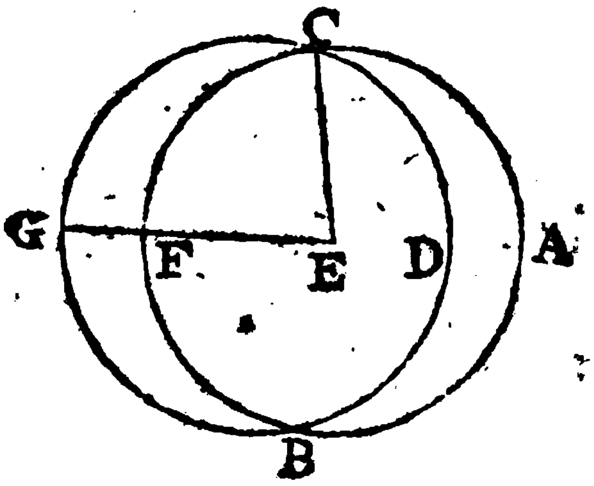
Wenn im Kreise, ABCD, zwey gerade Linien, AC, BD, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, einander schneiden: so halbiren sie einander nicht.



Gesetzt, sie halbirten einander, so daß AE = EC, und BE = ED: so ist, wenn man des Kreises Mittelpunkt F nimmt, und FE ziehet, (3, 3. S.) FEA sowohl, als FEB ein rechter Winkel, folglich FEA = FEB, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Folglich können AC, BD, einander nicht halbiren.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

Zwey Kreise, ABC, CDG, die einander schneiden, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

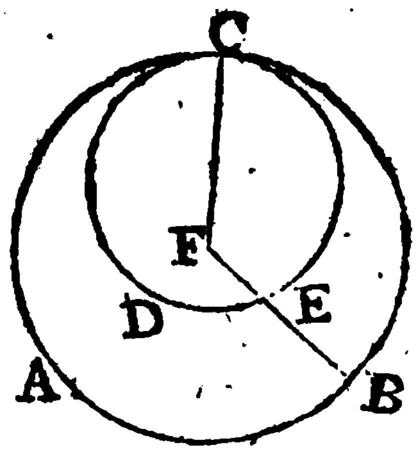


Gesetzt, diese Kreise, welche in B, C, einander schneiden, hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt E, so ziehe EC, und willkührlich EFG; folglich ist (1, 15. E.) im Kreise, ABC, EC = EF, und im Kreise CDG, EC = EG, folglich wäre (1, 1. G.) EG = EF, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Folglich können diese Kreise keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben.

Der

Der 6. Satz. Lehrsatz.

Zwey Kreise, ABC, CDE, deren einer den andern inwendig berührt, haben keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt.

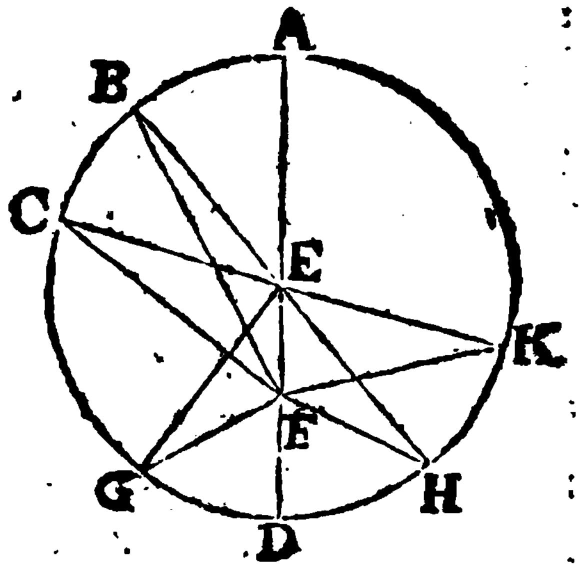


Gesetzt, diese Kreise, welche in C einander berühren, hätten einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt F; so ziehe FG, und willkührlich FEB, folglich ist (1, 15. E.) im Kreise ABC, FC = FB, und im Kreise CDE, FC = FE, folglich wäre (1, 1. G.) FB = FE, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Folglich können diese Kreise keinen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Nimmt man auf eines Kreises, ABCD, Durchmesser, AD, einen vom Mittelpunkte, E, verschiedenen Punkt, F, und ziehet von ihm an den Umkreis, mehrere gerade Linien FB, FC, FG: so ist die durch den Mittelpunkt, FA, die größte, und das übrige Stück des Durchmessers, FD, die kleinste; unter den übrigen aber immer die der größten, FA, nähere größer als die entferntere. Auch sind von solchen Linien nur je zwey auf beyden Seiten der kleinsten, FD, einander gleich.

Erster Theil.



Ziehe EB, EC, EG: so ist im △ BEF (1, 20. G.) BE + EF > FB. Nun ist (1, 15. E.) BE = AE, also BE + EF = AE + EF = AF. Folglich ist AF > FB.

Da (1, 15. E.) BE = CE, und EF den △ △ BEF, CEF, gemein, aber BEF > CEF: so ist

(1,

(1, 24. S.) FB > FC, und aus eben den Gründen FC > FG.

Da (1, 20. S.) GF + FE > EG, und (1, 15. E.) EG = ED = DF + FE: so ist GF + FE > DF + FE, folglich (1, 5. S.) GF > DF.

Demnach ist FA die größte, FD die kleinste, und unter den Linien FB, FC, FG, immer die der FA nähere größer, als die entferntere.

Zweyter Theil.

An EF setze (1, 23. S.) FEH = FEG, und ziehe FH: so ist, weil auch (1, 15. E.) EH = EG, und EF gemein, (1, 4. S.) FH = FG. Wäre nun außer FH noch irgend eine andere, etwa FK, der FG gleich: so wäre auch FK = FH, welches unmöglich, weil nach dem ersten Theile FK > FH ist.

Oder: Wäre FK = FG, so ziehe EK. Nun ist auch (1, 15, E.) KE = EG, und EF gemein. Folglich ist (1, 8. S.) KEF = FEG. Nun war FEG = FEH. Folglich wäre KEF = FEH, welches (1, 9. S.) unmöglich ist.

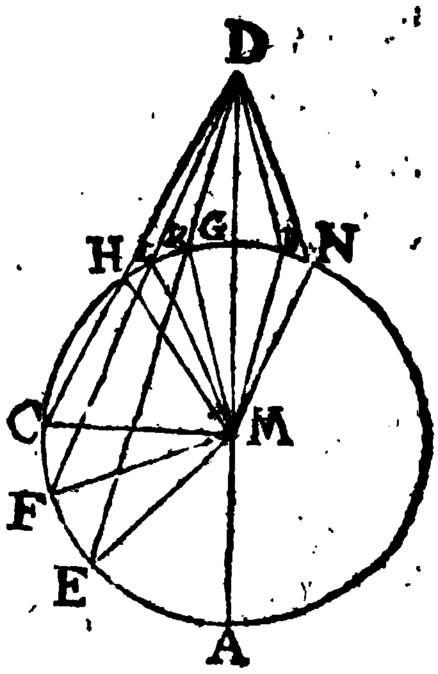
Demnach ist an dieser Seite der kleinsten, FD, nur die einzige FH = FG.

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Nimmt man außerhalb eines Kreises, ABC, einen Punkt D, und ziehet von ihm an den Umkreis mehrere gerade Linien, eine, DA, durch den Mittelpunkt, M, die übrigen beliebig, so ist unter denen, welche den hohlen Umkreis treffen, DA, DE, DF, DC, die durch den Mittelpunkt, DA, die größte; von den übrigen aber immer die der größten, DA, nähere größer, als die entferntere; unter denen hingegen, welche den erhobenen Umkreis treffen, DG, DK, DL, DH, ist die, welche verlängert durch den Mittelpunkt gehet, DG, die kleinste, von den übrigen aber immer

immer die der kleinsten, DG, nähere kleiner, als die entferntere. Auch sind von solchen Linien nur je zwey auf beyden Seiten der kleinsten, DG, einander gleich.

Erster Theil.



Ziehe ME, MF, MC, so ist (1, 20. S.) DM + ME > DE. Nun ist (1, 15. E.) ME = MA; also DM + ME = DM + MA = DA. Folglich ist DA > DE.

Da (1, 15. E.) ME = MF, und MD gemein, aber DME > DMF: so ist (1, 24. S.) DE > DF. Und aus eben den Gründen DF > DC.

Demnach ist DA die größte, und unter den Linien, DE, DF, DC, immer die der DA nähere größer, als die entferntere.

Zweyter Theil.

Ziehe MK, ML, MH: so ist (1, 20. S.) MK + KD > MD, das ist, > MG + GD. Nun ist (1, 15. E.) MK = MG. Folglich ist MG + KD > MG + GD, folglich (1, 3. S.) KD > GD, oder DG < DK.

Da in den Triangeln MLD, MKD, (1, 21. S.) MK + DK < ML + DL, aber (1, 15. E.) MK = ML: so ist ML + DK < ML + DL, folglich (1, 3. S.) DK < DL. Und aus eben den Gründen DL < DH.

Demnach ist DG die kleinste, und unter den Linien DK, DL, DH, immer die der DG nähere kleiner, als die entferntere.

Dritter Theil.

An DM setze (1, 23. S.) DMB = DMK, und ziehe DB. Nun ist (1, 15. E.) MB = MK, auch MD gemein. Folglich ist (1, 4. S.) DB = DK. Wäre nun außer DB noch irgend eine andere, etwa DN, der DK gleich, so wäre auch (1, 1. G.) DN = DB, welches unmöglich, weil nach dem zweyten Theile DB < DN.

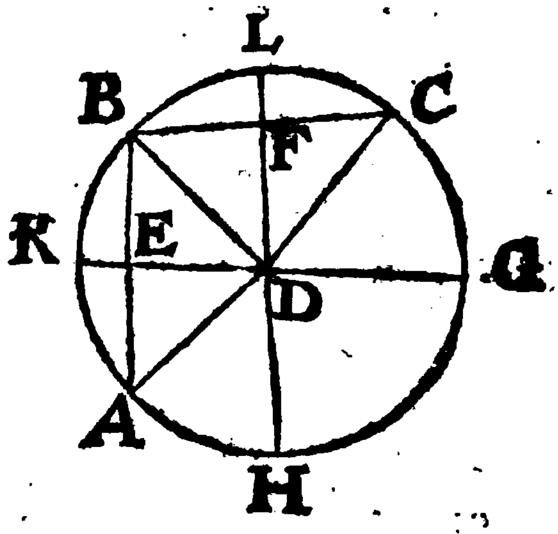
Oder:

Oder: Wäre DN = DK, so ziehe MN. Nun ist auch MN = MK, und MD gemein. Folglich ist (1, 8. S.) DMK = DMN. Nun war DMK = DMB. Folglich wäre DMN = DMB, welches (1, 9. S.) unmöglich.

Demnach ist an dieser Seite der kleinsten DG, nur die einzige DB = DK.

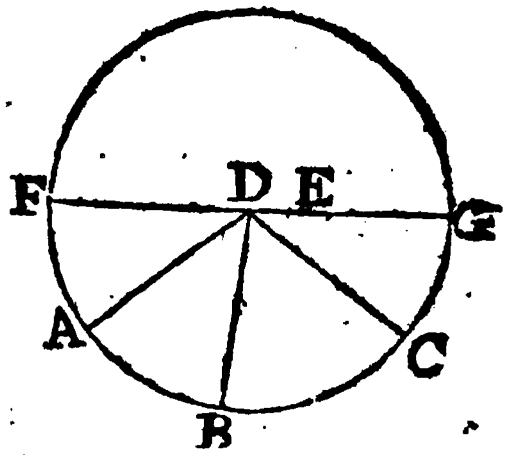
Der 9. Satz. Lehrsatz.

Gehen von einem Punkte, D, innerhalb eines Kreises, ABC, an den Umkreis mehr als zwey gleiche gerade Linien, DA, DB, DC: so ist solcher des Kreises Mittelpunkt.



Ziehe AB, BC, und halbire sie (1, 10. S.) in E, F. Ziehe ED, DF, und verlängere sie an beyden Seiten nach G, K, H, L.

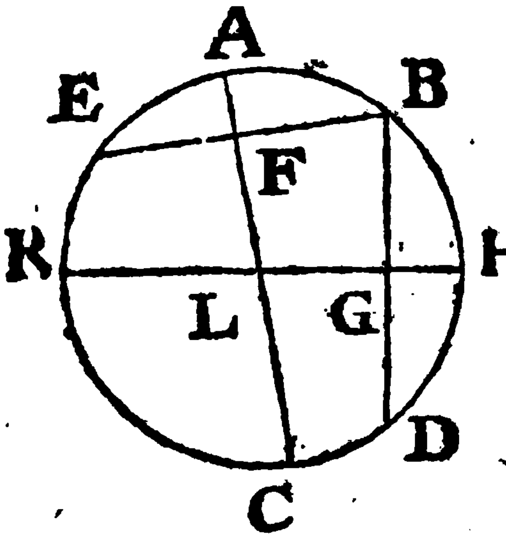
Da AE = EB, und ED gemein, auch AD = DB: so ist (1, 8. S.) AED = BED. Folglich (1, 10. E.) jeder dieser Winkel ein rechter. Demnach wird AB von GK unter rechten Winkeln halbirt, folglich ist (3, 1. S.) des Kreises Mittelpunkt in GK; aus eben den Gründen aber auch in HL. Nun haben GK, HL, nur den Punkt D gemein. Folglich ist D des Kreises ABC Mittelpunkt.



Ein anderer Beweis. Wäre D nicht der Mittelpunkt, so sey es irgend ein anderer, etwa E. Ziehe DE, und verlängere sie an beyden Seiten nach F, G, so wäre also (3, 8. S.) DC > DB, und DB > DA, gegen das Angenommene DC = DB = DA. Demnach kann nicht E der Mittelpunkt seyn; aus eben den Gründen aber auch kein anderer außer D. Folglich ist D des Kreises ABC Mittelpunkt.

Der 10. Satz. Lehrsatz.

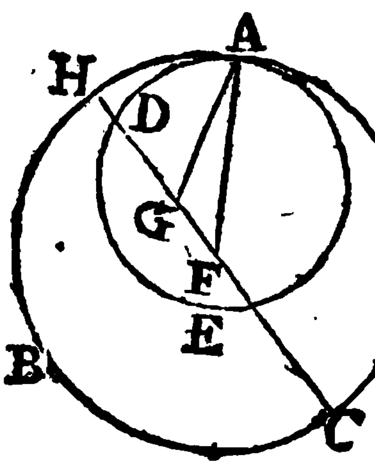
Ein Kreis schneidet einen andern, ABC, in nicht mehr als zweyen Punkten.



Gesetzt, der erste Kreis schnitte den andern ABC in dreyen Punkten, D, B, E, so ziehe EB, BD, und halbire sie in F, G. Auf EB, BD, errichte in F, G, die Perpendikel FC, GK, und verlängere sie bis A, H: so ist (3, 1. S.) in CA und KH, folglich in dem einzigen ihnen gemeinschaftlichen Punkte L, des andern Kreises ABC Mittelpunkt. Nun wird eben so bewiesen, daß L auch des ersten Kreises Mittelpunkt sey, welches (3, 5. S.) unmöglich.

Der 11. Satz. Lehrsatz.

Berühren sich zwey Kreise, ABC, ADE, innerhalb: so trifft die gerade Linie, welche beyder Mittelpunkte verbindet, genugsam verlängert, den Berührungspunkt, A.

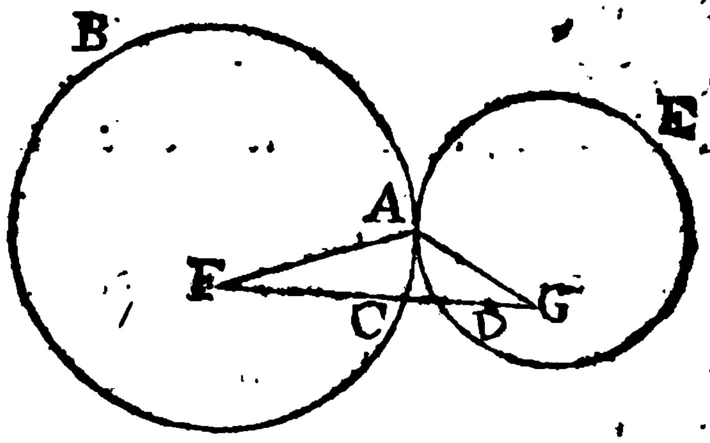


Gesetzt, der beyden Kreise Mittelpunkte wären, wenn es möglich, F, G, so daß die verlängerte gerade Linie FG den Berührungspunkt A nicht träfe. Ziehe AF, AG, so ist (1, 20. S.) FG + GA > FA, oder, weil (1, 15. E.) GA = GD, FA = FH, FG + GD > FH, das ist > FG + GH, folglich (1, 5. G.) GD > GH, welches (1, 9. G.) unmöglich. Demnach muß die gerade Linie, welche beyder Kreise Mittelpunkte verbindet, den Berührungspunkt A treffen.

Der

Der 12. Satz. Lehrsatz.

Berühren sich zwey Kreise, ABC, ADE, außerhalb: so geht die gerade Linie, welche beyder Mittelpunkte verbindet, durch den Berührungspunkt, A.

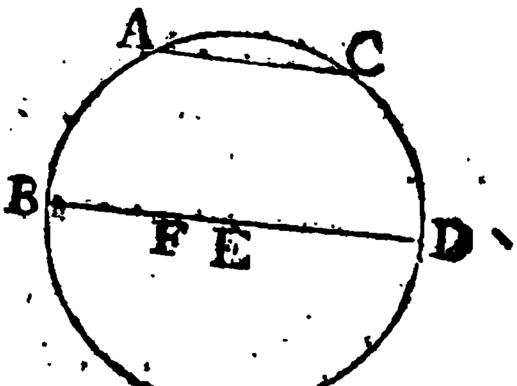


Gesetzt, der beyden Kreise Mittelpunkte wären, wenn es möglich, F, G, so daß die gerade Linie FCDG nicht durch den Berührungspunkt A ginge. Ziehe AF, AG, so ist (1, 15. E.) AF=FC, und AG=GD; folglich AF+AG=FC+GD, folglich AF+AG<FG, da doch (1, 20. S.) AF+AG>FG. Demnach kann die gerade Linie, welche beyder Kreise Mittelpunkte verbindet, durch keinen andern, als den Berührungspunkt A gehen.

Der 13. Satz. Lehrsatz.

Kreise berühren sich, innerhalb sowohl als außerhalb, in nicht mehr als einem Punkte.

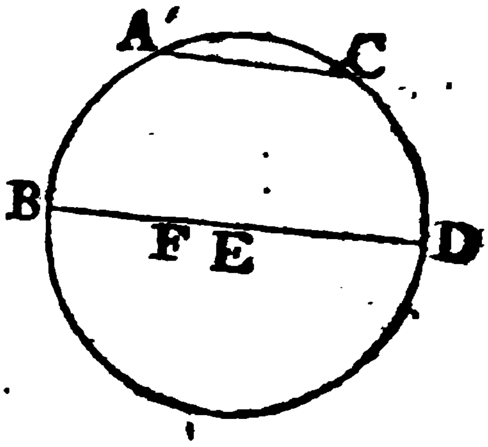
Erster Theil.



Der Kreis ABCD werde inwendig von einem andern in dem Punkte B berührt, auch sey E der Mittelpunkt des ersten, und F der Mittelpunkt des andern Kreises. Ziehet man die gerade Linie EF, so trifft (3, 11. S.) dieselbe verlängert den Berührungspunkt B.

Nun sey, wenn es möglich, noch ein zweyter von B unterschiedener Berührungspunkt, der aber kein anderer als D, welchen (3, 11. S.) die verlängerte EF trifft, seyn könnte.

Da E der Mittelpunkt des ersten Kreises: so ist (1, 15. E.) DE = EB, folglich DE > FB, folglich noch vielmehr DF > FB. Nun ist F der Mittelpunkt des andern Kreises, folglich (1, 15. E.) DF = FB; welches jenem, DF > FB, offenbar widerspricht.



Zweyter Theil.

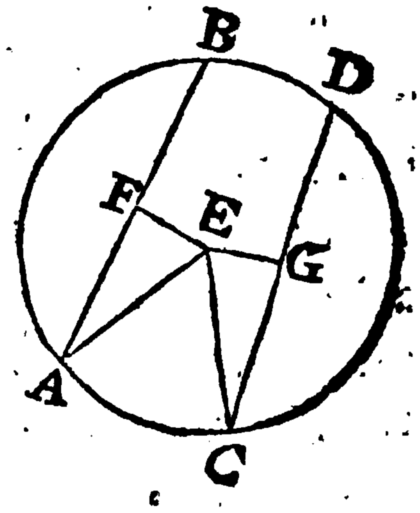
Gesetzt, der Kreis ABCD, würde auswendig von einem andern, wenn es möglich, in zweyen Punkten A, C, berührt. Ziehe AC.

Da A, C, zwey Punkte in der Peripherie des ersten Kreises ABDC, so fällt (3, 2. S.) AC, innerhalb dieses Kreises, folglich (3, 3. E.) außerhalb des andern Kreises. Nun sind A, C, zwey Punkte in der Peripherie des andern Kreises, folglich fällt (3, 2. S.) AC innerhalb des andern; welches dem Obigen offenbar widerspricht.

Der 14. Satz. Lehrsatz.

In einem Kreise, ABDC, sind gleiche gerade Linien, AB, CD, gleich weit vom Mittelpunkte, E, entfernt; und gleich weit vom Mittelpunkte, E, entfernte gerade Linien, AB, CD, einander gleich.

Fälle (1, 12. S.) aus E auf AB, CD, die Perpendikel EF, EG, und ziehe AE, EC.



Erster Theil.

Wenn AB = CD ist. Da EF auf AB senkrecht: so ist (3, 3. S.), AF = FB, also AB = 2 AF. Aus eben den Gründen ist CD = 2 CG. Nun ist AB = CD. Folglich ist (1, 7. G.) AF = CG, also □ AF = □ CG. Auch ist (1, 15. E.) AE = EC, also □ AE = □ EC. Nun ist, weil bey F, G, rechte Winkel, (1, 47. S.) □ AE = □ AF + □ EF, und □ EC = □ CG + □ EG.

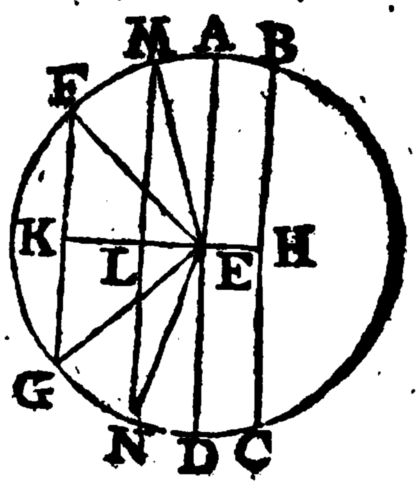
□ EG. Folglich ist (1, 1. G.) □ AF + □ EF = □ CG + □ EG, folglich (1, 3. G.) □ EF = □ EG, also EF = EG. Demnach sind (3, 4. E.) AB, CD, gleich weit vom Mittelpunkte E entfernt.

Zweyter Theil.

Wenn (3, 4. E.) EF = EG, also □ EF = □ EG. Nun war nach dem ersten Theile □ AF + □ EF = □ CG + □ EG. Folglich ist (1, 3. G.) □ AF = □ CG, also AF = CG. Nun war auch AB = 2 AF, und CD = 2 CG. Folglich ist (1, 6. G.) AB = CD.

Der 15. Satz. Lehrsatz.

In einem Kreise, ABCD, ist der Durchmesser, AD, die größte Linie; unter den übrigen aber immer die dem Mittelpunkte, E, nähere, BC, größer als die entferntere, FG.



Fälle (1, 12. G.) aus E auf BC, FG, die Perpendikel EH, EK; so ist (3, 5. E.) EK > EH. Mache daher (1, 3. G.) EL = EH. Errichte (1, 11. G.) auf EK in L den Perpendikel LM, und verlängere ihn bis N. Ziehe EM, EN, EF, EG.

Da EL = EH: so ist (3, 14. G.) MN = BC. Auch ist (1, 5. E.) AE = EM, und ED = EN, also AD = EM + EN. Nun ist (1, 20. G.) EM + EN > MN. Folglich ist AD > BC.

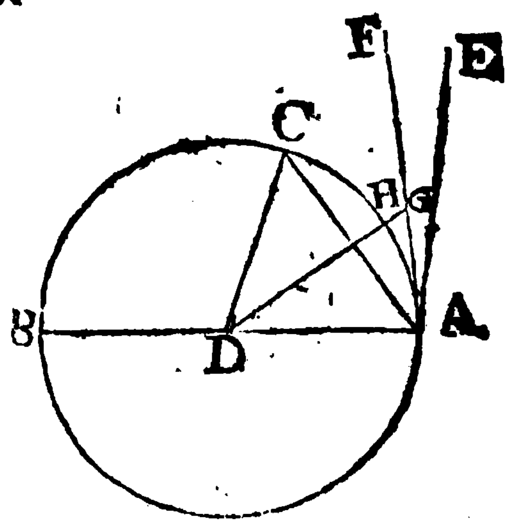
Da (1, 15. E.) ME = FE, und EN = EG, aber MEN > FEG: so ist (1, 24. G.) MN > FG. Nun war MN = BC. Folglich ist BC > FG.

Demnach ist die dem Mittelpunkte nähere BC, größer, als die entferntere FG, und der Durchmesser AD die größte Linie.

Der 16. Satz. Lehrsatz.

Der auf eines Kreises, ABC, Durchmesser, BA, im Endpunkte, A, errichtete Perpendikel, AE, fällt außerhalb des Kreises; und an diesen Punkt, A, fällt zwischen dem Umkreise und dem Perpendikel keine andere gerade Linie. Auch ist der Winkel des Halbkreises, CHAB, größer, der übrige vom Umkreise und dem Perpendikel eingeschlossene Winkel, HAE, aber kleiner, als jeder spitze geradlinige Winkel.

Erster Theil.



Fiele solcher Perpendikel nicht außerhalb des Kreises, so falle er, wenn's möglich ist, innerhalb, wie AC, so daß also DAC ein rechter Winkel wäre. Ziehe DC, so ist, weil (1, 15. E.) DC = DA, (1, 5. S.) DCA = DAC, folglich beyde Winkel rechte, welches (1, 17. S.) unmöglich ist.

Demnach kann solcher Perpendikel nicht innerhalb des Kreises fallen; aber aus eben den Gründen auch nicht auf den Umkreis; folglich fällt er außerhalb des Kreises.

Zweyter Theil.

Fiele, wenn es möglich, zwischen dem Umkreise CHA, und dem Perpendikel EA, an den Punkt A, eine gerade Linie, wie FA: so fälle (1, 12. S.) aus D auf FA den Perpendikel DG. Weil also DGA ein rechter Winkel, DAG aber kleiner als der rechte DAE, so ist DGA > DAG, folglich (1, 19. S.) DA > DG. Nun ist (1, 15. E.) DA = DH. Folglich wäre DH > DG, welches (1, 9. G.) unmöglich.

Dritter Theil.

Wäre ein spitzer geradliniger Winkel noch größer, als der vom Durchmesser BA, und dem Umkreise AHC eingeschlossene Winkel; oder noch kleiner, als der vom Umkreise AHC, und dem Perpendikel AE eingeschlossene Winkel: so müßte

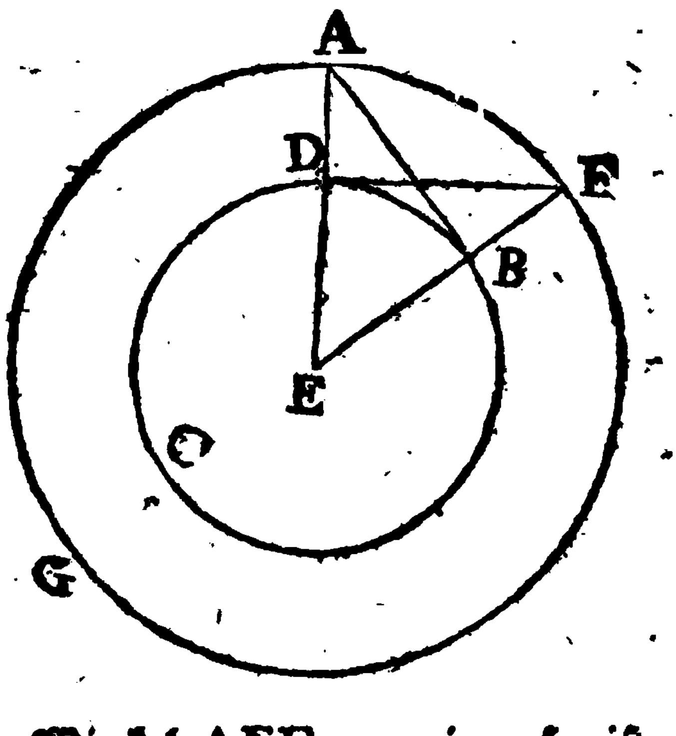
müßte zwischen dem Umkreise und dem Perpendikel an den Punkt A eine gerade Linie, wie FA, fallen, welches nach dem im zweyten Theile Erwiesenen unmöglich ist.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß ein auf dem Durchmesser in dessen Endpunkte errichteter Perpendikel den Kreis berührt, und daß eine gerade Linie den Kreis nur in einem Punkte berühret, indem (3, 2. S.) die gerade Linie, welche in zwey Punkten mit ihm zusammentrifft, innerhalb des Kreises fällt.

Der 17. Satz. Aufgabe.

Aus einem gegebenen Punkte, A, an einen gegebenen Kreis, BCD, eine Berührungslinie zu ziehen.

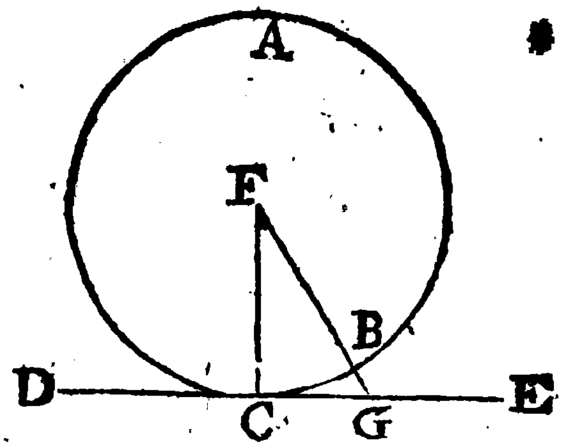


Nimm (3, 1. S.) des Kreises Mittelpunkt E, ziehe EA, und beschreibe aus E, mit EA den Kreis AFG. Errichte (1, 11. S.) auf EA in D den Perpendikel DF. Ziehe EBF, und AB: so ist AB die aus A gezogene Berührungslinie des Kreises BCD.

Denn da in den Triangeln, ABE, FDE, (1, 15. E.) EA = EF, und EB = ED, auch der Winkel AEF gemein: so ist (1, 4. S.) EBA = EDF. Nun ist EDF, folglich auch EBA, ein rechter Winkel, das ist, AB perpendikular auf dem Halbmesser EB, in dessen Endpunkte B. Folglich ist (3, 16. Zus.) AB eine Berührungslinie des Kreises BCD.

Der 18. Satz. Lehrsatz.

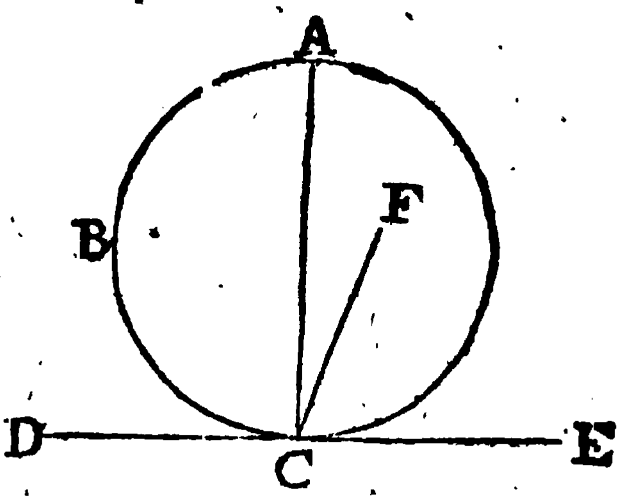
Auf eines Kreises, ABC, Berührungslinie, DE, ist die vom Mittelpunkte, F, nach dem Berührungspunkte, C, gezogene gerade Linie, FC, perpendikular.



Wäre FC nicht perpendikular auf DE, so sey es eine andere, etwa FG, und daher FGC ein rechter Winkel, also (1, 17. S.) FCG <FGC, folglich (1, 19. S.) FC >FG. Nun ist (1, 15. E.) FC =FB. Folglich wäre FB >FG, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Demnach kann FG nicht perpendikular auf DE seyn; aus eben den Gründen aber auch keine andere außer FC. Folglich ist FC auf DE perpendikular.

Der 19. Satz. Lehrsatz.

Ist auf eines Kreises, ABC, Berührungslinie, DE, im Berührungspunkte, C, eine gerade Linie, CA, perpendikular: so ist in solcher des Kreises Mittelpunkt.



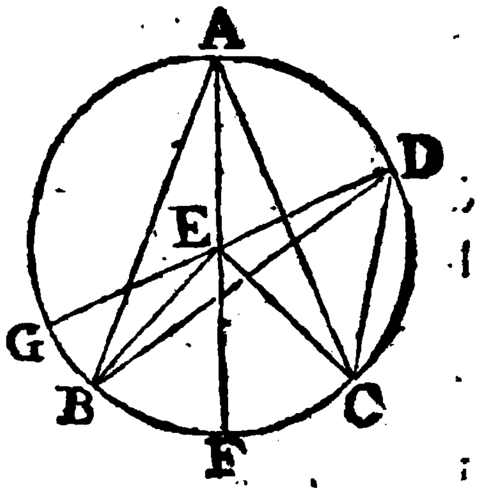
Wäre der Mittelpunkt nicht in AC, so sey er außer ihr irgendwo, etwa in F. Ziehe FC, welche (3, 18. S.) auf DE perpendikular; daher FCE ein rechter Winkel. Folglich wäre ACE =FCE, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Demnach kann F nicht der Mittelpunkt seyn; aus eben den Gründen aber auch kein anderer außerhalb AC. Folglich muß er in AC seyn.

Der 20. Satz. Lehrsatz.

In jedem Kreise, ABC, ist der Winkel am Mittelpunkte, BEC, doppelt so groß, als der Winkel am Umkreise, wenn beyde auf einerley Bogen stehen.

Es sey zuerst der Winkel am Umkreise BAC. Ziehe AE, und verlängere sie bis F. Da (1, 15. E.) EA=EB: so ist

ist (1, 5. S.) EAB = EBA, folglich (1, 32. S.) BEF = 2 EAB. Eben so ist FEC = 2 EAC, folglich (1, 2. S.) BEC = 2 BAC.

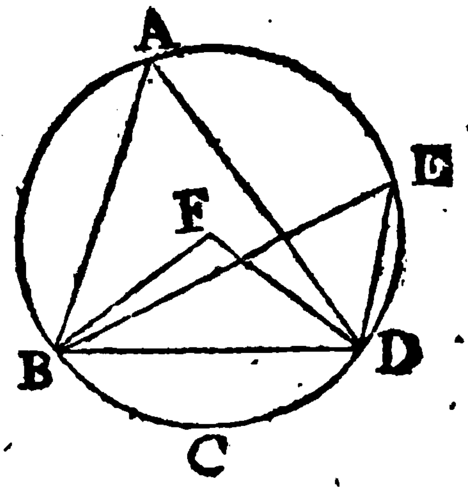


Es sey ferner ein anderer Winkel am Umkreise BDC, daß BD die EC schneide. Ziehet man nun DE, und verlängert sie bis G: so wird auf eben die Art bewiesen: daß GEC = 2 GDC, und GEB = 2 GDB, folglich (1, 3. S.) BEC = 2 BDC.

Der 21. Satz. Lehrsatz.

Die Winkel, BAD, BED, in einerley Kreisabschnitte, BAED, sind einander gleich.

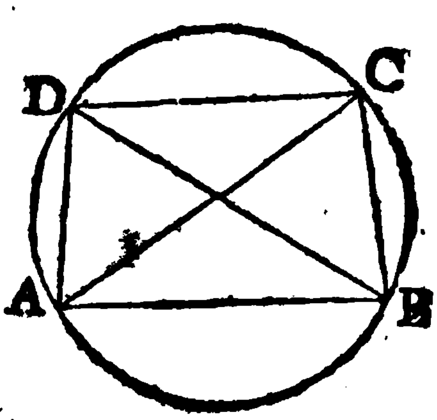
Nimm des Kreises Mittelpunkt F, und ziehe BF, FD: so ist (3, 20. S.) BFD = 2 BAD = 2 BED, folglich BAD = BED.



Der 22. Satz. Lehrsatz.

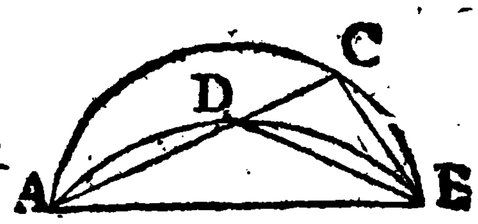
Die gegenüberstehenden Winkel einer vierseitigen Figur im Kreise, ABCD, sind zwey rechten Winkeln gleich.

Ziehe AC, BD, so ist (3, 21. S.) CDB = BAC, und BDA = ACB, folglich (1, 2. S.) ADC = BAC + ACB, folglich wenn ABC hinzukommt, ADC + ABC = BAC + ACB + ABC = (1, 32. S.) 2 R. Eben so wird bewiesen, daß BAD + DCB = 2 R.



Der 23. Satz. Lehrsatz.

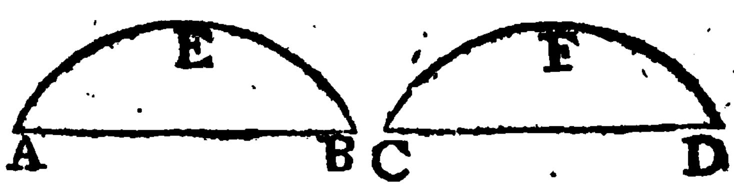
Auf einerley geraden Linie, AB, können nicht zwey ähnliche, und dabey ungleiche Kreisabschnitte, an einerley Seite errichtet werden.



Wäre dies möglich, so seyen die Kreisabschnitte, ACB, ADB, ungleich, und ähnlich. Ziehe willkührlich AD, und verlängere sie bis C. Ziehe CB, DB: so ist, weil die Abschnitte ähnlich, (3, 11. E.) ADB = ACB, welches (1, 16. S.) unmöglich ist.

Der 24. Satz. Lehrsatz.

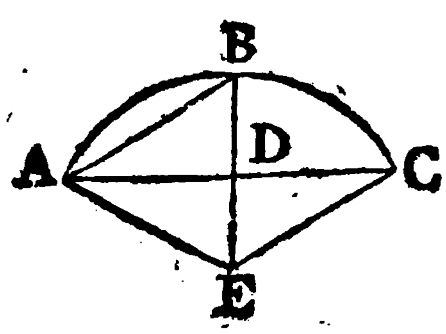
Aehnliche Kreisabschnitte, AEB, CFD, auf gleichen geraden Linien, AB, CD, sind einander gleich.



Bringe AEB auf CFD, und lege A auf C, und AB auf CD: so fällt (weil AB = CD) B auf D. Fielen nun nicht auch die Kreisbogen, AEB, CFD, auf einander, so müßte der eine entweder ganz über den andern fallen, oder ihn irgendwo noch in einem dritten Punkte schneiden. Das Erste ist gegen (3, 23. S.), das Zweyte gegen (3, 10. S.). Demnach müssen auch die Kreisbogen auf einander fallen, folglich die ähnlichen Kreisabschnitte AEB, CFD, sich decken, also einander gleich seyn.

Der 25. Satz. Aufgabe.

Den Kreis, wovon ein Abschnitt, ABC, gegeben ist, zu vollenden.



Halbire (1, 10. S.) AC in D, und errichte (1, 11. S.) auf AC in D den Perpendikel DB. Ziehe AB, so ist ABD entweder größer oder eben so groß, oder kleiner als BAD.

Erster

Erster Fall.

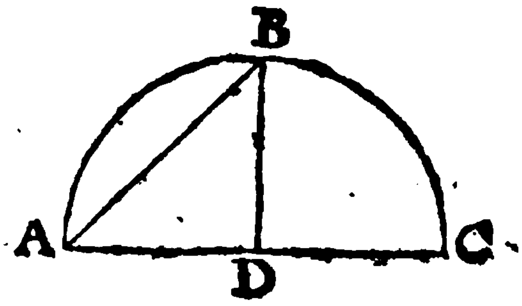
Ist ABD > BAD, so setze in A an BA (1, 23. S.) BAE = ABD, verlängere BD bis E, und ziehe EC.

Hiernach ist (1, 6. S.) BE = EA. Nun ist, weil AD = DC, und DE gemein, auch bey D rechte Winkel, (1, 4. S.) AE = EC. Folglich ist (1, 1. S.) auch BE = EC und (3, 9. S.) E des verlangten Kreises Mittelpunkt.

Auch ist klar, daß in diesem Falle der Kreisabschnitt ABC kleiner als der Halbkreis sey, weil der Mittelpunkt außerhalb desselben liegt.

Zweyter Fall.

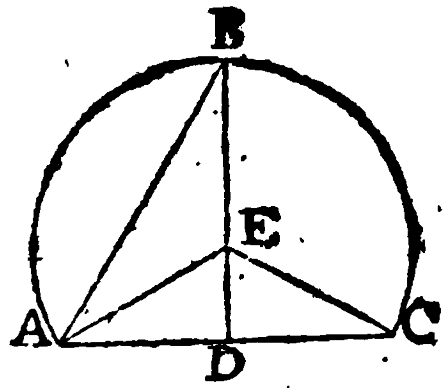
Ist ABD = BAD, so ist (1, 6. S.) AD = DB = DC. Folglich ist (3, 9. S.) D des verlangten Kreises Mittelpunkt.



In diesem Falle ist augenscheinlich der Abschnitt ABC ein Halbkreis.

Dritter Fall.

Ist ABD < BAD, so setze in A an BA (1, 23. S.) BAE = ABD, und ziehe EC.

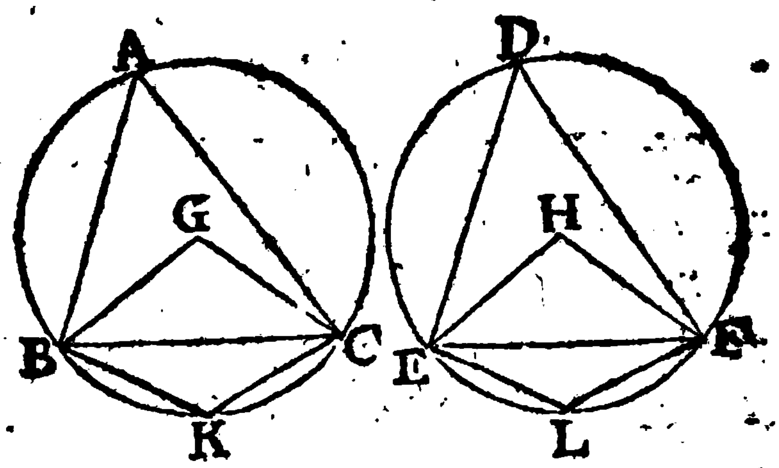


Hier wird, wie beym ersten Falle, bewiesen, daß AE = EB = EC, und daher E des verlangten Kreises Mittelpunkt sey.

In diesem Falle fällt der Mittelpunkt innerhalb des Abschnitts ABC, welcher also offenbar größer als der Halbkreis ist.

Der 26. Satz. Lehrsatz.

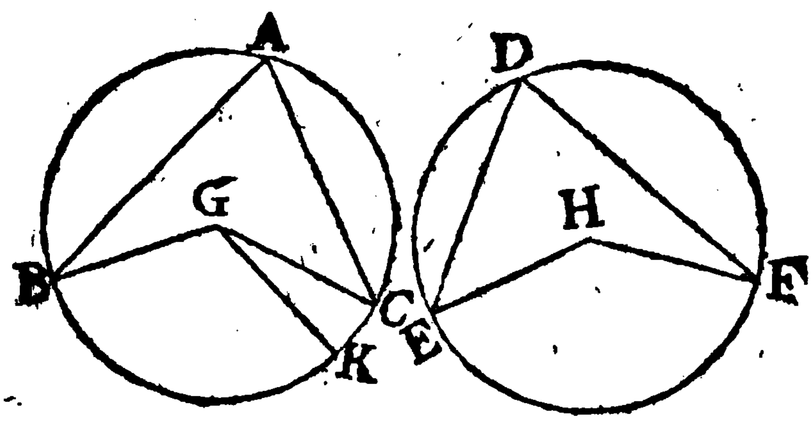
In gleichen Kreisen, ABC, DEF, stehen gleiche Winkel am Mittelpunkte, BGC, EHF, sowohl, als gleiche Winkel am Umkreise, BAC, EDF, auf gleichen Bogen, BKC, ELF.



Ziehet man BC, EF, so ist (3, 1. E.), weil die Kreise gleich sind, BG = EH, und GC = HF. Nun ist auch BGC = EHF. Folglich ist (1,4. S.) BC = EF. Da die Winkel bey A, D, gleich sind, so sind in den vierseitigen Figuren ABKC, DELF, (3, 22. S.) auch die Winkel K, L, gleich, also (3, 11. E.) die Abschnitte BKC, ELF, ähnlich. Nun war auch BC = EF. Folglich sind (3, 24. S.) diese Abschnitte sowohl, als ihre Bogen BKC, ELF, gleich.

Der 27. Satz. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen, ABC, DEF, sind die auf gleichen Bogen, BC, EF, stehenden Winkel am Mittelpunkte, BGC, EHF, sowohl als am Umkreise, BAC, EDF, einander gleich.



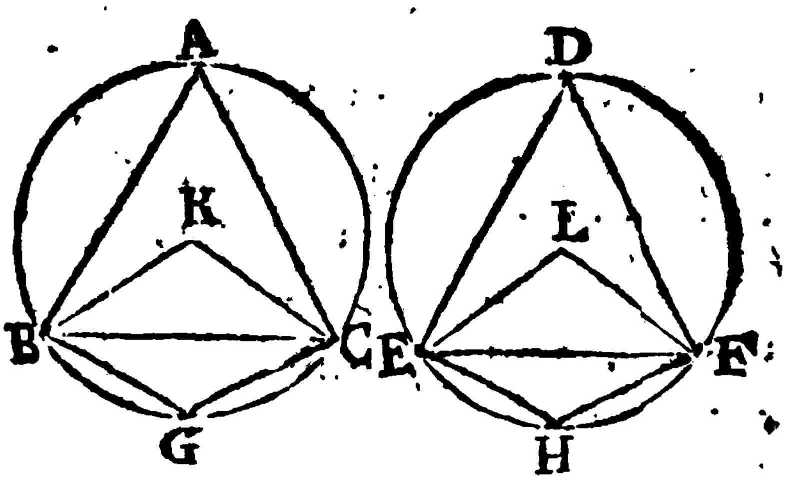
Wären BGC, EHF, ungleich, so wäre einer davon, etwa BGC, größer. Es sey daher (1, 23. S.) BGK = EHF, folglich (3, 26. S.) BK = EF. Nun ist angenommen BC = EF. Folglich wäre BK = BC, welches (1, 9. S.) unmöglich ist. Demnach ist BGC = EHF, also (3, 20. S.) auch BAC = EDF.

Der 28. Satz. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen, ABC, DEF, schneiden gleiche gerade Linien, BC, EF, gleiche Bogen ab: daß nämlich die größern Bogen, BAC, EDF, so wie die kleinern, BGC, EHF, einander gleich sind.

Nimm

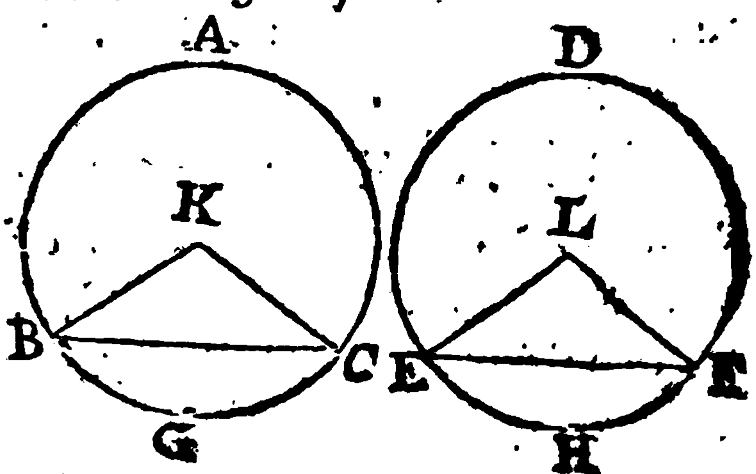
Nimm der Kreise Mittelpunkte, K, L, und ziehe die Halbmesser BK, KC, EL, LF; so ist (3, 1. E.), weil die Kreise gleich, BK = EL, und KC = LF. Nun ist auch BC = EF. Folglich sind (1, 8. S.) die Winkel bey K, L, also (3, 20. S.) auch bey A, D, also (3, 22. S.) auch bey G, H, gleich. Folglich sind (3, 26. S.) die Bogen BAC, EDF, sowohl, als die Bogen BGC, EHF, einander gleich.



Der 29. Satz. Lehrsatz.

In gleichen Kreisen, ABC, DEF, sind die geraden Linien, BC, EF, welche die Endpunkte gleicher Bogen, BGC, EHF, verbinden, einander gleich.

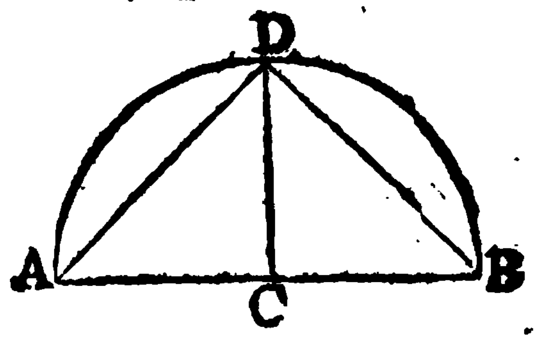
Nimm die Mittelpunkte K, L, und ziehe die Halbmesser BK, KC, EL, LF, welche (3, 1. E.) gleich sind. Nun sind, weil BGC = EHF, (3, 27. S.) auch die Winkel bey K, L, gleich. Folglich ist (1, 4. S.) BC = EF.



Der 30. Satz. Aufgabe.

Einen gegebenen Kreisbogen, ABD, zu halbiren.

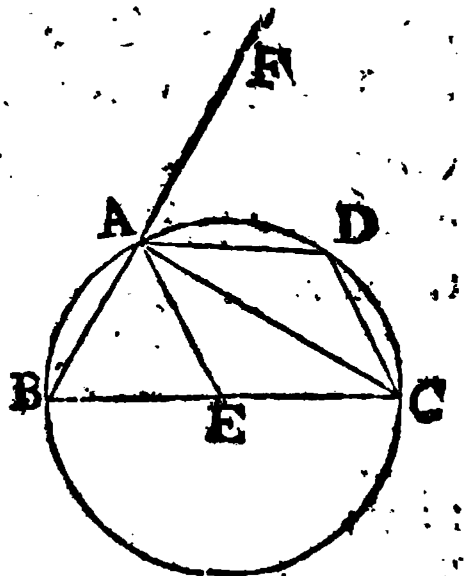
Ziehe AB, und halbire sie (1, 10. S.) in C. Errichte (1, 11. S.) auf AB in C den Perpendikel CD, und ziehe AD, DB: so ist ADB in D halbirt.



Denn da AC = CB, CD gemein, und bey C rechte Winkel: so ist (1, 4. S.) AD = DB; folglich sind (3, 28. S.) auch die Bogen AD, DB gleich.

Der 31. Satz. Lehrsatz.

Der Winkel im Halbkreise, BAC, ist ein rechter; aber der Winkel im größern Kreisabschnitte, ABC, ist kleiner, und der im kleinern, ADC, größer als ein rechter. Hingegen ist der Winkel des größern Kreisabschnittes, CABC, größer, und des kleinern, CADC, kleiner, als ein rechter.



Des Kreises ABCD Mittelpunkt sey E, sein Durchmesser BC. Nimm im Umkreise über BC willkührlich zwey Punkte A, D, und ziehe die geraden Linien BA, AC, AD, DC: so wird der Halbkreis von BC, und dem Bogen BADC; der größere Abschnitt von CA, und dem Bogen ABC; der kleinere von CA, und dem Bogen ADC eingeschlossen. Ziehe ferner EA, und verlängere BA nach F. Hier ist:

Erstlich. Der Winkel im Halbkreise BAC = R. Denn es ist (1, 15. E.) EB = EA, also (1, 5. S.) EAB = EBA, und eben so, weil EA = EC, EAC = ECA; folglich (1, 2. G.) BAC = EBA + ECA. Nun ist (1, 32. S.) FAC = EBA + ECA. Folglich ist (1, 1. G.) BAC = FAC = R. (1, 10. E.) **Oder:** Es ist (1, 32. S.) AEC = 2 BAE, und AEB = 2 EAC, folglich AEC + AEB = 2 BAC. Nun ist (1, 13. S.) AEC + AEB = 2 R. Folglich ist 2 BAC = 2 R., folglich BAC = R.

Zweytens. Der Winkel im größern Abschnitte ABC < R. Denn im △ ABC ist (1, 32. S.) ABC + BAC < 2 R., aber BAC = R., folglich ABC < R.

Drittens. Der Winkel im kleinern Abschnitte ADC < R. Denn in der vierseitigen Figur ABCD ist (3, 22. S.) ABC + ADC = 2 R., aber ABC < R., folglich ADC > R.

Vier-

Viertens. Der Winkel des größern Abschnitts CABC > R. Denn er ist offenbar größer, als der rechte Winkel CAB.

Fünftens. Der Winkel des kleinern Abschnitts CADC < R. Denn er ist offenbar kleiner, als der rechte Winkel CAF.

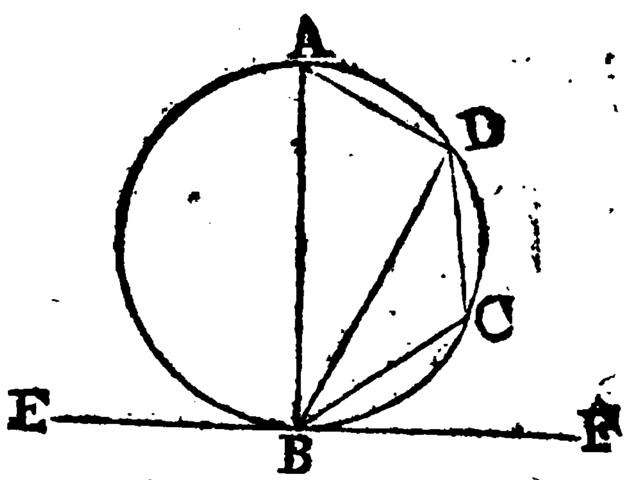
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß, wenn in einem Triangel ein Winkel den beyden übrigen gleich ist, er ein rechter sey; weil sein Nebenwinkel (1, 32. S.) denselben beyden Winkeln gleich ist, gleiche Nebenwinkel aber (1, 10. S.) rechte sind.

Der 32. Satz. Lehrsatz.

Wird ein Kreis, ABCD, von einer geraden Linie, EF, berührt, und von einer andern aus dem Berührungspunkte, B, gezogenen, BD, geschnitten: so sind die Winkel, DBF, DBE, welche die schneidende Linie mit der berührenden macht, den Winkeln in den Wechselabschnitten des Kreises gleich.

Errichte (1, 11. S.) auf EF in B den Perpendikel BA. Im Bogen BD nimm willkührlich einen Punkt C, und ziehe AD, DC, CB: so ist zu beweisen, daß DBF = DAB, und DBE = DCB.



Erstlich. Im Perpendikel BA ist (3, 19. S.) des Kreises Mittelpunkt, folglich (3, 31. S.) ADB = R. = ABD + BAD. Nun ist ABF = R. = ABD + DBF. Folglich ist (1, 1. G.) ABD + BAD = ABD + DBF. Folglich (1, 3. G.) BAD = DBF.

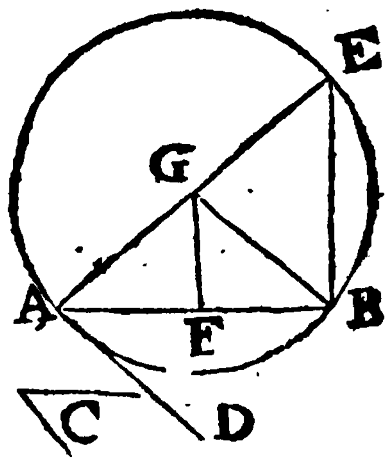
Zweytens, in der vierseitigen Figur ABCD ist (3, 22. S.) BAD + DCB = 2 R. = DBF + DBE. Nun ist erwiesen, daß BAD = DBF. Folglich ist (1, 3. G.) DCB = DBE.

Der

Der 33. Satz. Aufgabe.

Ueber einer gegebenen geraden Linie, AB, einen Kreisabschnitt zu beschreiben, der einen dem gegebenen geradlinigen Winkel, C, gleichen Winkel fasse.

Der gegebene Winkel C ist entweder ein spitzer, oder ein rechter, oder ein stumpfer Winkel.



Erster Fall.

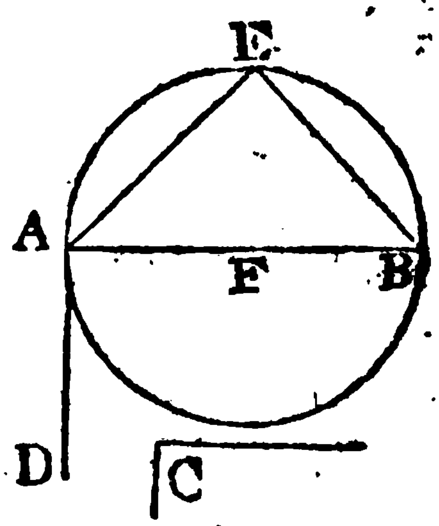
Wenn C ein spitzer Winkel ist. Setze an A (1, 23. S.) BAD = C. Errichte in A auf DA (1, 11. S.) den Perpendikel AE, und halbire (1, 10. S.) AB in F. Errichte in F auf AB (1, 11. S.) den Perpendikel FG, und ziehe GB: so ist, weil AF = FB, auch FG gemein, und bey F rechte Winkel, (1, 4. S.) AG = GB, folglich geht ein um G mit GA beschriebener Kreis auch durch B.

Er werde nun beschrieben und sey ABE, und BE gezogen: so ist AEB = C.

Denn da DA auf dem Durchmesser AE im Endpunkte A perpendikular, so berührt sie (3, 16. S.) den Kreis in A, folglich ist (3, 32. S.) BAD = AEB. Nun ist BAD = C. Folglich ist AEB = C.

Zweyter Fall.

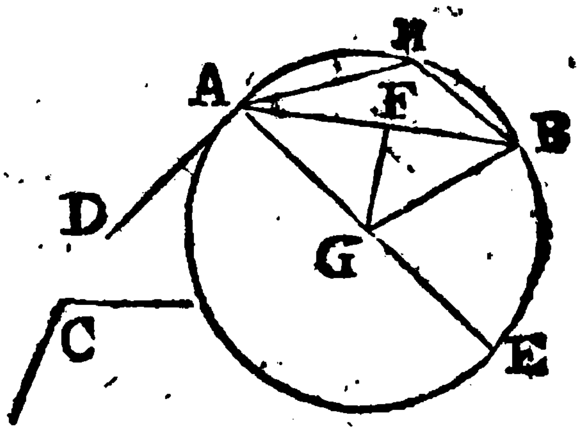
Wenn C ein rechter Winkel ist. Setze an A (1, 32. S.) BAD = C, und halbire AB in F. Beschreibe aus F mit FA, oder FB, den Kreis AEB. Im Umkreise nimm willkührlich einen Punkt E, und ziehe AE, EB: so ist AEB = C.



Denn hier ist wiederum (3, 16. S.) DA eine Berührungslinie, weil BAD = R. Auch ist BAD = AEB, weil AEB der Winkel im Halbkreise, also gleichfalls ein rechter ist. Nun ist BAD = C, folglich auch AEB = C.

Drit-

Dritter Fall.

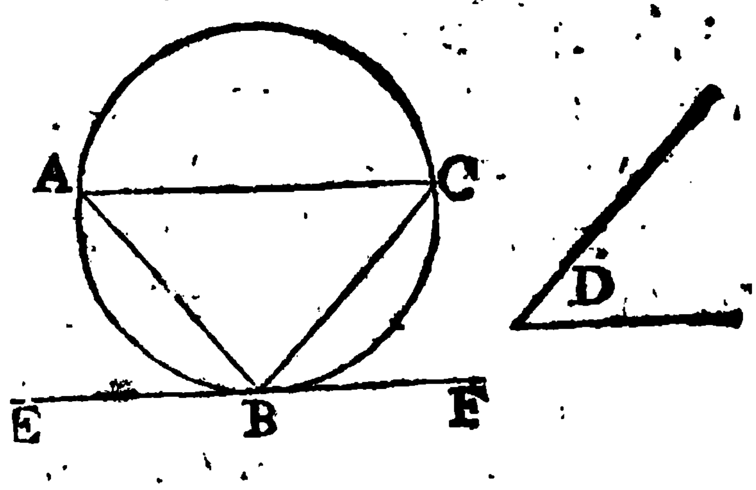


Wenn C ein stumpfer Winkel ist. An A setze (1, 23. S.) BAD = C. Auf DA errichte in A (1, 11. S.) den Perpendikel AE. Halbire AB in F, und errichte den Perpendikel FG. Ziehe GB, so ist, weil AF = FB, auch FG gemein, und bey F rechte Winkel, (1, 4. S.) AG = GB. Aus G beschreibe mit GA, oder GB, den Kreis AEB. Nimm in dem Bogen AB willkührlich den Punkt H, und ziehe AH, AB: so ist AHB = C.

Denn hier ist wieder DA (3, 16. S.) eine Berührungslinie, folglich (3, 32. S.) BAD, das ist C = AHB.

Der 34. Satz. Aufgabe.

Von einem gegebenen Kreise, ABC, einen Abschnitt wegzunehmen, der einen dem gegebenen geradlinigen Winkel, D, gleichen Winkel fasse.



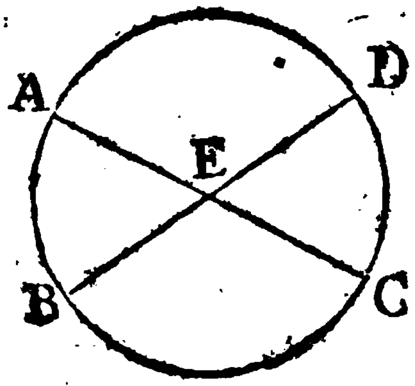
Ziehe an B (3, 17. S.) die Berührungslinie EBF. An FB setze in B (1, 23. S.) EBC = D. Im Umkreise nimm jenseits willkührlich den Punkt A, und ziehe AB, AC: so ist BAC = D.

Denn da EF eine Berührungslinie, so ist (3, 32. S.) FBC, das ist D = BAC.

Der 35. Satz. Lehrsatz.

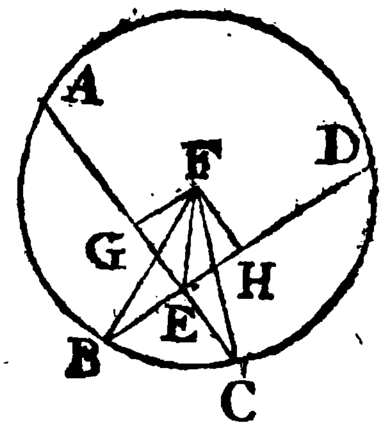
Schneiden einander in einem Kreise, ABCD, zwey gerade Linien, AC, BD: so ist das unter den Abschnitten der einen, AC, enthaltene Rectangel, AE × EC, dem unter den Abschnitten der andern, BD, enthaltenen, $BE \times ED$, gleich.

Erster Fall.



Ist beyder Linien Durchschnittspunkt E des Kreises Mittelpunkt: so sind die Abschnitte (1, 15. E.) einander gleich, und daher offenbar $AE \times EC = BE \times ED$.

Zweyter Fall.



Ist E aber nicht der Mittelpunkt des Kreises, so sey solcher F. Aus F fälle auf AC BD die Perpendikel FG, FH, und ziehe FB, FC, FE: so ist (3, 3. S.) $AG = GC$, folglich (2, 5. S.) $AE \times EC + \square GE = \square GC$, folglich, wenn $\square GF$ hinzukommt, (1, 2. G.) $AE \times EC + \square GE + \square GF = \square GC + \square GF$. Nun ist, weil bey G rechte Winkel, (1, 47. S.) $\square GE + \square GF = \square FE$, und $\square GC + \square GF = \square FC$. Folglich ist $AE \times EC + \square FE = \square FC = \square FB$, weil $FC = FB$. Nun ist aus eben den Gründen $DE \times EB + \square FE = \square FB$. Folglich ist $AE \times EC + \square FE = DE \times EB + \square FE$, folglich, wenn man $\square FE$ wegnimmt, $AE \times EC = DE \times EB$.

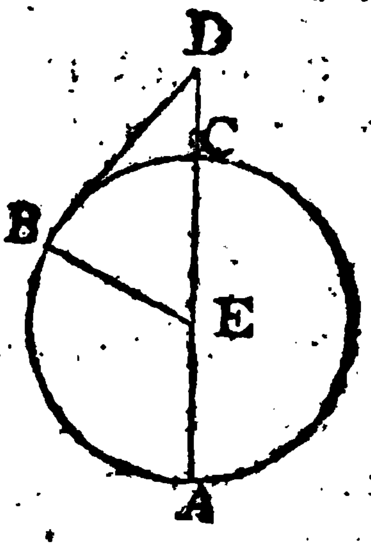
Der 36. Satz. Lehrsatz.

Gehen von einem außerhalb eines Kreises, ABC, genommenen Punkte, D, zwey gerade Linien an den Umkreis, von denen ihn die eine, DCA, schneidet, die andere, DB, berührt: so ist das unter der ganzen schneidenden Linie, DCA, und ihrem außerhalb des Kreises befindlichen Abschnitte, DC, enthaltene Rectangel dem Quadrate der Berührungslinie, DB, gleich.

Erster

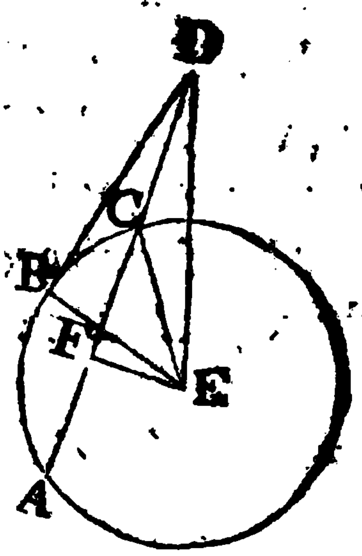
Erster Fall.

Die schneidende Linie DA gehe durch den Mittelpunkt E. Ziehe EB, so ist (3, 18. S.) EBD ein rechter Winkel, und daher (1, 47. S.) □ ED = □ DB + □ BE. Nun ist, weil CE = EA, (2, 6. S.) AD × DC + □ CE = □ ED, oder, (weil CE = BE) AD × DC + □ BE = □ ED. Folglich ist AD × DC + □ BE = □ DB + □ BE, folglich, wenn man □ BE wegnimmt, AD × DC = □ DB.



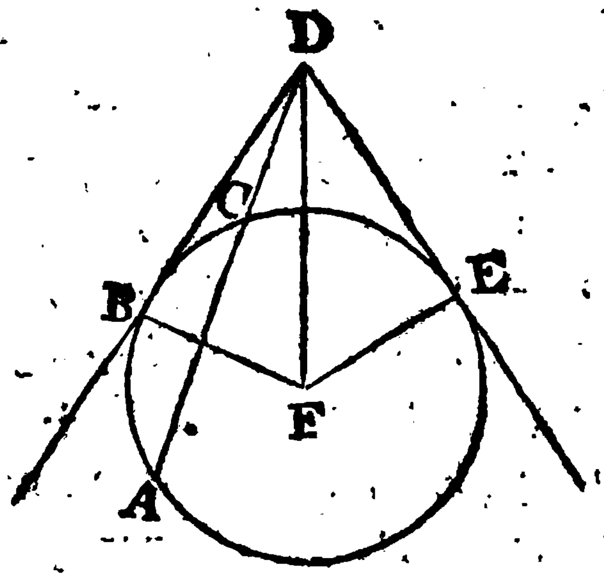
Zweyter Fall.

Die schneidende Linie DA gehe nicht durch den Mittelpunkt E. Aus E fälle auf AC (1, 12. S.) den Perpendikel EF, und ziehe EB, EC, ED: so ist (3, 3. S.) AC in F halbirt, folglich (2, 6. S.) AD × DC + □ FC = □ FD, folglich, wenn □ FE hinzukommt, (1, 2. S.) AD × DC + □ FC + □ FE = □ FD + □ FE. Nun ist, weil bey F rechte Winkel, (1, 47. S.) □ FC + □ FE = □ EC = (1, 15. S.) □ EB, und □ FD + □ FE = □ DE = (1, 47. S.) □ DB + □ EB. Folglich ist AD × DC + □ EB = □ DB + □ EB, folglich, wenn man □ EB wegnimmt, AD × DC = □ DB.



Der 37. Satz. Lehrsatz.

Gehen von einem außerhalb eines Kreises, ABC, genommenen Punkte, D, zwey gerade Linien an den Umkreis, von denen die eine, DCA, ihn schneidet, die andere, DB, an ihn fällt; und ist das unter der ganzen schneidenden Linie, DCA, und ihrem außerhalb des Kreises befindlichen Abschnitte, DC, enthaltene Rectangel dem Quadrate der an den Umkreis fallenden Linie, DB, gleich: so ist letztere eine Berührungslinie des Kreises.



Ziehe aus D (3, 17. S.) die Berührungslinie DE. Nimm (3, 1. S.) den Mittelpunkt F, und ziehe FE, FB, FD.

Da DE den Kreis berührt, und DA ihn schneidet: so ist (3, 36. S.) $AD \times DC = \square DE$. Nun ist angenommen, $AD \times DC = \square DB$. Folglich ist $\square DB = \square DE$, und daher $DB = DE$. Nun ist auch (1, 15. E.) $FB = FE$, auch FD gemein. Folglich ist (1, 8. S.) $FBD = FED$. Nun ist FED ein rechter Winkel. Folglich ist auch FBD ein rechter Winkel, also BD auf FB perpendikular, folglich (3, 16. Zus.) BD eine Berührungslinie.

Eben so wird auch der Beweis geführt, wenn des Kreises Mittelpunkt F in DA ist.

Euklid's Elemente.

Viertes Buch.

Erklärungen.

1. Eine gradlinige Figur heißt **in eine gradlinige Figur beschrieben**, wenn jeder Winkel der eingeschriebenen jede Seite derjenigen, in welche sie beschrieben ist, trifft.

2. Eine gradlinige Figur heißt gleichermaßen **um eine gradlinige Figur beschrieben**, wenn jede Seite der umgeschriebenen jeden Winkel derjenigen, um welche sie beschrieben ist, trifft.

3. Eine gradlinige Figur heißt **in einen Kreis beschrieben**, wenn jeder Winkel der eingeschriebenen Figur des Kreises Umring trifft.

4. Eine gradlinige Figur heißt **um einen Kreis beschrieben**, wenn jede Seite der umgeschriebenen Figur des Kreises Umring berührt.

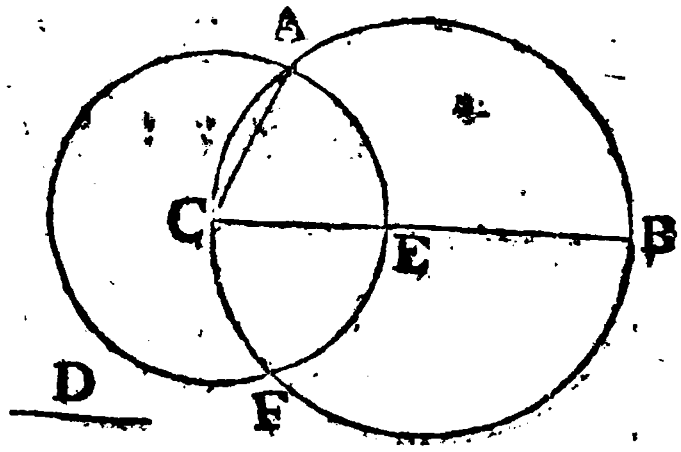
5. Ein Kreis heißt gleichermaßen **in eine gradlinige Figur beschrieben**, wenn des Kreises Umring jede Seite der Figur, in welche er beschrieben ist, berührt.

6. Ein Kreis heißt **um eine gradlinige Figur beschrieben**, wenn des Kreises Umring jeden Winkel der Figur, um welche er beschrieben ist, trifft.

7. Eine gerade Linie heißt **in einen Kreis eingetragen**, wenn ihre Endpunkte in des Kreises Umringe sind.

Der 1. Satz. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis, ABC, eine der gegebenen geraden Linie, D, welche jedoch nicht größer, als des Kreises Durchmesser, seyn darf, gleiche gerade Linie einzutragen.

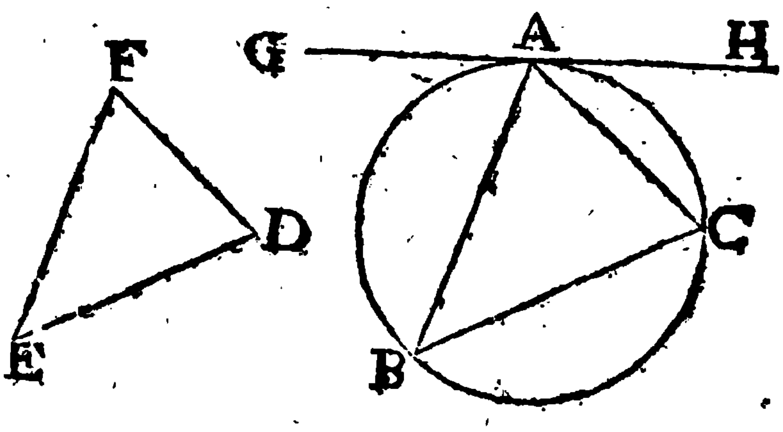


Ziehe des Kreises Durchmesser BC. Ist nun BC = D, so ist das Verlangte geschehen. Ist aber BC > D, so mache (1, 3. S.) CE = D, beschreibe aus C mit CE den Kreis AEF, und ziehe CA: so ist diese die verlangte Linie.

Denn da (1, 15. E.) CA = CE, aber CE = D: so ist (1, 1. G.) die (4, 7. E.) eingetragene CA = D.

Der 2. Satz. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis, ABC, einen dem gegebenen Triangel, DEF, gleichwinkligen Triangel zu beschreiben.



In des Kreises Umringe nimm einen willkührlichen Punkt A, ziehe (3, 17. S.) die Berührungslinie GAH, lege an A (1, 23. S.) die Winkel HAC = E, und GAB = D, und ziehe BC: so ist ABC der verlangte Triangel.

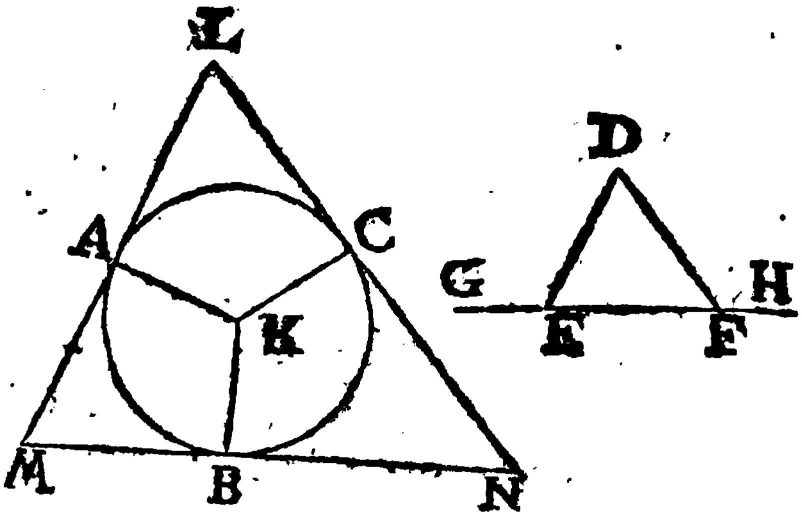
Denn da (3, 32. S.) HAC = ABC, aber HAC = E: so ist (1, 1. G.) ABC = E. Nun ist aus eben den Gründen ACB = D. Folglich ist (1, 32. S.) BAC = F. Demnach ist der (4, 3. E.) in den Kreis beschriebene △ ABC dem △ FED gleichwinklig.

Der

Der 3. Satz. Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis, ABC, einen dem gegebenen Triangel, DEF, gleichwinkligen Triangel zu beschreiben.

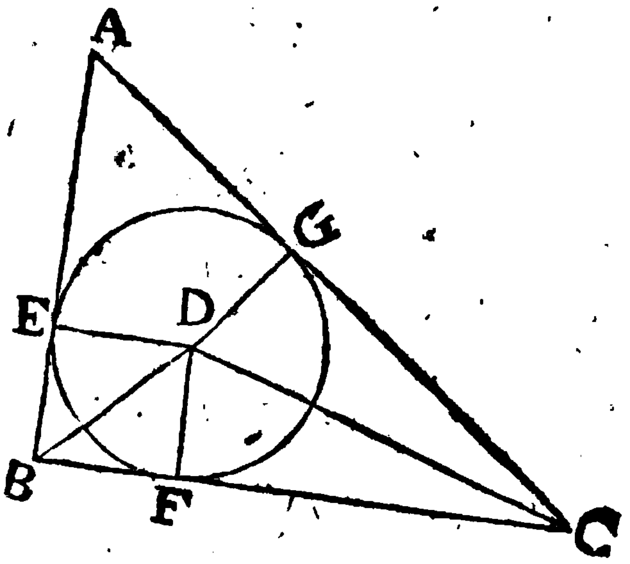
Verlängere EF zu beyden Seiten nach G, H, nimm des Kreises Mittelpunkt K, ziehe willkührlich die gerade Linie KB, und lege an K (1, 23. S.) die Winkel BKA = DEG, und BKC = DFH. Ziehe endlich (3, 17. S.) an den Kreis durch die Punkte, A, B, C, die Berührungslinien LM, MN, NL: so ist LMN der verlangte Triangel.



Denn da (3, 18. S.) bey A und B rechte Winkel, und in der vierseitigen Figur AMBK, welche in zwey Triangel zerlegt werden kann, (1, 32. S.) alle Winkel zusammen vier rechten Winkeln gleich sind: so ist AMB + BKA = 2 R. = DEG + DEF, (nach 1, 13. S. und 1, 1. G.). Nun ist nach Obigem BKA = DEG. Folglich ist (1, 3. G.) AMB = DEF. Da nun auf eben die Art erweislich, daß BNC = DFE: so ist (1, 32. S.) auch ALC = EDF. Demnach ist (4, 4. E.) der um den Kreis beschriebene △ LMN dem △ DEF gleichwinklig.

Der 4. Satz. Aufgabe.

In einen gegebenen Triangel, ABC, einen Kreis zu beschreiben.



Halbire (1, 9. S.) zwey beliebige Winkel des Triangels, ABC, BCA, mittelst BD, CD, welche (1, 11. G.) in D zusammentreffen, fälle (1, 12. S.) aus D auf des Triangels Seiten AB, BC, CA, die Perpendikel DE, DF, DG, und beschreibe aus D mit einem derselben den verlangten Kreis EFG.

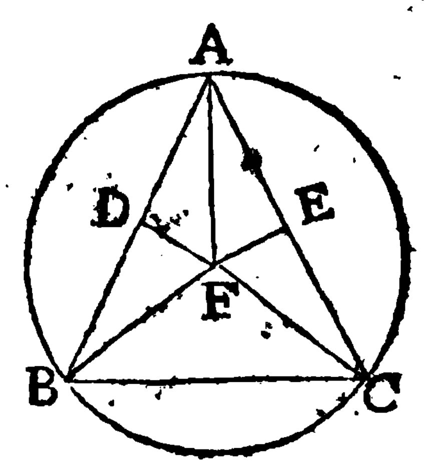
Denn da EBD = DBF, DEB = DFB = R., und BD gemein: so ist (1, 26. S.) DE = DF. Da nun eben so erweislich, daß DF = DG, folglich (1, 1. G.) auch DE = DG: so gehet der Kreis, welcher aus D mit einer der gleichen Linien DE, DF, DG, beschrieben wird, auch durch die übrigen Punkte, bey welchen rechte Winkel sind, berührt also (3, 16. S.) jede Seite des Triangels, und ist folglich (4, 5. E.) darein beschrieben.

Der 5. Satz. Aufgabe.

Um einen gegebenen Triangel, ABC, einen Kreis zu beschreiben.

Halbire (1, 10. S.) zwey Seiten des Triangels, AB, AC, in D, E; errichte (1, 11. S.) in diesen Punkten auf den Seiten die Perpendikel DF, EF, welche (1, 11. G.) in einem Punkte F, entweder innerhalb des Triangels, oder auf dessen dritten Seite, oder außerhalb zusammentreffen; und beschreibe aus F mit FA den verlangten Kreis ABC.

Erster Fall.

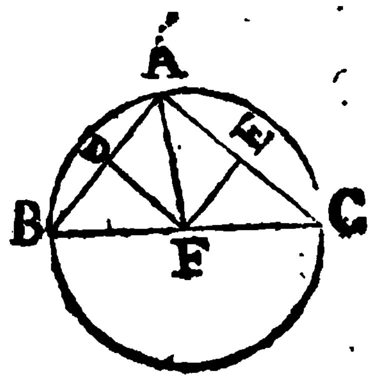


Es falle F innerhalb des Triangels. Ziehe FA, FB, FC: so ist AD = DB, auch DF gemein und perpendikular, folglich (1, 4. S.) AF = FB. Da nun eben so erweislich, daß AF = FC, also (1, 1. G.) auch FB = FC: so gehet ein Kreis

aus

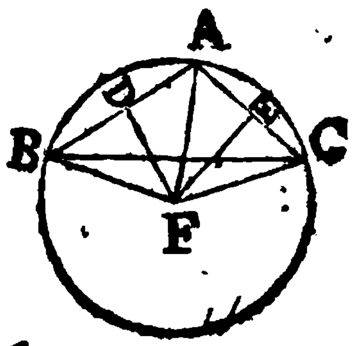
aus F mit FA beschrieben, auch durch die übrigen Punkte, B, C, und ist also (4, 6. E.) um den Triangel beschrieben.

Zweyter Fall.



Es falle F auf die Seite BC. Ziehe FA: so wird, wie beym ersten Falle, bewiesen: daß F der Mittelpunkt des um den Triangel beschriebenen Kreises sey.

Dritter Fall.



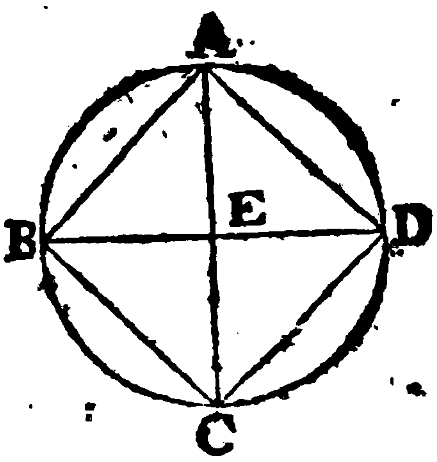
Es falle F außerhalb des Triangels. Ziehe FA, FB, FC: so ist wieder AD = DB, auch DF gemein und perpendikular, folglich (1, 4. S.) AF = FB. Eben so wird bewiesen, daß AF = FC. Folglich ist F der Mittelpunkt des um den Triangel beschriebenen Kreises.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß der Winkel BAC beym ersten Falle im größern Kreisabschnitte, also spitz, beym zweyten im Halbkreise, also ein rechter, beym dritten im kleinern Kreisabschnitte, also stumpf sey, nach (3, 31. S.). Ist demnach in dem gegebenen Triangel der Winkel BAC spitz, so treffen die Perpendikel DF, EF, innerhalb des Triangels, ist er ein rechter Winkel, auf BC, und ist er stumpf, außerhalb des Triangels zusammen.

Der 6. Satz. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis, ABCD, ein Quadrat zu beschreiben.



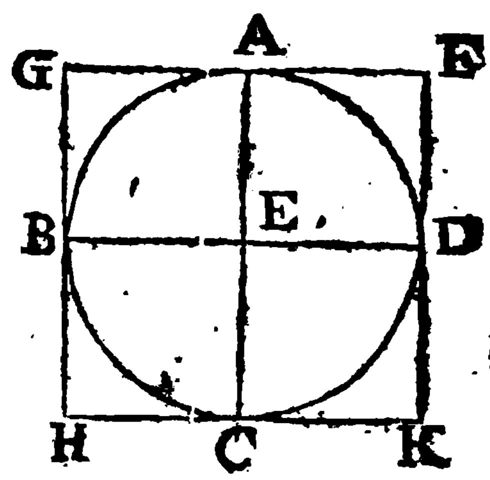
Ziehe zwey Durchmesser des Kreises AC, BD, (1, 11. S.) auf einander perpendikular, auch noch die AB, BC, CD, DA: so ist die vierseitige Figur ABCD das verlangte Quadrat.

Denn da (1, 15. E.) BE = ED, auch EA gemein und perpendikular: so ist (1, 4. S.) BA = AD. Nun ist nach denselben Gründen auch BC, CD, jede für sich, der BA, AD, gleich. Folglich ist ABCD gleichseitig.

Da BD des Kreises Durchmesser, also (3, 31. S.) BAD, und auch aus gleichen Gründen jeder der Winkel, ABC, BCD, CDA, ein rechter Winkel: so ist ABCD rechtwinklig, nach Obigem aber auch gleichseitig; folglich (1, 30. E.) ein Quadrat, und (4, 3. E.) in den Kreis beschrieben.

Der 7. Satz. Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis, ABCD, ein Quadrat zu beschreiben.



Ziehe zwey Durchmesser des Kreises AC, BD, (1, 11. S.) auf einander perpendikular, und (3, 16. Zus.) durch die Punkte A, B, C, D, an den Kreis Berührungslinien FG, GH, HK, KF: so ist FGHK das verlangte Quadrat.

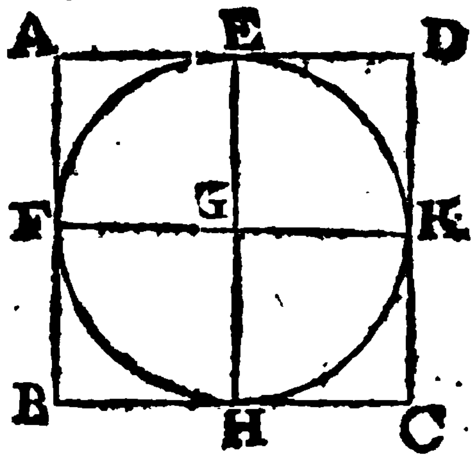
Denn da bey A, B, C, D, (3, 18. S.) rechte Winkel sind, aber auch bey E: so sind (1, 28. 30. S.) FG, BD, HK, desgleichen GH, AC, FK, parallel. Demnach ist FGHK sowohl, als auch jede der Figuren, GD, DH, GC, CF, ein Parallelogramm. Folglich ist (1, 34. S.) GF = BD = HK, und GH = AC = FK. Nun ist (1, 15. E.) AC = BD. Folglich ist GF = HK = GH = FK, also FGHK, gleichseitig. Nun ist (1, 34. S. u. 3, 18. S.) AGB = FDE = R., und dieß eben so von den Winkeln bey H, K, F, erweislich, also FGHK

auch

auch rechtwinklig. Folglich ist (1, 30. E.) FGHK ein Quadrat, und (4, 4. E.) um den Kreis beschrieben.

Der 8. Satz. Aufgabe.

In ein gegebenes Quadrat, ABCD, einen Kreis zu beschreiben.

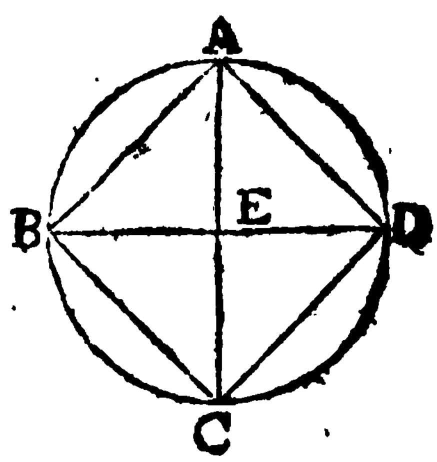


Halbire zwey Seiten AD, AB, in E, F; ziehe (1, 31. S.) durch E die EH der AB oder CD, und durch F die FK der AD oder BC parallel; und beschreibe aus beyder Linien Durchschnitte G mit GE den verlangten Kreis.

Denn nach Obigem sind AG, GB, GC, GD, Parallelogramme, folglich (1, 34. S.) ihre gegenüberliegenden Seiten gleich. Nun ist AD = AB, also (1, 7. G.) AE = AF. Folglich ist GF = GE. Nun wird eben so bewiesen, daß GH, GK, jede für sich, der GF, GE, gleich sey. Folglich gehet der Kreis aus G mit GE beschrieben auch durch die übrigen Punkte, F, H, K, bey welchen (1, 34. S.) rechte Winkel sind, und berühret also (3, 16. S.) jede Seite des Quadrats, ist folglich (4, 5. E.) darein beschrieben.

Der 9. Satz. Aufgabe.

Um ein gegebenes Quadrat, ABCD, einen Kreis zu beschreiben.



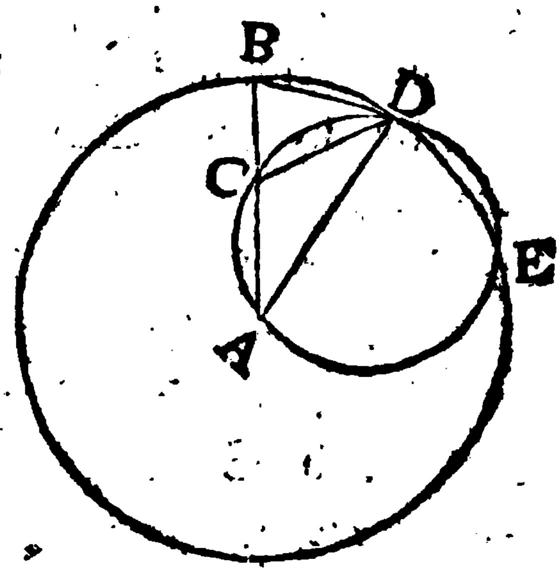
Ziehe die Diagonalen AC, BD, und beschreibe aus ihrem Durchschnitte E mit EA den verlangten Kreis.

Denn da (1, 30. E.) AB = AD, und BC = CD, auch AC gemein: so ist (1, 8. S.) BAC = CAD = ½ R. Nun ist eben so erweislich, daß ABD = DBC = ½ R. Folglich ist BAC = ABD, folglich (1, 6. S.) EA = EB. Nun wird eben so bewiesen, daß EC, ED, jede

jede für sich, der EB, EA, gleich sey. Folglich gehet der Kreis aus E mit EA beschrieben auch durch die übrigen Punkte B, C, D, und ist also (4, 4. E.) um das Quadrat beschrieben.

Der 10. Satz. Aufgabe.

Einen gleichschenkligen Triangel zu beschreiben, in welchem jeder der Winkel an der Grundlinie das Doppelte des dritten Winkels sey.



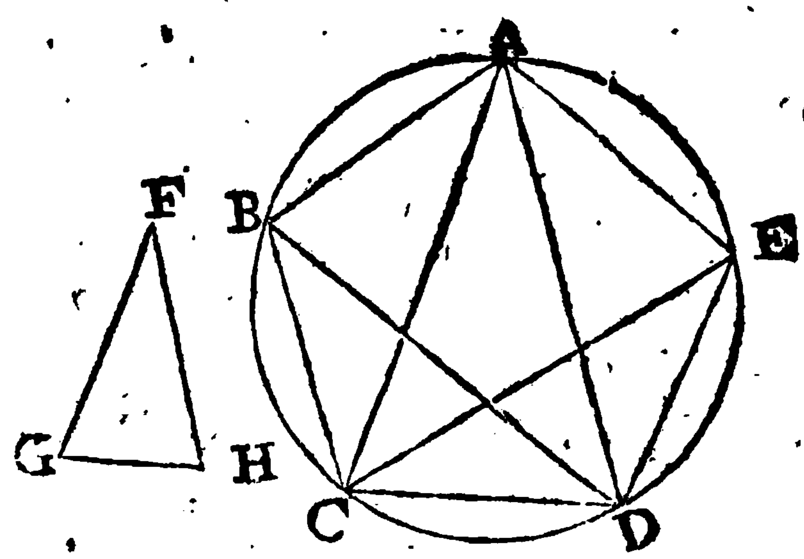
Nimm eine beliebige gerade Linie AB, und schneide sie (2, 11. S.) in C so, daß $AB \times BC = \square CA$. Aus A beschreibe mit AB den Kreis BDE, trage in denselben (4, 1. S.) $BD = AC$, und ziehe AD: so ist ABD der verlangte gleichschenklige Triangel.

Denn ziehet man DC, und beschreibt (4, 5. S.) um den $\triangle$ ACD den Kreis ACDE: so ist, weil $AB \times BC = \square CA = \square DB$, (3, 37. S.) BD eine Berührungslinie des Kreises ACDE, folglich (3, 32. S.) $BDC = DAC$, folglich, wenn CDA hinzukommt, $ADB = DAC + CDA$. Nun ist, weil (1, 15. E.) $AD = AB$, (1, 5. S.) $ADB = ABD$; aber (1, 32. S.) $DAC + CDA = BCD$. Folglich ist $ADB = ABD = BCD$, folglich (1, 6. S.) $BD = DC = CA$, folglich (1, 5. S.) $DAC = CDA$, folglich $BCD = 2\ DAC$. Demnach ist auch ADB sowohl, als $ABD = 2\ DAC$.

Der 11. Satz. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis, ABCDE, eine gleichseitige und gleichwinklige fünfseitige Figur zu beschreiben.

Be=



Beschreibe (4, 10. S.) einen gleichschenkligen △ FGH, in welchem jeder der Winkel G, H, das Doppelte des dritten F sey. In den gegebenen Kreis beschreibe (4, 2. S.) einen dem △ FGH gleichwinkligen △ ACD, daß CAD = F, ACD = G, und ADC = H, also CAD = ½ ACD = ½ ADC sey. Halbire endlich (1, 9. S.) ACD und ADC, mittelst CE, BD, und ziehe CB, BA, AE, ED: so ist ABCDE die verlangte fünfseitige Figur.

Denn da nach obiger Construction die fünf Winkel, CAD, ECD, ECA, ADB, BDC, gleich sind: so sind (3, 26. S.) die Kreisbogen CD, DE, EA, AB, BC, folglich (3, 29. S.) die eben so benannten geraden Linien gleich. Folglich ist ABCDE gleichseitig.

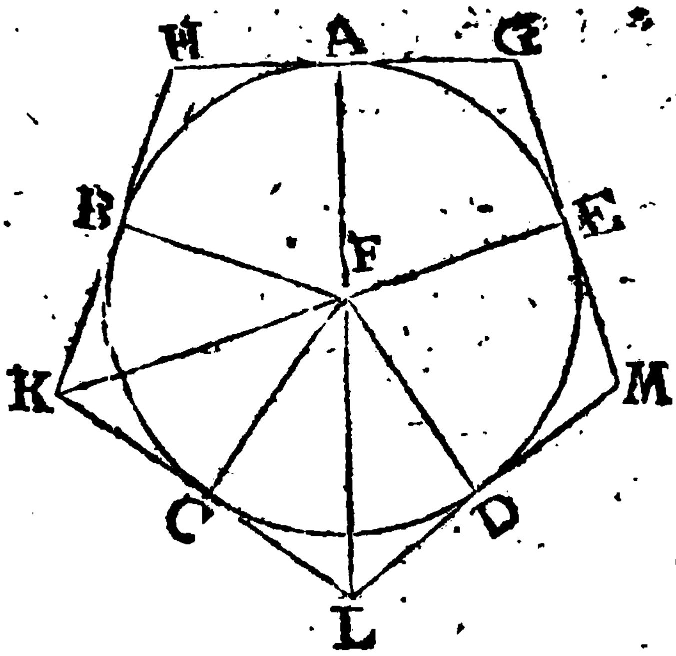
Da nach Obigem der Bogen AB = DE, folglich, wenn der Bogen BCD hinzukommt, der Bogen ABCD = BCDE: so ist (3, 27. S.) DEA = EAB. Nun ist eben so erweislich, daß jeder der Winkel, ABC, BCD, CDE, jedem der Winkel DEA, EAB, gleich sey. Folglich ist ABCDE auch gleichwinklig, und (4, 3. S.) in den Kreis beschrieben.

Der 12. Satz. Aufgabe.

Um einen gegebenen Kreis, ABCDE, eine gleichseitige und gleichwinklige fünfseitige Figur zu beschreiben.

Gesetzt,

Gesetzt, die Punkte A, B, C, D, E, wären die Winkelspitzen einer solchen (4, 11. S.) in den Kreis beschriebenen Figur, daß also die Bogen AB, BC, CD, DE, EA, gleich sind. Ziehe (3, 16. Zus.) durch diese Punkte an den Kreis die Berührungslinien GH, HK, KL, LM, MG: so ist GHKLM die verlangte Figur.



Denn es sey F des Kreises Mittelpunkt, und FB, FK, FC, FL, FD, gezogen: so sind (3, 18. S.) bey B und C rechte Winkel; folglich ist (1, 47. S.) □ FK = □ FB + □ BK = □ FC + □ CK. Nun ist (1, 15. E.) FB = FC, also auch □ FB = □ FC. Folglich ist (1, 3. G.) □ BK = □ CK, also auch BK = CK; folglich, da auch FB = FC, und FK gemein, (1, 8. S.) KFB = KFC, und FKB = FKC; folglich BFC = 2 KFC, und BKC = 2 FKC. Eben so wird bewiesen, daß CFD = 2 LFC, und CLD = 2 FLC. Nun ist, weil BC, CD, gleiche Bogen, (3, 27. S.) BFC = CFD. Folglich ist (1, 7. G.) KFC = LFC, folglich ist, da bey C rechte Winkel, und FC gemein, (1, 26. S.) CK = CL, und FKC = FLC.

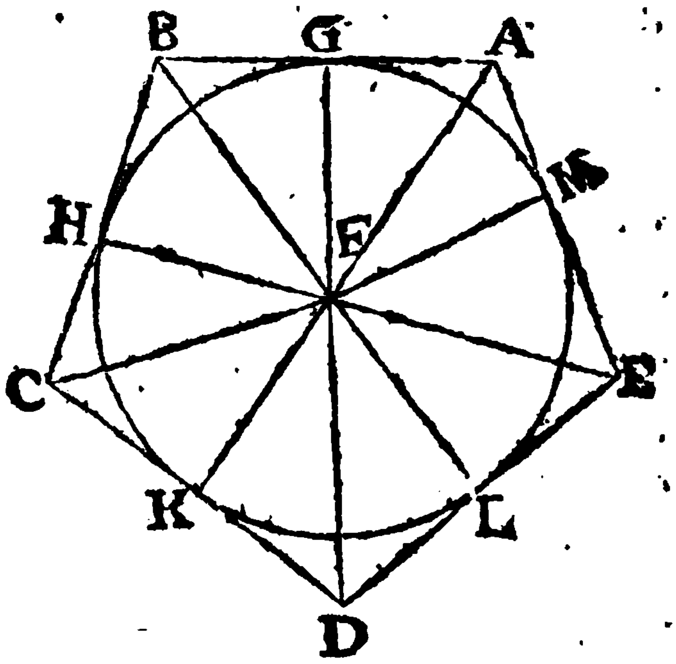
Da hiernach CK = CL, folglich LK = 2 CK, und eben so erweislich KH = 2 BK, aber nach Obigem CK = BK: so ist LK = KH. Aus eben den Gründen ist jede der HG, GM, ML, jeder der LH, KH, gleich. Folglich ist GHKLM gleichseitig.

Da ferner FKC = FLC, also auch 2 FKC = 2 FLC, aber nach Obigem 2 FKC = BKC, und 2 FLC = CLD: so ist BKC = CLD. Aus eben den Gründen ist jeder der Winkel BHA, AGE, EMD, jedem der BKC, CLD, gleich. Folglich ist GHKLM auch gleichwinklig, und (4, 4. E.) um den Kreis beschrieben.

Der

Der 13. Satz. Aufgabe.

In eine gegebene gleichseitige und gleichwinklige fünfseitige Figur, ABCDE, einen Kreis zu beschreiben.



Halbire (1, 9. S.) zwey beliebige Winkel der Figur, BCD, CDE, mittelst der Linien CF, DF. Aus dem Punkte F, in welchem sie zusammentreffen, fälle (1, 12. S.) auf die Seiten der Figur, die Perpendikel FG, FH, FK, FL, FM, und beschreibe aus F mit einem derselben den verlangten Kreis.

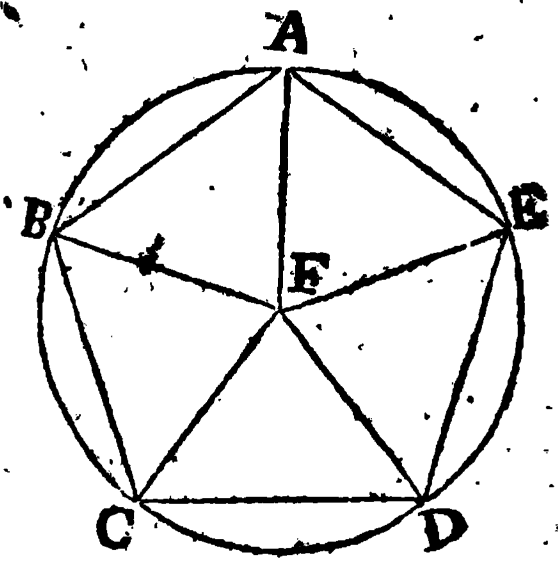
Denn ziehet man noch FB, FA, FE: so ist FCB = FCD, CB = CD, und EC gemein, folglich (1, 4. S.) CBF = CDF. Nun ist CDE = 2 CDF, und ABC = CDE. Folglich ist auch ABC = 2 CBF, folglich ABC von FB halbirt. Eben so beweist man, daß BAE, AED, von FA, FE halbirt sind.

Da FCH = FCK, bey H und K rechte Winkel, und FC gemein: so ist (1, 26. S.) FH = FK. Da nun eben so erweislich, daß jede der FG, FL, FM, jeder der FH, FK gleich sey: so gehet der Kreis aus F, mit einer dieser gleichen Linien FG beschrieben, auch durch die übrigen Punkte H, K, L, M, bey denen rechte Winkel sind, und berührt also (3, 16. S.) jede Seite der Figur, ist folglich (4, 5. E.) darein beschrieben.

Der 14. Satz. Aufgabe.

Um eine gegebene gleichseitige und gleichwinklige fünfseitige Figur, ABCDE, einen Kreis zu beschreiben.

Hal-

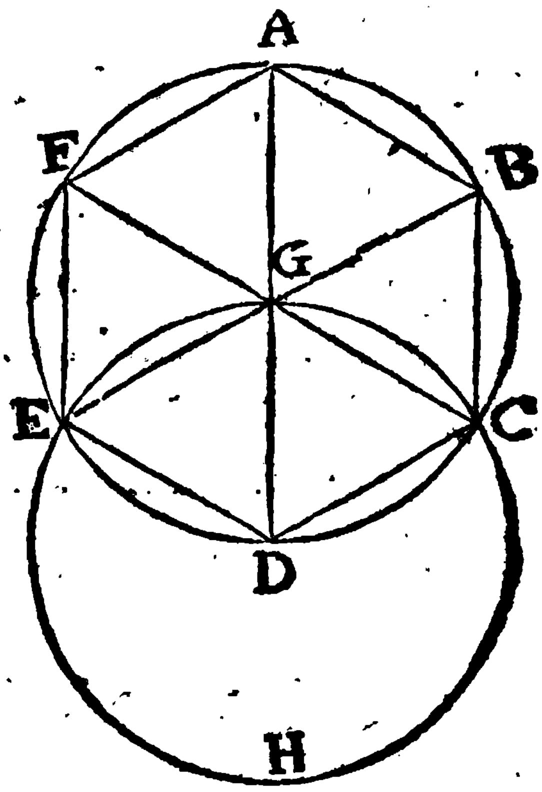


Halbire zwey Winkel der Figur, BCD, CDE, mittelst der Linien CF, DF, und beschreibe aus F, in welchem sie zusammentreffen, mit CF, oder FD, den verlangten Kreis.

Denn ziehet man noch die Linien FB, FA, FE, so halbiren diese die Winkel CBA, BAE, AED, welches sich eben so, wie im vorhergehenden Satze, beweisen läßt. Da also FCD = FDC, so ist (1, 6. S.) FC = FD. Nun ist eben so erweislich, daß jede der FB, FA, FE, jeder der FC, FD gleich sey. Folglich gehet der Kreis aus F, mit einer dieser gleichen Linien, FC, beschrieben, auch durch die übrigen Punkte der Figur, und ist also (4, 6. S.) um dieselbe beschrieben.

Der 15. Satz. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis, ABCDEF, eine gleichseitige und gleichwinklige sechsseitige Figur zu beschreiben.



Nimm des Kreises Mittelpunkt G, ziehe einen Durchmesser AD, und beschreibe aus D mit DG den Kreis EGCH. Ziehe EG, CG, verlängere sie bis B, F, und ziehe AB, BC, CD, DE, EF, FA: so ist ABCDEF die verlangte Figur.

Denn da im Kreise um G (1, 15. E.) GE = GD, und im Kreise um D GD = DE: so ist △ GED gleichseitig, folglich (1, 5. S.) auch gleichwinklig, folglich (1, 32. S.) EGD das Drittel von zwey rechten Winkeln, so wie aus eben den Gründen DGC, folgl. auch CGB, weil (1, 13. S.) EGC + CGB = 2 R. Demnach sind obgenannte drey Winkel, aber auch (1, 15. S.) ihre

ihre Scheitelwinkel, folglich alle um G herumliegende sechs Winkel einander gleich. Daher sind (3, 26. S.) die Bogen, also auch (3, 29. S.) die Linien AB, BC, CD, DE, EF, FA, einander gleich. Folglich ist ABCDEF gleichseitig.

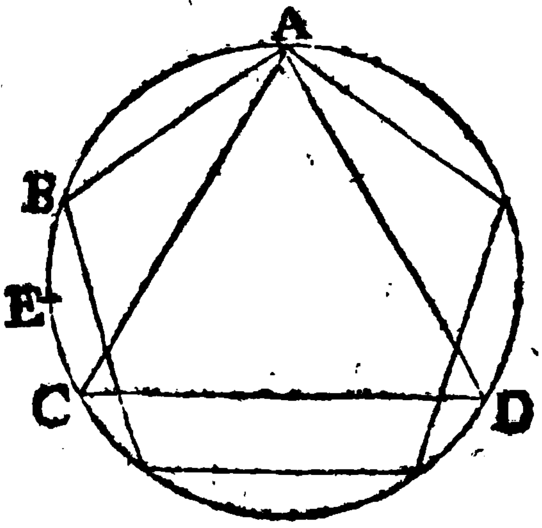
Da nach Obigem der Bogen FA = ED, folglich, wenn der Bogen ABCD hinzukommt, der Bogen FABCD = EDCBA: so ist (3, 27. S.) DEF = EFA. Nun ist eben so erweislich, daß jedem dieser beyden Winkel jeder der übrigen Winkel der Figur gleich sey. Folglich ist die Figur auch gleichwinklig, und (4, 3. E.) in den Kreis beschrieben.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß die Seite einer in den Kreis zu beschreibenden Figur mit sechs gleichen Seiten dem Halbmesser des Kreises gleich sey. Auch ergiebt sich aus dem, was von der Figur mit fünf gleichen Seiten gelehret worden, daß mittelst der Berührungslinien durch die Winkelspitzen, A, B, C, D, E, F, eine Figur mit sechs gleichen Seiten um den Kreis beschrieben werde; desgleichen, wie auf ähnliche Art in und um eine gegebene Figur mit sechs gleichen Seiten ein Kreis beschrieben werden könne.

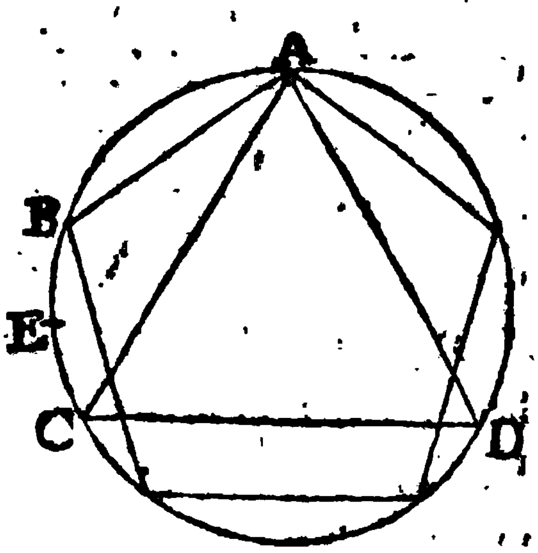
Der 16. Satz. Aufgabe.

In einen gegebenen Kreis, ABCD, eine gleichseitige und gleichwinklige funfzehnseitige Figur zu beschreiben.



Es sey AC die Seite eines in den Kreis beschriebenen gleichseitigen Triangels, und AB die Seite einer in den Kreis beschriebenen Figur von fünf gleichen Seiten. Halbire (3, 30. S.) den Bogen BC in E: so ist die gerade Linie CE die Seite der verlangten Figur.

Denn



Denn wäre der Umkreis in funfzehn gleiche Theile getheilt: so enthält der Bogen ABC, als der dritte Theil, fünf, der Bogen AB aber, als der fünfte Theil, drey, folglich der übrige Bogen BC zwey solcher Theile, daß also der Bogen CE ein solcher Theil ist, folglich die gerade Linie CE (4, 1. S.) sich funfzehnmahl an einander in den Kreis eintragen, also eine gleichseitige und gleichwinklige funfzehnseitige Figur in den Kreis beschreiben läßt.

Zusatz.

Aus dem, was von der Figur mit fünf gleichen Seiten gelehret worden, ergiebt sich, daß mittelst der Berührungslinien durch die funfzehn Theilungspunkte des Umkreises eine Figur mit funfzehn gleichen Seiten und Winkeln um den Kreis beschrieben werde; desgleichen, wie auf ähnliche Art in und um eine gegebene Figur mit funfzehn gleichen Seiten und Winkeln, ein Kreis beschrieben werden könne.

Euklid's

Euklid's Elemente

Fünftes Buch.

Erklärungen.

1. Ein Theil ist eine Größe von der andern, die kleinere von der größern, wenn sie die größere genau misset.
2. Ein Vielfaches aber ist die größere von der kleinern, wenn sie von der kleinern genau gemessen wird.
3. Verhältniß ist die zweyen gleichartigen Größen in Rücksicht der Größe gegen einander zukommende Beschaffenheit.
4. Eine Verhältniß zu einander haben Größen, welche vervielfältigt einander übertreffen können.
5. In einerley Verhältniß sind Größen, A, B, C, D, die erste zur zweyten, und die dritte zur vierten, wenn von beliebigen Gleichvielfachen der ersten und dritten, A, C, und beliebigen Gleichvielfachen der zweyten und vierten, B, D, die Vielfachen der ersten und dritten zugleich entweder kleiner, oder eben so groß, oder größer sind, als die Vielfachen der zweyten und vierten, nach der Ordnung mit einander verglichen.
6. Proportionirt heißen Größen, welche in einerley Verhältniß sind.
7. Eine größere Verhältniß aber, als die dritte Größe zur vierten, hat die erste zur zweyten, wenn von gedachten Gleichvielfachen das Vielfache der ersten wohl das Vielfache der zweyten, hingegen das Viel-

 fache

fache der dritten nicht das Vielfache der vierten, übertrifft.

8. **Proportion** ist die Gleichheit der Verhältnisse.

9. Eine Proportion besteht zwischen drey Gliedern zum wenigsten.

10. Von drey Proportionalgrößen, A, B, C, ist die Verhältniß der ersten zur dritten (A : C) das **Zwiefache** der Verhältniß der ersten zur zweyten (A : B), oder es ist A : C = 2 (A : B).

11. Von vier (an einander hangenden oder stetigen) Proportionalgrößen, A, B, C, D, ist die Verhältniß der ersten zur vierten (A : D) das **Dreyfache** der Verhältniß der ersten zur zweyten (A : B) oder A : D = 3 (A : B); und so nach einander immer um Eins mehr, so lange noch (an einander hangende) Proportionalgrößen vorhanden sind.

12. **Gleichnamig** (**homolog**) sind Vorderglieder mit Vordergliedern, und Hinterglieder mit Hintergliedern.

13. **Verwechselt** wird eine Verhältniß, wenn man (in einer Proportion A : B = C : D) setzt: das Vorderglied zum Vordergliede, wie das Hinterglied zum Hintergliede (A : C = B : D).

14. **Umgekehrt** wird eine Verhältniß (A : B), wenn man das Hinterglied zum Vordergliede, und das Vorderglied zum Hintergliede macht (B : A).

15. Die **Verbindung** einer Verhältniß (A : B) entsteht, wenn man setzt: das Vorderglied und Hinterglied zusammen als Ein Glied zu demselben Hintergliede (A + B : B).

16. Die **Trennung** einer Verhältniß (A : B) entsteht, wenn man setzt: der Ueberschuß, um welchen das Vorderglied das Hinterglied übertrifft, zu demselben Hintergliede (A — B : B).

17. Die **Zurückkehrung** einer Verhältniß (A : B) entsteht, wenn man setzt: das Vorderglied zum Ueberschusse,

schusse, um welchen das Vorderglied das Hinterglied übertrifft (A : A — B).

18. **Aus dem Gleichen** entsteht eine Verhältniß, wenn mehrere Größen (A, B, C, D) mit eben so vielen andern (a, b, c, d) je zwey von jenen mit je zwey von diesen, proportionirt sind, und man setzt von jenen die erste zur letzten, wie von diesen die erste zur letzten (A : D = a : d). **Oder**: wenn alsdann mit Weglassung aller mittlern, die äußern von jenen mit den äußern von diesen proportionirt sind.

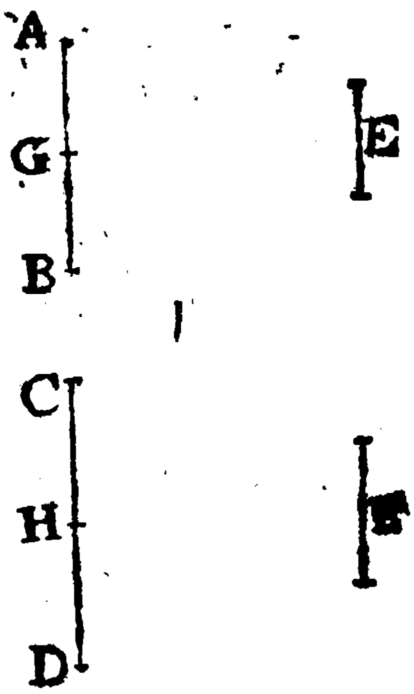
19. In **geordneter Proportion** sind mehrere Größen, A, B, C, D, mit eben so vielen andern, a, b, c, d, wenn die beyden ersten von jenen mit den beyden ersten von diesen proportionirt sind (A : B = a : b), und bey jenen das Hinterglied zu der nächstfolgenden Größe, wie bey diesen das Hinterglied zu der nächstfolgenden Größe ist (B : C = b : c, C : D = c : d).

20. In **zerstreuter Proportion** sind mehrere Größen A, B, C, D, mit eben so vielen andern a, b, c, d, wenn die beyden ersten von jenen mit den beyden letzten von diesen proportionirt sind (A : B = c : d), und bey jenen das Hinterglied zu der nächstfolgenden Größe, wie bey diesen die nächst vorhergehende Größe zum Vordergliede ist (B : C = b : c, C : D = a : b).

Der 1. Satz. Lehrsatz.

Ist von mehrern Größen, AB, CD, und eben so vielen andern, E, F, jede der erstern, von jeder der letztern (AB von E, CD von F) ein Gleichvielfaches: so sind auch die erstern zusammen von den letztern (AB + CD von E + F) dasselbe Vielfache.

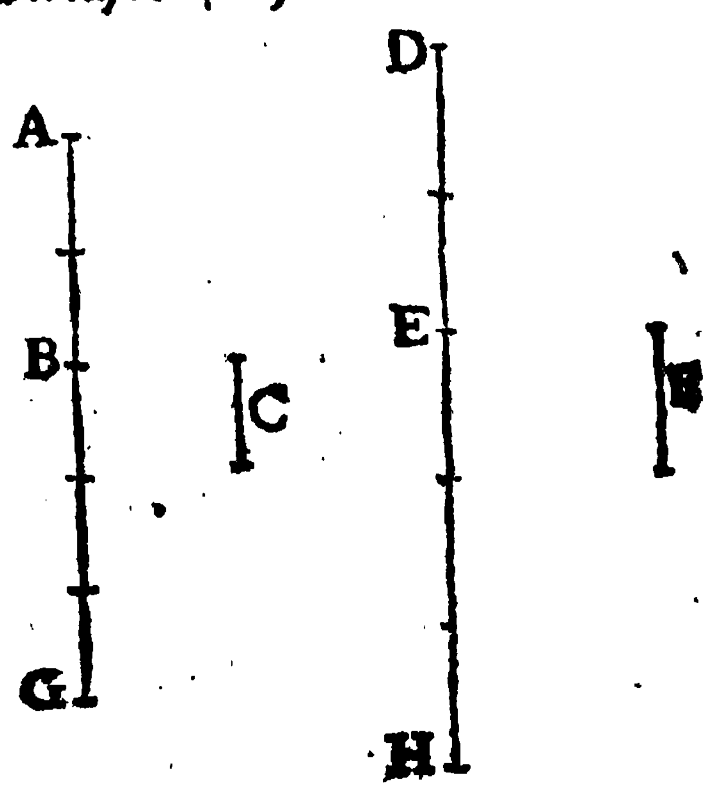
AB ist ein so Vielfaches von E, wie CD von F. So viele der E gleiche Größen also in AB, eben so viele der F gleiche Größen sind in CD. Theilt man daher AB in ihre der E gleiche Theile, AG, GB, und CD in ihre der F gleiche Theile, CH, HD: so ist die Menge der Theile in beyden gleich. Da also AG = E, und CH = F: so ist AG + CH = E + F. Nun ist aus eben den Gründen auch GB + HD = E + F. So viele der E gleiche Größen folglich in AB sind, eben so viele der E + F gleiche Größen sind in AB + CD. Demnach ist AB + CD von E + F dasselbe Vielfache, das AB von E ist.



Der 2. Satz. Lehrsatz.

Ist eine erste Größe, AB, von einer zweyten, C, und eine dritte, DE, von einer vierten, F, ein Gleichvielfaches; ferner eine fünfte, BG, von der zweyten, und eine sechste, EH, von der vierten, wieder ein Gleichvielfaches: so ist **verbunden** die erste und fünfte zusammen, AG, von der zweyten, und die dritte und sechste zusammen, DH, von der vierten, auch ein Gleichvielfaches.

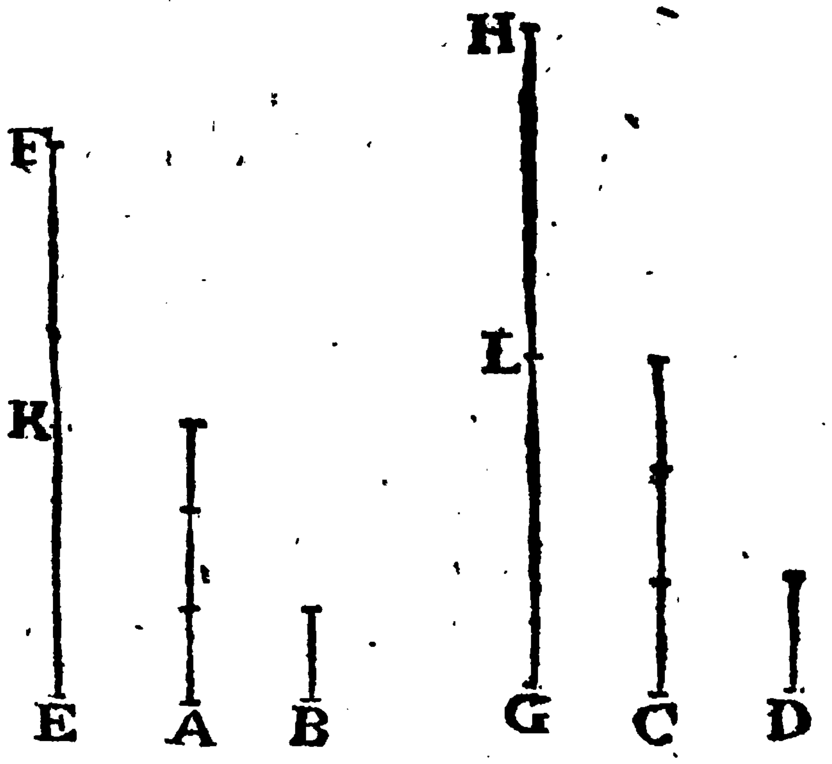
AB ist ein so Vielfaches von C, wie DE von F. So viele der C gleiche Größen also in AB, eben so viele der F gleiche Größen sind in DE. Und, aus eben den Gründen, so viele der C gleiche Größen in BG, so viele der F gleiche Größen sind in EH. Folglich ist C in der ganzen AG, so vielmal enthalten, als F in der ganzen DH.



DH. Demnach ist AG ein so Vielfaches von C, wie DH von F, also AG von C, und DH von F ein Gleichvielfaches.

Der 3. Satz. Lehrsatz.

Ist eine erste Größe, A, von einer zweyten, B, und eine dritte, C, von einer vierten, D, ein Gleichvielfaches; ferner eine fünfte, EF, von der ersten, und eine sechste, GH, von der dritten, wiederum ein Gleichvielfaches: so ist **aus dem Gleichen**, die fünfte von der zweyten, und die sechste von der vierten, auch ein Gleichvielfaches.



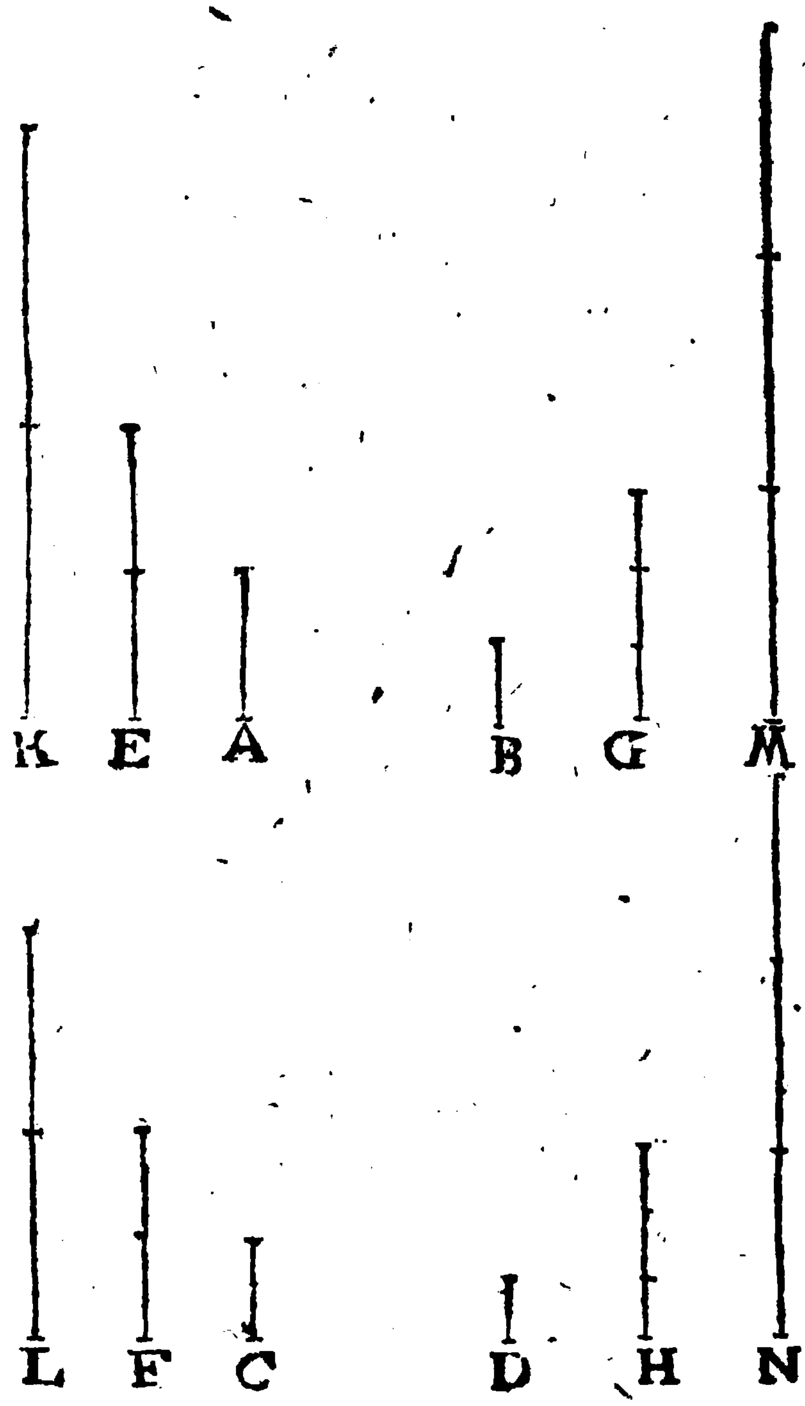
EF ist ein so Vielfaches von A, wie GH von C. So viele der A gleiche Größen also in EF, eben so viele der C gleiche Größen sind in GH. Theilt man daher EF in ihre der A gleiche Theile, EK, KF, und GH in ihre der C gleiche Theile, GL, LH: so ist die Menge der Theile in beyden gleich. Da ferner A von B, und C von D, ein Gleichvielfaches, aber EK = A, und GL = C: so ist auch EK von B, und GL von D ein Gleichvielfaches. Nun ist aus eben den Gründen KF von B, und LH von D ein Gleichvielfaches. Folglich ist **verbunden** (5, 2. S.) EF von B, und GH von D, auch ein Gleichvielfaches.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

Hat eine erste Größe, A, zu einer zweyten, B, und eine dritte, C, zu einer vierten, D, einerley Verhältniß (A : B = C : D): so haben bey beliebiger Vervielfältigung, die Gleichvielfachen der ersten und dritten, E, F, zu den Gleich-

Gleichvielfachen der zweyten und vierten, G, H, nach der Ordnung genommen, auch einerley Verhältniß (E : G = F : H).

Nimm von E, F, beliebige Gleichvielfache, K, L, auch von G, H, beliebige Gleichvielfache, M, N. Nun ist E von A, und F von C, ein Gleichvielfaches. Folglich ist (5, 3. S.) K von A und L von C, auch ein Gleichvielfaches. Aus eben den Gründen ist auch M von B, und N von D ein Gleichvielfaches. Nun ist A : B = C : D. Folglich ist, (5, 5. E.) wenn K ⋝ M, auch L ⋝ N. Nun sind K, L, von E, F, und M, N, von G, H, beliebige Gleichvielfache. Folglich ist (5, 5. E.) E : G = F : H.



Zusatz.

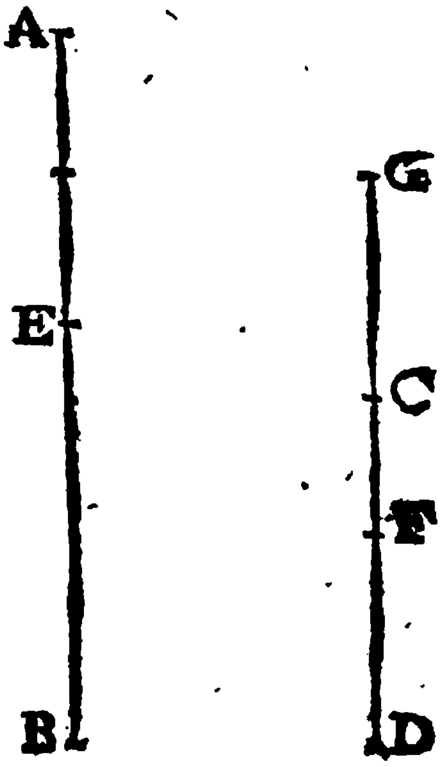
Da bewiesen worden, daß, wenn K ⋝ M, auch L ⋝ N ist: so ist offenbar, wenn M ⋝ K, auch N ⋝ L; folglich (1, 5. E.) G : E = H : F; woraus erhellet, daß vier proportionirte Größen, auch umgekehrt proportionirt sind.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

Ist von zwey Größen, die erste, AB, von der zweyten, CD, und ein Stück der ersten, AE, von einem Stücke der

der zweyten, CF, ein Gleichvielfaches: so ist auch jener Rest, EB, von diesem Reste, FD, dasselbe Vielfache.

Man setze CG so, daß AE von CF, und EB von CG ein Gleichvielfaches sey: so ist (5, 1. S.) AB von GF dasselbe Vielfache, welches auch AB von CD ist. Demnach ist AB das Gleichvielfache von GF und CD, folglich (1, 6. G.) GF = CD, folglich, wenn man CF wegnimmt, (1, 3. G.) CG = FD. Nun ist AE von CF, und EB von CG ein Gleichvielfaches. Folglich ist auch EB von FD dasselbe Vielfache, welches AE von CF, also auch AB von CD ist.

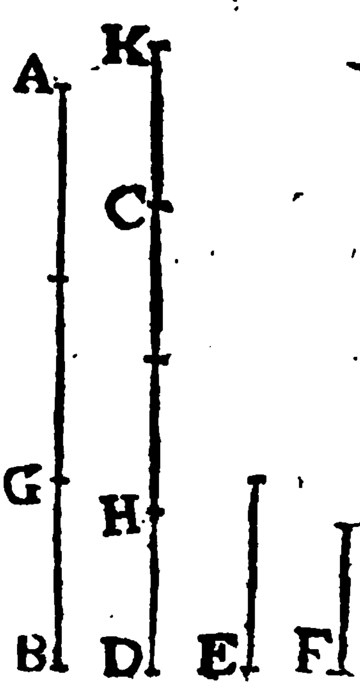


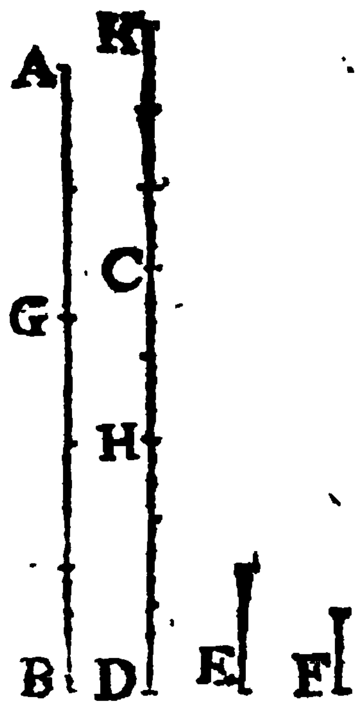
Der 6. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey Größen, AB, CD, Gleichvielfache von zwey andern, E, F, auch gewisse Stücke der erstern, AG, CH, Gleichvielfache von diesen andern: so sind die Reste, GB, HD, entweder diesen andern gleich, oder auch Gleichvielfache von ihnen.

Erster Fall.

Es sey GB = E, so sage ich, daß auch HD = F sey. Man setze CK = F. Nun ist auch GB = E, aber AG von E, und CH von F ein Gleichvielfaches. Folglich ist (5, 2. S.) AB von E, und HK von F dasselbe Gleichvielfache, welches auch CD von F ist. Demnach sind HK, CD, einerley Vielfaches von F, folglich ist (1, 1. G.) HK = CD, folglich, wenn man CH wegnimmt, (1, 3. G.) CK = HD. Nun ist CK = F. Folglich ist (1, 1. G.) HD = F. Demnach ist, wenn GB = E, auch HD = F.





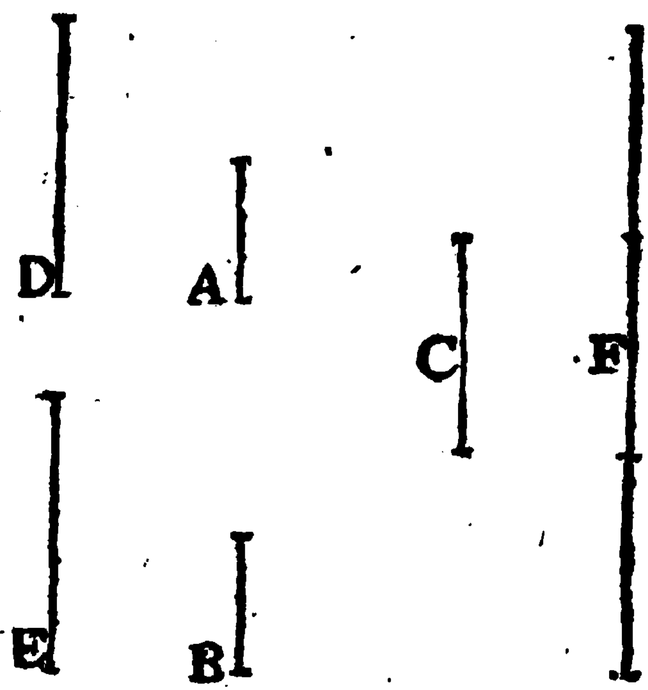
Zweyter Fall.

Es sey GB ein Vielfaches von E, so wird auf ähnliche Art, wie beym ersten Falle, bewiesen, daß HD von F eben so vielfach sey.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Gleiche Größen, A, B, haben zu einer und derselben Größe, C; und eine und dieselbe Größe, C, hat zu gleichen Größen, A, B, einerley Verhältniß.

Erster Theil.



Jede der beyden gleichen Größen, A, B, hat zu der C einerley Verhältniß. Mache von A, B, die Gleichvielfachen D, E, und von C ein andres beliebiges Vielfache, F: so ist, weil A = B, auch D = E, also, wenn D $\gtreqless$ F, auch E $\gtreqless$ F, folglich (5, 5. E.) A: C = B: C.

Zweyter Theil.

Die C hat zu jeder der beyden gleichen Größen A, B, einerley Verhältniß. Denn nach voriger Construction ist wieder D = E, also, wenn F $\gtreqless$ D, auch F $\gtreqless$ E, folglich (5, 5. E.) C: A = C: B.

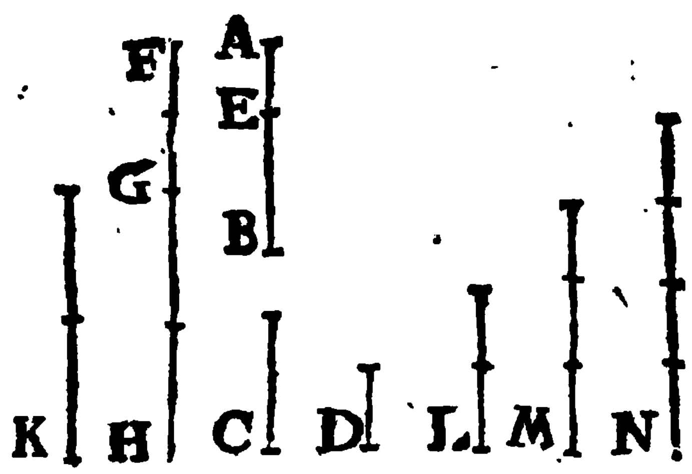
Der

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Von zwey ungleichen Größen, AB, C, hat zu einer und derselben Größe, D, die größere, AB, eine grössere Verhältniß, als die kleinere, C; und eine und dieselbe Größe, D, zu der kleinern, C, eine größere Verhältniß, als zu der größern, AB.

Da AB > C, so setze BE = C; da dann (5, 4. E.) das kleinere der beyden Stücke AE, EB, vervielfältigt irgend einmal die D übertreffen wird. Es ist aber solches kleinere entweder AE oder EB.

Erster Fall.



Es sey AE das kleinere Stück, und irgend ein Vielfaches davon FG > D. So vielfach nun FG von AE, so vielfach mache GH von EB, und K von C. Von D nimm das Zwiefache L, das Dreyfache M, und so nach der Ordnung immer weiter, bis zu einem Vielfachen, wie hier das Vierfache N, welches zuerst größer ist, als K, daß also noch nicht K < M sey.

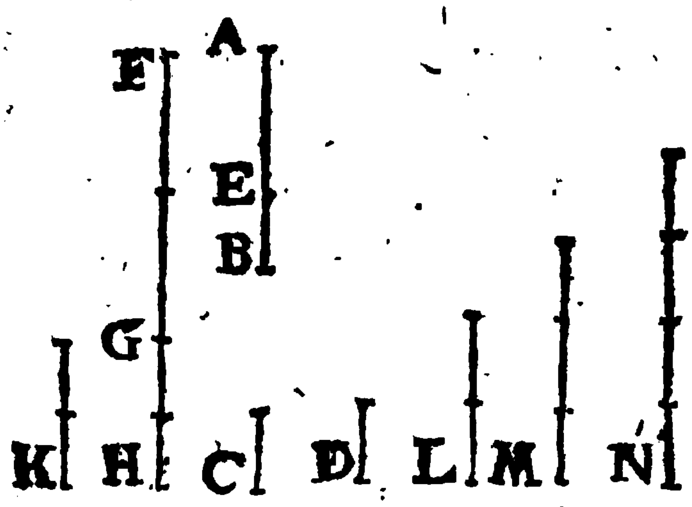
Da FG von AE, und GH von EB ein Gleichvielfaches: so ist (5, 1. S.) FH von AB dasselbe Vielfache, welches auch K von C ist. Demnach sind FH, K, Gleichvielfache der, beyden ungleichen Größen AB, C.

Da GH ein so Vielfaches von EB, wie K von C, aber EB = C: so ist auch GH = K. Nun ist nicht K < M. Folglich ist auch nicht GH < M. Nun ist FG > D. Folglich ist FH > D + M, folglich, weil D + M = N ist, FH > N.

Da nach Obigem N ein Vielfaches von D, und FH, K, das Gleichvielfache von AB, C; und FH > N, aber K < N, also auch N > K, und N < FH; so ist (5, 7. E.) AB : D > C : D, und D : C > D : AB.

Zwey-

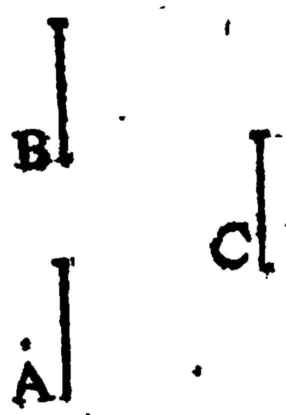
Zweyter Fall.



Es sey EB das kleinere Stück, und sein Vielfaches GH > D. So vielfach nun GH von EB, so vielfach mache FG von AE, und K von C: so wird, wie beym ersten Falle, bewiesen, daß K = GH, und daß FH, K, von AB, C, Gleichvielfache sind. Ist nun wieder N das Vielfache von D, welches zuerst größer, als FG ist: so ist wiederum nicht FG < M. Nun ist GH > D. Folglich ist FH > D + M, das ist, FH > N. Hingegen ist nicht K > N, weil FG > GH, das ist, FG > K, aber nicht FG > N ist. Hieraus wird, nach eben denselben Schlüssen, wie beym ersten Falle, gefolgert, daß wieder AB : D > C : D, und D : C > D : AB sey.

Der 9. Satz. Lehrsatz.

Größen, A, B, welche zu einer und derselben Größe, C, einerley Verhältniß haben, oder zu welchen eine und dieselbe Größe, C, einerley Verhältniß hat, sind einander gleich.



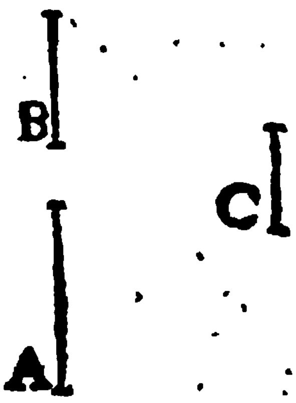
Wären A, B, ungleich, so wären (5. 8. S.) die Verhältnisse der beyden Größen zur dritten C, und der dritten Größe zu beyden ungleich, welches der Voraussetzung widerspricht. Folglich können A, B, nicht ungleich seyn, und sind also gleich.

Der 10. Satz. Lehrsatz.

Von zwey Größen, A, B, ist die, welche zu einer und derselben Größe, C, eine größere Verhältniß hat, die größere; die aber, zu welcher eine und dieselbe Größe, C, eine größere Verhältniß hat, die kleinere.

Erster

Erster Theil.



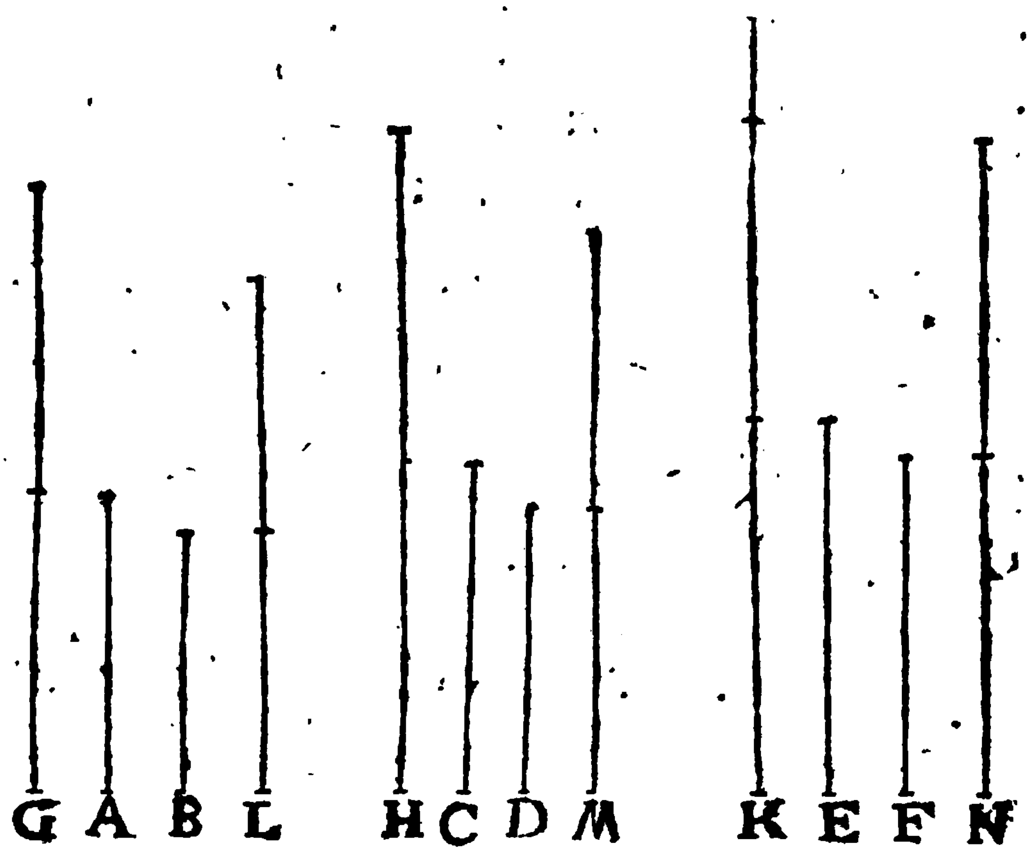
Es sey $A:C > B:C$, so sage ich, daß $A > B$ ist. Denn wäre dieß nicht; so wäre entweder $A = B$, folglich (5, 7. S.) $A:C = B:C$; oder $A < B$, folglich (5, 8. S.) $A:C < B:C$. Da nun beydes wider die Voraussetzung: so ist weder $A = B$, noch $A < B$, also $A > B$.

Zweyter Theil.

Es sey $C:B > C:A$, so sage ich, daß $B < A$ ist. Denn wäre dieß nicht: so wäre entweder $B = A$, folglich (5, 7. S.) $C:B = C:A$; oder $B > A$, folglich (5, 8. S.) $C:B < C:A$. Da nun beydes gegen die Voraussetzung: so ist weder $B = A$, noch $B > A$, also $B < A$.

Der 11. Satz. Lehrsatz.

Verhältnisse, $A:B$, $E:F$, welche einer und derselben Verhältniß, $C:D$, gleich sind, sind selbst einander gleich.



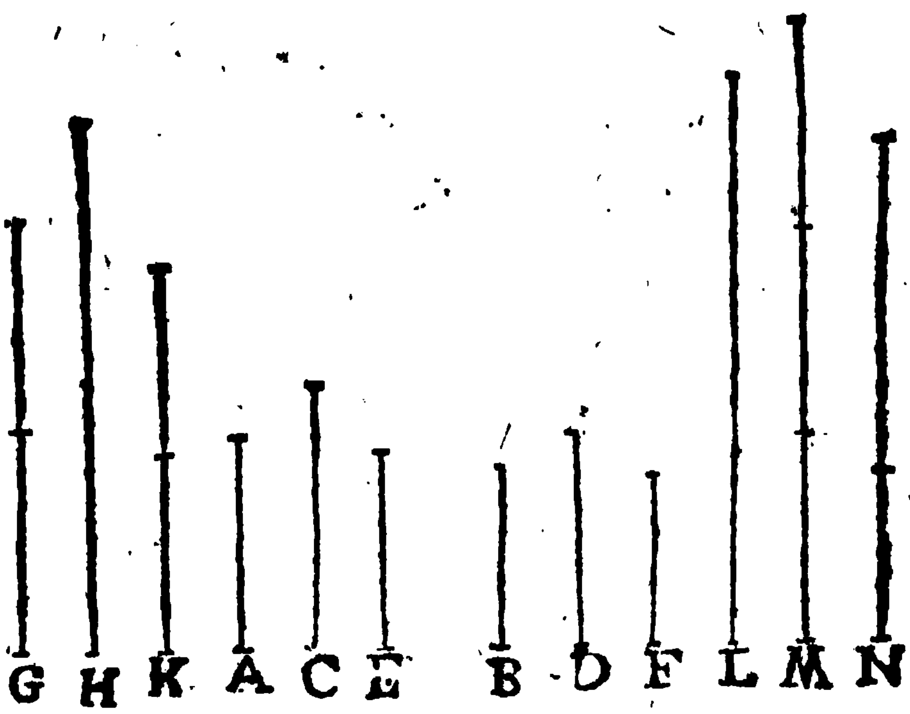
Nimm von A, C, E, beliebige Gleichvielfache, G, H, K, auch von B, D, F, beliebige Gleichvielfache, L, M, N. Da $A:B = C:D$, aber G, H, beliebige Gleichvielfache von A, E, und L, M, von B, D: so ist, (5, 5. E.) wenn $G \gtreqless L$, auch $H \gtreqless M$. Da ferner $C:D = E:F$, aber H, K, beliebige Gleichvielfache von C, E, und M, N, von D, F: so ist, (5, 5. E.) wenn $H \gtreqless M$,

auch

auch $K \gtreqless N$. Folglich ist, wenn $G \gtreqless L$, auch $K \gtreqless N$. Nun sind G, K, beliebige Gleichvielfache von A, E, und L, N, von B, F. Folglich ist (5, 5. E.) $A:B = E:F$.

Der 12. Satz. Lehrsatz.

Sind mehrere Größen, A, B, C, D, E, F, proportionirt ($A:B = C:D = E:F$): so verhalten sich alle Vorderglieder zusammen, $A+C+E$, zu allen Hintergliedern, $B+D+F$, wie ein Vorderglied A zu seinem Hintergliede, B.



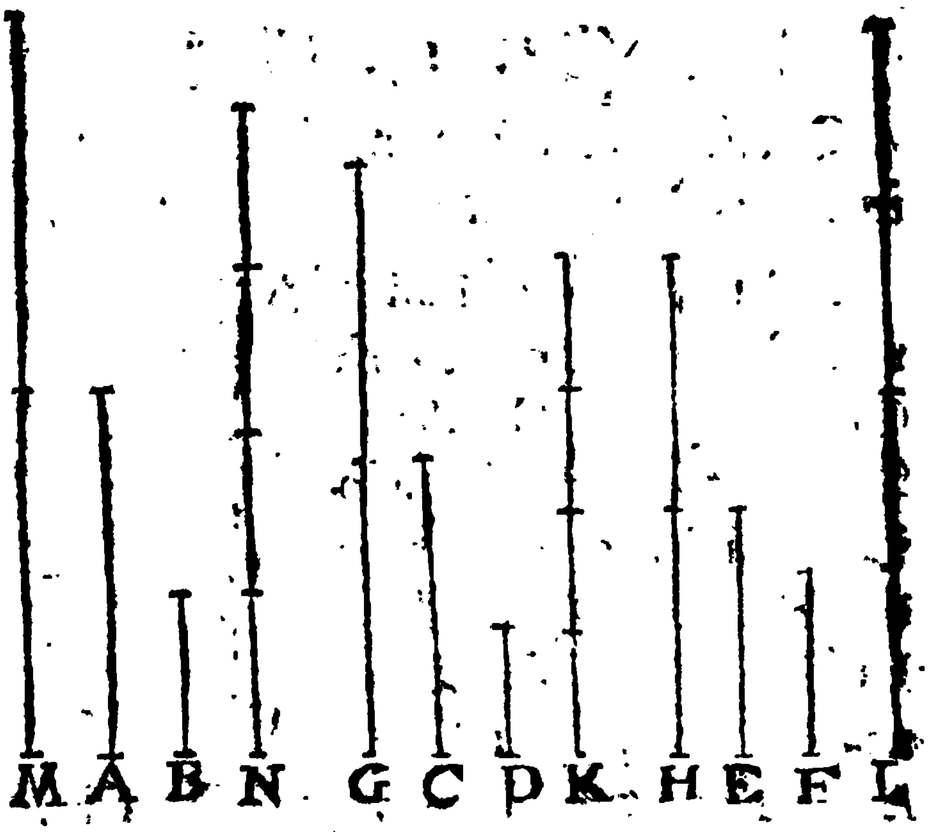
Nimm von A, C, E, beliebige Gleichvielfache G, H, K, auch von B, D, F, beliebige Gleichvielfache L, M, N: so sind (5, 1. S.) G und $(G+H+K)$ von A und $(A+C+E)$; desgleichen L und $(L+M+N)$ von B und $(B+D+F)$ Gleichvielfache. Nun ist, weil $A:B = C:D = E:F$, (5, 5. E.) wenn $G \gtreqless L$, auch $H \gtreqless M$, auch $K \gtreqless N$, und daher, wenn $G \gtreqless L$, auch $(G+H+K) \gtreqless (L+M+N)$. Folglich ist (5, 5. E.) $A:B = (A+C+E):(B+D+F)$.

Der 13. Satz. Lehrsatz.

Hat eine erste Größe, A, zu einer zweyten, B, dieselbe Verhältniß, wie eine dritte, C, zu einer vierten, D; aber die dritte zur vierten, eine größere Verhältniß, als eine fünfte, E, zu einer sechsten, F: so hat auch die erste zur zweyten eine größere Verhältniß, als die fünfte zur sechsten.

Da

Da C:D > E:F, so giebt es von C, E, solche Gleichvielfache G, H, und von D, F, solche Gleichvielfache, K, L, daß (5, 7. E.) wohl G > K, aber nicht H > L. So vielfach nun G von C ist, eben so vielfach sey M von A, und so vielfach K

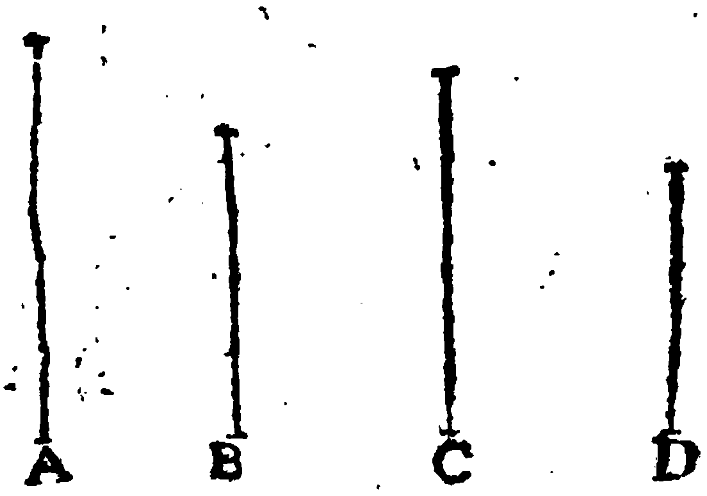


von D ist, eben so vielfach sey N von B. Aber C : D = A : B, und G > K. Folglich ist (5, 5. E.) M > N, hingegen nach Obigem nicht H > L. Nun sind M, H, von A, E, und N, L, von B, F, Gleichvielfache. Folglich ist (5, 7. E.) A : B > E : F.

Der 14. Satz. Lehrsatz.

Hat eine erste Größe, A, zu einer zweyten, B, dieselbe Verhältniß, wie eine dritte, C, zu einer vierten, D; und ist die erste entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner, als die dritte: so ist auch die zweyte im ersten Falle größer, im zweyten eben so groß, im dritten kleiner, als die vierte.

Ist A > C, so ist (5, 8. S.) A : B > C : B. Nun ist C : D = A : B. Folglich ist (5, 13. S.) C : D > C : B, folglich (5, 10. S.) B > D. Demnach ist, wenn A > C, auch B > D. Auf ähnliche Art wird erwiesen,



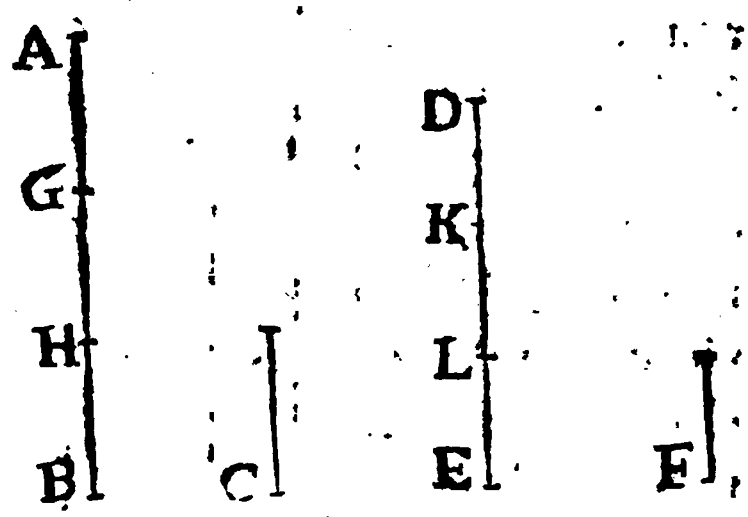
daß B = D sey, wenn A = C ist, und daß B < D sey, wenn A < C ist.

Der

Der 15. Satz. Lehrsatz.

Theile, C, F, sind mit ihren Gleichvielfachen, AB, DE, in einerley Verhältniß.

AB ist ein so Vielfaches von C, wie DE von F. So viele der C gleiche Theile AG, GH, HB, also in AB sind, eben so viele der F gleiche Theile DK, KL, LE, sind in DE. Demnach ist (5, 7. u. 11. S.)

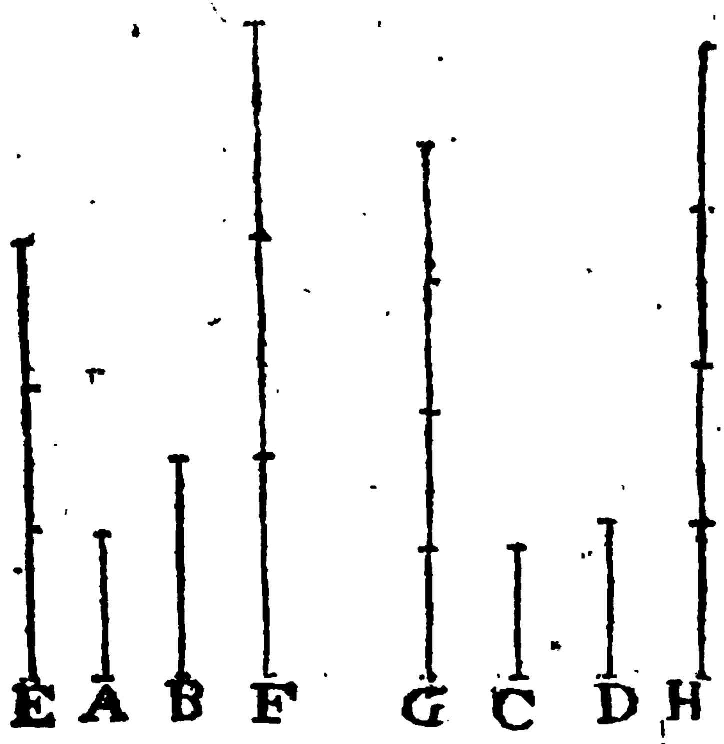


AG : DK = GH : KL = HB : LE, folglich (5, 12. S.) AG : DK = AB : DE. Nun ist AG = C, und DK = F. Folglich ist C : F = AB : DE.

Der 16. Satz. Lehrsatz.

Sind vier Größen, A, B, C, D, proportionirt: so sind sie auch verwechselt, proportionirt.

Nimm von A, B, Gleichvielfache E, F, und von C, D, Gleichvielfache G, H: so ist (5, 15. S.) A : B = E : F. Nun ist A : B = C : D. Folglich ist (5, 11. S.) C : D = E : F. Nun ist (5, 15. S.) C : D = G : H. Folglich ist (5, 11. S.) E : F = G : H, folglich, (5, 14. S.) wenn E $\geqq$ G, auch F $\geqq$ H.



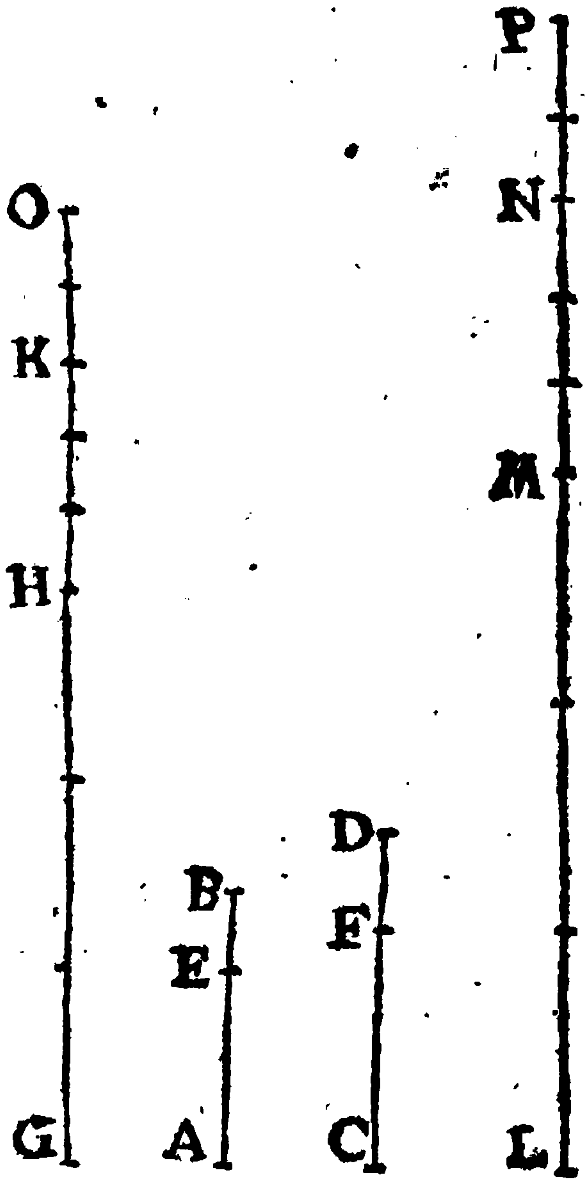
Nun sind E, F, von A, B, und G, H, von C, D, beliebige Gleichvielfache. Folglich ist (5, 5. E.) A : C = B : D.

Der

Der 17. Satz. Lehrsatz.

Sind verbundene Größen, AB, BE, CD, DF, proportionirt: so sind auch die getrennten, AE, EB, CF, FD, proportionirt.

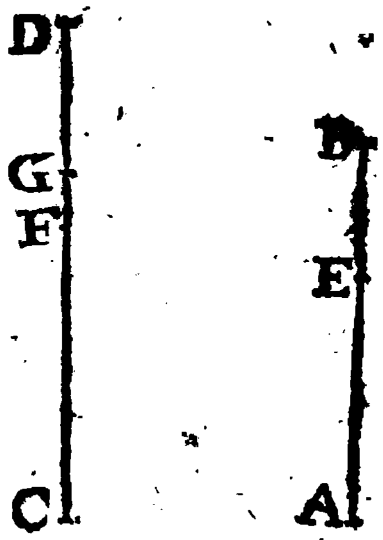
Nimm von AE, EB, CF, FD, beliebige Gleichvielfache GH, HK, LM, MN, desgleichen von EB, FD, beliebige Gleichvielfache KO, NP: so ist (5, 1. S.) GK von AB eben so vielfach, wie GH von AE, oder wie LM von CF, folglich (5, 1. S.) wie LN von CD. Da ferner HK von EB so vielfach, wie MN von FD, aber auch KO von EB so vielfach, wie NP von FD: so ist (5, 2. S.) HO von EB so vielfach, wie MP von FD. Demnach sind GK, LN Gleichvielfache von AB, CD; und HO, MP, Gleichvielfache von BE, DF. Nun ist angenommen AB : BE = CD : DF. Folglich ist (5, 5. E.) wenn GK ≷ HO, auch LN ≷ MP, folglich, dort HK, hier MN weggenommen, wenn GH ≷ KO, auch LM ≷ NP. Nun sind GH, LM, von AE, CF, und KO, NP, von EB, FD, beliebige Gleichvielfache. Folglich ist (5, 5. E.) AE : EB = CF : FD.



Der 18. Satz. Lehrsatz.

Sind getrennte Größen, AE, EB, CF, FD, proportionirt: so sind auch die verbundenen AB, EB, CD, FD, proportionirt.

Verhielte sich AB zu EB nicht wie CD zu FD, sondern wie CD zu irgend einer andern Größe: so müßte diese entweder kleiner oder größer, als DF seyn.



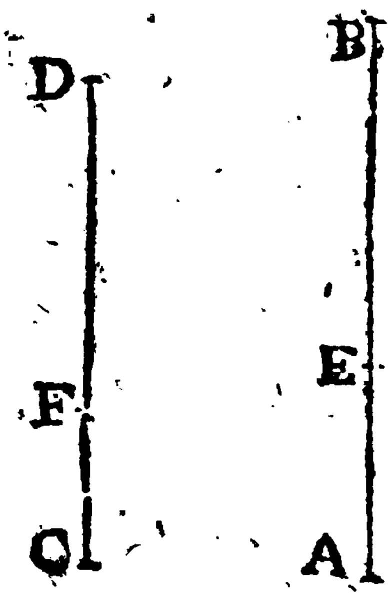
Sie sey **zuerst** < DF, etwa GD, daß also AB : EB = CD : GD wäre; so wäre (5, 17. S.) AE : EB = CG : GD. Nun ist angenommen AE : EB = CF : FD. Folglich ist (5, 11. S.) CG : GD = CF : FD. Nun ist offenbar CG > CF. Folglich ist (5, 14. S.) GD > FD, welches dem Angenommenen GD < FD widerspricht. Demnach kann obgedachte Größe nicht < DF seyn.

Sie sey **zweytens** > DF, so wird auf eben die Art bewiesen, daß auch dieses unmöglich sey.

Folglich muß AB : EB = CD : FD seyn.

Der 19. Satz. Lehrsatz.

Verhalten sich Ganze, AB, CD, wie Stücke von ihnen, AE, CF: so verhalten sich auch die Reste, EB, FD, wie die Ganzen.



Da AB : CD = AE : CF, so ist **verwechselt** (5, 16. S.) AB : AE = CD : CF, folglich **getrennt** (5, 17. S.) EB : AE = FD : CF, folglich **verwechselt** (5, 16. S.) EB : FD = AE : CF. Nun ist angenommen AB : CD = AE : CF. Folglich ist (5, 11. S.) EB : FD = AB : CD.

Zusatz.

Da bewiesen worden, daß, wenn AB : CD = AE : CF, auch AB : CD = EB : FD sey; so ist **verwechselt** AB : EB = CD

CD : FD. Folglich sind **verbundene** Größen proportionirt. Nun ist aber auch bewiesen, daß AB : AE = CD : CF, oder AB : AB — EB = CD : CD — FD, das ist (5, 17. E.) **zurückkehrend.** Hieraus erhellet, daß, wenn **verbundene** Größen proportionirt sind, sie auch **zurückkehrend** proportionirt sind.

Der 20. Satz. Lehrsatz.

Sind mehrere Größen, A, B, C, mit eben so vielen andern, D, E, F, in **geordneter** Proportion, und ist von jenen, die erste, A, entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner, als die letzte, C; so ist auch von diesen die erste, D, im ersten Falle größer, im zweyten eben so groß, im dritten kleiner, als die letzte, F.

Erster Fall.

Es sey A > C, so ist (5, 8. S.) A : B > C : B. Nun ist (5, 19. E.) angenommen, A : B = D : E. Folglich ist (5, 13. S.) D : E > C : B. Nun ist (5, 19. E. und 5, 4. Zus.) C : B = F : E. Folglich ist D : E > F : E, folglich (5, 10. S.) D > F. Demnach ist, wenn A > C, auch D > F.

Zweyter und dritter Fall.

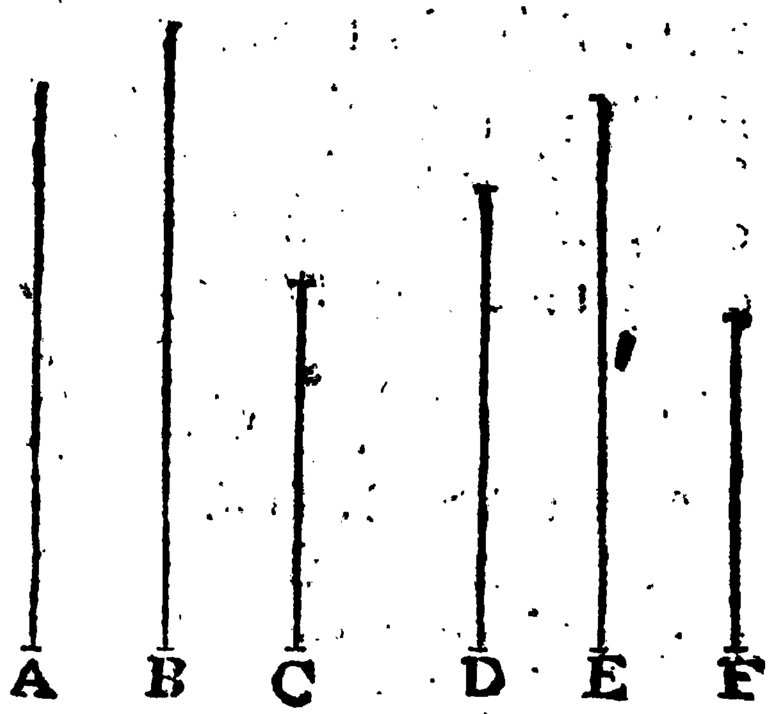
Auf eben die Art wird bewiesen, daß, wenn A = C ist, auch D = F sey, und daß, wenn A < C ist, auch D < F sey.

Der 21. Satz. Lehrsatz.

Sind mehrere Größen, A, B, C, mit eben so vielen andern, D, E, F, in zerstreuter Proportion, und ist von jenen die erste, A, entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner, als die letzte, C: so ist auch von diesen die erste, D, im ersten Falle größer, im zweyten eben so groß, im dritten kleiner, als die letzte, F.

Erster Fall.

Es sey A > C: so ist (5, 8. S.) A : B > C : B. Nun ist (5, 20. E.) angenommen, A : B = E : F. Folglich ist (5, 13. S.) E : F > C : B. Nun ist (5, 20. E. und 5, 4. Zus.) C : B = E : D. Folglich ist E : F > E : D, folglich (5, 10. S.) D > F. Demnach ist, wenn A > C, auch D > F.



Zweyter und dritter Fall.

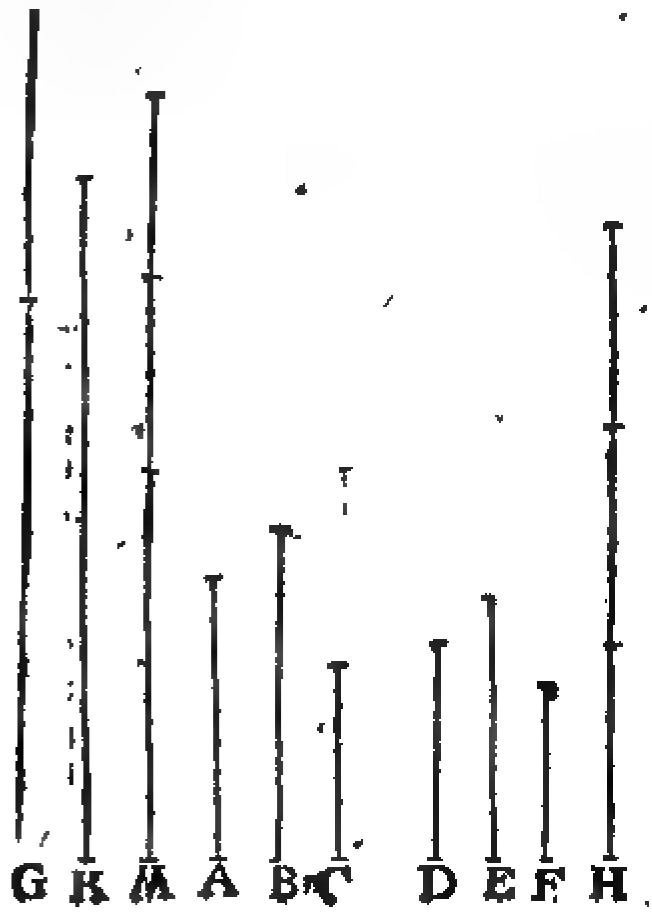
Auf eben die Art wird bewiesen, daß, wenn A = C ist, auch D = F sey, und daß, wenn A < C ist, auch D < F sey.

Der 22. Satz. Lehrsatz.

Sind mehrere Größen, A, B, C, mit eben so vielen andern, D, E, F, geordnet proportionirt: so sind sie aus dem Gleichen proportionirt.

Nimm

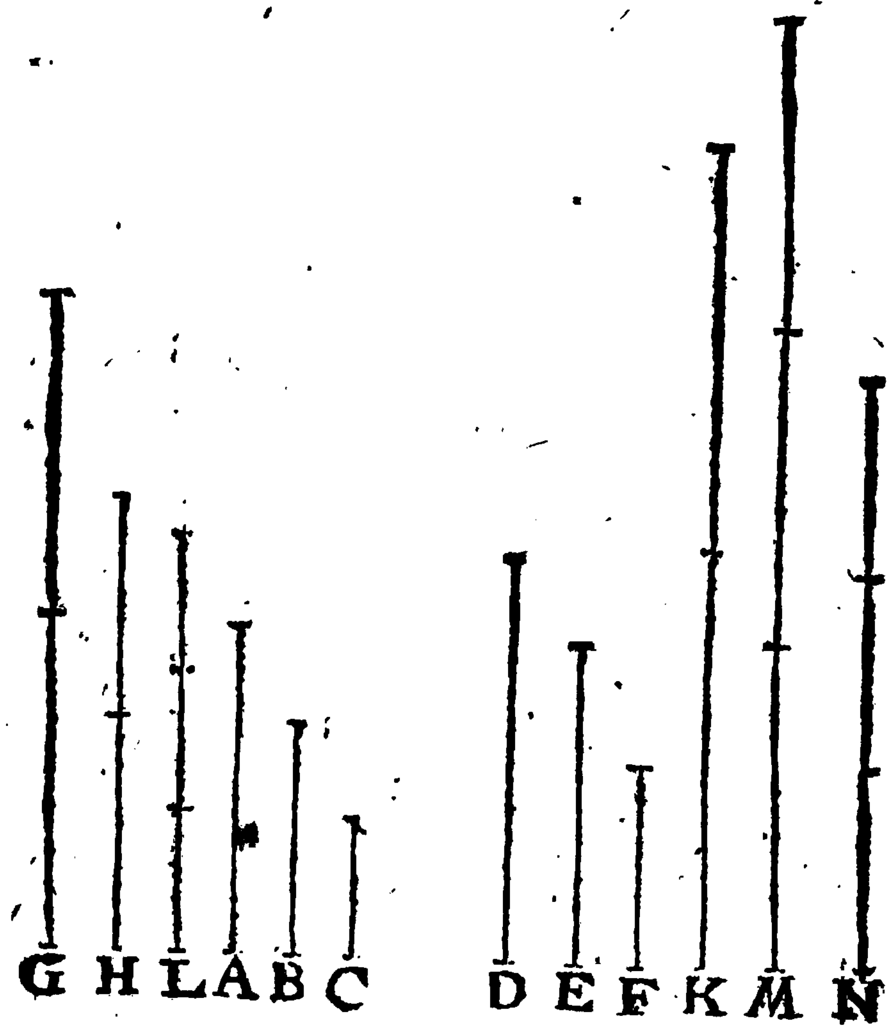
Nimm von A, D, beliebige Gleichvielfache G, H, und von B, E, beliebige Gleichvielfache K, L, desgleichen von C, F, beliebige Gleichvielfache M, N. Nun ist (5, 19. E.) angenommen A : B = D : E, und daher (5, 4. S.) G : K = H : L. Auf eben die Art ist K : M = L : N. Folglich ist, (5, 20. S.) wenn G ≷ M, auch H ≷ N. Nun sind G, H, von A, D, und M, N, von C, F, beliebige Gleichvielfache. Folglich ist (5, 5. E.) A : C = D : F.



Der 23. Satz. Lehrsatz.

Sind mehrere Größen, A, B, C, mit eben so vielen andern, D, E, F, zerstreut, proportionirt: so sind sie aus dem Gleichen proportionirt.

Nimm von A, B, D, beliebige Gleichvielfache, G, H, K, desgleichen von C, E, F, beliebige Gleichvielfache L, M, N: so ist (5, 15. S.) A:B = G:H, und E:F = M:N. Nun ist (5, 20. E.) angenommen A:B = E:F. Folglich ist (5, 11. S.) G:H = M:N. Nun ist (5, 20. E.) auch angenommen B:C = D:E, und daher (5, 15. S.) H:L = K:M. Folglich ist, (5, 21. S.) wenn G ∠ L, auch K ∠ N. Nun sind G, K, von A, D, und L, N, von C, F, beliebige Gleichvielfache. Folglich ist (5, 5. E.) A:C = D:F.

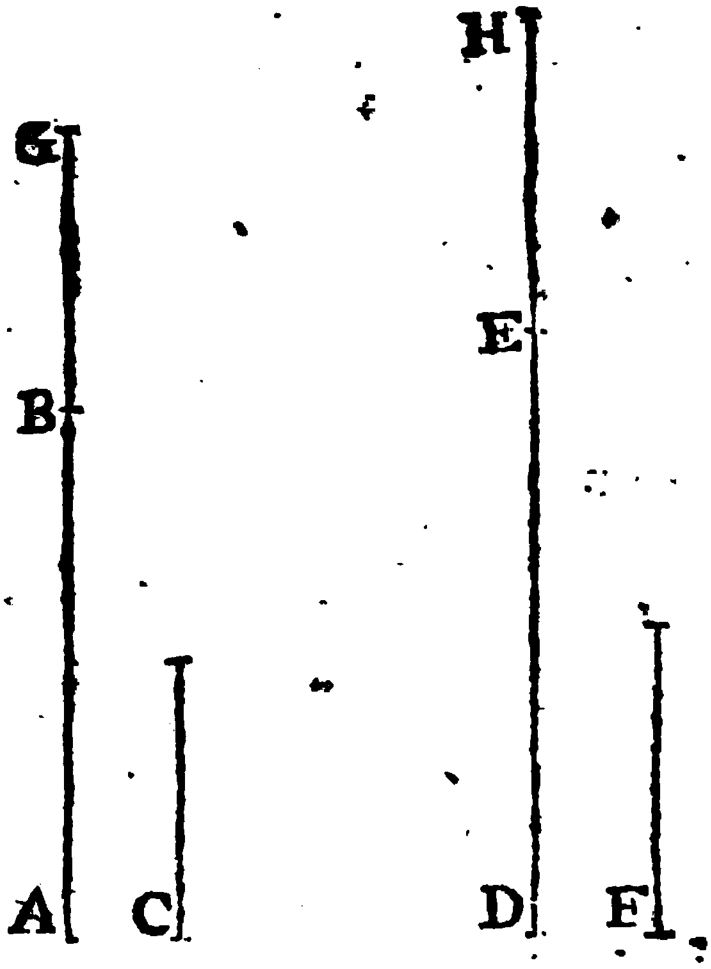


Der 24. Satz. Lehrsatz.

Hat eine erste Größe, AB, zu einer zweyten, C, dieselbe Verhältniß, wie eine dritte, DE, zu einer vierten, F, und eine fünfte, BG, zur zweyten dieselbe Verhältniß, wie eine sechste, EH, zur vierten: so hat auch verbunden, die erste und fünfte, AG, zur zweyten, C, dieselbe Verhältniß, wie die dritte und sechste, DH, zur vierten, F.

Da

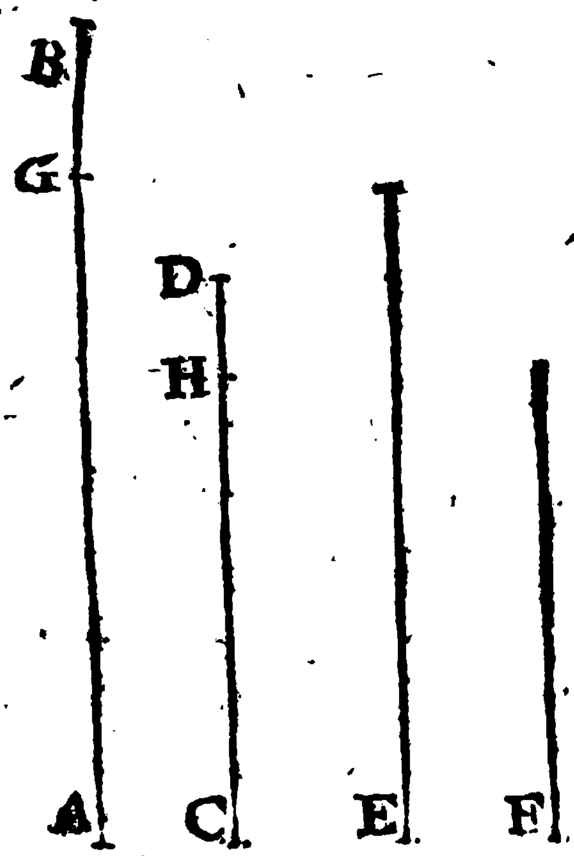
Da BG : C = EH : F, so ist umgekehrt (5, 4. Zus.) C : GB = F : EH. Nun ist auch AB : C = DE : F. Folglich ist aus dem Gleichen (5, 22. S.) AB : BG = DE : EH, folglich verbunden (5, 18. S.) AG : BG = DH : EH. Nun war auch BG : C = EH : F. Folglich ist aus dem Gleichen (5, 22. S.) AG : C = DH : F.



Der 25. Satz. Lehrsatz.

Sind vier Größen, AB, CD, E, F, proportionirt: so sind die größte, AB, und kleinste, F, zusammen größer, als die beyden übrigen, CD, E, zusammen.

Mache AG = E, und CH = F: so ist, weil AB : CD = E : F, auch AB : CD = AG : CH, folglich (5, 19. S.) GB : HD = AB : CD. Nun ist AB > CD. Folglich ist auch GB > HD. Nun ist (1, 2. G.) aus Obigem AG + F = CH + E. Folglich ist (1, 4. G.) GB + AG + F > HD + CH + E, das ist, AB + F > CD + E.

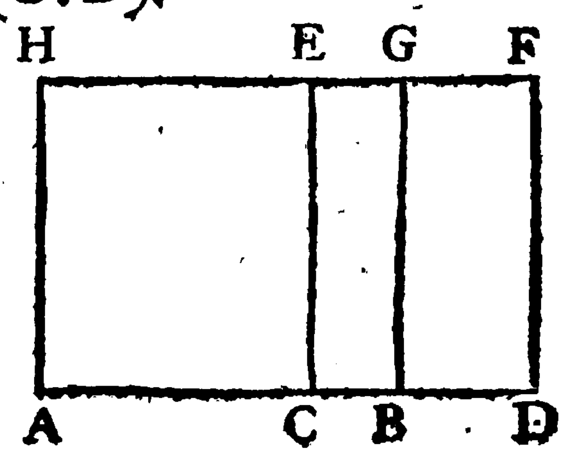


Euklid's Elemente

Sechstes Buch.

Erklärungen.

1. Aehnliche geradlinige Figuren sind, in welchen die Winkel einzeln genommen gleich, und die um die gleichen Winkel liegenden Seiten proportionirt sind.
2. Wiederkehrende geradlinige Figuren sind, in deren einer die mittlern, in der andern aber die äußern Glieder der Proportion enthalten sind.
3. **Nach stetiger Proportion** oder **nach äußerer und mittlerer Verhältniß** ist eine gerade Linie geschnitten, wenn sich die ganze Linie zum größern Abschnitte, wie dieser zum kleinern Abschnitte, verhält.
4. Die Höhe einer Figur ist der vom Gipfel auf die Grundlinie gefällte Perpendikel.
5. Von drey oder mehrern Größen, A, B, C, D, welche an einander hangend in den Verhältnissen jeder vorhergehenden zur nächstfolgenden, A : B, B : C, C : D, sind, heißt die **Verhältniß** der ersten zur letzten, aus allen diesen Verhältnissen **zusammengesetzt**, $A : D = (A : B) + (B : C) + (C : D)$.
6. Ein Parallelogramm ist an einer geraden Linie, AB, **entworfen**, wenn solches, wie AG, auf der Linie AB selbst; oder, wie AE, auf einem Abschnitte AC der Linie, oder



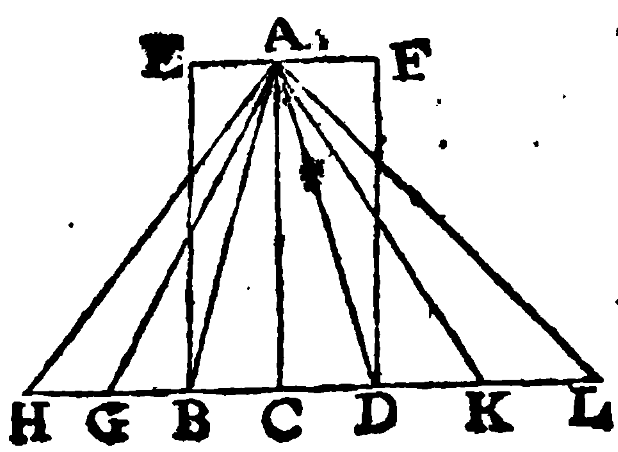
wie AF, auf der verlängerten Linie AD beschrieben ist.

Ziehet man nun in beyden letztern Fällen durch der Linie Endpunkt B mit CE oder DF die BG parallel, welche von HF in G geschnitten wird: so erhält man ein Parallelogramm AG auf der Linie AB, in dessen Beziehung das Parallelogramm BE auf dem Abschnitte BC die **Ergänzung** des Parallelogramms AE; aber das Parallelogramm BF auf dem Abschnitte BD, der **Ueberschuß** des Parallelogramms AF genannt wird.

Der 1. Satz. Lehrsatz.

Triangel, ACB, ACD, auch Parallelogramme, EC, CF, von einerley Höhe, verhalten sich wie ihre Grundlinien, BC, CD.

Verlängere BD auf beyden Seiten nach H, L, nimm in beliebiger Anzahl der BC gleiche BG, GH, und in beliebiger Anzahl der CD gleiche DK, KL; und ziehe von A, nach den Theilpunkten gerade Linien AG, AH, AK, AL.



Erster Theil.

Da CB = BG = GH: so ist (1, 38. S.) △ ACB = △ ABG = △ AGH. Folglich ist CH von BC, und △ ACH vom △ ACB ein Gleichvielfaches. Aus eben den Gründen sind auch LC von CD, und △ ALC vom △ ACD, Gleichvielfache. Nun ist, (1, 38. S.) wenn HC ≷ LC, auch △ AHC ≷ △ ALC. Folglich ist (5, 5. E.) BC : CD = △ ACB : △ ACD.

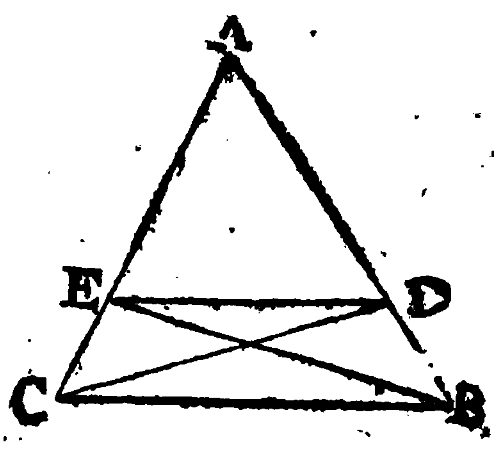
Zweyter Theil.

Da (1, 41. S.) EC = 2 △ ACB, und CF = 2 △ ACD: so ist (5, 15. S.) EC : CF = △ ACB : △ ACD. Nun ist bewiewiesen BC : CD = △ ACB : △ ACD. Folglich ist (5, 11. S.) BC : CD = EC : CF.

Der 2. Satz. Lehrsatz.

Wird mit einer Seite, BC, eines Triangels, ABC, eine gerade Linie, DE, parallel gezogen: so schneidet solche die beyden andern Seiten, AB, AC, proportionirt. Und sind zwey Seiten, AB, AC, eines Triangels, ABC, proportionirt geschnitten: so ist die durch die Schneidungspunkte, D, E, gezogene gerade Linie, DE, der dritten Seite, BC, parallel.

Erster Theil.



Es sey DE der BC parallel. Ziehe BE, CD: so ist (1, 37. S.) △ BDE = △ CDE, folglich (5, 7. S.) △ BDE : △ ADE = △ CDE : △ ADE. Nun ist (6, 1. S.) △ BDE : △ ADE = BD : DA, und △ CDE : △ ADE = CE : EA. Folglich ist (5, 11. S.) BD : DA = CE : EA.

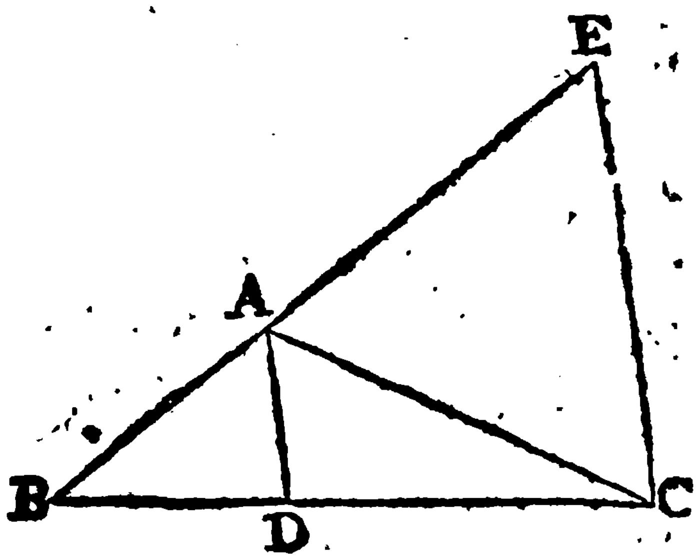
Zweyter Theil.

Es sey BD : DA = CE : EA. Nun ist (6, 1. S.) BD : DA = △ BDE : △ ADE, und CE : EA = △ CDE : △ ADE. Folglich ist (5, 11. S.) △ BDE : △ ADE = △ CDE : △ ADE, folglich (5, 9. S.) △ BDE = △ CDE. Nun ist diesen beyden Triangeln die Grundlinie DE gemein. Folglich ist (1, 39. S.) DE der BC parallel.

Der 3. Satz. Lehrsatz.

Wird ein Winkel, A, eines Triangels, BAC, von einer geraden Linie, AD, halbirt: so schneidet solche, genugsam verlängert, die dem Winkel gegenüberliegende Seite, BC, BC, den beyden andern, BA, AC, proportionirt. Und ist eine Seite, BC, eines Triangels, BAC, den beyden andern, BA, AC, proportionirt geschnitten: so wird der der Seite, BC, gegenüberliegende Winkel von der durch seine Spitze, A, und den Schneidungspunkt, D, gezogenen geraden Linie, AD, halbirt.

Erster Theil.



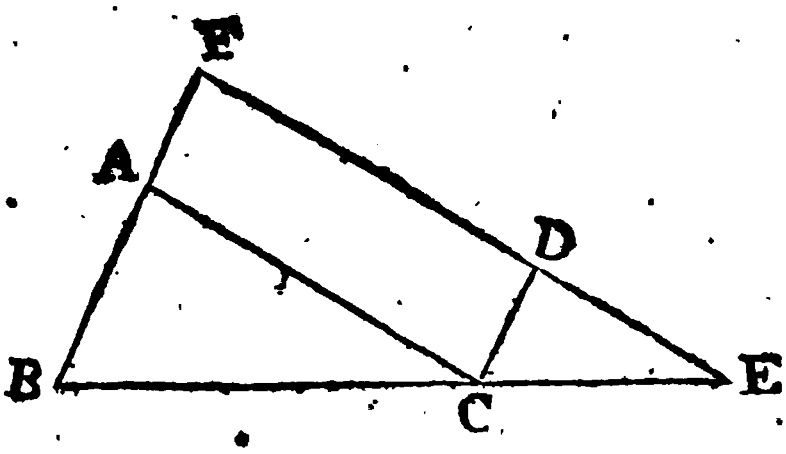
Es sey BAC von AD halbirt. Ziehe (1, 31. S.) durch C mit AD die CE parallel, und verlängere BA, bis sie die CE in E trifft: so ist (1, 29. S.) ACE = CAD = BAD. Nun ist auch (1, 29. S.) BAD = AEC. Folglich ist (1, 1. S.) ACE = AEC, folglich (1, 6. S.) AE = AC. Da nun (6, 2. S.) BD : DC = BA : AE, so ist (5, 7. S.) BD : DC = BA : AC.

Zweyter Theil.

Es sey BD : DC = BA : AC. Nun ist (6, 2. S.) BD:DC = BA:AE. Folglich ist (5, 11. S.) BA:AC = BA:AE, folglich (5, 9. S.) AC = AE, folglich (1, 5. S.) AEC = ACE. Nun ist (1, 29. S.) AEC = BAD, und ACE = DAC. Folglich ist (1, 1. S.) BAD = DAC, also BAC von AD halbirt.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

In gleichwinkligen Triangeln, ABC, DCE, sind die Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, proportionirt; und zwar diejenigen Seiten gleichnamig, welche gleichen Winkeln gegenüber liegen.



Es sey ABC = DCE, ACB = DEC, folglich auch BAC = CDE; auch sey CE der BC gerade fort angesetzt. Da (1, 17. S.) ABC + ACB < 2 R., aber ACB = DEC: so ist ABC + DEC < 2 R., folglich treffen (1, 11. G.) BA und ED genugsam verlängert an dieser Seite in F zusammen. Da ABC = DCE, so ist (1, 28. S.) CD mit BF parallel, und da ACB = DEC, so ist auch AC mit FE parallel, demnach ACDF ein Parallelogramm, folglich (1, 34. S.) AF = CD, und FD = AC.

Da im △ BFE, AC mit FE parallel, so ist (6, 2. S.) BA : AF = BC : CE, aber AF = CD, folglich (5, 9. und 11. S.) BA : CD = BC : CE, folglich (5, 16. S.) verwechselt BA : BC = CD : CE.

Da im △ EBF, CD mit BF parallel, so ist (6, 2. S.) BC : CE = FD : DE, aber FD = AC, folglich (5, 9. und 11. S.) BC : CE = AC : ED, folglich (5, 16. S.) verwechselt BC : CA = CE : ED.

Wird diese Proportion mit der vorhergehenden BA : BC = CD : CE verglichen, so ist (5, 22. S.) aus dem Gleichen BA : AC = CD : DE.

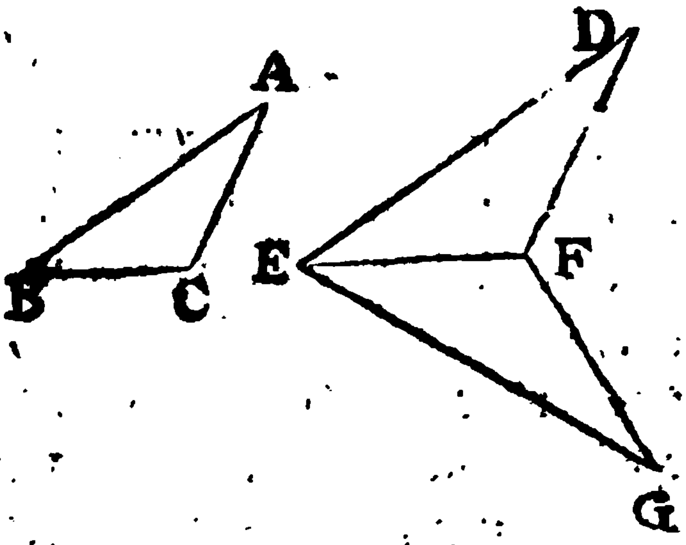
Der 5. Satz. Lehrsatz.

Triangel, ABC, DEF, welche proportionirte Seiten haben, sind gleichwinklig; und zwar diejenigen Winkel gleich, welche gleichnamigen Seiten gegenüber liegen.

Es sey AB : BC = DE : EF; BC : CA = EF : FD; folglich auch AB : CA = DE : FD.

Legt man (1, 23. S.) an die Endpunkte der Seite EF die Winkel FEG = ABC, und EFG = ACB: so ist (1, 32. S.) auch BAC = EGF. Demnach sind die Triangel ABC,

ABC, FEG, gleichwinklig; folglich ist (6, 4. S.) AB : BC = GE : EF. Nun ist angenommen, AB : BC = DE : EF. Folglich ist (5, 11. S.) DE : EF = GE : EF, folglich (5, 9. S.) DE = GE. Nun ist aus eben den Gründen DF = FG, aber

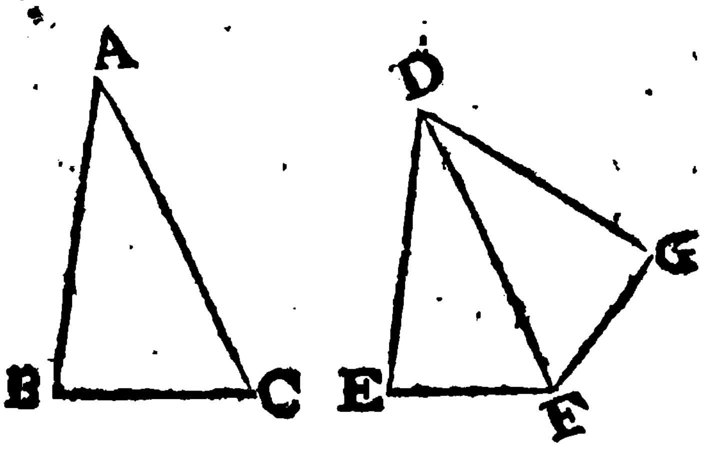


EF gemein. Folglich ist (1, 8. S.) DEF = FEG = ABC; DFE = EFG = ACB; EDF = EGF = BAC. Demnach sind die den gleichnamigen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich.

Der 6. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC, DEF, ein Winkel, BAC, einem Winkel, EDF, gleich ist, die Seiten aber, welche um die gleichen Winkel liegen, proportionirt sind, BA : AC = ED : DF: so sind die Triangel gleichwinklig; und zwar diejenigen Winkel gleich, welche gleichnamigen Seiten gegenüber liegen.

Legt man (1, 23. S.) an die Endpunkte der Seite DF, die Winkel FDG = A = EDF, und DFG = C, daß also (1, 32. S.) auch G = B: so ist (6, 4. S.) BA : AC = GD : DF. Nun



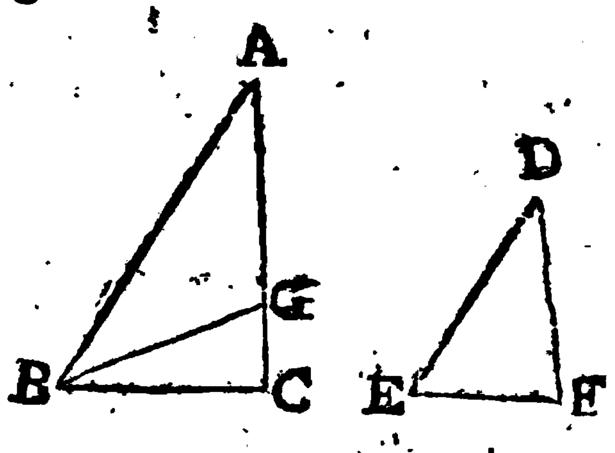
ist angenommen BA : AC = ED : DF. Folglich ist (5, 11. S.) ED : DF = GD : DF, folglich (5, 9. S.) ED = GD. Nun ist DF gemein, und EDF = FDG = A. Folglich ist (1, 4. S.) auch DFE = DFG = C, und DEF = G = B. Demnach sind die den gleichnamigen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Wenn in zweyen Triangeln, ABC, DEF, ein Winkel, A, einem Winkel, D, gleich ist, die Seiten aber, welche um andere Winkel, B, E, liegen, proportionirt sind, und von den übrigen Winkeln, C, F, jeder zugleich entweder kleiner, oder nicht kleiner, als ein rechter ist: so sind die Triangel gleichwinklig, und zwar diejenigen Winkel, B, E, gleich, um welche die proportionirten Seiten liegen.

Erster Fall.

Es sey jeder der Winkel, C, F, kleiner als ein rechter. Wären nun ABC, DEF, ungleich, etwa ABC > DEF: so setze man an B (1, 23. S.) ABG = DEF; daher, weil A = D, (1, 32. S.) auch AGB = F. Folglich ist



(6, 4. S.) AB : BG = DE : EF. Nun ist angenommen, AB : BC = DE : EF. Folglich ist (5, 11. S.) AB : BC = AB : BG, folglich (5, 9. S.) BC = BG, folglich ist (1, 5. S.) BGC = C; folglich nach der Voraussetzung BGC < R., folglich (1, 13. S.) AGB > R., folglich nach Obigem F > R., welches der Voraussetzung F < R. widerspricht. Demnach können ABC, DEF, nicht ungleich seyn, folglich sind diese Winkel, um welche die proportionirten Seiten liegen, gleich. Nun war A = D. Folglich ist (1, 32. S.) auch C = F.

Zweyter Fall.

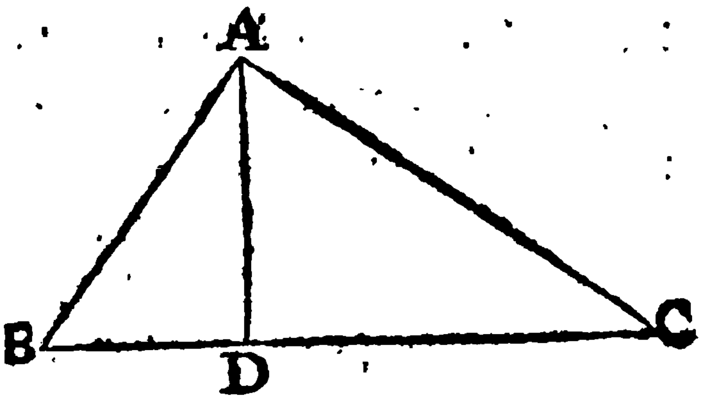
Es sey jeder der Winkel C, F, nicht kleiner, als ein rechter: so wird, wenn man ABC, DEF, als ungleich annimmt, wie im ersten Falle bewiesen, daß BGC = C, daher nach jetziger Voraussetzung BGC nicht < R., folglich im △ BGC, G + C nicht < 2 R., welches dem (1, 17. S.) widerspricht. Demnach können auch hier ABC, DEF, nicht ungleich seyn. Die übrigen Schlüsse sind wie beym ersten Falle.

Der

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Wird in einem rechtwinkligen Triangel, ABC, vom rechten Winkel, A, auf die gegenüberliegende Seite, BC, ein Perpendikel, AD, gefällt: so sind die Triangel am Perpendikel, ABD, ADC, dem ganzen Triangel, ABC, und einander ähnlich.

Erster Theil.



Da in den Triangeln ABC, ABD, der rechte Winkel BAC ≐ ADB, und B gemein: so ist (1, 32. S.) auch ACB ≐ BAD. Demnach sind diese Triangel gleichwinklig, folglich (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt, folglich (6, 1. E.) △ ABD ∾ △ ABC. Auf eben die Art wird bewiesen, daß auch ABC ≐ CAD, und △ ACD ∾ △ ABC.

Zweyter Theil.

Da in den Triangeln ABD, ADC, bey D rechte Winkel, und nach Obigem BAD ≐ ACB, CAD ≐ ABC, also die Triangel gleichwinklig: so sind (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt, folglich (6, 1. E.) △ ABD ∾ △ ADC.

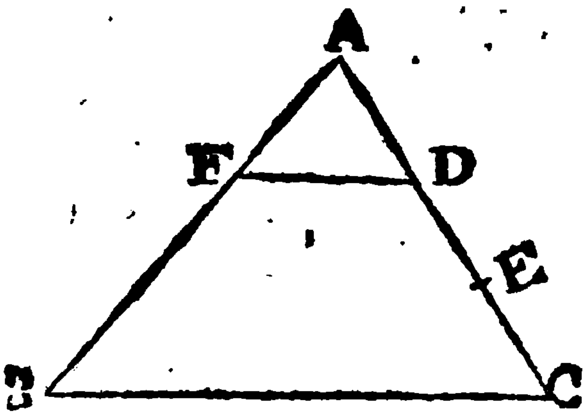
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß der vom rechten Winkel auf die Grundlinie gefällte Perpendikel die mittlere Proportionallinie zwischen den Abschnitten der Grundlinie sey; und daß die an einem der Abschnitte der Grundlinie liegende Seite die mittlere Proportionallinie zwischen der Grundlinie und solchem Abschnitte sey. Denn wegen Aehnlichkeit der Triangel ABD, ADC, und Gleichheit der Winkel BDA, ADC, ist BD:DA = AD:DC; und wegen Aehnlichkeit der Triangel ABC, ABD, und des gemeinschaftlichen Winkels B, ist BC:BA = BA:BD; endlich wegen Aehnlichkeit der Triangel

gel ABC, ACD, und des gemeinschaftlichen Winkels C, ist BC:CA = AC:CD.

Der 9. Satz. Aufgabe.

Von einer gegebenen geraden Linie, AB, einen verlangten Theil abzuschneiden.

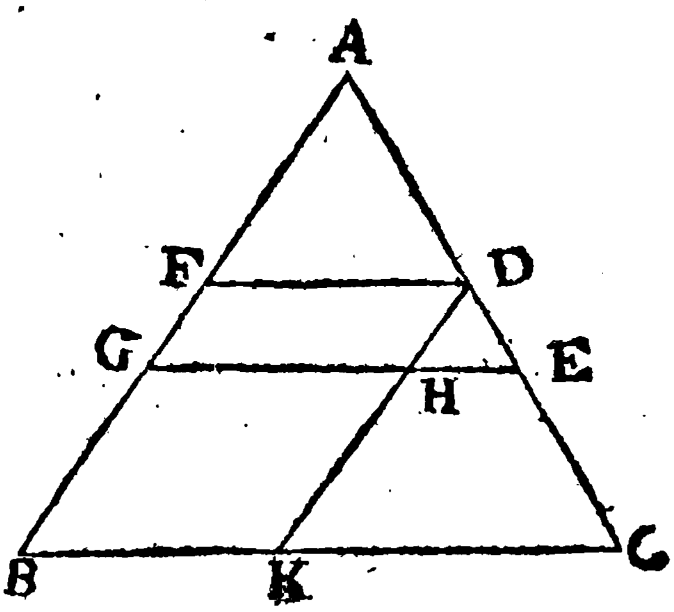


Es werde der dritte Theil verlangt. Ziehe aus A eine gerade Linie AC, unter einem beliebigen Winkel BAC; nimm auf AC einen beliebigen Punkt D; mache DE, EC, der AD gleich; ziehe BC, und mit dieser durch D, die DF parallel: so ist AF der verlangte Theil.

Denn es ist (6, 2. S.) CD:DA = BF:FA. Nun ist CD = 2 DA. Folglich ist auch BF = 2 FA, folglich BA = 3 FA.

Der 10. Satz. Aufgabe.

Eine gegebene ungetheilte gerade Linie, AB, einer andern getheilten, AC, ähnlich einzutheilen.



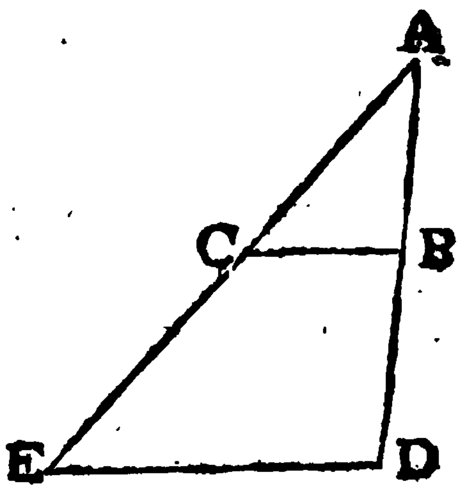
Es sey AC in D, E, getheilt, und an AB unter dem beliebigen Winkel BAC gelegt. Ziehe BC, und (1, 31. S.) durch D, E, die DF, EG, mit BC parallel: so sind F, G, die gesuchten Theilungspunkte.

Denn ziehet man noch durch D die DK mit AB parallel, so sind FH, HB, Parallelogramme, und daher (1, 34. S.) DH = FG, HK = GB, aber (6, 2. S.) im △ DKC, CE:ED = KH:HD, folglich CE:ED = BG:GF; auch (6, 2. S.) im △ AGE, ED:DA = GF:FA. Demnach

nach sind die Abschnitte BG, GF, FA, mit CE, ED, DA, proportionirt.

Der 11. Satz. Aufgabe.

Zu zwey gegebenen geraden Linien, AB, AC, die dritte Proportionallinie zu finden.

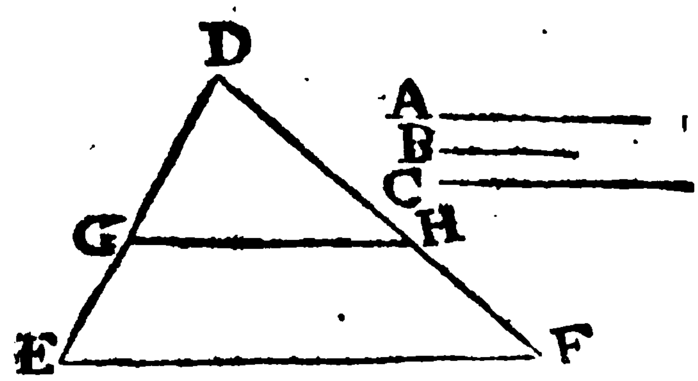


Lege AB, AC, unter dem beliebigen Winkel BAC an einander, verlängere sie bis D, E, mache BD = AC, ziehe BC, und mit dieser (1, 31. S.) durch D, die DE parallel: so ist CE die dritte Proportionallinie.

Denn es ist (6, 2. S.) AB : BD = AC : CE, aber BD = AC, folglich AB : AC = AC : CE.

Der 12. Satz. Aufgabe.

Zu drey gegebenen geraden Linien, A, B, C, die vierte Proportionallinie zu finden.



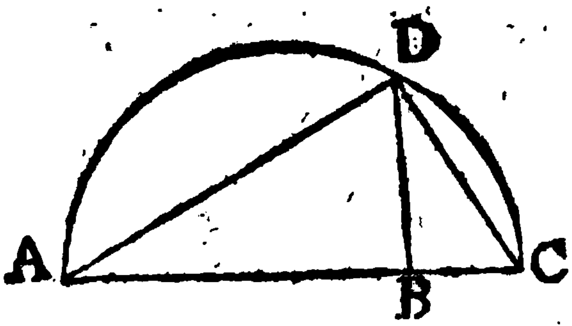
Lege zwey gerade Linien DE, DF, unter dem beliebigen Winkel EDF an einander, mache DG = A, GE = B, DH = C; ziehe GH, und mit dieser (1, 31. S.) durch E die EF parallel: so ist HF die vierte Proportionallinie.

Denn es ist (6, 2. S.) DG : GE = DH : HF, folglich nach Obigem A : B = C : HF.

Der 13. Satz. Aufgabe.

Zwischen zwey gegebenen geraden Linien, AB, BC, die mittlere Proportionallinie zu finden.

Setze der AB die BC gerade fort an, beschreibe über AC den Halbkreis ADC, und errichte (1, 11. S.) auf AC in B den Perpendikel BD: so ist dieser die mittlere Proportionallinie.



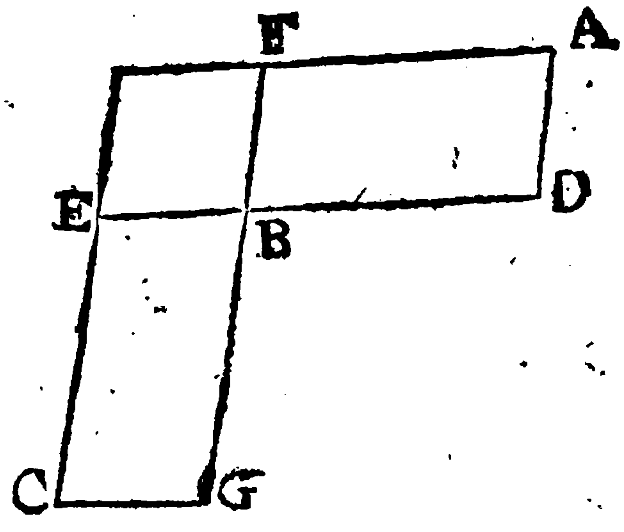
Denn ziehet man AD, DC: so ist (3, 31. S.) ADC = R., folglich (6, 8. Zus.) AB:BD = BD:BC.

Der 14. Satz. Lehrsatz.

In gleichen Parallelogrammen, AB, BC, in denen ein Winkel, FBD, einem Winkel, EBG, gleich ist, sind die um die gleichen Winkel liegenden Seiten **wiederkehrend** proportionirt. Und Parallelogramme, AB, BC, in denen ein Winkel, FBD, einem Winkel, EBG, gleich ist, und die um die gleichen Winkel liegenden Seiten **wiederkehrend** proportionirt sind, sind gleich.

Erster Theil.

Es sey AB = BC, und FBD = EBG. Lege DB, BE, in gerader Linie an einander: so sind (1, 14. S.) auch FB, BG, in gerader Linie. Vollende das Parallelogramm FE: so ist (5, 7. S.) AB:FE = BC:FE. Nun ist (6, 1. S.) AB:FE = DB:BE, und BC:FE = GB:BF. Folglich ist (5, 11. S.) DB:BE = GB:BF. Demnach sind (6, 2. E.) die Seiten, welche um die gleichen Winkel bey B liegen, **wiederkehrend** proportionirt.



Zweyter Theil.

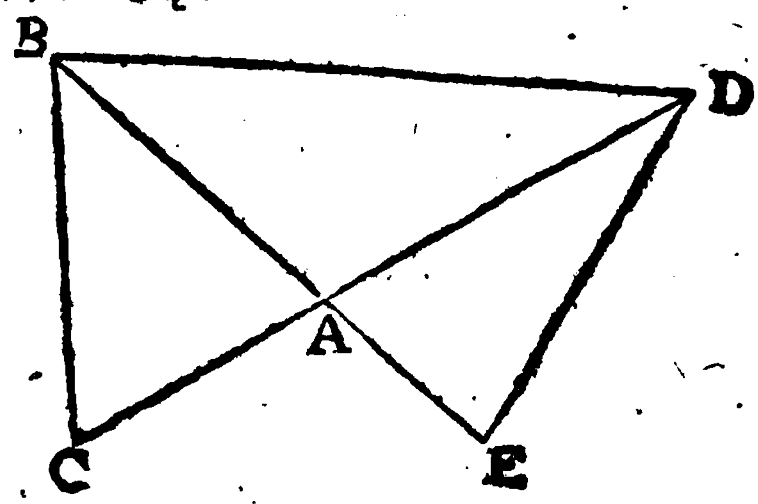
Es sey FBD = EBG, und (6, 2. E.) DB:BE = GB:BF. Nun ist (6, 1. S.) DB:BE = AB:FE, und GB:BF = BC:FE. Folglich ist (5, 11. S.) AB:FE = BC:FE, folglich (5, 9. S.) AB = BC.

Der

Der 15. Satz. Lehrsatz.

In gleichen Triangeln, ABC, ADE, in denen ein Winkel, BAC, einem Winkel, DAE, gleich ist, sind die um die gleichen Winkel liegenden Seiten **wiederkehrend** proportionirt. Und Triangel, ABC, ADE, in denen ein Winkel, BAC, einem Winkel, DAE, gleich ist, und die um die gleichen Winkel liegenden Seiten **wiederkehrend** proportionirt sind, sind gleich.

Erster Theil.



Es sey △ ABC = △ ADE, und BAC = DAE. Lege CA, AD, in gerader Linie an einander: so sind (1, 14. S.) auch EA, AB, in gerader Linie. Ziehe BD: so ist (5, 7. S.) △ ABC : △ ABD = △ ADE : △ ABD. Nun ist (6, 1. S.) △ ABC : △ ABD = CA : AD, und △ ADE : △ ABD = EA : AB. Folglich ist (5, 11. S.) CA : AD = EA : AB. Demnach sind (6, 2. E.) die Seiten, welche um die gleichen Winkel bey A liegen, **wiederkehrend** proportionirt.

Zweyter Theil.

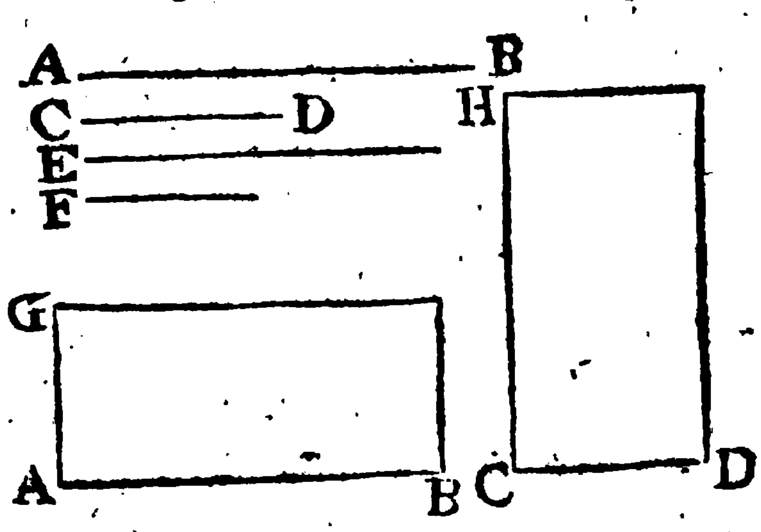
Es sey BAC = DAE, und (6, 2. E.) CA : AD = EA : AB. Nun ist (6, 1. S.) CA : AD = △ ABC : △ ABD, und EA : AB = △ ADE : △ ABD. Folglich ist (5, 11. S.) △ ABC : △ ABD = △ ADE : △ ABD, folglich (5, 9. S.) △ ABC = △ ADE.

Der 16. Satz. Lehrsatz.

Sind vier gerade Linien, AB, CD, E, F, proportionirt: so ist das unter den äußern, AB, F, enthaltene Rectangel, dem unter den mittlern, CD, E, enthaltenen, gleich. Und ist das unter den äußern, AB, F, enthaltene Rectangel, dem unter den mittlern, CD, E, enthaltenen, gleich:

so sind die vier geraden Linien, AB, CD, E, F, proportionirt.

Erster Theil.



Es sey $AB : CD = E : F$. Errichte (1, 11. S.) auf AB, CD, in A, C, die Perpendikel AG, CH; mache $AG = F$, $CH = E$, und vollende die Parallelogramme BG, DH: so ist nach der Voraussetzung und (5, 7. S.) $AB : CD = CH : AG$, folglich (6, 14. S.) $BG = DH$, oder $AB \times F = CD \times E$.

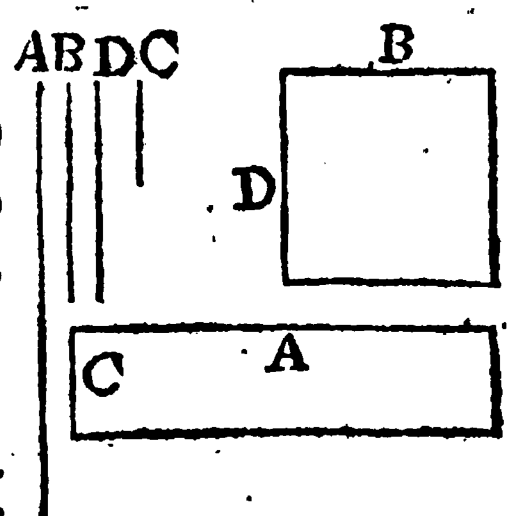
Zweyter Theil.

Es sey $AB \times F = CD \times E$, oder nach Obigem, $BG = DH$: so ist (6, 14. S.) $AB : CD = CH : AG$, oder $AB : CD = E : F$.

Der 17. Satz. Lehrsatz.

Sind drey gerade Linien, A, B, C, proportionirt: so ist das unter den äußern, A, C, enthaltene Rectangel, dem Quadrate der mittlern, B, gleich. Und ist das unter den äußern, A, C, enthaltene Rectangel dem Quadrate der mittlern, B, gleich: so sind die drey geraden Linien, A, B, C, proportionirt.

Erster Theil.



Es sey $A : B = B : C$. Setze $D = B$: so ist $A : B = D : C$, folglich (6, 16. S.) $A \times C = B \times D$, oder $A \times C = \square B$.

Zweyter Theil.

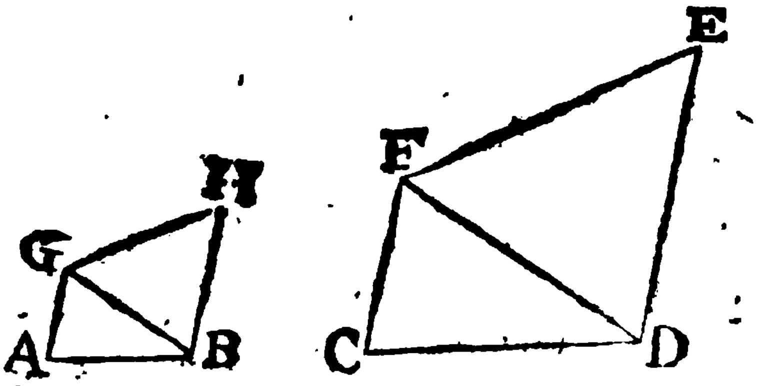
Es sey $A \times C = \square B = B \times D$: so ist (6, 16. S.) $A : B = D : C$, oder $A : B = B : C$.

Der

Der 18. Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden Linie, AB, eine der gegebenen geradlinigen Figur CE ähnliche und ähnlich liegende Figur zu beschreiben.

Ziehe DF, und setze (1, 23. S.) an die Endpunkte der AB die Winkel BAG = DCF, und ABG = CDF; ferner an die Endpunkte der GB die Winkel BGH = DFE, und GBH = FDE: so ist AH ∾ CE.

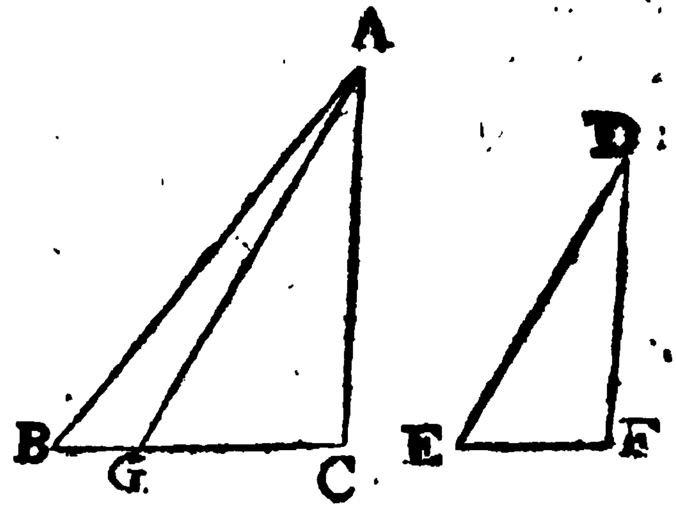


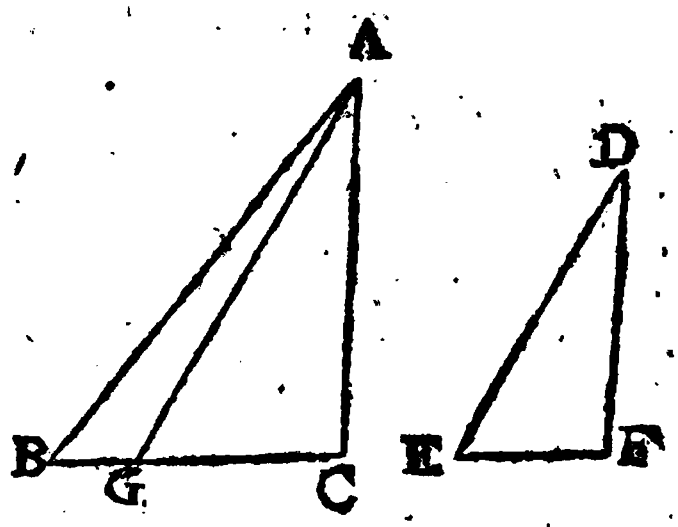
Denn nach Obigem ist (1, 32. S.) AGB = CFD, und GHB = FED; ferner AGB + BGH = CFD + DFE, oder AGH = CFE; desgleichen ABG + GBH = CDF + FDE, oder ABH = CDE. Demnach sind die Figuren AH, CE, gleichwinklig. Nun ist auch nach Obigem, und (6, 4. S.) BG : DF = GA : FC = AB : CD, und BG : DF = BH : DE = HG : EF, also (5, 11. S.) GA : FC = AB : CD = BH : DE = HG : EF. Folglich ist (6, 1. E.) AH ∾ CE.

Der 19. Satz. Lehrsatz.

Die Verhältniß ähnlicher Triangel, ABC, DEF, ist das Zwiefache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten.

Es sey ABC = DEF, daß also AB : BC = DE : EF, folglich BC, EF, gleichnamige Seiten sind; und (5, 16. S.) verwechselt AB : DE = BC : EF. Sucht man nun (6, 11. S.) zu BC, EF, die dritte Proportionallinie BG, daß also BC : EF = EF : BG;





so ist (5, 11. S.) AB : DE = EF : BG; folglich, wenn man AG zieht, (6, 15. S.) △ ABG = △ DEF. Ferner ist, aus BC : EF = EF : BG, und (5, 10. E.) BC:BG = 2 (BC:EF). Nun ist (6, 1. S.) BC : BG = △ ABC : ABG = △ ABC : △ DEF. Folglich ist △ ABC : △ DEF = 2 (BC : EF).

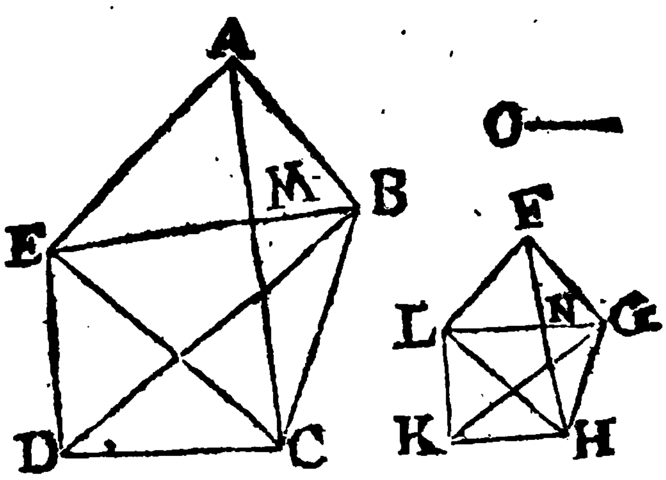
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß, wenn drey gerade Linien BC, EF, BG, proportionirt sind, sich die erste zur dritten verhalte, wie der Triangel auf der ersten zu dem ihm ähnlichen und ähnlich liegenden Triangel auf der zweyten; weil bewiesen worden, daß BC: BG = △ ABC : △ DEF.

Der 20. Satz. Lehrsatz.

Aehnliche vielseitige Figuren, ABCDE, FGHKL, lassen sich in gleich viele ähnliche, und den ganzen Figuren gleichnamige, Triangel zerlegen. Auch ist die Verhältniß ähnlicher vielseitiger Figuren das Zwiefache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten.

Erster Theil.



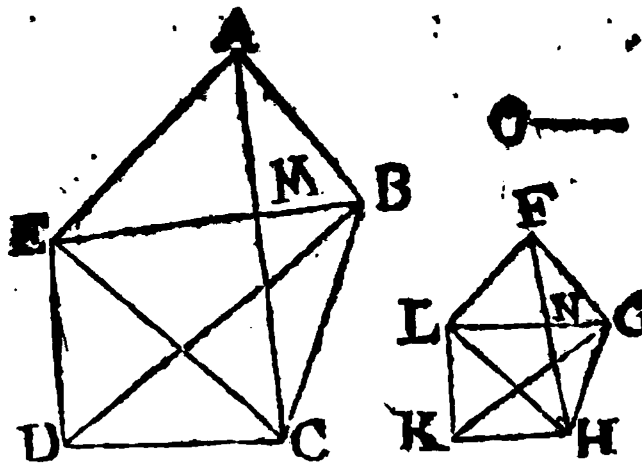
Diese Figuren lassen sich in gleich viele ähnliche Triangel zerlegen. Ziehe die Diagonalen BE, EC; GL, LH. Da, wegen der Aehnlichkeit der Figuren (6, 1. E.) BAE = GFL, und BA : AE = GF : FL; so sind (6, 6. S.) die Triangel ABE, FGL, gleichwinklig, folglich (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt, folglich (6, 1. E.) sie selbst ähnlich. Demnach

nach ist ABE = FGL, und BE:AB = GL:FG. Nun ist wegen Aehnlichkeit der Figuren (6, 1. E.) ABC = FGH, und AB:BC = FG:GH. Folglich ist (1, 3. G.) EBC = LGH, und (5, 22. S.) **aus dem Gleichen**, BE:BC = GL:GH; folglich (6, 6. S.) die Triangel EBC, LGH, gleichwinklig, folglich (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt, folglich (6, 1. E.) sie selbst ähnlich. Aus gleichen Gründen ist auch $\triangle$ CED $\sim$ $\triangle$ HLK.

Zweyter Theil.

Diese ähnlichen Triangel sind den ganzen Figuren proportionirt, und zwar ihnen gleichnamig (ABCDE:FGHKL = $\triangle$ ABE:$\triangle$ FGL = $\triangle$ EBC:$\triangle$ LGH = $\triangle$ CED:$\triangle$ HLK), und die Verhältniß der ganzen Figuren ist das Zwiefache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten.

Ziehe die Diagonalen AC, FH: so ist wegen Aehnlichkeit der Figuren (6, 1. E.) ABC = FGH, und AB:BC = FG:GH, folglich (6, 6. S.) BAM = GFN. Nun ist, nach dem ersten Theile, ABM = FGN. Folglich ist (1, 32. S.) auch M = N. Demnach sind die Triangel ABM, FGN, gleichwinklig. Aus gleichen Gründen sind auch die Triangel BCM, GHN, gleichwinklig. Folglich ist (6, 4. S.) AM:MB = FN:NG, und MB:MC = NG:NH, folglich (5, 22. S.) **aus dem Gleichen** AM:MC = FN:NH. Nun ist (6, 1. S.) AM:MC = $\triangle$ AMB:$\triangle$ BMC = $\triangle$ AME:$\triangle$ EMC, und daher (5, 12. S.) $\triangle$ ABE:$\triangle$ BEC = AM:MC; aber aus gleichen Gründen $\triangle$ FGL:$\triangle$ LGH = FN:NH. Folglich (5, 11. S.) $\triangle$ ABE:$\triangle$ EBC = $\triangle$ FGL:$\triangle$ LGH, oder (5, 16. S.) **verwechselt** $\triangle$ ABE:$\triangle$ FGL = $\triangle$ EBC:$\triangle$ LGH. Ziehet man nun BD, GK: so ist aus denselben Gründen $\triangle$ EBC:$\triangle$ LGH = $\triangle$ CED:$\triangle$ HLK. Folglich ist (5, 11. S.) $\triangle$ ABE:$\triangle$ FGL = $\triangle$ EBC:$\triangle$ LGH = $\triangle$ CED:$\triangle$ HLK; folglich (5, 12. S.) ABCDE:FGHKL = $\triangle$ ABE:FGL. Nun ist (6, 19. S.) $\triangle$ ABE:$\triangle$ FGL = 2 (AB:FG). Folglich ist auch ABCDE:FGHKL = 2 (AB:FG).



Andrer Beweis. Da nach dem ersten Theile die Triangel ähnlich sind: so ist (6, 19. S.) △ ABE : △ FGL = 2 (BE : GL) = △ EBC : △ LGH; und △ EBC : △ LGH = 2 (CE : HL) = △ ECD : △ LHK. Folglich ist (5, 11. S.) △ ABE : △ FGL = △ EBC : △ LGH = △ ECD : △ LHK; folglich (5, 12. S.) ABCDE : FGHKL = △ ABE : △ FGL = 2 (AB : FG).

Erster Zusatz.

Da sich auf eben die Art erweisen läßt, daß die Verhältniß ähnlicher vierseitiger Figuren das Zwiefache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten ist, und eben dasselbe auch (6, 19. S.) von Triangeln erwiesen worden: so ist allgemein, die Verhältniß ähnlicher geradliniger Figuren das Zwiefache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten.

Zweyter Zusatz.

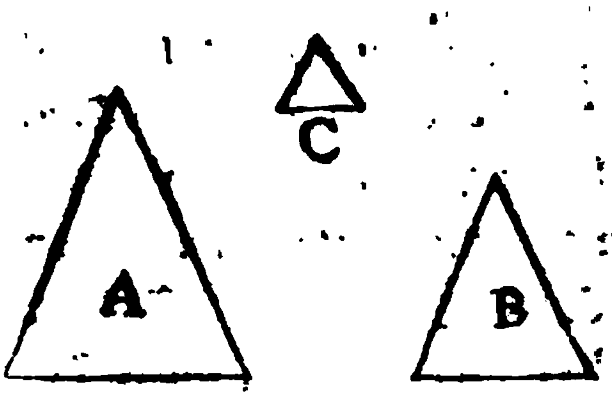
Nimmt man (6, 11. S.) zu AB, FG, die dritte Proportionallinie O: so ist (5, 10. E.) AB : O = 2 (AB : FG). Da aber die Verhältniß einer geradlinigen Figur auf AB, zu der ihr ähnlichen und ähnlich liegenden auf FG, das Zwiefache der Verhältniß der AB zu FG ist, so folgt: daß, wenn drey gerade Linien AB, FG, O, proportionirt sind, die erste AB zur dritten O sich verhalte, wie eine geradlinige Figur auf der ersten AB, zu der ihr ähnlichen und ähnlich liegenden auf der zweyten FG.

Der 21. Satz. Lehrsatz.

Die einer und derselben Figur, C, ähnlichen geradlinigen Figuren, A, B, sind auch einander ähnlich.

Da wegen der Aehnlichkeit (6, 1. E.) die Figuren A, C, sowohl, als die Figuren B, C, gleichwinklig, und ihre Seiten,

ten, welche um gleiche Winkel liegen, proportionirt sind: so sind auch die Figuren A, B, (1, 1. G.) gleichwinklig, und (5, 11. S.) ihre Seiten, welche um gleiche Winkel liegen, proportionirt; folglich (6, 1. E.) die Figuren A, B, einander ähnlich.

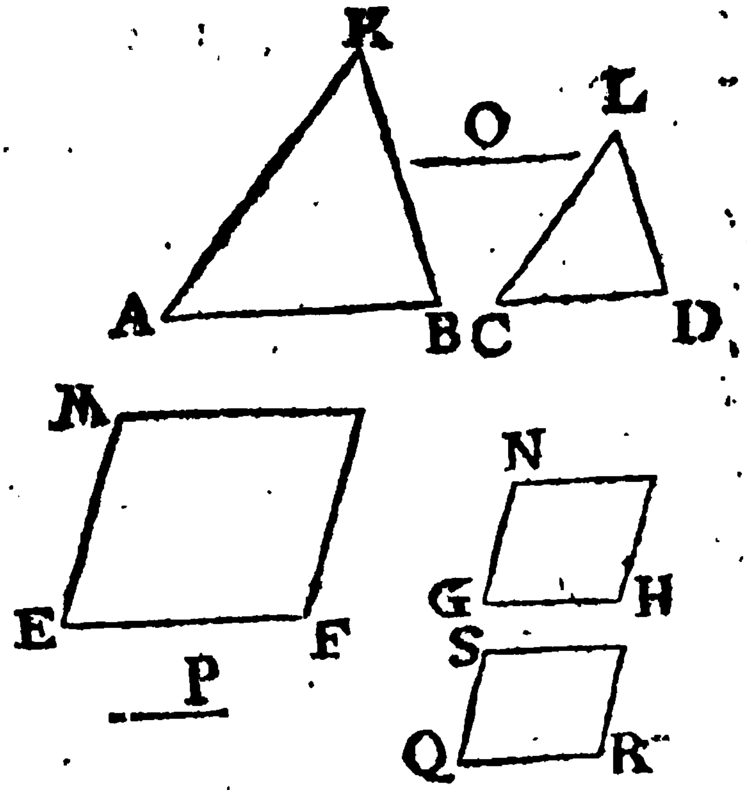


Der 22. Satz. Lehrsatz.

Sind vier gerade Linien, AB, CD, EF, GH, proportionirt: so sind die auf denselben ähnlich beschriebenen ähnlichen geradlinigen Figuren, KAB, LCD, MF, NH, auch proportionirt. Und sind die auf vier geraden Linien, AB, CD, EF, GH, ähnlich beschriebenen ähnlichen geradlinigen Figuren, KAB, LCD, MF, NH, proportionirt: so sind solche vier gerade Linien auch proportionirt.

Erster Theil.

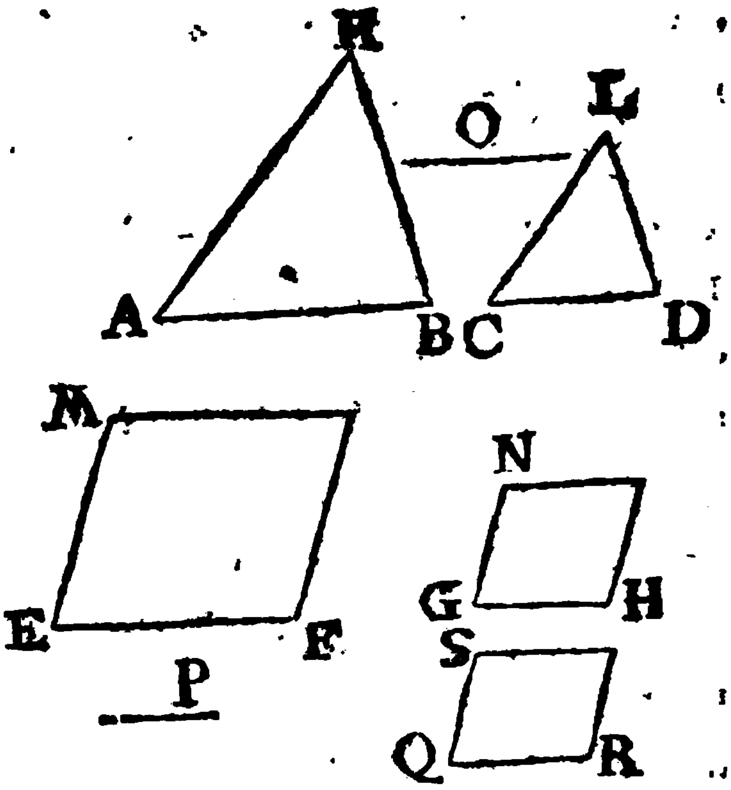
Es sey AB : CD = EF : GH. Nun suche man (6, 11. S.) zu AB, CD, die dritte O, und zu EF, GH, die dritte P. Folglich ist (5, 11. S.) CD : O = GH : P, folglich (5, 22. S.) aus dem Gleichen AB : O = EF : P. Nun ist (6, 20. Zus. 2.) AB : O = △ KAB : △ LCD, und EF : P = MF : NH. Folglich ist (5, 11. S.) △ KAB : △ LCD = MF : NH.



Zweyter Theil.

Es sey △ KAB : △ LCD = MF : NH. Nun sey (6, 12. S.) AB : CD = EF : QR, und eine Figur SR auf

 QR



QR beschrieben, welche sowohl der MF, als NH ähnlich ist, und ähnlich liegt, daß also nach dem ersten Theile △KAB : △LCD = MF : SR. Folglich ist (5, 11. S.) MF : SR = MF : NH, folglich (5, 9. S.) SR = NH. Nun ist, weil MF ∾ SR und ∾ NH, auch (6, 21. S.) SR ∾ NH. Folglich ist (folgender Lehnsatz) QR = GH, folglich, weil AB : CD = EF : QR, auch (5, 7. S.) AB : CD = EF : GH.

Lehnsatz.

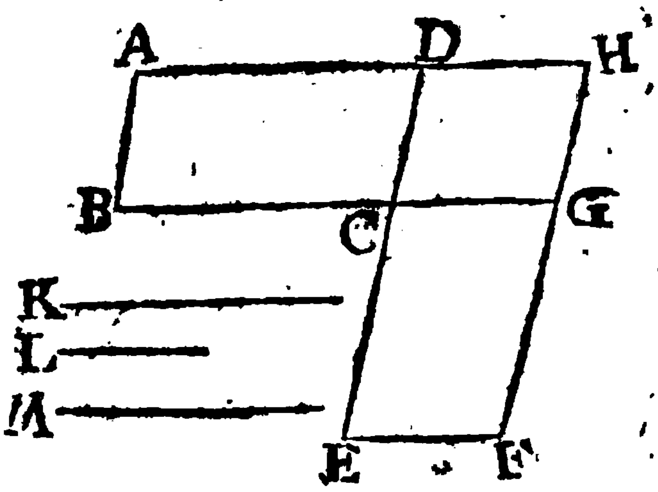
Daß aber in gleichen und ähnlichen Figuren, SR, NH, auch die gleichnamigen Seiten, QR, GH, gleich sind, wird so bewiesen:

Da SR der NH gleich und ähnlich: so ist QR : QS = GH : GN, oder (5, 16. S.) verwechselt QR : GH = QS : GN. Wären nun QR, GH, ungleich, etwa QR > GH, folglich auch QS > GN: so wäre (6, 20. S.) SR > NH, welches dem Angenommenen SR = NH widerspricht. Folglich können QR, GH, nicht ungleich seyn, und sind also gleich.

Der 23. Satz. Lehrsatz.

Die Verhältniß gleichwinkliger Parallelogramme, AC, CF, ist aus den Verhältnissen ihrer Seiten, BC : CG, DC : CE, zusammengesetzt.

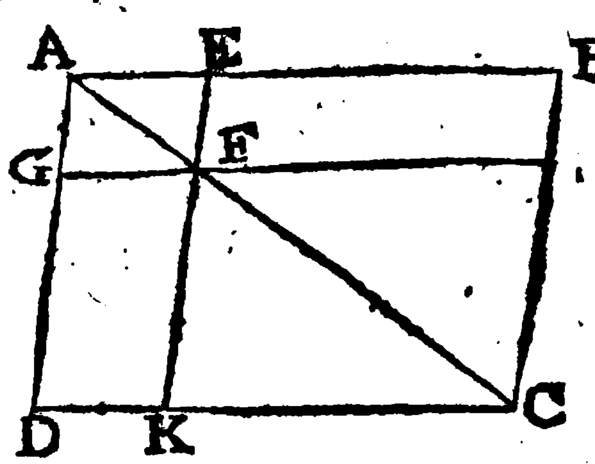
Es sey BCD = ECG, und BC, CG, in gerader Linie an einander gelegt: so sind (1, 14. S.) auch DC, CE, in gerader Linie. Vollende das Parallelogramm DG. Nimmt man



macht nun irgend eine gerade Linie K, und macht (6, 12. S.) BC : CG = K : L, ferner DC : CE = L : M; so ist (6, 5. E.) K : M = (K : L) + (L : M) = (BC : CG) + (DC : CE). Nun ist (6, 1. S.) AC : CH = BC : CG = K : L, und CH : CF = DC : CE = L : M, und daher (5, 22. S.) **aus dem Gleichen** AC : CF = K : M. Folglich ist (5, 11. S.) AC : CF = (BC : CG) + (DC : CE).

Der 24. Satz. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme, ABCD, sind die um die Diagonale, AC, liegenden Parallelogramme, EG, HK, dem ganzen, und einander ähnlich.



Da GF der DC parallel: so ist (1, 29. S.) AGF = ADC, AFG = ACD, DAC = DAC; demnach △ ACD dem △ AGF gleichwinklig. Nun ist aus gleichen Gründen △ ABC dem △ AEF gleichwinklig. Folglich ist das Parallelogramm ABCD dem Parallelogramme EG gleichwinklig, auch (6, 4. S.) AD : DC = AG : GF, und CB : BA = FE : EA; ferner DC : CA = GF : FA, und AC : CB = AF : FE; folglich (5, 22. S.) **aus dem Gleichen** DC : CB = GF : FE.

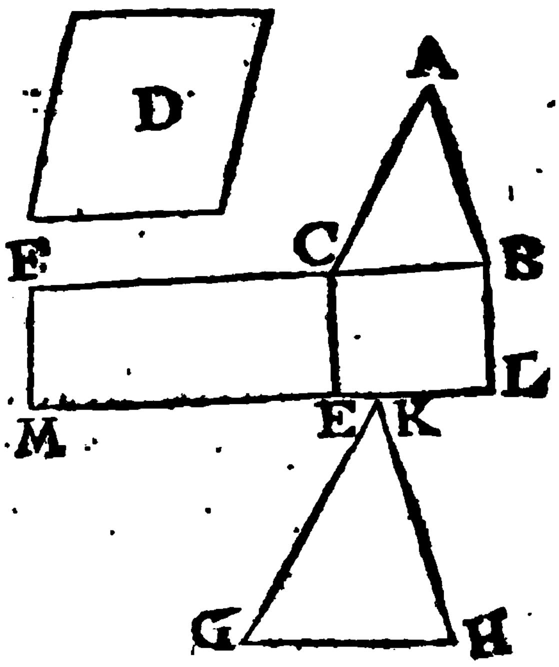
Endlich ist auch, wegen der Parallellinien EF, BC, und GF, DC, (6, 2. S.) BE : EA = CF : FA, und CF : FA = DG : GA; folglich (5, 14. S.) BE : EA = DG : GA; folglich (5, 18. S.) **verbunden** BA : AE = DA : AG, und (5, 16. S.) **verwechselt** BA : AD = AE : AG.

Demnach sind in den gleichwinkligen Parallelogrammen ABCD, EG, die Seiten um die gleichen Winkel proportionirt, folglich ist (6, 1. E.) ABCD ∾ EG. Nun ist aus glei-

gleichen Gründen ABCD ∾ KH. Folglich ist (6, 21. S.) auch EG ∾ KH.

Der 25. Satz. Aufgabe.

Eine geradlinige Figur zu beschreiben, welche der gegebenen, ABC, ähnlich, und der andern gegebenen, D, gleich sey.



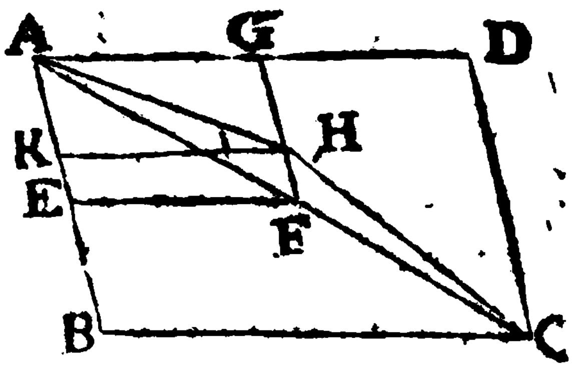
Auf BC beschreibe (1, 44. S.) das Parallelogramm BE = △ ABC, und (1, 45. S.) auf CE unter dem Winkel FCE = CBL, das Parallelogramm EF = D: so sind (1, 14. S.) sowohl BC, CF, als auch LE, EM, in gerader Linie. Suche (6, 13. S.) zwischen BC, CF, die mittlere Proportionallinie GH, und beschreibe auf dieser (6, 18. S.) einen dem △ ABC ähnlichen und ähnlich liegenden △ KGH: so ist das Verlangte geschehen.

Denn da BC : GH = GH : CF; so ist (6, 20. Zus. 2.) BC : CF = △ ABC : △ KGH. Nun ist (6, 1. S.) BC : CF = BE : EF. Folglich ist (5, 11. S.) △ ABC : △ KGH = BE : EF. Nun ist △ ABC = BE. Folglich ist (5, 14. S.) auch der dem △ ABC ähnliche △ KGH = EF = D.

Der 26. Satz. Lehrsatz.

Wird von einem Parallelogramme, ABCD, ein ihm ähnliches und ähnlich liegendes Parallelogramm, AEFG, unter einem gemeinschaftlichen Winkel, DAB, weggenommen: so liegt es mit dem ganzen um einerley Diagonale.

Wäre dieses nicht: so gehe, wenns möglich ist, die Diagonale AHC durch einen von F verschiedenen Punkt H, und

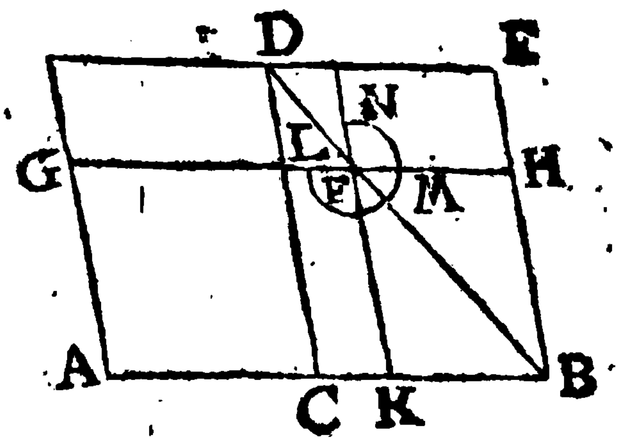


und es durch H mit AD oder BC die HK parallel, also (6, 24. S.) ABCD ∾ GK: so ist (6, 1. E.) DA : AB = GA : AK. Nun ist, weil ABCD ∾ EG, auch DA : AB = GA : AE. Folglich ist (5, 11. S.) GA : AE = GA : AK, folglich (5, 9. S.) AE = AK, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Demnach kann die Diagonale durch keinen von F verschiedenen Punkt, sondern muß durch F gehen, das ist, ABCD, AEFG, liegen um einerley Diagonale.

Der 27. Satz. Lehrsatz.

Unter allen an einer gegebenen geraden Linie, AB, entworfenen Parallelogrammen, deren Ergänzungen dem Parallelogramme auf der halben Linie ähnlich sind, und ähnlich liegen, ist das seiner Ergänzung ähnliche Parallelogramm auf der halben Linie das größte.

Erster Fall.



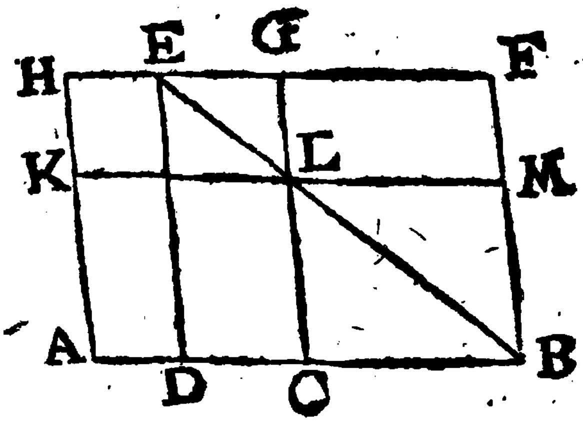
Es sey die Linie AB in C halbirt, und ein Abschnitt der Linie AK > AC. Nun sey auf dem Abschnitte AK das Parallelogramm AF, dessen Ergänzung KH dem Parallelogramm CE ähnlich sey, und ähnlich liege: so sage ich, daß AD > AF ist.

Denn da KH ∾ CE: so liegen beyde (6, 26. S.) um einerley Diagonale. Ziehe solche Diagonale DB, und vollende die Figur: so ist (1, 43. S.) CF = FE, folglich, wenn KH hinzukommt, CH = KE. Nun ist, weil AC = CB, (1, 36. S.) CH = CG. Folglich ist KE = CG; folglich, wenn CF hinzukommt, Gnomon LMN = AF, folglich CE, das ist AD > AF.

Zwey.

Zweyter Fall.

Es sey wiederum AB in C halbirt, aber ein Abschnitt AD<AC. Nun sey auf dem Abschnitte AD das Parallelogramm AE, dessen Ergänzung DF dem Parallelogramme CM ähnlich sey, und ähnlich liege: so sage ich, daß AL>AE ist.



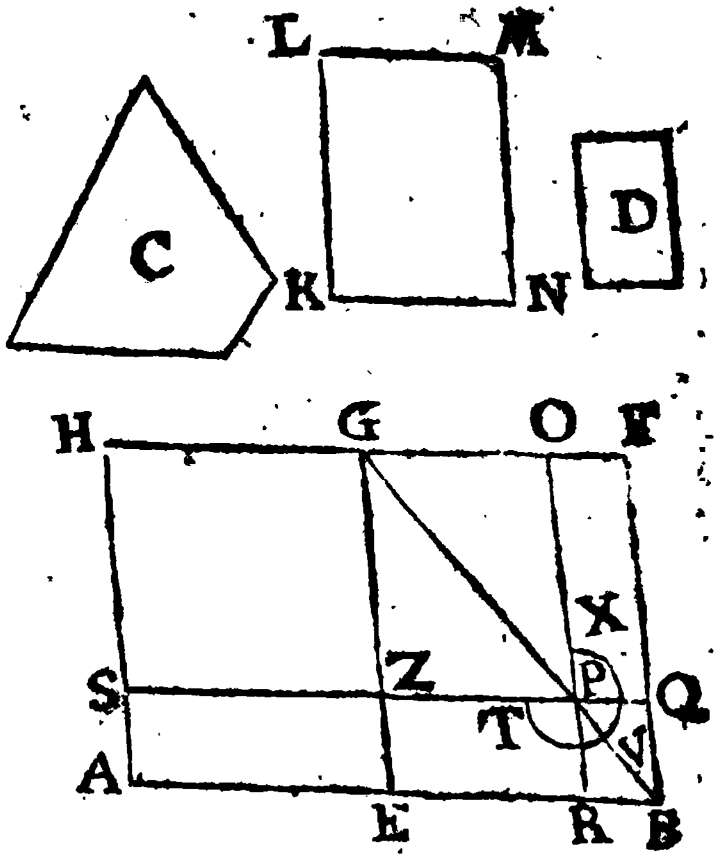
Denn da DF∾CM: so liegen beyde (6, 26. S.) um einerley Diagonale. Ziehe solche Diagonale BE, und vollende die Figur: so ist, weil FG=GH, (1, 36. S.) FL=LH, folglich FL>EK. Nun ist (1, 43. S.) FL=LD. Folglich ist LD>EK, folglich, wenn DK hinzukommt, AL>AE.

Der 28. Satz. Aufgabe.

An einer gegebenen geraden Linie, AB, ein der gegebenen geradlinigen Figur, C, gleiches Parallelogramm zu entwerfen, dessen Ergänzung einem gegebenen Parallelogramme, D, ähnlich sey. Jedoch darf die gegebene geradlinige Figur, C, nicht größer seyn, als das Parallelogramm auf der halben Linie, dessen Ergänzung dem gegebenen Parallelogramme D ähnlich ist.

Es sey AB in E halbirt, und auf EB ein Parallelogramm EF∾D beschrieben, auch das Parallelogramm AG vollendet: so ist nach der Voraussetzung AG entweder der C gleich oder größer. Ist AG=C: so ist, weil auch EF∾D, das Verlangte geschehen. Ist aber AG, also auch EF>C: so sey (6, 25. S.) ein Parallelogramm KM dem

Ueber-

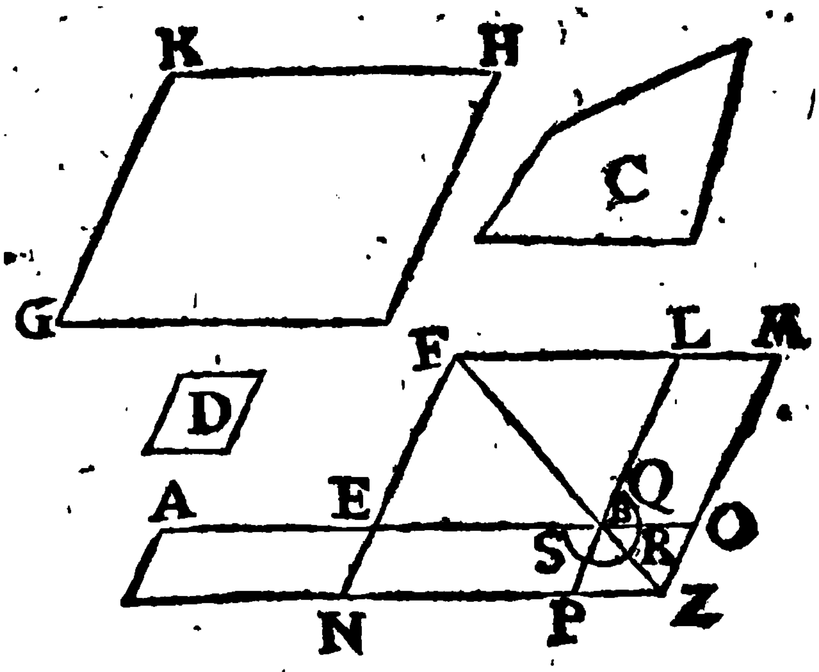


Ueberschusse des Parallelogramms EF über C gleich, und dem D, folglich auch dem EF, ähnlich; auch sey LK mit GE, und LM mit GF, gleichnamig, das ist, $LK : LM = GE : GF$. Nun ist $EF = C + KM$, und daher $EF > KM$. Folglich ist (6, 20. Zus. 1.) $GE > LK$, und $GF > LM$. Mache daher (1, 3. S.) $GZ = LK$, $GO = LM$, und vollende das Parallelogramm ZO: so ist (6, 24. S.) $ZO \cong KM$, und da $KM \sim EF$, auch $ZO \sim EF$, folglich (6, 26. S.) ZO und EF um einerley Diagonale. Ziehe diese Diagonale BG, und vollende die Figur: so ist SR das verlangte Parallelogramm.

Denn da $EF = C + KM$, und $KM = ZO$: so ist $EF = C + ZO$, folglich (1, 3. S.) Gnomon $TVX = C$. Nun ist (1, 43. S.) $ZR = OQ$, also, wenn QR hinzukommt, $ZB = OB$, also auch $SE = OB$, und daher, wenn ZR hinzukommt, $SR =$ Gnomon TVX. Folglich ist $SR = C$. Demnach ist das auf dem Abschnitte AR beschriebene Parallelogramm SR der Figur C gleich, und dessen Ergänzung $QR \sim ZO \sim D$.

Der 29. Satz. Aufgabe.

An einer gegebenen geraden Linie, AB, ein der gegebenen geradlinigen Figur, C, gleiches Parallelogramm zu entwerfen, dessen Ueberschuß einem gegebenen Parallelogramme, D, ähnlich sey.



Es sey AB in E halbirt, und auf EB ein Parallelogramm EL ∾ D beschrieben, auch sey (6, 28. S.) noch ein Parallelogramm GH, dem EL + C gleich, und dem D, folglich auch dem EL, ähnlich, und zwar daß KH : KG = FL : FE. Nun ist GH > EL. Folglich ist (6, 20. Zus. 1.) KH > FL, und KG > FE. Verlängere daher FL, FE, mache (1, 3. S.) FM = KH, FN = KG, und vollende das Parallelogramm MN: so ist (6, 24. S.) MN ≅ GH, und da GH ∾ EL, auch MN ∾ EL, folglich (6, 26. S.) MN, EL, um einerley Diagonale. Ziehe diese Diagonale FZ, und vollende die Figur: so ist AZ das verlangte Parallelogramm.

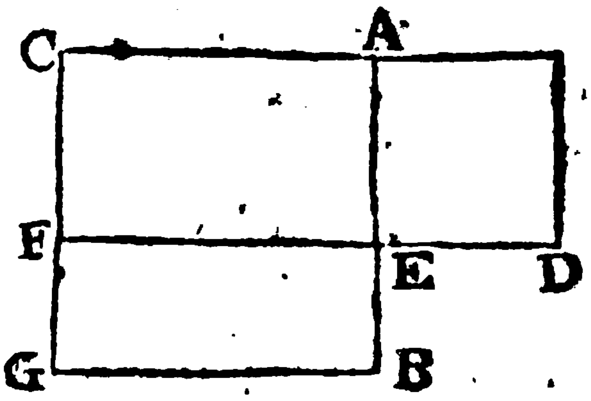
Denn da GH = EL + C, und GH = MN: so ist MN = EL + C, folglich (1, 3. G.) Gnomon QRS = C. Nun ist (1, 36. S.) AN = NB, also auch (1, 43. S.) AN = LO, und daher, wenn EZ hinzukommt, AZ = Gnomon QRS. Folglich ist AZ = C. Demnach ist das an AB entworfene Parallelogramm AZ der Figur C gleich, und dessen Ueberschuß OP ∾ EL ∾ D.

Der 30. Satz. Aufgabe.

Eine gegebene begränzte gerade Linie, AB, nach stetiger Proportion zu schneiden.

Macht man (1, 43. S.) von AB das Quadrat BC, und entwirft (6, 29. S.) an CA ein dem Quadrate BC gleiches Parallelogramm CD, dessen Ueberschuß AD dem Quadrate BC ähnlich sey: so ist AB in E nach stetiger Proportion geschnitten.

Denn

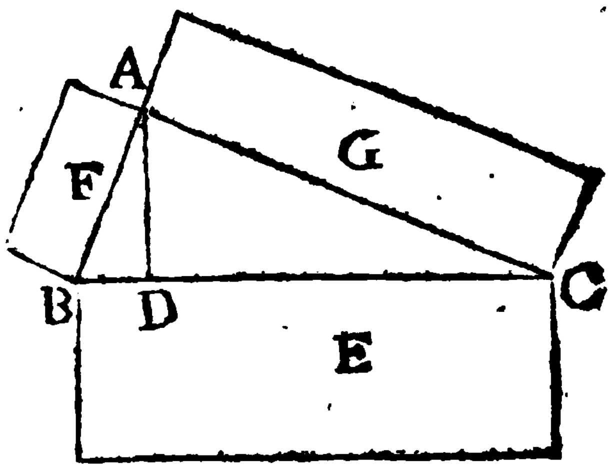


Denn da BC ein Quadrat: so ist auch AD ein Quadrat; und da BC = CD: so ist, wenn man CE wegnimmt, BF = AD. Nun sind BF, AD gleichwinklig. Folglich ist (6, 14. S.) FE : ED = AE : EB. Nun ist (1, 24. S.) FE = AC = AB, und ED = AE. Folglich ist AB : AE = AE : EB, und, weil AB > AE, auch AE > EB, folglich (6, 3. E.) AB in E nach stetiger Proportion geschnitten.

Eine andere Auflösung. Schneide (2, 11. S.) AB in E so, daß AB × BE = □ AE: so ist (6, 17. S.) BA : AE = AE : EB, folglich (6, 3. E.) AB in E nach stetiger Proportion geschnitten.

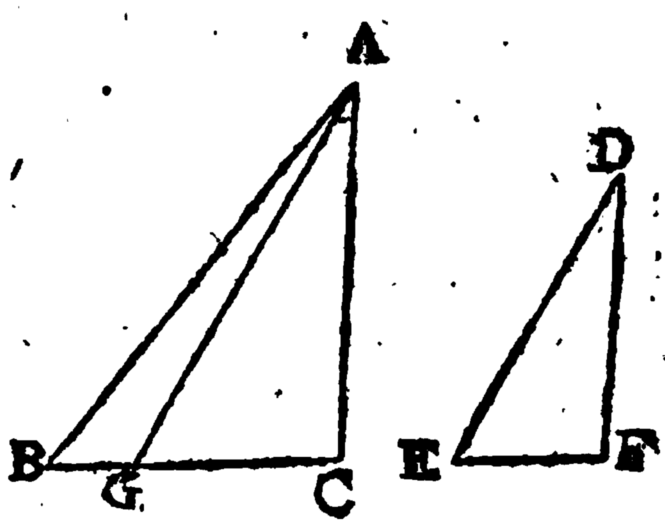
Der 31. Satz. Lehrsatz.

In jedem rechtwinkligen Triangel, ABC, ist die Figur auf der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite, BC, den ihr ähnlichen und ähnlich liegenden Figuren auf den diesen Winkel einschließenden Seiten, BA, AC, zusammen gleich.



Fällt aus A auf BC der Perpendikel AD: so ist (6, 8. Zus.) CB : BA = BA : BD; folglich (6, 20. Zus. 2.) CB : BD = E : F. Nun ist aus gleichen Gründen BC : CD = E : G. Folglich ist (5, 24. S.) BC : BD + DC = E : F + G. Nun ist BC = BD + DC. Folglich ist auch E = F + G.

Ein anderer Beweis. Da die Figuren E, F, G, ähnlich sind: so ist (6, 23. S.) E : F = 2 (BC : BA). Nun ist (6, 20. Zus. 1.) □ BC : □ BA = 2 (BC : BA). Folglich ist (5, 11. S.) E : F = □ BC : □ BA. Nun ist aus gleichen Gründen E : G = □ BC : □ AC. Folglich ist so ist (5, 11. S.) AB : DE = EF : BG; folglich, wenn man AG zieht, (6, 15. S.) △ ABG = △ DEF. Ferner ist, aus BC : EF = EF : BG, und (5, 10. E.) BC : BG = 2 (BC : EF). Nun ist (6, 1. S.) BC : BG = △ ABC : ABG = △ ABC : △ DEF. Folglich ist △ ABC : △ DEF = 2 (BC : EF).



Zusatz.

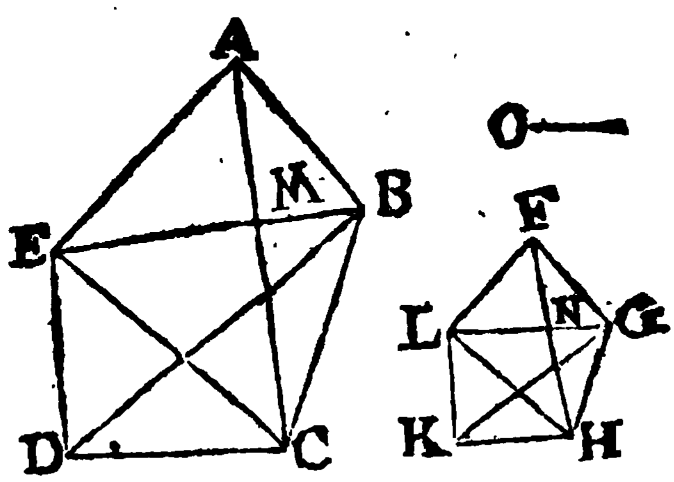
Hieraus erhellet, daß, wenn drey gerade Linien BC, EF, BG, proportionirt sind, sich die erste zur dritten verhalte, wie der Triangel auf der ersten zu dem ihm ähnlichen und ähnlich liegenden Triangel auf der zweyten; weil bewiesen worden, daß BC : BG = △ ABC : △ DEF.

Der 20. Satz. Lehrsatz.

Aehnliche vielseitige Figuren, ABCDE, FGHKL, lassen sich in gleich viele ähnliche, und den ganzen Figuren gleichnamige, Triangel zerlegen. Auch ist die Verhältniß ähnlicher vielseitiger Figuren das Zwiefache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten.

Erster Theil.

Diese Figuren lassen sich in gleich viele ähnliche Triangel zerlegen. Ziehe die Diagonalen BE, EC; GL, LH. Da, wegen der Aehnlichkeit der Figuren (6, 1. E.) BAE = GFL, und BA : AE = GF : FL; so sind (6, 6. S.) die Triangel



ABE, FGL, gleichwinklig, folglich (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt, folglich (6, 1. E.) sie selbst ähnlich. Dem-

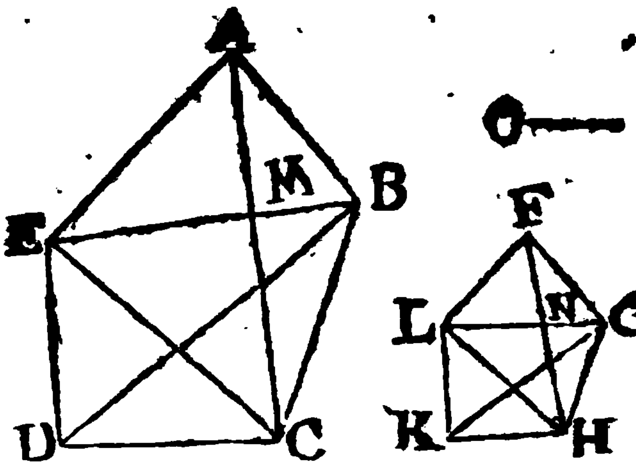
nach

nach ist $ABE = FGL$, und $BE:AB = GL:FG$. Nun ist wegen Aehnlichkeit der Figuren (6, 1. E.) $ABC = FGH$, und $AB:BC = FG:GH$. Folglich ist (1, 3. G.) $EBC = LGH$, und (5, 22. S.) **aus dem Gleichen**, $BE:BC = GL:GH$; folglich (6, 6. S.) die Triangel EBC, LGH, gleichwinklig, folglich (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt, folglich (6, 1. E.) sie selbst ähnlich. Aus gleichen Gründen ist auch $\triangle CED \sim \triangle HLK$.

Zweyter Theil.

Diese ähnlichen Triangel sind den ganzen Figuren proportionirt, und zwar ihnen gleichnamig ($ABCDE:FGHKL = \triangle ABE:\triangle FGL = \triangle EBC:\triangle LGH = \triangle CED:\triangle HLK$), und die Verhältniß der ganzen Figuren ist das Zwiefache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten.

Ziehe die Diagonalen AC, FH: so ist wegen Aehnlichkeit der Figuren (6, 1. E.) $ABC = FGH$, und $AB:BC = FG:GH$, folglich (6, 6. S.) $BAM = GFN$. Nun ist, nach dem ersten Theile, $ABM = FGN$. Folglich ist (1, 32. S.) auch $M = N$. Demnach sind die Triangel ABM, FGN, gleichwinklig. Aus gleichen Gründen sind auch die Triangel BCM, GHN, gleichwinklig. Folglich ist (6, 4. S.) $AM:MB = FN:NG$, und $MB:MC = NG:NH$, folglich (5, 22. S.) **aus dem Gleichen** $AM:MC = FN:NH$. Nun ist (6, 1. S.) $AM:MC = \triangle AMB:\triangle BMC = \triangle AME:\triangle EMC$, und daher (5, 12. S.) $\triangle ABE:\triangle BEC = AM:MC$; aber aus gleichen Gründen $\triangle FGL:\triangle LGH = FN:NH$. Folglich (5, 11. S.) $\triangle ABE:\triangle EBC = \triangle FGL:\triangle LGH$, oder (5, 16. S.) **verwechselt** $\triangle ABE:\triangle FGL = \triangle EBC:\triangle LGH$. Ziehet man nun BD, GK: so ist aus denselben Gründen $\triangle EBC:\triangle LGH = \triangle CED:\triangle HLK$. Folglich ist (5, 11. S.) $\triangle ABE:\triangle FGL = \triangle EBC:\triangle LGH = \triangle CED:\triangle HLK$; folglich (5, 12. S.) $ABCDE:FGHKL = \triangle ABE:FGL$. Nun ist (6, 19. S.) $\triangle ABE:\triangle FGL = 2\,(AB:FG)$. Folglich ist auch $ABCDE:FGHKL = 2\,(AB:FG)$.



Andrer Beweis. Da nach dem ersten Theile die Triangel ähnlich sind: so ist (6, 19. S.) △ABE : △FGL = 2 (BE : GL) = △EBC : △LGH; und △EBC : △LGH = 2 (CE : HL) = △ECD : △LHK. Folglich ist (5, 11. S.) △ABE : △FGL = △EBC : △LGH = △ECD : △LHK; folglich (5, 12. S.) ABCDE : FGHKL = △ABE : △FGL = 2 (AB : FG).

Erster Zusatz.

Da sich auf eben die Art erweisen läßt, daß die Verhältniß ähnlicher vierseitiger Figuren das Zwiefache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten ist, und eben dasselbe auch (6, 19. S.) von Triangeln erwiesen worden: so ist allgemein, die Verhältniß ähnlicher geradliniger Figuren das Zwiefache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten.

Zweyter Zusatz.

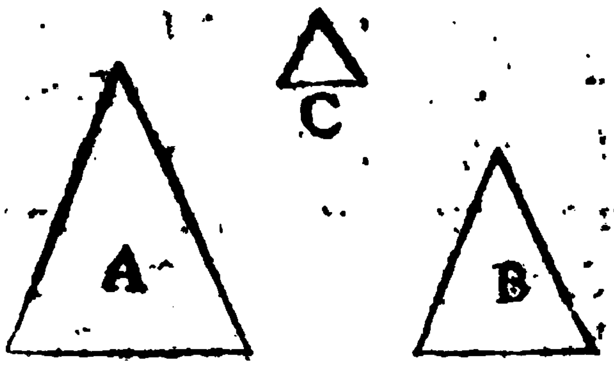
Nimmt man (6, 11. S.) zu AB, FG, die dritte Proportionallinie O: so ist (5, 10. E.) AB : O = 2 (AB : FG). Da aber die Verhältniß einer geradlinigen Figur auf AB, zu der ihr ähnlichen und ähnlich liegenden auf FG, das Zwiefache der Verhältniß der AB zu FG ist, so folgt: daß, wenn drey gerade Linien AB, FG, O, proportionirt sind, die erste AB zur dritten O sich verhalte, wie eine geradlinige Figur auf der ersten AB, zu der ihr ähnlichen und ähnlich liegenden auf der zweyten FG.

Der 21. Satz. Lehrsatz.

Die einer und derselben Figur, C, ähnlichen geradlinigen Figuren, A, B, sind auch einander ähnlich.

Da wegen der Aehnlichkeit (6, 1. E.) die Figuren A, C, sowohl, als die Figuren B, C, gleichwinklig, und ihre Seiten,

ten, welche um gleiche Winkel liegen, proportionirt sind: so sind auch die Figuren A, B, (1, 1. S.) gleichwinklig, und (5, 11. S.) ihre Seiten, welche um gleiche Winkel liegen, proportionirt; folglich (6, 1. E.) die Figuren A, B, einander ähnlich.

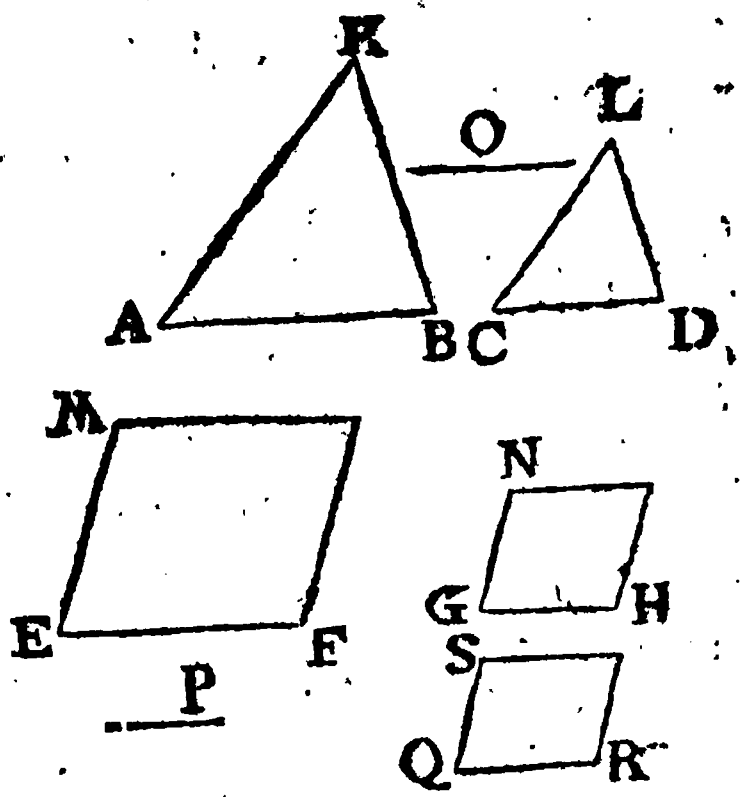


Der 22. Satz. Lehrsatz.

Sind vier gerade Linien, AB, CD, EF, GH, proportionirt: so sind die auf denselben ähnlich beschriebenen ähnlichen geradlinigen Figuren, KAB, LCD, MF, NH, auch proportionirt. Und sind die auf vier geraden Linien, AB, CD, EF, GH, ähnlich beschriebenen ähnlichen geradlinigen Figuren, KAB, LCD, MF, NH, proportionirt: so sind solche vier gerade Linien auch proportionirt.

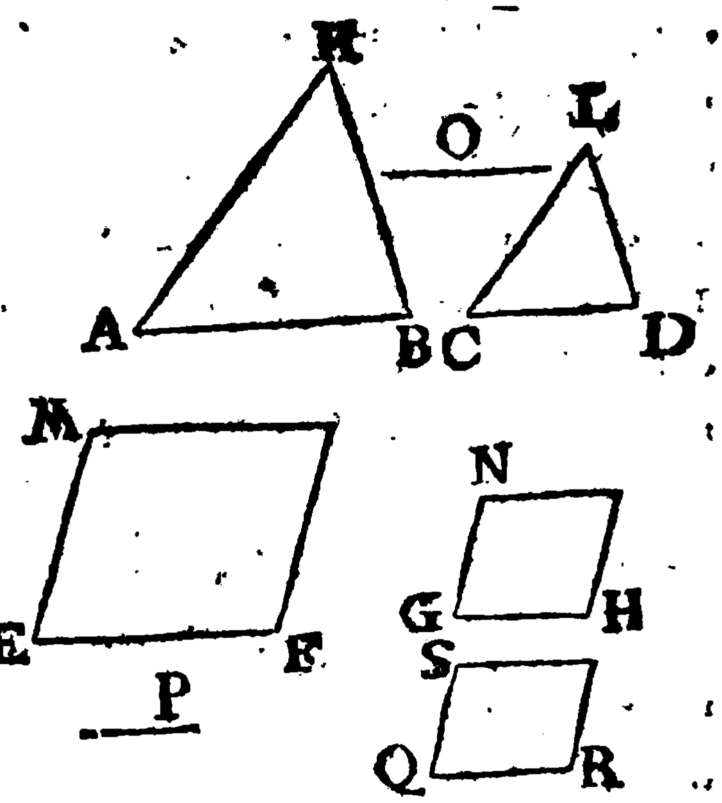
Erster Theil.

Es sey AB : CD = EF : GH. Nun suche man (6, 11. S.) zu AB, CD, die dritte O, und zu EF, GH, die dritte P. Folglich ist (5, 11. S.) CD : O = GH : P, folglich (5, 22. S.) aus dem Gleichen AB : O = EF : P. Nun ist (6, 20. Zus. 2.) AB : O = △ KAB : △ LCD, und EF : P = MF : NH. Folglich ist (5, 11. S.) △ KAB : △ LCD = MF : NH.



Zweyter Theil.

Es sey △ KAB : △ LCD = MF : NH. Nun sey (6, 12. S.) AB : CD = EF : QR, und eine Figur SR auf QR



QR beschrieben, welche sowohl der MF, als NH ähnlich ist, und ähnlich liegt, daß also nach dem ersten Theile △KAB : △LCD = MF : SR. Folglich ist (5, 11. S.) MF : SR = MF : NH, folglich (5, 9. S.) SR = NH. Nun ist, weil MF ∾ SR und ∾ NH, auch (6, 21. S.) SR ∾ NH. Folglich ist (folgender Lehnsatz) QR = GH, folglich, weil AB : CD = EF : QR, auch (5, 7. S.) AB : CD = EF : GH.

Lehnsatz.

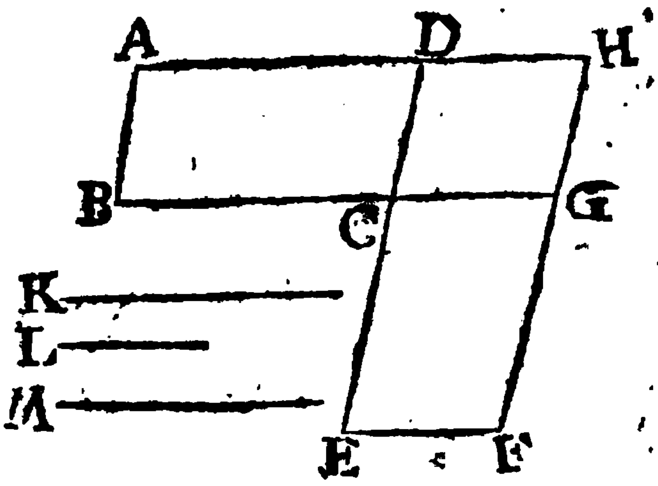
Daß aber in gleichen und ähnlichen Figuren, SR, NH, auch die gleichnamigen Seiten, QR, GH, gleich sind, wird so bewiesen:

Da SR der NH gleich und ähnlich: so ist QR : QS = GH : GN, oder (5, 16. S.) verwechselt QR : GH = QS : GN. Wären nun QR, GH, ungleich, etwa QR > GH, folglich auch QS > GN: so wäre (6, 20. S.) SR > NH, welches dem Angenommenen SR = NH widerspricht. Folglich können QR, GH, nicht ungleich seyn, und sind also gleich.

Der 23. Satz. Lehrsatz.

Die Verhältniß gleichwinkliger Parallelogramme, AC, CF, ist aus den Verhältnissen ihrer Seiten, BC : CG, DC : CE, zusammengesetzt.

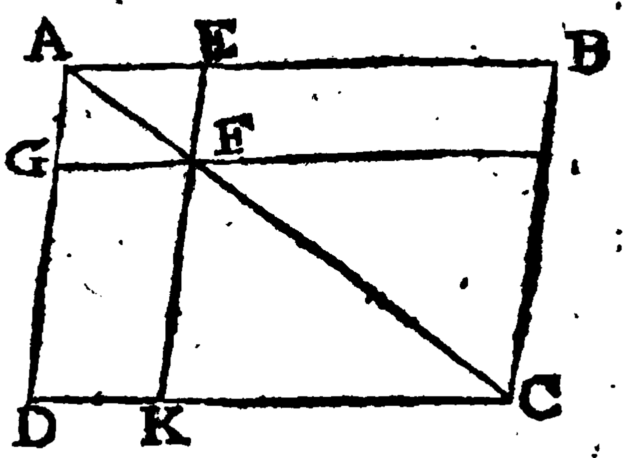
Es sey BCD = ECG, und BC, CG, in gerader Linie an einander gelegt: so sind (1, 14. S.) auch DC, CE, in gerader Linie. Vollende das Parallelogramm DG. Nimmt man



man nun irgend eine gerade Linie K, und macht (6, 12. S.) BC : CG = K : L, ferner DC : CE = L : M; so ist (6, 5. S.) K : M = (K : L) + (L : M) = (BC : CG) + (DC : CE). Nun ist (6, 1. S.) AC : CH = BC : CG = K : L, und CH : CF = DC : CE = L : M, und daher (5, 22. S.) **aus dem Gleichen** AC : CF = K : M. Folglich ist (5, 11. S.) AC : CF = (BC : CG) + (DC : CE).

Der 24. Satz. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramme, ABCD, sind die um die Diagonale, AC, liegenden Parallelogramme, EG, HK, dem ganzen, und einander ähnlich.



Da GF der DC parallel: so ist (1, 29. S.) AGF = ADC, AFG = ACD, DAC = DAC; demnach △ ACD dem △ AGF gleichwinklig. Nun ist aus gleichen Gründen △ ABC dem △ AEF gleichwinklig. Folglich ist das Parallelogramm ABCD dem Parallelogramme EG gleichwinklig, auch (6, 4. S.) AD : DC = AG : GF, und CB : BA = FE : EA; ferner DC : CA = GF : FA, und AC : CB = AF : FE; folglich (5, 22. S.) **aus dem Gleichen** DC : CB = GF : FE.

Endlich ist auch, wegen der Parallellinien EF, BC, und GF, DC, (6, 2. S.) BE : EA = CF : FA, und CF : FA = DG : GA; folglich (5, 14. S.) BE : EA = DG : GA; folglich (5, 18. S.) **verbunden** BA : AE = DA : AG, und (5, 16. S.) **verwechselt** BA : AD = AE : AG.

Demnach sind in den gleichwinkligen Parallelogrammen ABCD, EG, die Seiten um die gleichen Winkel proportionirt, folglich ist (6, 1. E.) ABCD ∾ EG. Nun ist aus glei-

Der 2. Satz. Aufgabe.

Für zwey gegebene Zahlen, AB, CD, welche nicht Primzahlen zu einander sind, das größte gemeine Maaß zu finden.

Erster Fall.

Wenn von den gegebenen Zahlen die kleinere CD, die größere AB genau misset: so ist sie, weil sie auch sich selbst misset, ein gemeines Maaß von beyden; offenbar aber auch das größte, weil keine größere Zahl die CD messen kann.

A . . . . B
C . . . . D

Zweyter Fall.

Wenn von den gegebenen Zahlen die kleinere CD, die größere AB, nicht genau misset, und man nimmt das Kleinere vom Größern immer weg, bis ein Rest kommt, welcher die nächste Zahl vor ihm genau misset: so ist dieser Rest das größte gemeine Maaß der gegebenen Zahlen AB, CD.

A . . . . E . . . . . . B
C . .   F . . . .   D
G —

Denn da AB, CD, nicht Primzahlen zu einander sind: so kann obgedachter Rest (7, 1. S.) nicht die Einheit seyn, und ist also eine Zahl. Nun lasse AB von CD gemessen zum Reste AE $<$ CD, und CD von AE gemessen zum Reste die Zahl CF, welche die nächste vor ihr AE genau messe.

Da hiernach CF die AE, und AE die DF mißt: so misset CF die DF, aber auch sich selbst, folglich die ganze CD. Da ferner CF die CD, und CD die BE misset: so misset CF die BE, aber auch die EA, folglich die ganze AB. Demnach ist CF das gemeine Maaß der AB, CD.

Wäre nun CF nicht ihr größtes gemeines Maaß: so sey es G $>$ CF. Da G die CD, und CD die BE misset: so misset G die BE, aber auch die ganze AB, folglich den Rest AE. Da ferner G die AE, und AE die DF misset: so misset G die DF, aber auch die ganze CD, folglich den

Rest CF, welches, weil G > CF, unmöglich ist. Demnach werden AB, CD, von keiner größern Zahl als CF gemessen, und ist also CF das größte gemeine Maaß der AB, CD.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß eine Zahl, welche zwey Zahlen misset, auch das größte gemeine Maaß derselben messe.

Der 3. Satz. Aufgabe.

Für drey gegebene Zahlen A, B, C, welche nicht Primzahlen zu einander sind, das größte gemeine Maaß zu finden.

Man nehme (7, 2. S.) für A und B das größte gemeine Maaß D: so misset D entweder auch C, oder nicht.

Erster Fall.

A	8	B	6	C	4
D	2	E	—		

Misset D auch C: so ist D das größte gemeine Maaß der A, B, C.

Denn D ist offenbar ihr gemeines Maaß. Wäre es nun nicht das größte, sondern eine andere Zahl E > D: so müßte E, weil sie A, B, misset, (7, 2. Zus.) auch deren größtes gemeines Maaß D messen, welches, weil E > D, unmöglich ist. Demnach werden A, B, C, von keiner größern Zahl als D gemessen, und ist also D das größte gemeine Maaß der A, B, C.

Zweyter Fall.

A	18	B	12	C	4
D	6	E	2	F	—

Misset aber D nicht auch C, und man nimmt (7, 2. S.) für D, C, das größte gemeine Maaß E: so ist dieses das größte gemeine Maaß der A, B, C.

Denn da A, B, C, nicht Primzahlen zu einander sind, also von irgend einer Zahl gemessen werden: so misset diese

Zahl (7, 2. Zus.) auch die D als das größte gemeine Maaß der A, B; aber auch die C; folglich D und C. Demnach sind D, C, keine Primzahlen zu einander, und haben (7, 2. S.) ein größtes gemeines Maaß.

A 18	B 12	C 4.
D 6	E 2	F—

Da E die D, und D die A, B, misset: so misset E die A, B, aber auch die C, folglich A, B, C, und ist also ein gemeines Maaß dieser drey Zahlen.

Wäre nun E nicht ihr größtes gemeines Maaß: so sey es F > E. Da F die A, B, misset, so misset sie (7, 2. Zus.) deren größtes gemeines Maaß D, aber auch C, folglich (7, 2. Zus.) der D, C, größtes gemeines Maaß E, welches, weil F > E, unmöglich ist. Demnach werden A, B, C, von keiner größern Zahl als E gemessen, und ist also E das größte gemeine Maaß der A, B, C.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß eine Zahl, welche drey Zahlen misset, auch das größte gemeine Maaß derselben messe.

Auch ersiehet man, daß man für mehrere Zahlen das größte gemeine Maaß auf eben die Art finde.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

Jede kleinere Zahl, BC, ist entweder ein Theil oder ein Bruch jeder größern, A.

Erster Fall.

Sind die beyden Zahlen Primzahlen zu einander, und man zerlegt BC in ihre Einheiten: so ist (7, 2. E.) jede Einheit der BC ein Theil der A, folglich enthält BC, Theile der A, und ist also (7, 4. E.) ein Bruch der A.

A . . . .

B C

Zwey=

Zweyter Fall.

Sind aber die beyden Zahlen nicht Primzahlen zu einander: so wird die grössere von der kleinern entweder genau gemessen, oder nicht.

Wird A von BC genau gemessen: so ist (7, 3. E.) BC ein Theil der A.

A . . . .
B C

Wird hingegen A nicht von BC gemessen: so nehme man (7, 2. S.) beyder größtes gemeines Maaß D, und zerlege BC in ihre der D gleiche Theile, BE, EF, FC. Da D die A misset: so ist (7, 3. E.) D, folglich auch jede der BE, EF, FC, ein Theil der A. Demnach enthält BC Theile der A, und ist also (7, 4. E.) ein Bruch der A.

A . . . .
B . . E . . F . . C
D . .

Der 5. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey Zahlen, A, D, von zweyen andern, BC, EF, einerley Theil: so ist auch die Summe der ersten, A + D, von der Summe der andern, BC + EF, der nämliche Theil.

A ist von BC ein solcher Theil, als D von EF. So viele der A gleiche Theile also in BC, so viele der D gleiche Theile sind in EF. Zerlegt man daher BC in die der A gleichen Theile BG, GC; und EF in die der D gleichen Theile EH, HF: so sind jener so viele, als dieser. Nun ist BG = A, und EH = D, also BG + EH = A + D; aber aus denselben Gründen auch GC + HF = A + D. Folglich so viele der A gleiche Theile in BC sind, so viele der A + D gleiche Theile sind in BC + EF. So vielfach demnach BC von A ist, eben so vielfach ist BC + EF von A + D; folglich ist A + D derselbe Theil von BC + EF, als A von BC, oder D von EF.

A . . .
B . . . G . . . C
D . . . .
E . . . . H . . . . F

Der

Der 6. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey Zahlen, AB, DE, von zweyen andern, C, F, einerley Bruch: so ist auch die Summe der ersten, AB + DE, von der Summe der andern, C + F, der nämliche Bruch.

A . . . G . . . B

C . . . .

D . . . . H . . . . E

F . . . .

AB ist von C ein solcher Bruch, als DE von F. So viele Theile der C also in AB, so viele eben solcher Theile von F sind in DE. Zerlegt man daher AB in AG, GB, als Theile der C, und DE in DH, HE, als Theile der F: so sind dieser so viele, als jener. Nun ist AG von C ein solcher Theil, als DH von F, also (7, 5. S.) AG + DH ein solcher Theil von C + F, als AG von C; aber aus eben den Gründen GB + HE, ein solcher Theil von C + F, als GB von C. Folglich enthält AB + DE dieselben Theile, oder ist derselbe Bruch von C + F, als AB von C, oder DE von F.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Ist eine Zahl, AB, von einer andern, CD, ein solcher Theil, als das Weggenommene, AE, vom Weggenommenen, CF: so ist auch der Rest, EB, vom Reste, FD, ein solcher Theil, als das Ganze, AB, vom Ganzen, CD.

A . . . . E . . B

G . . . . C . . . . F . . . . D

Setze eine Zahl CG so, daß AE, EB, von CF, CG, einerley Theil sind: so ist (7, 5. S.) AB von FG ein solcher Theil, als AE von CF, oder als AB von CD; folglich AB von FG und CD einerley Theil; folglich FG = CD, folglich, wenn man CF wegnimmt, CG = FD. Demnach ist der Rest EB vom Reste FD ein solcher Theil, als AE von CF, oder als das Ganze AB vom Ganzen CD.

Der

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Ist eine Zahl, AB, von einer andern, CD, ein solcher Bruch, als das Weggenommene, AE, vom Weggenommenen, CF: so ist auch der Rest, EB, vom Reste, FD, ein solcher Bruch, als das Ganze, AB, vom Ganzen, CD.

A . . . . . . L . . . . . . E . . . . B

C . . . . F . . . . . . D

G . . . . . . M . . K . . . . . . N . . H

Setze eine Zahl $GH = AB$: so enthält GH von CD dieselben Theile, als AE von CF. Zerlegt man also GH in GK, KH, als Theile der CD, und AE in AL, LE, als Theile der CF: so sind dieser Theile so viele, als jener.

Da GK von CD ein solcher Theil ist, als AL von CF; aber $CD > CF$: so ist auch $GK > AL$. Nimmt man nun $GM = AL$: so ist GK von CD ein solcher Theil, als GM von CF; folglich (7, 7. S.) der Rest MK vom Reste FD ein solcher Theil, als die ganze GK von der ganzen CD.

Da ferner KH von CD ein solcher Theil ist, als LE von CF; aber $CD > CF$: so ist auch $KH > LE$. Nimmt man man $KN = LE$: so ist KH ein solcher Theil von CD, als KN von CF; folglich (7, 7. S.) NH von FD ein solcher Theil, als KH von CD.

Demnach enthält $MK + NH$ von FD dieselben Theile, als GH von CD. Nun ist $MK + NH = EB$, und $GH = AB$. Folglich enthält der Rest EB eben dieselben Theile, oder ist derselbe Bruch vom Reste FD, als das Ganze AB vom Ganzen CD.

Der 9. Satz. Lehrsatz.

Ist eine Zahl, A, von einer andern, BC, derselbe Theil, als eine dritte, D, von einer vierten, EF: so ist auch verwechselt die erste, A, von der dritten, D, entweder derselbe

selbe Theil oder derselbe Bruch, als die zweyte, BC, von der vierten, EF.

A ist ein solcher Theil von BC, als D von EF, und es sey $A < D$. So viele der A gleiche Theile also in BC, so viele der D gleichen Theile sind in EF. Zerlegt man daher BC in die der A gleichen Theile, BG, GC, und EF in die der D gleichen Theile, EH, HF: so sind dieser Theile so viele als jener. Da also $BG = GC$, und $EH = HF$: so ist BG von EH entweder derselbe Theil, oder derselbe Bruch, als GC von HF. Folglich ist (7, 5. 6. S.) BC von EF entweder derselbe Theil, oder derselbe Bruch, als BG von EH, oder als A von D.

A . . . .
B . . . . G C
D . . . . .
E . . . . . H . . . . . F

Der 10. Satz. Lehrsatz.

Ist eine Zahl, AB, von einer andern, C, derselbe Bruch, als eine dritte, DE, von einer vierten, F: so ist auch **verwechselt** die erste, AB, von der dritten, DE, entweder derselbe Theil oder derselbe Bruch, als die zweyte, C, von der vierten, F.

AB enthält von C dieselben Theile, als DE von F, und es sey $AB < DE$. Zerlegt man also AB in AG, GB, als Theile der C, und DE in DH, HE, als Theile der F: so sind dieser so viele, als jener. Da also AG von C derselbe Theil, als DH von F: so ist (7, 9. S.) **verwechselt** AG von DH entweder derselbe Theil, oder derselbe Bruch, als C von F. Nun ist aus gleichen Gründen GB von HE entweder derselbe Theil, oder derselbe Bruch, als C von F. Folglich ist (7, 5. 6. S.) AB von DE entweder derselbe Theil,

A . . G . . B
C . . . . . .
D . . . . . H . . . . . E
F . . . .

oder

oder derselbe Bruch, als AG von DH, oder als GB von HE, oder als C von F.

Der 11. Satz. Lehrsatz.

Verhält sich das Ganze, AB, zum Ganzen, CD, wie das Weggenommene, AE, zum Weggenommenen, CF: so verhält sich auch der Rest, EB, zum Reste, FD, wie das Ganze, AB, zum Ganzen, CD.

Da AB : CD = AE : CF; so ist (7, 20. E.) AB von CD derselbe Theil, oder derselbe Bruch, als AE von CF; folglich (7, 7. 8. S.) auch	A . . . . E . . B C . . . . . . F . . . D

EB von FD derselbe Theil, oder derselbe Bruch, als AB von CD. Folglich ist (7, 20. E.) AB : CD = EB : FD.

Der 12. Satz. Lehrsatz.

Sind mehrere Zahlen, A, B, C, D, proportionirt: so verhalten sich alle Vorderglieder, A + C, zu allen Hintergliedern, B + D, wie ein Vorderglied, A, zu einem Hintergliede, B.

Da A : B = C : D; so ist (7, 20. E.) A von B ein solcher Theil oder Bruch, als C von D; folglich (7, 5. 6. S.) auch A + C von B + D derselbe Theil oder Bruch, als A	A 2 C 4 B 3 D 6

von B, folglich (7, 20. E.) A + C : B + D = A : B.

Der 13. Satz. Lehrsatz.

Sind vier Zahlen, A, B, C, D, proportionirt: so sind sie auch verwechselt proportionirt.

Da A : B = C : D; so ist (7, 20. E.) A von B ein solcher Theil oder Bruch, als C von D, folglich auch (7, 9. 10. S.) verwechselt A von C ein solcher Theil oder	A 2 C 6 B 3 D 9

Bruch, als B von D, folglich (7, 20. E.) A : C = B : D.

Der

Der 14. Satz. Lehrsatz.

Sind mehrere Zahlen, A, B, C, mit eben so vielen andern, D, E, F, **geordnet** proportionirt: so sind sie **aus dem Gleichen** proportionirt.

Da (5, 19. E.) A : B = D : E, und B:C = E:F; so ist (7, 13. S.) **verwechselt** A:D = B:E, und B:E = C:F, folglich (5, 11. S.) A:D = C:F, folglich **verwechselt** A:C = D:F.

A	9	D	6
B	6	E	4
C	3	F	2

Der 15. Satz. Lehrsatz.

Misset die Einheit, A, eine Zahl, BC, und die Zahl, D, eine andere, EF, nach einerley Zahl: so misset verwechselt die Einheit, A, die dritte Zahl, D, und die zweyte, BC, die vierte, EF, auch nach einerley Zahl.

Da A in BC so vielmal als D in EF, und man zerlegt BC in ihre Einheiten BG, GH, HC, und EF in ihre der D gleichen Theile EK, KL, LF: so sind dieser so viele, als jener, auch ist BG : EK = GH : KL = HC : LF, folglich (7, 12. S.) BC : EF = BG : EK. Nun ist BG = A, und EK = D. Demnach ist BC : EF = A : D. Folglich misset (7, 20. E.) A die D und BC die EF nach einerley Zahl.

A .

B . G . H . C

D . .

E . . K . . L . . F

Der 16. Satz. Lehrsatz.

Wenn von zweyen Zahlen, A, B, jede die andere vervielfältigt: so sind die Producte, C, D, gleich.

Da

Da C = A . B: so ist (7, 15. E.) die Einheit E von A ein solcher Theil, als B von C, folglich (7, 15. S.) E von B ein solcher Theil, als A von C. Nun ist, weil D = B . A, aus gleichen Gründen E von B ein solcher Theil, als A von D. Folglich ist A von C und D einerley Theil, folglich C = D.

E 1	
A 2	B 3
C 6	D 6

Der 17. Satz. Lehrsatz.

Wenn eine Zahl, A, zwey andere Zahlen, B, C, vervielfältigt: so verhalten sich die Producte, D, E, wie die vervielfältigten Zahlen, B, C.

Da D = A . B: so ist die Einheit F von A ein solcher Theil, als B von D; folglich (7, 20. E.) F : A = B : D. Nun ist aus gleichen Gründen F : A = C : E. Folglich ist (5, 11. S.) B : D = C : E; folglich (7, 13. S.) verwechselt B : C = D : E.

F 1	
A 2	
B 3	C 4
D 6	E 8

Der 18. Satz. Lehrsatz.

Wenn zwey Zahlen, A, B, eine dritte, C, vervielfältigen: so verhalten sich die Producte, D, E, wie die vervielfältigenden Zahlen, A, B.

Da D = A . C: so ist (7, 16. S.) auch D = C . A. Nun ist eben so E = C . B. Folglich ist (7, 17. S.) A : B = D : E.

A 3	B 4
C 2	
D 6	E 8

Der 19. Satz. Lehrsatz.

Sind vier Zahlen, A, B, C, D, proportionirt: so ist das Product aus den äußern, A . D, dem Producte aus den mittlern, B . C, gleich. Und ist das Product aus den äußern, A . D, dem Producte aus den mittlern, B . C, gleich: so sind die vier Zahlen, A, B, C, D, proportionirt.

Erster Theil.

Es sey A : B = C : D, und A.D = E; B.C = F: so ist, wenn man A . C = G setzt, (7, 17. S.) G : E = C : D	A 6 B 4 C 3 D 2 E 12 F 12 G 18

und (7, 18. S.) A : B = G : F; folglich (5, 11. S.) G : E = G : F, folglich (5, 9. S.) E = F.

Zweyter Theil.

Es sey A : D = B . C, oder, nach voriger Construction, E = F: so ist wiederum C : D = G : E, und A : B = G : F, also auch A : B = G : E, folglich (5, 11. S.) A : B = C : D.

Der 20. Satz. Lehrsatz.

Sind drey Zahlen, A, B, C, proportionirt: so ist das Product aus den äußern, A . C, der Quadratzahl der mittlern, B^2, gleich. Und ist das Product aus den äußern, A . C, der Quadratzahl der mittlern, B^2, gleich: so sind die drey Zahlen, A, B, C, proportionirt.

Erster Theil.

Es sey A : B = B : C, und man setze B = D: so ist auch A : B = D : C, folglich (7, 19. S.) A . C = B . D, aber B . D = B^2, folglich A . C = B^2.	A 9 B 6 C 4 D 6

Zweyter Theil.

Es sey A . C = B^2, oder, nach voriger Construction, A . C = B . D: so ist wiederum A : B = D : C, aber B = D, folglich A : B = B : C.

Der 21. Satz. Lehrsatz.

Die kleinsten Zahlen, CD, EF, in einer Verhältniß messen andere Zahlen, A, B, welche dieselbe Verhältniß haben,

haben, nach einerley Zahl, die größere, CD, die größere, A, und die kleinere, EF, die kleinere, B.

Die Zahl CD ist (7, 4. S.) entweder ein Theil oder ein Bruch von der Zahl A. Gesetzt es wäre das letztere: so wäre (7, 20. E.) CD von A ein solcher Bruch, als EF von B. Zerlegte man also CD in CG, GD, als Theile der A, und EF in EH, HF, als Theile der B:	A . . . . B . . . . . . C . . . G . . D E . . H . F

so wären dieser so viele, als jener, und es wäre CG = GD, und EH = HF, also CG : EH = GD : HF. Folglich wäre (7, 12. S.) CD : EF = CG : EH. Demnach wären in derselben Verhältniß noch kleinere Zahlen CG, EH, als CD, EF, welche die kleinsten sind. Da nun dieses unmöglich ist: so kann CD kein Bruch von A seyn, und ist also (7, 4. S.) ein Theil von A. Derselbe Theil ist also (7, 20. E.) auch EF von B. Folglich misset CD die A, und EF die B, nach einerley Zahl.

Der 22. Satz. Lehrsatz.

Sind mehrere Zahlen, A, B, C, mit eben so vielen andern D, E, F, zerstreut proportionirt: so sind sie aus dem Gleichen proportionirt.

Da (5, 20. E.) A:B = E:F, und B:C = D:E; so ist (7, 19. S.) A . F = B . E = C . D, folglich (7, 19. S.) A : C = D : F.	A 6 B 4 C 3	D 12 E 9 F 6

Der 23. Satz. Lehrsatz.

Primzahlen zu einander, A, B, sind die kleinsten unter allen Zahlen, welche mit ihnen einerley Verhältniß haben.

Wären A, B, nicht die kleinsten in dieser Verhältniß, sondern, wo möglich, kleinere C, D, daß also C : D = A : B; so misset (7, 21. S.) C die A, und D die B, nach einerley Zahl E. Folglich wird auch E die A nach der Zahl C, und E die B nach der Zahl D messen. Demnach werden A, B, zugleich von Einer Zahl E gemessen, welches, da sie Primzahlen zu einander sind, nicht möglich ist. Folglich giebt es keine Zahlen, die kleiner als A, B, wären, und es müssen A, B, die kleinsten in ihrer Verhältniß seyn.

A 5	B 4
C —	D —
E —	

Der 24. Satz. Lehrsatz.

Die kleinsten Zahlen, A, B, unter allen, welche mit ihnen einerley Verhältniß haben, sind Primzahlen zu einander.

Wären A, B, nicht Primzahlen zu einander: so messe irgend eine Zahl, C, die A nach D, und die B nach E. Folglich wäre C . D = A, und C . E = B, folglich (7, 17. S.) D:E = A:B. Demnach wären in der Verhältniß A:B noch kleinere Zahlen D, E, welches dem Angenommenen widerspricht. Folglich können A, B, von keiner Zahl gemessen werden, und sind also Primzahlen zu einander.

A 6	B 5
C —	
D —	E —

Der 25. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey Zahlen, A, B, Primzahlen zu einander: so ist die Zahl, C, welche eine von beyden, A, misset, eine Primzahl zu der andern, B.

Wären B, C, nicht Primzahlen zu einander: so würden sie von einer Zahl D gemessen. Da also D die C, und C die A misset: so misset auch D die A, aber auch die B, folglich A und B, welches (7, 12. E.)

A 6	B 4
C 3	
D —	

unmög-

unmöglich ist. Demnach haben B, C, keine Zahl zum gemeinen Maaße, und sind also Primzahlen zu einander.

Der 26. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey Zahlen, A, B, Primzahlen zu einer Zahl, C: so ist auch ihr Product, D, eine Primzahl zu eben derselben, C.

Wären C, D, nicht Primzahlen zu einander, so würden sie von einer Zahl E gemessen, daß also A, E, (7, 25. S.) Primzahlen zu einander wären, weil es A, C, sind. Nun messe E die D nach der Zahl F, daß also E.F = D, folglich vermöge des Angenommenen E.F = A.B, folglich (7, 19. S.) E : A = B : F. Nun sind E, A, Primzahlen zu einander, also (7, 23. S.) die kleinsten in solcher Verhältniß. Folglich (7, 21. S.) misset E die B, aber auch die C, folglich beyde B, C, welches, weil B, C, Primzahlen zu einander sind, unmöglich ist. Demnach haben C, D, kein gemeines Maaß, und sind also Primzahlen zu einander.

A 2 B 3
C 5
D 6
E — F —

Der 27. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey Zahlen, A, B, Primzahlen zu einander: so ist auch das Quadrat, C, der einen, A, eine Primzahl zu der andern, B.

Setzt man A = D: so sind auch D, B, Primzahlen zu einander, folglich A, D, Primzahlen zu B. Folglich ist (7, 26. S.) A.D = C, eine Primzahl zu B.

A 2 B 3
C 4
D 2

Der 28. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey Zahlen, A, B, zu jeder von zweyen andern, C, D, Primzahlen: so sind auch die Producte, E, F, aus den erstern, und aus den letztern, Primzahlen zu einander.

Da A, B, Primzahlen zu C sind: so ist (7, 26. S.) ihr Product E eine Primzahl zu C. Aus eben den Gründen ist auch E eine Primzahl zu D. Demnach sind C, D, zu E Primzahlen, folglich ist (7, 26. S.) auch ihr Product F eine Primzahl zu E.

A 3	B 5
E 15	
C 2	D 4
F 8	

Der 29. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey Zahlen, A, B, Primzahlen zu einander: so sind auch ihre Quadrate, C, D, desgleichen ihre Würfel, E, F, und so alle folgende Producte, welche entstehen, wenn man die zuletzt erhaltenen immer wieder mit den ersten Zahlen, A, B, vervielfältigt, Primzahlen zu einander.

Da A, B, Primzahlen zu einander sind, und $A^2 = C$: so sind (7, 27. S.) C, B, Primzahlen zu einander, folglich, weil $B^2 = D$, (7, 27. S.) nicht nur A, D, sondern auch C, D, Primzahlen zu einander.

A 2	B 3
C 4	D 9
E 8	F 27

Demnach sind A, C, zu jeder der B, D, Primzahlen, folglich sind (7, 28. S.) $A.C = E$, und $B.D = F$, Primzahlen zu einander.

Der 30. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey Zahlen, AB, BC, Primzahlen zu einander: so ist auch deren Summe zu jeder von beyden eine Primzahl. Und ist die Summe zweyer Zahlen, AB, BC, zu einer von beyden eine Primzahl: so sind diese beyden Zahlen, AB, BC, Primzahlen zu einander.

Erster Theil.

Es seyen AB, BC, Primzahlen zu einander. Wären solches nun nicht auch AC, AB: so würden sie von einer Zahl D gemessen. Diese würde also auch den Rest BC, folglich zugleich AB und BC messen,

A . . . . . B C

D —

sen, welches, weil AB, BC, Primzahlen zu einander sind, unmöglich ist. Demnach haben AC, AB, kein gemeines Maaß, und sind also, aus gleichen Gründen aber auch AC, BC, Primzahlen zu einander.

Zweyter Theil.

Es seyen AC, AB, Primzahlen zu einander. Wären solches nun nicht auch AB, BC: so würden sie von einer Zahl D gemessen. Diese würde also auch die Summe AC, folglich zugleich AC, AB, messen, welches, weil AC, AB, Primzahlen zu einander sind, unmöglich ist. Demnach haben AB, BC, kein gemeines Maaß, und sind also Primzahlen zu einander.

Der 31. Satz. Lehrsatz.

Jede Primzahl, A, ist eine Primzahl zu jeder Zahl, B, welche nicht von ihr gemessen wird.

A 3 B 5
C —

Wären A, B, nicht Primzahlen zu einander: so würden sie von einer Zahl C gemessen, welche also nicht die Einheit ist. Demnach würde B von C, aber nicht von A gemessen, folglich sind C, A, verschiedene Zahlen. Nun mißt C die A. Folglich würde A von einer von ihr verschiedenen Zahl C gemessen, welches, weil A eine Primzahl, unmöglich ist. Demnach haben A, B, kein gemeines Maaß, und sind also Primzahlen zu einander.

Der 32. Satz. Lehrsatz.

Wird das Product, C, aus zweyen Zahlen, A, B, von einer Primzahl, D, gemessen: so wird diese auch eine der beyden Zahlen, A, B, messen.

A 2 B 6
C 12
D 3 E 4

Misset D nicht die A: so sind (7, 31. S.) D, A, Primzahlen zu einander, also (7, 23. S.) die kleinsten Zahlen in ihrer Verhältniß. Nun werde C von D nach der Zahl E gemessen, daß also D . E = C, aber auch A.B=C, und daher (7, 19. S.) D:A=B:E. Folglich wird (7, 21. S.) D die B messen.

Misset D nicht die B: so beweiset man auf eben die Art, daß D die A messe. Demnach misset D eine der beyden Zahlen A, B.

A 2 B 6
C 12
D 3 E 4

Der 33. Satz. Lehrsatz.

Jede zusammengesetzte Zahl, A, wird von irgend einer Primzahl gemessen.

Da A eine zusammengesetzte Zahl ist: so wird sie von einer Zahl B gemessen. Ist nun diese B eine Primzahl: so ist der Satz klar. Ist aber B eine zusammengesetzte Zahl: so wird sie von einer Zahl C gemessen, welche, weil B die A misset, auch die A messen wird. Ist nun C eine Primzahl, so ist der Satz klar. Ist aber C wiederum eine zusammengesetzte Zahl: so lassen sich vorige Schlüsse fortsetzen, bis man auf eine Primzahl kommt, welche die nächste Zahl vor ihr, folglich auch die A misset. Denn käme man nie auf eine Primzahl: so würde A von unendlich vielen immer kleinern und kleinern Zahlen gemessen, welches aber (7, 2. E.) bey Zahlen nicht möglich ist. Folglich muß man irgend einmal auf eine Primzahl kommen, welche alle vorhergehende Zahlen, also auch A, messen wird.

A 8
B 4
C 2

Ein anderer Beweis.

Unter den Zahlen, welche die zusammengesetzte Zahl A messen, sey B die kleinste. Wäre nun B eine zusammengesetzte Zahl: so würde sie von einer Zahl C<B gemessen, welche folglich auch A misset, gegen das Angenommene, daß B schon das kleinste Maaß ist. Demnach kann B keine zusammengesetzte Zahl seyn, und ist also eine Primzahl.

A 9
B 3
C —

Der

Der 34. Satz. Lehrsatz.

Jede Zahl, A, ist entweder selbst eine Primzahl, oder wird von irgend einer Primzahl gemessen.

Denn A ist entweder eine Primzahl, oder eine zusammengesetzte Zahl, und wird alsdann (7, 33. S.) von irgend einer Primzahl gemessen.

A —

Der 35. Satz. Aufgabe.

Die kleinsten Zahlen zu finden, welche mit mehrern gegebenen Zahlen, A, B, C, einerley Verhältniß haben.

Erster Fall.

Sind A, B, C, Primzahlen zu einander: so sind sie (7, 23. S.) die kleinsten in solcher Verhältniß.

A 5 B 4 C 3

Zweyter Fall.

Sind A, B, C, nicht Primzahlen zu einander: so nehme man (7, 3. S.) ihr größtes gemeines Maaß D. Misset nun D die A, B, C, nach den Zahlen E, F, G: so werden A, B, C, von E, F, G, nach der Zahl D gemessen. Folglich sind (7, 18. S.) E, F, G, in derselben Verhältniß, wie A, B, C, aber auch die kleinsten.

A 6	B 4	C 10
	D 2	
E 3	F 4	G 5
H —	K —	L —
	M —	

Denn wären andere kleinere, H, K, L, welche also die A, B, C, nach einerley Zahl M messen müßten; so würde M auch die A, B, C, messen, und M . H = A seyn. Nun ist E . D = A. Folglich wäre M . H = E . D; folglich (7, 19. S.) E : H = M : D. Nun ist E > H, und daher auch M > D. Demnach hätten A, B, C, ein gemeines Maaß M größer, als das größte Maaß D, welches unmöglich ist. Folglich giebt es in der Verhältniß, A, B, C, keine kleinere Zahlen, als E, F, G, welche also die kleinsten sind.

Der 36. Satz. Aufgabe.

Die kleinste Zahl zu finden, welche sich von zweyen gegebenen Zahlen, A, B, messen läßt.

Erster Fall.

A 3 B 4
C 12
D —
E — F —

Sind A, B, Primzahlen zu einander, und man setzt $A.B = C$: so ist C die gesuchte Zahl.

Denn da $A.B = C$, so ist (7, 16. S.) auch $B.A = C$, und C wird von A und B gemessen. Wäre nun C nicht die kleinste von A, B, meßbare Zahl: so sey es eine noch kleinere D, und D werde von A nach der Zahl E, von B nach der Zahl F gemessen, daß also $A.E = D$, und $B.F = D$, folglich $A.E = B.F$, folglich (7, 19. S.) $A:B = F:E$ ist. Nun sind A, B, Primzahlen zu einander, also (7, 23. S.) die kleinsten in solcher Verhältniß, folglich wird (7, 21. S.) E von B gemessen. Nun war $A.B = C$, $A.E = D$, also (7, 18. S.) $B:E = C:D$. Aber E wird von B, folglich auch (7, 20. E.) D von C gemessen, die kleinere von der grössern, welches unmöglich ist. Demnach giebt es, wenn A, B, Primzahlen zu einander sind, keine von A, B, meßbare Zahl, welche kleiner als C ist. Folglich ist C die kleinste von ihnen meßbare Zahl.

Zweyter Fall.

A 4 B 6
F 2 E 3
C 12
D —
G — H —

Sind aber A, B, nicht Primzahlen zu einander, und man sucht (7, 35. S.) die kleinsten Zahlen F, E, in der Verhältniß von A zu B: so giebt $A.E$, oder $B.F$ die gesuchte Zahl C.

Denn da $A:B = F:E$, so ist (7, 19. S.) $A.E = B.F = C$, folglich läßt sich C von A und B messen. Wäre nun C nicht die kleinste von A, B, meßbare Zahl: so sey es eine noch kleinere D, und D werde von A nach der Zahl G, von

von B nach der Zahl H gemessen, daß also $A.G = D$, und $B.H = D$, folglich $A.G = B.H$, folglich (7, 19. S.) $A:B = H:G$ ist. Nun war $A:B = F:E$. Folglich ist (5, 11. S.) $F:E = H:G$. Nun waren F, E, die kleinsten Zahlen in solcher Verhältniß. Folglich wird (7, 21. S.) G von E gemessen. Nun war $A.E = C$, $A.G = D$, also (7, 17. S.) $E:G = C:D$. Aber G wird von E, folglich (7, 20. S.) D von C gemessen, die kleinere von der größern, welches unmöglich ist. Demnach giebt es außer C keine kleinere von A, B, meßbare Zahl, folglich ist C die kleinste.

Der 37. Satz. Lehrsatz.

Wird von zweyen Zahlen, A, B, eine Zahl, CD, gemessen: so wird sie auch von der mit beyden meßbaren kleinsten Zahl, E, gemessen.

A . . B . . .

C . . . . . . F — — — D

E . . . . . .

Würde CD von E nicht gemessen: so bliebe, wenn E die CF misset, der Rest $FD < E$. Da nun A, B, die E messen, und E die CF misset: so messen A, B, auch die CF; aber auch die ganze CD; folglich den Rest $FD < E$, welches, weil E schon die kleinste mit A, B, meßbare Zahl ist, nicht seyn kann. Folglich muß CD von E gemessen werden.

Der 38. Satz. Aufgabe.

Die kleinste Zahl zu finden, welche sich von dreyen gegebenen Zahlen, A, B, C, messen läßt.

Suchet man (7, 36. S.) die kleinste mit A, B, meßbare Zahl D: so wird solche entweder von C gemessen, oder nicht.

Erster Fall.

Wird D von C gemessen: so ist D die mit allen dreyen A, B, C, meßbare Zahl. Wäre sie nun nicht auch die kleinste: so sey es E < D. Da also E von A, B, gemessen wird: so wird sie (7, 37. S.) auch von D gemessen, die kleinere von der größern, welches unmöglich ist. Folglich ist keine kleinere als D, folglich D die kleinste mit A, B, C, meßbare Zahl.

A 3 B 4 C 6
D 12
E —

Zweyter Fall.

Wird aber D nicht von C gemessen: so suche man (7, 36. S.) die kleinste mit C, D, meßbare Zahl E, welche die gesuchte ist.

A 2 B 3 C 4
D 6
E 12 F —

Denn da A, B, die D messen, und D die E misset: so messen auch A, B, die E. Nun misset auch C die E. Folglich ist E eine mit A, B, C, meßbare Zahl.

Wäre nun E nicht auch die kleinste: so sey es F < E. Da also F von A, B, gemessen würde: so müßte (7, 37. S.) F auch von D gemessen werden, aber auch von C, also von D, C, folglich (7, 37. S.) von E, die kleinere von der größern, welches unmöglich ist. Folglich ist keine kleinere als E, folglich E die kleinste mit A, B, C, meßbare Zahl.

Der 39. Satz. Lehrsatz.

Eine Zahl, A, hat einen der Zahl, B, von welcher sie gemessen wird, gleichnamigen Theil, C.

Es werde A von B nach der Zahl C gemessen. Nun wird C von der Einheit D nach sich selbst gemessen. Folglich misset D die C, und B die A, oder (7, 15. S.) verwechselt D die B, und C die A, nach einerley Zahl. Demnach ist C von A derselbe Theil, als D von B. Nun ist die Einheit D ein der B gleichnamiger Theil

A 12
B 3 C 4
D 1

Theil von B. Folglich ist auch C ein der B gleichnamiger Theil von A. Demnach hat A einen der B gleichnamigen Theil C.

Der 40. Satz. Lehrsatz.

Jede Zahl, A, wird von der einem ihrer Theile, B, gleichnamigen Zahl, C, gemessen.

Da B ein der C gleichnamiger Theil von A, auch die Einheit D ein der C gleichnamiger Theil von C ist: so ist B von A ein solcher Theil, als D von C. Folglich wird C von D, und A von B, oder (7, 15. S.) verwechselt, B von D, und A von C, nach einerley Zahl, demnach A von C gemessen.

A	12
B	2
C	6
D	1

Der 41. Satz. Aufgabe.

Die kleinste unter allen Zahlen, welche die gegebenen Theile, A, B, C, haben, zu finden.

A	$\frac{1}{2}$	D	2
B	$\frac{1}{3}$	E	3
C	$\frac{1}{4}$	F	4
G	12	H	—

Die Zahlen D, E, F, seyen den gegebenen Theilen A, B, C, gleichnamig. Sucht man nun (7, 38. S.) die kleinste mit D, E, F, meßbare Zahl G: so hat (7, 39. S.) G den Zahlen D, E, F, gleichnamige, folglich die gegebenen Theile A, B, C. Wäre nun G nicht auch die kleinste Zahl, die solche Theile hätte: so sey es $H < G$. Diese würde also (7, 40. S.) von den ihren Theilen gleichnamigen Zahlen, also von E, D, F, gemessen, welches, weil $H < G$, nicht möglich ist. Demnach ist keine kleinere Zahl als G, folglich G die kleinste Zahl, welche die gegebenen Theile, A, B, C, hat.

Euklid's Elemente

Achtes Buch.

Der 1. Satz. Lehrsatz.

Mehrere stetig proportionirte Zahlen, A, B, C, D, von denen die äußersten, A, D, Primzahlen zu einander sind, sind die kleinsten in ihrer Verhältniß.

A 8	B 12	C 18	D 27
E —	F —	G —	H —

Wäre dieses nicht: so seyen kleinere E, F, G, H, in derselben Verhältniß, also (7, 14. S.) aus dem Gleichen A:D=E:H. Nun sind A, D, Primzahlen zu einander, also die kleinsten in ihrer Verhältniß. Folglich misset (7, 21. S.) A die E, die größere die kleinere, welches unmöglich ist. Demnach sind in solcher Verhältniß keine an einanderhangende Zahlen kleiner, als A, B, C, D, welche also die kleinsten seyn müssen.

Der 2. Satz. Aufgabe.

Mehrere stetig proportionirte kleinste Zahlen in einer gegebenen Verhältniß zu finden.

	A 2	B 3	
C 4	D 6	E 9	
F 8	G 12	H 18	K 27

Die gegebene Verhältniß sey in den kleinsten Zahlen ausgedruckt A : B. Man vervielfältige A, B, mit A; B mit B, und erhalte nach der Ordnung die Producte C, D, E; ferner vervielfältige man

man C, D, E, mit A; E mit B, und erhalte nach der Ordnung die Producte F, G, H, K: so sind C, D, E, drey, und F, G, H, K, vier stetig proportionirte kleinste Zahlen in der gegebenen Verhältniß A:B; und man findet, wenn man eben so fortfährt, deren immer mehrere, so viel man will.

Denn da A.A = C, A.B = D, B.B = E: so ist (7, 17. S.) A:B = C:D, und (7, 18. S.) A:B = D:E, folglich (5, 11. S.) C:D = D:E. Demnach sind C, D, E, drey stetig proportionirte Zahlen in der Verhältniß A:B.

Da ferner A.C = F, A.D = G, A.E = H, B.E = K: so ist (7, 17. S.) C:D = F:G, und (7, 18. S.) D:E = G:H, A:B = H:K. Nun war C:D = D:E = A:B. Folglich ist F:G = G:H = H:K. Demnach sind F, G, H, K, vier stetig proportionirte Zahlen in der Verhältniß A:B.

Daß sie nun auch die kleinsten sind, wird so bewiesen: Da A, B, die kleinsten Zahlen in ihrer Verhältniß sind: so sind sie (7, 20. S.) Primzahlen zu einander. Nun ist A.A = C, B.B = E, A.C = F, B.E = K. Folglich sind (7, 29. S.) auch C und E, F und K, Primzahlen zu einander. Folglich sind (8, 1. S.) C, D, E, sowohl, als auch F, G, H, K, stetig proportionirte kleinste Zahlen in der Verhältniß A:B.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß die äussersten von drey stetig proportionirten kleinsten Zahlen Quadrate, von vieren aber Würfel sind.

Der 3. Satz. Lehrsatz.

Von mehrern stetig proportionirten kleinsten Zahlen, A, B, C, D, sind die äussersten, A, D, Primzahlen zu einander.

Man

18 D 27

1.

9

Euklid's E…

Achte…

Der 1. … (7, 29. S.)

…ander. Nun

Mehrere stetig p… …N, O, stetig pro-
denen die äußerst… derselben Verhältniß,
sind die kleinster… nach der Ordnung gleich;

Wäre dieses … auch A, D, Primzahlen zu
kleinere E, F, …
selben Verh…

… Satz. Aufgabe.

14. S.) q…
A:D= … hältnisse, A:B, C:D, E:F, sind in
also di… Zahlen gegeben; man soll Zahlen finden,
21. … einanderhangend die kleinsten in den gegebe-
lich … hältnissen sind.

de… ey (7, 36. S.) … die kleinste mit B, C, meßbare Zahl, und es messe A die H nach eben der Zahl,

A 2	B 5	C 3	D 4	E 5	F 6
H 6	G 15		K 20	L 24	
N —	O —		P —	Q —	

als B die G; und D die K nach eben der Zahl, als C die G: so misset entweder E die K, oder nicht.

Erster Fall.

Es messe E die K, und nach eben der Zahl auch F die L.

Da A, B, die H, G, nach einerley Zahl messen: so ist (7, 13. S.) A:B=H:G. Nun ist aus gleichen Grün-

den

C:D = G:K,
L, an einander
...r auch die
...re A:...
Verh...
A...

A 8 K 12 L 18 B 27
E 4 H 6 G 9
D 2 F 3
C 1

Aus gleichen

...ern
...a Verhä...
, als H, G, K, L,

F = E:H.
...olglich ist

...:K;
...war

Zweyter Fall.

A 4	B 5	C 2	D 3	E 4	F 3
H 8	G 10	K 15			
N 32	O 40	M 60	P 45		
Q —	R —	S —	T —		

...enn E die K ...ht misset: so sey (7, 36. S.) M die kleinste mit E, K, meßbare Zahl, und es messe H die N, G die O, nach eben der Zahl, als K die M; und F die P nach eben der Zahl, als E die M. Folglich ist (7, 13. S.) H : G = N : O, und, weil A : B = H : G, auch A : B = N : O. Nun ist aus denselben Gründen C : D = O : M, und E : F = M : P, folglich sind N, O, M, P, an einanderhangend in den gegebenen Verhältnissen. Aber auch die kleinsten. Denn wären kleinere, Q, R, S, T: so wäre A : B = Q : R. Nun sind A, B, die kleinsten in ihrer Verhältniß. Folglich wird (7, 21. S.) R von B gemessen. Aus gleichen Gründen wird R auch von C gemessen. Nun war G die kleinste mit B, C, meßbare Zahl. Folglich wird (7, 32. S.) R von G gemessen. Nun ist G : R = K : S. Folglich wird S von K gemessen, aber auch von E. Nun war M die kleinste mit E, K, meßbare Zahl. Folglich wird (7, 37. S.) S von M gemessen, die kleinere von der größern, welches unmög-

A 8	B 12	C 18	D 27
	E 2	F 3	
G 4	H 6	K 9	
L 8	M 12	N 18	O 27

Man nehme in der Verhältniß A : B zwey kleinste Zahlen E, F; alsdann (8, 2. S.) drey stetig proportionirte kleinste Zahlen G, H, K, und so fort immer Eine mehr, bis man so viele, L, M, N, O, erhält, als A, B, C, D, sind.

Da E, F, Primzahlen zu einander sind, aber E.E = G, F.F = K, E.G = L, F.K = O: so sind (7, 29. S.) G und K, auch L und O Primzahlen zu einander. Nun sind A, B, C, D, und eben so viele L, M, N, O, stetig proportionirte kleinste Zahlen in einer und derselben Verhältniß, also erstere den letztern, jede für sich, nach der Ordnung gleich, A = L, D = O. Folglich sind auch A, D, Primzahlen zu einander.

Der 4. Satz. Aufgabe.

Mehrere Verhältnisse, A:B, C:D, E:F, sind in den kleinsten Zahlen gegeben; man soll Zahlen finden, welche an einanderhangend die kleinsten in den gegebenen Verhältnissen sind.

A 2	B 5	C 3	D 4	E 5	F 6
H 6	G 15		K 20	L 24	
N —	O —		P —	Q —	

Es sey (7, 36. S.) G die kleinste mit B, C, meßbare Zahl, und es messe A die H nach eben der Zahl, als B die G; und D die K nach eben der Zahl, als C die G: so misset entweder E die K, oder nicht.

Erster Fall.

Es messe E die K, und nach eben der Zahl auch F die L.

Da A, B, die H, G, nach einerley Zahl messen: so ist (7, 13. S.) A : B = H : G. Nun ist aus gleichen Gründen C:D=G:K, und E:F=K:L. Folglich sind H, G, K, L, an einanderhangend in den gegebenen Verhältnissen. Aber auch die kleinsten. Denn wären kleinere N, O, P, Q: so wäre A:B=N:O. Nun sind A, B, die kleinsten in solcher Verhältniß. Folglich wird (7, 21. S.) O von B gemessen. Aus eben den Gründen wird O auch von C gemessen. Nun war G die kleinste mit B, C, meßbare Zahl. Folglich wird (7, 37. S.) O von G gemessen, die kleinere von der größern, welches unmöglich ist. Demnach sind in den gegebenen Verhältnissen keine an einanderhangende Zahlen kleiner, als H, G, K, L, welche also die kleinsten seyn müssen.

Zweyter Fall.

A 4	B 5	C 2	D 3	E 4	F 3
H 8		G 10	K 15		
N 32		O 40	M 60	P 45	
Q —		R —	S —	T —	

Wenn E die K nicht misset: so sey (7, 36. S.) M die kleinste mit E, K, meßbare Zahl, und es messe H die N, G die O, nach eben der Zahl, als K die M; und F die P nach eben der Zahl, als E die M. Folglich ist (7, 13. S.) H : G = N : O, und, weil A : B = H : G, auch A : B = N : O. Nun ist aus denselben Gründen C:D = O:M, und E:F = M : P, folglich sind N, O, M, P, an einanderhangend in den gegebenen Verhältnissen. Aber auch die kleinsten. Denn wären kleinere, Q, R, S, T: so wäre A:B=Q:R. Nun sind A, B, die kleinsten in ihrer Verhältniß. Folglich wird (7, 21. S.) R von B gemessen. Aus gleichen Gründen wird R auch von C gemessen. Nun war G die kleinste mit B, C, meßbare Zahl. Folglich wird (7, 32. S.) R von G gemessen. Nun ist G:R=K:S. Folglich wird S von K gemessen, aber auch von E. Nun war M die kleinste mit E, K, meßbare Zahl. Folglich wird (7, 37. S.) S von M gemessen, die kleinere von der größern, welches unmög-

Man nehme in der Ver-
hältniß A : B zwey kleinste
Zahlen E, F; alsdann (8,
2. S.) drey stetig proportio-
nirte kleinste Zahlen G,
K, und so fort imme
mehr, bis man so
M, N, O, erhäl
Da E, F,
F . F = K,
G und K
sind A, ... : E =
portio ... = H : K. Auch
also ... L. Nun ist C . D
A ... , und E . F = B. Folglich

Verhältnissen sey
H, G, K, L,
...aß.
...h,
L.

C 2 E 5 D 3
G 6 H 15 K 20

ist (7, 17. S.) A : L = C : E = G : H, und L : B = D : F = H : K; folglich (7, 14. S.) aus dem Gleichen A : B = G : K. Nun ist (6, 5. E.) G : K = (G : H) + (H : K) = (C : E) + (D : F). Folglich ist auch A : B = (C : E) + (D : F).

Der 6. Satz. Lehrsatz.

Wenn von mehrern stetig proportionirten Zahlen, A, B, C, D, E, die erste, A, nicht die zweyte, B, misset: so wird auch keine derselben irgend eine davon messen.

Daß die zweyte nicht die dritte, die dritte nicht die vierte, und so weiter, misset, ist offenbar; daß aber auch die A nicht die C misset, wird so bewiesen: Man suche (7, 37. S.) die Verhältniß der A, B, C, in den kleinsten Zahlen F, G, H; daß also (7, 14. S.) aus dem Gleichen A : C = F : H.

A 16 B 24 C 36 D 54 E 81
F 4 G 6 H 9

Da A : B = F : G, aber A die B nicht misset; so misset auch nicht (7, 20. E.) F die G, und ist also (7, 1. E.)

F

F nicht die G … B,
len zu einand…
Nun war I…
nicht die C…
Auf eb…

A 8	K 12	L 18	B 27
E 4	H 6	G 9	
D 2	F 3		
C 1			

… E = A. Aus gleichen … B. … ist D:F = E:H. … :G. Folglich ist … E:H = A:K; … Nun war … Folglich ist … L:B;

…, D, …
auch die zwey…

Würde A nicht … sen: so würde sie (8, 6. … auch keine der übrigen, also … auch nicht D messen, welches dem An… Folglich muß A die B messen, wenn sie d…

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Wenn zwischen zwey Zahlen, A, B, einige mittlere … portionalzahlen, C, D, fallen: so fallen deren eben so viele zwischen zwey andre Zahlen, E, F, welche mit jenen, A, B, einerley Verhältniß haben.

A 2	C 4	D 8	B 16
G 1	H 2	K 4	L 8
E 3	M 6	N 12	F 24

In der Verhältniß der A, C, D, B, nehme man eben so viele (7, 35. S.) kleinste Zahlen G, H, K, L: so sind (8, 3. S.) G, L, Primzahlen zu einander, und es ist (7, 14. S.) aus dem Gleichen A:B = G:L, also, weil A:B = E:F, auch G:L = E:F. Folglich wird (7, 21. S.) E von G, F von L nach einerley Zahl gemessen. Nun werde nach derselben Zahl M von H, N von K gemessen. Folglich sind (7, 20. E. und 13. S.) E, M, N, F, in derselben Verhältniß, wie G, H, K, L, folglich auch wie A, C, D, B, folglich auch stetig

 pro-lich ist. Demnach sind in den gegebenen Verhältnissen keine an einanderhangende Zahlen kleiner, als H, G, K, L, welche also die kleinsten seyn müssen.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

Die Verhältniß zweyer Flächenzahlen, A = C . D, B = E . F, ist aus den Verhältnissen ihrer Seiten C:E; D:F, zusammengesetzt.

In den gegebenen Verhältnissen C:E, D:F, suche man (8, 4. S.) an einanderhangende kleinste Zahlen G, H, K, daß also C:E = G:H, und D:F = H:K. Auch sey E.D = L. Nun ist C . D = A, und E.F = B. Folglich ist (7, 17. S.) A:L = C:E = G:H, und L:B = D:F = H:K; folglich (7, 14. S.) **aus dem Gleichen** A:B = G:K. Nun ist (6, 5. E.) G:K = (G:H) + (H:K) = (C:E) + (D:F). Folglich ist auch A:B = (C:E) + (D:F).

A 6 B 20
L 15
C 2 E 5 D 3 F 4
G 6 H 15 K 20

Der 6. Satz. Lehrsatz.

Wenn von mehrern stetig proportionirten Zahlen, A, B, C, D, E, die erste, A, nicht die zweyte, B, misset: so wird auch keine derselben irgend eine davon messen.

Daß die zweyte nicht die dritte, die dritte nicht die vierte, und so weiter, misset, ist offenbar; daß aber auch die A nicht die C misset, wird so bewiesen: Man suche (7, 37. S.) die Verhältniß der A, B, C, in den kleinsten Zahlen F, G, H; daß also (7, 14. S.) **aus dem Gleichen** A:C = F:H.

A 16 B 24 C 36 D 54 E 81
F 4 G 6 H 9

Da A:B = F:G, aber A die B nicht misset; so misset auch nicht (7, 20. E.) F die G, und ist also (7, 1. E.)

F

F nicht die Einheit. Nun sind (8, 3. S.) F, H, Primzahlen zu einander. Folglich misset (7, 12. E.) F nicht die H. Nun war F : H = A : C. Folglich (7, 20. E.) misset A nicht die C.

Auf eben die Art wird bewiesen, daß, wenn A die B nicht misset, auch keine der andern irgend eine davon messe.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Wenn von mehrern stetig proportionirten Zahlen, A, B, C, D, die erste, A, die letzte, D, misset: so wird sie auch die zweyte, B, messen.

Würde A nicht die B messen: so würde sie (8, 6. S.) auch keine der übrigen, also auch nicht D messen, welches dem Angenommenen widerspricht. Folglich muß A die B messen, wenn sie die D misset.

A 2	B 4	C 8	D 16

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Wenn zwischen zwey Zahlen, A, B, einige mittlere Proportionalzahlen, C, D, fallen: so fallen deren eben so viele zwischen zwey andre Zahlen, E, F, welche mit jenen, A, B, einerley Verhältniß haben.

In der Verhältniß der A, C, D, B, nehme man eben so viele (7, 35. S.) kleinste Zahlen G, H, K, L: so sind (8, 3. S.) G, L, Primzahlen zu einander, und es ist (7, 14. S.) aus dem Gleichen A : B = G : L, also, weil A : B = E : F, auch G : L = E : F. Folglich wird (7, 21. S.) E von G, F von L nach einerley Zahl gemessen. Nun werde nach derselben Zahl M von H, N von K gemessen. Folglich sind (7, 20. E. und 13. S.) E, M, N, F, in derselben Verhältniß, wie G, H, K, L, folglich auch wie A, C, D, B, folglich auch stetig

A 2	C 4	D 8	B 16
G 1	H 2	K 4	L 8
E 3	M 6	N 12	F 24

proportionirt. Demnach sind zwischen E, F, so viele mittlere Proportionalzahlen, als zwischen A, B.

Der 9. Satz. Lehrsatz.

Wenn zwischen zwey Zahlen, A, B, welche Primzahlen zu einander sind, einige mittlere Proportionalzahlen, C, D, fallen: so fallen deren eben so viele zwischen jede der beyden Zahlen, A, B, und die Einheit, E.

A 8	C 12	D 18	B 27
	E 1		
F 2	G 3		
H 4	K 6	L 9	
M 8	N 12	O 18	P 27

In der Verhältniß der A, C, D, B, nehme man (8, 2. S.) zuerst zwey kleinste Zahlen F, G; dann drey H, K, L; und so fort immer Eine mehr, bis man so viele M, N, O, P, hat, als A, C, D, B, sind: so ist offenbar, daß F.F = H; F.H = M; G.G = L; G.L = P sey. Da auch M, N, O, P, sowohl als A, C, D, B, die kleinsten Zahlen in einer und derselben Verhältniß F:G, sind, und beyder Menge gleich ist: so müssen jene diesen, jede für sich, nach der Ordnung, gleich, also M = A, P = B, seyn. Nun ist (7, 15. und 20. E.) E:F = F:H = H:M. Folglich ist auch E:F = F:H = H:A, also zwischen E, A, zwey mittlere Proportionalzahlen F, H. Nun ist aus eben den Gründen E:G = G:L = L:B, also zwischen E, B, zwey mittlere Proportionalzahlen G, L. Demnach sind zwischen der Einheit E, und jeder der beyden Zahlen A, B, so viele mittlere Proportionalzahlen, als zwischen A und B.

Der 10. Satz. Lehrsatz.

Wenn zwischen jede von zwey Zahlen, A, B, und die Einheit, C, einige mittlere Proportionalzahlen fallen: so fallen deren eben so viele zwischen die beyden Zahlen, A, B.

Zwi-

Zwischen C, A, und C, B, seyen mittlere Proportionalzahlen D, E, und F, G. Ferner sey $D.F = H$; $D.H = K$; $F.H = L$. Weil auch $C:D = D:E = E:A$, und C die Einheit: so ist (7, 15. E.) $D.D = E$, und $D.E = A$. Aus gleichen Gründen ist $F.F = G$, und $F.G = B$.

A 8	K 12	L 18	B 27
	E 4	H 6	G 9
	D 2	F 3	
		C 1	

Da also $D.F = H$, $D.D = E$: so ist $D:F = E:H$. Da auch $F.F = G$: so ist $D:F = H:G$. Folglich ist $E:H = H:G$.

Da ferner $D.E = A$, $D.H = K$: so ist $E:H = A:K$; aber $D:F = E:H$, folglich $D:F = A:K$. Nun war $F.H = L$, also (7, 18. S.) $D:F = K:L$. Folglich ist $A:K = K:L$.

Da endlich $F.G = B$, $F.H = L$: so ist $H:G = L:B$; aber $H:G = D:F$, folglich $D:F = L:B$.

Demnach ist bewiesen, daß $D:F = A:K = K:L = L:B$, also A, K, L, B, stetig proportionirt sind, folglich zwischen A, B, so viele mittlere Proportionalzahlen, als zwischen C, A, und zwischen C, B.

Der 11. Satz, Lehrsatz.

Zwischen zwey Quadratzahlen, A, B, fällt Eine mittlere Proportionalzahl. Und die Verhältniß zweyer Quadratzahlen, A, B, ist das Zwiefache der Verhältniß ihrer Seiten, C, D.

Erster Theil.

Es sey $C.D = E$. Nun ist $C.C = A$, $D.D = B$. Folglich ist (7, 17. 18. S.) $C:D = A:E$, und $C:D = E:B$, folglich $A:E = E:B$. Demnach sind A, E, B, stetig proportionirt, und zwischen A, B, ist Eine mittlere Proportionalzahl E.

A 4	E 6	B 9
	C 2	D 3

Zweyter Theil.

Da A, E, B, in stetiger Proportion: so ist A:B = 2 (A:E). Nun war A:E = C:D. Folglich ist A:B = 2 (C:D).	A 4 E 6 B 9 C 2 D 3

Der 12. Satz. Lehrsatz.

Zwischen zwey Cubikzahlen, A, B, fallen zwey mittlere Proportionalzahlen; und die Verhältniß zweyer Cubikzahlen, A, B, ist das Dreyfache der Verhältniß ihrer Seiten, C, D.

Erster Theil.

Es sey C.C = E, also C.E = A; ferner D.D = G, also D.G = B; endlich C.D = F, C.F = H, D.F = K. Folglich ist	A 8 H 12 K 18 B 27 E 4 F 6 G 9 C 2 D 3

(7, 17. 18. S.) C:D = E:F; C:D = F:G; E:F = A:H; C:D = H:K; F:G = K:B. Folglich ist C:D = A:H = H:K = K:B. Demnach sind A, H, K, B, stetig proportionirt, und zwischen A, B, zwey mittlere Proportionalzahlen H, K.

Zweyter Theil.

Da A, H, K, B, in stetiger Proportion: so ist A:B = 3 (A:H). Nun war A:H = C:D. Folglich ist A:B = 3 (C:D).

Der 13. Satz. Lehrsatz.

Sind mehrere Zahlen, A, B, C, stetig proportionirt: so sind ihre Quadrate, D, E, F; ihre Würfel, G, H, K; und so fort alle Producte, welche entstehen, wenn die zuletzt erhaltnen von erst gedachten Zahlen nach der Ordnung vervielfältiget werden, auch stetig proportionirt.

Es

Es sey A.B = L, A.L = M, B.L = N; ferner B.C	A 2 B 4 C 8 D 4 L 8 E 16 O 32 F 64 G 8 M 16 N 32 H 64 P 128 Q 256 K 512

= O, B.O = P, C.O = Q: so läßt sich wie zuvor beweisen, daß D, L, E, so wohl, als G, M, N, H, in der Verhältniß A : B; und E, O, F, so wohl, als H, P, Q, K, in der Verhältniß B : C, stetig proportionirt sind. Nun ist A : B = B : C. Folglich sind erstlich D, L, E, und E, O, F, ferner G, M, N, H, und H, P, Q, K, in einerley Verhältniß. Folglich ist (7, 14. S.) aus dem Gleichen D : E = E : F, und G : H = H : K. Demnach sind die Quadrate D, E, F, auch die Würfel G, H, K, stetig proportionirt.

Der 14. Satz. Lehrsatz.

Messen einander Quadratzahlen, A, B: so messen auch einander ihre Seiten, C, D. Und messen einander die Seiten, C, D: so messen auch einander die Quadratzahlen, A, B.

Erster Theil.

Es sey C.D = E: so sind A, E, B, stetig proportionirt in der Verhältniß C : D. Nun mißt A die B, also (8, 7. S.) auch die E, und es ist A : E	A 4 E 8 B 16 C 2 D 4

= C : D. Folglich (7, 20. E.) mißt auch C die D.

Zweyter Theil.

Da A, E, B, stetig proportionirt in der Verhältniß C : D, also C : D = A : E, und C die D mißt: so muß auch A die E, folglich (8, 7. S.) auch die B messen.

Der 15. Satz. Lehrsatz.

Messen einander Cubikzahlen, A, B: so messen auch einander ihre Seiten, C, D. Und messen einander die Seiten, C, D: so messen auch einander die Cubikzahlen, A, B.

Erster Theil.

Es sey C.C = E, C.D = F, D.D = G, C.F = H, D.F = K: so ist offenbar, daß sowohl E, F, G, als auch A, H, K, B, in der	A 8 H 16 K 32 B 64 E 4 F 8 G 16 C 2 D 4

Verhältniß G:D stetig proportionirt sind. Nun mißt A die B, also (8, 7. S.) auch die H, und es ist A:H = C:D. Folglich (7, 20. E.) misset auch C die D.

Zweyter Theil.

Da A, H, K, B, stetig proportionirt in der Verhältniß C:D, also C:D = A:H, und C die D misset: so muß auch A die H, folglich (8, 7. S.) auch die B messen.

Der 16. Satz. Lehrsatz.

Messen einander nicht Quadratzahlen, A, B: so messen auch einander nicht ihre Seiten, C, D. Und messen einander nicht die Seiten, C, D: so messen auch einander nicht die Quadratzahlen, A, B.

Erstlich. A misset nicht die B. Sollte nun C die D messen, so müßte (8, 14. S.) auch A die B messen, gegen das Angenommene. Folglich kann C die D nicht messen.	A 9 B 16 C 3 D 4

Zweytens. C misset nicht die D. Sollte nun A die B messen: so müßte (8, 14. S.) auch C die D messen, gegen das Angenommene. Folglich kann A die B nicht messen.

Der

Der 17. Satz. Lehrsatz.

Messen einander nicht Cubikzahlen, A, B: so messen auch einander nicht ihre Seiten, C, D. Und messen einander nicht die Seiten, C, D: so messen auch einander nicht die Cubikzahlen, A, B.

Erstlich. A misset nicht die B. Mäße nun C die D: so mäße (8, 15. S.) auch A die B, gegen das Angenommene. Folglich kann C die D nicht messen.

A 8	B 27
C 2	D 3

Zweytens. C mißt nicht die D. Mäße nun A die B: so mäße (8, 15. S.) auch C die D, gegen das Angenommene. Folglich kann A die B nicht messen.

Der 18. Satz. Lehrsatz.

Zwischen zwey ähnliche Flächenzahlen, A, B, fällt Eine mittlere Proportionalzahl. Und die Verhältniß zweyer ähnlichen Flächenzahlen, A, B, ist das Zwiefache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten.

Erster Theil.

A 6	G 12	B 24	
C 2	D 3	E 4	F 6

Es sey $A = C.D$, und $B = E.F$: so ist, weil $A \sim B$ (7, 21. E.) $C:D = E:F$, und verwechselt (7, 13. S.) $C:E = D:F$. Nun sey $D.E = G$, also (7, 17. S.) $C:E = A:G$. Folglich ist $D:F = A:G$; aber auch $D:F = G:B$, folglich $A:G = G:B$. Demnach sind A, G, B, stetig proportionirt, also ist zwischen A, B, Eine mittlere Proportionalzahl.

Zweyter Theil.

Da A, G, B, stetig proportionirt sind: so ist $A:B = 2\,(A:G)$. Nun war $A:G = C:E = D:F$. Folglich ist $A:B = 2\,(C:E) = 2\,(D:F)$.

Der 19. Satz. Lehrsatz.

Zwischen zwey ähnliche Körperzahlen, A, B, fallen zwey mittlere Proportionalzahlen; und die Verhältniß zweyer ähnlichen Körperzahlen, A, B, ist das Dreyfache der Verhältniß ihrer gleichnamigen Seiten.

Erster Theil.

Es sey $A = C.D.E$, und $B = F.G.H$: so ist, weil $A \sim B$, (7, 21. E.) $C:D = F:G$, und $D:E = G:H$, oder verwechselt (7, 13. S.) $C:F = D:G$ und $D:G = E:H$.

A 30		N 60		O 120	B 240
	K 6		M 12	L 24	
C 2	D 3	E 5	F 4	G 6	H 10

Es sey $C.D = K$, und $F.G = L$. Nun ist $C:D = F:G$. Folglich sind (7, 21. E.) K, L, ähnliche Flächenzahlen. Folglich ist (8, 18. S.) zwischen K, L, Eine mittlere Proportionalzahl M, also $K:M = M:L$. Nun ist nach dem Beweise des vorhergehenden Satzes $M = D.F$, und es war $C.D = K$. Folglich ist (7, 17. S.) $C:F = K:M$. Demnach sind K, M, L, stetig proportionirt in der Verhältniß $C:F = D:G = E:H$.

Ferner sey $E.M = N$, $H.M = O$. Nun ist $A = C.D.E = K.E$, und $B = F.G.H = L.H$. Folglich ist (7, 17. S.) $K:M = A:N$; $E:H = N:O$; $M:L = O:B$. Nun war $K:M = E:H = M:L$. Folglich ist $A:N = N:O = O:B$. Demnach sind A, N, O, B, stetig proportionirt in der Verhältniß $C:F$, also zwischen A, B, zwey mittlere Proportionalzahlen N, O.

Zweyter Theil.

Da A, N, O, B, stetig proportionirt sind: so ist $A:B = 3\,(A:N)$. Nun war $A:N = C:F = D:G = E:H$. Folglich ist $A:B = 3\,(C:F) = 3\,(D:G) = 3\,(E:H)$.

Der

Der 20. Satz. Lehrsatz.

Zwey Zahlen, A, B, zwischen welche Eine mittlere Proportionalzahl, C, fällt, sind ähnliche Flächenzahlen.

A 8	C 12	B 18	
D 2	E 3	F 4	G 6

Nimmt man (7, 35. S.) in der Verhältniß A:C die kleinsten Zahlen D, E, daß also D:E = A:C; so wird A von D, und C von E, nach einerley Zahl gemessen. Diese sey F: so ist F.D = A, und F.E = C. Demnach ist A eine Flächenzahl, deren Seiten D, F,

Da A:C = C:B, so ist auch D:E = C:B. Folglich wird auch C von D, und B von E, nach einerley Zahl gemessen. Diese sey G: so ist G.E = B, folglich auch B eine Flächenzahl, deren Seiten E, G.

Da F.E = C, und G.E = B: so ist (7, 18. S.) F:G = C:B = D:E. Folglich sind (7, 21. E.) A, B, ähnliche Flächenzahlen.

Der 21. Satz. Lehrsatz.

Zwey Zahlen, A, B, zwischen welche zwey mittlere Proportionalzahlen, C, D, fallen, sind ähnliche Körperzahlen.

A 24	C 72	D 216	B 648		
E 1	F 3	G 9			
H 1	K 1	N 24	L 3	M 3	O 72

Nimmt man (7, 35. S.) in der Verhältniß der A, C, D, drey kleinste Zahlen E, F, G: also sind (8, 3. S.) die äußersten derselben, E, G, Primzahlen zu einander, auch (8, 20. S.) ähnliche Flächenzahlen. Nun sey E = H.K, G = L.M: so erhellet, daß E, F, G, stetig proportionirt sind in der Verhältniß H:L, und K:M.

Da E, F, G, in der Verhältniß der A, C, D, die kleinsten: so ist (7, 14. S.) aus dem Gleichen E:G = A:D. Nun sind E, G,

E, G, Primzahlen zu einander, also die kleinsten in ihrer Verhältniß. Folg-	A 24 C 72 D 216 B 648 E 1 F 3 G 9 H 1 K 1 N 24 L 3 M 3 O 72

lich wird (7, 21. S.) A von E, D von G, nach einerley Zahl gemessen. Diese sey N: so ist N.E = N.H.K = A. Demnach ist A eine Körperzahl, deren Seiten N, H, K.

Da E, F, G, die kleinsten Zahlen in der Verhältniß der C, D, B: so wird C von E, B von G, nach einerley Zahl gemessen. Diese sey O: so ist O.E = C und O.G = O.L.M = B. Demnach ist auch B eine Körperzahl, deren Seiten L, M, O.

Da aber N.E = A, O.E = C: so ist (7, 17. S.) N:O = A:C = E:F. Nun ist E:F = H:L = K:M. Folglich ist H:L = K:M = N:O. Da nun H, K, N, die Seiten der A, und L, M, O, die Seiten der B: so sind A, B, ähnliche Körperzahlen.

Der 22. Satz. Lehrsatz.

Ist von drey stetig proportionirten Zahlen, A, B, C, die erste, A, eine Quadratzahl: so ist auch die dritte, C, eine Quadratzahl.

Da zwischen A, C, Eine mittlere Proportionalzahl B ist: so sind (8, 20. S.)	A 4 B 6 C 9

A, C, ähnliche Flächenzahlen. Da nun A eine Quadratzahl ist: so ist auch C eine Quadratzahl.

Der 23. Satz. Lehrsatz.

Ist von vier stetig proportionirten Zahlen, A, B, C, D, die erste, A, eine Cubikzahl: so ist auch die vierte, D, eine Cubikzahl.

Da

Da zwischen A, D, zwey mittlere Proportionalzahlen,	A 8	B 12	C 18	D 27

B, C; so sind (8, 21. S.) A, D, ähnliche Körperzahlen. Da nun A eine Cubikzahl: so ist auch D eine Cubikzahl.

Der 24. Satz. Lehrsatz.

Ist von zwey Zahlen, A, B, welche sich wie Quadratzahlen, C, D, verhalten, die eine eine Quadratzahl: so ist auch die andre eine Quadratzahl.

Da C, D, Quadratzahlen sind: so sind sie ähnliche Flächenzahlen. Folglich ist (8, 18. S.) zwischen C, D, Eine mittlere Proportionalzahl. Nun ist C:D = A:B. Folglich ist (8, 8. S.) auch zwischen A, B, Eine mittlere Proportionalzahl. Da nun A eine Quadratzahl ist: so ist (8, 22. S.) auch B eine Quadratzahl.

A 4	B 9
C 16	D 36

Der 25. Satz. Lehrsatz.

Ist von zwey Zahlen, A, B, welche sich wie Cubikzahlen, C, D, verhalten, die eine eine Cubikzahl: so ist auch die andre eine Cubikzahl.

Da C, D, Cubikzahlen: so sind sie ähnliche Körperzahlen. Folglich sind (8, 19. S.) zwischen C, D, zwey mittlere Proportionalzahlen. Nun ist C : D = A : B. Folglich sind (8, 8. S.) auch zwischen A, B, zwey mittlere Proportionalzahlen. Es seyen diese E, F, daß also A, E, F, B, vier stetig proportionirte Zahlen sind. Da nun A eine Cubikzahl ist: so ist (8, 23. S.) auch B eine Cubikzahl.

A 8	E 12	F 18	B 27
C 64			D 216

Der 26. Satz. Lehrsatz.

Aehnliche Flächenzahlen, A, B, verhalten sich wie Quadratzahlen.

Da

Da A, B, ähnliche Flächenzahlen sind: so ist (8, 18. S.) zwischen ihnen Eine mittlere Proportionalzahl. Diese sey C, und man nehme (7, 35. S.) in der Verhältniß der A, C, B, die kleinsten Zahlen D, E, F, daß also (8, 2. Zus.) D, F, Quadratzahlen, und D:F = A:B. Demnach verhalten sich A, B, wie Quadratzahlen D, F.

A 6	C 12	B 24
D 1	E 2	F 4

Der 27. Satz. Lehrsatz.

Aehnliche Körperzahlen, A, B, verhalten sich wie Cubikzahlen.

Da A, B, ähnliche Körperzahlen; so sind (8, 19. S.) zwischen ihnen zwey mittlere Proportionalzahlen. Diese seyen C, D, und man nehme (8, 2. S.) in der Verhältniß der A, C, D, B, die kleinsten Zahlen E, F, G, H, daß also (8, 2. Zus.) E, H, Cubikzahlen, und E:H = A:B. Demnach verhalten sich A, B, wie Cubikzahlen, E, H.

A 16	C 24	D 36	B 54
E 8	F 12	G 18	H 27

Euklid's

Euklid's Elemente

Neuntes Buch.

Der 1. Satz. Lehrsatz.

Das Product, C, aus zwey ähnlichen Flächenzahlen, A, B, ist eine Quadratzahl.

Es sey A . A = D, also D eine Quadratzahl. Nun ist A . B = C. Folglich ist (7, 17. S.) A : B = D : C. Nun sind A, B, ähnliche Flächenzahlen. Folglich ist (8, 18. S.) zwischen A, B, und daher (8, 8. S.) auch zwischen C, D, Eine mittlere Proportionalzahl. Da nun D eine Quadratzahl, so ist (8, 22. S.) auch C eine Quadratzahl.

A 6	B 54
D 36	C 324

Der 2. Satz. Lehrsatz.

Zwey Zahlen, A, B, deren Product, C, eine Quadratzahl ist, sind ähnliche Flächenzahlen.

Es sey A . A = D, also D eine Quadratzahl. Nun ist A . B = C. Folglich ist (7, 17. S.) A : B = D : C. Nun sind D, C, Quadratzahlen, also auch ähnliche Flächenzahlen. Folglich ist (8, 18. S.) zwischen D, C, und daher (8, 8. S.) auch zwischen A, B, Eine mittlere Proportionalzahl. Folglich sind (8, 20. S.) A, B, ähnliche Flächenzahlen.

A 3	B 12
D 9	C 36

Der 3. Satz. Lehrsatz.

Das Product, B, aus einer Cubikzahl, A, in sich selbst, ist eine Cubikzahl.

A 8	B 64	
D 4	C 2	E 1

Die Seite der Cubikzahl A sey C, und C . C = D, folglich (7, 19. E.) C . D = A. Nun sey E die Einheit. Folglich ist (7, 15. und 20. E.) E : C = C : D, und E : C = D : A. Folglich ist E : C = C : D = D : A. Demnach sind zwischen der Einheit E und der Zahl A zwey mittlere Proportionalzahlen C, D. Nun ist E : A = A : B. Folglich sind (8, 8. S.) auch zwischen A, B, zwey mittlere Proportionalzahlen. Da nun A eine Cubikzahl ist, so ist (8, 23. S.) auch B eine Cubikzahl.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

Das Product, C, aus zwey Cubikzahlen, A, B, ist eine Cubikzahl.

A 8	B 27
D 64	C 216

Es sey A . A = D, also (9, 3. S.) D eine Cubikzahl. Nun ist A . B = C. Folglich ist (7, 17. S.) A : B = D : C. Nun sind A, B, Cubikzahlen, also ähnliche Körperzahlen. Folglich sind (8, 19. S.) zwischen A, B, und daher (8, 8. S.) auch zwischen D, C, zwey mittlere Proportionalzahlen. Da nun D eine Cubikzahl, so ist (8, 23. S.) auch C eine Cubikzahl.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

Eine Zahl, B, die mit einer Cubikzahl, A, vervielfältigt zum Producte, C, eine Cubikzahl giebt, ist selber eine Cubikzahl.

A 8	B 27
D 64	C 216

Es sey A . A = D, also (9, 3. S.) D eine Cubikzahl. Nun ist A . B = C. Folglich ist (7, 17. S.) A : B = D : C. Nun sind D, C, Cubikzahlen, also ähnliche Körperzahlen. Folglich fallen (8, 19. S.) zwischen D, C,

und

und daher (8, 8. S.) auch zwischen A, B, zwey mittlere Proportionalzahlen. Da nun A eine Cubikzahl, so ist (8, 23. S.) auch B eine Cubikzahl.

Der 6. Satz. Lehrsatz.

Eine Zahl, A, deren Quadrat, B, eine Cubikzahl giebt, ist selber eine Cubikzahl.

A 8 B 64 C 512

Es sey A . B = C, also (7, 19. E.) C eine Cubikzahl. Nun ist A . A = B. Folglich ist (7, 17. S.) A : B = B : C. Nun sind B, C, Cubikzahlen. Folglich sind (8, 19. S.) zwischen B, C, und daher (8, 8. S.) auch zwischen A, B, zwey mittlere Proportionalzahlen. Da nun B eine Cubikzahl, so ist (8, 23. S.) auch A eine Cubikzahl.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Das Product, C, aus einer zusammengesetzten Zahl, A, in jede Zahl, B, ist eine Körperzahl.

A 6 B 7 C 42
D 3 E 2

Da A eine zusammengesetzte Zahl ist: so wird sie (7, 13. E.) von irgend einer Zahl D, nach irgend einer Zahl E, gemessen, daß also E . D = A ist. Da nun A . B = C: so ist E . D . B = C. Demnach ist (7, 17. E.) C eine Körperzahl, deren Seiten E, D, B.

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Sind von der Einheit an mehrere Zahlen, A, B, C, D, E, F, stetig proportionirt: so ist jede zweyte, B, D, F, eine Quadratzahl; jede dritte, C, F, eine Cubikzahl; jede sechste, F, eine Quadratzahl und Cubikzahl zugleich.

1 A 3 B 9 C 27 D 81 E 243 F 729

Da 1 : A = A : B, so wird (7, 20. E.) B von der A nach eben der Zahl, als A von der Einheit, also nach der Zahl A gemessen, folglich ist B = A . A, also B eine Quadratzahl. Nun sind B, C, D, stetig proportionirt.

Folglich ist (8, 22. S.) D eine | 1 A3 B9 C27 D81 E243 F729

Quadratzahl. Aus gleichen Gründen ist F eine Quadratzahl. Demnach sind B, D, F, Quadratzahlen.

Da auch 1:A=B:C, so wird C von B nach der Zahl A gemessen, folglich ist A.B=C=A.A.A, also C eine Cubikzahl. Nun sind C, D, E, F, stetig proportionirt, Folglich ist (8, 23. S.) F eine Cubikzahl. Demnach sind C, F, Cubikzahlen. Nun war F auch eine Quadratzahl. Folglich ist F eine Quadratzahl und Cubikzahl zugleich.

Der 9. Satz. Lehrsatz.

Sind von der Einheit an mehrere Zahlen, A, B, C, D, E, F, stetig proportionirt: so sind, wenn die erste, A, eine Quadratzahl ist, alle folgende Quadratzahlen. Und, wenn die erste, A, eine Cubikzahl ist, alle folgende Cubikzahlen.

Erster Fall.

Daß B, D, F, Quadratzahlen sind, | 1 A4 B16 C64 D256 E1024 F4096

ist im vorigen Satze bewiesen worden. Da A, B, C, stetig proportionirt sind, und A eine Quadratzahl ist: so ist (8, 22. S.) auch C eine Quadratzahl. Da B, C, D, stetig proportionirt sind, und B eine Quadratzahl ist: so ist (8, 22. S.) auch D eine Quadratzahl. Eben so ist der Beweis für alle übrige.

Zweyter Fall.

Daß C, F, Cubikzahlen sind, ist im | 1 A8 B64 C512 D4096 E32768 F262144

vorigen Satze bewiesen worden. Da 1:A=A:B, so wird (7, 20. E.) B von A nach eben der Zahl, als A von der Einheit, also nach der Zahl A gemessen, daß also B = A.A. Nun ist A eine Cubikzahl. Folglich ist (9, 3. S.)

B

B eine Cubikzahl. Da nun auch A, B, C, D, stetig proportionirt sind, so ist (8, 23. S.) D eine Cubikzahl. Aus gleichen Gründen ist E eine Cubikzahl, und so fort alle folgende.

Der 10. Satz. Lehrsatz.

Sind von der Einheit an mehrere Zahlen, A, B, C, D, E, F, stetig proportionirt: so sind, wenn die erste, A, keine Quadratzahl ist, mit Ausnahme jeder zweyten, B, D, F, alle übrige auch keine Quadratzahlen. Und, wenn die erste, A, keine Cubikzahl ist, mit Ausnahme jeder dritten, C, F, alle übrige auch keine Cubikzahlen.

Erster Fall.

Es sey A keine Quadratzahl; aber, wenn es möglich, C eine Quadratzahl.

1 A 2 B 4 C 8 D 16 E 32 F 64

Nun ist A:B=B:C, und (9, 8. S.) B eine Quadratzahl. Folglich verhalten sich A, B, wie Quadratzahlen, und sind also ähnliche Flächenzahlen. Da nun B eine Quadratzahl ist, so ist es auch A, gegen das Angenommene. Folglich ist C keine Quadratzahl. Eben so wird es für E und die übrigen bewiesen.

Zweyter Fall.

Es sey A keine Cubikzahl, aber, wenn es möglich, D eine Cubikzahl. Nun ist B:C=C:D, und (9, 8. S.) C eine Cubikzahl. Folglich verhalten sich B, C, wie Cubikzahlen, und sind also ähnliche Körperzahlen, folglich ist B eine Cubikzahl. Nun ist 1:A=A:B, daß also B von A nach der Zahl A gemessen wird, also B=A.A ist. Folglich ist (9, 6. S.) A eine Cubikzahl, gegen das Angenommene. Folglich ist D keine Cubikzahl. Eben so wird der Beweis für die übrigen geführt.

Der 11. Satz. Lehrsatz.

Sind von der Einheit an mehrere Zahlen, A, B, C, D, stetig proportionirt: so misset jede derselben, A, eine weiter folgende, D, nach einer der Zwischenzahlen, B, C.

Da 1 : A = C : D; so wird A von der Einheit, und D von C, und (7, 15. S.)	1 A 3 B 9 C 27 D 81

verwechselt C von der Einheit, und D von A, nach einerley Zahl gemessen. Da nun C von der Einheit nach der Zahl C gemessen wird: so wird auch D von A nach der Zahl C, also nach einer der Zahlen B, C, gemessen.

Der 12. Satz. Lehrsatz.

Sind von der Einheit an mehrere Zahlen, A, B, C, D, stetig proportionirt: so wird jede Primzahl, E, welche die letzte, D, misset, auch die erste, A, messen.

Mäße E nicht die A, so wären (7, 31. S.) A, E, Primzahlen zu einander. Es werde D	1 A 4 B 16 C 64 D 256 E 2 H 8 G 32 F 128

von E nach der Zahl F gemessen, daß also E . F = D; auch wird (9, 11. S.) D von A nach der Zahl C gemessen, daß also A . C = D. Folglich ist A . C = E . F; folglich (7, 19. S.) A : E = F : C. Nun waren A, E, Primzahlen zu einander, also (7, 23. S.) die kleinsten in ihrer Verhältniß. Folglich misset (7, 21. S.) E die C, daß also, wenn dies nach der Zahl G geschiehet, E . G = C. Da aber (9, 11. S.) A . B = C, so ist A . B = E . G, also A : E = G : B. Nun waren A, E, Primzahlen zu einander, also die kleinsten in ihrer Verhältniß. Folglich misset (7, 21. S.) E die B, daß also, wenn dies nach der Zahl H geschiehet, E . H = B. Da aber A . A = B, so ist E . H = A . A, also E : A = A : H. Nun waren E, A, Primzahlen zu einander, also die kleinsten in ihrer Verhältniß.

Folg=

Folglich misset (7, 21. S.) E die A, welches dem Obigen widerspricht. Demnach ist es falsch, daß E nicht die A messe. Folglich misset E die A.

Obiger Beweis ist der nämliche für jede andre Primzahl, welche die D misset.

Der 13. Satz. Lehrsatz.

Sind von der Einheit an mehrere Zahlen, A, B, C, D, stetig proportionirt; so wird, wenn die erste, A, eine Primzahl ist, die letzte, D, nur von den in der Proportion vorhergehenden Zahlen, A, B, C, gemessen.

1	A 5	B 25	C 125	D 625
	E —	H —	G —	F —

Es werde D, wenn es möglich, noch von einer Zahl E, welche mit keiner der Zahlen A, B, C, einerley ist, gemessen: so kann diese keine Primzahl seyn, weil sie sonst (9, 12. S.) auch die von ihr verschiedene Primzahl A messen müßte, welches unmöglich ist. Demnach ist E eine zusammengesetzte Zahl, und wird also (7, 30. S.) von irgend einer Primzahl gemessen. Dies kann nur A seyn, weil eine andre, da E die D misset, auch die D, folglich (9, 12. S.) auch die von ihr verschiedene Primzahl A messen müßte, welches unmöglich ist. Demnach misset A die E.

Es messe E die D nach der Zahl F, so ist F mit keiner der Zahlen A, B, C, einerley, weil sonst eine dieser Zahlen die D nach der Zahl E messen müßte, folglich, weil (9, 11. S.) eine der Zahlen A, B, C, die D, nach einer dieser Zahlen misset, E mit einer dieser Zahlen einerley wäre, gegen die Voraussetzung. Nun wird wieder, wie vorhin, bewiesen, daß F keine Primzahl sey, und daß sie von der A gemessen werde.

Da also E.F = D, aber auch A.C = D, so ist E.F = A.C, also (7, 19. S.) A:E = F:C. Da aber A die E misset, so misset auch F die C. Geschiehet dies nach der Zahl G, so wird auf ähnliche Art, wie vorher, bewiesen,

sen, daß G mit keiner der Zahlen A, B, einerley, auch daß sie keine Primzahl sey, und daß sie von A gemessen werde.

1	A 5	B 25	C 125	D 625
	E —	H —	G —	F —

Da also F.G = C, aber auch A.B = C, so ist A.B = F.G, also A:F = G:B. Da aber A die F misset, so misset auch G die B. Geschiehet dies nach der Zahl H, so wird wie vorhin bewiesen, daß H nicht mit A einerley ist.

Da also G.H = B, aber auch A.A = B, so ist G.H = A.A, also (7, 20. S.) H:A = A:G. Da aber A die G misset, so misset auch H die A, eine von ihr verschiedene Primzahl, welches unmöglich ist. Demnach kann D von keiner andern Zahl, außer von A, B, C, gemessen werden.

Der 14. Satz. Lehrsatz.

Die mit gewissen Primzahlen, B, C, D, meßbare kleinste Zahl, A, wird nur von diesen und keinen andern Primzahlen gemessen.

	A 30	
B 2	C 3	D 5
	E —	F —

Es werde A, wenn es möglich, noch von einer Primzahl E, welche mit keiner der genannten einerley ist, gemessen. Dies geschehe nach der Zahl F, daß also E.F = A ist. Nun wird A von den Primzahlen B, C, D, gemessen. Folglich wird (7, 32. S.) von diesen entweder E oder F gemessen. Nun kann die von den Primzahlen B, C, D, unterschiedene Primzahl E von diesen nicht gemessen werden. Folglich wird F, welche kleiner als A ist, von ihnen gemessen, welches unmöglich Statt findet; weil nach der Voraussetzung schon A die kleinste mit B, C, D, meßbare Zahl ist. Demnach kann A von keiner Primzahl außer B, C, D, gemessen werden.

Der 15. Satz. Lehrsatz.

Sind drey stetig proportionirte Zahlen, A, B, C, die kleinsten in ihrer Verhältniß: so ist die Summe von je zweyen eine Primzahl zu der übrigen.

A 9	B 12	C 16
D . . . E . . . . F		

Erstlich. Nimmt man (8, 2. S.) zwey Zahlen DE, EF, welche in der Verhältniß der A, B, C, die kleinsten sind: so ist offenbar, daß DE.DE = A, DE.EF = B, EF : EF = C. Da (7, 24. S.) DE, EF, Primzahlen zu einander sind: so ist (7, 30. S.) DF eine Primzahl so wohl zu DE, als auch zu EF. Nun ist DE eine Primzahl zu EF. Folglich sind DF, DE, Primzahlen zu EF, folglich ist (7, 26. S.) DF.DE eine Primzahl zu EF, folglich (7, 27. S.) auch zu EF . EF. Nun ist (2, 3. S.) DF . DE = DE . DE + DE . EF. Folglich ist DE.DE + DE . EF eine Primzahl zu EF . EF. Da aber nach Obigem DE . DE = A, DE . EF = B, EF . EF = C: so ist A + B eine Primzahl zu C.

Zweytens. Eben so beweiset man, daß B + C eine Primzahl zu A sey.

Drittens. Da DF eine Primzahl zu DE und zu EF war: so ist (7, 26. 27. S.) auch DF . DF eine Primzahl zu DE . EF. Nun ist (2, 4. S.) DF . DF = DE . DE + EF . EF + 2 DE . EF. Folglich ist DE . DE + EF . EF + 2 DE . EF, also auch (7, 30. S.) DE . DE + EF . EF + DE . EF und DE . DE + EF . EF eine Primzahl zu DE . EF, das ist A + C eine Primzahl zu B.

Der 16. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey Zahlen, A, B, Primzahlen zu einander, so giebt es zu beyden keine dritte Proportionalzahl.

A 5	B 8	C —

Es sey, wenn es möglich, eine dritte C, also A : B = B : C. Nun sind A, B, Primzahlen zu einander, also (7, 23. S.) die kleinsten in ihrer Verhältniß. Folglich (7, 21. S.) misset A die

die B, aber auch sich selbst, also A und B, welches dem Angenommenen widerspricht. Demnach ist nicht A:B = B:C, also keine dritte Proportionalzahl zu A, B.

A 5 B 8 C —

Der 17. Satz. Lehrsatz.

Sind von mehrern stetig proportionirten Zahlen, A, B, C, D, die äußersten Primzahlen zu einander: so giebt es zu der ersten, zweyten und letzten keine vierte Proportionalzahl.

Es sey, wenn es möglich, eine vierte E, also A:B = D:E; so ist verwechselt (7, 13. S.) A:D = B:E. Nun sind A, D, Primzahlen zu einander, also (7, 23. S.) die kleinsten in ihrer Verhältniß. Folglich (7, 21. S.) misset A die B. Da aber A:B = B:C, so misset B die C, folglich misset auch A die C. Da aber B:C = C:D, so misset C die D, folglich misset auch A die D, aber auch sich selbst, folglich misset A die A und D, welches dem Angenommenen widerspricht. Demnach ist nicht A:B = D:E, also keine vierte Proportionalzahl zu A, B, D.

A 8 B 12 C 18 D 27 E —

Der 18. Satz. Aufgabe.

Es sind zwey Zahlen, A, B, gegeben, man soll erforschen, ob es möglich ist, eine dritte Proportionalzahl zu ihnen zu finden.

Die gegebenen Zahlen A, B, sind entweder Primzahlen zu einander, oder nicht. Ist das erste: so giebt es (9, 16. S.) keine dritte Proportionalzahl. Ist das zweyte: so sey B.B = C. Nun misset entweder A die C, oder nicht.

Erster Fall.

Es messe A die C, und zwar nach der Zahl D, daß also A.D = C = B.B: so ist (7, 20. S.) A:B = B:D, folglich läßt sich zu A, B eine dritte Proportionalzahl D finden.

A 4 B 6 D 9 C 36

Zwey=

Zweyter Fall.

Es messe A nicht die C, so giebt es keine dritte Proportionalzahl. | A 6 B 4 D — C 16

Denn es sey, wenn es möglich, zu A, B, eine dritte Proportionalzahl D, also A : B = B : D; so wäre (7, 20. S.) A . D = B . B = C. Folglich misset A die C nach der Zahl D, welches dem Angenommenen widerspricht. Demnach giebt es hier keine dritte Proportionalzahl zu A, B.

Der 19. Satz. Aufgabe.

Es sind drey Zahlen, A, B, C, gegeben, man soll erforschen, ob es möglich ist, eine vierte Proportionalzahl zu ihnen zu finden.

Die gegebenen Zahlen A, B, C sind entweder stetig proportionirt, oder nicht. Sie seyn zuerst stetig proportionirt, so sind die äußersten A, C entweder Primzahlen zu einander, oder nicht. Ist das Erste, so giebt es (9, 17. S.) zu ihnen keine vierte Proportionalzahl. Ist das Andere, und man macht B . C = D, so misset entweder A die D, oder nicht.

Erster Fall.

Es messe A die D, und zwar nach | A 8 B 12 C 18 E 27 D 216

der Zahl E, daß also A . E = D = B . C: so ist (7, 19. S.) A : B = C : E, folglich läßt sich zu A, B, C eine vierte Proportionalzahl E finden.

Zweyter Fall.

Es messe A nicht die D, so | A 20 B 30 C 45 E — D 1350

giebt es zu A, B, C keine vierte Proportionalzahl. Denn es sey, wenn es möglich, zu A, B, C eine vierte Proportionalzahl E, also A : B = C : E; so ist (7, 19. S.) A . E = B . C = D. Folglich misset A die D nach der Zahl E, welches dem Angenommenen widerspricht. Demnach giebt es in diesem Falle keine vierte Proportionalzahl zu A, B, C.

Sind aber zweytens die gegebenen Zahlen A, B, C nicht stetig proportionirt, und man macht B.C = D; so wird auf ähnliche Weise, wie vorhin, gezeigt, daß, wenn A die D misset, eine vierte Proportionalzahl zu finden möglich ist, wofern aber A nicht die D misset, solches unmöglich ist.

Der 20. Satz. Lehrsatz.

Die Menge der Primzahlen ist größer, als jede gegebene Menge derselben, A, B, C.

A 2	B 3	C 5
	E 30 D . F	

Nimmt man (7, 28. S.) die mit A, B, C, meßbare kleinste Zahl ED, und setzt die Einheit DF hinzu: so ist EF entweder eine Primzahl, oder nicht. Ist das Erste: so ist zu den gegebenen Primzahlen A, B, C, eine andere EF hinzugekommen. Ist aber das Zweyte: so wird (7, 33. S.) EF von irgend einer Primzahl G gemessen. Diese G ist mit keiner der A, B, C, einerley. Denn wäre sie es, so würde sie ED messen, folglich, da sie EF misset, auch den Rest DF messen, eine Zahl die Einheit, welches nicht möglich ist. Demnach ist die Primzahl G mit keiner der A, B, C, einerley, und ist also zu den gegebenen Primzahlen A, B, C, eine neue G hinzugekommen.

A 5	B 3	C 7
	E 105 D . F	
	G 53	

Der 21. Satz. Lehrsatz.

Die Summe jeder Menge gerader Zahlen, A, B, C, D, ist eine gerade Zahl.

A 4	B 6	C 2	D 8

Da jede dieser Zahlen gerade ist: so ist sie, folglich auch die Summe aller, mit der Zwey theilbar. Folglich ist (7, 6. E.) die Summe eine gerade Zahl.

Der 22. Satz. Lehrsatz.

Die Summe jeder geraden Menge ungerader Zahlen, A, B, C, D, ist eine gerade Zahl.

A 3	B 5	C 7	D 9

Da jede dieser Zahlen ungerade ist, so erhält man, wenn

von

von jeder die Einheit weggenommen wird, eben so viele gerade Zahlen, deren Summe also (9, 21. S.) gerade ist. Nun ist auch die Summe der weggenommenen Einheiten gerade. Folglich macht sie (9, 21. S.) mit jener Summe eine gerade Zahl.

Der 23. Satz. Lehrsatz.

Die Summe jeder ungeraden Menge ungerader Zahlen, AB, BC, CD, ist eine ungerade Zahl.

A 5 B 7 C 8 E 1 D

Nimmt man von CD die Einheit DE, so ist der Rest CE gerade. Da nun (9, 22. S.) AC gerade, so ist (9, 21. S.) auch AE gerade, folglich, wenn die Einheit hinzukommt, AD ungerade.

Der 24. Satz. Lehrsatz.

Die Differenz, AC, zweyer geraden Zahlen, AB, BC, ist eine gerade Zahl.

A 6 C 4 B

Da beyde Zahlen gerade sind, so ist jede, und daher auch ihre Differenz mit der Zwey theilbar. Folglich ist solche Differenz eine gerade Zahl.

Der 25. Satz. Lehrsatz.

Die Differenz, AC, einer geraden und ungeraden Zahl, AB, BC, ist eine ungerade Zahl.

A 7 C 1 D 4 B

Nimmt man von der ungeraden Zahl BC die Einheit CD, so ist der Rest DB gerade, folglich (9, 24. S.) AB — BD = AD gerade. Nimmt man hiervon die Einheit CD, so ist AC ungerade.

Der 26. Satz. Lehrsatz.

Die Differenz, AC, zweyer ungeraden Zahlen, BC, AB, ist eine gerade Zahl.

A 4 C 6 D 1 B

Nimmt man von der ungeraden Zahl AB die Einheit BD weg, so ist der Rest AD gerade. Nun ist aus gleichem Grunde CD gerade. Folglich ist (9, 24. S.) AD — CD = AC eine gerade Zahl.

Der

Der 27. Satz. Lehrsatz.

Die Differenz, AC, einer ungeraden und geraden Zahl, AB, BC, ist eine ungerade Zahl.

Nimmt man von der ungeraden Zahl AB die Einheit AD weg, so ist der Rest	A 1 D 4 C 4 B

DB gerade, folglich (9, 24. S.) DB — BC = DC gerade. Kommt hierzu die Einheit AD, so ist AC eine ungerade Zahl.

Der 28. Satz. Lehrsatz.

Das Product, C, aus einer ungeraden Zahl, A, in eine gerade, B, ist eine gerade Zahl.

Da A . B = C, so bestehet C aus so vielen der B gleichen Zahlen, als in A Einheiten sind. Da nun B eine gerade Zahl, also C die Summe gerader Zahlen: so ist (9, 21. S.) C eine gerade Zahl.	A 3 B 4 C 12

Der 29. Satz. Lehrsatz.

Das Product, C, aus zwey ungeraden Zahlen, A, B, ist eine ungerade Zahl.

Da A . B = C, so bestehet C aus so vielen der B gleichen Zahlen, als in A Einheiten sind. Da nun A, B, ungerade Zahlen, also C die Summe einer ungeraden Menge	A 3 B 5 C 15

ungerader Zahlen: so ist (9, 20. S.) C eine ungerade Zahl.

Der 30. Satz. Lehrsatz.

Die ungerade Zahl, A, die eine gerade Zahl, B, misset, misset auch deren Hälfte.

Es messe A die B nach der Zahl C, so ist C nicht ungerade. Denn wäre dies, so wäre A . C = B, die Summe einer unge-	A 3 B 12 C 4

raden

raden Menge ungerader Zahlen, folglich (9, 23. S.) ungerade, wider das Angenommene. Demnach ist C eine gerade Zahl. Folglich misset A die B nach einer geraden Zahl, und muß also auch die Hälfte der B messen.

Der 31. Satz. Lehrsatz.

Die ungerade Zahl, A, die zu einer Zahl, B, eine Primzahl ist, ist auch zu deren Doppeltem, C, eine Primzahl.

A 3	B 5
D —	C 10

Wären A, C, nicht Primzahlen zu einander, so würden sie von irgend einer Zahl D gemessen, welche ungerade seyn muß, weil A ungerade ist. Demnach misset die ungerade Zahl D die gerade C, folglich auch deren Hälfte, das ist B; also misset D die A und die B, gegen das Angenommene. Folglich sind A, C, Primzahlen zu einander.

Der 32. Satz. Lehrsatz.

Alle durch fortgesetzte Verdoppelung von der Zwey, A, an entstandene Zahlen, B, C, D, sind nur geradmal gerade.

1	A 2	B 4	C 8	D 16

Daß sie es sind, erhellet aus der Entstehung dieser Zahlen. Aber sie können auch nichts anders seyn. Denn da sie von der Einheit an stetig proportionirt sind, und nach der Einheit die nächste A eine Primzahl ist: so kann (9, 13. S.) keine der Zahlen B, C, D, von einer andern Zahl außer den in der Proportion ihr vorgehenden gemessen werden. Demnach werden die geraden Zahlen B, C, D, nur von geraden Zahlen gemessen, und sind also (7, 8. E.) nur geradmal gerade.

Der 33. Satz. Lehrsatz.

Eine Zahl, A, deren Hälfte ungerade ist, ist nur gerademal ungerade.

Da

Da A von ihrer Hälfte, einer ungeraden Zahl, nach einer geraden Zahl gemessen wird: so ist sie (7, 9. E.) gerademal ungerade. Sie kann aber auch nicht anders seyn. Denn wäre A gerademal gerade, so würde sie (7, 8. E.) von einer geraden Zahl nach einer geraden Zahl gemessen, folglich auch ihre Hälfte, welches, weil diese ungerade ist, nicht seyn kann. Folglich ist A nur gerademal ungerade.

| A 10 |

Der 34. Satz. Lehrsatz.

Eine gerade Zahl, A, die nicht durch fortgesetzte Verdoppelung von der Zwey an entstanden, deren Hälfte auch nicht ungerade ist, ist sowohl gerademal gerade, als auch gerademal ungerade.

Daß A gerademal gerade sey, folgt (7, 8. E.) daraus, daß ihre Hälfte nicht ungerade ist. Sie ist aber auch gerademal ungerade. Denn, nimmt man von A die Hälfte, von dieser wieder die Hälfte, und immer so fort: so kommt man zuletzt auf eine ungerade Zahl, von welcher A nach einer geraden Zahl gemessen wird. Käme man nicht auf solche Zahl, so müßte man auf die Zwey kommen, und dann würde A, wider die Voraussetzung, durch fortgesetzte Verdoppelung von der Zwey an entstanden seyn. Demnach ist A auch gerademal ungerade.

| A 12 |

Der 35. Satz. Lehrsatz.

Sind mehrere Zahlen, A, BC, D, EF, stetig proportionirt, und man nimmt von der zweyten, BC, und von der letzten, EF, der ersten A gleiche Zahlen GC, HF, weg: so verhält sich der Rest von der zweyten, BG, zur ersten Zahl, A, wie der Rest von der letzten, EH, zur Summe aller vorhergehenden Zahlen, A, BC, D.

Es sey FK = BC, und FL = D. Da aber auch FH = GC, so ist Rest HK = Rest GB. Nun ist EF : D = D : BC

$D:BC = BC:A$; auch $FH = A$. Folglich ist $EF:FL = FL:FK = FK:FH$, folglich (5, 17. S.) getrennt $EL:LF = LK:FK = KH:FH$, folglich (7, 12. S.) $KH:FH = (EL+LK+KH):(LF+KF+HF)$. Nun ist $KH = BG$, $FH = A$, $EL+LK+KH = EH$, und $LF+KF+HF = A+BC+D$. Folglich ist $BG:A = EH:(A+BC+D)$.

A 8

B 4 G 8 C

D 18

E 9 L 6 K 4 H 8 F

Der 36. Satz. Lehrsatz.

Nimmt man so viele von der Einheit an stetig verdoppelte Zahlen, 1, A, B, C, D, bis deren Summe eine Primzahl, E, wird: so ist das Product, FG, aus solcher Summe, E, und der letzten jener Zahlen, D, eine vollständige Zahl.

Nimmt man von E an so viel stetig verdoppelte Zahlen E, HK, L, M, als Zahlen A, B, C, D, sind: so ist (5, 22. S.) aus dem Gleichen $A:D = E:M$, folglich (7, 19. S.) $A.M = D.E = FG$. Folglich misset M die FG nach der Zahl A, das ist, nach der Zwey, daß also $FG = 2M$ ist, folglich E, HK, L, M, FG, welche alle durch Verdoppelung von einander entstehen, stetig proportionirt sind.

1 E 31

A 2 H 31 N 31 K

B 4 L 124

C 8 M 248

D 16 F 31 O 465 G

Q — P —

Nimmt man nun von der zweyten HK, wie auch von der letzten FG, die der ersten E gleichen Zahlen HN, FO, weg: so ist (9, 35. S.) $NK:E = OG:(M+L+HK+E)$. Da nun $NK = E$, so ist auch $OG = M+L+HK+E$. Da aber $FO = E$, und $E = 1+A+B+C+D$, so ist die ganze $FG = 1+A+B+C+D+E+HK+L+M$, und wird von allen gemessen. Aber auch von keiner an-

andern Zahl. Denn es werde, wenn es möglich ist, FG von P gemessen, welche mit keiner der oben gedachten Zahlen einerley sey, und es geschehe dies nach der Zahl Q, daß also P . Q = FG = E . D: so ist (7, 19. S.) E:Q = P:D. Nun sind 1, A, B, C, D, stetig proportionirt, und A eine Primzahl, daß also (9, 13. S.) D von keiner andern Zahl, außer von A, B, C, also nicht von P gemessen wird. Folglich wird (7, 20. S.) Q nicht von E gemessen. Da aber E eine Primzahl, folglich (7, 31. S.) E, Q, Primzahlen zu einander, folglich (7, 23. S.) die kleinsten in ihrer Verhältniß: so wird (7, 21. S.) P von E, und D von Q nach einerley Zahl gemessen. Nun wird D von keiner andern Zahl, als von A, B, C, gemessen. Folglich ist Q mit einer der Zahlen A, B, C, etwa mit B, einerley. Da nun B, C, D, und E, KH, L, in einerley Verhältniß, so ist aus dem Gleichen B:D = E:L, so ist (7, 19. S.) B . L = D . E = Q . P, folglich (7, 19. S.) Q:B = L:P. Da also Q mit B einerley, so ist auch L mit P einerley, welches dem Angenommenen, daß P mit keiner der Zahlen A, B, C, u. s. w. einerley sey, widerspricht. Folglich wird FG von keiner andern Zahl, als von den oben gedachten gemessen. Nun war FG den oben gedachten zusammen gleich. Folglich ist FG eine vollständige Zahl.

1	E 31
A 2	H 31 N 31 K
B 4	L 124
C 8	M 246
D 16	F 31 O 465 G
	Q — P —

Euklid's

Euklid's Elemente

Zehntes Buch.

Erklärungen.

1. Commensurabele Größen heißen, welche von einem und demselben Maaße gemessen werden;

2. Incommensurabele aber, für welche sich gar kein gemeines Maaß finden läßt.

3. Gerade Linien sind in Potenz commensurabel, wenn ihre Quadrate von einem und demselben Flächenraume gemessen werden;

4. In Potenz incommensurabel aber, wenn sich gar kein Flächenraum zum gemeinen Maaße ihrer Quadrate finden läßt.

5. Dieß vorausgesetzt, läßt sich zeigen, daß einer angenommenen geraden Linie unzählige andere gerade Linien entweder commensurabel oder incommensurabel sind; und zwar einige sowohl in Länge als Potenz, andere aber bloß in Potenz. Es heiße daher diese angenommene gerade Linie rational;

6. Auch die, welche ihr entweder in Länge und Potenz, oder bloß in Potenz commensurabel sind, sollen rational heißen;

7. Irrational aber, die ihr incommensurabel sind.

8. Rational heiße auch das Quadrat der angenommenen Linie;

9. Auch was solchem Quadrate commensurabel ist, soll **rational** heißen,

10. **Irrational** aber, was solchem Quadrate incommensurabel ist.

11. Auch soll die Linie, welche einen irrationalen Raum potenzirt, **irrational** heißen, nämlich, wenn es ein Quadrat ist, seine eigene Seite, oder, wenn es eine andere geradlinige Figur ist, die gerade Linie, deren Quadrat dieser Figur gleich ist.

* Das Zeichen commensurabeler Größen soll (∩) ein liegendes lateinisches C seyn. Das Zeichen umgekehrt (∪) bedeutet incommensurabele Größen. Ist diesem Zeichen ein Strich angehängt (∩-) (∪-), so bedeutet dieß, daß die geraden Linien bloß in Potenz commensurabel oder incommensurabel sind.

** Die griechischen Wörter ρητον und αλογον lassen sich nicht besser, als durch **rational** und **irrational** ausdrucken, nur muß man diese Ausdrücke in dem Sinne nehmen, der in obigen Erklärungen genau bestimmt ist, und sie nicht von Zahlen, sondern nur von geraden Linien, von denen bloß hier die Rede ist, in diesem Sinne gebrauchen.

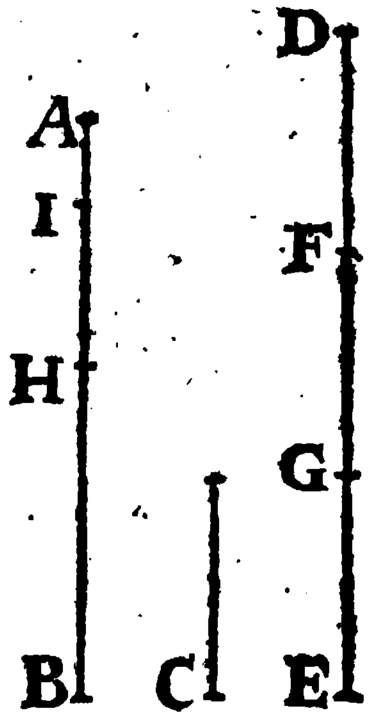
*** δύναμις kann durch **Potenz** übersetzt werden, worunter man aber bloß die zweyte Potenz, oder das Quadrat, verstehen muß. δυνασθαι soll daher durch **potenziren** ausgedruckt, und von Quadratseiten gesagt werden; daß nämlich von einer Linie, deren Quadrat einem gewissen Raume gleich ist, gesagt werde, die Linie **potenzire** diesen Raum. Der Ausdruck, eine Linie **potenzirt über** eine zweyte, heißt, das Quadrat der ersten übertrifft das Quadrat der zweyten um einen gewissen Raum.

Der

Der 1. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey ungleiche Größen, AB, C, gegeben, und man nimmt von der größern, AB, mehr als die Hälfte weg, von dem Reste wieder mehr als die Hälfte, und so immer fort: so kommt man irgend einmal auf einen Rest, welcher kleiner ist, als die gegebene kleinere Größe, C.

Mache, was immer angeht, von C ein Vielfaches DE, welches zunächst $>$ AB ist, und theile solches in seine der C gleiche Theile, DF, FG, GE. Von AB nimm mehr als die Hälfte BH, von dem Reste AH mehr als die Hälfte HI, und dieß so fort, bis in AB so viele Abschnitte AI, IH, HB, als Theile in DE, sind.



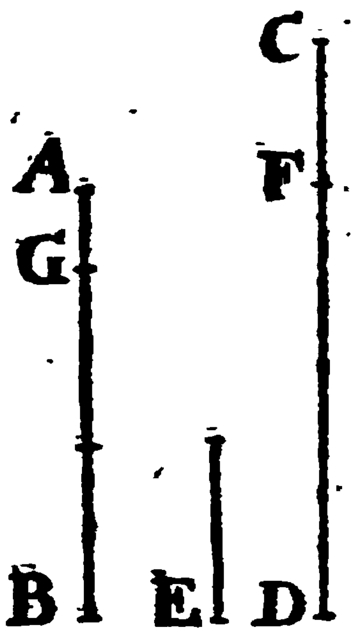
Da also DE $>$ AB ist, und von DE weniger als die Hälfte EG, von AB aber mehr als die Hälfte BH weggenommen wird: so ist der Rest GD $>$ AH. Nun wird von GD die Hälfte GF, von AH aber mehr als die Hälfte HI, weggenommen. Folglich ist der Rest DF $>$ A, oder, weil DF $=$ C ist, C $>$ AI, folglich der Rest AI $<$ C.

Auf ähnliche Art wird der Satz bewiesen, wenn in AB immer nur die Hälfte weggenommen wird.

Der 2. Satz. Lehrsatz.

Zwey ungleiche Größen, AB, CD, sind, wenn bey wiederholter Wegnahme des Kleinern vom Größern kein Rest das ihm nächst Vorhergehende genau misset, incommensurabel.

Wären AB, CD, commensurabel, so hätten sie irgend ein gemeines Maaß, E. Nun messe die kleinere AB die DF, daß der Rest FC < AB, und dieser Rest FC messe die BG, daß der Rest AG < FC, und so fort, bis ein Rest AG < E kommt.



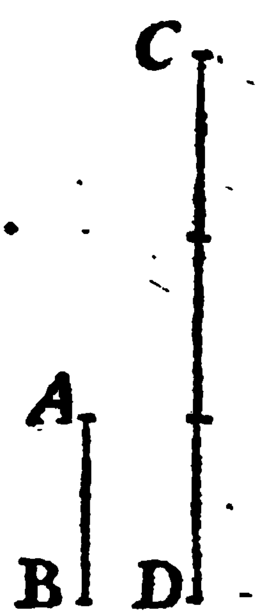
Da E die AB, und AB die DF misset: so misset E die DF, aber auch die ganze ED, folglich den Rest FC. Da also E die FC, und FC die BG misset; so misset E die BG, aber auch die ganze BA, folglich den Rest AG, also das Größere E das Kleinere AG, welches unmöglich ist. Demnach haben die Größen AB, CD, kein gemeines Maaß, und sind folglich incommensurabel.

Der 3. Satz. Aufgabe.

Für zwey gegebene commensurabele Größen, AB, CD, das größte gemeine Maaß zu finden.

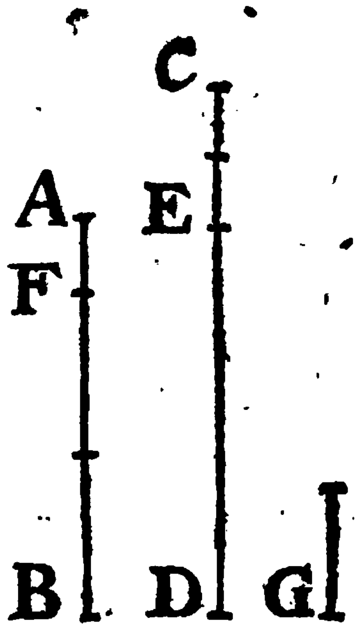
Erster Fall.

Wenn die kleinere AB die größere CD misset: so ist sie, weil sie auch sich selbst misset, ein gemeines Maaß für beyde; aber auch das größte, weil keine größere die AB messen kann.



Zweyter Fall.

Wenn AB die CD nicht misset: so muß, weil diese Größen commensurabel sind, bey wiederholter Wegnahme des Kleinern vom Größern, endlich ein Rest das ihm nächst Vorhergehende genau messen. Es messe nämlich AB die ED,



ED, daß der Rest CE < AB; CE messe die BF, daß der Rest AF < CE; und nun messe AF die CE: so ist AF das größte gemeine Maaß der AB, CD.

Denn da AF die CE, und CE die BF misset: so misset AF die BF, aber auch sich selbst, folglich die ganze AB. Da also AF die AB, und AB die ED misset; so misset AF die ED, aber auch die CE, folglich die ganze CD. Demnach misset AF die AB und CD, und ist also deren gemeines Maaß; aber auch das größte.

Denn gesetzt, es sey, wo möglich, ein grösseres G. Da G die AB, und AB die DE misset: so misset G die DE, aber auch die ganze CD, folglich den Rest CE. Da also G die CE, und CE die BF misset: so misset G die BF, aber auch die ganze AB, folglich den Rest AF, also das Größere G das Kleinere AF, welches unmöglich ist. Demnach haben AB, CD, kein gemeines Maaß, das grösser als AF wäre, folglich ist AF ihr größtes gemeines Maaß.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß eine Größe, welche zwey Größen misset, auch das größte gemeine Maaß derselben messe.

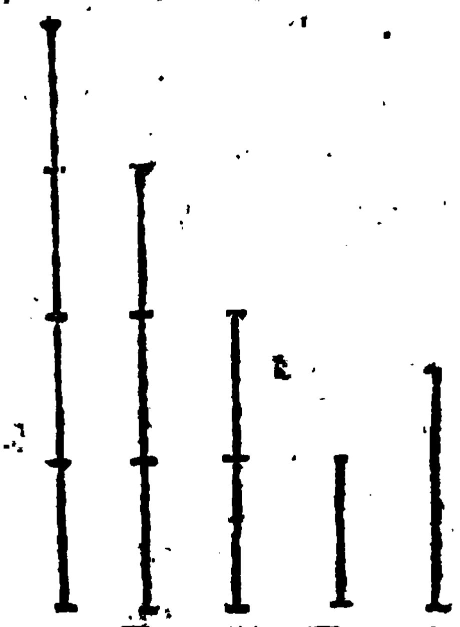
Der 4. Satz. Aufgabe.

Für drey gegebene commensurabele Größen, A, B, C, das größte gemeine Maaß zu finden.

Nimm (10, 3. S.) für A und B das größte gemeine Maaß D.

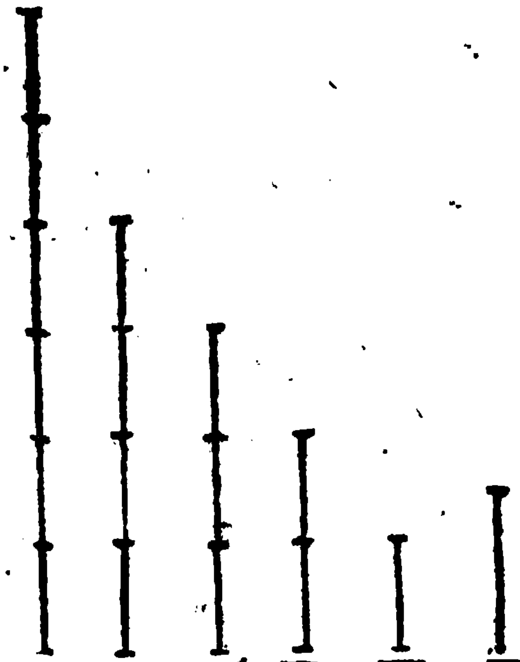
Erster Fall.

Misset nun D auch die C: so ist D offenbar ein gemeines Maaß der A, B, C; aber auch das größte. Denn es sey, wo möglich, ein noch grösseres E. Da E die A, B, C, also die A, B, misset, so misset (10, 3. Zus.) E auch die D, also das Größere E das Kleinere D, welches unmöglich ist.



Zweyter Fall.

Misset aber D nicht die C: so suche (10, 3. S.) E das größte gemeine Maaß der C, D, welches dann das größte gemeine Maaß der A, B, C, ist.



Denn das gemeine Maaß der commensurabelen Größen A, B, C, misset A, B, also (10. 3. Zus.) auch deren größtes gemeines Maaß D, aber auch C, folglich C und D, welche daher commensurabel sind.

Nun habe man E, das größte gemeine Maaß der C, D, gefunden. Da E also die D, und D die A, B, misset: so misset E die A, B, aber auch die C, und ist also ein gemeines Maaß der A, B, C; aber auch das größte.

Denn es sey, wo möglich, ein noch grösseres F. Da F die A, B, also (10, 3. Zus.) die D misset; aber auch die C, folglich C und D: so misset F (10, 3. S.) auch die E, die größere F, die kleinere E, welches unmöglich ist. Demnach haben A, B, C, kein gemeines Maaß, das größer, als E, wäre. Folglich ist E ihr größtes gemeines Maaß.

Zusatz.

Zusatz.

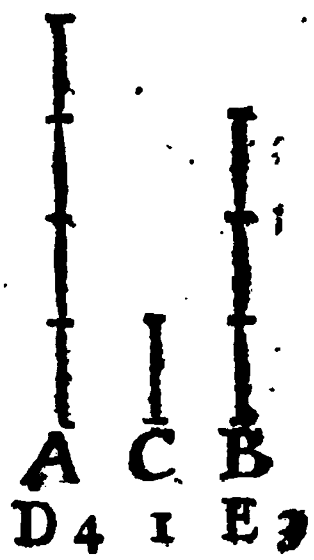
Hieraus erhellet, daß eine Größe, welche drey Größen misset, auch das größte gemeine Maaß derselben messe.

Auf ähnliche Art findet man auch für mehrere Größen das größte gemeine Maaß, und wendet auch hierauf obigen Zusatz an.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

Commensurabele Größen, A, B, verhalten sich wie Zahlen zu einander.

Da A, B, commensurabel sind, so haben sie irgend ein gemeines Maaß C. Ist nun C in A nach der Zahl D, in B aber nach der Zahl E enthalten: so ist C:A = 1:D und durch Umkehrung A:C = D:1, auch C:B = 1:E, folglich aus dem Gleichen A:B = D:E.

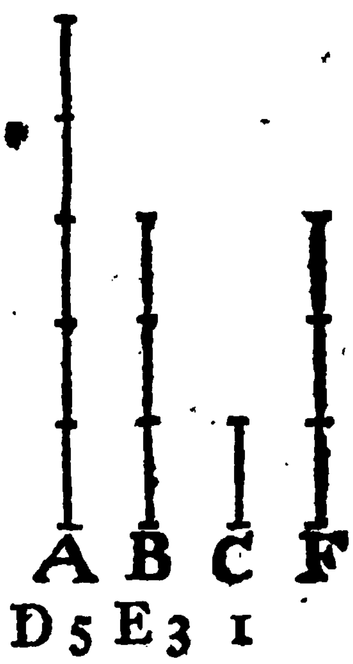


Der 6. Satz. Lehrsatz.

Größen, A, B, welche sich wie Zahlen, D, E, zu einander verhalten, sind commensurabel.

Theile A in so viele gleiche Theile, als in D Einheiten sind, und es sey jeder derselben = C. Mache von C ein solches Vielfaches F, als in E Einheiten sind.

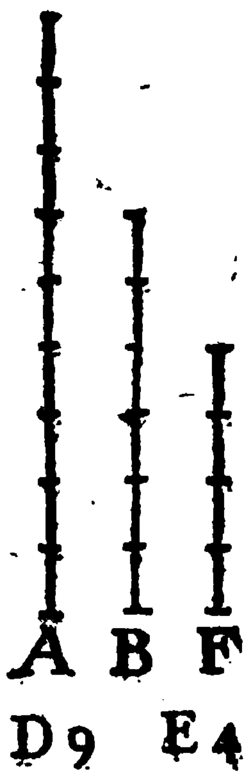
Da also A:C = D:1, und C:F = 1:E, so ist aus dem Gleichen A:F = D:E. Nun ist nach der Voraussetzung A:B = D:E. Folglich ist A:F = A:B, folglich (5, 9. S.) F = B. Aber C misset die F, also auch die B, aber auch die A, folglich A und B. Demnach sind A, B, commensurabel.



Ein anderer Beweis.

Theile A in so viele gleiche Theile, als in D Einheiten sind, und es sey jeder derselben = C. Demnach ist C : A = 1 : D. Nun ist nach der Voraussetzung A : B = D : E. Folglich ist aus dem Gleichen C : B = 1 : E. Aber 1 misset die E, also auch C die B, aber auch die A, folglich A und B. Demnach sind A, B, commensurabel.

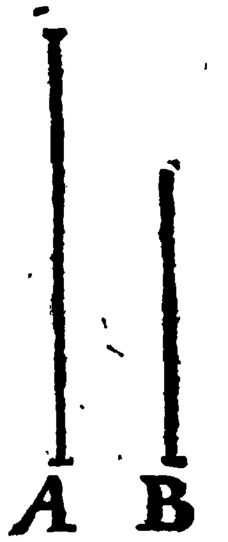
Zusatz.



Hieraus erhellet, daß, wenn zwey Zahlen, D, E, und eine gerade Linie A, gegeben worden, eine andere gerade Linie, F, gefunden werden könne, daß D : E = A : F sey. Sucht man nun zwischen A, F, eine mittlere Proportionallinie B: so verhält sich (6, 20. Zus.) die Figur auf A, zu der ihr ähnlichen und ähnlich beschriebenen Figur auf B, wie A : F, also auch wie D : E.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Incommensurabele Größen, A, B, verhalten sich nicht wie Zahlen zu einander.

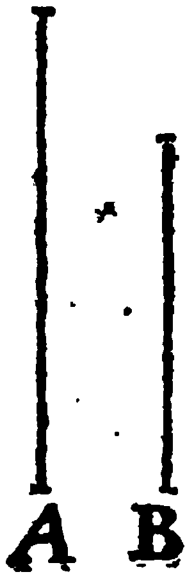


Denn verhielten sie sich wie Zahlen, so wären sie (10, 6. S.) commensurabel; gegen das Angenommene.

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Größen, A, B, die sich nicht wie Zahlen zu einander verhalten, sind incommensurabel.

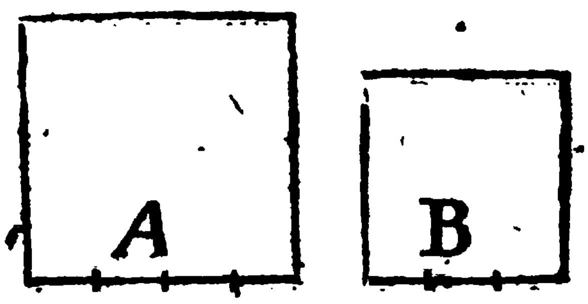
Denn wären sie commensurabel, so verhielten sie sich (10, 5. S.) wie Zahlen; gegen das Angenommene.



Der 9. Satz. Lehrsatz.

Die Quadrate gerader in Länge commensurabeler Linien, A, B, verhalten sich wie Quadratzahlen; und Quadrate, welche sich wie Quadratzahlen verhalten, haben in Länge commensurabele Seiten, A, B. Hingegen die Quadrate gerader in Länge incommensurabeler Linien, A, B, verhalten sich nicht wie Quadratzahlen; und Quadrate, welche sich nicht wie Quadratzahlen verhalten, haben nicht in Länge commensurabele Seiten, A, B.

Erster Theil.



C 4 D 3

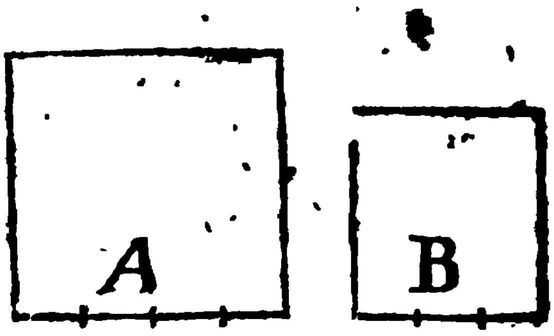
E 16 F 12 G 9

Sind die geraden Linien A, B, in Länge commensurabel: so verhalten sich ihre Quadrate wie Quadratzahlen.

Denn A, B, verhalten sich (10, 5. S.) wie Zahlen C, D, oder es ist $A:B = C:D$. Nun ist (6, 20. S.) $\square A : \square B = 2(A:B)$ und (8, 11. S.) $C^2 : D^2 = 2(C:D)$. Folglich ist $\square A : \square B = C^2 : D^2$.

Ein anderer Beweis. Da $A \frown B$, so ist (10, 5. S.) $A:B = C:D$. Nun sey $C^2 = E$; $C.D = F$; $D^2 = G$;

 also



C 4 D 3
E 16 F 12 G 9

also (7, 17. S.) $E : F = C : D$. Folglich ist $A : B = E : F$. Nun ist (6, 16. S.) auch $A : B = \square A : A \times B$. Folglich ist $\square A : A \times B = E : F$. Nun ist eben so $C : D = A : B = F : G = A \times B : \square B$. Folglich ist aus dem Gleichen $\square A : \square B = E : G = C^2 : D^2$.

Zweyter Theil.

Ist $\square A : \square B = C^2 : D^2$, so ist $A \cap B$.

Denn es ist (6, 20. S.) $\square A : \square B = 2\,(A : B)$ und (8, 11. S.) $C^2 : D^2 = 2\,(C : D)$. Nun ist angenommen, $\square A : \square B = C^2 : D^2$. Folglich ist $A : B = C : D$, folglich (10, 6. S.) $A \cap B$.

Ein anderer Beweis. Ist $\square A : \square B = E : G$, daß $C^2 = E$, und $D^2 = G$, auch $C . D = F$; so sind (7, 17. S.) E, F, G, stetig proportionirt in der Verhältniß $C : D$, das ist, $E : F = F : G = C : D$. Nun ist (6, 1. S.) $A : B = \square A : A \times B$, auch $A : B = A \times B : \square B$, also $\square A : A \times B = A \times B : \square B$. Folglich ist $\square A : A \times B = E : F = C : D$. Nun war $\square A : A \times B = A : B$. Folglich ist $A : B = C : D$, folglich (10, 6. S.) $A \cap B$.

Dritter Theil.

Sind A, B, nicht in Länge commensurabel; so verhalten sich ihre Quadrate nicht wie Quadratzahlen. Denn wäre dieß, so müßten ihre Seiten A, B, in Länge commensurabel seyn; gegen das Angenommene.

Vierter Theil.

Verhalten sich die Quadrate der A, B, nicht wie Quadratzahlen: so sind ihre Seiten A, B, nicht in Länge commensurabel. Denn wäre dieß, so müßten sich ihre Quadrate wie Quadratzahlen verhalten; gegen das Angenommene.

Zusatz.

Zusatz.

Aus dem Bewiesenen erhellet, daß alle in Länge commensurabele Linien auch in Potenz commensurabel; aber nicht alle in Potenz commensurabele Linien auch in Länge commensurabel sind. Ferner erhellet, daß nicht alle in Länge incommensurabele Linien auch in Potenz incommensurabel, aber alle in Potenz incommensurabele Linien auch in Länge incommensurabel sind. Nämlich

1. Die Quadrate aller in Länge commensurabeler Linien verhalten sich wie Quadratzahlen, also wie Zahlen, und sind also commensurabel. Demnach sind solche Linien nicht bloß in Länge, sondern auch in Potenz commensurabel.
2. Sind Linien in Potenz commensurabel, so verhalten sich ihre Quadrate wie Zahlen; also entweder wie Quadratzahlen, oder schlechthin wie zwey andere Zahlen. Im ersten Falle sind diese Linien, als die Seiten der Quadrate, auch in Länge, im zweyten aber nicht in Länge commensurabel. Demnach sind die in Potenz commensurabelen Linien nicht immer, sondern nur alsdann auch in Länge commensurabel, wenn sich ihre Quadrate wie Quadratzahlen verhalten.
3. Nicht alle in Länge incommensurabele Linien sind auch in Potenz incommensurabel; weil Linien in Potenz commensurabel; aber in Länge incommensurabel seyn können.
4. Alle in Potenz incommensurabele Linien sind auch in Länge incommensurabel. Denn wären sie in Länge commensurabel, so müßten sie auch in Potenz commensurabel seyn; gegen das Angenommene.

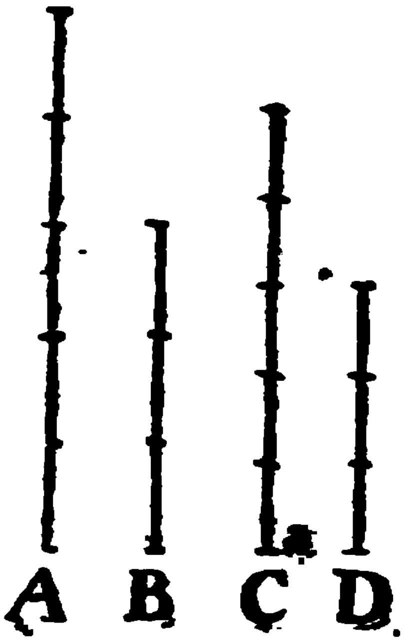
Der 10. Satz. Lehrsatz.

Wenn von vier proportionirten Größen, A, B, C, D, die erste A, der zweyten B, commensurabel ist, so ist es auch die dritte C der vierten D; ist aber die erste der

zwey-

zweyten incommensurabel, so ist es auch die dritte der vierten.

Sind A, B, commensurabel, so verhalten sie sich (10, 5. S.) wie Zahlen. Nun ist A : B = C : D. Folglich verhalten sich auch C, D, wie Zahlen, und sind also (10, 6. S.) auch commensurabel.



Sind A, B, incommensurabel, so verhalten sie sich (10, 7. S.) nicht wie Zahlen. Nun ist A : B = C : D. Folglich verhalten sich auch C, D, nicht wie Zahlen, und sind also (10, 8. S.) auch incommensurabel.

Lehnsatz

Da in den arithmetischen Büchern (8, 26. S.) bewiesen worden, daß ähnliche Flächenzahlen sich wie Quadratzahlen verhalten, und daß Zahlen, die sich wie Quadratzahlen verhalten, ähnliche Flächenzahlen sind, so folgt: daß unähnliche Flächenzahlen, deren Seiten also nicht proportionirt sind, sich nicht wie Quadratzahlen verhalten; weil sie sonst ähnliche Flächenzahlen seyn müßten, gegen das Angenommene.

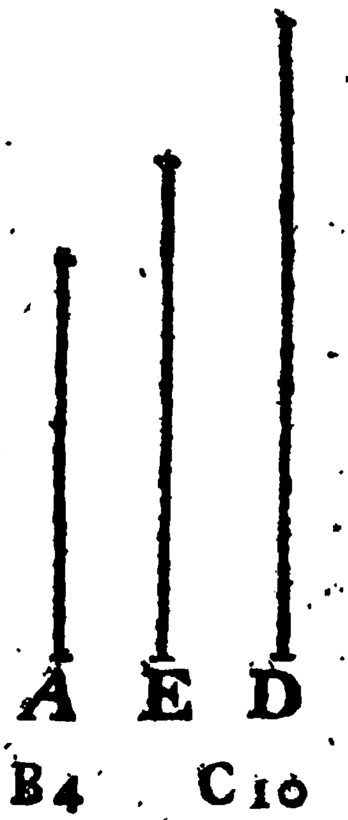
Der 11. Satz. Aufgabe.

Zu einer gegebenen geraden Linie, A, zwey andere zu finden, von denen die eine ihr bloß in Länge, die andere aber zugleich in Potenz incommensurabel ist.

Erstlich. Nimm zwey Zahlen B, C, welche sich nicht wie Quadratzahlen verhalten, folglich unähnliche Flächenzahlen sind, und mache (10, 6. Zus.) B : C = □ A : □ D; so sind A, D, bloß in Länge incommensurabel.

Denn

Denn da $B : C = \square A : \square D$, so verhalten sich $\square A$, $\square D$, so wie B, C, nicht wie Quadratzahlen. Folglich ist (10, 9. S.) $A \cup D$.



Zweytens. Nimm zwischen A, D, die mittlere Proportionallinie E: so sind A, E, in Länge und Potenz zugleich incommensurabel.

Denn da $A : E = E : D$, so ist (6, 20. Zus. 2.) $A : D = \square A : \square E$. Folglich sind (10, 10. S.) $\square A$, $\square E$, so wie A, D, incommensurabel. Demnach sind A, E, in Potenz, folglich (10, 9. Zus. 4.) auch in Länge incommensurabel.

Der 12. Satz. Lehrsatz.

Grössen, A, B, die einer und derselben Grösse, C, commensurabel sind, sind einander selbst commensurabel.

Denn da $A \cap C$, und $B \cap C$, so verhalten sich A, C, sowohl, als B, C, wie Zahlen. Es sey daher $A : C = D : E$, und $C : B = F : G$, und man nehme (8, 4. S.) in den gegebenen Verhältnissen an einanderhangende Zahlen, H, K, L, daß also $D : E = H : K$, und $F : G = K : L$.

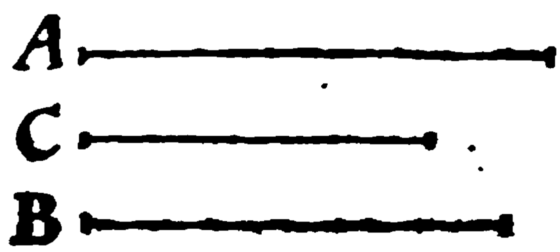
Da also $A : C = D : E$, und $D : E = H : K$; so ist $A : C = H : K$. Da auch $C : B = F : G$, und $F : G = K : L$; so ist $C : B = K : L$; folglich **aus dem Gleichen** $A : B = H : L$. Demnach verhalten sich A, B, wie Zahlen, und sind also commensurabel.

Der

Der 13. Satz. Lehrsatz.

Zwey Größen, A, B, von denen die eine, A, einer und derselben Größe, C, commensurabel, die andere, B, aber incommensurabel ist, sind incommensurabel.

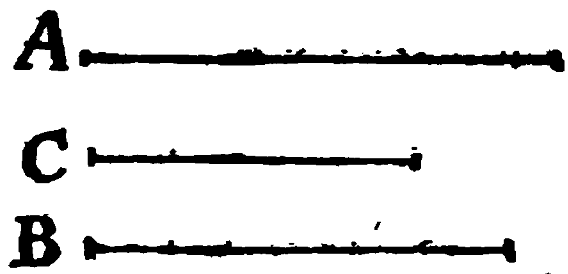
Gesetzt, es wäre $A \cap B$. Nun ist auch $C \cap A$. Folglich wäre (10 12. S.) auch $B \cap C$; gegen das Angenommene. Demnach ist nicht $A \cap B$, folglich ist $A \cup B$.



Der 14. Satz. Lehrsatz.

Ist von zwey commensurabeln Größen, A, B, die eine, A, irgend einer Größe, C, incommensurabel: so ist auch die andere, B, eben derselben, C, incommensurabel.

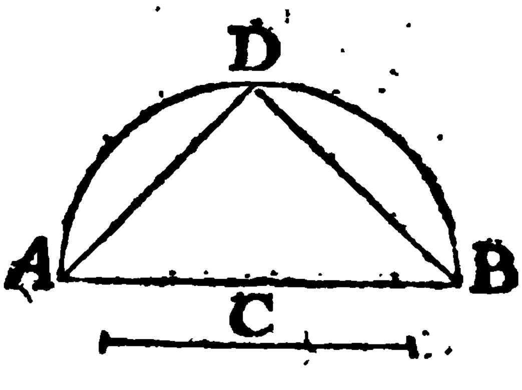
Gesetzt, es wäre $B \cap C$. Nun ist auch $A \cap B$. Folglich wäre (10, 12. S.) $A \cap C$; gegen das Angenommene. Demnach ist nicht $B \cap C$, folglich ist $B \cup C$.



Lehnsatz.

Aus zwey gegebenen ungleichen geraden Linien, AB, C, zu finden, um wie viel die größere, AB, über die kleinere, C, potenzirt.

Beschreibe über AB den Halbkreis ADB, trage (4, 1. S.) in denselben die $AD = C$, und ziehe DB: so ist DB das Verlangte.



Denn da (3, 31. S.) $ADB =$ R., so ist (1, 47. S.) $\square AB - \square AD = \square DB$; folglich, weil $AD = C$ ist, $\square AB - \square C = \square DB$.

Um

Um hingegen die Linie zu finden, deren Quadrat den Quadraten der beyden AD, BD, zusammen gleich ist; verfahre man also:

Man setze AD, BD, unter einem rechten Winkel, ADB, an einander, und ziehe AB; da dann (1, 47. S.) □ AB = □ AD + □ DB.

Der 15. Satz. Lehrsatz.

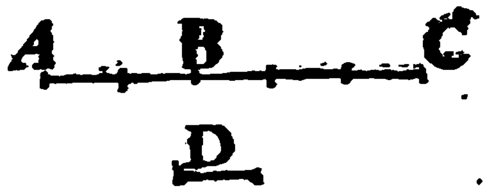
Sind vier gerade Linien, A, B, C, D, proportionirt, und es potenzirt die erste, A, über die zweyte, B, um das Quadrat einer der ersten in Länge entweder commensurabeln oder incommensurabeln Linie, E: so potenzirt auch die dritte, C, über die vierte, D, um das Quadrat einer der dritten in Länge im ersten Falle commensurabeln, im zweyten aber incommensurabeln Linie, F.

Da A:B = C:D, so ist (6, 22. Zus.) □ A : □ B = □ C : □ D. Nun ist angenommen □ A = □ B + □ E, und □ C = □ D + □ F. Folglich ist □ B + □ E : □ B = □ D + □ F : □ D, folglich (5, 17. S.) getrennt □ E : □ B = □ F : □ D, folglich (6, 22. S.) E:B = F:D, also (5, 4. S.) umgekehrt B:E = D:F. Nun ist angenommen A:B = C:D. Folglich ist (5, 22. S.) aus dem Gleichen A:E = C:F. Folglich (10, 10. S.) sind C, F, entweder commensurabel oder incommensurabel, nachdem es A, E, sind.

Der 16. Satz. Lehrsatz.

Werden zwey commensurabele Größen, AB, CD, zusammengesetzt: so ist das Ganze, AC, jeder von beyden commensurabel. Und ist das Ganze, AC, einer von beyden, AB, commensurabel; so sind beyde commensurabel.

Erst-

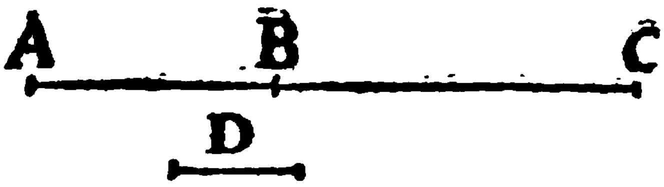


Erstlich. Ist AB ∩ BC, so misset irgend eine Größe D die AB, BC, folglich auch das Ganze AC, also alle drey. Folglich ist AC sowohl der AB, als BC commensurabel.

Zweytens. Ist AC ∩ AB, so misset irgend eine Größe D die AC, AB, folglich auch den Rest BC, aber auch die AB, also beyde. Folglich sind AB, BC, commensurabel.

Der 17. Satz. Lehrsatz.

Werden zwey incommensurabele Größen, AB, BC, zusammengesetzt: so ist das Ganze, AC, jeder von beyden incommensurabel. Und ist das Ganze, AC, einer von beyden, AB, incommensurabel: so sind beyde incommensurabel.



Erstlich. Es sey AB ∪ BC. Wären nun AC, AB, nicht incommensurabel, so misset irgend eine Größe D die AC, AB, folglich auch den Rest BC, also AB, BC. Folglich wären AB, BC, commensurabel; gegen das Angenommene. Demnach werden AC, AB, von keiner Größe gemessen, und sind also incommensurabel. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß AC, BC, incommensurabel sind. Demnach ist AC sowohl der AB, als BC incommensurabel.

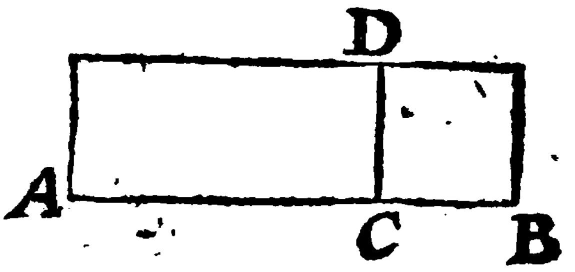
Zweytens. Es sey AC ∪ AB. Wären nun AB, BC, nicht incommensurabel, so misset irgend eine Größe die AB, BC, folglich auch das Ganze AC, also AC, AB, welche daher commensurabel sind; gegen das Angenommene. Folglich sind AB, BC, incommensurabel.

Lehnsatz.

Wird an einer geraden Linie, AB, ein Rectangel, AD, entworfen, dessen Ergänzung ein Quadrat, BD, ist: so ist

ist dasselbe unter den von dem Entwurfe gemachten Abschnitten solcher Linie, AC, CB, enthalten.

Denn da AD = AC × CD, aber DB ein Quadrat, also CD = CB: so ist AD = AC × CB.

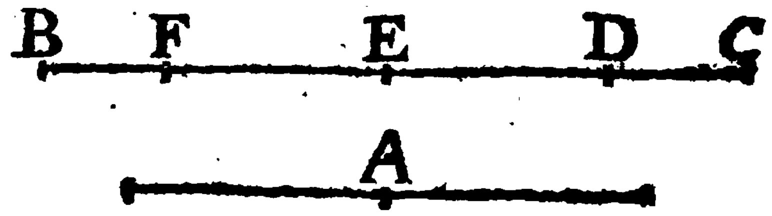


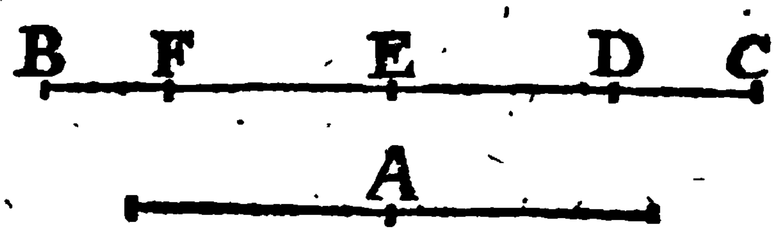
Der 18. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey ungleiche gerade Linien, A, BC, gegeben, und wird ein dem vierten Theile des Quadrats der kleinern, A, gleiches Rectangel an der größern, BC, entworfen, daß dessen Ergänzung ein Quadrat ist, und die gemachten Abschnitte solcher Linie, BD, DC, in Länge commensurabel sind: so potenzirt die größere, BC, um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabeln Linie, über die kleinere, A. Und wird, wenn die größere, BC, um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabeln Linie über die kleinere, A, potenzirt, ein dem vierten Theile des Quadrats der kleinern, A, gleiches Rectangel, an der größern, BC, entworfen, dessen Ergänzung ein Quadrat ist: so sind die gemachten Abschnitte solcher Linie, BD, DC, in Länge commensurabel.

Erster Theil.

Halbirt man BC in E, und macht FE = ED: so ist auch BF = DC. Da (2, 5. S.) BD × DC + □ ED = □ EC; so ist auch 4 (BD × DC) + 4 □ ED = 4 □ EC. Nun ist nach der Voraussetzung 4 (BD × DC) = □ A; aber 4 □ ED = □ DF, weil 2 ED = DF, und 4 □ EC = □ BC, weil 2 EC = BC. Folglich ist □ A + □ DF = □ BC, also □ BC − □ A = □ DF.





Da nun $BD \cap DC$, so ist (10, 16. S.) auch $BC \cap DC$. Nun war $DC = BF$, also $DC : DC + BF = 1 : 2$, also (10, 6. S.) $DC \cap DC + BF$. Folglich ist auch (10, 12. S.) $BC \cap DC + BF$, folglich (10, 16. S.) $BC \cap DF$. Demnach potenzirt die größere BC, um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabeln Linie DF, über die kleinere A.

Zweyter Theil.

Da bey der vorigen Construction $\square BC - \square A = \square FD$, also $BC \cap DF$: so ist (10, 16. S.) $BC \cap DC + BF$. Nun ist $BF = DC$. Folglich ist $BF + DC \cap DC$, also (10, 12. S.) $BC \cap DC$, folglich ist (10, 16. S.) auch $BD \cap DC$.

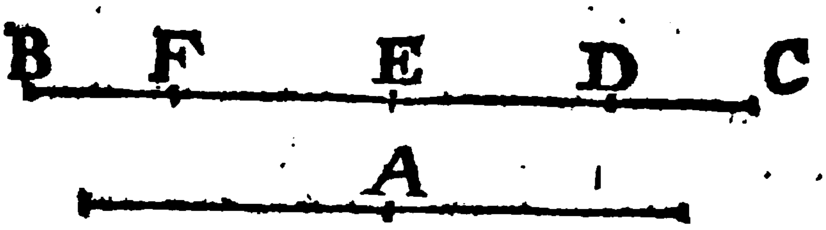
Der 19. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey ungleiche gerade Linien, A, BC, gegeben, und wird ein dem vierten Theile des Quadrats der kleinern, A, gleiches Rectangel an der größern, BC, entworfen, daß dessen Ergänzung ein Quadrat ist, und die gemachten Abschnitte solcher Linie, BD, DC, in Länge incommensurabel sind: so potenzirt die größere, BC, um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabeln Linie über die kleinere, A. Und wird, wenn die größere, BC, um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabeln Linie über die kleinere, A, potenzirt, ein dem vierten Theile des Quadrats der kleinern, A, gleiches Rectangel, an der größern, BC, entworfen, dessen Ergänzung ein Quadrat ist: so sind die gemachten Abschnitte solcher Linie, BD, DC, in Länge incommensurabel.

Erster Theil.

Wird alles, wie beym vorigen Satze, construirt: so wird auf ähnliche Art bewiesen, daß $\square BC - \square A = \square DF$.

Da



Da nun $BD \cup DC$ so ist (10, 17. S.) $BC \cup DC$. Nun ist $DC = BF$, also $DC : DC + BF = 1 : 2$, und daher (10, 6. S.) $DC \cap DC + BF$. Folglich ist (10, 14. S.) $BC \cup DC + BF$, folglich (10, 17. S.) auch die übrige $DF \cup BC$. Demnach potenzirt die größere, BC, um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabeln Linie, DF, über die kleinere, A.

Zweyter Theil.

Da nach derselben Construction $\square BC - \square A = \square DF$, also $BC \cup DF$, so ist (10, 17. S.) $BC \cup DC + FB$. Nun ist (10, 6. S.) $DC + FB \cap DC$. Folglich ist (10, 14. S.) $BC \cup DC$, folglich (10, 17. S.) auch $BD \cup DC$.

Anmerkung.

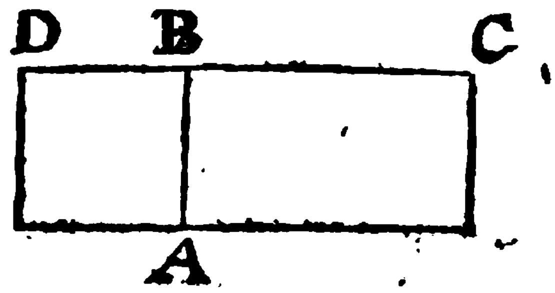
Da (10, 9. Zus.) gezeigt worden ist, daß die in Länge commensurabelen Linien auch allemal in Potenz commensurabel, aber die in Potenz commensurabelen Linien nicht immer auch in Länge commensurabel sind, sondern in Länge entweder commensurabel, oder incommensurabel seyn können: so erhellet, daß (10, 6. E.)

1. Eine gerade Linie, welche der angenommenen Rationallinie in Länge commensurabel ist, rational, und jener in Länge und Potenz zugleich commensurabel heiße.

2. Daß eine der angenommenen Rationallinie in Potenz commensurabele Linie, wenn sie es auch in Länge ist, eben so heiße; aber wenn sie ihr in Länge incommensurabel ist, rational und jener bloß in Potenz commensurabel genannt werde.

Der 20. Satz. Lehrsatz.

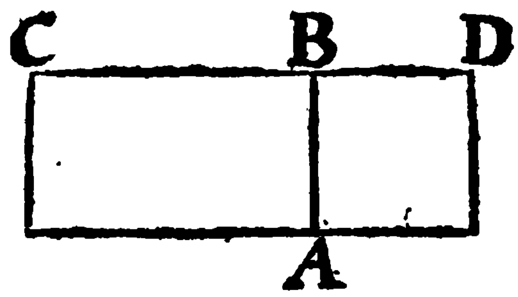
Jedes unter rationalen in Länge commensurabeln Linien, AB, BC, enthaltene Rectangel, AC, ist rational.



Mache von AB das Quadrat AD. Da AB rational, so ist auch (10, 8. E.) AD rational. Da AB ∩ BC, und AB = BD, so ist BD ∩ BC. Nun ist (6, 1. S.) BD : BC = AD : AC. Folglich ist (10, 10. S.) AD ∩ AC. Nun war AD rational. Folglich ist (10, 9. E.) auch AC rational.

Der 21. Satz. Lehrsatz.

Jedes an einer angenommenen Rationallinie, AB, entworfene Rationalrectangel, AC, giebt eine rationale der angenommenen Rationallinie in Länge commensurabele Breite, BC.



Macht man von AB das Quadrat AD, so ist solches rational, folglich, weil AC rational (10, 9. E.), AD ∩ AC. Nun ist (6, 1. S.) AD : AC = DB : BC. Folglich ist auch DB ∩ BC, also, weil DB = AB, AB ∩ BC. Nun ist AB rational. Folglich ist auch BC rational. Demnach ist BC rational, und der AB in Länge commensurabel.

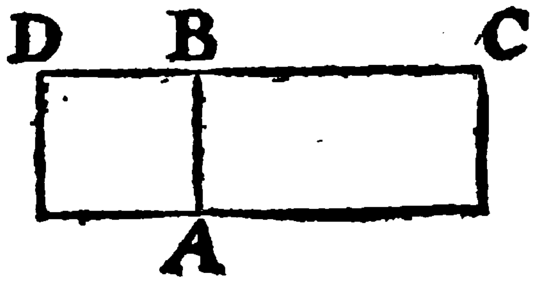
Lehnsatz.

Die Linie, A, welche eine Irrationalfigur potenzirt, ist irrational.

Denn wäre A rational, so wäre (10, 8. E.) □ A, also die diesem Quadrate gleiche Figur rational; gegen das Angenommene.

Der 22. Satz. Lehrsatz und Erklärung.

Jedes unter rationalen bloß in Potenz commensurabelen Linien, AB, BC, enthaltene Rectangel, AC, ist irrational. Auch ist die Linie, welche solchen Raum potenzirt, irrational, und heiße **Mediallinie.**



Macht man von AB das Quadrat AD, so ist solches rational, folglich, weil AB $\frown$ BC, oder AB $\cup$ BC, und AB $=$ BD ist, BD $\cup$ BC. Nun ist (6, 1. S.) BD : BC $=$ AD : AC. Folglich ist AD $\cup$ AC, folglich, weil AD rational, AC irrational. Folglich ist (10, 11. E.) die Linie, welche den Raum AC potenzirt, irrational.

Anmerkung.

Diese Linie heißt deswegen **Mediallinie**, weil ihr Quadrat dem Rectangel AC, oder AB $\times$ BC, gleich, folglich sie die mittlere Proportionallinie zwischen rationalen in Länge incommensurabelen Linien AB, BC, ist.

Lehnsatz.

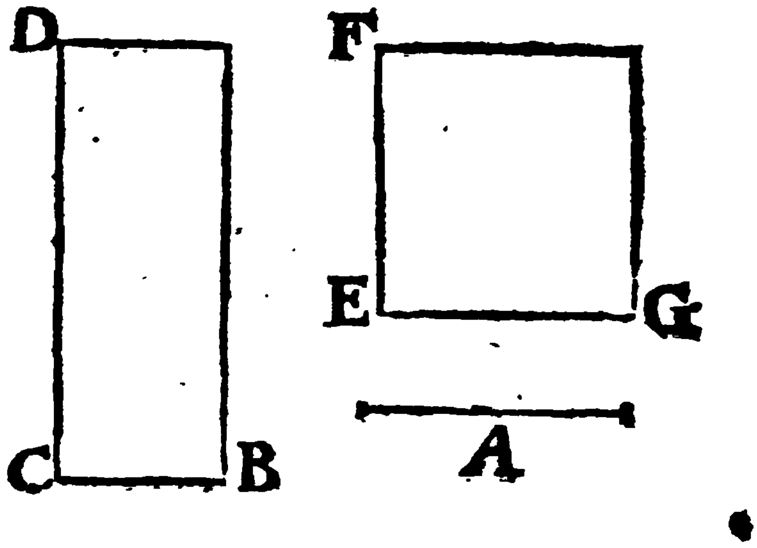
Zwey gerade Linien, AB, BC, verhalten sich wie das Quadrat der ersten zu dem unter beyden enthaltenen Rectangel.

Mache das Quadrat der AB, und vollende das Rectangel AC: so ist AC $=$ AB $\times$ BC, und DB $=$ AB. Nun ist (6, 1. S.) DB : BC $=$ $\square$ AB : AC. Folglich ist AB : BC $=$ $\square$ AB : AB $\times$ BC.

Der 23. Satz. Lehrsatz.

Das dem Quadrate der Mediallinie, A, gleiche an einer angenommenen Rationallinie, BC, entworfene Rectangel, BD, giebt eine rationale der angenommenen Rationallinie in Länge incommensurabele Breite, CD.

Es sey $\square$ A = GF = GF $\times$ EF, daß also, weil A medial (10, 22. Zus.), GE, EF, rational, bloß in Potenz commensurabel sind.



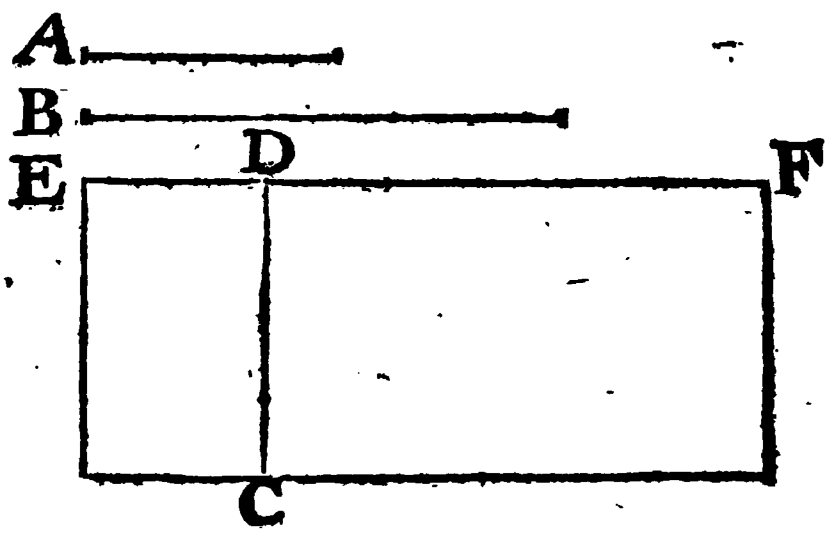
Da nach der Voraussetzung $\square$ A = BD, also die Rectangel BD, FG, gleich und gleichwinklig sind; so ist (6, 14. S.) BC : EG = EF : CD, also (6, 22. S.) $\square$ BC : $\square$ EG = $\square$ EF : $\square$ CD. Nun sind BC, EG, rational, also $\square$ BC $\cap$ $\square$ EG. Folglich ist (10, 10. S.) $\square$ EF $\cap$ $\square$ CD, folglich, da $\square$ EF rational, auch $\square$ CD, also CD rational.

Da, weil EF $\cap$ EG, EF $\cup$ EG, auch (10, 22. Lehns.) EF : EG = $\square$ EF : FE $\times$ EG; so ist (10, 10. S.) $\square$ EF $\cup$ FE $\times$ EG. Nun ist FE $\times$ EG = $\square$ A = DC $\times$ CB, und nach Obigem $\square$ EF $\cap$ $\square$ CD. Folglich ist (10, 13. S.) $\square$ CD $\cup$ DC $\times$ CB. Nun ist (10, 22. Lehns.) $\square$ CD : DC $\times$ CB = DC : CB. Folglich ist DC $\cup$ CB. Demnach ist DC rational und der CB in Länge incommensurabel.

Der 24. Satz. Lehrsatz.

Jede einer Mediallinie, A, commensurabele Linie, B, ist auch eine Mediallinie.

Es sey die Rationallinie CD, und an derselben ein von A potenzirtes Rectangel CE entworfen, welches (10, 23. S.) die rationale der CD in Länge incommensurabele Breite DE giebt.



Es sey ferner an derselben CD ein von B potenzirtes Rectangel CF entworfen, welches die Breite DF giebt.

Da

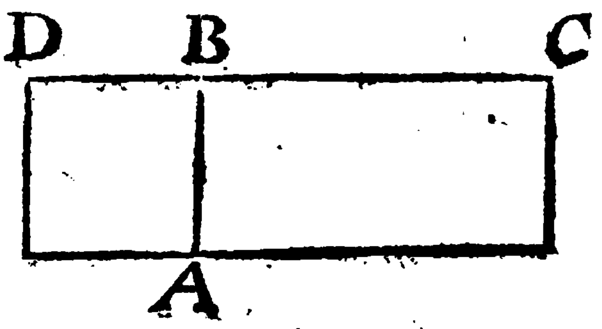
Da $A \frown B$, so ist (10, 9. Zus.) $\square A \frown \square B$. Nun ist $\square A = EC$, und $\square B = CF$. Folglich ist $EC \frown CF$; aber (6, 1. S.) $EC : CF = ED : DF$, folglich (10, 10. S.) $ED \frown DF$. Nun war DE rational und der DC in Länge incommensurabel. Folglich ist (10, 13. S.) DF rational und der DC in Länge incommensurabel. Demnach sind CD, DF, rational, bloß in Potenz commensurabel, also (10, 22. S.) CF irrational, aber $\square B = CD \times DF$, folglich (10, 22. S.) B irrational, und eine Mediallinie.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß, was einer Medialfigur commensurabel ist, auch medial sey; weil die Linien, welche beyde Räume potenziren, bloß in Potenz commensurabel sind, und eine derselben, folglich auch die andere, medial ist. Was aber (10, 19. S. Anm.) von Rationallinien gesagt worden, gilt auch von Mediallinien, daß nämlich jede einer Mediallinie commensurabele Linie auch medial und jener entweder in Länge und Potenz zugleich, oder bloß in Potenz commensurabel sey.

Der 25. Satz. Lehrsatz.

Jedes unter medialen und in Länge commensurabelen Linien, AB, BC, enthaltene Rectangel, AC, ist medial.



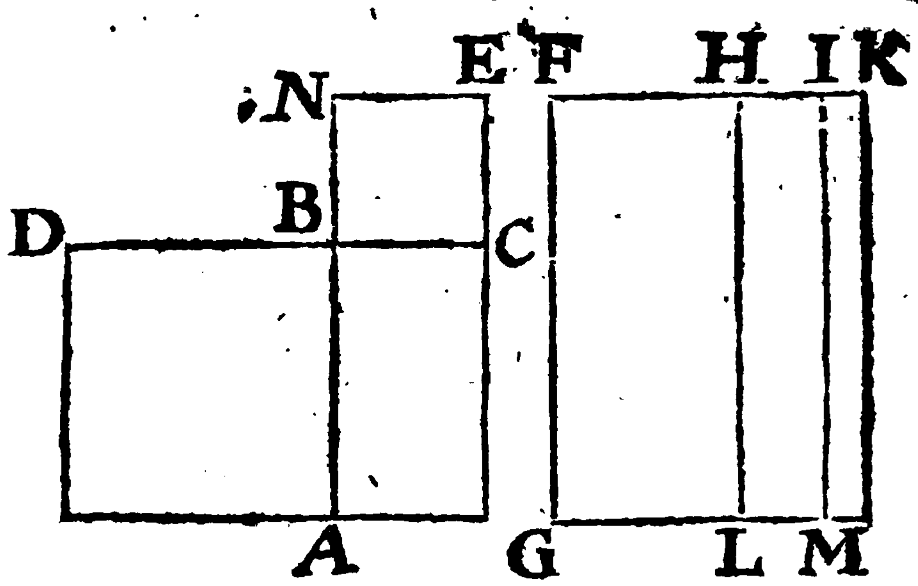
Mache von AB das Quadrat AD, welches also medial ist. Da $AB \frown BC$, und $AB = BD$; so ist $BC \frown BD$. Nun ist $BD : BC = AD : AC$. Folglich ist auch $AD \frown AC$, folglich, da AD medial, auch (10, 24. Zus.) AC medial.

Der 26. Satz. Lehrsatz.

Jedes unter medialen bloß in Potenz commensurabelen Linien, AB, BC, enthaltene Rectangel, AC, ist entweder rational oder medial.

 Mache

Mache von AB, BC, die Quadrate AD, BE, so sind diese medial. Nun sey die Rationallinie, FG. Ein an derselben entworfenes dem Quadrate, AD, gleiches Rectangel, GH, gebe die Breite FH; ein an HL entworfenes dem Rectangel AC gleiches Rectangel LI aber die Breite HI; und ein an IM entworfenes dem Quadrate BE gleiches Rectangel MK die Breite IK: so sind (1, 14. S.) FH, HI, IK, in gerader Linie.



Da die Quadrate AD, BE, medial sind, so sind auch die ihnen gleichen Rectangel GH, MK, medial, folglich, da FG rational, ihre Breiten FH, IK, rational und der FG in Länge incommensurabel. Da aber AD ⌒ BE, also auch GH ⌒ MK, und (6, 1. S.) GH : MK = FH : IK, so ist (10, 10. S.) FH ⌒ IK. Demnach sind FH, IK, rational, und in Länge commensurabel, folglich ist FH × IK rational.

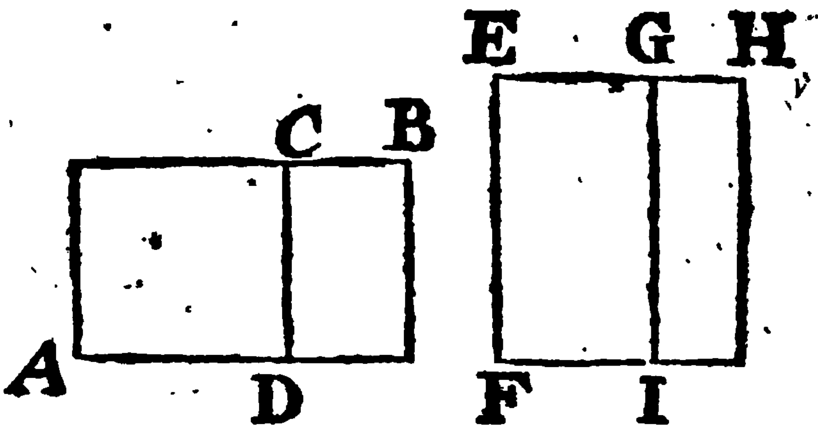
Da BD = AB, und BC = BN: so ist BD : BC = AB : BN. Nun ist (6, 1. S.) BD : BC = AD : AC, und AB : BN = AC : BE. Folglich ist AD : AC = AC : BE. Nun ist AD = GH, AC = LI, BE = MK. Folglich ist GH : LI = LI : MK, folglich auch FH : HI = HI : IK, folglich (6, 17. S.) FH × IK = □ HI, folglich, da FH × IK rational, auch □ HI, also auch HI rational. Ist nun HI ⌒ HL, das ist, HI ⌒ FG, so ist LI rational. Ist aber HI ◡ FG, so sind HI, HL, rational bloß in Potenz commensurabel, folglich (10, 22. S.) LI medial. Demnach ist LI, das ist AC, entweder rational oder medial.

Der

Der 27. Satz. Lehrsatz.

Ein Mediales, AB, übertrifft ein Mediales, AC, nicht um ein Rationales.

Es sey, wenn es möglich, DB, der Ueberschuß von AB über AC, rational. Auch sey die Rationallinie EF, und an derselben ein dem AB gleiches Rectangel FH entworfen, welches die Breite EH giebt, hiervon aber das dem AC gleiche Rectangel FG weggenommen, daß also DB = IH, also, weil DB als rational angenommen ist, auch IH rational sey.

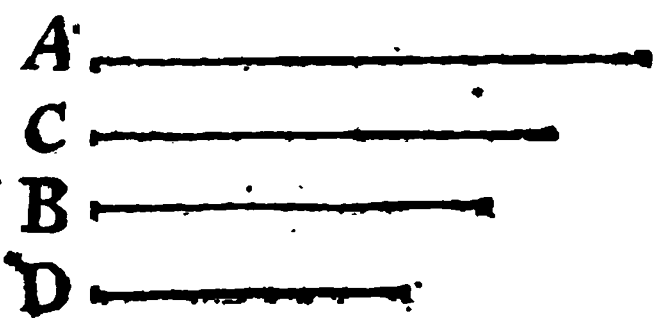


Da AB, AC, medial, so sind auch FH, FG, medial, folglich, da eine Seite EF rational, die andern Seiten EH, EG, (10, 23. S.) auch rational, und der EF in Länge incommensurabel. Da aber IH selbst, und eine Seite GI, das ist EF, rational: so ist (10, 21. S.) die andere Seite GH rational, und der EF in Länge commensurabel; folglich, weil die Rationallinie $EG \cup EF$, auch (10, 13. S.) $EG \cup GH$. Nun ist (6, 1. S.) $EG : GH = \square EG : EG \times GH$. Folglich ist (10, 10. S.) $\square EG \cup EG \times GH$. Nun ist $\square EG \cap \square EG + \square GH$, weil beyde rational und $EG \times GH \cap 2(EG \times GH)$. Folglich ist (10, 14. S.) $\square EG + \square GH \cup 2(EH \times GH)$, also auch (10, 17. S.) $\square EG + \square GH + 2(EG \times GH)$, das ist (2, 4. S.) $\square EH \cup \square EG + \square GH$; folglich, weil $\square EG + \square GH$ rational, $\square EH$, also auch EH irrational. Nach Obigem aber war EH rational, welches einander widerspricht. Folglich kann DB nicht rational seyn, und ist also irrational.

Der 28. Satz. Aufgabe.

Zwey mediale bloß in Potenz commensurabele Linien, die ein Rationales enthalten, zu finden.

Es seyen A, B, zwey rationale bloß in Potenz commensurabele Linien. Suche (6, 13. S.) zwischen beyden die mittlere C, und (6, 12. S.) zu den dreyen A, B, C, die vierte Proportionallinie D; da dann C, D, medial bloß in Potenz commensurabel sind, und $C \times D$ rational ist.



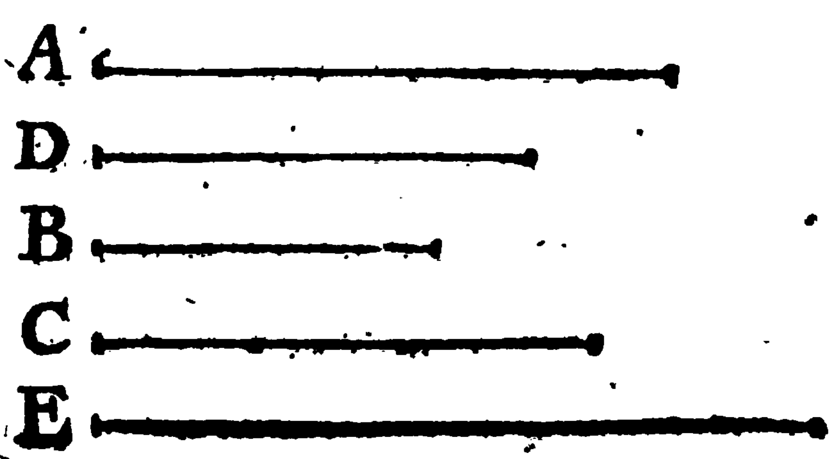
Denn da A, B, rational bloß in Potenz commensurabel sind: so ist (10, 22. S.) $A \times B = \square C$ medial, also auch C medial. Da $A : B = C : D$, also (10, 10. S.) C, D, bloß in Potenz commensurabel, aber C medial, so ist (10, 24. S.) auch D medial. Demnach sind C, D, medial bloß in Potenz commensurabel.

Da $A : B = C : D$, also (5, 16. S.) verwechselt $A : C = B : D$, aber auch $A : C = C : B$; so ist $C : B = B : D$, folglich (6, 17. S.) $\square B = C \times D$, folglich, da $\square B$ rational, auch $C \times D$ rational.

Der 29. Satz. Aufgabe.

Zwey mediale bloß in Potenz commensurabele Linien, die ein Mediales enthalten, zu finden.

Es seyen A, B, C, drey rationale bloß in Potenz commensurabele Linien. Suche (6, 13. S.) zwischen A, B, die mittlere D, und (6, 12. S.) zu B, C, D, die



vierte

vierte Proportionallinie E: da dann D, E, medial bloß in Potenz commensurabel sind, und $D \times E$ medial ist.

Da A, B, rational bloß in Potenz kommensurabel sind: so ist (10, 22. S.) $A \times B = \square D$, folglich auch D medial. Da $B \frown C$, und $B : C = D : E$, so ist (10, 10. S.) $D \frown E$, aber D medial, folglich (10, 24. S.) auch E medial. Demnach sind D, E, medial bloß in Potenz commensurabel.

Da $B : C = D : E$, also (5, 16. S.) verwechselt $B : D = C : E$, aber auch $B : D = D : A$; so ist $D : A = C : E$, folglich (6, 16. S.) $A \times C = D \times E$, folglich, da (10, 22. S.) $A \times C$ medial, auch $D \times E$ medial.

Erster Lehnsatz.

Zwey Quadratzahlen zu finden, deren Summe auch eine Quadratzahl ist.

A 5 D 5 C 8 B

Setze zwey Zahlen, AB, BC, die zugleich entweder gerade oder ungerade sind. Da also in beyden Fällen der Rest AC (9, 24. 26. S.) gerade ist; so werde AC in D halbirt. Es seyn aber auch AB, BC, ähnliche Flächenzahlen oder Quadratzahlen, als die gleichfalls ähnliche Flächenzahlen sind, so ist (9, 1. S.) $AB . BC$ eine Quadratzahl. Da nun (2, 6. S.) $AB . BC + CD^2 = BD^2$, so sind also zwey Quadratzahlen $AB . BC$ und CD^2 gefunden, deren Summe eine Quadratzahl BD^2 ist.

Zusatz. Hieraus erhellet, daß zwey Quadratzahlen BD^2 und CD^2 gefunden worden sind, deren Unterschied $AB \times BC$ alsdann auch eine Quadratzahl ist, wenn AB, BC, ähnliche Flächenzahlen sind; sonst aber nicht.

Zweyter Lehnsatz.

Zwey Quadratzahlen zu finden, deren Summe keine Quadratzahl ist.

Es

Es sey, wie vorhin, AB.BC eine Quadratzahl, CA gerade, und in D halbirt, folglich $AB.BC + CD^2 = BD^2$. Wird nun die Einheit DE weggenommen, daß also $AB.BC + CE^2 < BD^2$; so ist $AB.BC + CE^2$ keine Quadratzahl.

A 2 G 2 H 1 D 1 E 1 F 3 C 8 B

Denn wäre diese Summe eine Quadratzahl, so wäre deren Seite entweder größer, oder eben so groß, oder kleiner, als BE, welche zunächst vor BD vorher gehet. Daß aber keines von diesen dreyen möglich sey, wird auf folgende Art bewiesen.

1. Es ist nicht $AB.BC + CE^2 > BE^2$. Denn die nächst größere Quadratzahl nach BE^2 ist, weil sich die Einheit nicht theilen läßt, BD^2, welche aber schon größer als obgedachte Summe ist.

2. Es ist nicht $AB.BC + CE^2 = BE^2$. Denn setzt man $GA = 2 DE$, dem Zwiefachen der Einheit, so ist, weil $AC = 2 DC$ ist, $GC = 2 CE$, das ist, GC in E halbirt, folglich (2, 6. S.) $GB.CB + CE^2 = BE^2$. Wäre nun $AB.BC + CE^2 = BE^2$, so wäre $GB.BC + CE^2 = AB.BC + CE^2$, folglich $GB = AB$, welches unmöglich ist.

3. Es ist nicht $AB.BC + CE^2 < BE^2$. Denn setzt man $AH = 2 DF$, so ist $HC = 2 CF$, das ist, HC in F halbirt, folglich (2, 6. S.) $HB.BC + CF^2 = BF^2$. Wäre nun, da BF^2 die nächst kleinere Quadratzahl vor BE^2 ist, $AB.BC + CE^2 = BF^2$, so wäre $HB.BC + CF^2 = AB.BC + CE^2$, welches unmöglich ist.

Demnach kann $AB.BC + CE^2$ keine Quadratzahl seyn, und es sind also zwey Quadratzahlen AB.BC und CE^2 gefunden, deren Summe keine Quadratzahl ist.

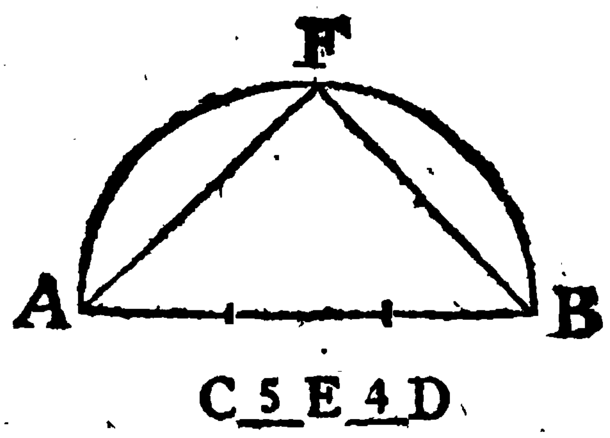
Der 30. Satz. Aufgabe.

Zwey rationale bloß in Potenz commensurabele Linien zu finden, von denen die größere um das Quadrat einer

ihr

ihr in Länge commensurabelen Linie über die kleinere potenzirt.

Es sey AB eine Rationallinie, und (10, 29. Zus.) CD, DE, zwey Quadratzahlen, deren Unterschied CE keine Quadratzahl ist. Ueber AB beschreibe den Halbkreis AFB, mache (10, 6. Zus.) $DC : CE = \square AB : \square AF$, trage AF ein, und ziehe FB: so sind AB, AF, die gesuchten Rationallinien, und FB ist die der AB in Länge commensurabele Linie, um deren Quadrat die AB über AF potenzirt.



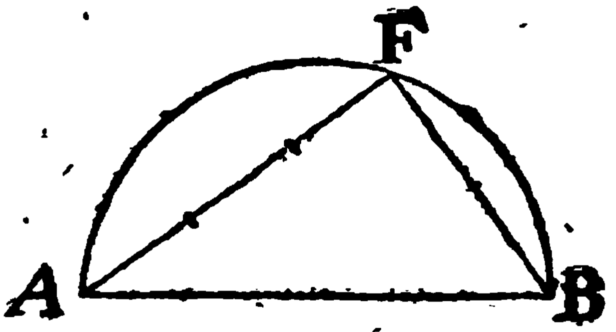
Denn da $\square AB : \square AF = DC : CE$, also sich wie Zahlen verhalten: so ist (10, 6. S.) $\square AB \frown \square AF$, und da $\square AB$ rational, auch $\square AF$, also auch AF rational; aber weil $\square AB . \square AF$ sich nicht wie Quadratzahlen verhalten, (10, 9. S.) $AB \smile AF$. Demnach sind AB, AF, rational bloß in Potenz commensurabel.

Aus $DC : CE = \square AB : \square AF$, folgt auch (5, 19. S. und 1, 47. S.) zurückkehrend $DC : DE = \square AB : \square BF$, aber DC, DE, Quadratzahlen, folglich (10, 9. S.) $AB \frown BF$. Demnach ist, weil (1, 47. S.) $\square AB = \square AF + \square BF$, also $\square AB - \square AF = \square BF$, das Gesuchte gefunden.

Der 31. Satz. Aufgabe.

Zwey rationale bloß in Potenz commensurabele Linien zu finden, von denen die größere um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die kleinere potenzirt.

Es sey AB eine Rationallinie, und (10, 29. Lehns. 2.) CE, ED, zwey Quadratzahlen, deren Summe CD keine Quadratzahl ist. Ueber AB beschreibe den Halbkreis AFB, mache (10, 6. Zus.) DC : CE = □AB : □AF, und ziehe FB: so sind AB, AF, die gesuchten Rationallinien, und FB ist die der AB in Länge incommensurabele Linie, um deren Quadrat die AB, über AF potenzirt.

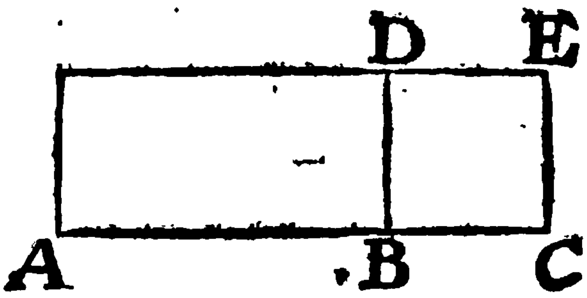


Denn man beweiset, wie im vorigen Satze, daß AB, AF, rational bloß in Potenz commensurabel sind. Da nun DC : CE = □AB : □AF, also (5, 19. S. und 1, 47. S.) zurückkehrend CD : DE = □AB : □BF; aber CD, DE, keine Quadratzahlen sind: so ist (10, 9. S.) AB ∪ BF. Demnach ist, weil □BF = □AB − □AF, das Gesuchte gefunden.

Lehnsatz

Von zwey geraden Linien, AB, BC, verhält sich die größere zur kleinern, wie das Rectangel unter beyden zum Quadrate der kleinern.

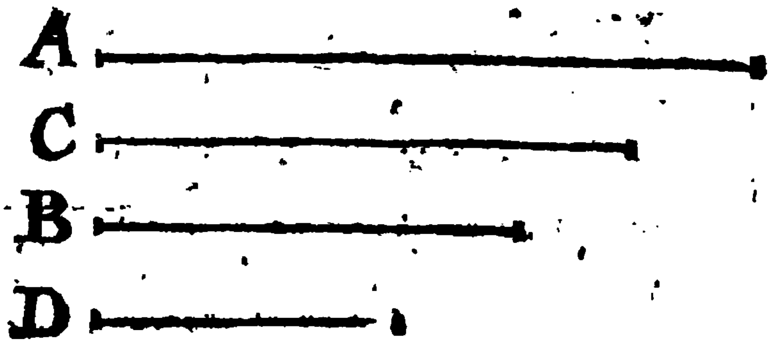
Denn macht man von BC das Quadrat BE, und vollendet das Parallelogramm AD: so ist (6, 1. S.) AB : BC = AD : BE. Nun ist AD = AB × BD = AB × BC; weil BD = BC. Folglich ist AB : BC = AB × BC : □BC.



Der 32. Satz. Aufgabe.

Zwey mediale bloß in Potenz commensurabele Linien zu finden, die ein Rationales enthalten, und von denen die größere um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die kleinere potenzirt.

Es seyen (10, 30. S.) A, B, zwey rationale bloß in Potenz commensurabele Linien, von denen die größere, A, um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie, über die kleinere B potenzirt. Mache (6, 13. 12. S.) $A : C = C : B$, und $C : B = B : D$, daß also $A \times B = \square C$, und $C \times D = \square B$: so sind C, D, die gesuchten Linien.



Denn da (10, 22. S.) $A \times B$ medial ist, so ist auch $\square C$, also C medial. Da $C \times D = \square B$, und $\square B$ rational, so ist auch $C \times D$ rational.

Da ferner (10, 31. Lehns.) $A : B = A \times B : \square B$; aber $A \times B = \square C$, und $\square B = C \times D$: so ist $A : B = \square C : C \times D$; aber auch (10, 31. Lehns.) $C : D = \square C : C \times D$, folglich $A : B = C : D$, daß also C, D, so wie A, B, bloß in Potenz commensurabel sind, folglich, weil C medial, auch (10, 24. S.) D medial ist. Demnach sind C, D, medial.

Aus $A : B = C : D$, folgt auch (10, 15. S.), daß C um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabeln Linie über die D potenzirt, weil dasselbe zwischen A, B, Statt findet.

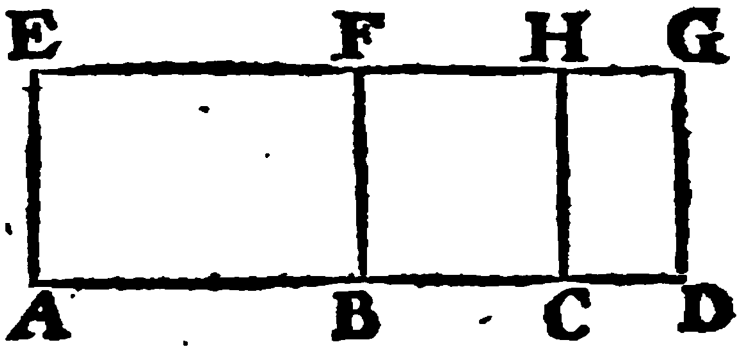
Anmerkung.

Auf ähnliche Art findet man auch diese Linien, wenn die größere um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die kleinere potenziren soll; indem man A, B, so nimmt, daß die A um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die B potenzirt.

Lehnsatz.

Von drey geraden Linien, AB, BC, CD, verhält sich die erste zur dritten, wie das Rectangel unter der ersten und

und zweyten zum Rectangel unter der zweyten und dritten.

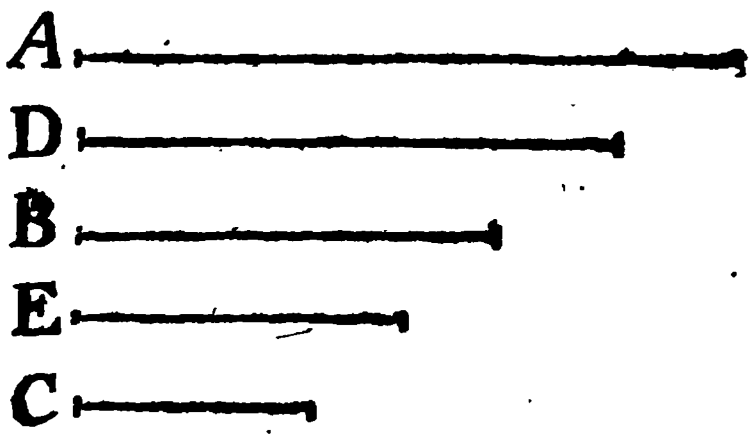


Auf AB errichte in A den Perpendikel AE, mache AE = BC, und ziehe durch E die EG mit AD, durch B, C, D, die BF, CH, DG, mit AE parallel.

Da (6, 1. S.) AB : BC = AF : BH, und BC : CD = BH : CG; so ist aus dem Gleichen AB : CD = AF : CG. Nun ist AF = AB ⨯ BC, weil AE = BC, und CG = CD ⨯ BC, weil CH = AE. Folglich ist AB : CD = AB ⨯ BC : BC ⨯ CD.

Der 33. Satz. Aufgabe.

Zwey mediale bloß in Potenz commensurabele Linien zu finden, die ein Mediales enthalten, und von denen die größere um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabeln Linie über die kleinere potenzirt.



Es seyen (10, 30. S.) A, B, C, drey rationale bloß in Potenz commensurabele Linien, von denen die A um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die C potenzirt. Mache (6, 13. 12. S.) A : D = D : B, und D : B = C : E, daß also A ⨯ B = □ D, und B ⨯ C = D ⨯ E; so sind D, E, die gesuchten Linien.

Denn da (10, 22. S.) A ⨯ B medial ist, so ist auch □ D, also D medial. Da (6, 1. S.) A ⨯ B : B ⨯ C = A : C, aber A ⨯ B = □ D, und B ⨯ C = D ⨯ E, so ist A : C = □ D : D ⨯ E; aber (10, 31. Lehns.) □ D : D ⨯ E = D

$= D:E$, folglich $A:C = D:E$. Nun ist $A \frown C$. Folglich ist (10, 10. S.) $D \frown E$, folglich, da D medial, auch (10, 24. S.) E medial. Demnach sind D, E, medial bloß in Potenz commensurabel. Ferner ist, weil $B \times C = D \times E$, und (10, 22. S.) $B \times C$ medial, auch $D \times E$ medial.

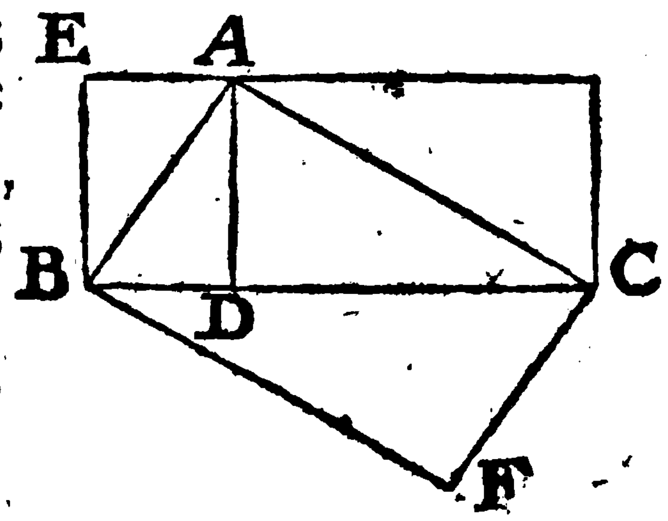
Aus $A:C = D:E$ folgt auch (10, 15. S.), daß die D um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die E potenzirt; weil dasselbe zwischen A, C, Statt findet.

Anmerkung.

Auf ähnliche Art findet man auch diese Linien, wenn die größere um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die kleinere potenziren soll; indem man A, B, so nimmt, daß die A um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die B potenzirt.

Erster Lehnsatz.

Fället man in einem rechtwinkligen Triangel, BAC, aus der Spitze, A, des rechten Winkels auf die gegenüberliegende Seite, BC, einen Perpendikel, AD: so ist



1. $CB \times BD = \square AB$; weil (6, 8. Zus.) $BC:BA = BA:BD$.

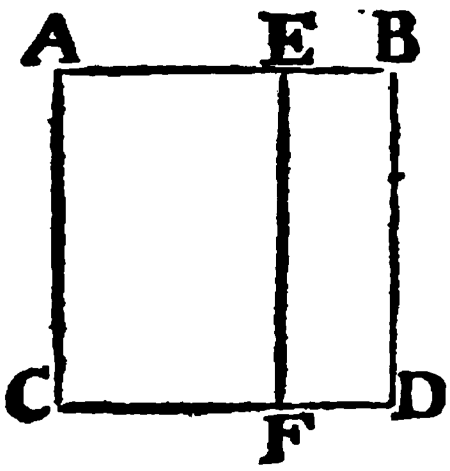
2. $BC \times CD = \square AC$; weil $BC:CA = CA:CD$.

3. $BD \times DC = \square AD$; weil $BD:AD = AD:DC$.

4. $BC \times AD = BA \times AC$; weil (6, 8. S.) $BC:AC = AB:AD$. Oder auch, weil, wenn man die Rectangel CE, AF, beschreibt, jedes derselben $= 2 \triangle BAC$, folglich $CE = AF$, das ist, $BC \times AD = AB \times AC$ ist.

Zweyter Lehnsatz.

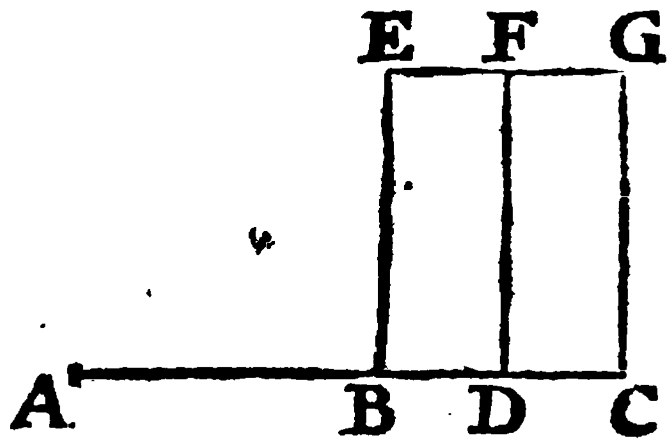
Wird eine gerade Linie, AB, in ungleiche Abschnitte AE, EB, geschnitten: so verhält sich der größere Abschnitt, AE, zum kleinern, EB, wie das Rectangel unter der ganzen und dem größern Abschnitte zu dem unter der Ganzen und dem kleinern Abschnitte.



Mache von AB das Quadrat AD, und ziehe durch E mit AC oder BD die EF parallel, daß also (6, 1. S.) AE : EB = AF : FB ist. Nun ist AF = BA $\times$ AE, und FB = AB $\times$ BE, weil AB = AC = BD. Folglich ist AE : EB = BA $\times$ AE : AB $\times$ BE.

Dritter Lehnsatz.

Wird bey zwey ungleichen geraden Linien, AB, BC, die kleinere, BC, (in D) halbirt: so ist das Rectangel unter beyden das Doppelte des Rectangels unter der größern, und der Hälfte der kleinern.

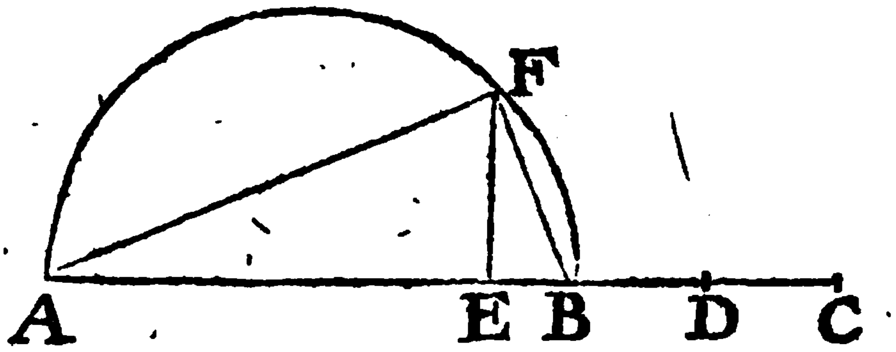


Errichte in B den Perpendikel BE, mache BE = BA, und vollende die Figur.

Da DB : DC = BF : DG; so ist verbunden BC : DC = BG : DG, folglich, weil BC = 2 DC, auch BG = 2 DG. Nun ist BG = AB $\times$ BC, weil AB = BE; und DG = AB $\times$ BD, weil BD = DC, und AB = DF. Folglich ist AB $\times$ BC = 2 (AB $\times$ BD).

Der 34. Satz. Aufgabe.

Zwey in Potenz incommensurabele Linien zu finden, die ein Mediales enthalten, und deren Quadrate zusammen ein Rationales ausmachen.



Es seyen (10, 31. S.) AB, BC, zwey rationale bloß in Potenz commensurabele Linien, von denen die AB um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die BC potenzirt. Es werde BC in D halbirt, und an AB (6, 28. S.) ein dem vierten Theile des $\square$ BC, das ist, dem $\square$ BD gleiches Rectangel entworfen, welches ein Quadrat zur Ergänzung hat, und es sey das unter AE, EB. Beschreibe über AB den Halbkreis AFB, errichte in E den Perpendikel EF, und ziehe AF, FB: so sind AF, FB, die verlangten Linien.

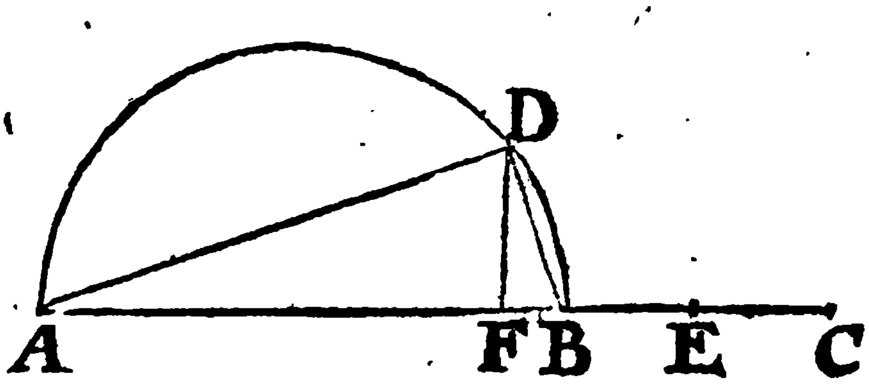
Denn vermöge der Construction ist (10, 19. S.) $AE \cup EB$. Nun ist (6, 1. S.) $AE : EB = BA \times AE : BA \times BE$, aber (10, 33. Lehns. 1.) $BA \times AE = \square AF$, und $BA \times BE = \square FB$, also $AE : EB = \square AF : \square FB$. Folglich ist (10, 10. S.) $\square AF \cup \square FB$, also sind AF, FB, in Potenz incommensurabel.

Da AB, also auch $\square$ AB, rational; aber (1, 47. S.) $\square AB = \square AF + \square FB$: so ist $\square AF + \square AB$ rational.

Da ferner (10, 33. Lehns. 1.) $AE \times EB = \square EF$, und nach dem Angenommenen $AE \times EB = \square BD$: so ist $EF = BD$, also $BC = 2\,EF$, folglich (6, 1. S. oder 10, 33. Lehns. 3.) $AB \times BC = 2\,(AB \times EF)$, folglich, weil (10, 22. S.) $AB \times BC$ medial, auch $AB \times EF$ medial, folglich, weil (10, 33. Lehns. 1.) $AB \times EF = AF \times FB$, auch $AF \times FB$ medial.

Der 35. Satz. Aufgabe.

Zwey in Potenz incommensurabele Linien zu finden, die ein Rationales enthalten, und deren Quadrate zusammen ein Mediales ausmachen.



Es seyen (10, 32. S.) AB, BC, zwey mediale bloß in Potenz commensurabele Linien, die ein Rationales enthalten, und von denen die AB um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die BC potenzirt. Es werde BC in E halbirt, und an AB (6, 28. S.) ein dem $\square$ BC gleiches Rectangel $AF \times FB$ entworfen, dessen Ergänzung ein Quadrat ist. Beschreibe über AB den Halbkreis ADB, errichte in F den Perpendikel FD, und ziehe AD, DB: so sind AD, DB, die verlangten Linien.

Denn vermöge der Construction ist (10, 19. S.) $AF \cup FB$, folglich (6, 1. S. und 10, 10. S.) $BA \times AF \cup AB \times BF$. Nun ist (10, 33. Lehns. 1.) $BA \times AF = \square AD$; und $AB \times BF = \square DB$. Folglich ist $\square AD \cup \square DB$, also $AD \cup\!\!- DB$.

Da $\square$ AB medial, und (1, 47. S.) $\square AB = \square AD + \square DB$: so ist auch $\square AD + \square DB$ medial. Demnach machen die Quadrate der AD, DB, zusammen ein Mediales aus.

Da ferner nach der Construction $AF \times FB = \square BE$, und (10, 33. Lehns. 1.) $AF \times FB = \square DF$: so ist $BE = DF$, also $BC = 2\,BE = 2\,DF$; folglich $AB \times BC = 2\,(AB \times DF)$, folglich $AB \times BC \cap AB \times DF$; folglich, weil nach der Construction $AB \times BC$ rational, auch $AB \times DF$ rational, folglich, weil (10, 33. Lehns. 1.) $AB \times DF = AD \times DB$, auch $AD \times DB$ rational.

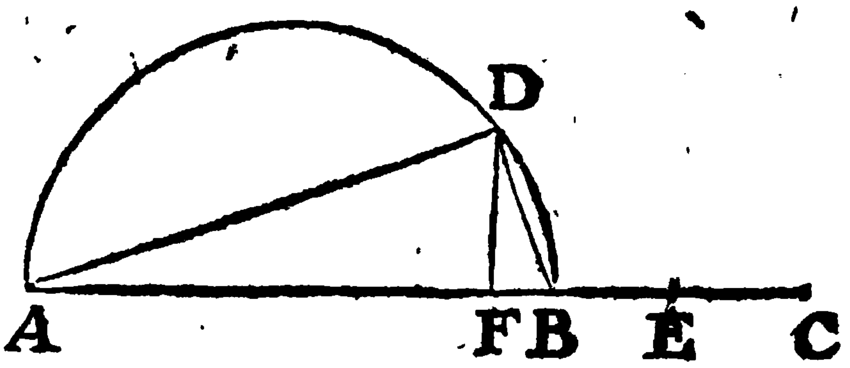
Der 36. Satz. Aufgabe.

Zwey in Potenz incommensurabele Linien zu finden, deren Quadrate zusammen ein Mediales ausmachen, und

welche

welche ein Mediales, das jenem incommensurabel ist, enthalten.

Es seyen (10, 33. S.) AB, BC, zwey mediale bloß in Potenz commensurabele Linien, die ein Mediales enthalten, und von denen die AB um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die BC potenzirt. Wird nun das Uebrige wie im vorigen Satze construirt: so sind AD, DB, die verlangten Linien.



Denn da $AF \cup FB$, so ist $AD \smile\!\!- DB$; und da $\square AB$ medial, so ist auch $\square AD + \square DB$ medial.

Da auch hier $BC = 2\,DF$, so ist auch $AB \times BC = 2\cdot(AB \times FD)$, folglich, weil $AB \times BC$ medial, auch (10, 24. Zus.) $AB \times FD$ medial. Nun ist $AB \times FD = AD \times DB$. Folglich ist auch $AD \times BD$ medial.

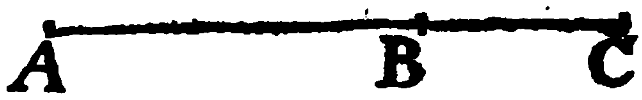
Da $AB \cup BC$, aber $BC \cap BE$, so ist $AB \cup BE$, folglich (6, 1. S. und 10, 10. S.) $\square AB \cup AB \times BE$. Nun ist $\square AB = \square AD + \square DB$, und $AB \times BE = AB \times FD = AD \times DB$. Folglich ist $\square AD + \square DB \cup AD \times DB$.

Von
den durch das Zusammensetzen entstehenden sechs Irrationallinien.

Der 27. Satz. Lehrsatz und Erklärung.

Werden zwey bloß in Potenz commensurabele Rationallinien, AB, BC, zusammengesetzt: so ist die ganze, AC, irrational, und heiße **Binomiale**.

Da $AB \cap\!- BC$, also $AB \cup BC$, und (6, 1. S.) $AB : BC = AB \times BC : \square BC$;

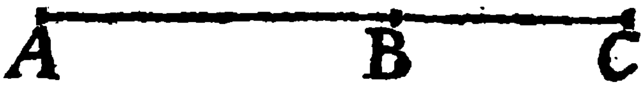


so ist (10, 10. S.) $AB \times BC \cup \square BC$. Nun ist (10, 6. S.) $AB \times BC \cap 2\,(AB \times BC)$, und (10, 16. S.) $\square BC \cap \square AB + \square BC$. Folglich ist $2\,(AB \times BC) \cup \square AB + \square BC$, folglich (10, 17. S.) **verbunden** $2\,(AB \times BC) + \square AB + \square BC$, das ist (2, 4. S.) $\square AC \cup \square AB + \square BC$, folglich, weil $\square AB + \square BC$ rational, $\square AC$, also auch AC irrational.

Der 38. Satz. Lehrsatz und Erklärung.

Werden zwey bloß in Potenz commensurabele Mediallinien, AB, BC, die ein Rationales enthalten, zusammengesetzt: so ist die ganze, AC, irrational, und heiße **die erste Bimediale.**

Da $AB \cup BC$, und (10, 13. S.) $\square AB + \square BC \cup 2\,(AB \times BC)$; so ist **verbunden** $\square AB + \square BC + 2\,(AB \times BC)$ das ist (2, 4. S.) $\square AC \cup AB \times BC$, folglich, weil $AB \times BC$ rational, $\square AC$, also auch AC irrational.

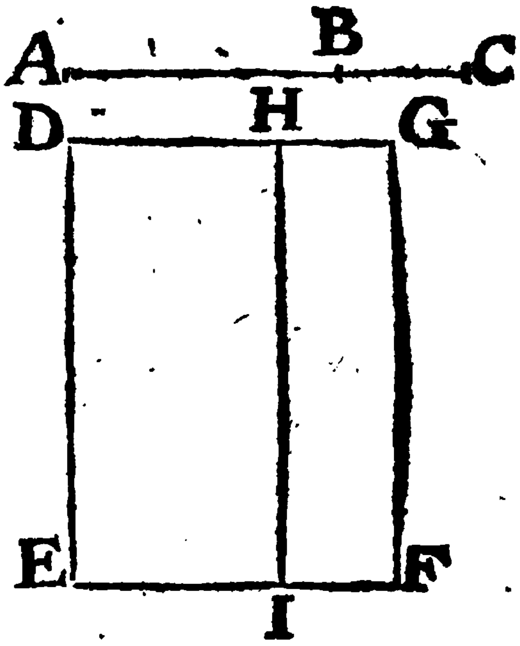


Der 39. Satz. Lehrsatz und Erklärung.

Werden zwey bloß in Potenz commensurabele Mediallinien, AB, BC, die ein Mediales enthalten, zusammengesetzt: so ist die ganze, AC, irrational, und heiße **die zweyte Bimediale.**

Es sey DE eine Rationallinie, und an derselben ein dem Quadrate der AC gleiches Rectangel $DF = ED \times DG$, desgleichen ein den Quadraten der AB und der BC gleiches Rectangel $EH = ED \times DH$, entworfen.

Da (2, 4. S.) $\square AC = \square AB + \square BC + 2\,(AB \times BC)$, so ist $HF = 2\,(AB \times BC)$. Nun sind AB, BC, also $\square$ AB,



AB, $\square$ BC, aber auch 2 (AB $\times$ BC), medial. Folglich sind auch EH, HF, medial, folglich, weil DE rational, (10, 23. S.) DH, HG, rational und der DE in Länge incommensurabel.

Da AB $\cup$ BC, und (6, 1. S.) AB : BC $=$ $\square$ AB : AB $\times$ BC; so ist (10, 10. S.) $\square$ AB $\cup$ AB $\times$ BC. Nun ist $\square$ AB $\cap$ $\square$ AB $+$ $\square$ BC, und AB $\times$ BC $\cap$ 2 (AB $\times$ BC). Folglich ist $\square$ AB $+$ $\square$ BC $\cup$ 2 (AB $\times$ BC), das ist, EH $\cup$ HF, folglich auch DH $\cup$ HG.

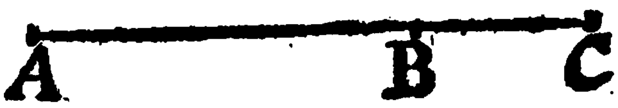
Demnach sind DH, HG, rational bloß in Potenz commensurabel. Folglich ist (10, 37. S.) DG irrational, folglich, weil DE rational, (10, 21. S.) ED $\times$ DG, das ist DF, das ist $\square$ AC, also auch AC irrational.

Anmerkung.

Euklid nennt diese Linie deswegen die **zweyte Bimediale**, weil AB $\times$ BC hier medial, nicht, wie bey der vorigen, rational ist, und das Mediale dem Rationalen nachsteht.

Der 40. Satz. Lehrsatz und Erklärung.

Werden zwey in Potenz incommensurabele Linien, AB, BC, die ein Mediales enthalten, und deren Quadrate zusammen ein Rationales ausmachen, zusammengesetzt: so ist die ganze, AC, irrational, und heiße die **größere Irrationale**.



Da AB $\times$ BC, also auch (10, 24. Zus.) 2 (AB $\times$ BC) medial, aber $\square$ AB $+$ $\square$ BC rational: so ist 2 (AB $\times$ BC) $\cup$ $\square$ AB $+$ $\square$ BC, folglich (10, 17. S.) $\square$ AB $+$ $\square$ BC $+$ 2 (AB $\times$ BC), das ist (2, 4. S.) $\square$ AC $\cup$ $\square$ AB $+$ $\square$ BC, folglich, weil $\square$ AB $+$ $\square$ BC rational, $\square$ AC, also auch AC irrational.

Anmerkung.

Euklid nennt diese Linie deswegen die **größere Irrationale**, weil das den Quadraten der AB, BC, gleiche Rationale größer ist, als das Doppelte unter AB, BC, enthaltene Mediale.

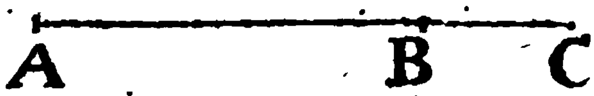
Daß dem aber so sey, wird also bewiesen: AB, BC, können nicht gleich seyn, weil sonst $\square AB + \square BC = 2(AB \times BC)$, folglich $AB \times BC$ rational wäre, gegen die Voraussetzung. Es sey daher $AB > BC$, und $BD = BC$: so ist (2, 7. S.)

$\square AB + \square BD = 2(AB \times BD) + \square AD$, das ist, weil $BD = BC$, $\square AB + \square BC = 2(AB \times BC) + \square AD$, folglich $\square AB + \square BC > 2(AB \times BC)$.

Der 41. Satz. Lehrsatz und Erklärung.

Werden zwey in Potenz incommensurabele Linien, AB, BC, die ein Rationales enthalten, und deren Quadrate zusammen ein Mediales ausmachen, zusammengesetzt: so ist die ganze, AC, irrational, und heiße die **ein Rationales und Mediales Potenzirende.**

Da $\square AB + \square BC$ medial, aber $2(AB \times BC)$ rational ist; so ist $\square AB + \square BC \cup 2(AB \times BC)$, folglich (2, 4. S. und 10, 17. S.) **verbunden** $\square AC \cup 2(AB \times BC)$, folglich, weil $2(AB \times BC)$ rational, $\square AC$, also AC irrational.



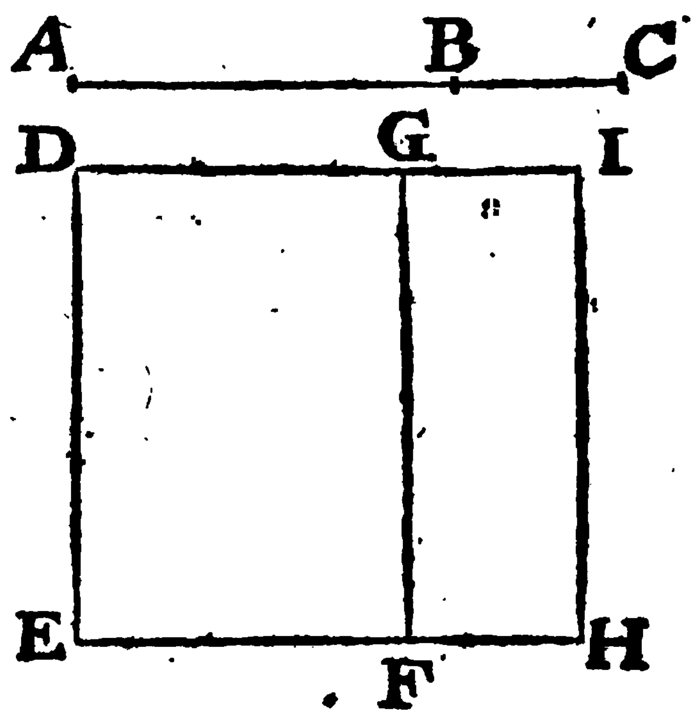
Anmerkung.

Euklides nennt diese Linie deswegen so, weil ihr Quadrat zweyen Figuren zusammen gleich ist, von denen die eine rational, die andere medial ist.

Der

Der 42. Satz. Lehrsatz und Erklärung.

Werden zwey in Potenz incommensurabele Linien, AB, BC, deren Quadrate zusammen ein Mediales ausmachen, und die ein Mediales, das jenem incommensurabel ist, enthalten, zusammengesetzt: so ist die ganze, AC, irrational, und heiße **die zwey Mediale Potenzirende.**



Es sey DE eine Rationallinie und an derselben (1, 45. S.) ein den Quadraten der AB, BC, gleiches Rectangel DF = ED × DG, desgleichen ein dem doppelten unter AB, BC, enthaltenen Rectangel gleiches Rectangel GH = ED × GI entworfen, daß also (2, 4. S.) DH = □ AC ist.

Da □ AB + □ BC medial und = DF ist: so ist auch DF, das ist ED × DG, medial, folglich, weil DE rational, (10, 23. S.) DG rational und der DE in Länge incommensurabel. Aus gleichen Gründen ist auch GI rational und der DE in Länge incommensurabel. Nun ist □ AB + □ BC ∪ 2 (AB × BC), das ist DF ∪ GH. Folglich ist (6, 1. S. und 10, 10. S.) DG ∪ GI.

Demnach sind DG, GI, rational bloß in Potenz commensurabel, folglich ist (10, 37. S.) die Binomiale DI irrational, folglich, weil DE rational, (10, 39. S. Anm.) das Rectangel DH, das ist □ AC, folglich AC irrational.

Anmerkung.

Die Ursache der Benennung ist wie bey der vorigen Linie. Daß aber die bisher abgehandelten sechs Irrationallinien bloß in diejenigen Linien, oder Namen, woraus sie zusammengesetzt worden, wieder zerlegt werden können, wird in den folgenden Sätzen gezeigt, denen aber folgender Lehnsatz voranszuschicken ist.

Lehnsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in zwey Punkten, C, D, so geschnitten, daß $AC > DB$: so ist $\square AC + \square CB > \square AD + \square DB$.

Halbire AB in E. Da $AC > DB$, so ist, wenn man DC wegnimmt, $AD > CB$; aber $AE = EB$, folglich, wenn man AD von AE, und CB von EB wegnimmt, $DE < EC$. Demnach liegen die Punkte C, D, ungleich weit vom Halbirungspunkte E.

Da (2, 5. S.) $AC \times CB + \square CE = \square EB = AD \times DB + \square DE$; aber $\square DE < \square CE$: so ist $AC \times CB < AD \times DB$, also auch $2 (AC \times CB) < 2 (AD \times DB)$. Nun ist (2, 4. S.) $\square AC + \square CB + 2 (AC \times CB) = \square AB = \square AD + \square DB + 2 (AD \times DB)$. Folglich ist $\square AC + \square CB > \square AD + \square DB$.

Der 43. Satz. Lehrsatz.

Die Binomiale, AB, läßt sich bloß in Einem Punkte, C, in ihre Namen, AC, CB, zerlegen.

Wäre ein anderer Punkt D möglich, daß die Abschnitte AD, DB, rational bloß in Potenz commensurabel wären, so ist offenbar nicht $AC = DB$, weil sonst auch $AD = BC$, folglich $AC : CB = BD : DA$, folglich AB auf ähnliche Art in D, wie

wie in C, geschnitten wäre, welches nicht angenommen wird. Demnach liegen die Punkte C, D, ungleich weit vom Halbirungspunkte. Folglich ist (10, 42. Lehns.) □ AC + □ CB > □ AD + □ DB. Nun ist (2, 4. S.) □ AC + □ CB + 2 (AC × CB) = □ AB = □ AD + □ DB + 2 (AD × DB). Folglich ist (□ AC + □ CB) — (□ AD + □ DB) = 2 (AD × DB) — 2 (AC × CB). Nun sind die Quadrate, also auch deren Unterschied, rational. Folglich ist auch der Unterschied der Rectangel rational, welches, weil sie medial, (10, 27. S.) unmöglich ist. Demnach kann die Binomiale AB in keinem andern Punkte außer C, also bloß in dem Einen Punkte C, in ihre Namen zerlegt werden.

Der 44. Satz. Lehrsatz.

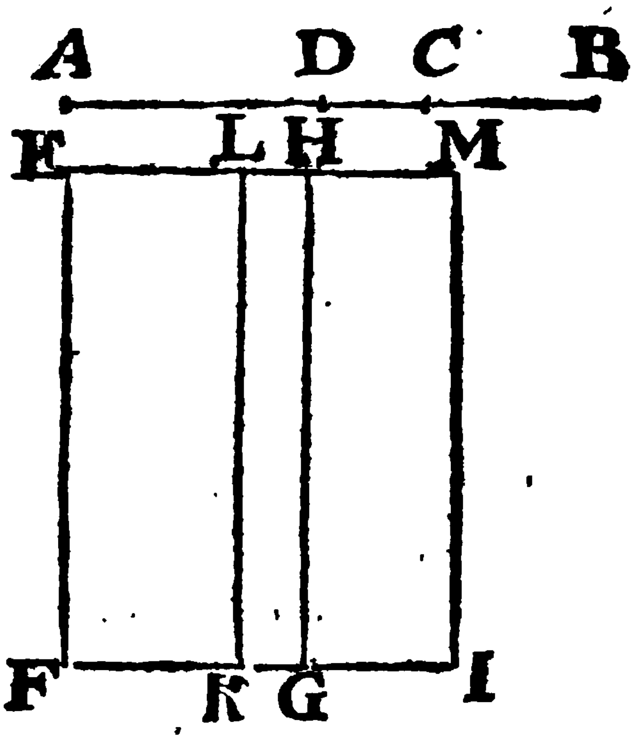
Die erste Bimediale, AB, läßt sich bloß in Einem Punkte, C, in ihre Namen, AC, CB, zerlegen.

Wäre ein anderer Punkt D möglich, daß die Abschnitte AD, DB, mediale bloß in Potenz commensurabele und ein Rationales enthaltende Linien wären: so wäre wieder 2 (AD × DB) — 2 (AC × CB) = (□ AC + □ CB) — (□ AD + □ DB). Folglich wäre, da die Rectangel rational, auch der Unterschied der Quadrate rational, welches, weil sie medial, (10, 27. S.) unmöglich ist. Demnach kann die erste Bimediale bloß in Einem Punkte in ihre Namen zerlegt werden.

Der 45. Satz. Lehrsatz.

Die zweyte Bimediale, AB, läßt sich bloß in Einem Punkte, C, in ihre Namen, AC, CB, zerlegen.

Wäre



Wäre ein anderer Punkt D möglich, daß AD, DB, medial bloß in Potenz commensurabel sind, und ein Mediales enthalten, daß aber nicht AC = DB, sondern nach der Voraussetzung AC > DB sey: so ist (10, 42. Lehns.) □ AC + □ CB > □ AD + □ DB.

Es sey EF eine Rationallinie, und (1, 45. S.) an derselben die Rectangel EI = □ AB, EG = □ AC + □ CB, und EK = □ AD + □ DB entworfen, daß also, wenn man EG von EI wegnimmt, HI = 2 (AC × CB), und, wenn man EK von EI wegnimmt, LI = 2 (AD × DB) ist.

Da (10, 38. S. 16. S. 24. Zus.) □ AC + □ CB, also auch EG, das ist FE × EH, medial, aber FE rational: so ist (10, 23. S.) EH rational und der FE in Länge incommensurabel. Aus gleichen Gründen ist auch HM rational und der FE in Länge incommensurabel.

Da ferner (10, 38. S.) AC, CB, medial bloß in Potenz commensurabel, also AC ∪ CB, und (6, 1. S.) AC : CB = □ AC : AC × CB; so ist (10, 10. S.) □ AC ∪ AC × CB. Nun ist (10, 16. S.) □ AC ∩ □ AC + □ CB, weil AC ⁀ CB, auch ist AC × CB ∩ 2 (AC × CB). Folglich ist □ AC + □ CB ∪ 2 (AC × CB), das ist, EG ∪ HI, folglich (10, 23. S.) auch EH ∪ HM. Demnach sind EH, HM, rational bloß in Potenz commensurabel. Folglich ist (10, 37. S.) EM eine Binomiale, die in H geschnitten ist.

Auf eben die Art wird bewiesen, daß EL, LM, rational bloß in Potenz commensurabel sind, also die Binomiale EM auch in L geschnitten, daß nicht EH = LM; weil

(10,

(10, 42. Lehrs.) $\square AC + \square CB > \square AD + \square DB$, aber $\square AD + \square DB > 2\,(AD \times DB)$, also um so mehr $\square AC + \square CB > 2\,(AD \times DB)$, das ist $EG > LI$, und daher $EH > LM$.

Demnach wäre, wenn sich die zweyte Bimediale AB außer C auch noch in einem andern Punkte D in ihre Namen zerlegen ließe, die Binomiale EM in zwey verschiedenen Punkten, H, L, in ihre Namen zerlegt, welches (10, 43. S.) unmöglich ist. Folglich kann die zweyte Bimediale AB bloß in Einem Punkte in ihre Namen zerlegt werden.

Der 46. Satz. Lehrsatz.

Die größere Irrationale, AB, läßt sich bloß in Einem Punkte, C, in ihre Namen, AC, CB, zerlegen.

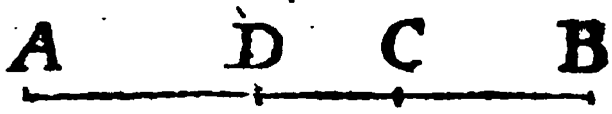
Gesetzt, es wäre ein anderer Punkt D möglich, daß AD, DB, in Potenz incommensurabel sind, ein Mediales enthalten, und ihre Quadrate zusammen ein Rationales ausmachen.

Da (2, 4. S.) $(\square AC + \square CB) - (\square AB + \square DB) = 2\,(AD \times DB) - 2\,(AC \times CB)$; aber jener Unterschied rational, weil die Quadrate zusammen rational sind: so wäre auch dieser Unterschied rational, welches, weil die Rectangel medial sind, (10, 27. S.) nicht möglich ist. Folglich kann die größere Irrationale nicht in einem von C verschiedenen Punkte, also bloß in dem Einen Punkte C, in ihre Namen zerlegt werden.

Der 47. Satz. Lehrsatz.

Die ein Rationales und Mediales Potenzirende, AB, läßt sich bloß in Einem Punkte, C, in ihre Namen, AC, CB, zerlegen.

Gesetzt,

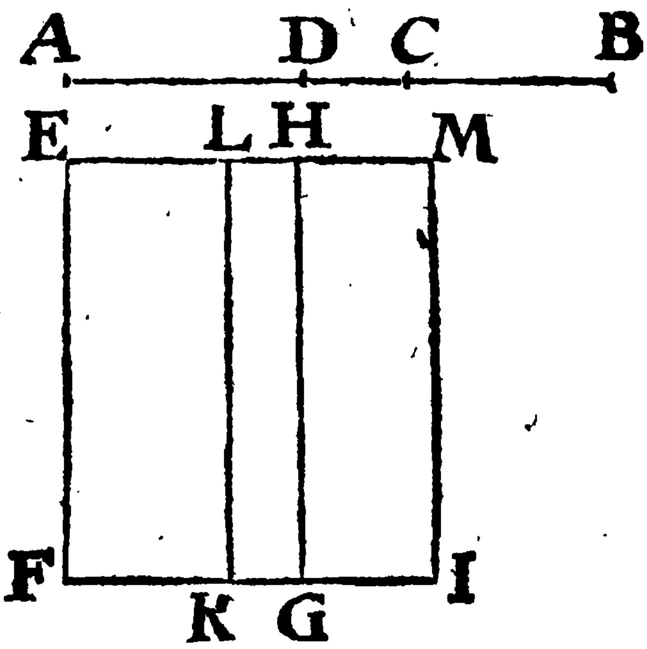


Gesetzt, es wäre noch ein anderer Punkt D möglich, daß AD, DB, in Potenz incommensurabel sind, ein Rationales enthalten, und ihre Quadrate zusammen ein Mediales ausmachen.

Da (2, 4. S.) $2(AD \times DB) - 2(AC \times CB) = (\square AC + \square CB) - \square AD + \square DB)$; aber jener Unterschied rational: so wäre auch dieser Unterschied rational, welches, weil die Quadrate zusammen medial sind, (10, 27. S.) nicht möglich ist. Folglich kann die ein Rationales und Mediales Potenzirende bloß in Einem Punkte in ihre Namen zerlegt werden.

Der 48. Satz. Lehrsatz.

Die zwey Mediale Potenzirende, AB, läßt sich bloß in Einem Punkte, C, in ihre Namen, AC, CB, zerlegen.



Gesetzt, es sey noch ein anderer Punkt D möglich, daß AD, DB, in Potenz incommensurabel sind, ein Mediales enthalten, und ihre Quadrate zusammen auch ein Mediales ausmachen, welches jenem incommensurabel ist; auch daß nicht $AC = DB$, sondern $AC > DB$ ist.

Es sey EF eine Rationallinie, und an derselben die Rectangel: $EG = \square AC + \square CB$; $HI = 2(AC \times CB)$; $EK = \square AD + \square DB$ entworfen: so ist $EI = \square AB$, und $LI = 2(AD \times DB)$.

Da nach der Voraussetzung $\square AC + \square CB$, folglich auch EG, das ist $FE \times EH$, medial, aber FE rational ist: so ist (10, 23. S.) EH rational und der EF in Länge incommensurabel. Aus denselben Gründen ist auch HM rational und der EF in Länge incommensurabel.

Da

Da ferner $\square$ AC + $\square$ CB $\cup$ 2 (AC $\times$ CB), das ist, EG $\cup$ HI: so ist (6, 1. S. und 10, 19. S.) EH $\cup$ HM. Demnach sind EH, HM, rational bloß in Potenz commensurabel. Folglich ist EM eine Binomiale, die in H zerlegt ist. Eben so wird bewiesen, daß sie auch in L zerlegt sey, so daß nicht EH = LM ist. Demnach wäre, wenn sich die zwey Mediale Potenzirende AB, außer C noch in einem andern Punkte D in ihre Namen zerlegen ließe, die Binomiale EM in zwey verschiedenen Punkten, H, L, in ihre Namen zerlegt, welches (10, 43. S.) nicht möglich ist. Folglich kann die AB bloß in Einem Punkte in ihre Namen zerlegt werden.

Erklärungen
der
sechs Ordnungen von Binomialen.

1. Eine Binomiale, deren größerer Name um das Quadrat einer ihm in Länge commensurabelen Linie über den kleinern potenzirt, heißt

   die **erste Binomiale**, wenn der größere Name einer angenommenen Rationallinie in Länge incommensurabel ist;

2. die **zweyte Binomiale**, wenn der kleinere Name;
3. die **dritte Binomiale**, wenn keiner der beyden Namen solcher Rationallinie in Länge commensurabel ist.
4. Eine Binomiale hingegen, deren größerer Name um das Quadrat einer, ihm in Länge incommensurabelen Linie über den kleinern potenzirt, heißt

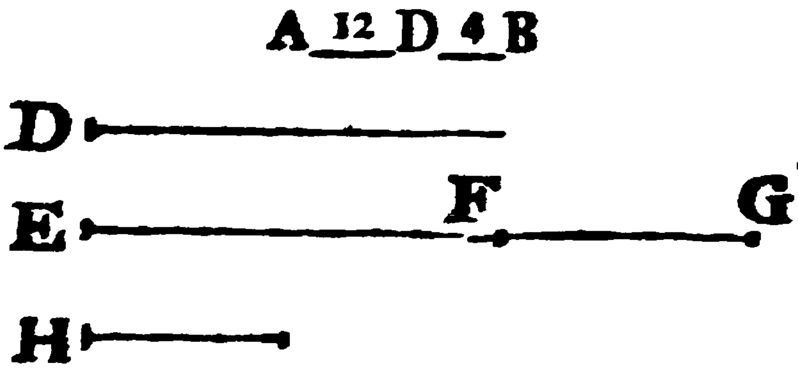
   die **vierte Binomiale**, wenn der größere Name der angenommenen Rationallinie in Länge commensurabel ist;

5. die

5. die fünfte Binomiale, wenn der kleinere Name;
6. die sechste Binomiale, wenn keiner der beyden Namen solcher Rationallinie in Länge commensurabel ist.

Der 49. Satz. Aufgabe.

Die erste Binomiale zu finden.



Nimm (10, 29. Lehns. 1. Zus.) zwey Zahlen, AC, CB, deren Summe AB zwar zu BC, aber nicht zu AC, die Verhältniß von Quadratzahlen habe. Auch sey D eine Rationallinie, und EF eine der D in Länge commensurabele Linie, ferner (10, 6. S.) AB : AC = □EF : □ FG; so ist die aus EF und FG zusammengesetzte EG die erste Binomiale.

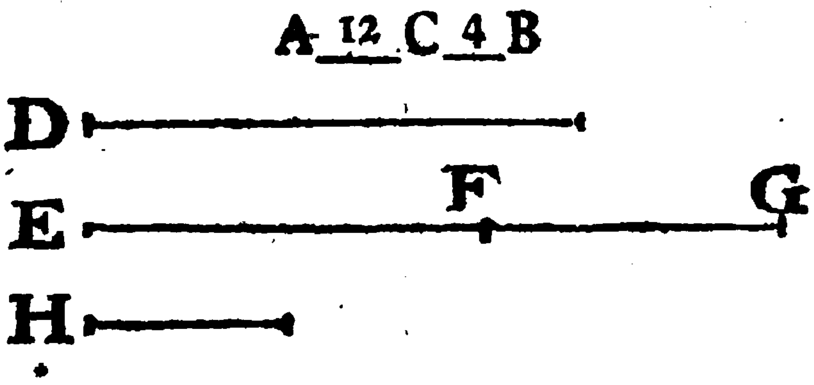
Denn da AB : BC = □ EF : □ FG, so ist (10, 6. S.) □ EF ∩ □ FG, aber EF ∩ D, also rational, folglich auch FG rational; aber (10, 9. S.) EF ∪ FG. Demnach sind EF, FG, rational bloß in Potenz commensurabel. Folglich ist (10, 37. S.) EG eine Binomiale, deren Namen EF, FG, sind.

Aus AB : AC = □ EF : □ FG, wo AB > AC, folgt auch □ EF > □ FG. Es sey daher □ EF — □ FG = □ H: so ist (5, 19. Zus.) zurückkehrend AB : CB = □ EF : □ H. Nun verhalten sich AB, CB, wie Quadratzahlen. Folglich verhalten sich auch □ EF, □ H, wie Quadratzahlen. Folglich ist (10, 9. S.) EF ∩ H. Demnach potenzirt EF über FG um das Quadrat der ihr in Länge commensurabelen H; und es war EF ∩ D; folglich ist EG die erste Binomiale.

Der

Der 50. Satz. Aufgabe.

Die zweyte Binomiale zu finden.



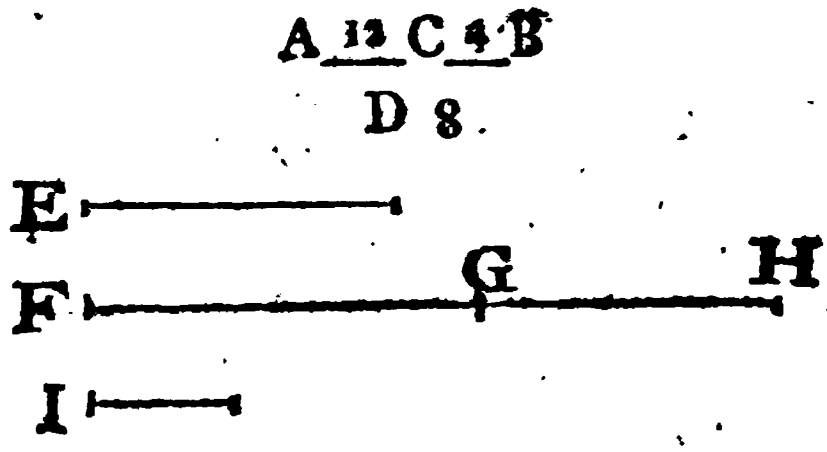
Nimm zwey Zahlen AC, BC, deren Summe AB zwar zu CB, aber nicht zu AC, die Verhältniß von Quadratzahlen habe. Auch sey D eine Rationallinie, und FG eine der D in Länge commensurabele Linie, ferner (10, 6. Zus.) $CA : AB = \square GF : \square FE$; so ist die aus GF, FE, zusammengesetzte GE die zweyte Binomiale.

Denn da $CA : AB = \square GF : \square FE$, so ist (10, 6. S.) $\square GF \frown \square FE$; aber $GF \frown D$, also rational, folglich auch FE rational; aber (10, 9. S.) $GF \smile FE$. Demnach sind GF, FE, rational bloß in Potenz commensurabel. Folglich ist (10, 37. S.) EG eine Binomiale, deren Namen GF, FE.

Aus $CA : AB = \square GF : \square FE$, folgt **durch Umkehrung** $AB : AC = \square EF : \square FG$, wo $AB > AC$, also auch $\square EF > \square FG$. Es sey nun $\square EF - \square FG = \square H$: so ist (5, 19. Zus.) **zurückkehrend** $AB : BC = \square EF : \square H$. Nun verhalten sich AB, BC, wie Quadratzahlen. Folglich verhalten sich auch $\square EF$, $\square H$, wie Quadratzahlen. Folglich ist (10, 9. S.) $EF \frown H$. Demnach potenzirt EF über FG um das Quadrat der ihr in Länge commensurabeln H, und es war $GE \frown D$. Folglich ist EG die zweyte Binomiale.

Der 51. Satz. Aufgabe.

Die dritte Binomiale zu finden.



Nimm zwey Zahlen, AC, CB, deren Summe AB zwar zu CB, aber nicht zu AC, die Verhältniß von Quadratzahlen habe; desgleichen eine dritte Zahl D, welche weder eine Quadratzahl sey, noch zu einer der beyden ersten die Verhältniß von Quadratzahlen habe. Auch sey E eine Rationallinie, und (10, 6. Zus.) $D : AB = \square E : \square FG$, desgleichen $BA : AC = \square FG : \square GH$; so ist die aus FG, GH, zusammengesetzte FH die dritte Binomiale.

Denn da $D : AB = \square E : \square FG$; so ist $\square E \cap \square FG$, folglich, weil E rational, auch FG rational, aber (10, 9. S.) $E \cup FG$.

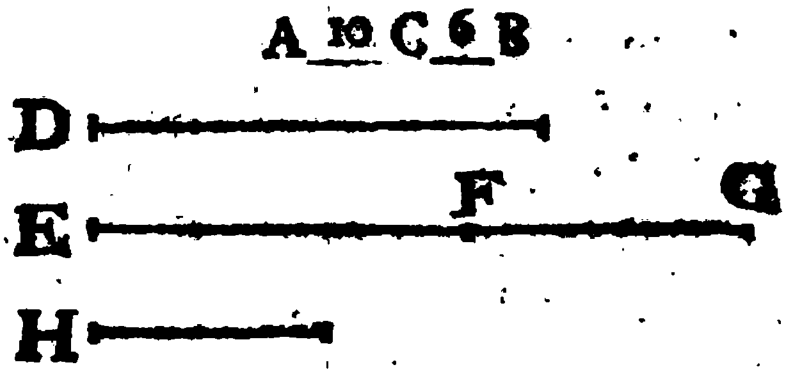
Da $BA : AC = \square FG : \square GH$; so ist $\square FG \cap \square GH$, folglich, weil FG rational, auch GH rational, aber (10, 9. S.) $FG \cup GH$. Demnach sind FG, GH, rational bloß in Potenz commensurabel. Folglich ist (10, 37. S.) FH eine Binomiale, deren Namen FG, GH.

Nach beyden obigen Proportionen ist (5, 22. S.) aus dem Gleichen $D : AC = \square E : \square GH$, folglich (10, 9. S.) $E \cup GH$; ferner ist, weil $BA > AC$, auch $\square FG > \square GH$. Es sey daher $\square FG - \square GH = \square I$; so ist (5, 19. Zus.) zurückkehrend $BA : CB = \square FG : \square I$, folglich (10, 9. S.) $FG \cap I$. Demnach potenzirt FG über GH um das Quadrat der ihr in Länge commensurabelen I, und es waren FG, GH, der E incommensurabel: folglich ist FH die dritte Binomiale.

Der 52. Satz. Aufgabe.

Die vierte Binomiale zu finden.

Nimm



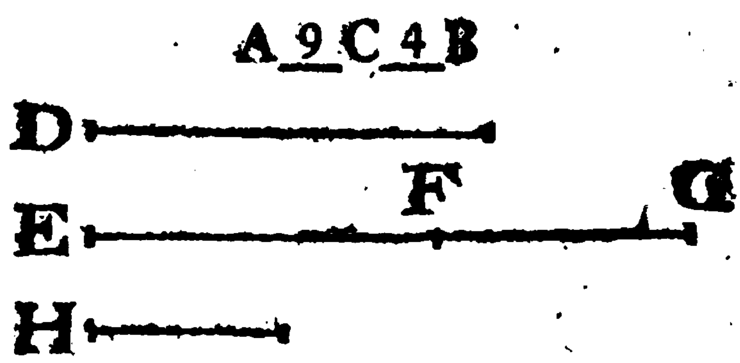
Nimm zwey Zahlen AC, CB, deren Summe AB zu keiner von beyden die Verhältniß von Quadratzahlen habe. Auch sey D eine Rationallinie, und EF eine der D in Länge commensurabele Linie, ferner (10, 6. Zus.) $BA : AC = \square EF : \square FG$; so ist die aus EF, FG, zusammengesetzte EG die vierte Binomiale.

Denn aus der Proportion folgt $\square EF \frown \square FG$, also, weil $EF \frown D$, und D rational, auch EF, also auch FG rational, aber (10, 9. S.) $EF \smile FG$. Demnach sind EF, FG, rational bloß in Potenz commensurabel; folglich ist (10, 37. S.) EG eine Binomiale, deren Namen EF, FG.

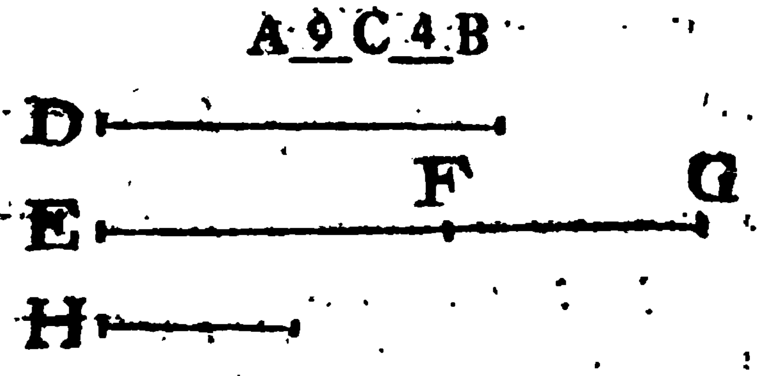
Ferner folgt aus der Proportion, wo $BA > AC$, daß $\square EF > \square FG$. Es sey daher $\square EF - \square FG = \square H$: so ist zurückkehrend $BA : BC = \square EF : \square H$, folglich (10, 9. S.) $EF \smile H$. Demnach potenzirt EF über FG um das Quadrat der ihr in Länge incommensurabelen H, und es war $EF \frown D$. Folglich ist EG die vierte Binomiale.

Der 53. Satz. Aufgabe.

Die fünfte Binomiale zu finden.



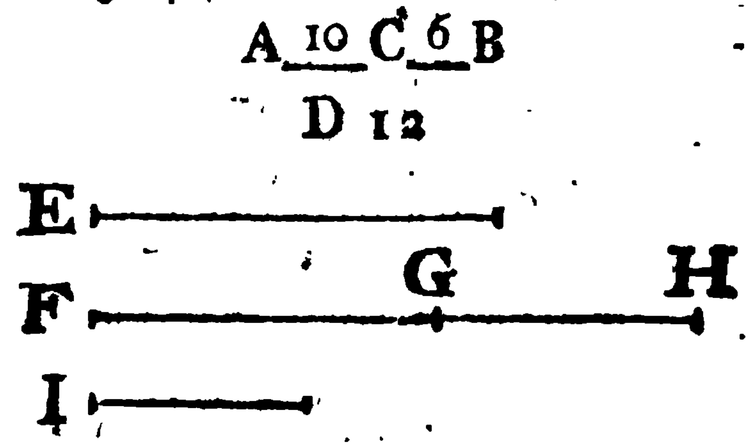
Nimm zwey Zahlen AC, CB, deren Summe AB zu keiner von beyden die Verhältniß von Quadratzahlen habe. Auch sey D eine Rationallinie, und FG eine der D in Länge commensurabele Linie, ferner (10, 6. Zus.) $CA : AB = \square GF : \square FE$; so ist die aus GF, FE, zusammengesetzte EG die fünfte Binomiale.



Denn aus der Proportion folgt, wie vorhin, daß GF, FE, rational bloß in Potenz commensurabel sind, also (10, 37. S.) EG eine Binomiale ist, deren Namen GF, FE; ferner, daß $\square FG < \square EF$. Es sey daher $\square EF - \square FG = \square H$; so ist umgekehrt und zurückkehrend $AB : BC = \square EF : \square H$, folglich (10, 9. S.) $EF \cup H$. Demnach potenzirt EF um das Quadrat der ihr in Länge incommensurabeln H über FG, und es war $FG \cap D$; folglich ist EG die fünfte Binomiale.

Der 54. Satz. Aufgabe.

Die sechste Binomiale zu finden.



Nimm zwey Zahlen AC, CB, deren Summe AB zu keiner von beyden die Verhältniß von Quadratzahlen habe, desgleichen eine dritte Zahl D, welche weder eine Quadratzahl sey, noch zu einer der beyden ersten die Verhältniß von Quadratzahlen habe. Auch sey E eine Rationallinie, und (10, 6. Zus.) $D : AB = \square E : \square FG$, desgleichen $BA : AC = \square FG : \square GH$; so ist die aus FG, GH, zusammengesetzte FH die sechste Binomiale.

Denn aus der ersten Proportion folgt, daß FG rational, aber $E \cup FG$; und aus der zweyten, daß GH rational, und $FG \cup GH$; folglich (10, 37. S.) FH eine Binomiale sey, deren Namen FG, GH.

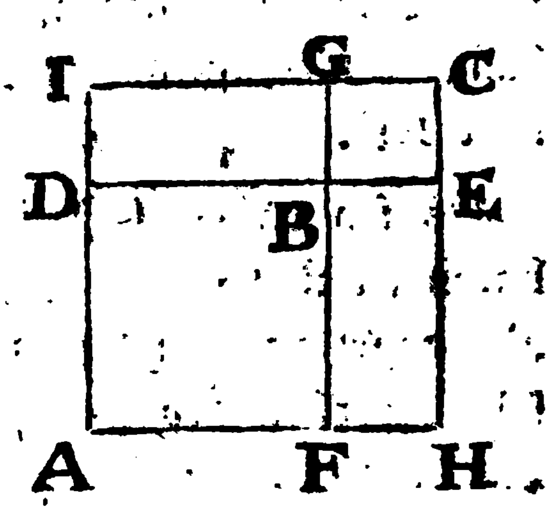
Nach beyden Proportionen ist aus dem Gleichen $D : AC = \square E : \square GH$, folglich (10, 9. S.) $E \cup GH$.

Auch

Auch ist □ FG > □ GH, weil AB > AC. Es sey daher □ FG — □ GH = □ I: so ist zurückkehrend AB : BC = □ FG : □ I, folglich (10, 9. S.) FG ∪ I. Demnach potenzirt FG um das Quadrat der ihr in Länge incommensurabeln I über GH, und es waren FG, GH, der E incommensurabel. Folglich ist FH die sechste Binomiale.

Lehnsatz.

Legt man zwey Quadrate, AB, BC, an einander, daß DB mit BE, folglich (1, 14. S.) auch FB mit BG in gerader Linie ist, und vollendet das Parallelogramm AC: so ist AC ein Quadrat, und das Parallelogramm DG zwischen den Quadraten AB, BC, das Parallelogramm DC aber zwischen den Quadraten AC, CB, die mittlere Proportionalfläche.



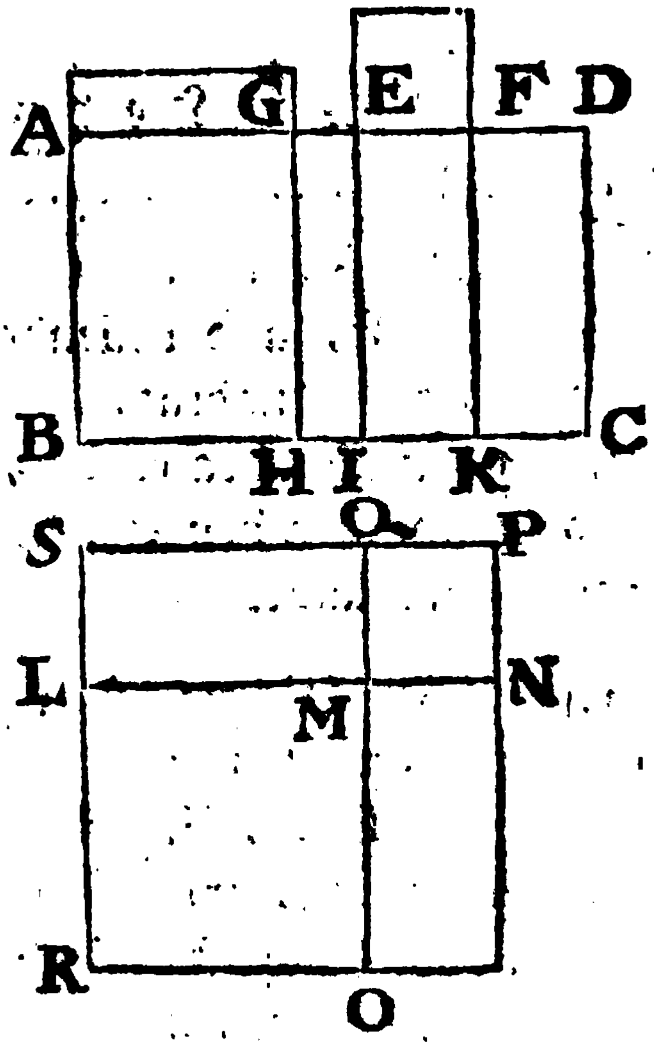
1. Es ist AC ein Quadrat. Denn da DB = FB, und BE = BG; so ist DE = FG. Nun ist DE = AH = IC, und FG = AI = HC. Folglich ist AC gleichseitig; aber auch rechtwinklig, folglich ein Quadrat.

2. Es ist AB : DG = DG : BC. Denn es ist FB : BG = DB : BE. Nun ist (6, 1. S.) FB : BG = AB : DG, und DB : BE = DG : BC. Folglich ist (5, 11. S.) AB : DG = DG : BC.

3. Es ist AC : DC = DC : BC. Denn da AD = DB = IG, und DI = BG = GC, so ist AD : DI = IG : GC; also verbunden AI : DI = IC : GC. Nun ist AI : DI = AC : DC, und IC : GC = DC : BC. Folglich ist AC : DC = DC : BC.

Der 55. Satz. Lehrsatz.

Den unter einer Rationallinie, BA, und der ersten Binomiale, AD, enthaltenen Raum, ABCD, potenzirt eine Binomiale.



Es sey die erste Binomiale AD bey E in ihre Namen zerlegt, und AE der größere Name: so sind (10, 37. S.) AE, ED, rational bloß in Potenz commensurabel, auch ist der größere Name AE der Rationallinie BA in Länge commensurabel; und AE potenzirt um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über ED.

Es sey daher ED in F halbirt, und (6, 28. S.) ein Rectangel $= \frac{1}{4} \square$ ED $= \square$ EF, dessen Ergänzung ein Quadrat ist, an der AE entworfen; daß also, wenn AG $\times$ GE solches Rectangel ist, (10, 18. S.) AG, GE, in Länge commensurabel sind. Durch die Punkte G, E, F, ziehe der AB oder CD die GH, EI, FK, parallel. Mache (2, 14. S.) die Quadrate RM = AH, und MP = GI; lege beyde so an einander, daß LM mit MN, folglich auch QM mit MO in einer geraden Linie sey; und vollende das Parallelogramm RP: so ist solches (10, 54. Lehns.) ein Quadrat.

Nun ist zu beweisen, daß LN den Raum AC potenzire, und aus rationalen bloß in Potenz commensurabeln Linien LM, LN, zusammengesetzt, folglich eine Binomiale sey.

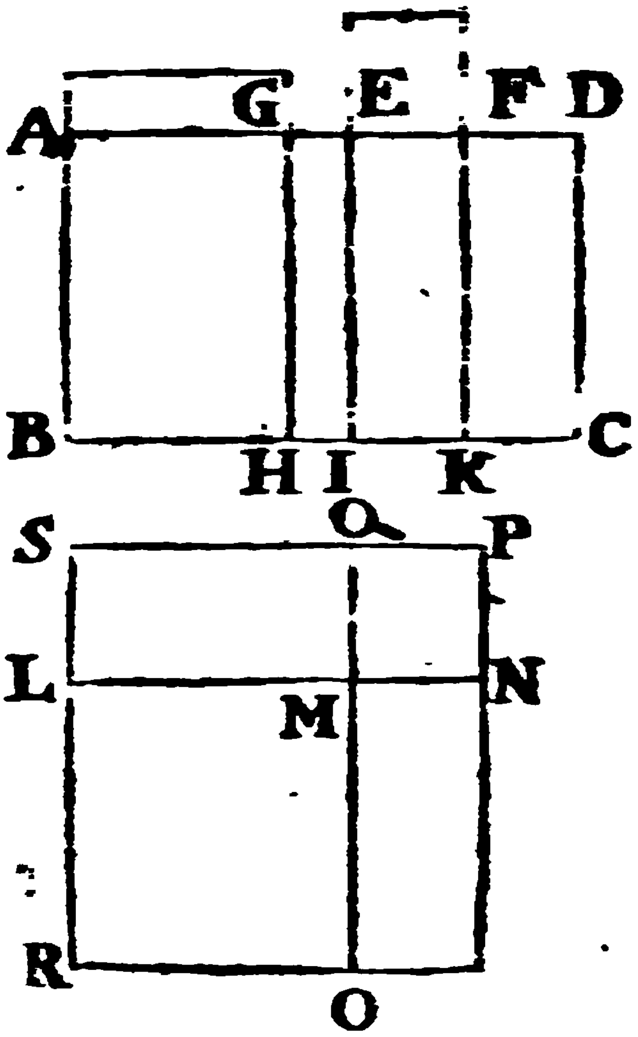
Erstlich. Da $AG \times GE = \square EF$, so ist (6, 17. S.) $AG : EF = EF : GE$, folglich (6, 1. S.) $AH : EK = EK : GI$, folglich EK die mittlere Proportionalfläche zwischen AH und GI; also, weil $AH = RM$, $GI = MP$, auch zwischen RM und MP. Nun ist (10, 54. Lehns.) solches auch LQ. Folglich ist $EK = LQ$. Nun ist, weil (1, 36. S.) $EK = FC$, und (1, 43. S.) $LQ = ON$, auch $FC = ON$. Folglich ist $EK + FC$, das ist $EC = LQ + ON$. Nun war $AH = RM$, und $GI = MP$. Folglich ist $AC = RP = \square LN$. Demnach potenzirt LN den Raum AC.

Zweytens. Da $AG \frown GE$, also (10, 16. S.) AE beyden commensurabel, und nach der Voraussetzung $AE \frown AB$: so sind AG, GE, der AB commensurabel, also rational, folglich auch (10, 20. S.) AH, GI, rational, und (10, 10. S.) commensurabel. Nun ist $AH = RM$, und $GI = MP$, Folglich sind RM, MP, das ist $\square LM = \square MN$, **rational und commensurabel.**

Da (10, 37. S.) $AE \smile ED$, aber $AE \frown AG$, und $ED \frown EF$, so ist $AG \smile EF$, folglich $AH \smile EK$, das ist $RM \smile LQ$. Nun ist $RM : LQ = OM : MQ$. Folglich ist auch $OM \smile MQ$, das ist $LM \smile MN$, folglich sind LM, MN, **bloß in Potenz commensurabel.** Demnach ist LN, welche den Raum AC potenzirt, aus zwey rationalen bloß in Potenz commensurabelen Linien zusammengesetzt, folglich (10, 37. S.) eine **Binomiale.**

Der 56. Satz. Lehrsatz.

Den unter einer Nationallinie, BA, und der zweyten Binomiale, AD, enthaltenen Raum, ABCD, potenzir die erste Bimediale.



Construirt man wie im vorigen Satze, so wird alles wie dort, jedoch mit dem Unterschiede, daß hier der Kleinere Name ED der Rationallinie BA in Länge commensurabel ist. Auch wird, wie daselbst, bewiesen, daß LN den Raum AC potenzire. Daher ist nur noch zu beweisen, daß LN aus medialen bloß in Potenz commensurabelen Linien, LM, MN, zusammengesetzt, und daß LM$\times$MN ein Rationales, also LN die erste Bimediale sey.

Erstlich. Da (10, 27. S.) AE $\cup$ ED, aber ED $\cap$ AB: so ist (10, 14. S.) AE $\cup$ AB. Nun ist AG $\cap$ GE, also sind (10, 16. S.) AG, GE, der AE commensurabel, und, wie AE, auch rational. Folglich sind AG, GE, der AB in Länge incommensurabel. Demnach sind AB, AG, GE, rational bloß in Potenz commensurabel, folglich sind (10, 22. S.) AH, GI, das ist RM, MP, folglich auch LM, MN, medial.

Da AG $\cap$ GE, so ist AH $\cap$ GI, das ist RM $\cap$ MP, das ist $\square$LM $\cap$ $\square$MN. Folglich sind LM, MN, in Potenz commensurabel. Da AE $\cup$ ED, aber AE $\cap$ AG, und ED $\cap$ EF: so ist AG $\cup$ EF, folglich AH $\cup$ EK, das ist RM $\cup$ LQ, das ist OM $\cup$ MQ, das ist LM $\cup$ MN. Folglich sind LM, MN, bloß in Potenz commensurabel.

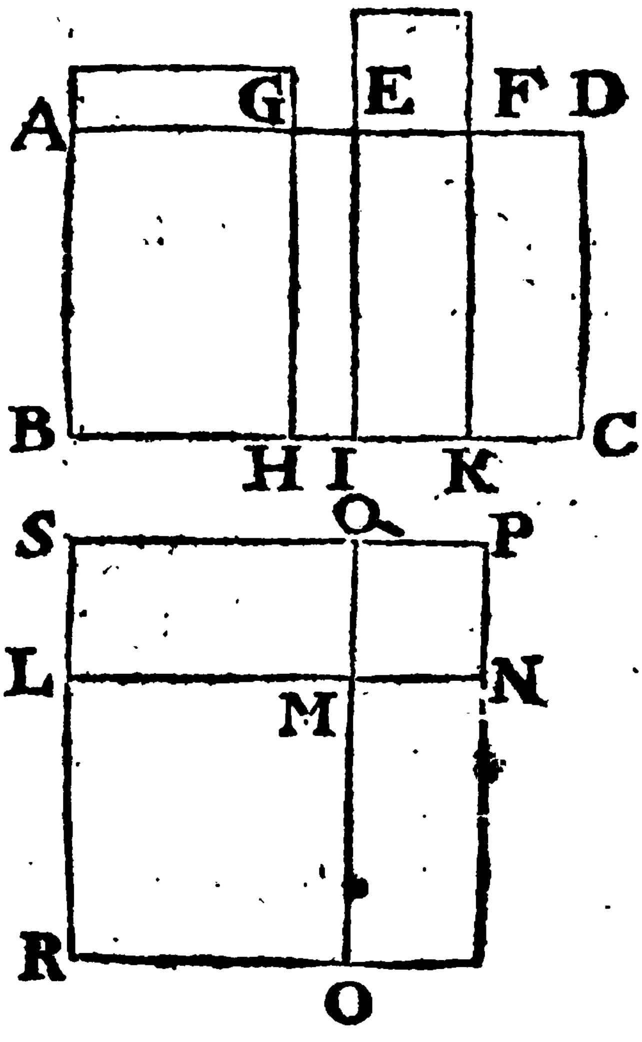
Zweytens. Da DE der AB, EF, commensurabel, so sind EF, EI, commensurabel und rational. Folglich ist (10, 20. S.) EK, das ist LQ, das ist LM$\times$MN, rational.

Dem-

Demnach ist LN, welche den Raum AC potenzirt, aus zwey medialen bloß in Potenz commensurabelen Linien, die ein Rationales enthalten, zusammengesetzt, folglich (10, 38. S.) die **erste Bimediale.**

Der 57. Satz. Lehrsatz.

Den unter einer Rationallinie, BA, und der dritten Binomiale, AD, enthaltenen Raum, ABCD, potenzirt die **zweyte Bimediale.**



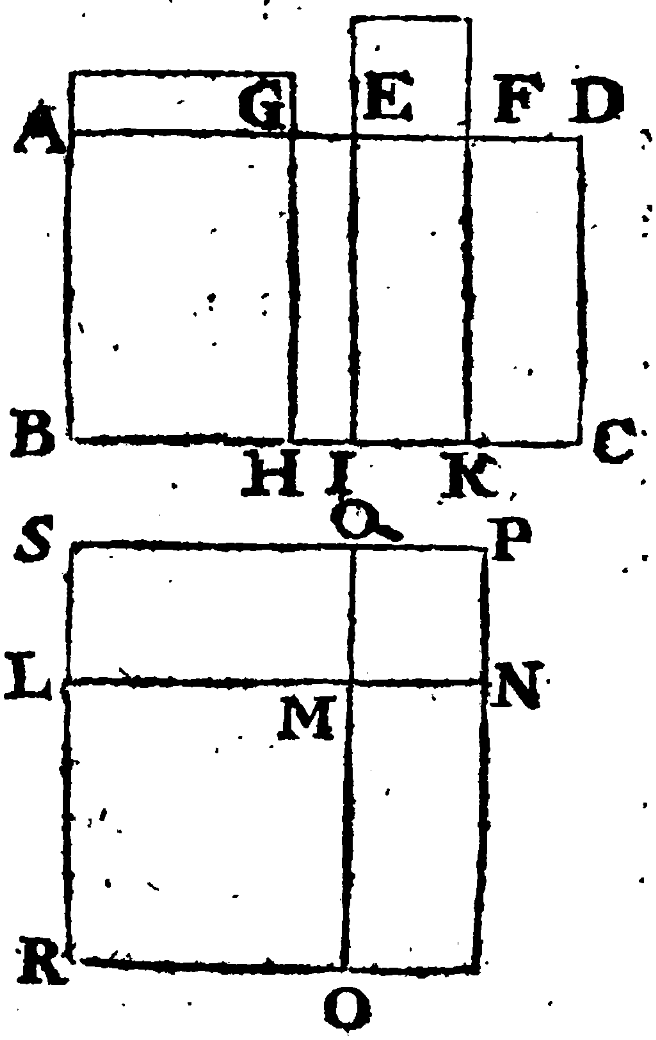
Construirt man wie im vorletzten Satze, so wird alles wie dort, jedoch mit dem Unterschiede, daß hier **keiner der Namen**, AE, ED, der Rationallinie BA in Länge commensurabel ist. Auch wird wie daselbst bewiesen, daß LN den Raum AC potenzire, und wie im vorigen Satze dargethan, daß LN aus medialen bloß in Potenz commensurabelen Linien, LM, MN, zusammengesetzt sey. Daher ist nur noch zu beweisen, daß LM × MN ein Mediales, also LN die zweyte Bimediale sey.

Da DE der AB, das ist, der EI, incommensurabel, aber DE ∩ EF: so ist EI ∪ EF. Nun sind EI, EF, rational. Folglich sind EI, EF, rational bloß in Potenz commensurabel. Folglich ist EK, das ist LQ, das ist LM × MN, **medial.**

Demnach ist LN, welche den Raum AC potenzirt, aus zwey medialen bloß in Potenz commensurabelen Linien, die ein Mediales enthalten, zusammengesetzt, folglich (10, 39. S.) die **zweyte Bimediale.**

Der 58. Satz. Lehrsatz.

Den unter einer Rationallinie, BA, und der vierten Binomiale, AD, enthaltenen Raum, ABCD, potenzirt die größere Irrationale.



Construirt man wie im 55. Satze, so wird alles wie dort, jedoch mit dem Unterschiede, daß der größere **Name** AE, welcher hier gleichfalls der Rationallinie BA in Länge commensurabel ist, um das Quadrat einer ihm in Länge incommensurabelen Linie über den kleinern ED potenzirt, folglich (10, 19. S.) AG ∪ GE ist. Auch wird, wie in den vorigen Sätzen, bewiesen, daß LN den Raum AC potenzirt. Daher ist nur noch zu beweisen, daß LM, MN, woraus LN zusammengesetzt ist, in Potenz incommensurabel sind, und ein Mediales enthalten, aber ihre Quadrate zusammen ein Rationales ausmachen, also LN die größere Irrationale sey.

Da AG ∪ GE, so ist (1, 6. S. und 10, 10. S.) AH ∪ GI, das ist RM ∪ MP, das ist, □ LM ∪ □ MN, folglich LM ⌣ MN.

Da AE ⌢ AB, so ist AI, das ist, □ LM + □ MN, rational.

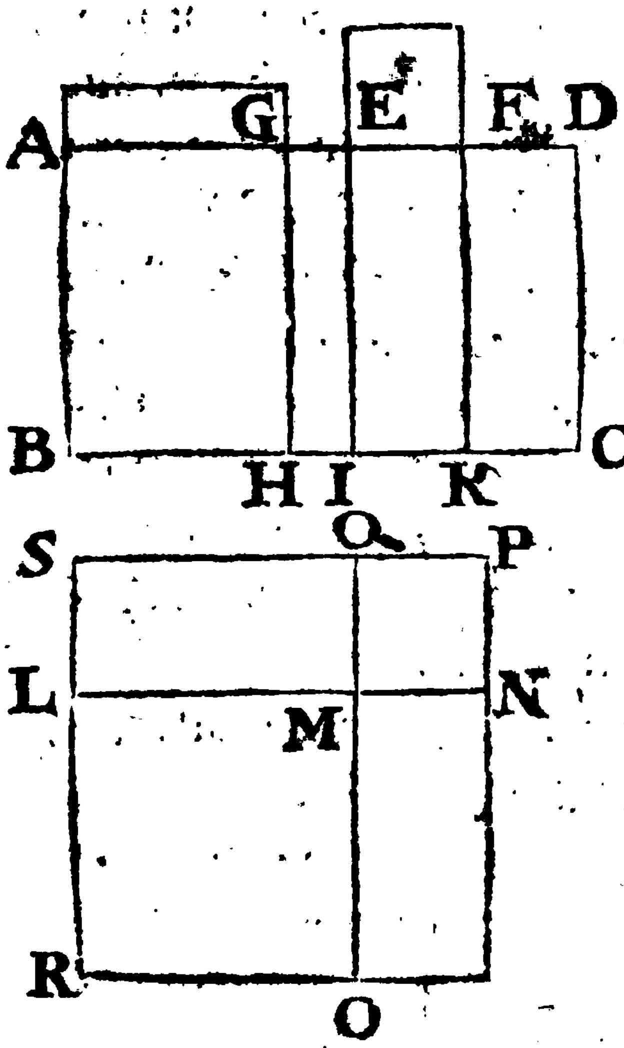
Da DE ∪ AB, das ist, DE ∪ EI, aber DE ⌢ EF; so ist EF ∪ EI. Demnach sind EF, EI, rational bloß in Potenz commensurabel. Folglich ist (10, 22. S.) KE = LQ = LM × MN medial.

Demnach ist LN, welche den Raum AC potenzirt, aus zwey in Potenz incommensurabeln Linien, die ein Mediales ent-

enthalten, und deren Quadrate zusammen ein Rationales ausmachen, zusammengesetzt; folglich (10, 40. S.) die grössere Irrationale.

Der 59. Satz. Lehrsatz.

Den unter einer Rationallinie, BA, und der fünften Binomiale, AD, enthaltenen Raum, ABCD, potenzirt die ein Rationales und Mediales Potenzirende.



Construirt man wie im 58. Satze, so wird alles, wie dort, nur daß hier der kleinere Name ED ∩ AB. Auch wird, wie in den vorigen Sätzen, bewiesen, daß LN den Raum AC potenzirt. Daher ist nur noch zu beweisen, daß LM, MN, in Potenz incommensurabel sind, und ein Rationales enthalten, aber ihre Quadrate zusammen ein Mediales ausmachen, also LN die ein Rationales und Mediales Potenzirende sey.

Da AG ∪ GE, so ist auch AH ∪ HE, das ist □LM ∪ □MN. Demnach sind LM, MN, in Potenz incommensurabel.

Da ED ∩ AB, aber AE ∪ ED: so ist AB ∪ AE. Demnach sind AB, AE, rational bloß in Potenz commensurabel. Folglich ist AI, das ist □LM + □MN, medial.

Da DE ∩ AB, das ist DE ∩ EI, und DE ∩ EF: so ist EI ∩ EF; aber EI rational; folglich (10, 20. S.) EK, das ist LQ, das ist LM × MN, rational.

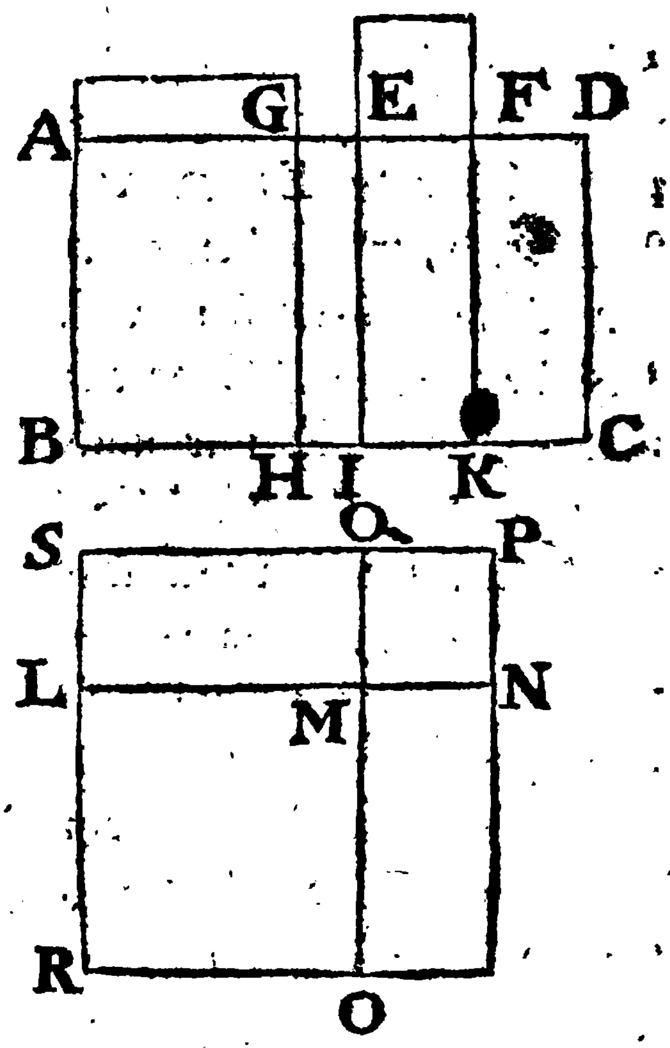
Demnach ist LN, welche den Raum AC potenzirt, aus zwey in Potenz incommensurabelen Linie, die ein Rationa-

les

les enthalten, und deren Quadrate zusammen ein Mediales ausmachen, zusammengesetzt; folglich (10, 41. S.) die ein **Rationales und Mediales Potenzirende.**

Der 60. Satz. Lehrsatz.

Den unter einer Rationallinie, BA, und der sechsten Binomiale, AD, enthaltenen Raum, ABCD, potenzirt die zwey Mediale Potenzirende.



Die Construction ist wieder wie beym 58. Satze, nur daß hier **keiner von beyden Namen** der BA in Länge commensurabel ist. Auch wird, wie in den vorigen Sätzen, bewiesen, daß LN den Raum AC potenzirt. Daher ist nur noch zu beweisen, daß LM, MN, in Potenz incommensurabel sind, und daß ihre Quadrate zusammen ein Mediales ausmachen, sie selbst aber ein jenem incommensurabeles Mediales enthalten, also LN die zwey Mediale Potenzirende sey.

Da GA ∪ GE, so sind LM, MN, in Potenz incommensurabel.

Da EA ∪ AB, also EA, AB, rational bloß in Potenz commensurabel sind: so ist (10. 22. S.) AI, das ist □ LM + □ MN, **medial.**

Da ED ∪ AB, das ist ED ∪ EI, aber ED ∩ EF: so ist EI ∪ EF. Demnach sind EI, EF, rational bloß in Potenz commensurabel. Folglich ist (10, 20. S.) EK, das ist LQ, das ist LM × MN, **medial.**

Da

Da EA ∪ EF, und AI ∪ EK: so ist LM × MN ∪ □ LM + □ MN.

Demnach ist LN, welche den Raum AC potenzirt, aus zwey in Potenz incommensurabelen Linien, deren Quadrate zusammen ein Mediales ausmachen, und die selbst ein jenem incommensurabeles Mediales enthalten, zusammengesetzt; folglich (10, 42. S.) LN die **zwey Mediale Potenzirende.**

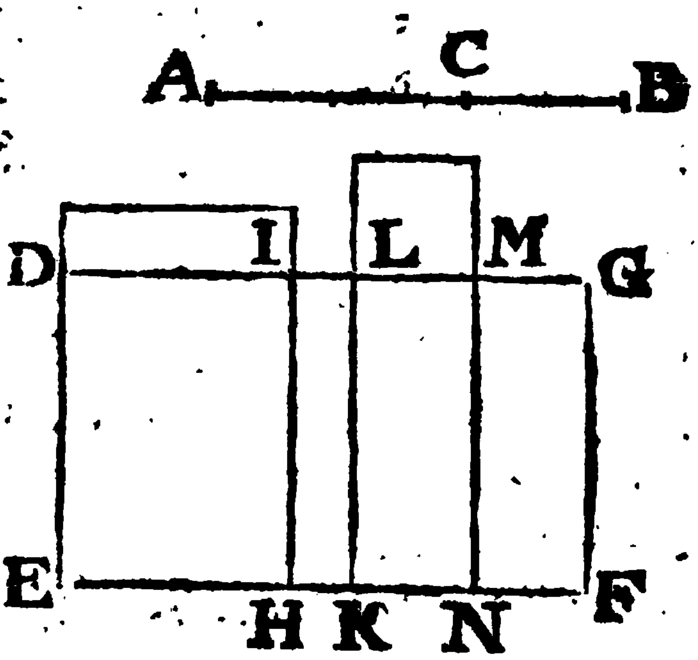
Lehnsatz.

Macht man von einer geraden Linie, AB, ungleiche Abschnitte, AC, CB: so sind deren Quadrate zusammen grösser, als das doppelte, unter ihnen enthaltene, Rectangel.

Wird AB in D halbirt: so ist (2, 5. S.) AC × CB + □ CD = □ AD, folglich AC × CB < □ AD, folglich auch 2 (AC × CB) < 2 □ AD. Nun ist (2, 9. S.) □ AC + □ CB = 2 (□ AD + □ DC). Folglich ist □ AC + □ CB > 2 (AC × CB).

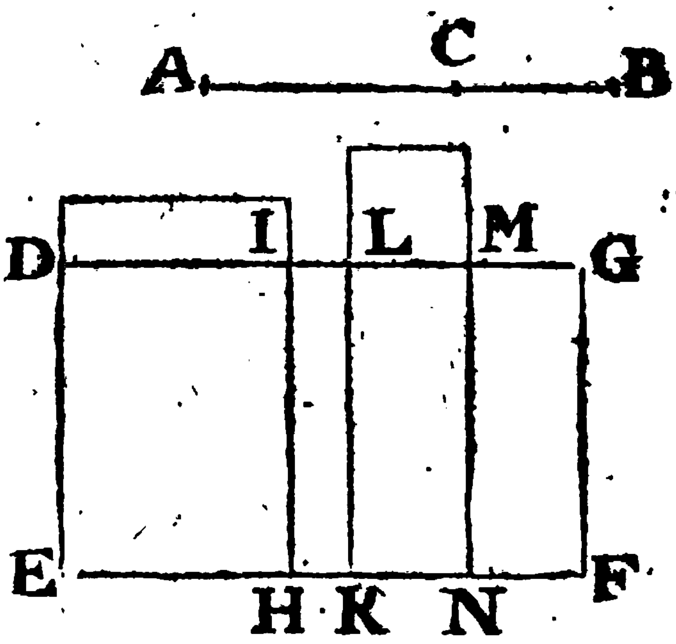
Der 61. Satz. Lehrsatz.

Das dem Quadrate einer Binomiale, AB, gleiche, an einer Rationallinie, ED, entworfene Rectangel, DEFG, hat zur Breite, DG, die erste Binomiale.



Es sey die Binomiale AB bey C in ihre Namen, AC, BC, zerlegt, und zwar AC der grössere Name. An DE entwerfe man die Rectangel, DH = □ AC, und IK = □ CB: so ist, weil □ AB = DEFG (2, 4. S.) 2 (AC × CB) = LF. Man halbire LG in M, ziehe MN mit LK oder GF parallel: so ist AC × CB = LN = MF. Nun ist zu beweisen:

Erst-



Erstlich, daß DG eine Binomiale sey.

Da AB eine Binomiale: so sind (10, 37. S.) AC, CB, rational bloß in Potenz commensurabel, also $\square$ AC, $\square$ CB, rational und commensurabel. Folglich ist (10, 16. S.) $\square$ AC + $\square$ CB sowohl dem $\square$ AC, als $\square$ CB commensurabel, also $\square$ AC + $\square$ CB, das ist DK, das ist ED $\times$ DL, rational, aber ED rational, folglich (10, 21. S.) DL rational und $\cap$ DE.

Da AC, CB, rational bloß in Potenz commensurabel sind: so ist 2 (AC $\times$ CB), das ist LF, das ist KL $\times$ LG, oder ED $\times$ LG, medial, folglich (10, 23. S.) LG rational und $\cup$ ED. Nun ist die Rationallinie DL $\cap$ ED. Folglich ist (10, 13. S.) DL $\cup$ LG. Demnach sind DL, LG, rational bloß in Potenz commensurabel, also ist (10, 37. S.) DG eine Binomiale.

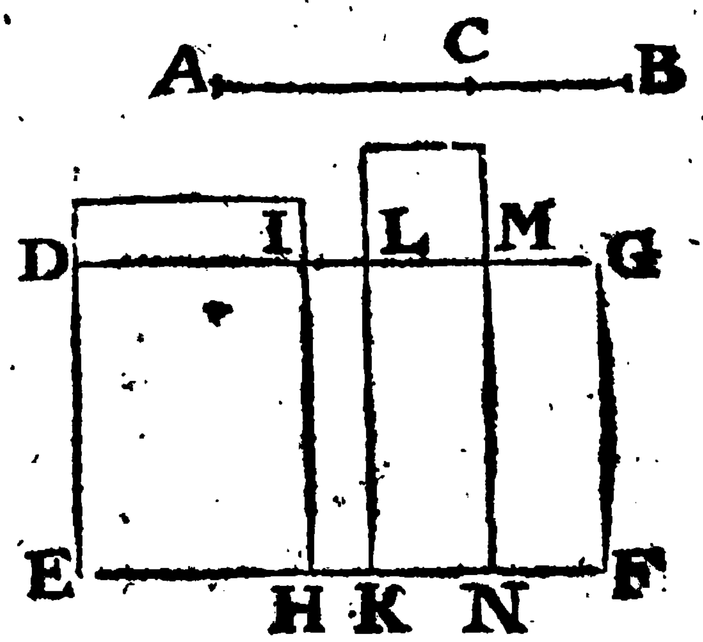
Zweytens, daß DG die erste Binomiale sey.

Da (10, 54. Lehns. 2.) $\square$ AC : AC $\times$ CB = AC $\times$ CB : $\square$ CB, das ist, DH : LN = LN : IK; so ist (6, 1. S.) DI : LM = LM : IL, folglich (6, 17. S.) DI $\times$ IL = $\square$ LM = $\frac{1}{4}$ $\square$ LG. Da ferner $\square$ AC $\cap$ $\square$ CB, das ist DH $\cap$ IK: so ist (10, 10. S.) DI $\cap$ IL. Da ferner (10, 60. Lehns.) $\square$ AC + $\square$ CB > 2 (AC $\times$ CB), das ist DK > LF: so ist auch DL > LG. Demnach potenzirt (10, 18. S.) die DL um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die LG. Nun waren auch DL, LG, rational, und DL $\cap$ DE. Folglich ist DG die erste Binomiale.

Der

Der 62. Satz. Lehrsatz.

Das dem Quadrate der ersten Bimediale, AB, gleiche, an einer Rationallinie, ED, entworfene Rectangel, DEFG, hat zur Breite, DG, die zweyte Binomiale.



Nach eben der Construction, wie beym 61. Satze, ist zu beweisen

Erstlich, daß DG eine Binomiale sey.

Da AB die erste Bimediale ist: so sind (10, 38. S.) ihre Namen AC, CB, medial bloß in Potenz commensurabel, und enthalten ein Rationales. Da hiernach $\square AB + \square BC$, das ist DK, das ist $ED \times DL$, medial: so ist, weil ED rational, auch (10, 23. S.) DL rational und $\cup$ ED. Nun ist ferner $2\,(AB \times BC)$, das ist LF, das ist $KL \times LG$, das ist $ED \times LG$, rational, also (10, 21. S.) auch LG rational, und $\cap$ ED. Folglich ist (10, 13. S.) $DL \cup LG$. Demnach sind DL, LG, rational bloß in Potenz commensurabel, also ist (10, 37. S.) DG eine **Binomiale**.

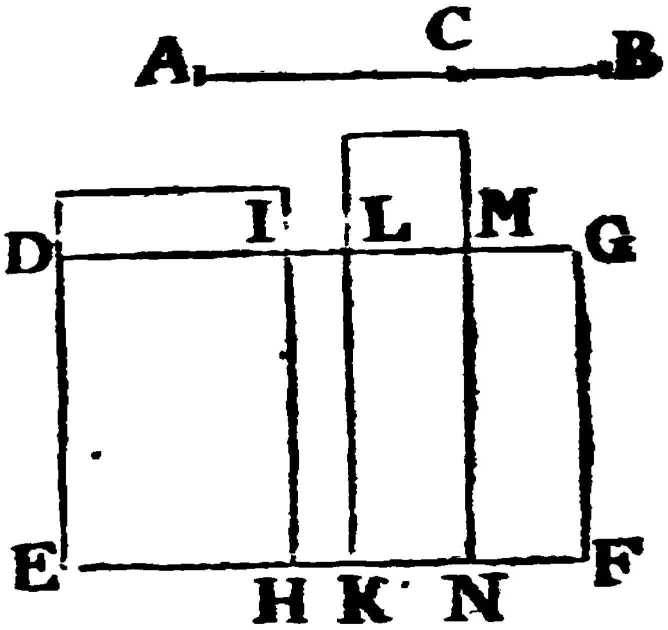
Zweytens, daß DG die zweyte Binomiale sey.

Da (10, 60. Lehns.) $\square AC + \square CB > 2\,(AC \times CB)$, das ist $DK > LF$: so ist auch $DL > LG$. Da $\square AC \cap \square BC$, das ist $DH \cap IK$: so ist auch $DI \cap IL$. Endlich ist auch $DI \times IL = \square LM = \frac{1}{4} \square LG$. Demnach potenzirt (10, 18. S.) die DL um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabeln Linie über die LG. Nun war $LG \cap ED$. Folglich ist DG die zweyte **Binomiale**.

Des

Der 63. Satz. Lehrsatz.

Das dem Quadrate der zweyten Bimediale, AB, gleiche, an einer Rationallinie, ED, entworfene Rectangel, DEFG, hat zur Breite, DG, die dritte Binomiale.



Nach eben der Construction, wie beym 61. Satze, ist zu beweisen:

Erstlich, daß DG eine Binomiale sey.

Da AB die zweyte Bimediale ist, so sind (10, 38. S.) ihre Namen AC, CB, medial bloß in Potenz commensurabel, und enthalten ein Mediales. Da also □AC+□CB, das ist DK, das ist ED×DL, medial: so ist, weil ED rational, auch (10, 23. S.) DL rational, und ∪ ED. Nun ist aus denselben Gründen auch LG rational, und ∪ ED. Folglich sind DL, LG, rational und der ED in Länge incommensurabel. Da (6, 1. S.) AC:CB = □ AC : AC×CB, aber AC∪CB: so ist auch □ AC∪ AC×CB, also auch □ AC + □ CB∪ 2 (AC×CB), das ist, DK∪LF, folglich auch DL∪LG. Demnach sind DL, LG, rational bloß in Potenz commensurabel, also ist (10, 37. S.) DG eine Binomiale.

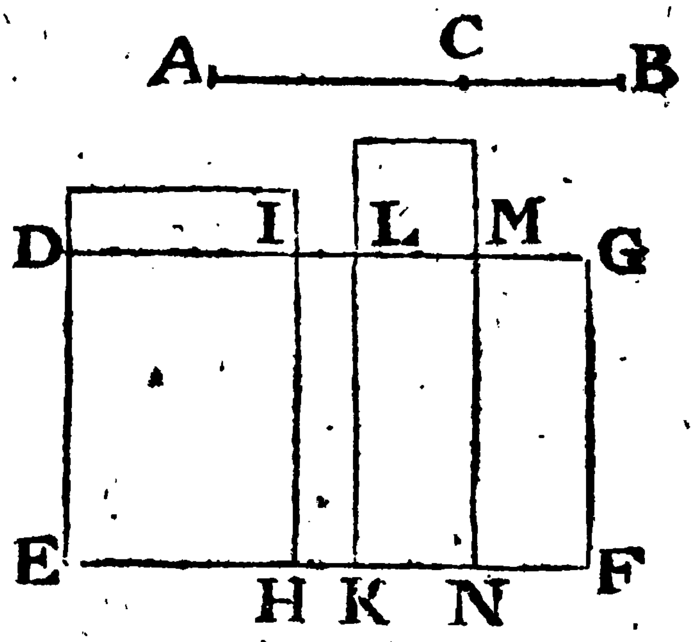
Zweytens, daß DG die dritte Binomiale sey.

Auf eben die Art, wie im 61. Satze, wird geschlossen, daß DL > LG, auch daß DI ∩ IL. Gleichfalls ist DI×IL = □ LM = $\frac{1}{4}$ □ LG. Demnach potenzirt (10, 18. S.) die DL um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die LG. Nun war weder DL noch LG der ED in Länge commensurabel. Folglich ist DG die dritte Binomiale.

Der

Der 64. Satz. Lehrsatz.

Das dem Quadrate der größern Irrationale, AB, gleiche, an einer Rationallinie, ED, entworfene, Rectangel, DEFG, hat zur Breite, DG, die vierte Binomiale.



Nach eben der Construction, wie beym 61. Satze, ist zu beweisen:

Erstlich, daß DG eine Binomiale sey.

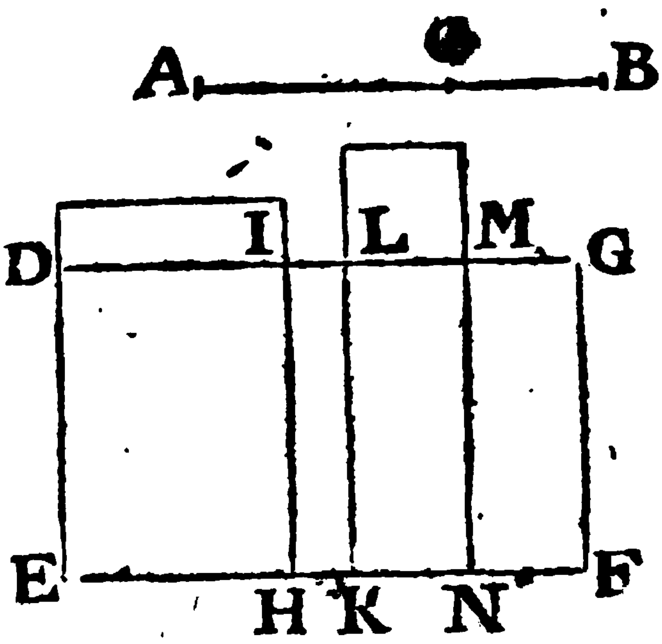
Da AB die größe Irrationale ist: so sind (10, 40. S.) ihre Namen AC, CB, in Potenz incommensurabel, ihre Quadrate zusammen machen ein Rationales aus, sie selbst aber enthalten ein Mediales. Da also $\square AC + \square CB = DK$: so ist $DK = ED \times DL$ rational, also (10, 21. S.) DL rational und $\frown$ ED. Nun ist $2 (AC \times CB)$, das ist LF, das ist $ED \times LG$, medial; aber ED rational, also (10 23. S.) LG rational und $\smile$ ED. Folglich ist $DL \smile LG$. Demnach sind DL, LG, rational bloß in Potenz commensurabel. Also ist (10, 37. S.) DG eine **Binomiale.**

Zweytens, daß DG die vierte Binomiale sey.

Auf ähnliche Art, wie in den vorigen Sätzen, wird geschlossen, daß $DL > LG$, und $DI \times IL = \square LM = \frac{1}{4} \square LG$. Auch ist hier $\square AC \smile \square CB$, das ist $DH \smile IK$. Folglich $DI \smile IL$. Demnach potenzirt (10, 19. S.) die DL um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die LG. Nun war $DL \frown ED$. Folglich ist DG die **vierte Binomiale.**

Der 65. Satz. Lehrsatz.

Das dem Quadrate der ein Rationales und Mediales Potenzirenden, AB, gleiche, an einer Rationallinie, ED, entworfene Rectangel, DEFG, hat zur Breite, DG, die fünfte Binomiale.



Nach eben der Construction, wie beym 61. Satze, ist zu beweisen:

Erstlich, daß DG eine Binomiale sey.

Da AB die ein Rationales und Mediales Potenzirende ist: so sind (10, 41. S.) ihre Namen AC, CB, in Potenz incommensurabel, und enthalten ein Rationales, ihre Quadrate zusammen aber machen ein Mediales aus. Da also □ AC + □ CB, das ist DK, das ist ED $\times$ DL, medial: so ist (10, 23. S.) DL rational und $\cup$ ED. Nun ist 2 (AC $\times$ CB), das ist LF, rational; also (10, 21. S.) LG rational und $\cap$ ED. Folglich ist DL $\cup$ LG. Demnach sind DL, LG, rational bloß in Potenz commensurabel, also ist (10, 37. S.) DG eine **Binomiale.**

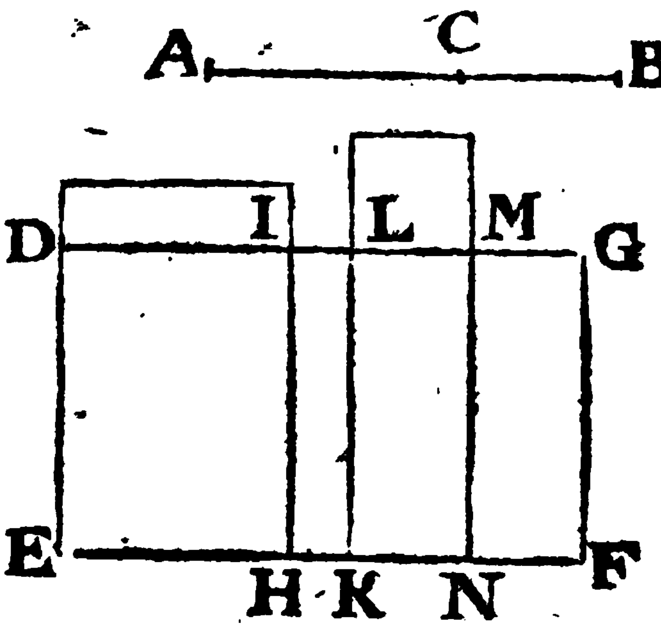
Zweytens, daß DG die fünfte Binomiale sey.

Da, wie im Vorigen bewiesen wird, daß DI $\times$ IL = □ LM, und DI $\cup$ IL: so potenzirt (10, 19. S.) die DL um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die LG. Nun war LG $\cap$ ED. Folglich ist DG die **fünfte Binomiale.**

Der 66. Satz. Lehrsatz.

Das dem Quadrate der zwey Mediale Potenzirenden, AB, gleiche, an einer Rationallinie, ED, entworfene Rect-

Rectangel, DEFG, hat zur Breite, DG, die sechste Binomiale.



Nach der Construction des 61. Satzes ist zu beweisen:

Erstlich, daß DG eine Binomiale sey.

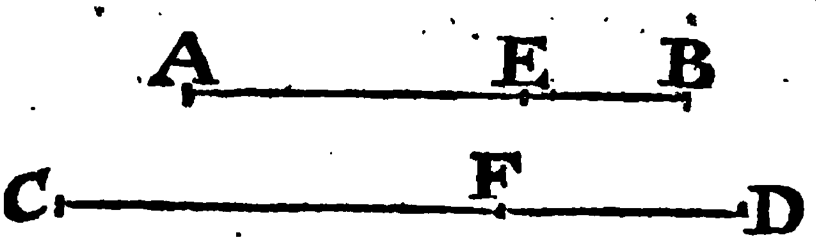
Da AB die zwey Mediale Potenzirende ist, so sind (10, 42. S.) AC, CB, in Potenz incommensurabel, und ihre Quadrate zusammen machen ein Mediales, sie selbst aber enthalten ein jenem incommensurabeles Mediales. Da also DK, LF, medial, aber ED rational: so sind (10, 23. S.) DL, LG, rational und der ED in Länge incommensurabel. Da auch □AC+□CB ∪ 2 (AC×CB), so ist DK ∪ LF, folglich auch DL ∪ LG. Demnach sind DL, LG, rational bloß in Potenz commensurabel, also ist (10, 37. S.) DG eine **Binomiale**.

Zweytens, daß DG die sechste Binomiale sey.

Da, wie im Vorigen bewiesen wird, daß DI × IL = LM, und DI ∪ IL: so potenzirt (10, 19. S.) die DL um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die LG. Nun war weder DL, noch LG, der ED in Länge commensurabel. Folglich ist DG die **sechste Binomiale**.

Der 67. Satz. Lehrsatz.

Jede einer Binomialen, AB, in Länge commensurabele Linie, CD, ist auch eine Binomiale, und der Ordnung nach dieselbe.



Erstlich. Es sey AB bey E in ihre Namen AE, EB, zerlegt, und zwar AE der größere Name: so sind (10, 37. S.) AE, EB, rational bloß in Potenz commensurabel. Mache (6, 12. S.) $AB:CD = AE:CF$, so ist auch (5, 19. S.) $EB:FD = AB:CD$; folglich, weil $AB \frown CD$, auch (10, 10. S.) $AE \frown CF$, und $EB \frown FD$; folglich, weil AE, EB, rational, auch CF, FD, rational. Nun ist (5, 11. S.) $AE:CF = EB:FD$, also (5, 16. S.) **verwechselt** $AE:EB = CF:FD$; und daher, weil $AE \frown\!\!- EB$, auch $CF \frown\!\!- FD$. Folglich sind CF, FD, rational bloß in Potenz commensurabel, also ist (10, 37. S.) CD eine **Binomiale.**

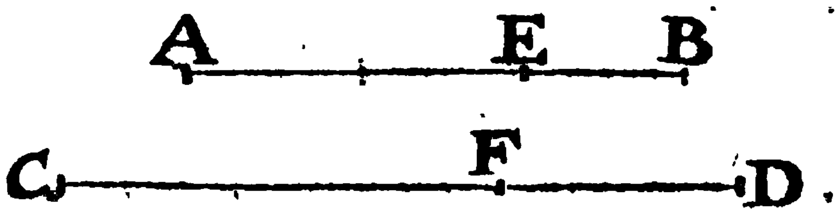
Zweytens. Ist AB entweder die erste oder zweyte oder dritte Binomiale, das ist, potenzirt, in der Proportion $AE : EB = CF : FD$, die AE um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über EB, und ist entweder AE oder EB oder keine von beyden der angenommenen Rationallinie in Länge commensurabel: so potenzirt (10, 15. S.) auch die CF um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabeln Linie über FD, und es ist in eben der Folge entweder CF, oder FD, oder keine von beyden solcher Rationallinie in Länge commensurabel; folglich CD zugleich mit AB entweder die erste, oder zweyte, oder dritte Binomiale. Nun wird auf ähnliche Art bewiesen, daß CD zugleich mit AB entweder die vierte, oder fünfte, oder sechste Binomiale sey. Folglich sind die Binomialen AB, CD, der Ordnung nach immer dieselben.

Der 68. Satz. Lehrsatz.

Jede einer Bimedialen, AB, in Länge commensurabele Linie, CD, ist auch eine Bimediale, und der Ordnung nach dieselbe.

Erst-

Erstlich. Es sey wieder AB bey E in ihre Namen AE, EB, zerlegt: so sind (10, 38. 39. S.) AE, EB,



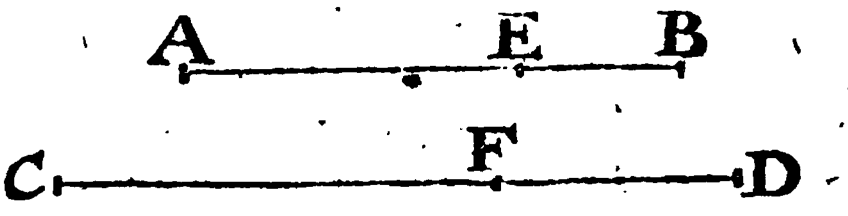
medial bloß in Potenz commensurabel. Nun sey hier wieder $AB : CD = AE : CF$, also (5, 19. S.) auch $EB : FD = AB : CD$. Folglich ist, weil $AB \frown CD$, auch $AE \frown CF$; und $EB \frown FD$; folglich sind, weil AE, EB, medial, auch (10, 24. S.) CF, FD, medial. Nun ist (5, 11. 16. S.) $AE : EB = CF : FD$, und daher, weil $AE \frown\!- EB$, auch $CF \frown\!- FD$. Folglich sind CF, FD, medial bloß in Potenz commensurabel, also ist (10, 38. 39. S.) CD eine Bimediale.

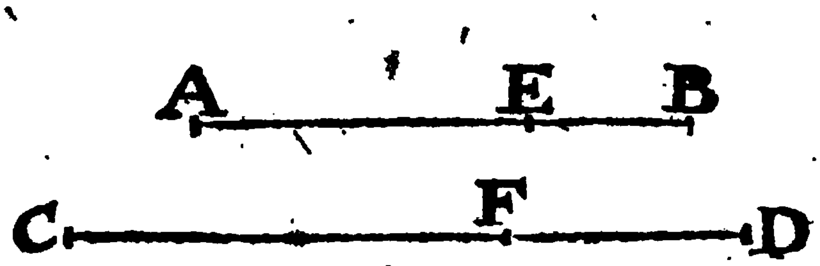
Zweytens. Aus der Proportion $AE : EB = CF : FD$ folgt (5, 11. S. und 6, 1. S.) $\square AE : AE \times EB = \square CF : CF \times FD$, folglich (5, 16. S.) verwechselt $\square AE : \square CF = AE \times EB : CF \times FD$; folglich, weil $\square AE \frown \square CF$, auch $AE \times EB \frown CF \times FD$. Ist nun AB entweder die erste, oder die zweyte Bimediale: so ist (10, 38. 39. S.) $AE \times CB$ entweder rational, oder medial. Folglich ist auch $CF \times FD$ in eben der Folge entweder rational oder medial, folglich CD zugleich mit AB entweder die erste oder die zweyte Bimediale.

Der 69. Satz. Lehrsatz.

Jede der größern Irrationale, AB, in Länge commensurabele Linie, CD, ist auch die größere Irrationale.

Es sey AB in ihre Namen AE, EB, zerlegt: so sind solche (10, 40. S.) in Potenz incommensurabel, enthalten ein Mediales, ihre Quadrate zusammen aber machen ein Rationales aus. Nach eben der Construction,





wie im Vorigen, ist $AB : CD = AE : CF = EB : FD$; folglich, weil $AB \frown CD$, auch $AE \frown CF$, und $EB \frown FD$; folglich, weil $AE \smile EB$, auch $CF \smile FD$.

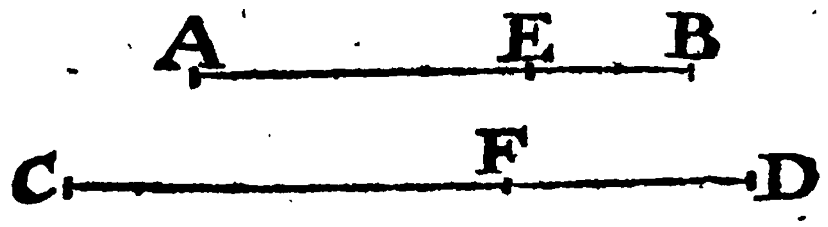
Da verwechselt $AE : EB = CF : FD$, also (5, 18. S.) verbunden $AB : BE = CD : DF$; so ist (6, 22. S.) $\square AB : \square BE = \square CD : \square DF$. Nun wird eben so bewiesen, daß $\square AB : \square AE = \square CD : \square CF$. Folglich ist (5, 24. S.) $\square AB : \square AE + \square EB = \square CD : \square CF + \square FD$, also verwechselt $\square AB : \square CD = \square AE + \square EB : \square CF + \square FD$; folglich, weil $\square AB \frown \square CD$, auch $\square AE + \square EB \frown \square CF + \square FD$; folglich, weil $\square AE + \square EB$ rational, auch $\square CF + \square FD$ rational.

Auf ähnliche Art ist auch $2 (AE \times EB) \frown 2 (CF \times FD)$ folglich, weil $AE \times EB$ medial, auch (10, 24. Zus.) $CF \times FD$ medial.

Demnach ist (10, 40. S.) CD die größere Irrationale.

Der 70. Satz. Lehrsatz.

Jede einer ein Rationales und Mediales Potenzirenden, AB, in Länge commensurabele Linie, CD, ist auch eine ein Rationales und Mediales Potenzirende.

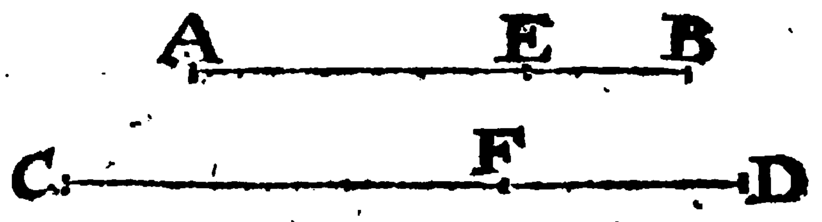


Es sey AB in ihre Namen AE, EB, zerlegt: so sind solche (10, 41. S.) in Potenz incommensurabel, und enthalten ein Rationales, ihre Quadrate zusammen aber geben ein Mediales. Nach eben der Construction, wie im Vorigen, wird auf ähnliche Art bewiesen, daß $CF \smile FD$, auch daß $\square AE + \square EB \frown \square CF + \square FD$, und daß $AE \times EB \frown CF \times FD$; folglich $\square CF + \square FD$

□ FD medial, und CF × FD rational. Demnach ist (10, 41. S.) CD die ein Rationales und Mediales Potenzirende.

Der 71. Satz. Lehrsatz.

Jede einer Zwey Mediale Potenzirenden, AB, in Länge commensurabele Linie, CD, ist auch die Zwey Mediale Potenzirende.



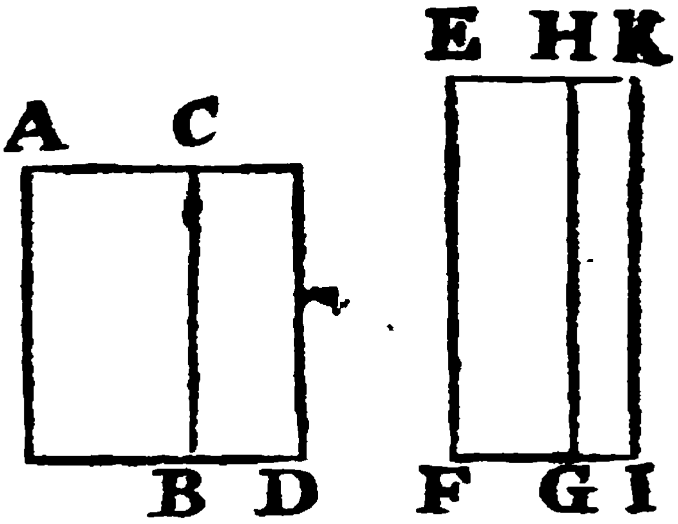
Es sey AB in ihre Namen AE, EB, zerlegt: so sind solche (10, 42. S.) in Potenz incommensurabel, und ihre Quadrate zusammen machen ein Mediales aus, sie selbst aber enthalten ein jenem incommensurabeles Mediales. Nach eben der Construction, wie im Vorigen, wird auf ähnliche Art bewiesen, daß CF ⌒ FD, und daß □ AE + □ EB ∩ □ CF + □ FD, auch AE × EB ∩ CF × FD, daß folglich □ CF + □ FD medial, auch CF × FD medial und ∪ □ CF + □ FD. Demnach ist (10, 42. S.) CD die Zwey Mediale Potenzirende.

Der 72. Satz. Lehrsatz.

Durch die Zusammensetzung eines Rationalen, AB, mit einem Medialen, CD, entstehen vier Irrationallinien, entweder die Binomiale, oder die erste Bimediale, oder die größere Irrationale, oder die ein Rationales und Mediales Potenzirende.

Es sey nun AB entweder größer oder kleiner als CD, so ist zu beweisen, daß die Linie, welche den zusammengesetzten Raum, AD, potenzirt, allemal eine der vier genannten Irrationallinien sey.

Erster Fall.



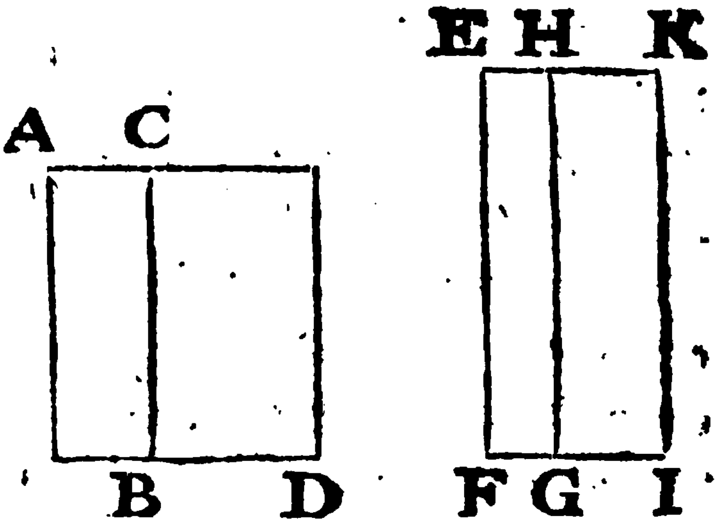
Es sey AB > CD. Nun sey FE eine Rationallinie, und EG = FE × EH = AB, auch HI = FE × HK = CD. Folglich ist, weil AB rational, auch EG rational, und (10, 21. S.) EH rational, und ∩ FE; ferner, weil CD medial, auch HI medial, und (10, 23. S.) HK rational und ∪ FE. Da CD medial, aber AB rational, so ist AB ∪ CD, das ist, EG ∪ HI; folglich, weil (6, 1. S.) EG : HI = EH : HK, auch EH ∪ HK. Demnach sind EH, HK, bloß in Potenz commensurabel, also ist (10, 33. S.) EK eine Binomiale. Auch ist, weil AB > CD, das ist EG > HI, auch EH > HK. Nun potenzirt die EH entweder um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen oder um das einer incommensurabelen Linie über die HK.

Ist das Erstere, so ist, weil die größere EH ∩ FE, EK die erste Binomiale; folglich, weil FE rational (10, 55. S.), die Linie, welche EI, das ist AD, potenzirt, eine **Binomiale**.

Ist das Zweyte, so ist, weil die größere EH ∩ FE, EK die vierte Binomiale; folglich, weil FE rational (10, 58. S.), die Linie, welche EI, das ist AD, potenzirt, die **größere Irrationale**.

Zweyter Fall.

Es sey AB < CD. Alsdann ist, bey voriger Construction, auch EG < HI, folglich auch EH < HK. Nun potenzirt die HK entweder um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen oder um das einer incommensurabelen Linie über die EH.



Ist das **Erstere**, so ist, weil die kleinere $EH \cap EF$, EK die zweyte Binomiale; folglich, weil EF rational, (10, 56. S.) die Linie, welche EI, das ist AD, potenzirt, die **erste Bimediale**.

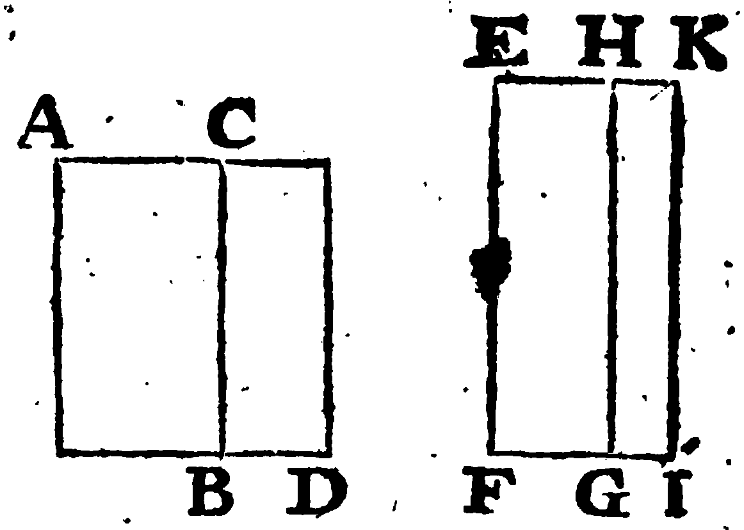
Ist das **Zweyte**, so ist, weil die kleinere $EH \cap EF$, EK die fünfte Binomiale, folglich, weil EF rational, (10, 59. S.) die Linie, welche EI, das ist AD, potenzirt, die **ein Rationales und Mediales Potenzirende.**

Der 73. Satz. Lehrsatz.

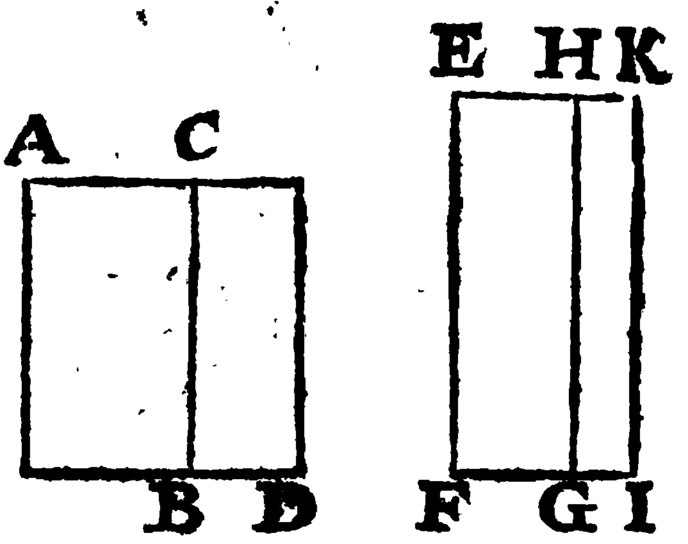
Durch die Zusammensetzung zweyer incommensurabeler Medialen, AB, CD, entstehen die beyden übrigen Irrationallinien: entweder die zweyte Bimediale, oder die zwey Mediale Potenzirende.

Es sey nun AB entweder größer oder kleiner als CD, so ist zu beweisen, daß die Linie, welche den zusammengesetzten Raum AD potenzirt, allemal eine der beyden genannten Irrationallinien sey.

Erster Fall.



Es sey $AB > CD$. Nach voriger Construction sind, weil AB, CD, medial, auch EG, HI, medial; folglich, weil FE rational, (10, 23. S.) EH, HK, rational, und der FE in Länge incommensurabel. Da $AB \cup CD$, das ist, $EG \cup HI$, aber $EG : HI = EH : HK$; so ist $EH \cup HK$. Demnach sind EH, HK, rational bloß in Potenz commensurabel, folglich ist EK eine Binomiale. Ferner ist, weil AB > CD, das ist EG > HI, auch EH > HK.

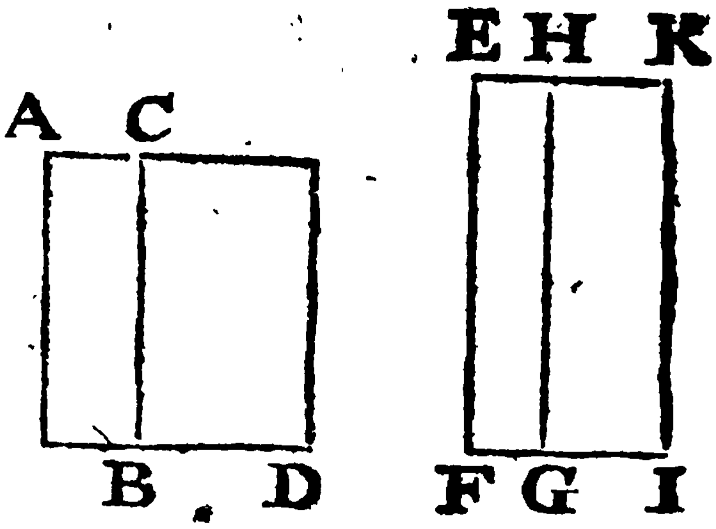


Nun potenzirt die EH entweder um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen oder um das einer incommensurabelen Linie über die HK.

Ist das Erstere, so ist, weil weder EH noch HK ⌢ EF, EK die dritte Binomiale; folglich, weil EF rational, (10, 57. S.) die Linie, welche EI, das ist AD, potenzirt, die zweyte Bimediale; ist das Andere, so ist EK die sechste Binomiale, folglich (10, 60. S.) die Linie, welche AD potenzirt, die zwey Mediale Potenzirende.

Zweyter Fall.

Es sey AB < CD, so wird auf ähnliche Art bewiesen, daß die Linie, welche EI, das ist AD, potenzirt, entweder die zweyte Bimediale, oder die zwey Mediale Potenzirende sey.



Zusatz.

Die Binomiale, und die auf sie folgenden Irrationallinien, sind nicht nur von der Medialen, sondern auch von einander selbst, unterschieden.

Denn das dem Quadrate der Medialen gleiche an einer Rationallinie entworfene Rectangel hat (10, 23. S.) zur Breite eine jener incommensurabele Rationallinie; das dem Quadrate aber der Binomiale gleiche (10, 61. S.) die erste Binomiale; das dem Quadrate der ersten Bimediale gleiche (10, 62. S.) die

die zweyte Binomiale; das dem Quadrate der zweyten Binomiale gleiche (10, 63. S.) die dritte Binomiale; das dem Quadrate der größern Irrationale gleiche (10, 64. S.) die vierte Binomiale; das dem Quadrate der ein Rationales und Mediales Potenzirenden gleiche (10, 65. S.) die fünfte Binomiale; das dem Quadrate der zwey Mediale Potenzirenden (10, 66. S.) gleiche die sechste Binomiale.

Demnach unterscheiden sich die genannten Irrationallinien von der ersten, weil diese zur Breite eine Rationallinie giebt; von einander selbst, weil sie zu Breiten Binomialen von verschiedenen Ordnungen geben.

Anmerkung.

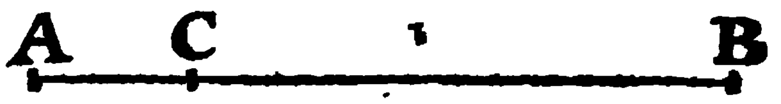
Die bisherige Abhandlung von den durch Zusammensetzung entstehenden sechs Irrationallinien bestehet aus sieben Hexaden, oder Abschnitten zu sechs Sätzen. Der **erste** Abschnitt (37. 38. 39. 40. 41. 42. S.) zeigt den Ursprung oder die Zusammensetzung dieser Linien; der **zweyte** (43. 44. 45. 46. 47. 48. S.) ihre Zerlegung in einem einzigen Punkte; der **dritte**, (49. 50. 51. 52. 53. 54. S.) wie die sechs Binomialen gefunden werden; der **vierte**, (55. 56. 57. 58. 59. 60. S.) welche Irrationallinien den unter einer Rationallinie und den verschiedenen Ordnungen der Binomialen enthaltenen Raum potenziren; der **fünfte** (61. 62. 63. 64. 65. 66. S.) die Breiten, welche die ihren Quadraten gleichen an einer Rationallinie entworfenen Rectangel haben; der **sechste**, (67. 68. 69. 70. 71. S.) daß die ihnen commensurabelen Linien von gleicher Art sind; der **siebente** (72. 73. S.) faßt ihren Ursprung und Unterschied sehr sinnreich in zweyen Sätzen zusammen.

Noch ist zu bemerken, daß die Hälfte einer jeden Art Irrationallinie, welche folglich der Ganzen commensurabel ist, eben deshalb auch eine Irrationallinie von derselben Art sey.

Von den durch das Wegnehmen entstehenden sechs Irrationallinien.

Der 74. Satz. Lehrsatz und Erklärung.

Wird von einer Rationallinie, AB, eine andere, ihr bloß in Potenz commensurabele, BC, weggenommen: so ist der Rest, AC, irrational, und heiße **Apotome**.



Da $AB \cup BC$, und (6, 1. S.) $AB : BC = \square AB : AB \times BC$; so ist (10, 10. S.) $\square AB \cup AB \times BC$. Nun ist (10, 16. S.) $\square AB \cap \square AB + \square BC$, auch $AB \times BC \cap 2\,(AB \times BC)$. Folglich ist $\square AB + \square BC \cup 2\,(AB \times BC)$. Nun ist (2, 7. S.) $\square AB + \square BC = 2\,(AB \times BC) + \square AC$. Folglich ist (10, 17. S.) $\square AB + \square BC \cup \square AC$; folglich, weil $\square AB + \square BC$ rational, $\square AC$, also auch AC, irrational.

Der 75. Satz. Lehrsatz und Erklärung.

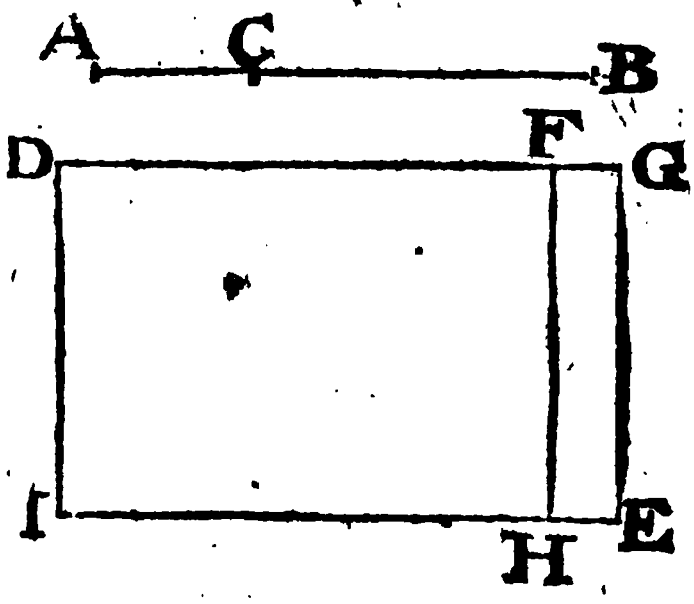
Wird von einer Mediallinie, AB, eine andere, BC, die ihr bloß in Potenz commensurabel ist, und mit ihr ein Rationales enthält, weggenommen: so ist der Rest, AC, irrational, und heiße die erste **Medialapotome**.

Da $\square AB + \square BC$ medial, aber $2\,(AB \times BC)$ rational: so ist $\square AB + \square BC \cup 2\,(AB \times BC)$. Nun ist (2, 7. S.) $\square AB + \square BC = 2\,(AB \times BC) + \square AC$. Folglich ist (10, 17. S.) $2\,(AB \times BC) \cup \square AC$; folglich, weil $2\,(AB \times BC)$ rational, $\square AC$, also auch AC, irrational.

Der

Der 76. Satz. Lehrsatz und Erklärung.

Wird von einer Mediallinie, AB, eine andere, BC, die ihr bloß in Potenz commensurabel ist, und mit ihr ein Mediales enthält, weggenommen: so ist der Rest, AC, irrational, und heiße die **zweyte Medialapotome**.



Es sey eine Rationallinie ID, und an derselben DE, das ist $ID \times DG$, $= \square AB + \square BC$, desgleichen DH, das ist $ID \times DF$, $= 2(AB \times BC)$ entworfen, daß also, weil (2, 7. S.) $\square AB + \square BC = 2(AB \times BC) + \square AC$, FE, das ist $ID \times FG$, $= \square AC$ ist.

Da $\square AB + \square BC$, das ist DE, medial: so ist (10, 23. S.) DG rational und $\cup$ ID. Da $AB \times BC$, also auch $2(AB \times BC)$ medial: so ist DH medial, also (10, 23. S.) DF rational und $\cup$ ID.

Da AB, BC, bloß in Potenz commensurabel, also $AB \cup BC$: so ist (6, 1. S. und 10, 10. S.) $\square AB \cup AB \times BC$. Nun ist (10, 16. S.) $\square AB \cap \square AB + \square BC$, und (10, 6. S.) $AB \times BC \cap 2(AB \times BC)$ Folglich ist $\square AB + \square BC \cup 2(AB \times BC)$, das ist $DE \cup DH$; folglich, weil (6, 1. S.) $DE : DH = DG : DF$, auch (10, 10. S.) $DG \cup DF$. Demnach sind DG, DF, rational bloß in Potenz commensurabel, folglich ist (10, 74. S.) FG eine Apotome; folglich, weil ID rational, (10, 21. S.) FE, das ist $\square AC$, also AC, irrational.

Der 77. Satz. Lehrsatz und Erklärung.

Wird von einer Linie, AB, eine andere, BC, die ihr in Potenz incommensurabel ist, und ihre Quadrate zusammen zu einem Rationalen, das Doppelte des unter ihnen

ihnen enthaltenen Rectangels aber zu einem Medialen macht, weggenommen: so ist der Rest, AC, irrational, und heiße die **kleinere Irrationale.**

Da $\square$ AB + $\square$ BC rational, aber 2 (AB $\times$ BC) medial: so ist $\square$ AB + $\square$ BC $\cup$ 2 (AB $\times$ BC). Nun ist (2, 7. S.) $\square$ AB + $\square$ BC = 2 (AB $\times$ BC) + $\square$ AC. Folglich ist (10, 17. S.) $\square$ AB + $\square$ BC $\cup$ $\square$ AC; folglich, weil $\square$ AB + $\square$ BC rational, $\square$ AC, also auch AC, irrational.

Der 78. Satz. Lehrsatz und Erklärung.

Wird von einer Linie, AB, eine andere, BC, die ihr in Potenz incommensurabel ist, und ihre Quadrate zusammen zu einem Medialen, das Doppelte des unter ihnen enthaltenen Rectangels aber zu einem Rationalen macht, weggenommen: so ist der Rest, AC, irrational, und heiße die **mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende.**

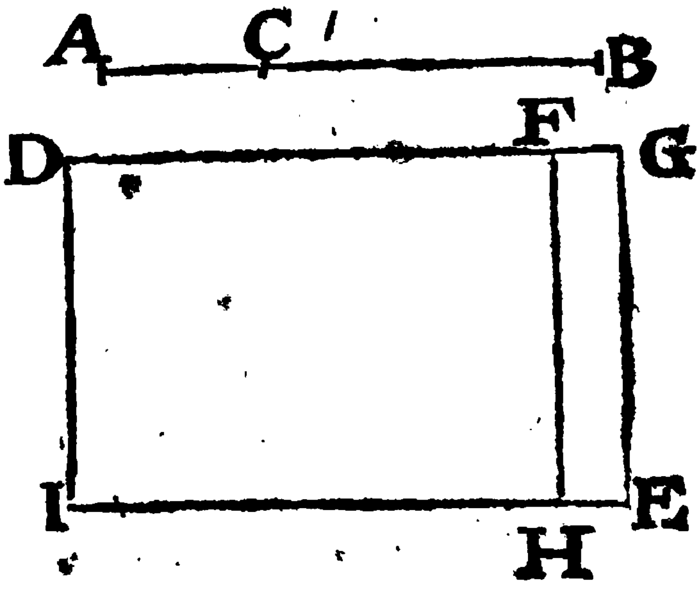
Da $\square$ AB + $\square$ BC medial, aber 2 (AB $\times$ BC) rational: so ist $\square$ AB + $\square$ BC $\cup$ 2 (AB $\times$ BC), folglich (10, 17. S.) auch $\square$ AC $\cup$ 2 (AB $\times$ BC); folglich, weil 2 (AB $\times$ BC) rational, $\square$ AC, also auch AC, irrational.

Anmerkung.

Euklid nennt diese Linie AC deswegen so, weil, nach einer ähnlichen Construction, wie im 79. Satze, verglichen mit 2. B. 7. Satze, das dem $\square$ AC gleiche Rectangel mit dem Rationalen 2 (AB $\times$ BC), ein mediales Ganze $\square$ AB + $\square$ BC giebt.

Der 79. Satz. Lehrsatz und Erklärung.

Wird von einer Linie, AB, eine andere, BC, die ihr in Potenz incommensurabel ist, ihre Quadrate zusammen zu einem Medialen, und das Doppelte des unter ihnen enthaltenen Rectangels gleichfalls zu einem Medialen macht, was aber jenem incommensurabel ist, weggenommen: so ist der Rest, AC, irrational, und heiße die **mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende.**



Es sey eine Rationallinie ID, und an derselben DE, das ist ID $\times$ DG, $=$ □ AB $+$ □ BC, entworfen. Wird nun davon DH, das ist ID $\times$ DF, $=$ 2 (AB $\times$ BC) weggenommen: so ist (2, 7. S.) der Rest FE, das ist ID $\times$ FG, $=$ □ AC. Demnach potenzirt AC den Raum FE.

Da □ AB $+$ □ BC, das ist DE, medial: so ist (10, 23. S.) DG rational und $\cup$ ID. Eben so ist, weil DH medial, auch DF rational und $\cup$ ID. Da □ AB $+$ □ BC $\cup$ 2 (AB $\times$ BC), also auch DE $\cup$ DH; aber DE : DH $=$ DG : DF; so ist (10, 10. S.) DG $\cup$ DF. Demnach sind DG, DF, rational bloß in Potenz commensurabel, folglich ist (10, 74. S.) FG eine Apotome; folglich, weil ID, das ist FH, rational, (10, 21. S.) FE, das ist □ AC, also auch AC, irrational.

Anmerkung.

Euklid nennt diese Linie AC deswegen so, weil, nach der Construction dieses Satzes, verglichen mit 2. B. 7. Satze, das dem □ AC gleiche Rectangel FE mit dem Medialen DH $=$ 2 (AB $\times$ BC) ein mediales Ganze DE $=$ □ AB $+$ □ BC giebt.

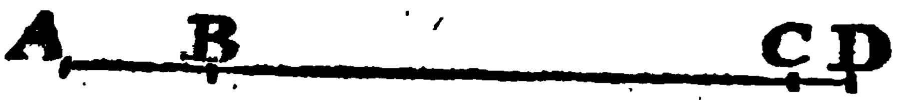
Der 80. Satz. Lehrsatz.

An die Apotome, AB, fügt sich nur eine einzige Rationallinie, BC, die der ganzen AC, bloß in Potenz commensurabel ist.

Gesetzt, es fügte sich an AB noch eine andere BD, so daß (10, 74. S.) AD, BD, rational bloß in Potenz commensurabel wären. Da (2, 7. S.) □ AD + □ DB = 2 (AD × DB) + □ AB, und eben so □ AC + □ BC = 2 (AC × CB) + □ AB; also der Ueberschuß der Quadrate über die doppelten Rectangel beyderseits gleich ist, nämlich das □ AB: so ist auch verwechselt der Ueberschuß von □ AD + □ DB über □ AC + □ BC dem Ueberschusse von 2 (AD × DB) über 2 (AC × CB) gleich; folglich, weil jener Ueberschuß rational, auch dieser Ueberschuß rational; welches, weil (10, 22. S.) beyde Rectangel medial sind, (10, 27. S.) unmöglich. Demnach fügt sich an die Apotome AB keine andere der ganzen bloß in Potenz commensurabele Rationallinie, außer der einzigen BC.

Der 81. Satz. Lehrsatz.

An die erste Medialapotome, AB, fügt sich nur eine einzige Mediallinie, BC, die der ganzen, AC, bloß in Potenz commensurabel ist, und mit derselben ein Rationales enthält.



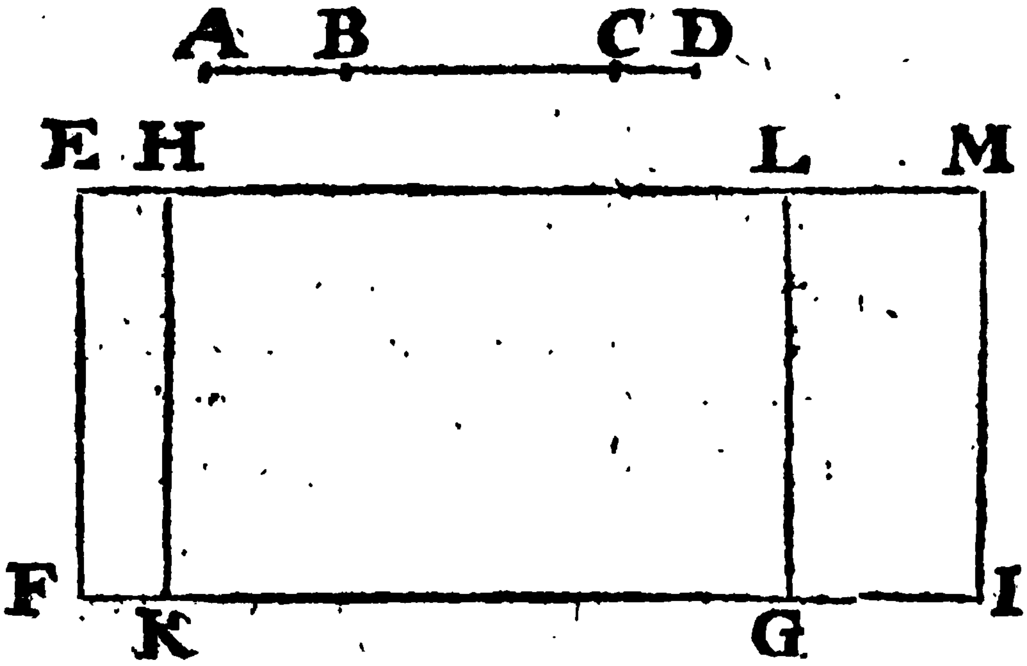
Gesetzt, es fügte sich noch eine andere BD an AB, so daß (10, 75. S.) AD, DB, medial bloß in Potenz commensurabel wären, und ein Rationales enthielten. Da hier wieder der beyderseitige Ueberschuß der Quadrate über die doppelten Rectangel das □ AB ist: so ist wieder der Ueberschuß von □ AD + □ DB über □ AC + □ CB dem Ueberschusse von 2 (AD × DB) über 2 (AC × CB) gleich; folglich,

weil

weil dieser Ueberschuß rational, auch jener Ueberschuß rational; welches, weil die Quadrate medial sind, (10, 27. S.) unmöglich ist. Demnach fügt sich an die erste Medialapotome, AB, keine andere Mediallinie, die der Ganzen bloß in Potenz commensurabel ist, und mit derselben ein Rationales enthält, außer der einzigen BC.

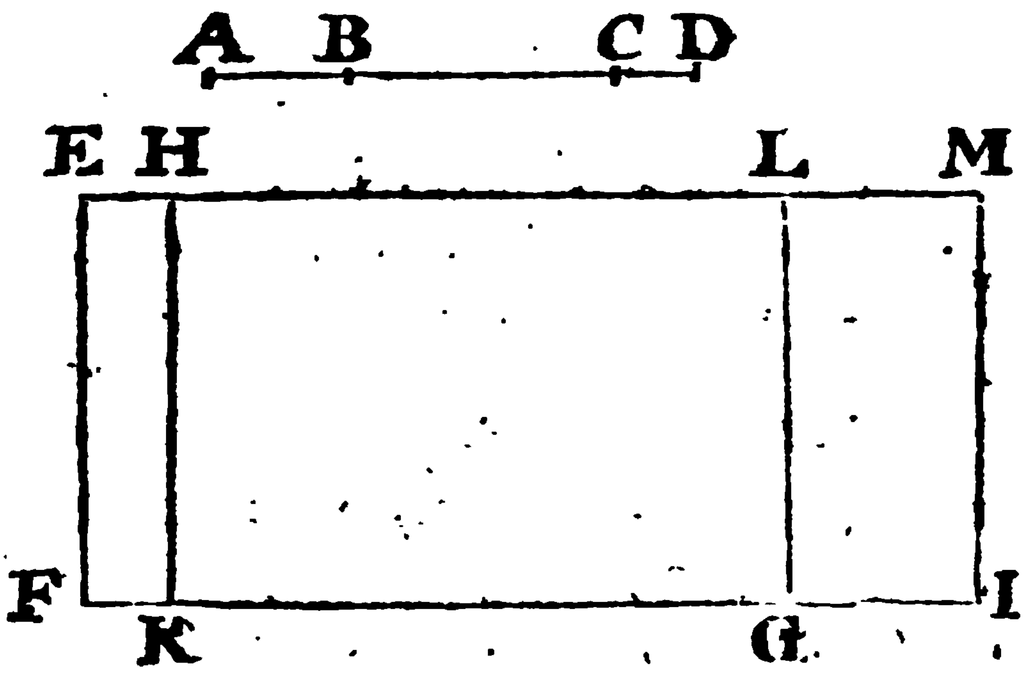
Der 82. Satz. Lehrsatz.

An die zweyte Medialapotome, AB, fügt sich nur eine einzige Mediallinie, BC, die der ganzen, AC, bloß in Potenz commensurabel ist, und mit derselben ein Mediales enthält.



Gesetzt, es fügte sich noch eine andere BD an AB, so daß (10, 76. S.) AD, DB, medial bloß in Potenz commensurabel wären, und ein Mediales enthielten. Nun sey eine Rationallinie FE, und an derselben EG, das ist FE × EL, = □ AC + □ CB entworfen. Wird nun davon HG, das ist FE × HL, = 2 (AC × CB) weggenommen: so ist der Rest EK, das ist FE × EH, = □ AB; also potenzirt AB den Raum EK. Wird endlich EI, das ist FE × EM, = □ AD + □ DB an der FE entworfen: so ist, weil EK = □ AB, der Rest HI = 2 (AD × DB).

Da AC, CB, medial: so ist □ AC + □ CB, das ist EG, medial, folglich (10, 23. S.) EL rational und ∪ FE. Da



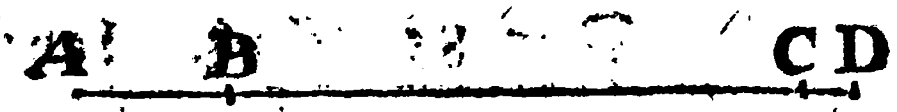
2 (AC $\times$ CB), das ist HG, medial, so ist HL rational und $\cup$ FE. Auch ist, weil AC, CB, bloß in Potenz commensurabel sind, AC $\cup$ CB; folglich, weil (6, 1. S.) AC : CB $=$ $\square$ AC : AC $\times$ CB, (10, 10. S.) auch $\square$ AC $\cup$ AC $\times$ CB. Nun ist (10, 16. S.) $\square$ AC $\cap$ $\square$ AC $+$ $\square$ CB, und AC $\times$ CB $\cap$ 2 (AC $\times$ CB). Folglich ist $\square$ AC $+$ $\square$ CB $\cup$ 2 (AC $\times$ CB), das ist EH $\cup$ HG; folglich, weil EG : HG $=$ EL : HL, (10, 10. S.) auch EL $\cup$ HL. Demnach sind EL, HL, rational bloß in Potenz commensurabel, folglich ist (10, 74. S.) EH eine Apotome, an die sich HL fügt. Nun wird eben so bewiesen, daß sich auch HM an sie füge; welches, weil HL und HM der ganzen bloß in Potenz commensurabel sind, (10, 80. S.) unmöglich ist. Demnach fügt sich an die zweyte Medialapotome keine andere Mediallinie, die der ganzen bloß in Potenz commensurabel wäre, und mit derselben ein Mediales enthielte, außer der einzigen BC.

Der 83. Satz. Lehrsatz.

An die kleinere Irrationale, AB, fügt sich nur eine einzige Linie, BC, die der ganzen, AC, in Potenz incommensurabel ist, deren Quadrat mit dem Quadrate der ganzen ein Rationales ausmacht, und die mit der ganzen ein Rectangel enthält, dessen Doppeltes medial ist.

Gesetzt,

Gesetzt, es fügte sich noch eine andere BD an AB,

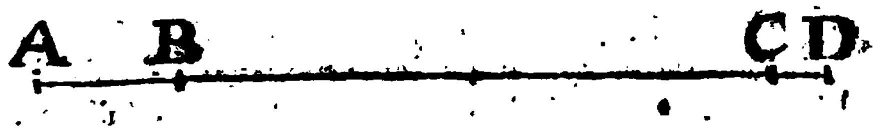


so daß (10, 77. S.) AD, DB, in Potenz incommensurabel, □ AD + □ DB rational, und 2 (AD × DB) medial wären. Nun ist wieder der Ueberschuß von □ AD + □ DB über □ AC + □ CB so groß, als der Ueberschuß von 2 (AD × DB) über 2 (AC × CB); folglich, weil der Ueberschuß der Quadrate rational, auch der Ueberschuß der doppelten Rectangel rational; welches, weil diese Rectangel medial sind, (10. 27. S.) unmöglich ist. Folglich fügt sich an die kleinere Irrationale nur die einzige oben beschriebene BC.

Der 84. Satz. Lehrsatz.

An die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende, AB, fügt sich nur eine einzige Linie, BC, die der ganzen, AC, in Potenz incommensurabel ist, deren Quadrat mit dem Quadrate der ganzen ein Mediales ausmacht, und die mit der ganzen ein Rectangel enthält, dessen Doppeltes rational ist.

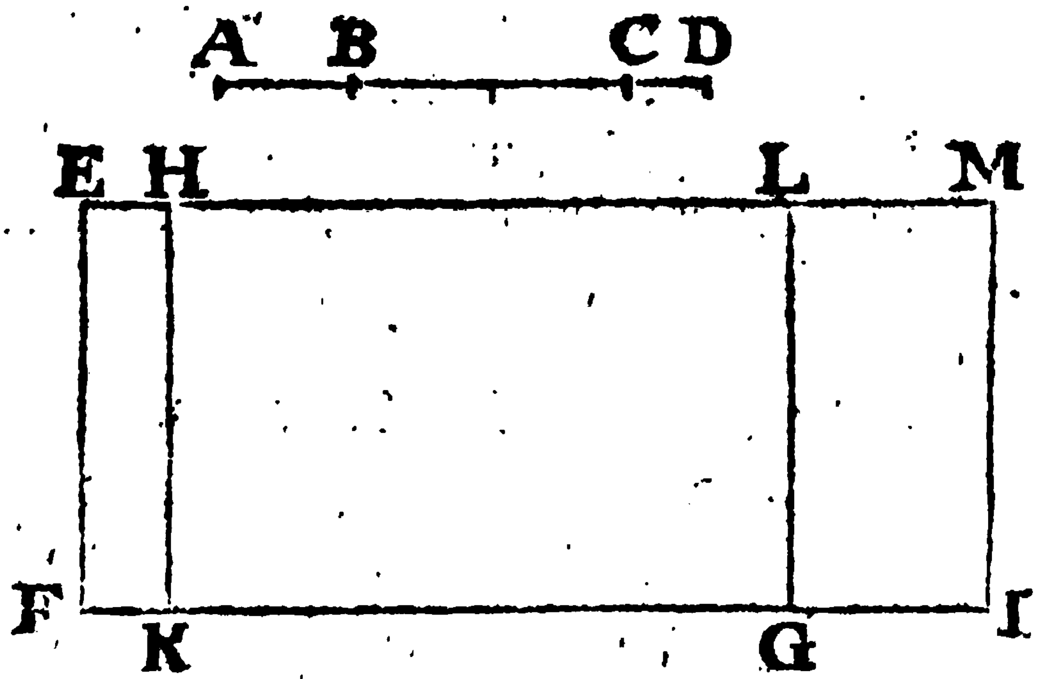
Gesetzt, es fügte sich noch eine andere BD an AB, so



daß (10, 78. S.) AD, DB, in Potenz incommensurabel; □ AD + □ DB medial, und 2 (AD × DB) rational wären. Nun ist wieder der Ueberschuß von □ AD + □ DB über □ AC + □ CB so groß, als der Ueberschuß von 2 (AD × DB) über 2 (AC × CB); folglich, weil der Ueberschuß der Rectangel rational, auch der Ueberschuß der Quadrate rational; welches, weil diese Quadrate medial sind, (10, 27. S.) unmöglich ist. Folglich fügt sich an die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende, AB, nur die einzige oben beschriebene BC.

Der 85. Satz. Lehrsatz.

An die mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende, AB, fügt sich nur eine einzige Linie, BC, die der ganzen, AC, in Potenz incommensurabel ist, deren Quadrat mit dem Quadrate der ganzen ein Mediales ausmacht, und die mit der ganzen ein Rectangel enthält, dessen Doppeltes medial und jenem Medialen incommensurabel ist.



Gesetzt, es fügte sich noch eine andere BD an AB, so daß (10, 79. S.) AD, DB, in Potenz incommensurabel, $\square$ AD + $\square$ DB medial, auch 2 (AD $\times$ DB) medial und zugleich dem $\square$ AD + $\square$ DB incommensurabel wären. Nun sey eine Rationallinie FE, und an derselben EG, das ist FE $\times$ EL, = $\square$ AC + $\square$ CB entworfen. Wird nun davon HG, das ist FE $\times$ HL, = 2 (AC $\times$ CB) weggenommen: so ist der Rest EK = $\square$ AB; also potenzirt AB den Raum EK. Wird endlich EI, das ist FE $\times$ EM, = $\square$ AD + $\square$ DB, an der FE entworfen: so ist, weil EK = $\square$ AB, der Rest HI = 2 (AD $\times$ DB).

Da $\square$ AC + $\square$ CB, das ist EG, medial; aber FE rational: so ist EL rational und $\cup$ FE. Da 2 (AC $\times$ CB), das ist HG, medial; so ist auch HL rational und $\cup$ FE. Nun ist $\square$ AC + $\square$ CB $\cup$ 2 (AC $\times$ CB), das ist EG $\cup$ HG, also EL $\cup$ HL. Folglich sind EL, HL, rational bloß

in

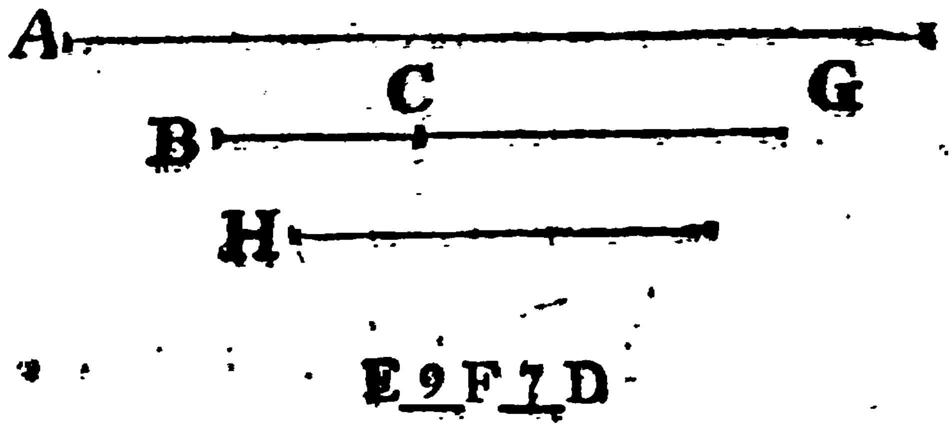
in Potenz commensurabel, folglich ist (10, 74. S.) EH eine Apotome, an die sich HL fügt. Nun wird eben so bewiesen, daß sich auch HM an sie füge; welches, weil HL und HM der ganzen bloß in Potenz commensurabel sind, (10, 80. S.) unmöglich ist. Folglich fügt sich an die obige AB nur die einzige obige BC.

Erklärungen der sechs Ordnungen von Apotomen.

1. Eine Apotome, an die sich eine Linie fügt, so daß die ganze aus beyden bestehende Linie, um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie, über die angefügte potenzirt, heißt die erste Apotome, wenn solche ganze Linie einer angenommenen Nationallinie in Länge commensurabel ist;
2. die zweyte Apotome, wenn die angefügte Linie,
3. die dritte Apotome, wenn keine von beyden solcher Nationallinie in Länge commensurabel ist.
4. Eine Apotome, an die sich eine Linie fügt, so daß die ganze aus beyden bestehende Linie, um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie, über die angefügte potenzirt, heißt die vierte Apotome, wenn solche ganze Linie der angenommenen Nationallinie in Länge commensurabel ist;
5. die fünfte Apotome, wenn die angefügte Linie,
6. die sechste Apotome, wenn keine von beyden solcher Nationallinie in Länge commensurabel ist.

Der 86. Satz. Aufgabe.

Die erste Apotome zu finden.



Es sey die angenommene Rationallinie A, und BG eine andere Linie der A in Länge commensurabel. Nimm (10, 30. Lehns.) zwey Quadratzahlen, ED, EF, deren Unterschied FD keine Quadratzahl sey, und mache ED : DF = □ BG : □ GC, so ist BG — GC = BC die erste Apotome.

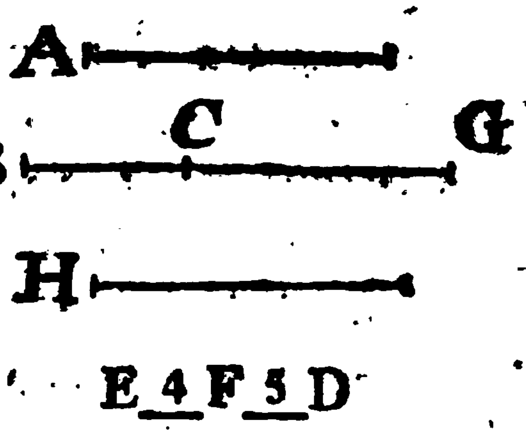
Denn es ist BG ∩ A, und daher rational. Nun folgt aus obiger Proportion (10, 6. S.) □ BG ∩ □ GC. Folglich ist, weil □ BG rational, auch □ GC, also GC, rational; aber (10, 9. S.) BG ∪ GC. Demnach sind BG, GC, rational bloß in Potenz commensurabel, folglich ist (10, 74. S.) BC eine Apotome.

Nun sey □ BG — □ GC = □ H, so ist nach obiger Proportion, zurückkehrend (5, 19. S.) DE : EF = □ BG : □ H, folglich (10, 9. S.) BG ∩ H. Demnach potenzirt die BG um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie H über die GC, und es war BG ∩ A; folglich ist BC die erste Apotome.

Der 87. Satz. Aufgabe.

Die zweyte Apotome zu finden.

Es sey die angenommene Rationallinie A, und GC eine andere Linie der A in Länge commensurabel. Nimm wieder zwey Quadratzahlen, DE, EF, deren Unterschied DF keine Quadratzahl sey, und mache FD : DE = □ CG : □ GB; so ist BG — GC = BC die zweyte Apotome.

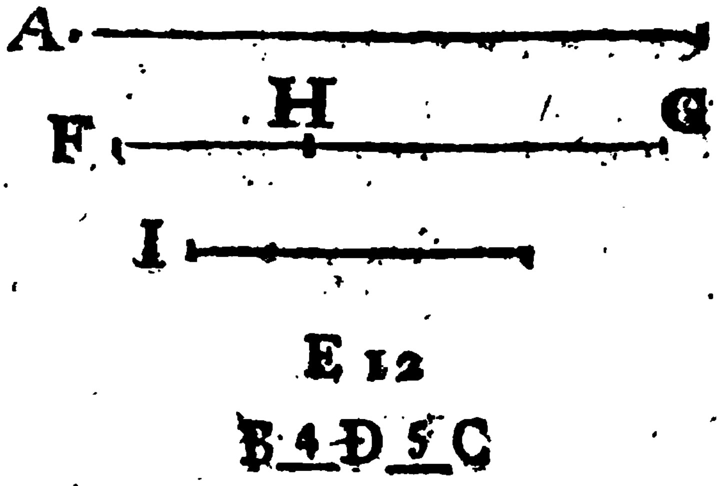


Denn es ist GC $\frown$ A, und daher rational. Nun folgt aus obiger Proportion (10, 6. S.) □ CG $\frown$ □ GB. Folglich ist, weil □ CG rational, auch □ GB, also GB rational; aber (10, 9. S.) CG $\smile$ GB. Demnach sind CG, GB, rational bloß in Potenz commensurabel, folglich ist (10, 74. S.) BC eine **Apotome.**

Nun sey □ GB — □ GC = □ H, so ist nach obiger Proportion (5, 4. Zus. und 5, 19. S.) **umgekehrt** und **zurückkehrend** ED : EF = □ GB : □ H, folglich (10, 9. S.) GB $\frown$ H. Demnach potenzirt die GB um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabeln Linie H über die GC, und es war GC $\frown$ A; folglich ist BC die **zweyte Apotome.**

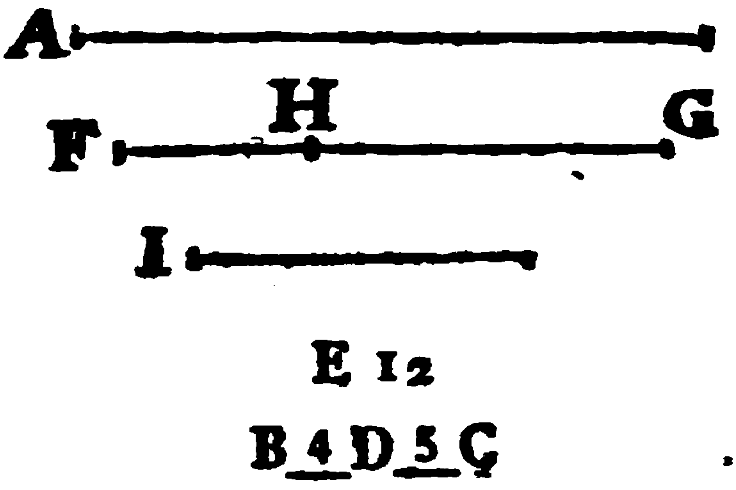
Der 88. Satz. Aufgabe.

Die dritte Apotome zu finden.



Es sey die angenommene Rationallinie A. Nimm drey Zahlen E, BC, CD, welche sich nicht, aber wohl BC, BD, wie Quadratzahlen verhalten; und mache E : BC = □ A : □ FG, auch BC : CD = □ FG : □ GH; so ist FG — GH = FH die dritte Apotome.

Denn aus der ersten Proportion folgt (10, 6. S.) □ A $\frown$ □ FG, also FG rational, aber (10, 9. S.) A $\smile$ FG. Aus der zweyten Proportion folgt □ FG $\frown$ □ GH, und FG $\smile$ GH. Demnach sind FG, GH, rational bloß in Potenz commensurabel. Folglich ist (10, 74. S.) FH eine **Apotome.**

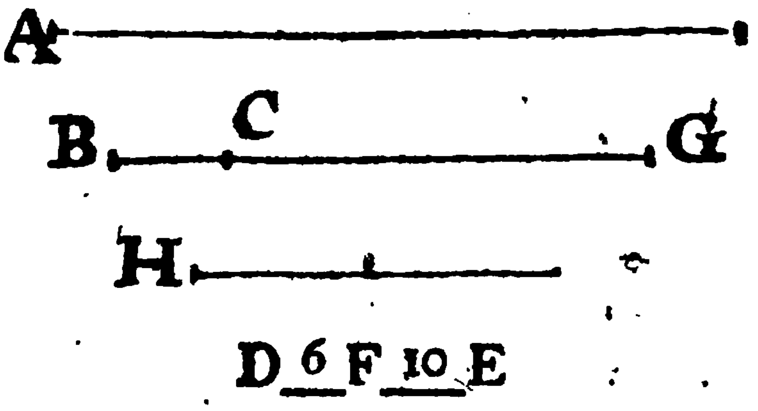


Nach obigen beyden Proportionen ist **aus dem Gleichen** (5, 22. S.) $E : CD = \square A : \square GH$, folglich (10, 9. S.) $A \cup GH$. Nun war auch $A \cup FG$. Folglich ist weder GH noch FG der A in Länge commensurabel.

Nun sey $\square FG - \square GH = \square I$, so ist aus der zweyten Proportion **zurückkehrend** (5, 19. S.) $CB : BD = \square FG : \square I$; folglich (10, 9. S.) $FG \cap I$. Demnach potenzirt die FG um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie I über die GH, und es war von GH, FG, keine der A in Länge commensurabel; folglich ist FH die **dritte Apotome**.

Der 89. Satz. Aufgabe.

Die vierte Apotome zu finden.



Es sey die angenommene Rationallinie A, und eine andere Linie $BG \cap A$. Nimm zwey Zahlen, DF, FE, deren Summe DE zu keiner von beyden die Verhältniß von Quadratzahlen habe, und mache $DE : EF = \square BG : \square CG$; so ist $BG - GC = BC$ die vierte Apotome.

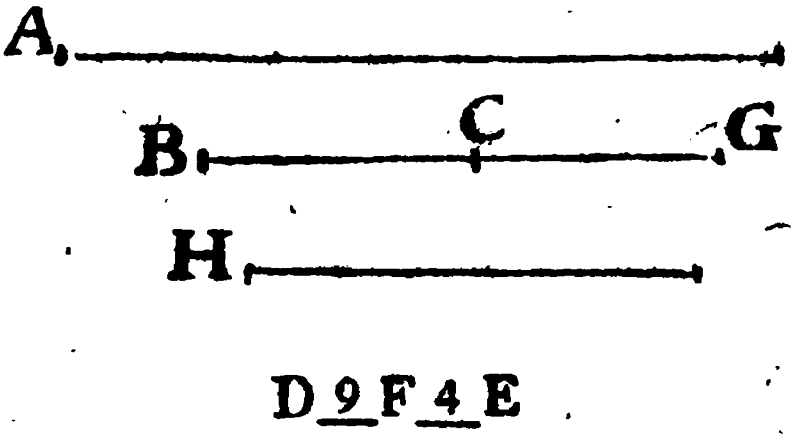
Denn da $BG \cap A$, also BG, folglich auch $\square BG$ rational; so ist aus obiger Proportion (10, 6. S.) $\square BG \cap \square CG$, also $\square CG$, folglich auch CG rational; aber (10, 9. S.) $BG \cup GC$. Demnach sind BG, GC, rational bloß in Potenz commensurabel; folglich ist (10, 74. S.) BC eine **Apotome**.

Nun

Nun sey $\square BG - \square CG = \square H$, so ist aus obiger Proportion zurückkehrend (5, 19. S.) $DE : DF = \square BG : \square H$; folglich (10, 9. S.) $BG \cup H$. Demnach potenzirt die BG, um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie H, über die CG, und es war $BG \cap A$; folglich ist BG die **vierte Apotome**.

Der 90. Satz. Aufgabe.

Die fünfte Apotome zu finden.



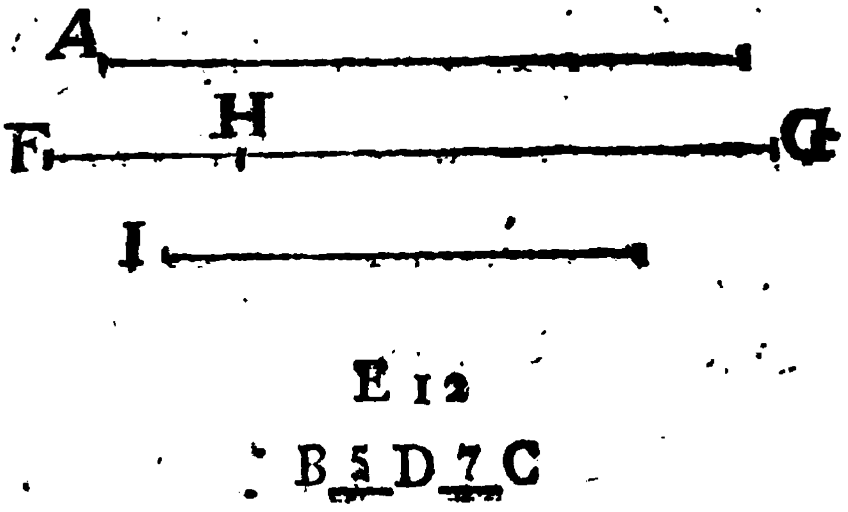
Es sey die angenommene Rationallinie A, und eine andere Linie $CG \cap A$. Nimm zwey Zahlen, DF, FE, deren Summe DE zu keiner von beyden die Verhältniß von Quadratzahlen habe, und mache $FE : ED = \square CG : \square GB$; so ist $BG - GC = BC$ die fünfte Apotome.

Denn da $CG \cap A$, also CG, folglich auch $\square CG$, rational: so folgt aus obiger Proportion (10, 6. S.) $\square CG \cap \square GB$, folglich $\square GB$, also auch GB rational; aber (10, 9. S.) $GB \cup CG$. Demnach sind BG, GC, rational bloß in Potenz commensurabel; folglich ist (10, 74. S.) BC eine **Apotome**.

Nun sey $\square BG - \square GC = \square H$, so ist aus obiger Proportion (5, 4. Zus. 19. S.) **umgekehrt** und **zurückkehrend** $ED : DF = \square BG : \square H$, folglich $BG \cup H$. Demnach potenzirt die BG, um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie H, über die GC, und es war $CG \cap A$. Folglich ist BC die **fünfte Apotome**.

Der 91. Satz. Aufgabe.

Die sechste Apotome zu finden.



Es sey die angenommene Rationallinie A. Nimm drey Zahlen E, BC, CD, welche sich nicht wie Quadratzahlen verhalten, und mache E : BC $=$ $\square$ A : $\square$ FG, auch BC : CD $=$ $\square$ FG : $\square$ GH; so ist FG $-$ GH $=$ FH die sechste Apotome.

Denn aus der ersten Proportion folgt (10, 6. S.) $\square$ A $\cap$ $\square$ FG, folglich $\square$ FG, also auch FG rational; aber (10, 9. S.) A $\cup$ FG. Aus der zweyten Proportion folgt (10, 6. S.) $\square$ FG $\cap$ $\square$ GH; folglich, weil FG rational, $\square$ GH, also auch GH rational; aber (10, 9. S.) FG $\cup$ GH. Demnach sind FG, GH, rational bloß in Potenz commensurabel; folglich ist (10, 74. S.) FH eine Apotome.

Nach obigen beyden Proportionen folgt **aus dem Gleichen** (5, 22. S.) E : CD $=$ $\square$ A : $\square$ GH, folglich (10, 9. S.) A $\cup$ GH; und es war auch A $\cup$ FG. Demnach ist weder FG noch GH der A in Länge commensurabel.

Nun sey $\square$ FG $-$ $\square$ GH $=$ $\square$ I, so ist aus der zweyten Proportion **zurückkehrend** (5, 19. S.) CB : BD $=$ $\square$ FG : $\square$ I, folglich (10, 9. S.) FG $\cup$ I. Demnach potenzirt die FG, um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie I, über die GH, und es war von FG, GH, keine der A in Länge commensurabel; folglich ist FH die **sechste Apotome.**

Anmerkung.

Es läßt sich aber auch zeigen, daß vorgedachte Apotomen auf einem noch kürzern Wege gefunden werden können.

Gesetzt,

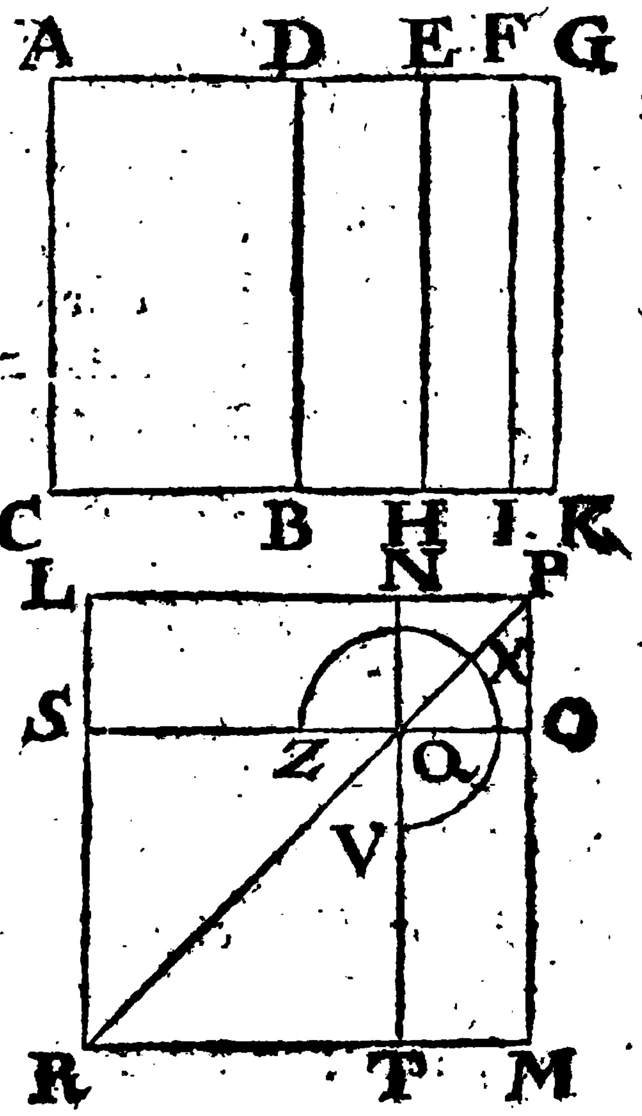
Gesetzt, man sollte die erste Apotome finden, so nehme man (10, 49. S.) die erste Binomiale AC, deren größerer Name AB sey, und mache BC = BD: so ist AD die erste Apotome.

Denn hier sind AB, BC, das ist, AB, BD, rational bloß in Potenz commensurabel; die AB potenzirt um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die BC, folglich auch über die BD; auch ist AB der angenommenen Rationallinie in Länge commensurabel. Demnach ist AD die erste Apotome.

Auf ähnliche Art findet man auch die fünf übrigen Apotomen, wenn man jedes Mal die Binomiale von derselben Ordnung, nämlich die zweyte Binomiale für Erfindung der zweyten Apotome u. s. w. zum Grunde legt.

Der 92. Satz. Lehrsatz.

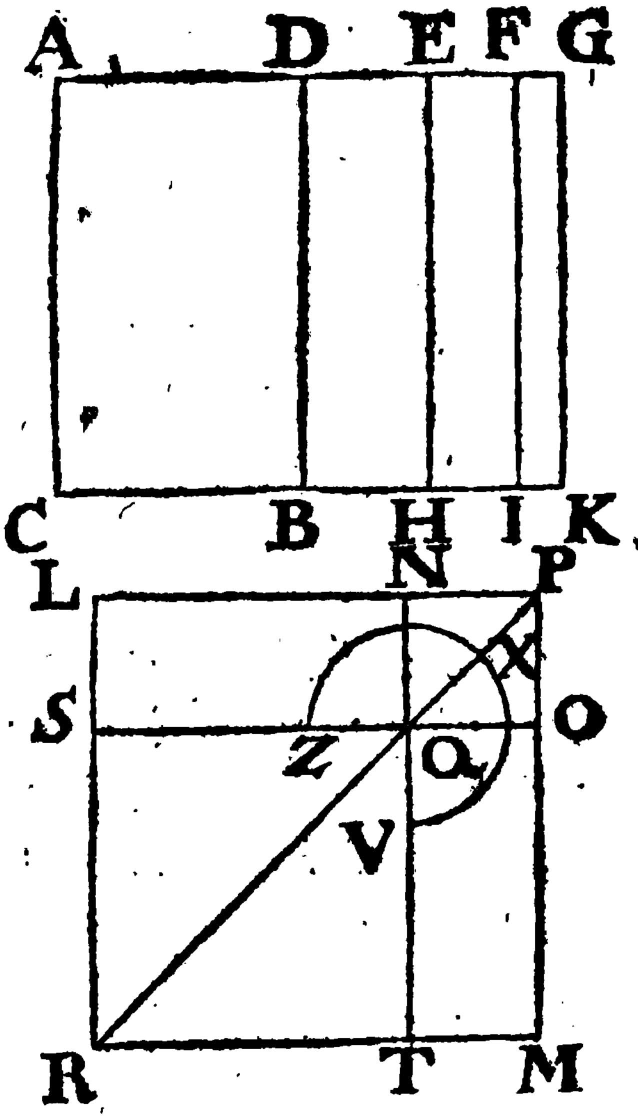
Den unter einer Rationallinie, CA, und der ersten Apotome, AD, enthaltenen Raum, AB, potenzirt eine Apotome.



An die erste Apotome AD füge sich DG, so sind (10, 47. S.) AG, GD, rational bloß in Potenz commensurabel; auch ist die ganze AG ∩ CA, und die AG potenzirt um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die DG. Wird nun DG in E halbirt, und an der AG das Rectangel AF × FG entworfen, welches dem □ EG, oder $\frac{1}{4}$ □ DG, gleich ist, und ein Quadrat zur Ergänzung hat: so sind (10, 18. S.) die AF, FG, in Länge commensura-

bel.

bel. Durch die Punkte E, F, G, ziehe mit AC die Linien EH, FI, GK, parallel. Mache (2, 14. S.) die Quadrate LM = AI, und NO = FK, daß beyde (6, 26. S.) um einerley Diagonale PR sind, und vollende die Figur.



Nun ist zu beweisen, daß in der Figur LPMR die LN den Raum AB potenzire, und eine Apotome sey.

Erstlich. Da AF × FG = □ EG, so ist (6, 17. S.) AF : EG = EG : FG, aber (6, 1. S.) AF : EG = AI : EK, und EG : FG = EK : FK; folglich AI : EK = EK : FK. Demnach ist EK zwischen AI und FK, das ist zwischen LM und NO, die mittlere Proportionalfläche, welches auch (10, 54. Lehns.) MN ist; also MN = EK. Nun ist (1, 37. S.) EK = DH, und (1, 43. S.) MN = LO. Folglich ist DK = Gnomon VXZ + NO. Folglich, weil AK = LM + NO, ist AB = ST = □ LN. Demnach potenzirt LN den Raum AB.

Zweytens. Da nach Obigem AF ⌒ FG, so ist (10, 16. S.) AG, also auch (10, 12. S.) die ihr commensurabele AC, der AF und FG in Länge commensurabel; folglich, da AC rational, auch AF, FG, also auch (10, 20. S.) AI, FK, rational. Nun war AI = LM, und FK = NO. Folglich sind LM, NO, das ist □ LP, □ NP, und daher auch LP, PN, rational.

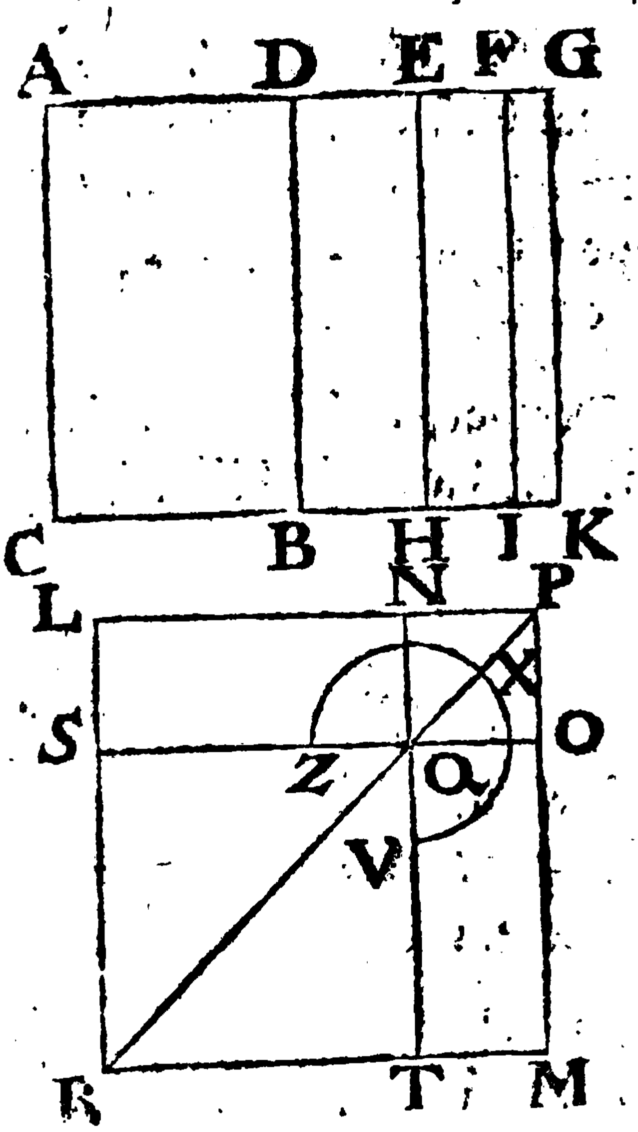
Da DE ⌒ EG, also DG der DE und GE in Länge commensurabel; aber DG rational und der AC in Länge incommensurabel: so sind DE, EG, rational, und der AC in

Länge

Länge incommensurabel, folglich (10, 22. S.) DH, EK, medial. Folglich, weil DH = EK = MN = LO, ist auch LO medial. Nun war NO rational. Folglich ist LO $\cup$ NO; aber (6, 1. S.) LO : NO = LP : PN, folglich (10, 10. S.) LP $\cup$ PN. Demnach sind LP, PN, rational bloß in Potenz commensurabel; folglich ist (10, 74. S.) die den Raum AB potenzirende LN eine Apotome.

Der 93. Satz. Lehrsatz.

Den unter einer Rationallinie, CA, und der zweyten Apotome, AD, enthaltenen Raum, AB, potenzirt die erste Medialapotome.



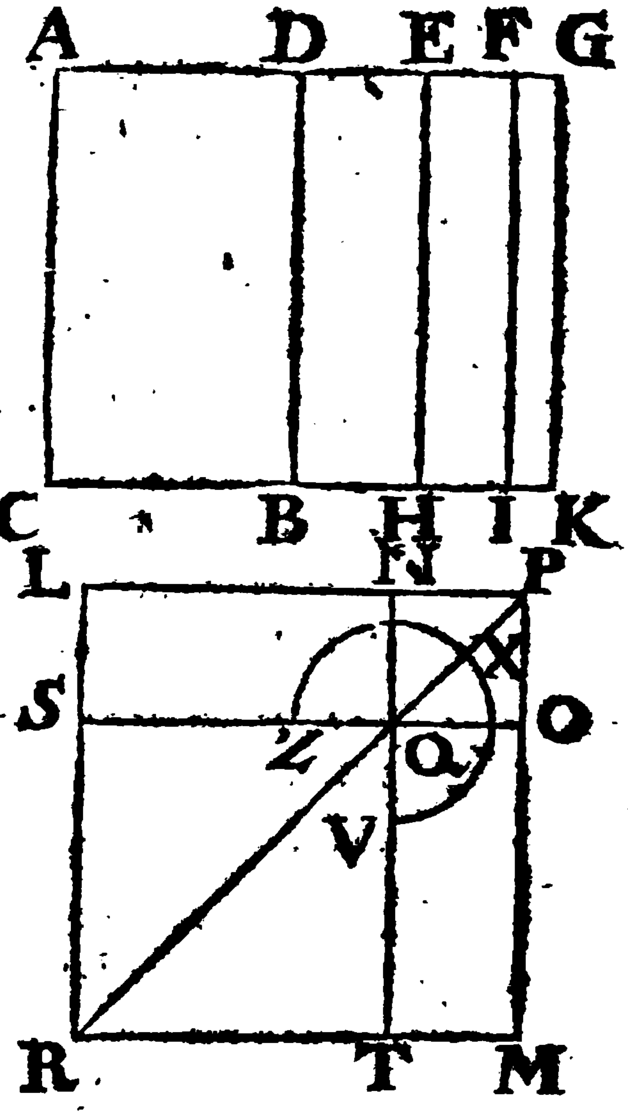
An die zweyte Apotome AD, füge sich DG, so sind AG, GD, rational bloß in Potenz commensurabel; auch ist die angefügte DG $\cap$ CA, und die AG potenzirt um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die DG. Wird nun DG in E halbirt, und alles wie beym vorigen Satze construirt: so wird, wie daselbst, dargethan, daß LN in der Figur LRMP den Raum AB potenzirt; daher nur noch zu beweisen ist, daß LN die erste Medialapotome sey.

Da (10, 18. S.) AF $\cap$ FG, also AG $\cap$ AF und FG; aber AG rational und $\cup$ AC: so sind AF, FG, rational und $\cup$ AC, folglich (10, 22. S.) AI, FK, medial. Nun ist AI = LM, und FK = NO. Folglich sind LM, NO,

medial

medial und commensurabel; folglich LP, PN, medial, in Potenz commensurabel.

Da DE $\frown$ EG, also DG $\frown$ DE und EG; aber DG $\frown$ AC: so sind DE, EG, rational und $\frown$ AC, also auch DH, EK, rational; folglich, weil EK = MN = LO, auch LO rational. Nun war □ PN, das ist NO, medial. Folglich ist LO $\smile$ NO; aber LO : NO = LP : PN; folglich LP, PN, medial bloß in Potenz commensurabel; aber, weil LO rational, auch LP × PN rational.



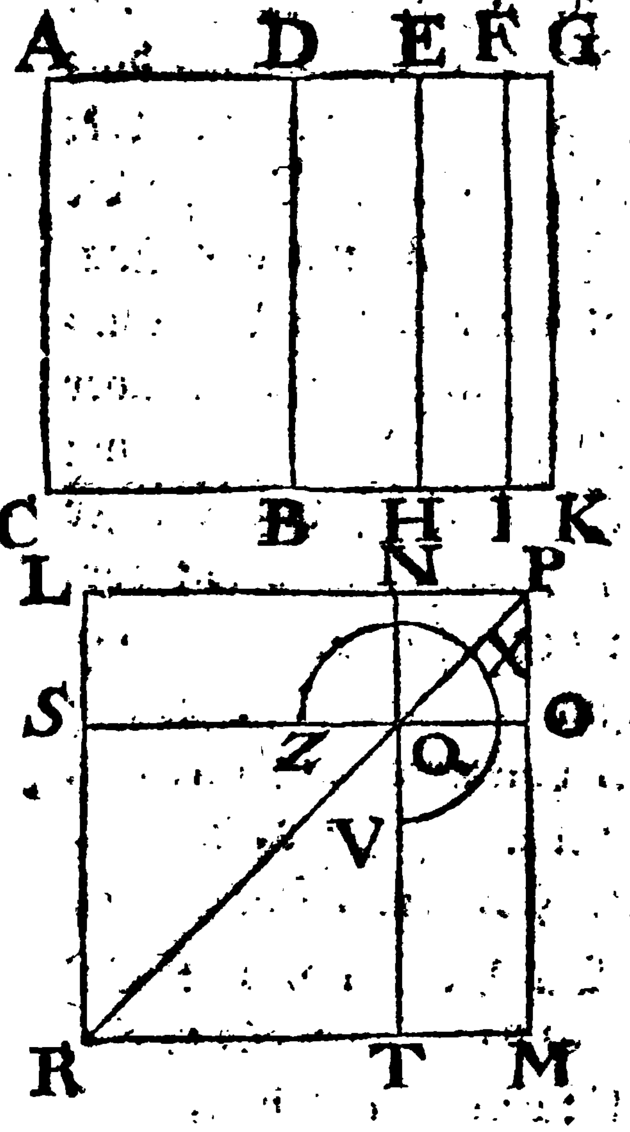
Demnach ist LN, welche den Raum AB potenzirt, (10, 75. S.) die **erste Medialapotome.**

Der 94. Satz. Lehrsatz.

Den unter einer Rationallinie, CA, und der dritten Apotome, AD, enthaltenen Raum, AB, potenzirt die zweyte Medialapotome.

An AD füge sich DG, so sind AG, GD, rational bloß in Potenz commensurabel; auch ist weder AG noch GD der angenommenen Rationallinie, CA, in Länge commensurabel, und die AG potenzirt um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die GD. Wird nun wieder DG in E halbirt, und alles, wie bisher, construirt: so wird eben so bewiesen, daß LN in der Figur LRMP den Raum

AB



AB potenzirt; daher noch zu beweisen ist, daß LN die zweyte Medialapotome sey.

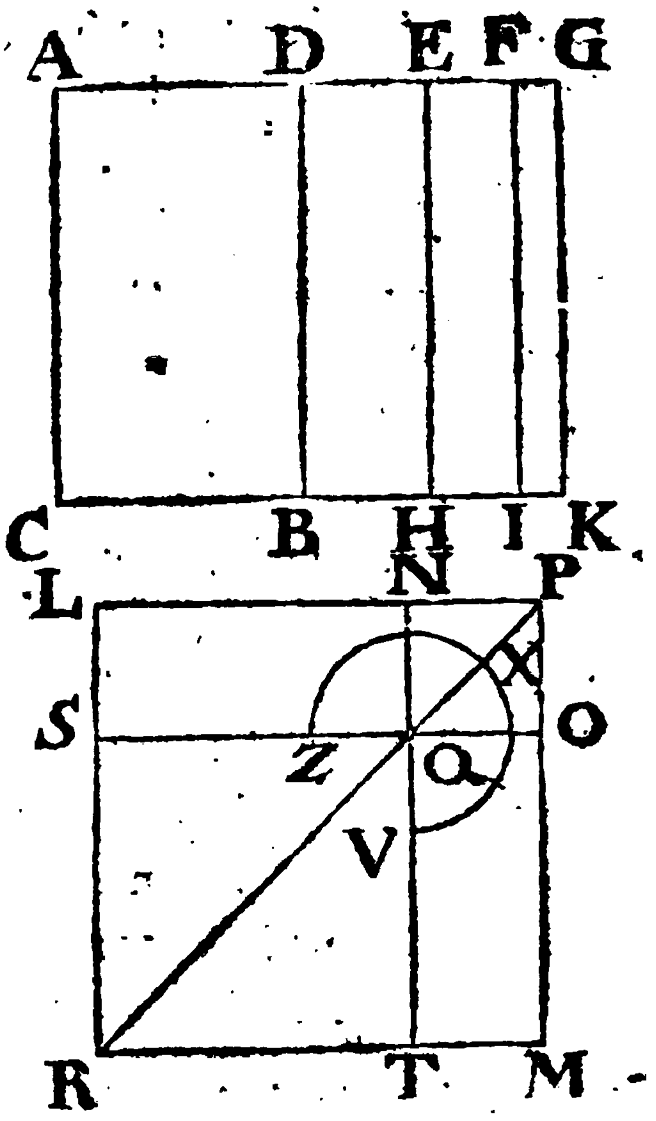
Da (10, 18. S.) AF $\cap$ FG, also AI $\cap$ FK: so ist, weil AI $=$ $\square$ LP, und FK $=$ $\square$ NP, auch $\square$ LP $\cap$ $\square$ NP. Da, weil AF $\cap$ FG, auch AG $\cap$ AF und FG; aber AG rational und $\cup$ AC: so sind AF, FG, rational und $\cup$ AC; folglich, (10, 22. S.) AI, FK, medial; folglich, weil AI $=$ $\square$ LP und FK $=$ $\square$ NP, ist auch $\square$ LP, $\square$ NP, also auch LP, NP, medial.

Da DE $\cap$ EG, also DG $\cap$ DE und EG; aber DG rational und $\cup$ AC: so sind DE, EG, rational und $\cup$ AC; folglich DH, EK, medial.

Da AG $\cup$ GD, aber AG $\cap$ AF, und GD $\cap$ GE: so ist (10, 13. S.) AF $\cup$ GE; aber AF : GE $=$ AI : EK, folglich AI $\cup$ EK; aber EK $=$ MN $=$ LP $\times$ PN, folglich $\square$ LP $\cup$ LP $\times$ PN, folglich auch LP $\cup$ PN. Demnach sind LP, PN, medial bloß in Potenz commensurabel, und, weil EK medial, auch LP $\times$ PN medial. Folglich ist LN, welche den Raum AB potenzirt, (10, 76. S.) die zweyte Medialapotome.

Der 95. Satz. Lehrsatz.

Den unter einer Rationallinie, CA, und der vierten Apotome, AD, enthaltenen Raum, AB, potenzirt die kleinere Irrationale.



An AD füge sich DG: so sind AG, GD, rational bloß in Potenz commensurabel; auch ist $AG \cap AC$, und die AG potenzirt um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die DG. Nach Halbirung der DG in E, und voriger Construction, wird wie vorher bewiesen, daß LN in der Figur LRMP den Raum AB potenzire; daher noch zu beweisen, daß LN die kleinere Irrationale sey.

Da hier (10, 19. S.) $AF \cup FG$, aber (6, 1. S.) $AF : FG = AI : FK$; so ist (10, 10. S.) $AI \cup FK$. Folglich, weil $AI = LM = \square LP$, und $FK = NO = \square NP$, ist auch $\square LP \cup \square NP$. Demnach sind LP, NP, in Potenz incommensurabel.

Da AG rational und $\cap$ AC, so ist (10, 20. S.) AK rational; aber $AK = \square LP + \square NP$, folglich $\square LP + \square NP$ rational.

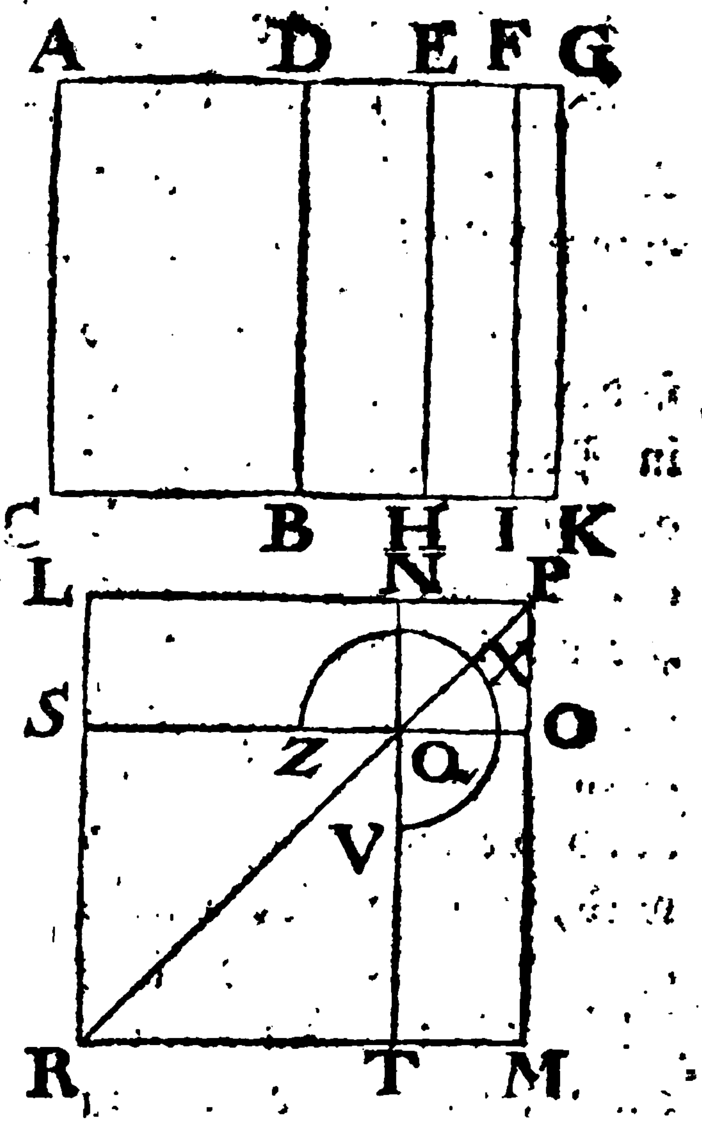
Da $DG \cup AC$, und beyde rational sind, so ist (10, 22. S.) DK medial; aber $DK = 2 (LP \times PN)$, folglich $2 (LP \times PN)$ medial.

Demnach ist LN, welche den Raum AB potenzirt, (10, 77. S.) die kleinere Irrationale.

Der 96. Satz. Lehrsatz.

Den unter einer Rationallinie, CA, und der fünften Apotome, AD, enthaltenen Raum, AB, potenzirt die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende.

An



An AD füge sich DG, so sey AG, GD, rational bloß Potenz commensurabel; auch ist GD $\cap$ AC, und die potenzirt um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über GD. Nach voriger Construction wird, wie vorher, gethan, daß LN in der Figur LRMP den Raum AB potenzirt; daher noch zu beweisen ist, daß LN die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende sey.

Da hier (10, 19. S.) AF $\cup$ FG, aber (6, 1. S.) AF : FG = AI : FK; so ist (10, 10. S.) AI $\cup$ FK. Folglich, weil AI = $\square$ LP, und FK = $\square$ NP, ist auch $\square$ LP $\cup$ $\square$ NP. Demnach sind LP, NP, in Potenz incommensurabel.

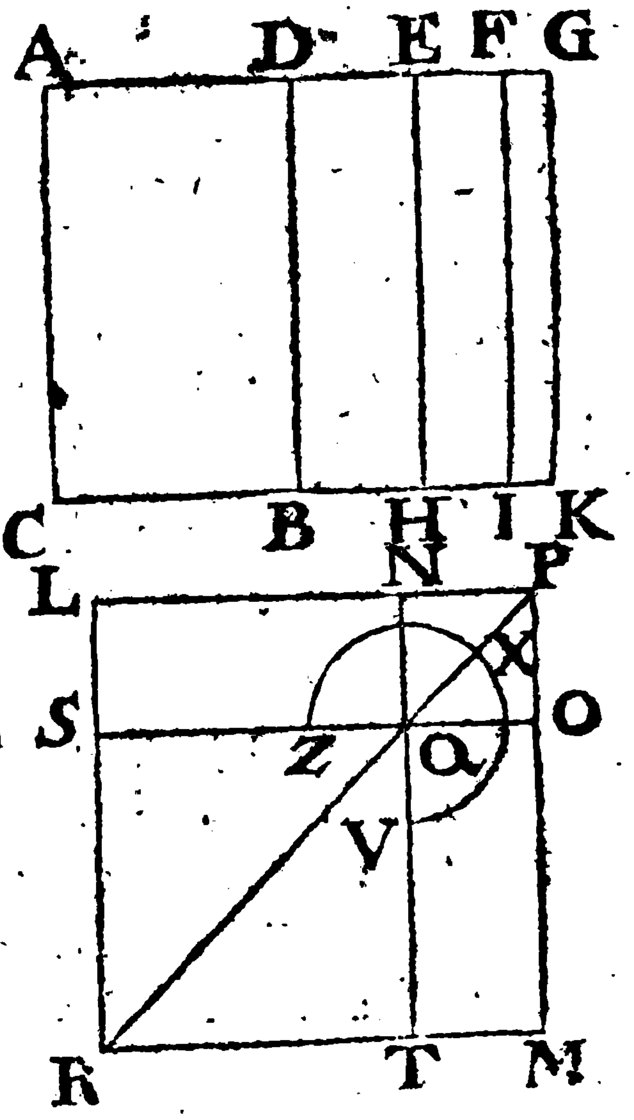
Da AG $\cup$ GD, aber GD $\cap$ AC: so ist (10, 13. S.) AG $\cup$ AC. Nun sind AG, AC, rational. Folglich ist (10, 22. S.) AK medial, folglich, weil AK = $\square$ LP + $\square$ NP, auch $\square$ LP + $\square$ NP medial.

Da GB rational und $\cap$ AC: so ist (10, 20. S.) DK rational; folglich, weil DK = 2 (LP $\times$ PN), auch 2 (LP $\times$ PN) rational.

Demnach ist LN, welche den Raum AB potenzirt, (10, 78. S.) die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende.

Der 97. Satz, Lehrsatz.

Den unter einer Rationallinie, CA, und der sechsten Apotome, AD, enthaltenen Raum, AB, potenzirt die mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende.



An AD füge sich DG: so sind AG, GD, rational bloß in Potenz commensurabel; auch ist weder AG noch GD $\cap$ AC, und die AG potenzirt um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die GD. Nach voriger Construction wird, wie vorher, dargethan, daß LN in der Figur LRMP den Raum AB potenzirt; daher nur noch zu beweisen ist, daß LN die mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende sey.

Da hier (10, 19. S.) AF $\cup$ FG, aber (6, 1. S.) AF : FG $=$ AI : FK; so ist (10, 10. S.) AI $\cup$ FK. Nun ist LM $=$ $\square$ LP $=$ AI, und ON $=$ $\square$ NP $=$ FK. Folglich ist $\square$ LP $\cup$ $\square$ NP. Demnach sind LP, NP, in Potenz incommensurabel.

Da AG, AC, rational bloß in Potenz commensurabel sind, so ist (10, 22. S.) AK, das ist $\square$ LP $+$ $\square$ NP, medial.

Da AC, DG, rational, auch AC $\cup$ DG: so ist DK, das ist 2 (LP $\times$ PN), medial.

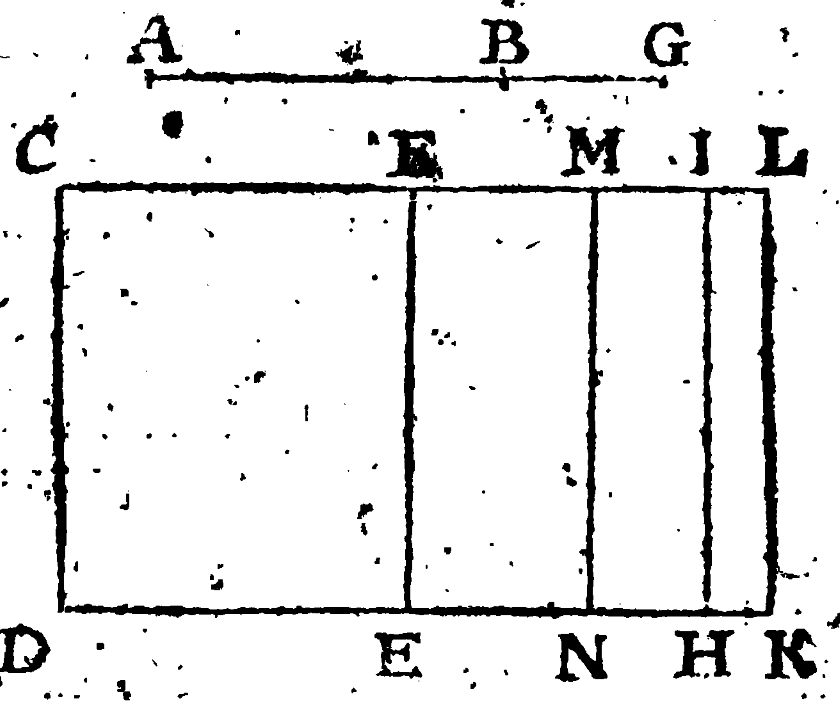
Da AG $\cup$ DG, aber AG : DG $=$ AK : DK; so ist AK $\cup$ DK, das ist $\square$ LP $+$ $\square$ NP $\cup$ 2 (LP $\times$ PN).

Dem-

Demnach ist LN, welche den Raum AB potenzirt, (10, 79. S.) die **mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende.**

Der 98. Satz. Lehrsatz.

Das dem Quadrate der Apotome, AB, gleiche, an einer Rationallinie, CD, entworfene, Rectangel, CE, hat zur Breite, CF, die erste Apotome.



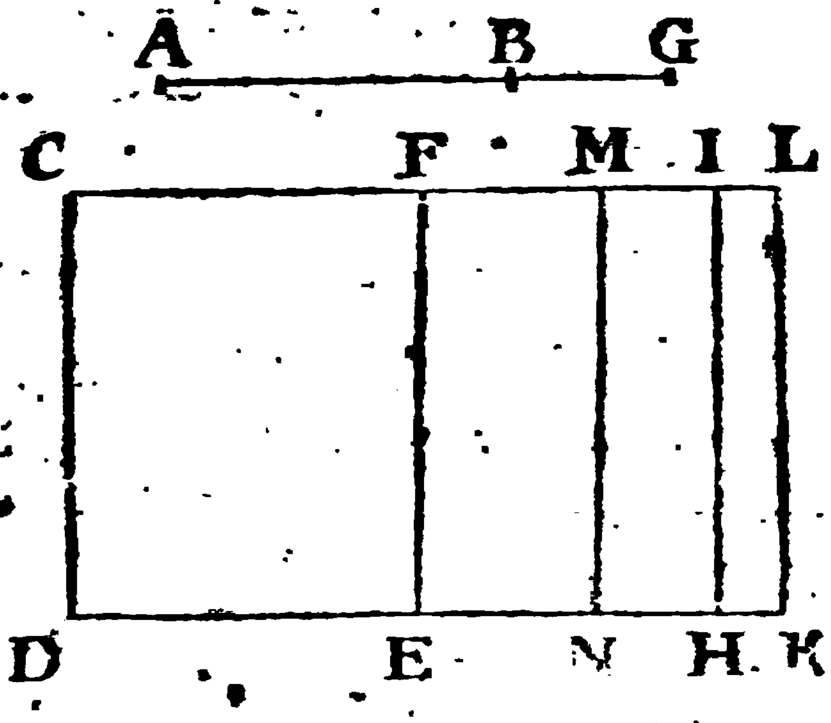
An die Apotome AB füge sich BG: so sind (10, 74. S.) AG, GB, rational bloß in Potenz commensurabel. An CD entwerfe man die Rectangel, CH $=$ □AG, und IK $=$ □GB: so ist CK $=$ □AG $+$ □GB, und, weil CE $=$ □AB, (2, 7. S.) FK $=$ 2 (AG $\times$ GB). Man halbire FL in M, und ziehe durch M der CD die MN parallel: so ist (1, 36. S.) FN $=$ MK $=$ AG $\times$ GB. Nun ist zu beweisen:

Erstlich, daß CF eine Apotome sey.

Da □AG $+$ □GB rational und der CK gleich: so ist auch CK, das ist DC $\times$ CL, rational; folglich, weil DC rational, (10, 21. S.) auch CL rational, und $\cap$ CD.

Da (10, 22. S.) 2 (AG $\times$ GB) medial und der FK gleich: so ist FK, das ist DC $\times$ FL, medial; folglich, weil DC rational, (10, 23. S.) FL rational und $\cup$ DC.

Da hiernach CK rational, und FK medial, also CK $\cup$ FK; aber (6, 1. S.) CK : FK $=$ CL : LF; so ist (10, 10. S.) CL $\cup$ LF.



Demnach sind CL, LF, rational bloß in Potenz commensurabel; folglich ist (10, 74. S.) CF eine Apotome.

Zweytens, daß CF die erste Apotome sey:

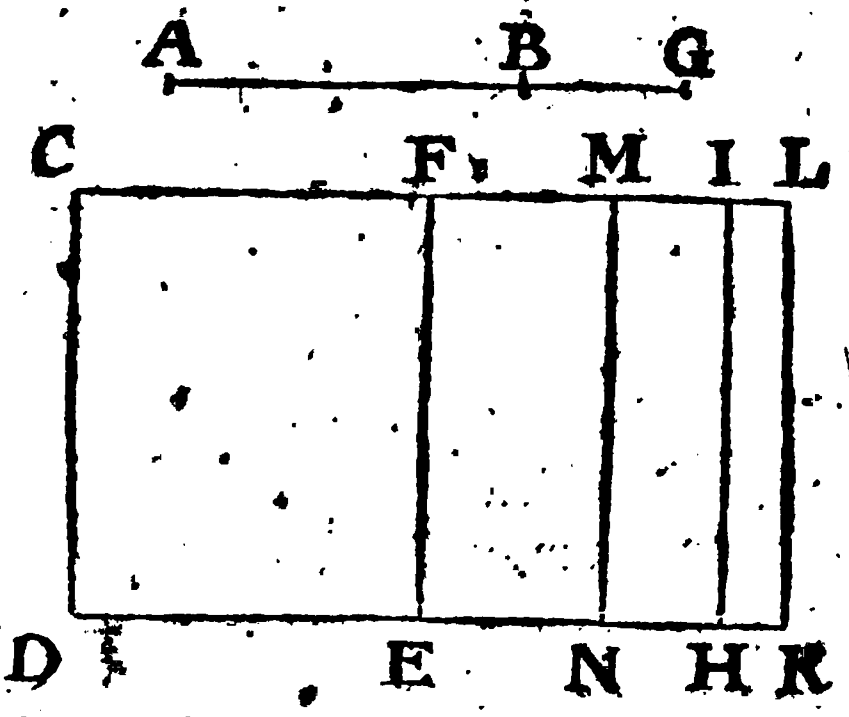
Da (10, 54. Lehns. 3.) AG $\times$ GB zwischen $\square$ AG und $\square$ GB die mittlere Proportionalfläche: so ist solches auch MK zwischen CH und IK, das ist, CH : MK = MK : IK. Nun ist CH : MK = CI : ML, und MK : IK = ML : IL. Folglich ist CI : ML = ML : IL, folglich (6, 17. S.) CI $\times$ IL = $\square$ ML = $\frac{1}{4}$ $\square$ FL. Nun ist $\square$ AG $\frown$ $\square$ GB, das ist, CH $\frown$ IK; aber CH : IK = CI : IL, und daher (10, 10. S.) CI $\frown$ IL. Folglich (10, 18. S.) potenzirt die CL, um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie, über die FL, und es war CL $\frown$ CD; folglich ist CF die erste Apotome.

Der 99. Satz. Lehrsatz.

Das dem Quadrate der ersten Medialapotome, AB, gleiche, an einer Rationallinie, CD, entworfene Rectangel, CE, hat zur Breite, CF, die zweyte Apotome.

An die erste Medialapotome, AB, füge sich BG: so sind (10, 75. S.) AG, GB, medial bloß in Potenz commensurabel; aber AG $\times$ GB ist rational. Construirt man nun alles wie vorher, so ist zu beweisen:

Erste



Erstlich, daß CF eine Apotome sey.

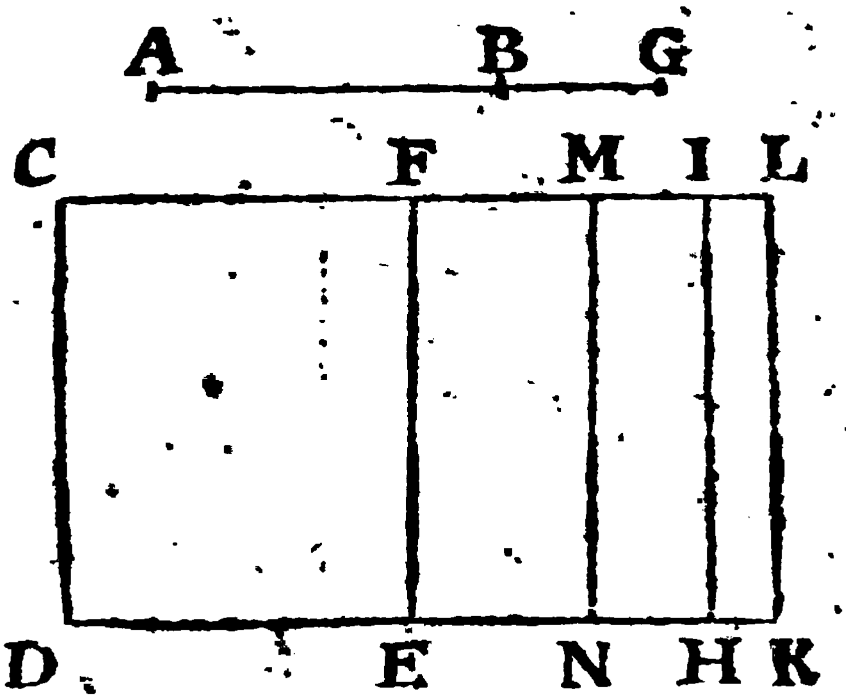
Da $\square AG + \square GB$, das ist CK, das ist $DC \times CL$, medial; aber DC rational: so ist (10, 23. S.) CL rational und $\cup$ DC. Da $2(AG \times GB)$, das ist FK, das ist $DC \times FL$, rational: so ist (10, 21. S.) FL rational und $\cap$ DC. Da CK medial, aber FK rational, also CK $\cup$ FK, und (6, 1. S.) CK : FK = CL : LF; so ist (10, 10. S.) CL $\cup$ LF. Demnach sind CL, LF, rational bloß in Potenz commensurabel; folglich ist (10, 74. S.) CF eine Apotome.

Zweytens, daß CF die zweyte Apotome sey.

Da hier wieder $CI \times IL = \square ML = \frac{1}{4} \square FL$, auch $\square AG \cap \square GB$, das ist, CH $\cap$ IK, also auch CI $\cap$ IL: so potenzirt (10, 18. S.) die LC um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabeln Linie über die FL, und es war FL $\cap$ DC. Folglich ist CF die zweyte Apotome.

Der 100. Satz. Lehrsatz.

Das dem Quadrate der zweyten Medialapotome, AB, gleiche, an einer Rationallinie, CD, entworfene Rectangel, CE, hat zur Breite, CF, die dritte Apotome.



An AB füge sich BG, so sind (10, 76. S.) AG, GB, medial bloß in Potenz commensurabel, auch AG × GB ist medial. Nach voriger Construction ist nun zu beweisen:

Erstlich, daß CF eine Apotome sey.

Da □ AG + □ GB, das ist CK, das ist DC × CL, medial: so ist (10, 23. S.) CL rational und ∪ DC. Da 2 (AG × GB), das ist FK, das ist DC × FL, medial: so ist (10, 23. S.) FL rational und ∪ DC. Da AG ∩ GB, also AG ∪ GB, aber AG : GB = □ AG : AG × GB; so ist □ AG ∪ AG × GB. Nun ist (10, 16. S.) □ AG ∩ □ AG + □ GB, auch AG × GB ∩ 2 (AG × GB). Folglich ist (10, 14. 13. S.) □ AG + □ GB ∪ 2 (AG × GB), das ist CK ∪ FK; folglich, weil CK : FK = CL : FL, auch CL ∪ FL. Demnach sind CL, FL, rational bloß in Potenz commensurabel, folglich ist (10, 74. S.) CF eine Apotome.

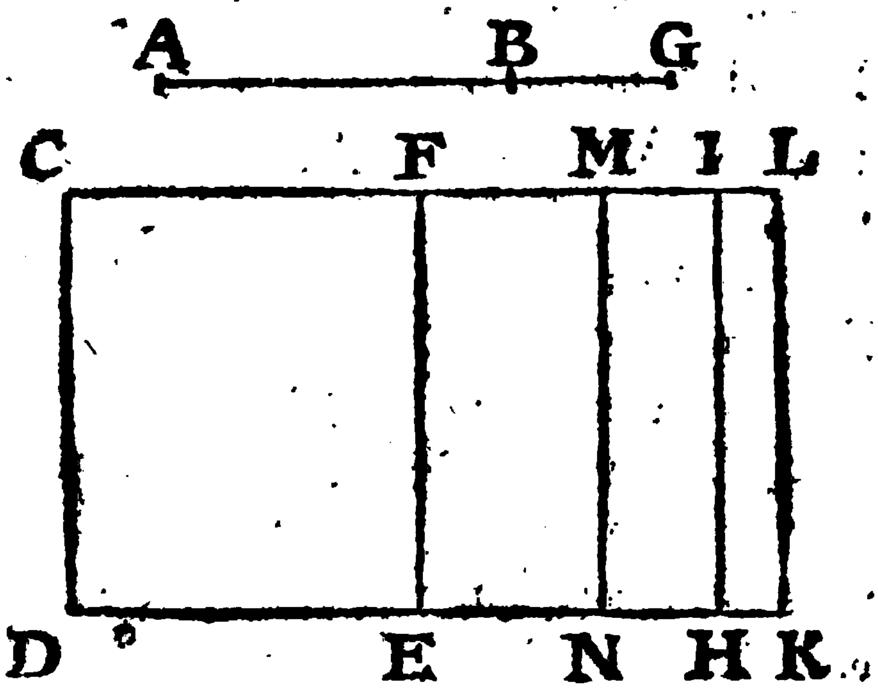
Zweytens, daß CF die dritte Apotome sey.

Da hier wieder CI × IL = $\frac{1}{4}$ □ FL, auch □ AG ∩ □ GB, das ist CH ∩ HK, also CI ∩ IL: so potenzirt (10, 18. S.) die CL um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die FL, und es wär weder CL noch LF der CD commensurabel; folglich ist CF die dritte Apotome.

Der 101. Satz. Lehrsatz.

Das dem Quadrate der kleinern Irrationale, AB, gleiche, an einer Rationallinie, CD, entworfene Rect=

Rectangel, CE, hat zur Breite, CF, die vierte Apotome.



An AB füge sich BG, so sind (10, 77. S.) AG, GB, in Potenz incommensurabel; auch ist $\square AG + \square GB$ rational, aber $2 (AG \times GB)$ medial. Nach voriger Construction ist nun zu beweisen:

Erstlich, daß CF eine Apotome sey.

Da $\square AG + \square GB$, das ist CK, das ist $DC \times CL$, rational: so ist (10, 21. S.) CL rational und $\cap$ DC. Da $2 (AG \times GB)$, das ist FK, das ist $DC \times FL$, medial: so ist (10, 23. S.) FL rational und $\cup$ DC. Da $\square AG + \square GB$ rational, aber $2 (AG \times GB)$ medial: so ist $\square AG + \square GB \cup 2 (AG \times GB)$, das ist $CK \cup FK$; aber $CK : FK = CL : FL$, folglich (10, 10. S.) $CL \cup FL$. Demnach sind CL, FL, rational bloß in Potenz commensurabel; folglich ist (10, 74. S.) CF eine Apotome.

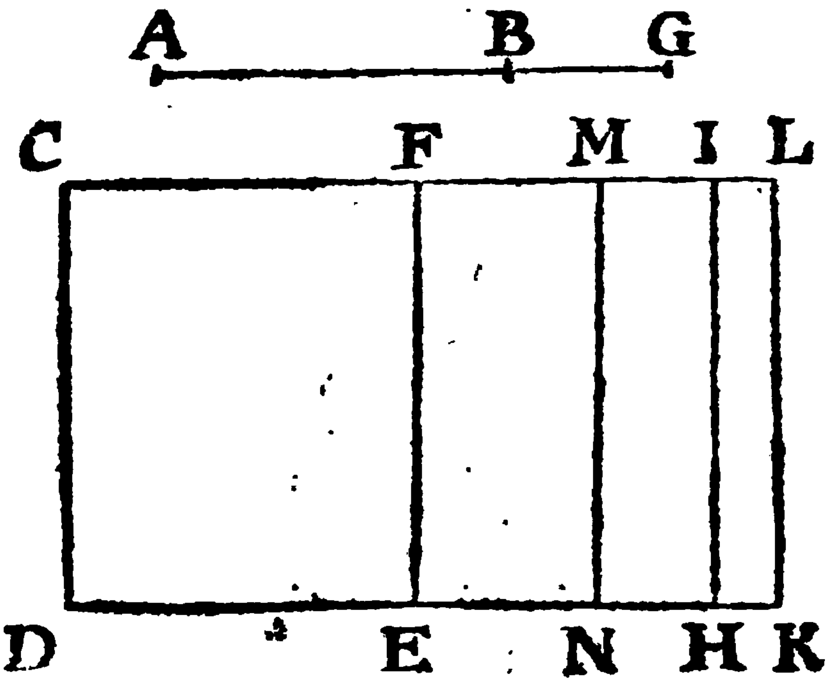
Zweytens, daß CF die vierte Apotome sey.

Da hier wieder $CI \times IL = \frac{1}{4} \square FL$, auch $\square AG \cup \square GB$, das ist $CH \cup IK$; aber $CH : IK = CI : IL$, also $CI \cup IL$: so potenzirt (10, 19. S.) die CL um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die FL, und es war $CL \cap CD$; folglich ist CF die vierte Apotome.

Der 102. Satz. Lehrsatz.

Das dem Quadrate der mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebenden, AB, gleiche, an einer Rationallinie,

linie, DC, entworfene Rectangel, CE, hat zur Breite, CF, die fünfte Apotome.



An AB füge sich BG: so sind (10, 78. S.) AG, GB, in Potenz incommensurabel; auch ist □ AG + □ GB medial, aber 2 (AG × GB) rational. Nach voriger Construction ist noch zu beweisen:

Erstlich, daß CF eine Apotome sey.

Da □ AG + □ GB, das ist CK, das ist DC × CL, medial: so ist (10, 23. S.) CL rational und ∪ DC. Da 2 (AG × GB), das ist FK, das ist DC × FL, rational: so ist (10, 21. S.) FL rational und ∩ DC. Da CK medial, aber FK rational: so ist CK ∪ FK, folglich auch CL ∪ FL. Demnach sind CL, FL, rational bloß in Potenz commensurabel; folglich ist (10, 74. S.) CF eine Apotome.

Zweytens, daß CF die fünfte Apotome sey.

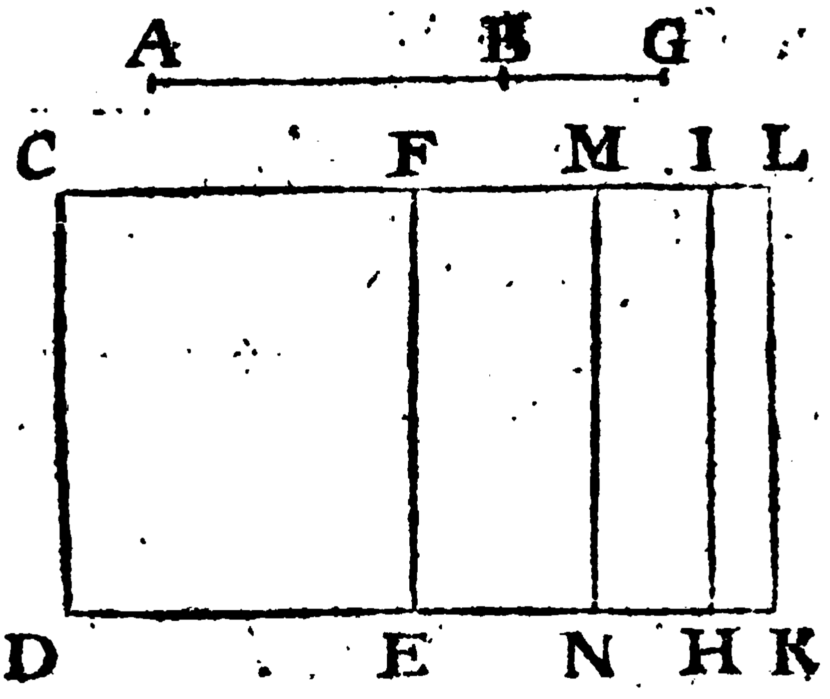
Da hier wieder CI × IL = $\frac{1}{4}$ □ FL, auch □ AG ∪ □ GB, das ist CH ∪ IK, folglich auch CI ∪ IL: so potenzirt (10, 19. S.) die CL um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die FL, und es war FL ∩ CD; folglich ist CF die **fünfte Apotome**.

Der 103. Satz. Lehrsatz.

Das dem Quadrate der mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebenden, AB, gleiche, an einer Rationallinie, DC, entworfene Rectangel, CE, hat zur Breite, CF, die sechste Apotome.

An

An AB füge sich GB, so sind (10, 79. S.) AG, GB, in Potenz incommensurabel; auch ist sowohl $\square AG + \square GB$, als $2 (AG \times GB)$ medial, und $\square AG + \square GB \cup 2 (AG \times GB)$. Nach voriger Construction ist nun zu beweisen:



Erstlich, daß CF eine Apotome sey.

Da $\square AG + \square GB$, das ist CK, das ist $DC \times CL$, medial: so ist (10, 23. S.) CL rational und $\cup$ DC. Da $2 (AG \times GB)$, das ist FK, das ist $DC \times FL$, medial: so ist (10, 23. S.) FL rational und $\cup$ DC. Da $\square AG + \square GB \cup 2 (AG \times GB)$, das ist $CK \cup FK$: so ist $CL \cup FL$. Demnach sind CL, FL, rational bloß in Potenz commensurabel; folglich ist (10, 74. S.) CF eine Apotome.

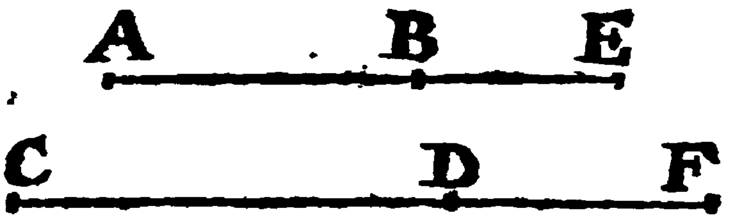
Zweytens, daß CF die sechste Apotome sey.

Da hier wieder $CI \times IL = \frac{1}{4} \square FL$, auch $\square AG \cup \square GB$, das ist $CH \cup CK$, folglich $CI \cup IL$: so potenzirt (10, 19. S.) die CL um das Quadrat einer ihr in Länge incommensurabelen Linie über die FL, und es war weder CL noch FL der CD in Länge commensurabel; folglich ist CF die **sechste Apotome**.

Der 104. Satz. Lehrsatz.

Jede einer Apotome, AB, in Länge commensurabele Linie, CD, ist auch eine Apotome, und der Ordnung nach dieselbe.

Erstlich. An AB füge sich BE; so sind (10, 74. S.) AE, EB, rational bloß in Potenz commensurabel. Mache AB : CD = BE : DF, daß also auch (5, 12. S.) AE : CF = AB : CD, folglich, weil AB ∩ CD, auch BE ∩ DF und AE ∩ CF.



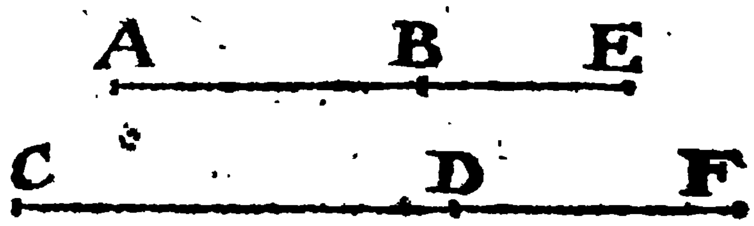
Da (5, 19. S.) AE : CF = BE : DF, und verwechselt AE : BE = CF : DF; so ist, weil AE ∪ BE, auch CF ∪ DF, also sind CF, DF, rational bloß in Potenz commensurabel, folglich ist (10, 74. S.) CD eine Apotome.

Zweytens. Ist AB entweder die erste, oder zweyte, oder dritte Apotome, das ist, potenzirt in der Proportion AE : EB = CF : FD, die AE um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die EB, und ist entweder AE, oder EB, oder keine von beyden der angenommenen Rationallinie in Länge commensurabel: so potenzirt (10, 15. S.) auch die CF um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die FD, und es ist in eben der Folge entweder CF, oder FD, oder keine von beyden solcher Rationallinie in Länge commensurabel; folglich CD zugleich mit AB entweder die erste, oder zweyte, oder dritte Apotome. Nun wird auf ähnliche Art bewiesen, daß CD zugleich mit AB entweder die vierte, oder fünfte, oder sechste Apotome sey. Folglich sind die Apotomen AB, CD, der Ordnung nach immer dieselben.

Der 105. Satz. Lehrsatz.

Jede einer Medialapotome, AB, in Länge commensurabele Linie, CD, ist auch eine Medialapotome, und der Ordnung nach dieselbe.

Erstlich. An AB füge sich BE; so sind (10, 75. 76. S.) AE, EB, medial bloß in Po-



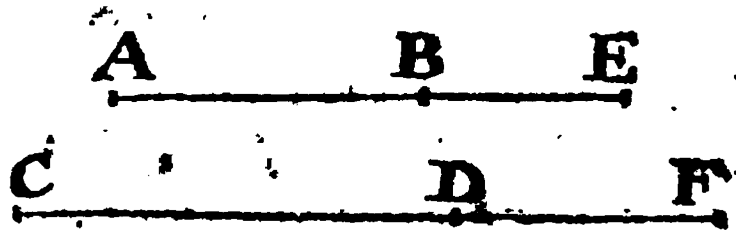
tenz

tenz commensurabel. Macht man nun wieder $AB : CD = BE : DF$, daß also wieder $AE : EB = CF : FD$ ist; so sind auch CF, FD, medial bloß in Potenz commensurabel; folglich ist CD eine Medialapotome.

Zweytens. Aus der zweyten Proportion folgt (6, 1. S. und 5, 11. S.) $\square AE : AE \times EB = \square CF : CF \times FD$, folglich verwechselt $\square AE : \square CF = AE \times EB : CF \times FD$. Nun ist $AB \frown CD$, und $AB : CD = AE : CF$, folglich $AE \frown CF$, also auch $\square AE \frown \square CF$. Folglich ist auch $AE \times EB \frown CF \times FD$. Ist nun AB die erste oder zweyte Medialapotome: so ist (10, 75. 76. S.) $AE \times EB$ entweder rational oder medial. Folglich ist auch $CF \times FD$ in eben der Folge entweder rational oder medial; folglich CD zugleich mit AB entweder die erste oder die zweyte Medialapotome.

Der 106. Satz. Lehrsatz.

Jede der kleinern Rationallinie, AB, in Länge commensurabele Linie, CD, ist auch die kleinere Irrationallinie.

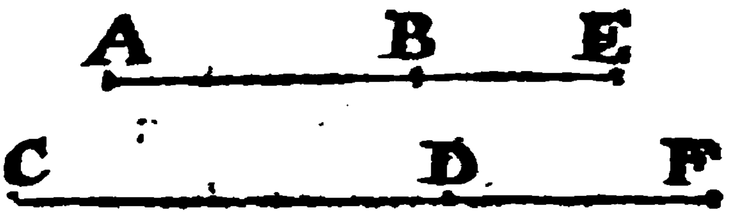


Es sey alles, wie vorher: so sind AE, EB, folglich auch CF, FD, in Potenz incommensurabel.

Da $AE : EB = CF : FD$, so ist (6, 22. S.) $\square AE : \square EB = \square CF : \square FD$, folglich ist (5, 18. S.) verbunden $\square AE + \square EB : \square EB = \square CF + \square FD : \square FD$, folglich verwechselt $\square AE + \square EB : \square CF + \square FD = \square EB : \square FD$.

Nun ist $AB : CD = EB : FD$, also, weil $AB \frown CD$, auch $EB \frown FD$, also auch $\square EB \frown \square FD$. Folglich ist $\square AE + \square EB \frown \square CF + \square FD$; folglich, weil (10, 77. S.) $\square AE + \square EB$ rational, auch $\square CF + \square FD$ rational.

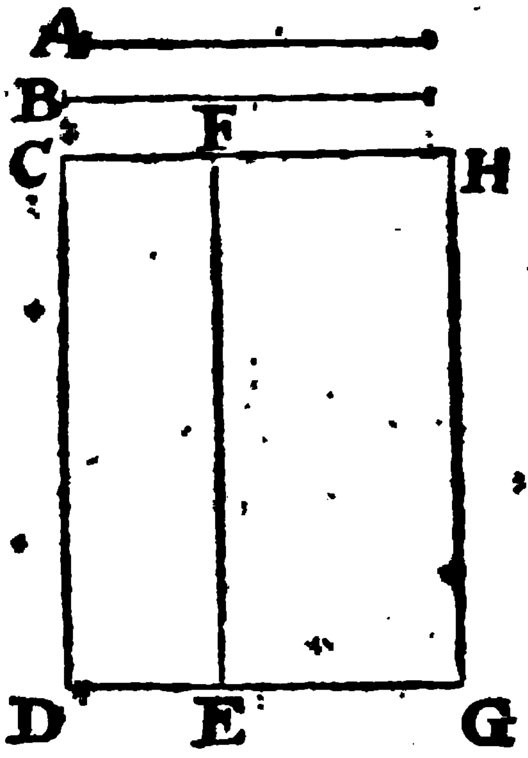
Da



Da $\square AE : AE \times EB = \square CF : CF \times FD$, so ist verwechselt $\square AE : \square CF = AE \times EB : CF \times FD$.

Nun ist $AE : CF = AB : CD$, aber $AB \cap CD$, also $AE \cap CF$, also auch $\square AE \cap \square CF$. Folglich ist $AE \times EB \cap EF \times FD$, folglich, weil (10, 77. S.) $2\,(AE \times EB)$ medial, auch (10, 24. S.) $2\,(CF \times FD)$ medial. Demnach ist (10, 77. S.) CD die kleinere Irrationale.

Ein anderer Beweis. Jede der kleinern Irrationale, A, in Länge commensurabele Linie, B, ist auch die kleinere Irrationale.



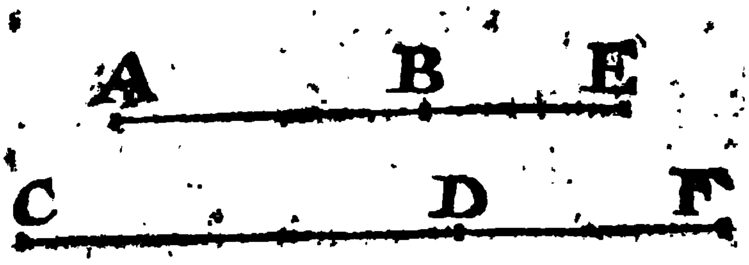
Es sey CD eine Rationallinie, und an derselben $\square A = CE = DC \times CF$ entworfen, daß also (10, 101. S.) CF die vierte Apotome ist. Auch sey $FG = DC \times FH = \square B$.

Da $A \cap B$, also auch $\square A \cap \square B$, das ist $CE \cap FG$; aber $CE : FG = CF : FH$; so ist auch $CF \cap FH$; aber CF die vierte Apotome, folglich auch (10, 104. S.) FH die vierte Apotome. Nun war CD rational, und $DC \times FH = \square B$. Folglich ist (10, 95. S.) B die kleinere Irrationale.

Der 107. Satz. Lehrsatz.

Jede der mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebenden, AB, in Länge commensurabele Linie, CD, ist auch die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende.

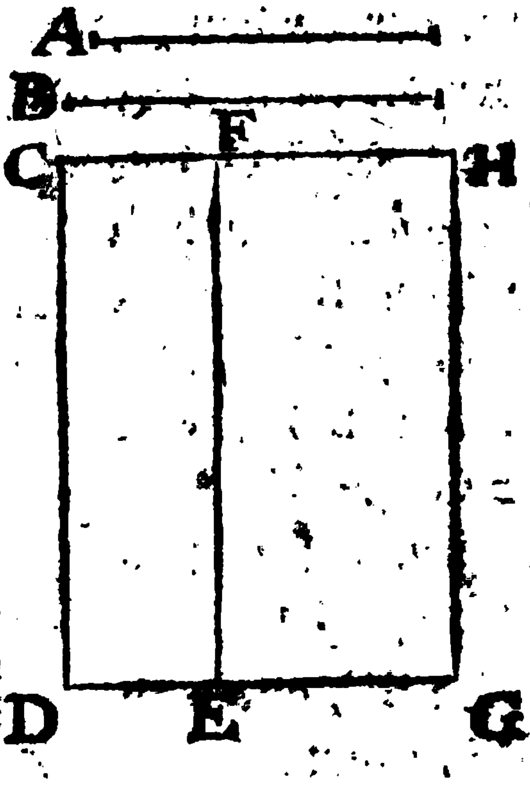
Es sey alles, wie vorher: so sind (10, 78. S.) AE, EB, in Potenz incommensurabel; auch ist □AE + □EB medial,



aber 2(AE × EB) rational. Nun wird auf ähnliche Art bewiesen, daß CF : FD = AE : EB, und □AE + □EB $\frown$ □CF + □FD, desgleichen 2(AE × EB) $\frown$ 2(CF × FD), daß also auch CF, FD, in Potenz incommensurabel sind, ferner □CF + □FD medial, aber 2(CF × FD) rational ist. Demnach ist (10, 78. S.) CD die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende.

Ein anderer Beweis. Es sey A, was AE; und B, was CD wär.

Es sey CD eine Rationallinie, und □A = CE = DC × CF, daß also (10, 102. S.) CF die fünfte Apotome ist. Auch sey □B = FG = DC × FH.



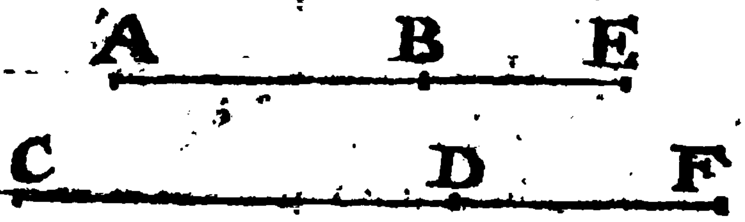
Da □A $\frown$ □B, das ist CE $\frown$ FG: so ist auch CF $\frown$ FH, folglich (10, 104. S.) FH die fünfte Apotome. Nun war CD rational, und CD × FH = □B. Folglich ist (10, 96. S.) B die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende.

Der 108. Satz. Lehrsatz.

Jede der mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebenden, AB, in Länge commensurabele Linie, CD, ist auch die mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende.

Es

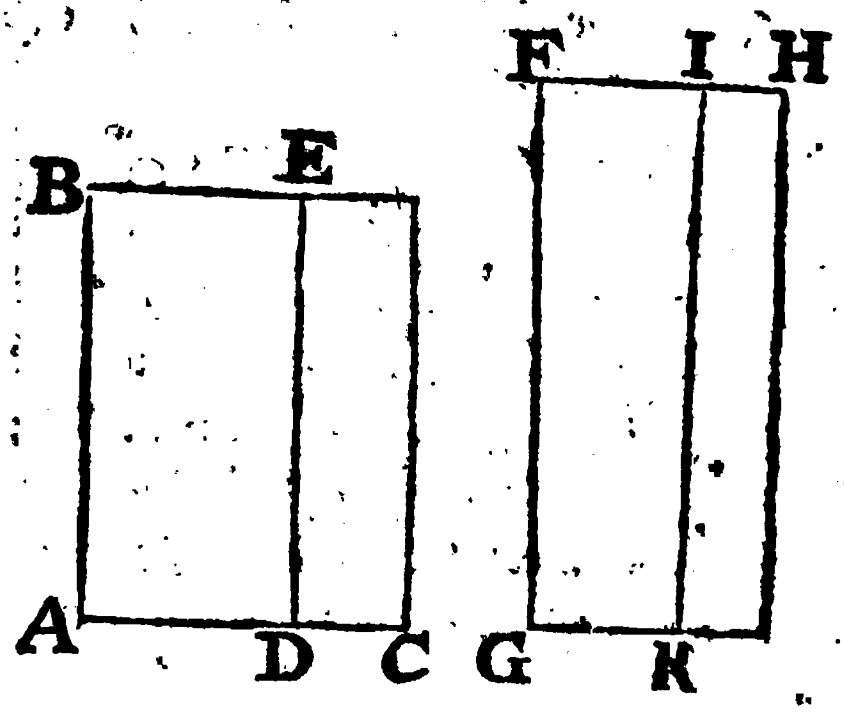
Es sey alles, wie vorher: so sind (10, 79. S.) AE, EB, in Potenz incommensurabel; auch sind □ AE + □ EB und 2 (AE × EB); beyde medial und incommensurabel. Nun wird auf ähnliche Art bewiesen, daß CF, FD, auch □ CF + □ FD, desgleichen 2 (CF × FD), den vorhergenannten commensurabel sind; folglich die ersten in Potenz incommensurabel, und die beyden letzten auch medial und auch incommensurabel sind. Demnach ist (10, 79. S.) CD die mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende.



Der 109. Satz. Lehrsatz.

Wird von einem Rationalen, BC, ein Mediales, BD, weggenommen: so wird die den Rest, EC, Potenzirende eine der beyden Irrationallinien; entweder die Apotome, oder die kleinere Irrationale.

Es sey FG eine Rationallinie, und an derselben BC = GH = GF × FH, desgleichen BD = FK = GF × FI, entworfen, daß folglich EC = KH ist.



Da BC, also auch GH, rational, aber BD, also auch FK, medial: so ist (10, 21. S.) FH rational und $\frown$ GF; aber (10, 23. S.) FI rational und $\smile$ FG, folglich (10, 13. S.) FH $\smile$ FI. Demnach sind FH, FI, rational bloß in Potenz commensurabel; folglich ist (10, 74. S.) IH eine Apotome, an die sich IF fügt. Nun potenzirt die FH, über die IF, entweder um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen oder um das einer incommensurabelen Linie.

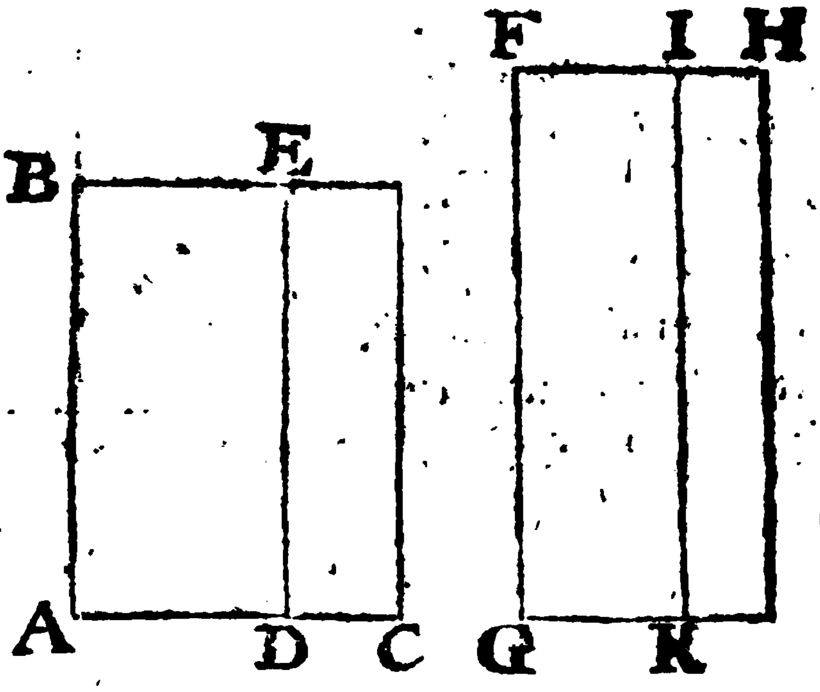
Ist

Ist das Erste: so ist, weil $FH \frown FG$, IH die erste Apotome; folglich, weil FG rational, (10, 92. S.) die den Raum KH, das ist EC, Potenzirende eine Apotome.

Ist das Zweyte: so ist, weil $FH \frown FG$ ist, IH die vierte Apotome; folglich, weil FG rational, (10, 95. S.) die den Raum KH, das ist EC, Potenzirende die kleinere Irrationale.

Der 110. Satz. Lehrsatz.

Wird von einem Medialen, BC, ein Rationales, BD, weggenommen: so entstehen zwey andere Irrationallinien; entweder die erste Medialapotome, oder die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende.



Es sey FG die angenommene Rationallinie, und alles wie vorher construirt: so folgt, daß (10, 23. S.) FH rational und $\smile$ FG, aber (10, 21. S.) FI rational und $\frown$ FG, folglich, daß (10, 13. S.) $FH \smile FI$. Demnach sind FH, FI, rational bloß in Potenz commensurabel, folglich ist (10, 74. S.) HI eine Apotome, an die sich IF fügt. Nun potenzirt die FH, über die FI, entweder um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen oder um das einer incommensurabelen Linie.

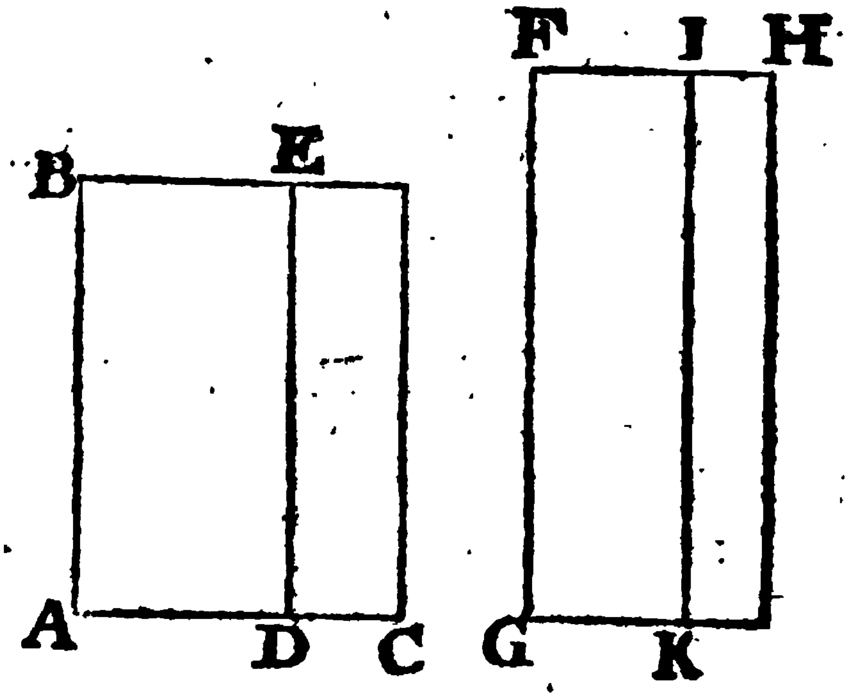
Ist das Erste: so ist, weil $FI \frown FG$ ist, HI die zweyte Apotome; folglich, weil FG rational, (10, 93. S.) die den Raum KH, das ist EC, Potenzirende die erste Medialapotome.

Ist das Zweyte: so ist, weil $FI \frown FG$ ist, HI die fünfte Apotome; folglich, weil FG rational, (10, 96. S.) die den

den Raum KH, das ist EC, Potenzirende die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende.

Der 111. Satz. Lehrsatz.

Wird von einem Medialen, BC, ein demselben incommensurabeles Mediales, BD, weggenommen: so entstehen die beyden übrigen Irrationallinien; entweder die erste Medialapotome, oder die mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende.



Construire wie vorher. Da BC, BD, also auch GH, FK, medial und incommensurabel sind: so ist (6, 1. S. und 10, 10. S.) FH ∪ FI. Demnach sind FH, FI, rational bloß in Potenz commensurabel; folglich ist (10, 74. S.) HI eine Apotome, an die sich IF fügt. Nun potenzirt die FH, über die FI, entweder um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen oder um das einer incommensurabelen Linie.

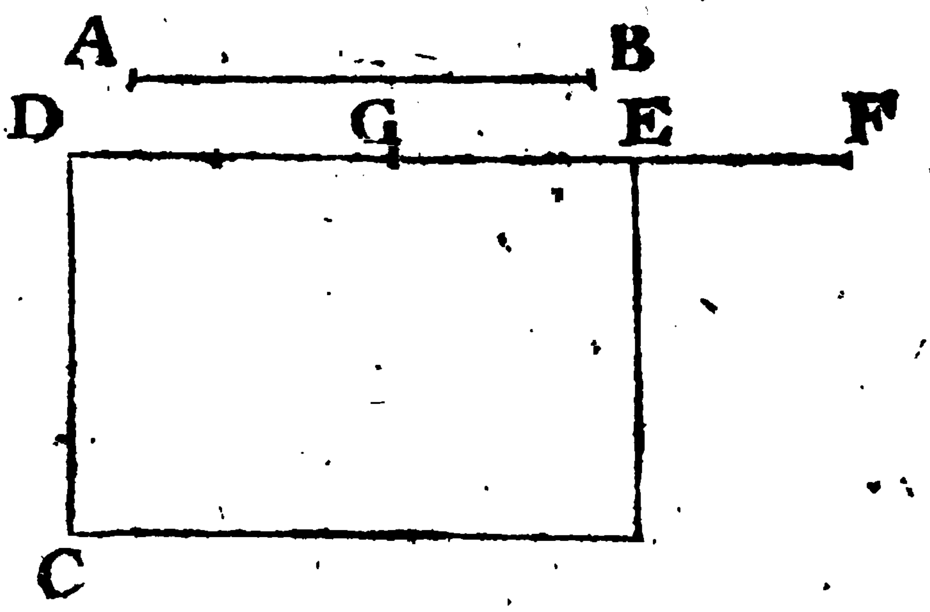
Ist das Erste: so ist, weil weder FH noch FI ∩ FG ist, HI die dritte Apotome; folglich, weil FG rational, (10, 94. S.) die den Raum KH, das ist EC, Potenzirende, die zweyte Medialapotome.

Ist das Zweyte: so ist, weil weder FH noch FI ∩ FG ist, HI die sechste Apotome; folglich, weil FG rational, (10, 97. S.) die den Raum KH, das ist EC, Potenzirende, die mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende.

Der 112. Satz. Lehrsatz.

Die Apotome, AB, ist von der Binomiale unterschieden.

Wäre es möglich, daß AB zugleich eine Apotome und eine Binomiale wäre: so sey die Rationallinie DC, und an derselben $\square\, AB = CE = CD \times DE$, entworfen.



Da AB eine Apotome, so ist (10. 98. S.) DE die erste Apotome. Es füge sich an dieselbe EF: so sind DF, FE, rational bloß in Potenz commensurabel; die DF potenzirt um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die EF; und es ist $DF \cap CD$.

Da nun AB auch eine Binomiale: so ist (10, 61. S.) DE die erste Binomiale. Es sey dieselbe bey G in ihre Namen zerlegt, daß DG der größere sey: so sind DG, GE, rational bloß in Potenz commensurabel; die DG potenzirt um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linien über die GE; und es ist $DG \cap DC$.

Da hiernach $DG \cap DC$, und $DF \cap DC$: so ist (10, 12. S.) $DF \cap DG$, folglich auch $DF \cap FG$; folglich, weil DF rational, auch FG rational. Ferner folgt aus $DF \cap FG$, daß, weil $DF \cup FE$, auch (10, 13. S.) $FG \cup FE$; folglich, weil FE rational, FG, FE, rational bloß in Potenz commensurabel sind. Folglich ist (10, 74. S.) EG eine Apotome; aber nach Obigem EG rational: welches sich offenbar widerspricht. Demnach kann die Apotome nicht zugleich eine Binomiale seyn, und ist also von derselben verschieden.

Zusatz.

Die Apotome, und die auf sie folgenden Irrationallinien, sind sowohl von der Mediallinie, als auch von einander selbst unterschieden.

Denn das dem Quadrate der Mediallinie gleiche an einer Rationallinie entworfene Rectangel hat zur Breite (10, 23. S.) eine jener incommensurabele Rationallinie; das dem Quadrate der Apotome aber gleiche (10, 98. S.) die erste Apotome; das dem der ersten Medialapotome gleiche (10, 99. S.) die zweyte Apotome; das dem der zweyten Medialapotome gleiche (10, 100. S.) die dritte Apotome; das dem der kleinern Irrationale gleiche (10, 101. S.) die vierte Apotome; das der mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebenden gleiche (10, 102. S.) die fünfte Apotome; das der mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebenden gleiche (10, 103. S.) die sechste Apotome. Es unterscheiden sich also besagte Irrationallinien von der ersten, daß diese zur Breite eine Rationallinie, von einander selbst aber, daß sie zu Breiten Apotomen von verschiedenen Ordnungen geben. Nun ist (10, 112. S.) bewiesen, daß die Apotome von der Binomiale unterschieden ist, desgleichen (10, 73. Zus.), daß die Binomiale, und die auf sie folgenden Irrationallinien von der Mediale, und von einander selbst unterschieden sind. Demnach sind der Irrationallinien dreyzehn an der Zahl, und folgen so auf einander:

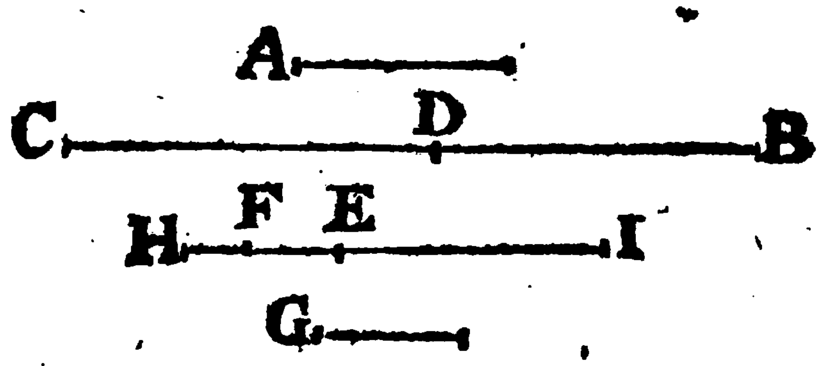
1. Die Mediale. 22. S.
2. Die Binomiale. 37. S.
3. Die erste Bimediale. 38. S.
4. Die zweyte Bimediale. 39. S.
5. Die größere Irrationale. 40. S.

6. Die

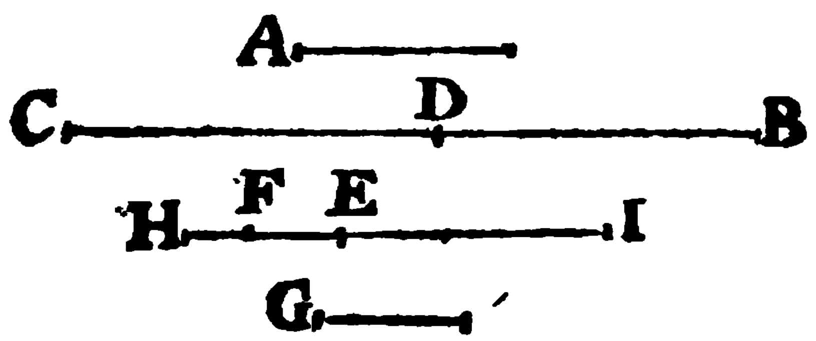
6. Die ein Rationales und Mediales Potenzirende. 41. S.
7. Die zwey Mediale Potenzirende. 42. S.
8. Die Apotome. 74. S.
9. Die erste Medialapotome. 75. S.
10. Die zweyte Medialapotome. 76. S.
11. Die kleinere Irrationale. 77. S.
12. Die mit einem Rationalen ein mediales Ganze Gebende. 78. S.
13. Die mit einem Medialen ein mediales Ganze Gebende. 79. S.

Der 113. Satz. Lehrsatz.

Das dem Quadrate einer Rationallinie, A, gleiche an einer Binomiale, BC, entworfene Rectangel hat zur Breite, EF, eine Apotome, die mit der Binomiale von einerley Ordnung ist, und deren Namen den Namen der Binomiale commensurabel, und mit ihnen in einerley Verhältniß sind.



Erstlich. Es sey die Binomiale BC bey D in ihre Namen zerlegt, daß CD der größere Name ist, auch sey □ A = BD × G; folglich, weil □ A = BC × EF ist, BD × G = BC × EF, folglich (6, 16. S.) CB : BD = G : EF. Nun sey, weil CB > BD, also auch G > EF ist, G = EH. Folglich ist CB : BD = EH : EF, folglich (5, 17. S.) getrennt CD : BD = FH : EF. Nun sey FH : FE = FI : EI, daß also



(5, 12. S.) HI : FI = IF : IE. Folglich ist HI : FI = CD : DB; folglich, weil (10, 37. S.) □ CD ⌒ □ DB, auch (10, 10. S.) □ HI ⌒ □ FI. Nun war HI : FI = IF : IE, also (6, 20. Zus.) □ HI : □ FI = HI : IE. Folglich ist (10, 10. S.) HI ⌒ IE, folglich (10, 16. S.) auch HE ⌒ EI.

Da □ A = BD × G; also, weil G = HE ist, □ A = HE × BD: so ist, weil □ A rational, auch HE × BD rational. Nun ist (10, 37. S.) BD rational. Folglich ist (10, 21. S.) auch HE rational und ⌒ BD; folglich, weil HE ⌒ EI, auch EI rational und ⌒ BD.

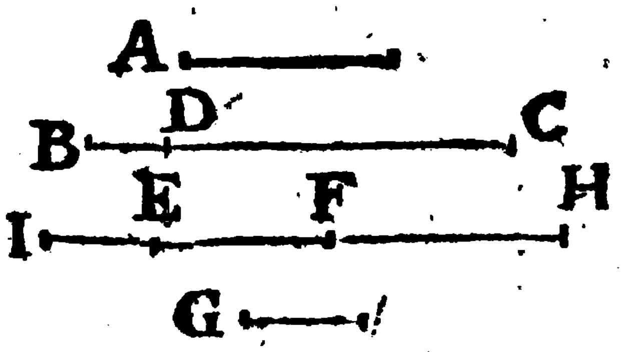
Da nach Obigem CD : BD = FI : IE; so ist, weil EI rational und ⌒ BD, auch FI rational und ⌒ CD; ferner, weil (10, 37. S.) CD ⌒̲ BD, auch FI ⌒̲ IE. Demnach sind FI, IE, rational bloß in Potenz commensurabel; folglich ist (10, 74. S.) EF eine Apotome, deren Namen FI, IE, der Binomiale BC Namen, CD, BD, commensurabel und mit ihnen in gleicher Verhältniß sind.

Zweytens. Ist BC die erste, oder zweyte, oder dritte Binomiale, das ist, potenzirt in der Proportion CD : BD = FI : IE, die CD um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die BD, und ist entweder CD oder BD, oder keine von beyden der angenommenen Rationallinie in Länge commensurabel: so potenzirt auch die FI um das Quadrat einer ihr in Länge commensurabelen Linie über die IE, und es ist in eben der Folge entweder FI, oder IE, oder keine von beyden solcher Rationallinie in Länge commensurabel; folglich ist die Apotome EF zugleich mit der Binomialen BC, von der ersten, oder zweyten, oder dritten

ten Ordnung. Nun wird auf ähnliche Art bewiesen, daß EF mit BC zugleich von der vierten, oder fünften, oder sechsten Ordnung sey. Folglich sind die Binomiale BC und Apotome EF der Ordnung nach immer dieselben.

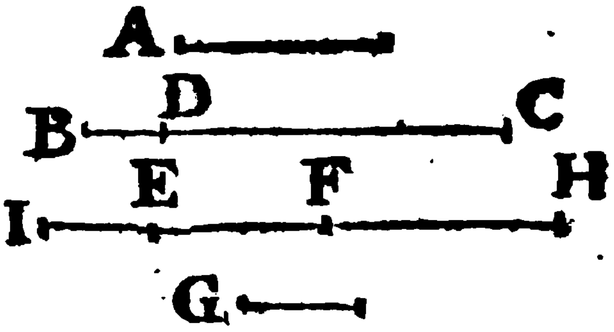
Der 114. Satz. Lehrsatz.

Das dem Quadrate einer Rationallinie, A, gleiche an einer Apotome, BD, entworfene Rectangel hat zur Breite, IH, eine Binomiale, die mit der Apotome von einerley Ordnung ist, und deren Namen den Namen der Apotome commensurabel, und mit ihnen in gleicher Verhältniß sind.



Erstlich. An die Apotome BD füge sich DC, daß also (10, 74. S.) BC, CD, rational bloß in Potenz commensurabel sind; auch sey BC ✕ G = □ A, folglich rational; folglich, weil BC rational ist, (10, 21. S.) auch G rational und ⌒ BC. Da BC ✕ G = □ A = BD ✕ IH: so ist (6, 16. S.) CB : BD = IH : G. Nun sey, weil BC > BD, also auch IH > G ist, IE = G, also auch IE ⌒ BC. Folglich ist CB : BD = IH : IE, folglich zurückkehrend BC : CD = IH : HE. Nun sey IH : HE = HF : FE. Folglich ist (5, 19. S.) IF : FH = IH : HE = BC : CD; folglich, weil BC ⌒– CD, auch IF ⌒– FH.

Da nach Obigem IF : FH = IH : HE = HF : FE; so ist (6, 20. Zus.) IF : FE = □ IF : □ FH; folglich, weil □ IF ⌒ □ FH, auch IF ⌒ FE, folglich (10, 16. S.) auch FI ⌒ IE; aber IE rational und ⌒ BC, folglich auch FI rational und ⌒ BC.

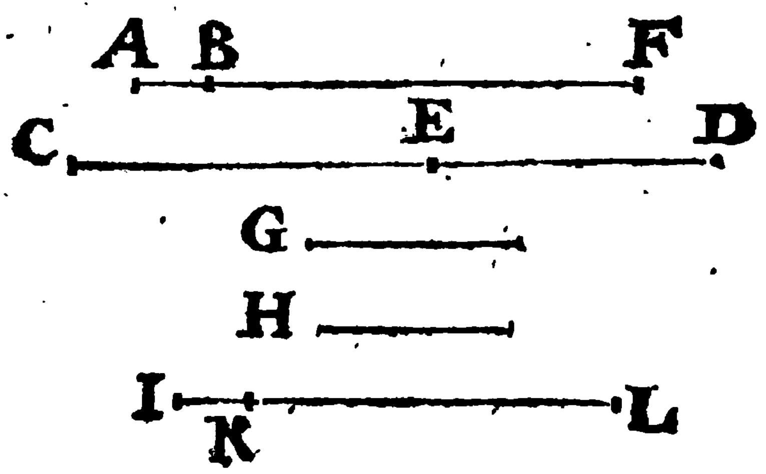


Da ferner BC : CD = IF : FH, also verwechselt BC : IF = CD : FH; so ist, weil BC $\frown$ IF, auch CD $\frown$ FH; und, weil BC, CD, rational bloß in Potenz commensurabel sind, auch IF, FH, rational bloß in Potenz commensurabel. Demnach ist (10, 37. S.) IH eine Binomiale, deren Namen IF FH. der Apotome BD Namen, BC, CD, commensurabel, und mit ihnen in gleicher Verhältniß sind.

Zweytens. Auf eben die Art, wie beym vorigen Satze, wird bewiesen, daß die Binomiale IH mit der Apotome BD immer von derselben Ordnung sey.

Der 115. Satz. Lehrsatz.

Jedes unter einer Apotome, AB, und einer Binomiale, CD, deren Namen den Namen der Apotome commensurabel und proportionirt sind, enthaltene Rectangel, wird von einer Rationallinie, G, potenzirt.



An AB füge sich BF, und es sey CD bey E in ihre Namen zerlegt, daß CE der größere Name: so sind nach der Voraussetzung CE, ED, den Namen AF, FB, commensurabel, und CE : ED = AF : FB, auch AB $\times$ CD = $\square$ G; also zu beweisen, daß G eine Rationallinie sey.

Es

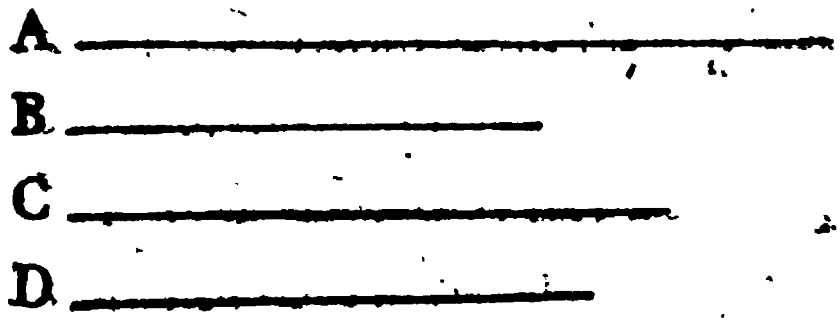
Es sey eine Rationallinie H, und an der CD das dem $\square$ H gleiche Rectangel CD $\times$ IK entworfen: so ist (10, 113. S.) IK eine Apotome, deren Namen IL, LK, der Binomiale Namen CE, ED, commensurabel sind, auch CE : ED = IL : LK; folglich, weil nach der Voraussetzung CE : ED = AF : FB, auch AF : FB = IL : LK, folglich verwechselt AF : IL = FB : LK, folglich (5, 19. S.) AB : IK = AF : IL; folglich, weil AF $\cap$ IL, auch AB $\cap$ IK. Nun ist (6. 2. S.) AB : IK = CD $\times$ AB : CD $\times$ IK. Folglich ist CD $\times$ AB $\cap$ CD $\times$ IK, das ist $\square$ H $\cap$ $\square$ G; folglich, weil $\square$ H rational, auch $\square$ G, also auch G, rational.

Zusatz.

Hieraus ergiebt sich die Möglichkeit eines rationalen unter Irrationallinien enthaltenen Rectangels.

Der 116. Satz. Lehrsatz.

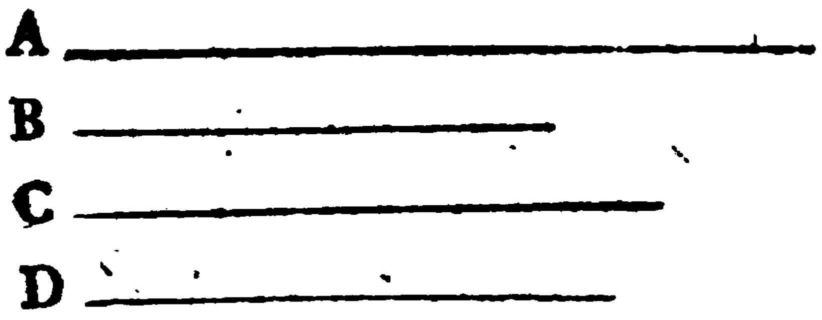
Aus einer Mediallinie, A, können unzählige Irrationallinien entstehen, welche mit keiner der Vorhergehenden einerley sind.



Es sey eine Rationallinie B, folglich (10, 39. S.) A $\times$ B irrational.

Nun sey A $\times$ B = $\square$ C: so ist C eine Irrationallinie, aber mit keiner der vorhergehenden einerley. Denn kein Quadrat irgend einer vorhergehenden giebt eine Mediallinie, wie aus den Sätzen 61 bis 66, und 98 bis 103 erhellet.

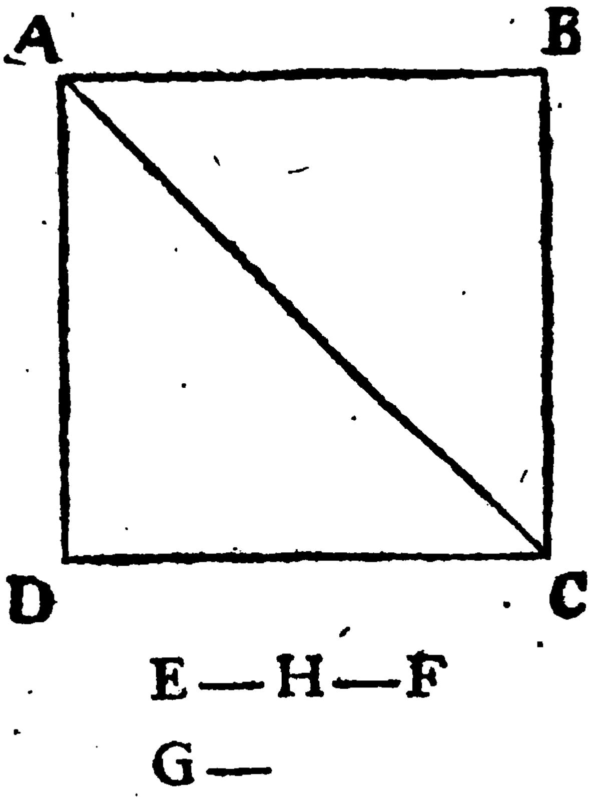
Ferner sey $B \times C = \square D$: so ist wieder D eine Irrationallinie, und mit keiner der vorhergehenden einerley; da kein Quadrat irgend einer der vorhergehenden die Irrationallinie C giebt.



Da sich diese Schlüsse ohne Ende fortsetzen lassen: so siehet man, daß man hierdurch unzählige Irrationallinien erhalten kann, die alle von den vorhergehenden verschieden sind.

Der 117. Satz. Lehrsatz.

In jedem Quadrate, ABCD, ist die Diagonale, AC, der Seite, AB, in Länge incommensurabel.



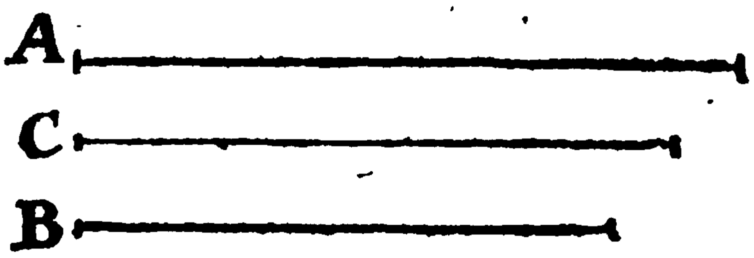
Es sey, wenn es möglich, $AC \cap AB$, daß sich also AC, AB, wie Zahlen verhalten. Diese Zahlen seyen EF, G, und zwar die kleinsten in solcher Verhältniß, daß also $EF : G = AC : AB$; folglich, weil $AC > AB$, auch $EF > G$, folglich EF nicht die Einheit, also eine Zahl. Da nach obiger Proportion auch $EF^2 : G^2 = \square AC : \square AB$, aber (1, 47. S.) $\square AC = 2 \square AB$: so ist auch $EF^2 = 2 G^2$, folglich EF^2, folglich (9, 23. S.) auch EF eine gerade Zahl, welche in H halbirt sey.

Da EF, G, die kleinsten Zahlen in ihrer Verhältniß, folglich Primzahlen zu einander sind, aber EF gerade ist: so kann nicht auch G gerade seyn, weil sonst EF, G, von der Zahl zwey gemessen würden; welches, weil sie Primzahlen zu einander sind, unmöglich ist. Demnach ist G ungerade.

Da EF in H halbirt, also $EF = 2\,EH$ ist: so ist (8, 11. S.) $EF^2 = 4\,EH^2$, folglich, weil $2\,G^2 = EF^2$ war, $2\,G^2 = 4\,EH^2$, folglich $G^2 = 2\,EH^2$, folglich G^2, folglich (9, 23. S.) auch G gerade. Nun war nach Obigem G auch ungerade; welches sich offenbar widerspricht. Demnach ist es unmöglich, daß $AC \cap AB$; folglich ist $AC \cup AB$.

Ein anderer Beweis. Da (1, 47. S.) $\square AC = 2 \square AB$, folglich sich $\square AC$, $\square AB$ wie 2 zu 1, also nicht wie Quadratzahlen verhalten: so ist (10, 9. S.) $AC \cup AB$.

Anmerkung.



Hat man zwey incommensurabele Linien, A, B, gefunden: so lassen sich auch incommensurabele Figuren finden. Denn nimmt man zwischen A und B die mittlere Proportionallinie C: so ist (6, 20. S.) A : B = Fig. auf A : Fig. auf C; es mögen nun diese Figuren Quadrate, oder andere ähnliche geradlinige Figuren, oder auch Kreise mit den Durchmessern, A, C, seyn; weil, wie (12, 2. S.) bewiesen werden wird, die Kreise sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Demnach hat man auch Figuren gefunden, die unter einander incommensurabel sind. Folglich lassen sich auch dergleichen Körper finden. Denn stellt man auf obige Figuren Körper von gleicher Höhe, sie mögen nun Pyramiden oder Prismata, Kegel oder Cylinder seyn: so verhalten sich diese wie ihre Grundflächen, welches (11, 32. S. und 12, 5. 6. 11. S.) bewiesen werden wird. Demnach sind diese Körper commensurabel oder incommensurabel, je nachdem es ihre Grundflächen sind.

Hieraus erhellet dann, daß die Commensurabilität und Incommensurabilität nicht nur bey Linien und Flächen, sondern auch bey Körpern, Statt finde.

Euklid's Elemente

Eilftes Buch

Und Erstes von den Körpern.

Erklärungen.

1. Ein Körper ist, was Länge, Breite und Tiefe hat.
2. Eines Körpers Gränze ist Fläche.
3. Eine gerade Linie ist auf einer Ebene perpendikular, wenn sie mit allen sie treffenden, und in solcher Ebene liegenden, geraden Linien rechte Winkel macht.
4. Eine Ebene ist auf einer Ebene perpendikular, wenn die an beyder gemeinschaftlichen Durchschnitt in der einen Ebene unter rechten Winkeln gezogenen geraden Linien auf der andern Ebene perpendikular sind.
5. Einer geraden Linie Neigung gegen eine Ebene ist der spitze Winkel, den sie mit der durch die beyden Punkte gezogenen geraden Linie macht, in deren einem sie selbst, in dem andern aber, der von einem ihrer Punkte auf die Ebene gefällte Perpendikel die Ebene trifft.
6. Einer Ebene Neigung gegen eine Ebene ist der spitze Winkel, welchen zwey gerade Linien einschließen, die in beyden Ebenen an den gemeinschaftlichen Durchschnitt unter rechten Winkeln, und zwar an einerley Punkt desselben, gezogen werden.

7. Zwey

7. Zwey Paar Ebenen haben ähnliche Neigungen, wenn vorhin gedachte Neigungswinkel gleich sind.

8. Parallele Ebenen heißen, die nie zusammentreffen.

9. Aehnliche Körper sind, die von gleich vielen ähnlichen Ebenen begränzt werden.

10. Gleiche und ähnliche Körper sind, die von gleich vielen gleichen und ähnlichen Ebenen begränzt werden.

11. Ein körperlicher Winkel (eine Ecke) ist die Neigung wenigstens dreyer geraden Linien gegen einander, welche, ohne in einerley Ebene zu liegen, in Einem Punkte zusammentreffen. Oder: ein körperlicher Winkel wird von wenigstens drey ebenen Winkeln eingeschlossen, welche, ohne in einerley Ebene zu liegen, an Einem Punkte zusammengestellt sind.

12. Eine Pyramide ist ein Körper, begränzt von Ebenen, die von Einer Ebene aus an einem außerhalb derselben befindlichen Punkte zusammengestellt sind.

13. Ein Prisma ist ein Körper, begränzt von Ebenen, deren zwey einander gegenüber liegende gleich und ähnlich, auch parallel, die übrigen aber Parallelogramme sind.

14. Eine Kugel, Sphaera, ist der Körper, welcher umschlossen wird, wenn ein Halbkreis sich um seinen unverrückten Durchmesser ringsum drehet.

15. Die Axe der Kugel ist die unverrückte Linie, um welche der Halbkreis gedrehet worden ist.

16. Der Mittelpunkt der Kugel ist einerley mit dem des sich umdrehenden Halbkreises.

17. Der Durchmesser der Kugel ist jede durch ihren Mittelpunkt gezogene und an beyden Seiten von der Kugelfläche begränzte gerade Linie.

18. Ein Kegel, conus, ist der Körper, welcher umschlossen wird, wenn sich ein rechtwinkliger Triangel, in-

dem

dem eine seiner um den rechten Winkel liegenden Seiten unverrückt bleibt, ringsum drehet. Ist diese unverrückte Seite eben so groß, oder kleiner, oder größer, als die andere an dem rechten Winkel liegende, sich mit umdrehende; so entsteht im ersten Falle ein rechtwinkliger, im zweyten ein stumpfwinkliger, im dritten ein spitzwinkliger Kegel.

19. Die Axe des Kegels ist die unverrückte Seite, um welche der Triangel gedrehet worden ist.

20. Die Grundfläche des Kegels ist der von der andern sich umdrehenden Seite beschriebene Kreis.

21. Ein Cylinder ist der Körper, welcher umschlossen wird, wenn sich ein rechtwinkliges Parallelogramm, indem eine seiner Seiten unverrückt bleibt, ringsum drehet.

22. Die Axe des Cylinders ist die unverrückte Seite, um welche das Parallelogramm gedrehet worden ist.

23. Die Grundflächen des Cylinders sind die Kreise, welche von den beyden einander gegenüber liegenden umgedreheten Seiten beschrieben worden sind.

24. Aehnliche Kegel und Cylinder sind, deren Axen den Durchmessern der Grundflächen proportionirt sind.

25. Ein Würfel, cubus, ist ein von sechs gleichen Quadraten begränzter Körper.

26. Ein Tetraëder ist ein von vier gleichen und gleichseitigen Triangeln begränzter Körper.

27. Ein Oktaëder ist ein von acht gleichen und gleichseitigen Triangeln begränzter Körper.

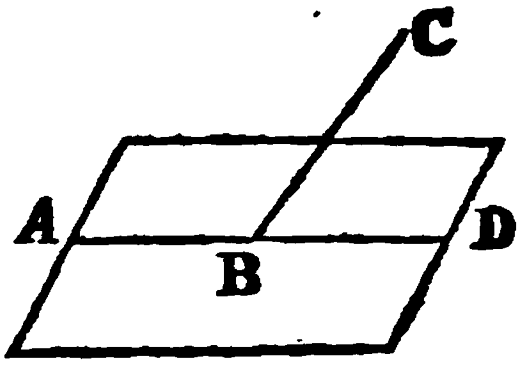
28. Ein Dodekaëder ist ein von zwölf gleichen, gleichseitigen und gleichwinkligen Pentagonen begränzter Körper.

29. Ein Ikosaëder ist ein von zwanzig gleichen und gleichseitigen Triangeln begränzter Körper.

Der

Der 1. Satz. Lehrsatz.

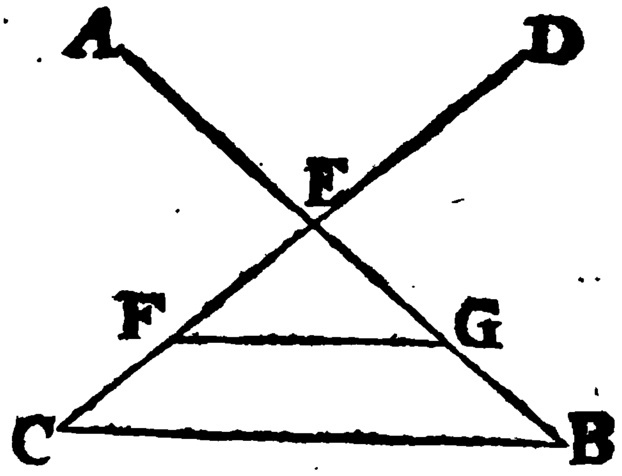
Von einer geraden Linie liegt nicht ein Stück in einer Ebene, und ein anderes über derselben.



Wenn es möglich, so sey ABC eine gerade Linie, von welcher das Stück AB in einer Ebene, das Stück BC aber über derselben liege. Verlängert man das Stück in der Ebene, AB, bis D: so hätten die geraden Linien ABC, ABD, den Abschnitt AB gemein, welches nicht möglich ist. Denn zwey gerade Linien können nur in Einem Punkte zusammentreffen, oder fallen ganz zusammen. Demnach kann auch nicht von einer geraden Linie ein Stück in einer Ebene, ein anderes über derselben liegen.

Der 2. Satz. Lehrsatz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, die einander schneiden, liegen in Einer Ebene; auch jeder Triangel liegt in Einer Ebene.



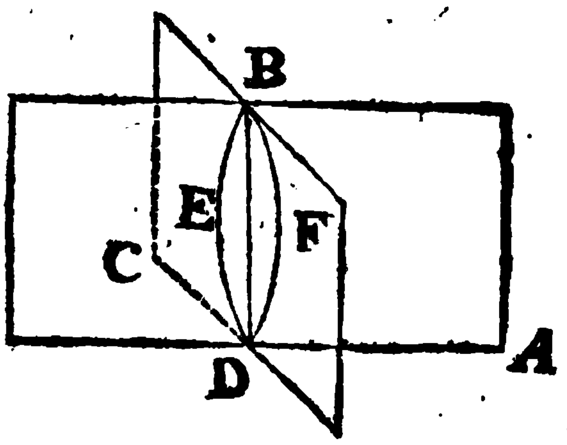
Nimm in EC, EB, willkührliche Punkte, F, G, und ziehe FG, CB.

Wäre nun vom △ ECB ein Stück EFG in einer Ebene, das übrige FCBG aber über derselben: so wäre auch von den geraden Linien EC oder EB ein Stück EF oder EG in solcher Ebene, ein anderes FC oder GB über derselben, welches (11, 1. S.) unmöglich ist. Demnach liegt der ganze Triangel ECB in Einer Ebene, in welcher also EB, EC, folglich (11, 1. S.) auch AB, CD, liegen.

Der

Der 3. Satz. Lehrsatz.

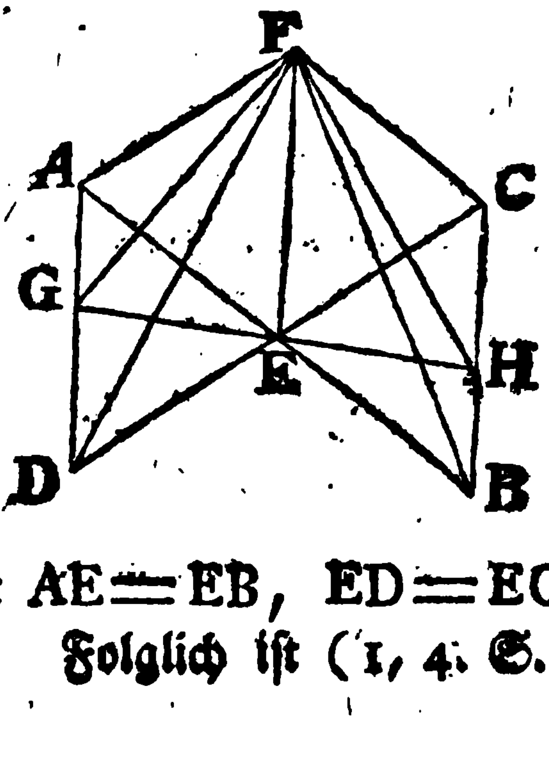
Schneiden zwey Ebenen, AB, BC, einander, so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt, BD, eine gerade Linie.



Wäre solcher Durchschnitt BD keine gerade Linie: so sey von D nach B in der Ebene AB eine gerade Linie DFB, und in der Ebene BC eine gerade Linie DEB, daß also beyde einerley Gränzen hätten, folglich einen Raum BEDF einschlössen, welches (1, 12. S.) nicht möglich. Demnach sind DFB, DEB, nicht gerade Linien, und aus gleichen Gründen auch keine andere von D nach B gezogene Linien außer DB, dem gemeinschaftlichen Durchschnitte der beyden Ebenen. Folglich muß dieser eine gerade Linie seyn.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

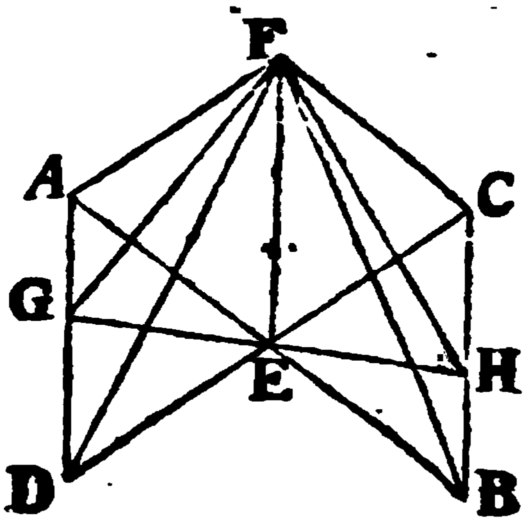
Eine gerade Linie, EF, die auf zwey einander schneidenden geraden Linien, AB, CD, in deren gemeinschaftlichen Durchschnitte, E, perpendikular stehet, ist auf der durch diese Linien gelegten Ebene perpendikular. dem



Mache EB der EA, und ED der EC gleich, und ziehe durch E in der Ebene der AB und CD willkührlich die gerade Linie GEH, ziehe auch AD, CB, desgleichen von einem in der EF beliebig genommenen Punkte F, die FA, FG, FD; FB, FH, FC.

In den △△ AED, BEC, ist AE = EB, ED = EC, und (1, 15. S.) AED = BEC. Folglich ist (1, 4. S.) AD = CB, und DAE = EBC.

In



In den △△ AGE, BHE, ist hiernach DAE = EBC, und (1, 15. S.) AEG = BEH, auch ist AE = EB. Folglich ist (1, 26. S.) GE = EH, und AG = BH.

In den △△ FEA, FEB, sind bey E rechte Winkel, auch ist AE = EB, EF = EF. Folglich ist (1, 4. S.) FA = FB.

In den △△ FED, FEC, ist aus gleichem Grunde FD = FC.

In den △△ FAD, FBC, ist also hiernach FA = FB, FD = FC. Nun war auch nach Obigem AD = BC. Folglich ist (1, 8. S.) FAD = FBC.

In den △△ FAG, FBH, ist hiernach FAD = FBC. Nun war nach Obigem AG = BH, und FA = FB. Folglich ist (1, 4. S.) FG = FH.

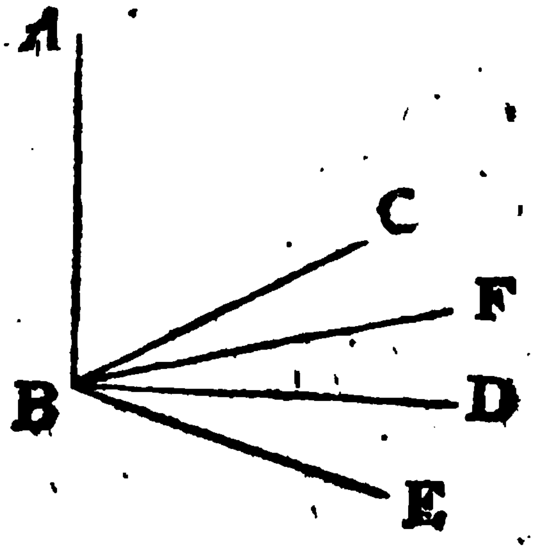
In den △△ FEG, FEH, endlich ist hiernach FG = FH; auch ist FE beyden gemein. Nun war nach Obigem GE = EH. Folglich ist (1, 8. S.) GEF = HEF, folglich EF auf GEH in E perpendikular.

Auf ähnliche Art wird gezeigt, daß EF auf jeder Linie, die wie GEH in der Ebene der AB und DC durch E gezogen ist, perpendikular sey. Folglich ist (11, 3. E.) EF auf dieser Ebene perpendikulär.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

Drey aus einem Punkte, B, ausgehende gerade Linien, BC, BD, BE, auf welchen in solchem Punkte eine gerade Linie perpendikular ist, sind in Einer Ebene.

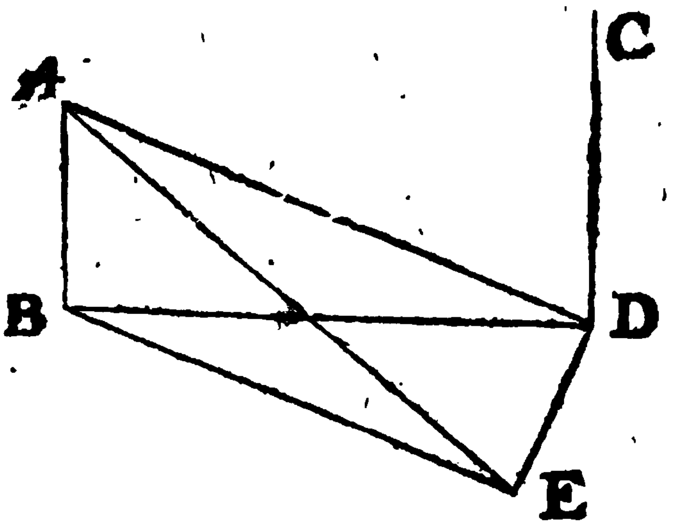
Wäre dieses nicht, so seyen, wenn es möglich, BD, BE, in BC aber über der Grundebene. Wird nun die Ebene durch AB,



AB, BC, hinreichend erweitert: so schneidet sie (11, 3. S.) die Grundebene in einer geraden Linie, BF, und es sind in der darauf stehenden Ebene die geraden Linien AB, BC, BF. Nun ist AB auf BD, BE, also auf der Grundebene, folglich (11, 4. S.) auch auf BF, perpendikular, also ABF = R.; aber auch ABC = R. Folglich wäre ABF = ABC; welches, da ABF, ABC in Einer Ebene sind, (1, 9. G.) unmöglich ist. Demnach ist BC nicht in einer andern Ebene, als BD, BE, sondern mit ihnen in Einer Ebene.

Der 6. Satz. Lehrsatz.

Zwey auf derselben Ebene perpendikular stehende gerade Linien, AB, CD, sind parallel.

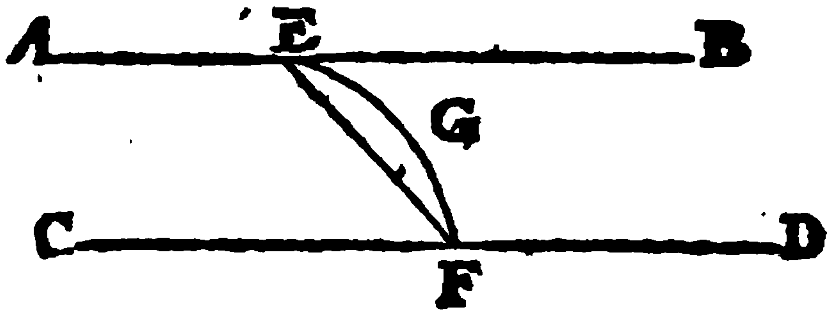


Es seyen B, D, die Punkte, worin die Perpendikel die Ebene treffen. Ziehe BD, errichte in solcher Ebene auf BD in D den Perpendikel DE, mache DE = AB, und ziehe BE, AE, AD.

Da AB auf der Grundebene perpendikular, so sind (11, 3. E.) ABD, ABE, rechte Winkel. Aus eben dem Grunde sind auch CDB, CDE, rechte Winkel. Nun ist AB = DE, und BD = BD. Folglich ist (1, 4. S.) AD = BE. Da hiernach DE = AB, AD = BE, AE = AE: so ist (1, 8. S.) EDA = ABE = R.; also ED auf DA perpendikular; aber auch auf DB, DC. Folglich sind (11, 5. S.) BD, DA, DC, in Einer Ebene, in welcher (11, 2. S.) auch AB ist. Nun sind ABD, BDC, rechte Winkel. Folglich ist (1, 28. S.) AB der CD parallel.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

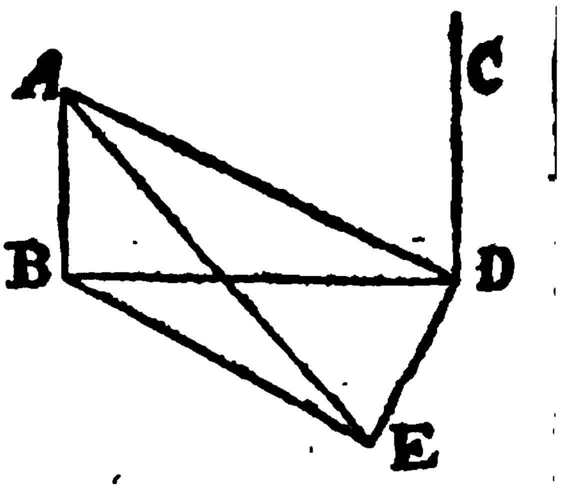
Die gerade Linie, welche beliebige Punkte, E, F, in zwey Parallellinien, AB, CD, verbindet, ist mit den Parallellinien in einerley Ebene.



Wäre dieß nicht, so sey sie über der Ebene der Parallelen, wie EGF. Lege durch sie eine Ebene, welche (11, 3. S.) die Grundebene in einer geraden Linie EF schneidet, die also mit der geraden Linie EGF einen Raum einschließt, welches (1, 12. S.) unmöglich ist. Demnach ist die gerade Linie zwischen den Punkten, E, F, nicht über, sondern in derselben Ebene, in welcher die Parallellinien, AB, CD, sind.

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Ist von zwey Parallellinien, AB, CD, die eine, AB, auf irgend einer Ebene perpendikular: so ist auch die andere, CD, auf derselben Ebene perpendikular.



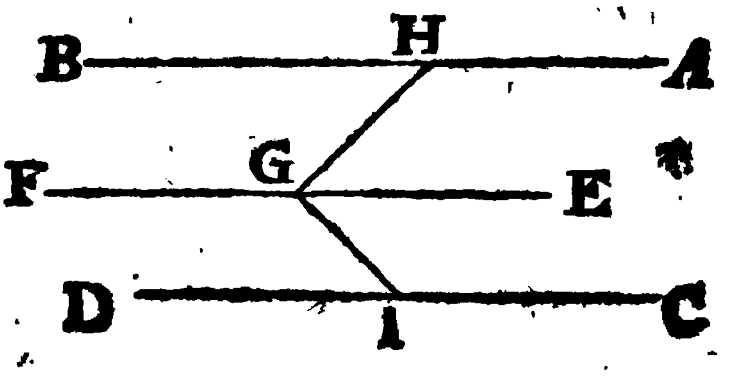
Es seyen B, D, die Punkte, worin die Parallellinien die Ebene treffen. Ziehe BD: so sind (11, 7. S.) AB, BD, DC, in Einer Ebene. Errichte in der Grundebene auf DB in D den Perpendikel DE, mache DE = AB, und ziehe BE, AE, AD.

Da AB auf der Grundebene perpendikular, so ist (11, 3. E.) ABD = ABE = R. Und weil AB, CD, parallel sind, so ist (1, 29. S.) ABD + CDB = 2 R. Nun ist ABD = R, folglich ist auch CDB = R., also CD auf DB perpendikular.

Da ABD = EDB = R., AB = DE, BD = BD: so ist (1, 4. S.) AD = BE. Da hiernach DE = AB, AD = BE, AE = AE: so ist (1, 8. S.) ABE = EDA. Nun ist ABE = R. Folglich ist auch EDA = R., also ED auf DA perpendikular; aber, weil BDE = R., auch auf DB; folglich (11, 4. S.) auf der Ebene durch DB, DA, folglich (11, 3. E.) auch auf DC, welche mit dem Triangel ADB in Einer Ebene ist, weil sie nach Obigem mit AB, BD, in Einer Ebene ist. Demnach ist CD auf DE perpendikular, aber nach Obigem auch auf DB, folglich (11, 4. S.) auf der Ebene durch DE, DB, das ist, auf einerley Ebene mit AB.

Der 9. Satz. Lehrsatz.

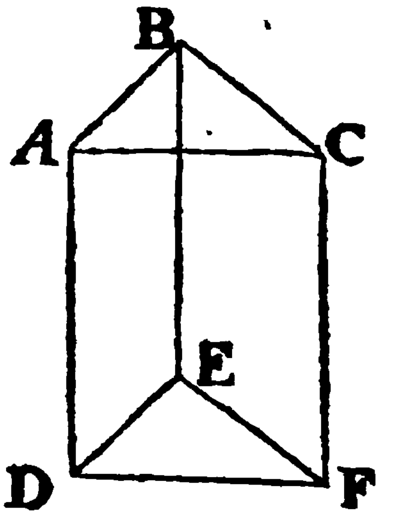
Die geraden Linien, AB, CD, welche einer und derselben geraden Linie, EF, mit der sie nicht in einerley Ebene liegen, parallel sind, sind auch einander parallel.



Nimm in EF willkührlich einen Punkt G, errichte auf EF in G, die Perpendikel, GH in der Ebene durch EF, AB, und GI in der Ebene durch EF, CD. Da hiernach EF auf GH, GI, also (11, 4. S.) auf der Ebene durch GH, GI, perpendikular, und der AB parallel ist: so ist (11. 8. S.) AB auf derselben Ebene perpendikular. Nun ist aus eben den Gründen auch CD auf dieser Ebene perpendikular. Folglich sind (11, 6. S.) AB, CD, parallel.

Der 10. Satz. Lehrsatz.

Zwey in verschiedenen Ebenen liegende Winkel, ABC, DEF, die von parallelen Linien, AB, DE; BC, EF, eingeschlossen werden, sind einander gleich.

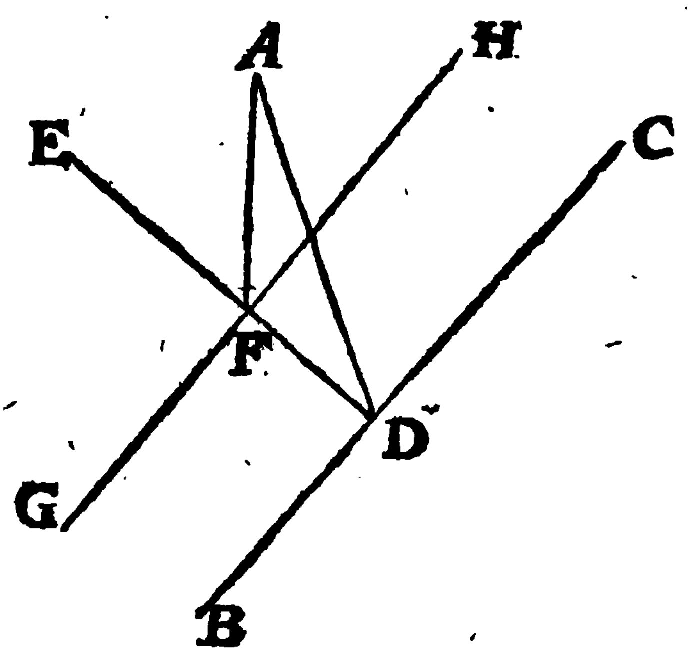


Mache AB = DE, BC = EF, und ziehe AD, CF, BE; AC, DF.

Da AB, DE, gleich und parallel: so sind (1, 33. S.) auch AD, BE, gleich und parallel. Nun sind aus eben den Gründen CF, BE, gleich und parallel. Folglich sind (11, 9. S. und 1, 1. G.) AD, CF, parallel und gleich; folglich (1, 33. S.) auch AC, DF. Da hiernach AC = DF, und nach Obigem AB = DE, BC = EF: so ist (1, 8. S.) ABC = DEF.

Der 11. Satz. Aufgabe.

Auf eine gegebene Ebene von einem über derselben gegebenen Punkte, A, einen Perpendikel zu fällen.



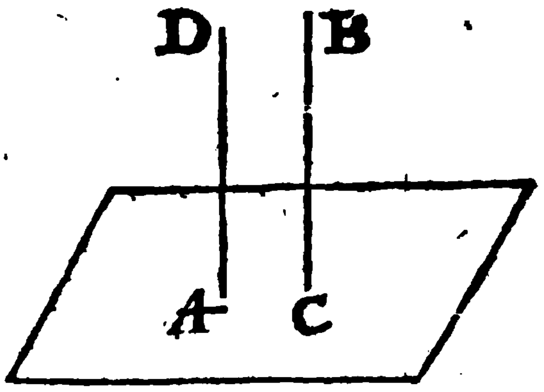
In der gegebenen Ebene ziehe willkührlich eine gerade Linie BC, und fälle (1, 12. S.) auf sie den Perpendikel AD. Ist nun die AD auf der gegebenen Ebene perpendikular, so ist das Verlangte geleistet. Ist sie es aber nicht, so errichte in der gegebenen Ebene (1, 11. S.) auf BC in D den Perpendikel DE, und fälle (1, 12. S.) aus A auf DE den Perpendikel AF: so ist dieser der verlangte.

Denn zieht man (1, 31. S.) durch F die GH der BC parallel: so ist, weil BC auf DE, DA, also (11, 4. S.) auf der Ebene durch DE, DA, perpendikular, (11, 8. S.) auch GH auf dieser Ebene, folglich (11, 3. E.) auch auf FA, welche die GH in F trifft, und in der Ebene durch DE, DA ist. Demnach ist AF auf GH, perpendikular; aber nach Obigem auch auf DE, folglich (11, 4. S.) auf der Ebene durch GH, DE, also auf der gegebenen Ebene.

Der

Der 12. Satz. Aufgabe.

Auf einer gegebenen Ebene aus einem in derselben gegebenen Punkte, A, einen Perpendikel zu errichten.

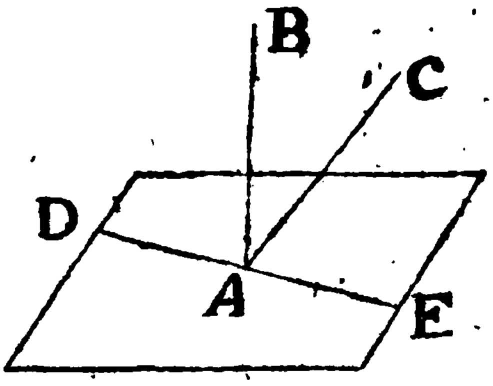


Nimm über der Ebene irgend einen Punkt, B, fälle (11, 11. S.) von ihm auf die Ebene den Perpendikel BC, und ziehe (1, 31. S.) durch A mit BC die AD parallel: so ist diese der verlangte Perpendikel.

Denn da AD, BC, parallel, und CB auf der gegebenen Ebene perpendikular ist: so ist (11, 8. S.) auch AD auf dieser Ebene perpendikular.

Der 13. Satz. Lehrsatz.

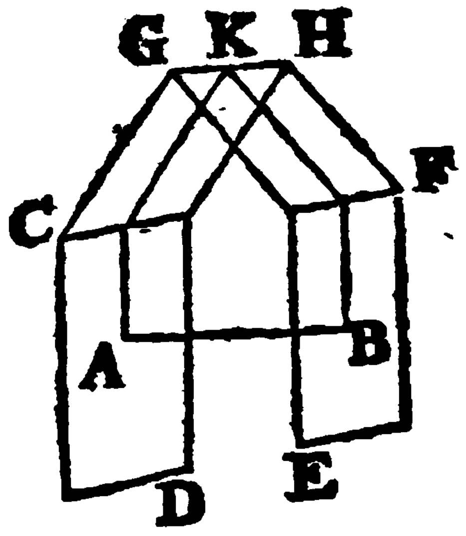
Auf einer Ebene können aus einem Punkte, A, in ihr nicht zwey Perpendikel an einerley Seite errichtet werden.



Es seyen, wenn es möglich, in A die beyden Perpendikel AB, AC, auf der Ebene an einerley Seite errichtet. Legt man nun durch sie eine Ebene: so schneidet diese (11, 3. S.) die Grundebene in einer geraden Linie, DAE, und es sind AB, AC, AE, in Einer Ebene. Nun sind (11, 3. E.) BAE, CAE, rechte Winkel, weil AB, AC, auf der Ebene, in welcher AE ist, perpendikular sind. Folglich wäre BAE = CAE, welches (1, 9. G.) unmöglich ist. Demnach können nicht AB, AC, zugleich auf derselben Ebene in einerley Punkte A perpendikular seyn.

Der 14. Satz. Lehrsatz.

Ebenen, CD, EF, auf welchen dieselbe gerade Linie, AB, perpendikular ist, sind parallel.

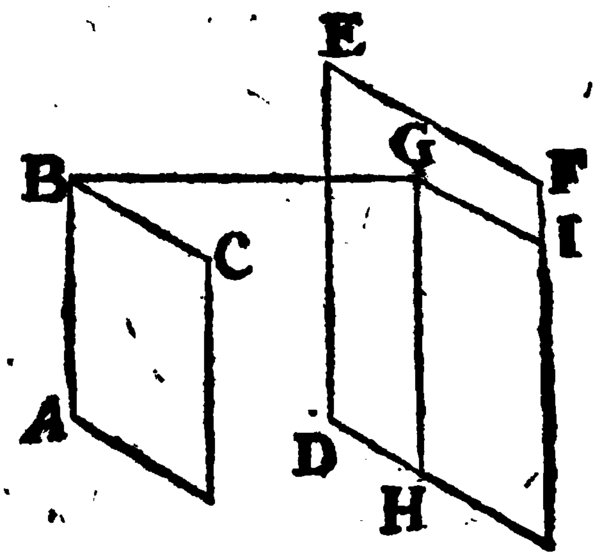


Wären sie nicht parallel, so träfen sie genugsam erweitert zusammen, und schnitten einander (11, 3. S.) in einer geraden Linie GH. Nimm in GH einen willkührlichen Punkt K, und ziehe die geraden Linien KA, KB, in den erweiterten Ebenen CD, EF.

Da AB auf EF, folglich (11, 3 E.) auch auf BK perpendikular: so ist ABK = R. Nun ist aus eben dem Grunde auch BAK = R. Folglich wären im △ KAB zwey Winkel zusammen zwey rechten gleich, welches (1, 17. S.) unmöglich ist. Demnach können die Ebenen CD, EF, nie zusammentreffen, und sind folglich (11, 8. E.) parallel.

Der 15. Satz. Lehrsatz.

Sind die geraden Linien, welche zwey Winkel in verschiedenen Ebenen, ABC, DEF, einschließen, parallel: so sind die Ebenen, AC, DF, in denen diese Winkel liegen, parallel.

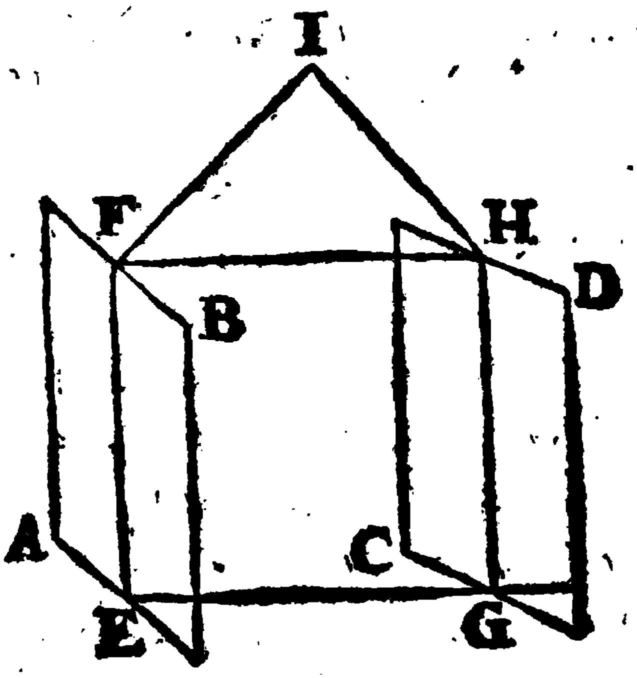


Fälle (11, 11. S.) von B auf die Ebene DF den Perpendikel BG, und ziehe (1, 31. S.) durch G in solcher Ebene mit ED die GH, und mit EF die GI parallel.

Da BG auf der Ebene DF perpendikular, so ist (11, 3. E.) BGH = R. = BGI. Nun ist AB der ED, folglich auch (11, 9. S.) der GH parallel, also (1, 29. S.) BGH + ABG = 2 R. Folglich ist ABG = R, also GB auf BA perpendikular; aber aus eben den Gründen auch auf BC; folglich (11, 4. S.) auf der Ebene AC. Nun ist nach Obigem GB auch auf der Ebene DF perpendikular. Folglich sind (11, 14. S.) die Ebenen AC, DF, parallel.

Der 16. Satz. Lehrsatz.

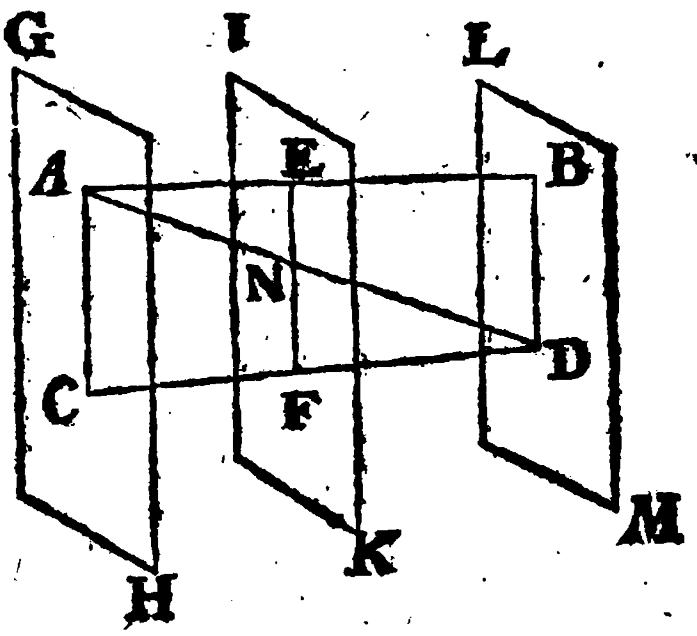
Zweyer parallelen Ebenen, AB, CD, Durchschnitte, EF, GH, mit einer dritten Ebene, EFGH, sind parallel.



Wären EF, GH, nicht parallel, so träfen sie genugsam verlängert, etwa in I, zusammen. Da (11, 1. S.) die gerade Linie EFI, ganz, also auch der Punkt I, in der Ebene AB, und aus denselben Gründen der Punkt I in der Ebene CD ist: so träfen die Ebenen AB, CD, genugsam erweitert zusammen, welches dem Angenommenen widerspricht. Demnach können EF, GH, nicht auf dieser Seite, und aus eben den Gründen auch nicht auf der entgegengesetzten Seite, zusammentreffen, und sind also parallel.

Der 17. Satz. Lehrsatz.

Zwey gerade Linien, AB, CD, werden von parallelen Ebenen, GH, IK, LM, proportionirt geschnitten.

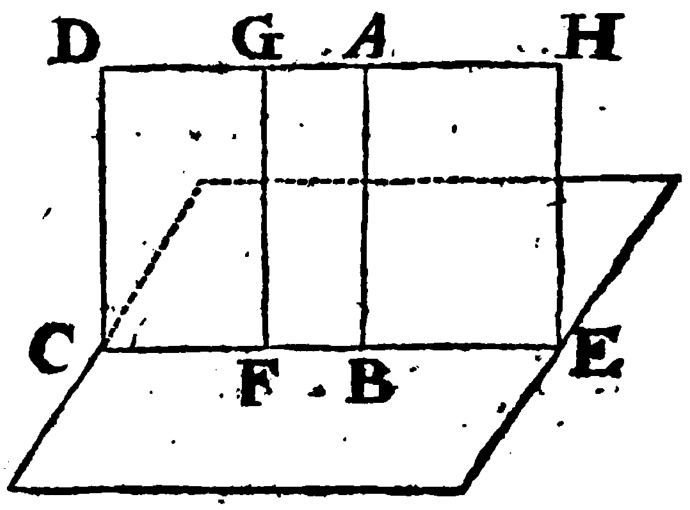


Ziehe AC, BD, DA, von denen die letztere durch N in IK gehet; ziehe EN, NF.

Da (11, 16. S.) der Ebene ENDB, Durchschnitte, EN, BD, mit den parallelen Ebenen IK, LM, parallel sind: so ist (6, 2. S.) AE : EB = AN : ND. Nun ist aus eben den Gründen AN : ND = CF : FD. Folglich ist (5, 11. S.) AE : EB = CF : FD.

Der 18. Satz. Lehrsatz.

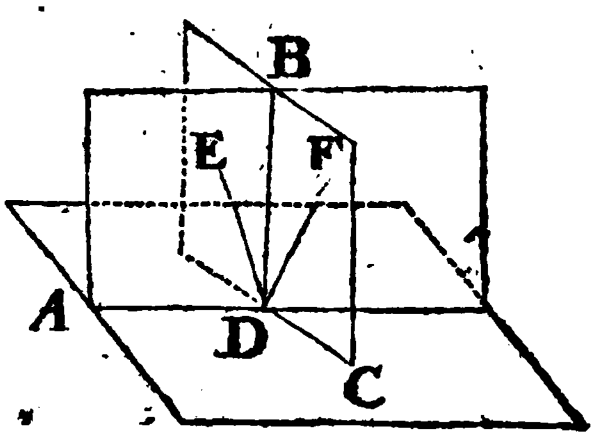
Ist eine gerade Linie, AB, auf irgend einer Ebene perpendikular: so sind alle durch die Linie gelegten Ebenen auf derselben Ebene perpendikular.



Es sey durch AB eine Ebene DE willkührlich gelegt, welche (11, 3. S.) die Grundebene in der geraden Linie EC schneide. Auf EC sey in der Ebene DE irgend ein Perpendikel FG, daß also GFE = R. Nun ist AB auf der Grundebene perpendikular, also (11, 3. E.) auch ABE = R. Folglich sind (1, 28. S.) AB, FG, parallel. Folglich ist (11, 8. S.) auch FG, folglich (11, 4. E.) auch die (durch AB gelegte) Ebene DE, auf der Grundebene perpendikular.

Der 19. Satz. Lehrsatz.

Sind zwey einander schneidende Ebenen, AB, BC, auf irgend einer Ebene perpendikular: so ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt, BD, auf derselben Ebene auch perpendikular.

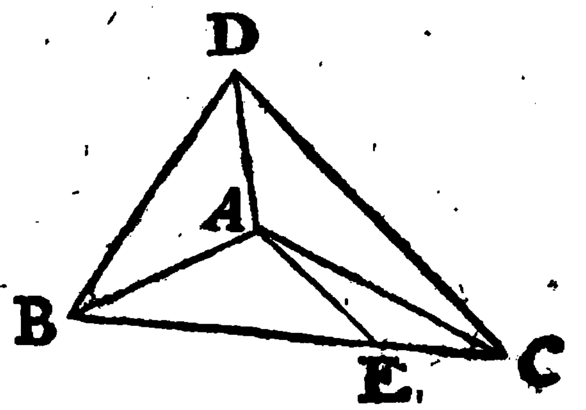


Wäre DB nicht auf der Grundebene, also auch nicht auf DA, DC, perpendikular: so sey auf DA in der Ebene AB die DE, und auf DC in der Ebene BC die DF perpendikular. Demnach wären (11, 4. E.) DE, DF, auf der Grundebene perpendikular, welches (11, 13. S.) unmöglich ist. Folglich kann auf der Grundebene keine andere Linie, als DB, perpendikular seyn.

Der

Der 20. Satz. Lehrsatz.

Von drey ebenen Winkeln, BAC, CAD, DAB, welche einen körperlichen Winkel, A, einschließen, sind jede zwey zusammen größer, als der dritte.

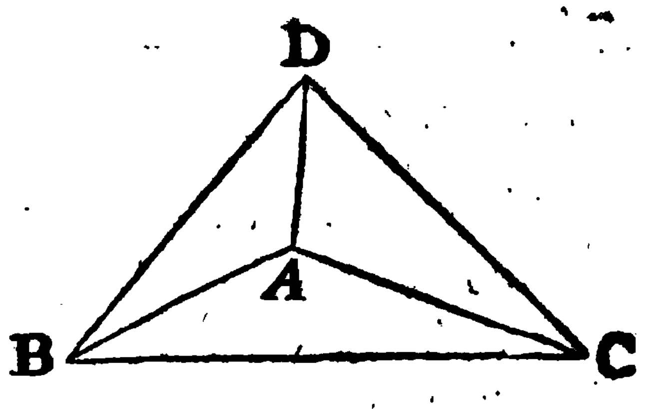


Sind diese drey Winkel gleich: so sind offenbar jede zwey zusammen größer, als der dritte. Sind sie aber ungleich: so sey BAC > BAD. Mache daher (1, 23. S.) BAE = BAD, und AE = AD. Ziehe durch E die BEC, welche AB, AC, in B, C, schneidet, und ziehe DB, DC.

Da hiernach BAE = BAD, AE = AD, AB = AB: so ist (1, 4. S.) BE = BD. Nun ist (1, 20. S.) BD + DC > BE + EC. Folglich ist (1, 5. S.) DC > EC; folglich, weil AD = AE, und AC = AC, (1, 25. S.) DAC > EAC; folglich, weil DAB = BAE, (1, 4. S.) DAC + DAB > BAC.

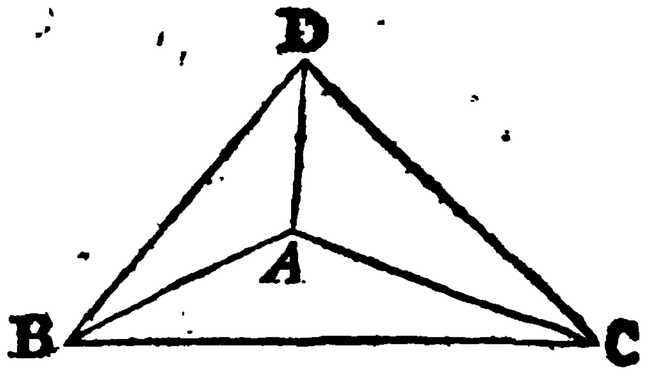
Der 21. Satz. Lehrsatz.

Jeder körperliche Winkel, A, wird von ebenen Winkeln, BAC, CAD, DAB, welche zusammen kleiner als vier rechte sind, eingeschlossen.



Nimm auf AB, AC, AD, beliebige Punkte, B, C, D, und ziehe BC, CD, DB.

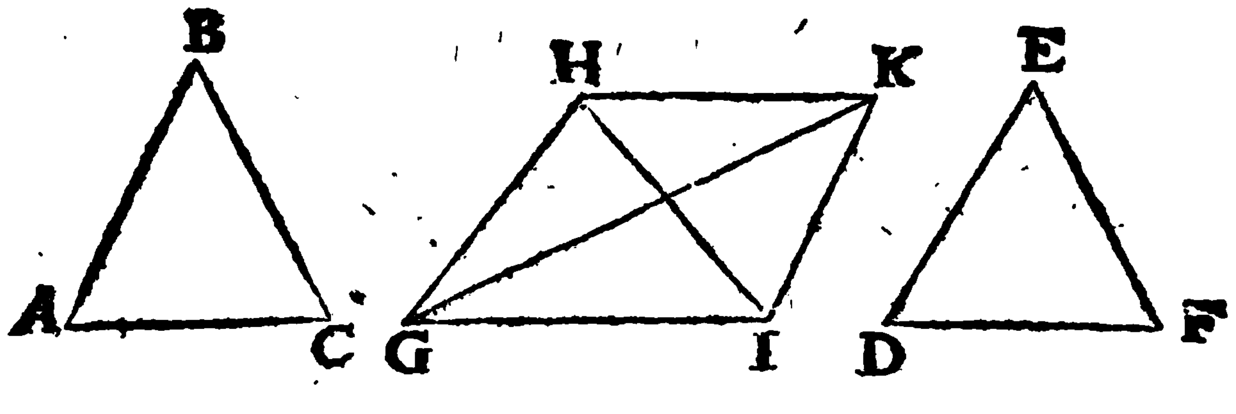
Da der körperliche Winkel, B, von den drey ebenen Winkeln, CBA, ABD, DBC, eingeschlossen wird: so ist (10, 20. S.) CBA + ABD > DBC. Aus eben den Gründen ist, beym körperlichen Winkel C, BCA + ACD > DCB, und beym körperlichen Winkel D, CDA + ADB > BDC.



Folglich ist CBA + ABD + BCA + ACD + CDA + ADB > DBC + DCB + BDC. Nun sind (1, 32. S.) die letzt genannten drey Winkel = 2 R. Folglich sind die erst genannten sechs Winkel > 2 R. Nun sind (1, 32. S.) diese sechs Winkel nebst BAC + CAD + DAB zusammen = 6 R. Folglich ist BAC + CAD + DAB < 4 R. Auf ähnliche Art wird obiger Satz bewiesen, wenn der körperliche Winkel A auch von mehr als drey ebenen Winkeln eingeschlossen ist.

Der 22. Satz. Lehrsatz.

Sind von drey ebenen Winkeln, ABC, DEF, GHI, jede zwey zusammen größer, als der dritte, und die diese drey Winkel einschließenden geraden Linien alle einander gleich gemacht; so läßt sich aus den drey geraden Linien, AC, DF, GI, welche die Endpunkte obgedachter gleichen Linien verbinden, ein Triangel verzeichnen.



Hier ist (1, 22. S.) bloß zu beweisen, daß jede zwey dieser Linien, AC, DF, GI, zusammen größer, als die dritte sind.

Sind nun die drey ebenen Winkel ABC, DEF, GHI, einander gleich: so sind (1, 4. S.) auch die Linien, AC, DF, GI, einander gleich; folglich offenbar jede zwey zusammen größer, als die dritte.

Sind

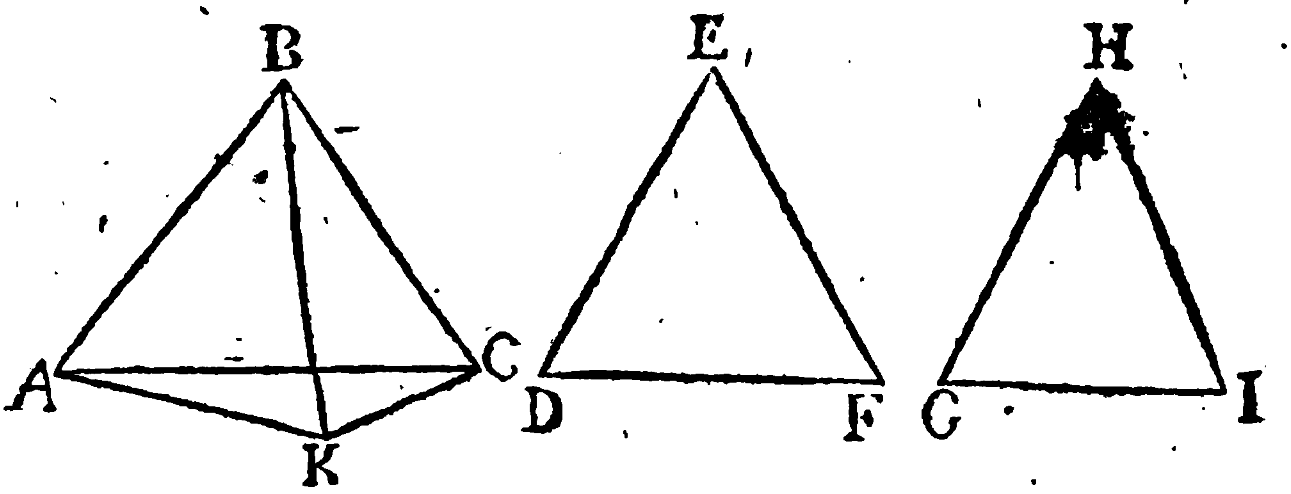
Sind sie aber ungleich: so lege (1, 23. S.) an HI in H einen Winkel IHK = ABC, mache HK = HI, und ziehe GK, KI.

Da hiernach ABC = IHK, und AB = HI = BC = HK: so ist (1, 4. S.) AC = IK.

Da ABC + GHI, das ist GHK > DEF, und GH = DE = HK = EF: so ist (1, 24. S.) GK > DF. Nun ist (1, 20. S.) GI + IK, das ist, GI + AC > GK. Folglich ist um so mehr GI + AC > DF.

Ein anderer Beweis.

Es sey von den drey nicht gleichen ebenen Winkeln der eine ABC, nicht kleiner, als jeder der übrigen DEF, GHI: so ist (1, 24. S.) die Seite AC nicht kleiner, als jede der übrigen DF, GI, folglich offenbar AC + DF > GI, und AC + GI > DF; also nur noch zu beweisen, daß auch DF + GI > AC.



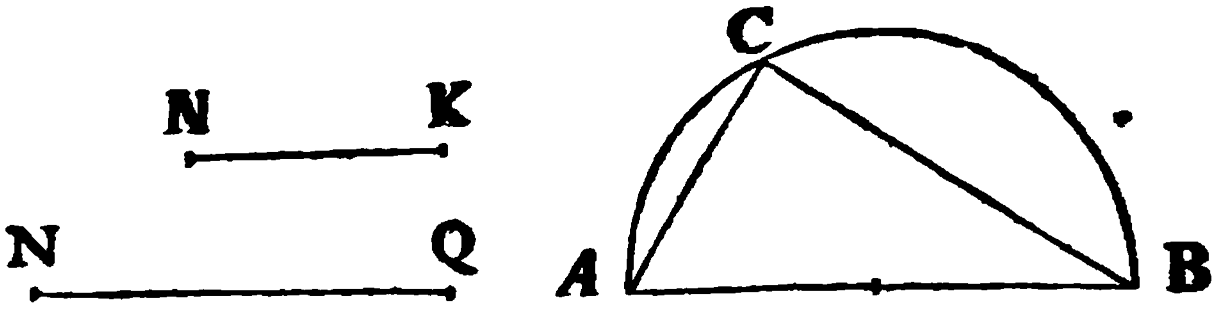
Trage (1, 23. S.) an AB in B den Winkel ABK = GHI, mache BK = HI, und ziehe AK, KC.

Da hiernach ABK = GHI, und AB = GH = BK = HI: so ist (1, 4. S.) AK = GI.

Da E + H > ABC, aber H = ABK: so ist E > CBK, aber CB = EF = BK = ED, folglich (1, 24. S.) DF > CK. Nun ist nach Obigem GI = AK. Folglich ist DF + GI > CK + AK, aber (1, 20. S.) CK + AK > AC, folglich noch viel mehr DF + GI > AC.

Lehnsatz

Aus zwey gegebenen ungleichen geraden Linien, AB, KN, von denen AB > KN, eine gerade Linie, NQ, zu finden, um deren Quadrat das Quadrat der AB das Quadrat der KN übertrifft.

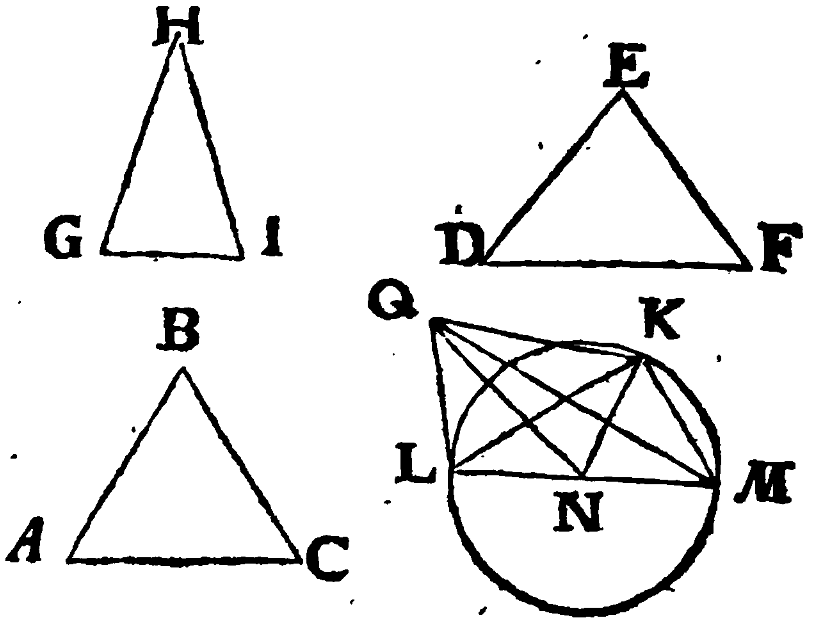


Beschreibe über AB einen Halbkreis, trage in denselben AC = NK, und ziehe CB: so ist NQ = CB die verlangte Linie.

Denn da (3, 31. S.) ACB = R., so ist (1, 47. S.) □ AB = □ AC + □ CB = □ NK + □ NQ, weil AC = NK, und CB = NQ ist. Demnach ist □ AB > □ NK um □ NQ.

Der 23. Satz. Aufgabe.

Drey gegebene ebene Winkel, ABC, DEF, GHI, die zusammen kleiner als vier rechte, und von denen jede zwey zusammen größer als der dritte sind, zu einem körperlichen Winkel zusammen zu stellen.



Mache AB, BC, ED, EF, HG, HI, einander gleich, und ziehe AC, DF, GI: so läßt sich aus den letztern drey geraden Linien (11, 22. S.) ein Triangel verzeichnen. Dieser

sey

sey △ KLM, so daß KL = AC, LM = DF, MK = GI ist. Beschreibe (4, 5. S.) um den △ KLM einen Kreis, so fällt dessen Mittelpunkt N entweder innerhalb, oder außerhalb des △ KLM, oder in eine seiner Seiten. Ziehet man nun NK, NL, NM: so ist **theils** zu beweisen, daß AB > NK, **theils** zu zeigen, wie der verlangte körperliche Winkel über △ KLM zu errichten sey.

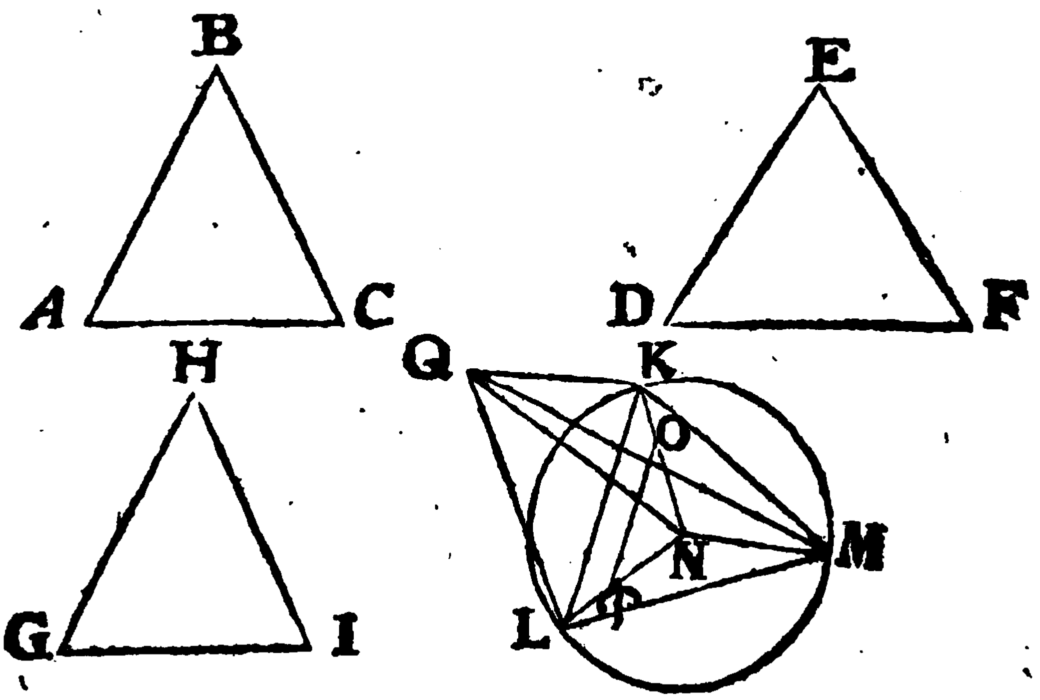
Erster Theil.

Beweis, daß AB > NK ist, weil AB weder eben so groß, noch kleiner als NK seyn kann.

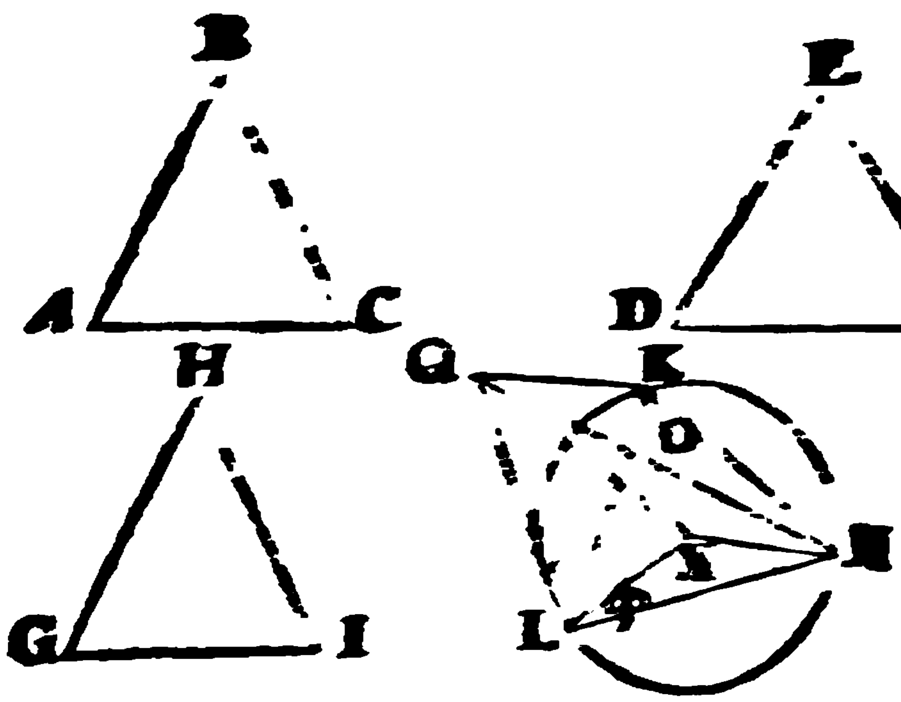
Erstlich. Wenn des Kreises Mittelpunkt N in eine der Seiten LM des △ KLM fällt.

Wäre hier AB = NK, so wäre, weil AB = DE = EF, und NK = LN = NM ist, DE + EF = LM. Nun ist LM = DF. Folglich wäre DE + EF = DF, welches (1, 20. S.) unmöglich ist. Demnach ist nicht AB = NK. Wäre AB < NK, so gäben obige Schlüsse DE + EF < DF, welches (1, 20. S.) noch mehr unmöglich ist. Demnach ist nicht AB < NK.

Zweytens. Wenn N innerhalb des △ KLM fällt.



Wäre hier AB = NK, so wäre auch BC = NL, folglich, weil auch AC = KL ist, (1, 8. S.) ABC = KNL. Nun



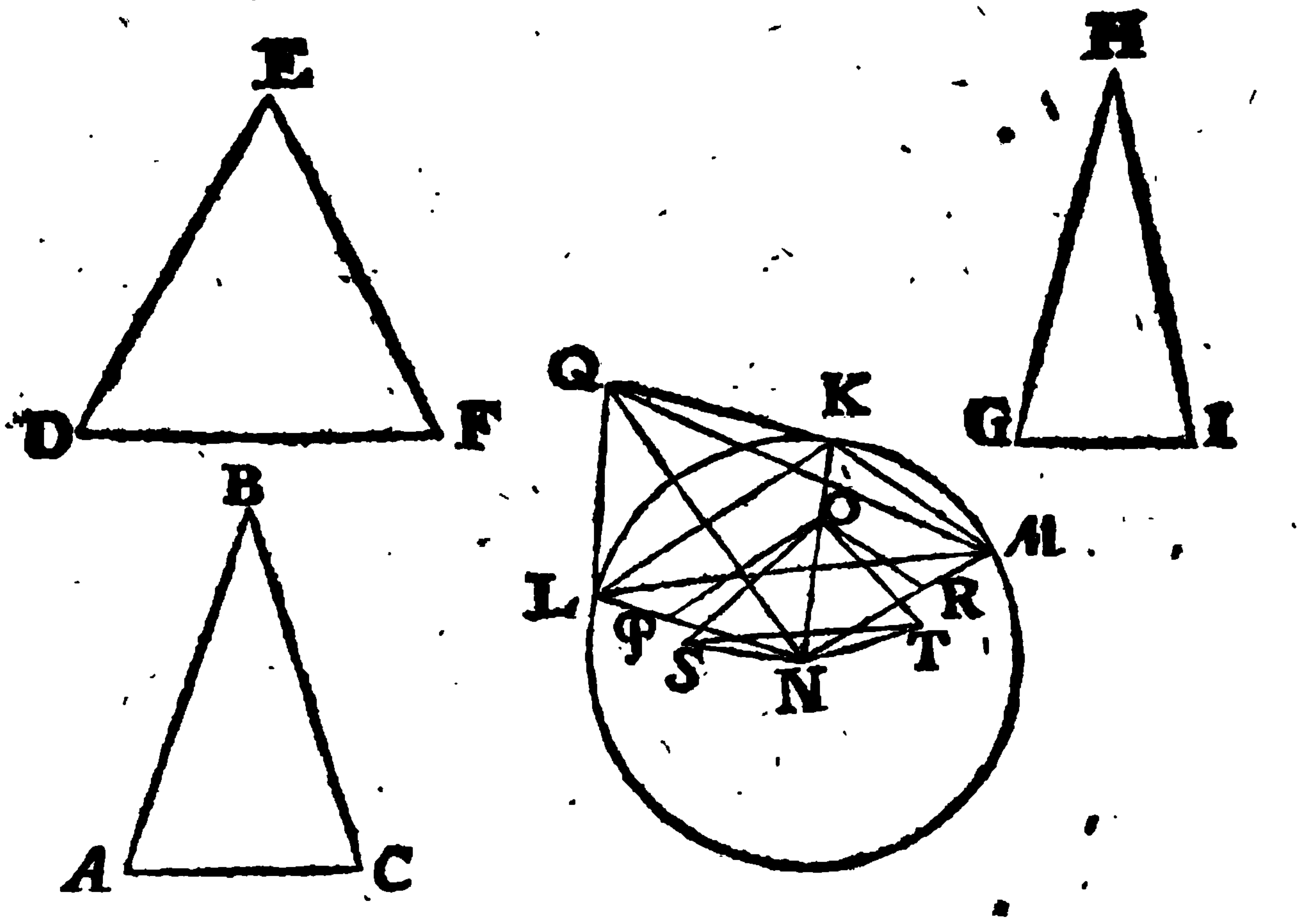
Nun wäre aus eben den Gründen $DEF = LNM$, und $GHI = MNK$. Folglich wäre $ABC + DEF + GHI = KNL + LNM + MNK$; aber die drey letztern Winkel (1, 15. Zus.) sind vier rechten gleich, folglich auch die drey ersten Winkel, welches der Voraussetzung, daß sie < 4 R. sind, widerspricht. Demnach ist nicht $AB = NK$.

Wäre $AB < NK$, so sey $NO = AB$, $NP = BC$, und OP gezogen. Da $AB = BC$, und $NK = NL$; so ist auch $OK = PL$, folglich (6, 2. S.) OP der KL parallel, folglich (1, 29. S.) die $\triangle\triangle$ NOP, NKL, gleichwinklig, folglich (6, 4. S. und 5, 16. S.) $NK : NO = KL : OP$, folglich, weil $NK > NO$, auch $KL > OP$; aber $KL = AC$, also $AC > OP$. Nun war $AB = ON$, und $BC = NP$. Folglich ist (1, 25. S.) $ABC > ONP$. Nun ist eben so erweislich, daß $DEF > LNM$, und $GHI > MNK$. Folglich wären die drey Winkel ABC, DEF, GHI, zusammen größer als die drey Winkel um den Punkt N, also größer, als vier rechte, welches ebenfalls der Voraussetzung widerspricht. Demnach ist nicht $AB < NK$.

Drittens. Wenn N außerhalb des $\triangle KLM$ fällt.

Wäre hier $AB = NK = NL = BC$, so wäre, weil auch $AC = LK$ ist, (1, 8. S.) $ABC = LNK$; aber aus gleichen Gründen auch $GHI = KNM$, folglich $LNM =$

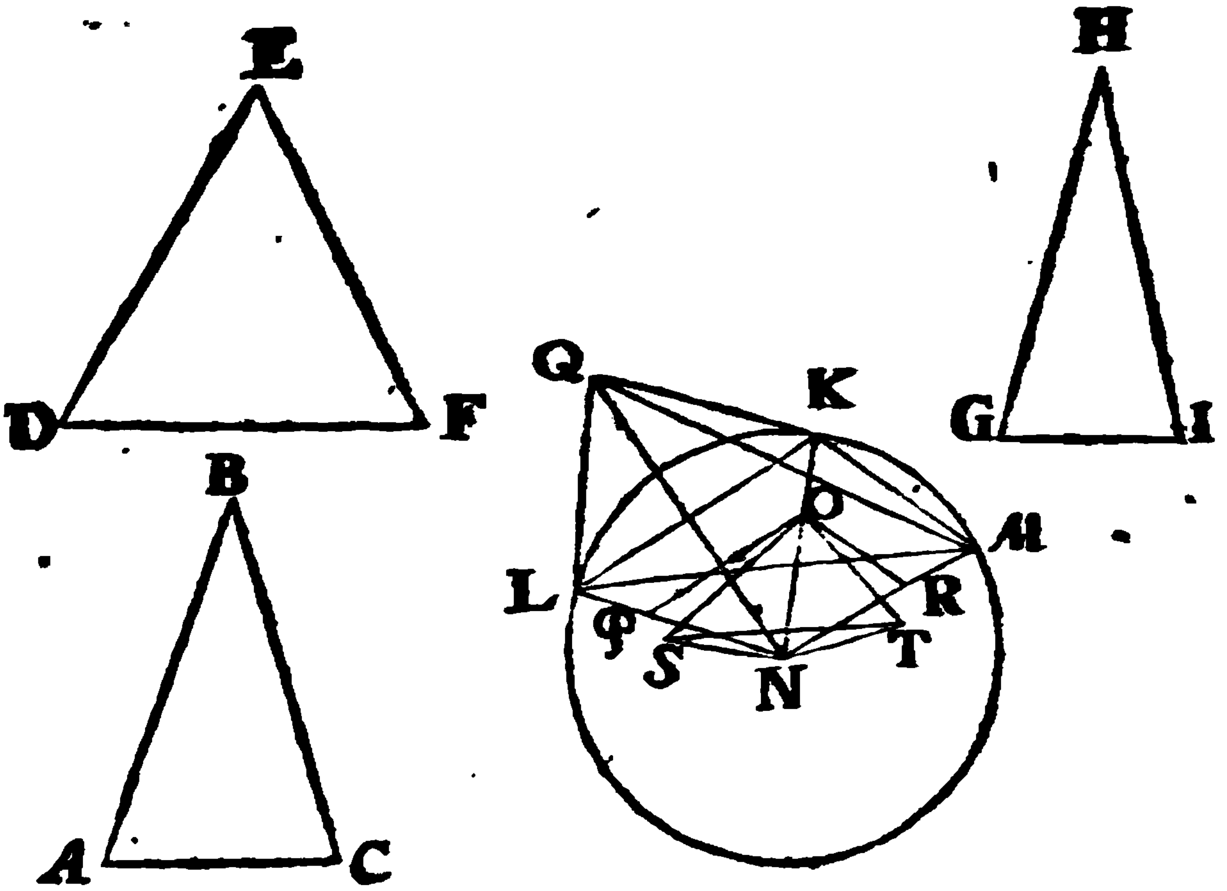
ABC



ABC + GHI. Nun ist ABC + GHI > DEF. Folglich LNM > DEF. Da aber auch DE = LN = EF = NM, und DF = LM: so ist (1, 8. S.) LNM = DEF; welches dem Vorigen widerspricht. Demnach ist nicht AB = NK.

Wäre AB < NK, so sey NO = AB, NP = BC, und OP gezogen, da denn, wie beym zweyten Falle, erweislich ist, daß ABC > ONP. Nun sey NR = NO = NP, und OR gezogen, so ist aus eben den Gründen GHI > ONR. Setze an NK den Winkel KNS = ABC, und KNT = GHI, mache NS, NT, jede der NO gleich, und ziehe OS, OT, ST. Da AB = ON = BC = NS, und ABC = ONS: so ist (1, 4. S.) AC, das ist KL, = OS. Aus eben den Gründen ist auch KM = OT = GI. Da hiernach LK = OS, KM = OT, aber POR, das ist LKM, > SOT: so ist (1, 24. S.) LM, das ist DF, > ST, folglich (1, 25. S.) DEF > SNT. Nun war SNT = ABC + GHI. Folglich ist DEF > ABC + GHI, welches der Voraussetzung offenbar widerspricht. Demnach ist nicht AB < NK.

Zwey=



Zweyter Theil.

Errichtung des verlangten körperlichen Winkels.

Da nach dem obigen Beweise in allen Fällen AB > KN ist: so errichte (11, 12. S.) auf der Ebene des Kreises KLM in N den Perpendikel NQ, und mache denselben so groß, daß (11, 22. Lehns.) □ AB = □ KN + □ NQ ist, und ziehe QK, QL, QM: so ist bey Q der verlangte körperliche Winkel.

Denn NQ ist auf der Ebene KLM, folglich (11, 3. E.) auf den drey Linien NL, NK, NM, perpendikular. Da hiernach bey N rechte Winkel sind, und KN = NL, QN = QN ist: so ist (1, 4. S.) KQ = QL, aber aus eben den Gründen QM = QK, folglich QK = QL = QM. Da □ AB = □ KN + □ NQ, und, weil QNK = R., auch □ QK = □ KN + □ NQ: so ist □ AB = □ QK, also AB = QK = QL = QM.

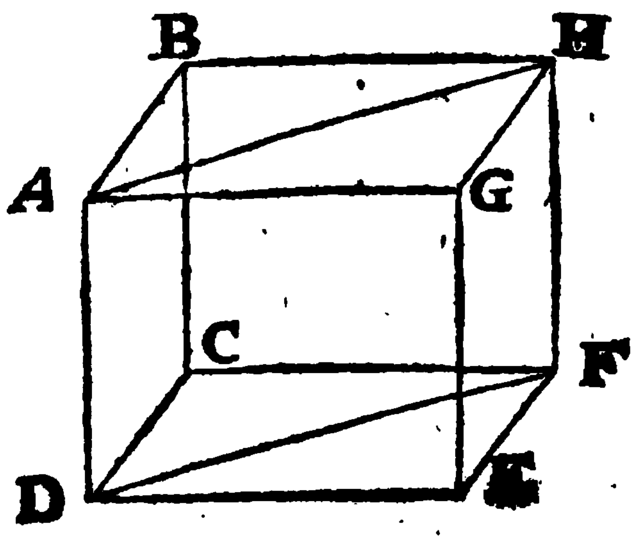
Da hiernach QK = AB, QL = BC, KL = AC: so ist (1, 8. S.) KQL = ABC. Nun ist aus eben den Gründen LQM = DEF, und MQK = GHI. Folglich ist bey Q der verlangte körperliche Winkel, welchen die den gegebenen

nen ebenen Winkeln ABC, DEF, GHI, gleichen Winkel KQL, LQM, MQK, begränzen.

Der 24. Satz. Lehrsatz.

Wird ein Körper, CDGH, von parallelen Ebenen begränzt: so sind diese Parallelogramme, und jede zwey gegenüber liegende, AC, GF; BG, CE; FB, AE, einander gleich. (Ein solcher Körper heiße Parallelepipedon.)

Erster Theil.



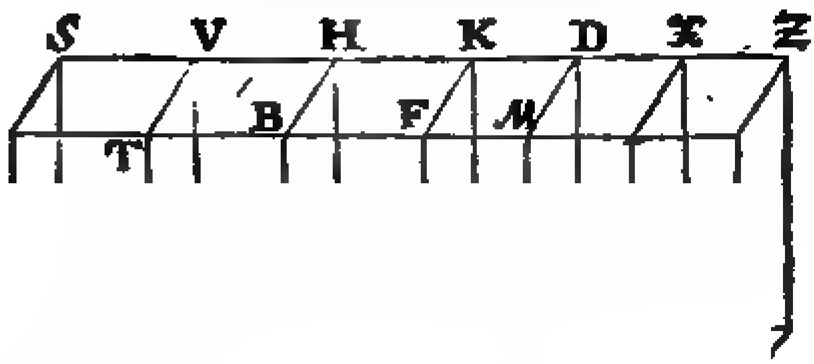
Da BG, CE, parallel, und von AC geschnitten werden: so sind (11, 16. S.) AB, DC, parallel. Nun sind auch BF, AE, parallel und von AC geschnitten, also (11, 16. S.) AD, BC, parallel. Folglich ist AC ein Parallelogramm. Auf eben die Art wird bewiesen, daß auch GF, ferner BG, CE, und FB, AE, Parallelogramme sind.

Zweyter Theil.

Ziehe in BG, CE, die Diagonalen AH, DF. Da AB der DC, und BH der CF parallel: so ist (11, 10. S.) ABH = DCF. Nun ist (1, 34. S.) AB = DC, und BH = CF. Folglich ist (1, 4. S.) △ ABH = △ DCF, also auch 2 △ ABH = 2 △ DCF, folglich (1, 34. S.) BG = CE. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß AC = GF, und FB = AE ist.

Der 25. Satz. Lehrsatz.

Wird ein Parallelepipedon, ABCD, von einer Ebene, EF, den einander gegenüber liegenden Ebenen, AH, DL, parallel geschnitten: so verhalten sich die abgeschnittenen Körper, AK, ID, wie ihre Grundflächen, AE, IC.



Verlängere AL auf beyden Seiten; nimm beliebig viele Abschnitte, LP, PQ, der LI, und wieder beliebig viele Abschnitte, AN, NO, der AI, gleich; vollende die Parallelogramme AR, RO, LY, YQ, desgleichen die Körper NH, OV, LX, PZ.

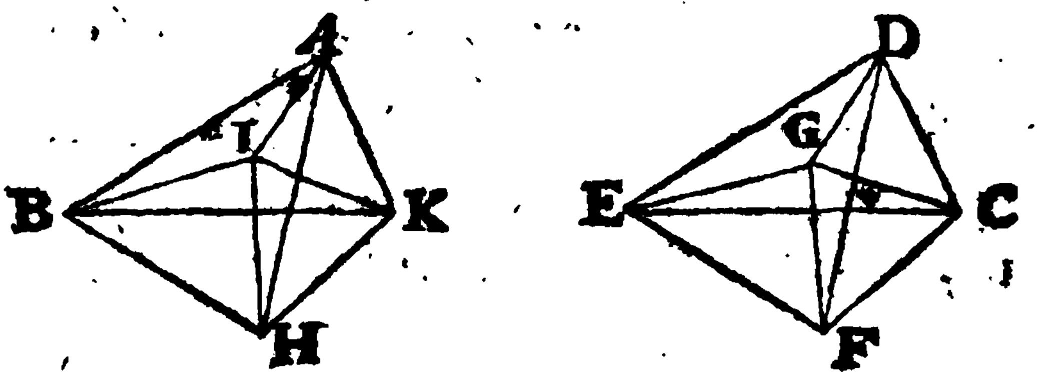
Da IA = AN = NO: so ist (1, 36. S.) EA = AR = RO, und EH = HR = RS, desgleichen (11, 24. S.) AH = NV = OS. Nun sind auch in den drey Körpern KA, AV, VO, (11, 24. S.) obigen Ebenen die gegenüber liegenden gleich. Folglich sind (11, 10. E.) gedachte drey Körper gleich. Nun sind aus eben den Gründen auch die drey Körper ID, DP, PZ, gleich. Folglich ist OK von AK eben so vielfach, als OE von AE; und KQ von ID eben so vielfach, als EQ von IC. Nun ist, wenn OE ≷ EQ, auch OK ≷ KQ. Folglich ist (5, 5. E.) AK : ID = AE : IC.

Der 26. Satz. Aufgabe.

An eine gegebene gerade Linie, AB, in einem ihrer Punkte, A, einen dem gegebenen, D, gleichen körperlichen Winkel zu stellen.

Es werde der gegebene körperliche Winkel D, von den ebenen Winkeln EDC, EDF, FDC, begränzt. Fälle von einem beliebigen Punkte F, der Linie DF, auf die Ebene durch ED, DC, den Perpendikel FG, der die Ebene in G treffe

treffe, und ziehe DG. Trage (1, 23. S.) an AB in A den Winkel BAK = EDC, und BAI = EDG; mache AI = DG; errichte (11, 12. S.) auf der Ebene durch BAK in I den Perpendikel IH, mache IH = GF, und ziehe AH: so ist der körperliche Winkel bey A dem gegebenen bey D gleich.



Denn macht man AB = DE, und zieht HB, IB, FE, GE: so sind, weil FG auf der Grundebene perpendikular, (11, 3. E.) FGD, FGE, rechte Winkel, und aus eben den Gründen auch HIA, HIB.

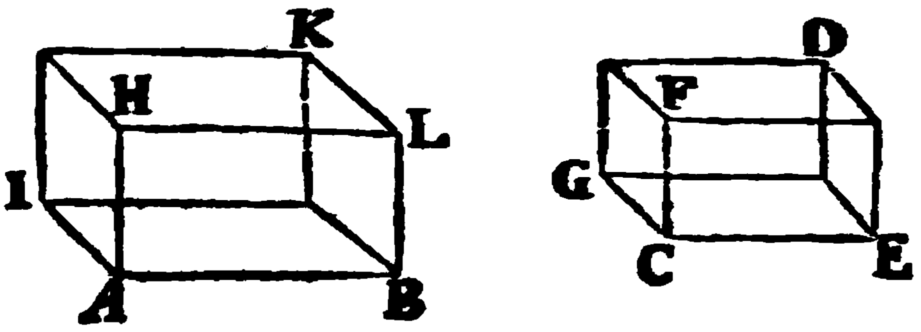
Da AI = DG, AB = DE, und BAI = EDG: so ist (1, 4. S) BI = EG. Nun ist auch IH = GF, und es sind bey I, G, rechte Winkel. Folglich ist (1, 4. S.) BH = EF. Ferner ist AI = DG, IH = GF, auch sind bey I, G, rechte Winkel, also (1, 4. S.) AH = DF. Nun war auch AB = DE. Folglich (1, 8. S.) BAH = EDF.

Mache AK = DC, und ziehe IK, HK, GC, FC. Da BAK = EDC, und BAI = EDG: so ist IAK = GDC. Nun ist AI = DG, und AK = DC. Folglich ist (1, 4. S.) IK = GC. Nun ist IH = GF, und es sind bey I, G, rechte Winkel. Folglich (1, 4. S.) HK = FC. Nun war auch HA = FD, und AK = DC. Folglich ist (1, 4. S.) HAK = FDC.

Demnach ist BAH = EDF, HAK = FDC, und nach Obigem BAK = EDC. Folglich ist der körperliche Winkel bey A, welchen die den ebenen Winkeln, EDF, FDC, EDC, gleichen Winkel BAH, HAK, BAK, begränzen, dem gegebenen körperlichen Winkel bey D gleich.

Der 27. Satz. Aufgabe.

Von einer gegebenen geraden Linie, AB, ein Parallelepipedon zu beschreiben, das dem gegebenen, CD, ähnlich ist, und mit demselben eine ähnliche Lage hat.



Stelle (11, 26. S.) an AB, in A, einen körperlichen Winkel, welcher dem bey C gleich ist, und von den ebenen Winkeln BAH = ECF, HAI = FCG, und IAB = GCE begränzt wird. Mache (6, 12. S.) EC:CG = BA:AI, auch CG:CF = IA:AH, daß also (5, 22. S.) **aus dem Gleichen** ist EC:CF = BA:AH. Vollende das Parallelogramm BH, und das Parallelepipedon AK: so ist dieses das verlangte.

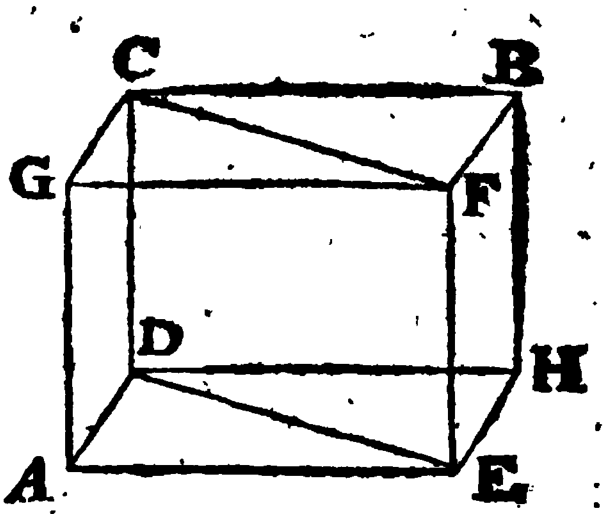
Denn da EC:CG = BA:AI, und ECG = BAI: so ist (6, 4. S.) BI ∾ EG; aber aus eben den Gründen IH ∾ GF, und HB ∾ FE. Demnach sind drey Ebenen des Körpers AK dreyen gleichliegenden Ebenen des Körpers CD ähnlich. Nun sind (11, 24. S.) in beyden Körpern den genannten Ebenen eines jeden die denselben gegenüber liegenden Ebenen gleich und ähnlich. Folglich ist (11, 9. E.) AK ∾ CD.

Der 28. Satz. Lehrsatz.

Jedes Parallelepipedon, AB, wird von einer Ebene, CDEF, die zwey gegenüber liegende Ebenen, GB, AH, nach deren Diagonalen, CF, DE, schneidet, halbirt.

Da (1, 34. S.) △ CGF = △ CBF, auch △ DAE = △ DHE, desgleichen (11, 24. S.) CA = BE, und GE = CH: so ist (11, 10. E.) das von den Triangeln CGF, EDA,

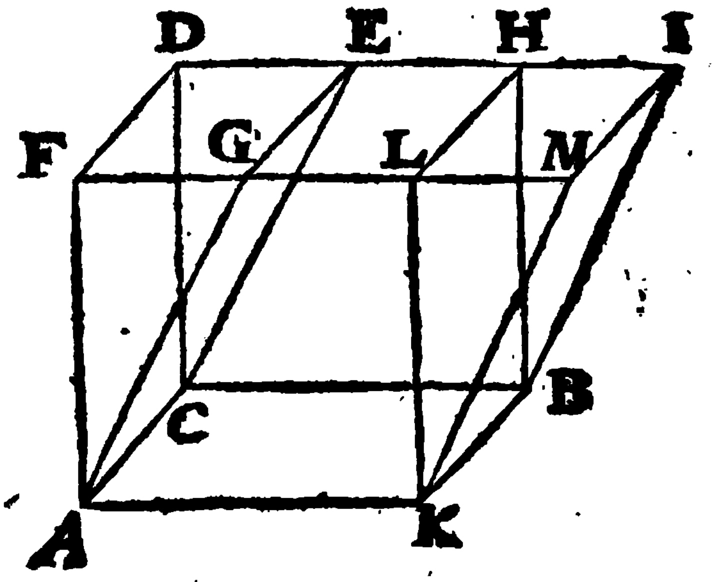
EDA, und den Parallelogrammen GE, AC, CE, begränzte Prisma CGFEDA, dem von den Triangeln FCB, HED, und den Parallelogrammen CH, BE, CE, begränzten Prisma FCBHED, gleich; folglich das Parallelepipedon AB von der Ebene CDEF halbirt.



Der 29. Satz. Lehrsatz.

Parallelepipeda, AH, HI, von gleicher Höhe und auf einerley Grundfläche, AB, deren auf der Grundfläche stehende Seitenlinien, AF, AG, KL, LM, und CD, CE, BH, BI, sich in einerley geraden Linien, FM, DI, endigen, sind einander gleich.

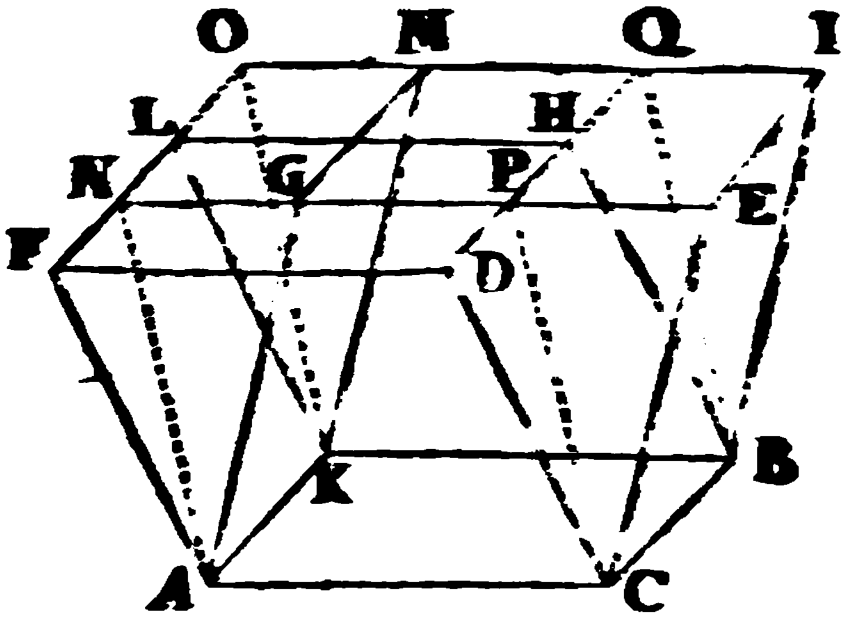
Da CH, CI, Parallelogramme sind: so ist (1, 34. S.) CB = DH = EI; folglich, wenn man EH wegnimmt, DE = HI, folglich (1, 8. S.) △DEC = △HIB, und (1, 36. S.) DG = HM. Nun ist aus eben den Gründen △AFG = △KLM, aber auch CF = BL, und CG = BM. Folglich (11, 10. E.) Prisma EFAC = Prisma ILKB; folglich, wenn zu beyden der Körper ABHG hinzukommt, AH = AI.



Der 30. Satz. Lehrsatz.

Parallelepipeda, ABHF, ABIG, von gleicher Höhe und auf einerley Grundfläche, AB, deren auf der Grundfläche stehende Seitenlinien, AF, AG, CD, CE, und KL, KM, BH, BI, sich nicht in einerley geraden Linien endigen, sind einander gleich.

Verlängere EG, IM, FL, DH, bis sie in N, O, Q, zusammentreffen, und ziehe NA, OK, PC, QB: so entsteht ein drittes Parallelepipedon ABQN, das mit oben genannten beyden von gleicher Höhe und auf einerley Grundfläche ist.



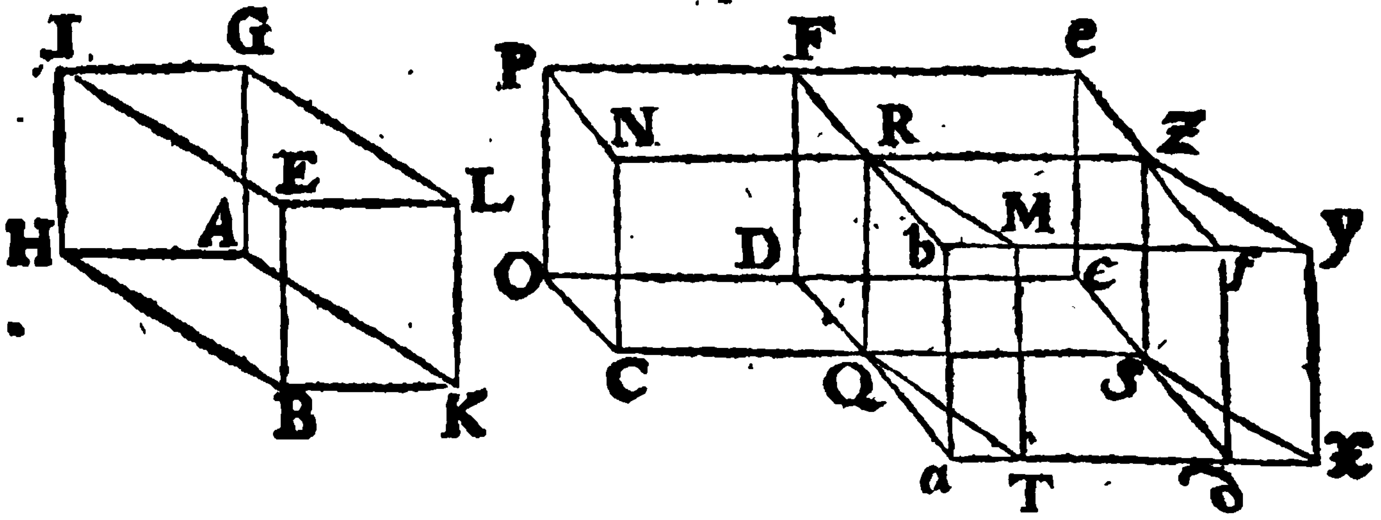
Nun endigen sich die Seitenlinien des dritten und ersten in einerley geraden Linien FO, DQ, und die Seitenlinien des dritten und zweyten in einerley geraden Linien, NE, OI. Folglich ist (11, 29. S.) ABHF = ABQN, und ABQN = ABIG; folglich ABHF = ABIG.

Der 31. Satz. Lehrsatz.

Parallelepipeda, ABEG, CDFN, von gleicher Höhe und auf gleichen Grundflächen, AB, CD, sind einander gleich.

Erster Fall.

Die auf den Grundflächen stehenden Seitenlinien, AG, HI, BE, KL; OP, DF, CN, QR, sind auf denselben perpendikular. Nun sind die Winkel AKB, CQD, entweder gleich oder ungleich.



Erstlich. Sind diese Winkel ungleich, etwa AKB < CQD; so verlängere CQ nach S, trage (1, 23. S.) an QS in in Q den Winkel SQT = AKB, mache QS = AK, QT = KB; vollende das Parallelogramm TS, und das Parallelepipedon TSZM.

Da hiernach QS = AK, QT = KB, und SQT = AKB: so sind die Parallelogramme TS, HK, gleich und ähnlich. Da QS = AK, QR = KL, und diese Linien rechte Winkel einschließen; so sind die Parallelogramme QZ, AL, gleich und ähnlich. Aus gleichen Gründen sind die Parallelogramme RT, KE, gleich und ähnlich. Demnach sind drey Parallelogramme des Körpers ZT drey Parallelogrammen des Körpers AE gleich und ähnlich, folglich (11. 24. S.) auch die diesen drey gegenüber stehende; folglich (11, 10. E.) ZT = AE.

Verlängere DQ, XT, bis sie in a zusammentreffen, ziehe durch S der Da die Sd parallel; verlängere OD, dS, bis sie in c zusammentreffen, und vollende die Körper Za, Qe.

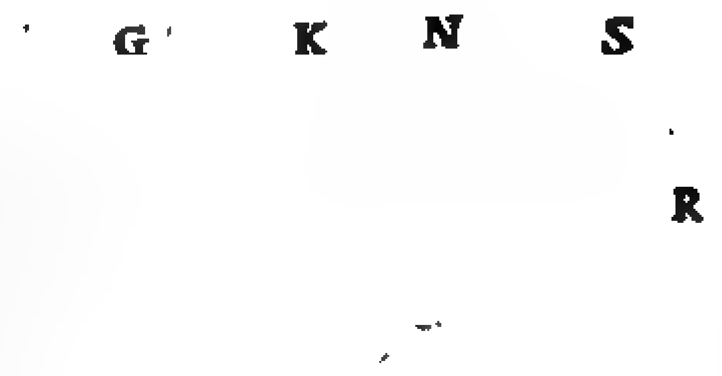
Da die Körper Za, ZT, auf der gemeinschaftlichen Grundfläche ZQ, welche der Ebene ay parallel ist, also auch von gleicher Höhe sind, und ihre Seitenlinien Qa, QT, Sd, Sx; Rb, RM, Zf, Zy, sich in einerley geraden Linien ax, by, endigen: so ist (11, 29. S.) Za = ZT. Nun war nach Obigem ZT = AE. Folglich Za = AE.

Da (1, 35. S.) ST = Sa; aber ST = AB = CD: so ist Sa = CD, folglich (5, 7. S.) CD : DS = Sa : DS.

Da der Körper Ce von FQ parallel mit CP und Se geschnitten wird: so ist (11, 25. S.) CD : DS = CF : Qe. Da auch der Körper ae von QZ parallel mit De und af geschnitten wird: so ist (11, 25. S.) Sa : DS = Za : Qe. Nun war nach Obigem CD : DS = Sa : DS. Folglich ist (5, 11. S.) CF : Qe = Za : Qe, folglich (5, 9. S.) CF = Za. Nun war nach Obigem Za = AE. Folglich ist CF = AE.

Zweytens. Sind die Winkel AKB, CQD, gleich: so seyn CQ, DQ, verlängert, bis QS = AK, und Qa = KB ist. Nun ist (1, 15. S.) SQa = CQD = AKB. Folglich ist, wie vorher, erweislich, daß (11, 10. E.) AE = Za, auch daß (11, 25. S.) CF = Za, daß also CF = AE ist.

Zweyter Fall.



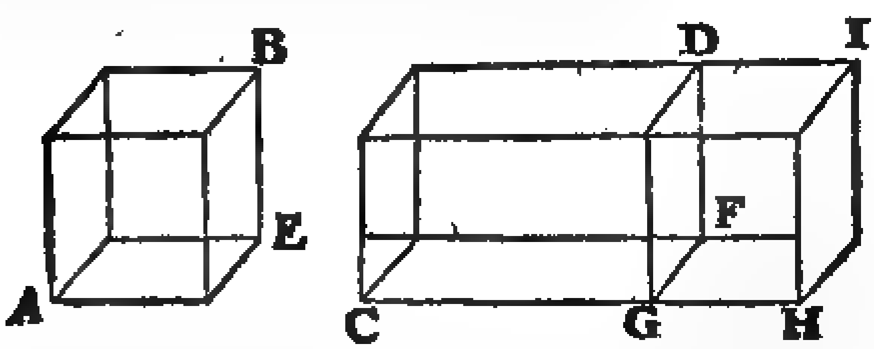
Die auf den Grundflächen stehenden Seitenlinien, AG, HK, BE, LM; PQ, CN, RS, DF, sind nicht auf denselben perpendikular.

Fälle (11, 11. S.) von den Punkten K, G, M, E; S, N, Q, F, auf die Ebenen der Grundflächen AB, CD, die Perpendikel KO, GV, MX, ET; SI, Nb, QZ, Fa, und ziehe OT, VX, TX, OV; aI, Zb, Za, bI.

Da die Körper, KX, SZ, auf gleichen Grundflächen KM, NF, und von gleichen Höhen sind, und ihre Seitenlinien perpendikular auf den Grundflächen stehen; so sind sie nach dem ersten Falle gleich. Nun ist KX = AE, und SZ = CF, folglich AE = CF.

Der 32. Satz. Lehrsatz.

Parallelepipeda, AB, CD, von gleicher Höhe, verhalten sich wie ihre Grundflächen, AE, CF.



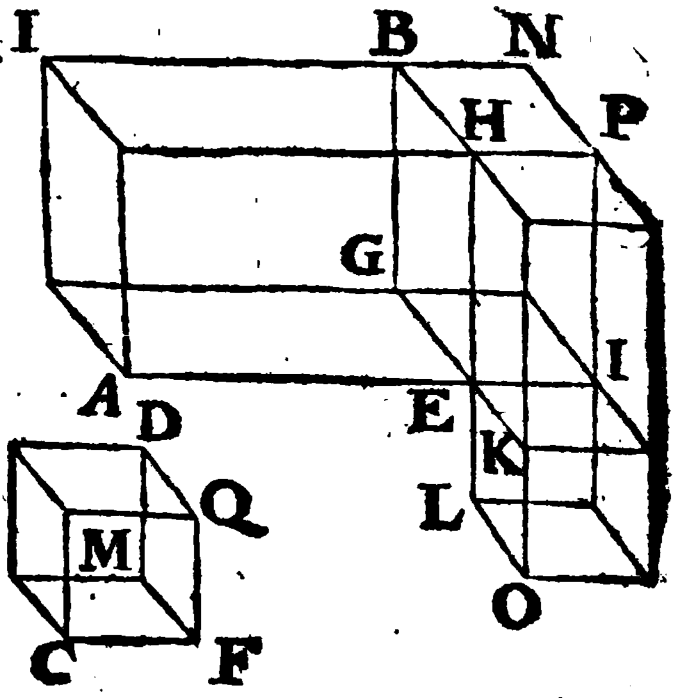
Beschreibe (1, 45. S.) auf GF das Parallelogramm FH = AE, und vollende den Körper GI: so ist (11, 31. S.) AB = GI.

Da der Körper CI von DG parallel der HI geschnitten wird: so ist (11, 25. S.) GI : CD = FH : CF. Nun war AB = GI, und AE = FH. Folglich AB : CD = AE : CF.

Der

Der 33. Satz. Lehrsatz.

Aehnliche Parallelepipeda, AB, CD, sind in der dreyfachen Verhältniß ihrer homologen Seiten, AE, CF.



Verlängere AE, GE, HE, bis EI = CF, EK = FM, EL = FQ ist. Vollende das Parallelogramm IK, und den Körper IO; desgleichen das Parallelogramm GI, und auf den Grundflächen GI, IK, die Körper EN, KP, von gleicher Höhe mit AB.

Da wegen der Aehnlichkeit der Körper AB, CD, die Winkel AEG, CFM, gleich sind, folglich auch IEK = CFM; aber EI = CF, und EK = FM: so sind (6. 1. E.) IK, CM, gleich und ähnlich. Nun sind aus eben den Gründen IL, CQ, desgleichen OE, DF, gleich und ähnlich. Demnach sind drey Parallelogrämme des Körpers IO, drey Parallelogrammen des Körpers CD gleich und ähnlich, folglich (11, 24. S.) auch die diesen dreyen gegenüber stehende; folglich sind (11, 10. E.) IO, CD, gleich und ähnlich.

Da $AB \sim CD$: so ist (11, 9. E. und 6, 1. S.) AE : CF = EG : FM = EH : FQ; aber CF = EI, FM = EK, FQ = EL; folglich AE : EI = EG : EK = EH : EL. Nun ist (6, 1. S.) AE : EI = AG : GI; EG : EK = GI : IK; EH : EL = PE : IL. Folglich ist AG : GI = GI : IK = PE : IL. Nun ist (11, 32. S.) AG : GI = AB : EN; GI : IK = EN : PK; PE : IL = PK : IO. Folglich ist AB : EN = EN : PK = PK : IO; folglich (5, 11. E.) AB : IO = 3 (AB : EN); aber AB : EN = AG : GI = AE : EI, folglich AB : IO = 3 (AE : EI). Nun war IO = CD, und EI = CF. Folglich ist AB : CD = 3 (AE : CF).

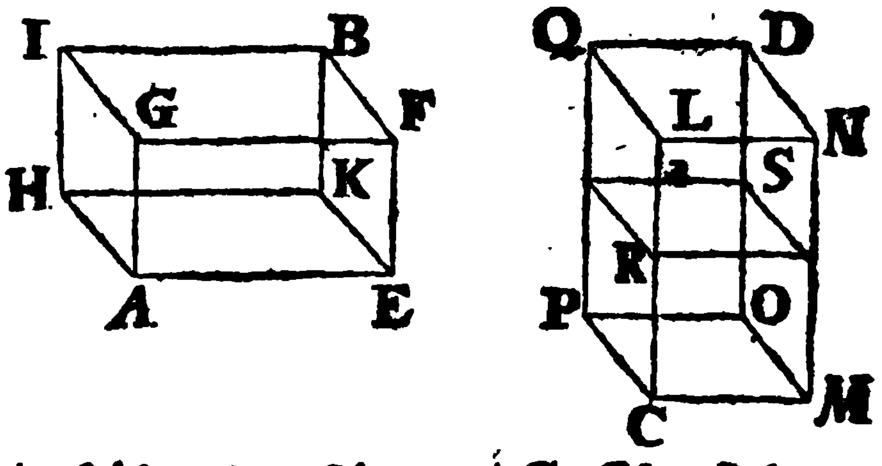
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß von vier stetig proportionirten geraden Linien die erste sich zur zweyten verhalte, wie das Parallelepipedon von der ersten zu dem ihm ähnlichen und ihm ähnlich liegenden Parallelepipedon von der zweyten; weil die Verhältniß der ersten und vierten der dreyfachen Verhältniß der ersten und zweyten gleich ist.

Der 34. Satz. Lehrsatz.

Sind Parallelepipeda, AB, CD, einander gleich: so sind ihre Grundflächen, AK, CO, in umgekehrter Verhältniß ihrer Höhen. Und sind die Grundflächen, AK, CO, in umgekehrter Verhältniß der Höhen: so sind die Parallelepipeda, AB, CD, einander gleich.

Erster Fall.



Die auf den Grundflächen AK, CO, stehenden Seitenlinien AG, EF, KB, HI, und CL, MN, OD, PQ, sind auf denselben perpendikular, daß also hier die Höhen der Körper AG, CL, sind.

Erster Theil.

Ist AB $=$ CD, so ist AK : CO $=$ CL : AG.

Erstlich, wenn die Grundflächen gleich sind. Da also AK $=$ CO, und AB $=$ CD: so ist auch CL $=$ AG; weil sonst (11, 31. S.) AB, CD, ungleich wären, gegen die Voraussetzung. Demnach ist offenbar AK : CO $=$ CL : AG.

Zweytens, wenn die Grundflächen ungleich sind. Es sey AK $>$ CO: so ist, weil AB $=$ CD, auch CL $>$ AG; weil sonst AB, CD, nicht gleich seyn könnten, gegen die Vor-

aus-

aussetzung. Mache daher $CR = AG$, und vollende das Parallelepipedon CS.

Da $AB = CD$, so ist (5, 7. S.) $AB : CS = CD : CS$. Nun ist (11, 32. S.) $AB : CS = AK : CO$, und (11, 25. S.) $CD : CS = CQ : PR =$ (6, 1. S.) $CL : CR$. Folglich ist $AK : CO = CL : CR$; folglich, weil $CR = AG$, auch $AK : CO = CL : AG$.

Zweyter Theil.

Ist $AK : CO = CL : AG$, so ist $AB = CD$.

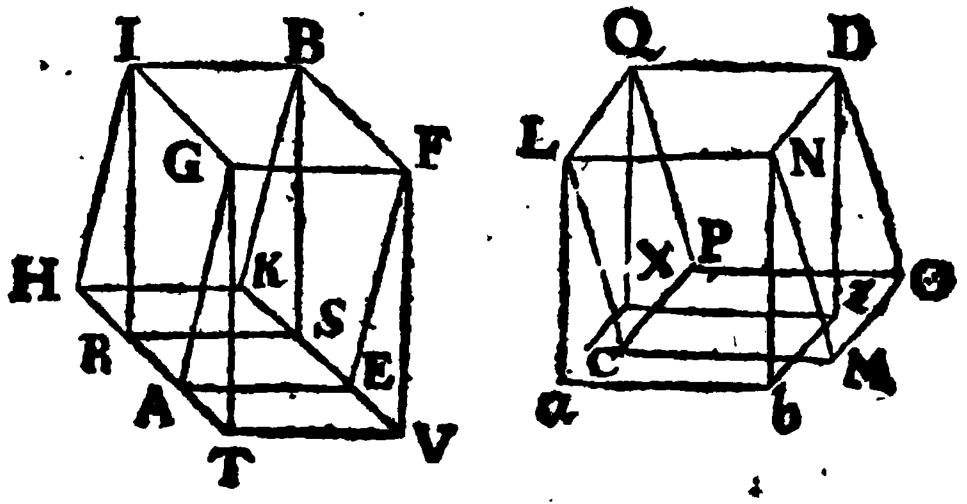
Erstlich, wenn die Grundflächen gleich sind. Da also $AK = CO$, und $AK : CO = CL : AG$, so ist auch $CL = AG$, folglich (11, 31. S.) $AB = CD$.

Zweytens, wenn die Grundflächen ungleich sind. Es sey $AK > CO$, folglich auch $CL > AG$. Mache daher $CR = AG$, und vollende das Parallelepipedon CS.

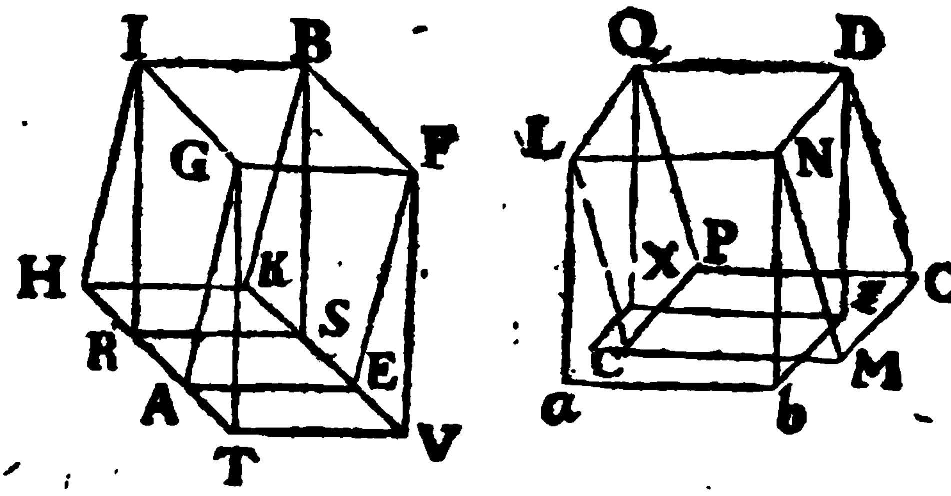
Da also $CR = AG$, so erhält man nach der Voraussetzung $AK : CO = CL : CR$. Nun ist (11, 32. S.) $AK : CO = AB : CS$, und (6, 1. S.) $CL : CR = CQ : PR =$ (11, 25. S.) $CD : CS$. Folglich ist $AB : CS = CD : CS$; folglich (5, 9. S.) $AB = CD$.

Zweyter Fall.

Die auf den Grundflächen AK, CO, stehenden Seitenlinien AG, EF, KB, HI, und CL, MN, OD, PQ, sind auf denselben nicht perpendikular.



Fälle (11, 11. S.) von den Punkten G, F, B, I, und von L, N, D, Q, auf die Ebenen der Grundflächen AK, CO, Perpenpendikel, die sie in den Punkten T, V, S, R, und a, b, z, x, treffen. Vollende die Parallelepipeda BT, Da; da dann



(6, 4. E.) die Körper BT und AB, die TG, und Da, CD, die aL zur Höhe haben.

Erster Theil.

Ist AB = CD, so ist AK : CO = aL : TG.

Da AB = CD, aber (11, 30. S.) AB = BT, und CD = Da: so ist BT = Da, folglich, nach dem ersten Falle, TS : az = aL : TG. Nun ist (11, 24. S.) TS = AK, und az = CO. Folglich ist AK : CO = aL : TG.

Zweyter Theil.

Ist AK : CO = aL : TG; so ist AB = CD.

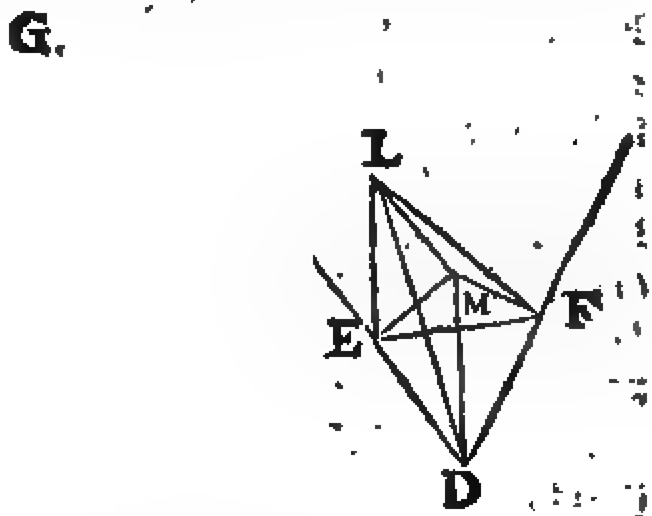
Da (11, 24. S.) AK = TS, und CO = az: so erhält man nach der Voraussetzung TS : az = aL : TG, folglich, nach dem ersten Falle, TB = Da. Nun ist (11, 30. S.) TB = AB, und Da = CD.

Der 35. Satz. Lehrsatz.

Werden auf zwey gleiche ebene Winkel, BAC, EDF, in ihren Scheitelpunkten, A, D, gerade Linien, AG, DL, so aufgestellt, daß sie mit den Linien, welche gedachte Winkel einschließen, gleiche Winkel, BAG, EDL, und GAC, LDF, machen; und werden von willkührlichen Punkten der aufgestellten Linien, G, L, auf die Ebenen der zuerst gedachten Winkel Perpendikel, GK, LM, gefällt, von den Punkten, K, M, aber, wo diese Perpendikel die Ebenen treffen, nach obgedachten Scheitelpunkten, A, D, gerade Linien,

Linien, KA, MD, gezogen: so schließen solche mit den aufgestellten Linien gleiche Winkel, KAG, MDL, ein.

Mache $AH = DL$, und ziehe durch H der GK die HI parallel, welche also, so wie GK, (11, 8. S.) auf der Ebene durch BAC, die sie in I trifft, perpendikular ist. Fälle (1, 12. S.) von den Punkten I, M, auf die Linien AB, AC; DE, DF, die Perpendikel IB, IC; ME, MF, und ziehe die geraden Linien, HC, CB, BH; LF, FE, EL.

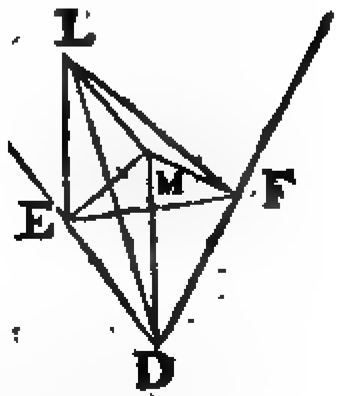


Da HI auf der Ebene durch BAC, also (11, 3. E.) auf den Linien IA, IB, IC, perpendikular ist, so ist (1, 47. S.) $\square HA = \square HI + \square IA$, aber $\square IA = \square IC + \square CA$; folglich $\square HA = \square HI + \square IC + \square CA$; folglich, weil $\square HI + \square IC = \square HC$, auch $\square HA = \square HC + \square CA$, folglich (1, 48. S.) $HCA = R$. Nun ist aus eben den Gründen $LFD = R$. Folglich ist $HCA = LFD$. Nun ist nach der Voraussetzung $HAC = LDF$, auch $AH = DL$; Folglich ist (1, 26. S.) $AC = DF$.

Da ferner $\square AH = \square AI + \square IH$, aber $\square AI = \square AB + \square BI$: so ist $\square AH = \square AB + \square BI + \square IH$; folglich, weil $\square BI + \square IH = \square BH$, auch $\square AH = \square AB + \square BH$, folglich (1, 48. S.) $ABH = R$. Nun ist aus gleichen Gründen $DEL = R$. Folglich ist $ABH = DEL$. Nun ist nach der Voraussetzung $BAH = EDL$, auch $AH = DL$. Folglich ist (1, 26. S.) $AB = DE$.

Da hiernach $AB = DE$, $AC = DF$, und nach der Voraussetzung $BAC = EDF$: so ist (1, 4. S.) $BC = EF$, und $ACB = DFE$; folglich, weil $ICA = MFD = R.$, auch

BCI = EFM. Nun ist aus eben den Gründen CBI = FEM. Folglich (1, 26. S.) CI = FM. Nun war AG = DF, und ICA = MFD. Folglich ist (1, 4. S.) AI = DM, also auch □ AI = □ DM.



Da AIH, DML, rechte Winkel, also □ AH = □ AI + □ IH, und □ DL = □ DM + □ ML; aber AH = DL, also auch □ AH = □ DL: so ist □ AI + □ IH = □ DM + □ ML. Nun war nach Obigem □ AI = □ DM. Folglich ist □ IH = □ ML; also auch IH = ML. Nun war nach Obigem AI = DM, und HA = DL. Folglich ist (1, 8. S.) HAI = LDM.

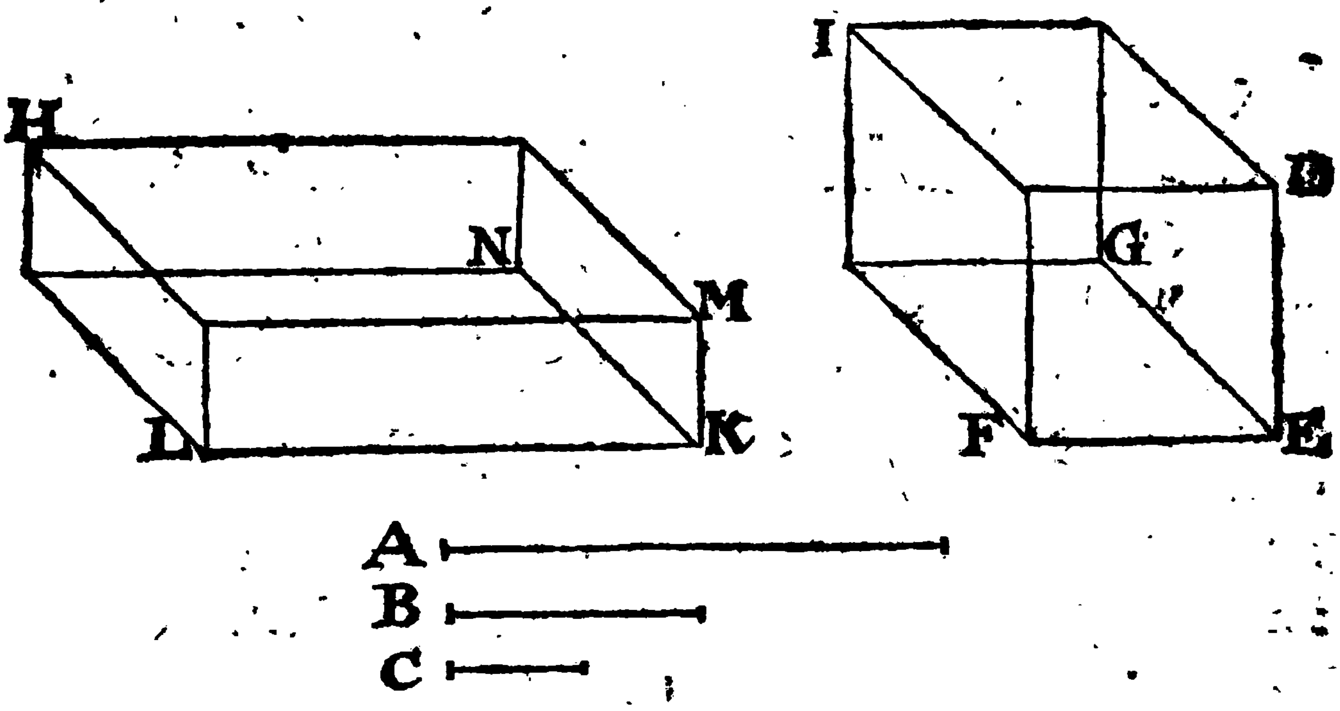
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß, wenn die auf zwey gleichen ebenen Winkeln BAC, EDF, in ihren Scheitelpunkten A, D, aufgestellten gleichen geraden Linien AH, DL, gleiche Winkel mit denen Linien machen, welche erstgedachte Winkel einschließen, die von den Endpunkten der aufgestellten Linien H, L, auf die Ebenen der Winkel gefällten Perpendikel, HI, LM, gleich sind.

Der 36. Satz. Lehrsatz.

Sind drey gerade Linien, A, B, C, proportionirt: so ist das Parallelepipedon aus allen dreyen, dem gleichseitigen Parallelepipedon von der mittlern, B, das dem ersten gleichwinklig ist, gleich.

Es sey E ein von den drey ebenen Winkeln, DEG, GEF FED, begränzter körperlicher Winkel. Mache jede der Linien, DE,



DE, GE, EF, der B gleich, und vollende das Parallelepipedon EI. Es sey ferner die KL der A gleich; stelle (11, 26. S.) an KL in K einen dem E gleichen von den ebenen Winkeln MKN, NKL, LKM, begränzten körperlichen Winkel; mache auch KN = B, und KM = C, und vollende das Parallelepipedon KH.

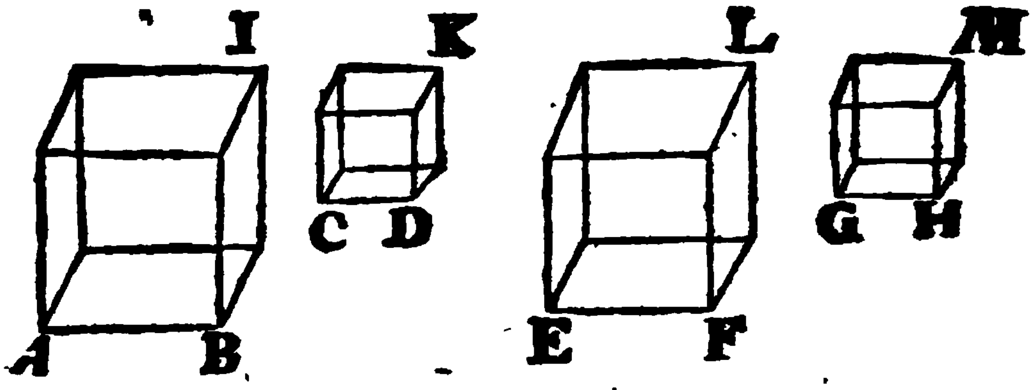
Da A : B = B : C und A = KL, B = KN = EF = EG = ED, C = KM: so ist KL : EF = ED : KM. Nun ist LKM = DEF. Folglich ist (6, 14. S.) das Parallelogramm ML = DF. Da auf DEF, IKM, in E, K, gleiche Linien KN, EG, so aufgestellt sind, daß LKN = FEG, und MKN = DEG: so sind (11, 35. Zus.) die von N, G, auf die Ebenen der Winkel MKL, DEF, gefällten Perpendikel gleich, also die Körper KH, EI, von gleicher Höhe. Nun sind auch nach Obigem ihre Grundflächen ML, DF, gleich. Folglich (11, 31. S.) KH = EI.

Der 37. Satz. Lehrsatz.

Sind vier gerade Linien AB, CD, EF, GH, proportionirt: so sind die von ihnen beschriebenen ähnlichen und ähnlich liegenden Parallelepipeda, AI, CK, EL, GM, auch proportionirt. Und sind vier ähnliche und ähnlich liegende Parallelepipeda proportionirt: so sind die geraden Linien, von denen sie beschrieben sind, auch proportionirt.

Erster

Erster Theil.



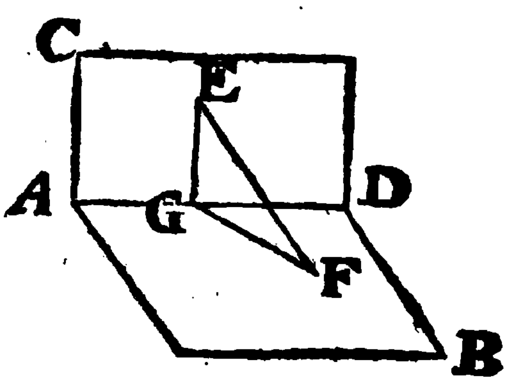
Da AI $\sim$ CK, so ist (11, 33. S.) AI : CK = 3(AB:CD). Aus eben den Gründen ist EL : GM = 3 (EF : GH). Nun ist angenommen, AB : CD = EF : GH. Folglich ist AI : CK = EL : GM.

Zweyter Theil.

Da wieder (11, 33. S.) AI : CK = 3 (AB : CD), auch EL : GM = 3 (EF : GH), und angenommen AI : CK = EL : GM; so ist AB : CD = EF : GH.

Der 38. Satz. Lehrsatz.

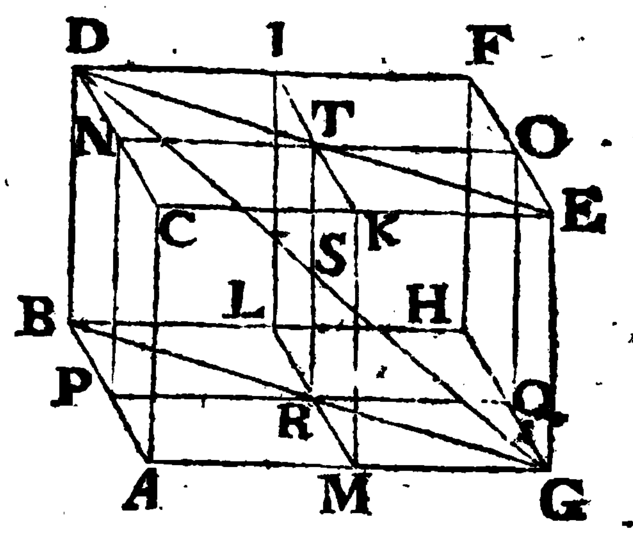
Sind zwey Ebenen, AB, CD, auf einander perpendikular: so trifft der aus einem willkührlichen Punkte, E, der einen Ebene auf die andere gefällte Perpendikel den gemeinschaftlichen Durchschnitt beyder Ebenen, AD.



Träfe solcher Perpendikel nicht in AD, sondern die Ebene AB in einem andern Punkte F, wie EF: so fälle (1, 10. S.) in der Ebene AB aus F auf AD den Perpendikel FG, welcher also (11, 4. E.) auf der Ebene CD perpendikular ist. Ziehe EG. Demnach wäre FGE = R., aber auch EFG = R. Folglich wären im △ EFG zwey Winkel = 2 R., welches (1, 17. S.) unmöglich ist. Folglich kann der aus E auf die Ebene AB gefällte Perpendikel nicht außer AD fallen, und muß also AD treffen.

Der 39. Satz. Lehrsatz.

Halbirt man die Seiten zweyer einander gegenüber liegenden Ebenen, AH, CF, eines Parallelepipedon, AF, und legt durch die Halbirungspunkte, I, K, M, L, O, N, P, Q, Ebenen, IM, NQ: so halbiren die Durchschnittslinie solcher Ebenen, TR, und des Parallelepipedon Diagonale, DG, einander.



Zieht man DT, TE, BR, RG: so ist, weil DN, OE, parallel, (1, 29. S.) DNT = TOE. Nun ist DN = OE, und NT = TO. Folglich ist (1, 4. S.) DT = TE, auch NTD = OTE, also (1, 14. S.) DTE eine gerade Linie. Aus gleichen Gründen ist auch BR = RG, und BRG eine gerade Linie.

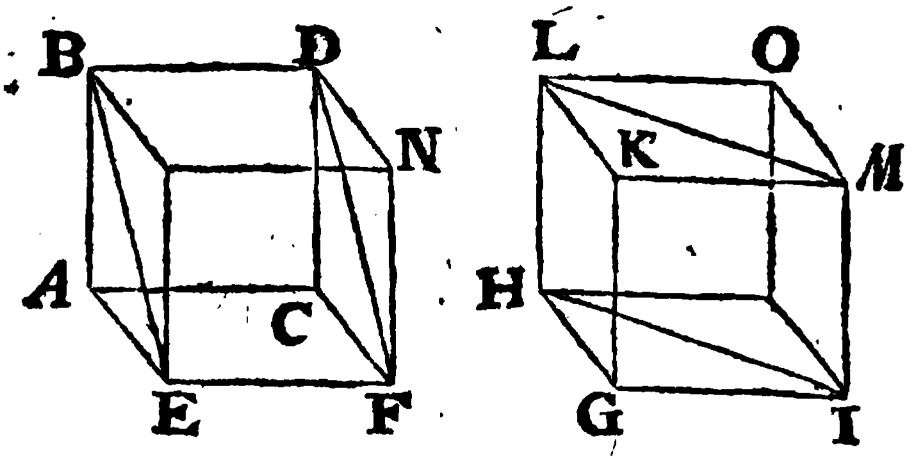
Da CA der DB sowohl als der EG gleich und parallel ist: so ist auch (11, 9. S.) DB der EG gleich und parallel. Folglich sind (1, 33. S.) DE, GB, gleich und parallel. Folglich sind (11, 7. S.) DG, TR, in Einer Ebene.

Da DE, BG, gleich und parallel sind, auch DT = TE, und BR = RG: so ist DT = GR. Nun ist auch (1. 29. S.) TDS = SGR, und (1, 15. S.) DST = RSG. Folglich ist (1, 26. S.) TS = SR, und DS = SG, folglich sind beyde Linien, TR und DG, in S halbirt.

Der 40. Satz. Lehrsatz.

Zwey gleich hohe Prismen, AEBCFD, HGIMKL, von welchen das eine ein Parallelogramm, AEFC, das andere einen Triangel GHI, dessen Doppeltes das Parallelogramm ist, zur Grundfläche hat, sind einander gleich.

Vollende die Parallelepipeda ED, GO.



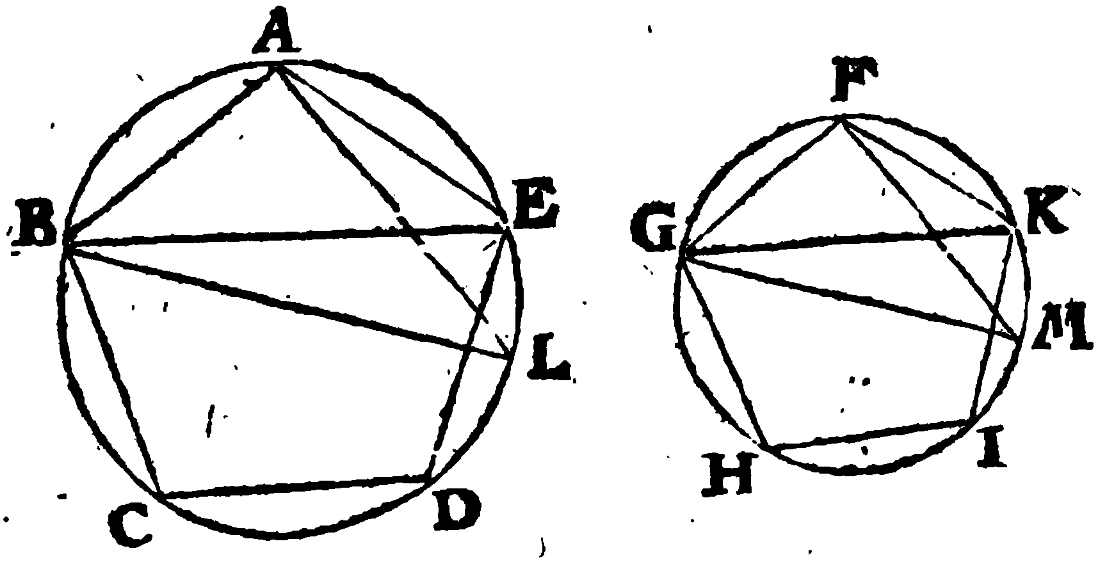
Da angenommen ist, daß das Parallelogramm AF = 2 △ GHI, und (1, 34. S.) HI = 2 △ GHI: so ist AF = HI; folglich sind, weil auch die Höhen gleich sind, (11, 31. S.) die Parallelepipeda, ED, GO, und also auch deren Hälften, nämlich die Prismen AEFCDB, GHIMKL, einander gleich.

Euklid'

Euklid's Elemente
Zwölftes Buch
Und Zweytes von den Körpern.

Der 1. Satz. Lehrsatz.

Aehnliche in Kreisen beschriebene Polygone, ABCDE, FGHIK, verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser, BL, GM.

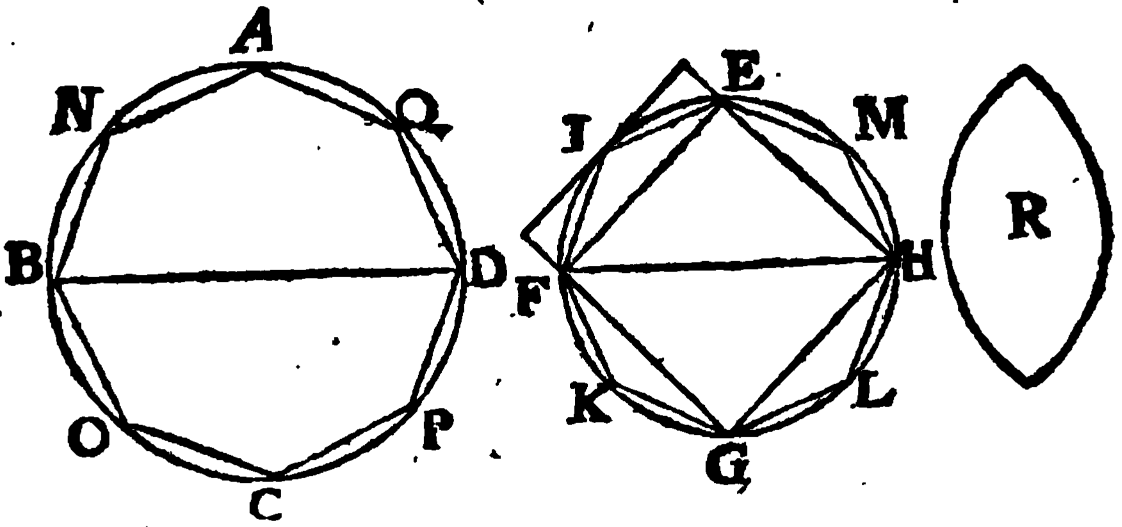


Ziehe BE, AL; GK, FM.

Da wegen Aehnlichkeit der Polygone (6, 1. E.) BAE = GFK, und BA : AE = GF : FK; so sind (6, 6. S.) die Triangel ABE, FGK, gleichwinklig, also AEB = FKG. Nun ist (3, 21. S.) AEB = ALB, und FKG = FMG. Folglich ist ALB = FMG; aber (3, 31. S.) BAL = GFM = R., folglich auch ABL = FGM. Demnach sind die Triangel ABL, FGM, gleichwinklig; folglich ist (6, 4. S.) BL : GM = BA : GF; also auch 2 (BL : GM) = 2 (BA : GF). Nun ist (6, 20. S.) 2 (BL : GM) = □ BL : □ GM, und 2 (BA : GF) = ABCDE : FGHIK. Folglich ist ABCDE : FGHIK = □ BL : □ GM.

Der 2. Satz. Lehrsatz.

Kreise, ABCD, EFGH, verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser, BD, FH.



Wäre nicht □ BD : □ FH = Kr. ABCD : Kr. EFGH; so sey □ BD : □ FH = Kr. ABCD : R, so daß der Flächenraum R entweder kleiner oder größer als der Kreis EFGH sey.

Erster Fall.

Es sey Fläche R < Kr. EFGH, und □ BD : □ FH = Kr. ABCD : R.

Beschreibe (4, 6. S.) in den Kreis EFGH das Quadrat EFGH; so ist dieses größer als der Halbkreis. Denn werden durch die Punkte E, F, G, H, Berührungslinien gezogen: so ist (1, 41. S.) das innere Quadrat EFGH die Hälfte des äußern. Nun ist der Kreis kleiner als das äußere Quadrat. Folglich ist das innere Quadrat größer als der Halbkreis.

Halbire die Bogen EF, FG, GH, HE, in den Punkten I, K, L, M, und ziehe EI, IF, FK, KG, GL, LH, HM, ME: so ist jeder der entstandenen Triangel, IFE, KGF, LHG, MEH, größer als die Hälfte des Kreisabschnitts, worin er befindlich ist. Denn werden durch die Punkte I, K, L, M, Berührungslinien gezogen, und die Parallelogramme über EF, FG, GH, HE, vollendet: so ist jeder der obgenannten Triangel die Hälfte des Parallelogramms, worin er befindlich ist,

ist. Nun ist jeder Kreisabschnitt kleiner, als das zugehörige Parallelogramm. Folglich ist jeder der obgenannten Triangel größer als die Hälfte des zugehörigen Kreisabschnittes.

Wird demnach die Halbirung der Kreisbogen fortgesetzt, und bey jeder Halbirung obige Construction wiederholt: so bleiben (10, 1. S.) einmal Kreisabschnitte, etwa die auf den Linien EI, IF, FK u. s. w. übrig, welche zusammen kleiner sind, als der Ueberschuß des Kreises EFGH über die Fläche R. Folglich ist das hierdurch erhaltene Polygon EIFKGLHM > R.

Beschreibe in den Kreis ABCD ein diesem erhaltenen Polygone ähnliches Polygon ANBOCPDQ: so ist (12, 1. S.) □ BD : □ FH = Polyg. ANB ꝛc. : Polyg. EIF ꝛc. Nun war angenommen □ BD : □ FH = Kr. ABCD : R. Folglich ist Kr. ABCD : R = Polyg. ANB ꝛc. : Polyg. EIF ꝛc. Nun ist offenbar Kr. ABCD > Polyg. ANB ꝛc. Folglich ist (5, 14. S.) auch R > Polyg. EIF ꝛc., welches dem Vorigen, daß R < EIF ꝛc. sey, widerspricht. Demnach ist nicht □ BD : □ FH = Kr. ABCD : R, wenn R < Kr. EFGH.

Aus eben den Gründen ist auch nicht □ FH : □ BD = Kr. EFGH : Z, wenn die Fläche Z < Kr. ABCD.

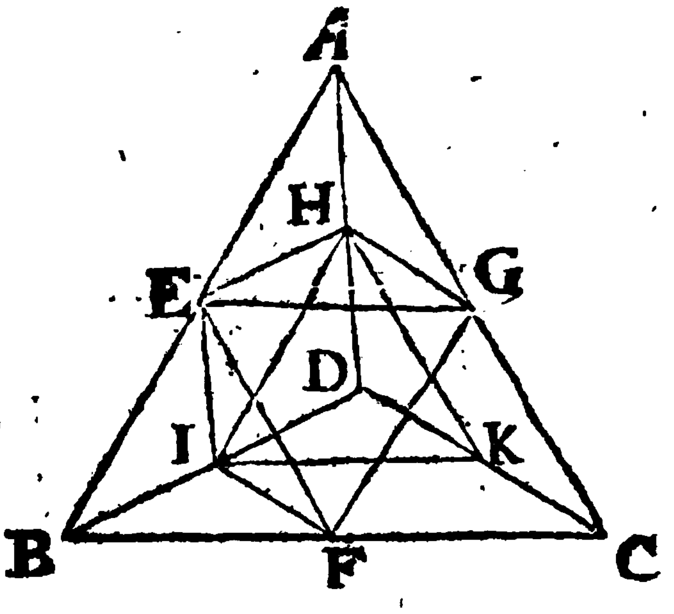
Zweyter Fall.

Es sey Fläche R > Kr. EFGH, und □ BD : □ FH = Kr. ABCD : R, folglich auch umgekehrt □ FH : □ BD = R : Kr. ABCD.

Es sey R : Kr. ABCD = Kr. EFGH : Z, so daß, weil R > Kr. EFGH ist, (5, 14. S.) auch Kr. ABCD > Z sey. Nun ist angenommen □ FH : □ BD = R : Kr. ABCD. Folglich ist □ FH : □ BD = Kr. EFGH : Z; welches, da Z < Kr. ABCD ist, nach dem ersten Falle unmöglich ist. Demnach ist nicht □ BD : □ FH = Kr. ABCD : R, wenn R > Kr. EFGH, und nach dem ersten Falle auch nicht, wenn R < Kr. EFGH. Folglich ist □ BD : □ FH = Kr. ABCD : Kr. EFGH.

Der 3. Satz. Lehrsatz.

Jede dreyseitige Pyramide, ABCD, läßt sich in zwey gleiche, einander selbst und der ganzen ähnliche, dreyseitige Pyramiden, und in zwey gleiche Prismen, welche zusammen größer als die Hälfte der ganzen Pyramide sind, zerlegen.



Die Grundfläche der Pyramide sey der Triangel ABC, und ihr Gipfel D. Halbire die Linien AB, BC, CA; AD, DB, DC, in den Punkten E, F, G; H, I, K. Ziehe die Linien EH, EG, GH, wodurch die dreyseitige Pyramide AEGH; ferner die Linien HI, IK, KH, wodurch die dreyseitige Pyramide HIKD; endlich die Linien IF, FG, wodurch das Prisma EBFGHI auf der Grundfläche EBFG, und das Prisma GFCKHI auf der Grundfläche FGC entstehet.

Erster Theil.

Daß die beyden dreyseitigen Pyramiden, AEGH, HIKD, deren Spitzen H, D, und Grundflächen AEG, HIK, einander gleich und ähnlich sind.

Da AE = EB, und AH = HD: so ist (6, 2. S.) EH der DB parallel; aber aus eben den Gründen auch HI der AB; also HEBI ein Parallelogramm, folglich (1, 34. S.) HI = EB; also, weil EB = AE, auch AE = HI. Nun ist AH = HD, und (1, 29. S.) EAH = IHD. Folglich ist (1, 4. S. und 6, 4. S.) △ AEH ≅ △ HID, und EH = ID. Aus gleichen Gründen ist △ AHG ≅ △ HKD, und KD = GH.

Da hiernach HE der DI, und HG der KD, gleich und parallel ist: so ist (11, 10. S.) EHG = IDK; folglich (1, (1, 4. S. und 6, 4. S.) △ EHG ≅ IDK. Aus eben den Gründen ist △ AEG ≅ HIK.

Demnach werden die Pyramiden AEGH, HIKD, von gleich viel, gleichen und ähnlichen Ebenen begränzt, und sind folglich (11, 10. E.) einander gleich und ähnlich.

Zweyter Theil.

Daß gedachte Pyramiden, AEGH, HIKD, auch der ganzen Pyramide, ABCD, ähnlich sind.

Da HI der AB parallel: so sind (1, 29. S.) die Triangel ADB, HDI, gleichwinklig, folglich (6, 4. S.) ihre Seiten proportionirt; folglich (6, 1. S.) die Triangel ADB, HDI, ähnlich. Aus eben den Gründen sind die Triangel BDC, DIK, und ADC, DHK, ähnlich.

Da BA der IH, und AC der HK parallel ist: so ist (11, 10. S.) BAC = IHK, auch (5, 15. S.) BA : AC = IH : HK; folglich (6, 6. S.) △ ABC ∾ △ HIK.

Demnach ist (11, 9. E.) die Pyramide ABCD der HIKD ähnlich, folglich auch der AEGH, weil diese nach dem ersten Theile der HIKD ähnlich ist.

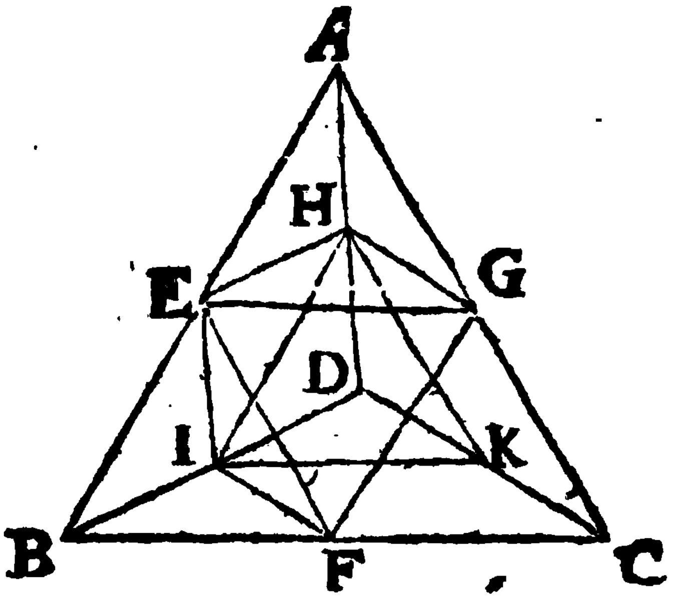
Dritter Theil.

Daß die Prismen, EBFGHI, GFCKHI, welche, wenn man von der ganzen Pyramide obige beyde kleine Pyramiden wegnimmt, übrig bleiben, einander gleich sind.

Da BF = FC, so ist (1, 41. S.) EBFG = 2 △ GFC. Nun haben gedachte Prismen, weil in dem ersten der Grundfläche EBGF, die Linie HI, in dem zweyten der Grundfläche GFC, die Fläche IKH gegenüber liegt, gleiche Höhe. Folglich sind (11, 40. S.) diese Prismen gleich.

Vierter Theil.

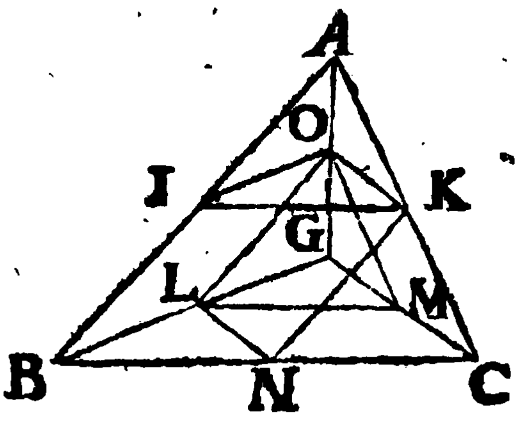
Daß beyde Prismen, EBFGHI, GFCKHI, zusammen größer sind, als die Hälfte der ganzen Pyramide, ABCD.

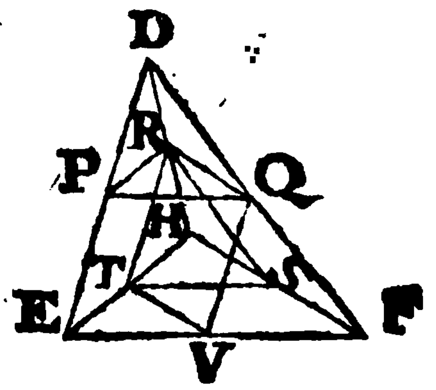


Ziehe EF, EI, so entsteht eine Pyramide EBFI, deren Grundfläche EBF, und Spitze I, und es ist offenbar Prisma EBFGHI > Pyr. EBFI. Nun sind die Pyramiden EBFI, AEGH, weil sie von gleich viel gleichen und ähnlichen Ebenen begränzt werden, gleich und ähnlich. Folglich ist Prisma EBFGHI > Pyr. AEGH. Nun war Prisma EBFGHI = Prisma FGCKHI, und Pyr. AEGH = Pyr. HIKD. Folglich ist Prisma FGCKHI > Pyr. HIKD. Folglich ist Prisma EBFGHI + Prisma GFCKHI > Pyr. AEGH + Pyr. HIKD. Demnach ist die ganze Pyramide ABCD in zwey ungleiche Theile getheilt, wovon der größere die beyden Prismen, der kleinere die beyden Pyramiden enthält. Folglich sind die beyden Prismen größer als die Hälfte der ganzen Pyramide.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

Werden zwey dreyseitige Pyramiden von gleicher Höhe, ABCG, DEFH, in zwey gleiche, einander selbst und der ganzen ähnliche, Pyramiden und in zwey gleiche Prismen zerlegt, und die entstandenen Pyramiden wieder auf eben die Art getheilt, und dieß immer so fort: so verhalten sich alle Prismen in der einen Pyramide zu denen von gleicher Anzahl in der andern, wie die Grundfläche der einen, ABC, zur Grundfläche der andern, DEF.





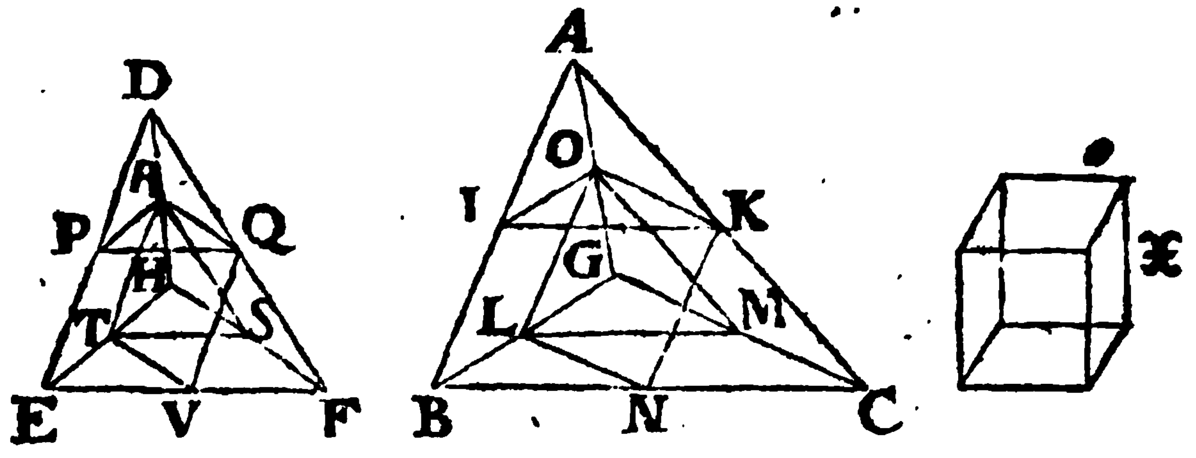
Da die beyden Pyramiden ABCG, DEFH, von gleicher Höhe sind: so sind offenbar die von G, H, auf die Ebenen ABC, DEF, gefällten Perpendikel gleich. Da der Perpendikel aus G und die Linie GC (11, 17. S.) von den Parallelebenen ABC, OLM, in gleicher Verhältniß geschnitten werden: so wird, weil GC von der Ebene OLM in M halbirt ist, auch gedachter Perpendikel aus G von der Ebene OLM halbirt. Aus eben den Gründen wird auch der aus H auf die Ebene DEF gefällte Perpendikel von der Ebene RTS halbirt. Nun sind gedachte Perpendikel, folglich auch ihre Hälften, gleich. Folglich haben die Prismen KNCMLO, QVFSTR, gleiche Höhe, und verhalten sich daher (11, 28. 32. S.) wie ihre Grundflächen KNC, QVF. Nun sind die Prismen in jeder der Pyramiden ABCG, DEFH, einander gleich, und daher Prisma IKNBLO : Prism. KNCMLO = Prism. EPQVTR : Prism. QVFSTR; also (5, 18. 16. S.) Prism. IKNBLO + Prism. KNCMLO : Prism. EPQVTR + Prism. QVFSTR = Prism. KNCMLO : Prisma QVFSTR. Folglich ist △ KNC : △ QVF = Prism. IKNBLO + Prism. KNCMLO : Prism. EPQVTR + Prism. QVFSTR.

Da BN = NC, und AK = KC; folglich (6, 2. S.) NK der AB parallel: so ist (6, 4. S.) △ ABC ∾ △ KNC. Aus eben den Gründen ist △ DEF ∾ △ QVF. Nun ist BC = 2 CN, und EF = 2 FV, und daher BC : CN = EF : FV. Folglich ist (6, 22. S.) △ ABC : △ KNC = △ DEF : △ QVF, also verwechselt △ ABC : △ DEF = △ KNC : △ QVF = Prism. IKNBLO + Prism. KNCMLO : Prism. EPQVTR + Prism. QVFSTR, nach dem oben Bewiesenen.

Werden nun die entstandenen kleinern Pyramiden OLMG, RTSH, eben so zerlegt: so verhalten sich nach obigen Gründen die Grundflächen OLM, RST, wie die beyden Prismen in jeder der beyden obigen Pyramiden. Nun ist △ OLM : △ RST = △ ABC : △ DEF. Folglich ist △ ABC : △ DEF = vier Prism. in ABCG : vier Prism. in DEFG. Auf eben die Art wird der Beweis auch für die Prismen in AIKO, DPQR, und überhaupt für alle folgende Eintheilungen von gleicher Anzahl geführt.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

Dreyseitige Pyramiden von gleicher Höhe, ABCG, DEFH, verhalten sich wie ihre Grundflächen, ABC, DEF.



Wäre nicht $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = Pyr. ABCG : Pyr. DEFH, so sey $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = Pyr. ABCG : X, so daß der Körper X entweder kleiner oder größer als Pyr. DEFH sey.

Erster Fall.

Es sey Körper X < Pyr. DEFH, und $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = Pyr. ABCG : X.

Zerlege (12, 3. S.) die Pyr. DEFH in zwey kleinere gleiche einander selbst und der ganzen ähnliche Pyramiden und in zwey gleiche Prismen; daß also die beyden Prismen zusammen größer als die Hälfte der ganzen Pyramide DEFH sind. Diese kleineren Pyramiden zerlege auf eben die Art, und so immer fort, bis du (10, 1. S.) auf Pyramiden kommst, welche kleiner sind, als der Ueberschuß der Pyr. DEFH über den Körper X. Es seyen diese Pyramiden DPQR, RTSH: so sind die in der Pyr. DEFH übrigen Prismen größer als X.

Die andere Pyramide, ABCG, werde auf eben die Art nach gleicher Anzahl zerlegt: so ist (12, 4. S.) $\triangle$ ABC : $\triangle$ DEF = Prism. in ABCG : Prism. in DEFH. Nun ist ange-

angenommen $\triangle ABC : \triangle DEF =$ Pyr. $ABCG : X$. Folglich ist Pyr. $ABCG : X =$ Prism. in $ABCG$: Prism. in $DEFH$. Nun ist Pyr. $ABCG >$ Prism. in $ABCG$. Folglich ist (5, 14. S.) $X >$ Prism. in $DEFH$, welches dem Vorigen, Prism. in $DEFH > X$, widerspricht. Demnach ist nicht $\triangle ABC : \triangle DEF =$ Pyram. $ABCG : X$, wenn $X <$ Pyram. $DEFH$. Aus eben den Gründen ist auch nicht $\triangle DEF : \triangle ABC =$ Pyr. $DEFH : Z$, wenn $Z <$ Pyr. $ABCG$.

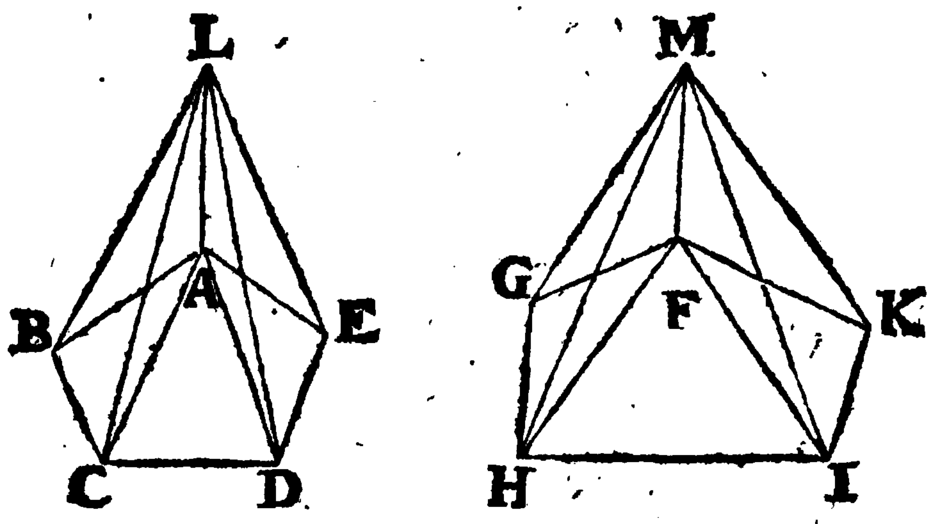
Zweyter Fall.

Es sey $X >$ Pyr. $DEFH$ und $\triangle ABC : \triangle DEF =$ Pyr. $ABCG : X$, folglich auch umgekehrt $\triangle DEF : \triangle ABC = X$: Pyr. $ABCG$.

Es sey X : Pyr. $ABCG =$ Pyr. $DEFH : Z$, also $Z <$ Pyr. $ABCG$. Nun ist angenommen $\triangle DEF : \triangle ABC = X$: Pyr. $ABCG$. Folglich ist $\triangle DEF : \triangle ABC =$ Pyr. $DEFH : Z$; welches nach dem ersten Falle unmöglich ist. Demnach ist nicht $\triangle ABC : \triangle DEF =$ Pyr. $ABCG : X$, wenn $X >$ Pyr. $DEFH$, und nach dem ersten Falle auch nicht, wenn $X <$ Pyr. $DEFH$. Folglich ist $\triangle ABC : \triangle DEF =$ Pyr. $ABCG$: Pyr. $DEFH$.

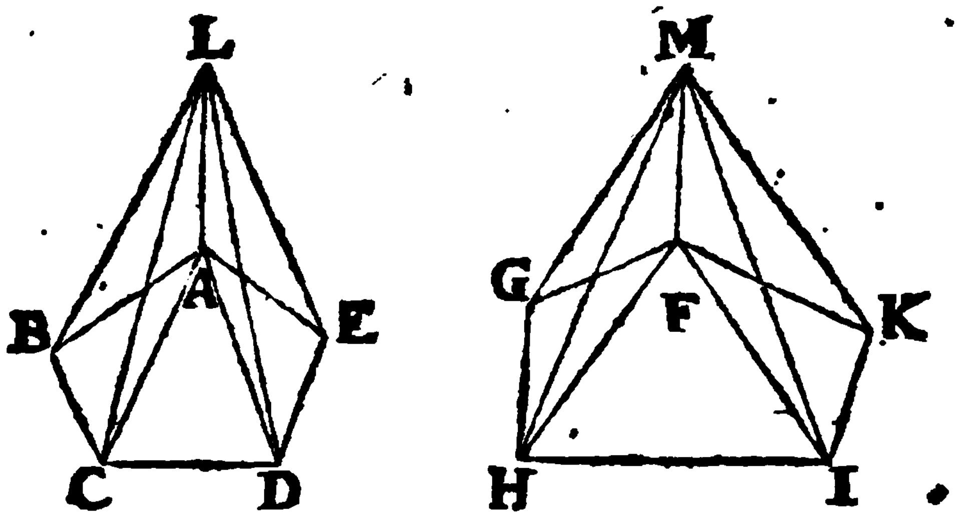
Der 6. Satz. Lehrsatz.

Vielseitige Pyramiden von gleicher Höhe, $ABCDEL$, $FGHIKM$, verhalten sich wie ihre Grundflächen, $ABCDE$, $FGHIK$.



Theile diese Grundflächen in ihre Triangel, ABC, ACD, ADE, FGH, FHI, FIK, und stelle dir über jedem Triangel eine

eine Pyramide von gleicher Höhe mit den beyden zuerst gedachten Pyramiden vor.



Da (12, 5. S.) △ ABC : △ ACD = Pyr. ABCL : Pyr. ACDL; so ist **verbunden** (5, 18. S.) ABCD : △ ACD = Pyr. ABCDL : Pyr. ACDL. Nun ist (12, 5. S.) auch △ ACD : △ ADE = Pyr. ACDL : Pyr. ADEL. Folglich ist (5, 22. S.) **aus dem Gleichen** ABCD : △ ADE = Pyr. ABCDL : Pyr. ADEL, folglich (5, 18. S.) **verbunden** ABCDE : △ ADE = Pyr. ABCDEL : Pyr. ADEL. Aus gleichen Gründen ist auch FGHIK : △ FIK = Pyr. FGHIKM : Pyr. FIKM, folglich auch **umgekehrt** △ FIK : FGHIK = Pyr. FIKM : Pyr. FGHIKM.

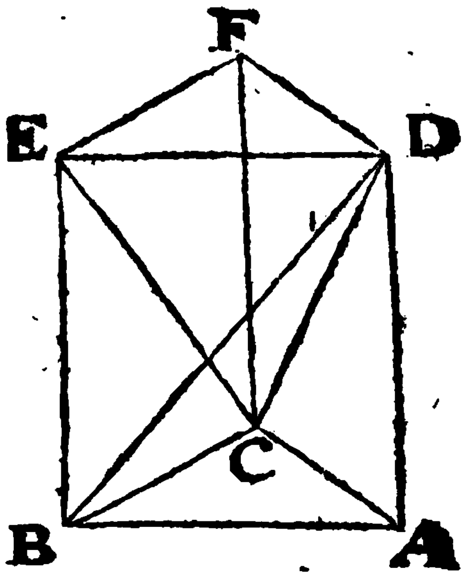
Da △ ADE : △ FIK = Pyr. ADEL : Pyr. FIKM, und nach Obigem ABCDE : △ ADE = Pyr. ABCDEL : Pyr. ADEL; so ist **aus dem Gleichen** ABCDE : △ FIK = Pyr. ABCDEL : Pyr. FIMK; aber auch nach Obigem △ FIK : FGHIK = Pyr. FIKM : Pyr. FGHIKM; folglich **aus dem Gleichen** ABCDE : FGHIK = Pyr. ABCDEL : Pyr. FGHIKM.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Jedes dreyseitige Prisma, ABCDEF, läßt sich in drey gleiche dreyseitige Pyramiden zerlegen.

Ziehe BD, EC, CD.

Da (11, 13. E.) ABED ein Parallelogramm, so ist (1, 34. S.) △ ABD = △ EDB; folglich (12, 5. S.) Pyr. ABDC



ABDC = Pyr. EDBC; denn beyder Spitze ist C. Nun ist Pyr. EDBC mit Pyr. EBCD dieselbe. Folglich ist Pyr. ABDC = Pyr. EBCD.

Da ferner FCBE ein Parallelogramm, so ist (1, 34. S.) △ EBC = △ ECF, folglich (12, 5. S.) Pyr. EBCD = Pyr. ECFD; denn beyder Spitze ist D. Nun war Pyr. EBCD = Pyr. ABDC. Folglich ist Pyr. ECFD = Pyr. ABCD.

Demnach ist das Prisma ABCDEF in drey gleiche dreyseitige Pyramiden ABDC, BECD, ECFD, getheilt worden.

Zusatz.

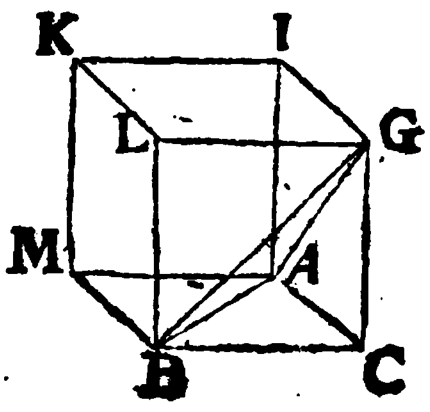
Hieraus erhellet, daß jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma von gleicher Höhe und auf einerley Grundfläche sey.

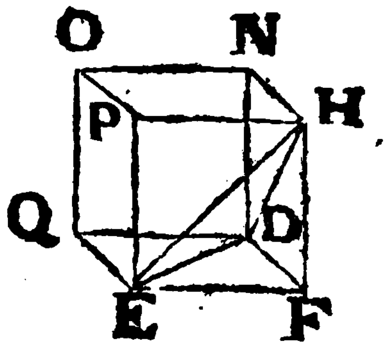
Denn da Pyramide ABDC mit Pyr. CABD dieselbe ist; aber Pyr. ABDC = $\frac{1}{3}$ Prism. ABCDFE: so ist auch Pyr. CABD = $\frac{1}{3}$ Prism. ABCDFE.

Wäre nun auch das Prisma vielseitig, so läßt es sich doch in lauter dreyseitige zerlegen.

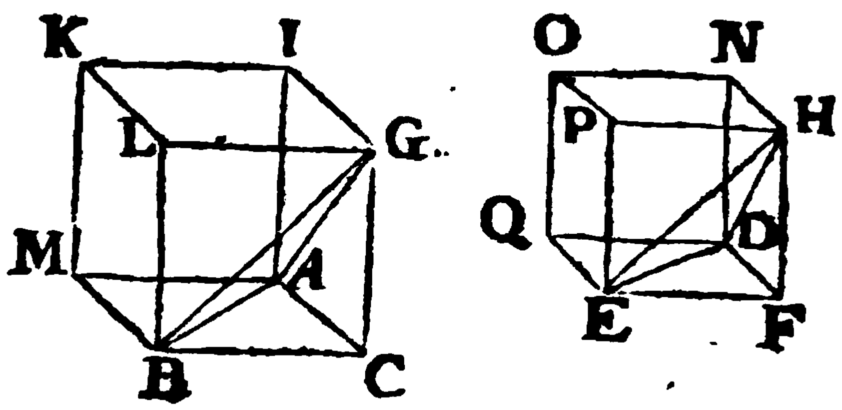
Der 8. Satz. Lehrsatz.

Aehnliche dreyseitige Pyramiden, ABCG, DEFH, sind in dreyfacher Verhältniß ihrer homologen Seiten, BC, EF.





Vollende die Parallelepipeda BI, EN. Da Pyram. ABCG $\sim$ Pyram. DEFH: so ist (11, 9. E.) BCA = EFD, ACG = DFH, BCG ≃ EFH; auch BC : EF = AC : DF = GC : HF. Folglich ist (6, 1. E.) CM ∾ FQ, CI ∾ FN, CL ∾ FP. Nun sind (11, 24. S.) in



jedem Parallelepipedon den drey genannten Ebenen die gegenüber liegenden gleich und ähnlich. Folglich ist (11, 9. E.) BI ∾ EN, folglich (11, 33. S.) BI : EN = 3 (BC : EF). Nun ist ein Prisma die Hälfte des Parallelepipedons, die Pyramide aber der dritte Theil des Prisma, also die Pyramide der sechste Theil des Parallelepipedons, und daher ist (5, 15. S.) BI : EN = Pyr. ABCG : Pyr. DEFH. Folglich ist auch Pyr. ABCG : Pyr. DEFH = 3 (BC : EF).

Zusatz.

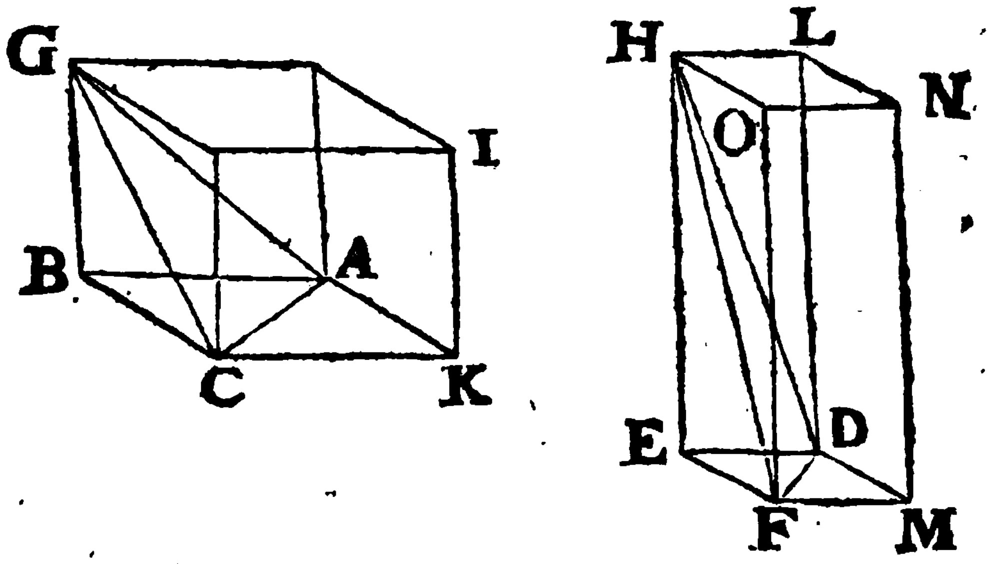
Hieraus erhellet, daß auch ähnliche vielseitige Pyramiden in dreyfacher Verhältniß ihrer homologen Seiten sind. Denn zerlegt man (6, 20. S.) die ähnlichen vielseitigen Grundflächen in gleich viele ähnliche Triangel, also die vielseitigen Pyramiden in dreyseitige: so verhält sich eine dreyseitige der einen zu einer dreyseitigen der andern, wie alle dreyseitige der einen zu allen dreyseitigen der andern, das ist, wie die eine vielseitige Pyramide zu der andern. Da aber die dreyseitigen Pyramiden in dreyfacher Verhältniß ihrer homologen Seiten sind: so sind es auch die vielseitigen Pyramiden.

Der 9. Satz. Lehrsatz.

Sind dreyseitige Pyramiden, ABCG, DEFH, einander gleich: so sind die Grundflächen, ABC, DEF, in umgekehrter Verhältniß der Höhen. Und sind die Grundflächen, ABC, DEF, in umgekehrter Verhältniß der Höhen:

hen: so sind die Pyramiden, ABCG, DEFH, einander gleich.

Vollende die Parallelepipeda, BI, EN, die mit den Pyramiden gleiche Höhe haben.



Erster Theil.

Es sey Pyr. ABCG = Pyr. DEFH; so ist, weil BI = 6 Pyr. ABCG, und EN = 6 Pyr. DEFH, auch BI = EN, folglich (11, 34. S.) BK : EM = Höhe von EN : Höhe von BI = Höhe der Pyr. DEFH : Höhe der Pyr. ABCG. Nun ist BK : EM = △ ABC : △ DEF. Folglich ist auch △ ABC : △ DEF = Höhe der Pyr. DEFH : Höhe der Pyr. ABCG.

Zweyter Theil.

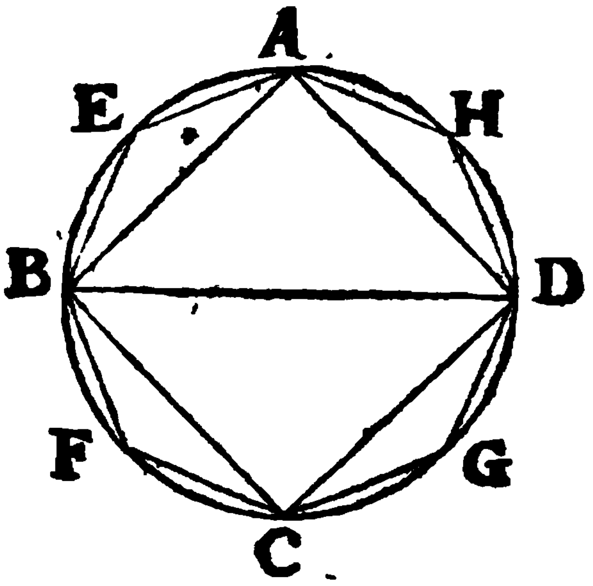
Es sey △ ABC : △ DEF = Höhe der Pyr. DEFH : Höhe der Pyr. ABCG: so ist, weil △ ABC : △ DEF = BK : EM, auch BK : EM = Höhe von EN : Höhe von BI; folglich (11, 34. S.) BI = EN. Nun ist BI = 6 Pyr. ABCG, und EN = 6 Pyr. DEFH. Folglich ist Pyr. ABCG = Pyr. DEFH.

Der 10. Satz. Lehrsatz.

Jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders, welcher mit ihm gleiche Höhe und einerley Grundfläche, ABCD, hat.

Wäre

Wäre der Cylinder nicht das Dreyfache des Kegels, so wäre der Cylinder entweder größer oder kleiner, als das Dreyfache des Kegels.



Erster Fall.

Der Cylinder sey größer als das Dreyfache des Kegels.

Beschreibe in den Kreis, der die Grundfläche des Cylinders und Kegels ist, das Quadrat ABCD, so ist solches größer als die Hälfte des Kreises. Auf das Quadrat stelle ein mit dem Cylinder gleich hohes Prisma: so ist solches größer als die Hälfte des Cylinders.

Denn wird auch um den Kreis ein Quadrat beschrieben: so ist das innere die Hälfte des äußern. Nun verhalten sich die auf diese Quadrate gestellten, mit dem Cylinder gleich hohen, Prismen wie ihre Grundflächen. Folglich ist das Prisma auf dem innern Quadrate die Hälfte des Prisma auf dem äußern. Da nun der Cylinder kleiner ist, als das Prisma auf dem äußern: so ist das Prisma auf dem innern, ABCD, größer als die Hälfte des Cylinders.

Halbire die Kreisbogen, AB, BC, CD, DA, in E, F, G, H, und verbinde die Halbirungspunkte: so ist jeder der dadurch entstandenen Triangel, wie AEB, größer als die Hälfte des zugehörigen Kreisabschnitts. Stellt man daher auf jeden dieser Triangel ein mit dem Cylinder gleich hohes Prisma: so ist jedes größer als die Hälfte des zugehörigen Cylinderabschnitts.

Denn wenn durch die Punkte, E ꝛc. mit AB ꝛc. Parallellinien gezogen, die Parallelogramme vollendet, und auf dieselben Parallelepipeda von gleicher Höhe mit dem Cylinder gestellt werden: so ist jedes Prisma auf den Triangeln AEB ꝛc. die Hälfte eines solchen Parallelepipedons, welches größer

größer als der Cylinderabschnitt ist; folglich das Prisma größer als die Hälfte des Cylinderabschnitts.

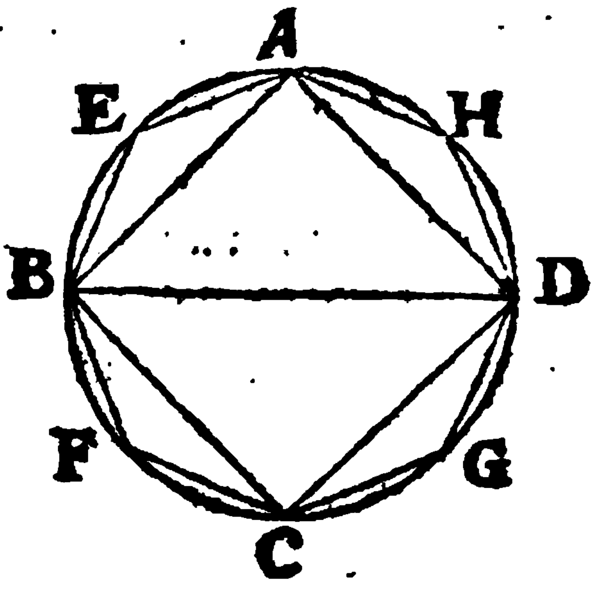
Nun halbire man die Kreisbogen AE ꝛc. und verfahre völlig wie vorher, und immer so fort: so kommt man (10, 1. S.) irgend einmal auf Cylinderabschnitte, die kleiner als der Ueberschuß des Cylinders über das Dreyfache des Kegels sind. Es seyen diese die Abschnitte auf AE, EB ꝛc.: so ist das übrige vielseitige Prisma von gleicher Höhe mit dem Cylinder auf der Grundfläche AEB ꝛc. größer als das Dreyfache des Kegels. Nun ist auch dieses vielseitige Prisma das Dreyfache einer Pyramide, die einerley Grundfläche und Spitze mit dem Kegel hat. Folglich ist solche Pyramide größer als der Kegel auf dem Kreise ABCD. Da aber diese Pyramide in dem Kegel enthalten ist: so ist sie kleiner als der Kegel. Dieß widerspricht einander. Folglich ist der Cylinder nicht größer als das Dreyfache des Kegels.

Zweyter Fall.

Der Cylinder sey kleiner als das Dreyfache des Kegels, folglich auch umgekehrt, der Kegel größer als der dritte Theil des Cylinders.

Hier sey wieder in den Kreis ein Quadrat ABCD beschrieben: so ist dieses größer als des Kreises Hälfte. Auf das Quadrat sey eine Pyramide von einerley Höhe mit dem Kegel gestellt: so ist diese größer als des Kegels Hälfte.

Denn wird, wie im ersten Falle, um den Kreis ein Quadrat beschrieben: so ist das innere die Hälfte des äußern. Werden nun auf beyde Quadrate Prismen von gleicher Höhe mit dem Kegel gestellt, die sich also (11, 32. S.) wie ihre Grundflächen verhalten: so ist das innere Prisma die Hälfte des äußern, also auch das Drittel von jenem die Hälfte des Drittels von diesem, das ist, die Pyramide auf dem innern Quadrate die Hälfte der Pyramide auf dem äußern. Nun ist letztere, weil sie den Kegel enthält, größer als der Kegel. Folglich ist die Pyramide auf dem innern Quadrate ABCD,



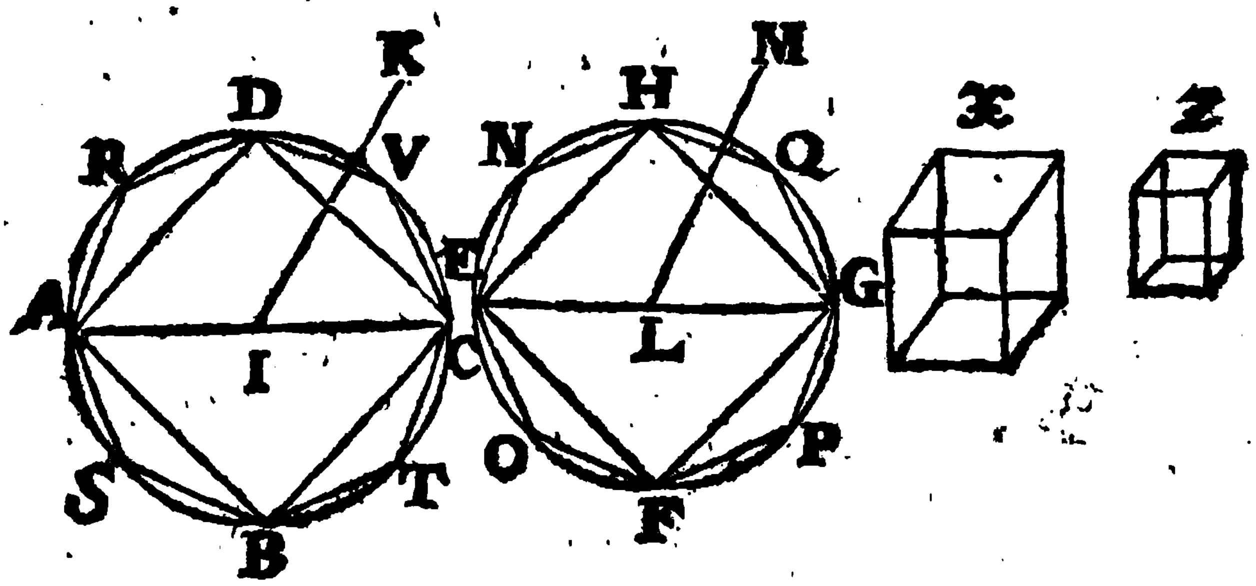
die mit dem Kegel einerley Höhe hat, größer als die Hälfte des Kegels.

Nun halbire man wieder die Kreisbogen AB ꝛc., und ziehe AE ꝛc., daß also jeder Triangel, wie AEB, größer als der zugehörige Kreisabschnitt ist; stelle auf jeden dieser Triangel AEB ꝛc. Pyramiden von einerley Höhe mit dem Kegel: so ist jede derselben größer als die Hälfte des zugehörigen Kreisabschnitts. Fährt man nun mit Halbirung der Kreisbogen, und der übrigen Construction so fort: so kommt man zuletzt auf Kegelabschnitte, die kleiner sind, als der Ueberschuß des Kegels über den dritten Theil des Cylinders. Diese Abschnitte seyen die über AE, EB ꝛc.: so ist die übrige Pyramide auf der Grundfläche AEBF ꝛc. und in gleicher Höhe mit dem Kegel, größer als der dritte Theil des Cylinders. Nun ist diese Pyramide der dritte Theil des Prisma von einerley Höhe und Grundfläche mit dem Cylinder. Folglich ist das Prisma auf der Grundfläche AEBF ꝛc. größer als der Cylinder auf dem Kreise ABCD, mit dem es einerley Höhe hat. Nun ist es aber in dem Cylinder enthalten, also kleiner, welches einander widerspricht. Folglich ist der Cylinder nicht kleiner als das Dreyfache des Kegels; aber nach dem ersten Falle auch nicht größer; folglich ist der Kegel der dritte Theil dieses Cylinders.

Der 11. Satz. Lehrsatz.

Kegel, auch Cylinder AK, EM, von gleicher Höhe, IK, LM, verhalten sich wie ihre Grundflächen, ABCD, EFGH.

Wäre dieses nicht: so wäre ABCD : EFGH = Kegel AK : X, so daß der Körper X entweder kleiner oder größer als der Kegel EM seyn müßte.



Erster Fall.

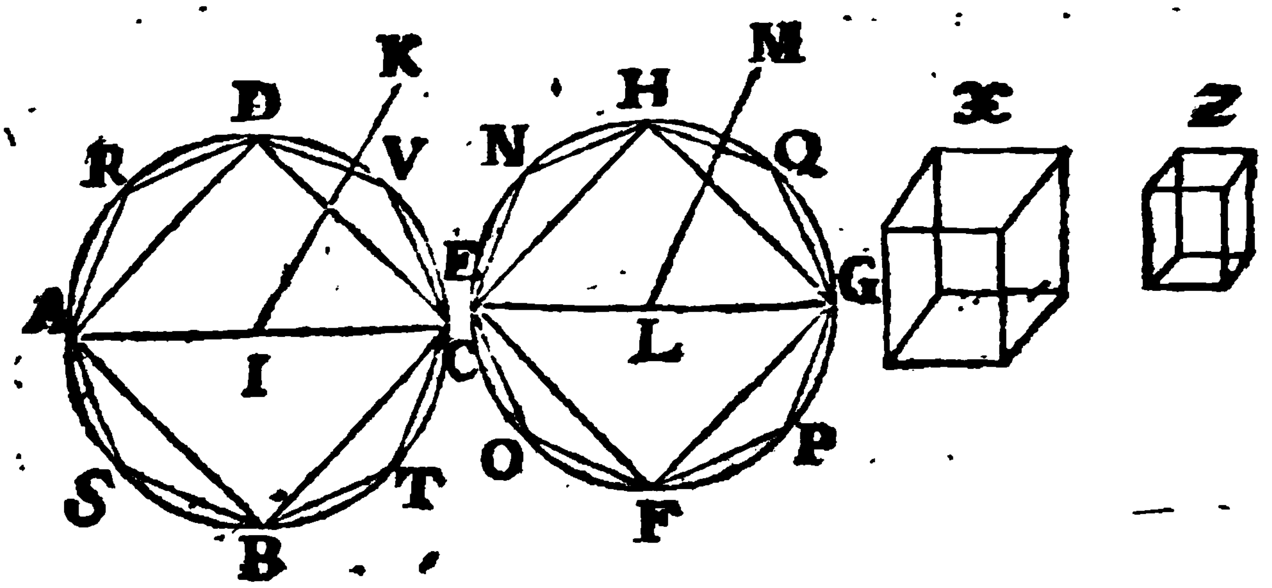
Es sey der Körper X < Kegel EM, so daß der Kegel EM = X + Z wäre.

Beschreibe in den Kreis EFGH das Quadrat EFGH: so ist solches größer als des Kreises Hälfte. Stelle auf dieses Quadrat eine Pyramide FM in gleicher Höhe mit dem Kegel EM: so ist solche größer als des Kegels Hälfte. Denn sie ist die Hälfte einer in gleicher Höhe auf das äußere Quadrat gestellten Pyramide, und der Kegel kleiner als diese letztere.

Halbirt man nun die Kreisbogen EF, FG xc., construirt alles wie beym zweyten Falle des vorigen Satzes, und fährt damit immer fort: so kommt man (10, 1. S.) auf Kegelabschnitte, die kleiner als Z sind. Es seyn solche nun die über HN xc., so ist die übrige Pyramide FM auf der Grundfläche HNE xc., und in gleicher Höhe mit dem Kegel EM größer als X.

Beschreibe in den Kreis ABCD ein dem Polygone HNE xc. ähnliches und ähnlich liegendes DRA xc., und stelle auf dasselbe eine Pyramide BK in gleicher Höhe mit dem Kegel AK.

Da (6, 20. S.) □ AC : □ EG = Polyg. DRA : Polyg. HNE xc., und (12, 1. S.) □ AC : □ EG = Kreis ABCD



: Kreis EFGH; so ist (5, 11. S.) Kr. ABCD : Kr. EFGH = Pol. DRA ꝛc. : Pol. HNE ꝛc. Nun war angenommen Kreis ABCD : Kr. EFGH = Kegel AK : X; aber (12, 6. S.) Pol. DRA ꝛc. : Pol. HNE ꝛc. = Pyr. BK : Pyr. EM. Folglich ist Kegel AK : X = Pyr. BK : Pyr. IM. Nun ist Kegel AK > Pyr. BK, weil diese in jenem enthalten ist. Folglich (5, 14. S.) ist auch X > Pyr. FM; welches dem Obigen, Pyr. FM > X, widerspricht. Folglich ist nicht Kreis ABCD : Kr. EFGH = Kegel AK : X, wenn X < Kegel EM.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß auch nicht Kreis EFGH : Kreis ABCD = Kegel EM : Y, wenn Y < Kegel AK.

Zweyter Fall.

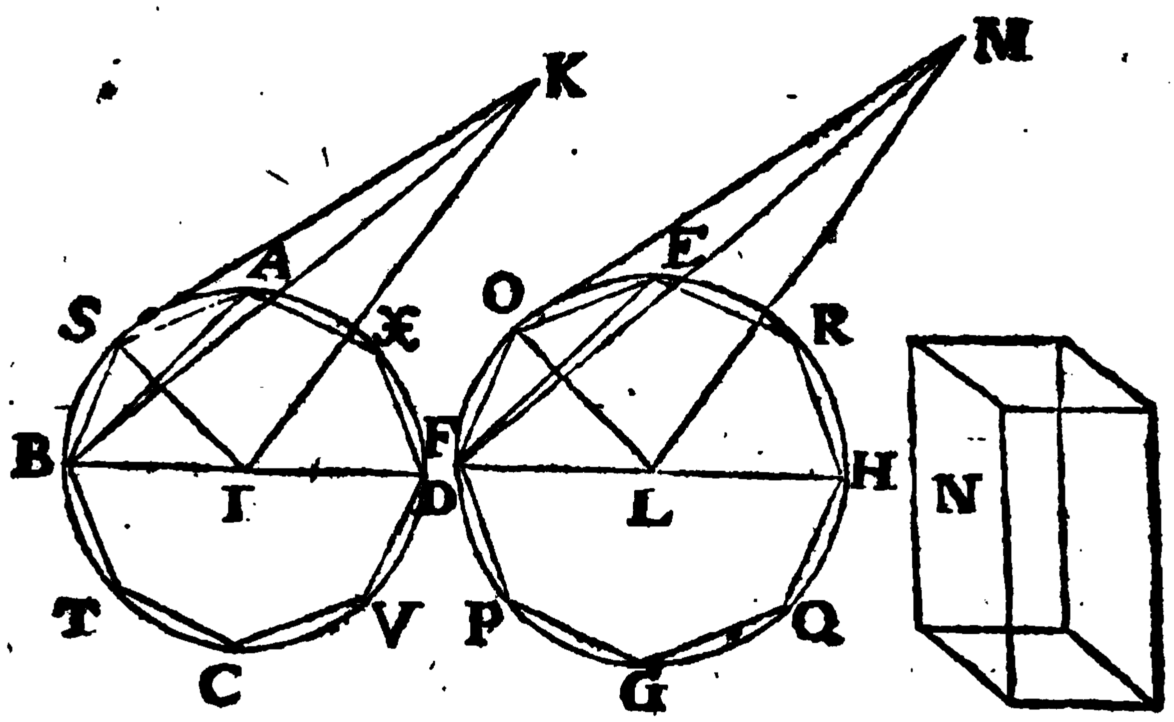
Es sey X > Kegel EM, und Kr. ABCD : Kr. EFGH = Kegel AK : X, also auch umgekehrt Kr. EFGH : Kr. ABCD = X : Kegel AK. Nun sey X : Kegel AK = Kegel EM : Y, wo also Y < Kegel EM; so ist Kreis EFGH : Kr. ABCD = Kegel EM : Y, welches nach dem ersten Falle unmöglich ist. Demnach ist nicht Kr. ABCD : Kr. EFGH = Kegel AK : X, wenn X > Kegel EM, und nach dem ersten Falle auch nicht, wenn X < Kegel EM. Folglich ist Kr. ABCD : Kr. EFGH = Kegel AK : Kegel EM.

Da nun (12, 10. S.) Cylinder dreymal so groß als Kegel von derselben Höhe und Grundfläche sind, folglich sich

sich wie die Kegel verhalten: so ist auch Kr. ABCD : Kr. EFGH = Cyl. auf ABCD : Cyl. auf EFGH.

Der 12. Satz. Lehrsatz.

Aehnliche Kegel, auch Cylinder, BK, FM, sind in dreyfacher Verhältniß der Durchmesser, BD, FH, ihrer Grundflächen.



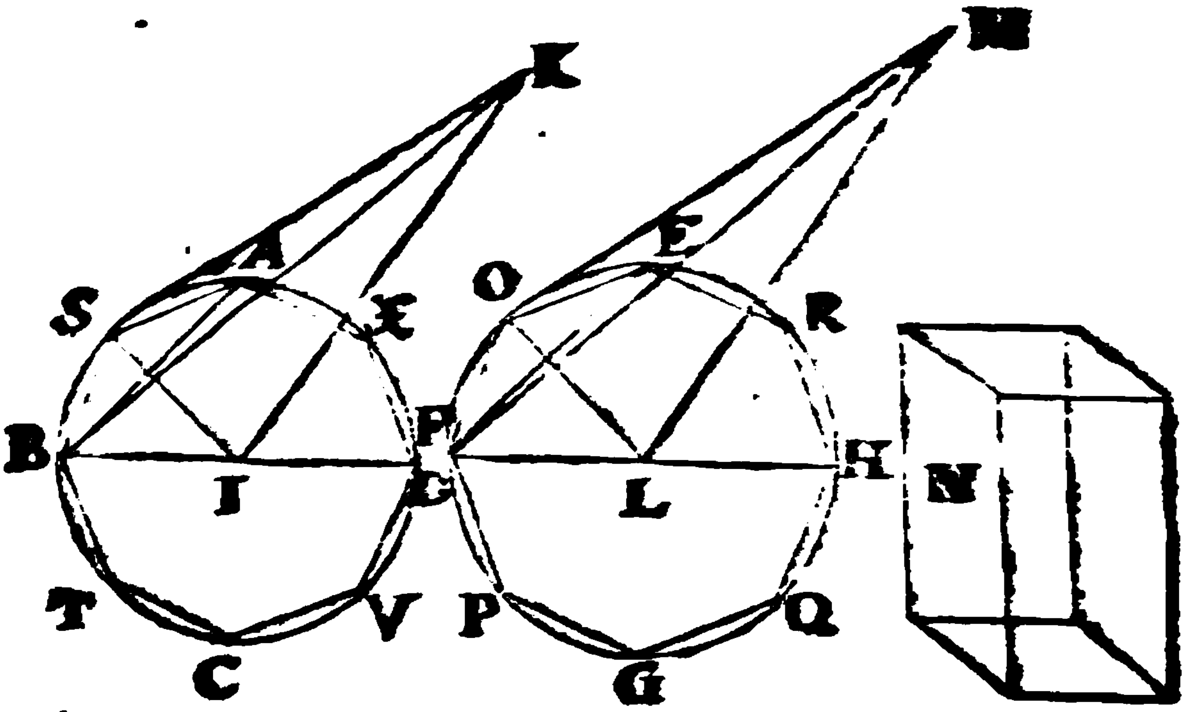
Wäre dieses nicht, so sey 3 (BD : FH) = Kegel BK : N, wo der Körper N kleiner oder größer als Kegel FM ist.

Erster Fall.

Es sey N < Kegel FM ist.

Wird hier alles wieder wie beym vorigen Satze zu Anfang des ersten Falles construirt: so erhält man auch hier zuletzt eine Pyramide GM, deren Spitze M, und Grundfläche das Polygon EOF ꝛc., und welche größer als der Körper N ist.

Beschreibe nun in den Kreis ABCD ein dem Polygon EOF ꝛc. ähnliches ASB ꝛc., und stelle auf dasselbe eine Pyramide CK, deren Spitze K ist. Eine Seite der Pyramide CK sey der △ KSB, und eine Seite der Pyramide GM der △ MOF. Ziehe IS, LO.



Da Kegel $BK \sim$ Kegel FM: so ist (11, 24. E.) $BD:FH = IK:LM$; aber $BD:FH = BI:FL$, folglich $BI:FL = IK:LM$, also verwechselt $BI:IK = FL:LM$. Nun sind bey I und L rechte Winkel, das ist, $BIK = FLM$. Folglich ist (6, 6. S.) $\triangle BIK \sim \triangle FLM$.

Da ferner $BI:IS = FL:LO$, und wegen Aehnlichkeit der Polygone, $BIS = FLO$: so ist (6, 6. S.) $\triangle BIS \sim \triangle FLO$.

Da im Vorigen $BI:IK = FL:LM$, aber $BI = IS$, und $FL = LO$: so ist $IS:IK = LO:LM$. Nun ist $SIK = OLM = R$. Folglich ist (6, 6. S.) $\triangle KSI \sim \triangle MOL$.

Da $\triangle BIK \sim \triangle FLM$, folglich $KB:BI = MF:FL$; und $\triangle BIS \sim \triangle FLO$, folglich $BI:BS = FL:FO$; so ist auch aus dem Gleichen $KB:BS = MF:FO$, also umgekehrt $SB:KB = OF:MF$.

Da $\triangle KSI \sim \triangle MOL$, folglich $KS:SI = MO:OL$, und $\triangle BIS \sim \triangle FLO$, folglich $SI:SB = OL:OF$; so ist aus dem Gleichen $KS:SB = MO:OF$. Nun war zuvor $SB:KB = OF:MF$. Folglich ist aus dem Gleichen $KS:KB = MO:MF$.

Demnach sind die Seiten der Triangel KSB, MOF, proportionirt. Folglich ist (6, 5. S.) auch $\triangle KSB \sim \triangle MOF$; folg-

folglich (11, 9. E.) Pyr. BISK ∾ Pyr. FLOM; folglich (12, 8. S.) Pyr. BISK : Pyr. FLOM = 3 (BI : LF) = 3 (BD : FH).

Werden nun von allen übrigen Punkten der Umkreise ABCD, EFGH, nach den Mittelpunkten I, L, gerade Linien gezogen, und auf die dadurch entstandenen Triangel Pyramiden, deren Spitzen K, M, sind, gestellet: so läßt sich aus vorigen Gründen zeigen, daß die Verhältniß jedes zusammengehörigen Paares solcher Pyramiden das Dreyfache der Verhältniß BD : FH sey, daß folglich die Verhältnisse aller dieser Paare gleich sind. Folglich ist (5, 12. S.) Pyr. BISK : Pyr. FLOM = alle Pyr. auf ABCD : allen Pyr. auf EFGH, das ist = ganze Pyr. CK : ganzen Pyr. GM. Folglich ist 3 (BD : FH) = Pyr. CK : Pyr. GM. Nun war angenommen 3 (BD : FH) = Kegel BK : N. Folglich ist Kegel BK : N = Pyr. CK : Pyr. GM. Nun ist, weil der Kegel die Pyr. umschließt, Kegel BK > Pyr. CK. Folglich (5, 14. S.) ist auch N > Pyr. GM; welches dem Obigen, Pyr. GM > N, widerspricht. Demnach ist nicht 3 (BD : FH) = Kegel BK : N, wenn N < Kegel FM ist.

Auf ähnliche Art zeigt man, daß auch nicht 3 (FH : BD) = Kegel FM : Z, wenn Z < Kegel BK ist.

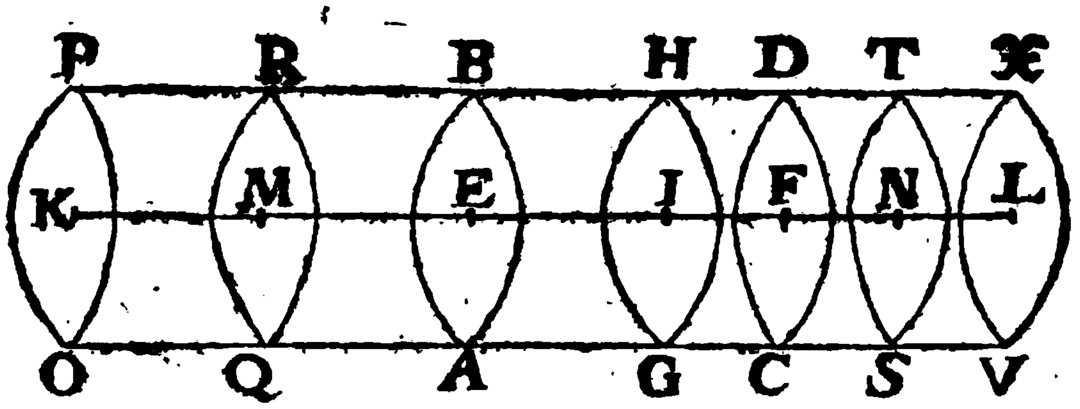
Zweyter Fall.

Es sey N > Kegel FM, und 3 (BD : FH) = Kegel BK : N, folglich auch N : Kegel BK = 3 (FH : BD). Nun sey N : Kegel BK = Kegel FM : Z, wo also (5, 14. S.) Kegel BK > Z ist. Folglich ist 3 (FH : BD) = Kegel FM : Z, welches nach dem ersten Falle unmöglich ist. Demnach ist nicht 3 (BD : FH) = Kegel BK : N, wenn N > Kegel FM ist; und nach dem ersten Falle auch nicht, wenn N < FM ist. Folglich ist 3 (BD : FH) = Kegel BK : Kegel FM.

Da nun (12, 10. S.) Cylinder dreymal so groß als Kegel von derselben Höhe und Grundfläche sind, folglich sich wie die Kegel verhalten: so ist auch Cyl. BK : Cyl. FM = 3 (BD : FH).

Der 13. Satz. Lehrsatz.

Wird ein Cylinder, AD, von einer Ebene, HG, den einander gegenüber liegenden Grundflächen, AB, CD, parallel geschnitten: so verhalten sich die abgeschnittenen Cylinder, BG, GD, wie ihre Axen, EI, IF.



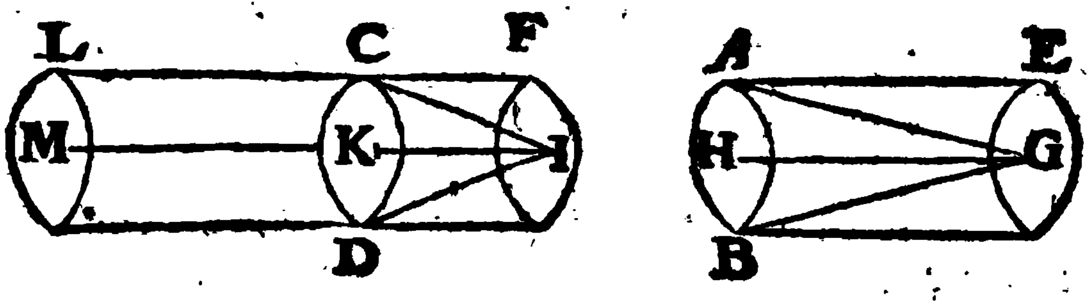
Verlängere des Cylinders, AD, Axe, EF, auf beyden Seiten nach K, L, trage auf EK eine beliebige Anzahl der EI gleiche Theile EM, MK, und auf FL eine beliebige Anzahl der IF gleiche Theile FN, NL; lege durch die Punkte M, K, N, L, Ebenen, den Grundflächen AB, CD, parallel und gleich, und vollende die Cylinder, PQ, QB, DS, SX.

Da die Cylinder, PQ, QB, BG, von gleichen Höhen, KM, ME, EI, sich (12, 11. S.) wie ihre Grundflächen verhalten; diese aber gleich sind: so sind auch die Cylinder gleich, nämlich PQ = QB = BG. Folglich ist KI von EI eben so vielfach, wie Cyl. PG vom Cyl. BG. Aus denselben Gründen ist IL von IF eben so vielfach, wie Cyl. GX vom Cyl. GD. Nun ist, wenn KI $\gtreqless$ IL, auch PG $\gtreqless$ GX. Folglich ist (5. 5. E.) EI : IF = BG : GD.

Der

Der 14. Satz. Lehrsatz.

Kegel, ABG, CDI, wie auch Cylinder, BE, DF, auf gleichen Grundflächen, AB, CD, verhalten sich wie ihre Höhen, HG, KI.



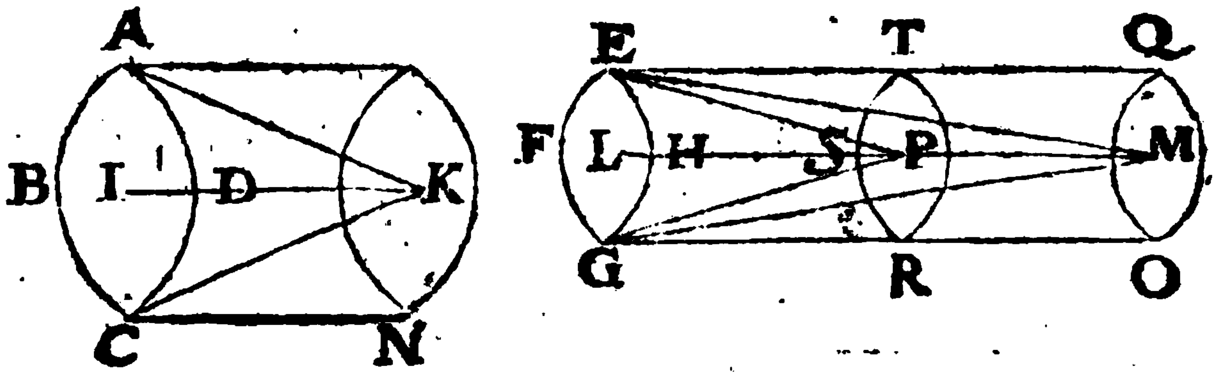
Verlängere IK nach M, mache KM = HG, und denke dir um die Axe KM einen Cylinder DL.

Da die Cylinder BE, DL, von gleichen Höhen, HG, KM, sich (12, 11. S.) wie ihre Grundflächen verhalten, diese aber gleich sind: so sind auch die Cylinder gleich, nämlich BE = DL. Da der Cylinder FM von der Ebene CD den Grundflächen parallel geschnitten ist: so ist (12, 13. S.) DL : DF = MK : KI. Nun ist DL = BE, und MK = HG. Folglich ist BE : DF = HG : KI.

Da (12, 10. S.) die Cylinder BE, DF, sich wie die Kegel ABG, CDI, verhalten: so ist auch Kegel ABG : Kegel CDI = HG : KI.

Der 15. Satz. Lehrsatz.

Sind Kegel, ACK, EGM, oder Cylinder, AN, EO, einander gleich: so verhalten sich die Grundflächen, AC, EG, umgekehrt wie die Höhen, IK, LM. Und verhalten sich die Grundflächen umgekehrt wie die Höhen: so sind die Kegel so wohl, als auch die Cylinder gleich.



Erster Theil.

Es sey Cyl. AN = Cyl. EO: so sind die Höhen IK, LM, entweder gleich oder ungleich.

Erstlich, wenn IK = LM, so ist (12, 11. S.) AN : EO = AC : EG; folglich, weil AN = EO, auch AC = EG, folglich AC : EG = LM : IK.

Zweytens, wenn LM > IK, so sey LP = IK. Lege durch P die Ebene TR den Grundflächen parallel, und denke dir auf der Grundfläche EG den Cylinder ER.

Da AN = EO, so ist (5, 7. S.) AN : ER = EO : ER. Nun ist (12, 11. S.) AN : ER = AC : EG, und (12, 13. S.) EO : ER = LM : LP. Folglich ist AC : EG = LM : LP = LM : IK.

Zweyter Theil.

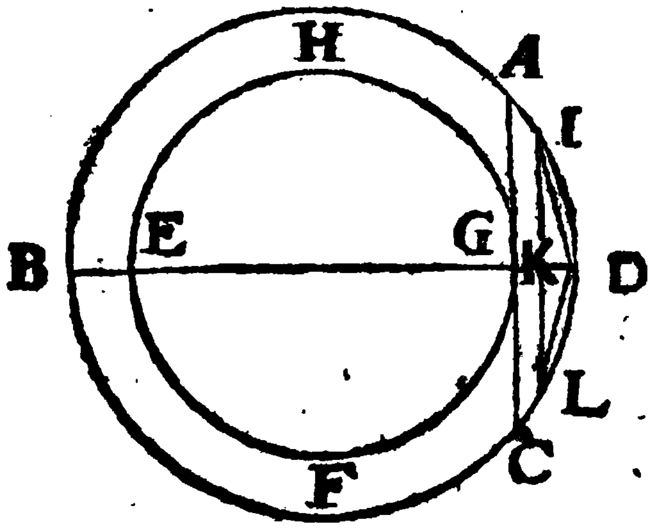
Es sey AC : EG = LM : IK, so ist nach der vorigen Construction AC : EG = LM : LP. Nun ist (12, 11. S.) AC : EG = AN : ER, und (12, 13. S.) LM : LP = EO : ER. Folglich ist AN : ER = EO : ER, folglich (5, 9. S.) AN = EO.

Dasselbe gilt auch (12, 10. S.) von den Kegeln ACK, EGM; daß nämlich auch hier AC : EG = LM : IK, wenn ACK = EGM, und daß ACK = EGM, wenn AC : EG = LM : IK ist.

Der

Der 16. Satz. Aufgabe.

Es sind zwey concentrische Kreise, ABCD, EFGH, gegeben, man soll in den größern, ABCD, ein gleichseitiges Polygon, von gerader Seitenzahl, beschreiben, doch so, daß solches den kleinern Kreis nicht berühre.



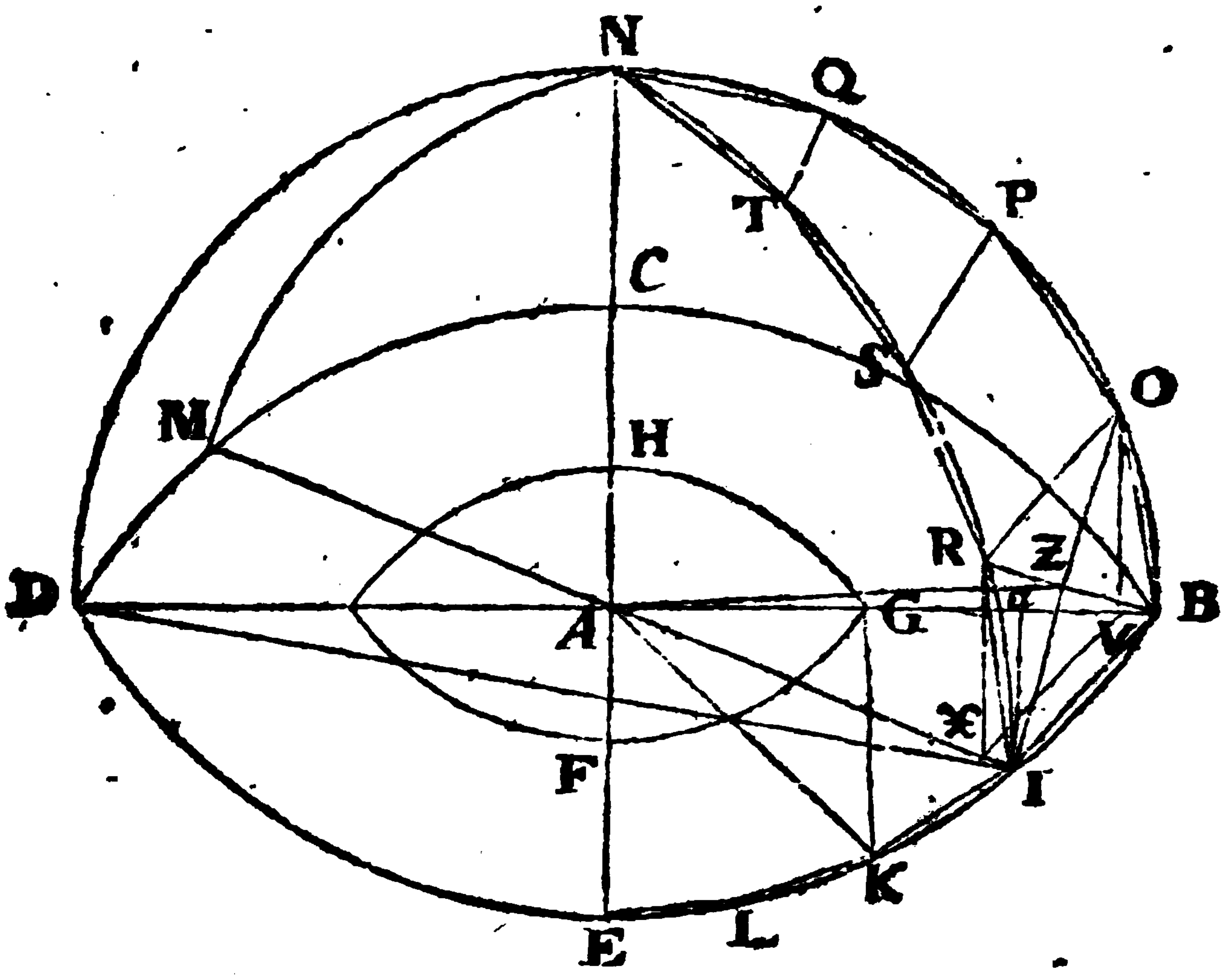
Ziehe den Durchmesser BD, und errichte auf demselben in G den Perpendikel GA, und verlängere ihn nach C; so ist (3, 16. S.) AC eine Berührungslinie des Kreises EFGH. Halbire den Umkreis BAD, und fahre mit dieser Halbirung fort: so kommst du (10, 1. S.) irgend einmal auf ein Stück ID, das kleiner ist, als AD. Fälle aus I auf BD den Perpendikel IK, verlängere ihn bis L, und ziehe ID, DL, da denn ID = DL ist.

Da IL der AC parallel ist, und letztere den Kreis berührt: so berührt ihn IL nicht, noch viel weniger berühren ihn ID, DL. Werden nun in den Kreis ABCD der ID gleiche gerade Linien an einander hängend eingetragen: so wird in den größern Kreis ein gleichseitiges Polygon von gerader Seitenzahl beschrieben, welches den kleinern Kreis nicht berührt.

Der 17. Satz. Aufgabe.

Es sind zwey concentrische Kugeln gegeben; man soll in die größere ein Polyedron beschreiben, welches mit seiner Oberfläche die kleinere Kugel nicht berühre.

Con-



C o n s t r u c t i o n.

Eine Ebene durch den gemeinschaftlichen Mittelpunkt A schneide die Kugeln: so bildet sie auf der Oberfläche jeder der beyden Kugeln einen Kreis. Denn da (11, 14. E.) die Kugel durch Umdrehung eines Halbkreises um seinen unverrückten Durchmesser entsteht, so wird, welche Lage der Halbkreis auch haben mag, die erweiterte Ebene desselben allemal auf der Oberfläche der Kugel einen Kreis bilden, und zwar einen größten, weil der Durchmesser der Kugel, welcher einerley mit dem des Halbkreises, also offenbar auch der des Kreises ist, (3, 15. S.) größer ist, als alle in dem Kreise oder in der Kugel gezogene gerade Linien. Es sey nun auf der größern Kugel Oberfläche der Kreis BCDE, und auf der kleinern Kugel Oberfläche der Kreis FGH auf diese Art entstanden. Ziehe dieses Schnittes Durchmesser BD, CE, perpendikular auf einander. In den größern der beyden concentrischen Kreise, BCDE, beschreibe (12, 16. S.) ein gleichseitiges Polygon von gerader Seitenzahl, welches den kleinern Kreis, FGH, nicht

nicht berühre. Dieses Polygons Seiten in dem Quadranten, BE, seyen BI, IK, KL, LE. Ziehe IA, und verlängere sie bis M. Errichte auf der Kreisebene BCDE in A den Perpendikel AN, der die Oberfläche der größern Kugel in N treffe. Durch AN, und jeden der beyden Durchmesser BD, IM, lege Ebenen: so werden diese, nach dem vorhin Gesagten, auf der Kugel Oberfläche auch größte Kreise bilden; deren Hälften seyen DNB, INM, welche, wie AN, (11, 18. S.) auf der Kreisebene BCDE perpendikular sind.

Da die Durchmesser DB, IM, CE, gleich sind, so sind die Halbkreise BND, INM, BED, folglich die Quadranten BN, IN, BE, auch gleich. Daher lassen sich die Seiten des Polygons, die man in BE eingetragen hat, auch in BN und IN eintragen. Diese seyen in BN die Seiten, BO, OP, QP, QN, und in IN die Seiten, IR, RS, ST, TN. Ziehe OR, PS, QT: so ist, wie nachher zu beweisen, jede der vierseitigen Figuren, IBOR, ROPS, SPQT, auch (11, 2. S.) der △ NQT in Einer Ebene.

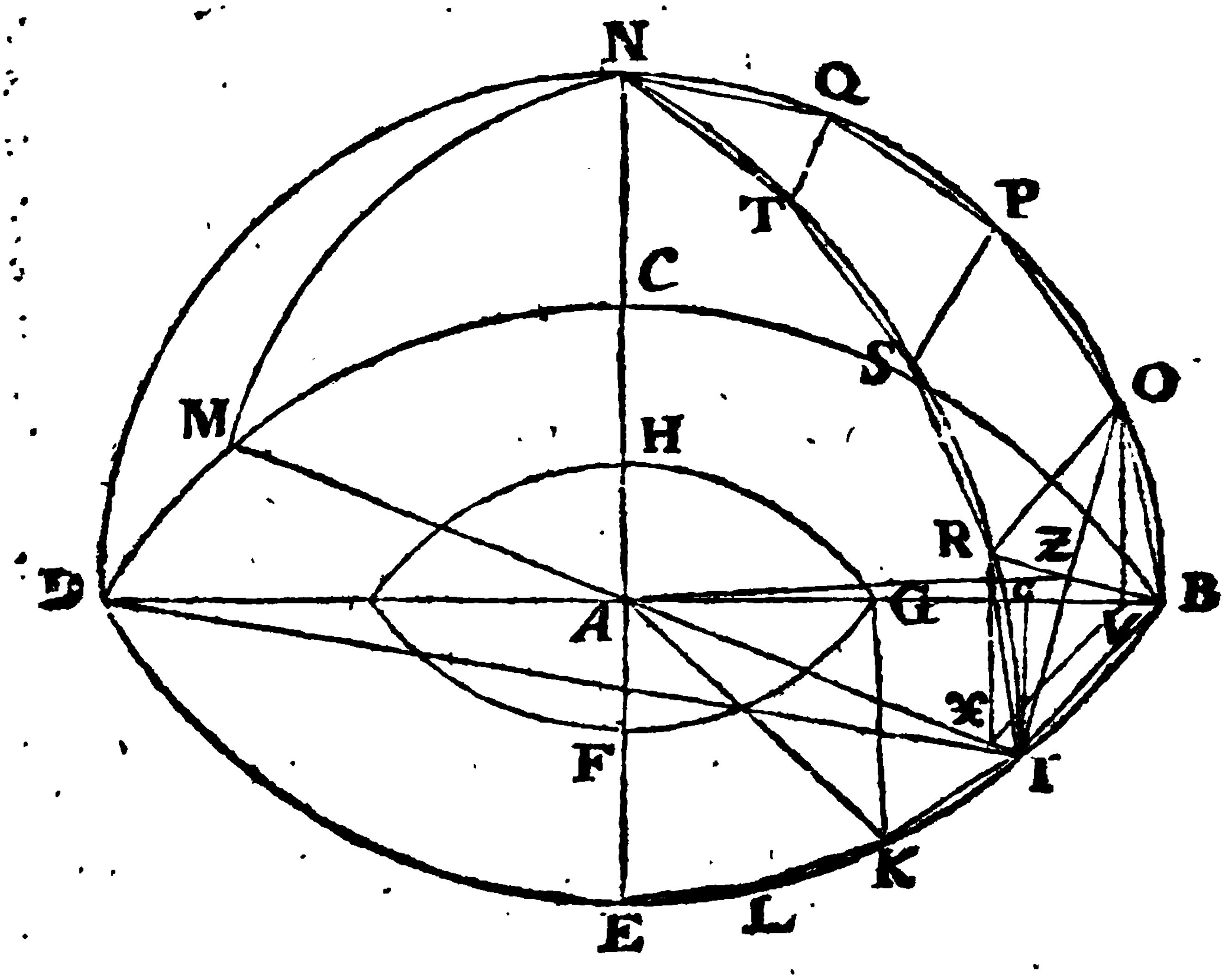
Denke dir von den Punkten, O, R, P, S, Q, T, nach der Kugel Mittelpunkte, A, gerade Linien gezogen: so entsteht zwischen den beyden Quadranten BN, IN, ein polyedrischer Körper aus Pyramiden zusammengesetzt, deren gemeinschaftliche Spitze A ist, und deren Grundflächen die Figuren IBOR, ROPS, SPQT, NQT, sind.

Construirt man nun im Quadranten BE, auf jeder der übrigen Seiten IK, KL, LE, eben so, wie auf BI, in den drey übrigen Quadranten BC, CD, DE, eben so, wie in BE, und in der andern Halbkugel wie in dieser: so entsteht in der größern Kugel ein aus Pyramiden von obgedachter Beschaffenheit zusammengesetztes Polyedron, welches mit seiner Oberfläche die kleinere Kugel nicht berührt.

Beweis. Erster Theil.

Daß jede der vierseitigen Figuren IBOR, ROPS, SPQT, in Einer Ebene sey.

Fälle



Fälle auf die Kreisebene BCDE, aus O, R, die Perpendikel OV, RX, welche (11, 38. S.) die Durchschnittslinien BD, IM, treffen, auch (11, 6. S.) parallel sind, und ziehe VX.

Da von den gleichen Halbkreisen BND, INM, gleiche Bogen BO, IR, abgeschnitten sind: so ist (3, 21. S.) ABO = AIR. Nun sind bey V, X, rechte Winkel, auch ist OB = RI. Folglich ist (1, 26. S.) OV = RX, und BV = IX.

Da BA = IA, aber BV = IX; so ist auch AV = AX, folglich BV : VA = IX : XA, folglich (6, 2. S.) VX der IB parallel. Nun waren nach Obigem OV, RX, parallel und gleich. Folglich sind (1, 33. S.) VX, RO, parallel und gleich. Folglich ist (11, 9. S.) auch RO der IB parallel. Eben so wird bewiesen, daß SP der RO, und TQ der SP parallel sey.

Da RO der IB parallel ist: so ist (11, 7. S.) die vierseitige Figur IBOR in Einer Ebene. Aus gleichen Gründen aber ist auch jede der beyden übrigen vierseitigen Figuren ROPS, SPQT, in Einer Ebene.

Be-

Beweis. Zweyter Theil.

Daß die Oberfläche des beschriebenen Polyedrons die Oberfläche der kleinern Kugel, auf welcher der größte Kreis FGH ist, nicht berühre.

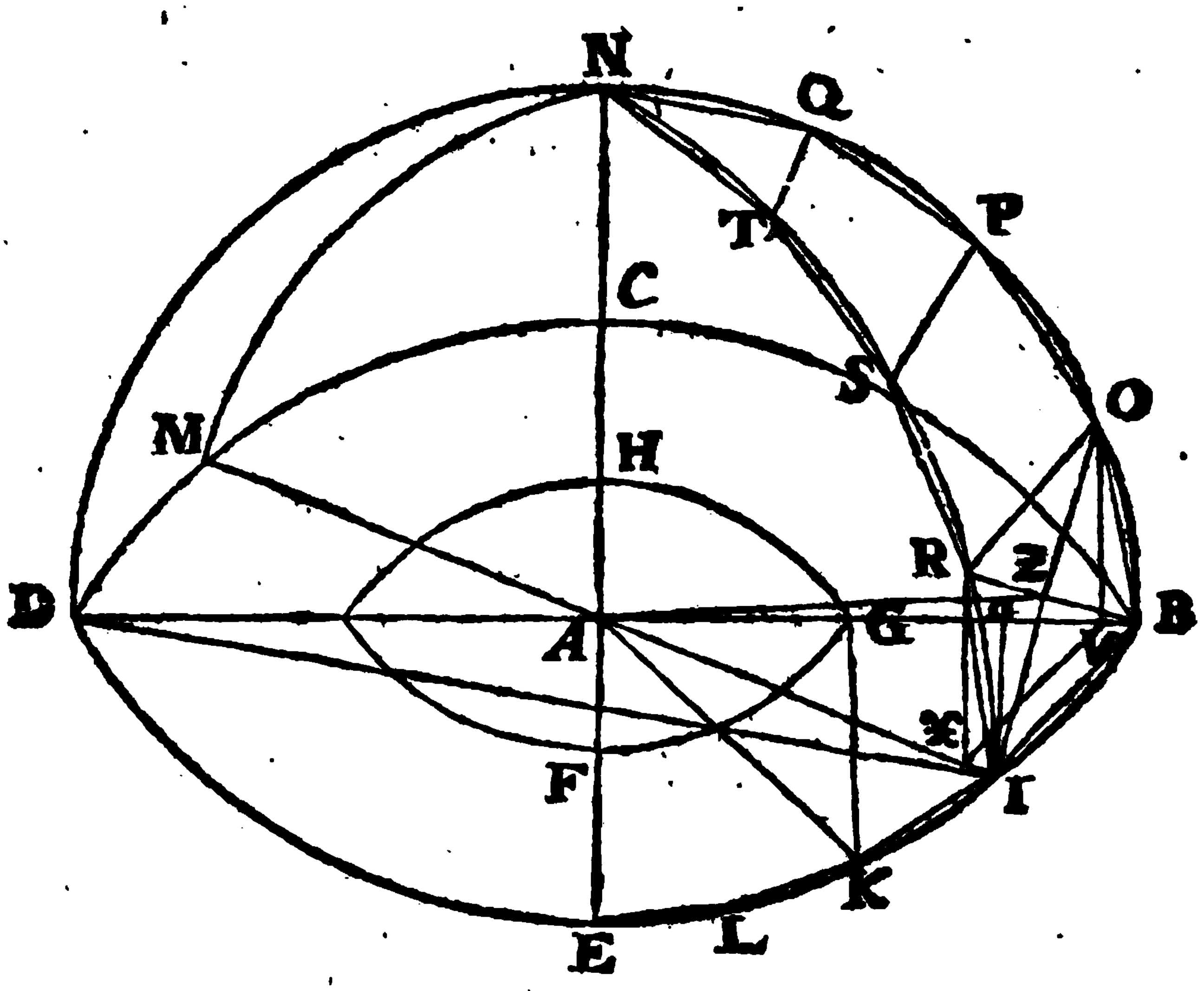
Fälle auf die vierseitige Ebene IBOR aus der Kugel Mittelpunkte A den Perpendikel AZ, der diese Ebene in Z treffe, und ziehe in der Ebene die geraden Linien BZ, ZI, ZR, ZO, auf welche daher (11, 3. E.) AZ perpendikular ist. Folglich ist (1, 47. S.) $\square AB = \square AZ + \square ZB$, und $\square AI = \square AZ + \square ZI$. Nun ist $AB = AI$, also auch $\square AB = \square AI$. Folglich ist $\square AZ + \square ZB = \square AZ + \square ZI$, folglich $\square ZB = \square ZI$, also $ZB = ZI$. Nun wird auf ähnliche Art bewiesen, daß die Linien ZO, ZR, den Linien ZB, ZI, jede für sich, gleich sind. Folglich geht ein um Z mit dem Halbmesser ZB beschriebener Kreis auch durch I, R, O, und die vierseitige Figur IBOR ist in solchen Kreis beschrieben.

Da $IB > XV$, und $XV = RO$, folglich $IB > RO$, aber $IB = IR = BO$: so ist auch IR so wohl als $BO > RO$. Folglich ist in dem um IBOR beschriebenen Kreise von den Kreisbogen IB, BO, IR, jeder größer als der Kreisbogen OR; folglich IZB ein stumpfer Winkel; folglich (2, 12. S.) $\square IB > 2 \square BZ$.

Fälle aus dem Punkte I auf BD den Perpendikel Ia. Da $BD < 2\,Da$, und (6, 1. S.) $BD : Da = BD \times Ba : Da \times aB$; so ist $BD \times Ba < 2 (Da \times aB)$. Nun ist, wenn man die ID ziehet, (6, 8. S.) $BD \times Ba = \square IB$, und $Da \times aB = \square Ia$. Folglich ist $\square IB < 2 \square Ia$, folglich, weil nach Obigem $\square IB > 2 \square BZ$, $\square Ia > \square BZ$.

Da ferner (1, 47. S.) $\square BA = \square BZ + \square ZA$, und $\square IA = \square Ia + \square Aa$; aber $BA = IA$, also $\square BA = \square IA$: so ist $\square BZ + \square ZA = \square Ia + \square Aa$. Nun war nach Obigem $\square Ia > \square BZ$. Folglich ist $\square AZ > \square Aa$, also $AZ > Aa$, folglich noch vielmehr $AZ > AG$. Nun ist AZ auf einer Seitenfläche des Polyedrons, und AG auf der Oberfläche der kleinern Kugel, perpendikular. Folglich berührt die Oberfläche des Polyedrons nicht die Oberfläche der kleinern Kugel.

Ande-



Anderer Beweis, daß AZ > AG.

Errichte auf AG in G den Perpendikel GK, und ziehe AK. Halbire den Bogen BE fortgesetzt: so bleibt einmal (10, 1. S.) ein Stück BI übrig, das kleiner ist, als ein Bogen, dessen Sehne GK wäre, folglich auch die gerade Linie BI < GK. Da nun nach dem oben Erwiesenen BZI ein stumpfer Winkel, folglich BI > BZ: so ist um so mehr GK > BZ, also auch □ GK > □ BZ. Da □ AK = □ AG + □ GK, und □ AB = □ BZ + □ AZ, aber AK = AB, also □ AK = □ AB: so ist □ AG + □ GK = □ BZ + □ AZ. Nun war □ BZ < □ GK. Folglich ist □ AZ > □ AG, also AZ > AG.

Zusatz.

Wird in eine andere Kugel, B, ein, dem in die Kugel A b schriebenen ähnliches, Polyedron beschrieben, so sind beyde P lyedra in dreyfacher Verhältniß der Durchmesser ihrer Kugel

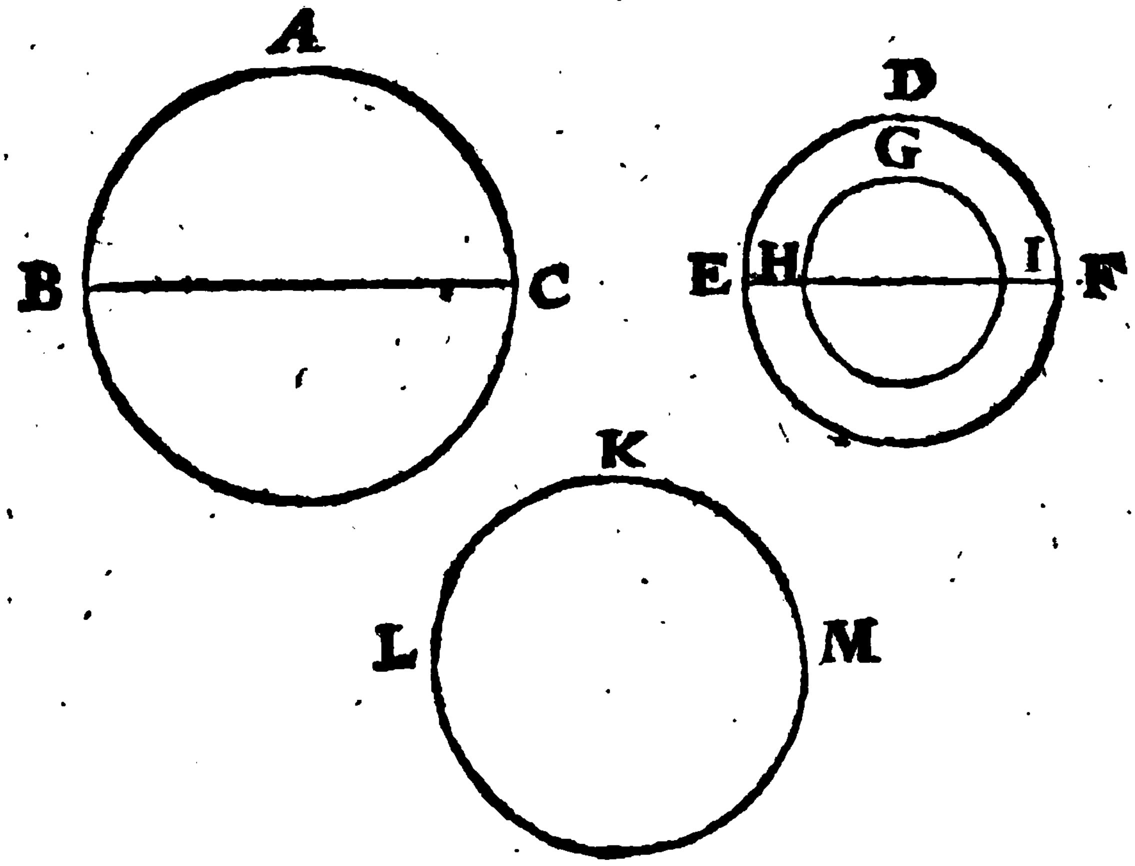
Denn, werden die Polyedra in gleich viel gleichstellige P ramiden zerlegt: so sind diese Pyramiden ähnlich, folgli (12, 18. S.) in dreyfacher Verhältniß ihrer homologen Seit

Fo

Folglich ist jedes Paar gleichstelliger Pyramiden in den beyden Kugeln, A, B, in dreyfacher Verhältniß der Halbmesser, also auch der Durchmesser dieser Kugeln. Folglich verhalten sich alle Pyramiden in der Kugel A, zu allen Pyramiden in der Kugel B, wie eine Pyramide in A, zu der gleichstelligen in B. Demnach sind auch die ganzen Polyedra in dreyfacher Verhältniß der Durchmesser der Kugeln.

Der 18. Satz. Lehrsatz.

Kugeln, ABC, DEF, sind in dreyfacher Verhältniß ihrer Durchmesser, BC, EF.

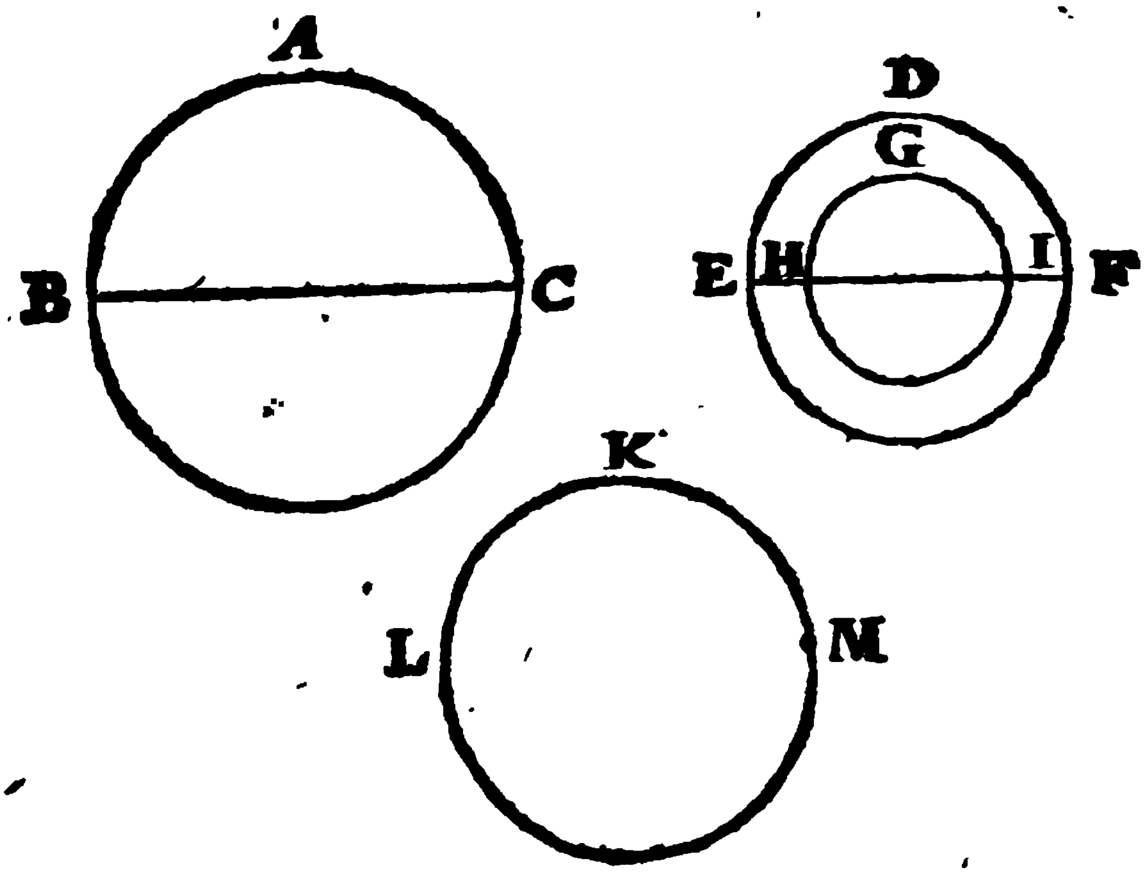


Wäre dieß nicht, so wäre 3 (BC : EF) = Kugel ABC : X, so daß der Körper X entweder kleiner oder größer als die Kugel DEF seyn müßte.

Erster Fall.

Es sey X < Kugel DEF.

Es sey eine mit der Kugel DEF concentrische Kugel HGI = X. Beschreibe (12, 17. S) in die größere Kugel DEF ein Polyedron, dessen Oberfläche die kleinere HGI nicht berührt, und in ABC ein diesem ähnliches Polyedron: so ist (12, 17. Zus.) Polyedr. ABC : Polyedr. DEF = 3 (BC : EF).



Nun ist angenommen Kugel ABC : Kugel GHI = 3 (BC : EF). Folglich ist Kugel ABC : Kugel GHI = Polyedr. ABC : Polyedron DEF; folglich, weil Kugel ABC > Polyedr. ABC, auch Kugel GHI > Polyedr. DEF. Da aber die Kugel GHI von dem Polyedron DEF eingeschlossen wird, so ist die Kugel GHI < Polyedr. DEF, welches dem Vorigen widerspricht. Demnach ist nicht 3 (BC : EF) = Kugel ABC : X, wenn X < Kugel DEF ist.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß auch nicht Kugel DEF : Z = 3 (EF : BC) sey, wenn Z < Kugel ABC ist.

Zweyter Fall.

Es sey X > Kugel DEF, und 3 (BC : EF) = Kugel ABC : X; folglich, wenn Kugel KLM = X ist, 3 (EF : BC) = Kugel KLM : Kugel ABC. Nun sey Kugel KLM : Kugel ABC = Kugel DEF : Z, wo also Kugel ABC > Z ist. Folglich ist 3 (EF : BC) = Kugel DEF : Z, welches, weil Z < Kugel ABC, nach dem ersten Falle unmöglich ist. Demnach ist nicht 3 (BC : EF) = Kugel ABC : X, wenn X > Kugel DEF, und nach dem ersten Falle auch nicht, wenn X < Kugel DEF ist. Folglich ist 3 (BC : EF) = Kugel ABC : Kugel DEF.

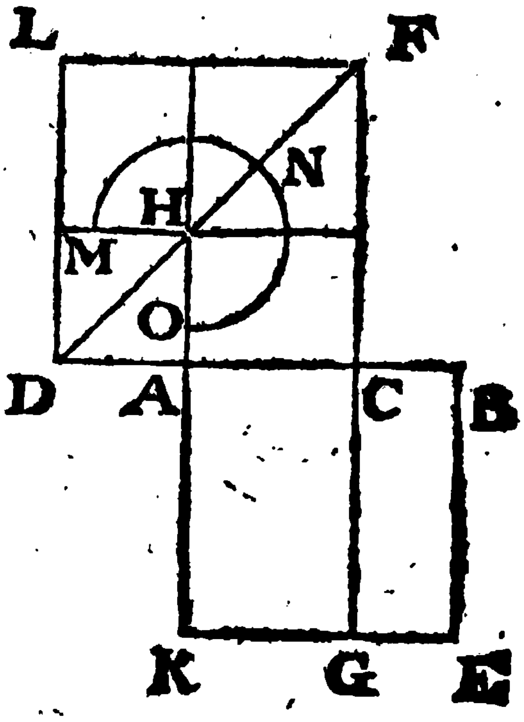
Euklid's Elemente

Dreyzehntes Buch

Und Drittes von den Körpern.

Der 1. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in C, nach stetiger Proportion geschnitten: so potenzirt die aus ihrer Hälfte, AD, und ihrem grössern Abschnitte, AC, zusammengesetzte Linie, CD, das fünffache Quadrat solcher Hälfte, AD.



Beschreibe der Linien, AB, CD, Quadrate, AE, DF; construire (wie 2, 4. S.) die Figur in DF, und verlängere FC bis G.

Da AB nach stetiger Proportion geschnitten, also (6, 3. E.) AB : AC = AC : CB; so ist (6, 17. S.) AB × CB = □ AC. Nun ist AB × CB = CE, und □ AC = FH. Folglich ist CE = FH.

Da AB = 2 AD, aber AB = AK, und AD = AH; so ist AK = 2 AH, folglich, weil (6, 1. S.) AK : AH = KC : CH, auch KC = 2 CH. Nun ist (1, 43. S.) LH + HC = 2 CH. Folglich ist KC = LH + HC, aber nach Obigem CE = FH, folglich (1, 2. G.) AE = □ AB = Gnomon MNO. Nun ist AB = 2 AD, also (6, 20. Zus.) □ AB = 4 □ AD. Folglich ist Gnomon MNO = 4 □ AD; folglich, weil DH = □ AD, (1, 2. G.) DF = 5 □ AD, wo

$AD = \frac{1}{2} AB$, und $DF = \square CD = \square (CA + AD) = \square (CA + \frac{1}{2} AB)$ ist.

Anmerkung.

Die Analysis ist das Verfahren, nach welchem man das Gesuchte als zugestanden annimmt, und durch daraus gezogene Folgerungen auf etwas wahres zugestandenes kommt. Die **Synthesis oder Composition** aber ist das Verfahren, da man das Zugestandene zum Grunde legt, und durch die daraus gezogenen Folgen zu der Folgerung oder Darstellung des Gesuchten gelangt.

Nun sey die gerade Linie AB in C nach stetiger Proportion geschnitten, daß AC der größere Abschnitt sey, und AD, die Hälfte der AB, ihr gerade fort angesetzt: so soll bewiesen werden, daß $\square CD = 5 \square AD$ sey.

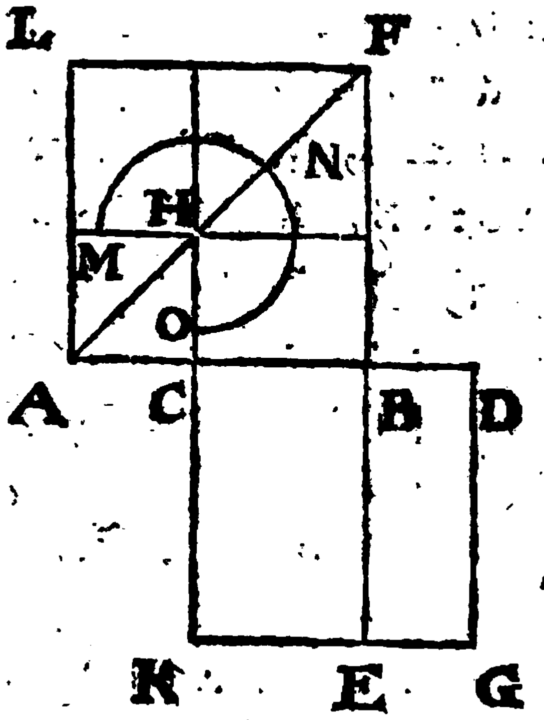
1) **Analysis.** Es sey richtig, daß $\square CD = 5 \square AD$. Nun ist (2, 4. S.) $\square CD = \square AC + \square AD + 2 (AC \times AD)$. Folglich ist $\square AC + \square AD + 2 (AC \times AD) = 5 \square AD$; folglich ist (1, 3. G.) $\square AC + 2 (AC \times AD) = 4 \square AD$. Nun ist $BA = 2 AD$, also $2 (AD \times AC) = BA \times AC$; auch ist, weil AB in C nach stetiger Proportion geschnitten, $BA : AC = AC : CB$, also $AB \times BC = \square AC$. Folglich ist $BA \times AC + AB \times BC = 4 \square AD$. Nun ist (2, 2. S.) $BA \times AC + AB \times BC = \square AB$. Folglich $4 \square AD = \square AB$, welches, da $2 AD = AB$ ist, auch in der That so ist.

2) **Composition.** Da $\square AB = 4 \square AD$; aber (2, 2. S.) $\square AB = BA \times AC + AB \times BC$: so ist $BA \times AC + AB \times BC = 4 \square AD$. Nun ist $BA \times AC = 2 (AD \times AC)$, und $AB \times BC = \square AC$. Folglich $\square AC + 2 (AD \times AC) = 4 \square AD$; folglich (1, 2. G.) $\square AC + \square AD + 2 (AD \times AC) = 5 \square AD$. Nun ist (2, 4. S.) $\square AC + \square AD + 2 (AD \times AC) = \square DC$. Folglich ist $\square DC = 5 \square AD$, das ist $\square (AC + \frac{1}{2} AB) = 5 \square \frac{1}{2} AB$.

Der

Der 2. Satz. Lehrsatz.

Potenzirt eine gerade Linie, AB, das fünffache Quadrat eines ihrer Abschnitte, AC: so wird das Doppelte solches Abschnitts, CD, in B, nach stetiger Proportion geschnitten, so daß der größere Abschnitt, CB, der Rest erstgedachter Linie, AB, ist.



Beschreibe der Linien, AB, CD, Quadrate, AF, CG; vollende (wie 2, 4. S.) die Figur in AF, und verlängere FB bis E.

Da □ AB = 5 □ AC, das ist AF = 5 AH: so ist Gnomon MNO = 4 AH. Nun ist DC = 2 AC, also (6, 20. Zus.) □ DC = 4 □ AC, das ist, CG = 4 AH. Folglich ist Gnomon MNO = CG.

Da DC = 2 AC, aber DC = CK, und AC = CH: so ist CK = 2 CH, folglich KB = 2 BH; folglich, weil LH + HB = 2 HB ist, LH + HB = KB. Nun war Gnomon MNO = CG. Folglich ist (1, 3. S.) HF = BG; aber BG = CD × DB, weil CD = DG ist, und HF = □ BC, folglich CD × DB = □ BC; folglich (6, 17. S.) CD : BC = BC : DB. Demnach ist CD, das ist 2 AC, nach stetiger Proportion in B geschnitten; auch ist (folgender Lehnsatz) CD > BC, folglich BC > DB.

Lehnsatz.

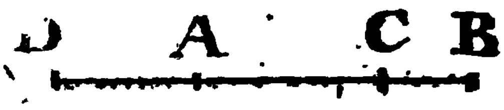
Daß CD, das ist 2 AC, > BC sey, wird so bewiesen:

Wäre nicht 2 AC > BC, so sey, wenn es möglich, BC = 2 AC, folglich □ BC = 4 □ AC, folglich □ BC + □ AC = 5 □ AC. Nun ist angenommen □ BA = 5 □ AC. Folglich wäre □ BA = □ BC + AC, welches (2, 4. S.) unmöglich ist. Demnach ist nicht BC = 2 AC.

Nähme man aber $BC > 2 AC$ an, so würde aus ähnlichen Schlüssen folgen, daß $\square AB < \square CB + \square AC$ wäre, welches noch viel weniger Statt haben kann. Folglich muß $2 AC > BC$ seyn.

Anmerkung.

Es seyen DA, AC, die beyden Abschnitte der geraden Linie DC; auch sey $AB = 2 AD$, und $\square CD = 5 \square AD$: so soll bewiesen werden, daß $AB : AC = AC : CB$, und $AC > CB$ sey.

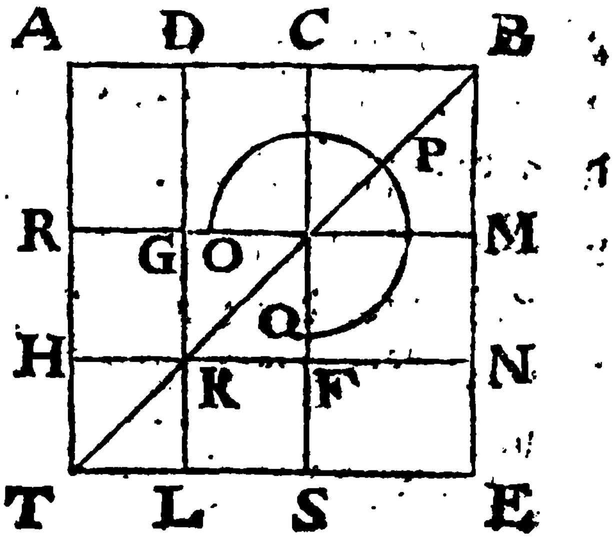


1) Analysis. Man nehme als erwiesen an, daß $AB : AC = AC : CB$, so ist (6. 17. S.) $AB \times BC = \square AC$. Nun ist, weil $AB = 2 AD$, $BA \times AC = 2 (DA \times AC)$. Folglich ist $AB \times BC + BA \times AC$, das ist (2, 2. S.) $\square AB = \square AC + 2 (DA \times AC)$; aber $\square AB = 4 \square AD$, folglich $\square AC + 2 (DA \times AC) = 4 \square AD$, folglich $\square AC + \square AD + 2 (DA \times AC)$, das ist (2, 4. S.) $\square CD$, $= 5 \square AD$, wie es auch vermöge der Annahme ist.

2) Composition. Da $\square CD = 5 \square AD$; aber (2, 4. S.) $\square CD = \square AD + \square AC + 2 (DA \times AC)$: so ist $\square AD + \square AC + 2 (DA \times AC) = 5 \square AD$; folglich $\square AC + 2 (DA \times AC) = 4 \square AD$. Nun ist $2 (DA \times AC) = BA \times AC$, und $4 \square AD = \square AB =$ (2, 2. S.) $AB \times BC + AB \times AC$. Folglich ist $AB \times BC + AB \times AC = BA \times AC + \square AC$, folglich $AB \times BC = \square AC$, folglich $AB : AC = AC : CB$; und, weil $AB > AC$, auch $AC > CB$.

Der 3. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in C, nach stetiger Proportion geschnitten: so potenzirt die, aus dem kleinern Abschnitte, BC, und der Hälfte des größern, DC, zusammenmengesetzte Linie, BD, das fünffache Quadrat der Hälfte des größern Abschnittes, DC.

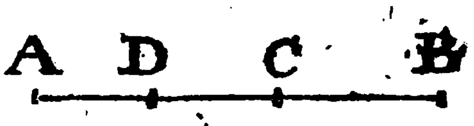


Beschreibe der Linie AB, Quadrat AE, und vollende die Figur.

Da $AC = 2\,DC$, so ist $\square\,AC = 4\,\square\,DC$, das ist, $RS = 4\,FG$. Nun ist (6, 17. S.) $AB \times BC = \square\,AC$, das ist, $CE = RS$. Folglich ist $CE = 4\,FG$.

Da $AD = DC$, also (1, 34. S.) auch $HK = KF$: so ist $GF = HL$, folglich $GK = KL$, das ist, $MN = NE$, folglich (1, 36. S.) $MF = FE$. Nun ist (1, 43. S.) $MF = CG$. Folglich ist $CG = FE$, folglich, wenn CN hinzukommt, Gnomon $OPQ = CE$, oder nach Obigem, $= 4\,FG$, folglich $DN = 5\,FG$. Nun ist $DN = \square\,DB$, auch $FG = \square\,DC$. Folglich ist $\square\,DB = 5\,\square\,DC$, das ist, $\square\,(BC + \frac{1}{2}\,AC) = 5\,\square\,\frac{1}{2}\,AC$.

Anmerkung.



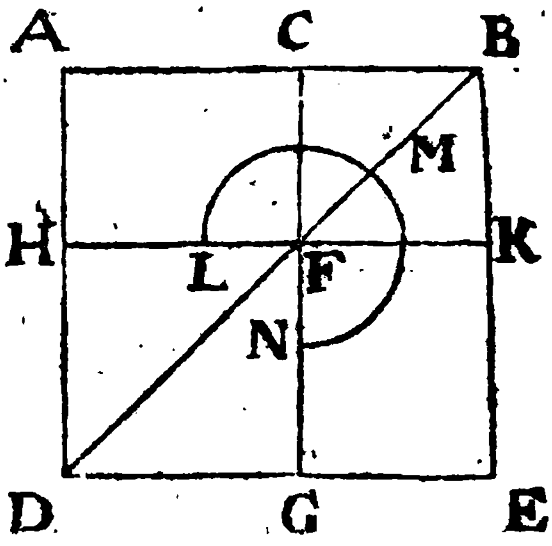
Es sey AB in C nach stetiger Proportion geschnitten, AC der größere Abschnitt, und $CD = \frac{1}{2}\,AC$: so soll bewiesen werden, daß $\square\,BD = 5\,\square\,CD$ sey.

1) Analysis. Man nehme als erwiesen an, daß $\square\,BD = 5\,\square\,CD$: so ist, weil (2, 6. S.) $\square\,BD = AB \times BC + \square\,CD$, auch $AB \times BC = 4\,\square\,CD$. Nun ist nach der Voraussetzung $AB \times BC = \square\,AC$. Folglich ist $\square\,AC = 4\,\square\,CD$, welches, weil $AC = 2\,CD$ ist, in der That so ist.

2) Composition. Da $AC = 2\,DC$, so ist $\square\,AC = 4\,\square\,DC$, aber (6, 17. S.) $\square\,AC = AB \times BC$, folglich $AB \times BC = 4\,\square\,DC$, folglich $AB \times BC + \square\,DC$, das ist (2, 6. S.) $\square\,DB$, $= 5\,\square\,DC$.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

Wird eine gerade Linie, AB, in C, nach stetiger Proportion geschnitten: so sind die beyden Quadrate, das der ganzen, AB, und des kleinern Abschnitts, CB, zusammen dem dreyfachen Quadrate des größern Abschnitts, AC, gleich.



Beschreibe der Linie AB Quadrat ADEB, und vollende die Figur.

Da AB : AC = AC : CB; so ist AB × CB = □ AC, das ist, AK = HG.

Da (1, 43. S.) AF = FE, so ist, wenn CK hinzukommt, AK = CE, folglich CE + AK = 2 AK = 2 HG, weil nach Obigem AK = HG ist. Nun ist CE + AK = Gnomon LMN + CK. Folglich ist Gnomon LMN + CK = 2 HG, folglich Gnomon LMN + CK + HG = 3 HG. Nun ist Gnomon LMN + CK + HG = AE + CK = □ AB + □ BC, und HG = □ AC. Folglich ist □ AB + □ BC = 3 □ AC.

Anmerkung.

Es sey AB in C nach stetiger Proportion geschnitten, daß der größere Abschnitt AC sey: so soll bewiesen werden, daß □ AB + □ BC = 3 □ AC sey.

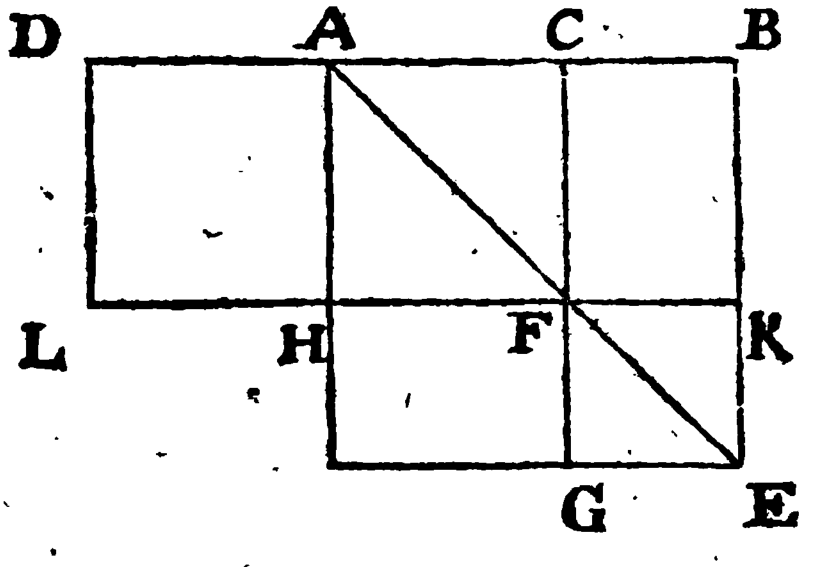
1) Analysis. Da □ AB + □ BC = 3 □ AC, aber (2, 7. S.) □ AB + □ BC = 2 (AB × BC) + □ AC: so ist 2 (AB × BC) + □ AC = 3 □ AC, folglich 2 (AB × BC) = 2 □ AC, folglich AB × BC = □ AC, welches, da AB in C nach stetiger Proportion geschnitten worden, (6, 17. S.) richtig ist.

2) Com-

2) **Composition.** Da AB : AC = AC : CB, folglich (6, 17. S.) AB × CB = □ AC: so ist 2 (AB × CB) = 2 □ AC, folglich 2 (AB × BC) + □ AC = 3 □ AC. Nun ist (2, 7. S.) 2 (AB × BC) + □ AC = □ AB + □ BC. Folglich ist □ AB + □ BC = 3 □ AC.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

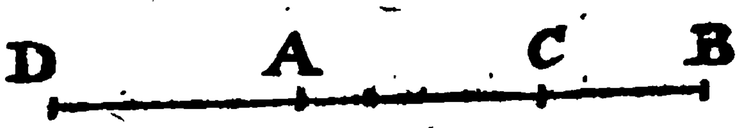
Wird eine gerade Linie, AB, in C, nach stetiger Proportion geschnitten, und ihr eine dem größern Abschnitte, AC, gleiche Linie, AD, gerade fort angesetzt: so ist die zusammengesetzte Linie, DB, in A, nach stetiger Proportion geschnitten, und der größere Abschnitt die erstgedachte Linie, AB.



Beschreibe der Linie AB Quadrat AE, und vollende die Figur.

Da AB : AC = AC : CB, so ist (6, 17. S.) AB × CB = □ AC, das ist, CE = CH; aber (1, 43. S.) CH = DH, und CE = HE, folglich DH = HE; folglich, wenn HB hinzukommt, DK = AE, das ist, BD × DA = □ AB, folglich (6, 17. S.) BD : AB = AB : DA, und, weil BD > AB, auch AB > DA.

Anmerkung.



Es sey AB in C nach stetiger Proportion geschnitten, AC > CB, und der AB die AD = AC gerade fort angesetzt: so soll bewiesen werden, daß DB : BA = BA : AD sey.

1) **Analysis.** Da DB : BA = BA : AD, aber AD = AC; so ist DB : BA = BA : AC, folglich (5, 19. Zus.) DB : DA = AB : BC, folglich (5, 17. S.) BA : AD = AC : CB. Nun ist AD = AC. Folglich ist BA : AC = AC : CB, wie vorausgesetzt wurde.

2) **Composition.** Da BA : AC = AC : CB, aber AC = AD; so ist BA : AD = AC : CB, folglich (5, 18. S.) BD : DA = BA : BC, folglich (5, 19. Zus.) BD : BA = BA : AC. Nun ist AC = AD. Folglich ist BD : BA = BA : AD, und BA > AD.

Der 8. Satz. Lehrsatz.

Wird eine Rationallinie, AB, in C, nach stetiger Proportion geschnitten: so ist jeder Abschnitt, AC, CB, eine Apotome.

Verlängere BA bis D, und mache AD = $\frac{1}{2}$ AB: so ist (13, 1. S.) □ CD = 5 □ AD. Demnach verhalten sich □ CD, □ DA, wie Zahlen, und sind folglich (10, 6. S.) commensurabel. Nun ist DA = $\frac{1}{2}$ AB rational, und daher auch □ DA. Folglich ist (10, 6. S.) auch □ CD, also (10, 8. S.) CD selbst rational.

Da sich aber die Quadrate der CD, AD, nicht wie Quadratzahlen verhalten: so sind (10, 9. S.) CD, AD, in Länge incommensurabel. Demnach sind CD, AD, rational bloß in Potenz commensurabel; folglich (10, 74. S.) AC eine Apotome.

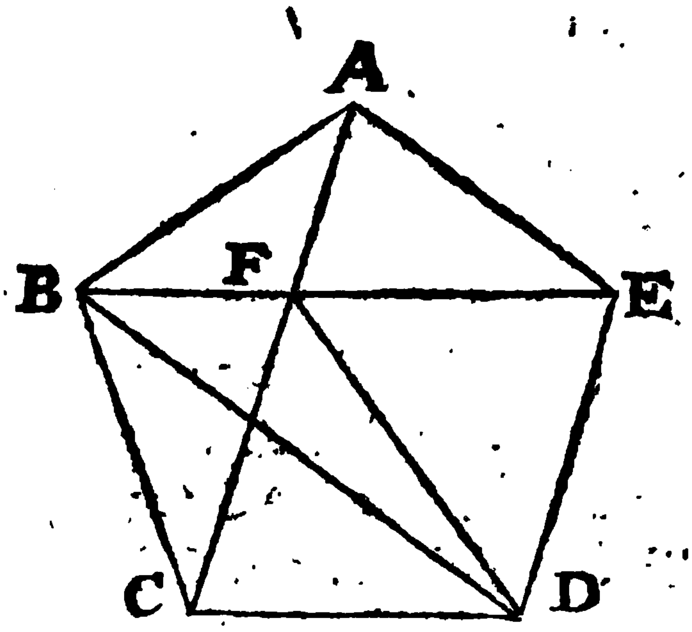
Da AB in C nach stetiger Proportion geschnitten, also (6, 17. S.) AB × BC = □ AC ist: so ist (10, 98. S.) CB die erste Apotome.

Der

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Sind in einer fünfseitigen Figur von gleichen Seiten, ABCDE, drey Winkel, sie mögen auf einander folgen, oder nicht, gleich: so ist die Figur gleichwinklig.

Erster Fall.



Wenn drey auf einander folgende Winkel A, B, C, gleich sind.

Ziehe AC, BE, FD.

Da in den △ △ EAB, ABC, nach der Voraussetzung A = B, und CB = BA = AE: so ist (1, 4. S.) AC = BE, BCA = BEA, und ABE = CAB. Da hiernach im △ AFB, ABE = CAB: so ist (1, 6. S.) AF = BF, und vorher auch AC = BE, folglich (1, 3. S.) FC = FE. Nun ist in den △ △ CFD, DFE, auch CD = DE, und FD gemein. Folglich ist (1, 8. S.) FCD = FED; aber nach Obigem BCA = AEB, folglich (1, 2. S.) BCD = AED. Nun ist auch angenommen BCD = A = B. Folglich ist AED = A = B. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß CDE = A = B sey. Folglich ist ABCDE gleichwinklig.

Zweyter Fall.

Wenn drey nicht auf einander folgende Winkel, A, C, D, gleich sind.

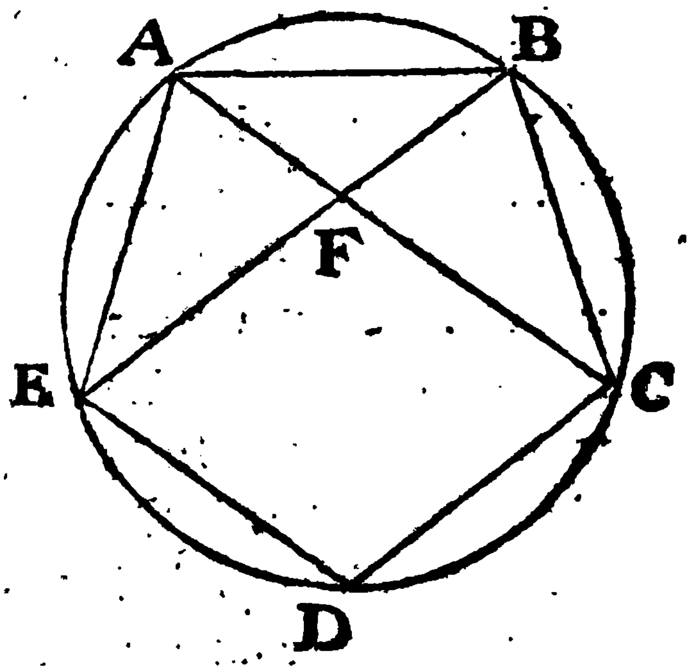
Ziehe BD.

Da in den △ △ ABE, BCD, nach der Voraussetzung, A = C, BA = BC, AE = CD: so ist (1, 4. S.) BE = BD, AEB = CDB, und (1, 5. S.) BED = BDE, folglich (1, 2. S.) AED = CDE. Nun ist auch angenommen CDE = A = C. Folglich ist AED = A = C. Auf ähnliche Art beweiset man auch, daß ABC = A = C. Folglich ist ABCDE gleichwinklig.

Der

Der 8. Satz. Lehrsatz.

In einer fünfseitigen Figur von gleichen Seiten und Winkeln, ABCDE, schneiden die innerhalb zweyer auf einander folgenden Winkel, A, B, gezogenen Diagonalen, BE, AC, einander in stetiger Proportion, und der größere Abschnitt ist der Seite der Figur gleich.



Beschreibe (4, 14. S.) um die Figur einen Kreis.

Da in den △△ BAE, ABC, nach der Voraussetzung A = B, EA = AB = BC: so ist (1, 4. S.) BE = AC, und BAC = ABE; folglich (1, 32. S.) AFE = 2 BAF, aber (6, 33. S.) EAC = 2 BAC, folglich EAC = AFE, folglich (1, 6. S.) FE = EA = AB.

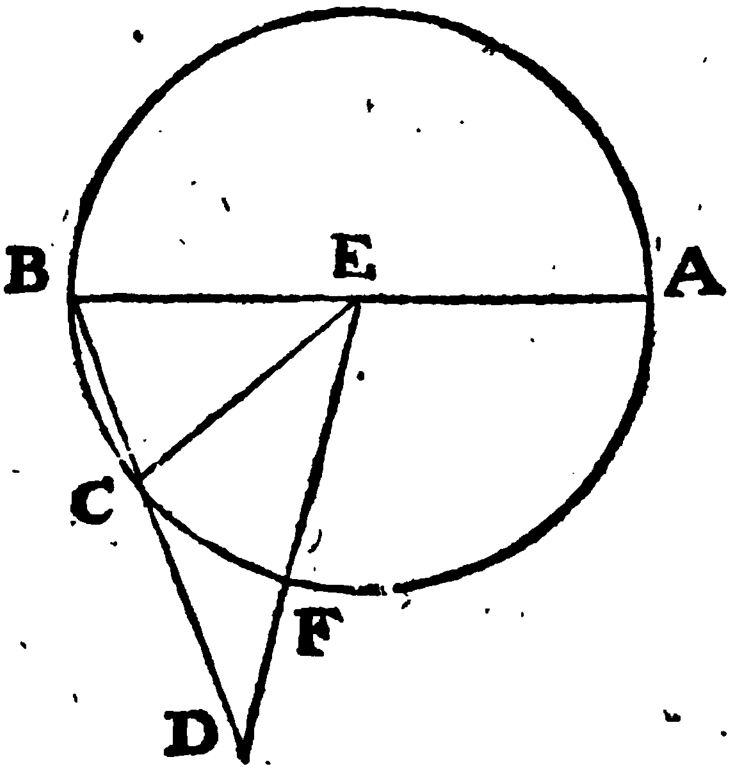
Da EA = AB, folglich (1, 5. S.) ABE = AEB, aber nach Obigem ABE = BAF: so ist AEB = BAF, folglich, da den △△ ABE, ABF, der Winkel ABE gemein ist, auch BAE = AFB, folglich diese Triangel gleichwinklig. Folglich ist (6, 4. S.) EB : BA = AB : BF, also, weil BA = EF, auch BE : EF = EF : FB; wo denn, weil BE > EF, auch EF > FB. Demnach ist die Diagonale BE in F nach stetiger Proportion geschnitten, und der größere Abschnitt EF = AB.

Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß auch AC in F nach stetiger Proportion geschnitten, und der größere Abschnitt = AB sey.

Der 9. Satz. Lehrsatz.

Werden die Seiten, CD, BC, einer sechsseitigen und einer zehnseitigen in denselben Kreis beschriebenen Figur gera-

gerade fort an einander gesetzt: so ist die ganze Linie, BD, nach stetiger Proportion geschnitten, und der größere Abschnitt die Seite, CD, der sechsseitigen Figur.



Suche des Kreises Mittelpunkt E, ziehe EB, EC, ED, und verlängere BE bis A.

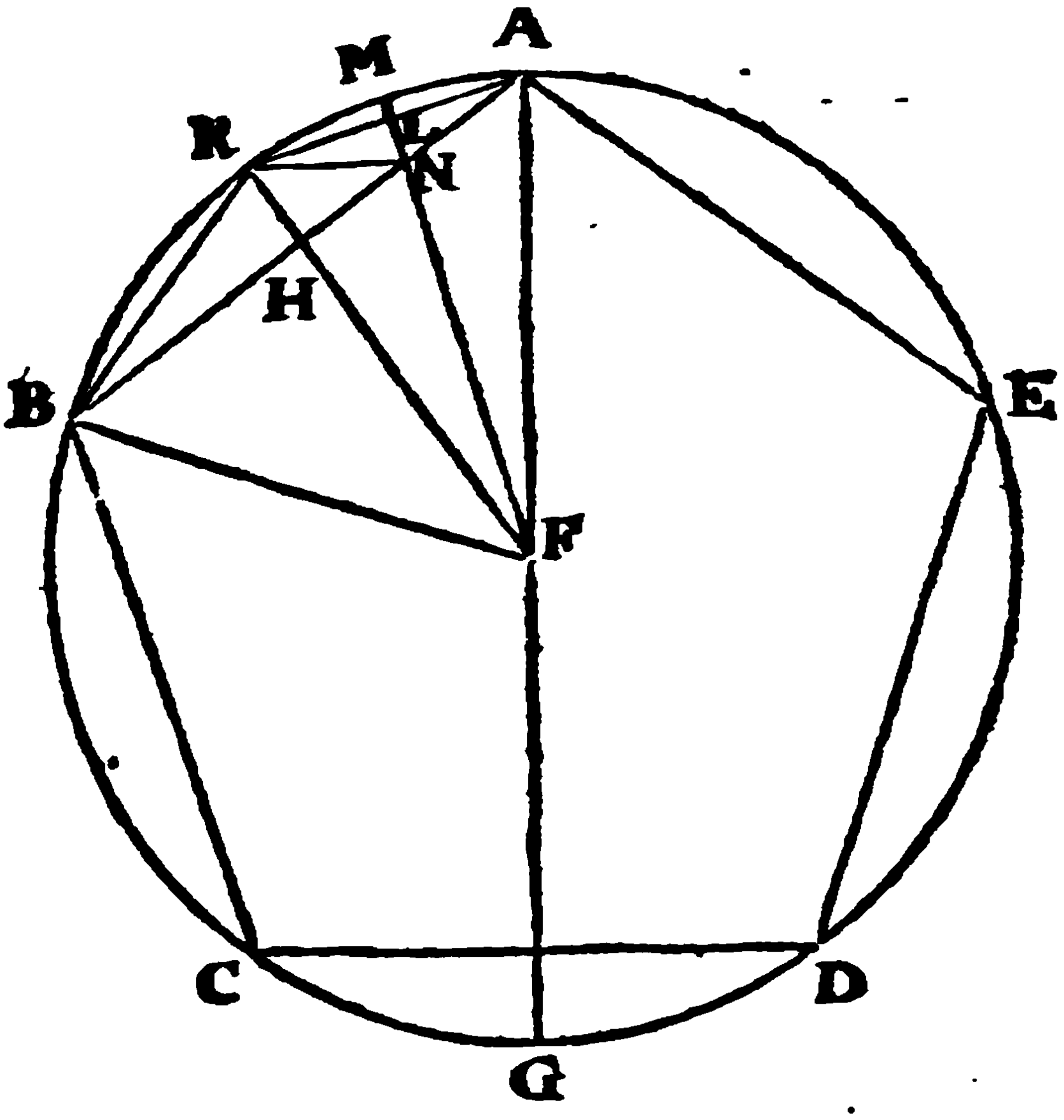
Da BC die Seite der zehnseitigen Figur: so ist Bogen ACB = 5 Bogen BC, folglich Bogen AC = 4 Bogen BC. Nun ist (6, 33. S.) Bogen AC : Bogen BC = AEC : CEB. Folglich ist auch AEC = 4 CEB.

Da (1, 5. S.) EBC = ECB, so ist (1, 32. S.) AEC = 2 ECB. Da (4, 15. S.) EC = CD, folglich (1, 5. S.) CED = CDE: so ist (1, 32. S.) ECB = 2 EDC; aber nach Obigem AEC = 2 ECB, folglich AEC = 4 EDC. Nun ist nach Obigem auch AEC = 4 CEB. Folglich ist EDC = CEB; folglich, da den △ △ BEC, BED, der Winkel EBD gemein ist, auch BED = ECB, folglich sind diese Triangel gleichwinklig. Folglich ist (6, 4. S.) DB : BE = EB : BC, also, weil BE = CD, auch BD : DC = DC : CB; wo dann, weil BD > DC, auch DC > CB ist. Demnach ist BD in C nach stetiger Proportion geschnitten, und der größere Abschnitt DC die Seite der sechsseitigen Figur.

Der 10. Satz. Lehrsatz.

Die Seite, AB, einer in den Kreis beschriebenen fünfseitigen Figur, ABCDE, potenzirt die Quadrate der Seiten einer in denselben Kreis beschriebenen sechsseitigen und zehnseitigen Figur.

Nimm



Nimm des Kreises Mittelpunkt F, ziehe AF, und verlängere sie bis G. Ziehe FB, fälle auf AB aus F den Perpendikel FH, und verlängere ihn bis K. Ziehe AK, KB; fälle auf AK aus F den Perpendikel FL, und verlängere ihn bis M; ziehe KN.

Da die Halbkreise ABCG, AEDG, gleich, auch die Bogen ABC, AED, gleich sind: so sind die Bogen CG, DG, gleich; folglich ist CG der Bogen für die zehnseitige Figur.

Da FH auf AB perpendikular und AF = FB: so ist AFK = KFB, Bogen AK = Bogen KB, folglich AK auch der Bogen für die zehnseitige Figur, und 2 Bogen BK = Bogen AB = Bogen BC. Nun ist aus gleichem Grunde 2 Bogen KM = Bog. AK = Bog. CG. Folglich ist (1, 2. S.) Bogen BCG = 2 Bogen BKM, folglich (6, 33. S.) GFB = 2 BFM. Nun ist, weil BF = FA, also (1, 5. S.) FAB = ABF, auch (1, 32. S.) GFB = 2 FAB. Folglich ist BFM = FAB; folglich, da den △△ ABF, BFN, der Winkel ABF gemein ist, auch AFB = BNF, folglich diese Triangel

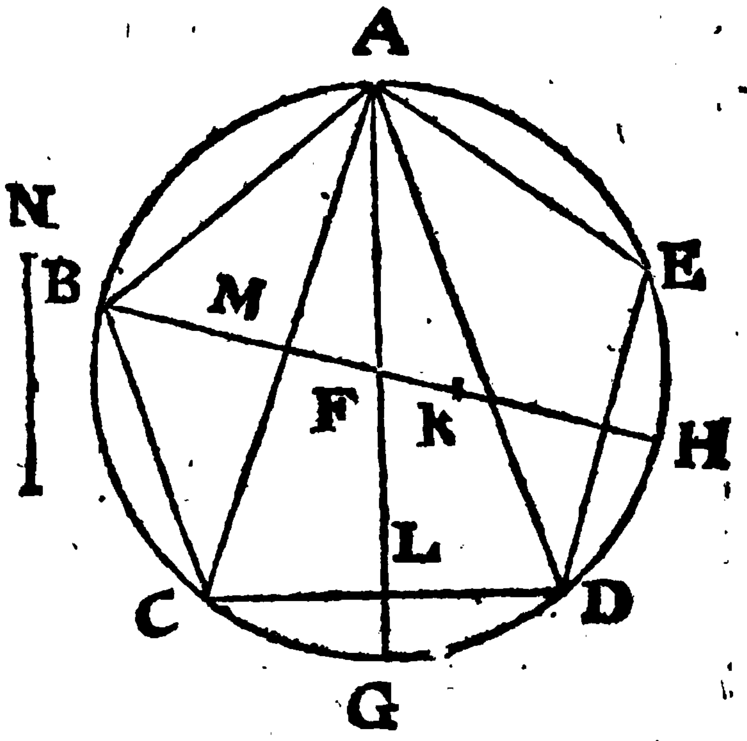
gleich:

gleichwinklig. Folglich ist (6, 4. S.) AB : BF = FB : BN, folglich (6, 17. S.) AB × BN = □ FB.

Da AL = LK, und LN gemein und perpendikular: so ist (1, 4. S.) KN = AN, und LKN = LAN = NBK; folglich, da den △ △ AKB, AKN, der Winkel NAK gemein ist, auch AKB = KNA; folglich diese Triangel gleichwinklig. Folglich ist (6, 4. S.) BA : KA = KA : AN, folglich (6, 17. S.) BA × AN = □ KA. Nun ist vorher erwiesen, AB × BN = □ FB. Folglich ist □ FB + □ KA = AB × BN + BA × AN = (2, 2. S.) □ AB; wo AB, FB, KA, die Seiten der fünf-, sechs- und zehnseitigen Figuren sind.

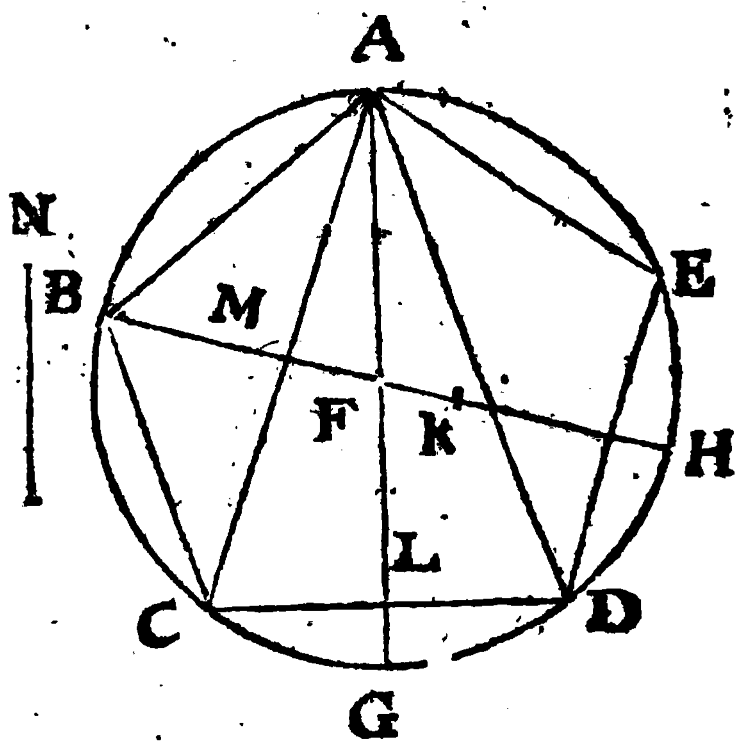
Der 11. Satz. Lehrsatz.

Die Seite, AB, der fünfseitigen Figur, ABCDE, die in einen Kreis, dessen Durchmesser rational ist, beschrieben wird, ist die kleinere Irrationale.



Nimm des Kreises Mittelpunkt F; ziehe AF, BF, verlängere sie bis G, H; ziehe AC, AD, und mache FK = $\frac{1}{4}$ AF.

Da AF, BF, rational: so ist FK, folglich auch BK rational. Da die Halbkreise ABCG, AEDG, gleich, auch die Bogen ABC, AED, gleich sind: so sind die Bogen CG, GD, gleich, folglich (3, 27. S.) CAL = DAL. Nun ist (3, 29. S.) AC = AD, und AL gemein. Folglich sind (1, 4. S.) bey L rechte Winkel, und CD = 2 CL. Aus gleichem Grunde sind auch bey M rechte Winkel, und AC = 2 CM. Folglich ist, da den △ △ ALC, AMF, der Winkel LAC gemein, auch



auch AGL = MFA. Demnach sind diese Triangel gleichwinklig. Folglich ist (6, 4. S.) LC : CA = MF : FA, folglich auch 2 LC : $\frac{1}{2}$ CA = 2 MF : $\frac{1}{2}$ FA = MF : $\frac{1}{4}$ FA. Nun ist 2 LC = DC, $\frac{1}{2}$ CA = CM, $\frac{1}{4}$ FA = FK. Folglich ist DC : CM = MF : FK, folglich (5, 18. S.) verbunden DC + CM : CM = MK : FK, folglich (6, 22. S.) □ (DC + CM) : □ CM = □ MK : □ FK. Nun ist (13, 8. S.) DC der größere Abschnitt der die Endpunkte zweyer zusammenstoßenden Seiten verbindenden, nach stetiger Proportion geschnittenen, Diagonale AC, auch ist CM = $\frac{1}{2}$ CA, also (13, 1. S.) □ (DC + CM) = 5 □ CM. Folglich ist □ MK = 5 □ KF; folglich, weil KF, also □ KF, rational, (10, 6. E.) auch □ MK, also MK, rational.

Da BF = 4 FK, so ist BK = 5 FK, folglich (6, 20. Zus.) □ BK = 25 □ FK; aber nach Obigem □ MK = 5 □ FK, folglich □ BK = 5 □ MK. Demnach sind (10, 9. Zus.) BK, KM, bloß in Potenz commensurabel; folglich ist (10, 74. S.) MB eine Apotome, und ihr fügt sich die MK an.

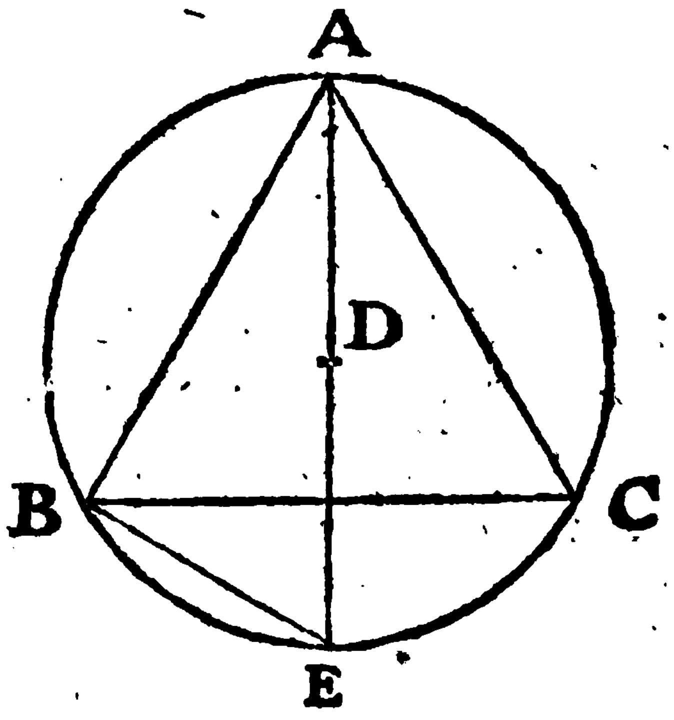
Es sey eine gerade Linie N, daß □ BK — □ KM = □ N, das ist, daß BK um das Quadrat der N über die KM potenzire. Da KF, FB, in Länge commensurabel sind: so sind es auch (10, 16. S.) KB, BF, aber auch BF, BH; folglich (10, 12. S.) auch BK, BH. Da □ BK = 5 □ KM, das ist, □ BK : KM = 1 : 5; so ist (5, 19. Zus.) □ BK : □ N = 5 : 4. Folglich sind (10, 9. S.) KB, N, in Länge incommensurabel; folglich ist MB die vierte Apotome.

Wird

Wird AH gezogen: so sind (6, 8. S.) die $\triangle\triangle$ ABH, ABM, gleichwinklig, folglich (6, 4. S.) HB : BA = AB : BM, folglich (6, 17. S.) HB $\times$ BM = $\square$ AB. Nun ist HB rational, aber BM die vierte Apotome. Folglich ist (10, 95. S.) AB die kleinere Irrationale.

Der 12. Satz. Lehrsatz.

Die Seite, AB, eines in den Kreis beschriebenen gleichseitigen Triangels, ABC, potenzirt das dreyfache Quadrat der Hälfte des Kreisdurchmessers.



Nimm des Kreises Mittelpunkt D, ziehe AD, verlängere sie bis E, und ziehe BE.

Da $\triangle$ ABC gleichseitig ist: so ist der Bogen BEC der dritte, folglich der Bogen BE der sechste Theil des Umkreises; folglich BE die Seite der sechsseitigen Figur, folglich (4. 15. S.) BE = DE.

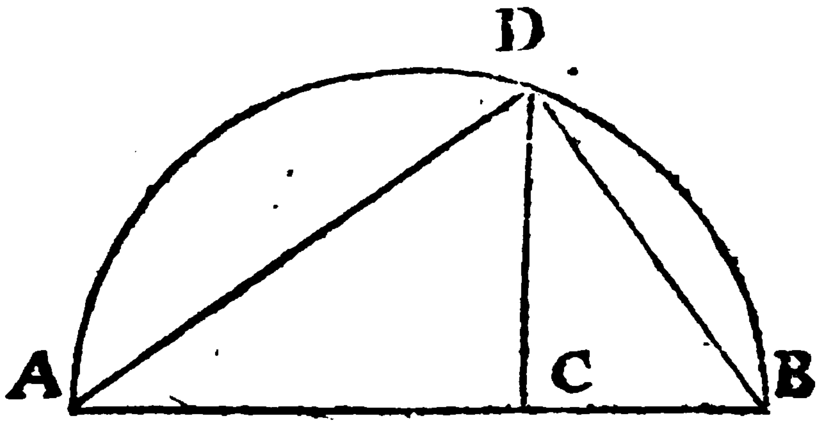
Da AE = 2 ED: so ist (6, 20. Zus.) $\square$ AE = 4 $\square$ ED = 4 $\square$ BE. Nun ist (3, 31. S.) ABE = R., also (1, 47. S.) $\square$ AE = $\square$ AB + $\square$ BE. Folglich ist $\square$ AB + $\square$ BE = 4 $\square$ BE, folglich $\square$ AB = 3 $\square$ BE = 3 $\square$ DE, wo DE = $\frac{1}{2}$ AE.

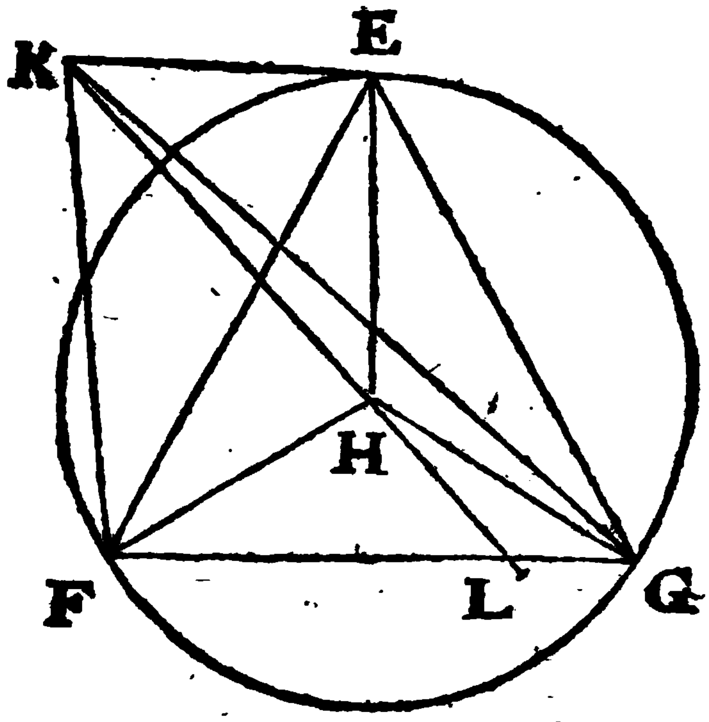
Der 13. Satz.

Aufgabe. Ein Tetraëder, welches sich von einer gegebenen Kugel umfassen läßt, zu construiren.

Lehrsatz. Das Quadrat des Durchmessers einer Kugel ist anderthalbmal so groß, als das Quadrat der Seite eines von dieser Kugel umfaßten Tetraëders.

I. Construction des Tetraëders.





Es sey der gegebenen Kugel Durchmesser AB (6, 9. S.) in C so geschnitten, daß AC = 2 CB. Beschreibe über AB den Halbkreis ADB; errichte auf AB in C den Perpendikel CD, und ziehe DA, DB. Beschreibe mit CD um einen beliebigen Punkt H einen Kreis EFG, und in denselben (4, 2. S.) den gleichseitigen △EFG, ziehe EH, HF, HG. Errichte (11, 12. S.) auf der Kreisebene in H den Perpendikel HK = AC, und ziehe KE, KF, KG: so ist der Körper, dessen Grundfläche der △ EFG, und dessen Spitze K ist, das verlangte Tetraëder.

II. Beweis der Construction.

Erstlich, daß dieser Körper ein Tetraëder sey.

Da (11, 3. E.) KH mit HE, HF, HG, rechte Winkel macht, auch bey C ein rechter Winkel und AC = HK, CD = HE ist: so ist (1, 4. S.) DA = KE. Aus gleichen

chen Gründen ist KF sowohl als KG der AD gleich. Demnach ist AD = KE = KF = KG.

Da (folgender Lehnsatz) AB : BC = □ AD : □ DC, aber AC = 2 CB, also AB = 3 CB ist: so ist □ AD = 3 □ DC. Nun ist DC = EH, und (13, 12. S.) □ FE = 3 □ EH. Folglich ist □ AD = □ FE, also AD = FE. Nun war AD auch jeder der Linien KE, KF, KG, gleich. Folglich sind die vier Triangel EFG, KEF, KFG, KGE, gleichseitig und gleich. Folglich ist (11, 26. E.) der von diesen Triangeln begränzte Körper ein Tetraëder.

Zweytens, daß sich dieses Tetraëder von der gegebenen Kugel umfassen lasse.

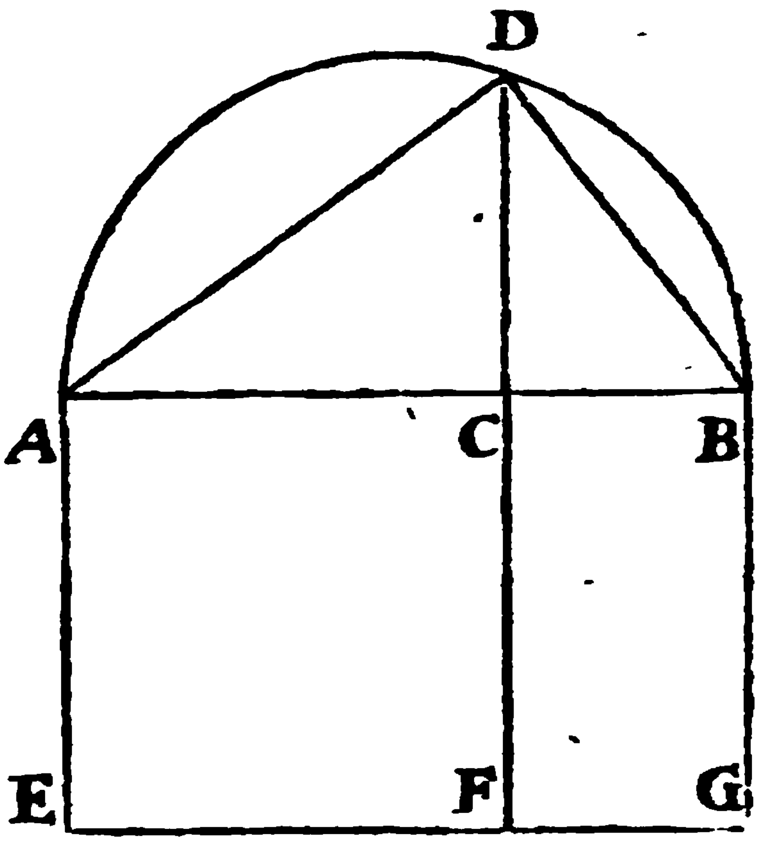
Setze der KH die HL = BC gerade fort an: so ist AB = KL. Da (6, 8. Zus.) AC : CD = CD : CB, aber AC = KH, CD = HE, CB = HL: so ist KH : HE = EH : HL; folglich, wenn man EL ziehet, (6, 6. S.) der △ KHE dem △ EHL gleichwinklig, also KEL ein rechter Winkel. Folglich gehet ein über KL beschriebener Halbkreis durch E. Wird nun dieser Halbkreis um den unverrückten Durchmesser KL ringsum gedrehet: so muß er auch durch die Punkte F, G, gehen, weil auch, wenn FL, GL, gezogen werden, KFL, KGL, rechte Winkel sind. Demnach fallen die Eckpunkte des Tetraëders E, F, G, K, in die Oberfläche der Kugel, deren Durchmesser KL = AB ist.

III. Beweis des Lehrsatzes.

Da AB = 2 CB, folglich AB = 3 CB: so ist AB = $\frac{3}{2}$ AC. Nun ist (6, 8. Zus. und 6, 20. Zus.) BA : AC = □ BA : □ AD. Folglich ist auch □ AB = $\frac{3}{2}$ □ AD, wo AB der Durchmesser der Kugel und AD der Seite des Tetraëders gleich ist.

Lehnsatz.

Noch ist zu beweisen, daß AB : BC = □ AD : □ DC ist.



Es bleibe die vorige Construction des Halbkreises ADB. Beschreibe der Linie AC Quadrat EC, und vollende das Parallelogramm FB.

Da die △ △ DAB, DAC, gleichwinklig sind: so ist (6, 4. S.) BA : AD = DA : AC, folglich (6, 17. S.) BA × AC = □ AD.

Da (6, 1. S.) AB : BC = EB : BF; aber EB = BA × AC, und BF = AC × CB: so ist AB : BC = BA × AC : AC × CB; aber nach Obigem BA × AC = □ AD, folglich AB : BC = □ AD : AC × CB. Nun ist (3, 31. S.) ADB = R., und (6, 8. Zus.) AC : CD = CD : CB; also AC × CB = □ DC. Folglich ist AB : BC = □ AD : □ DC.

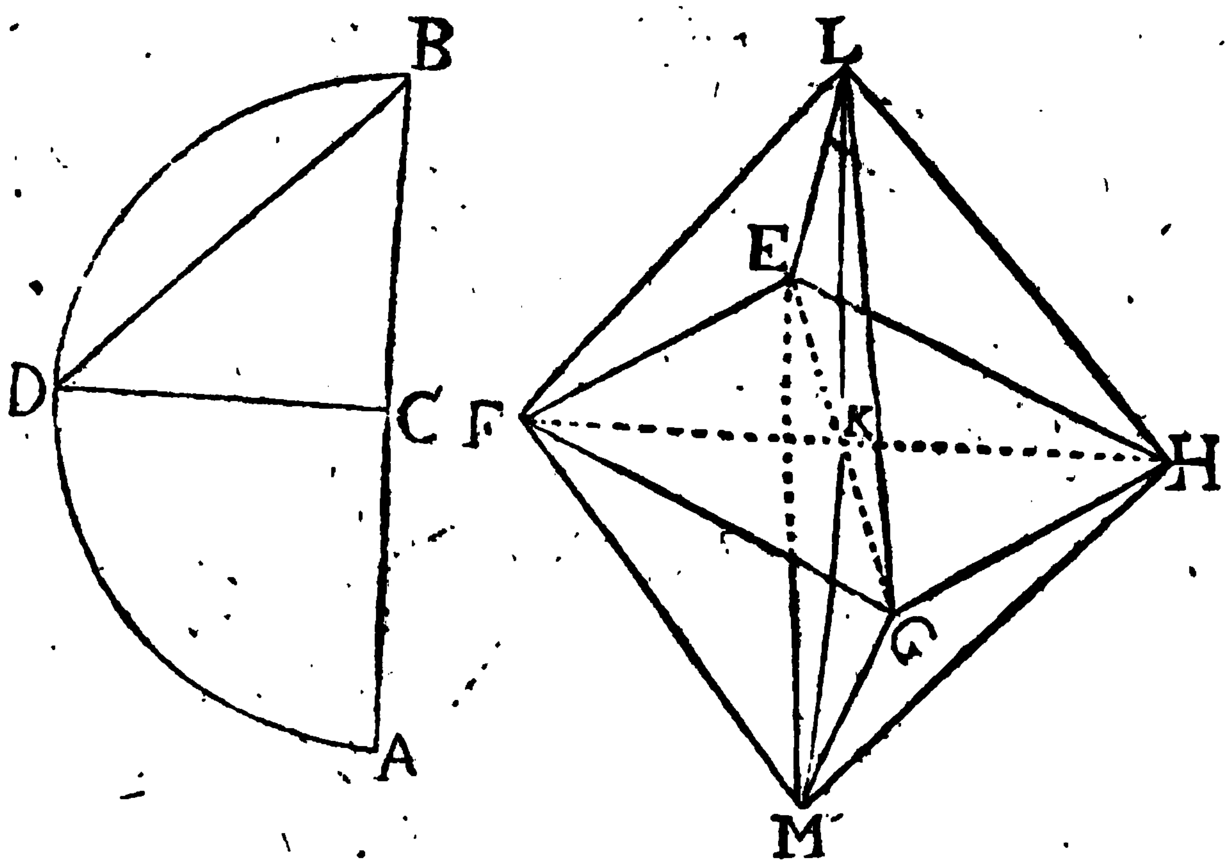
Der 14. Satz.

Aufgabe. Ein Oktaëder, welches sich von einer gegebenen Kugel umfassen läßt, zu construiren.

Lehrsatz. Das Quadrat des Durchmessers einer Kugel ist doppelt so groß, als das Quadrat der Seite eines von dieser Kugel umfaßten Oktaëders.

I. Construction des Oktaëders.

Es sey der gegebenen Kugel Durchmesser AB in C halbirt. Beschreibe über AB den Halbkreis ADB, errichte auf AB in C den Perpendikel CD, und ziehe DB. Nun sey ein Quadrat EFGH, dessen Seite = DB. Ziehe HF, EG, die sich in K schneiden. Errichte (11, 12. S.) auf der Ebene EFGH in K den Perpendikel KL, verlängere ihn



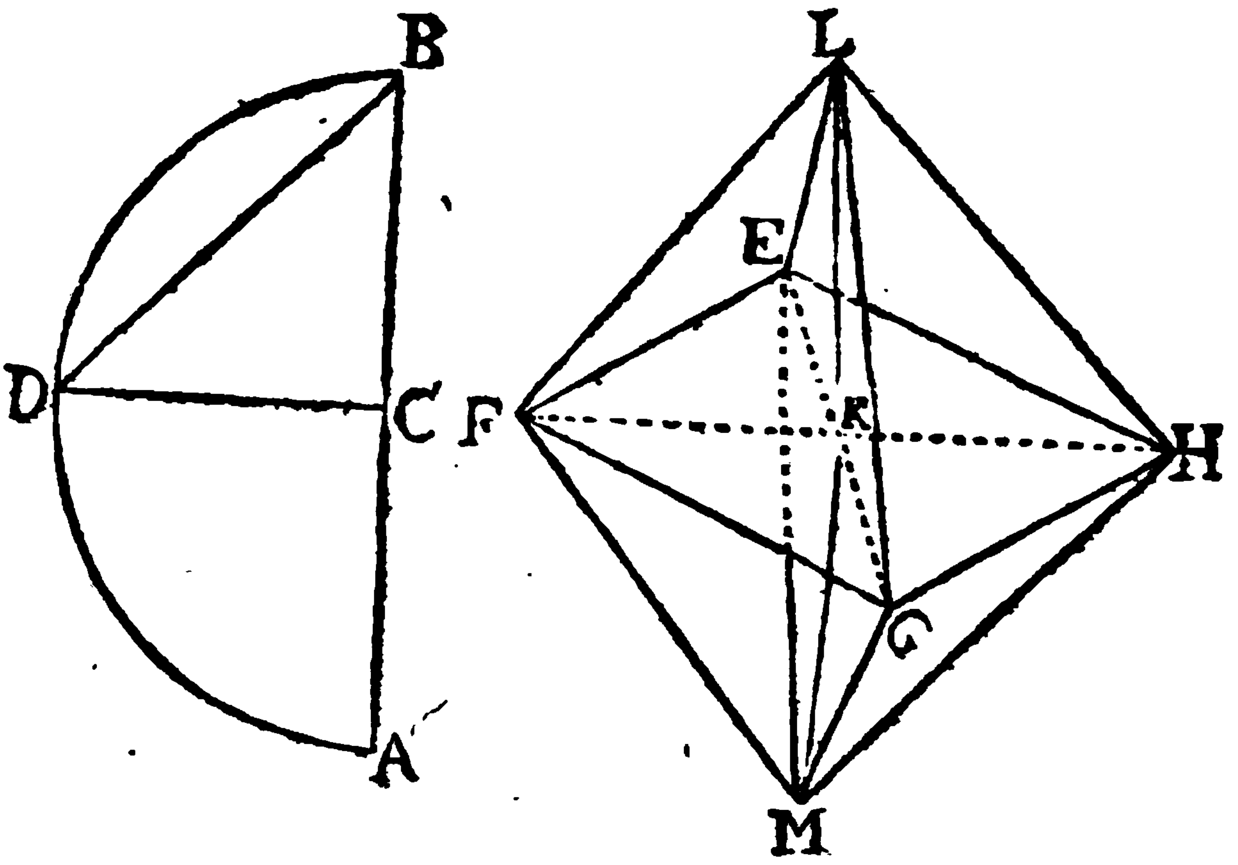
ihn auf der andern Seite der Ebene nach M, und mache KL sowohl als KM einer der Linien KE, KF, KG, KH, gleich. Ziehe von L sowohl als von M gerade Linien nach E, F, G, H: so ist der dadurch entstandene Körper das verlangte Oktaëder.

II. Beweis der Construction.

Erstlich, daß der Körper ein Oktaëder sey.

Da KE = KH, und EKH = R.: so ist (I, 47. S.) □ HE = 2 □ KE. Nun ist auch LK = KE, und LKE = R.: also □ EL = 2 □ EK. Folglich ist □ HE = □ EL, also HE = EL; aber aus gleichen Gründen auch LH = HE; folglich der △ LEH gleichseitig. Nun wird auf ähnliche Art bewiesen, daß die Triangel LEF, LFG, LGH, auch gleichseitig, und dem △ LEH gleich sind; so wie auch die vier Triangel auf denselben Grundlinien EF, FG, GH, HE, welche ihre Spitze in M auf der andern Seite der Ebene EFGH haben. Folglich ist (11, 27. E.) die von diesen Triangeln begränzte Figur ein Oktaëder.

Zweytens, daß sich dieses Oktaëder von der gegebenen Kugel umfassen lasse.



Da LK = KM = KE: so gehet ein über LM beschriebener Halbkreis durch E. Drehet sich nun dieser Halbkreis um den unverrückten Durchmesser LM ringsum: so gehet er aus eben den Gründen auch durch F, G, H. Demnach fallen die Eckpunkte des Oktaëders in die Oberfläche der Kugel, deren Durchmesser LM ist. Dieser Durchmesser aber ist = AB.

Denn da LK = KM, KE gemein ist, und bey K rechte Winkel sind: so ist (1, 4. S.) LE = EM, aber (3, 31. S.) LEM = R.; folglich □ LM = 2 □ LE. Nun ist (6, 8. Zus. u. 6, 20. Zus.) AB : BC = □ AB : □ DB, also, weil AB = 2 BC, auch □ AB = 2 □ DB = 2 □ LE. Folglich ist □ LM = □ AB, folglich LM = AB.

III. Beweis des Lehrsatzes.

Da eben bewiesen worden, daß □ LM = 2 □ LE, auch daß LM = AB ist; so ist □ AB = 2 □ LE, wo AB der Durchmesser der Kugel, und LE die Seite des Oktaëders ist.

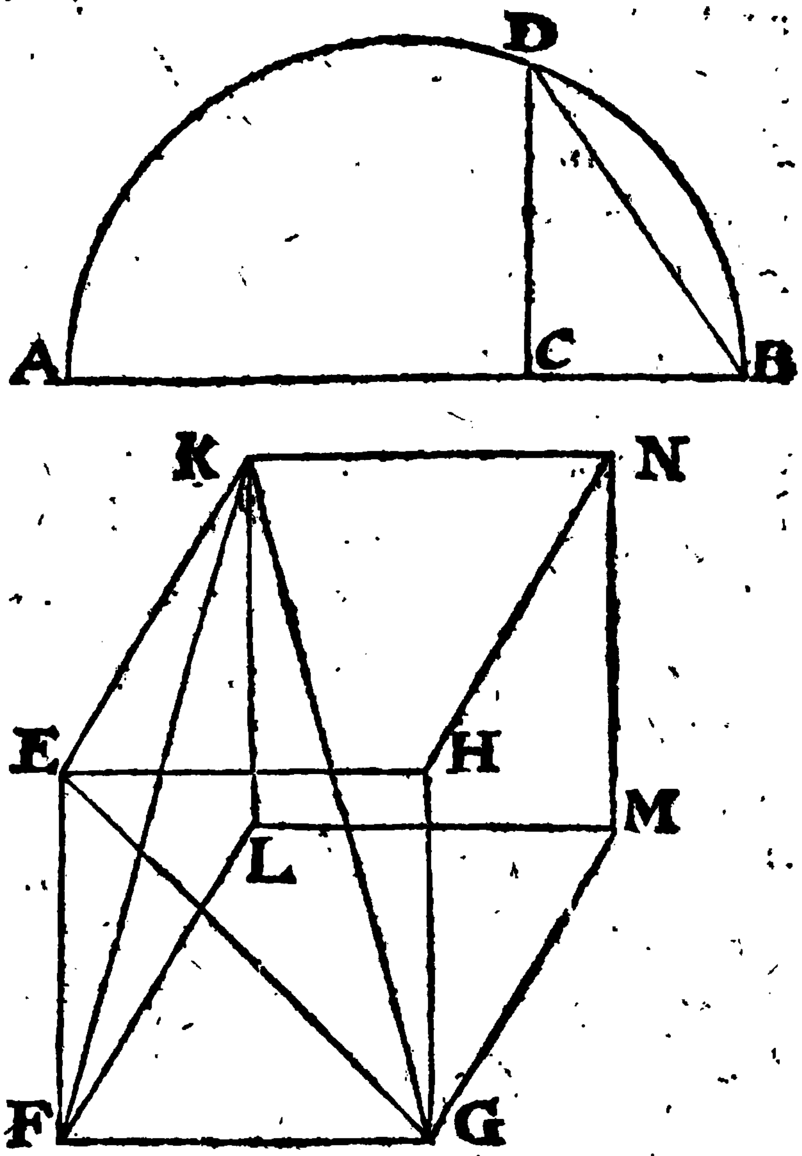
Der

Der 15. Satz.

Aufgabe. Einen Würfel, (ein Hexaëder), welcher sich von einer gegebenen Kugel umfassen läßt, zu construiren.

Lehrsatz. Das Quadrat des Durchmessers einer Kugel ist dreymal so groß, als das Quadrat der Seite eines von dieser Kugel umfaßten Würfels.

I. Construction des Würfels.

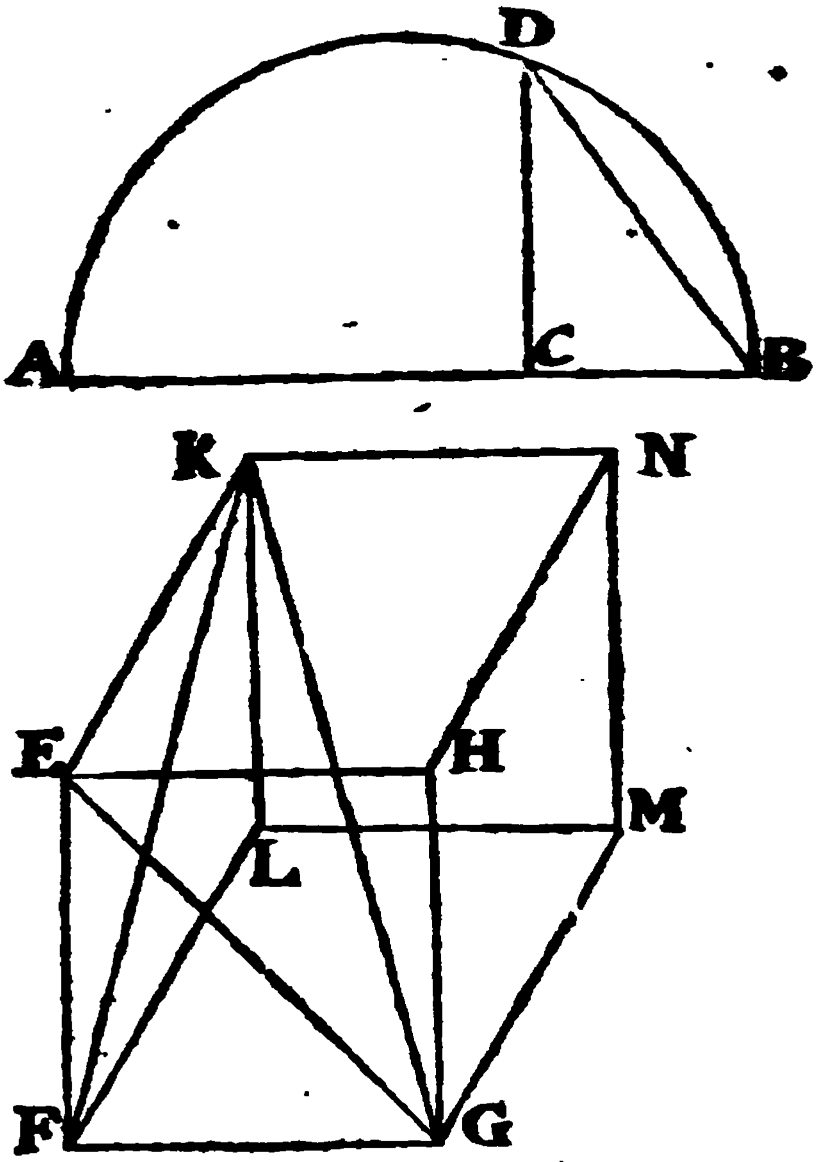


Es sey der gegebenen Kugel Durchmesser AB in C so geschnitten, daß AC = 2 CB, oder AB = 3 CB ist. Beschreibe über AB den Halbkreis ADB, errichte auf AB in C den Perpendikel CD, und ziehe DB. Mache ein Quadrat EFGH, dessen Seite = DB, errichte (11, 12. S.) auf dessen Ebene in den Punkten E, F, G, H, die Perpendikel EK, FL, GM, HN, deren jeder = DB; und ziehe KL, LM, MN, NK, so ist FN der verlangte Würfel.

II. Beweis der Construction.

Erstlich, daß FN ein Würfel sey, ist sogleich aus (11, 25. S.) klar.

Zweytens, daß sich dieser Würfel von der gegebenen Kugel umfassen lasse.



Ziehe KG, EG, KF. Da EK auf der Ebene EFGH perpendikular ist, folglich (11, 3. E.) KEG = R.: so gehet der über KG beschriebene Halbkreis durch E. Da FG auf FL, FE, folglich (11, 4. S.) auf der Ebene EFLK perpendikular, folglich GFK = R.: so gehet der über KG beschriebene Halbkreis auch durch F, und aus eben dem Grunde auch durch alle übrige Eckpunkte des Würfels, welche sich demnach in der Oberfläche der Kugel, deren Durchmesser KG ist, befinden. Dieser aber ist = AB.

Denn da GFE = R.: und GF = FE = EK: so ist (1, 47. S.) □ EG = 2 □ EF = 2 □ EK, folglich □ EG + □ EK, das ist □ KG = 3 □ EK = 3 □ DB, weil EK = DB ist. Nun ist AB = 3 BC, und (6, 8. Zus. und 6, 20. Zus.) AB : BC = □ AB : □ DB, also □ AB = 3 □ DB. Folglich □ AB = □ KG, also AB = KG.

III. Beweis des Lehrsatzes.

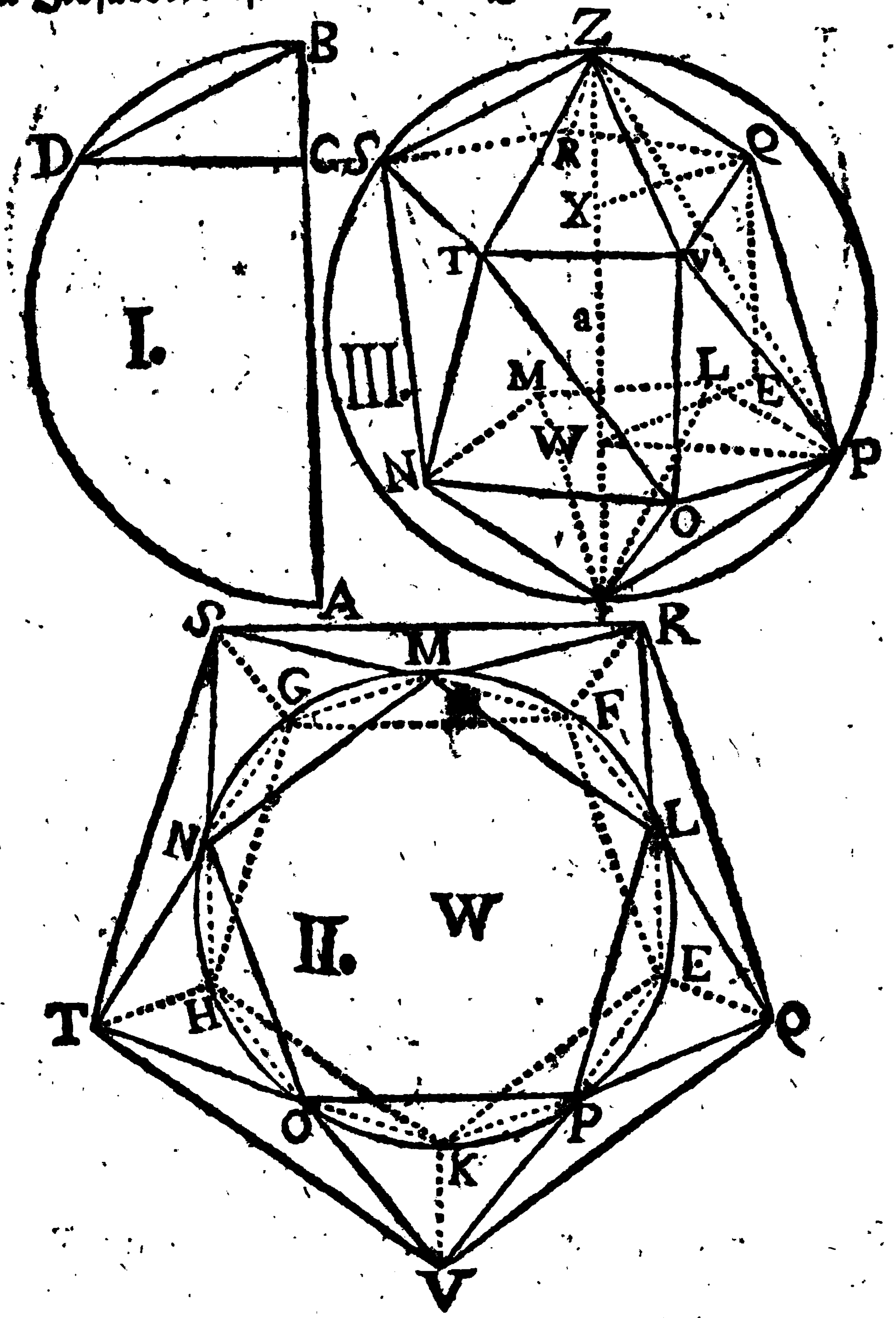
Da im vorigen Beweise □ GK = 3 □ EK, und GK = AB, also □ GK = □ AB: so ist □ AB = 3 □ EK; wo AB der Durchmesser der Kugel, und EK die Seite des Würfels ist.

Der 16. Satz.

Aufgabe. Ein Ikosaëder, welches sich von einer gegebenen Kugel umfassen läßt, zu construiren.

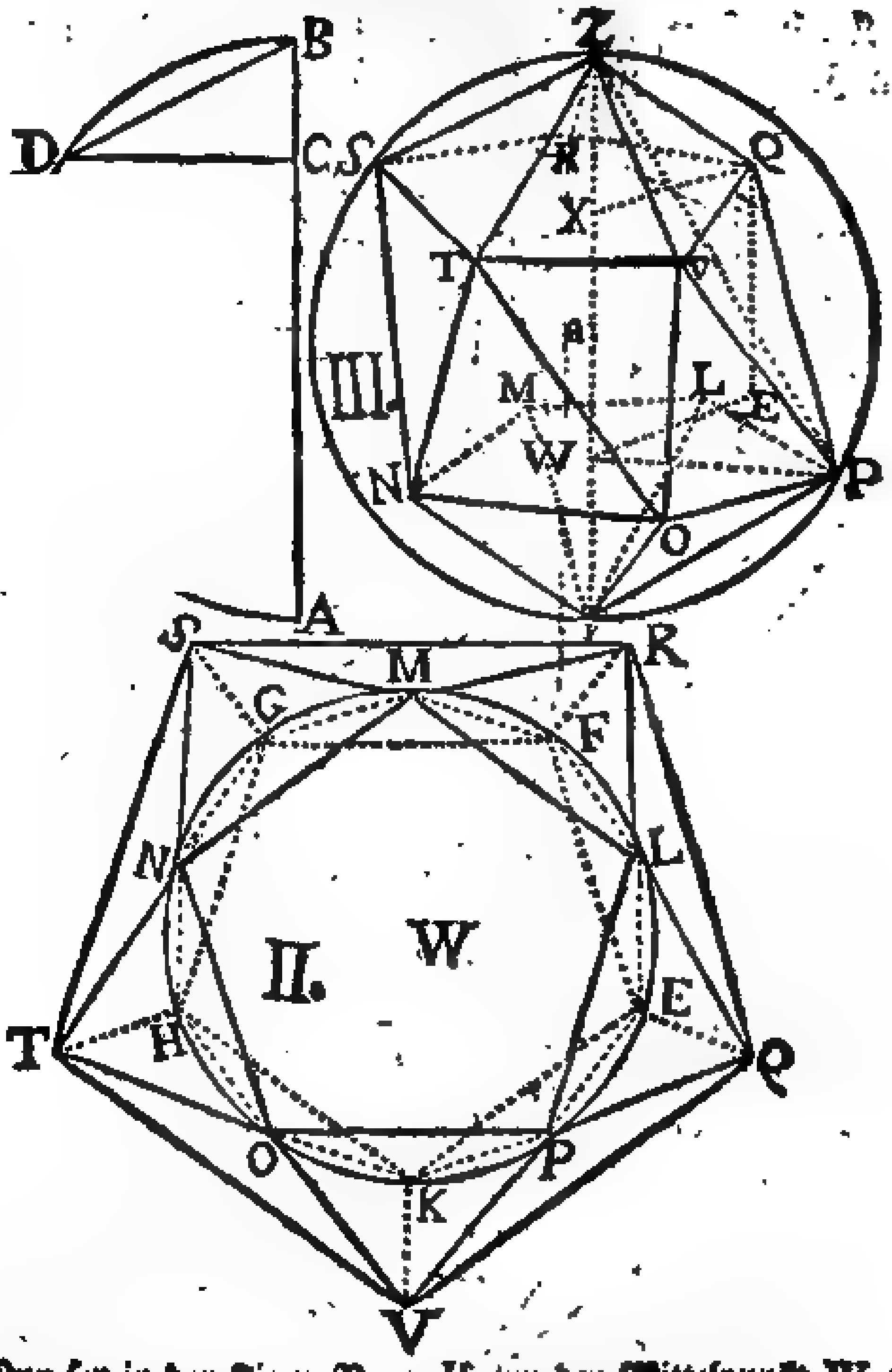
Lehr-

Lehrsatz. Die Seite des von einer Kugel umfaßten Ikosaëders ist die kleinere Irrationale.



I. Construction des Ikosaëders.

Es sey in der Figur Num. I. der gegebenen Kugel Durchmesser AB in C so geschnitten, daß AC = 4 CB, also AB = 5 CB ist. Beschreibe über AB den Halbkreis ADB, errichte auf AB in C den Perpendikel CD, und ziehe DB.



Nun sey in der Figur Num. II. um den Mittelpunkt W ein Kreis, dessen Halbmesser = DB. Beschreibe in denselben die gleich- und fünfseitige Figur EFGHK, halbire die Bogen EF, FG, GH, HK, KE, in L, M, N, O, P, und ziehe die Linien für die gleich- und fünfseitige Figur LMNOP, desgleichen die Linien für die gleich- und zehnseitige Figur ELF .... KPE.

In den Punkten E, F, G, H, K, errichte auf der Kreisfläche die Perpendikel EQ, FR, GS, HT, KV, mache jeden

den

derselben = DB, und ziehe durch ihre Endpunkte die Linien für die gleich- und fünfseitige Figur QRSTV, desgleichen die Linien QL, LR, RM, MS, SN, NT, TO, OV, VP, PQ.

Im Mittelpunkte W errichte auf der Kreisfläche den Perpendikel WZ, den die Figur Num. III. vorstellet, und verlängere ihn auf der andern Seite der Kreisfläche nach Y, mache WX der Seite der sechsseitigen, XZ aber und WY der Seite der zehnseitigen Figur gleich, und ziehe gerade Linien von Z nach den Winkelpunkten der Figur QRSTV, desgleichen von Y nach den Winkelpunkten der Figur LMNOP: so ist das verlangte Ikosaëder construirt.

II. Beweis der Construction.

Erstlich, daß dieser Körper ein Ikosaëder sey.

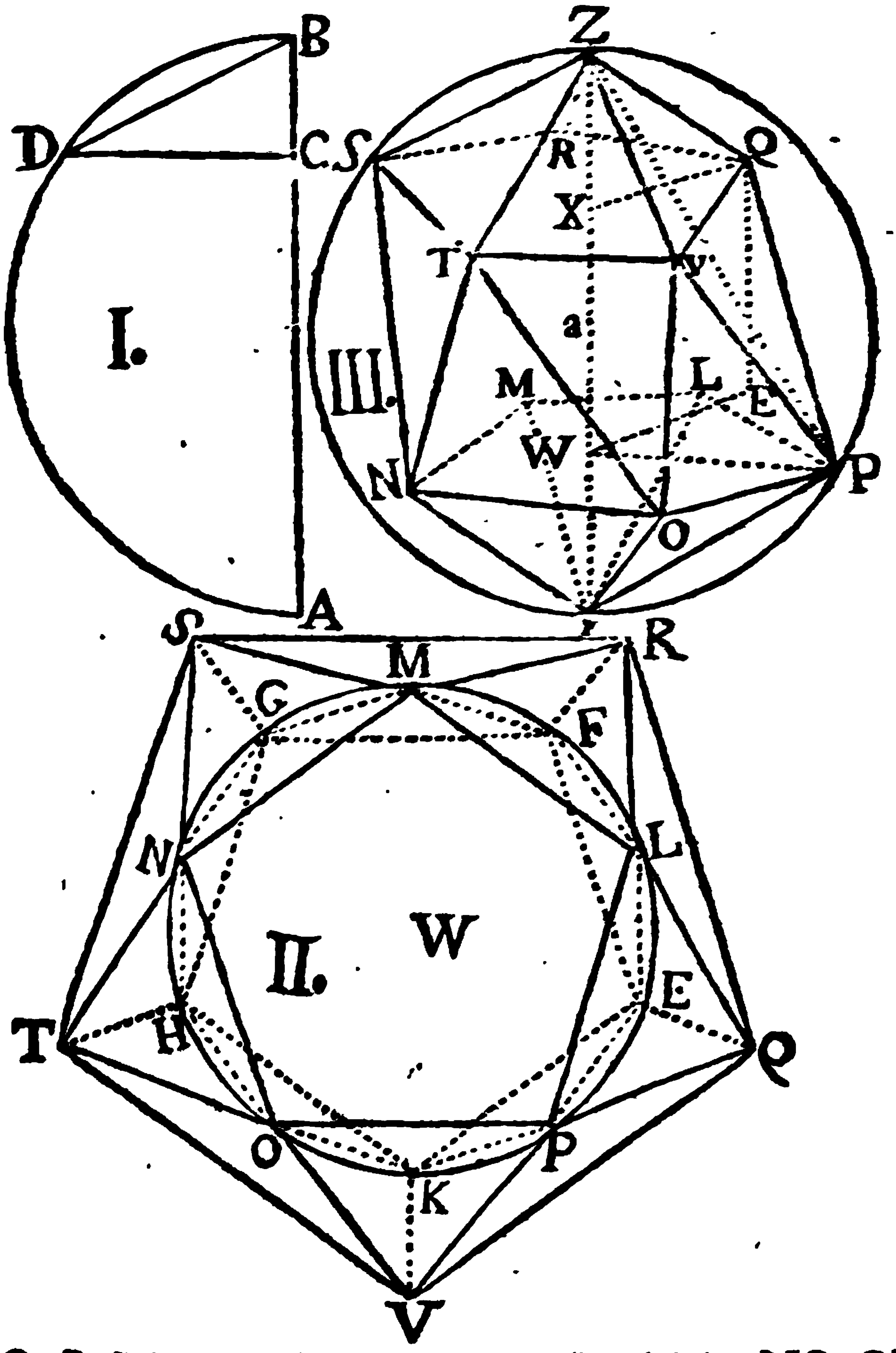
Da in Num. II. der Figur EQ, FR, auf einerley Ebene (der Kreisfläche) perpendikular, folglich (11, 6. S.) parallel, aber auch gleich sind: so sind (1, 33. S.) auch QR, EF, parallel und gleich; folglich ist QR die Seite einer in den Kreis beschriebenen gleich- und fünfseitigen Figur, weil EF solches ist. Aus gleichen Gründen sind auch die übrigen Linien RS, ST, TV, VQ, Seiten der gleich- und fünfseitigen Figur QRSTV.

Da EQ der DB, also des Kreises Halbmesser gleich, folglich die Seite der sechsseitigen Figur ist, EL aber der zehnseitigen, und LEQ = R.: so ist (13, 10. S.) QL die Seite der fünfseitigen Figur, und aus gleichen Gründen LR. Nun war es auch QR. Folglich ist der △ QRL gleichseitig. Aus eben den Gründen sind auch die Triangel RSM, STN, TVO, VPQ, gleichseitig.

Da LR, RM, ML, auch die Seiten der gleich- und fünfseitigen Figur sind: so ist △ LMR gleichseitig. Aus eben den Gründen sind auch die Triangel MNS, NOT, OPV, PLQ, gleichseitig.

In Num. III. der Figur sind die Polygone RSTVQ, und LMNOP, vorgestellet; von den gedachten Triangeln aber die, deren Grundlinien ST, TV, VQ, und Spitzen

N,



N, O, P, sind, desgleichen die, deren Grundlinien NO, OP, und Spitzen T, V, sind.

Da nun XW, QE, auf einerley Ebene (der Kreisfläche) perpendikular, also (11, 6. S.) parallel, aber auch gleich sind: so sind (1, 33. S.) auch WE, XQ, parallel und gleich; folglich ist XQ die Seite der sechsseitigen Figur, weil WE, des Kreises Halbmesser, solches ist. Nun ist XZ die Seite der zehnseitigen Figur, und QXZ = R. Folglich ist (13, (13, 10. S.) QZ die Seite der fünfseitigen Figur; aus gleichen Gründen aber auch VZ, und nach Obigem auch QV. Folglich ist △ VQZ gleichseitig. Dasselbe gilt auch von den Triangeln, deren Grundlinien VT, TS, SR, RQ, sind, und deren Spitze Z ist. Und eben so wird dieses von den Triangeln bewiesen, deren Grundlinien PO, ON, NM, ML, LP, sind, und deren Spitze Y ist. Demnach ist (11, 29. E.) der construirte Körper ein Ikosaëder.

Zweytens, daß sich dieses Ikosaëder von der gegebenen Kugel umfassen lasse.

Da in der Figur Num. III. WX die Seite der sechsseitigen Figur, XZ aber der zehnseitigen: so ist (13, 9. S.) WZ in X nach stetiger Proportion geschnitten, und WX der größere Abschnitt, also WZ : WX = WX : XZ; aber WX = WP, und XZ = WY, folglich WZ : WP = WP : WY. Nun sind PWZ, PWY, rechte Winkel, also, wenn man PZ ziehet, (6, 6. S.) die Triangel PWZ, PWY, ähnlich. Folglich ist (6, 8. S.) YPZ = R. Folglich gehet (3, 31. S.) der über YZ beschriebene Halbkreis durch P.

Aus obiger Proportion WZ : WX = WX : XZ, wo WZ = XY, und WX = XQ, folgt auch XY : XQ = XQ : XZ. Folglich ist, wenn man QY ziehet, auch YQZ = R. Folglich gehet der über YZ beschriebene Halbkreis auch durch Q.

Drehet sich nun gedachter Halbkreis um seinen unverrückten Durchmesser YZ ringsum: so gehet er aus gleichen Gründen auch durch die übrigen Eckpunkte des Ikosaëders, die also in der Oberfläche einer Kugel sind, deren Durchmesser YZ ist. Dieser aber ist = AB.

Denn da WZ nach stetiger Proportion in X geschnitten ist: so ist, wenn man WX in a halbirt, (13, 3. S.) □ Za = 5 □ aX. Nun ist YZ = 2 Za, und WX = 2 aX. Folglich □ YZ = 5 □ WX = 5 □ DB. Nun ist AB = 5 BC, und (6, 8. und 6, 20. Zus.) AB : BC = □ AB : □ BD, also □ AB = 5 □ BD. Folglich ist □ YZ = □ AB, also YZ = AB.

III. Be=

III. Beweis des Lehrsatzes.

Da der Kugel Durchmesser rational ist, und sein Quadrat dem fünffachen Quadrate vom Halbmesser des Kreises EFGHK gleich ist: so ist der Halbmesser, folglich auch der Durchmesser dieses Kreises rational; folglich (13, 11. B.) die Seite der in solchen Kreis beschriebenen fünfseitigen Figur, das ist, die Seite des Ikosaëders, die kleinere Irrationale.

Zusatz.

Hieraus erhellet, daß das Quadrat des Durchmessers der Kugel gleich sey dem fünffachen Quadrate des Halbmessers desjenigen Kreises, auf welchem das Ikosaëder beschrieben wird; auch daß der Durchmesser der Kugel aus einer Seite der sechsseitigen, und zwey Seiten der zehnseitigen Figur, die beyde in den nämlichen Kreis beschrieben sind, zusammengesetzt sey.

Der 17. Satz.

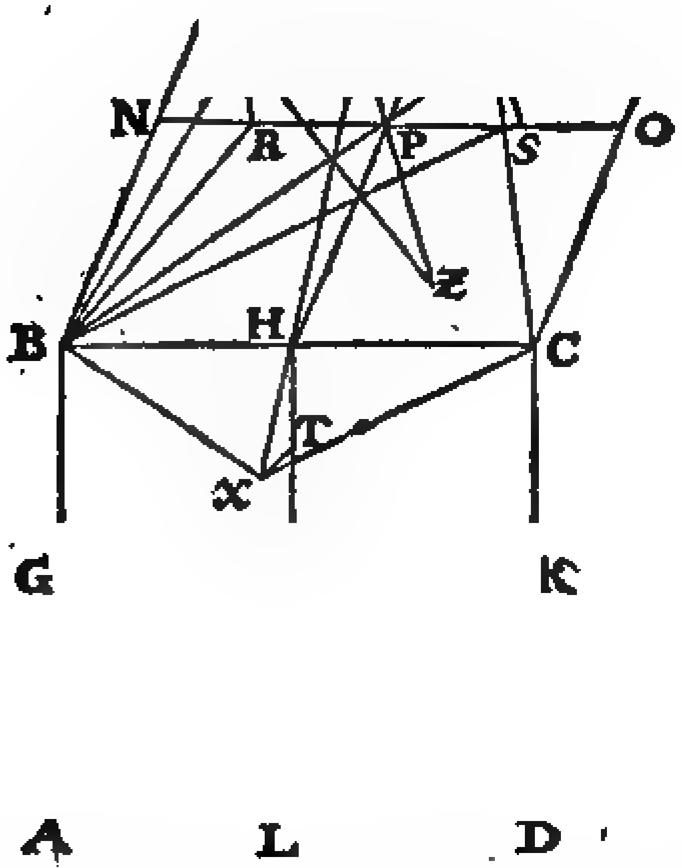
Aufgabe. Ein Dodekaëder, welches sich von einer gegebenen Kugel umfassen läßt, zu construiren.

Lehrsatz. Die Seite des von einer Kugel umfaßten Dodekaëders ist die Apotome.

I. Construction des Dodekaëders.

Von dem (13, 15. B.) construirten Würfel setze zwey Seitenflächen ABCD, CBEF, perpendikular an einander, halbire ihre Seiten in den Punkten G, H, K, L, M, N, O, und ziehe GK, HL, MH, NO. Schneide die NP, PO, HQ, nach stetiger Proportion in den Punkten R, S, T, so daß PR, PS, QT, die größern Abschnitte sind. In diesen Punkten errichte (11, 12. B.) auf den Seitenflächen des Würfels außerhalb desselben die Perpendikel RV, SW, TX, mache sie obigen größern Abschnitten PR, PS, QT, gleich, und ziehe die

Linien



Linien VB, BX, XC, CW, WV, welche in Einer Ebene liegen, gleiche Winkel einschließen, und eine auf der Seitenlinie des Würfels BC beschriebene gleich- und fünfseitige Figur einschließen. Wird nun auf jeder der zwölf Seitenlinien des Würfels eben eine solche Figur, wie an der BC, beschrieben; so bilden diese (11, 28. E.) das verlangte Dodekaëder.

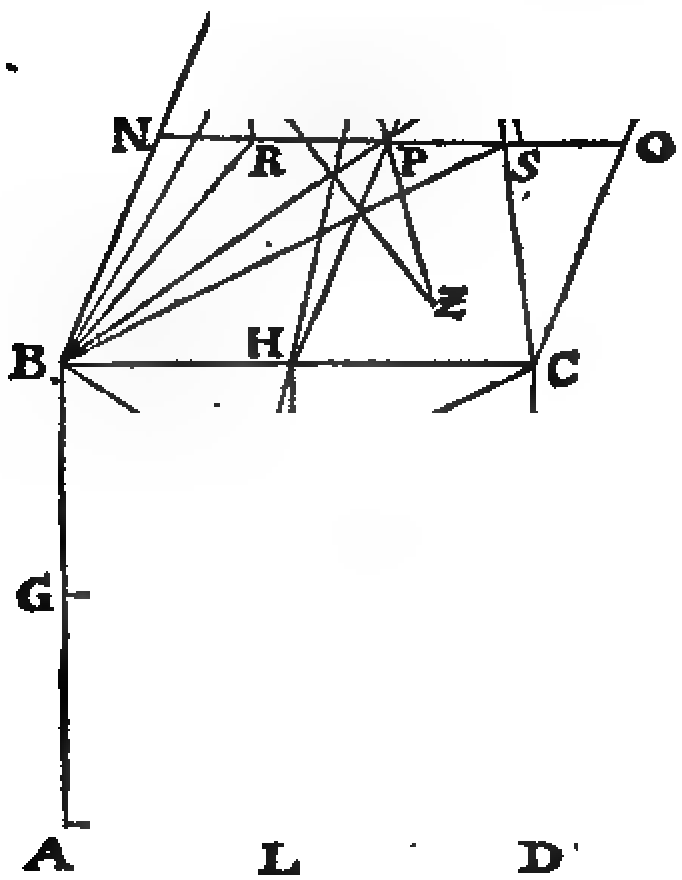
II. Beweis der Construction.

Erstlich, daß VBXCW eine solche fünfseitige Figur sey. Nämlich

I. Sie ist **gleichseitig.**

Ziehe BR, BS, BW. Da NP in R nach stetiger Proportion geschnitten, und PR der größere Abschnitt ist: so ist (13, 4. S.) $\square$ PN + $\square$ NR = 3 $\square$ PR; aber PN = NB, und PR = RV, folglich $\square$ BN + $\square$ NR = 3 $\square$ RV.

Nun



Nun ist (1, 47. S.) □ BN + □ NR = □ BR. Folglich ist □ BR = 3 □ RV, folglich □ BR + □ RV, das ist □ BV, = 4 □ RV, folglich (6, 20. Zus.) BV = 2 RV. Nun ist RS = 2 RP = 2 RV, also VW = 2 RV. Folglich ist BV = VW. Auf ähnliche Art wird die Gleichheit der übrigen Seiten der Figur BVWCX bewiesen.

II. Sie ist **in Einer Ebene.**

Ziehe durch P den Linien RV, SW, die PY auf der äußern Seite des Würfels parallel. Ziehet man nun YH, HX: so ist YHX Eine gerade Linie. Denn da HQ in T nach stetiger Proportion geschnitten, und QT der größere Abschnitt ist: so ist HQ : QT = QT : TH; aber HQ = HP, und QT = TX = PY, folglich HP : PY = TX : TH. Nun sind (11, 6. S.) HP, TX, sowohl, als FH, PY, parallel: jene, weil sie auf der Ebene BD, diese, weil sie

sie auf der Ebene BF perpendikular sind. Folglich sind (6, 32. S.) YH, HX, in gerader Linie; folglich ist die Figur BVWCX, in welcher die ganze YX ist, in Einer Ebene.

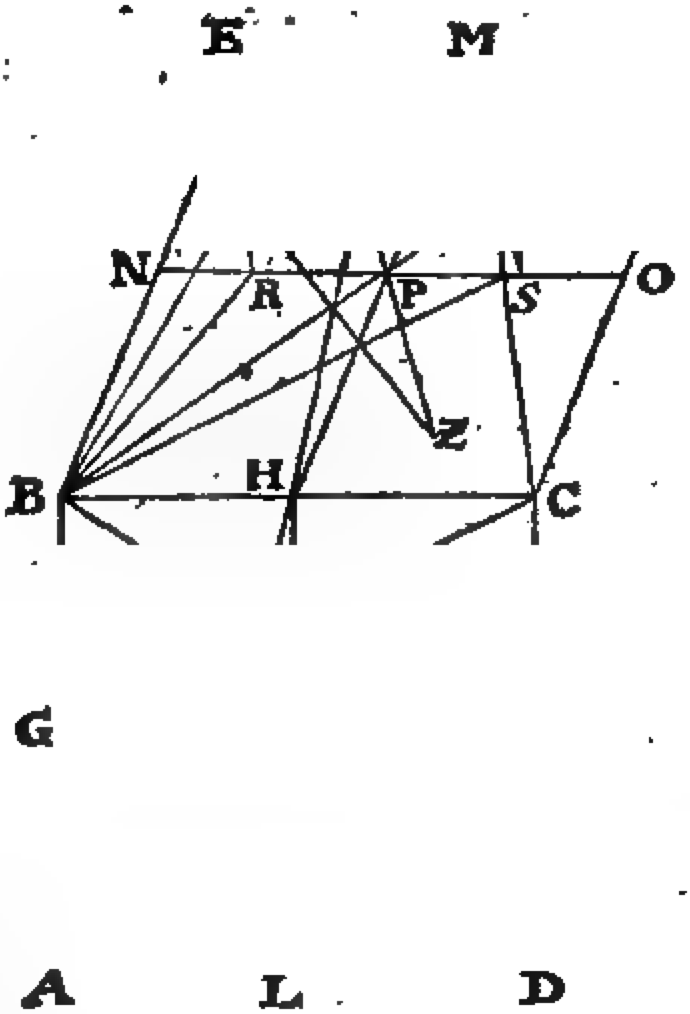
III. Sie ist gleichwinklig.

Da NP nach stetiger Proportion in R geschnitten, und PR der größere Abschnitt: so ist (13, 5. S.) NP + PR : PN = NP : PS. Nun ist PR = PS, also NP + PR = NS, also NS : NP = NP : PS. Folglich ist NS nach stetiger Proportion in P geschnitten, und NP der größere Abschnitt, folglich (13, 14. S.) □ NS + □ SP = 3 □ PN; aber PN = NB, und SP = SW, folglich □ NS + □ SW = 3 □ NB, folglich auch □ NB + □ NS + □ SW = 4 □ NB. Nun ist (1, 47. S.) □ NB + □ NS = □ BS. Folglich ist □ BS + □ SW, das ist (1, 47. S.) □ BW, = 4 □ NB, folglich (6, 20. Zus.) BW = 2 NB = BC. Nun war, nach des Beweises ersterem Theile, auch BV = BX, und VW = CX. Folglich ist (1, 8. S.) BVW = BXC. Auf eben die Art wird die Gleichheit der Winkel VWC, BXC, bewiesen, folglich ist (13, 7. S.) BVWCX gleichwinklig.

Zweytens, daß sich dieses Dodekaëder von der gegebenen Kugel umfassen lasse.

Verlängere YP in das Innere des Würfels nach Z: so trifft (11, 39. S.) YZ die Diagonale des Würfels, so daß beyde einander in Z halbiren. Folglich ist Z der Mittelpunkt der Kugel, die den Würfel umfaßt, und PZ der halben Seite des Würfels PN gleich. Ziehe VZ.

Da NS nach stetiger Proportion geschnitten, und NP der größere Abschnitt ist: so ist (13, 4. S.) □ NS + □ SP = 3 □ NP. Nun ist NP = PZ, und PS = YP, also NS = YZ, auch ist SP = PR, also SP = VY. Folglich ist □ YZ + □ VY, das ist (1, 47. S.) □ VZ, = 3 □ NP. Nun ist (13, 15. S.) das Quadrat des Durchmessers der Kugel dem dreyfachen Quadrate der Seite des Würfels, also auch das Quadrat des Halbmessers dem



dreyfachen Quadrate der halben Seite NP gleich. Folglich ist VZ der Kugel Halbmesser, Z der Mittelpunkt, und der Punkt V in der Kugelfläche. Auf ähnliche Art wird bewiesen, daß außer V auch jeder andere Eckpunkt des Dodekaëders in der Kugelfläche sey. Folglich wird das Dodekaëder von der gegebenen Kugel umfaßt.

III. Beweis des Lehrsatzes.

Da NP nach stetiger Proportion in R geschnitten, und PR der größere Abschnitt ist: so ist $NP : PR = PR : RN$, also auch (5, 15. S.) $2\,NP : 2\,PR = 2\,PR : 2\,RN$, das ist, $NO : RS = RS : RN + SO$; aber $NO > RS$, also auch $RS > RN + SO$, folglich ist NO nach stetiger Proportion geschnitten, und RS der größte Abschnitt. Nun ist der Kugel Durchmesser rational, und (13, 15. S.) sein Quadrat dem dreyfachen Quadrate der Seite NO gleich, also

also NO auch rational. Folglich ist (13, 6. S.) ihr Abschnitt RS die Apotome; aber RS = VW, folglich des Dodekaëders Seite VW die Apotome.

Zusatz.

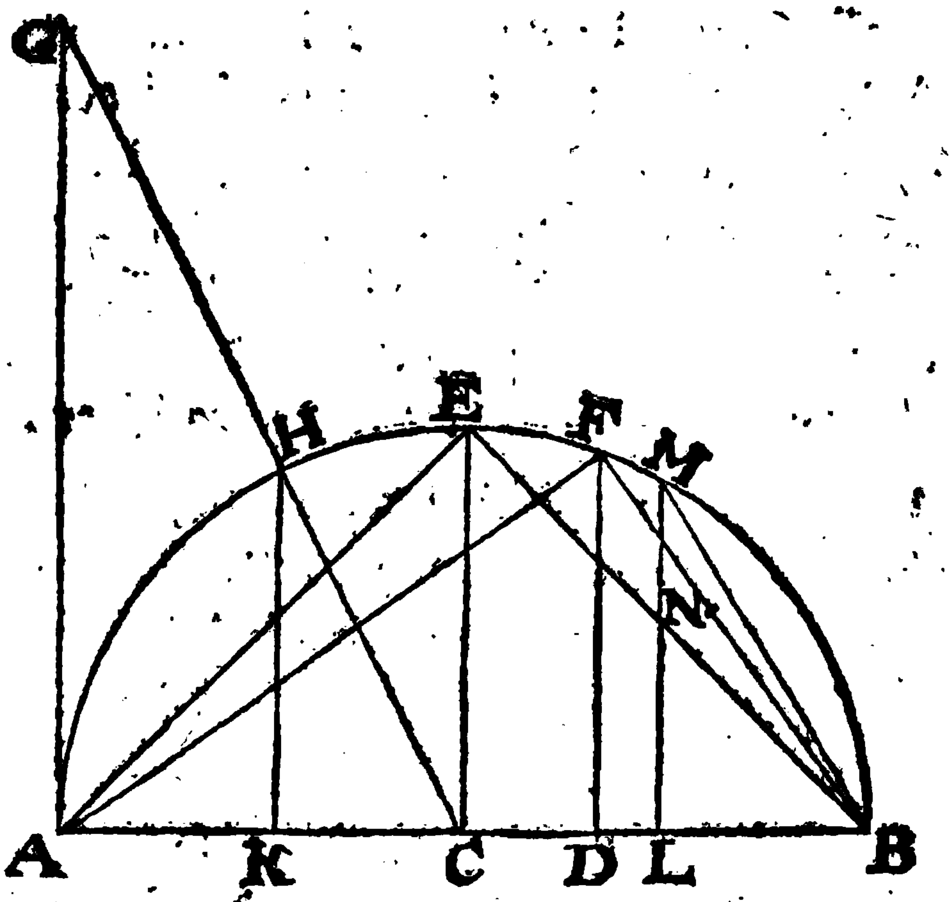
Hieraus erhellet, daß der größere Abschnitt der nach stetiger Proportion geschnittenen Seite des Würfels die Seite des Dodekaëders sey.

Der 18. Satz.

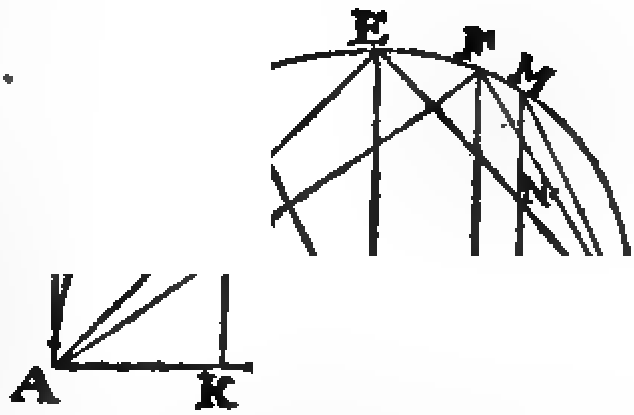
Aufgabe. Die Seiten der in den vorhergehenden Sätzen betrachteten fünf Körper zu finden.

Lehrsatz. Wird das Quadrat des Durchmessers einer Kugel, welche diese fünf Körper umfaßt, in sechs gleiche Theile getheilt: so kommen davon auf das Quadrat des Tetraëders vier, des Oktaëders drey, des Würfels zwey. Von den beyden übrigen aber, die weder zu jenen, noch zu einander in rationaler Verhältniß sind, ist die Seite des Ikosaëders größer, als die Seite des Dodekaëders.

I. Construction der Seiten.



Der gegebenen KugelDurchmesser AB sey in C, D, so geschnitten, daß AC = CB, und AD = 2DB ist. Ueber AB beschreibe den Halbkreis ADB, errichte auf AB in C, D, die Perpendikel CE, DF, ziehe AF, FB, u. schneide FB in N nach stetiger Proportion, daß BN der größere Abschnitt ist. Ferner errichte auf AB in A den Perpendikel AG, mache solchen der AB gleich, und ziehe GC, welche den Halbkreis in H schneidet; fälle aus H auf AB den Perpendikel HK, und mache CL = CK, daß



also LK = 2 KC ist; errichte endlich auf AB in L den Perpendikel LM, und ziehe BM: so ist die Seite des Tetraeders AF; des Würfels BF; des Oktaeders BE; des Dodekaeders BN; und des Ikosaeders BM.

II. Beweis der Construction.

Erstlich, da AD = 2 DB, also AB = 3 DB, das ist, AD : DB = 3 : 1, so ist **zurückkehrend** (5, 19. S.) BA : AD = 3 : 2, das ist, BA = $\frac{3}{2}$ AD. Nun ist (6, 8. S.) $\triangle$ AFB $\sim$ $\triangle$ AFD, also (6, 20. Zus. 2.) BA : AD = $\square$ AB : $\square$ AF. Folglich ist auch $\square$ AB : $\square$ AF = 3 : 2, das ist, $\square$ AB = $\frac{3}{2}$ $\square$ AF; aber AB der Kugel Durchmesser, folglich (13, 13. S.) AF die Seite des Tetraeders.

Zweytens, da AD = 2 DB, also AB = 3 DB, und (6, 8. S. u. 6, 20. Zus. 2.) AB : BD = $\square$ AB : $\square$ FB, so ist auch $\square$ AB = 3 $\square$ FB; aber AB der Kugel Durchmesser, folglich (13, 15. S.) BF die Seite des Würfels.

Drittens, da die Seite des Würfels FB in N nach stetiger Proportion geschnitten ist; so ist (13, 17. Zus.) der größere Abschnitt BN die Seite des Dodekaeders.

Vier-

Viertens, da AC = CB, also AB = 2 BC, und AB : BC = □ AB : □ BE; so ist auch □ AB = 2 □ BE; aber AB der Kugel Durchmesser, folglich (13, 14. S.) BE die Seite des **Oktaëders**.

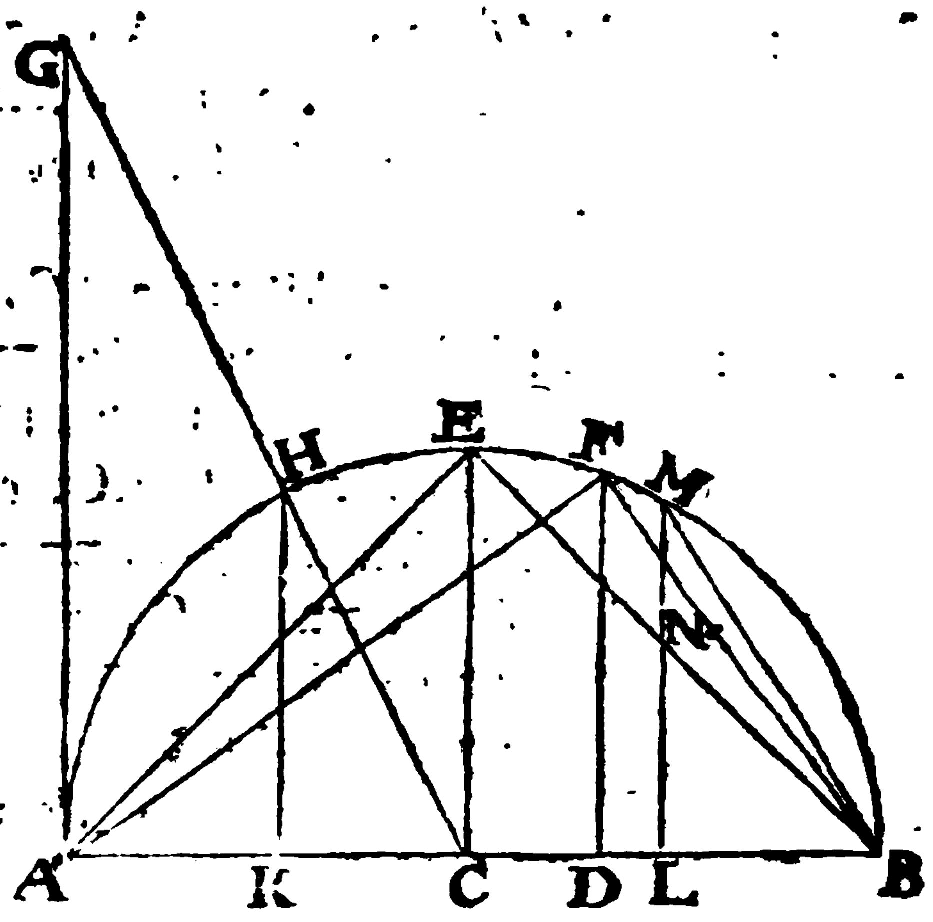
Fünftens, da AG = AB = 2 AC, und (6, 4. S.) GA : AC = HK : KC; so ist auch HK = 2 KC, folglich (6, 20. S.) □ HK = 4 □ KC, folglich □ HK + □ KC, das ist (1, 47. S.) □ HC, = 5 □ KC; aber HC = CB, also □ HC = □ CB, folglich □ CB = 5 □ KC. Nun ist AB = 2 BC, und LK = 2 KC, also BC : KC = AB : LK. Folglich ist auch □ AB = 5 □ LK, folglich ist, weil AB der Durchmesser der Kugel, LK die Seite der sechsseitigen Figur in dem Kreise, in welchen das Ikosaëder beschrieben wird. Nun ist AC = CB, und KC = CL, also AK = LB, also AB = LK + 2 LB; aber AB der Kugel Durchmesser. Folglich sind (13, 16. Zus.) LK, LB, die Seiten der in denselben Kreis beschriebenen sechsseitigen und zehnseitigen Figur. Da nun KC = CL, also (3, 14. S.) ML = HK; aber HK = 2 KC = KL, also ML = KL: so ist auch ML die Seite der sechsseitigen Figur, aber LB der zehnseitigen, und MLB = R. Folglich ist (13, 10. S.) MB die Seite der fünfseitigen Figur in obgedachtem Kreise, folglich (13, 16. S.) die Seite des **Ikosaëders**.

III. Beweis der Lehrsatzes.

Nach den Lehrsätzen des 13, 14 und 15. Satzes ist □ AB = $\frac{3}{2}$ □ AF = 2 □ BE = 3 □ BF. Wird also □ AB in sechs gleiche Theile getheilt: so kommen davon 4 auf □ AF, 3 auf □ BE, und 2 auf □ BF, daß also die Verhältnisse der Seiten des Tetraëders, Oktaëders und Würfels rational sind. Da aber die Seiten des Ikosaëders und Dodekaëders irrational sind, weil jene (13, 16. S.) die kleinere Irrationale, diese (13, 17. S.) die Apotome: so haben diese Seiten weder zu einander, noch zu den drey erstgedachten rationale Verhältnisse.

Daß aber des Ikosaëders Seite BM größer als des Dodekaëders Seite BN sey, wird auf folgende Art bewiesen:

 I. Da



I. Da die Triangel FDB, FAB, gleichwinklig sind: so ist (6, 4. S.) DB : BF = BF : BA, folglich (6, 20. Zus. 2.) DB : BA = □ DB : □ BF, also umgekehrt AB : DB = □ BF : □ DB; aber AB = 3 DB, folglich □ BF = 3 □ DB. Nun ist AD = 2 DB, also □ AD = 4 □ DB. Folglich ist □ AD > □ BF, also AD > BF. Nun ist AB = 2 BC, AD = 2 DB, also BD = 2 CD, BC = 3 CD, mithin □ BC = 9 □ CD = 5 □ CK, folglich CK, das ist, CL > CD und AL > AD. Folglich ist um so mehr AL > BF. Nun ist, weil KL die Seite der sechsseitigen Figur, und KA = LB die Seite der zehnseitigen, (13, 9. S.) AL nach stetiger Proportion in K geschnitten, und KL der größere Abschnitt, auch war BF nach stetiger Proportion in N geschnitten, und BN der größere Abschnitt. Folglich ist KL > BN, also, weil KL = ML, auch ML > BN; aber (1, 19. S.) BM > ML, folglich um so mehr BM > BN.

II. Oder: Da AD = 2 DB, so ist AD = 3 DB. Nun ist (6, 8. S.) △ FAB ∾ △ FBD, also AB : BD = □ AB : □ BF. Folglich ist □ AB = 3 □ BF; aber □ AB = 5 □ KL, folglich 5 □ KL = 3 □ BF. Nun sind (folgender Lehnsatz) 3 □ BF > 6 □ BN. Folglich ist □ KL > □ BN, also KL > BN; aber KL = LM, folglich LM > BN, also um so mehr BM > BN.

Lehn-

Lehnsatz.

Daß aber $3 \square BF > 6 \square BN$ sind, wird also bewiesen: Da $BN > NF$, also $FB \times BN > BF \times FN$: so ist $FB \times BN + BF \times FN > 2 (BF \times FN)$. Nun ist (2, 2. S.) $FB \times BN + BF \times FN = \square BF$, und, weil BF in N nach stetiger Proportion geschnitten, (6, 17. S.) $BF \times FN = \square BN$. Folglich ist $\square BF > 2 \square BN$; folglich $3 \square BF > 6 \square BN$.

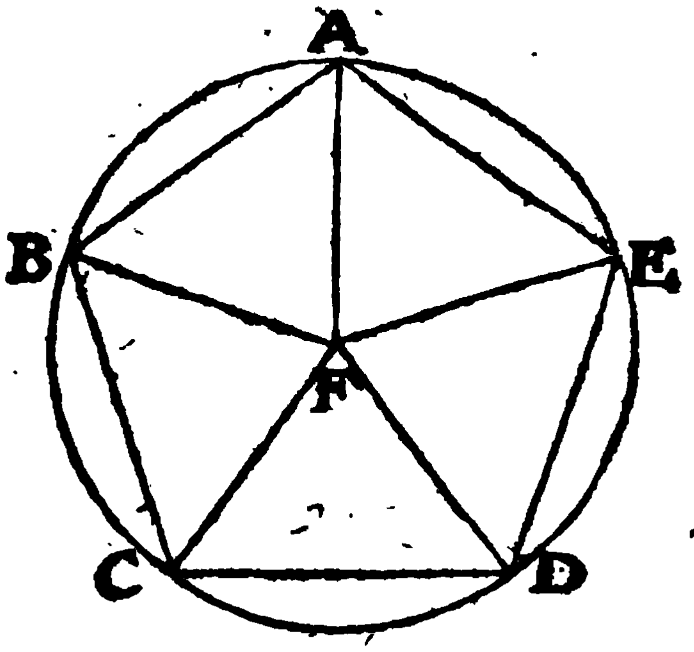
Anmerkung.

Außer den erwähnten fünf Körpern giebt es keinen andern, der von gleichen gleichseitigen und gleichwinkligen Figuren eingeschlossen würde. Denn

1. Aus zwey Triangeln, oder aus zwey ebenen Winkeln läßt sich (11, 11. E.) kein körperlicher Winkel machen. Aus drey gleichseitigen Triangeln entsteht der körperliche Winkel des **Tetraëders**, aus vier des **Oktaëders**, aus fünf des **Ikosaëders**. Aber aus sechs oder mehreren gleichseitigen Triangeln entsteht (11. 21. S.) kein körperlicher Winkel, weil der Winkel eines solchen Triangels $= \frac{2}{3}$ R., folglich sechs derselben $= 4$ R., folglich sieben und mehrere > 4 R. sind.
2. Aus drey Quadraten entsteht der körperliche Winkel des **Würfels**; aber aus vier, welche $= 4$ R. sind, entsteht (11, 21. S.) kein körperlicher Winkel.
3. Aus drey gleichseitigen und gleichwinkligen fünfseitigen Figuren entsteht der körperliche Winkel des **Dodekaëders**; aber aus vier entsteht (11, 21. S.) kein körperlicher Winkel; weil (folgender Lehnsatz) der Winkel solcher fünfseitigen Figur $= 1\frac{1}{5}$ R., folglich vier derselben > 4 R. sind.
4. Aus andern Polygonen ist es noch weniger möglich, einen körperlichen Winkel zu machen.

Lehnsatz.

Daß der Winkel der gleichwinkligen gleich- und fünfseitigen Figur = $1\frac{1}{5}$ R. ist, wird also bewiesen:



Um diese fünfseitige Figur ABCDE beschreibe einen Kreis, dessen Mittelpunkt F, und ziehe die Linien FA, FB, FC, FD, FE, welche (4, 14. S.) die gleichen Winkel der Figur halbiren. Da die Winkel um F = 4 R., und gleich sind: so ist jeder, wie AFB, = $\frac{4}{5}$ R., oder 1 — $\frac{1}{5}$ eines rechten Winkels, folglich (1, 32. S.) FAB + ABF = $1\frac{1}{5}$ R.; aber FAB = FBC, folglich auch FBC + ABF, das ist ABC = $1\frac{1}{5}$ R.

Euklid's Elemente

Vierzehntes Buch

Und Viertes von den Körpern;

nach Einiger Meynung, richtiger nach Andern:

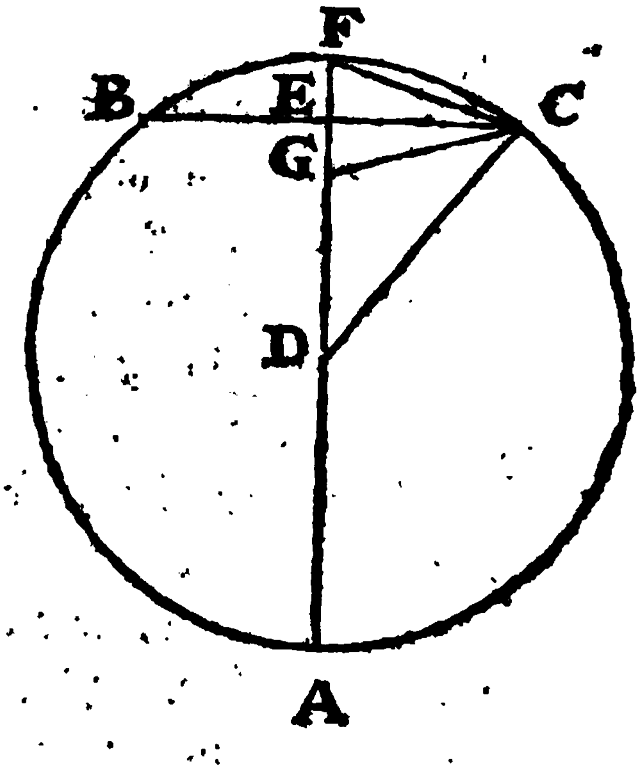
Des Alexandriners Hypsikles

Erstes Buch von den fünf Körpern.

Basilides von Tyrus, mein lieber Protarch, kam einst nach Alexandrien, war an meinen Vater wegen beyder gemeinschäftlicher Liebe zur Mathematik empfohlen, und brachte die meiste Zeit seines Aufenthalts in dem Umgange mit ihm zu. Als sie eines Tages des Apollonius Schrift über Vergleichung des in einerley Kugel beschriebenen Dodekaëders und Ikosaëders, und deren Verhältnisse zu einander, durchgingen; so schien ihnen der Vortrag des Apollonius nicht ganz richtig zu seyn, und sie schrieben, wie mir mein Vater gesagt hat, ihre Verbesserungen nieder. Nach der Zeit fiel mir jedoch eine andere vom Apollonius herausgegebene Schrift in die Hände, welche eine richtige Auflösung der erwähnten Aufgabe enthält, deren Untersuchung mir ein ausnehmendes Vergnügen gewährt hat. Das vom Apollonius herausgegebene Werk kann jeder selbst nachsehen, da es überall zu haben ist; dasjenige aber, was ich nachher, und, so viel ich urtheilen darf, mit möglichstem Fleiße, darüber aufgesetzt habe, glaube ich Dir, wegen Deiner vorzüglichen Einsicht in alle Wissenschaften, besonders aber in die Geometrie, als einem kundigen Beurtheiler meines Vortrags, zuerst vorlegen zu müssen: in der gewissen Erwartung, daß Du sowohl aus Freundschaft für meinen Vater, als aus Wohlwollen gegen mich, geneigt seyn wirst, meinem Versuche Deine Aufmerksamkeit zu schenken. Doch es ist Zeit, daß ich meine Vorrede schließe, und zur Sache selbst komme.

Der 1. Satz. Lehrsatz.

Der vom Mittelpunkte, D, eines Kreises auf die Seite, BC, einer in denselben beschriebenen fünfseitigen Figur gefällte Perpendikel, DE, ist die Hälfte der Linie, die aus dieses Kreises Halbmesser, DF, und der Seite, FC, einer darein beschriebenen zehnseitigen Figur, bestehet.



Verlängere DE zu beyden Seiten nach F, A, ziehe DC, CF, mache EG = EF, und ziehe GC.

Da der Bogen BFC der fünfte Theil des ganzen Umkreises, der Bogen ACF ein Halbkreis, und der Bogen FC die Hälfte des Bogens BFC ist; so ist Bogen ACF = 5 Bog. FC, folglich AC = 4 Bog. FC. Nun ist (6, 33. S.) Bog. AC : Bog. FC = ADC : FDC. Folglich ist ADC = 4 FDC; aber (3, 20. S.) ADC = 2 DFC, folglich 4 FDC = 2 DFC, folglich 2 FDC = DFC. Nun ist (1, 4. S.) DFC = FGC. Folglich ist FGC = 2 FDC, folglich (1, 6. S. und 1, 32. S.) DG = GC; aber (1, 4. S.) GC = FC, folglich DG = FC. Nun ist GE = EF. Folglich ist DE = EF + FC, folglich, wenn DE hinzukommt, 2 DE = DF + FC.

Zusatz.

Zusatz.

Aus (13, 12. S.) erhellet, daß der vom Mittelpunkte des Kreises auf die Seite eines darein beschriebenen gleichseitigen Triangels gefällte Perpendikel die Hälfte des Halbmessers sey.

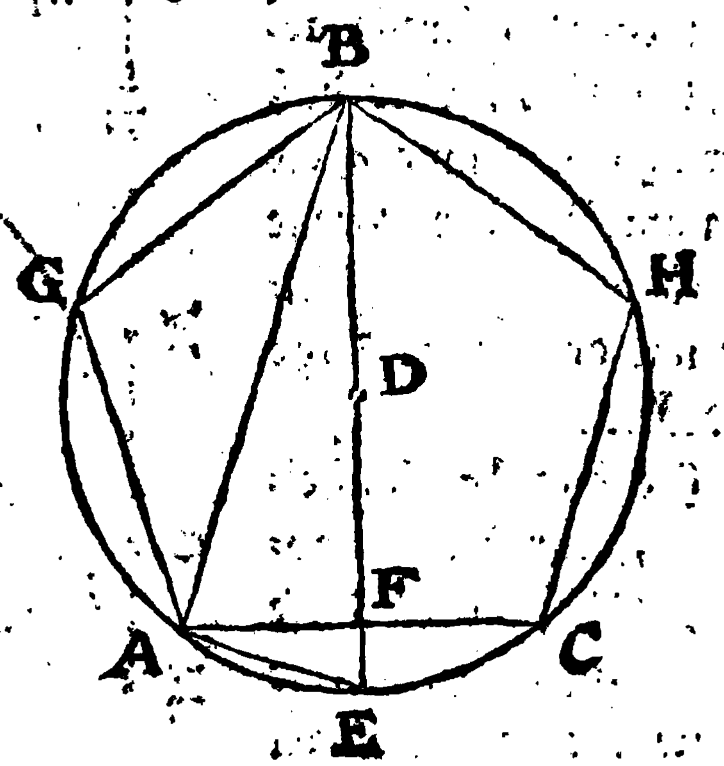
Der 2. Satz. Lehrsatz.

Einerley Kreis faßt des Dodekaëders fünfseitige, und des Ikosaëders dreyseitige Figur, wenn solche Körper in einerley Kugel beschrieben sind.

Vom **Aristäus** in seiner Vergleichung der fünf Körper, und vom **Apollonius** in der zweyten Ausgabe seiner Schrift über Vergleichung des Dodekaëders mit dem Ikosaëder, wird behauptet, daß sich die Oberfläche des Dodekaëders zur Oberfläche des Ikosaëders verhalte, wie das Dodekaëder zum Ikosaëder; weil der Perpendikel, der aus der Kugel Mittelpunkte auf des Dodekaëders fünfseitige und des Ikosaëders dreyseitige Figur gefällt wird, derselbe sey. Wir aber wollen hier den Beweis des vorgedachten Satzes geben, nachdem wir folgenden Lehnsatz werden vorausgeschickt haben.

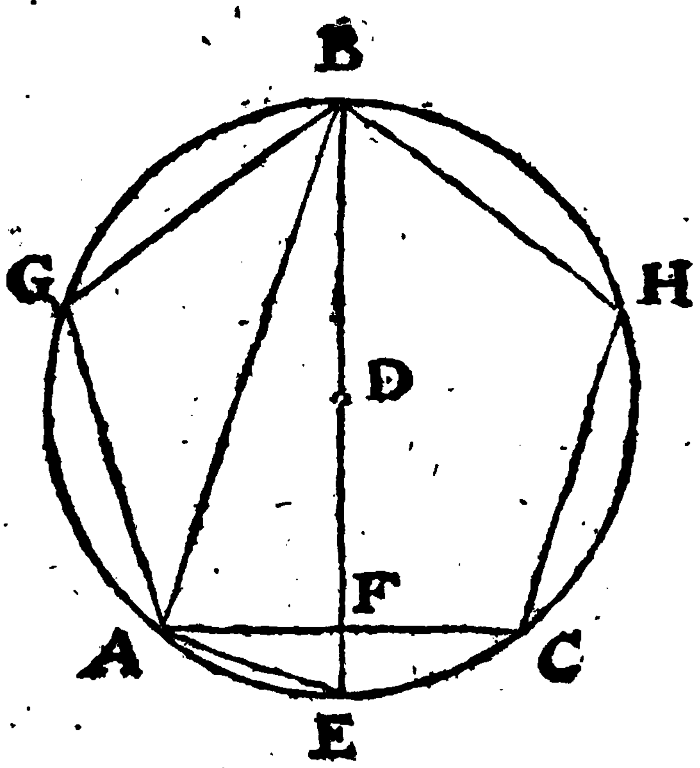
Lehnsatz.

Wird in einen Kreis eine gleich- und fünfseitige Figur, AGBHC, beschrieben: so sind die Quadrate ihrer Seite, AC, und einer Diagonale, AB, zusammen dem fünffachen Quadrate des Halbmessers gleich.



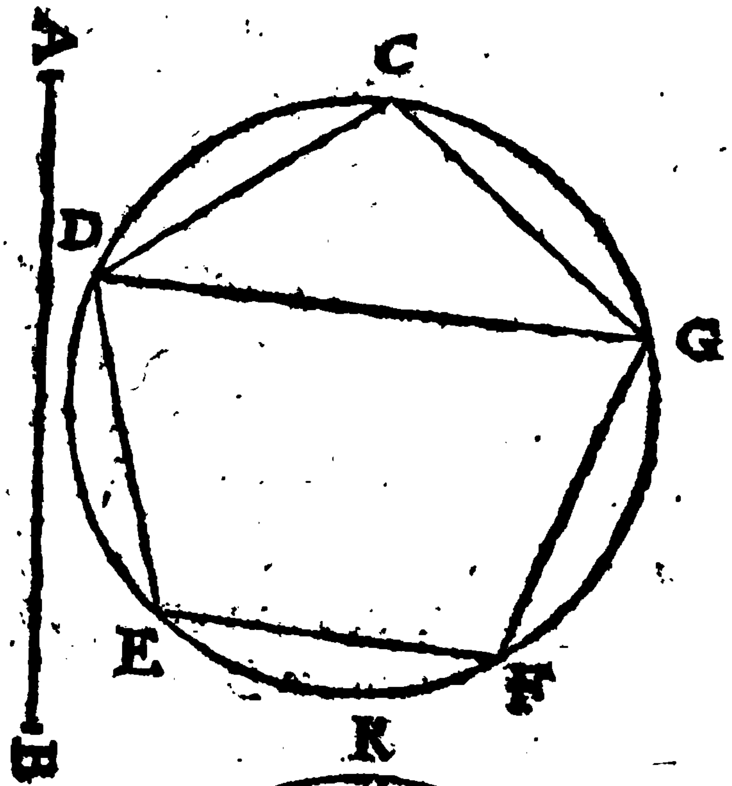
Vom Mittelpunkte D fälle auf die Seite AC den Perpendikel DF, verlängere denselben auf beyden Seiten nach B, E, und ziehe die AE: so ist diese die Seite der zehnseitigen Figur.

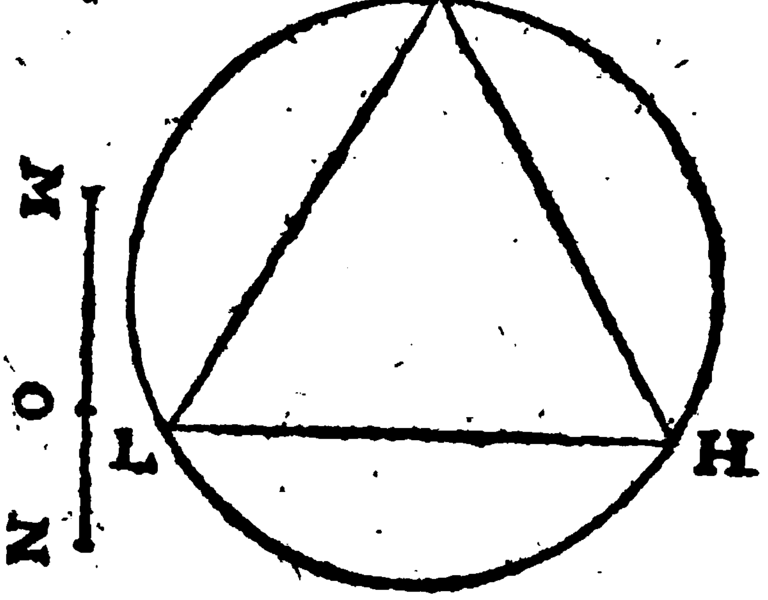
Da BE = 2 DE: so ist (6, 20. Zus.) □ BE = 4 □ DE. Nun ist (3, 31. S.) BAE = R, also (1, 47. S.) $\square$ BE = $\square$ BA + $\square$ AE. Folglich ist $\square$ BA + $\square$ AE = 4 $\square$ DE; folglich, wenn $\square$ DE dazu kommt, $\square$ BA + $\square$ AE + $\square$ DE = 5 $\square$ DE. Nun ist (13, 10. S.) $\square$ AE + $\square$ DE = $\square$ AC. Folglich ist $\square$ AC + $\square$ AB = 5 $\square$ DE.



Nun läßt sich obiger Lehrsatz darthun, wie folget:

Es sey AB der Durchmesser der Kugel, in welche das Dodekaëder und Ikosaëder beschrieben sind: CDEFG aber des Dodekaëders fünfseitige, und KLH des Ikosaëders dreyseitige Figur: so ist zu beweisen, daß beyde Figuren von einerley Kreise gefaßt werden, oder daß r = ϱ sey, wenn r, ϱ, die Halbmesser der Kreise für obgedachte fünfseitige und dreyseitige Figur bedeuten.





Ziehe in der fünfseitigen Figur die Diagonale DG; so ist diese (13, 8. u. 13, 7. S.) die Seite des in die Kugel

beschrie-

beschriebenen Würfels. Nimm eine gerade Linie MN so, daß (10, 6. Zus.) □ AB = 5 □ MN sey. Nun ist (13, 16. Zus.) das Quadrat des Durchmessers AB das Fünffache vom Quadrate des Halbmessers desjenigen Kreises, von dem das Ikosaëder beschrieben wird. Folglich ist solcher Halbmesser die MN. Schneide (6, 30. S.) die MN nach stetiger Proportion in O, daß MO der größere Abschnitt sey: so ist (13, 5. u. 9. S.) MO die Seite der in denselben Kreis beschriebenen zehnseitigen Figur.

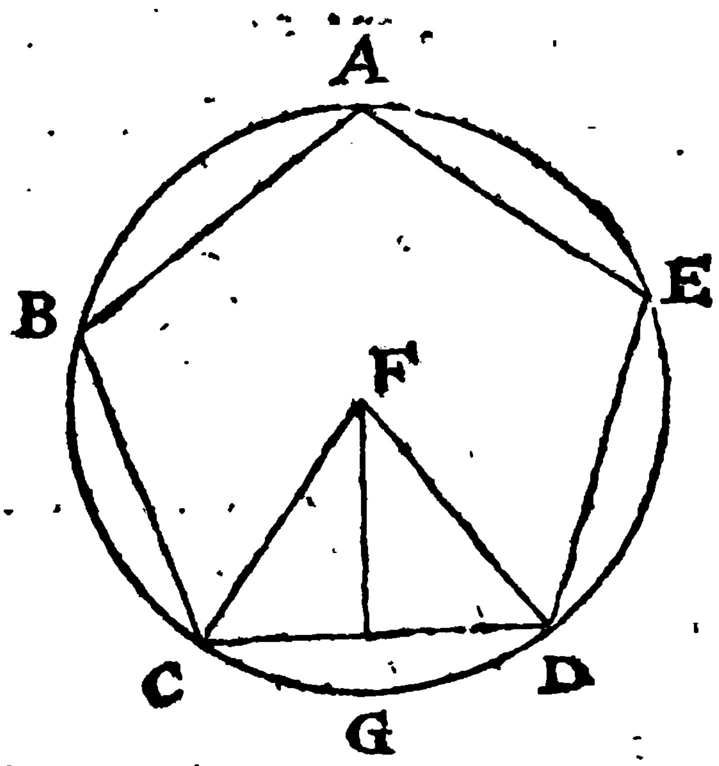
Da □ AB = 5 □ MN, und (13, 15. u. 13, 17. S.) □ AB = 3 □ DG; so ist 3 □ DG = 5 □ MN. Nun ist (13, 8. S. u. 14, 7. S.) DG : CG = MN : MO, also auch DG : MN = CG : MO. Folglich ist 3 □ DG : 5 □ MN = 3 □ CG : 5 □ MO, folglich 3 □ CG = 5 □ MO. Nun ist (13, 16. u. 10. S.) 5 □ KL = 5 □ MN + 5 □ MO. Folglich ist 5 □ KL = 3 □ DG + 3 □ CG. Nun ist (vorstehender Lehnsatz) □ DG + □ CG = 5 □ r, also 3 □ DG + 3 □ CG = 15 □ r. Folglich ist 5 □ KL = 15 □ r. Nun ist (13, 12. S.) □ KL = 3 □ ϱ, also 5 □ KL = 15 □ ϱ. Folglich ist 15 □ r = 15 □ ϱ, folglich r = ϱ.

Der 3. Satz. Lehrsatz.

Wird auf die Seite, CD, einer gleich- und fünfseitigen Figur, ABCDE, vom Mittelpunkte, F, des um dieselbe beschriebenen Kreises ein Perpendikel, FG, gefället: so ist das dreyßigfache unter der Seite, CD, und dem Perpendikel, FG, enthaltene Rectangel der Oberfläche des Dodekaëders gleich. Und wird auf die Seite, BC, eines gleichseitigen Triangels, ABC, vom Mittelpunkte, D, des um denselben beschriebenen Kreises ein Perpendikel, DE, gefällt: so ist das dreyßigfache unter der Seite, BC, und dem Perpendikel, DE, enthaltene Rectangel der Oberfläche des Ikosaëders gleich.

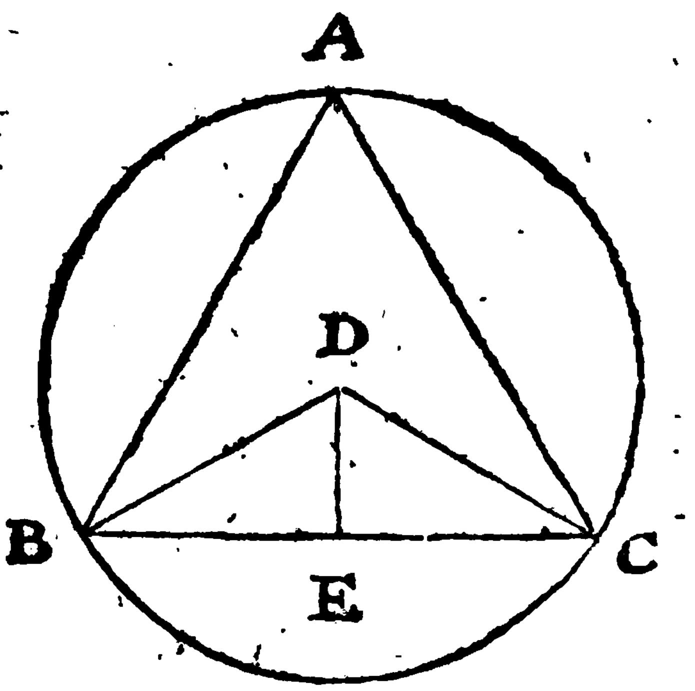
Erster

Erster Theil.



Ziehe CF, FD. Da (1, 41. S.) $CD \times FG = 2 \triangle CDF$: so ist $5 (CD \times FG) = 10 \triangle CDF = 2\, ABCDE$, folglich $30 (CD \times FG) = 12\, ABCDE =$ (11, 28. E.) der Oberfläche des Dodekaëders.

Zweyter Theil.



Ziehe BD, DC. Da (1, 41. S.) $BC \times DE = 2 \triangle DBC$: so ist $3 (BC \times DE) = 6 \triangle DBC = 2 \triangle ABC$, folglich $30 (BC \times DE) = 20 \triangle ABC =$ (11, 29. E.) der Oberfläche des Ikosaëders.

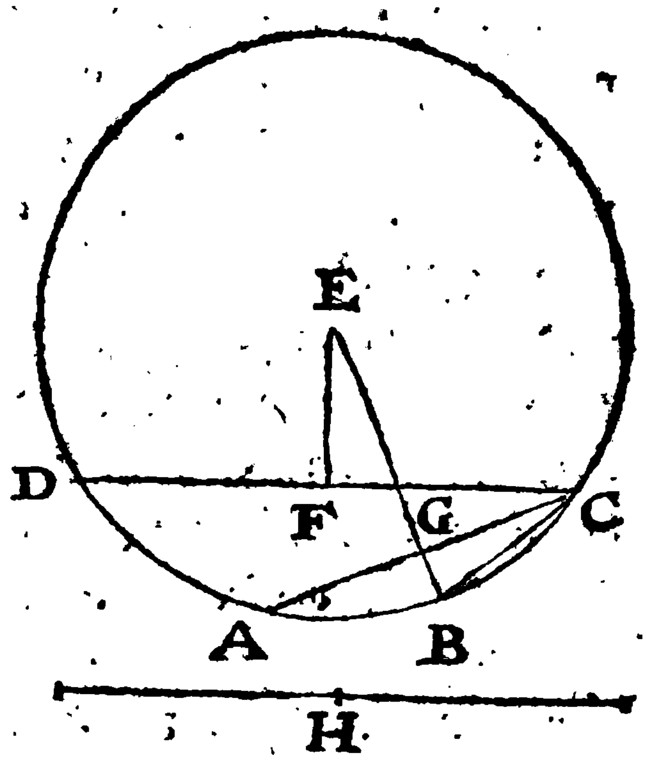
Zusatz.

Hieraus erhellet, daß sich die Oberflächen des in einerley Kugel beschriebenen Dodekaëders und Ikosaëders wie die oben genannten Rectangel verhalten.

Der 4. Satz. Lehrsatz.

Die Oberfläche des Dodekaëders verhält sich zur Oberfläche des Ikosaëders, wie die Seite des Würfels, H, zur Seite des Ikosaëders, DC.

Der



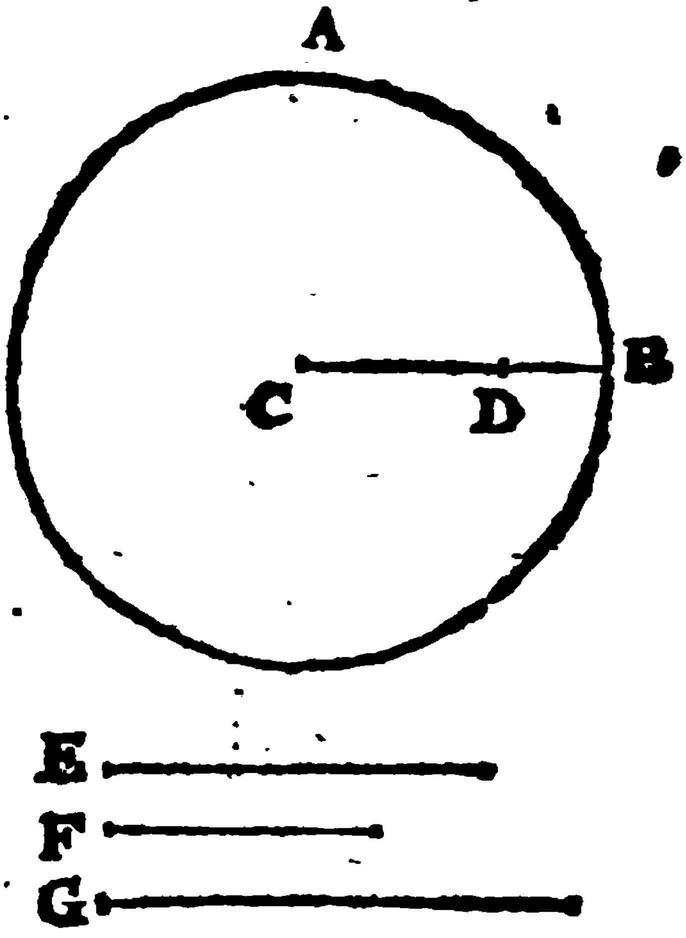
Der Kreis um E fasse die fünfseitige und die dreyseitige Figur des in einerley Kugel beschriebenen Dodekaëders und Ikosaëders. Trage in denselben die Seite DC des Triangels und die Seite AC der fünfseitigen Figur. Fälle aus dem Mittelpunkte E auf DC, AC, die Perpendikel EF, EG, verlängere EG bis B, und ziehe BC, die Seite der zehnseitigen Figur.

Wird nun die gerade Linie, die aus EB, BC, bestehet, nach stetiger Proportion geschnitten: so ist (13, 9. S.) EB der größere Abschnitt. Nun ist (14, 1. S.) 2 EG = EB + BC, und (13, 12. S.) 2 EF = BE. Folglich ist, wenn 2 EG nach stetiger Proportion geschnitten wird, (13, 9. S.) 2 EF der größere Abschnitt. Nun ist, wenn H nach stetiger Proportion geschnitten wird, (13, 17. Zus.) CA der größere Abschnitt. Folglich ist (14, 7. S.) H : CA = 2 EG : 2 EF = EG : EF, folglich (6, 16. S.) H × EF = CA × EG. Nun ist (6, 1. S.) H : CD = H × EF : CD × EF. Folglich ist H : CD = CA × EG : CD × EF, das ist, die Seite des Würfels verhält sich zur Seite des Ikosaëders (14, 3. Zus.) wie die Oberfläche des Dodekaëders zur Oberfläche des Ikosaëders.

Der 5. Satz. Lehrsatz.

Wird irgend eine gerade Linie, BC, nach stetiger Proportion geschnitten: so verhält sich die Linie, welche die Quadrate der ganzen, BC, und des größern Abschnitts, CD, potenzirt, zu der Linie, welche die Quadrate der ganzen, BC, und des kleinern Abschnitts, DB, potenzirt, wie die Seite des Würfels, G, zur Seite des Ikosaëders, E.

Der



Der Kreis, dessen Halbmesser CB, fasse die fünfseitige und die dreyseitige Figur des in einerley Kugel beschriebenen Dodekaëders und Ikosaëders. Nun sey CB nach stetiger Proportion geschnitten: so ist (13, 5. u. 9. S.) der größere Abschnitt CD die Seite der in denselben Kreis beschriebenen zehnseitigen Figur. Es sey (13, 18. S.) die Seite des Ikosaëders E, des Dodekaëders F, und des Würfels G; also E die Seite des Triangels, und F die Seite der in denselben Kreis beschriebenen fünfseitigen Figur, aber F auch (13, 17. Zus.) der größere Abschnitt der nach stetiger Proportion geschnittenen Seite des Würfels G. Nun ist (13, 12. S.) □ E = 3 □ CB, und (13, 4. S.) □ CB + □ BD = 3 □ CD. Folglich ist □ E : □ CB + □ BD = □ CB : □ CD = (14, 7. S.) □ G : □ F; folglich verwechselt und umgekehrt □ G : □ E = □ F : □ CB + □ BD. Nun ist (13, 10. S.) □ F = □ CB + □ DC. Folglich ist □ G : □ E = □ BC + □ DC : □ CB + □ BD. Aber so wie □ BC + □ DC zu □ CB + □ BD, so (14, 7. S.), wenn irgend eine andere gerade Linie nach stetiger Proportion geschnitten ist, das Quadrat der ganzen und das des größeren Abschnitts zu dem Quadrate der ganzen und dem des kleineren Abschnitts. Folglich verhält sich auch die Seite des Würfels E zu der Seite des Ikosaëders G, wie die das Quadrat der ganzen und das des größeren Abschnitts irgend einer nach stetiger Proportion geschnittenen Linie potenzirende sich verhält zu der das Quadrat der ganzen und das des kleineren Abschnittes potenzirenden.

Der

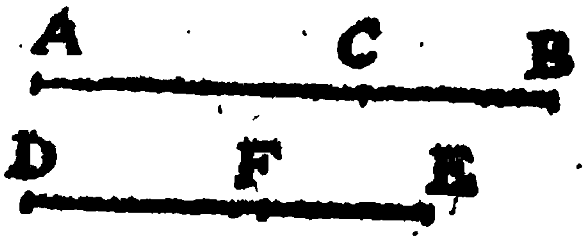
Der 6. Satz. Lehrsatz.

Der Körper des Dodekaëders verhält sich zum Körper des Ikosaëders, wie die Seite des Würfels zur Seite des Ikosaëders.

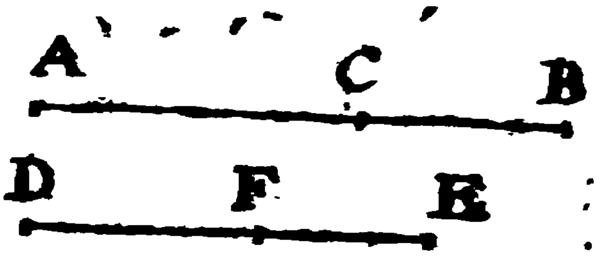
Da (14, 2. S.) gleiche Kreise die fünfseitige und die dreyseitige Figur des in einerley Kugel beschriebenen Dodekaëders und Ikosaëders fassen, aber gleiche Kreise auf der Kugelfläche gleich weit vom Mittelpunkte abstehen, weil die aus demselben auf die Ebenen gedachter Kreise gefällten Perpendikel deren Mittelpunkte treffen und gleich sind: so sind auch die vom Mittelpunkte der Kugel nach den Mittelpunkten zuerst gedachter Kreise gezogenen geraden Linien perpendikular und gleich. Folglich sind die Pyramiden, die zum gemeinschaftlichen Gipfel den Mittelpunkt der Kugel, zu Grundflächen aber die fünfseitige und dreyseitige Figur des Dodekaëders und Ikosaëders haben, von gleicher Höhe, und verhalten sich daher (12, 5. u. 6. S.) wie ihre Grundflächen. Folglich verhält sich eine Pyramide des Dodekaëders zu einer Pyramide des Ikosaëders, wie die fünfseitige Figur zu der dreyseitigen; folglich verhalten sich auch zwölf Pyramiden des Dodekaëders zu zwanzig Pyramiden des Ikosaëders, wie zwölf fünfseitige Figuren zu zwanzig dreyseitigen, das ist, der Körper des Dodekaëders verhält sich zum Körper des Ikosaëders, wie die Oberfläche des Dodekaëders zur Oberfläche des Ikosaëders, folglich auch (14, 4. S.) wie die Seite des Würfels zur Seite des Ikosaëders.

Der 7. Satz. Lehrsatz.

Zwey nach stetiger Proportion geschnittene gerade Linien, AB, DE, verhalten sich wie ihre größern Abschnitte, AB, DF.



Da (6, 17. S.) $AB \times CB = \square AC$, und $DE \times FE = \square DF$, also $AB \times CB : \square AC = DE \times FE : \square DF$; so ist (5, 15. S.) $4 (AB \times CB) : \square AC = 4 (DE \times FE) : \square DF$,



folglich verbunden $4 (AB \times CB) + \square AC : \square AC = 4 (DE \times FE) + \square DF : \square DF$. Nun ist (2, 8. S.) $4 (AB \times BC) + \square AC = \square (AB + BC)$, und $4 (DE \times EF) + \square DF = \square (DE + EF)$. Folglich ist $\square (AB + BC) : \square AC = \square (DE + EF) : \square DF$, folglich (6, 22. S.) $AB + BC : AC = DE + EF : DF$, folglich verbunden $AB + BC + AC : AC = DE + EF + DF : DF$, das ist, $2\,AB : AC = 2\,DE : DF$, folglich auch $AB : AC = DE : DF$, folglich verwechselt $AB : DE = AC : DF$.

Zusatz.

Wird eine beliebige gerade Linie nach stetiger Proportion geschnitten: so verhält sich die Linie, welche die Quadrate der ganzen und des größern Abschnitts potenzirt, zu der Linie, welche die Quadrate der ganzen und des kleinern Abschnitts potenzirt, wie die Oberfläche sowohl als der Körper des Dodekaëders zur Oberfläche sowohl als dem Körper des in dieselbe Kugel beschriebenen Ikosaëders.

Euklid's Elemente

Funfzehntes Buch

Und Fünftes von den Körpern;

nach Einiger Meynung, richtiger nach Andern:

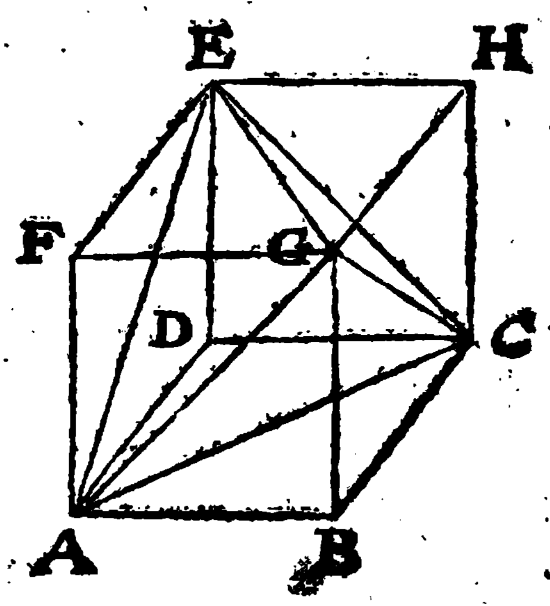
Des Alexandriners Hypsikles

Zweytes Buch von den fünf Körpern.

Der 1. Satz. Aufgabe.

In einen gegebenen Würfel, AH, ein Tetraëder zu beschreiben.

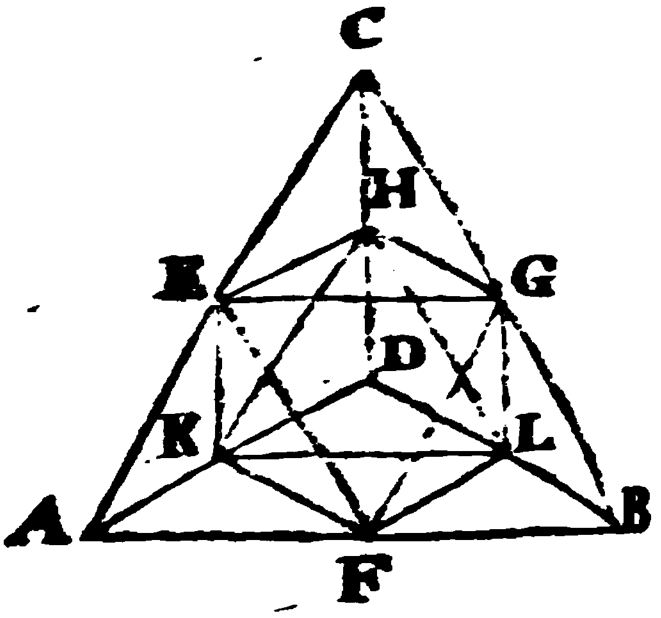
Ziehe in den sechs Quadraten die Diagonalen AC, AE, CE, AG, EG, GC: so sind offenbar die Triangel AEC, AGE, AGC, CGE, gleichseitig. Folglich ist (11, 26. E.) AECG ein Tetraëder, und in den Würfel beschrieben, da seine Ecken die Ecken des Würfels sind.



Der 2. Satz. Aufgabe.

In ein gegebenes Tetraëder, ABCD, ein Oktaëder zu beschreiben.

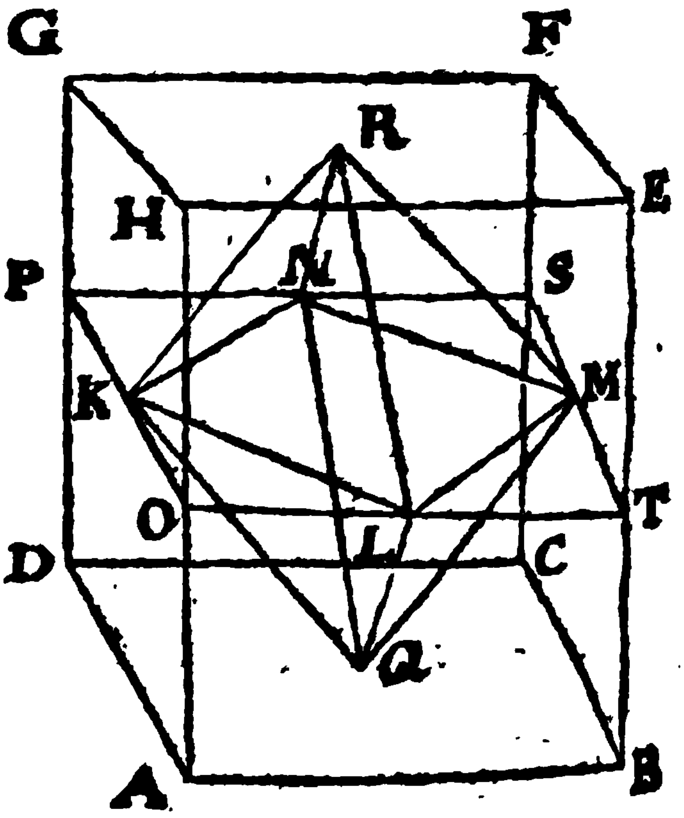
Halbire des Tetraëders Seiten in den Punkten E, F, G, H, K, L, und verbinde diese Punkte mit zwölf geraden Linien HK, HL, EF, FG, u. s. w., welche (1, 4. S.) alle einander gleich sind. Demnach sind die acht Triangel, deren Grundlinien FG, GH, HK, KF, und deren Spitzen E, L, sind, gleichseitig. Folglich ist (11, 27. E.) der Körper EL ein Oktaëder, und in das Tetraëder beschrieben, da seine Ecken die Mitte der Seiten des Tetraëders treffen.



Der 3. Satz. Aufgabe.

In einen gegebenen Würfel, AF, ein Oktaëder zu beschreiben.

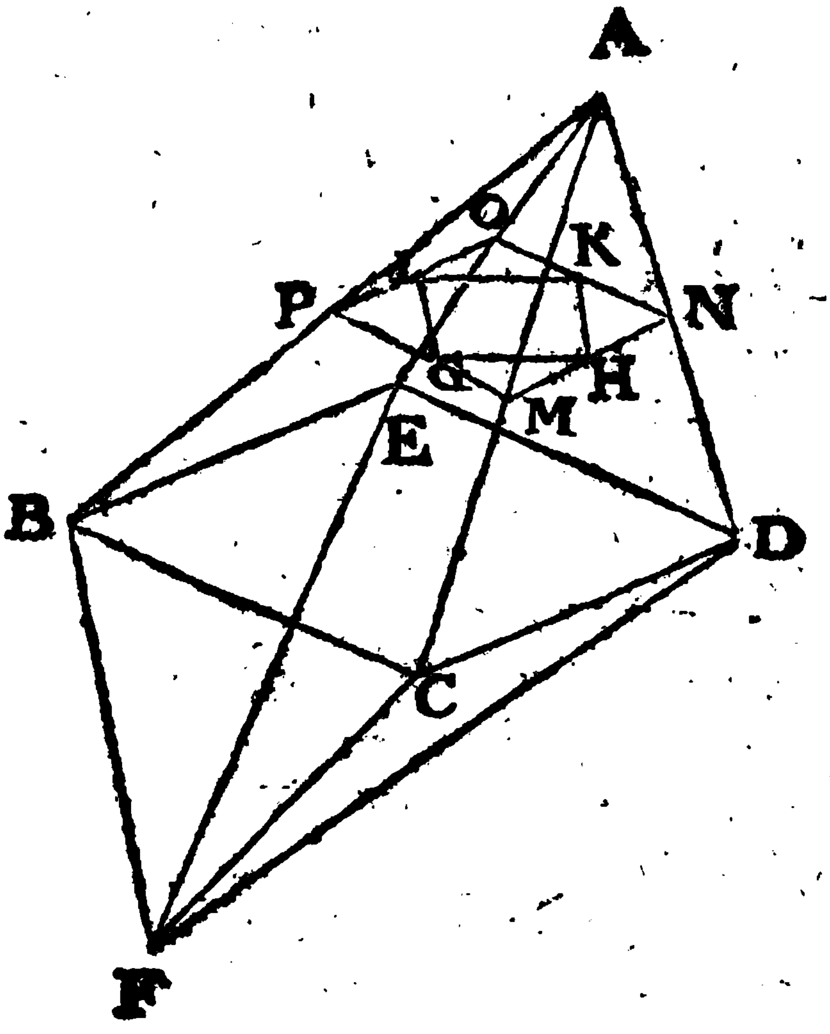
Nimm (4, 8. S.) die Mitte der Quadrate K, L, M, N, Q, R, verbinde diese Punkte mit zwölf geraden Linien KL, LM, RM, QM, u. s. w.: so ist der Körper, RQ, das verlangte Oktaëder.



Denn zieht man durch die Punkte K, L, M, N, mit den Seiten der Grundfläche AC Parallellinien PO, OT, TS, SP: so sind diese gedachten Seiten, also einander, gleich, und treffen einander, weil (4, 8. S.) OP, SP, eine und dieselbe Linie DG; OT, ST, eine und dieselbe Linie BE, u. s. w. halbiren. Folglich sind (11, 10. S.) KOL, MTL, rechte Winkel. Nun sind KO, OL, LT, TM, TM, die Hälften der einander gleichen Linien PO, OT, TS, also auch einander gleich. Folglich ist (1, 4. S.) KL = LM. Nun sind aus gleichen Gründen auch die LK, KN, NM, und alle übrigen Linien einander gleich. Folglich sind die acht Triangel, deren Grundlinien KL, LM, MN, NK, und deren Spitzen R, Q, sind, gleichseitig. Folglich ist (11, 27. E.) der Körper RQ ein Oktaëder, und in den Würfel beschrieben, da seine Ecken die Mitte der Flächen des Würfels treffen.

Der 4. Satz. Aufgabe.

In ein gegebenes Oktaëder, AF, einen Würfel zu beschreiben.



Es sey ABCDE eine der sechs vierseitigen Pyramiden des Oktaëders. Halbire dieser Pyramide Seitenlinien in M, N, O, P, und ziehe die geraden Linien MN, NO, OP, PM, welche (1, 4. S.) einander gleich, und (6, 2. S.) den Seiten des Quadrats (13, 14. S.) BCDE parallel sind, folglich (11, 10. S.) rechte Winkel einschließen. Demnach ist MNOP ein Quadrat. Halbire die Seiten dieses Quadrats in G, H, K, L, und ziehe GH, HK, KL, LG, welche (1, 4. S.) einander gleich sind, und, da sie (1, 32. S.) mit MN, NO, OP, PM, halbe rechte Winkel machen, (1, 13. S.) rechte Winkel einschließen. Demnach ist GHKL ein Quadrat. Eben so, wie mit der Pyramide ABCDE, verfahre mit den

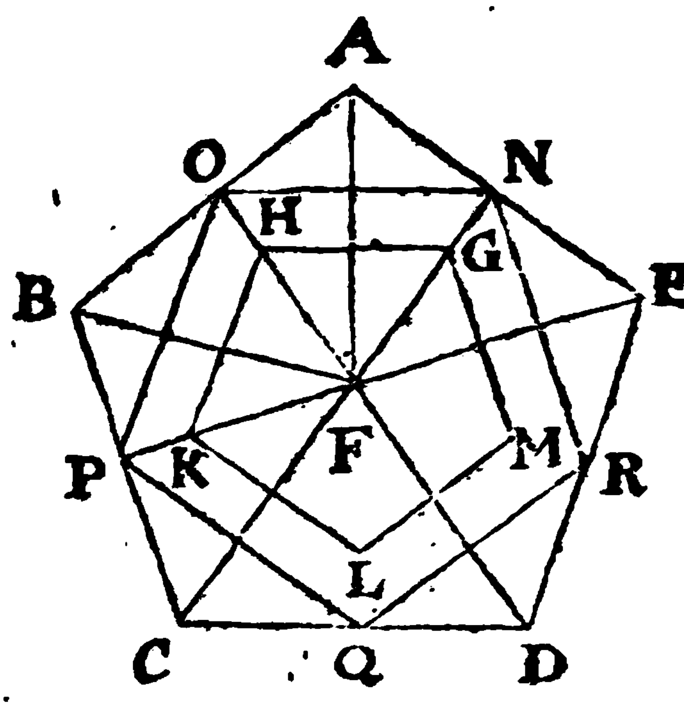
 fünf

fünf übrigen Pyramiden des Oktaeders: so erhältst du noch fünf Quadrate, die dem Quadrate GHKL gleich sind, und mit ihm einen Würfel einschließen, der in das Oktaeder beschrieben ist, da seine Ecken die Flächen des Oktaeders treffen.

Der 5. Satz. Aufgabe.

In ein gegebenes Ikosaeder ein Dodekaeder zu beschreiben.

Es sey ABCDEF eine der zwölf fünfseitigen Pyramiden des Ikosaeders. Nimm (4, 4. S.), der in die Triangel AFE, AFB rc. beschriebenen Kreise Mittelpunkte G, H, K, L, M, und verbinde diese Punkte mit geraden Linien: so ist GHKLM eine fünfseitige Figur von gleichen Seiten und Winkeln.



Denn ziehet man FG, FH, FK u. s. w., und verlängert sie: so halbiren sie (4, 4. S.) die Winkel bey F, folglich (1, 4. S.) auch die Grundlinien in N, O, P, u. s. w. Ziehet man nun die NO, OP; so sind diese (1, 4. S.) einander gleich. Nun ist (1, 4. S.) FN = FO = FP, und (1, 26. S. und 4, 4. S.) FG = FH = FK. Folglich sind (6, 2. S.) GH, HK, mit NO, OP, parallel, folglich ist (6, 4. S.) NO : GH = OP : HK; folglich, weil NO = OP, auch GH = HK. Aus eben den Gründen ist HK = KL u. s. w. Folglich ist die fünfseitige Figur GHKLM gleichseitig; aber auch gleichwinklig, weil (11, 10. S.) GHK = NOP, HKL = OPQ u. s. w., und (1, 13. S.) NOP = OPQ u. s. w.

Auch ist diese Figur in Einer Ebene. Denn ein Perpendikel von F auf die Ebene der Figur ABCDE trifft ihren Mittelpunkt, und alle Linien von demselben nach N, O, P, Q, R, machen (11, 4. S.) mit gedachtem Perpendikel rechte

Win-

Winkel. Ziehet man nun durch G eine Linie der durch N gezogenen parallel, und von dem Punkte, wo sie den Perpendikel trifft, gerade Linien nach H, K, L, M: so wird dieser Perpendikel von den Parallellinien in der Verhältniß FN : FG = FO : FH u. s. w. geschnitten. Folglich sind (6, 2. S.) die Linien durch G, H, u. s. w. denen durch N, O, u. s. w. parallel, machen also mit dem Perpendikel auch rechte Winkel, und sind folglich (11, 5. S.) in Einer Ebene.

Eben so, wie mit der Pyramide ABCDEF, verfahre mit den eilf übrigen Pyramiden des Ikosaëders: so erhältst du noch eilf gleich- und fünfseitige Figuren, die der GHKLM gleich sind, und mit ihr ein Dodekaëder einschließen, das in das Ikosaëder beschrieben ist, da seine Ecken die Flächen des Ikosaëders treffen.

Der 6. Satz. Aufgabe.

Die Zahl der Seiten und Ecken der fünf Körper zu finden.

Erstlich. Die Zahl der Seiten zu finden, multiplicire man die Zahl der den Körper einschließenden Figuren mit der Zahl ihrer Seiten, und dividire das Product mit Zwey.

Denn z. E. das Ikosaëder wird von zwanzig Triangeln eingeschlossen, und jeder Triangel von drey Seiten begränzt. Dieß gäbe sechzig Seiten; davon aber geben zwey und zwey nur eine Seite des Körpers. Folglich hat das Ikosaëder nur dreyßig Seiten.

Zweytens. Die Zahl der Ecken zu finden, multiplicire man die Zahl der den Körper einschließenden Figuren mit der Zahl der Winkel in jeder Figur, und dividire das Product mit der Zahl der Winkel, die eine Ecke einschließen.

Denn z. E. das Ikosaëder wird von zwanzig Triangeln eingeschlossen, deren jeder drey Winkel hat. Dieß giebt sechzig Winkel; davon aber schließen fünf eine Ecke des Körpers ein. Folglich hat das Ikosaëder zwölf Ecken.

Der 7. Satz. Aufgabe.

Die Neigungen der Ebenen in den fünf Körpern zu finden.

Auflösung.

Nach unserm großen Lehrer, Isidor, werden diese Neigungen auf folgende Art bestimmt:

Erstlich. Im Würfel schneiden sich die ihn einschließenden Ebenen unter rechten Winkeln, wie an sich klar ist.

Zweytens. Für das Tetraëder beschreibe aus den Endpunkten einer Seite eines der einschließenden Triangel, mit des Triangels Höhe, Kreise: so schließen die vom Durchschnittspunkte der beyden Kreise nach jenen Endpunkten gezogenen geraden Linien den gesuchten Neigungswinkel ein.

Drittens. Für das Oktaëder mache von der Seite eines der einschließenden Triangel das Quadrat, ziehe dessen Diagonale, beschreibe aus deren Endpunkten, mit des Triangels Höhe, Kreise so schließen die vom Durchschnittspunkte der beyden Kreise nach jenen Endpunkten gezogenen geraden Linien einen Winkel ein, welcher den gesuchten Neigungswinkel zu zwey rechten Winkeln ergänzt.

Viertens. Für das Ikosaëder beschreibe über der Seite eines der einschließenden Triangel eine gleich- und fünfseitige Figur, ziehe darin eine Diagonale, und beschreibe aus deren Endpunkten, mit des Triangels Höhe, Kreise: so schließen die vom Durchschnittspunkte beyder Kreise nach jenen Endpunkten gezogenen geraden Linien einen Winkel ein, welcher den gesuchten Neigungswinkel zu zwey rechten Winkeln ergänzt.

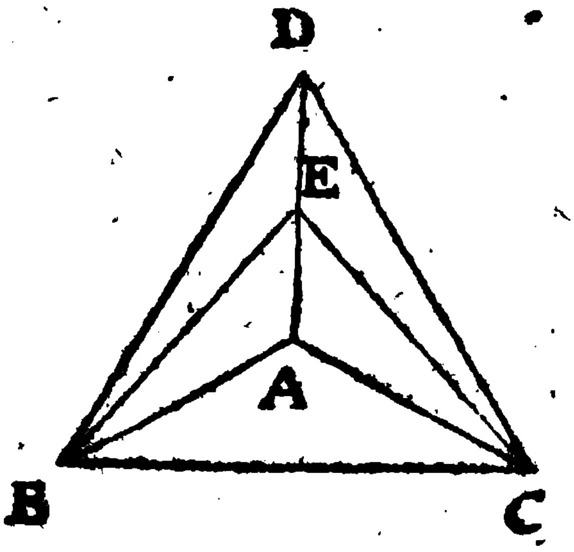
Fünftens. Für das Dodekaëder ziehe in einer der fünfseitigen Figuren eine Diagonale, beschreibe aus deren Endpunkten, mit dem aus ihrer Mitte auf die ihr parallele Seite der Figur gefällten Perpendikel, Kreise: so schließen die vom Durchschnittspunkte beyder Kreise nach jenen Endpunkten gezogenen geraden Linien einen Winkel ein, welcher

den

den gesuchten Neigungswinkel zu zwey rechten Winkeln ergänzt.

Auf obige Art hat dieser höchst berühmte Mann die Aufgabe aufgelöset, da ihm der Beweis von jedem Stücke offenbar zu seyn schien. Damit aber die gegebenen Lehren einleuchtend werden, will ich den Grund von einer jeden deutlich aus einander setzen.

Beweis.

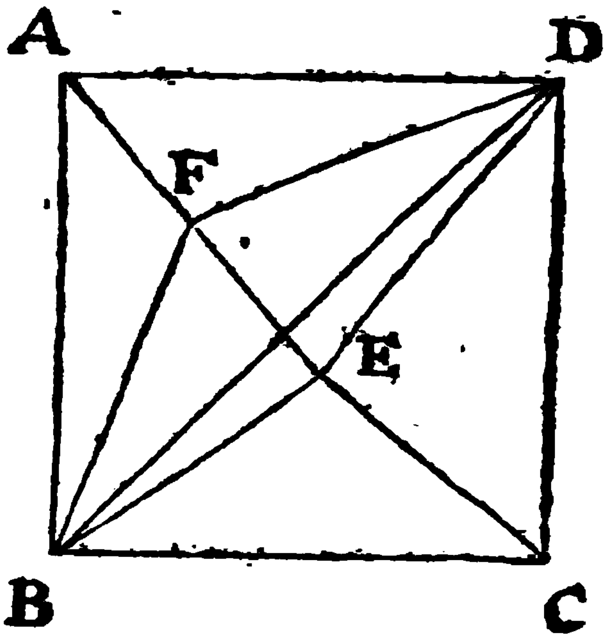


Erstlich. Es sey ABCD ein Tetraëder, dessen Grundfläche ABC, und Gipfel D ist. Halbire die eine Seitenlinie AD in E, und ziehe BE, EC.

Da AB = BD, AE = ED, und BE gemein; so ist (1. 8. S.) BED = BEA = R., also BE, und gleiche Weise EC, auf AD perpendikular. Da AC = 2 AE: so ist □ AC = 4 □ AE. Nun ist (1, 47. S.) □ AC = □ AE + □ EC. Folglich ist □ AC : □ EC = 4 : 3; aber EC = EB, folglich □ BC < □ BE + □ EC. Folglich ist (2, 13. S.) BEC ein spitzer Winkel, also (11, 6. E.) der Neigungswinkel der Ebenen des Tetraëders.

Dieser Neigungswinkel BEC ist gegeben, weil des Triangels Seite BC, und die Perpendikel EB, EC, gegeben sind. Werden nun aus den Endpunkten der Seite BC mit dem Perpendikel BE Kreise beschrieben, die sich in E schneiden: so schließen gerade Linien von dem Durchschnittspunkte E nach jenen Endpunkten B, C, den Neigungswinkel der Ebenen ein. Daß aber gedachte Kreise sich in E schneiden, ist offenbar. Denn jede der BE, EC, ist > $\frac{1}{2}$ BC. Nun würden Kreise, aus den Endpunkten mit $\frac{1}{2}$ BC beschrieben, einander berühren; mit einem Halbmesser < $\frac{1}{2}$ BC beschrieben, weder einander berühren noch schneiden. Da also BE > $\frac{1}{2}$ BC, so müssen sich die Kreise allerdings schneiden.

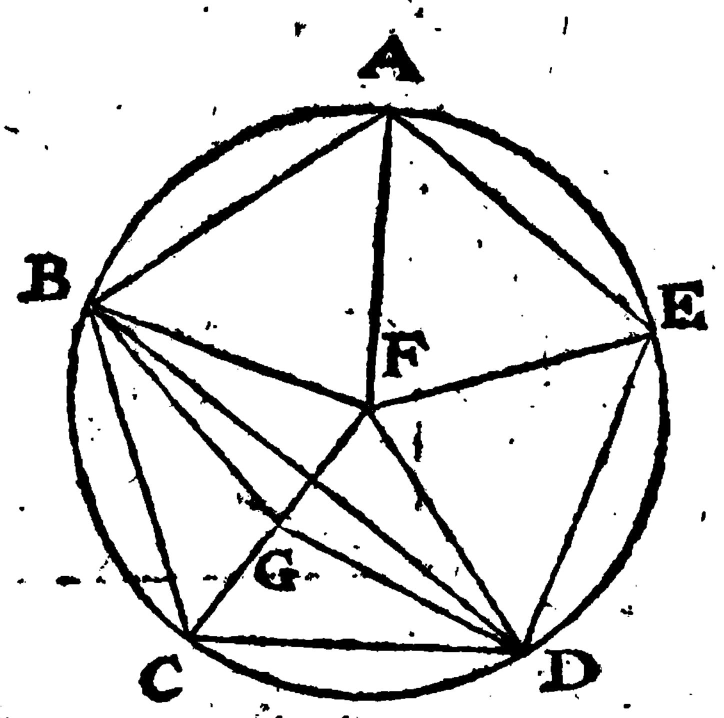
Zwey-



Zweytens. Des Oktaëders Hälfte sey die Pyramide, deren Grundfläche ABCD, und Gipfel E ist. Eine der Seiten AE sey in F halbirt, und BF, FD, gezogen, welche also gleich, und auf AE perpendikular sind. Ziehe BD. Da ABCD ein Quadrat, und dessen Diagonale BD ist: so ist □ BD = 2 □ DA. Nun ist nach Vorigem □ DA : □ DF = 4 : 3. Folglich ist □ BD : □ DF = 8 : 3; aber DF = FB, folglich □ BD > □ BF + □ FD. Folglich ist (2, 12. E.) BFD ein stumpfer Winkel, folglich (11, 6. E.) die Ergänzung des Neigungswinkels der Ebenen eines Oktaëders zu zwey rechten Winkeln.

Dieser Winkel BFD ist gegeben, weil des Triangels Seite AD, also □ AD, also auch dessen Diagonale BD, und die Perpendikel BF, FD, gegeben sind. Macht man nun von der Seite AD das Quadrat, ziehet die Diagonale BD, und beschreibt aus deren Endpunkten, mit dem Perpendikel BF, Kreise, welche sich in F schneiden: so schließen die aus F nach B und D gezogenen geraden Linien den Winkel BFD, als die Ergänzung des gesuchten Neigungswinkels zu zwey rechten Winkeln, ein. Auch hier erhellet, daß gedachte Kreise sich in F schneiden, weil BF > $\frac{1}{2}$ BD. Denn nach obigem Beweise ist □ BD : □ DF = 8 : 3, und (6, 20. E.) □ BD = 4 □ $\frac{1}{2}$ BD, folglich BF > $\frac{1}{2}$ BD.

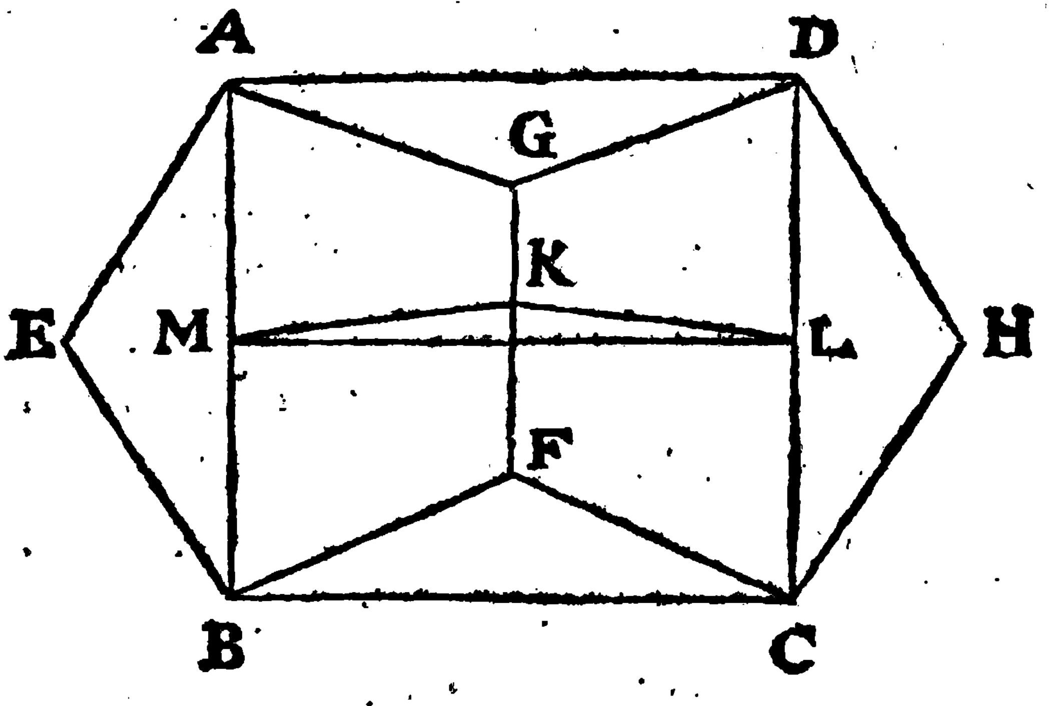
Drittens. Es sey ein Theil des Ikosaëders die Pyramide, deren Grundfläche die gleich- und fünfseitige Figur ABCDE, und Gipfel F ist. Halbire eine Seite CF in G, und ziehe BG, GD: so sind diese gleich, und auf CF perpendikular. Ziehet man nun die Diagonale DB dem stumpfen Winkel BCD gegenüber: so ist BG < BC, und eben so GD < CD, folglich (1, 21. E.) BGD > BCD. Folglich ist gewiß BGD ein



ein stumpfer Winkel, folglich (11, 6. S.) die Ergänzung des Neigungswinkels der Ebenen eines Ikosaëders zu zwey rechten Winkeln.

Dieser Winkel BGD ist gegeben, weil die Seite der fünfseitigen Figur BC, also die Diagonale BD, und der Perpendikel BG gegeben sind. Beschreibt man nun über der Seite BC die gleich- und fünfseitige Figur, ziehet die Diagonale BD, und beschreibt aus deren Endpunkten mit BG Kreise, welche, weil auch hier BG $> \frac{1}{2}$ BD ist, einander in G schneiden: so schließen die aus G nach B und D gezogenen geraden Linien den Winkel BGD, als die Ergänzung des gesuchten Neigungswinkels zu zwey rechten Winkeln, ein.

Viertens. Es sey ABCD das Quadrat des Würfels, von welchem (13, 17. S.) das Dodekaëder beschrieben wird,



und AEBFG, GDHCF, zwey Ebenen des Dodekaëders. Halbire FG in K, errichte auf FG in K die Perpendikel KM,