

10. 10. 20



HISTOIRE
DE
L'ACADÉMIE
ROYALE
DES SCIENCES.

Année MDCCIV.

Avec les Mémoires de Mathématique & de Physique,
pour la même Année.

Tirés des Registres de cette Académie.



A PARIS,
Chez GABRIEL MARTIN, JEAN-BAPT. COIGNARD,
& HIPPOLYTE-LOUIS GUERIN, rue S. Jacques.



MDCCXLV.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

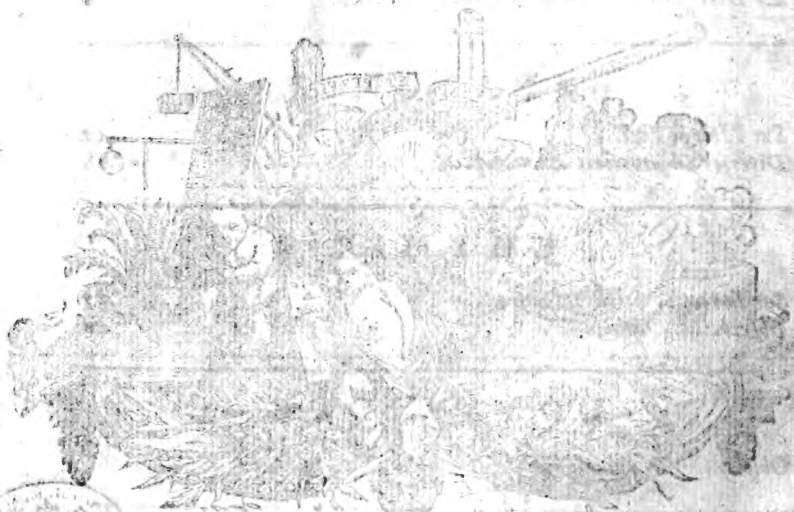
HISTOIRE

L'ACADEMIE

ROYALE

DES SCIENCES

Avec les Mémoires de l'Académie de Paris
pour la même Année.
Paris chez les Bénédictins de Saint-Martin.



A PARIS,

Chez GABRIEL MARTIN, JEAN-BAPT. COIGNARD,
& HIPPOLYTE-LOUIS GURIN, rue St. Jacques

MDCCLXXV.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.



T A B L E

P O U R

L'HISTOIRE.

PHYSIQUE GENERALE.

SUR le Barometre rectifié.	Page 1
<i>Diverses Observations de Physique générale.</i>	8

A N A T O M I E.

<i>Sur l'Iris de l'œil.</i>	12
<i>Diverses Observations Anatomiques.</i>	18

C H Y M I E.

<i>Sur la recomposition du Soufre.</i>	37
<i>Observation Chymique.</i>	40

B O T A N I Q U E.

<i>Observation Botanique.</i>	41
-------------------------------	----

A R I T H M E T I Q U E.

<i>Sur une propriété générale de toutes les Puissances.</i>	42
1704.	* ij

T A B L E.

G E O M E T R I E.

<i>Sur la rectification des Courbes.</i>	44
<i>Sur les lieux qui se forment par le concours des Tangentes de la Cycloïde, & des Sections Coniques.</i>	46
<i>Sur les Spirales à l'infini.</i>	47

A S T R O N O M I E.

<i>Sur deux Eclipses de Lune.</i>	58
<i>Sur le mouvement d'un Astre en Ascension droite comparé à son mouvement en longitude.</i>	62
<i>Sur les Planetes en général, & sur Saturne en particulier.</i>	65
<i>Sur le Calendrier.</i>	72

H Y D R O G R A P H I E. 76

D I O P T R I Q U E.

<i>Des Foyers en général.</i>	76
-------------------------------	----

A C O U S T I Q U E. 88

M E C H A N I Q U E.

<i>Sur le centre d'Oscillation.</i>	89
<i>Sur la figure de l'Extrados d'une Voute circulaire, dont tous les Voussoirs sont en équilibre entr'eux.</i>	93
<i>Sur les Frotemens.</i>	96
<i>Sur un Niveau d'une nouvelle construction.</i>	99
<i>Sur les vitesses des corps mûs suivant des Courbes.</i>	104
<i>Sur la plus grande perfection possible des Machines, dont un fluide est la force mouvante.</i>	116
<i>Machines ou Inventions approuvées par l'Académie en 1704.</i>	124
<i>Eloge de M. le Marquis de l'Hôpital.</i>	125

T A B L E

P O U R

LES MEMOIRES.

O bservation de la quantité d'eau de pluie qui est tombée à l'Observatoire, avec les hauteurs du Thermometre & du Barometre pendant l'année 1704. Par M. DE LA HIRE.	Page 1
Observation de l'Eclipse de Lune du 23. Decembre 1703, à l'Observatoire. Par M. DE LA HIRE.	6
Observation sur une Hydropsie de cerveau. Par M. DU VERNEY le jeune. ibid.	
Observation d'une Tache qui a paru dans le Soleil au mois de Janvier 1704. à l'Observatoire. Par M. DE LA HIRE.	9
Observation de deux Taches dans le Soleil. Par M. MARALDI.	10
Suite des Observations des Taches. Par M. MARALDI.	12
Extrait des Observations de l'Eclipse de Lune du 23. Decembre 1703. faites à Dunkerque par M. Chazelles, à Montpellier par Mrs de Plantade & Clapier, à Arles par M. Davizard, à Avignon par le R. P. Bonfa, & à Marseille par le R. P. de Laval Professeur d'Hydrographie. Par M. CASSINI le fils.	14
Maniere générale de déterminer géométriquement le foyer d'une Lentille, formée par deux Courbes quelconques, de même ou de différente nature, telle que puisse être la raison de la refraction, & de quelque maniere que puissent tomber les rayons de lumiere sur une des faces de cette Lentille, c'est-à-dire, soit qu'ils y tombent divergens, paralleles, ou convergens. Par M. GUINÉE.	24
Retour des Taches observées dans le Soleil au commencement de Janvier. Par M. MARALDI.	40
Observations du retour d'une des Taches qui parut le 7. de Janvier vers le bord Occidental du Soleil. Par M. DE LA HIRE.	44
Nouvelles Remarques sur les Insectes des Orangers. Par M. DE LA HIRE.	45
Extrait d'une Lettre de M. Sarrafin Medecin du Roi en Canada, touchant l'Anatomie du Castor, lue à l'Académie. Par M. PITTON TOURNEFORT.	48
Méthode pour la rectification des Courbes. Par M. CARRE.	66

T A B L E.

<i>Nouvelle formation de Spirales beaucoup plus différentes entr'elles que tout ce qu'on peut imaginer d'autres Courbes quelconques à l'infini ; avec les Touchantes, les Quadratures, les Déroulemens, & les longueurs de quelques-unes de ces Spirales qu'on donne seulement ici pour exemple de cette formation générale.</i> Par M. VARIGNON.	69
<i>Observation d'une nouvelle Tache dans le Soleil.</i> Par M. MARALDI.	131
<i>Comparaison des Observations de M. Manfredi avec les nôtres.</i> Par M. MARALDI.	132
<i>Détermination du tems auquel le mouvement du Soleil en longitude est égal à son mouvement en ascension droite.</i> Par M. PARENT.	134
<i>Démonstration du Principe de M. Hugens, touchant le centre de Balancement, & de l'identité de ce centre avec celui de percussion.</i> Par M. BERNOULLI, Professeur à Bâle.	136
<i>Réflexions sur des Mémoires touchant la Correction Grégorienne, communiquées par M. Bianchini à M. Cassini.</i>	142
<i>Des Equations des mois Lunaires & des années Solaires.</i> Par M. CASSINI.	146.
<i>Observation sur un battement de veines semblable au battement des arteres.</i> Par M. HOMBERG.	159
<i>Que tous les Barometres tant doubles que simples qu'on a construits jusqu'ici, agissent non-seulement par le plus ou le moins de poids de l'air, mais encore par son plus ou moins de chaleur ; & le moyen de prévenir dorénavant ce défaut dans la construction des Barometres doubles, & d'en corriger l'erreur dans l'usage des Barometres simples.</i> Par M. AMONTONS.	164
<i>Nouvelle Statique avec frotemens & sans frotemens, ou Regles pour calculer les frotemens des Machines dans l'état d'équilibre. Premier Mémoire, qui contient tout ce qui se fait sur des Plans inclinés.</i>	173
<i>Second Mémoire. Trouver la force avec laquelle il faut pousser un coin, pour séparer un corps ou directement, ou sur un point fixe, ou sur deux.</i> Par M. PARENT.	186
<i>Observations de la dernière Eclipe de Lune.</i> Par M. CASSINI.	197
<i>Extrait d'une Lettre de M. Manfredi, sur une Eclipe de Venus par la Lune observée à Bologne le 30. Juin 1704. & rapportée par M. MARALDI.</i>	198
<i>Observation de l'Eclipe de Lune faite à Bologne le 17. Juin 1704. par Mrs Manfredi & Stancari, & rapportée par M. MARALDI.</i>	199
<i>Réponse de M. de Lagny aux Remarques de M. de Chazelles sur son Mémoire Hydrographique.</i>	200
<i>Troisième Mémoire. Des Poulies & de leurs Tourillons.</i> Par M. PARENT.	206.
<i>Description d'un lieu Géométrique, où sont les sommets des angles égaux formés par deux Touchantes d'une Cycloïde.</i> Par M. DE LA HIRE.	209

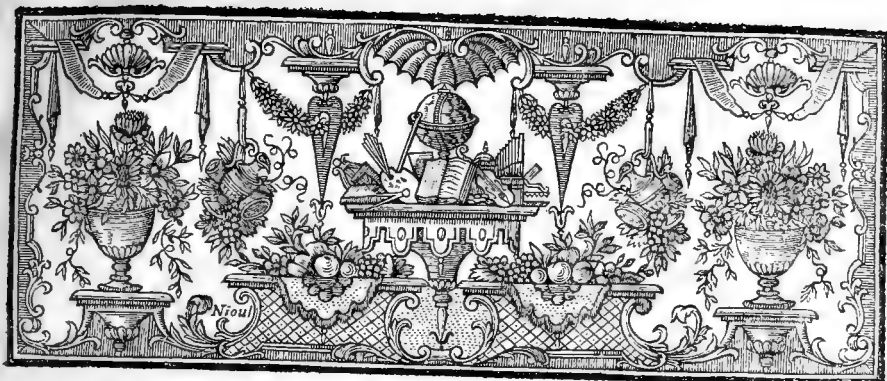
T A B L E.

<i>Construction générale des lieux où sont les sommets de tous les angles égaux droits, aigus ou obtus, qui sont formés par les Touchantes des Sections Coniques.</i> Par M. DE LA HIRE.	210
<i>Occultation de Jupiter par la Lune observée en plein jour.</i> Par Mrs CASSINI & MARALDI.	233
<i>Histoire du Formica-leo.</i> Par M. POUPART.	235
<i>Observations de la conjonction de Jupiter avec la Lune, au matin du 24. Août 1704. à l'Observatoire.</i> Par M. DE LA HIRE.	246
<i>Jonction de Jupiter avec la Lune observée le 24. Août 1704.</i> Par Mrs CASSINI & MARALDI.	247
<i>Description & usage d'un Niveau d'une nouvelle construction.</i> Par M. DE LA HIRE.	251
<i>Des mouvemens de l'Iris, & par occasion de la partie principale de l'Organe de la vue.</i> Par M. MERY.	261
<i>Discours sur les Barometres.</i> Par M. AMONTONS.	271
<i>Maniere de récompenser le Soufre commun par la réunion de ses principes, & d'en composer de nouveau par le mélange de semblables substances, avec quelques conjectures sur la composition des métaux.</i> Par M. GEOFROY.	278
<i>Maniere de discerner les vitesses des corps mus en lignes courbes; de trouver la nature ou l'équation de quelque Courbe que ce soit engendrée par le concours de deux mouvemens connus; & réciproquement de déterminer une infinité de vitesses propres deux à deux à engendrer ainsi telle Courbe qu'on voudra, & même de telle vitesse qu'on voudra suivant cette Courbe.</i> Par M. VARIGNON.	286
<i>Considérations sur la Théorie des Planetes.</i> Par M. MARALDI.	306
<i>Observation d'une petite Tache dans le Soleil en Novembre 1704. à l'Observatoire.</i> Par M. DE LA HIRE.	322
<i>Sur la plus grande perfection possible des Machines.</i> Par M. PARENT.	323
<i>Extrait des Observations faites à la Martinique par le P. Feuillée en 1703. & 1704. comparées aux Observations qui avoient été déjà faites en cette Isle par Mrs des Hayes & du Glos; & à celles qui ont été faites en même-tems à l'Observatoire Royal.</i> Par M. CASSINI le fils.	338
<i>Description de deux especes de Chamærhododendros observées sur les côtes de la Mer noire.</i> Par M. TOURNEFORT.	345
<i>Observations de l'Eclipse de Lune qui est arrivée le 11. Decembre 1704. au matin à l'Observatoire.</i> Par Mrs DE LA HIRE.	352
<i>Observations de l'Eclipse de Lune du 10. Decembre 1704.</i> Par Mrs CASSINI & MARALDI.	356
<i>Remarques sur les nombres Quarrés, Cubiques, Quarré-Quarrés, Quarré Cubiques & des autres degrés à l'infini.</i> Par M. DE LA HIRE.	358.
<i>Mémoire sur les Combinaisons.</i> Par le R. P. SEBASTIEN TRUCHET.	363

AVERTISSEMENT.

ON a imprimé dans les Mémoires de 1703. page 312. un Ecrit de M. Rolle , intitulé , Du nouveau Systeme de l'Infini. Les Réflexions que diverses personnes ont faites sur cet Ecrit , sur les principes qui y sont avancés , & sur les conséquences qu'on en pourroit tirer , obligent à déclarer que quoi-qu'il se trouve parmi les autres Ouvrages destinés à l'impression par l'Académie , son intention n'a jamais été d'adopter rien de ce qui s'y peut trouver.

HISTOIRE

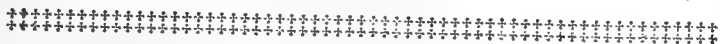


HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Année M. DCCIV.



PHYSIQUE GENERALE.

SUR LE BAROMETRE RECTIFIE'.



Nous mesurons aujourd'hui ce qui n'avoit v. les M. p. 164. & 271. jamais été mesuré, le chaud, le froid, la pesanteur de l'air. Mais cet avantage de notre siècle sur tous ceux qui l'ont précédé seroit imparfait, si les Mesures nouvelles n'étoient portées à toute la justesse & à toute la précision que demande le caractère général de Mesure.

M. Amontons, après avoir rectifié le Thermometre, * page 1. & ainsi qu'on a vû dans l'Histoire de 1702. * a passé au suiv.

1704.

A

Barometre. Le Barometre, uniquement destiné à mesurer la pesanteur de l'air, se ressent des différens degrés de froid ou de chaud, & devenant Thermometre en partie, devient défectueux & équivoque. S'il est simple, ou à une seule branche, le Mercure, tout pesant qu'il est, n'est pas exempt de raréfaction dans le chaud, ainsi que M. Homberg l'a remarqué le premier par l'usage de son Aréometre; il s'éleve donc par la chaleur seule, & trompe l'Observateur, parce que l'on compte qu'il ne s'éleve que par l'augmentation de la pesanteur de l'air. Si le Barometre est double ou à deux branches, la même source d'erreur s'y trouve, mais d'une manière d'autant plus dangereuse que le Barometre double donne les mêmes degrés plus grands que le simple, ce qui fait tout son avantage. De plus les degrés y sont marqués par une liqueur que l'on met dans la boîte inférieure, & dans la seconde branche; & quoique cette liqueur, qui est ordinairement ou de l'Eau seconde, ou de l'Huile de Tartre teinte, ait été choisie exprès, parce qu'elle se raréfie peu, elle se raréfie pourtant, & met une nouvelle confusion dans le Barometre.

M. Amontons a trouvé par expérience que du plus grand froid au plus grand chaud de notre Climat, le Mercure augmente son volume, ou, ce qui est la même chose, diminue sa pesanteur spécifique de $\frac{1}{117}$. On a expérimenté d'ailleurs que les deux termes entre lesquels est renfermée la variation de hauteur du Mercure dans le Barometre simple, sont 26. pouces 4. lignes, & 28. pouces 4. lignes. En prenant donc ces 28. pouces 4. lignes pour la plus grande hauteur du Mercure, & supposant que la pesanteur de l'Atmosphère le tienne suspendu à cette hauteur pendant le plus grand froid de notre Climat, & que cette pesanteur ne varie point jusqu'au plus grand chaud, le Mercure haussera nécessairement de la 115^{me} partie de 28. pouces 4. lignes, c'est-à-dire, de 3. lignes environ, sans que la pesanteur de l'Atmosphère soit devenue plus grande.

Cestrois lignes sont très-considérables, puisqu'elles font la 8^{me} partie des 2. pouces que peut parcourir toute la variation du Mercure : mais elles deviennent encore plus considérables dans certaines opérations, par exemple, lorsqu'on mesure la hauteur des Montagnes par le Barometre *, car une ligne de Mercure répond alors à plusieurs Toises de la hauteur de la Montagne, & l'air peut être en même temps beaucoup plus chaud au pied qu'au sommet, différence qui fera d'autant plus grande que la Montagne sera plus élevée.

* V. l'Hist.
de 1703. P.
11.

Voici maintenant d'où viendra l'erreur du Barometre double. On fait que la colonne de Mercure qui y fait équilibre, tant avec le poids de l'Atmosphère, qu'avec le poids de la liqueur contenue dans une partie de la boîte inférieure & dans la seconde branche, n'a pour sa longueur ou hauteur que la distance des deux surfaces du Mercure renfermé dans les deux boîtes. Quand la surface du Mercure de la boîte inférieure baisse, & que celle du Mercure de la boîte supérieure hausse, la colonne de Mercure, qui fait tout l'équilibre, s'allonge, & cela arrive quand le poids de l'Atmosphère augmente. Alors la liqueur baisse dans son tuyau. C'est tout le contraire, quand la surface du Mercure de la boîte supérieure baisse, & que celle du Mercure de la boîte inférieure hausse ; la colonne qui fait l'équilibre, s'accourcit, & la liqueur monte dans son tuyau. Si la surface du Mercure de la boîte supérieure hausse, & qu'il soit possible que celle du Mercure de la boîte inférieure hausse aussi, & également, la colonne ne s'allonge ni ne s'accourcit. Or si l'on suppose, comme on a fait pour le Barometre simple, que la colonne de Mercure du Barometre double, c'est-à-dire, la distance des deux surfaces de Mercure, ait de longueur 28. pouces 4. lignes dans le plus grand froid, & qu'ensuite vienne le plus grand chaud de notre climat, sans que la pesanteur de l'Atmosphère change, le Mercure des deux boîtes se raréfiera également, & par conséquent sa

surface s'élevera également dans toutes les deux , & la colonne qui fait l'équilibre demeurera de la même longueur dont elle étoit. Mais cette colonne de Mercure , qui , par la raréfaction a augmenté son volume de $\frac{2}{11}$, a aussi diminué son poids d'autant ; elle ne peut donc plus faire équilibre à la pesanteur de l'Atmosphère qui n'a point changé , & par conséquent l'air qui pèse immédiatement sur la liqueur , la fait baisser , & donne au Barometre une fausse apparence d'une augmentation de pesanteur de l'Atmosphère. Si la liqueur est 14. fois plus legere que le Mercure , comme on le suppose ordinairement , l'air qui agit contre une colonne de Mercure affoiblie de la valeur de 3. lignes , ou , ce qui est la même chose , l'air devenu plus fort de cette même valeur , fera baisser la liqueur de 3. fois 14. lignes , ou de 3. pouces $\frac{1}{2}$; ce qui est une très-grande variation , à laquelle cependant le poids de l'Atmosphère n'a aucune part. La liqueur ne peut baisser , que la surface du Mercure de la boîte inférieure ne baisse aussi , & que celle du Mercure de la boîte supérieure ne hausse ; ce qui allonge la colonne de Mercure , & la remet en équilibre avec l'Atmosphère.

Le calcul des 3. pouces $\frac{1}{2}$ dont la liqueur baisse , n'est juste qu'en ne considérant point sa raréfaction. Mais réellement elle se raréfie , & plus considérablement que le Mercure. Comme dans la supposition présente , la pesanteur de l'Atmosphère n'a point changé ; mais seulement celle de la colonne de Mercure , la liqueur qui trouve du côté de l'air plus de résistance à l'extension que demande sa raréfaction , qu'elle n'en trouve du côté du Mercure , ne s'étend que de ce côté plus foible , & par conséquent elle ne prend cette nouvelle extension que dans la boîte inférieure , & non dans son tuyau. Or elle occupe par-là une partie de l'espace qu'abandonne le Mercure qui sort de la boîte inférieure , & par conséquent baisse d'autant moins dans son tuyau ; de sorte que si elle occupoit par sa raréfaction tout l'espace abandonné par le Mercure , elle ne

baifferoit nullement dans le tuyau : mais il est constant qu'elle ne se raréfie pas assez pour cela , & elle baisse dans le tuyau , sans que la pesanteur de l'Atmosphère soit augmentée.

Il est donc sûr que l'un & l'autre Barometre avoient besoin de correction , & comme tout le mal venoit de la variation du chaud & du froid , en vain eût-on travaillé à y chercher un remede , si l'on n'avoit eu un Thermometre exact & fixe , tel que celui de M. Amontons. Ainsi un des premiers fruits de ce Thermometre est la rectification du Barometre.

Le Barometre simple est d'une telle simplicité dans sa construction , qu'il est impossible d'y rien changer , & tout ce qu'a pû faire M. Amontons , a été de dresser une Table qui marquât de combien la colonne de Mercure varioit pour tous les degrés de chaleur indépendamment de la pesanteur de l'Atmosphère.

Il suppose une colonne de Mercure de 28. pouces 9. lignes dans le plus grand froid de notre climat. Il est vrai que réellement cette colonne ne passe point 28. pouces 4. lignes : mais parce que la raréfaction du Mercure dans le plus grand chaud est de $\frac{1}{115}$, & que 3. lignes sont précisément $\frac{1}{115}$ de 28. pouces 9. lignes , cette supposition est plus commode pour le calcul , & elle ne produit nulle erreur sensible. Le Thermometre de M. Amontons est dans le plus grand froid à 50. degrés , & dans le plus grand chaud à 58 , & ces degrés étant des pouces , ce sont 8. pouces ou 96. lignes que le Thermometre parcourra , tandis que le Barometre simple parcourra 3. lignes par la seule action de la chaleur. 3. étant 32. fois dans 96 , le Barometre haussera de $\frac{1}{32}$ de ligne , pour chaque ligne dont haussera le Thermometre ; & par conséquent le Barometre étant supposé construit dans le grand froid , & sa colonne de Mercure , longue alors de 28. pouces 9. lignes , il faut pour chaque ligne , dont le Thermometre s'éleva au-dessus du 5^{me} degré , retrancher de la hauteur du Barometre $\frac{1}{32}$ de ligne ;

& l'on aura la véritable hauteur où le tient la pesanteur de l'Atmosphère, indépendamment de la variation du chaud & du froid.

Quant au Barometre double, M. Amontons change sa construction en partie. Nous avons déjà suffisamment insinué, que du plus grand froid au plus grand chaud, il ne varieroit point, la pesanteur de l'Atmosphère demeurant la même, si la liqueur se raréfiroit assez pour occuper dans la boîte inférieure tout l'espace que le Mercure a quitté. C'est cette réflexion qui a donné à M. Amontons tout le secret de la correction de ce Barometre. Il faut que la colonne de Mercure affoiblie par la chaleur, s'allonge de 3. lignes pour se remettre en équilibre avec l'Atmosphère. Elle ne peut s'allonger de cette quantité, que la surface du Mercure de la boîte inférieure ne baisse d'une ligne $\frac{1}{2}$, ce qui fera hausser d'autant la surface du Mercure de la boîte supérieure, & augmentera de 3. lignes leur distance. Il faut donc qu'il sorte de la boîte inférieure 1. ligne $\frac{1}{2}$ de Mercure, & afin que la liqueur ne baisse point dans son tuyau, il faut qu'elle se raréfie dans la boîte précisément de cette quantité.

Cela ne dépend plus que de la nature de la liqueur, & de la capacité de la boîte. M. Amontons prend de l'Esprit de vin, dont il a trouvé par expérience que la raréfaction du grand froid au grand chaud, étoit de $\frac{1}{27}$. Par conséquent, afin que l'Esprit de vin prenne la place de 1. ligne $\frac{1}{2}$ de Mercure, il faut que la quantité de l'Esprit de vin contienne 27. fois cette ligne & demie, c'est-à-dire, 27. fois un cylindre de 1. ligne $\frac{1}{2}$ de hauteur, qui auroit pour diamètre celui de la boîte. Cette quantité d'Esprit de vin étant déterminée, M. Amontons est obligé de changer la figure de la boîte qui contient le Mercure & la liqueur. Il la laisse telle qu'elle étoit dans sa partie qui contient le Mercure; & comme on ne peut pas augmenter la hauteur du tout, il augmente beaucoup la largeur de la partie qui contiendra l'Esprit de vin, afin qu'elle

en contienne toute la quantité nécessaire. On peut remarquer ici que M. Amontons , pour réparer les désordres que causoit la raréfaction dans le Barometre double , emploie une liqueur qui se raréfie beaucoup plus que celle qu'on y employoit auparavant.

Le Barometre ainsi construit , si l'on a eu soin , en le remplissant , de bien purger d'air tout le haut de la boîte supérieure au-dessus du Mercure , il est clair que la pesanteur de l'Atmosphère demeurant la même , il ne variera point , quelque variation qui arrive à la chaleur , & d'ailleurs que le grand froid , pendant lequel on le suppose construit , demeurant le même , il variera exactement selon toutes les variations qui arriveront à la pesanteur de l'Atmosphère. Jusque-là , il est dans toute la perfection possible ; mais si la chaleur & le poids de l'Atmosphère varient en même temps , ce qui arrive le plus communément , comment se réglera-t-on ?

La liqueur du Barometre élevée le plus qu'elle le puisse être , & par le peu de pesanteur de l'Atmosphère , & par l'action de la chaleur , ne peut guère passer 28. pouces. Si cette liqueur est de l'Esprit de vin , il y aura , dans la supposition présente , un pouce à retrancher de cette hauteur , pour n'avoir que celle où l'Esprit de vin est élevé par le peu de pesanteur de l'Atmosphère : car ce pouce est précisément la 27^{me} partie que la raréfaction a ajoutée à l'élévation causée par l'Atmosphère. Ce retranchement d'un pouce n'étant que pour le temps de la plus grande chaleur , où le Thermometre de M. Amontons est à 58 , il se fera toujours un retranchement moindre à proportion pour tous les degrés inférieurs jusqu'à 50 , où est le plus grand froid : ainsi , selon le degré où sera le Thermometre , on retranchera de la hauteur de l'Esprit de vin dans le Barometre double , ou un pouce , ou une partie d'un pouce , jusqu'à ce que le Thermometre étant à 50 , on ne retranche rien. Voilà le principe d'une espece de Table que M. Amontons a construite , qui donne tout d'un coup les hauteurs à retrancher.

Il ne faut pas oublier que le Barometre double de M. Amontons a encore un avantage sur l'ancien. Un Barometre est d'autant plus *sensible* qu'il marque les mêmes changemens dans une plus grande étendue. Ainsi le Barometre double est plus sensible que le simple, parce que tout le jeu de la variation du simple étant renfermé dans l'étendue de deux pouces de Mercure, cette même variation est marquée dans le double par une liqueur qui est beaucoup plus legere que le Mercure, & dont plusieurs pouces haussent ou baissent par l'élévation d'un pouce de Mercure, selon la proportion de leurs pesanteurs. L'Eau Seconde que l'on emploie communément dans le Barometre double, est 14. fois plus legere que le Mercure, & donne les degrés 14. fois plus grands. Mais l'Esprit de vin qui, dans une constitution moyenne de l'air est 16 fois $\frac{1}{4}$ plus leger que le Mercure, produira donc une plus grande sensibilité dans le Barometre double de M. Amontons.

DIVERSES OBSERVATIONS

DE PHYSIQUE GENERALE.

I.

MONSIEUR Maraldi ayant communiqué à l'Académie, des Relations qu'il avoit reçues des Tremblemens de terre arrivés en Italie, nous en détacherons ici ce qu'elles contenoient de plus physique.

Les Tremblemens commencerent en Italie au mois d'Octobre 1702, & continuerent jusqu'au mois de Juillet 1703. Les Pays qui en ont le plus souffert, & qui furent aussi ceux par où ils commencerent, sont la Ville de Norcia avec ses dépendances dans l'Etat Ecclésiastique, & la Province de l'Abrusse. Ces pays sont contigus,

gus, & situés au pied de l'Apennin du côté du Midi.

Souvent les Tremblemens ont été accompagnés de bruits épouvantables dans l'air, & souvent aussi on a entendu ces bruits sans qu'il y ait eu de tremblemens, le ciel étant même fort serein. Le tremblement du second Février 1703. qui fut le plus violent de tous, fut accompagné, du moins à Rome, d'une grande sérénité du ciel, & d'un grand calme dans l'air. Il dura à Rome une deminute, & à l'Aquila Capitale de l'Abrusse, trois heures. Il ruina toute la Ville de l'Aquila, ensevelit 5000 personnes sous les ruines, & fit un grand ravage dans les environs.

Communément les balancemens de la Terre ont été du Nord au Sud, ou à peu près, ce qui a été remarqué par le mouvement des Lampes des Eglises.

Il s'est fait dans un champ deux ouvertures d'où il est sorti avec violence une grande quantité de pierres qui l'ont entièrement couvert & rendu stérile. Après les pierres, il s'élança de ces ouvertures deux jets d'eau qui surpassoient beaucoup en hauteur les arbres de cette campagne, qui durèrent un quart d'heure, & inonderent jusqu'aux campagnes voisines. Cette eau est blanchâtre, semblable à de l'eau de savon, & n'a aucun goût.

Une Montagne qui est près de Sigillo, Bourg éloigné de l'Aquila de 22. milles, avoit sur son sommet une plaine assez grande, environnée de rochers qui lui servoient comme de murailles. Depuis le tremblement du 2. Février, il s'est fait à la place de cette plaine un gouffre de largeur inégale, dont le plus grand diametre est de 25. toises, & le moindre de 20. On n'a pû en trouver le fond, quoiqu'on ait été jusqu'à 300. toises. Dans le temps que se fit cette ouverture, on en vit sortir des flammes, & ensuite une très-grosse fumée qui dura trois jours avec quelques interruptions.

A Genes, le 1. & le 2. Juillet 1703, il y eut deux petits tremblemens. Le dernier ne fut senti que par des gens

10 HISTOIRE DE L'ACADE'MIE ROYALE
qui travailloient sur le Mole. En même temps la mer dans
le Port s'abbaissa de 6. pieds, en sorte que les Galeres dans
la Darce toucherent le fond, & cette basse mer dura près
d'un quart d'heure.

L'eau soufrée qui est dans le chemin de Rome à Ti-
voli s'est diminuée de deux pieds & demi de hauteur, tant
dans le bassin, que dans le fossé. En plusieurs endroits de
la plaine appelée *le Testine*, il y avoit des sources & des
ruisseaux d'eau qui formoient des marais impraticables.
Tout s'est séché. L'eau d'un Lac appelé l'Enfer a dimi-
nué aussi de trois pieds en hauteur. A la place des ancien-
nes sources qui ont tari, il en est sorti de nouvelles environ
à une lieue des premières, en sorte qu'il y a apparence
que ce sont les mêmes eaux qui ont changé de route.

II.

V. les M. P. 45. M. de la Hire avoit publié dans les Mémoires de l'A-
cadémie de 1692. ce qu'il avoit découvert sur des insectes
qui s'attachent aux Orangers, & qu'on appelle communé-
ment Punaises. Ce qu'ils ont de plus particulier, c'est
qu'on les voit attachés pendant 8. mois entiers à un même
endroit, soit d'une feuille d'Oranger, soit de la tige de l'ar-
bre, sans l'abandonner jamais. Pendant ce temps-là ils
croissent beaucoup, & jusqu'à devenir 20. ou 30. fois plus
gros qu'ils n'étoient d'abord, & puis ils pondent leurs œufs.
Mais en quel temps se sont-ils accouplés? Cette parfaite
immobilité, & si rare dans des Animaux, rend la question
difficile. M. de la Hire en a enfin trouvé le dénoûment.
il a vû ces insectes nouvellement éclos de leurs œufs, cou-
rir sur les Orangers avec une grande vitesse, & il faut que
leur accouplement se fasse dans le temps qu'ils ont cette le-
gèreté & cette vivacité. Après cela, ils s'attachent pour
toujours à quelque endroit de l'Arbre, & leurs œufs sont
8. mois à acquérir la maturité nécessaire pour sortir.

Ce qui fut cause que M. de la Hire examina ces insectes
nouvellement éclos, c'est qu'il avoit cru qu'ils pouvoient

être les mêmes que ceux qui font la Cochenille. Il a remarqué autrefois que ce qu'on appelle graine de Cochenille, n'est que le ventre d'un petit insecte, dont il ne reste rien de plus. Ce ventre est couvert d'écaillés, & s'est conservé par sa dureté, tandis que les autres parties, inutiles apparemment pour la teinture, se sont desséchées, & ont péri. La plante à laquelle cet Insecte s'attache, est l'Opuntia, dont les fruits sont rouges, & teignent en un rouge de sang les urines de ceux qui en ont mangé. Le ventre des Insectes des Orangers est assez semblable à celui de ces Insectes qui font la Cochenille, les Insectes des Orangers étant écrasés entre les doigts, leur donnent une couleur rouffâtre qui tient fort à la peau; ces conformités firent naître à M. de la Hire la pensée que peut-être les Insectes des Orangers étoient-ils les mêmes que ceux qui font la Cochenille, & que s'ils étoient nourris d'Opuntia, ils donneroient la même teinture. Il mit au-dessous d'un Oranger quelques plantes d'Opuntia, & répandit de part & d'autre une grande quantité d'œufs des Insectes des Orangers. Ils vinrent à éclore sur l'une & l'autre plante: mais les petits animaux qui étoient sur l'Opuntia, le quitterent tous sans exception pour aller sur l'Oranger, & de-là M. de la Hire conclut qu'assurément les Insectes des Orangers n'étoient pas ceux qui donnent la Cochenille. Mais il les vit dans leur première jeunesse, & conjectura, comme nous l'avons dit, que c'étoit alors qu'ils s'accouplioient.

III.

Il doit paroître assez étonnant que quand on enveloppe de sa main la boule d'un Thermometre pour en échauffer la liqueur, & la faire monter dans le tuyau, cette liqueur commence par baisser, & ne monte au-dessus de son premier niveau qu'après ce mouvement si irrégulier en apparence, & si contraire à ce qu'on auroit prévu. M. Amontons, qui en parla à l'occasion de ses nouveaux Thermometres, rapporte ce mouvement par lequel la liqueur

baïſſe d'abord , la raréfaction que la chaleur de la main cauſe dans la ſubſtance même du verre de la boule , avant que d'en cauſer dans la liqueur. La capacité de la boule augmente donc , & par conſéquent la liqueur du tuyau baiſſe , juſqu'à ce qu'elle ait pris aſſez de chaleur pour monter malgré l'augmentation de la capacité de la boule.

M. Amontons a calculé ſur des expériences exactes , de combien ſ'augmentoît cette capacité , & il n'a trouvé qu'un millieme. Ce millieme , dont la boule ſ'augmente , & qui eſt la quantité de liqueur qui y entre , ou qui baiſſe , deviendra d'autant plus ſenſible ſur le tuyau , que la capacité du tuyau ſera plus petite par rapport à celle de la boule.

* V. les M. P. 1. **M**Onſieur de la Hire a donné à l'ordinaire ſon Journal de l'année précédente.

* V. les M. P. 235. **M**Onſieur Poupert a donné l'Histoire du Formicaleo.

ANATOMIE.

SUR L'IRIS DE L'OEIL.

* V. les M. P. 261. **L'**Anatomie moderne a fait de ſi grands & de ſi utiles progrès , qu'il doit lui être permis de ſe délaſſer quelquefois de ſes importantes recherches , par des

curiosités qui ne seront qu'agréables. Tel est le mouvement de l'Iris, dont la mécanique a été jusqu'à présent inconnue.

L'Iris est cette membrane de l'Oeil, que lui donne les différentes couleurs qu'il a en différens sujets, & de-là vient son nom d'Iris. C'est une espece de Zone ou d'anneau circulaire assez large, dont le milieu qui est vuide est la Prunelle, par où les rayons entrent dans l'œil. Quand l'œil est exposé à une grande lumiere, la prunelle se rétrécit sensiblement; c'est-à-dire, que l'Iris s'élargit & s'étend: au contraire dans l'obscurité la prunelle se dilate, ou, ce qui est la même chose, l'Iris se resserre. A une lumiere moyenne, l'ouverture de la prunelle, ou l'extension de l'Iris est moyenne aussi. Ces mouvemens ne dépendent point de la volonté, ils sont purement naturels, & par-là l'œil s'accommode & se proportionne de lui-même au degré de lumiere qu'il doit recevoir. Il s'ouvre beaucoup, quand elle est foible, pour en recevoir davantage; il s'ouvre peu, quand elle est forte, de peur d'en recevoir trop, & d'en être blessé. Quelle sagesse a dû présider à cette Méchanique!

Mais ce n'est pas assez de connoître la fin qu'elle s'est apparemment proposée, il faut tâcher de découvrir les moyens dont elle s'est servie. La difficulté consiste à trouver, & comment se fait la dilatation ou le resserrement de la membrane Iris, & comment la lumiere plus ou moins forte cause ces deux mouvemens contraires. Si l'Iris avoit des fibres circulaires & concentriques à la prunelle, on concevroit aussi-tôt que ces fibres seroient autant de petits muscles, qui, en se gonflant & en se contractant, accourceroient les cercles qu'ils formeroient, & en diminueroient l'espace, & par conséquent l'ouverture de la prunelle. Il ne resteroit plus qu'à imaginer comment une grande lumiere causeroit le gonflement de ces petits muscles. Mais l'Iris n'a point de fibres circulaires, elles sont toutes tirées de la circonférence vers.

le centre, & si l'on prétendoit que des muscles ainsi posés se gonflassent par une grande lumière, il paroît qu'ils s'accourceroient nécessairement, & augmenteroient l'ouverture de la prunelle, ce qui est précisément contraire au fait qu'il faut expliquer. Je laisse à part la difficulté de concevoir comment les rayons de la lumière gonfleroient les petites fibres de l'Iris, il seroit inutile de s'en mettre en peine, puisque ce gonflement n'a pas lieu.

Voilà où l'on en étoit sur ce Phenomene, lorsqu'une expérience que fit M. Mery, lui donna une idée qu'il a cru qui le conduisoit au dénoûment. Il est certain qu'une infinité de choses ne demeurent obscures, que faute d'un assez grand nombre de faits, qui les présentent à nos yeux de plusieurs manieres différentes, ou qui nous en apprennent toutes les circonstances essentielles. M. Mery plongea dans l'eau un Chat vivant, & exposa en même temps sa tête & ses yeux au Soleil. Il vit que malgré la grande lumière, la prunelle de l'animal ne se rétrécissoit point, qu'au contraire elle se dilatoit; dès qu'il l'eut retiré de l'eau encore vivant, elle se resserra.

Quoiqu'il passe moins de rayons dans l'eau que dans l'air, & qu'il semble par conséquent, que les yeux du Chat plongé dans l'eau, en recevoient moins que s'ils eussent été à l'air, cependant comme ils étoient directement exposés au Soleil, leur prunelle auroit toujours dû se resserrer, quoiqu'un peu moins; & de ce qu'elle se dilata, loin de se resserrer, M. Mery en conclut que la lumière seule ne pouvoit causer le resserrement. Et comme l'animal étoit plongé dans l'eau, quel changement cet état apportoit-il par rapport au Phénomene? Le Chat ne respire point, la circulation de son sang étoit presque entièrement arrêtée, par conséquent aussi le mouvement des Esprits animaux, & par conséquent ces Esprits sont nécessaires afin que la prunelle puisse se resserrer, ou plutôt afin que l'Iris puisse s'élargir.

Cette conséquence est appuyée par l'exemple de tous

ceux en qui la vûe est éteinte par une simple obstruction du nerf optique. Leur prunelle ne se resserre point à la plus grande lumière, selon la remarque de M. Mery; & il est certain que les Esprits animaux ne coulent plus dans le nerf qui fait la vision, ou n'y coulent pas en assez grande abondance.

Puisque ces Esprits concourent avec la lumière à causer l'extenſion & l'élargiſſement de l'Iris, il faut abſolument & que la lumière détermine les Esprits à couler en plus grande quantité dans les fibres, & que ces fibres en ſoient allongées. Pour le premier point, on peut le concevoir par ce principe général d'expérience, que les Esprits coulent plus abondamment dans une partie nerveuſe, quand elle eſt chatouillée ou irritée par quelque cauſe que ce ſoit, & il faudra ſuppoſer que la lumière cauſe une eſpece d'irritation aux fibres de l'Iris. Mais ſur le ſecond point, il ſemble que l'on retombe dans la difficulté que nous avons marquée. Tous les muſcles ou toutes les fibres s'accourciſſent par une plus grande quantité d'Esprits, comment celles de l'Iris s'allongent-elles par cette même cauſe? Cette difficulté ſeroit inſurmontable ſans un exemple unique, mais très-ſenſible, d'une partie qui ſe gonfle & s'allonge en même temps. Ni l'accourciſſement ni l'allongement d'une partie gonflée ne ſont des ſuites néceſſaires du gonflement, mais ſeulement de ſa ſtructure intérieure.

Les fibres de l'Iris doivent, comme toutes les autres fibres, avoir un reſſort. Il les retire, les raccourcit, & réſiſte à leur allongement. Ainſi dès que la grande lumière ceſſe de les tenir dans cet allongement violent, elles ſe reſſerrent d'elles-mêmes, & agrandiſſent la prunelle. Ce reſſort & la lumière ſont deux puiffances oppoſées, dont les différens degrés de force combinés enſemble, tiennent la prunelle plus ou moins ouverte.

Cela ſuffiroit pour l'explication du Phénomène que M. Mery s'étoit propoſée: mais afin de la rendre encore

plus vraisemblable, & d'établir mieux, que la lumière sans le concours des Esprits animaux, ne fait rien sur l'Iris, il prétend que les yeux du Chat plongé dans l'eau, reçoivent plus de lumière, que s'il eût été à l'air. Ce n'est pas qu'il ne passe plus de rayons dans l'air que dans l'eau; mais c'est que les yeux d'un animal en reçoivent d'avantage dans l'eau.

Il est constant par l'expérience qu'un Plongeur aperçoit au fond de l'eau, à une assez grande distance, des objets qu'il n'apercevra plus dès qu'il sera hors de l'eau, quand ils se feroient assez rapprochés pour être toujours à la même distance de ses yeux. M. Mery imagine une raison de ce fait qui peut paroître embarrassant. Il croit que la Cornée, cette Membrane dure & transparente qui enveloppe extérieurement le globe de l'œil, n'est pas aussi lisse ni aussi unie qu'elle le paroît, quand les yeux sont à l'air. Il s'y fait alors des plis & des rides, qui augmentant son épaisseur dans les endroits où ils se forment, la rendent plus difficile à pénétrer aux rayons, & par conséquent en font réfléchir un grand nombre, qui sont perdus pour l'œil. Mais dans l'eau, ces rides & ces plis s'applanissent, parce que la membrane est humectée, elle est également pénétrable à la lumière en toutes ses parties, & il ne s'y réfléchit plus de rayons, qu'autant qu'il est indispensable qu'il s'en réfléchisse sur une surface parfaitement transparente. L'œil qui reçoit plus de rayons, voit mieux.

A cette quantité de rayons plus grande que reçoit un œil plongé dans l'eau, parce que la Cornée est applanie, si l'on joint l'ouverture de la prunelle qui est plus grande, parce que, selon le Système de M. Mery, les fibres de l'Iris sont moins remplies d'Esprits, on aura deux causes qui conspirent ensemble pour rendre la vision plus forte dans l'eau. Une plus grande ouverture de la prunelle doit aussi faire paroître les objets plus grands.

Il est si vrai, selon M. Mery, qu'un œil qui est dans l'eau

l'eau en est plus éclairé, que c'est par cette raison, qu'il est mieux vû, & que ses parties sont mieux distinguées. On y voit la Choroïde qui est une membrane placée derrière la Rétine; les vaisseaux de la Choroïde, & l'extrémité du Nerf Optique. Rien de tout cela ne se verroit dans un œil exposé à l'air: & quant aux parties qui ne s'y voient pas dans l'eau, telles que sont les humeurs & la Rétine, c'est qu'elles sont transparentes, & de la couleur de l'eau.

On pourroit croire que la seule dilatation de la prunelle dans l'eau, y rendroit les parties de l'œil plus visibles, & que l'appianissement de la Cornée n'entreroit pour rien dans cet effet, & ne seroit qu'une fiction. Mais M. Méry prévient cette pensée par l'exemple qu'il rapporte de ceux qui ont la Goute sercine, c'est-à-dire une obstruction dans le nerf Optique. Ils ont la prunelle extrêmement dilatée, & cependant on ne distingue aucune des parties du fond de leur œil. D'où cela vient-il, sinon de ce qu'il n'est pas assez éclairé; & qui empêche qu'il ne le soit assez, si ce ne sont les plis de la Cornée?

De ce que les Humeurs & la Rétine de l'œil d'un Chat plongé dans l'eau disparoissent également, & sont par conséquent également transparentes, M. Méry en tire cette conséquence, que la Rétine n'est pas plus que les Humeurs, l'organe immédiat de la vision, ou, pour ainsi dire, la toile qui reçoit la peinture des objets. Il donne cet usage à la Choroïde, qui est derrière la Rétine, & beaucoup plus opaque, puisqu'elle arrête les rayons, & se fait voir. Cette question a été autrefois agitée dans l'Académie & fort au long, & fort ingénieusement, par deux habiles Adversaires, dont l'un soutenoit la Rétine selon l'opinion commune, & l'autre prétendoit mettre la Choroïde en sa place. Le Public fut instruit du procès en ce temps-là, & il n'est pas besoin de rappeler ici une contestation fort délicate & fort subtile, sur laquelle M. Méry ne prend parti que par occasion.

DIVERSES OBSERVATIONS
ANATOMIQUES.

I.

Monsieur Littre ouvrant le cadavre d'une Femme âgée de 80. ans , qui avoit été tuée d'un coup de timon de Carosse , la trouva d'une si prodigieuse maigreur , que ses Muscles les plus gros n'étoient pas plus épais que des Membranes , & qu'à peine avoient-ils conservé quelque teinture de rouge. Cependant elle avoit à la partie moyenne intérieure de la Cuisse gauche une tumeur grosse comme le poing , ronde , de la même couleur que le reste de la peau , toute formée de la plus belle graisse qu'on puisse voir dans le corps le plus sain.

Cette tumeur toute formée de graisse eût été extraordinaire . même dans un corps qui n'en eût pas été d'ailleurs si parfaitement dénué. Elle étoit contenue dans son lieu naturel , c'est-à-dire , dans les cellules de la membrane Adipeuse.

La graisse est un suc huileux , qui est séparé du sang par les glandes des cellules de cette membrane , & qui se fige & se congele dans ces cellules. On est maigre , soit quand on a peu de suc huileux dans le sang , soit quand ce suc est trop dissous ou par la grande chaleur , ou par les autres principes du sang , ou par un grand & long exercice , soit quand les glandes destinées à le filtrer font mal leur fonction. Dans les personnes fort maigres , ces glandes qui ne filtrent rien , & les cellules de la Membrane adipeuse qui ne contiennent rien , s'affaiblissent , s'effacent & en quelque sorte s'anéantissent. Au contraire , dans les personnes fort grasses les glandes sont visibles , quoiqu'elles ne le soient qu'avec le Microscopé , & les cellules fort tendues ; & si ces cellules le sont au point qu'elles en ayant perdu le ressort par le-

quel elles chassent hors d'elles une partie du suc qui y est entré, & le font retourner dans les voies de la circulation, il se fait un amas excessif de ce suc qui séjourne, c'est-à-dire une tumeur. Cet accident est fort rare, & peut-être ne connoissoit-on point encore une tumeur de graisse.

Il n'y a point d'apparence qu'une tumeur de cette espece doive être accompagnée ni d'inflammation, puisqu'il n'y a point de sang extravasé, ni de douleur, parce que la graisse est une matiere fort douce, & qui humectant les fibres nerveuses les rend peu susceptibles d'une tension violente.

Cette tumeur de graisse s'étant formée dans un sujet en qui toutes les glandes & toutes les cellules de tout le reste de la Membrane adipeuse s'étoient entierement flétries & desséchées, on peut concevoir que les glandes qui avoient causé la tumeur étoient seules demeurées en état de filtrer le suc huileux, & qu'elles en avoient filtré une quantité d'autant plus grande, que les autres n'en filtroient plus du tout.

Il ne fera pas impossible d'imaginer des remedes à un pareil accident, quand on jugera qu'il en merite. M. Littre croit que si la tumeur est récente, il y faut appliquer d'abord un Topique astringent, qui resserrant la peau, les glandes & les cellules de la Membrane adipeuse, le mette en état de résister à l'impulsion des suc qui surviennent toujours de nouveau; qu'ensuite un remede résolutif fera transpirer une partie de la graisse amassée en trop grande quantité; que dans tout le cours du pensément il sera à propos d'employer un bandage qui aide à l'effet du topique astringent; que si la tumeur est invétérée, on ne peut plus que la couper, parce que les parties ne sont plus en état de reprendre leur ressort, & qu'il faut bien observer de la couper toute entiere, de peur que s'il restoit quelques glandes & quelques cellules dilatées, elles ne reçussent encore dans la suite une trop grande quantité de suc huileux qu'elles

I I.

Dans une jeune Femme de 38 ans, & de bonne constitution, que deux Hommes avoient étranglée avec leurs mains, M. Littre trouva que la peau du Tambour de l'Oreille gauche étoit déchirée, & qu'il étoit sorti par cette oreille environ une once de sang; que les Vaisseaux fanguins du Cerveau étoient plus pleins qu'à l'ordinaire, qu'il y avoit du sang d'un rouge clair épanché dans les Ventricules du Cerveau, & sur la base du Crane; que le Poumon étoit fort tendu, & sa membrane, où il ne paroît naturellement aucun vaisseau fanguin, toute parsemée de vaisseaux gros comme de moyennes épingles, qu'au travers de cette membrane on appercevoit beaucoup plus d'air qu'à l'ordinaire dans les cellules du poumon; qu'en ouvrant le ventricule droit du cœur, il en sortit de l'air avec impétuosité, & que cette cavité contenoit une once de sang vermeil & écumeux comme celui du poumon. Tout ces faits extraordinaires ne tiennent pas tant à ce que cette Femme fut étranglée, qu'à la maniere dont elle le fut. Les mains des deux hommes ne lui ferrèrent pas la gorge aussi fort, aussi continûment, ni aussi également qu'auroit fait une corde; elle se défendit, se débatit, & vécut assez long-temps, comme à diverses reprises; & pendant ce temps-là le sang qui étoit poussé par le cœur vers les parties supérieures, & qui n'en redescendoit pas librement, s'y amassa, les gonfla, & même en quelques endroits creva les vaisseaux. Celui des veines du poumon ne recevant plus l'air qui auroit dû le pousser dans le ventricule gauche, ou plutôt ne le recevant pas en assez grande quantité, reflua par l'artere du poumon dans le ventricule droit, & y porta de l'air avec lui. Cependant M. Littre, en soufflant par la Trachée, ne put jamais faire passer d'air dans le ventricule droit, mais seulement dans le gauche, encore cela n'arrivoit-il pas toujours.

III.

Dans ce même sujet , M. Littre observa que les deux Trompes de la Matrice étoient plus grosses , plus épaisses , & plus charnues que de coutume. Elles s'ouvroient à l'ordinaire dans la Matrice par leur petit bout , mais par le gros elles n'avoient ni l'une ni l'autre aucune ouverture , ni aucune apparence d'en avoir jamais eu. Elles étoient même sans Pavillon. Cependant cette Femme avoit eu deux Enfans , le dernier 5 ans avant sa mort. A moins qu'on ne suppose que ces deux Trompes s'étoient fermées également , & de maniere à ne laisser nulle trace de leur ouverture naturelle ; ou que du moins l'une ayant toujours été naturellement fermée, il en étoit arrivé autant à l'autre par accident , le Systeme des Oeufs paroît détruit : mais il est d'ailleurs si vraisemblable & même si nécessaire , qu'il mérite qu'on se resolve à cette supposition. Les deux Trompes étoient pleines , l'une d'une sérosité fanguinolente , & l'autre d'une sérosité jaunâtre. Leur surface intérieure étoit inégale en quelques endroits , & percée par tout d'un très-grand nombre de petits trous , qui répondoient à autant de grains glanduleux , situés sur la superficie extérieure de ces deux conduits.

IV.

M. Lémery a parlé d'une Dame de Paris , grande , robuste , d'un tempérament vif & sanguin , sujette à des passions fortes , mais peu durables , qui depuis l'âge de 24 ans jusqu'à 40 ayant fait 14 couches en a eu 6 d'extraordinaires par les différentes envies , dont elle a été frappée. L'un de ces accouchemens monstrueux a été d'une fille parfaitement bien formée à l'extérieur , & même d'une si grande beauté que feu M. le Brun la voulut peindre. Elle n'avoit ni foie , ni ratte , ni intestins , mais seulement une masse charnue qui communiquoit avec l'Estomac , & n'avoit point d'ouverture vers le fondement , grosse à peu près comme la tête de l'Enfant ,

22 HISTOIRE DE L'ACADE'MIE ROYALE
parfemée d'arteres & de veines, & rougeâtre. Cette fille
vécut 8 jours.

V.

M. du Verney le jeune a parlé d'une cure fort heureuse qu'il avoit faite. Une jeune Demoiselle qui n'avoit pû épouser un homme qu'elle aimoit, tomba d'abord dans une sombre mélancolie, & ensuite par degrés dans une telle fureur, qu'elle ne connoissoit plus aucune retenue, & donnoit toutes les marques les plus indécentes de la passion qui la tourmentoit. Elle étoit devenue d'une extreme maigreur, on lui avoit fait inutilement beaucoup de remedes, & la maladie duroit déjà depuis 5 ou 6 mois, & paroissoit désespérée, lorsque M. du Verney fut appelé. Il lui vint d'abord en pensée de bassiner avec de l'eau tiede les parties qui étoient la source du mal, & qui apparemment devoient être dans une grande irritation. Il vit aussi-tôt du soulagement, il continua à les bassiner, & même y fit des injections avec une forte décoction de racine d'Ellébore noir & de Patience, de Solanum & de Guimauve, où il avoit ajouté du Sel de Saturne. Il appliqua de plus sur la tête de la Malade qu'il avoit fait raser, un Emplâtre où entroit le Sel de Saturne, le Castoreum, l'Opium, & le Camphre. Le soulagement fut très-considérable; M. du Verney passa aux remedes intérieurs, & fit user à la Malade d'une teinture d'Hiéra elléborinée. Les premieres voies ayant été débarrassées par ce moyen, il lui fit prendre soir & matin deux cuillerées d'une teinture faite avec le vin, la racine d'Ellébore noir, les fleurs de Millepertuis, & le Coquelicot, le tout aiguisé d'un peu d'Eau de vie, & mêlé de plus ou de moins de Sel de Saturne selon les diverses circonstances de la maladie. En un mois ou six semaines au plus, la Demoiselle fut entierement guérie, & n'a eu depuis ni ressentiment ni rechûte.

Comme les Vapeurs sont une espece de Manie, mais beaucoup moins forte, & plus familiere, M. du Verney

assûre que dans toutes celles qui ne sont point accompagnées de convulsions, il a toujours vû de très-bons effets de la teinture qu'on a décrite ici, & qu'il n'a eu besoin d'y joindre le Sel de Saturne, que quand les Malades étoient furieux. A l'égard de ceux qui ont des convulsions, il ajoute à cette teinture celle de Venus faite avec l'Esprit volatil ammoniac, l'Esprit de vin, le Camphre, & le Verdet. Par ce remede, les mouvemens convulsifs sont arrêtés presque dans le moment. Il faut purger dès qu'on le sent, & en cette occasion M. du Verney n'a point trouvé de meilleur Puigant que l'Hiérelléborinée, ou seule, ou mêlée, ou en teinture, sur tout aux femmes & aux filles qui ne sont pas réglées.

V I.

M. Homberg a dit que quand on pile de l'Ipecacuanha en assez grande quantité, & qu'on en respire par le nez, il arrive assez souvent qu'on en crache le sang, & qu'on a de grands maux de tête pendant 2 ou 3 jours.

V I I.

M. Lémery a vû cracher à un Malade parmi des flegmes assez épais des fibres blanches, grosses comme le tuyau d'une plume de Poulet, mêlées ou entourées d'un peu de sang, formées en branches ou ramifications, & représentant parfaitement la figure des veines qui paroissent sur les Poumons. Elles étoient molasses, sembloient creuses en dedans, ne se rompoient pas aisément, & s'allongioient beaucoup quand on les tiroit. M. Lémery crut que ces fibres pouvoient être un Polype qui s'étoit formé dans quelque artere ou dans quelque veine du poumon. Leur substance étoit semblable à celle des Polypes du cœur, mais elles étoient plus grêles, & se ramifioient comme les vaisseaux pulmonaires. Elles devoient être sorties par une ouverture qui s'étoit faite à leur vaisseau, aussi étoient-elles accompagnées de sang, & le malade avoit fait effort pour les jetter.

De petits corps blancs & molasses qui paroissent souvent dans les saignées à l'ouverture de la veine, qui empêchent le cours du sang, & que les Chirurgiens prennent pour de petits morceaux de graisse, & quand ils sont assez longs, pour des Vers, pourroient donc, selon la conjecture de M. Lémery, n'être que des parcelles de quelque Polype, qui se seroient rompues, & auroient coulé avec le sang.

V I I I.

M. Lémery apporta un Enfant venu à terme, bien formé, & bien nourri, qui n'avoit que la base du Crane, & point de Cerveau, ni de Cervelet. Il lui ouvrit dans l'Assemblée le Canal de l'Epine, & il s'y trouva un filet de moëlle, plus petit qu'il n'auroit dû être naturellement. Ce seul filet avoit dû faire les fonctions du cerveau. On peut voir sur ce sujet l'Hist. de 1703. *

* pag. 26.
& suiv.

I X.

M. Lémery a dit qu'il a vû une Pierre d'un pouce de diametre, & d'un pouce & demi de long, qui étoit dans les Intestins d'une Femme, & en bouchoit exactement le passage, de sorte qu'elle faisoit refluer les matieres. Le fait est fort singulier. Les Intestins ne paroissent pas propres à produire une Pierre. Celle-là étoit trop grosse pour s'être formée telle qu'elle étoit dans la Vésicule du Fiel, & en être sortie ensuite par le canal Colidoque: on peut seulement concevoir qu'elle en étoit sortie beaucoup plus petite, & avoit grossi dans les Intestins.

X.

Dans le Lion, la vésicule du Fiel a plusieurs plis ou feuillers, & delà M. du Verney a conjecturé que la bile y pouvant séjourner plus long-temps, & s'exalter davantage, c'étoit peut-être la cause de la grande ardeur de cet Animal, & de la Fievre continuelle qu'on lui attribue.

X I.

X I.

M. Littre a vû un Homme en qui un accident avoit rendu le battement de cœur si violent & si impétueux qu'on l'entendoit quelquefois de plus de dix pas. A l'âge de 16 ou 17 ans, il avoit reçu dans le Sternon un coup qui le lui avoit un peu enfoncé dans la poitrine. Aussitôt sa respiration devint difficile, & il commença un mois après à sentir dans la poitrine une douleur qui ne le quitta plus. Ensuite il devint sujet à des palpitations de cœur, & c'étoit dans leur grande force qu'on entendoit de si loin son cœur battre. Il mourut subitement à 32 ans, mais moins, à ce qu'on put juger, par les suites de cet accident, que par l'excessive quantité d'Eau de vie & de Ratafia qu'il prenoit tous les jours, & qui étoit presque sa seule nourriture. M. Littre l'ouvrit. Il trouva les poumons secs, flétris, & leur membrane fort épaisse, les deux troncs de la Veine Cave, l'Oreillette & le Ventricule droit du cœur, le tronc & les branches de l'Artere Pulmonaire, avant qu'elle entrât dans le poumon, beaucoup plus grands que dans l'état naturel, & leurs parois beaucoup moins épaisses, les branches des Veines Pulmonaires, tant au dedans qu'au dehors du poumon, plus petites que les branches de l'Artere pulmonaire hors du poumon, mais proportionnées à ces mêmes branches contenues dans le poumon, leurs parois plus épaisses quand leurs cavités étoient plus petites, les parois du Ventricule gauche du Cœur, du tronc & des grosses branches de l'Aorte, plus épaisses qu'à l'ordinaire, & les capacités plus petites. Il est aisé de juger que toute cette conformation extraordinaire venoit de l'enfoncement du Sternon, qui ayant retréci la cavité de la poitrine, & cela précisément dans un âge, où l'accroissement des parties s'avance beaucoup, avoit empêché les poumons de s'étendre autant qu'ils eussent fait naturellement. Leur membrane & en général tout leur tissu s'étoit donc moins dilaté, & peut-être aussi que tou-

te la nourriture qu'ils prenoient ne servoit qu'à augmenter leur épaisseur. Les poumons ayant moins d'étendue, & étant plus difficiles à pénétrer, le sang de l'Artere pulmonaire y passoit en moindre quantité, & delà s'ensuivent naturellement tous les autres phénomènes.

Le Cœur étoit de figure presque ronde, le milieu en étant fort élevé, & la pointe rapprochée de la base, c'est-à-dire que son dernier mouvement avoit été une contraction imparfaite. Aussi les ventricules étoient-ils entierement pleins de sang.

X I I.

Ce même Homme avoit la substance du Cerveau & du Cervelet molle & fort imbibée d'eau, beaucoup d'eau épaisse & sanguinolente, ou du sang noir & caillé répandus dans tous les Ventricules. Delà venoit qu'il étoit comme hébété, & le plus souvent assoupi. Mais, ce qui paroît avoir été la principale cause de sa mort, son Cervelet étoit déchiré par la partie supérieure, & il y avoit en cet endroit une cavité de 3 pouces de largeur, & de 2 pouces de profondeur, qui s'étendoit jusqu'au dedans du Ventricule du Cervelet. Elle étoit pleine de sang noir & caillé, & il s'étoit écoulé plus de 3 onces de semblable sang sur la base du Crane, ou dans le commencement du canal de l'Épine. M. Littre jugea que de cette déchirure & de cet épanchement, il devoit s'ensuivre une cessation de filtration d'esprits dans les glandes déchirées du Cervelet, une dissipation d'esprits par les fibres nerveuses rompues qui étoient en grand nombre, une compression d'une grande partie du Cervelet par le sang épanché, aussi-bien que de la Moëlle allongée, & du commencement de la Moëlle épiniere, une privation d'esprits dans le Cœur & dans les Poumons, & par conséquent une cessation de mouvement presque subite.

X I I I.

Une Femme âgée de 50 ans, & qui pendant 19 an-

nées de mariage n'avoit point eu d'enfans , fut tuée d'un coup d'arme à Feu. Elle rendoit peu de sang dans le temps de ses regles , elle étoit alors fort gonflée , & souffroit de grandes douleurs dans le bas ventre , & quelques années après qu'elle eut commencé à être réglée , elle mouchoit ou crachoit du sang dans ces temps-là. M. Littre l'ayant ouverte , vit la cause de tous ces accidens , & de sa stérilité. L'orifice intérieur de la Matrice étoit fermé par la membrane qui tapisse intérieurement le Vagin , & cette membrane y étoit aussi adhérente qu'à la superficie du Vagin. Elle étoit seulement percée de deux petits trous d'un quart de ligne de diamètre. Le col de la matrice étoit deux fois plus long qu'à l'ordinaire , apparemment parce que le corps de la matrice étoit obligé dans le temps des regles à faire de grands efforts pour chasser de sa cavité par deux si petites ouvertures le sang qu'il contenoit. Aussi ce sang , qui y séjournoit long-temps , en avoit-il étendu la cavité , & rendu les parois plus minces qu'à l'ordinaire. La cavité des Trompes , principalement vers leur ouverture dans la Matrice , étoit plus grande que de coutume ; parce que la lympe filtrée par les glandes des Trompes , s'amassoit là , ne pouvant être reçue dans la matrice qui presque toujours étoit pleine de sang.

Une autre singularité de la constitution de cette Femme , & qui n'est pas tout à fait indigne d'être remarquée , c'est qu'un pli à un drap de son lit , un ourlet de chemise , lui faisoit venir presque dans le moment des taches noires sur la peau. Il falloit que son sang eût une grande disposition à se figer.

X I V.

M. du Verney le jeune ouvrant une jeune Femme morte deux mois après être relevée de ses couches , & dont le mal étoit une extreme douleur dans le ventre , qu'elle avoit fort tendu , quoiqu'il ne fût pas fort élevé , trouva qu'auprès de l'orifice inférieur de l'estomac ,

qui étoit dilaté à y pouvoir mettre le poing, il y avoit un trou, où l'on passoit le pouce. La capacité du ventre étoit remplie de beaucoup de matiere très-corrompue : toutes les parties de cette region étoient enflammées, ou livides. Il ne pouvoit y avoir nul soupçon de poison, & c'est ce qui rend ce trou de l'estomac fort extraordinaire.

X V.

Voici encore un fait approchant. Un Homme d'environ 63 ans, après une Colique violente, pour laquelle il prit de l'Émétique, eut une tumeur sur les Côtes du côté droit. Elle s'étendoit de haut en bas, & comme elle s'augmentoît toujours, & qu'on crut que c'étoit un abcès on l'ouvrit le long de la dernière Côte des vraies, & la première des fausses, & même on penetra entre les deux Côtes. On fut fort surpris de voir sortir parmi du pus & d'autres matieres, des pierres de la figure de Cachets à trois faces, & d'une couleur tirant sur le Bol. Il en est sorti jusqu'à six pendant près de deux mois, il y en a eu quelques-unes de si grosses qu'elles ont eu de la peine à passer par l'ouverture, & même celle qui s'est présentée la dernière n'y a jamais pû passer, & elle ne s'y est plus fait sentir. Ces pierres surnagent sur l'eau, & elles paroissent de la même nature que celles qui se forment dans le Foie & dans la vésicule du Fiel.

Comme il sort toujours des matieres par l'ouverture, on s'est déterminé à y tenir une Canule, & à penser le Malade matin & soir. On lui tire toujours une palette, & quelquefois jusqu'à deux d'une matiere telle qu'elle est dans l'Estomac après la digestion, & même on y a vû plusieurs fois des morceaux de ce qu'il avoit mangé, car il a toujours bon appetit. M. Littre a rapporté cette Histoire sur la foi d'un témoin oculaire, & on n'en a pas sçû la suite. Il est difficile d'imaginer d'où viennent les Pierres. Il faut d'ailleurs que l'Estomac, ou peut-être le Duodenum & le Diaphragme se soient percés natu-

rellement, car il ne paroît pas possible qu'ils l'aient été par l'opération, & cet accident est fort singulier.

XVI.

Un homme fort & robuste, âgé de 60 ans, eut pendant 32 jours une suppression d'urine causée par une grande inflammation du col de la Vessie; ensuite il urina un peu, mais lentement, goutte à goutte, & continuellement. Cela dura 10 jours, & il mourut. Vers le milieu de sa maladie son ventre avoit commencé à s'enfler beaucoup, & avoit toujours grossi jusqu'à la mort. M. Littre ayant ouvert le cadavre, trouva la Vessie extrêmement dilatée, & à tel point que par sa partie supérieure elle faisoit une espece de cloison qui séparoit la cavité du ventre en deux, & comprimoit fortement la fin de l'intestin Colon, & le milieu de l'Urétère droit. La membrane intérieure de la Vessie étoit devenue si mince, à force d'avoir été étendue, que l'on y voyoit comme à nu les fibres charnues, ramassées en paquets, gros comme des fers d'aiguillette, & laissant entr'eux des intervalles à peu près quarrés, de 3 à 5 lignes de long. Dans tous ces intervalles la membrane intérieure étoit inséparablement collée à l'extérieure.

Il est plus que vraisemblable que l'inflammation du col de la Vessie avoit été la première cause de tout le desordre. Elle avoit gonflé, & par conséquent rapproché les parois de ce col, & fermé le passage à l'urine, qui s'amassant toujours dans la vessie, l'avoit extraordinairement dilatée. Les fibres charnues renfermées entre les deux membranes & dans la substance de la Vessie, & qui en se contractant chassent l'urine hors de ce réservoir, perdirent leur ressort par leur excessive dilatation. La grande quantité de l'urine amassée força enfin la résistance du col de la Vessie: mais comme l'urine ne couloit alors que par l'impulsion de son propre poids, & non par celle des fibres charnues contractées, elle couloit lentement, goutte à goutte; ce qui fait bien voir que

c'est la contraction de ces fibres qui chasse l'urine avec force, & la fait sortir à plein canal. Quant à la continuité de l'écoulement, elle venoit de ce que le sphincter du col de la Vessie avoit perdu son ressort par l'extension que lui avoit causée l'inflammation; de sorte qu'ayant été une fois forcé, il ne pouvoit plus, après que l'inflammation eut cessé, se remettre, ni refermer le passage.

La compression que faisoit la Vessie dilatée sur le Colon, & sur l'Uretere droit, avoit été cause que toute l'étendue de ces conduits qui étoit au-dessus de l'endroit comprimé, s'étoit extrêmement dilatée.

X V I I.

Un homme de 26 ans étant mort après avoir eu durant 3 semaines une douleur continuelle d'estomac, des maux de cœur frequens & des nausées, & avoir rendu les derniers jours de sa vie beaucoup de sang par haut & par bas, fut ouvert par M. Littre, qui lui trouva dans l'Estomac un ulcere rond, de 5 lignes de diametre, & de demi-ligne de profondeur, situé à un pouce & demi du Pilore, & 3 chopines de sang, dont une partie étoit caillée, & l'autre liquide, épanchées dans la cavité de l'Estomac, les Intestins à moitié remplis de sang, les Ventricules, les Oreillettes, & les Vaisseaux du cœur, aussi bien que les autres gros vaisseaux du reste du corps entièrement vuides de sang, & pleins d'air, & peu de sang dans les vaisseaux moyens & dans les petits. Il est assez clair que l'ulcere de l'Estomac a été la cause de ce grand épanchement de sang, aussi y voyoit-on fort sensiblement plusieurs vaisseaux sanguins ouverts: mais pour la cause de l'ulcere, on soupçonna que ce pouvoient être des médicamens violens que le Malade avoit pris d'un homme peu expérimenté.

M. Littre dit que dans ceux qui sont morts d'une perte de sang, de quelque nature qu'elle ait été, il a toujours trouvé pleins d'air les vaisseaux qui étoient vui-

des de fang. Apparemment par la respiration continuelle, le corps se penetre & s'imbibe entierement d'air, qui entre dans tous les pores des membranes & des tuniques des vaisseaux, où il est sans cesse comprimé par le cours rapide du fang, & d'où il ne sort que quand ces vaisseaux étant vuides, il a la liberté de se dilater. Alors il prend une grande extension, & les remplit.

X V I I I.

Un Homme de 40 ans, sujet quelque temps avant sa mort à des coliques & à une douleur dans la région du Foie, mourut après avoir rendu par les felles quantité de corps semblables à de petites vessies. Il n'en avoit point rendu les 4. derniers jours qu'il vécut. Ces corps étoient de figure ovale, les plus petits étoient gros comme des noisettes, & les plus grands comme de petits œufs, remplis les uns & les autres d'une liqueur visqueuse, transparente, & de couleur approchante de l'eau. Il pendoit à la superficie extérieure de chacun une espece de pédicule membraneux, par lequel apparemment ils tenoient à des parties dont ils s'étoient détachés.

M. Littre ouvrit le cadavre, & chercha inutilement dans toutes ses parties internes la source de ces corps vésiculaires. Il trouva bien dans le grand lobe du Foie une cavité large de 4 pouces, pleine de semblables corps, dont quelques-uns tenoient encore par leur pédicule à la membrane intérieure de la cavité; mais elle n'avoit nulle ouverture, par où ils eussent pû sortir. Il n'étoit resté aucun corps vésiculaire dans tout le canal des intestins, & ils n'avoient rien de particulier sinon que la partie inférieure du Colon, & la supérieure du Rectum étoient dépouillées en plusieurs endroits de leur membrane intérieure de la largeur de 3 à 5 lignes. Ce fut là la seule trace que M. Littre put découvrir de l'origine & de la formation des corps vésiculaires qui étoient sortis. C'étoient vraisemblablement les grains glandu-

leux du Rectum & du Colon extrêmement dilatés , parce que l'humeur destinée à s'y filtrer, ne s'y filtoit plus, & ne faisoit que s'y amasser. Comme il est de l'essence d'une glande d'avoir un conduit excrétoire par où forte l'humeur filtrée , ces grains glanduleux doivent en avoir un , & c'est là que s'étoit faite l'obstruction. Ce conduit excrétoire gonflé & tendu par l'amas de la liqueur , avoit tiré par son poids les autres vaisseaux du grain glanduleux , les avoit excessivement allongés , & leur avoit enfin donné la figure d'un pédicule. Ce changement de figure les avoit rendus incapables de se nourrir , & avoit causé leur dessèchement , après quoi le pédicule s'étoit détaché naturellement de la membrane qui contenoit le grain glanduleux , ou plutôt avoit emporté avec lui la partie de la membrane qui lui répondoit ; delà venoit que le Colon & le Rectum en étoient dépouillés en quelques endroits. On peut croire que le passage continuel des matieres dans les Intestins avoit contribué à détacher les pédicules ; & que comme cette cause n'avoit point de lieu à l'égard des corps vésiculaires renfermés dans le Foie , il en étoit demeuré quelques-uns attachés à leur membrane , au lieu que tous ceux des Intestins sans exception , l'avoient quittée ou plutôt emportée avec eux , & étoient fortis.

X I X.

M. Littre qui avoit déjà montré d'autres fois dans la Dure-Mere des grains glanduleux sensibles , car ils ne le sont pas ordinairement , en a fait voir encore dans celle d'un homme de 60 ans fort sain , mort subitement d'une mort violente. Ils étoient placés principalement près des Sinus , & des autres gros vaisseaux sanguins de cette membrane , situés dans son épaisseur les uns du côté de sa superficie extérieure , & les autres du côté de l'intérieure ; de sorte qu'il paroissoit de part & d'autre une petite portion de ces grains avec leur conduit excrétoire, par lequel il sortoit un peu de sérosité lorsqu'on
les

les pressoit entre les doigts. L'usage des grains glanduleux placés du côté extérieur de la Dure-Mere, est vraisemblablement d'humecter par la sérosité qu'ils séparent du sang, la superficie intérieure du Crane, & l'extérieure de la Dure-Mere dans le peu d'endroits où elles ne sont pas attachées ensemble, & l'usage des grains glanduleux situés du côté intérieur de la Dure-Mere, est de rendre le même office à la superficie intérieure de cette membrane, & à l'extérieure de la Pie-Mere. Il est clair que si ces deux membranes, ou la Dure-Mere & le Crane se colloient ensemble, faite de quelque sérosité qui coulât entre deux, les mouvemens du Cerveau n'auroient plus la liberté nécessaire.

X X.

M. Antoine, Chirurgien de Méry sur Seine, dont il a été parlé dans l'Hist. de 1703. * a envoyé à M. Méry * p. 28. la relation d'un Polype plus gros qu'à l'ordinaire, qu'il avoit heureusement arraché à une Femme en une seule fois. Une branche du Polype lui remplissoit la narine droite, & s'avançoit quelquefois au dehors, l'extrémité de ce corps étranger descendoit plus bas que la Lurette. Il l'arracha par la bouche. Il croit que c'étoit une extension de la membrane glanduleuse qui revêt les Lames du Nez, & par conséquent il attribue la même origine à tous les Polypes pareils. Leurs vaisseaux sanguins, & leurs fibres nerveuses qui ne peuvent être des générations nouvelles, leur tissu fongueux qui marque des glandules étendues au-delà du naturel, des sérosités ou d'autres liqueurs qui s'y filtrent encore, restes des fonctions de ces glandules, sont les principales preuves de M. Antoine. De plus, le Polype dont il s'agit étoit recouvert d'une espece de membrane, qu'il étoit impossible d'en séparer sans intéresser les fibres intérieures; ce qui fait voir que tout le Polype n'étoit formé que d'une même membrane allongée. C'est ainsi qu'à l'endroit des cicatrices, dont les plaies ont été profondes, on ne peut en-

lever la peau sans intéresser les chairs qui sont au-dessous ; parce que ces cicatrices sont une espece de peau qui a été produite, non-seulement par les fibres de la peau allongées, mais encore par celles des chairs, & ces chairs qui ont contribué à cette production, ont été d'autant plus profondes que la plaie l'a été. En général on ne peut concevoir qu'il y ait des productions nouvelles ni d'Animaux ni de leurs parties, dès qu'elles sont organisées, mais seulement des développemens, & des extensions. Une partie organisée qui ne s'étend que jusqu'à sa mesure prescrite ou ordinaire, demeure véritablement partie ; si elle va beaucoup au-delà, elle devient Corps étranger, Polype &c.

X X I.

M. Littre a vû dans une Femme de 40 ans qui n'avoit eu qu'un enfant, la Trompe gauche collée par son Pavillon à l'Ovaire du même côté, de sorte qu'elle en embrassoit une partie ; & sur l'extérieur de cette partie, il a remarqué une cicatrice fort sensible, & au-dedans ce Corps spongieux, dont nous avons parlé dans l'Hist. de 1701. * On l'appelle communément *Caroncule*. Celle-là étoit ronde & grosse comme un pois. Il n'y avoit dans tout cet Ovaire ni dans le droit aucune autre cicatrice, ni aucune autre Caroncule, marque assez apparente que le Fœtus unique étoit sorti par cet endroit. Deplus, il ne pouvoit absolument avoir passé par la Trompe droite : car vers son embouchure dans la Matrice ses parois étoient collées ensemble, & il n'y avoit à son autre extrémité nulle ouverture, ni apparence de Pavillon. Cette disposition avoit été cause qu'il s'étoit amassé dans la cavité de cette Trompe un demi-septier de la sérosité que filtrent les glandes dont elle est semée. Cette sérosité étoit claire, & sans mauvaise odeur. Quand M. Littre l'eut évaporée à petit feu, il resta au fond du Vaisseau une pellicule épaisse de demi-ligne, qui sentoit bon, & avoit un bon goût.

* pag. 44.

X X I I.

M. Berger a parlé d'un Malade qu'il avoit vû, âgé de 65 ans, d'une complexion saine & robuste, qui mourut après une maladie dont les principaux symptomes avoient été une suppression d'urine, mais sans douleur, & une simple pesanteur dans le bas ventre. On l'ouvrit; on lui trouva le Colon extraordinairement dilaté, & quand on perça cet Intestin il en sortit beaucoup de vents avec le même bruit & les mêmes sifflemens que d'un ballon bien enflé. On trouva aussi à la Vessie deux appendices qui en sortoient en forme de sacs, & qui étoient remplies d'urine. Toute la merveille consiste en ce que ces dilatations extraordinaires & du Colon & de la Vessie étoient sans douleur. Il falloit absolument que ces deux Visceres fussent devenus paralytiques. M. Berger rapporte cette paralysie à ce que le Malade buvoit beaucoup de vin & d'eau de vie, & mangeoit peu. Les sels acres de ces liqueurs pouvoient avoir corrodé les fibres nerveuses de ces Visceres, avoir affoibli peu à peu, & enfin absolument détruit leur ressort, ce qui les avoit rendues incapables en même tems & de résister à une grande extension; ou de se remettre après l'avoir soufferte, & de recevoir les esprits qui font le sentiment. La manière dont ces deux effets sont produits ensemble, demanderoit un grand détail de Méchanique, où M. Berger entra, mais c'est un Systeme assez important, & assez difficile pour meriter d'être traité à part.

Monsieur Homberg a donné une Observation sur un Battement de Veines semblable à celui des artères. V. les M.
P. 159.

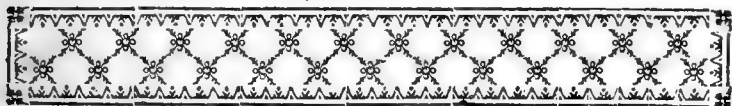
V. les M.
P. 6. **M**onsieur du Verney le jeune a donné sur une Hydropisie de Cerveau, une Observation rapportée dans les Mémoires, & qui fait part d'une espece de corps d'Observations qu'il a faites sur l'Hydropisie en général.

V. les M.
P. 48. **M**onsieur Tournefort lut à l'Académie une ample & exacte Description du Castor, qui lui avoit été envoyée de Quebec par M. Sarrafin son Correspondant, Medecin du Roi en Canada.

Cette année M. Lémery le fils imprima une *Dissertation sur la nourriture des Os* qu'il avoit lûe à l'Académie. Il y prouve que ce n'est point la Moëlle qui nourrit les Os, mais un Suc tout différent, versé dans leur substance par les arteres : car les Os malgré leur solidité ont des arteres & des veines aussi-bien que les chairs, & M. Méry a fait voir un Os fort dur traversé en long dans toute son épaisseur par un gros vaisseau sanguin. Sur la Moëlle & sur les vaisseaux sanguins des Os, invisibles ordinairement à un certain âge, M Lémery tombe dans les mêmes pensées que l'on a rapportées dans l'Hist. de 1700. * Il confirme par une expérience qu'il a faite, la différence de la Moëlle & du Suc nourricier des Os. Il a fait bouillir dans de l'eau assez longtemps des Os concassés avec leur moëlle, & ensuite il a vû que l'eau contenoit deux sortes de substances, l'une huileuse, qui surnageoit, & qui se figeoit quand le bouillon étoit refroidi, l'autre semblable par son goût & par sa consistance à de la gelée de viande, & qui devenoit plus épaisse quand on la faisoit bouillir de nouveau, &

* p. 14.

qu'on la laissoit ensuite refroidir. Il est plus que vraisemblable que la premiere substance étoit la Moëlle, & la seconde le Suc nourricier. La Moëlle destinée à entretenir la souplesse de l'Os, & à l'empêcher de devenir trop cassant, est une Huile fort fine que la chaleur du corps tient toujours assez liquide pour s'insinuer entre les fibres ferrées de l'Os. Le suc nourricier qui doit se changer en la substance même de l'Os est une gelée, ainsi que tout autre suc nourricier, & une gelée qui s'épaissit toujours à la chaleur, & par conséquent peut enfin acquérir la solidité de l'Os. On ne tire la substance huileuse que des Os qui ont de la Moëlle, & de tous on en tire la gelée, ce qui appuie fort encore le sentiment de M. Lémery. Il remarque aussi que les seuls Os qui aient de la Moëlle sont ceux qui font de grands mouvemens, & qui par-là pourroient se dessécher trop, de même que les parties où la nature a attaché le plus de graisse sont ordinairement celles où les Muscles aiant plus d'action ont plus de besoin d'être humectés & rafraichis. De là vient encore qu'il y a beaucoup moins de moëlle à proportion dans les jeunes Os, qui sont par eux-mêmes assez tendres.



C H Y M I E.

SUR LA RECOMPOSITION

DU SOUFRE.

ON n'est jamais si sûr d'avoir décomposé un Mixte V. les M.
 en ses véritables principes, que quand avec les P. 278.
 mêmes principes on le peut recomposer. Ce rétablissement n'est pas toujours possible, & quand il ne l'est pas,

il ne conclut pas nécessairement contre l'analyse du Mixte , mais il la démontre quand il réussit. C'est une espece de bonheur dont il faut jouir quand il se présente.

* p. 47. & suiv. On a vû dans l'Hist. de 1703. * l'analyse que M. Homberg a faite du Soufre commun. M. Geoffroy a voulu voir s'il la vérifieroit par la récomposition de ce corps , & le succès a été pleinement favorable.

Il a pris de l'Esprit de Soufre bien déflégné , c'est-à-dire , le Sel acide du soufre aussi pur qu'on le puisse avoir, une partie égale de cette Gomme que M. Homberg tire du soufre , & qui en est la partie inflammable & grasse ; & pour suppléer au troisième principe qui est une terre , ou un alcali terreux , il a joint une partie d'huile de Tartre ; l'opération ayant été conduite selon les regles de l'art , il a tiré de ce mélange du soufre brûlant tout pur.

Il a fait plus , il a composé du soufre , non en le récomposant avec les mêmes matieres qui en étoient sorties , mais en employant d'autres matieres qu'il a jugées devoir être de la même nature. Ainsi en substituant au Sel acide du soufre , l'Huile de Vitriol , & à la partie grasse & inflammable , l'Huile de Térébenthine , il a réussi de la même maniere.

Les Sels Fixes , qui sont des Acides absorbés & retenus par une terre , tenant lieu de deux principes du Soufre à la fois , n'ont eu besoin que d'être mêlés avec une Huile inflammable , & ils ont aussi-tôt donné du soufre ; & même au lieu de cette Huile , M. Geoffroy a employé aussi heureusement des matieres solides inflammables , comme le bois , le charbon de bois , le charbon de terre. L'effet a été le même , parce que ces matieres ne brûlent que par une huile qu'elles renferment.

Il faut remarquer que tous les Sels acides enveloppés dans une terre , ne se sont pas trouvés propres à faire du soufre. M. Geoffroy excepte le Sel marin décrepité , & le Nitre Fixé. Peut-être leur acide est-il différent

de celui du Soufre ou du Vitriol, ou de l'Alun, qui ne sont que le même. L'acide qui entre dans le soufre, devra donc être d'une nature particulière, & on peut l'appeller *vitriolique*.

Boyle & Glauber, deux grands Chymistes, ont fait tous deux du soufre commun, & par des mélanges tels que M. Geoffroy les prescrit. Mais ils se sont trompés tous deux dans les conséquences qu'ils ont tirées. Ils ont crû, l'un que le soufre qui lui venoit, avoit été renfermé dans un sel Fixe; l'autre, dans du charbon: & ils n'ont pas sçû que c'étoit le mélange seul de trois principes, qui produisoit ce Mixte. L'erreur de ces grands hommes releve le merite de la découverte de M. Homberg.

Si celle que M. Geoffroy a faite en travaillant sur le soufre, se vérifie dans la suite, elle sera plus importante que tout ce qui avoit été le principal objet de son travail. Il croit avoir reconnu que le fer n'est, aussi bien que le Soufre commun, qu'un composé du soufre principe, ou d'une matiere inflammable, d'un Sel vitriolique, & d'une terre. La rouille du fer, c'est-à-dire une dissolution qui se fait de quelques-unes de ses parties par l'humidité de l'air, prouve assez que ces parties-là sont salines, & leur goût, qu'elles sont vitrioliques; & la facilité avec laquelle le fer s'enflame, fait voir combien il est sulfureux. Mais à ces indices manifestes M. Geoffroy joint des preuves plus philosophiques: il a fait du fer par le mélange des trois principes rapportés, du moins c'est une poudre noire, pesante, & qui s'attache à l'Aiman, caractère spécifique du fer.

Si la composition de ce métal étoit une fois bien sûrement développée, apparemment ce seroit un degré pour passer à celle des autres Métaux. La Chymie ne se peut rien proposer de plus grand ni de plus difficile que de les connoître jusque dans leurs principes; & peut-être après cela ce fameux objet de tant de recherches inutiles, cesseroit-il d'être chimérique.

O B S E R V A T I O N
C H Y M I Q U E.

Monsieur Homberg a fait voir une espece de petit arbrisseau d'argent, haut de près de 2 pouces, élevé sur une plaque d'argent de la grandeur d'une piece de trente sols, & un peu plus pesante, dont la superficie qui portoit l'arbrisseau étoit extrêmement polie, l'opposée étant grenue & raboteuse. Le fait est que M. Homberg avoit mis à la Coupelle environ deux Onces d'argent pour le purifier par trois fois autant de plomb. La Coupelle étant faite & l'argent congelé dans le feu, il s'éleva de dessus sa superficie comme un petit jet d'argent liquide, qui forma l'arbrisseau. Apparemment la matiere qui étoit sous cette petite voute, & qui bouillonoit encore, n'ayant pas eu la liberté de s'étendre, avoit percé la voute par l'endroit le plus foible, ou du moins à l'endroit qui répondoit à la plus grande chaleur du feu, & avoit fait le jet qui s'étoit ensuite congelé à l'air.

Monsieur Lémery a continué son grand Traité de l'Antimoine.



BOTANIQUE.



BOTANIQUE.

OBSERVATION

BOTANIQUE.

Monsieur Lémery a dit qu'un de ses amis, curieux du jardinage, ayant enté sur un Coignassier une branche de Prunier, plia la greffe en arc, & en fit entrer la pointe dans un autre endroit du Coignassier, après quoi il fit avec de la terre glaise ce qu'on appelle des *Poupées* aux deux bouts de cette greffe. Elle prit par les deux bouts, & jeta des branches garnies de feuilles, qui produisirent dans leur temps des Prunes de l'espece de celles que portoit le Prunier, & d'un goût fort approchant. Mais celles qui étoient sorties de la pointe de la greffe, n'avoient pour tuyau qu'un pépin gros comme celui du raisin, & fort dur, au lieu que les Prunes sorties du bout d'embas avoient un noyau à l'ordinaire.

Monsieur Tournefort a donné la Description de l'*Alhagi*, Plante d'Arménie & de Perse, d'où l'on tire une espece de Manne purgative, & du *Chamaerhododendros* de Levant. V. les M.
p. 345.

M. Marchand a lu la Description de la *Linaria hederæ Foliis Col.* ou *Cymbalaria C. B.* réservée pour un ouvrage particulier.

M. Chomel a lu aussi la Description de la *Moschatellina Foliis Fumariæ bulbosæ J. B.*

LE P. Gouye a communiqué à l'Académie, des descriptions de quelques Plantes d'Amérique, envoyées par le P. Breton, Missionnaire Jesuite. Ces Plantes sont le Thé, le Sapotile, Liane, Cuébé, Mabouya pomnier, & le Mahot à coton.



ARITHMETIQUE.

SUR UNE PROPRIETE GENERALE DE TOUTES LES PUISSANCES.

Monsieur Carré parla un jour par occasion d'une propriété du nombre 6. Les nombres Cubiques naturels, 8, 27, 64, 125, dont la racine est moindre que 6, étant divisés par 6, le résidu des divisions est leur racine même. Ainsi 8 étant divisé par 6, 2 résidu de la division est la racine cubique de 8. 3 résidu de la division de 27 par 6, est la racine cubique de 27 &c.

Si l'on pousse plus loin la Suite des Cubes naturels, 216 cube de 6 étant divisé par 6 ne laisse aucun reste, & le diviseur 6 est lui même la racine cubique : mais 343 cube de 7 divisé par 6, laisse pour résidu 1, qui joint à 6, fait cette racine cubique de 343; 512 cube de 8 divisé par 6 laisse 2, qui, joint à 6, fait 8 racine cubique de 512, & ainsi de suite; de sorte que le résidu des divisions des cubes au dessus de 216 divisés par 6, étant joint à 6, donne toujours la racine du cube qu'on a di-

visé, jusqu'à ce que ce reste soit 5, & par conséquent la racine cubique du nombre divisé, après quoi le Cube supérieur étant divisé par 6 il ne reste rien, parce que la racine cubique est 12, multiple de 6; & ensuite si l'on continue de diviser par 6 les Cubes supérieurs, il ne faut plus ajouter le résidu des divisions à 6, mais à 12 premier multiple de 6, & immédiatement après qu'on aura passé le Cube de 18, où l'on trouvera encore une division sans reste, il ne faudra plus ajouter le résidu des divisions à 6, ni à 12, mais à 18 second multiple de 6, & toujours ainsi de suite, prenant toujours de six cubes en six cubes après une division sans reste un multiple supérieur de 6, auquel on ajoutera le résidu de la division faite par 6.

Il arrive presque toujours que les propriétés qui paroissent particulières à quelques grandeurs, soit nombres, soit lignes, sont générales & communes à une infinité d'autres grandeurs, conditionnées de la même manière: mais on n'apperçoit pas toujours ce qui fait que ces autres grandeurs sont de la même condition, & du même ordre, & delà vient que des propriétés générales passent pour n'être que particulières à certaines grandeurs, en qui elles se manifestent plus sensiblement. M. de la Hire en examinant la propriété du nombre 6, par rapport aux nombres cubiques, trouva que tous les autres nombres élevés à quelque puissance que ce fût, avoient leur diviseur qui faisoit par rapport à eux le même effet, que 6 par rapport aux nombres cubiques.

Telle est la règle générale qu'il a découverte. Si l'exposant de la puissance d'un nombre est pair, c'est-à-dire, si ce nombre est élevé à la 2^{de}, 4^e, 6^e puissance, &c, il faut le diviser par 2, & le résidu de la division, en cas qu'il y en ait un, ajouté à 2 ou à un multiple de 2, donnera la racine de ce nombre correspondante à sa puissance, c'est-à-dire, la racine 2^{de}, ou 4^e ou 6^e &c. mais si l'exposant de la puissance du nombre est impair; c'est-à-dire, si le nombre est élevé à la 3^e, 5^e, 7^e

44 HISTOIRE DE L'ACADE'MIE ROYALE
puissance &c. le double de cet exposant sera le Diviseur
qui aura la propriété dont il s'agit. C'est par là qu'elle
se trouve dans 6, double de 3 qui est l'exposant de la
puissance de tous les Cubes. De même 10 est le Diviseur
de tous le nombres élevés à la 5^e puissance, 14 de tous
ceux qui sont élevés à la 7^e &c.

Quand on aura bien conçu quel est, à l'égard des
nombres cubiques, l'effet du nombre 6, dans quels cas
les divisions sont sans reste, & selon quel ordre il faut
ajouter aux résidus les différens multiples de 6 au lieu
de 6, il sera très-facile d'appliquer de même le nombre
2 à toutes les puissances paires, & les nombres 10, 14,
18, &c. aux différentes puissances impaires.

La démonstration de la Regle générale de M. de la
Hire dépend de la formation des puissances, & de quel-
ques considérations sur la nature des Nombres. Les pro-
priétés des Nombres sont un champ infini, ouvert à la
curiosité, & aux recherches de l'Esprit humain.



G É O M É T R I E.

SUR LA RECTIFICATION DES COURBES.

V. les M.
P. 66.
* p. 83.

ON a déjà vû dans l'Hist. de 1701. * que M. Carré
avoit donné des Méthodes générales pour la Re-
ctification des Courbes. Il la considéroit alors en elle-
même, & sans aucun rapport étranger: mais parce qu'il
arrive quelquefois que la rectification d'une Courbe dé-
pend de la quadrature d'une autre, il considere main-
tenant les rectifications comme liées aux quadratures.

Que l'on prenne pour les deux premiers termes d'une proportion la Soutangente de tel point qu'on voudra d'une Courbe quelconque, & sa Tangente, & pour troisieme terme une ligne droite constante quelconque, il est visible que comme la Soutangente & la Tangente varieront toujours entr'elles, le quatrieme terme de la proportion variera toujours aussi, & variera dépendamment de la variation de la Soutangente & de la Tangente, & par conséquent on en pourra former continuellement les Appliquées d'une seconde Courbe. Or cette seconde Courbe étant ainsi formée, M. Carré démontre que l'espace qu'elle comprendra, sera égal à un parallélogramme fait de la droite constante employée pour troisieme terme de la proportion, & d'une autre droite égale à la premiere Courbe; c'est-à-dire, que la rectification de cette premiere & la quadrature de la seconde ne feront qu'un même Probleme, & ne demanderont que la même solution.

Si sur la Parabole on construit de cette maniere une seconde Courbe, on voit naître aussi-tôt l'Hyperbole, & par conséquent la rectification de la Parabole tombe dans la même impossibilité que la quadrature de l'Hyperbole.

Si la premiere Courbe est la seconde Parabole cubique, il s'en forme la Parabole ordinaire, qui étant quarrable donne une ligne droite égale à la seconde parabole cubique. C'est une curiosité agréable en Géométrie, & même un progrès dans cette Science que de découvrir la source de la dépendance mutuelle où sont les uns à l'égard des autres les Problemes des quadratures & des rectifications. On fait donc non-seulement que toute Courbe rectifiable repond à quelque Courbe quarrable, & toute Courbe non rectifiable à quelque autre non quarrable, & réciproquement, mais encore de quelle maniere il faut trouver l'une par l'autre.

*Sur les Lieux qui se forment par le concours
des Tangentes de la Cycloïde, & des
Sections Coniques.*

V. les M.
p. 207.

Sur une Courbe une fois formée, on en peut toujours construire d'autres, & il n'y a qu'à imaginer les conditions que l'on prescrira à cette nouvelle construction. Ainsi étant donnée une Cycloïde ordinaire, dont la base est égale à la circonférence du cercle générateur, les Tangentes que l'on tirera à deux de ses points quelconques prolongées jusqu'à ce qu'elles concourent, feront toujours un angle droit, pourvû qu'elles soient conditionnées d'une certaine maniere que M. de la Hire prescrit. Tous les points que déterminent par leur concours hors de la Cycloïde toutes ces Tangentes ainsi prises deux à deux, font une suite qui n'étant pas en ligne droite, compose une nouvelle Courbe, ou un *Lieu*: car on appelle *Lieu* en Géométrie toute ligne ou tout espace qui se détermine par la variation de quelques grandeurs, toujours réglée de la même maniere, & assujettie à une certaine Loi.

En cherchant quelle est la nouvelle Courbe produite par la Cycloïde, M. de la Hire trouve que c'est une autre Cycloïde, mais *accourcie*, c'est-à-dire, dont la base est plus petite que la circonférence de son cercle générateur.

Mais si les angles, par lesquels se forme la seconde Courbe, au lieu d'être droits comme on les a supposés, étoient aigus ou obtus, & tous égaux entr'eux, comme ce seroit une autre génération, ce seroit aussi une autre recherche. En ce cas-là, M. de la Hire démontre que la seconde Courbe seroit encore une Cycloïde accourcie. Il fait ensuite un grand nombre de remarques sur les contours, les positions, enfin sur les différentes

particularités des ces nouvelles Cycloïdes.

Il étend après cela toute cette Théorie aux Sections Coniques, & examine les Lieux qui naissent du concours de leurs Tangentes, sous quelques angles qu'elles se rencontrent, pourvu seulement qu'ils soient égaux. Toutes les nouvelles Courbes qui naissent, ne sont que des Sections coniques : mais tout le détail qui n'est que de pure Géométrie doit être renvoyé au Mémoire de l'Auteur.

S U R L E S S P I R A L E S A L ' I N F I N I .

SI l'on vouloit faire un parallèle des Géometres Antiques & Modernes, & comparer leur différent mérite, les Spirales dont nous allons parler, en fourniroient peut-être une occasion plus heureuse qu'aucune autre matière.

Archimede a fait un Traité des Spirales, & tout le monde connoît leur génération. On suppose le rayon d'un cercle divisé en autant de parties que sa circonférence, par exemple en 360. Le rayon se meut sur la circonférence, & la parcourt toute entière. Pendant ce même temps, un point qui part du centre du cercle, se meut sur le rayon, & le parcourt tout entier, de sorte que les parties qu'il parcourt à chaque instant sur le rayon, sont proportionnelles à celles que le rayon parcourt dans le même instant sur la circonférence; c'est-à-dire, que tandis que le rayon parcourt, par exemple, un degré de la circonférence, le point qui se meut sur le rayon, en parcourt la 360^e partie. Il est évident que le mouvement de ce point est composé, & si l'on suppose qu'il laisse une trace, ce sera une Courbe qu'Archimede a nommée *Spirale*, dont le Centre est le même que celui du Cercle, & dont les Ordonnées ou Rayons sont

les différentes longueurs du rayon du cercle, prises depuis le centre, à l'extrémité desquelles le point mobile s'est trouvé à chaque instant. Par conséquent les Ordonnées de cette Courbe concourent toutes en un point, & elles sont entr'elles comme les parties de la circonférence du cercle correspondantes, qui ont été parcourues par le rayon, & qu'on peut appeller *arcs de révolution*.

Quand le rayon du cercle a parcouru toute la circonférence, & que par conséquent le point mobile est arrivé à l'extrémité du rayon, on peut concevoir que ce rayon soit prolongé hors du cercle d'une quantité égale à celle dont il étoit, & qu'il commence une seconde révolution dans les mêmes conditions que la première, & de même à l'infini. Voilà donc la Spirale infiniment prolongée. Le cercle de la première révolution est toujours le même, mais dans la seconde révolution les arcs auxquels les Ordonnées de la Spirale doivent être proportionnelles, sont la circonférence du cercle de la première révolution, plus l'arc décrit de nouveau dans la seconde, & toujours ainsi de suite. Si l'on conçoit à la fin de chaque révolution un nouveau cercle décrit, concentrique au premier, on les appelle *Cercles circonscrits*, chacun à sa révolution.

Archimede, inventeur de la Spirale, est aussi le premier qui l'a examinée. Il en a trouvé les Tangentes, ou, ce qui revient au même, les Soutangentes, & ensuite les Espaces. Il démontre qu'à la fin de la première révolution, la Soutangente de la Spirale est égale à la circonférence du cercle circonscrit, qui est alors le même que celui sur lequel on a pris les arcs de révolution; qu'à la fin de la seconde révolution la Soutangente est double de la circonférence du cercle circonscrit, triple à la fin de la troisième révolution, & toujours ainsi de suite. Quant aux Espaces, qui sont toujours compris entre le rayon qui termine une révolution, & l'arc spirale qui s'y termine aussi, pris depuis le centre, Archimede

chimedede a prouvé que l'espace spiral de la premiere révolution est à l'espace de son cercle circonscrit, comme 1 à 3; que l'espace de la seconde révolution est au cercle circonscrit comme 7 à 12; celui de la troisieme, comme 19 à 27, &c. Ce sont là les deux plus considérables découvertes du Traité d'Archimedede.

Nous avons ses propres démonstrations. Elles sont si longues, & si difficiles à embrasser, que, comme on l'a pû voir dans la Préface de l'Analyse des Infiniment petits, M. Bouillaud a avoué qu'il ne les avoit jamais bien entendues, & que Viete les a injustement soupçonnées de paralogisme, parce qu'il n'avoit pû non plus parvenir à les bien entendre. Mais toutes les preuves qu'on peut donner de leur difficulté & de leur obscurité tournent à la gloire d'Archimedede: car quelle vigueur d'esprit, quelle quantité de vûes différentes, quelle opiniâreté de travail n'a-t-il pas fallu pour lier & pour disposer un raisonnement que quelques-uns de nos plus grands Géometres ne peuvent suivre, tout lié & tout disposé qu'il est?

L'esprit de la Géométrie moderne est d'élever toujours les verités soit anciennes, soit nouvelles, à la plus grande universalité qu'il se puisse. Dans la Spirale d'Archimedede, les Ordonnées ou rayons sont comme les arcs de révolution; M. de Fermat rendit la génération de cette Courbe plus universelle, en supposant que les rayons y fussent comme telle puissance qu'on voudroit de ces arcs, c'est-à-dire, comme leurs quarrés, leurs cubes, &c. ou même leurs racines quarrées, cubiques, &c. Car les Géometres savent que les racines sont des puissances mises en fraction.

La nature de la Parabole en général consiste en ce que ses Abscisses sont comme quelque puissance des Ordonnées, & c'est l'infinité de ces puissances possibles qui fait le nombre infini des différentes especes de Paraboles. Sur cela, M. Varignon fit réflexion que prendre une puissance quelconque des arcs circulaires, à la maniere de M. de

Fermat, ou les prendre comme les Ordonnées de quelque Parabole, c'étoit donc la même chose. Mais pourquoi ne les prendre que comme les Ordonnées de quelque Parabole? Pourquoi ne suivroient-ils pas la raison des Ordonnées de toute autre Courbe? Voilà donc la génération de la Spirale devenue plus universelle qu'elle ne l'étoit, selon M. de Fermat, puisque ces arcs de révolution peuvent suivre telle raison qu'on voudra. D'un autre côté, rien n'affujettit les rayons de la Spirale à se régler sur les arcs de révolution, ni sur aucune de leurs puissances, & par conséquent la génération de la Spirale n'est plus renfermée dans aucunes bornes, puisque cette Courbe se peut former de telle raison qu'on voudra imaginer entre ses rayons, & de telle autre qu'on supposera entre ses arcs de révolution.

En concevant la formation de toute Spirale en général, ainsi que nous avons conçu celle de la Spirale d'Archimède, c'est-à-dire, en concevant une ligne qui parcourt une circonférence de cercle, & un point mobile sur cette ligne, il est bien clair que le mouvement de la ligne & celui du point sont absolument indépendans l'un de l'autre, & peuvent suivre chacun en particulier, telle progression qu'on voudra. De-là vient l'universalité infinie de la génération de la Spirale; car c'est le mouvement de la ligne qui détermine les arcs de révolution, & celui du point qui détermine les rayons.

Quelques différentes raisons ou progressions qu'on établisse pour les deux mouvemens, on peut toujours imaginer une Courbe dont les Abscisses représenteront l'une, & les Ordonnées l'autre, & par conséquent il n'y a nulle Courbe qui ne puisse servir à former une Spirale, & qui, pour ainsi dire, n'ait sa Spirale particulière. Les Abscisses de la Courbe génératrice sont les rayons de la Spirale, & les Ordonnées déterminent les arcs de révolution.

Afin que les Abscisses de la Courbe génératrice soient les rayons de sa Spirale, ou, ce qui est la même chose,

soient égales à ces rayons , il faut que , comme la Spirale a son origine au centre du cercle de révolution , la Courbe génératrice y ait aussi la sienne. Mais parce que cette position de la Courbe génératrice à l'égard du cercle de révolution n'est nullement nécessaire , quoique la plus naturelle & la plus simple , & qu'on en peut supposer telle autre qu'on voudra , M. Varignon laisse cette position indifférente & indéterminée , ce qui donne encore une plus grande généralité à la formation des Spirales : car non seulement il peut y en avoir autant de différentes que de Courbes ; mais encore autant que l'origine de chaque Courbe peut avoir de positions différentes par rapport au centre du cercle de révolution. Ainsi , ce qui auroit pû paroître un Paradoxe , il y a plus de genres de Spirales possibles , que d'autres Courbes , quoique les Spirales ne soient qu'une espece de Courbes.

Quand l'origine de la Courbe génératrice n'est pas au centre du cercle de révolution , ses Abscisses ne laissent pas de régler toujours les rayons de la Spirale. Seulement il faut ajouter à ces Abscisses ou en retrancher une certaine quantité , qui est déterminée par l'éloignement de l'origine de la Courbe à l'égard du centre du cercle de révolution.

La position de la Courbe génératrice demeurant donc indéterminée , & par conséquent aussi le rapport de ses Abscisses aux rayons de la Spirale , il ne reste rien de constant que le rapport de ses Ordonnées aux arcs de révolution , qu'elles déterminent toujours : aussi est-ce uniquement sur ce rapport que M. Varignon fonde une Equation générale pour toutes les Spirales possibles à l'infini. Il ne faut , pour amener cette Equation à quelque chose de particulier , qu'y faire entrer l'expression des Ordonnées de quelque Courbe particuliere. Et comme l'expression des Ordonnées d'une Courbe enferme nécessairement ses Abscisses , on trouvera par-là quels seront les rayons de la Spirale , selon la position qu'on aura donnée à la Courbe génératrice.

Par exemple, si la génératrice est une Parabole en général, dont les Ordonnées montent à telle puissance ou tel degré qu'on voudra, & si l'on suppose que son sommet soit au centre du cercle de révolution, on voit aussitôt la Spirale générale qui devient particuliere, ou plutôt moins générale, puisqu'elle comprend encore une infinité d'especes, dont chacune répond à chaque espee de Parabole. M. Varignon trouve les Soutangentes de cette Spirale Parabolique générale, le rapport de ces Soutangentes, soit au cercle de révolution, soit à leur cercle circonscrit, lorsqu'elles terminent une révolution, ou, lorsqu'elles sont dans le cours d'une révolution, leur rapport à la portion de cercle correspondante; tous les espaces spiraux, soit tout ce qu'il y en a de compris dans tel nombre de révolutions qu'on voudra, soit l'espace seul de quelque révolution complete, soit seulement quelque partie de cette espace; enfin les *déroulemens* de ces Spirales, c'est-à-dire, les Courbes qui naîtroient, si les rayons ou Ordonnées qui concourent toutes en un point étoient toutes posées sur un axe parallèlement entr'elles, selon l'ordre qu'elles avoient, & en conservant la même grandeur.

Tout l'artifice de cette Spirale Parabolique générale ne consiste qu'en ce que le degré de la Parabole génératrice a été laissé indéterminé; & lorsqu'on le détermine, il vient enfin une Spirale particuliere, & pour ainsi dire, individuelle, & qui ne peut descendre davantage. Les Géometres conviennent que le Triangle peut passer pour la premiere espee de Parabolé, dans laquelle les Ordonnées sont en même raison que les Abscisses; d'ailleurs dans la Spirale d'Archimede, les arcs de révolution sont comme les rayons, & par consequent elle peut être produite par le Triangle ou par la Parabole du premier degré. Aussi quand on détermine le degré général de la Parabole à n'être que l'unité, toutes les propriétés qu'Archimede a découvertes dans sa Spirale s'offrent aussitôt, & accompagnées de plusieurs autres qu'il n'a pas vûes.

C'est là le grand avantage des Géometres modernes sur les Anciens. Un nombre de vérités infiniment plus grand nous coûte infiniment moins, non que nous ayons un génie supérieur, mais parce que nous avons d'excellentes méthodes. La gloire des Anciens est d'avoir pû faire sans le secours de notre art, le peu qu'ils ont fait; & la gloire des Modernes est d'avoir trouvé un art si merveilleux. Les Anciens ressemblent aux Habitans du Mexique & du Perou, qui n'ayant ni Grues ni instrumens pareils, & ne sachant point échafauder, ne laissoient pas d'élever des bâtimens à force de bras; & les Modernes sont les Européens, qui bâtissent incomparablement mieux, mais avec des Machines.

On voit d'un seul coup d'œil par la Formule générale de M. Varignon, que dans la Spirale d'Archimede engendrée par la Parabole du premier degré ou par le Triangle, les Soutangentes qui terminent chaque révolution, sont entr'elles comme la suite des quarrés naturels 1, 4, 9, &c. Que dans la Spirale engendrée par la Parabole du second degré, qui est la Parabole ordinaire, ces mêmes Soutangentes sont entr'elles comme les racines quarrées des Cubes des nombres naturels, c'est-à-dire, comme les racines quarrées de 1, de 8, de 27, de 64, &c. Que dans la Spirale engendrée par la Parabole du troisieme degré, ou cubique, elles sont comme les racines cubiques des quatriemes puissances des nombres naturels; & enfin l'on trouve toujours avec la même facilité la progression qui regne entre ces Soutangentes dans quelque Spirale Parabolique que ce soit, ce qui feroit encore de nouveaux Theoremes fort universels, si l'on vouloit comparer ces différentes progressions en différentes Spirales. Rien ne plaît davantage à l'Esprit en fait de Géométrie, que de voir naître d'une même grandeur différemment conditionnée, ces différens ordres infinis de progressions, également invariables dans toutes leurs parties, & qui ne se démentent jamais.

Les Soutangentes comprises dans le cours de quelque révolution se tirent de la Formule générale avec la même facilité que celles qui terminent une révolution quelconque, seulement elles ne sont pas exprimées par les nombres de ces progressions que nous venons de marquer, mais par des nombres moyens. Les Soutangentes trouvées, rien n'est plus facile que de déterminer en général leur rapport aux circonférences de leurs cercles circonscrits, ou à celle du seul cercle de révolution.

Il en va de même des espaces de toutes les Spirales paraboliques, comparés à leurs cercles circonscrits, soit qu'on les prenne par révolutions complètes ou incomplètes. M. Varignon les donne tous à la fois, & ce qu'on a rapporté ci-dessus des espaces de la Spirale d'Archimede, est presque étouffé & anéanti dans cette multitude.

La Théorie des déroulemens n'est pas moins générale. Toute Spirale parabolique se déroule en une parabole plus élevée d'un degré que sa génératrice. Ainsi la Spirale d'Archimede déroulée devient la Parabole commune. De-là il suit fort naturellement qu'une Spirale Parabolique déroulée contient un espace parabolique double de l'espace spiral qu'elle contenoit.

La Spirale parabolique déroulée est de la même longueur dont elle étoit auparavant, & par conséquent elle n'est rectifiable que quand la Parabole en laquelle elle se change, l'est aussi: car il n'y a que certaines especes de Paraboles qui soient rectifiables. La Parabole commune ne l'étant pas, la Spirale d'Archimede ne l'est pas non plus.

Si au lieu de prendre la Parabole en général pour génératrice d'une Spirale, on prend de même en général l'Hyperbole entre ses Asymptotes, tout le reste demeurant le même, les changemens qu'il faut faire dans la formule des Spirales à l'infini, sont bientôt faits, & la Spirale hyperbolique générale paroît avec toutes ses propriétés enveloppées dans son Equation, d'où le calcul

algébrique les développe facilement.

L'origine de la Spirale hyperbolique est à une distance infinie du centre de son cercle de révolution, au lieu que l'origine de la Spirale parabolique est à ce même centre. La Spirale hyperbolique, quoiqu'elle parte d'un point infiniment éloigné de ce cercle, y arrive cependant après une seule révolution, & quand elle en a coupé la circonférence, quoique de-là au centre, il n'y ait qu'une distance finie, elle n'y peut arriver qu'après une infinité de révolutions, ou, ce qui est la même chose, elle n'y peut arriver.

Cet exemple peut suffire pour faire imaginer les variétés dont les spirales sont susceptibles selon les différentes Courbes qui les produisent. Une Courbe fort simple peut produire une Spirale assez bizarre. Ainsi celle qui résulte du Cercle pris pour Courbe génératrice; a un point de rebroussement tel que ses deux concavités sont tournées du même côté, ce qui est l'espece la moins ordinaire de rebroussement. Après cela, on ne fera pas surpris de trouver des Spirales avec des points d'inflexion. On en verra même qui ont des contours plus singuliers qu'aucune Courbe que l'on ait examinée jusqu'à présent.

Les Methodes dont M. Varignon s'est servi pour trouver les Soutangentes, les longueurs, les espaces, les déroulemens, &c. des Spirales paraboliques, se peuvent aisément appliquer à toutes les autres especes de Spirales. Il donne même des exemples de la maniere dont il faudroit considérer des Spirales produites par des Courbes, qui seroient autrement posées à l'égard du centre du cercle de révolution, qu'on ne l'a supposé jusqu'ici.

Il ne nous resteroit plus rien à dire pour donner une idée de la Théorie de M. Varignon sur les Spirales, si ce n'étoit une Spirale assez fameuse chez les nouveaux Géometres, pour mériter d'être traitée en particulier, & qui le merite d'autant plus qu'elle a servi de modele à M. Varignon pour en former d'autres de son espece qui n'étoient point encore connues.

La Courbe, qu'on appelle *Logarithmique*, est telle que si l'on prend ses Abscisses en progression arithmétique, ses Ordonnées seront en progression géométrique, & de-là vient son nom. Si ses Ordonnées sont croissantes vers une extrémité de l'axe, elles sont nécessairement décroissantes vers l'autre : & comme elles sont en progression géométrique, elles ne peuvent jamais décroître jusqu'à Zero ; c'est-à-dire, que la Courbe *Logarithmique* ne peut jamais venir à rencontrer son axe, quoiqu'elle s'en approche toujours, & que par conséquent cet axe est son *Asymptote*.

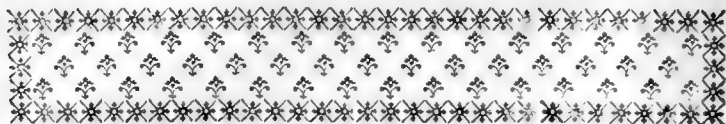
Il y a longtemps que, sur l'idée de la *Logarithmique*, on a imaginé une *Spirale*, qu'on a appelée *Spirale Logarithmique*, parce qu'elle est *Logarithmique* aussi : car si sur son cercle de révolution on prend les arcs en progression arithmétique, les rayons de cette *Spirale* seront en progression géométrique.

Pour la former, M Varignon pose la *Logarithmique*, de manière que son *Asymptote* soit perpendiculaire au rayon, où commencent & se terminent les révolutions complètes. Mais s'étant avisé de donner à la *Logarithmique* une position qui fit un effet contraire, il a vu naître une autre *Spirale*, & qui étoit *Logarithmique* aussi, puisque ses Ordonnées étant prises en progression arithmétique décroissante, les arcs de révolution en suivoient une géométrique croissante. Cette nouvelle *Spirale Logarithmique*, qui a l'*Asymptote* de la *Logarithmique* pour le commencement & la fin de ses révolutions complètes, a aussi l'extrémité de cette *Asymptote* pour son origine, & par conséquent commence à une distance infinie de son cercle de révolution, ainsi que la *Spirale hyperbolique*, au lieu que l'ancienne *Spirale Logarithmique* ne commence qu'à une distance finie de son cercle. La nouvelle arrive au centre, & l'ancienne n'y peut arriver.

Les deux *Spirales Logarithmiques* épuisent toutes les combinaisons qu'on peut faire de la progression arithmétique

tique & de la géométrie entre les Ordonnées ou rayons, & les arcs de révolution, & ce sont les seules Spirales que la Logarithmique puisse produire. Mais si l'on vouloit que les arcs d'une Spirale quelconque pussent suivre la progression soit arithmétique soit géométrique, tandis que les Ordonnées ou les arcs de révolution suivroient celle que les arcs de la Spirale ne suivroient point, il résulteroit de ces deux progressions différemment distribuées à trois grandeurs, six combinaisons, & par conséquent six Spirales Logarithmiques possibles, puisque ce qui fait qu'une Spirale est Logarithmique, c'est que quelques-unes des grandeurs qui la composent, suivent l'une des deux progressions, tandis que les autres grandeurs suivent l'autre. C'est là la réflexion qui a conduit M. Varignon à découvrir cinq nouvelles Spirales Logarithmiques. Nous avons déjà vû la formation de la première des cinq, qui appartient, ainsi que l'ancienne, à la Logarithmique. Quant aux quatre autres nouvelles, M. Varignon a trouvé les différentes Courbes dont elles devoient naître, & il a donné leur formation & leurs propriétés, toujours par sa méthode générale.

Une Spirale quelconque étant donnée, on peut aisément retrouver sa génératrice. Or toute Courbe dont les Ordonnées concourent en un point, peut être considérée comme une Spirale, & par conséquent on peut supposer qu'elle a une génératrice, & la trouver. S'il est donc question de décrire une Courbe quelconque dont les Ordonnées soient concourantes en un point, on peut la traiter de Spirale, remonter à sa génératrice, & par le moyen de cette génératrice la décrire, selon la méthode de M. Varignon. On peut donner à sa Théorie cet usage, si l'on ne veut pas qu'elle demeure simple Théorie.



ASTRONOMIE.

SUR DEUX ECLIPSES DE LUNE.

V. lès M.
p. 6. 14.
197. 199.

UNe Eclipsé de Lune du 23 Decembre 1701, dont on ne parla dans l'Académie qu'en 1704, ne put être observée à Paris à cause des nuages dont le Ciel fut couvert. On en a pû voir le détail dans la *Connoissance des Temps* de 1703, tel qu'il avoit été prédit par le calcul astronomique.

Mais l'Académie reçut les observations qui en avoient été faites à Dunquerque par M. de Chazelles, à Montpellier par M^{is} de Plantade & Clapiers, à Arles par M. Davifard, à Avignon par le P. Bonfa Jésuite, & à Marseille par le P. Laval Jésuite, Professeur en Hydrographie.

Il y eut dans ces différentes observations des particularités remarquables. L'Eclipsé arriva le matin, elle devoit commencer à Paris à 4^h 40', & la Lune devoit se coucher éclipsée. A Montpellier on la vit, après l'immersion totale, vers les 6 heures, si sombre & si obscure qu'on avoit beaucoup de peine à y distinguer les taches, qui d'ordinaire sont aisées à reconnoître, quoique la Lune soit plongée dans l'ombre. Quelque temps après elle commença à rougir vers sa circonférence, & circulairement, le milieu du disque demeurant plus obscur, & vers les 6 heures $\frac{1}{4}$ ce milieu obscur, & l'anneau rougeâtre qui l'enveloppoit, partageoient assez également le diametre du disque. Mais ce qui fut fort extraordina-

re, c'est qu'à 6 heures $\frac{1}{2}$, la Lune disparut dans le ciel, quoiqu'il fût très-ferain, & très net, qu'elle ne dût se coucher qu'à plus d'une heure de là, & que le crépuscule ne fût point encore assez fort pour l'effacer, puisqu'il laissoit voir des Etoiles, même du côté de l'Orient.

A Arles, la Lune parut toujours d'un rouge obscur & brun, après l'immersion totale, & au contraire, d'un rouge fort clair à Avignon, & si clair qu'on l'eût crue transparente, & éclairée du Soleil par derrière. A Marseille, la Lune fut rougeâtre dans sa partie qui étoit au Nord-ouest, & fort obscure dans la partie opposée. Elle disparut aussi vers les 7 heures, le ciel étant fort net.

Une autre Eclipsé de Lune du 17 Juin 1704. au soir, dont on n'auroit pû voir à Paris que la fin, qui n'y fut pas vûe à cause des nuages, fut observée de quelques autres endroits, dont on eut des relations, & fut remarquable principalement par une très-forte pénombre qui parut à Montpellier à M^{rs} Bon, de Plantade, & de Clapiers.

On peut réduire à quelques causes générales les différens degrés d'ombre & de pénombre, & les différentes couleurs qui paroissent dans les éclipsés de Lune. Il faut se souvenir d'abord de ce que c'est que la pénombre expliquée dans l'Hist. de 1702 *. Elle n'a été alors * p. 73. & considérée que comme formée par le globe seul de la Terre, & l'on a fait voir que la Lune pouvoit ne tomber que dans cette pénombre, qui est un espace privé seulement des rayons d'une partie du Soleil, & non pas dans l'ombre qui est un espace où il n'entre absolument aucuns rayons. Par la formation de la pénombre, il est visible qu'elle doit avoir différens degrés de clarté ou d'obscurité, selon qu'elle s'éloigne ou s'approche davantage de l'ombre : mais si outre le globe de la terre, on considère aussi l'Atmosphère dont il est environné, il est certain qu'il s'y doit rompre des rayons, qui en vertu de cette réfraction se rapprochant de la perpendicu-

laire, & se rabattant par conséquent vers l'axe de l'ombre de la terre, pourront aller se mêler dans la pénombre, & la rendre plus claire qu'elle n'étoit naturellement, & peut-être iront-ils jusque dans l'ombre, qui en deviendra nécessairement moins obscure. Cela dépend de la grandeur de la réfraction, c'est-à-dire de la densité de la matiere qui l'aura causée. Cette matiere peut varier dans l'Atmosphere, & par conséquent l'ombre & la pénombre prises à la même distance du globe de la terre, pourront en différens temps, & peut-être pendant la durée d'une même éclipse, avoir différens degrés de clarté ou d'obscurité.

M^{rs} les Astronomes de Montpellier ont eu sur cela, à l'occasion de cette forte pénombre de l'Eclipse du 17 Juin, une pensée assez nouvelle, & qui merite d'être suivie. Ils ont cherché quelles étoient les parties de la surface de la terre comprises pendant cette éclipse, tant dans l'hémisphere éclairé, que dans l'hémisphere obscur: car si l'on peut juger que l'air de l'hémisphere éclairé soit plus épais que celui de l'hémisphere obscur, les rayons qui passeront par réfraction de l'hémisphere éclairé dans l'obscur, souffriront une moindre réfraction, & étant moins rabattus vers l'axe de l'ombre de la terre, ne tomberont point dans la pénombre, & au contraire. Ces Astronomes ont trouvé que la mer du Sud qui est très-vaste, étoit dans l'hémisphere éclairé; & tout le grand Continent de l'Europe, de l'Asie, & de l'Afrique dans l'hémisphere obscur; de sorte que les rayons rompus qui passaient de dessus la mer du Sud, & d'un air chargé de vapeurs, dans un air plus léger & sur des terres, ne devoient souffrir qu'une foible réfraction: & c'est ce qui rendit si obscure la pénombre de cette éclipse. Pour pousser cette recherche à sa dernière précision, il faut voir de plus quelle est la partie de la terre qui couvre de son ombre la partie écliptique de la Lune, & comparer cet endroit de la terre à ceux d'où il y peut venir des rayons rompus, ou plutôt, les différentes den-

sités d'air. Si l'on peut s'assurer qu'il y ait dans ces densités quelque chose d'égal & d'uniforme, & que l'air d'une grande mer soit toujours plus épais que celui d'un Continent, ce qui paroît assez vraisemblable, on pourra faire par avance quelques conjectures sur le plus ou le moins d'obscurité de la pénombre ou de l'ombre des éclipses de Lune, & joindre ces prédictions physiques à celles qui sont purement astronomiques. Ce seroit un nouveau degré de connoissance qu'on auroit acquis, quoique l'on n'eût guere dû l'espérer.

Quand la Lune vûe en même temps de différens endroits paroît avoir différens degrés d'obscurité, ou même différentes couleurs, ainsi qu'il est arrivé dans l'Eclipse du 23. Decembre 1703. observée à Arles & à Avignon, cela ne se peut plus rapporter qu'aux différentes vapeurs particulieres de chaque lieu, & à leur différente quantité. Ce sont des especes de verres inégalement épais & diversement teints, au travers desquels le même objet est vû. Quoique le ciel paroisse fort net, ces vapeurs ne laissent pas d'y être répandues. Dans l'Eclipse du 23 Decembre, une foible pénombre devoit couvrir la Lune, l'air devoit être à Arles fort chargé de ces vapeurs invisibles, & au contraire fort pur à Avignon.

On ne peut guere attribuer qu'à ces mêmes vapeurs, que la Lune éclipsée disparoisse dans le ciel, sans qu'il y ait d'ailleurs nul accident nouveau. Je suppose que la Lune a pris dans son éclipse une certaine couleur peu différente de celle du ciel tel qu'il est alors, c'est-à-dire du fond sur lequel on la voit. Si les vapeurs interposées, deviennent telles qu'elles rendent la couleur de la Lune entierement semblable à celle du fond, la Planete doit disparoître à nos yeux, & il est clair selon cette idée que ce phénomène surprenant ne doit être possible que dans les éclipses, parce qu'en tout temps la couleur de la Lune est trop différente de celle du fond qui la porte.

Nous ne comptons dans tout ceci que sur l'Atmosphere de la Terre, & sur les vapeurs qui y sont inégalement

62 HISTOIRE DE L'ACADE'MIE ROYALE.
répandues. Il est vrai que la Lune ne paroît pas avoir d'Atmosphere grossiere & sensible, mais peut-être a-t-elle des vapeurs déliées, qui étant invisibles pendant qu'elle est lumineuse, contribuent à lui donner une couleur & une teinture, pendant qu'elle est dans l'obscurité. Quoiqu'il en soit, on peut croire que les Philosophes après avoir découvert, presque contre toute apparence de succès, tout ce qu'il y a de géométrique dans les Eclipses, viendront aussi à découvrir les causes des accidens physiques qui s'y mêlent : mais ce qui est physique doit naturellement se manifester le dernier, parce qu'il est plus compliqué, & plus variable.

*SUR LE MOUVEMENT
D'UN ASTRE EN ASCENSION DROITE
COMPARE' A SON MOUVEMENT
EN LONGITUDE.*

V. les M.
P. 134

QUand un Astre parti du premier degré d'Aries est arrivé au premier degré de Cancer, il a fait par son mouvement en ascension droite le quart de l'Equateur, & par son mouvement en longitude le quart de l'Ecliptique; & la distance où il se trouve de l'intersection, ou, si l'on veut, de l'origine de ces deux grands Cercles, est également de 90 degrés par rapport à l'un & à l'autre. Mais de ce que le quart de l'Ecliptique répond précisément au quart de l'Equateur, il ne s'ensuit pas que chaque autre partie égale de l'Ecliptique réponde à une partie égale de l'Equateur, & chaque degré de l'un à chaque degré de l'autre; l'obliquité de l'Ecliptique par rapport à l'Equateur ne le permet pas, & l'Astre qui, arrivé au premier degré de Cancer, a parcouru deux parties égales sur l'un & l'autre cercle, y avoit pendant tout son cours précédent, ou plutôt pendant chaque instant de ce cours, parcouru des parties inégales. Ayant fait un degré par rapport à l'Equateur, il avoit

fait plus d'un degré sur l'Ecliptique, ou réciproquement. Mais puisque par un cours qui étant comparé à l'un & à l'autre cercle est inégal, il a fait à la fin sur l'un & sur l'autre un espace égal, il faut absolument qu'un degré de l'Ecliptique ait été tantôt plus grand, tantôt plus petit qu'un degré de l'Equateur & comme il est constant que cette variation a été continue & réglée, un degré de l'Ecliptique n'a pû, après avoir été plus grand qu'un degré de l'Equateur, devenir plus petit, sans passer par lui être égal. M. Parent appelle mouvement *médiocre* d'un Astre celui qu'il a lorsque ces deux différens degrés sont égaux, & il cherche à quel point de l'Ecliptique entre le premier degré d'Aries, & le premier degré de Cancer, doit être ce mouvement médiocre.

Pour rapporter les degrés de l'Ecliptique à ceux de l'Equateur, il faut concevoir l'Equateur divisé de degré en degré par des Méridiens, qui coupent ensuite l'Ecliptique. Par-là, chaque partie égale de l'Equateur a une partie de l'Ecliptique qui lui répond, comprise entre les mêmes Méridiens : mais ces parties de l'Ecliptique sont toujours inégales, parce que l'espace qui est entre deux Méridiens diminuant & se serrant toujours à mesure qu'ils approchent du Pole où ils doivent concourir, la portion de l'Ecliptique qu'ils comprennent, est d'autant plus petite qu'elle est plus éloignée de l'Equateur. Ainsi les deux Méridiens qui comprennent le premier degré de l'Equateur, comprennent plus d'un degré de l'Ecliptique, ensuite une moindre portion de l'Ecliptique, mais toujours plus grande qu'un degré de l'Equateur, jusqu'à ce qu'elle lui soit égale, après quoi elle est toujours plus petite que ce degré, & enfin la plus petite qu'elle puisse être lorsqu'elle répond au 90° degré de l'Equateur.

Il faut donc considérer le point du mouvement médiocre comme partageant en deux le quart de l'Ecliptique. Du côté d'Aries sont les parties de l'Ecliptique plus grandes chacune qu'un degré de l'Equateur, du

64 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
côté de Cancer celles qui font plus petites. Le point du mouvement médiocre fera au 45° degré de l'Ecliptique, si les 45 degrés de l'Ecliptique qui font vers Aries pris ensemble, l'emportent autant en grandeur sur 45 degrés de l'Equateur, que les 45 degrés vers Cancer leur cedent: mais si cela n'est pas ainsi, ce point s'approchera d'Aries, en cas que pour faire la compensation il faille un plus grand nombre de parties vers Cancer, ou, ce qui revient au même, si les parties de l'Ecliptique vers Aries l'emportent plus en grandeur sur les degrés de l'Equateur, que des parties prises à même distance de Cancer ne leur cedent, & si l'on suppose le contraire, le point du médiocre mouvement s'éloignera d'Aries. Or moins l'Ecliptique sera supposée oblique, moins ses parties vers Aries l'emporteront sur les degrés de l'Equateur, & moins les parties vers Cancer leur céderont, & au contraire; de sorte qu'il est visible que c'est l'obliquité de l'Ecliptique qui doit seule régler la position ou la place du point du médiocre mouvement dans le quart de l'Ecliptique.

M. Parent trouve par une équation algébrique, que ces trois grandeurs sont continûment proportionnelles, le Rayon de la Sphere, la Tangente de l'arc qui est la distance de Cancer au point du mouvement médiocre, & le Sinus du complément de l'obliquité de l'Ecliptique. Delà il suit évidemment que moins l'Ecliptique est oblique, plus le point du mouvement médiocre est éloigné de Cancer, ou proche d'Aries.

Mais l'obliquité de l'Ecliptique étant réellement constante, & déterminée de $23^{\circ} 29'$, on trouve aussi-tôt par la Formule de M. Parent, que le point du mouvement médiocre est au $46^{\circ} 14'$ de l'Ecliptique, au lieu qu'il est placé dans plusieurs Tables astronomiques vers les 44 ou 45° . Cela vient de ce que les Tables ne l'ont pas déterminé par une Formule algébrique, comme a fait M. Parent, mais par des calculs où il entre un peu de tâtonnement, & qui assez souvent ne sont que des approximations

mations. Les formules d'Algebre, quand on les peut employer, frappent droit au but.

SUR LES PLANETES EN GENERAL, ET SUR SATURNE

EN PARTICULIER.

ON ne fauroit mieux, ni relever la gloire de l'Astronomie, ni excuser ce qui lui reste d'imperfection, V. les M; P. 306. qu'en montrant, comme a fait M. Maraldi, toutes les difficultés qu'elle a eues à combattre, & qu'elle a presque entierement surmontées.

Toutes les Planetes *principales*, car il ne s'agit point ici de celles qui ne sont que des Lunes ou des Satellites, tournent autour du Soleil, quelle que soit la ligne qu'elles décrivent autour de cet Astre, & leur mouvement s'y rapporte uniquement. Il faudroit donc, pour observer & pour calculer le cours des Planetes le plus commodément & le plus avantageusement qu'il fût possible, qu'il y eût des Astronomes placés dans le Soleil. Supposons qu'il y en ait effectivement.

Ils s'apercevraient d'abord que nulle Planete ne seroit dans tout son cours également éloignée du Soleil, & qu'il n'y en auroit aucune qui n'eût son *Aphélie* & son *Perihélie*, c'est-à-dire, deux points diamétralement opposés, dont l'un marqueroit le plus grand éloignement, l'autre le moindre, & entre lesquels seroient de part & d'autre ceux des *moyennes distances*.

Quand le mouvement des Planetes seroit égal & uniforme en lui-même, il paroîtroit inégal; parce que leur distance à l'égard du Soleil seroit toujours inégale d'un moment à l'autre. On les verroit aller plus lentement vers leur Aphélie, & plus vite vers le Perihélie. Or on

ne fauroit calculer le mouvement des Planetes qu'en le supposant toujours égal , & par conséquent *moyen* entre la plus grande vitesse & la plus grande lenteur , sauf à réduire ensuite ce mouvement moyen & faux , au *vrai* & *apparent* par des Tables qui marquent combien à chaque point de l'Orbe de la Planete , il faut ajouter à son mouvement moyen ou en retrancher. C'est ce qu'on appelle , *Equation additive & soustractive*. Il est clair que la construction de ces Tables dépend d'une détermination précise de l'Aphélie & du Perihélie : mais ce ne sont pas deux points visibles dans le cours d'une Planete , & on ne les peut avoir que par une assez longue suite d'observations comparées les unes aux autres. Si par l'erreur des observations, ou par celle des comparaisons que l'on en fait , on se trompe d'un degré , par exemple , sur la position de l'Aphélie , il y aura un degré dans l'Orbe de la Planete , où la Table donnera le moyen mouvement plus grand que le vrai , quoiqu'il soit réellement plus petit , & un autre degré où le contraire arrivera , & sur tous les autres degrés ou points de l'Orbe sans exception , l'équation sera plus grande ou plus petite qu'elle n'eût été , si l'Aphélie & le Perihélie eussent été bien posés.

Leur position ne détermine que les degrés de l'Orbe où l'équation doit être additive ou soustractive , & plus ou moins additive ou soustractive , en un mot , la distribution de l'équation dans l'Orbe : mais la grandeur totale de cette équation dépend de la grandeur de l'*excentricité* de l'Orbe au Soleil considéré comme centre. Cette excentricité n'est point un objet visible , non plus que l'Aphélie & le Perihélie , il la faut conclurre avec peine d'un grand nombre d'observations , & pour peu qu'on se trompe sur sa grandeur , toute l'équation sera nécessairement fautive en toutes ses parties. De plus , pour la distribuer dans l'Orbe , il faut savoir quelle est la Courbe de l'Excentrique : car une Ellipse , par exemple , se partagera en parties égales autrement qu'un Cercle , & une certaine Ellipse

autrement qu'une autre, or pour déterminer la Courbe d'une Orbe par les observations seules, il en faudroit un nombre presque infini, & l'on ne peut guère se passer de faire une hypotheſe qui concilie le plus grand nombre d'observations qu'il fera poſſible; mais qui ſera toujours incertaine en elle-même.

Les Planetes ſe meuvent toutes dans des plans différens, quoiqu'à la vérité peu inclinés les uns aux autres; mais d'autant plus difficiles à diſtinguer. Les Aſtronomes placés dans le Soleil ſeroient obligés à en choiſir arbitrairement quelqu'un, par rapport auquel ils meſureroient l'inclinaison des autres: je ſuppoſe qu'ils choiſiſſent le plan qui paſſe par le centre du Soleil & de la Terre, & que nous appelions le plan de l'Ecliptique. Une Planete, par exemple, Jupiter ne pourroit être parfaitement en conjonction ou en oppoſition avec la Terre, à moins que d'être dans le même plan; c'eſt-à-dire, puifque les plans de l'Orbe de Jupiter & de celui de la Terre ſont différens, mais inclinés, à moins que d'être dans l'un des deux points ou *Nœuds* diamétralement oppoſés, qui ſont l'interſection des Orbes de Jupiter & de la Terre. Plus l'angle que feroit l'Orbe de Jupiter avec celui de la Terre, ou avec le plan de l'Ecliptique, ſeroit grand, plus Jupiter hors de ſes nœuds ſeroit éloigné d'être en conjonction, ou en oppoſition parfaite ou centrale avec la Terre. On voit donc que le calcul des conjonctions & des oppoſitions des Planetes demanderoit la connoiſſance précife des inclinaisons de leurs Orbes au plan de l'Ecliptique, & de la poſition de leurs nœuds, mais cette recherche n'eſt pas facile. Un nœud ne ſe voit point; il faut faire pluſieurs observations de la Planete aux environs du nœud, avant qu'elle y paſſe, & après qu'elle y a paſſé; & par ſes différentes diſtances de l'Ecliptique de côté & d'autre, juger à quel point ſa diſtance a été nulle, ce qui eſt la même choſe que déterminer ſon nœud. Mais parce que les Orbes ſont peu inclinés, une Planete s'approche ou s'éloigne beau-

coup de son nœud , ou avance beaucoup en *longitude* sans s'approcher ou s'éloigner beaucoup du plan de l'Ecliptique , ou sans diminuer ou augmenter beaucoup sa *latitude* , & par conséquent son mouvement par rapport au plan de l'Ecliptique , ou en latitude , étant insensible dans une assez grande étendue , la position du nœud est incertaine & douteuse dans une étendue égale.

Il y a encore plus : ni l'Aphélie & le Perihélie , ni les Nœuds ne sont des points fixes dans les Orbes des Planetes , ils changent continuellement , mais avec une lenteur qui rend leur variation beaucoup plus difficile à déterminer.

Toutes ces difficultés étant applanies , autant qu'il est possible à l'Art , quand on veut faire des Tables astronomiques pour une Planete , & donner les principes de calcul ou *Elémens* qui doivent servir à trouver à l'avenir son vrai lieu dans le Ciel pour tel moment qu'on voudra , il faut lui fixer une *Epoque* , c'est-à-dire , un moment pour lequel ce vrai lieu soit bien connu , & d'où l'on comptera tout le reste. Si cette Epoque est fautive , tout s'en ressent , & toutes les difficultés que nous avons rapportées , concourent à en rendre la détermination fort pénible , & peu sûre.

Jusqu'ici nous avons supposé des Astronomes placés dans le Soleil , au centre de tous les mouvemens : mais que fera-ce quand ils seront placés sur la Terre , qui voit comme inégal & irrégulier tout ce qui auroit été vû égal & régulier de dedans le Soleil , & qui par sa situation ajoute à tout ce qui seroit inégal & irrégulier en soi-même , une fautive inégalité & une fautive irrégularité fort difficile à démêler d'avec la vraie ?

En fait de Planetes , ce qui se rapporte au Soleil , & n'est pas vû de dedans le Soleil , ne peut être que faux , & demande à être rectifié. Le véritable angle d'inclinaison des Orbes des Planetes sur le plan de l'Ecliptique , est celui qui seroit vû du Soleil , & non cet angle plus ou moins grand qui est vû de la Terre. La position des nœuds

d'une Planete dans le Zodiaque n'est point celle qui est vûe de la Terre , à moins que la ligne tirée du centre du Soleil , par laquelle ils sont déterminés , ne passe aussi par le centre de la Terre , ce qui est une rencontre fort rare. Enfin de la Terre au Soleil il y a toujours une *parallaxe* ou différence optique , dont il faut tenir compte dans les déterminations tirées de nos observations. C'est un travail dont notre situation nous impose la nécessité , & qui rend tous les calculs astronomiques plus compliqués , & par conséquent plus sujets à erreur.

La grandeur de cette parallaxe dépend de la distance de la Terre , & de celle de la Planete au Soleil , ou , ce qui revient au même , du rapport de ces deux distances. Il est évident que si la distance de la Terre au Soleil par rapport à celle de la Planete observée au Soleil , étoit assez petite pour ne devoir pas être comptée , ou du moins pour pouvoir être négligée sans une erreur sensible , la parallaxe cesseroit ; & par conséquent elle est d'autant plus grande , que la distance de la Terre au Soleil est plus grande par rapport à celle de la Planete au Soleil. Mais les mesures de ces sortes de distances , qui paroissent au commun des hommes des entreprises impraticables , sont du moins très-pénibles pour les plus habiles Astronomes , & ne peuvent être d'une grande sûreté.

Les Orbes des Planetes ne se rapportent qu'au Soleil ; on ne peut pas dire proprement qu'ils soient excentriques à la Terre , à laquelle ils ne se rapportent point. Les uns enveloppent l'Orbe de la Terre , les autres en sont enveloppés , & par cette disposition , les Planetes étant dans leur plus grande proximité de la Terre , ou dans leur *Pé- rigée* , en sont très-proches par rapport à la grande distance où elles en sont dans leur *Apogée*. Mais , & cet Apogée & ce Périgée ne sont que des rencontres , pour ainsi dire , fortuites , qui naissent de la combinaison du mouvement des Planetes & de celui de la Terre ou du Soleil , il n'y a que l'*Aphélie* & le *Perihélie* qui soient des points déter-

minés par eux-mêmes, le Périgée d'une Planete peut arriver dans son Aphélie, & son Apogée dans le Perihélie: & comme ce sont l'Aphélie & le Perihélie seuls, qui ont un mouvement par lequel se regle la distribution de l'excentricité ou de l'équation dans l'Orbe, il faut les dé mêler d'avec l'Apogée & le Périgée, ce qui est d'autant plus mal-aisé, que les uns nous sont visibles, & les autres invisibles. De même, l'excentricité des Planetes au Soleil est celle dont nous avons besoin: mais nous ne la voyons pas, & il faut la conclurre avec beaucoup de peine de leurs inégales distances à la Terre. On appelle *premiere inégalité* des Planetes, celle qui vient de leur excentricité au Soleil, & qui est réellement dans leur cours par rapport à cet Astre, & *seconde inégalité*, celle qui vient de ce qu'elles sont vues de la Terre, & non du Soleil.

A rassembler toutes les déterminations que nous avons rapportées, nécessaires au calcul des Planetes, le nombre en est si grand, & souvent elles sont si délicates & si subtiles, ou demandent des observations faites en des circonstances si rares, que M. Maraldi ne croit pas que les observations seules puissent aisément suffire, & que l'on ne soit pas réduit à emprunter le secours de quelques hypotheses; c'est-à-dire, à supposer pour Orbe d'une Planete quelque ligne Courbe, dont la nature particuliere donnera la mesure de ses différens arcs, quand on en aura quelques-uns par observation. Quoi qu'il en soit, les difficultés de l'Astronomie sont assez bien prouvées, ne fût-ce que par la différence qui se trouve assez souvent entre le Ciel & les Tables des plus grands Astronomes.

M. Maraldi en donne pour exemple les Tables de Kepler sur Saturne. Des observations de cette Planete faites à l'Observatoire depuis plus de 33 ou 34 ans, ont fait voir que Saturne étoit moins avancé dans le Zodiaque, tantôt de 20 à 21 Minutes, tantôt de 10 à 12, que ne le donnoient les Tables de Kepler, fondées sur les observations de Tycho-Brahé. Cette différence d'un tiers

ou d'une sixieme partie de degré, n'auroit pas été comptée autrefois, & paroît maintenant fort considérable. M. Maraldi s'est donné beaucoup de peine pour en découvrir la source. Kepler pouvoit s'être mépris, ou dans l'Epoque d'où il avoit commencé ses Tables de Saturne, ou dans la plus grande équation qu'il lui avoit donnée. Si l'erreur étoit dans l'Epoque, Saturne avoit donc été d'abord posé par Kepler plus avancé dans le Zodiaque d'une certaine quantité, qu'il ne l'étoit réellement; & cette quantité devoit être toujours la même: or par les observations elle varioit. Si l'erreur étoit dans la plus grande Equation, on devoit trop ajouter au mouvement moyen de Saturne dans une moitié de son Orbe, & par conséquent le trouver trop avancé: mais aussi dans l'autre moitié de l'Orbe, on devoit ôter trop, & le trouver trop peu avancé: or il l'étoit toujours trop, mais inégalement. De-là M. Maraldi tira cette conséquence assez subtile, que l'erreur appartenoit & à l'Epoque, puisque Saturne étoit toujours fort avancé selon Kepler, & à la plus grande Equation, puisqu'il l'étoit inégalement. Il corrigea l'une & l'autre, selon qu'il étoit nécessaire pour les concilier avec les observations.

Il se pouvoit aussi que Kepler se fût trompé dans le mouvement moyen en le faisant trop grand: mais après beaucoup de raisonnemens & de calculs, on trouva que l'erreur, du moins pour la plus grande partie, devoit venir de l'Equation & de l'Epoque.

M. Maraldi a examiné de la même maniere l'Aphélie, les Nœuds, & la plus grande Latitude de Saturne ou l'inclinaison de son Orbe, déterminés par Kepler; il les a corrigés lorsqu'il a été nécessaire pour accorder un grand nombre d'observations: & il faut dire à la gloire des Tables de M. Bouillaud sur Saturne, que souvent ces corrections se sont trouvées conformes à ces Tables.

On pourra juger par le travail de M. Maraldi sur

Saturne, ce que coûte la détermination des mouvemens d'une Planete, quel amas d'observations anciennes & modernes il faut avoir devant soi, avec quel art il faut les comparer, combien de différentes méthodes il faut avoir en main, & combien de réflexions, quelquefois fort fines & fort délicates, sont nécessaires pour se conduire dans un pareil labyrinthe.

SUR LE CALENDRIER.

V. les M.
p. 146.

LA révolution apparente du Soleil autour de la Terre a été divisée arbitrairement en 24 parties, qui sont les Heures, premier fondement de toute la mesure du temps. L'usage civil ne connoît que les Heures, ou plutôt des multiples d'Heures, comme des Jours, des Années: mais ni le mouvement annuel du Soleil, ni celui des autres corps célestes, ne peuvent être mesurés exactement & sans reste par des heures ni par leurs multiples; celui du Soleil, par exemple, est de 365 jours, 5 heures, 49' à peu près; celui de la Lune est de 29 jours, 12 heures, 44', & de-là vient que pour absorber ces fractions dans des nombres entiers, & même dans des nombres qui n'expriment que des jours ou des années, il faut imaginer des Cycles, qui embrassant plusieurs révolutions d'un même Astre, le remettent après un certain nombre d'années aux mêmes points du Ciel d'où il étoit parti d'abord, ou, ce qui est la même chose, aux mêmes temps du Calendrier établi pour l'usage civil.

Tel a été le fameux Cycle de 19 années, inventé autrefois pour remettre les Nouvelles Lunes aux mêmes jours; de sorte que le cours de la Lune comparé à celui du Soleil, se doit toujours retrouver le même dans chaque période de 19 années. Mais ce Cycle, qui remet les nouvelles Lunes aux mêmes jours, ne les remet pas
aux

aux mêmes heures, il s'en faut à peu près une heure & demie, les heures s'accroissent, & deviennent des jours, & enfin en 625 ans les nouvelles Lunes arrivent deux jours entiers plutôt qu'elles ne devoient arriver par le Cycle.

Cette différence entre le Ciel & le Cycle de 19 ans a été inconnue à l'antiquité, & l'erreur qu'elle avoit produite dans le Calendrier depuis le quatrième siècle de l'Eglise, qui fut celui du Concile de Nicée, jusqu'au seizième, fut une des causes de la Réforme du Calendrier par le Pape Gregoire XIII, ainsi qu'on l'a vu dans l'Hist. de 1701.*

* p. 107. & suiv.

Ceux qui travaillèrent à cette Réforme sous les ordres du Pape, découvrirent l'équation de 2. jours, nécessaire au bout de 625 ans, pour remettre le Cycle de 19 ans parfaitement d'accord avec le Ciel. Cette équation est heureuse en ce qu'elle est de 2 jours entiers sans aucune fraction ni d'heures, ni de minutes : car s'il y en avoit eu quelqu'une, il auroit fallu une autre équation plus grande que celle de 2 jours pour un nombre d'années beaucoup plus grand que 625, & d'autant plus grand que la fraction eût été plus petite, ce qui auroit été incommode ; & peut-être même la fraction eût été telle, qu'il eût été impossible d'en composer des jours qui n'eussent eu encore quelque fraction. Cette équation de 2 jours précis pour 625 ans, partagée proportionnellement à une période de 125 ans est de 9 heures 36' précises : & partagée de même à une période de 25 ans, elle est d'1 heure, 55' 12" sans tierces ; or on fait de quelle commodité il est dans le calcul & dans la pratique, d'avoir peu de fractions.

Il y a plus : cette équation si heureuse & si facile est en même-temps très-juste, & M. Cassini prouve qu'elle donne les mouvemens ou les lieux de la Lune avec la même exactitude que les meilleures Tables. A peine eût-on osé espérer qu'un Cycle destiné seulement pour l'usage Civil

74 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
ou Ecclésiastique, & auquel on ne demande pas une rigou-
reuse précision, pût en avoir autant que les Tables Astro-
nomiques, qui sont faites pour suivre pas à pas les mou-
vemens célestes, & pour n'en laisser rien échapper.

M. Cassini fait voir, en comparant ensemble les Tables les plus célèbres que nous ayons pour la Lune, que l'équation Grégorienne tient le milieu entr'elles, & que par consé-
quent elle n'a pas seulement toute la perfection qu'on peut desirer par rapport à l'usage Ecclésiastique; mais encore, que dans l'usage astronomique, si exact & si scrupuleux, elle peut & doit être préférée aux Tables même, puisqu'elles ne sont pas plus justes, & demandent des calculs beaucoup plus longs & plus pénibles. C'est là certainement ce qu'on peut jamais dire de plus glorieux pour les Auteurs du Calendrier Grégorien, du moins quant à cette partie.

V. les M. **N**ous renvoyons entierement aux Mémoires, selon
P. 9. 10. 12. le plan que nous nous sommes fait, différentes Obser-
40. 44. 131. vations de Taches dans le Soleil faites par les Astronomes
132. de l'Académie, ou des comparaisons de leurs observations
avec celles de leurs Correspondans.

V. les M. Des observations de Venus, & de Jupiter cachés par la
P. 198. 233. Lune.

246. 247. Et les observations de l'Eclipse de Lune du 10 Decem-
V. les M. bre.
Pag. 352. &
356.

Monsieur Clapier Professeur de Mathématique à Mont-
pellier, Correspondant de M. Cassini lui a envoyé
une Table qu'il a calculée des Déclinaisons du Soleil, pour
tous les degrés & minutes de l'Ecliptique, en supposant
que sa plus grande déclinaison soit de $23^{\circ} 29'$.

Le même M. Clapier a envoyé à M. Cassini, & par lui à
l'Académie, une Table qu'il a calculée, fort utile pour fa-
ciliter la description des Cadrans Verticaux déclinans à la

hauteur du Pole de Paris. Il ne suppose dans cette Table que la déclinaison du plan vers l'Orient ou vers l'Occident connue; & ensuite vis-à-vis de chaque degré de déclinaison, il met en différentes colonnes l'angle de la Méridienne avec la Soustilaire, l'angle de l'axe avec la Soustilaire, les angles des lignes Horaires avec la Méridienne au centre du Cadran, calculés de demi-heure en demi-heure; c'est-à-dire que par cette Table tous les Cadrans de cette espece se trouvent tout faits.

M. Cassini a rendu compte à la Compagnie, d'un Livre fait au sujet du Calendrier par M. Bianchini, dont nous avons déjà parlé dans l'Hist. de 1701*. Cet habile homme y est d'accord avec M. Cassini sur les vûes qu'il avoit proposées à la Congrégation, & sur les conclusions qu'il tiroit. Du reste, M. Bianchini fait paroître dans cet Ouvrage une grande connoissance de l'Astronomie.

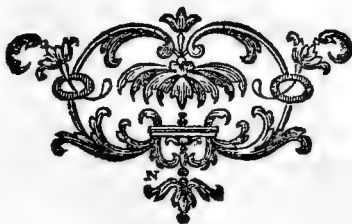
V. les M.
p. 142.

* p. 107.

Les RR. PP. Jesuites de Lyon s'étant fait chez eux un Observatoire bien entendu, & fourni de tous les instrumens nécessaires, ils ont communiqué leurs principales observations à M. Cassini, qui en a tiré tout le fruit qui s'en pouvoit tirer en les comparant aux siennes.

De même M. Cassini le fils a comparé ses observations à celles que le P. Fueillée, Minime, & bon Astronome, a faites en Amérique.

V. les M.
p. 338.





H Y D R O G R A P H I E.

V. les M. **M**onsieur de Lagni a répliqué à la Réponse que M. Chazelles lui avoit faite sur les Cartes Réduites , & p. 200. dont il a été parlé dans l'Hist. de 1702*. Mais comme * pag. 86. cette Replique ne demande aucun éclaircissement , nous & suiv. n'en dirons rien ici.



D I O P T R I Q U E.

DÈS FOYERS EN GENERAL.

V. les M. **I**L seroit inutile de répéter ici ce que nous avons dit dans P. 24. l'Hist. de 1703* sur les Foyers ou sur les Caustiques. * pag. 69. Ces idées supposées , il s'agit maintenant de déterminer & suiv. sur l'axe d'un Verre de figure quelconque quel est le point où cet axe touche la Caustique par réfraction , ou, ce qui revient au même , quel est au-delà du Verre le point où les rayons d'un point lumineux qui ont passé au travers du Verre , & qui en se rompant ont pris de nouvelles directions , se réunissent en plus grande quantité que par tout ailleurs.

On ne peut imaginer que quatre choses qui entrent dans la Réfraction , & dans toutes les modifications différentes qu'elle peut recevoir , 1°. La différence de densité des deux

Milieu par où passent les rayons ; par exemple, celle de l'air & du verre. 2°. La figure du second Milieu qui rompt les rayons ; par exemple, la courbure du Verre. 3°. La direction qu'avoient entr'eux les rayons partis d'un seul point, lorsqu'ils ont rencontré le second milieu, c'est-à-dire, leur divergence, leur parallélisme, ou leur convergence. 4°. L'angle sous lequel chacun d'eux rencontre la surface du second milieu.

A l'égard du premier point, on a reconnu que la différence de densité des milieux donne au Sinus de l'angle d'incidence d'un rayon, & au Sinus de son angle rompu une certaine proportion qui est toujours la même dans les mêmes milieux pour tous les différens angles d'incidence possibles ; ce qui renferme, ou rend inutile la considération du 4° point que nous venons de poser. Tout le monde fait que de l'air au verre le rapport des Sinus, ou de la réfraction est de 3 à 2.

La figure de la surface du second milieu a une grande part à la réfraction : car il est visible que l'angle d'incidence, qui par le rapport constant des Sinus donne l'angle rompu, dépend de la manière dont la surface du second milieu se présente au rayon qui la doit pénétrer. Si cette surface est plane, & si tous les rayons ont entr'eux la même direction ; c'est-à-dire, s'ils sont parallèles, comme ils ont tous le même angle d'incidence, ils ont tous aussi le même angle rompu, & sont tous parallèles après la réfraction ainsi qu'ils l'étoient auparavant. Mais si la surface est courbe, les rayons incidens, quoique parallèles entr'eux, tombent tous sous des angles différens, & par conséquent après la réfraction ne sont plus parallèles, mais divergens, ou convergens. Plus une surface est courbe, plus elle fait un effet contraire à celui de la surface plane, & par conséquent, puisque la surface plane renvoie parallèles les rayons qu'elle a reçus parallèles, une surface courbe renvoie d'autant plus divergens ou convergens les rayons qu'elle a reçus parallèles, qu'elle est plus courbe. Il faut

donc pour connoître le degré de la divergence ou de la convergence des rayons qui ont été rompus par une surface courbe, connoître le degré de sa courbure : or pour avoir cette connoissance en général il faut aller à la Théorie des Développées, & voici pourquoi. Nous allons supposer dans cette explication ce qui a été dit des Dé-

* pag. 81. loppées dans l'Hist. de 1701.*

Un petit cercle est plus courbe qu'un grand, & plus courbe en même raison que son rayon est plus petit. Chaque portion infiniment petite d'une Courbe formée par le développement d'un autre, étant considérée comme un arc de cercle infiniment petit décrit sur le rayon de la Développée tel qu'il est en cet instant, il s'ensuit que cette portion de Courbe est d'autant plus ou moins courbe que le rayon de la Développée correspondant est plus court ou plus long; & par conséquent le rayon de la Développée d'une Courbe détermine par la variation ou il est toujours, hormis dans un cas, celle de la courbure de la Courbe dans toutes ses portions, ou dans tous ses arcs infiniment petits. Si le rayon de la Développée ne change point, ce qui n'arrive que dans le Cercle, la courbure est uniforme, & toujours la même. Si ce rayon est infini, la courbure devient la moindre qu'il soit possible, c'est-à-dire, une ligne droite; s'il est nul ou zero, la courbure devient infiniment grande; c'est-à-dire, plus grande que celle d'aucun cercle fini, quelque petit qu'il soit.

Il arrive dans une infinité de Courbes, par exemple, dans les Sections Coniques, que quand on cherche quel est le rayon de la Développée à leur sommet, on le trouve d'une certaine longueur déterminée; c'est-à-dire, qu'entre le sommet de ces Courbes & celui de leurs Développées, il y a une distance de cette même longueur. Ce n'est pas qu'on ne puisse toujours développer la Développée en commençant à son sommet, auquel cas il n'y a nulle distance entre ce sommet, & celui de la Cour-

be qui naît du développement : & le rayon de la Développée étant nul , on voit naître une Courbe dont la courbure à son sommet est infiniment grande. Mais la courbure d'une Section Conique à son sommet n'étant pas infiniment grande , si l'on veut que la même Développée produise une Section Conique , il faut nécessairement que le rayon de la Développée au sommet de cette Section ait une certaine longueur , telle qu'elle doit être pour la courbure déterminée du sommet , autrement la même Développée produiroit une autre Courbe qu'une Section Conique. De là vient qu'en développant une Courbe déterminée , si on en veut faire naître une certaine autre Courbe déterminée , il faut souvent concevoir qu'à l'origine du développement la Ligne qui enveloppe excède d'une certaine longueur la Courbe enveloppée.

La courbure n'entre pas seulement dans les réfractions par le degré dont elle est , mais encore par la manière dont elle est tournée à l'égard des rayons incidens ; c'est-à-dire , qu'elle fait différens effets selon qu'elle est concave ou convexe de leur côté. Si une courbure convexe rend convergens des rayons paralleles , la même courbure concave les rend divergens. La convexité ou la concavité se déterminent encore par les rayons de la développée : car ils sont toujours du côté de la concavité ; puisque ce sont toujours des rayons d'arcs de cercle ; & par conséquent si l'on a supposé une Courbe convexe du côté de l'objet lumineux , les rayons de sa Développée seront de l'autre côté de cette Courbe ; & si dans cette supposition on a affecté ces rayons du signe *plus* , ou , ce qui est la même chose , si on les a rendus positifs , on n'a , selon l'usage établi en Géométrie , qu'à les affecter du signe *moins* , ou qu'à les rendre négatifs , pour faire que la même Courbe soit concave du côté de l'objet lumineux. Si l'on veut que la Courbe devienne une ligne droite , il n'y a qu'à rendre les rayons de la Développée infinis : car alors ils deviennent rayons d'un cercle infini , dont la circonférence

infiniment peu courbe, ne peut être qu'une ligne droite.

Il reste le 3^e point qui rentre dans la réfraction, c'est-à-dire, le parallélisme, la divergence, ou la convergence que les rayons d'un même point ont entr'eux, lorsqu'ils tombent sur la surface qui les rompt. Naturellement tous les rayons d'un même point sont divergens, & ils le sont d'autant plus que le point lumineux est plus proche. Par conséquent leur divergence décroît d'autant plus, & approche d'autant plus du parallélisme que le point lumineux est plus éloigné, & il doit l'être infiniment afin que les rayons soient parallèles, ou du moins il doit être à une si grande distance que l'angle aigu des rayons puisse sans une erreur sensible être compté pour rien. Jamais des rayons d'un même point ne peuvent tomber convergens sur une surface que par accident; c'est-à-dire, à moins qu'ils n'aient été déjà rompus par une autre surface, qui ait changé leur divergence naturelle en convergence.

Les rayons directs, qui tombent donc toujours divergens sur une surface du côté qu'elle regarde le point lumineux, auroient été convergens par rapport à ce même côté de la surface, si le point lumineux avoit passé de l'autre côté. Par conséquent si lorsque les rayons tombent divergens la distance du point lumineux à la surface est une grandeur positive, on n'aura qu'à la rendre négative pour faire que les rayons tombent convergens sur ce même côté de la surface; & pour les rendre parallèles il n'y a qu'à rendre infinie cette même distance du point lumineux. J'ai supposé ici que l'on sçût qu'en Géométrie les grandeurs positives & les négatives sont toujours contrairement posées par rapport à quelque terme commun d'où l'on commence à les considérer, ou à les compter.

La Formule que M. de l'Hôpital a donnée dans son Analyse des Infiniment petits pour trouver le point où un rayon rompu sur un point quelconque de telle Courbe

be qu'on voudra , touche la Caustique par réfraction , ne doit donc comprendre , & elle ne comprend en effet que le rapport constant des deux Sinus , ou de la réfraction , le rayon de la Développée , ou quelques grandeurs qui en dépendent , & la distance du point lumineux , les trois seuls principes qui entrent dans toutes les réfractions , & les modifient différemment par leurs combinaisons différentes. Mais M. de l'Hôpital n'a considéré que la première surface qui rompt les rayons : or dans la pratique un Verre ou une Lentille qu'on emploie à cet usage , a nécessairement deux surfaces , & la seconde augmente , ou affoiblit , ou détruit , ou change la modification que les rayons ont reçue de la première : car alors ils passent du verre dans l'air , second passage d'un Milieu dans un Milieu différent. C'est là ce que M. Guisnée a entrepris de rechercher d'une manière infiniment générale , & par conséquent , car cette conséquence est presque absolument nécessaire , il emploie la Méthode des Infiniment petits.

Il suppose une Lentille convexe des deux côtés , formée de deux surfaces courbes quelconques , tellement posées que l'axe de la Lentille soit aussi leur axe commun. Le point lumineux est sur l'axe à une distance finie quelconque , & par conséquent ses rayons tombent divergens sur la Lentille. M. Guisnée a , par la Formule de M. de l'Hôpital , le point de l'axe où la première surface fait concourir deux rayons rompus infiniment proches ; ensuite il cherche dans quel autre point de l'axe la seconde surface les fait concourir , il appelle Foyer de la Lentille ce nouveau point , & sa distance à la seconde surface est une grandeur qui lui vient dans une Formule générale , où il n'entre que les rayons des Développées des deux surfaces , les deux autres grandeurs qui sont aussi les principes de toutes les réfractions , & de plus , l'épaisseur de la Lentille , 4^e grandeur qui ne pouvoit avoir lieu dans la recherche de M. de l'Hôpital. Supposé que la seconde surface rapproche le Foyer causé par la première , il est

visible que plus la lentille est épaisse, plus les rayons rompus infiniment proches conservent long-temps le peu de convergence ou de disposition à s'unir, que leur avoit donnée la première surface, & par conséquent la seconde agissant plus tard sur eux, rapproche d'autant moins le Foyer sur l'axe. Au contraire si l'épaisseur de la lentille est si petite, qu'elle puisse n'être comptée pour rien, la seconde surface ne laisse les rayons qu'un seul instant avec le peu de convergence qu'ils avoient reçue, & leur donne aussi-tôt une convergence plus forte, & par conséquent fait avancer le Foyer sur l'axe, autant qu'il est possible. De là vient que M. Guisnée propose une double Formule, l'une où l'épaisseur de la lentille est comptée, l'autre où elle ne l'est pas. Dans la pratique ordinaire, elle ne mérite pas de l'être.

Il est très-facile de juger par ce qui a été dit, que quoique les Formules de M. Guisnée ne soient que pour le cas où des rayons divergens tombent sur une lentille convexe des deux côtés, elles ne laissent pas de s'étendre à tous les autres où les rayons sont parallèles, ou même convergens, & où la Lentille est ou concave, ou même plane, soit d'un côté, soit de tous les deux, & où elle n'est convexe que d'un côté, & concave ou plane de l'autre. Un léger changement de *plus* en *moins*, appliqué aux grandeurs qui doivent le porter, ou la supposition d'une grandeur infinie, donne tous ces différens cas, & toutes les combinaisons qui en peuvent résulter. Nous pouvons ici en ébaucher une idée sans aucun calcul algébrique

Une surface courbe a d'autant plus de *force* pour changer la direction des rayons, qu'elle est plus courbe; & comme la lentille a deux surfaces, il faut savoir, 1°. Si elles conspirent toutes deux au même effet, c'est-à-dire, à rendre les rayons parallèles, divergens, ou convergens, ou si l'une détruit, en tout ou en partie, l'effet de l'autre. 2°. Quelle est la force de chacune. D'ailleurs

il est d'autant plus difficile à une surface de donner une certaine direction aux rayons, qu'elle les a reçus sous une direction plus opposée. Ainsi une surface convexe, qui naturellement rend les rayons convergens, les rend d'autant moins convergens, ou, ce qui revient au même, les réunit d'autant plus loin, qu'elle les a reçus plus divergens, ou d'un point lumineux plus proche; & même elle peut les avoir reçus si divergens, & avoir si peu de force par rapport à cette grande divergence, qu'elle ne fera que les rendre moins divergens. En ce cas-là les rayons ne se réuniront donc jamais, au contraire ils s'écartent toujours: mais comme ils sont devenus moins divergens qu'ils n'étoient en partant du point lumineux, ils ont pris la même direction que s'ils étoient partis d'un point lumineux plus éloigné de la surface convexe. Ce nouveau point auquel ils se rapportent comme s'ils en étoient venus, n'est point un Foyer *réel* pareil à celui où des rayons se réuniroient après avoir été rompus: mais c'est une autre espece de Foyer que quelques-uns appellent *virtuel*. Si l'on a établi dans le calcul algébrique que le Foyer réel soit positif, le virtuel sera négatif, parce qu'ils sont toujours posés l'un d'un côté de la surface qui fait la réfraction, l'autre de l'autre.

Si dans la supposition que nous venons de faire, tout le reste demeurant le même, la surface convexe avoit eu un peu plus de force jusqu'à un certain point, elle auroit absolument ôté aux rayons leur divergence, & l'auroit changée en parallélisme. Ce seroit la même chose, si la surface demeurant la même, le point lumineux s'éloignoit jusqu'à un certain point: car une moindre divergence des rayons se seroit changée en parallélisme. En ce cas les rayons devenus paralleles peuvent être censés se réunir à une distance infinie; c'est-à-dire, que le Foyer réel est infiniment éloigné, ou, si l'on veut, ce même Foyer infiniment éloigné est virtuel, puisque les rayons devenus paralleles ont la même direction que s'ils étoient partis

84 HISTOIRE DE L'ACADE'MIE ROYALE
d'un point lumineux infiniment éloigné. Cette confusion
du Foyer réel & du virtuel en ce cas, s'accorde avec le
calcul algébrique qui donne l'Infini pour un terme com-
mun du positif & du négatif.

Il est aisé de joindre à ces considérations celle d'une
seconde surface qui fortifiera , ou diminuera ou détruira
l'effet de la première. Il peut donc arriver que les rayons,
en sortant de la lentille, reprennent ou la même espece de
direction ou précisément la même direction qu'ils avoient
perdue en y entrant.

Une lentille étant convexe des deux côtés , sa première
surface peut être si forte , ou la divergence des rayons si
petite , & en même tems l'épaisseur de la lentille si gran-
de , que le Foyer de la première surface se fera dans cette
épaisseur , après quoi les rayons partant de ce Foyer tom-
beront nécessairement divergens sur la seconde surface ,
& fort divergens à cause de la proximité du Foyer ou
point lumineux ; & cette seconde surface pourra bien
n'avoir la force que de diminuer cette grande divergence ,
de sorte qu'une lentille convexe des deux côtés qui natu-
rellement rend convergens & réunit dans un Foyer réel
les rayons qu'elle a reçus divergens , les rendra tels qu'elle
les aura reçus , ce qui auroit pû passer pour une espece de
paradoxe. Il est clair que dans la supposition présente, l'épais-
seur de la Lentille peut être diminuée de façon que le Foyer
de la première surface tombera sur la seconde , auquel cas
la distance de ce Foyer à la seconde surface est nulle , ce
qui , joint aux cas où cette distance est positive , ou négat-
ive , ou infinie , la représente de toutes les manieres dont
elle peut être conçue.

Mais il faut avouer que tous les cas où l'épaisseur de
la Lentille est considérée ne sont que pour la curiosité ,
& pour l'honneur de l'universalité de la Formule. Cette
épaisseur étant supprimée , ou plutôt négligée dans le cal-
cul , il ne reste point d'autres cas où la distance du foyer
soit nulle , que ceux où le rayon de la Développée de

l'une ou de l'autre surface , ou de toutes les deux , est nul. En effet quand le rayon de la Développée de la première surface est nul , sa courbure , & par conséquent sa force est aussi grande qu'il soit possible , & elle rompt un rayon infiniment proche de l'axe , de maniere qu'elle le fait dans le même instant concourir avec celui qui est dans l'axe ; d'où il suit nécessairement que la réunion de ces rayons ne se fait point au delà de la Lentille. Il en va de même , si c'est le rayon de la Développée de la seconde surface qui soit nul.

Mais il faut convenir encore que ces cas-là ne sont point pour la pratique. On n'emploie que des Lentilles dont les deux surfaces sont sphériques , ou tout au plus l'une des deux planes : or dans un cercle le rayon de la Développée est toujours le rayon même du cercle , & si l'on veut que le cercle devienne une ligne droite , il faut concevoir son rayon infini ; & comme d'ailleurs l'épaisseur de la Lentille n'est comptée pour rien , on ne trouve jamais dans la pratique , que la distance du Foyer à la seconde surface soit nulle.

Les rayons des Développées étant donc changés dans la Formule de M. Guisnée en rayons de cercles tels qu'on voudra , on a une Formule particuliere qui n'est que pour les Verres sphériques , & qui cependant donne encore beaucoup plus de combinaisons que l'usage n'en demande : mais il est bon d'avoir devant soi une plus grande étendue de Théorie , qu'il n'est nécessaire , & on voit avec plaisir que l'on n'a qu'à retrancher , & à se réduire.

Tout dépendra maintenant de la distance du point lumineux , & de la courbure sphérique des deux surfaces. Si le verre est convexe des deux côtés , & que les rayons tombent divergens , plus le point lumineux est éloigné , plus le Foyer sera proche , à cause du peu de divergence des rayons , & du peu de difficulté de les réunir ; plus les demi-diametres des surfaces seront grands , plus le Foyer sera éloigné à cause de la foiblesse des surfaces ;

ainsi la grandeur de la distance du point lumineux & la grandeur des demi-diametres des surfaces sont deux especes de Forces opposées qui font des effets contraires ; & il faut , pour conspirer au même effet , une grande distance du point lumineux & de petits demi-diametres des surfaces , ou au contraire. L'effet d'un verre convexe est d'autant plus grand , que le Foyer est plus proche : si le Foyer est infiniment éloigné , cet effet est moindre , & moindre encore si le Foyer n'est que virtuel.

On trouve par la Formule, que quand les deux Forces opposées sont en telle proportion que deux fois le produit des deux demi-diametres l'un par l'autre , est égal au produit des deux demi-diametres par la distance du point lumineux , la distance du Foyer est infinie ; que quand la distance du point lumineux est plus grande , celle du Foyer est moindre , & finie ; & que quand la distance du point lumineux est moindre , celle du Foyer est plus qu'infinie , c'est-à-dire , négative ; ou , ce qui est la même chose , que le Foyer n'est que virtuel. Le verre demeurant le même , on voit son effet qui diminue toujours selon que le point lumineux est plus proche.

Si le point lumineux est placé à une distance du verre égale à l'un des deux demi-diametres , tout dépendra de leur rapport de grandeur , qui fait la force des surfaces. Lorsque les deux demi-diametres sont égaux , la distance du Foyer est infinie , si celui qui est égal à la distance du point lumineux , est plus grand que l'autre , la distance du Foyer est finie , & l'effet du verre plus grand , parce que le point lumineux est plus éloigné. Si c'est le contraire , la distance du Foyer est plus qu'infinie.

Quand on fait des verres pour de grandes Lunettes , les rayons venus d'un point du Soleil sont censés venir d'un point infiniment éloigné. Cette distance étant donc supposée infinie , & le verre convexe des deux côtés , c'est la courbure des deux surfaces qui fait tout , le Foyer

ne peut plus être que réel, il ne sauroit être infini, & il est d'autant plus éloigné, que les deux demi-diametres sont plus grands. S'ils sont égaux, le Foyer est à la distance d'un demi-diametre, & quand on dit dans l'usage commun qu'un verre convexe a tant de pieds de Foyer, ce nombre de pieds est aussi la longueur du demi-diametre des deux spheres dont il a été formé, quand elles sont égales.

Si l'on veut que les rayons tombent convergens sur le verre convexe, on voit que le Foyer ne peut être que réel & fini, ce qui est clair de soi-même.

Si l'on prend au lieu d'un verre convexe un verre concave des deux côtés, on voit que le Foyer ne peut être que virtuel, tant que les rayons tombent divergens ou parallèles; mais que s'ils tombent convergens, il peut être réel ou virtuel ou infini, ce qu'on a déjà vû en général.

On fait en Dioptrique que le point lumineux & le Foyer sont deux points réciproques; c'est-à-dire que le Foyer que donne un certain verre aux rayons d'un point lumineux, étant connu, si l'on mettoit le point lumineux à la place du Foyer, il auroit son nouveau Foyer au même point où étoit sa premiere position, & que par conséquent les rayons repasseroient par le même chemin. Cette réciprocation suit de la Formule de M. Guisnée aussi évidemment que tout le reste.

On en tire encore sans aucune peine le nouveau Foyer qui résulteroit d'une seconde Lentille placée sur le même axe que la premiere, ainsi qu'il se pratique dans les Lunettes. Car quel sera l'effet de cette seconde Lentille? Elle recevra les rayons tels que la premiere les lui envoyera, convergens, par exemple, & le degré de leur convergence sera plus ou moins grand selon que le Foyer de la premiere lentille en sera plus ou moins proche. La seconde sera donc dans le même cas que si elle recevoit des rayons convergens d'un point lumineux placé où est le Foyer de la premiere, lentille. Or on a vû que ce cas

§§ HISTOIRE DE L'ACADE'MIE ROYALE
 est un de ceux qui sont compris dans la supposition d'une
 seule Lentille, & par conséquent le Foyer de la secon-
 de lentille, tel que le donnera la Formule générale, sera
 celui que produiront les deux lentilles ensemble. Il est
 visible qu'un plus grand nombre de Lentilles ne seroit pas
 plus embarrassant.

Toutes les Propositions que cette Théorie embrasse
 ont leurs *inverses*, qui ne doivent pas non plus être diffi-
 ciles à trouver. Au lieu que l'on a toujours cherché les
 Foyers, tous les principes qui entrent dans la réfraction
 étant connus, on pourroit supposer les Foyers connus,
 avec tous les principes de la réfraction, hormis un seul
 que l'on chercheroit, & il est clair qu'on le découvrirait
 très-aisément. Enfin il ne paroît pas que sur toute cette
 matiere des Foyers on puisse rien désirer que la Théorie
 de M. Guisnée ne donne dans l'instant.



A C O U S T I Q U E.

Monsieur Carré a lû dans quelques Assemblées la
 Théorie générale du son qui doit précéder sa Des-
 cription des Instrumens de Musique, & qui avoit été
 annoncée dans l'Hist. de 1702 *. Il y a prouvé que le Son
 n'est pas immédiatement produit par les vibrations tota-
 les & sensibles du Corps Sonore, par exemple, d'une
 Corde à boyau, mais par les tremblemens insensibles
 des petites parties, toujours aidés, & quelquefois causés
 par les vibrations totales. Mais comme ces tremble-
 mens sont en même raison pour le nombre & pour la
 fréquence que les vibrations totales, on peut toujours
 prendre ces vibrations pour la mesure de tous les Ac-
 cords. Ensuite M. Carré est entré dans un ample détail
 de

* P. 137.

de tous les Accords de Musique soit consons soit dissonans : & comme des rapports de nombres , qui font la nature & l'essence de tous les Accords , ne fourniroient pas toujours des raisons assez plausibles de leur agrément ou de leur desagrement , il a été obligé de mêler souvent la Métaphysique à la Mathématique , & de remonter jusqu'aux principes que nous avons établis dans l'Histoire de 1701. * Le Traité des Accords a conduit M. Carré à un Traité du Monochorde , dont les différentes divisions donnent tous les Accords possibles , & là , il a décrit un nouveau Monochorde de son invention. La Théorie de la Musique est aussi sublime , que la Pratique en est délicieuse , & l'une est aussi charmante pour l'Esprit , que l'autre l'est pour les Sens & pour l'imagination.

* p. 123. & suiv.



M E C H A N I Q U E .

S U R L E C E N T R E

D O S C I L L A T I O N .

UN des plus grands caractères de la Vérité , c'est d'être féconde. La Théorie générale du centre d'Oscillation , trouvée par M. Bernoulli de Bâle , & rapportée dans l'Histoire de 1703 * , a produit comme par surcroît , la décision de deux autres questions importantes en cette matière.

V. les M^e P. 136.

* p. 114.

I. M. Huguens , qui a aussi donné une Formule pour le centre d'Oscillation , n'avoit pu y parvenir qu'en supposant que si plusieurs poids attachés comme l'on voudra à un Pendule , se détachent & se séparent les uns des autres , au moment que le Pendule cesseroit de des-

1704.

M

cendre , chacun d'eux en vertu de la vitesse acquise pendant sa chute remonteroit à telle hauteur , que leur centre de gravité commun se trouveroit remonté à la même hauteur d'où il étoit descendu. Pour se faire plus aisément une image , il faut concevoir deux poids dont chacun est attaché à l'extrémité d'une ligne qui traverse la verge , l'un d'un côté , l'autre de l'autre , ces lignes étant inégalement distantes du point de suspension , & même inégalement entr'elles. Lorsque la verge est devenue par sa chute une ligne verticale , on suppose qu'elle s'arrête là ; les deux poids ont acquis chacun différentes vitesses : & si avec ces vitesses acquises on les rapporte à la verge , ils y auront un centre de gravité commun , tel que ces poids multipliés chacun par sa distance de ce centre , & par sa vitesse feroient de part & d'autre des produits égaux. On peut concevoir que ce même centre étoit aussi sur la verge , avant qu'elle commençât à tomber & lorsqu'elle étoit horizontale. Si l'on suppose donc maintenant que la verge étant devenue verticale , les poids s'en détachent , se séparent l'un de l'autre , & remontent perpendiculairement chacun avec sa vitesse acquise , & par conséquent à la hauteur que prescrira cette vitesse ; si de plus la verge que l'on peut supposer qui étoit devenue d'horizontale verticale , remonte aussi & redevient horizontale , M. Huguens a prétendu , mais sans le prouver , que les différentes hauteurs auxquelles remontoient les deux poids détachés , étoient telles que leur centre de gravité commun se retrouvoit encore sur la verge redevendue horizontale , ainsi qu'il y étoit d'abord , & par conséquent qu'il étoit remonté aussi haut qu'il étoit descendu. On entend assez que si le centre de gravité se retrouve encore sur la verge , cela veut dire que les différentes vitesses des deux poids rapportées à cette verge , & multipliées ainsi qu'il le faut pour les centres de gravité , feroient des produits égaux , qu'elles ne feroient pas étant rapportées à toute autre ligne tirée du point de suspension.

Cette supposition de M. Huguens fut attaquée par un habile Géometre, qui en contesta la vérité. D'autres, en la jugeant vraie, la trouverent trop hardie pour être reçue dans une Science qui démontre tout. Enfin la disposition la plus générale fut d'en desirer & d'en attendre la preuve, & jusques-là de demeurer en suspens.

M. Bernoulli justifie présentement M. Huguens, & démontre en rigueur géométrique ce que l'autre n'avoit conjecturé que par génie, & par un certain goût de vérité. Il est incontestable que le Pendule simple, ou, ce qui est la même chose, la verge délivrée des poids qui y étoient attachés, à l'exception de celui qu'elle porte à son extrémité, remontera à la même hauteur d'où elle étoit descendue, & redeviendra horifontale, si elle l'étoit d'abord. Par-là M. Bernoulli trouve la hauteur à laquelle remonteront les poids détachés : car cette hauteur pour chacun de ces poids, est à celle du Pendule simple comme les quarrés des vitesses, ou des distances de chaque poids au point de suspension. La hauteur de chacun des poids détachés étant trouvée, elle le met à une certaine distance de la verge redevenue horifontale, M. Bernoulli prend cette distance pour la vitesse que ce poids a par rapport à la verge, & détermine l'expression algébrique de ces nouvelles vitesses, différentes pour chacun des deux poids. Le Pendule simple entre dans cette expression, mais marqué par une seule lettre, & si à cette lettre on substitue la valeur générale que M. Bernoulli a trouvée du Pendule simple, on voit aussitôt que les deux vitesses des poids détachés multipliées par ces poids, donnent des produits égaux : & comme ces vitesses n'ont été prises que par rapport à la verge redevenue horifontale, sur laquelle étoit d'abord le centre de gravité de ces poids, il s'ensuit que ce centre y est encore, puisque ce n'est que l'égalité de ces produits qui le détermine. M. Huguens, pour démontrer sa Formule d'Oscillation, avoit eu besoin de supposer que le centre de gravité des poids détachés remontoit à la même hau-

teur d'où il étoit descendu lorsqu'ils étoient liés ensemble; & M. Bernoulli prouve par sa Formule du centre d'Oscillation, toute différente de l'autre, que cette supposition de M. Huguens étoit vraie.

* page 108.
& suiv.

II. On avoit encore sur cette même matiere une très-forte conjecture que l'on n'avoit pû pousser jusqu'à la démonstration. Je suppose ici que l'on sache ce que c'est que les centres de percussion, si amplement expliqués dans l'Histoire de 1702. * Quand par la Formule générale de M. Huguens, ou par telle autre qu'on pût avoir, on avoit trouvé le centre d'oscillation de quelque figure particulière, & qu'ensuite on venoit à chercher le centre de percussion de cette même Figure, on les trouvoit toujours au même point. Il y avoit donc une grande apparence que ces deux centres étoient le même, & en toute autre Science que la Géométrie, on n'en auroit pas douté: mais il manquoit pour une entiere certitude d'avoir une Formule générale du centre de percussion, qui fût la même que celle du centre d'oscillation. Ce scrupule géométrique si délicat est levé par M. Bernoulli, & il fait voir qu'en cherchant le centre de percussion qui est le point autour duquel les produits des poids par leurs distances à ce point, & par leurs vitesses, sont égaux, on arrive à la même Formule que celle de son centre d'oscillation. Ce qui rend visible cette conformité, ou plutôt cette *identité* auparavant cachée, c'est qu'il a réduit les centres d'oscillation aux principes du levier, auxquels on ne savoit rapporter que les centres de percussion. Ainsi deux Formules qui ne devoient être que la même, tirées de différens principes, ne se ressembloient point, & quoique dans l'application on leur trouvât toujours les mêmes effets, on ne les a pû reconnoître sûrement pour la même, jusqu'à ce que M. Bernoulli ait eu l'art de les faire naître de la même source, & de les montrer sous la même Forme. Si l'on veut se rappeler ici ce qui a été dit sur les Centres d'oscillation de M. Bernoulli dans l'Hist. de 1703, on verra que toutes

les considérations qui y entrent, ne sont que celles qui doivent entrer dans les centres de percussion, & ce sera là une espede de démonstration métaphysique aussi évidente que les géométriques.

SUR LA FIGURE DE L'EXTRADOS

D'UNE VOUTE CIRCULAIRE,

DONT TOUTS LES VOUSSOIRS SONT

EN EQUILIBRE ENTREUX.

UNE Voute ou un Arc demi-circulaire étant posé sur ses deux *piédroits*, & toutes les pierres ou *Voussoirs*, qui composent cet Arc, étant taillés & posés entr'eux de maniere que leurs *joints* prolongés se rencontrent tous au centre de l'arc, il est évident que tous les Voussoirs ont une figure de Coin, plus large par haut que par bas, en vertu de laquelle ils s'appuyent & se soutiennent les uns les autres, & résistent réciproquement à l'effort de leur pesantueur qui les porteroit à tomber. Le Voussoir du milieu de l'arc, qui est perpendiculaire à l'horison, & qu'on appelle *Clef de Voute*, est soutenu de part & d'autre par les deux voussoirs voisins, précisément comme par deux plans inclinés; & par conséquent l'effort qu'il fait pour tomber, n'est pas égal à sa pesantueur, mais en est une certaine partie d'autant plus grande que les plans inclinés qui le soutiennent sont moins inclinés, de sorte que s'ils étoient infiniment peu inclinés, c'est-à-dire, perpendiculaires à l'horison aussi-bien que la Clef de voute, elle tendroit à tomber par toute sa pesantueur, ne seroit plus du tout soutenue, & tomberoit effectivement, si le ciment, que l'on ne considère pas ici, ne l'en empêchoit. Le second Voussoir, qui est à droite ou à gauche de la Clef de voute, est soutenu par un troisieme voussoir, qui en vertu de la figure

de la voute est nécessairement plus incliné à l'égard du second, que le second ne l'est à l'égard du premier, & par conséquent le second vouffoir dans l'effort qu'il fait pour tomber, exerce une moindre partie de sa pesanteur que le premier. Par la même raison, tous les vouffoirs, à compter depuis la Clef de voute, vont toujours en exerçant une moindre partie de leur pesanteur totale, & enfin le dernier qui est posé sur une surface horifontale du piédroit, n'exerce aucune partie de sa pesanteur, ou, ce qui est la même chose, ne fait nul effort pour tomber, puisqu'il est entièrement soutenu par le piédroit.

Si l'on veut que tous les vouffoirs fassent un effort égal pour tomber, ou soient en équilibre, il est visible que chacun, depuis la Clef de voute jusqu'au piédroit, exerçant toujours une moindre partie de sa pesanteur totale; le premier, par exemple, n'en exerçant que la moitié; le second un tiers, le troisieme un quart, &c. il n'y a pas d'autre moyen d'égaliser ces différentes parties, qu'en augmentant à proportion les tous dont elles sont parties, c'est-à-dire, qu'il faut que le second vouffoir soit plus pesant que le premier, le troisieme plus que le second, & ainsi de suite jusqu'au dernier, qui doit être infiniment pesant; parce qu'il ne fait nul effort pour tomber, & qu'une partie nulle de sa pesanteur ne peut être égale aux efforts finis des autres vouffoirs, à moins que cette pesanteur ne soit infiniment grande. Pour prendre cette même idée d'une manière plus sensible, & moins métaphysique, il n'y a qu'à faire réflexion que tous les vouffoirs, hormis le dernier, ne pourroient laisser tomber un autre vouffoir quelconque sans s'élever, qu'ils résistent à cette élévation jusqu'à un certain point déterminé par la grandeur de leur poids, & par la partie qu'ils en exercent; qu'il n'y a que le dernier vouffoir qui puisse en laisser tomber un autre, sans s'élever en aucune sorte, & seulement en glissant horifontalement; que les poids, tant qu'ils sont finis, n'apportent aucune résistance au mouvement horifontal, & qu'ils ne com-

mencent à y en apporter une finie que quand on les conçoit infinis.

M. de la Hire, dans son *Traité de Méchanique* imprimé en 1695, a démontré quelle étoit la proportion selon laquelle il falloit augmenter la pesanteur des Vouffoirs d'un Arc demi-circulaire, afin qu'ils fussent tous en équilibre, ce qui est la disposition la plus sûre que l'on puisse donner à une voute, pour la rendre durable. Jusque-là les Architectes n'avoient eu aucune regle précise, & ne s'étoient conduits qu'en tâtonnant. Si l'on compte les degrés d'un quart de cercle depuis le milieu de la Clef de voute, jusqu'à un piédroit, l'extrémité de chaque vouffoir appartiendra à un arc d'autant plus grand, qu'elle sera plus éloignée de la Clef, & il faut, par la regle de M. de la Hire, augmenter la pesanteur d'un vouffoir par-dessus celle de la Clef, autant que la tangente de l'arc de ce vouffoir l'emporte sur la tangente de l'arc de la moitié de la Clef. La tangente du dernier vouffoir devient nécessairement infinie, & par conséquent aussi sa pesanteur: mais comme l'infini ne se trouve pas dans la pratique, cela se réduit à charger, autant qu'il est possible, les derniers vouffoirs, afin qu'ils résistent à l'effort que fait la voute pour les écarter, qui est ce qu'on appelle *sa poussée*.

M. Parent a cherché quelle seroit la courbure extérieure ou l'*Extrados* d'une voute, dont l'*Intrados* seroit circulaire, & tous les vouffoirs en équilibre par leur pesanteur, selon la regle de M. de la Hire: car il est clair que tous ces vouffoirs inégaux dans une certaine proportion, seroient en dehors une certaine courbure régulière. Il ne l'a trouvée que par points, mais d'une manière fort simple, de sorte que par sa méthode on pourroit assez facilement construire une voute, dont on seroit sûr que tous les vouffoirs seroient en équilibre.

Un fruit considérable de la recherche de M. Parent, c'est qu'il a découvert en même temps la mesure de la poussée de la voute, ou quel rapport a cette poussée au

96 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
poids de la voute entiere. On favoit seulement que cet effort étoit très-grand , & on y oppoist de grosses masses de pierres , ou *culées* , plutôt trop fortes que trop foibles : mais on ne favoit point précisément où il s'en falloit tenir. On pourra le favoir présentement , les Arts se sentent toujours du progrès de la Géométrie.

SUR LES FROTEMENTS.

V. les M.
p. 173. 206.

JUſqu'ici la Théorie de la Méchanique n'avoit point conſidéré les Frotemens , faute d'en connoître précisément la valeur. On calculoit l'avantage qu'une Force mouvante pouvoit tirer d'une Machine , ou par ſa diſtance à l'égard du point fixe , ou par la direction ſelon laquelle elle agiſſoit , on ſuppoſoit toujours dans ces démonſtrations que les corps , dont les ſurfaces devoient ſe mouvoir les unes ſur les autres , étoient parfaitement polis , & l'on s'attendoit bien que dans la pratique leurs Frotemens feroient perdre aux Forces mouvantes une partie de leur avantage , mais il n'y avoit que cette pratique même qui pût découvrir où devoit aller le déchet , & l'on riſquoit en quelque ſorte une Machine dont une bonne partie étoit inconnue.

* V. l'Hiſt.
de 1699. p.
104. ſuiv.
* V. l'Hiſt.
de 1700. p.
145. & ſuiv.

M. Amontons ayant le premier trouvé par expérience la valeur précifée des Frotemens * , que M. Parent trouva enſuite par raifonnement & par Géométrie * , le même M. Parent donne ici la maniere de faire entrer cette nouvelle conſidération dans toute la Théorie de la Méchanique , de ſorte qu'on n'aura plus beſoin d'attendre l'exécution pour ſavoir au juſte l'effet d'une Machine.

Si l'on ne conſidere pas les Frotemens , un corps peſant poſé ſur un plan incliné ne peut ſ'y ſoutenir , & il faut néceſſairement , ou qu'il gliffe , ou qu'il roule & gliffe
en

en même-temps. Il glissera simplement, si la ligne de direction par laquelle il tend au centre de la terre, tombe sur sa base, parce qu'alors son centre de gravité peut descendre par rapport à l'horison, mais non pas par rapport au plan incliné; il glissera & roulera, si sa ligne de direction ne tombe pas sur sa base, parce qu'alors son centre de gravité peut descendre & par rapport à l'horison, & par rapport au plan incliné.

Mais si l'on tient compte des Frotemens, ce même corps pesant peut se soutenir sur un plan incliné dont la surface rude & inégale l'accrochera en quelque maniere. Il est visible que ce corps ne se soutiendra pas ainsi sur tous les plans inclinés possibles, & qu'il y en aura qui seront trop peu inclinés pour cet effet, ou, ce qui est la même chose, trop élevés. M. Parent cherche quelle est l'inclinaison nécessaire, & au-dessus de laquelle un certain corps déterminé ne se puisse plus soutenir par l'adhérence que cause le Frottement.

Il suppose que le Frottement n'est point proportionné aux surfaces, mais seulement à la pression, dont il est le tiers. Il tire la ligne de direction par laquelle le corps tend au centre de la terre; & cette ligne perpendiculaire à un plan horisontal est nécessairement oblique au plan incliné. L'action de la pesanteur du corps sur ce plan lui est donc oblique, & par conséquent, selon la Théorie des Mouvemens composés, elle peut être considérée comme résultant de deux autres actions dont l'une soit perpendiculaire à ce même plan, & l'autre parallèle. La perpendiculaire est la pression du corps sur le plan en vertu de sa pesanteur, la parallèle est la direction selon laquelle il tend à tomber, & par conséquent elle représente une force qui tireroit le corps en embas, & tendroit à surmonter le Frottement: or cette Force doit être égale au tiers de la pression; donc si ces deux lignes dans lesquelles on résout, & on décompose, pour ainsi dire, la direction oblique du corps pesant, sont telles que la parallèle soit le tiers de la perpendicu-

laire , elles ont précisément le rapport qui est nécessaire afin que le Frottement du corps puisse être surmonté , ou , ce qui est la même chose , afin qu'il puisse tomber. Or le rapport de ces deux lignes entr'elles est toujours différent selon l'obliquité différente de la direction du corps , & cette obliquité est différente selon l'inclinaison du plan ; donc afin que le corps puisse tomber , & qu'il ne puisse tomber sur tout autre plan moins élevé , il faut que l'inclinaison du plan soit telle que ces deux lignes qui composent la direction du corps aient entr'elles ce rapport précis.

Maintenant si une Force mouvante tiroit non parallèlement à ce plan pour faire monter ce corps , il est clair qu'il faudroit qu'elle surmontât non seulement le Frottement causé par la pression du corps sur le plan , mais celui qu'elle y cause elle-même en le pressant par la traction , supposé qu'elle applique encore le corps sur le plan , ce qui arrive dans toutes les tractions non paralleles au plan , & qui en sont plus proches qu'une parallele. On fait déjà quelle est la quantité du Frottement causé par la pesanteur du corps sur le plan incliné ; il reste à savoir quelle est le Frottement causé par la traction de la Force mouvante , & on le découvrira par la même voie. Cette traction étant oblique au plan par la supposition , il la faut décomposer & diviser en deux dont l'une soit perpendiculaire , & l'autre parallele ; la premiere est la quantité dont la Force mouvante applique , & presse le corps contre le plan en le tirant. On calcule par la Méchanique ordinaire de quelle quantité doit être la Force selon la direction par laquelle elle agit , selon la grandeur du poids , & l'inclinaison du plan : mais ce n'est pas assez , il la faut augmenter encore à proportion des deux pressions qu'elle a à vaincre , c'est-à-dire , l'augmenter du tiers de ces pressions prises ensemble.

M. Parent en détermine la valeur par la Géométrie & par Algebre , & la joignant avec ce que donne la Méchanique ordinaire , il compose une Formule générale qui exprime la Force accompagnée de toutes les circonstances , ou re-

vétue de toutes les modifications qu'on peut considérer dans le cas proposé, & dont les différentes combinaisons peuvent le faire varier à l'infini. Si l'on fait évanouir de la Formule générale les Frotemens, on retrouve toutes les conclusions de la Méchanique ordinaire.

Cette Théorie générale étant établie pour le plan incliné, M. Parent passe sans peine, ou au Coin qui en est une espece, ou à une Machine où il entre beaucoup de Frotement. Les mêmes principes régneront par-tout, le secret consiste toujours à trouver les pressions du poids, soit de la Force par la décomposition de leurs directions. Des cas plus compliqués ne sont que plus longs à résoudre, & non pas plus difficiles. Il paroît par les découvertes les plus générales & les plus fécondes où l'on soit arrivé jusqu'à présent dans la Méchanique, qu'elle n'est que la Science des Mouvements composés.

SUR UN NIVEAU

D'UNE NOUVELLE CONSTRUCTION.

Toute la Science du Nivellement n'a pour objet que de déterminer deux ou plusieurs points également éloignés du centre de la terre. V. les M. p. 251.

La terre étant sphérique, du moins sensiblement, tous les points qui sont de niveau ou également éloignés de son centre, sont des points de sa circonférence, ou d'un cercle concentrique, & par conséquent deux points d'une Tangente à la circonférence de la terre, pris du même côté du point d'attouchement, ne sauroient être de niveau dans la rigueur mathématique. Mais comme la terre est fort grande, & que dans une certaine étendue sa courbure ne diffère nullement d'une ligne droite, on peut prendre sans aucune erreur pour points de niveau ceux

qui font dans cette étendue. Ainsi les Anciens qui ne nivelloient à la fois qu'une distance de 20 pieds, n'étoient point à cet égard en danger de se tromper, quoiqu'ils en prissent les deux extrémités en ligne droite.

Si on niveloit des distances beaucoup plus grandes, les deux extrémités prises en ligne droite ne pourroient plus appartenir à la circonférence de la terre, mais à une Tangente de cette circonférence, de sorte que l'extrémité qui seroit l'opération étant sur le point d'atouchement de cette Tangente & de la circonférence, l'autre extrémité seroit aussi celle d'une Secante tirée du centre de la terre, & le point qu'elle détermineroit seroit élevé au-dessus de la circonférence, & par conséquent au-dessus du *vrai* niveau, de toute la quantité dont cette Sécante surpasseroit le demi-diametre de la terre. Cette extrémité d'une Sécante est dite être dans le Niveau *apparent*, parce que c'est celui que la vûe donne, & il est bien aisé de le réduire au vrai, puisqu'on fait par la Trigonométrie de combien chaque Sécante surpasse le Rayon, & que l'on a découvert par la Mesure de la Terre que l'Académie a faite, quelle est la valeur précise de son Rayon.

Faute d'avoir cette valeur du Rayon de la Terre, les Anciens n'eussent pû faire la réduction du niveau apparent au vrai, ou s'ils l'eussent entreprise ils seroient tombés dans de grandes erreurs. Aussi ne niveloint-ils que des distances de 20 pieds où cette réduction n'étoit aucunement nécessaire. On trouve par les Tables qui en ont été faites qu'à une distance de 50 toises le niveau apparent n'est élevé au-dessus du vrai que de $\frac{1}{3}$ de ligne, & par conséquent les Anciens avoient sur ce point beaucoup plus de sûreté qu'il ne leur en falloit.

La mesure de la Terre ayant été trouvée, la commodité de réduire le niveau apparent au vrai, invita les Géometres de l'Académie à niveler d'un seul *coup* de grandes distances, comme de 1000 toises. L'avantage

de ces grands coups de niveau, est que l'on fait ici, par exemple, en une seule opération, ce que les Anciens ne faisoient qu'en trois cens, & outre le temps que l'on gagne, il est visible que trois cens opérations sont naturellement sujettes à un nombre d'erreurs incomparablement plus grand qu'une seule. C'étoit aussi par cette raison que les Anciens qui régloient sur leurs nivellemens les grandes conduites d'eaux qu'ils faisoient, prenoient toujours plus de pente qu'il n'étoit nécessaire, ainsi qu'il a été dit dans l'Hist. de 1699 *. Ils se désoient avec justice du succès de tant d'opérations. Il paroît qu'ils mettoient à ces sortes d'Ouvrages beaucoup de travail & peu d'art, & nous, nous voulons présentement que l'art nous épargne le travail.

* pag. 113.

Pour niveler tout d'un coup de grandes distances, il faut avoir des instrumens qui donnent bien sûrement une ligne horisontale, puisque c'est celle dont l'extrémité sera le niveau apparent : mais ce n'est pas une médiocre difficulté que de la déterminer dans la pratique.

Premièrement il faut être bien sûr que cette ligne soit une ligne, c'est-à-dire, conduite d'un seul point à un autre point : car autrement on prendroit à une grande distance pour le même point plusieurs points différens d'un même plan vertical, & assez éloignés l'un de l'autre, & il s'agit d'une grande précision dans la pratique du nivellement. Autrefois on se contentoit de deux Pinnules percées chacune d'un trou le plus petit qu'il étoit possible, & l'on supposoit que l'objet vû par ces deux trous n'étoit qu'un point : mais il s'en falloit beaucoup que ce n'en fût qu'un, quelque petits que fussent les trous, & il s'en falloit d'autant plus que l'objet étoit plus éloigné. D'ailleurs pour peu que l'œil changeât de place, & eût de mouvement dans le temps de l'observation, c'étoit un autre point que l'on voyoit. Pour remédier à cet inconvénient, l'on a imaginé dans l'Académie, il y a déjà du temps, d'employer au lieu de Pinnules une

Lunette avec un fil de Ver à foye très-délié posé au foyer du verre objectif, ou plutôt avec deux fils qui se croisent. Leur intersection arrête tous les rayons partis d'un seul point de l'objet que l'on suppose éloigné, puisqu'elle se fait à l'endroit où ils se réunissent tous ; & comme on voit les deux fils sur la peinture de l'objet qui se fait au Foyer, on est sûr que l'endroit où on voit se couper, n'est qu'un point de l'objet, ou du moins une partie aussi petite que l'épaisseur des fils. L'œil a beau changer de place, ce sont toujours les rayons du même point qui sont arrêtés par l'intersection des fils, & l'on *pointe* toujours au même point. Cet ingénieux expédient a été mis en pratique avec beaucoup de succès, depuis qu'il a été trouvé : mais M. de la Hire a jugé à propos d'y faire encore une réforme qui le perfectionne *, & il substitue aux filets de Ver à foye des traits aussi déliés, & plus inaltérables, tracés sur une petite glace.

* V. l'Hist.
de 1701. p.
95.

En second lieu il faut que la ligne du niveau apparent soit parfaitement horisontale. D'abord on songe naturellement aux surfaces des liqueurs qui se mettent toujours de niveau. Aussi le Niveau des Anciens n'étoit qu'une pièce de bois, longue de 20 pieds, égale à toute la distance qu'ils niveloint d'un seul coup, & au milieu de laquelle étoit un petit tuyau plein d'eau. Il ne leur devoit pas être fort difficile de conduire un rayon visuel à une si petite distance le long de cette surface d'eau : mais pour de plus grandes distances, M. de la Hire a examiné de mettre au-dessus de l'eau une Lunette avec ses fils au Foyer, dans une position exactement parallèle à la surface de l'eau. Ce parallélisme fait la plus grande difficulté de l'exécution. C'est là le même niveau dont il a été parlé dans l'Hist. de 1699 * à l'occasion de ce que M. Couplet y avoit ajouté pour le rendre plus commode.

* p. 112. &
113.

Une ligne sera horisontale, pourvû qu'elle soit per-

pendiculaire à une ligne verticale , ainsi il suffira encore pour fonder la construction d'un Niveau , de déterminer une ligne qui soit bien certainement verticale. C'est ce qu'on a fait par le moyen des poids suspendus. Leur point de suspension ou d'appui est certainement dans la même ligne verticale que leur centre de gravité , & pourvû que le fil qui les tient suspendus soit très-délié , il est lui-même cette ligne. Reste à poser une Lunette dont l'axe lui soit bien perpendiculaire : car dans tous les Niveaux modernes on se sert toujours d'une Lunette , à cause de l'avantage qu'elle donne de ne pointer qu'à un seul point de l'objet , & de plus , parce qu'elle est aussi propre aux vûes les plus courtes qu'aux autres. On peut faire aussi que la Lunette elle-même tienne lieu de poids , & qu'étant suspendue horizontalement elle donne pour ligne verticale celle qui joint son point de suspension & son centre de gravité. C'est sur ces suspensions que sont fondés les Niveaux de M^{rs} Huguens & Roëmer. Mais M. de la Hire les croit sujettes dans la pratique à plusieurs inconvéniens expliqués dans son Mémoire.

Il a voulu trouver un Niveau qui n'y fût point exposé. C'est une Lunette , non pas suspendue par un point plus élevé que son centre de gravité , mais appuyée sur un point qui soit plus bas , & par conséquent toujours prête à tomber de côté ou d'autre à moins que d'être en équilibre. L'état de son équilibre détermine la ligne verticale , & ensuite l'horizontale qui la coupe à angles droits. Le détail de la construction est réservé au Mémoire de l'Auteur. M. de la Hire assure qu'il s'en est servi à niveler d'un seul coup 1000. toises de distance sans erreur sensible.

Il ne sera peut-être pas inutile d'avertir ici que les hauteurs apparentes des objets , même de ceux qui sont peu éloignés de la surface de la terre , sont altérées par les réfractions , & d'autant plus altérées que ces objets

font ou plus élevés par rapport à l'Observateur, ou à une plus grande distance. D'ailleurs la grandeur de ces réfractions dépend aussi & de l'heure du jour, & de la constitution de l'air, sans aucune proportion qui soit encore bien connue. On fait en général qu'il peut y avoir de l'erreur sur les hauteurs apparentes, & en quelques occasions particulières on fait à peu près où elle peut aller. Les plus grands coups de niveau sont à cet égard les plus dangereux : mais c'est un inconvénient commun à tous les Niveaux modernes, & qui étant presque suffisamment connu, n'a pas empêché que l'on n'ait fait de très-grands nivellemens avec une justesse étonnante. Les Anciens qui ne connoissoient point les réfractions, se feroient souvent fort écartés du but, s'ils eussent fait de grands nivellemens d'un seul coup : leur peu d'art en cette matière étoit précisément le remède dont ils avoient besoin.

SUR LES VITESSES DES CORPS

MUS SUIVANT DES COURBES.

V. les M.
P 286.

IL ne suffit pas de découvrir une Vérité, il faut encore savoir ce qui la produit, & d'où elle vient : car si on se trompe sur cette espèce de cause, on peut croire qu'elle a lieu lorsqu'elle n'en a point, ou au contraire, & l'on donne à la vérité que l'on a découverte plus ou moins d'étendue qu'elle n'en doit avoir. Ceci ne s'entend que des matières délicates, & l'on peut assurer que quand il en est question, une démonstration géométrique est capable de jeter dans l'erreur par les applications qu'on en fera, à moins qu'elle n'ait remonté jusqu'à la source de la vérité, & ne l'ait exposée dans ses premiers principes.

Galilée ayant trouvé ce beau Systeme de la chute des Corps

Corps pesans, reçu aujourd'hui de tous les Philosophes, par lequel les vitesses d'un corps qui tombe verticalement, sont, à chaque moment de sa chute, comme les racines des hauteurs d'où il est tombé à compter depuis le commencement de la chute, trouva ensuite que si un corps tomboit sur un plan incliné, les vitesses qu'il avoit en différens momens de sa chute, seroient encore dans la même proportion; & en effet puisque ce corps tient de sa chute toute sa vitesse, & qu'il ne tombe qu'autant qu'il y a de hauteur perpendiculaire dans le plan incliné, il paroît nécessaire que sa vitesse se mesure & se regle toujours par cette hauteur, de même que si la chute étoit verticale. La proposition de Galilée est vraie & incontestable.

Elle le conduisit à croire que si un corps tomboit par deux plans inclinés contigus, & qui fissent un angle entr'eux, à peu-près comme un bâton brisé, la vitesse se régleroit encore de la même manière sur la hauteur verticale des deux plans pris ensemble: car enfin ce n'est encore que selon cette hauteur que se fait la chute, & delà vient toute la vitesse. Cependant M. Varignon démontra en 1693. que cette proposition de Galilée, admise jusquelà par tous les Géometres, étoit fautive.

Sur ce fondement, il semble que les vitesses d'un corps qui tombe en suivant la concavité d'une Courbe, d'une Cycloïde, par exemple, ne doivent point être comme les racines des hauteurs. Une Courbe n'est que la suite d'une infinité de plans infiniment petits, contigus, & inclinés les uns aux autres, & par conséquent la proposition de Galilée ne doit pas non plus être vraie dans ce cas-là. Cependant elle l'est, quoiqu'avec une certaine restriction.

Tout ce mélange de vérités & d'erreurs qui se ressemblent tant, & qu'il est si aisé de prendre les unes pour les autres, montre assez que l'on n'avoit point encore saisi les premiers principes. Quand on y est une fois parvenu, on voit une distance infinie entre la vérité & l'er-

reur , & leur fausse ressemblance disparoît absolument.

M. Varignon a entrepris de démêler tout ce qui regarde les vitesses des corps qui tombent , & de mettre cette matiere dans un jour où elle n'avoit point encore été. Il suppose toujours , selon le Systeme de Galilée , que les vitesses d'un corps qui tombe par une ligne verticale , sont dans les différens momens de sa chute comme les racines des hauteurs correspondantes.

Le grand principe que M. Varignon emploie , c'est celui des Mouvements composés , sur lequel il a autrefois fondé toute sa Méchanique. Quand un corps est mû en même-temps par deux forces , qui ont des directions différentes , quelque angle que ces directions fassent entr'elles , il prend une direction *composée* qui est la diagonale du parallélogramme que feroient entr'elles les deux directions *simples* , & il décrit cette diagonale dans le même temps qu'il auroit décrit l'un ou l'autre des deux côtés du parallélogramme ; de sorte que la vitesse que lui auroit imprimée l'une ou l'autre des deux Forces , est à celle qu'elles lui impriment toutes deux ensemble , comme le côté correspondant du parallélogramme est à la diagonale. Tout est donc connu dès que l'on a le rapport des deux Forces.

Un mouvement perpendiculaire ou parallele à un plan ne peut être conçu comme composé par rapport à ce plan , mais seulement quand il lui est oblique , & alors on le conçoit comme composé de deux autres mouvemens ; l'un perpendiculaire , & l'autre parallele , dont les différens rapports , variables à l'infini , déterminent les différentes obliquités dont le mouvement composé est capable.

Un corps qui se meut obliquement à l'horison , ne fût-il poussé que par une seule Force , peut donc être conçu comme poussé par deux , dont l'une auroit eu une direction horizontale , & l'autre , une verticale ; & sa vitesse ne seroit ni celle que lui auroit donnée la Force horizontale , ni celle que lui auroit donnée la verticale , mais

celle qui résulteroit des deux, & qui seroit exprimée par la diagonale du parallélogramme qu'elles formeroient. Par conséquent, puisque la Force verticale seule, ou, pour parler plus précisément, la pesanteur, auroit imprimé à ce corps une vitesse, qui auroit été dans tous les momens de la chute comme les racines des hauteurs correspondantes, il faut qu'il ait une autre vitesse lorsqu'il se meut obliquement.

Si ce corps tombe par sa seule pesanteur le long d'un plan incliné, il tombe encore obliquement à l'horison, & cependant il n'est pas dans le même cas que nous venons d'expliquer, & c'est là une chose qui avoit besoin d'être démêlée par M. Varignon. Ce corps qui tombe sur un plan incliné, ne tombe que par l'action de sa pesanteur qui est verticale, & cette action est nécessairement oblique au plan incliné. Elle peut donc être conçue comme composée de deux autres dont l'une soit perpendiculaire au plan incliné, l'autre parallèle. Celle qui seroit perpendiculaire, est entièrement arrêtée par le plan, & toute la vitesse que le corps auroit eue selon cette direction, est anéantie & perdue. Il ne reste que la Force parallèle, qui est effectivement celle dont le corps suit la direction, & dont il conserve toute la vitesse. Or il se trouve que les vitesses qu'il tire de cette Force parallèle & unique dans les différens momens de sa chute, sont dans la même raison que celles qu'il tireroit de la Force verticale seule, ou de la pesanteur agissant librement, & par conséquent comme les racines des hauteurs.

Toute la différence des deux cas vient de ce que dans le premier le mouvement du corps est composé par rapport à l'horison, & composé de deux Forces qui toutes deux subsistent, & dans le second cas il est composé par rapport au plan incliné, & composé de deux Forces dont l'une est entièrement détruite par l'opposition de ce plan. Dans le premier cas, le corps n'est point soutenu, il l'est dans le second.

Maintenant si un corps tombe le long de deux plans inclinés, contigus, & qui fassent entr'eux un angle obtus, & une espece de concavité, M. Varignon a démontré, toujours par la composition des mouvemens, que ce corps à la rencontre du second plan perd quelque chose de sa vitesse; que par conséquent elle n'est pas la même à la fin de sa chute, ou à tel point qu'on voudra de sa chute par le second plan, que s'il n'étoit tombé que par le premier plan prolongé, & que la proportion des racines des hauteurs n'a donc plus de lieu, quoique Galilée l'ait cru. La raison de cette perte de vitesse est que le mouvement qui étoit parallèle au premier plan devient oblique au second, puisqu'ils font un angle entr'eux, ce mouvement oblique au second plan étant conçu comme composé, ce qu'il a de perpendiculaire à ce plan est détruit à sa rencontre & par son opposition, & une partie de la vitesse perit aussi.

Plus ce que le mouvement oblique & composé a de perpendiculaire au second plan est petit, ou, ce qui est la même chose, moins les deux plans sont éloignés de n'en être qu'un, ou enfin plus leur angle obtus est grand, & l'aigu qui en est le complément, petit, moins le corps perd de sa vitesse, & au contraire. M. Varignon détermine géométriquement quelle est sur toute la hauteur de la chute entière la portion de vitesse qui se perd à la rencontre du second plan. Elle est toujours d'autant plus petite que l'angle aigu complément de l'obtus que font les deux plans, est plus petit.

Les plans infiniment petits, contigus, & inclinés les uns aux autres, dont une Courbe est composée, faisant tous entr'eux des angles obtus dont le complément est infiniment petit, il s'ensuit que si un corps tombe par sa pesanteur le long de la concavité d'une Courbe, la perte de vitesse qu'il fait à chaque instant est infiniment petite. Mais une portion finie de Courbe, quelque petite qu'elle soit, étant composée d'une infinité de plans infiniment petits, le corps qui l'a parcourue dans un temps fini, quelque petit qu'il

soit, a perdu une infinité de parties infiniment petites de sa vitesse, & une infinité d'infiniment petits font un infini de l'ordre *supérieur*; c'est-à-dire, qu'une infinité d'infiniment petits font une grandeur finie, s'ils sont du premier ordre ou genre, & un infiniment petit du premier, s'ils sont du second, & ainsi de suite à l'infini. Donc si les pertes de vitesses que fait un corps tombant le long d'une Courbe sont des infiniment petits du premier genre, elles feront une grandeur finie, lorsqu'il aura parcouru quelque portion finie de cette Courbe que ce soit, & par conséquent elles devront être comptées par rapport à la vitesse dont il se meut, qui est toujours finie, & les différentes vitesses en différens temps de la chute ne feront point comme les racines des hauteurs. Mais si les pertes n'étoient que des infiniment petits du second genre, elles ne feroient toutes ensemble dans un temps fini, qu'un infiniment petit du premier, qui retranché d'une vitesse finie ne la rendroit pas moindre, & laisseroit subsister la proportion des racines des hauteurs. Or M. Varignon démontre que les pertes de vitesse sont des infiniment petits du second genre, d'où il suit que les chutes par des Courbes, conservent la proportion des racines des hauteurs, quoique celles qui se font par différens plans inclinés contigus ne la conservent pas. Il ne seroit pas possible que sans la Géométrie des infiniment petits, on vît aussi clair dans cette matiere: & l'on y peut remarquer combien ces différens ordres d'Infinis que l'on soupçonne d'abord d'être feints à plaisir, sont réels & solides.

Un corps qui tombe par un seul plan incliné, ou par une Courbe, est donc dans le même cas à l'égard de la proportion des vitesses, & comme dans la chute par le plan incliné cette proportion ne suit celle des racines des hauteurs que parce que le corps est soutenu par ce plan, & que tout ce qu'il y a de mouvement perpendiculaire à ce plan est arrêté & détruit sans qu'il perde rien

du mouvement parallele, de même il faut dans la chute par la Courbe que le corps soit soutenu par cette Courbe, & coule en quelque sorte le long de sa concavité comme dans une espece de canal, qui à chaque point de sa courbure laisse aussi à ce corps tout ce qu'il a de mouvement parallele à la Tangente de ce point. Ce sera la même chose si un corps suspendu décrit cette courbe en vertu de sa suspension : car la suspension le soutiendra de la même maniere qu'auroit fait la concavité de la Courbe. En un mot, afin que les vitesses d'un corps qui tombe par un seul plan incliné, ou par une Courbe, suivent les racines des hauteurs, il faut que le corps soit soutenu, qu'il perde tout son mouvement perpendiculaire au plan ou à la Courbe, conserve tout le mouvement parallele, & ne se meuve que par sa seule pesanteur.

Mais comme les vitesses ne suivent point les racines des hauteurs dans la chute d'un corps qui tombe obliquement à l'horison, sans être soutenu par un plan, ou, ce qui revient au même, d'un corps poussé obliquement à l'horison par deux Forces différentes, de même la proportion des vitesses ne sera plus celle des racines des hauteurs dans une chute par une Courbe qui feront décrire au corps deux impulsions différentes, mêlées & combinées ensemble, ainsi qu'il faudra pour la génération de cette Courbe : mais la vitesse sera à chaque moment celle qui naîtra du concours des deux Forces, & quand même la pesanteur seroit l'une des deux, la proportion des racines des hauteurs seroit altérée par l'autre, qui selon la supposition agiroit.

Il ne faut donc pas calculer de la même maniere la vitesse de tous les corps qui tombent par des Courbes, & l'on doit admettre cette distinction nouvelle & subtile de M. Varignon entre les corps tombans par des Courbes qui les portent & les soutiennent, ou suspendus équivalement, & ceux qui tombent en décrivant ces Courbes par

le mélange de deux Forces qui les meuvent. Faute de cette attention, qu'il étoit facile de ne pas avoir, de grands Géomètres auroient pû se méprendre.

Lorsqu'une Courbe est décrite par le mélange ou le concours de deux Forces connues, M. Varignon détermine aisément la vitesse qui en résulte à chaque instant. Toute Courbe étant conçue comme un Poligone infini, chaque côté infiniment petit est une diagonale, ou, ce qui est la même chose, l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont les deux autres côtés sont la différence de deux Ordonnées infiniment proches, & la portion infiniment petite de l'axe comprise entre ces deux Ordonnées. Un corps à qui deux Forces différentes font décrire une Courbe, ne décrivant à chaque instant qu'une de ces hypoténuses ou diagonales, elles représentent la vitesse composée qu'il a dans cet instant, & les deux autres côtés du triangle représentent les vitesses simples que chaque Force tendoit à lui imprimer séparément. On a donc toujours cette proportion: comme la différence de deux Ordonnées de la Courbe infiniment proches, ou la portion de l'axe comprise entre ces Ordonnées, est à l'hypoténuse ou côté infiniment petit correspondant; ainsi l'une ou l'autre des vitesses que tendent à imprimer les deux Forces séparément, est à la vitesse composée qui résulte de leur concours.

Il n'y a nulle Courbe possible dont la nature ne soit suffisamment déterminée par le rapport des différences des Ordonnées aux portions de l'axe correspondantes, & l'on peut concevoir l'essence des Courbes en général comme consistant dans ce rapport, variable en une infinité de manières. Or ce même rapport sera toujours aussi celui des deux vitesses simples, dont le concours fera décrire une Courbe quelconque à un corps; & par conséquent l'essence de toutes les Courbes en général est la même chose que le concours ou la combinaison, variable à l'infini, de toutes les Forces qui, prises deux à deux, peuvent mouvoir un même corps: & voilà une Equation très-sim-

112 HISTOIRE DE L'ACADE'MIE ROYALE
ple & très-générale de toutes les Courbes , & de toutes les
viteffes poffibles.

Par le moyen de cette équation , dès que les deux viteffes
simples d'un corps font connues , M. Varignon détermine
auffi-tôt la Courbe qui en doit naître. Quelque variées que
foient ces viteffes , pourvû qu'elles fuivent quelque progres-
fion réglée , ce qui est toujours absolument nécessaire , el-
les ne font qu'introduire la même progression dans les diffé-
rences , ou dans les portions de l'axe qui leur répondent.

Si l'on veut qu'une des deux viteffes simples foit unifor-
me & toujours égale ; par exemple , la viteffe horifontale
d'un boulet de canon , on verra les différences ou les por-
tions de l'axe qui répondront à cette viteffe , devenir éga-
les ; & comme dans le cas du boulet de canon , ou de tout
autre corps pefant , la seconde Force simple dont il fera
pouffé fera fa pefanteur , qui lui imprimera toujours une vi-
teffe variée , fuivant les racines des hauteurs de la chute :
on verra naître de cette combinaison une Parabole que le
corps décrira. Dans cette Courbe , les portions de l'axe
qui font entre des Ordonnées infiniment proches , étant
prifes dans la proportion des racines des hauteurs de la
chute du corps pefant , les différences des Ordonnées font
toutes égales.

Il est à remarquer que par l'équation générale de M. Va-
rignon la viteffe uniforme , & la viteffe variée , fuivant les
racines des hauteurs produifent la Parabole , indépendam-
ment de l'angle que font entr'elles les deux Forces ou pro-
jections qui impriment ces viteffes , & que par conféquent
un boulet de canon tiré foit horifontalement , foit oblique-
ment à l'horifon décrit toujours une Parabole , parce que
dans ces deux cas la viteffe qu'il tient de cette projection
est toujours uniforme. D'habiles Géometres ont eu bien de
la peine à prouver que les projections obliques formoient
des Paraboles auffi-bien que les horifontales ; & cela vient
tout d'un coup , & de foi-même , par la méthode de M.
Varignon.

En

En voici la raison essentielle & métaphysique. La Courbe n'est que le mélange qui résulte de deux Forces qui ont entr'elles un certain rapport de grandeur ou de quantité ; la Parabole, par exemple, est le mélange qui résulte d'une vitesse uniforme & d'une vitesse variée qui suit les racines des hauteurs, & ce mélange est nécessairement déterminé à être ce qu'il est par le rapport des deux vitesses simples qui le forment. Si ces vitesses simples, sans changer de nature, devenoient ou plus grandes ou plus petites, il est clair que le mélange qui en résulte, ne changeroit pas de nature, mais seulement de grandeur. Ainsi, qu'un boulet de canon tiré horizontalement soit tiré avec une moindre charge de poudre, & même, si l'on veut qu'il tombe moins vite, l'une des deux vitesses simples ne laissera pas d'être toujours uniforme, & l'autre variée de la même manière, & par conséquent le boulet décrira toujours une Parabole, mais une Parabole plus petite. Maintenant, que le boulet soit tiré selon une ligne oblique à l'horison, & plus élevée que l'horizontale, cette ligne oblique à l'horison sera composée d'une parallèle ou horizontale, & d'une verticale. Entant qu'elle est horizontale, elle imprimera toujours une vitesse uniforme : entant qu'elle est verticale & plus élevée qu'une parallèle à l'horison, elle agira contre la pesanteur du boulet, & en affoiblira l'action, mais sans en changer la nature, & par conséquent il se trouve toujours un mélange d'une vitesse uniforme & d'une vitesse qui suit les racines des hauteurs, ou, ce qui est la même chose, une Parabole, quoique différente. Si la ligne de projection du boulet étoit au-dessus d'une parallèle à l'horison, l'action de la pesanteur seroit fortifiée, mais non pas changée. Donc quelque angle que fassent entr'elles la ligne de projection du boulet, & l'action verticale de sa pesanteur, ou, ce qui revient au même, les deux Forces simples dont il est poussé, l'espece de la Courbe ne change point, mais seulement la grandeur. Le même raisonnement se peut appliquer à toutes les autres Courbes résultantes du

114 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
mélange de deux Forces , & l'angle ou la position de ces Forces entr'elles est indifférente , quant à l'espece de la Courbe.

Un mélange de deux Forces déterminées ne peut donner qu'une certaine Courbe : mais une Courbe étant donnée , on peut imaginer une infinité de Forces différentes , prises deux à deux , dont le mélange aura pû la produire. C'est ainsi que dans les Nombres , le produit de 2. & de 30 , par exemple , ne peut donner que 60 , mais 60 peut être formé par la multiplication de plusieurs autres nombres entiers tels que 2 , & 30 , & par celle d'une infinité de nombres rompus. Et comme on peut prendre tel nombre qu'on voudra pour l'un des deux dont le produit doit former 60 , après quoi le second , soit entier , soit rompu , viendra nécessairement , & sera déterminé : de même une Courbe étant donnée , on peut supposer telle vitesse qu'on voudra pour l'une des deux , dont le concours l'aura produite , mais ensuite l'autre vitesse simple sera nécessairement déterminée en conséquence de la supposition arbitraire. Si l'on veut qu'un boulet de canon tiré horizontalement ou obliquement à l'horison , ait décrit une Hyperbole , cette supposition enfermant une vitesse uniforme , on trouvera quelle aura dû être celle que la pesanteur aura causée , & certainement on ne la trouvera pas dans la proportion des racines des hauteurs. On saura donc quelle devra être l'action de la pesanteur , pour faire décrire aux corps jettés des Hyperboles , ou en général telles autres Courbes qu'on voudra.

Une Courbe étant donnée , ou , ce qui est la même chose , le rapport des portions de l'axe infiniment petites aux différences correspondantes , on peut , sans changer la nature de cette Courbe , établir telle progression qu'on voudra , soit entre les portions de l'axe comparées seulement entr'elles , soit entre les différences prises de la même maniere : mais quand on a une fois réglé une progression pour les unes ou pour les autres de ces gran-

leurs, la seconde n'est plus libre, & elle suit nécessairement du rapport qui doit être entre les unes & les autres, comparées ensemble. C'est là la raison essentielle qui fait que l'on peut imaginer une infinité de vitesses différentes, prises deux à deux, également propres à former une certaine Courbe, & que l'une des deux vitesses étant déterminée arbitrairement, l'autre devient nécessaire.

Des Géometres fameux avoient déjà songé à la génération des Courbes par les mouvemens composés : mais ceux qui n'ont pas connu ou admis la Géométrie des Infiniment petits, ont dû être assez embarrassés, ou du moins fort bornés dans cette recherche. Ce n'est qu'en considérant les Courbes comme des Poligones infinis, que l'on trouve que chaque côté infiniment petit est la diagonale que produit un mouvement composé, & cette idée si naturelle donne aussitôt le dénoûment de tout.

De plus, il faut savoir qu'il y a deux especes de Courbes, les *Géométriques*, & les *Mécaniques*. Les Courbes géométriques sont celles dont on peut exprimer & déterminer la nature par le rapport des Ordonnées aux Abcisses, qui sont les unes & les autres des grandeurs finies ; les Mécaniques sont celles dont on ne peut exprimer ainsi la nature, parce que les Ordonnées & les Abcisses n'ont point de rapport réglé. Les Sections Coniques sont géométriques, la Cycloïde, la Cissoïde, la Conchoïde, &c. sont mécaniques. Dans la Géométrie des Infiniment petits, la nature de toutes les Courbes, soit géométriques, soit mécaniques, peut également s'exprimer par le rapport des portions de l'axe infiniment petites aux différences correspondantes, ou premières ou secondes, ou troisièmes, &c. à l'infini. Toute la différence entre les Courbes géométriques & mécaniques, est que les mécaniques ne peuvent s'exprimer que par ce rapport ; au lieu que les géométriques peuvent aussi s'exprimer par le rapport des Ordonnées aux Abcisses ; c'est-à-dire, que les mécaniques conduisent plus néces-

116 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
fairement que les autres à la considération de l'infini. De-
là il suit, & que la Géométrie des Infiniment petits a une
égale facilité dans les recherches qu'elle fait sur ces deux
espèces opposées de Courbes, & que toute autre métho-
de doit en avoir beaucoup moins, sur-tout à l'égard des
mécaniques. Il est visible que la Théorie de M. Vari-
gnon fondée sur les Infiniment petits, tant pour les vi-
tesses que pour la génération des Courbes, s'étend si na-
turellement tant aux Courbes géométriques qu'aux mécha-
niques, que l'on ne s'apperçoit pas en la suivant, qu'il y ait
aucune différence de nature entre ces Courbes. Cependant
il y a tout lieu de croire que l'on s'en appercevrait bien
par d'autres voies.

*SUR LA PLUS GRANDE
PERFECTION POSSIBLE DES MACHINES;
DONT UN FLUIDE EST LA FORCE
MOUVANTE.*

V. les M.
P. 323.

JUSQU'ICI l'on n'a su calculer les Machines, que pour
l'état de l'équilibre. Une Machine étant construite ou
imaginée, on voit par les bras de levier, par les distan-
ces des points fixes aux directions des Forces, en un
mot par les chemins que doivent parcourir en même
temps le Poids d'un côté, & de l'autre la Puissance, quel
doit être le rapport de la Puissance au Poids, afin que la
Machine soit en équilibre, ou réciproquement par le
rapport de la Puissance qu'on doit employer au Poids
qu'il faut mouvoir, on trouve quels doivent être pour
cet équilibre de la Machine, les chemins qu'ils parcour-
ront l'un & l'autre, ou plutôt qu'ils seront disposés à
parcourir. Cet état d'équilibre trouvé, il est bien sûr
que la Machine sera mise en mouvement, & exécutera

l'effet qu'on lui demande , pour peu que l'on augmente soit la puissance , soit sa vitesse , ou que l'on diminue le poids ou sa vitesse. On ne considère point ici les Frottemens , & on ne les considérera point dans la suite de ce discours.

Quand , pour mettre la Machine en mouvement , on augmente ou l'on diminue quelqu'une des quantités qui formoient l'équilibre , on ne fait qu'au hasard cette augmentation ou cette diminution ; c'est-à-dire , qu'on croit que la plus grande sera toujours la meilleure , & que la Machine en ira d'autant mieux , ce qui est en effet une pensée fort naturelle. Mais plus elle l'est , plus on doit tenir compte à M. Parent d'en avoir reconnu l'erreur ; il a découvert ce que personne n'avoit encore soupçonné , que pour mettre les Machines dans la plus grande perfection où elles pussent être , il falloit , après avoir trouvé leur état d'équilibre , faire une certaine augmentation ou diminution précise , soit sur les forces , soit sur les vitesses , & que toute autre augmentation ou diminution rendroit les Machines moins parfaites. Il est aisé de voir que cette nouvelle Théorie est en même temps une Règle par laquelle M. Parent peut déterminer si une Machine quelconque donnée est dans la plus grande perfection où elle puisse être , de combien de degrés elle en est éloignée , & quels changemens il faudroit faire pour l'y amener.

Il ne propose encore sa découverte que sur les Machines dont la Force mouvante est un fluide , telles que sont les Moulins à vent ou les Moulins à eau. Il les suppose construites comme elles le sont , & comme elles doivent l'être , c'est-à-dire , de manière que le poids qu'il faut mouvoir , soit appliqué à certains bras de levier , tandis que la Puissance est appliquée à d'autres , ou plus généralement que le poids ait en vertu de la disposition de la Machine , une certaine vitesse , & la puissance une autre , toujours plus grande dans la pratique que celle du poids ,

puisque ce n'est que par-là qu'on peut tirer avantage d'une Machine. Après cela, voici par quelle suite de réflexions & de raisonnemens M. Parent arrive à son but.

Le plus grand effet que puisse jamais produire un Fluide qui coule avec une certaine vitesse, c'est d'emporter avec cette même vitesse entiere un certain poids, qu'on peut concevoir comme posé dans une gondole. M. Parent appelle cet effet *naturel*, parce qu'il n'y entre aucune Machine. Il est visible que c'est le produit de ce poids qui peut être emporté, & de la vitesse du Fluide; & comme cet effet, outre qu'il est naturel, est constant & invariable, on peut le prendre pour une mesure fixe à laquelle on rapportera tous ceux qui se feront par des Machines, & qui varieront avec elles.

Dans toute Machine, dont un Fluide est la Force mouvante, il faut qu'il fasse son effort ou son impression sur quelque surface, telle qu'une aile de Moulin, ou vanne, ou palette, &c. La grandeur de cet effort ou impression dépend de la pesanteur & de la vitesse du Fluide, & le Fluide étant toujours supposé le même, de sa vitesse seule. Si la vitesse augmente, l'effort ou impression augmente selon les quarrés de la vitesse; parce que, quand un Fluide a 2 fois, 3 fois, &c. plus de vitesse, non seulement il frappe une surface avec 2 fois, 3 fois plus de force, mais il la frappe avec 2 fois, 3 fois plus de parties en même temps, puisqu'elles se meuvent plus vite, & par conséquent l'impression du Fluide croît selon la raison doublée, ou selon les quarrés de la vitesse. Si une surface frappée par un Fluide qui tend à la mouvoir selon son cours, est arrêtée par un poids qui ne soit précisément que tel qu'il faut pour l'arrêter, il est clair que ce poids est égal à l'impression ou effort du Fluide contre la surface: si la vitesse du Fluide devenoit 2 fois, 3 fois, &c. plus grande, il faudroit que le poids fût 4 fois, 9 fois plus grand, ou, ce qui est la même chose, l'effort du Fluide seroit 4 fois, 9 fois plus grand. Jusques-là, il n'y a encore nul effet de Machine.

Mais si l'on en faisoit une, quelle qu'elle pût être, où l'effort du Fluide agit par certains bras de levier, & un poids qu'il faudroit vaincre, fût appliqué à d'autres bras, il est constant que dans l'état d'équilibre il y auroit égalité entre l'effort du Fluide, ou le poids qui lui est égal, multiplié par les bras de levier où il est appliqué, & le poids à élever multiplié par les siens. Le produit de ce poids à vaincre, & des bras de levier par lesquels il agit, ou, ce qui est la même chose, le produit de ce poids par sa vitesse est tout l'effet de la Machine, ou, pour parler plus précisément, du Fluide agissant par une Machine.

Mais cet effet n'est celui de la Machine que dans l'état d'équilibre, & il deviendra nécessairement moindre dès qu'on la voudra mettre en mouvement; parce qu'il faudra pour cela diminuer le poids, ou faire quelque chose d'équivalent. Supposons que l'on s'en tienne à diminuer le poids, & laissons cette diminution indéterminée.

Une autre cause rend encore moindre l'effet de la Machine mise en mouvement. Dans l'état d'équilibre, le Fluide emploie toute sa Force contre l'aile ou vanne qu'il frappe, parce qu'elle est alors immobile: mais quand la Machine se meut, cette aile poussée par le Fluide fuit devant lui, pour ainsi dire, & en reçoit d'autant moins d'impression, qu'elle fuit plus vite; de sorte que si elle avoit pris du Fluide toute la vitesse qu'il a, c'est-à-dire, qu'elle se mût d'une vitesse égale à la sienne, elle ne recevrait plus de lui aucune impression, & ne serait frappée avec aucun effort. Mais la vanne ne prend jamais une vitesse égale à celle du Fluide, parce qu'elle est toujours retardée & appesantie par le poids qui doit être élevé, & auquel elle donne tout le mouvement qu'il a. Elle est d'autant plus retardée, que ce poids est plus grand, & moins diminué par rapport à celui que la Machine eût soutenu dans l'état d'équilibre. Quand la vanne a pris du Fluide la plus grande vitesse qu'elle puisse prendre, chargée de ce poids comme elle l'est, elle la conserve toujours, & par

conféquent se meut d'une vitesse uniforme. L'excès de la vitesse du Fluide par-dessus cette vitesse uniforme de la vanne est tout l'effort dont il frappe ; & cet effort , qui est le principe du mouvement de toute la Machine , est beaucoup plus foible que celui sur lequel on comptoit dans l'état d'équilibre.

La vitesse de la vanne dépend donc & de la vitesse du Fluide , & de la grandeur du *poids diminué* par rapport au *poids d'équilibre* , & M. Parent trouve une expression algébrique de cette vitesse de la vanne , où il n'entre que ces grandeurs. Il n'y a dans cette expression rien d'inconnu ou d'indéterminé , que la grandeur du poids diminué.

Voilà quelle est la vitesse de la vanne indépendamment de la construction de la Machine & de la disposition de ses parties : mais comme la vanne est en même temps une partie de la Machine , à laquelle est appliquée la Force mouvante , ou le Fluide , sa vitesse comparée à celle du poids qui doit être élevé , y a le même rapport qu'ont entr'eux les différens bras de levier , par lesquels agissent la Force mouvante & le poids ; & ces bras étant supposés connus par la construction de la Machine , voilà encore une expression soit de la vitesse de la vanne comparée à celle du poids , soit de la vitesse du poids , dans laquelle tout est connu & déterminé hormis la grandeur du poids diminué.

Dès que l'on a l'expression de la vitesse du poids diminué , il est visible que le produit de ce poids par sa vitesse est tout l'effet que la Machine peut produire.

Il n'entre dans l'expression algébrique de cet effet de la Machine , que le poids diminué qu'on a laissé indéterminé & inconnu , le poids d'équilibre , la vitesse du Fluide , & les bras de levier opposés , toutes grandeurs que l'on suppose déterminées & connues. Par conséquent l'effet de la Machine variera à l'infini , & sera plus grand ou plus petit , selon que l'on supposera le poids diminué plus ou moins grand , tout le reste demeurant

le même. Or quand une grandeur est variable à l'infini, elle peut avoir un certain point d'accroissement qu'elle ne passera point, & après quoi elle ne fera que décroître. Telles sont les Ordonnées d'un Cercle, d'une Ellipse, &c. Quand on a l'expression algébrique de la grandeur variable, on reconnoît très-facilement par la Géométrie des Infiniment petits, si elle a *un plus grand*, & en même-temps on le trouve & on le détermine. M. Parent employant cette méthode a vû que l'effet général & variable d'une Machine mue par un Fluide étoit capable *d'un plus grand*, & que *ce plus grand* arrivoit lorsque le poids diminué étoit les $\frac{4}{7}$ du poids de l'équilibre. Cette grande diminution vient de ce que le Fluide n'a de force pour mouvoir la Machine que l'excès de sa vitesse sur celle de la vanne.

Lorsqu'un Fluide élève par le moyen d'une Machine les $\frac{4}{7}$ du poids qu'il eût soutenu dans l'équilibre de la Machine, il fait donc le plus grand effet qu'il puisse jamais faire avec le secours d'une Machine; & cet effet comparé à celui que M. Parent appelle naturel, & qui consiste dans le produit de la vitesse du Fluide par un poids qui en pourroit être emporté avec toute cette vitesse, n'en est que les $\frac{4}{17}$.

Cela une fois trouvé, il est très-facile d'en conclurre que dans une Machine qui feroit les $\frac{4}{7}$ de l'effet naturel du Fluide, c'est-à-dire, dans une Machine parfaite, la vitesse uniforme de la vanne seroit $\frac{1}{3}$ de celle du Fluide; & comme il y a entre cette vitesse & celle du poids qui s'élève, un rapport réglé, que nous avons marqué ici, on détermine aussitôt quelle est cette vitesse du poids dans l'état de perfection.

Toutes les conséquences de cette nouvelle Théorie de M. Parent se présentent d'elles-mêmes. On saura donc présentement que quelque Machine qu'on fasse, qui doive être mue par un Fluide, on n'en peut espérer un plus grand effet, que les $\frac{4}{17}$ de l'effet naturel du Fluide. On jugera sûrement du degré de perfection de toute Machine donnée, il ne faudra que comparer son effet aux $\frac{4}{17}$ de l'effet naturel du Fluide, & voir combien il s'en éloigne. Quand

on aura à construire une Machine , il la faudra construire de sorte que son effet aille jusqu'à ces $\frac{4}{17}$, ou , ce qui est la même chose , qu'elle élève un poids qui soit les $\frac{4}{9}$ du poids d'équilibre , ou que la vitesse de la vanne soit $\frac{1}{3}$ de celle du Fluide , & après cela on sera sûr d'avoir rendu la Machine parfaite , quelle que soit d'ailleurs sa construction , qui peut avec ces conditions varier encore en une infinité de manieres. Si l'on est assujetti à élever un certain poids , il faut construire une Machine de sorte que son poids d'équilibre soit à celui qu'on doit élever comme 9 à 4 , & elle sera la plus parfaite qu'il soit possible par rapport à l'élévation du poids donné. Si l'on est assujetti à se servir d'une certaine Machine , il faut lui donner à élever les $\frac{4}{9}$ de son poids d'équilibre , & elle fait le plus grand effet qu'elle puisse faire ; elle est même la plus parfaite qu'elle puisse être , si sa construction est telle qu'elle fasse soutenir au Fluide le plus grand poids qu'il puisse soutenir avec une Machine , ou , ce qui revient au même , si les $\frac{4}{9}$ de son poids d'équilibre multipliés par la vitesse qu'elle leur fait prendre sont les $\frac{4}{17}$ de l'effet naturel du Fluide ; si cela n'est pas , on voit de combien la Machine est éloignée de la perfection.

Jusqu'ici , pour ne pas compliquer trop d'idées différentes , nous avons appelé effet naturel du Fluide , le produit de sa vitesse par un poids qu'il pourroit emporter avec toute cette vitesse. Ce poids n'est que le Fluide même , qui , selon la méthode de M. de la Hire expliquée dans l'Hist.

* p. 126.
& suiv.

de 1702 * , est considéré comme un Solide , dont la hauteur est déterminée par la vitesse du Fluide , dont la base est la vanne ou aile que le Fluide frappe , & dont on trouve le poids total par la pesanteur connue du Fluide , après qu'on a ainsi trouvé sa grandeur ou ses dimensions. Il est visible que ce Solide formé de cette maniere comprend & le poids & la vitesse du Fluide , & par conséquent représente son effet naturel. La grandeur de la vanne y entre nécessairement : & si dans l'expression algébrique que

M. Parent donne de l'effet général d'une Machine mue par un Fluide, on y substitue ce Solide à la place de l'effet naturel, la grandeur de la vanne s'y trouve avec toutes les autres grandeurs qui y étoient déjà; & cette expression ou équation comprend tout ce qu'il est possible qu'elle comprenne, la vitesse du Fluide, sa pesanteur, la grandeur du poids que la Machine élève, la vitesse qu'il prend, les bras de levier par lesquels agit la Force mouvante, ceux par lesquels agit le poids, & la grandeur de la vanne. Il est nécessaire de supposer la vitesse & la pesanteur du Fluide connues & déterminées: mais on peut laisser inconnues & indéterminées les 5 autres grandeurs qui appartiennent à la Machine, ou qui en dépendent; & après cela 4 de ces 5 grandeurs étant déterminées telles qu'on voudra, la 5^e se détermine nécessairement en vertu de l'équation, ce qui donne une extreme facilité pour le calcul de toutes ces Machines.

Monsieur des Billettes continuant l'Art de l'impression, a fait une Description de la Presse, & ensuite de l'impression particulière des Livres d'Eglise, Ecriteaux, Sentences, &c.

Delà il a passé à l'Art de graver la Taille-douce.

M. Jaugeon a commencé la Description des Arts & Métiers qui concernent la Soie.



MACHINES OU INVENTIONS
APPROUVÉES PAR L'ACADÉMIE

E N M D C C I V.

I.

UNe Machine roulante inventée par le sieur Desfeau , dont l'axe porte sur chacune de ses 4 faces une rangée de Mousquets, qu'un homme seul peut tirer à la fois. Elle peut être utile en quelques occasions. On en avoit déjà proposé une semblable à l'Académie.

II.

Un Fusil brisé qui se charge par la culasse , inventé par M. de la Chaumette , exécuté d'une maniere particulière, & fort ingénieuse, & qui peut être d'un bon usage entre les mains de personnes fort attentives.

III.

Un Dessein d'une Digue avec ses Portes , & toutes les autres choses nécessaires pour rendre la Riviere de la Rue près de Condat en Auvergne , capable de flotter des Mats de navire , le tout inventé par M. Bourgeois de Lyon. On y a trouvé beaucoup de nouveauté, d'esprit, & de solidité, & l'Académie n'a cru y pouvoir ajoûter que quelque avis, dont il a paru que l'Inventeur vouloit bien profiter.

IV.

Un Niveau de M. Verjus , qui peut servir après avoir été rectifié, mais qui est difficile à rectifier à cause de sa composition.

*ELOGE DE M. LE MARQUIS
DE L'HÔPITAL.*

Guillaume François de l'Hôpital, Chevalier, Marquis de Sainte Mesme, Comte d'Entremont, Seigneur d'Ouques, la Chaise, le Bréau, & autres Lieux, nâquit en 1661. d'Anne de l'Hôpital, Lieutenant général des Armées du Roi, premier Ecuyer de feu S. A. R. Monsieur Gaston Duc d'Orleans, & d'Elisabeth Gobelin, fille de Claude Gobelin, Intendant des Armées du Roi, & Conseiller d'Etat Ordinaire.

La Maison de l'Hôpital a eu deux Branches; l'aînée dont étoit M. le Marquis de l'Hôpital, a joint au nom de l'Hôpital celui de Sainte Mesme; & la cadette, qui est présentement éteinte, a produit deux Maréchaux de France, & les Ducs de Vitri. Toutes deux avoient pour tige commune Adrien de l'Hôpital, Chambellan du Roi Charles VIII. Capitaine de Cent hommes d'armes, & Lieutenant général en Bretagne, qui commanda l'avant-garde de l'Armée Royale à la Bataille de S. Aubin en 1488.

M. le Marquis de l'Hôpital, que l'Académie des Sciences a perdu, étant encore enfant, eut un Précepteur, qui voulut apprendre les Mathématiques dans les heures de loisir que son emploi lui laissoit. Le jeune Ecolier qui avoit peu de goût, & même, à ce qu'il paroissoit, peu de disposition pour le Latin, eut à peine appercu dans des Elemens de Géométrie des Cercles & des Triangles, que l'inclination naturelle, qui annonce presque toujours les grands talens, se déclara; il se mit à étudier avec passion ce qui auroit épouvanté tout autre que lui à la première vûe. Il eut ensuite un autre Précepteur, qui fut obligé par son exemple à se mettre dans la Géométrie: mais quoiqu'il fût homme d'esprit, & appliqué, son Eleve le

laissoit toujours bien loin derriere lui. Ce que l'on n'obtient que par le travail , n'égalé point les faveurs gratuites de la nature.

Un jour M. le Marquis de l'Hôpital n'ayant encore que 15 ans, se trouva chez M. le Duc de Roannés , où d'habiles Géometres , & entr'autres M. Arnaud , parlerent d'un Probleme de M. Paschal sur la Roulette , qui paroiffoit fort difficile. Le jeune Mathématicien dit qu'il ne defespéroit pas de le pouvoir résoudre. A peine trouva-t-on que cette présomption & cette témérité pussent être pardonnées à son âge. Cependant peu de jours après il leur envoya le Probleme résolu.

Il entra dans le service , mais sans renoncer à sa plus chere passion : il étudioit la Géométrie jusque dans sa Tente , & ce n'étoit pas seulement pour étudier qu'il s'y retiroit , c'étoit aussi pour cacher son application à l'étude. Car il faut avouer que la Nation Françoisé aussi polie qu'aucune autre Nation , est encore dans cette espece de barbarie , qu'elle doute si les Sciences poussées à une certaine perfection ne dérogent point , & s'il n'est point plus noble de ne rien savoir. Il eut si bien l'art de renfermer ses talens , & d'être ignorant par bienséance , que tant qu'il fut dans le métier de la guerre , les gens les plus pénétrants sur les défauts d'autrui ne le soupçonnerent jamais d'être un grand Géometre ; & j'ai vû moi-même quelques-uns de ceux qui avoient servi en même-temps , fort étonnés de ce qu'un homme qui avoit vécu comme eux , & avec eux , se trouvoit être un des premiers Mathématiciens de l'Europe.

Il fut Capitaine de Cavalerie dans le Régiment Colonel général : mais la foiblesse de sa vûe qui étoit si courte qu'il ne voyoit pas à dix pas , lui causant dans le service des inconvéniens perpétuels , qu'il avoit long temps , & inutilement tâché de surmonter , il fut enfin obligé de se rendre , & de quitter un métier où il pouvoit espérer d'égalé ses Ancêtres.

Dès que la guerre ne le partagea plus , les Mathé-

matiques en profiterent. Il jugea par le Livre de la Recherche de la Vérité que son Auteur devoit être un excellent Guide dans les Sciences: il prit ses conseils, s'en servit utilement, & se lia avec lui d'une amitié qui a duré jusqu'à la mort. Bien-tôt son savoir vint au point de ne pouvoir plus être caché; il n'avoit que 32 ans, lorsque des Problemes, tirés de la plus sublime Géométrie, choisis avec grand soin pour leur difficulté, & proposés à tous les Géometres dans les Actes de Leipsic, lui arracherent son secret, & le forcerent d'avouer au Public qu'il étoit capable de les résoudre.

Le premier fut celui-ci proposé en 1693. par M. Bernoulli Professeur en Mathématique à Groningue. *Trouver une Courbe telle que toutes ses Tangentes terminées à l' Axe, soient toujours en raison donnée avec les parties de l'axe interceptées entre la Courbe & ces Tangentes.* Il ne fut résolu que par M. Leibnits en Allemagne, par M. Bernoulli en Suisse, frere de celui qui l'avoit proposé, par M. Huguens en Hollande, & par M. de l'Hôpital en France.

M. Huguens avoue dans les Actes de Leipsic, que la difficulté du Probleme l'avoit fait d'abord résoudre à n'y point penser; mais qu'une Question si nouvelle avoit troublé son repos malgré lui, l'avoit persécuté sans relâche, & qu'enfin il n'avoit pu y résister. On jugera aisément de quel genre pouvoit être en matiere de Géométrie, ce qui paroïssoit si difficile à M. Huguens.

Tous ceux qui savent au moins les Nouvelles des Sciences, ont entendu parler du célèbre Probleme de *la plus vite Descente.* M. Bernoulli de Groningue avoit demandé dans les Actes de Leipsic, *supposé qu'un corps pesant tombât obliquement à l'Horison, quelle étoit la ligne Courbe qu'il devoit décrire pour tomber le plus vite qu'il fût possible?* Car, comme il a été dit dans l'Histoire de l'Académie des Sciences de 1699.*, ce Paradoxe assez étonnant étoit démontré, Que la ligne droite, quoique la plus courte de toutes les lignes qui pouvoient être tirées entre les deux points donnés, n'étoit point le chemin que le

* pag. 67.

Corps devoit tenir pour tomber en moins de temps. Il étoit certain d'ailleurs que la Courbe en question n'étoit point un Cercle, comme Galilée l'avoit cru, & la méprise d'un si grand homme peut servir à faire sentir la difficulté du Probleme. M. Bernoulli proposa cette Enigme au mois de Juin 1696, & donna à tous les Mathématiciens de l'Europe le reste de l'année pour y penser. Il vit que ces six mois n'étoient pas suffisans, il accorda encore les quatre premiers de 1697, & dans ces dix mois, il ne parut que quatre Solutions. Elles étoient de M. Neuton, de M. Leibnits, de M. Bernoulli de Bâle, & de M. le M. de l'Hôpital. L'Angleterre, l'Allemagne, la Suisse, & la France fournirent chacune un Géometre pour ce Probleme.

On retrouve ces mêmes noms à la tête de quelques solutions semblables dans les Actes de Leipzig, & ils y semblent être en possession des connoissances les plus rares, & les plus élevées.

* pag. 78. On a même rapporté dans l'Hist. de 1700. * un Probleme proposé, comme presque tous les autres, par M. Bernoulli de Groningue, & qui n'a été résolu que par M. de l'Hôpital. Il s'agissoit de *Trouver dans un plan vertical une Courbe telle qu'un Corps qui la décrivoit, descendant librement, & par son propre poids, la presât toujours dans chacun de ses points avec une force égale à sa pesanteur absolue.* On a tâché de faire sentir alors les différens embarras de ce Probleme, c'est-à-dire, sa beauté. Les Géometres d'aujourd'hui ne sont pas aisés à contenter sur les difficultés; & ce qui a fait sortir Archimède du Bain pour crier par les rues de Siracuse, *Je l'ai trouvé*, ne seroit pas pour eux une découverte bien glorieuse.

* pag. 95. L'Hist. de l'Académie de 1699. * a parlé encore d'une Solution de M. le Marquis de l'Hôpital, où peu d'autres auroient pû atteindre: M. Neuton dans son excellent Livre des *Principes Mathématiques de la Philosophie naturelle*, a donné la *figure du Solide qui fendroit l'eau, ou tout autre liquide avec le moins de difficulté qu'il fût possible.*

Mais

Mais il n'a point laissé voir par quel art ni par quelle route il est arrivé à déterminer cette figure. Son secret lui a paru digne d'être caché au Public. M. Fatio, Géometre fameux, se piqua de le découvrir, & il en envoya à M. de l'Hôpital une Analyse imprimée. Elle contenoit 5 grandes pages in-4^e presque toutes de calcul. M. de l'Hôpital effrayé de la longueur & paresseux d'une manière nouvelle, crut qu'il auroit plutôt fait de chercher lui-même cette solution. Il l'eut effectivement trouvée au bout de deux jours, & elle étoit simple & naturelle. C'étoit là un de ses grands talens. Il n'alloit pas seulement à la Vérité, quelque cachée qu'elle fût, il y alloit par le chemin le plus court. Une espece de fatalité veut qu'en tout genre les méthodes ou les idées les plus naturelles, ne soient pas celles qui se présentent le plus naturellement. On se met presque toujours en trop grands frais pour les recherches qu'on a entreprises, & il y a peu de génies, heureusement avarés, qui n'y fassent que la dépense absolument nécessaire. C'est pas qu'il ne faille de la richesse & de l'abondance pour fournir aux dépenses inutiles : mais il y a plus d'art à les éviter, & même plus de véritable richesse.

Il seroit trop long de rapporter ici tous les Chef-d'œuvres de Géométrie dont M. de l'Hôpital, & le petit nombre de ses pareils ont embellis les Journaux ou d'Allemagne, ou de France. On soupçonnera sans doute que pour entrer dans ces Questions qui leur étoient réservées, ils devoient avoir, outre leur génie naturel, quelque Clef particulière, qui ne fût qu'entre leurs mains. Ils en avoient une en effet, & c'étoit la Géométrie des Infiniment petits, ou du Calcul Différentiel, inventée par M. Leibnits, & en même-temps aussi par M. Neuton, & toujours ensuite perfectionnée & par eux, & par M^{rs} Bernoulli, & par M. de l'Hôpital.

L'illustre M. Huguens qui n'étoit point l'inventeur du Calcul différentiel, comme M. Leibnits, qui ne l'avoit

point employé dans toutes ses études géométriques, comme M. de l'Hôpital, & M^{rs} Bernoulli, qui étoit parvenu sans ce secours à des Théories très-élevées, & s'étoit fait une réputation des plus brillantes, qui pouvoit, à la manière des autres hommes, & peut-être plus légitimement, mépriser ce qu'il ne connoissoit point, & traiter d'inutile ce qui ne lui avoit pas été nécessaire pour ses grands Ouvrages, avoit jugé cependant & par le mérite de ceux qui employoient cette Méthode, & par les miracles qu'il en voyoit sortir, qu'elle étoit digne qu'il l'étudiât; il avoit été assez grand homme pour avouer qu'il pouvoit encore apprendre quelque chose en Géométrie; il s'étoit adressé à M. de l'Hôpital qui avoit presque la moitié moins d'âge que lui, pour s'instruire du Calcul différentiel; & sans doute ce trait de la Vie de M. de l'Hôpital est encore plus glorieux à M. Huguens qu'à lui.

Ce n'est pas que M. Huguens ne connût déjà par lui-même le Pays de l'Infini, où l'on est conduit à chaque moment par le Calcul différentiel, il avoit été obligé de pénétrer jusque-là dans quelques-unes de ses plus subtiles recherches, sur-tout dans celles qu'il avoit faites pour l'invention immortelle de la Pendule: car la fine Géométrie ne peut aller loin sans percer dans l'Infini. Mais il y a bien de la différence entre savoir en général la Carte d'un Pays, ou en connoître en particulier toutes les routes, & jusqu'à ces petits sentiers, qui épargnent tant de peine aux Voyageurs.

M. Huguens étoit alors en Hollande, où il s'étoit retiré après avoir quitté Paris, & l'Académie des Sciences, dont il étoit un des principaux ornemens. Il paroît par beaucoup de lettres de lui qu'on a trouvées dans les papiers de M. de l'Hôpital, & sur-tout par celles qui sont des années 1692 & 1693, qu'il consultoit à M. de l'Hôpital ses difficultés sur le Calcul différentiel; que quand quelque chose l'arrêtoit, il ne s'en prenoit pas à la Méthode, mais à ce qu'il ne la possédoit pas assez; *qu'il voyoit avec surprise & avec admiration l'étendue & la fécondité de cet Art, que de quelque côté*

qu'il tournât sa vue, il en découvroit de nouveaux usages; qu'enfin, ce sont les termes, il y concevoit un progrès & une spéculation infinie. Il a même déclaré publiquement dans les Actes de Leipzig, que sans une *Equation différentielle* il ne feroit pas venu à bout de trouver la Courbe dont les Tangentes, & les parties de l'axe sont toujours en raison donnée. Et même, ajoute-t-il dans les mêmes Actes, il faut remarquer dans ce *Probleme* une *Analyse nouvelle & singulière* qui ouvre le chemin à quantité de choses sur la *Théorie des Tangentes*, comme l'a très-bien observé l'illustre inventeur d'un *Calcul*, sans lequel nous aurions bien de la peine à être admis dans une si profonde *Géométrie*. Il écrivit en même temps à M. de l'Hôpital qu'il devoit à ses enseignemens cette *Equation différentielle* qui lui avoit donné le dénouement du *Probleme*.

Jusque-là, la *Géométrie des Infiniment petits* n'étoit encore qu'une espèce de *Mystre*, &, pour ainsi-dire, une *Science Cabalistique* renfermée entre cinq, ou six personnes. Souvent on donnoit dans les *Journaux* les *Solutions* sans laisser paroître la *Méthode* qui les avoit produites, & lors même qu'on la découvroit, ce n'étoient que quelques foibles rayons de cette *Science* qui s'échappoient, & les nuages se renfermoient aussi-tôt. Le *Public*, ou, pour mieux dire, le petit nombre de ceux qui aspireroient à la haute *Géométrie*, étoient frappés d'une admiration inutile qui ne les éclairoit point, & l'on trouvoit moyen de s'attirer leurs applaudissemens, en retenant l'instruction dont on auroit dû les payer.

M. de l'Hôpital résolut de communiquer sans réserve les trésors cachés de la nouvelle *Géométrie*, & il le fit dans le fameux *Livre de l'Analyse des Infiniment petits*, qu'il publia en 1696. Là, furent dévoilés tous les secrets de l'*Infini Géométrique*, & de l'*Infini de l'Infini*; en un mot, de tous ces différens ordres d'*Infinis*, qui s'élevent les uns au-dessus des autres, & forment l'*Edifice* le plus étonnant & le plus hardi que l'*Esprit humain* ait jamais osé imaginer.

Comme il y a des rapports déterminés entre les grandeurs finies, qui sont l'unique objet des recherches Mathématiques, & les grandeurs de ces différens ordres d'infinis, on parvient par la voie de l'infini à des connoissances sur le fini, où ne pourroit jamais atteindre toute autre Méthode, qui n'auroit pas l'audace, & en même temps l'adresse de manier l'infini. Le Livre des Infiniment petits fut donc tout brillant de vérités inconnues à la Géométrie ancienne, & non-seulement inconnues, mais souvent inaccessibles à cette Géométrie. Les anciennes vérités s'y trouvoient comme perdues dans la foule des nouvelles, & la facilité avec laquelle on les voyoit naître, faisoit regretter les efforts qu'elles avoient autrefois coûtés à leurs inventeurs. Des Démonstrations, qui par d'autres Méthodes auroient demandé un circuit immense, en cas qu'elles eussent été possibles, ou qui même entre les mains d'un autre Géometre instruit de la même Méthode, auroient encore été longues & embarrassées, étoient d'une simplicité & d'une brieveté, qui les rendoient presque suspectes.

Tel est l'effet des Méthodes générales : quand on a une fois sù les découvrir, on est à la source, & on n'a plus qu'à se laisser aller au cours paisible des conséquences. Une seule Regle du Livre de M. de l'Hôpital donne les Tangentes de toutes les Courbes imaginables ; une autre, toutes les plus grandes, ou plus petites Appliquées, ou tous les points d'Inflexion, & de Rebroussement, ou toutes les Développées, ou toute la Catoptrique à la fois, ou toute la Dioptrique ; des Traités entiers faits par de grands Auteurs se réduisent quelquefois à quelques Corollaires, que l'on rencontre en chemin, & qu'on distingue à peine dans la multitude ; tout se rapporte à des espèces de Systèmes que M. de l'Hôpital a commencé de mettre dans la Géométrie, & qui vont y répandre un nouveau jour.

Il y a, sur-tout en Mathématique, plus de bons Livres, qu'il n'y en a de bien faits ; c'est-à-dire, qu'on en voit assez

qui peuvent instruire , & peu qui instruisent avec une certaine méthode , & , pour ainsi dire , avec un certain agrément. C'est bien assez d'avoir une bonne matiere entre les mains , on se néglige sur la forme. M. de l'Hôpital a donné un Livre aussi bien fait que bon ; il a eu l'art de ne faire d'une infinité de choses qu'un assez petit Volume ; il y a mis cette brieveté & cette netteté si délicieuses pour l'esprit ; l'ordre & la précision des idées l'ont presque dispensé d'employer des paroles ; il n'a voulu que faire penser , plus soigneux d'exciter les découvertes d'autrui , que jaloux d'étaler les siennes.

Aussi cet Ouvrage a-t-il été reçu avec un applaudissement universel : car l'applaudissement est universel , quand on peut très-facilement compter dans toute l'Europe les suffrages qui manquent , & il doit toujours en manquer quelques-uns aux choses nouvelles & originales , sur-tout quand elles demandent à être bien entendues. Ceux qui remarquent les événemens de l'Histoire des Sciences , savent avec quelle avidité l'Analyse des Infiniment petits a été faisie par tous les Géometres naissans , à qui l'ancienne & la nouvelle méthode sont indifférentes , & qui n'ont d'autre intérêt que celui d'être instruits. Comme le dessein de l'Auteur avoit été principalement de faire des Mathématiciens , & de jeter dans les esprits les semences de la haute Géométrie , il a eu le plaisir de voir qu'elles y fructifioient tous les jours , & que des Problemes réservés autrefois à ceux qui avoient vieilli dans les épines des Mathématiques , devenoient des coups d'essai de jeunes gens. Apparemment la révolution deviendra encore plus grande , & il se seroit trouvé avec le temps autant de Disciples qu'il y eût eu de Mathématiciens.

Après avoir vû l'utilité dont étoit son Livre des Infiniment petits , il s'étoit engagé dans un autre travail aussi propre à faire des Géometres. Il embrassoit dans ce dessein les Sections Coniques , les Lieux Géométriques , la Construction des Equations , & une Théorie des Cour-

134 HISTOIRE DE L'ACADEMIE ROYALE
des Méchaniques. C'étoit proprement le plan de la Géométrie de M. Descartes, mais plus étendu, & plus complet. Il ne prétendoit pas que cet ouvrage fût aussi original, ni aussi sublime que le premier; il auroit pû tourner ses recherches du côté du Calcul Intégral, qui suit & qui suppose le Différentiel, qui a de plus grandes difficultés, & jusqu'à présent insurmontables, & qui par là occupe aujourd'hui les plus grands Géometres, & est devenu l'objet de leur ambition: mais il avoit préféré une entreprise dont le Public devoit tirer une instruction plus générale, & plus nécessaire, & le zele de la Géométrie l'avoit emporté sur l'intérêt de sa gloire. Cependant je suis témoin qu'il ne pouvoit s'empêcher de regretter le Calcul Intégral.

Cet ouvrage étoit presque fini, lors qu'au commencement de 1704. il fut attaqué d'une fièvre qui ne paroissoit d'abord aucunement dangereuse: mais comme on vit qu'elles résistoit à tous les différens remedes qu'on employoit, on commença à craindre, & le Malade n'attendit pas un plus grand péril pour songer à la mort. Il s'y disposa d'une maniere très-édifiante; & enfin il tomba dans une apoplexie dont il mourut le lendemain 2 Février, âgé de 43 ans.

Quelques-uns ont attribué sa mort aux excès qu'il avoit faits dans les Mathématiques; & ce qui pourroit le confirmer, j'ai sù de lui-même que souvent des matinées qu'il avoit destinées à cette étude étoient devenues des journées entieres sans qu'il s'en appercût. Il avoit voulu y renoncer par le soin de sa santé: mais il n'avoit jamais pu soutenir cette privation plus de 4 jours. De plus, il sera assez naturel de croire qu'il avoit dû faire de grands efforts d'esprits, quand on songera à quel point il étoit parvenu à l'âge de 43 ans, & combien de temps dans une vie si courte avoit été perdu pour les Mathématiques. Il avoit servi; il étoit d'une naissance qui l'engageoit à un grand nombre de devoirs; il avoit une Famille, des soins

domestiques, un bien très-considérable à conduire, & par conséquent beaucoup d'affaires; il étoit dans le commerce du monde, & il y vivoit à peu près comme ceux dont cette occupation oisive est la seule occupation; il n'étoit pas même ennemi des plaisirs: voilà bien des distractions, & quelque rare talent qu'on lui suppose pour les Mathématiques, il est impossible qu'une prodigieuse application n'ait suppléé au peu de temps. Cependant il n'a jamais paru que l'étude ait altéré sa santé, il avoit l'air de la meilleure & de la plus ferme constitution qu'on puisse désirer. Il n'étoit nullement sombre, ni réveur; au contraire, assez porté à la joie, & il sembloit n'avoir payé par rien ce grand génie mathématique.

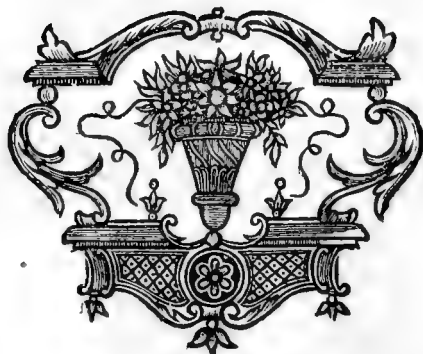
On sentoit dans ses discours les plus ordinaires la justesse, la solidité; en un mot, la Géométrie de son esprit: il étoit d'un commerce facile, & d'une probité parfaite, ouvert & sincère, convenant de ce qu'il étoit, parce qu'il l'étoit, & n'en tirant nul avantage, véritable modestie d'un grand homme; prompt à déclarer qu'il ignoroit, & à recevoir des instructions, même en matière de Géométrie, s'il lui étoit possible d'en recevoir; nullement jaloux, non par la connoissance de sa supériorité, mais par équité naturelle: car sans cette équité, ceux qui se croient, & qui sont même les plus supérieurs aux autres, sont encore jaloux.

Il avoit épousé Marie Charlotte de Romilley de la Chefnelaye, Demoiselle d'une ancienne noblesse de Bretagne, & dont il a eu de grands biens. Leur union a été jusqu'au point qu'il lui a fait part de son génie pour les Mathématiques. Il en a laissé un fils, & trois filles.

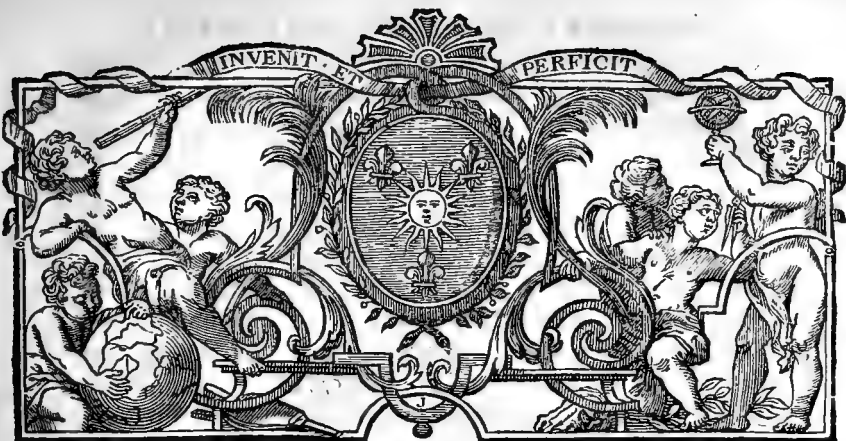
Sa place d'Académicien Honoraire a été remplie par M. le Marquis de Dangeau, Gouverneur de Touraine, Conseiller d'Etat ordinaire, & Grand Maître des Ordres Royaux & Militaires de Notre-Dame du Mont-Carmel,

136 HISTOIRE DE L'ACADE'MIE ROYALE
& de S. Lazare de Jérusalem, Chevalier des Ordres du
Roi , Chevalier d'Honneur de Madame la Duchesse
de Bourgogne, l'un des Quarante de l'Académie Fran-
çoise.

F I N.



ME'MOIRES



MEMOIRES

DE

MATHEMATIQUE

ET

DE PHYSIQUE,

TIRE'S DES REGISTRES

de l'Académie Royale des Sciences.

De l'Année M. DCCIV.

OBSERVATION

De la quantité d'eau de pluie qui est tombée à l'Observatoire, avec les hauteurs du Thermometre & du Barometre pendant l'année 1703.

PAR M. DE LA HIRE.



ORSQUE j'entrepris de faire des observations exactes sur la quantité d'eau de pluie qui tomboit à l'Observatoire pendant le cours d'une année, je n'avois point d'autre vûe que d'en tirer quelques connoissances pour l'origine des Fontaines, surquoi j'ai fait plusieurs remarques, & dont j'ai tiré

1704.
Janvier.

1704.

A

une utilité très-considérable pour la construction des Cisternes, comme je l'ai rapporté dans le Mémoire que j'ai lu à l'Assemblée publique de l'Académie le 18 Avril 1703. Mais comme on est persuadé par la plus grande partie des observations qu'il ne pleut ordinairement que lorsque l'air devient plus léger, ce qu'on connoît par la descente du mercure dans le tuyau du Barometre, j'ai cru que je devois joindre aux observations de la pluie, celles du Barometre, & rapporter en même temps les hauteurs du Thermometre, pour connoître quel a été le degré de chaleur ou de froid lorsque la pluie a été plus ou moins abondante. J'ai comparé ces hauteurs différentes du Thermometre, à celles où il demeure toujours dans le fond des Carrieres de l'Observatoire, laquelle je considere comme la chaleur moyenne & l'état moyen du Thermometre rempli d'esprit de vin dont je me sers : & cette hauteur est de 48 degrés.

Voici la quantité d'eau de pluie qui est tombée à l'Observatoire pendant chaque mois de l'année 1703, laquelle est mesurée par la hauteur qu'elle auroit, si rien ne s'étoit dissipé ou évaporé. J'ai déjà rapporté dans d'autres Mémoires semblables à celui-ci, la maniere dont je fais ces observations ; c'est pourquoi je ne le répéterai pas ici. Et quoique ces observations aient été faites jour par jour, j'ai cru qu'il suffiroit d'en donner le résultat de chaque mois, avec quelques remarques à ce sujet, & principalement des vents qui ont régné.

En Janvier la hauteur de l'eau de pluie a été de 9 lignes $\frac{1}{2}$, qui est presque toute tombée vers le commencement du mois, avec un vent du côté de l'Ouest, tirant tantôt au Sud & tantôt au Nord. Dans la fin du mois le vent a presque toujours été du côté du Nord & sans pluie.

En Février il y a eu 14 lignes & $\frac{3}{4}$ d'eau. Le vent a été assez inconstant : mais la plus grande partie du mois il a été vers le Sud.

En Mars il n'a plu que 4 lignes, quoique le vent ait

presque toujours été vers l'Ouest entre le Nord & le Sud.

En Avril il est tombé 16 lignes & $\frac{1}{4}$ d'eau distribuée assez également dans tout le mois, le vent étant presque toujours au Sud en tirant vers l'Ouest, & rarement vers le Nord.

En Mai j'ai trouvé 34 lignes $\frac{1}{2}$ d'eau. Le vent dominant a été l'Ouest, qui s'est tourné quelquefois au Sud, mais le plus souvent au Nord.

En Juin il n'est tombé que 23 lignes d'eau, le vent étant presque toujours à l'Ouest.

En Juillet il a plu 28 lignes $\frac{1}{4}$, qui sont tombées au commencement, au milieu & à la fin du mois. Dans le temps de pluie le vent étoit presque toujours à l'Ouest tirant au Sud & au Nord, & dans les intervalles il a été assez souvent au Nord & un peu à l'Est.

En Août la pluie a fourni 23 lignes $\frac{1}{2}$, dont il en est tombé 13 lignes $\frac{1}{2}$ le 12 du mois, avec un peu d'orage au commencement, le vent étant Est Sud-Est. Le vent a presque toujours été au Nord, & tirant quelquefois à l'Est & à l'Ouest.

En Septembre toute la hauteur de l'eau de la pluie est montée à 20 lignes $\frac{3}{4}$, qui a été distribuée dans tout le mois. Le vent dominant a été le Sud-Ouest.

En Octobre j'ai recueilli 17 lignes d'eau, qui est tombée en petite quantité à chaque fois pendant le cours du mois. Le vent a presque toujours été à l'Ouest tirant au Sud, & rarement au Nord & à l'Est.

En Novembre je n'ai ramassé que 13 lignes d'eau, qui est tombée au commencement & vers la fin du mois avec un vent de Sud. Depuis le 4 du mois jusqu'au 19 il n'a point plu, le vent étant toujours à l'Est, & quelquefois au Nord.

En Décembre il n'est tombé que 3 lignes & $\frac{1}{4}$ d'eau : mais il y a eu beaucoup de brouillards. Dans les deux tiers du mois vers la fin il n'a point plu, quoique le vent ait été assez souvent vers l'Ouest, hormis dans les derniers jours, où il étoit aux environs de l'Est.

La somme de l'eau de la pluie de toute l'année a été de 208 lignes $\frac{1}{4}$, ou bien 17 pouces 4 lignes $\frac{1}{4}$, ce qui est un peu moins qu'à l'ordinaire qui est de 19 pouces; enforte que l'on peut dire que cette année est une des plus seches de ces pays-ci.

Les quatre mois de Mai, Juin, Juillet & Août, ont plus donné d'eau que les huit autres ensemble, ce qui arrive ordinairement, quoiqu'il n'ait pas fait d'orages considérables.

Le peu de neige qui est tombée dans le commencement de cette année, ne mérite pas qu'on y ait quelque égard. On voit par-là que ce n'est pas la grande quantité de neige qui rend la terre plus fertile, comme on le croit communément, puisque cette année a donné beaucoup de grains & de fruits. Il est vrai que la neige demeurant long-tems sur la surface de la terre, y peut retenir les sels qui s'en élèvent continuellement, & qui rentrant dans la terre lorsque la neige se fond, peuvent la rendre plus fertile: mais aussi il peut y avoir des pluies qui feront le même effet, si elles se trouvent imprégnées des mêmes sels.

Le froid n'a pas été considérable dans tout le mois de Janvier & de Février, où il est ordinairement le plus grand, puisque mon Thermometre n'est pas descendu jusqu'à 26 degrés; & j'ai remarqué qu'il ne commence à geler que quand ce Thermometre est à 32 degrés; d'où l'on peut voir aussi qu'il n'y a pas eu de gelée considérable. Dans les derniers mois de cette année, le froid n'a pas été si grand qu'au commencement.

Si le froid n'a pas été considérable pendant toute cette année, la chaleur n'a été aussi que médiocre & de peu de durée; & je trouve que les jours les plus chauds ont été le 27 Mai, les derniers jours de Juillet & les premiers d'Août, où le Thermometre étoit vers 60 degrés. Le jour le plus chaud a été le 12 Août, où le Thermometre est monté à 64 degrés. Ces observations sont toujours faites vers le lever du Soleil, qui est le tems où l'air est le plus froid; & entre deux & trois heures après midi, la

chaleur est la plus grande de la journée. Pendant l'Été j'ai remarqué qu'entre deux & trois heures après midi, le Thermometre s'éleve de 10 ou 12 degrés plus qu'il n'est le matin au lever du Soleil, quoique ce Thermometre soit toujours à l'ombre.

Le 28 jour d'Avril, le Thermometre ayant été le matin à 42 degrés, & le Barometre à 27 pouces 3 lignes $\frac{1}{2}$, il y eut un orage & un tonnerre assez fort; & l'on m'a dit que vers Villeneuve S. Georges, il étoit tombé sur la terre une très-grande flamme qui avoit épouvanté ceux qui étoient aux environs, & qui n'avoit fait aucun mal à ceux qui étoient à l'endroit où elle tomba.

Pour le Barometre, il a été au plus haut le 10 Décembre au soir à 28 pouces 4 lignes & $\frac{1}{6}$ à la hauteur de la grande salle de l'Observatoire, & dans tout le mois de Décembre, le Barometre s'est toujours maintenu très-haut: aussi il n'a plu que 3 lignes $\frac{1}{4}$, & c'est ce qui confirme ce qu'on remarque ordinairement, qu'il ne pleut que très-rarement quand le Barometre est plus élevé que son état moyen. Il est aussi arrivé à peu près la même chose dans le mois de Mars, où il n'a plu que 4 lignes: mais le Barometre n'a pas été tout à fait si haut que dans le mois de Décembre.

Le 3 Janvier le Barometre étoit au plus bas de l'année, à 26 pouces 6 lignes $\frac{1}{2}$ avec un peu de pluie, & sans orage, comme il arrive assez souvent quand il est fort bas. Ainsi la différence entre la plus grande & la moindre hauteur du Barometre, a été cette année de 1 pouce 9 lignes $\frac{1}{2}$, qui est un peu plus que l'ordinaire qui ne va qu'à 1 pouce 6 lignes.

J'ai observé le 18 Décembre la déclinaison de l'aiguille aimantée de 9° 6' du Nord vers l'Ouest avec une aiguille de 8 pouces de longueur. Cette aiguille est très-bien faite, & elle est renfermée dans une boîte de bois de figure carrée; & pour faire l'observation, je place toujours le côté de cette boîte, au même endroit d'un pilier de la terrasse basse de l'Observatoire, dont je suis assuré de sa

6 MEMOIRES DE L'ACADE'MIE ROYALE
position dans la ligne méridienne, par des observations
très-exactes du passage du centre du Soleil dans le mé-
ridien.

OBSERVATION

De l'Eclipse de Lune du 23 Décembre 1703
à l'Observatoire.

PAR M. DE LA HIRE.

1704.
29. Janvier.

LE Ciel a été entièrement couvert pendant la durée
de cette Eclipse, hormis à 5^h 3' 22" que la Lune pa-
rut assez claire entre des nuages, & j'observai avec le
Micrometre que la partie éclairée du diametre de la Lu-
ne étoit de 17' 30", & par la grandeur du diametre de la
Lune à la hauteur où elle étoit, l'Eclipse auroit dû être
alors de 4 doigts 56 minutes : mais à la vûe simple elle ne
paroissoit que de 4 doigts. L'ombre de la terre sur le disque
de la Lune ne paroissoit pas aussi bien terminée qu'on la
voit ordinairement : c'est pourquoi on ne doit pas trop
s'assurer sur cette observation qui n'a été faite que fort à
la hâte; car les nuages couvrirent aussi-tôt la Lune qui ne
parut plus ensuite.

OBSERVATION SUR UNE HYDROPISSIE DE CERVEAU.

PAR M. DU VERNEY le jeune.

1704.
19. Janvier.

AU mois de Mai de l'année 1701 je fus appelé pour
voir une jeune Demoiselle qui n'avoit qu'environ
quatre à cinq ans. Elle étoit tombée depuis quelque temps

dans une langueur causée par une fièvre lente qui la minoit peu à peu, & qui ne parut d'abord qu'un rhume.

Le poulx de la malade battoit tantôt vite, & tantôt lentement : de plus il étoit intermittent; & enfin il s'y faisoit de temps en temps une espèce de suspension; ce qui fit craindre qu'elle n'eût un polype dans le cœur. Cependant la respiration ne laissoit pas d'être libre, malgré le rhume qui avoit toujours continué, & qui étoit devenu très-grand.

Elle avoit le sommeil assez bon : mais les quinze derniers jours de sa maladie, elle tomba dans un très-grand abattement & une grande pesanteur de tête, malgré l'usage des remèdes spiritueux & évacuatifs qu'on lui donnoit. Environ huit jours avant son décès, la bouche lui devint mouffeuze, & le poulx toujours vite & très-pressé. J'ai observé la même chose en plusieurs personnes attaquées de la même maladie, où l'on croyoit cependant que le cerveau n'étoit nullement intéressé.

Les trois derniers jours il survint à la malade une boursofflure qui commença à la joue droite : elle se répandit ensuite peu à peu tout autour du corps, & descendit jusqu'aux aînes; ensorte que les bras, les jambes & les cuisses n'en étoient point attaqués. On voyoit augmenter cette boursofflure par ondes; & dans les endroits où on la pressoit, on sentoit sous les doigts comme de l'air s'échapper, & faire une espèce de crépitation. Enfin cette jeune Demoiselle mourut le 26 Juin de la même année 1701. Le lendemain j'en fis l'ouverture. Je commençai par le crâne; ce qui ne diminua en rien la boursofflure. Quoique les vaisseaux de la dure-mère parussent fort remplis, il ne s'y trouva que fort peu de sang. Ayant séparé la faux, & pénétré dans les ventricules, il en sortit environ un grand verre de sérosité claire & transparente; & il y a certainement de quoi s'étonner de ce que le crâne & la dure-mère ayant été levés, & la tête ayant demeuré en cet état, & même panchée pendant plus de deux heures, parce qu'on attendoit des parens, il ne se

§ MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
fit durant tout ce temps-là , aucun épanchement de cette
liqueur.

Le lacin choroïde étoit extrêmement lavé & même
usé , à peu près comme l'étoit l'épiploon , ainsi qu'on le
dira dans la suite.

Je n'eus pas plutôt appliqué le scalpel à la peau du ven-
tre , que toute la boursouffure dont j'ai parlé , disparut ,
exhalant une odeur cadavereuse & insupportable. Je di-
rai ici en passant , au sujet de cette boursouffure , qu'il
est assez étonnant que cette raréfaction , qui ne gonfle &
ne bouffit les animaux qu'après la mort (ce qui fait que
les noyés reviennent sur l'eau) ait ici paru dans le sujet
vivant.

L'épiploon étoit fondu tel qu'on le voit ordinairement
aux ascitiques ; ce qui doit faire juger que ce n'est pas tou-
jours la présence & l'impression des eaux contenues dans
le bas ventre , qui cause la fonte de la graisse de cette par-
tie , & l'altération des autres.

Les intestins se trouverent fort remplis d'air. Le pan-
creas étoit pareillement fondu ; mais de telle maniere
qu'il n'en restoit aucun vestige : cependant toutes les
glandes du mesentere étoient endurcies , & la plupart
remplies d'une matiere à peu près semblable à du vieux
suif. Le foie parut assez beau. La ratte étoit petite &
squirreuse. La vésicule du fiel étoit fort remplie d'une li-
queur visqueuse , qui avoit teint les parties voisines d'un
rouge brun. Les autres parties du bas ventre étoient dans
leur disposition naturelle.

Le sternum ayant été levé , les pòumons parurent rem-
plis d'air , grenelés & adhérens du côté gauche.

Le pericarde ayant été ouvert , on apperçut une tu-
meur à la base du cœur du côté gauche sur l'artere du pou-
mon. Cette tumeur étoit de la grosseur d'une noix , &
dure & squirreuse : ses racines , qui étoient grenelées , pas-
soient entre les vaisseaux , & elle venoit s'attacher à l'épi-
ne. Il ne se trouva rien de particulier au cœur.

OBSERVATION

OBSERVATION

*D'une Tache qui a paru dans le Soleil au mois de
Janvier 1704. à l'Observatoire.*

PAR M. DE LA HIRE.

Cette Tache a paru tout d'un coup sur le disque apparent du Soleil, comme il arrive à toutes les Taches : car le jour précédent à celui où je l'ai découverte, il n'y paroïssoit rien, quoiqu'elle eût dû être déjà assez avancée. Je la vis le 7. de Janvier à midi, qui passa au méridien $7'' \frac{1}{2}$ avant le dernier bord du Soleil. Sa hauteur méridienne apparente étoit de $18^{\circ} 42' 20''$, & celle du bord supérieur du Soleil, de $19^{\circ} 0' 20''$.

1704.
19. Janvier.

Le 8. je ne pus observer que sa hauteur méridienne apparente, qui étoit de $18^{\circ} 49' 25''$.

Le 10. sa hauteur méridienne apparente étoit de $19^{\circ} 7' 0''$. Celle du bord supérieur du Soleil de $19^{\circ} 24' 30''$. Elle passa au méridien avant le dernier bord du Soleil $42'' \frac{1}{2}$.

Le 11. sa hauteur méridienne apparente étoit de $19^{\circ} 16' 0''$, & celle du bord supérieur du Soleil de $19^{\circ} 33' 30''$. Elle passa au méridien $13''$. après le centre du Soleil.

Les jours suivans ayant été toujours couverts, je n'ai pu observer le Soleil que le 16, où la hauteur méridienne apparente de la Tache étoit de $20^{\circ} 0' 5''$, & celle du bord supérieur du Soleil de $20^{\circ} 24' 50''$. Elle passa au méridien $15'' \frac{1}{2}$ après le premier bord du Soleil.

Le 17. la hauteur méridienne apparente de la Tache étoit de $20^{\circ} 16' 25''$, & celle du bord supérieur du Soleil de $20^{\circ} 36' 0''$. Elle passa au méridien $7''$ après le premier bord du Soleil.

Le 18. à 11^h du matin, j'observai encore la Tache proche du bord Occidental du Soleil avec une Lunette de

1704.

B

10 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
16 pieds: car je ne pouvois pas la distinguer dans la Lunette du quart de cercle de 3 pieds; & ayant appliqué le Micrometre à cette Lunette de 16 pieds, je trouvai qu'elle n'étoit alors éloignée du bord du Soleil que de 6' de degré.

Je ne donne point ici les figures différentes sous lesquelles cette Tache a paru, car elle étoit petite, & elle n'étoit composée que de deux ou trois Taches jointes ensemble, & enveloppées dans un même nuage à l'ordinaire, avec quelques autres petites Taches qui étoient aux environs: car il me semble qu'on ne peut pas tirer d'utilité de ces sortes de figures qui changent continuellement. Je remarquerai seulement, comme j'ai déjà fait dans quelques observations semblables, qu'il me paroissoit distinctement un espace plus clair que le reste du Soleil, qui environnoit le nuage où les Taches obscures étoient renfermées, ce qui pourroit avoir quelque rapport aux facules qu'on remarque quelquefois dans l'endroit du Soleil où les Taches ont disparu.

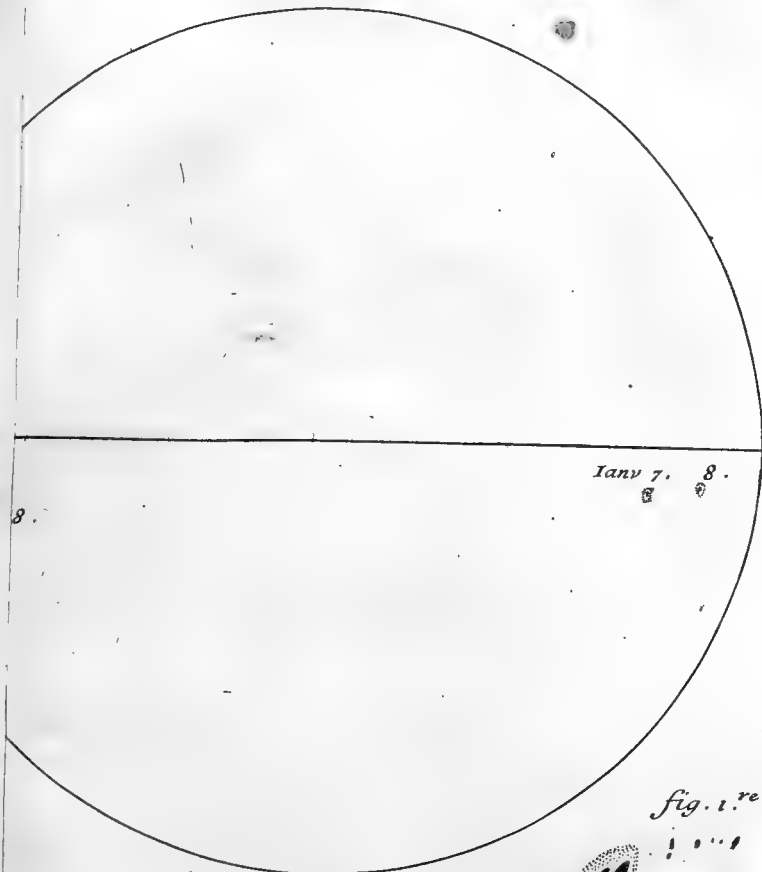
O B S E R V A T I O N
DE DEUX TACHES DANS LE SOLEIL:
PAR M. MARALDI.

1704.
9. Janvier.

ON voit présentement deux amas de Taches dans le Soleil, dont l'un est proche de son bord Oriental, l'autre du bord Occidental près de disparaître. Il y a longtemps qu'on n'a point vû dans le Soleil en même temps des Taches si éloignées les unes des autres, car pour l'ordinaire on n'en voit qu'à un endroit.

Nous les apperçûmes le 7. de Janvier 1704. le Soleil ayant paru au travers des nuages, & nous déterminâmes le même jour, aussi-bien que le suivant, leur situation par rapport aux cercles de la Sphere. La Tache Occidentale est composée d'un amas de plusieurs petites Taches, qui

Septentrion



8.

Iany 7. 8.

midy

fig. 1.^{re}

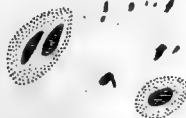


fig. 4.



fig. 5.



3.

Septentrion

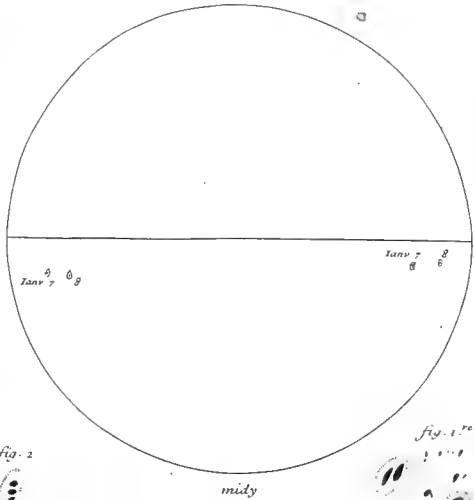


fig. 2



fig. 3.



fig. 4.



fig. 5.



fig. 1^{re}



toutes ensemble occupent dans le Soleil environ la vingt-cinquième partie de son diamètre. Deux de ces Taches principales étoient environnées d'une nébulosité, comme sont ordinairement les Taches du Soleil, & toute la Tache, vûe avec une Lunette de 18 pieds parut de la manière qui est représentée dans la Figure I.

Il y a apparence que cette Tache s'est formée dans le disque apparent du Soleil depuis peu de jours : car le 4. de Janvier le Soleil étant clair il ne parut aucune Tache, quoique j'y fisse attention : je n'en aperçus pas non plus le 5, ayant aussi observé le Soleil. Le 6. le Ciel fut couvert : cependant si elle eût été formée, elle auroit pu être visible dès le 27 Décembre dernier.

La Tache qui est près du bord Oriental du Soleil paroît longue & étroite, & le 8. elle parut un peu plus large que le jour précédent, comme il doit arriver par raison d'Optique. Cette Tache vûe avec une Lunette de 18 pieds, paroïssoit comme dans la II. Figure.

Ces deux Taches sont situées dans la partie australe du Globe du Soleil, comme toutes celles qui ont paru depuis long-temps dans cet astre. L'Occidentale a une latitude australe de 7 degrés, & elle est environ de deux degrés & demi plus Septentrionale que l'Orientale, qui est située à 9^d & demi de latitude australe. Cette latitude est la même que celle de la Tache qui parut au mois de Novembre 1700. Lorsqu'elle fera arrivée au milieu du Soleil, nous les comparerons ensemble pour voir si elle a aussi la même longitude.



SUIVE DES OBSERVATIONS.
DES TACHES

PAR M. MARALDI.

1704.
19. Janvier.

DE deux amas de Taches que nous avons observés dans le Soleil le 7. & le 8. de Janvier, le 10. du même mois, après un jour de temps couvert, on n'en aperçut plus que celui qui étoit dans la partie Orientale : les autres Taches qui étoient dans la partie Occidentale, avec une latitude méridionale de 7 degrés, étoient disparues, ayant passé de l'hémisphère apparent du Soleil à l'hémisphère supérieur occulte. La Tache qui restoit dans le Soleil, de mince & longue qu'elle étoit du commencement, étoit devenue plus grande & plus ronde, s'étant approchée du milieu de son disque, enforte que le 11. de ce mois à midi elle n'en étoit éloignée que de 9 degrés de la circonférence du Soleil ; d'où nous avons calculé qu'elle a dû être au milieu de cet astre le 12. à 5 heures du matin.

Le 16 de Janvier, après quatre jours de temps couvert, nous déterminâmes la situation de la Tache dans le Soleil, comme les jours précédens, & elle s'étoit approchée de son bord Occidental. La figure de la Tache avoit un peu changé : car de trois Taches dont elle étoit composée auparavant, on n'en voyoit plus que deux dans une situation un peu différente, enfermées dans une nébulosité, comme on voit dans la IV. Figure.

Le 17. elle paroissoit de la même longueur que les jours précédens : mais elle étoit rétrécie comme dans la Figure V.

Le 18. Janvier elle paroissoit fort près du bord du Soleil, & elle s'étoit rétrécie de sorte, qu'on ne la pouvoit plus voir qu'avec de grandes Lunettes, avec lesquelles

elle paroïffoit comme un trait obscur de la même longueur qu'auparavant , ce qui fait connoître qu'elle n'est diminuée qu'en apparence , comme il doit arriver par raison d'Optique.

Nous avons remarqué par les premières observations que cette Tache avoit une latitude méridionale de 9 degrés & demi , ce qui a été confirmé par la suite des observations. Parmi les Taches observées les années précédentes , nous en trouvons plusieurs qui avoient la même latitude méridionale que la dernière de cette année : ce sont celles qui ont paru au mois de Novembre 1700 , celle du mois de Mai de 1695 , & celle du mois de Juin 1688.

M. Cassini ayant comparé la Tache du mois de Mai de l'an 1688. avec plusieurs autres qui avoient paru auparavant , trouve entre ces apparitions un nombre de révolutions de 27 jours 12^h 20 minutes , ce qui lui fit conjecturer que c'étoit le même lieu du Soleil dans lequel ces Taches s'étoient formées. Ayant comparé le temps que la Tache de cette année est arrivée au milieu du Soleil avec le temps que la Tache de 1688. y arriva , & supposant la même révolution de 27. jours 12^h 20 minutes , nous trouvons dans ces deux intervalles 194 révolutions du Soleil, moins deux jours ; ensorte que si la Tache de cette année eût été la même que celle de l'an 1688 , elle n'auroit dû passer que deux jours plus tard au milieu du Soleil ; ce qui fait connoître que si ces deux lieux ne sont pas les mêmes , ils sont au moins fort proches. Ayant fait la même comparaison de cette Tache avec celle du mois de Novembre de 1700 , nous trouvons que celle de l'an 1700. étoit 60 degrés de la circonférence du Soleil plus à l'Orient que celle de cette année.



*EXTRAIT DES OBSERVATIONS
DE L'ECLIPSE DE LUNE,*

Du 23 Décembre 1703, faites à Dunkerque par M. Chazelles, à Montpellier par Messieurs de Plantade & Clapier, à Arles par M. Davizard, à Avignon par le R. P. Bonfa, & à Marseille par le R. P. de Laval Professeur d'Hydrographie.

PAR M. CASSINI le fils.

1704.
23. Janvier. **A** Paris, le Ciel fut couvert de nuages pendant le temps de l'Eclipse, & on ne l'apperçut entre les nuages qu'à 5^h 4' qu'elle parut éclipsee à la vûe simple d'environ 5 doigts.

La Lune fut couverte à Dunkerque de foibles nuages, qui empêcherent de déterminer le commencement de l'Eclipse.

4 47' 30"	A Montpellier, commencement de l'Eclipse.
4 55 0	A Arles.
4 53 48	A Avignon, commencement de l'Eclipse douteux.
4 54 30	A Marseille.
7 30	Différence entre Montpellier & Arles.
6 18	Différence entre Montpellier & Avignon.
7 0	Différence entre Montpellier & Marseille.
4 50 56	A Montpellier, Grimaldi dans l'ombre.
57 40	A Marseille, Grimaldi tout dans l'ombre.
6 44	Différence entre Montpellier & Marseille.
4 45 20	A Dunkerque, Aristarque sur le bord de l'ombre.

- 55' 10" A Montpellier, l'ombre touche Aristarque.
- 9 50 Différence entre Dunkerque & Montpellier.
- 4 47 20 A Dunkerque, Aristarque dans l'ombre.
- 57 21 A Montpellier, Aristarque est tout dans l'ombre.
- 5 1 0 A Arles, Aristarque couvert.
- 5 0 23 A Avignon, Aristarque.
- 10 1 Différence entre Dunkerque & Montpellier.
- 13 40 Entre Dunkerque & Arles.
- 13 3 Entre Dunkerque & Avignon.
- 4 58 22 A Montpellier, Kepler au bord de l'ombre.
- 5 1 46 A Marseille, Kepler le bord à l'ombre.
- 3 24 Différence entre Montpellier & Marseille.
- 4 49 30 A Dunkerque, Gassendi.
- 4 59 34 A Montpellier, Gassendi est au bord de l'ombre.
- 5 2 36 A Marseille, Gassendi entre dans l'ombre.
- 10 4 Différence entre Dunkerque & Montpellier.
- 13 6 Entre Dunkerque & Marseille.
- 5 0 23 A Montpellier, l'ombre touche la mer des humeurs.
- 5 5 0 A Arles, commencement de la mer des humeurs.
- 5 5 22 A Marseille, le bord de la mer des humeurs sur le bord de l'ombre.
- 4 37 Différence entre Montpellier & Arles.
- 4 59 Entre Montpellier & Marseille.
- 4 56 0 A Dunkerque, Heraclides sur le bord de l'ombre.
- 5 5 27 A Montpellier, Heraclides touche l'ombre.

	9'	27''	Différence entré Dunkerque & Montpellier.
5	6	37	A Montpellier, le bord de Copernic.
5	10	0	A Arles, un bord de Copernic.
5	11	35	A Avignon, l'ombre rafe Copernic.
5	12	14	A Marseille, Copernic entre dans l'ombre.
	3	23	Différence entre Montpellier & Arles.
	4	58	Entre Montpellier & Avignon.
	5	37	Entre Montpellier & Marseille.
5	8	21	A Montpellier, le milieu de Copernic.
	11	30	A Arles, le milieu de Copernic.
	3	9	Différence entre Montpellier & Arles.
5	10	46	A Montpellier, Helicon dans l'ombre.
	13	14	A Avignon, Helicon.
	2	28	Différence entre Montpellier & Avignon.
5	11	56	A Montpellier, Eratosthene.
	16	15	A Marseille, Eratosthene entre dans l'ombre.
	4	19	Différence entre Montpellier & Marseille.
5	15	14	A Montpellier, l'ombre à Pitatus.
	19	56	A Marseille, Pitatus sur le bord de l'ombre.
	4	42	Différence entre Montpellier & Marseille.
5	16	24	A Montpellier, Archimede au bord de l'ombre.
	23	0	A Marseille, Archimede entre dans l'ombre.
	6	36	Différence entre Montpellier & Marseille.
5	16	57	A Montpellier, Platon au bord de l'ombre.
	20	0	A Arles, premier bord de Platon.
	20	14	A Avignon, l'ombre rafe Platon.

3'	3''	Différence entre Montpellier & Arles.
3	17	Différence entre Montpellier & Avignon.
5 18	9	A Montpellier Platon tout dans l'ombre.
22	0	A Arles Platon tout couvert.
3	51	Différence entre Montpellier & Arles.
5 10	15	A Dunkerque, Tycho sur le bord de l'ombre.
5 19	32	A Montpellier, l'ombre au bord de Tycho.
5 22	30	A Arles, commencement de Tycho.
5 25	40	A Marseille, Tycho sur le bord de l'ombre.
9	17	Différence entre Dunkerque & Montpellier.
12	15	Entre Dunkerque & Arles.
15	25	Entre Dunkerque & Marseille.
5 12	15	A Dunkerque, le milieu de Tycho.
5 20	5	A Montpellier, le milieu de Tycho dans l'ombre.
5 23	20	A Arles, le milieu de Tycho.
7	50	Différence entre Dunkerque & Montpellier.
11	5	Différence entre Dunkerque & Arles.

La Lune se couvre ensuite entièrement de nuages à Dunkerque.

5 21	0	A Montpellier, Tycho dans l'ombre.
25	0	A Arles, Tycho dans l'ombre.
27	22	A Marseille, Tycho tout dans l'ombre.
4	0	Différence entre Montpellier & Arles.
6	22	Entre Montpellier & Marseille.
5 22	36	A Montpellier, le bord de la mer de sérénité.
26	30	A Arles, un bord de la mer de sérénité.
3	54	Différence entre Montpellier & Arles.

18 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

- 5 24' 1'' A Montpellier, Manilius dans l'ombre.
 28 30 A Arles, Manilius.
 26 55 A Avignon, Manilius.
 29 48 A Marseille, Manilius tout dans l'ombre.

 4 29 Différence entre Montpellier & Arles.
 2 54 Entre Montpellier & Avignon.
 5 47 Entre Montpellier & Marseille.

 5 27 16 A Montpellier, Ménélaus au bord de l'ombre.
 32 30 A Marseille, Ménélaus sur le bord de l'ombre.

 5 14 Différence entre Montpellier & Marseille.

 5 28 40 Ménélaus, dans l'ombre à Montpellier.
 30 11 A Avignon, Ménélaus.
 33 36 A Marseille, Ménélaus tout dans l'ombre.

 1 31 Différence entre Montpellier & Avignon.
 4 55 Entre Montpellier & Marseille.

 5 31 46 A Montpellier, Pline entierement dans l'ombre.
 33 56 A Avignon, Pline.

 2 10 Différence entre Montpellier & Avignon.

 5 35 11 A Montpellier, sainte Catherine dans l'ombre.
 40 14 A Marseille, sainte Catherine.

 5 3 Différence entre Montpellier & Marseille.

 5 35 58 A Montpellier, le bord de la mer du Nectar.
 39 45 A Arles, commencement de la mer du Nectar.

 3 47 Différence entre Montpellier & Arles.

 5 38 57 A Avignon, *Promontorium acutum*.
 42 18 A Marseille, *Promontorium acutum* entre dans l'ombre.

 3 21 Différence entre Avignon & Marseille.

- à 5 37' 7" A Montpellier, l'ombre rafe Fracastor.
 43 34 A Marseille, Fracastor entre dans l'ombre.
 6 27 Différence entre Montpellier & Marseille.
- à 5 39 24 A Montpellier, le Promontoire du fonge.
 41 49 A Avignon, le Promontoire du fonge.
 2 25 Différence entre Montpellier & Avignon.
- à 5 42 42 A Montpellier, le bord de Taruntius touche
 l'ombre.
 44 30 A Arles, Taruntius.
 47 34 A Marseille, Taruntius entre dans l'ombre.
 1 48 Différence entre Montpellier & Arles.
 4 52 Entre Montpellier & Marseille.
- à 5 42 45 A Montpellier, l'ombre au bord de Proclus.
 45 37 A Avignon, Proclus.
 2 52 Différence entre Montpellier & Avignon.
- à 5 43 39 A Montpellier, Snellius.
 46 45 A Arles, Snellius.
 51 0 A Marseille, Snellius.
 3 6 Différence entre Montpellier & Arles.
 7 21 Entre Montpellier & Marseille.
- à 5 43 48 A Montpellier, l'ombre au bord de la mer
 Caspienne.
 47 30 A Arles, un bord de la mer Caspienne.
 48 21 A Avignon, l'ombre rafe la mer Caspienne.
 49 8 A Marseille, un bord de la mer Caspienne.
 3 42 Différence entre Montpellier & Arles.
 4 33 Entre Montpellier & Avignon.
 5 20 Entre Montpellier & Marseille.

20	MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE	
à 5	44' 48"	A Montpellier, Furnerius au bord de l'ombre.
	46 45	A Arles, Furnerius.
	48 46	A Avignon, Furnerius.
	51 0	A Marseille, Furnerius sur le bord de l'ombre.
	1 57	Différence entre Montpellier & Arles.
	3 58	Entre Montpellier & Avignon.
	6 12	Entre Montpellier & Marseille.
à 5	47 8	A Montpellier, l'ombre à Petavius.
	58 0	A Arles, Petavius.
	2 52	Différence entre Montpellier & Arles.
à 5	47 40	A Montpellier, Langrenus au bord de l'ombre.
	50 41	A Avignon, Langrenus.
	53 0	A Marseille, Langrenus entre dans l'ombre.
	3 1	Différence entre Montpellier & Avignon.
	6 20	Entre Montpellier & Marseille.
à 5	49 50	A Montpellier, la mer Caspienne dans l'ombre.
	52 0	A Arles, fin de la mer Caspienne.
	53 42	A Marseille, fin de la mer Caspienne.
	2 10	Différence entre Montpellier & Arles.
	3 52	Différence entre Montpellier & Marseille.
à 5	53 7	A Montpellier, Immerfion totale.
	57 0	A Arles.
	57 45	A Avignon.
	58 15	A Marseille.
	3 53	Différence entre Montpellier & Arles.
	4 38	Entre Montpellier & Avignon.
	5 8	Entre Montpellier & Marseille.

Donc	1 ^h	5'	37"	Durée totale à Montpellier.
	1	2	0	Durée totale à Arles.
	1	3	57	Durée totale à Avignon.
	1	3	45	Durée totale à Marseille.
Et à	5	20	18	Milieu de l'Eclipse à Montpellier.
	5	26	0	Milieu à Arles.
	5	25	46	Milieu à Avignon.
	5	26	22	Milieu à Marseille.
- Donc	5	42		Différence entre Montpellier & Arles, tirée du milieu de l'Eclipse.
	5	28		Différence entre Montpellier & Avi- gnon.
	6	4		Entre Montpellier & Marseille.

En prenant un milieu entre les différences qui résultent de l'immersion des Taches dans l'ombre, l'on trouve la différence des méridiens entre Dunkerque & Montpellier de $9' 25''$, dont Montpellier est plus Oriental que Dunkerque : mais l'on a déterminé par les Eclipses des Satellites de Jupiter la différence entre Paris & Dunkerque de 3 secondes de temps, dont Dunkerque est plus Oriental que Paris. L'on aura donc la différence des méridiens entre Paris & Montpellier de $9' 28''$. Cette différence est beaucoup plus grande que celle que l'on a déterminée par les observations des Satellites de Jupiter de $6' 10''$, & que celle qui résulte des triangles de la méridienne que l'on a trouvés de $6' 8''$; de sorte qu'il est nécessaire d'attribuer cette différence, au moins en partie, à la difficulté que l'on a eue de régler la pendule de Dunkerque, à cause du mauvais temps qu'il y a fait plusieurs jours auparavant. En comparant les observations des Taches qui ont été faites en même temps à Montpellier & à Arles, & prenant un milieu l'on trouve la différence des méridiens entre ces deux Villes de $3' 20''$ de temps, dont Arles est plus Oriental que Montpellier, peu différente de celle qui est marquée dans la Carte que l'on a dressée sur les triangles de la méridienne, où on l'a déterminée de $49'$ de degré, ou de $3' 16'$ de temps.

Les observations des Taches qui ont été faites à Montpellier & à Avignon donnent la différence entre ces deux Villes de 3' 6" plus petite que celle qui résulte des triangles de la méridienne, où on l'a déterminée de 3' 52".

La différence des méridiens de Montpellier & Marseille, qui résulte des observations des Taches faites dans ces deux Villes, est de 5' 24", qui étant ajoutées à la différence entre Paris & Montpellier de 6' 8", donnent la différence des méridiens entre Paris & Marseille de 11' 31".

L'observation de Montpellier a été faite avec une Lunette de 15 pieds. L'on remarqua à 5^h 38' que l'ombre qui avoit paru mal terminée & ambigue depuis le commencement de l'Eclipse jusqu'à cette heure, paroissoit alors un peu plus nette & mieux tranchée ; ce qui doit rendre les observations suivantes plus exactes que les précédentes. L'Immersion totale se fit entre Langrenus & une Tache obscure à plusieurs rameaux qui est au-dessus de la mer des Crises. Cet endroit du disque est presque diamétralement opposé à celui où commença l'Eclipse, d'où l'on conclut que le centre de la Lune passa fort près du centre de l'ombre. Après l'Immersion totale, la Lune parut d'abord d'une couleur grise & plombée, & si sombre qu'on avoit bien de la peine à y distinguer les Taches. Quelque temps après, elle commença à rougir autour de sa circonférence, & vers les 6 heures & un quart, on y voyoit un disque entier d'ombre assez bien terminé qui occupoit environ la moitié du diamètre de la Lune. On fut fort surpris lorsqu'en retournant à l'observation vers les 6 heures & demie, on ne vit plus la Lune dans le ciel, qui étoit pourtant très-clair & très-serein : cette nuit ayant été la plus favorable & la plus belle qu'on eût pu souhaiter. Ils remarquèrent que quoique le crépuscule qui étoit déjà assez fort parût être une des principales causes d'un Phénomène si extraordinaire, on ne pourroit pourtant la lui attribuer entièrement, puisque l'on distinguoit encore plusieurs étoiles vers l'Orient & vers l'Occident.

A Arles le disque de la Lune parut toujours après sa totale Immersion d'un rouge obscur ou brun ; & pendant le

passage de l'ombre sur le corps de la Lune, cette ombre parut notablement dentelée en plusieurs endroits, comme si c'eût été l'ombre de quelques montagnes de la terre, & particulièrement lorsque le disque de la Lune étoit couvert environ la moitié.

A Avignon le peu d'obscurité qu'avoit l'ombre de la terre, n'a point permis de bien distinguer le commencement de l'Eclipse. La Lune parut pendant tout le temps de l'Eclipse extraordinairement éclairée & d'un rouge fort clair, si bien qu'on auroit jugé qu'elle étoit transparente, que le Soleil étoit derrière son globe, & que ses rayons passoiént à travers, de la même manière qu'ils font à travers certaines pierres qui sont un peu diaphanes. On vit aussi une espèce de couronne lumineuse, parallèle à la circonférence de la Lune; mais il fut impossible d'en bien déterminer la grandeur, quoique le reste du corps de la Lune fut sensiblement plus obscur.

L'observation a été faite à Marseille avec une très-bonne Lunette de 3 pieds, excepté quelques Taches du milieu qui ont été observées avec une bonne Lunette de 13 pieds. A 6^h 5" on voyoit encore les mers qui étoient au Nord-Ouest de la Lune, & qui étoient entrées les dernières dans l'ombre. La Lune étoit rougeâtre au Nord-Ouest; mais au Sud-Est elle étoit fort obscure. A 6^h 30', la Lune a commencé à disparoître, soit à cause du crépuscule qui commençoit à être assez grand, soit à cause des vapeurs qui étoient voisines de l'horison. A 6^h 50', on vit encore la Lune avec beaucoup de peine: mais elle ne paroissoit pas devoir sortir bientôt de l'ombre.

On n'a pu voir depuis ce temps-là le commencement de l'Emersion, ni même la Lune. Cependant le temps étoit fort serein, le Ciel fort net, le vent de Nord ayant fraîchi dès le commencement de l'Eclipse, & augmenté au lever du Soleil. En comparant cette Eclipse avec celle du 20. Juin passé, on voit que la Lune est entrée plus directement & plus profondément dans l'ombre de l'atmosphère de la terre: car on n'a point vu ce Croissant de la manière qu'on remarqua dans l'autre Eclipse.

MANIERE GÉNÉRALE

De déterminer géométriquement le foyer d'une Lentille , formée par deux Courbes quelconques , de même ou de différente nature , telle que puisse être la raison de la réfraction , & de quelque maniere que puissent tomber les rayons de lumiere sur une des faces de cette Lentille ; c'est-à-dire , soit qu'ils y tombent divergens , paralleles , ou convergens.

PAR M. GUISNÉE.

PROBLEME I.

1704.
9. Fevrier.
FIGURE I.

I. Soit *KBLEK* la section d'une Lentille convexe des deux côtés, formée par deux Courbes *KBL*, *KEL*, dont *BE* perpendiculaire aux deux Courbes, & indéfiniment prolongée de part & d'autre, est l'axe commun, & celui de la Lentille.

1. Il est démontré dans la 5^{me} sect. du Livre des Infiniment petits, qu'il y a une infinité de Courbes dont l'axe touche la développée à une certaine distance de son sommet. Soit donc *c* le point où l'axe *BE* de la Courbe *KBL* touche la développée de cette Courbe; *C* le point où l'axe *EB* de la Courbe *KEL* touche la développée de cette dernière Courbe; c'est-à-dire, que *Bc*, & *EC* soient deux rayons des développées de ces deux Courbes, en sorte que les quatre points *c*, *E*, *B*, *C*, soient sur l'axe de la Lentille *BE*. Cela posé,

Soit *A* un point lumineux sur l'axe de la Lentille; *AD*, un rayon incident infiniment proche de *AB*, & par conséquent égal à *AB*; *DF*, le rayon rompu de l'incident *AD*; *AR*, un autre rayon incident infiniment proche de *AD*; *RF*, son rayon rompu.

3. II

3. Il est clair par ce qui est démontré dans la 7^{me} sect. de l'Analyse des Infiniment petits, que le point F où concourent les rayons rompus DF, RF , est l'endroit où la Caustique par réfraction de la Courbe KBL touche l'axe cC de la Lentille, puisque l'on suppose que le point D est infiniment proche de B . D'où il suit qu'aucun rayon rompu ne coupe cet axe au-dessous de F par rapport à la Lentille, & que le même point F est l'endroit où il se réunit un plus grand nombre de rayons venant du point lumineux A , & rompus à la rencontre de la face KBL de la Lentille; c'est pourquoi le point F est le foyer causé par cette face.

4. Si l'on regarde présentement les deux rayons rompus DF, RF , des incidens AD, AR , comme incidens & tombant sur le côté concave de la Courbe KEL aux points H & I ; leurs rayons rompus Hf, If , se rencontreront en un point f de l'axe cC où la Caustique par réfraction de la Courbe KEL le touche, puisque le point H est infiniment proche de E , & le point f sera par conséquent le foyer de la face KEL , ou de la Lentille $KBLEK$ qu'il s'agit de déterminer. Ce foyer f sera positif, lorsqu'il tombera du côté de F par rapport à la Lentille; négatif lorsqu'il tombera du côté de A ; infini lorsque les rayons seront parallèles après avoir traversé la Lentille, & souffert les deux réfractions qui se font sur ses deux faces.

5. Il est clair par la 5^{me} sect. de l'Analyse des Infiniment petits, que les perpendiculaires Dc & HC aux Courbes KBL & KEL , menées par les points D & H , toucheront les développées de ces Courbes aux points c & C , où leurs axes Bc & EC les touchent, puisque par l'hypothese les points D & H sont infiniment proches de B & de E , & partant que $Dc = Bc$ & $HC = EC$.

6. Ayant décrit des centres A & F les petits arcs DT, DS , mené du point c sur les rayons incidens AD, AR prolongés, les perpendiculaires cP, cp , & sur les rayons rompus DF, RF les perpendiculaires cQ, cq ; cP sera le sinus de l'angle d'incidence cDP, rp , sa différence; cQ le sinus de l'angle rompu cDQ , & sq sa différence.

7. Ayant nommé AD , ou AB , y ; cD , ou cB , a ; DP ou Dr , g ; DQ , ou Df , h ; cP , r ; DF , x ; QF , ou fF sera $x-h$; AP , ou Ar , $y+g$; & TR , dy .

8. Les triangles rectangles PCD , RTD , étant semblables, puisque leurs angles PCd , TDR sont tous deux le complément de l'angle PDR , l'on aura cP (r). PD (g) :: RT (dy). $DT = \frac{gdy}{r}$.

9. Les petits secteurs ou triangles semblables ADT , Arp donnent AD (y). AP ou AR ($y+g$) :: DT ($\frac{gdy}{r}$).
 $rp = \frac{gydy + ggd y}{ry}$.

10. En supposant que cP , sinus de l'angle d'incidence cDP , soit à cQ , sinus de l'angle rompu cdQ , comme m à n : & puisque cP . cQ :: rp . fq , l'on aura m . n :: rp ($\frac{gydy + ggd y}{ry}$). $fq = \frac{ngydy + nngdy}{mry}$.

11. Les triangles rectangles cQD , RSD , dont les angles cDQ , RDS sont tous deux le complément de l'angle QDR , sont semblables, comme aussi (*num.* 8.) les triangles cPD , RTD ; c'est pourquoi l'on aura à cause des hypoténuses communes, DP (g). DQ (h) :: DT ($\frac{gdy}{r}$). $DS = \frac{hdy}{r}$.

12. A cause des triangles ou secteurs semblables FDS , Ffq , l'on a $\frac{hdy}{r}$ (DS). $\frac{ngydy + nngdy}{mry}$ (fq) :: x (DF). $x-h$ (fF , ou QF), d'où l'on tire $x = \frac{mhby}{mby - ngy - nng} = DF$.

13. Mais parce que l'on suppose que le rayon incident AD est infiniment proche de AB , il passera aussi-bien que son rompu DF infiniment proche du point c ; c'est pourquoi les perpendiculaires cP , cQ pourront être considérées comme nulles, ou $= 0$; & alors $DP = g$, & $DQ = h$ deviendront $= Bc = a$, & $DF = x$ sera égale à BF . Mettant donc a en la place de g , & de h dans l'équation précédente, l'on aura $x = \frac{may}{my - ny - na}$ ou $x = \frac{may}{py - na} = BF$, en mettant p pour $m-n$.

14. De même ayant décrit des centres F & f les petits arcs Hi , Ho , tiré du point C , où l'axe de la Courbe EL touche la développée de cette Courbe, sur les prolongemens des rayons FD , FR , les perpendiculaires CM , Cm : & sur les prolongemens des rayons rompus fH , fI , les perpendiculaires CN , Cn , & mené HC , qui sera le rayon de la développée au point H , puisque H est infiniment proche de E , & par conséquent perpendiculaire à la Courbe EL , & égale à EC ; c'est pourquoi CM sera le sinus de l'angle d'incidence CHM ; um , sa différence; CN , le sinus de l'angle rompu CHN ; & tn , sa différence.

15. Nommant donc CH , ou CE , b ; HM , k ; HN , ou Ht , l ; CM , t ; FH , u ; fH , z ; HD , f ; FM , ou Fu sera $u+k$; fN , ou ft , $z+l$; & Ii , du .

16. Les triangles rectangles CMH , IiH , qui sont semblables, puisque leurs angles CHM , IHi sont tous deux le complément de l'angle MHI , donneront $CM (t)$. $MH (k) :: Ii (du) Hi = \frac{kdu}{t}$.

17. A cause des triangles ou secteurs semblables FHi , Fum , l'on a $FH (u)$. FM , ou $Fu (u+k) :: Hi \left(\frac{kdu}{t} \right)$.
 $um = \frac{ukdu + kkd u}{tu}$.

18. Puisque (num. 10.) la raison de la réfraction est comme m à n , & qu'en ce cas le sinus CM de l'angle d'incidence CHM , est au sinus CN de l'angle rompu CHN comme n à m , & qu'outre cela $CM :: um$. tn , l'on aura $nm :: um \left(\frac{ukdu + kkd u}{tu} \right)$. $tn = \frac{mukdu + mkkdu}{ntu}$.

19. Les triangles rectangles CNH , IOH qui sont semblables, puisque leurs angles NHC , OHI sont tous deux le complément de l'angle NHI : comme aussi les triangles rectangles CMH , IiH , donneront à cause des hypoténuses communes, $MH (k)$. $NH (l) :: iH \left(\frac{kdu}{t} \right)$.
 $OH = \frac{l du}{t}$.

20. Enfin à cause des triangles ou secteurs semblables

28 MEMOIRES DE L'ACADE' MIE ROYALE
 ftn, fHO , l'on aura $z = l (fN, \text{ ou } ft)$. $z (fH) ::$
 $\frac{mukdu + mkkdu}{niu} (tn) \cdot \frac{ldu}{z} (HO)$, d'où l'on tire $u =$
 $\frac{mkkz}{nll + nlz - mkz}$

21. Mais parce que le rayon incident DF , aussi-bien que son rompu Hf sont infiniment proches de l'axe AE , ils passeront infiniment proche du point C ; c'est pourquoi les perpendiculaires CM, CN peuvent être regardées comme nulles, ou égales à zero; & alors HM & HN se confondront avec $EC = b$, & $HD = f$, avec EB . Mettant donc b en la place de k & de l dans l'équation précédente, elle deviendra celle-ci: $u = \frac{mbz}{nb + nz - mz}$; ou $u = \frac{mbz}{nb - pz}$, en mettant p pour $m - n$. Or FH , ou $FE = FB - BE = x - f = u$; donc $x - f = \frac{mbz}{nb - pz}$. Mais (*num. 13.*) $x = \frac{may}{py - na}$; donc $\frac{may}{py - na} - f = \frac{mbz}{nb - pz}$, d'où l'on tire,

$$z = \frac{mnaby - npbfy + nna bf}{mpay + mpy - ppy + n p a f - m n a b} = E f.$$

22. Si l'on veut négliger l'épaisseur de la Lentille où l'on n'a très-souvent point d'égard, il n'y a qu'à faire $f = 0$, ce qui détruira tous les termes où elle se rencontre, & l'on aura,

$$z = \frac{n a b y}{p a y + p b y - n a b} = E f.$$

A U T R E S O L U T I O N

plus simple que la précédente.

II. Les choses demeurant toujours dans le même état, excepté que l'on ne suppose ici qu'un seul rayon incident AD , & qu'outre cela l'on mene les petites droites DI & HG perpendiculaires à BE .

Il est clair que les petites droites DI, HG seront aussi perpendiculaires aux rayons AD, DF & Hf à cause du point D infiniment proche de B .

Nommant donc comme auparavant AD , ou AB , ou AI , y ; Bc , a , EC , b ; BE , f ; DF , ou BF , x ; HF , ou EF , ou GF , u ; Hf , ou Ef , ou Gf , z ; cP , r ; CM , t ; Ac fera $y+a$; FC , $u+b$. Fc , $x-a$, & la raison de la réfraction $\frac{m}{n}$.

1. Les triangles semblables AcP , AID donneront Ac ($y+a$). AI (y) :: cP (r) $ID = \frac{ry}{y+a}$.

2. L'on a à cause de la réfraction $m.n$:: cP (r). $cQ = \frac{nr}{m}$

3. Les triangles semblables FID , FcQ , donnent x (FI). $x-a$ (Fc) :: $\frac{ry}{y+a}$ (ID). $\frac{nr}{m}$ (cQ), d'où l'on tire $x = \frac{may}{my-ny-na} = BF$, ou $x = \frac{may}{py-na}$, en mettant p pour $m-n$.

4. Les triangles semblables FCM , FGH donnent FC ($u+b$). FG (u) :: CM (t). $GH = \frac{tu}{u+b}$.

5. A cause de la réfraction, l'on a $n.m$:: CM (t). $CN = \frac{m^2}{n}$

6. Enfin les triangles semblables fCN , FGH donnent $z+b$ (fC). z (fG) :: $\frac{m^2}{n}$ (CN). $\frac{tu}{u+b}$ (GH), d'où l'on

tire $u = \frac{mby}{nb+nz-mz} = Ef$, ou $u = \frac{mby}{nb-pz}$, en mettant p pour $m-n$, ou $x-f = \frac{mby}{nb-pz}$, en mettant pour u sa valeur

$x-f$. Si l'on met présentement dans cette dernière équation en la place de x sa valeur prise dans l'équation précédente $x = \frac{may}{py-na}$, l'on aura la suivante, où l'on a égard à l'épaisseur du verre.

$$z = \frac{m^2aby - npb(y + nnab)}{mpay + mpy - ppy + upa - mnab} = Ef, \text{ ou}$$

$$z = \frac{naby}{pay + ppy - nab} = Ef, \text{ où l'on néglige l'épaisseur du}$$

verre. Ces deux équations sont celles de l'art. I. n. 21. & 22.

III. Comme l'on n'emploie dans les instrumens de Diop-

trique que des Lentilles de verre, où la réfraction se fait à peu près dans la raison de 3 à 2 ; si l'on fait $m=3$, $n=2$, p fera $=1$, & les deux équations précédentes se changeront en les deux qui suivent, qui serviront de regles générales pour les verres convexes des deux côtés, tels qu'on les a supposés en faisant le calcul. Et parce qu'on a supposé le point A peu éloigné du verre, les rayons tomberont divergens sur la face KBL .

Regles pour
les verres
convexes des
deux côtés.

$$1. z = \frac{6aby - 2bfy + 4abf}{3ay + 3by - fy + 2af - 6ab} = Ef.$$

$$2. z = \frac{2aby}{ay + by - 2ab} = Ef.$$

Si les Courbes KBL , KEL sont des cercles, Bc & EC en feront les demi-diametres : si les Courbes sont des sections Coniques, Bc & EC feront la moitié de leurs parametres. On déterminera par la 5^{me} section de l'Analyse des Infiniment petits la grandeur de Bc & de EC dans les autres Courbes. Et l'on prendra pour des lignes droites les Courbes KBL , KEL , lorsque les mêmes rayons Bc , EC seront infinis.

IV. Si dans les deux équations précédentes $a = \infty$, KBL deviendra une ligne droite, & le verre sera par conséquent *plan convexe*, & son côté plat sera tourné vers le point lumineux A . Et ayant effacé tous les termes où a ne se rencontre point, parce qu'alors ils sont nuls par rapport à ceux où a se trouve, l'on aura

Regles pour
les verres
plans convexes.

$$3. z = \frac{6by + 4bf}{3y + 2f - 6b}$$

$$4. z = \frac{2by}{y - 2b}$$

V. Si dans les deux mêmes équations $b = \infty$, KEL deviendra une ligne droite ; le verre sera *convexe plan* : son côté convexe sera tourné vers le point lumineux, & l'on aura

Regles pour
les verres
convexes
plans.

$$5. z = \frac{6ay - 2fy + 4af}{3y - 6a}$$

$$6. z = \frac{2ay}{y - 2a}$$

VI. Si $a = \infty$, & qu'on change les signes des termes où

b se rencontre, la Courbe KBL deviendra une ligne droite, & KEL tournera sa convexité vers B ; c'est pourquoi le verre sera *plan concave*, dont le côté plat sera tourné vers le point lumineux, & l'on aura

$$7. z = \frac{-6by - 4bf}{3y + 2f + 6ab}$$

$$8. z = \frac{-2by}{y + 2b}$$

Regles pour les verres plans concaves.

VII. Si $b = \infty$, & qu'on change les signes des termes où a se rencontre, le verre sera *concave plan*: son côté concave sera tourné vers le point lumineux, & l'on aura

$$9. z = \frac{-6ay - 2fy - 4af}{3y + 6a}$$

$$10. z = \frac{-2ay}{y + 2a}$$

Regles pour les verres concaves plans.

VIII. Si l'on change les signes des termes où b se rencontre, le verre sera *convexo-concave*: le côté convexe regardera le point lumineux, & l'on aura

$$11. z = \frac{-6aby + 2bfs - 4abf}{3ay - 3by - fs + 2af + 6ab}$$

$$12. z = \frac{-2aby}{ay - by + 2ab}$$

Regles pour les verres convexo-concaves.

IX. Si l'on change les signes des termes où a se rencontre, le verre sera *concavo-convexe*: le côté concave sera tourné vers le point lumineux, & l'on aura

$$13. z = \frac{-6aby - 2bfs - 4abf}{-3ay + 3by - fs - 2af + 6ab}$$

$$14. z = \frac{-aby}{-ay + by + 2ab}$$

Regles pour les verres concavo-convexes.

X. Si l'on change les signes des termes où a & b ne se rencontrent point ensemble, sans changer ceux des termes où elles ne se trouvent ni l'une ni l'autre, le verre sera *concavo-concave*, & l'on aura

$$15. z = \frac{6aby + 2bfs + 4abf}{-3ay - 3by - fs - 2af - 6ab}$$

$$16. z = \frac{2aby}{-ay - by - 2ab}$$

Regles pour les verres concavo-concaves.

XI. Si a & $b = \infty$, le verre sera plat des deux côtés, & l'on aura

$$17. z = -y - \frac{2}{3}f$$

$$18. z = -y$$

Regles pour les verres plats des deux côtés.

XII. Si $a=0$. Ce qui se rencontre dans plusieurs Courbes, l'on aura

$$19. \quad z = \frac{-2bf}{3b-f}$$

$$20. \quad z = \frac{0}{by} = 0.$$

XIII. Si $b=0$, l'on aura

$$21. \quad z = \frac{0}{3ay-fy+2af} = 0.$$

$$22. \quad z = \frac{0}{ay} = 0.$$

XIV. Si a & $b=0$, l'on aura

$$23. \quad z = \frac{0}{-fy} = 0.$$

$$24. \quad z = 0.$$

L'on a supposé en faisant le calcul que le point lumineux A étoit peu éloigné du verre; c'est pourquoi toutes les regles précédentes se rapportent au cas où les rayons tombent divergens sur la face KBL qui regarde le point lumineux.

Pour les rayons parallèles.

XV. Si l'on fait y infinie dans toutes les regles précédentes, en effaçant tous les termes où elle ne se rencontre point, l'on aura autant d'autres regles qui se rapporteront au cas où les rayons tombent parallèles sur la face KBL , puisque le point A en sera alors infiniment éloigné.

Pour les rayons convergens.

XVI. Si l'on change les signes des termes où y se rencontre dans les regles précédentes, elles renfermeront le cas où les rayons tombent convergens sur la face KBL , puisque le point lumineux A se trouvera alors du côté de F .

C O N C L U S I O N.

XVII. Il est clair que toutes les quantités renfermées dans toutes les équations précédentes étant données, à la réserve de $z = Ef$; cette quantité z fera aussi déterminée, *Ce qui étoit proposé.*

COROLLAIRES

COROLLAIRES

tirés de la première équation.

$$z = \frac{6aby - 2bfs + 4abf}{3ay + 3by - sy + 2af - 6ab}$$

XVIII. 1. Il est clair que le foyer *Ef* sera positif, lorsque $6aby + 4abf > 2bfs$, & $3ay + 3by + 2af > sy + 6ab$, & au contraire; négatif, lorsque $6aby + 4abf > 2bfs$, & $3ay + 3by + 2af < sy + 6ab$, & au contraire; infini, lorsque $3ay + 3by + 2af = sy + 6ab$, & $6aby + 4abf >$ ou $< 2bfs$; $= 0$, lorsque $6aby + 4abf = 2bfs$, c'est-à-dire, qu'en ce cas le point *f* tombera en *E*.

Cas des rayons divergens.

2. Si $y = b$, l'on aura $z = \frac{6abb - 2bbf + 4abf}{3bb - bf + 2af - 3ab}$. Et le foyer sera positif, lorsque $6abb + 4abf > 2bbf$, & $3bb + 2af > bf + 3ab$, & au contraire; négatif, lorsque $6abb + 4abf > 2bbf$, & $3bb + 2af < bf + 3ab$, & au contraire; infini, lorsque $3bb + 2af = bf + 3ab$, & $6abb + 4abf >$ ou $< 2bbf$; $= 0$, lorsque $6abb + 4abf = 2bbf$.

3. Si $y = a$, l'équation deviendra $z = \frac{6aab + 2abf}{3aa + af - 3ab}$, & le foyer sera positif si $3aa + af > 3ab$; négatif, si $3aa + af < 3ab$; infini, si $3aa + af = 3ab$. Il ne peut en ce cas être $= a$.

4. Si $a = b$, l'on aura $z = \frac{6aay - 2afy + 4aaf}{6ay - sy + 2af - 6aa}$, & le foyer sera positif, lorsque $6aay + 4aaf > 2afy$, & $6ay + 2af > sy + 6aa$, & au contraire; négatif, lorsque $6aay + 4aaf > 2afy$, & $6ay + 2af < sy + 6aa$, & au contraire; infini, lorsque $6ay + 2af = sy + 6aa$, & $6aay + 4aaf >$ ou $< 2afy$; $= 0$, lorsque $6aay + 4aaf = 2afy$.

5. Si $a = b = y$, l'on aura $z = \frac{6aa + 2af}{f}$, & le foyer sera toujours positif.

6. Si $a=b$, $f=2a$, & que les Courbes KBL , KEL soient des cercles; le verre fera une sphere, & l'on aura

$z = \frac{ay + 4aa}{2y - a}$, qui montre que le foyer sera positif lorsque $2y > a$; négatif, lorsque $2y < a$; infini, lorsque $y = \frac{1}{2}a$.

Cas des rayons parallèles.

7. Si l'on fait $y = \infty$, l'on aura $z = \frac{6ab - 2bf}{3a + 3b - f}$, d'où l'on voit que le foyer qui en ce cas est appelé foyer *absolu*, ou foyer *principal*, sera positif, lorsque $6ab > 2bf$, & $3a + 3b > f$, & au contraire; négatif, lorsque $6ab > 2bf$, & $3a + 3b < f$, & au contraire; infini, lorsque $3a + 3b = f$, & $6ab >$ ou $< 2bf$; $= 0$, lorsque $6ab = 2bf$.

8. Si $a=b$, l'on aura $z = \frac{6aa - 2af}{6a - f}$; d'où il suit que le foyer sera positif lorsque $6aa > 2af$ & $6a > f$, & au contraire; négatif, lorsque $6aa > 2af$ & $6a < f$, & au contraire; infini, lorsque $6a = f$ & $6aa >$ ou $< 2af$; $= 0$, lorsque $6aa = 2af$.

9. Si $b=a$, $f=2a$, & que les Courbes KBL , KEL soient des cercles, le verre fera une sphere, & l'on aura $z = \frac{1}{2}a$.

Cas des rayons convergens.

10. En changeant les signes des termes où y se rencontre, l'on aura $z = \frac{-6aby + 2bfy + 4abf}{-3ay - 3by + f + 2af - 6ab}$, d'où l'on tirera des Corollaires comme l'on a fait dans les 2 cas précédens.

C O R O L L A I R E S

tirés de la seconde équation.

$$z = \frac{2aby}{ay + by - 2ab}$$

XIX. 1. Il est clair que le foyer sera positif, lorsque $ay + by > 2ab$; négatif, lorsque $ay + by < 2ab$; infini, lorsque $ay + by = 2ab$.

Cas des rayons divergens.

2. Si $y=b$, l'on aura $z = \frac{2ab}{b-a}$, qui fait voir que le foyer sera positif, lorsque $b > a$; négatif, lorsque $b < a$; infini, lorsque $b = a$.

3. Si $y = a$, l'on aura $z = \frac{2ab}{a-b}$, qui montre que le foyer sera positif, lorsque $a > b$; négatif, lorsque $a < b$; infini, lorsque $a = b$.

4. Si $b = a$, l'on aura $z = \frac{ay}{y-a}$, & le foyer sera positif lorsque $y > a$; négatif, lorsque $y < a$; infini, lorsque $y = a$.

5. Si $y = a = b$, l'on aura $z = \infty$.

6. Si $y = \infty$, l'on aura $z = \frac{2ab}{a+b}$, d'où l'on voit que le foyer sera positif. Cas des rayons parallèles.

7. Si $a = b$, l'on aura $z = a$.

8. Si l'on change les signes des termes où y se trouve, l'on aura $z = \frac{-2aby}{-ay - by - 2ab} = \frac{2aby}{ay + by + 2ab}$, qui montre que le foyer sera toujours positif, quelque supposition que l'on y fasse. Cas des rayons convergens.

C O R O L L A I R E S

tirés de la troisième équation.

$$z = \frac{6by + 4bf}{3y + 2f - 6b}$$

XX. 1. Elle fait voir que le foyer sera positif, lorsque $3y + 2f > 6b$; négatif, lorsque $3y + 2f < 6b$; infini, lorsque $3y + 2f = 6b$. Cas des rayons divergens.

2. Si $y = b$, l'on aura $z = \frac{6bb + 4bf}{2f - 3b}$, d'où l'on voit que le foyer sera positif, lorsque $2f > 3b$; négatif, lorsque $2f < 3b$; infini, lorsque $2f = 3b$.

3. Si $f = b$, & que la Courbe *KEL* soit un cercle, le verre sera une demi-sphère, & l'on aura $z = \frac{6by + 4bb}{3y - 4b}$, d'où il suit que le foyer sera positif, lorsque $3y > 4b$; négatif, lorsque $3y < 4b$; infini, lorsque $3y = 4b$.

4. En faisant $y = \infty$, l'on aura $z = 2b$.

On tirera des Corollaires des autres formules comme

E ij

Cas des rayons parallèles.

36 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 l'on a fait des précédentes, & les uns & les autres pourront
 souvent être réduits à des expressions plus simples.

COROLLAIRES GENERAUX.

XXI. Il est clair que des six choses renfermées dans les
 équations précédentes, (qui sont la distance BA du verre au
 point lumineux; celle du foyer Bf , les deux rayons Bc ,
 EC , l'épaisseur du verre BE , & la raison de la réfraction $\frac{m}{n}$)
 cinq étant données, la sixième le fera aussi.

1. Soit, par exemple, l'équation $z = \frac{naby}{pay + pby - nab}$
 qui est celle du premier article *num.* 22. si l'on suppose que
 tout soit donné excepté la raison de la réfraction $\frac{m}{n}$, ayant
 remis en la place de p sa valeur (*art.* 1 *num.* 13.) $m-n$,
 l'on tirera de cette équation $\frac{m}{n} = \frac{aby + axz + bzy + abz}{azy + bzy}$
 $= y + \frac{aby + abz}{azy + bzy}$. C'est pourquoi en assignant à n une
 valeur arbitraire telle que l'on voudra, l'on aura celle de m ,
 & par conséquent le rapport de m à n sera donné.

2. Si dans la même équation tout est connu excepté a ,
 l'on en tirera $a = \frac{pbyz}{nby + nbz - pyz}$.

3. Si tout est connu à la réserve de y , l'on en tirera
 $y = \frac{nabz}{paz + pbz - nab}$. Où l'on remarquera que si le foyer
 devenoit le point lumineux, le point lumineux deviendroit
 le foyer, puisque ces deux équations $z = \frac{naby}{pay + pby - nab}$
 & $y = \frac{nabz}{paz + pbz - nab}$ ne different qu'en ce que z est en
 la place de y , & y en la place de z , ce qui est une des prin-
 cipales propriétés de la réfraction; savoir, que si un rayon
 de lumière, après avoir souffert tant de réfraction qu'on
 voudra, retournoit sur ses pas, il repasseroit par le même
 chemin.

PROBLEME II.

XXII. Un verre quelconque KL étant donné, & son foyer F , FIG. III.
formé par les rayons qui partent d'un point lumineux A pris sur
l'axe BE du verre, étant déterminé par quelqu'une des règles
& dans quelqu'une des hypothèses précédentes; déterminer le
nouveau foyer qui résultera de la position d'un autre verre quel-
conque MN , aussi donné, au-dessous du premier KL , ayant
tous deux un même axe ABD , quelque distance qu'il y ait en-
tre l'un & l'autre verre.

1. En supposant, 1° que le verre MN soit convexe des
deux côtés. 2° Que le foyer du verre KL soit positif en F .
3° Que le verre MN soit placé entre le verre KL & son
foyer F . 4° Que le foyer du verre MN soit positif en I ; l'on
prendra le foyer F du verre KL par le point lumineux, &
les rayons tomberont par conséquent convergens sur la
face MCN du verre MN ; & nommant le rayon de la dé-
veloppée de la Courbe MCM au point C , c , celui de la
Courbe MDN au point D , d , la distance DI du verre MN
à son foyer I , f , l'épaisseur CD , r , la distance CF du verre
 MN au foyer F du verre KL , x ; l'on aura article 16, en
ayant égard à l'épaisseur du verre.

$$1. f = \frac{-6cdx + 2drx + 4cdr}{-3cx - 3dx + rx + 2cr - 6cd} = DI, \text{ ou}$$

$$2. f = \frac{-2cdx}{-cxa - 2cd} = \frac{2cdx}{cx + dx + 2cd} = DI, \text{ en}$$

négligeant l'épaisseur du verre. Mais par l'hypothèse EF est
donnée; c'est pourquoi la distance CE des deux verres étant
donnée, $FC = x$ le fera aussi, & par conséquent $DI = f$. Ce
qu'il falloit trouver.

2. Si le foyer F du verre KL étoit négatif, ou si le verre
 MN étoit placé au-dessous de F en mn , les rayons partant
de F tomberoient divergens sur la face mcn du verre mn ,
& $FC = x$ deviendroit négative de positive qu'elle étoit;
c'est pourquoi en changeant les signes des termes où x se
trouve, l'on auroit

$$3. f = \frac{6cdx - 2drx - 4cdr}{3cx + 3dx - rx + 2cr - 6cd}$$

$$4. f = \frac{2cdx}{cx+dx-2cd}$$

3. Si le foyer F du verre KL étoit infini, $FC = x$ qui ne differe de FE que de la grandeur finie CE , le seroit aussi; c'est pourquoi les termes où x ne se rencontre point étant nuls ou $= 0$ par rapport à ceux où elles se rencontrent dans la 3^e & 4^e équation, l'on auroit

$$5. f = \frac{6cd-2dr}{3c+3d-r}$$

$$6. f = \frac{2cd}{c+d}$$

4. Il est aisé d'appliquer ces équations à tel verre qu'on voudra, comme l'on a fait dans les regles précédentes, & d'en tirer des Corollaires, pourvu qu'on observe que $x = FC$ ne peut point recevoir d'autres variations que celles que le verre KL , qui peut être aussi tel qu'on voudra, lui donne.

5. On trouvera de même le foyer qui résulte de la position de plusieurs verres placés sur un même axe, en prenant toujours le foyer du dernier pour le point lumineux.

6. S'il y a un ou plusieurs verres KL , MN placés sur un même axe AF , & dont le foyer soit I , on pourra encore par le moyen des regles précédentes placer un nouveau verre donné PQ sur le même axe AF , en sorte que les rayons venant du point I , soient paralleles après avoir traversé le nouveau verre PQ : car il n'y a pour cela qu'à prendre celles des équations précédentes qui lui convient dans le cas des rayons divergens, & ayant fait z ou $f = \infty$, on en tirera une valeur de y ou de x qui fera la distance cherchée IR . Soit, par exemple, le verre donné PRQ convexe des deux côtés, & dont on ne considère point l'épaisseur. L'équation qui lui convient est la seconde de l'article 4. page 30. qui est $z = \frac{2ab}{ay+by-2ab}$; & en supposant z infini, l'on aura $ay + by - 2ab = 0$, d'où l'on tire $y = \frac{2ab}{a+b}$; ayant donc placé le verre PRQ de ma-

maniere que $IR = \frac{a+b}{2ab}$, les rayons venant du point I seront paralleles après l'avoir traversé.

Soit encore le verre prq concavo-concave dont on ne considere point l'épaisseur. L'équation qui lui convient est

la 16°. $z = \frac{2aby}{-ay-by-2ab}$, où ayant fait $z = \infty$, l'on aura

$-ay-by-2ab=0$, d'où l'on tire $y = \frac{-2ab}{a+b}$. Et parce que

cette valeur de y est négative, il faudra prendre $Ir = \frac{2ab}{a+b}$ de l'autre côté de I par rapport à R , & placer en r

le verre prq , d'où les rayons qui alloient se réunir au point I , après avoir traversé le verre MN , sortiront paralleles.

7. Si au lieu de déterminer la position du verre MN sur l'axe AF , comme l'on a fait *num.* 1. pour avoir celle de son foyer I , l'on déterminoit la position du foyer I pour trouver celle du verre MN ; la distance FI qui se trouve entre le foyer F du verre KL , & le foyer I seroit donnée, & $FC=x$, & $ID=f$ seroient inconnues. Ainsi ayant nommé FI, g , l'on auroit $x=g+f+r$, ou, en négligeant l'épaisseur du verre MN , $x=g+f$, & ayant substitué les valeurs de x dans la premiere & seconde équation, l'on en tireroit des valeurs de $f=ID$, qui détermineroient la position du verre MN . Par exemple, en substituant $g+f$, seconde

valeur de x , dans la seconde équation $f = \frac{2cdx}{cx+dx+2cd}$, l'on

en tireroit $ff = -gf + \frac{2cdg}{c+d}$ & partant $f = -\frac{1}{2}g \pm$

$\sqrt{\frac{1}{4}gg + \frac{2cdg}{c+d}} = ID.$



RETOUR DES TACHES

*Observées dans le Soleil au commencement
de Janvier.*

PAR M. MARALDI.

1704.
9. Fevrier.

Nous attendions le 24. Janvier de cette année 1704. de voir de nouveau la Tache que nous avions observée le 7. & le 8. de Janvier près du bord Occidental du Soleil, après avoir parcouru son hémisphere supérieur. Par le calcul que nous fimes elle devoit avoir disparu au bord Occidental le 10. de Janvier, & après avoir été cachée un peu plus de la moitié de sa révolution qui est de 14. jours, elle devoit retourner au bord Oriental du Soleil le 24. du même mois. Mais ce jour là & le suivant le Ciel ayant été entierement couvert à Paris, nous ne pûmes l'observer. Elle fut cependant apperçue à Montpellier le 25. par M. de Plantade Conseiller, qui la trouva éloignée d'une minute du bord Oriental du Soleil.

Le 26 Janvier à 8^h $\frac{1}{2}$ le soleil ayant paru pendant quelques minutes au travers des nuages, nous apperçûmes avec une Lunette de 3. piés la Tache assez grande près du bord Oriental; mais nous n'eûmes pas le temps de déterminer sa situation, ni de la voir par de grandes Lunettes à cause des nuages.

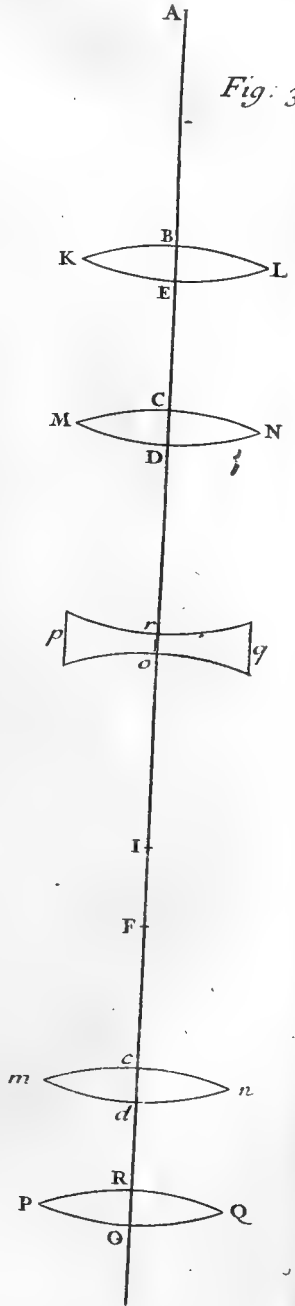
Le 27 Janvier à 2^h $\frac{1}{2}$ après midi, le Soleil s'étant un peu découvert, nous déterminâmes la situation par le moyen des fils qui se croisent à angles de 45° au foyer de la Lunette. Elle étoit éloignée environ de 20'' de temps en ascension droite du bord Oriental, & d'environ 60 des mêmes parties en déclinaison du bord Méridional du Soleil. Avec la Lunette de 17. piés on voyoit que la Tache étoit composée de deux Taches obscures & longues jointes par une extrémité, & enfermées dans une nébulosité assez irréguliere;

1.^{re}

Fig 2.^e



Fig 3.^e



guliere, comme on peut voir dans la premiere Figure.

Le 28. à 10 heures du matin, la différence d'ascension droite entre la Tache & le bord Oriental du Soleil étoit de 30 secondes de temps, & la différence de déclinaison à l'égard du bord Septentrional du Soleil, étoit de 60 des mêmes parties.

Le 29. à 8 heures & demie, la différence d'ascension droite entre la Tache & le bord Oriental étoit de 40 secondes de temps, & la différence de déclinaison entre la Tache & le bord Septentrional du Soleil, étoit une minute & 10 secondes de temps.

Le 30. à 9 heures, la Tache passoit par un cercle horaire 1 minute & 21 secondes de temps après le bord Occidental du Soleil, & sa différence de déclinaison Septentrionale à l'égard de son bord Méridional, étoit d'une minute & 6 secondes de temps.

Par cette observation nous avons calculé que la Tache arriva au milieu du Soleil le 31 à une heure du matin. Le 31. les nuages nous ont empêché de déterminer la situation de la Tache, & nous n'eûmes que le temps de faire sa figure.

Le premier de Fevrier à 8 heures & demie, la Tache étoit éloignée en ascension droite du bord Occidental du Soleil de 50 secondes, & d'une minute de temps en déclinaison à l'égard du bord Méridional.

Le 2 Fevrier à 9 heures, la Tache passoit par un cercle horaire 36 secondes après le bord Occidental du Soleil, & sa différence de déclinaison à l'égard du bord Méridional étoit de 56 secondes des mêmes parties.

Le même jour on voyoit avec la Lunette de 17 pieds près du bord Oriental du Soleil une grande quantité de facules, qui étoient à l'endroit où devoit être la Tache suivante qui parut le 7. Janvier près du bord Oriental.

On continua de voir ces facules le 3 en plus grande quantité, & plus grandes que le jour précédent: mais on n'y voyoit point de Taches.

Le 3 Fevrier à 8 heures & demie, la grande Tache qui

42 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
étoit près du bord Occidental du Soleil , étoit éloignée en ascension droite de 25 secondes de temps , & sa différence de déclinaison à l'égard du bord Méridional , étoit de 53 des mêmes parties.

Le 4 Fevrier à 9 heures , la même Tache passoit par un cercle horaire 15 secondes après le bord Occidental , & elle étoit plus Septentrionale en déclinaison que le bord Méridional du Soleil , de 30 des mêmes parties.

Le même jour , avec la Lunette de 17 pieds on voyoit dans la partie Orientale du Soleil les facules plus avancées vers le milieu de son disque , & entre ces facules on y distinguoit six petites Taches qu'on n'avoit point vûes les deux jours précédens. Parmi ces Taches il y en avoit une plus grande que les autres.

Le 5 Fevrier à 8 heures & trois quarts , la Tache précédente passoit 10 secondes après le premier bord , & elle étoit plus Septentrionale de 45 secondes de temps du bord Méridional du Soleil. On voyoit aussi proche de cette Tache une grande quantité de facules.

La Tache suivante , qui étoit au milieu de plusieurs facules , étoit augmentée en sorte , que nous la vîmes distinctement avec des petites Lunettes , pour en déterminer sa situation par le moyen des fils qui se croisent au foyer de la Lunette. Elle passoit par un cercle horaire 22 secondes de temps avant le bord Oriental , & étoit plus Méridionale de 60 de ces parties que le bord Septentrional.

Le 6 Fevrier , le Ciel fut couvert. Le 7 le Soleil ayant paru à midy , la Tache ne se voyoit plus. La Tache suivante paroissoit encore augmentée. Elle étoit éloignée de 49 secondes de temps du bord Oriental du Soleil , & d'une minute & 6 secondes de temps du bord Septentrional.

On a remarqué tous les jours quelque changement dans la grande Tache. Le 27 Janvier elle étoit composée de deux Taches obscures jointes ensemble par une extrémité. Le 28. la Tache étoit séparée en deux. Le 29. elle étoit séparée en trois parties presqu'égales. Le 31. ces parties

s'étoient éloignées considérablement l'une de l'autre : mais elles étoient enfermées dans une même nébulosité. Le 1^{er} Fevrier ces trois Taches s'étoient encore plus éoignées l'une de l'autre, & avoient chacune à part sa nébulosité. La Tache Occidentale étoit beaucoup plus grande que les autres : elle étoit environnée d'une plus grande nébulosité, & c'est la Tache qui est restée jusqu'à la fin. Les autres deux Taches, après avoir diminué, se sont dissipées. Du commencement il y avoit proche de cette Tache quelques facules qui ont été en plus grande quantité vers la fin à mesure que les Taches se dissipent.

Par l'observation du 4 de Fevrier, la Tache précédente fut à pareille distance du bord Occidental du Soleil à minuit, entre le 3 & le 4 qu'elle avoit été au 7 de Janvier à midi. Entre le midi du 7 de Janvier & le minuit du 3 de Fevrier, il y a 27 jours & demi, qui est la révolution ordinaire des Taches, comme on la trouve par quantité d'autres observations. Cependant ayant posé sa situation dans un cercle qui représente le disque du Soleil, & à l'aide de la Théorie de M. Cassini, ayant décrit les Poles & l'Equinoctial du globe du Soleil, nous trouvons que cette Tache n'a pas précisément la même situation à l'égard de l'Equinoctial, qu'elle avoit eu le mois passé; mais qu'elle est plus Méridionale que dans la révolution précédente d'environ deux degrés de la circonférence du Soleil. Cela n'empêche pas que nous ne la supposions la même : car comme nous avons observé que la même Tache se divise en plusieurs parties, dont les unes s'éloignent des autres, on peut supposer aussi que la même Tache se soit éloignée de l'Equinoctial.

Par l'observation du 7 Fevrier, la Tache suivante s'est trouvée à minuit au même endroit du Soleil où elle avoit été le 11 de Janvier à 10 heures environ; ce qui donne la révolution de la Tache de 27 jours & 14 heures environ. Ayant aussi comparé la distance qu'elle avoit à l'Equinoctial du Soleil le mois passé avec la distance qu'elle a présentement, elle ne s'est pas trouvée précisément la même : mais

dans cette dernière révolution, la Tache étoit plus proche de l'Equinoctial qu'elle n'étoit dans la précédente; tout au contraire de ce qui est arrivé dans l'autre Tache, laquelle s'en est éloignée davantage. Ces deux Taches étoient éloignées l'une de l'autre environ 60 degrés de circonférence du Soleil.

O B S E R V A T I O N S

Du retour d'une des Taches qui parut le 7. de Janvier vers le bord Occidental du Soleil.

PAR M. DE LA HIRE.

1704.
9. Fevrier.

LA Tache qui avoit paru sur le bord Occidental du Soleil vers le commencement de ce mois, a commencé à reparoître vers la fin de ce même mois, après avoir parcouru l'hémisphère du Soleil qui ne nous est pas visible. Nous ne l'observâmes que le 28, les jours précédens ayant été couverts. Elle passa au Méridien plutôt que le bord Oriental du Soleil, de 30".

Le 29. elle passa au Méridien $44''\frac{1}{2}$ plutôt que le bord Oriental ou le dernier bord du Soleil. Sa hauteur Méridienne apparente étoit alors de $23^{\circ} 5' 20''$, & celle du bord supérieur du Soleil étoit de $23^{\circ} 21' 30''$.

Le 2 Fevrier, la Tache passa au Méridien 34" après le premier bord du Soleil, & sa hauteur Méridienne apparente étoit de $24^{\circ} 8' 30''$, & celle du bord Supérieur du Soleil, de $24^{\circ} 28' 10''$.

Le 3 Fevrier, la Tache passa au Méridien 23" après le premier bord du Soleil. Sa hauteur Méridienne apparente étoit de $24^{\circ} 25' 10''$, & celle du bord supérieur du Soleil, de $24^{\circ} 45' 30''$.

Le 4 Fevrier, la Tache passa au Méridien 14" après le premier bord du Soleil, & sa hauteur Méridienne apparente étoit de $24^{\circ} 41' 40''$: mais celle du bord supérieur du Soleil étoit de $25^{\circ} 3' 10''$.

2. fevrier 1704.
à midy.

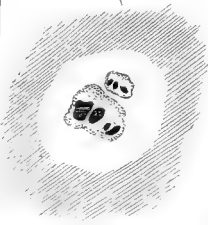


4. fevrier 1704.
à midy

mem. 1704. p 45



29 Janvier 1704.
à midy.



2 fevrier 1704
à midy



4 fevrier 1704.
à midy



Planche
mem 1704 F 40

Le 5. La Tache passa au Méridien 8" après le premier bord du Soleil, & sa hauteur Méridienne apparente étoit de 24° 59' 0". Celle du bord supérieur du Soleil 25° 21' 0".

J'observai dans ce même temps la distance de la Tache au bord le plus proche du Soleil, & je la trouvai de 5° 1" avec le Micrometre qui étoit appliqué à une Lunette de 16 piés.

Le 6. le Ciel fut entierement couvert, & le 7. au matin il ne paroissoit plus rien sur la surface du Soleil.

Il est arrivé à cette Tache ce qui arrive à toutes les autres, qui est un changement continuel dans leur figure, comme on le peut voir dans les Figures que j'en donne ici. Je remarquerai seulement que l'espace clair qui environne toutes les Taches, & qui est beaucoup plus clair que le reste de la surface du Soleil, paroît bien plus distinctement avec une Lunette de 5 ou 6 piés, qu'avec une plus grande, & encore plus quand le verre n'est pas bien net, ou que le Ciel est un peu couvert.

NOUVELLES REMARQUES

SUR LES

INSECTES DES ORANGERS.

PAR M. DE LA HIRE.

Dans les Mémoires de l'Académie imprimés en 1692. je donnai une description des Insectes qui s'attachent aux Orangers, & que l'on appelle communément *Punaises*, où je remarquai tout ce que j'en avois pû reconnoître jusqu'alors, tant de leur accroissement extraordinaire, étant toujours attachés au même endroit de la tige de l'arbre ou de la feuille, que de la ponte des œufs. Mais je ne voyois point de quelle maniere, ni quand ces Insectes pouvoient s'accoupler pour rendre leurs œufs féconds, puisqu'il étoit

1704.
8. Mars.

très-évident qu'ils ne changeoient point de place dans tout le temps qu'on les voioit croître. Je conjecturois bien que lorsqu'ils étoient éclos, ils se dispersoient dans tout l'arbre, & même qu'ils se communiquoient à d'autres arbres, comme aux Myrtes, Citroniers, &c. Mais je n'avois pu encore les observer dans l'état où ils étoient après qu'ils étoient éclos.

J'avois examiné autrefois ce qu'on appelle la graine de Cochenille, & j'en avois donné un Mémoire à l'Académie, dans lequel je rapportois au long tout ce que j'en avois pu découvrir par leur figure en les faisant tremper; & entr'autres choses j'avois remarqué que c'étoit un petit Insecte dont il n'y avoit que la partie du ventre couverte d'écaillés qui étoit restée toute entière: mais on n'y voioit rien de la partie du corps qui est vers la tête, ni aucunes pattes, que je jugeois avoir été desséchées & réduites en poussière.

Il me vint alors en pensée, si les petits Insectes des Orangers n'étoient point les mêmes que les Cochenilles: car la figure du ventre me paroissoit assez semblable, & ces Insectes se nourrissant du suc des fruits rouges d'Opuntia où l'on recueille la Cochenille, pouvoit leur donner la couleur rouge & la forte teinture dont ils sont remplis.

J'avois souvent observé que lorsqu'on écrase entre les doigts les Insectes des Orangers, ils demeurent teints d'une couleur rouffâtre qui tient assez fort à la peau, quoique ces animaux ne se nourrissent que du suc des feuilles vertes & des tiges de l'arbre; & c'est ce qui me persuadoit qu'il y avoit de la vrai-semblance à ce que je conjecturois, que si ces Insectes se nourrissoient du suc des fruits rouges de l'Opuntia, ils pourroient donner une teinture rouge très-forte; ce qui étoit encore confirmé parce que je savois que ceux qui ont mangé de ces fruits, rendent une urine aussi rouge que du sang.

Pour venir à bout de mon dessein, comme j'avois quelques plantes d'Opuntia qui étoient chargées de fruits fort

rouges , je les plaçai au-dessous & fort proche de quelques Orangers où il y avoit beaucoup d'Insectes , qui n'étoient point encore éclos. Je rompis même plusieurs des coques qui renferment les œufs , & j'en répandis une grande quantité sur tout l'Opuntia , espérant qu'il pourroit y avoir quelques-uns de ces animaux qui s'y attacheroient.

J'observois tous les jours avec grand soin , tant les feuilles que les fruits de l'Opuntia ; & enfin j'aperçus un jour une très-grande quantité de petits Insectes blancs qui courroient d'une très grande vitesse sur l'Opuntia. Je considérai aussi les Orangers , & j'y en trouvai de même à proportion. Je ne fis alors aucun doute que tous ces petits Insectes ne fussent ceux des œufs qui étoient éclos. Peu de temps après tous ces Insectes s'attachèrent sur les Orangers autour des branches & sous les feuilles , & ils abandonnerent l'Opuntia où il n'en resta aucun , ni sur ses feuilles ni sur ses fruits.

Ainsi je conclus que ces Insectes des Orangers , quoiqu'assez semblables en apparence aux Cochenilles , n'avoient pas trouvé sur l'Opuntia une nourriture qui leur fût convenable comme sur plusieurs autres plantes , & que ce n'étoit pas les mêmes.

Cependant ma recherche ne me fut pas tout-à-fait inutile : car je connus alors que les Insectes des Orangers , depuis qu'ils sont éclos jusqu'à une certaine grandeur où ils parviennent en peu de temps avant que de s'attacher , peuvent s'accoupler & se trouver en état de pondre des œufs féconds dans un temps fort éloigné de celui de leur accouplement , car il se passe environ 8 mois. Et ce qu'il y a encore de plus extraordinaire , c'est le grand accroissement de ces Insectes depuis qu'ils sont attachés & arrêtés , jusqu'au temps de la ponte : car ils deviennent 2. ou 30 fois plus grands qu'ils n'étoient auparavant , & leur figure extérieure étant changée , ils ne paroissent plus que comme une écaille de Tortue assez longue.

Il seroit à souhaiter qu'on pût transporter quelques semences des Cochenilles dans les parties Méridionales de

48 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
L'Europe, comme dans la Sicile & dans l'Espagne où l'Opuntia vient très-facilement : car je ne fais pas de doute que la Cochenille ne pût y être assez bien cultivée pour en connoître parfaitement la nature, sans être obligé de s'en rapporter à des relations de gens grossiers & d'esclaves, qui ne regardent les productions de la nature que par le profit qui leur en revient.

EXTRAIT D'UNE LETTRE
DE M. SARRASIN

*Médecin du Roy en Canada, touchant l'Anatomie
du Castor, lue à l'Académie*

PAR M. PITTON TOURNEFORT.

*De Québec,
le 25. Octobre
1700.*

Les plus gros Castors ont 3 ou 4 pieds de long sur 12 ou 15 pouces de large au milieu de la poitrine & d'une hanche à l'autre. Ils pèsent ordinairement depuis 40 jusqu'à 60 livres. A l'égard de leur vie, on ne croit pas qu'elle soit de plus de 15 ou 20 ans. Ces animaux sont ordinairement fort noirs dans le Nord le plus reculé, on y en trouve aussi de blancs. Ceux de Canada sont la plupart bruns : mais cette couleur s'éclaircit à mesure que les pays sont plus tempérés, car ils sont fauves, & même ils approchent de la couleur de paille chez les Illinois & chez les Chaouanons.

Le Castor dont on donne ici la description, étoit assez noir, quoique pris sur le bord d'un petit lac à douze ou quinze lieues de Québec. Il ne pesoit que cinquante livres.

Cet animal est par tout revêtu de deux sortes de poil, excepté aux pattes, qui sont couvertes d'un poil très-court. Le poil de la première espèce est long de 8 ou 10 lignes jusqu'à deux pouces, & diminue en approchant de la tête

&c

& de la queue. C'est le plus gros, le plus rude, le plus luisant, & il donne la principale couleur au Castor. Si on considère ce poil avec un Microscope, on remarque dans son milieu une ligne beaucoup moins opaque que les côtés, ce qui fait conjecturer qu'il est creux.

L'autre espèce de poil est un duvet très-fin & très-serré, long d'environ un pouce, qui garantit le Castor du froid, & qui sert à faire des chapeaux & des étoffes. Les peaux qui ont servi d'habit ou de couverture de lit aux Sauvages, sont les plus recherchées d'autant qu'elles ont perdu leur grand poil, & que le duvet qui reste étant devenu gras par la matière de la transpiration, est plus propre aux ouvrages, & se foule beaucoup mieux. Ce duvet, quand l'animal est en vie & qu'il travaille, est conservé & garanti de la boue par le poil le plus rude & le plus long.

Il est d'abord assez difficile de connoître si le Castor est mâle ou femelle. On ne voit qu'une seule ouverture sous la queue, & cette ouverture est destinée pour la sortie de leurs différens excréments. Les parties qui distinguent le sexe, sont cachées sous les muscles. Pour ne pas s'y tromper, il faut pincer plus que la peau qui est entre l'os pubis & cette ouverture. On y sent la verge qui est dure, grosse & longue comme le doigt.

On trouve sous la peau un lit de graisse épais ordinairement de 8 ou 10 lignes sous le ventre, & qui s'étend depuis les mâchoires jusqu'à la queue: mais il diminue peu à peu en approchant du dos où il n'y en a point du tout. On découvre un second lit de graisse entre les deux muscles obliques du ventre: mais cette graisse n'a que 2 ou 3 lignes d'épais. Les viscères en sont presque dépourvus. L'épiploon, quoiqu'aussi grand que dans les autres animaux, ne pèse que 3 ou 4 onces.

Tous les muscles du Castor sont extrêmement forts, & semblent plus gros qu'ils ne doivent être par rapport à la grandeur de l'animal. Les fibres du muscle peaucier ont des directions fort différentes. Celles qui couvrent le dos

depuis les cuisses jusqu'au col, sont droites & si grosses que ce muscle a dans cet endroit là près d'un pouce d'épaisseur. Les fibres qui sont situées à côté de celles-ci, s'en écartent peu à peu, & font un volume bien plus petit. Elles décrivent presque des demi-cercles, lesquels descendans sur les muscles pectoraux, sur le sternum & tout le long des muscles droits, se réunissent par une aponevrose, de telle sorte qu'elles enveloppent tout l'animal. Une partie de ces fibres vient embrasser les cuisses, après quoi elles se croisent sur l'os pubis, d'où elles descendent & forment un tissu en manière de natte. Ce tissu couvre non-seulement un paquet de fibres très-considérable, mais aussi le sphincter de l'anus.

De la surface interne de la natte dont on vient de parler, environ 12 ou 15 lignes au dessous de l'os pubis, forment deux trousses de fibres charnues, gros comme le doigt, lesquels remontent à l'insertion des muscles droits & s'y attachent. De la partie de ce muscle qui couvre le dos, & dont les fibres sont droites, il se forme du côté de la queue une aponevrose très-forte qui enveloppe tout ce qui est au dessous des cuisses. Elle est attachée aux apophyses épineuses des vertèbres qui sont vers la queue, & de distance en distance elle tient aux membranes des muscles qui la font mouvoir.

Le même plan de fibres étant parvenu aux premières vertèbres du dos, se divise d'abord en deux parties qui forment plusieurs têtes, & qui par différens principes s'insèrent en différens endroits. Il y en a une large d'environ 2 pouces, qui monte jusqu'à la troisième vertèbre du col, & qui est attachée sur le rhomboïde. Une autre s'attache sur la crête de l'omoplate, une troisième sur la partie postérieure & intérieure du bras, sur le coude & sur la partie postérieure & supérieure de l'avant-bras. Enfin la quatrième fait un même tendon avec celui du très-large, & de celle-ci il s'en fait une cinquième, qui s'insère sur la partie moyenne & inférieure de l'avant-bras.

Il n'y a rien de particulier dans les muscles du ventre, si ce

n'est que le petit oblique & le transversal sont inséparables.

Le foie du Castor est rouge brun, divisé en sept lobes qui occupent également les deux hypochondres, enforte qu'ils couvrent l'estomac de tous les côtés. La vessie du fiel est attachée au plus gros de ces lobes, & se vuide ordinairement dans le duodenum. M. Sarrafin en a trouvé une qui se dégorgeoit dans le jejunum.

La ratte est ronde, & n'a guere que 4 lignes de diametre sur environ 3 pouces de long. Elle est plus ferme que celle des autres animaux. Cinq ou six vaisseaux fort courts l'attachent au fond de l'estomac. Elle tient aussi par quelques membranes aux reins, au pancreas & au colon. On s'apperçoit de quelques glandes conglobées, grosses comme des pois, situées vers son extrémité, qui regarde l'estomac, & qui est un peu plus grosse que l'autre.

Les reins ont demi-pouce d'épais sur deux pouces de long, & sur presque autant de large. Les glandes rénales sont longues de 4 ou 5 lignes.

Le Pancreas a du moins deux pieds de long. Il forme un angle dont la pointe est attachée au gros lobe du foie par quelques petits filets. Ce pancreas est divisé en deux parties : l'une passe sous l'estomac & vient s'attacher à la ratte & au rein gauche : l'autre descend le long du duodenum & du jejunum, dans lesquels il s'ouvre par plusieurs petits conduits.

L'ésophage est intérieurement revêtu d'une membrane blanche, qui est comme une espece de doublure que l'on détache aisément du canal sans la déchirer.

Le ventricule du Castor est une des parties des plus singulieres de cet animal. Ce ventricule a 12 ou 13 pouces de long, sur environ 4 de large du côté de la ratte. Il diminue peu à peu; enforte qu'après les deux tiers, il est rétréci de moitié par une saillie de plus d'un pouce qui avance dans sa capacité. Après quoi il s'élargit d'environ 3 pouces vers le pylore qui est considérablement relevé, arrondi & avancé vers la ratte par une membrane attachée à l'é-

ſophage par ſon autre bout. L'évaſement dont on vient de parler, ſemble faire un ſecond ventricule : mais il ne ſert proprement qu'à retenir plus long-temps les alimens , & ſurtout les plus ſolides , comme le bois , dont il ne ſ'y fait qu'un extrait fort leger ; car il paſſe preſque comme il a été avalé , au lieu que les herbes , les fruits , les racines ſe diſſolvent parfaitement.

Les membranes du ventricule ſont ſi minces , que cette partie ſe déchire pour peu qu'on la gonfle. Il n'y a que la membrane charnue qui ſ'épaiſſit du côté du pylore & le fortifie. On ne trouve aucunes glandes diſperſées dans ce ventricule : mais en récompente il eſt garni d'environ 100 veſſies de deux ou trois lignes de long , leſquelles ſe rétréciffent du côté du ventricule , comme le ſont les grains de raiſin qui ſont un peu trop preſſés. Cette couche de veſſies eſt attachée ſur la membrane nerveuſe , & recouverte de la charnue. A l'égard de ſa ſituation , elle ſe trouve entre la partie droite du ventricule & l'éſophage. Toutes ces veſſies ſont une eſpece de corps demi ſphérique haut de 7 ou 8 lignes , & large d'environ 3 pouces à ſa baſe. L'intérieur de chaque veſſie paroît glanduleux : mais elles ſont ſi délicates , qu'elles crevent pour peu qu'on les preſſe. Quoique toutes ces veſſies aient chacune leurs iſſues , elles répondent néantmoins à 12 petits orifices larges d'environ 2 lignes , rangés ſur 4 colonnes qui s'ouvrent dans le ventricule. Après la mort de l'animal , ces veſſies contiennent une matiere blanche preſque ſans odeur & de conſiſtance de bouillie : mais il y a beaucoup d'apparence qu'elle eſt fluide lorſque l'animal eſt en vie. Cette matiere eſt ſans doute le diſſolvant des alimens , qui , dans les pays froids & pendant l'hiver , ne ſont que de bois d'Aune , de Platane , d'Orme , de Frêne & de différentes eſpeces de Peuplier. Pendant l'été les Caſtors vivent de toutes fortes d'herbes , de fruits ; de racines , ſurtout de celles de différentes eſpeces de Nymphaea.

Les inteſtins de cet animal ſont très-déliçats , & ont en-

viron 20 pieds de long. Le cæcum a la figure d'une faux : il est tenu dans cet état par deux ligamens qui rampent l'un le long de sa partie cave, & l'autre sur la partie convexe. Mesuré par la partie cave, il a 18 pouces de long, & plus de 30 par la convexe. Sa largeur est de 4 pouces dans son gros bout, & peut contenir 5 ou 6 livres d'eau. Le colon a 4 pieds de long, & le rectum environ 15 pouces.

La vessie est semblable à celle des chiens. Si l'on continue d'ouvrir cet animal jusqu'à la racine de la queue, on découvre fort aisément ses testicules & le paquet dont on a parlé dans la description du muscle peaucier. Ce paquet est un muscle creux, qui renferme la verge & les bourses.

Les testicules sont situés dans les aînes, appuyés par leur base sur les parties latérales de l'os pubis, & engagés dans la graisse. Ils sont enveloppés de plusieurs membranes que le péritoine & les muscles du bas ventre leur fournissent, surtout le muscle cremastere dont les fibres qui sont circulaires, leur donnent la figure d'un cône. Ils ressemblent tout à fait à ceux des chiens lorsqu'ils sont développés.

Les vaisseaux déferens grossissent considérablement derrière le col de la vessie : mais ils diminuent avant que d'entrer dans l'uretère, où ils ont leurs issues séparées l'une de l'autre.

Les vésicules séminales sont tellement engagées sous l'os pubis, qu'on ne peut les voir sans les séparer. Elles ont ordinairement deux pouces de long sur un pouce de large vers le milieu ; car elles sont pointues par les deux bouts. Leurs conduits s'ouvrent aussi séparément dans l'uretère, & vont aboutir ainsi que ceux des vaisseaux déferens à une éminence charnue qui est grosse comme un pois, & qui est une espece de *veru montanum*. On voit à côté de cette éminence plusieurs petits orifices des conduits excrétoires de quelques glandes situées autour du col de la vessie, lesquelles font la fonction des prostates, & sont remplies d'une liqueur blanche & huileuse.

Le muscle creux est situé entre l'os pubis & l'ouverture des excréments. Il ressemble en quelque maniere à ces an-

54 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
ciennes gibecieres larges & arrondies par le bas & rétrécies
vers le haut. Un corps tendineux large d'environ un pouce,
tient ce muscle attaché à la levre inférieure & moyenne
de l'os pubis d'où il descend, en s'élevant jusqu'à l'ouver-
ture commune dont on va parler.

En ouvrant cette espece de gibeciere de haut en bas,
on découvre vers son milieu la verge depuis la racine jus-
qu'au *balanus*. Elle partage cette capacité en deux cavités,
après quoi le muscle creux se repliant d'une certaine ma-
niere, forme encore deux cavités situées sous les premie-
res à côté du *balanus* : c'est dans ces quatre cavités que
sont renfermées les bourses qui contiennent le Castoreum :
mais avant que de passer outre, il est bon de parler de l'ou-
verture commune. C'est une capacité d'environ deux pou-
ces en tout sens, lorsqu'elle est bien gonflée, dans laquelle
aboutissent les bourses du Castoreum, l'uretre, l'anus &
le vagin dans les femelles. Elle est éloignée d'environ 3
pouces de la racine de la queue, & de 4 pouces de l'os
pubis, noirâtre & bordée d'un poil assez fin qui ne ressem-
ble point à celui du reste du corps.

La verge tient par sa racine à la levre inférieure de l'os
pubis. De là elle perce la membrane de la cloaque dans l'en-
droit où les bourses supérieures communiquent. Cette
membrane est collée circulairement à l'insertion du *bala-
nus*, comme le diaphragme l'est à l'ésophage. La partie in-
férieure de la verge qui est longue d'environ deux pou-
ces & demi, est contenue dans la cavité supérieure du mus-
cle creux dans l'endroit où il se sépare en deux cavités ; de
sorte que le *balanus* qui est long de près d'un pouce &
demi, se trouve tout à fait dans le cloaque situé entre les
issues des bourses tant supérieures qu'inférieures. Le Castor
approche de la femelle par devant, tant à cause de la situa-
tion de l'ouverture commune, qu'à cause de la longueur &
de l'inflexibilité de la queue. Un Chasseur a assuré M. Sar-
rafin qu'il avoit tué d'un coup de fusil un Castor mâle &
une femelle accouplés dans cette situation.

Le balanus, qui est tout à fait semblable à celui des chiens, est couvert d'une peau chagrinée. On découvre dans le corps de la verge un os de figure pyramidale, dont la base est attachée au corps caverneux, & qui est long d'environ 11 lignes.

Sous l'origine de la verge se trouvent deux corps gros comme une noix attachés au corps caverneux. Ces deux corps sont composés de vésicules fort délicates qui se gonflent dans le temps de la copulation par le moyen de plusieurs vaisseaux sanguins qui forment une espèce de capsule à l'uretre.

On trouve au même endroit deux glandes ovales, longues d'environ 10 lignes sur trois ou quatre lignes d'épais. Leurs vaisseaux excrétoires qui sont gros comme un stylet ordinaire, & longs de plus de 12 ou 15 lignes, s'ouvrent dans l'uretre environ un pouce avant dans la verge. La substance de ces glandes est ferme, & contient une liqueur huileuse & grasse, qui peut-être sert à défendre le canal de l'uretre de l'acreté des urines. Les rats en ont de pareilles, excepté qu'elles sont rondes.

Les parties de la génération de la femelle du Castor sont semblables à celles des femelles des lapins, des lievres, des rats. Le vagin de celles de Castor a cinq pouces de long. Il n'est pas renfermé non plus que l'uretre dans la cavité supérieure du muscle creux comme l'est la verge du mâle : mais ce vagin a son ouverture dans la cloaque.

On assure que les femelles portent 4 mois, & qu'elles sont jusqu'à 5, 6 & 8 petits : cependant on ne leur en trouve jamais plus de 4. M. Sarrafin l'a vérifié dans celles qu'il a ouvertes.

Les Castors femelles ont 4 mammelles, deux situées sur le grand pectoral, ainsi que celles des femmes entre la 2 & la 3 de vraies côtes, & les deux autres au col, environ 4 doigts plus haut que les premières.

Les Anciens qui ne disséquoient pas avec beaucoup de soin, ne s'apercevoient pas des testicules du Castor, parce qu'ils sont fort petits, & qu'ils sont situés dans les aines.

La grosseur, la situation & la figure des bourses leur im-
pôsoit. Messieurs de l'Académie Royale des Sciences ont
les premiers démêlé ces parties avec exactitude.

Les bourses qui sont contenues dans les cavités supérieures
du muscle creux, & que l'on appellera dans la suite bour-
ses supérieures, contiennent une matiere résineuse : mais
celles qui sont dans les cavités inférieures, & que l'on nom-
mera pour cela bourses inférieures, y sont assemblées par
paquets, renfermées sous une membrane commune, & rem-
plies d'une matiere huileuse. Les supérieures sont doubles,
& ressemblent assez bien à une besace, dont chaque poche
qui est d'environ trois pouces de long sur un pouce & demi
de large dans le fond, se trouve placée l'une à droite &
l'autre à gauche de la verge. Ces bourses décrivent un demi-
cercle en approchant de la verge, & se rétrécissent peu à
peu jusqu'à leurs ouvertures, lesquelles sont d'environ un
pouce, & répondent dans la cloaque.

On remarque trois membranes dans la tiffure de ces
bourses ; la premiere est simple, mais très-ferme : la se-
conde est beaucoup plus épaisse, moeuse & fort garnie
de vaisseaux ; la troisieme est particuliere au Castor ; elle
est seche comme un vieux parchemin, elle en a l'épaisseur
& se déchire de même : mais elle est tellement repliée sur
elle-même, qu'elle acquiert, quand on la développe, trois
fois plus de volume qu'elle n'avoit auparavant. Cette mem-
brane est fort lisse en dehors, gris de perle, marquetée
assez souvent de taches brunes, quelquefois rougeâtres.
Elle est inégale en dedans, garnie de petits filets auxquels
la matiere résineuse est fort adhérente.

Il semble que la premiere membrane ne sert qu'à con-
tenir les bourses dans leur juste grandeur. Les vaisseaux
dont la seconde est tapissée, fournissent la matiere résineu-
se mêlée avec le sang. Cette membrane s'infere dans tous
les replis de la troisieme, comme la pie-mere entre dans
les anfractuosités du cerveau. Pour la troisieme, il y auroit
beaucoup d'apparence qu'elle dût servir à filtrer la ma-
tiere

tiere résineuse, si l'on pouvoit y découvrir des glandes. Il faut les supposer très-petites, & peut-être que les filets dont on vient de parler en font les conduits excrétoires.

Cette matiere filtrée s'épaissit peu à peu dans les bourses, & y acquiert la consistance d'une résine échauffée entre les doigts. On l'appelle communément *Castoreum*. Elle conserve sa mollesse plus d'un mois après avoir été séparée de l'animal, & sent mauvais dans ce temps-là, étant grisâtre en dehors & jaunâtre en dedans : ensuite elle perd son odeur, elle se durcit, & devient friable comme les autres résines : mais il est à remarquer qu'elle est combustible en tout temps. Les bourses les plus grosses ne pesent qu'environ deux onces.

Les bourses inférieures paroissent d'abord doubles : l'une est à droit, & l'autre à gauche de la cloaque : mais lorsqu'on a découvert la membrane qui les enveloppe, on en trouve quelquefois 2 ou 3 ensemble. Chaque paquet de ces bourses est long de deux pouces & demi sur environ 14 ou 15 lignes de diametre. Les bourses sont arrondies par le fond, & diminuent insensiblement en approchant de la cloaque. La plus grande de ces bourses occupe toute la longueur du paquet : mais elle n'a qu'environ 8 ou 10 lignes de diametre. La seconde, qui n'est pas toujours plus grande que la troisième, n'a pas ordinairement la moitié du volume de la première. Pour la troisième elle est le plus souvent moindre que les autres.

Ces bourses, outre leur membrane commune, en ont chacune 3 propres. La 1 qui est d'un tissu fort délicat, est parsemée de beaucoup de vaisseaux. La 2 est non seulement plus épaisse ; mais elle est revêtue & comme encroûtée de glandes qui paroissent conglomérées, & ces glandes se répandent par paquets de différentes grosseurs sur la surface extérieure de cette membrane. On s'apperçoit au milieu de ces paquets de certaines capacités qui s'ouvrent les unes dans les autres ; savoir, les plus grandes dans les plus petites, & enfin celles-ci dans la bourse même par des ouvertures d'une ou 2 lignes.

La 3 membrane est blanche, & si délicate qu'elle se déchire comme si ce n'étoit qu'une crème épaisie sur la surface intérieure de la seconde. Elle est percée aux mêmes endroits que celle-ci, afin de donner passage à la liqueur filtrée dans les glandes.

La 1 membrane soutient les vaisseaux sanguins qui fournissent la liqueur propre à être filtrée. La 2 & la 3 servent à la filtration. Les glandes piquées, quoique très-légerement, laissent échapper une liqueur huileuse, & même celle qui est dans la bourse, se vuide facilement par cette ouverture pour peu qu'on presse la bourse. Cette liqueur est jaune, pâle, pleine de petits corps ronds semblables à ceux que l'on voit dans l'huile d'olive lorsqu'elle commence à se figer. Celle du Castor dans la suite devient parfaitement liquidé & de couleur d'ambre.

On ne sauroit assez admirer l'industrie de la nature, qui pour empêcher que les petits conduits des bourses (lesquels se dégorge dans la cloaque à côté du *balanus*) ne se bouchent par l'épaississement de la liqueur, ou ne se dessèchent par l'action de l'air, les a tous garnis d'un poil long d'environ demi-pouce. Il est attaché par sa racine dans la bourse même un peu au-delà du conduit; ensuite il en enfle la longueur, & s'avance un peu dans la cloaque.

Toutes ces bourses tant supérieures qu'inférieures ne communiquent point entr'elles. Leurs conduits, comme l'on vient de dire, aboutissent dans la cloaque. On ignore l'usage de ces liqueurs par rapport aux Castors. Il n'est pas vrai qu'ils s'en servent pour exciter leur appetit, lorsqu'il est languissant. M. Sarasin a nourri un de ces animaux pendant deux ans; mais il n'en a sù découvrir l'usage. Il est faux que les Chasseurs s'en servent d'appas pour attirer les Castors dans les pieges. On graisse avec la liqueur huileuse les pieges que l'on dresse aux animaux carnassiers, & qui font la guerre aux Castors, comme les Martes, les Renards, les Ours, & sur-tout les Carcajoux. Ces derniers vont attaquer pendant l'hiver les Castors dans leurs loges, qu'ils brisent bien souvent.

Parmi les Sauvages , les femmes graissent leurs cheveux avec l'huile des bourles de Castor : mais elle sent mauvais , & ne peut être qu'un appas pour des Sauvages.

Du bas-ventre il faut passer à la poitrine des Castors. Cette partie est longue d'environ 5 pouces , fort étroite par enhaut , beaucoup plus large vers le bas , fermée par 14 côtes , savoir 7 vraies qui sont fort courtes , & 7 fausses qui non seulement sont beaucoup plus larges ; mais qui par devant laissent entr'elles une grande distance. C'est ce qui facilite au Castor le moyen de se rétrécir aisément : car elles se peuvent rapprocher par la contraction des fibres circulaires du premier muscle.

Le sternum est composé de 5 os assez étroits. Le cartilage xiphoïde , qui est large d'un pouce , est rond & fort flexible. Les poumons ont six lobes , trois à droit , deux à gauche , & un autre fort petit qui est enfermé dans le médiastin. Les cartilages annulaires de la trachée artère sont chacun d'une seule pièce.

Le cœur est long d'environ 2 pouces. Sa base a un peu plus d'un pouce & demi de diamètre. Les ventricules en sont égaux ; mais l'oreillette droite est beaucoup plus petite que la gauche : cependant je ne crois pas pour cela que la quantité de sang qui tombe dans ce ventricule , soit moins proportionnée à sa grandeur : car la veine-cave inférieure est dans cet endroit considérablement évasée , & forme une espèce de sac entouré de fibres charnues long & large d'environ un pouce & demi de diamètre. Ce sac agit de concert avec l'oreillette droite pour remplir le ventricule droit. Le même sac est plus étroit du côté du foie , où il est fermé par 3 valvules semblables aux sigmoïdes qui permettent bien au sang de poursuivre sa route ordinaire , mais qui s'opposent à son reflux , lequel seroit à craindre , puisque la veine-cave supérieure , au lieu de s'ouvrir dans l'oreillette , passe par derrière & se dégorge dans le sac ; de sorte que le confluent de ces deux colonnes de sang se rencontre dans un sens tout-à-fait opposé , & que la sous-

claviere gauche , au lieu de finir sa route dans la veine-cave supérieure , descend (en passant sur la branche inférieure de l'aorte) sous la base du cœur , & va s'ouvrir dans le sac dont on a parlé.

Voici ce que M. Sarrafin remarqua de plus singulier dans la tête du Castor.

1. L'os occipital est posé sur le derriere de la tête comme une plaque.

2. Il n'y a point de sinus intérieur dans la faux de la dure-mere. Cette membrane divise légèrement le grand cerveau, soutenue dans sa situation par des osselets insérés dans sa propre substance , dont les uns ne sont que des lames osseuses très-solides quoique minces, & les autres qui sont ronds , ont une ligne de diametre sur deux ou trois lignes de long.

3. Le cerveau n'a aucunes anfractuosités sensibles. On en separe la pie-mere , comme si elle étoit simplement couchée sur un corps uni.

4. Le cervelet est relevé de plusieurs tubérosités de différentes figures , qui sont séparées les unes des autres par la pie-mere. Il y en a deux qui sortent des côtés , & qui ont 4 lignes en tout sens.

5. Les yeux sont fort petits , l'ouverture des paupieres n'ayant qu'environ quatre lignes. La cornée est ronde , & l'Iris d'un bleu foncé.

6. M. Sarrafin a remarqué comme une troisième paupière située dans le grand angle de l'œil. C'est comme un rideau qui couvre la cornée , ou qui la découvre au gré de l'animal.

7. Les deux machoires qui sont très-fortes & presque égales , sont garnies chacune de 10 dents , deux incisives & huit molaires. Les incisives sont situées au-bout du museau : celles d'enhaut sont longues d'environ 8 lignes , & celles d'endas ont environ un pouce de long. Les racines des supérieures ont deux pouces & demi de longueur : celles des inférieures en ont plus de trois & suivent la courbure des machoires , ce qui leur donne une force prodigieuse ; aussi les Castors abbattent à belles dents de grands arbres.

8. Comme ces animaux vivent le plus souvent d'alimens fort secs, la nature leur a donné des glandes salivales d'une grandeur prodigieuse. Elles occupent tout le dessous de la machoire inférieure, le devant du col, & descendent jusques sur les clavicules. Ces glandes sont couvertes d'un muscle adhérent à la peau, composé de deux plans de fibres charnues attachées à la 2, 3, & 4 vertebre du col par un principe charnu, large de 4 doigts. L'un & l'autre de ces plans prenant des routes opposées, embrassent le col vers la trachée artère, sur laquelle ils croisent leurs fibres en forme de natte. Celui qui vient du côté droit va vers la gauche s'insérer par son aponevrose au bras, au plis du coude & à l'avant-bras. L'autre plan va par une route opposée s'insérer de même dans l'autre bras. Ce muscle tient par enhaut à toute la machoire inférieure, & par enbas il est appuyé sur de la graisse, & descend jusques sur les clavicules. Son usage est de presser les glandes en abaissant la machoire, & en approchant les bras de l'animal en même temps qu'il tient entre ses mains les alimens dont il se nourrit.

La queue du Castor n'a aucun rapport avec le reste du corps. Elle paroît approcher de la nature des poissons : car elle est couverte d'une peau écaillée, sous laquelle on trouve une graisse ferme qui ressemble assez à la chair du Marsoin, ce qui pourroit sans doute avoir le plus contribué à faire passer le Castor pour un amphibie. Les écailles sont exagones, épaisses de demi-ligne sur environ trois ou quatre lignes de long, couchées les unes sur les autres, jointes ensemble par une pellicule fort délicate, enchassées dans la peau dont elles se séparent aisément après la mort de l'animal. Il sort d'entre chaque écaille trois ou quatre poils longs d'environ 2 lignes, qui sont plus fréquens dans les côtés de la queue qu'ailleurs.

Cette queue est mue par un grand nombre de muscles dont les uns sont grands & les autres petits. Les plus grands sont appuyés sur les apophyses transverses de l'os sacrum : leurs tendons sont distribués par paquets de 4

62 MÉMOIRES DE L'ACADE'MIE ROYALE
ou de 6 enfermés dans des gaines qui les conduisent le
long des vertebres de la queue. Les petits muscles ont leurs
tendons collés & confondus avec ceux des premiers.

Le Castor étant destiné à des ouvrages de maçonnerie ,
coupe le bois avec ses dents , amollit & gache la terre glaise
avec ses pieds. Sa queue ne lui sert pas seulement de truelle,
mais d'auge pour porter le mortier ; ainsi il étoit nécessaire
qu'elle fût écailleuse , garnie de graisse & de plusieurs
muscles.

Les pieds de devant sont semblables aux pieds des ani-
maux qui comme lui aiment à ronger , & qui tiennent ce
qu'ils mangent entre leurs pattes , comme les rats, les écu-
reuil. Les pieds de derriere n'y ont aucun rapport , & res-
semblent à ceux des oiseaux de riviere , qui sont garnis de
membranes entre les doigts , comme sont ceux des oies &
des canards. Ainsi le Castor est propre à marcher sur la terre,
& à nager dans les eaux. Depuis le bout du nez jusqu'aux
cuisses , il est semblable à un rat ; mais depuis les cuisses jus-
qu'à la queue , il ressemble assez aux oiseaux de riviere qui
ont les pieds plats.

M. Sarrafin a joint à l'anatomie du Castor plusieurs cho-
ses qui regardent leur genre de vie.

1. Lorsque les grandes inondations sont passées, les fe-
melles retournent à leurs logemens pour y mettre bas. Les
mâles tiennent la campagne jusqu'aux mois de Juin & de
Juillet, & ne reviennent chez eux que lorsque les eaux
sont tout-à-fait basses. Alors ils réparent les désordres que
les inondations ont faits à leurs logemens , ou ils en font
de nouveaux. Ils changent de lieu pour trois principales
causes. 1. Lorsqu'ils ont consommé les alimens qui étoient
à leur portée. 2. Quand la compagnie est trop nombreuse.
3. Quand les Chasseurs les inquietent trop.

2. Pour établir leur demeure , ils choisissent un endroit
abondant en vivres , arrosé d'une petite riviere , & propre
pour y faire un lac. Ils commencent par y construire une
chaussée de hauteur suffisante pour élever l'eau jusqu'au
premier lit de leurs logemens. Si le pays est plat & que la

riviere soit creuse , les chauffées sont longues , mais moins élevées que dans les vallons. Ces chauffées ont dix ou douze pieds d'épaisseur dans leurs fondemens , & diminuent peu à peu jusqu'au haut où elles n'en ont ordinairement que deux. Comme ces animaux ont une grande facilité à couper du bois , ils ne l'épargnent pas , & le taillent ordinairement par morceaux gros comme le bras ou comme la cuisse , & longs depuis 2 jusqu'à 4 , 5 ou 6 pieds. Ils les enfoncent par l'un des bouts fort avant dans la terre & fort proche les uns des autres , les entrelassant avec d'autres morceaux plus petits & plus souples , dont ils remplissent les vuides avec de la terre glaise. On continue à mesure que l'eau s'élève , afin de pouvoir transporter plus aisément les matériaux. On arrête enfin ces sortes de digues lorsque les eaux retenues peuvent atteindre le premier lit du logement qu'ils doivent faire. Le côté de la chauffée que l'eau touche , est en talus , & l'eau qui pese suivant sa hauteur la presse puissamment contre terre , le côté opposé est à plomb. Elles sont assez solides pour soutenir les personnes qui montent dessus , & ces animaux ont grand soin de les entretenir : car ils réparent les moindres ouvertures avec la terre glaise. S'ils s'aperçoivent que les Chasseurs les observent , ils n'y travaillent que la nuit , ou bien ils abandonnent leur demeure.

3. La chauffée étant finie , ils travaillent à leurs cabanes , qu'ils fondent toujours solidement sur le bord de l'eau , sur quelque petite Isle , ou sur des pilotis. Ces logemens sont ronds ou ovales , & débordent des deux tiers hors de l'eau ; mais ils ont la précaution de laisser une porte que la glace ne puisse pas boucher. Quelquefois ils bâtissent la cabane entière sur la terre , & font des fossés de 5 ou 6 pieds de profondeur , qu'ils conduisent jusqu'à l'eau. Ils emploient les mêmes matériaux pour les bâtimens que pour les chauffées , excepté que les bâtimens sont perpendiculaires , & terminés en maniere de dôme. Les murailles ont ordinairement deux pieds d'épaisseur. Comme leurs dents valent bien les meilleures scies , ils coupent tous les

bouts de bois qui excèdent les murailles , & y appliquent un enduit en dedans & en dehors , qui est une espece de torchis fait avec la terre glaise & des herbes seches. C'est bien dans cette occasion où ils se servent de leur queue pour mieux affermir cet enduit.

4. Le dedans de la cabane est vouté en anse de panier , & propre pour loger 8 ou 10 Castors. Hors d'œuvre cette maison a 8 ou 10 pieds de large sur 10 ou 12 pieds de long, supposé que la cabane soit ovale : dans œuvre elle a 4 ou 5 pieds de large sur 5 ou 6 pieds de long. Si le nombre des Castors est de 15 ou 20 & même de 30 , ce qui est néanmoins fort rare , le logement est grand à proportion , & même il y en a plusieurs les uns contre les autres. Quelques Missionnaires ont assuré M. Sarasin qu'on avoit trouvé 400 Castors logés dans différentes Cabanes qui communiquoient les unes aux autres. Elles sont disposées par étages , afin de s'y pouvoir retirer quand les eaux croissent. Ils ont aussi une ouverture séparée de leur porte & de l'endroit où ils se baignent. C'est par cette ouverture qu'ils vont à l'eau rendre leurs excréments.

5. On appelle Castors terriers ceux qui se logent dans les cavernes pratiquées dans un terrain élevé sur le bord de l'eau. Ils commencent leur logement par une ouverture qui va plus ou moins avant dans l'eau , selon que les glaces peuvent être plus ou moins épaisses , & la continuent de 5 ou 6 pieds de long : mais elle n'a de largeur qu'autant qu'il en faut pour y pouvoir passer ; après quoi ils font un lac de 3 ou 4 pieds en tout sens , où ils se baignent quand il leur plaît. Ensuite ils coupent un autre boyau dans la terre , qui va toujours en s'élevant par étages ; afin de s'y mettre au sec quand les eaux s'élevent. On trouve quelquefois de ces boyaux qui ont plus de 100 pieds de long. Ces Castors couvrent les endroits où ils couchent avec de l'herbe. En hiver ils font des copeaux qui leur servent de matelas.

6. Tous ces ouvrages , sur-tout ceux des Castors qui vivent dans les pays froids , sont ordinairement achevés au
mois

mois d'Août & de Septembre, qui est le temps où il faut commencer à faire des provisions pour vivre pendant l'hiver. Ils coupent donc le bois par morceaux longs depuis 2 ou 3 pieds jusqu'à 8 ou 10. Les gros morceaux sont traînés par plusieurs de ces animaux, les petits par un seul, mais par des chemins différens pour ne pas s'embarasser les uns les autres. Ils en mettent d'abord une certaine quantité qui flotte dans l'eau, puis ils en placent de nouveaux sur les premiers, qu'ils entassent pieces sur pieces jusqu'à ce que leur provision réponde au nombre des animaux qui ont dessein de loger ensemble : par exemple, la provision pour 8 ou 10 Castors est de 25 ou 30 pieds en carré sur 8 ou 10 pieds de profondeur. Ce bois n'est pas entassé comme celui de nos chantiers ; mais il l'est d'une maniere qui leur permet d'en arracher les morceaux qu'il leur plaît, & ils ne mangent que ceux qui trempent dans l'eau. Avant que de les manger, ils les coupent menu, & les apportent dans l'endroit de la cabane où ils couchent. S'ils les avoient coupés avant que de les mettre dans leur chantier, l'eau les auroit entraînés d'un côté & d'autre.

7. A l'égard de la chasse du Castor, on la fait depuis le commencement de Novembre jusqu'au mois de Mars & d'Avril, parce que ces animaux sont bien fournis de poil. On le tue à l'affut, on lui tend des pieges, ou on le prend à la tranche. L'affut est la maniere la plus ennuyeuse & la moins assurée. La plus commune est celle de lui tendre des pieges. Quoique les Castors ayent fait leurs provisions, ils ne laissent pas que d'aller de temps en temps dans les bois chercher de nouvelle nourriture. Les Chasseurs même qui savent qu'ils aiment mieux le bois frais que celui qui est flotté, leur en apportent tout près de leurs cabanes, & leur dressent des pieges semblables à ces quatre de chiffre dont on prend les rats. On plante fort avant dans la terre plusieurs piquets de trois ou quatre pieds de long, entre lesquels il y a une traverse fort pesante, élevée d'environ un pied & demi, sous laquelle on met pour apas une branche de Peuplier longue de 5 ou 6 pieds, la-

quelle conduit à une autre branche fort petite. Celle-ci répond à la traverse avec tant de justesse, que le Castor a beau remuer la premiere, la traverse ne tombe que lorsqu'il coupe la petite branche, & il lui en coûte toujours la vie.

8. Prendre des Castors à la tranche, c'est faire des ouvertures à la glace avec des instrumens tranchans lorsque les glaces n'ont qu'environ un pied d'épais. Les Castors ne manquent pas de venir à ces ouvertures pour respirer, & c'est là où on les assomme à coups de haches. Il y a des Chasseurs qui remplissent ces trous avec la bourre de l'épi de *Typha* pour n'être pas vûs par les Castors, & alors ils les attrapent par un pied de derriere. S'il y a quelque ruisseau près des cabanes, on en coupe la glace en travers pour y tendre un filet bien fort, tandis qu'on va briser la cabane pour en chasser ces animaux, qui ne manquent pas de se sauver dans le ruisseau & de donner dans le panneau.

M E T H O D E

P O U R L A R E C T I F I C A T I O N

D E S C O U R B E S.

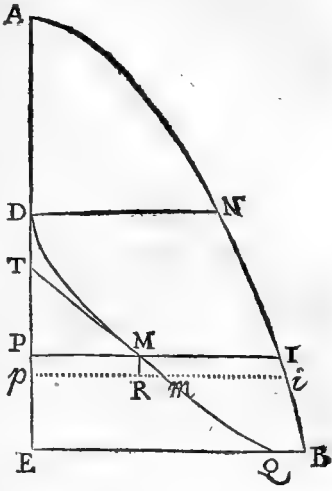
PAR M. CARRE'.

1704.
15. Mars.

Monsieur Vanheuraët nous a donné une maniere de rectifier des Courbes qui m'a paru un peu embarrassée; car elle suppose une des regles de M. Hudde pour la réduction des Equations: c'est ce qui m'a donné occasion de chercher la même chose par la méthode *des Infiniment petits*, qui est beaucoup plus simple & plus facile, & qui ne suppose rien.

Soient deux lignes courbes *NIB* & *DMQ* avec la droite *DE*, dont la nature est telle qu'ayant mené d'un

point quelconque M de la Courbe DMQ la tangente MT , & PM perpendiculaire sur DE prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre la Courbe NIB au point I , PT soit toujours à TM comme quelque ligne donnée est à PI . Je dis que l'espace $DNBE$ est égal au parallélogramme fait de la donnée & d'une ligne égale à la Courbe DMQ .



Pour le démontrer, soit menée une autre ligne pK infiniment proche de PM , & MR parallèle à DE . A cause des triangles semblables TPM , MRK ; $PT.TM::RM.MK$: or par la supposition $PT.TM::a$ (la ligne donnée). PI ; donc RM ou $Pp.MK::a.PI$. Donc le rectangle fait de la donnée par MK est égal au rectangle de PI par Pp : c'est-à-dire, $MK \times a = PI \times Pp$. Mais la somme des MK est égale à la Courbe DMQ , & la somme des $PI \times Pp$ est égale à l'espace $DNBE$; donc, &c.

Maintenant soit cette équation générale $a^ny^m = z^p$ qui exprime la nature d'une infinité de Courbes telles que DMQ , m marquant une puissance quelconque paire, & p une puissance impaire. Ayant nommé DP, x ; PM, y ; & PI, z ; donc MR ou $Pp = dx$, & $Rm = dy$, on cherchera la valeur de la soutangente PT que l'on trouve par les regles $= \frac{m \cdot x}{p}$; & à cause du triangle rectangle TPM ,

$$TM = \frac{m m x x}{p p} + \frac{x^{\frac{2p}{m}}}{a^{\frac{2n}{m}}}$$

On aura donc $PT \left(\frac{m \cdot x}{p} \right) :$

$$TM \left(\frac{m m x x}{p p} + \frac{x^{\frac{2p}{m}}}{a^{\frac{2n}{m}}} \right) :: \text{la donnée } (a). PI (z). \text{ D'où}$$

Iij

l'on tire $z z = a a + \frac{p p x^{\frac{2p-2m}{m}}}{m m a^{\frac{n-2m}{m}}}$ qui est un lieu à une in-

finité d'autres lignes courbes telles que *NIB*, dont la quadrature sert à trouver la longueur des premieres Courbes *DMQ*.

Si $n=1$, & $m=2$, p fera $=3$; car tous les termes d'un lieu géométrique doivent être d'un même degré, & pour lors l'équation générale $a^n y^m = x^p$ se changera en celle-ci $a y y = x^3$ qui exprime la nature de la seconde parabole cubique, & l'égalité correspondante deviendra $z z = \frac{9 a x}{4} + a a$ qui est un lieu à la parabole ordinaire, dont le sommet est éloigné du point *D* de $\frac{4 a}{9}$, & le parametre $= \frac{9 a}{4}$. Or nommant *BE*, d ; & *AE*, b ; *DE* fera $b - \frac{4 a}{9}$, & on trouvera par la méthode de la quadrature

* Calcul intégral, p. 8. de la parabole * que la somme infinie des $\frac{z dx}{a}$ qui est égale à la longueur de la ligne courbe *DMQ*, est égale à $\frac{2 b d}{3 a} - \frac{8}{27} a$

Si la Courbe *DMQ* est une parabole du premier genre qui ait pour axe *DN*, l'équation générale se changera en celle-ci $a y = x x$, car en ce cas $n=1$, $m=1$, & $p=2$, & sa correspondante deviendra $z z = 4 x x + a a$, d'où l'on tire $x x = \frac{z z - a a}{4}$, qui est un lieu à l'hyperbole, dont le centre est le point *D*, le parametre $= \frac{1}{2} a$, & l'axe transversant $= 2 a$: car par la propriété de l'hyperbole $x x$ (les x représentent ici les ordonnées) $z z - a a :: \frac{1}{2} a . 2 a$.

Il est manifeste que l'on ne peut trouver géométriquement la longueur de la parabole sans la quadrature de l'hyperbole, & réciproquement on ne peut trouver la quadrature de l'hyperbole sans la longueur de la parabole.

NOUVELLE FORMATION DE SPIRALES

Beaucoup plus différentes entr'elles que tout ce qu'on peut imaginer d'autres Courbes quelconques à l'infini ; avec les Touchantes , les Quadratures , les déroulemens , & les longueurs des quelques-unes de ces Spirales qu'on donne seulement ici pour exemples de cette Formation générale.

PAR M. DE VARIGNON.

DANS les Mémoires de 1700 pag. 90 en démontrant les Forces centrales de la Spirale générale de M. de Fermat , je dis que j'en avois encore une infiniment plus universelle : la voici formée par le moyen d'une Courbe en général , qui dans le détail fournit non-seulement toutes les Spirales de M. Fermat , mais encore autant d'autres que cette Courbe générale se peut diversifier en de particulieres , soit géométriques , soit mécaniques ; & même en autant d'autres encore que chaque Courbe particuliere peut avoir de positions différentes dans l'usage qu'on en peut faire pour cela , ainsi qu'on le verra dans les exemples qu'on en donnera dans la suite.

1704.
9. Avril.

Cette nouvelle formation de Spirales me vint en pensée dès il y a six ans , en faisant réflexion que celles de M. Fermat (dont la nature est d'avoir par tout leurs ordonnées concourantes , ou leurs rayons , en raison des puissances quelconques des arcs circulaires qui en expriment les révolutions) ne diffèrent aucunement de celles qu'on trouveroit en prenant les arcs de révolutions en raison des ordonnées de Paraboles de tous les genres à l'infini ,

dont les abscisses seroient égales aux ordonnées concourantes des Spirales cherchées. Ce fut, dis-je, ce qui me fit penser à substituer d'autres Courbes, ou plutôt une Courbe en général qui les comprît toutes, à la place de ces Paraboles; & j'en vis naître une infinité de genres de Spirales toutes différentes de celles dont je viens de parler: il y en avoit d'infinies comme celles-là, & de même contour qu'elles; il y en avoit aussi d'infinies du côté du Pole ou de leur centre, dont les unes étoient encore infinies, & d'autres finies par l'autre bout; il s'en trouvoit de finies de part & d'autre; on en voyoit qui avoient des points d'inflexion, ou de torfes; d'autres revenoient une ou plusieurs fois sur elles-mêmes en forme de lassés ou de nœuds; il y en avoit même de rebroussées, & cela d'une variété infinie. En voici de toutes ces façons, entre lesquelles sont six Spirales logarithmiques, dont cinq sont nouvelles.

FORMATION NOUVELLE
de Spirales à l'infini.

Comment une même Courbe quelconque peut engendrer une ou plusieurs Spirales à l'infini.

I. Soit en général une Courbe quelconque HHV , appelée *Courbe génératrice* (géométrique ou mécanique, il n'importe), dont les ordonnées soient GH ; son axe ou son diamètre CX , lequel rencontre en A la circonférence d'un cercle quelconque $ABYA$ appelé *Cercle de révolution*; soit aussi CAX la première position d'une Règle CP , laquelle (fixe au centre de ce cercle) tourne suivant ABY à mesure que se forme une Spirale $OZAK$, telle que cette Règle la rencontrant en E ; & le cercle de révolution en B , si de son centre C on fait l'arc de cercle EG avec l'ordonnée GH de la Courbe génératrice HHV ; l'on ait par tout la circonférence entière $ABYA$ du cercle de révolution, à l'arc AMB ou $ABYAMB$, &c. parcouru par le point B de la Règle CP , comme une droite constante quelconque AD est à l'ordonnée correspondante HG de la Courbe génératrice HHV .

FIGURE I.

Il suit de cette génération que les arcs de révolution AMB ou $ABYAMB$, &c. sont toujours ici entr'eux comme les ordonnées correspondantes GH d'une Courbe quelconque HHV ; & que par conséquent les Spirales ainsi trouvées, sont infiniment plus générales que tout ce qu'on en a donné jusqu'ici.

II. Pour trouver l'équation universelle qui les exprime toutes à la fois, soit la circonférence du cercle de révolution $ABYA=c$, son rayon $CA=a$; que ses arcs de révolution AMB dans la première, $ABYAMB$ ou $c+AMB$ dans la seconde, $2c+AMB$ dans la troisième, $3c+AMB$ dans la quatrième; en un mot nc dans quelque révolution terminée à B , que le nombre n (entier ou rompu) puisse signifier, soient les abscisses $=x$ de la Spirale ou plutôt du cercle de révolution, lesquelles aient le point A pour origine, & se prennent toutes suivant AMB ; soient aussi CE ou $CG=y$, $GH=z$, & $AD=b$; soient de plus appellées s les abscisses ou les arcs (pris depuis leur origine) des Courbes qui résultent de ces Spirales déroulées, & v les abscisses des axes de ces mêmes Courbes. On prendra f & S pour des caractéristiques, dont la première f signifiera *somme* ou *intégrale*, & la seconde S signifiera *sinus*, comme d signifie *différentielle*.

III. Cela posé, la génération précédente (art. 1.) de la Spirale $OZAK$ donnera par tout $ABYA(c)$. AMB ou $ABYAMB$, &c. $(x) :: AD(b)$. $GH(z)$. De sorte que l'équation générale de cette Spirale sera $cz=bx$, dans laquelle il n'y a plus qu'à substituer la valeur de z résultante de la nature donnée de la Courbe HHV , où (ce qui revient au même, & ce qui souvent est plus commode) à substituer au lieu de z sa valeur $\frac{bx}{c}$ dans l'équation de cette Courbe génératrice donnée, du nom de laquelle cette Spirale prendra le sien: c'est-à-dire, que cette Spirale s'appellera *Parabolique*, *Hyperbolique*, *Logarithmique*, *Circulaire*, &c. selon que sa Courbe génératrice sera

Noms dont
on se servira
dans la suite.

Equation gé-
nérale des Spi-
rales précé-
dentes.

ÉQUATION GÉNÉRALE
 de Spirales à l'infini.

$$c z = b x.$$

Il est à remarquer que la même formation de Spirale (art. 1.)
 auroit aussi donné $z c^x = b x^x$, si l'on eût pris \overline{ABYA}^x . \overline{AMB}^x
 ou \overline{ABYAMB}^x :: AD. GH. Mais la précédente équation
 suffit pour tout ce qu'on vient de promettre de cette formation ;
 outre que l'équation précédente est quelquefois aussi générale que
 celle-ci, ainsi qu'on le verra dans l'art. 72.

COROLLAIRES GÉNÉRAUX.

Les arcs de
 révolution des
 Spirales précé-
 dentes suivent
 toujours la
 raison des or-
 données cor-
 respondantes
 de leurs Cour-
 bes génératri-
 ces, pendant
 que les rayons
 de ces Spira-
 les suivent de
 même la rai-
 son des abs-
 cisses de ces
 Courbes géné-
 ratrices.

IV. La raison de b à c étant (hyp.) constante, il résulte
 de l'équation précédente (art. 3.) que les arcs (x) de
 révolution suivront toujours la raison des ordonnées GH
 (z) correspondantes de la Courbe génératrice HHV de
 quelque Spirale que ce soit, ainsi qu'on l'a déjà remar-
 qué sur la fin de l'article 1. Donc chaque rayon CE (y)
 de cette Spirale étant (art. 1.) toujours égal à l'abscisse
 correspondante CG de sa Courbe génératrice, en pre-
 nant C pour leur origine ; les rayons CE de chaque Spi-
 rale suivront toujours la raison des abscisses CG de sa
 Courbe génératrice, pendant que les arcs (x) de révo-
 lution suivront la raison des ordonnées GH (z) de cette
 Courbe. D'où l'on voit en général que pour avoir une
 Spirale dont les rayons suivent telle raison qu'on voudra,
 pendant que les arcs de révolution suivront telle autre
 raison qu'on voudra aussi, il n'y a qu'à lui donner une
 Courbe génératrice dont les abscisses (prises de l'origine
 C) suivent la première de ces raisons, & les ordonnées la
 seconde. D'où l'on voit aussi déjà que la Logarithmique
 ordinaire doit ainsi engendrer deux Spirales Logarithmi-
 ques différentes, selon qu'elle aura son asymptote sur CX ,

ou

ou perpendiculaire en C à cette même CX : dans ce second cas ce sera la Spirale Logarithmique ordinaire dont les ordonnées ou rayons (y) sont en progression géométrique, pendant que les arcs de révolution correspondans (x) sont en progression Arithmétique; & dans le premier cas ç'en sera une autre dont les ordonnées ou rayons seront en progression Arithmétique, pendant que les arcs de révolution correspondans seront en progression Géométrique. Et ainsi des autres Courbes qu'on voudra prendre pour génératrices; ce qui donnera toujours des Spirales dont les rayons (y) & les arcs (x) correspondans suivront telles raisons qu'on voudra.

V. Il suit encore de l'art. 3. que chaque Spirale commencera toujours du côté de A où les x (*hyp.*) commencent, & toujours à une distance du centre C , égale à l'abscisse CG qui répond à la moindre des ordonnées de la Courbe génératrice HHV ; & par conséquent à une distance infinie de ce centre, si cette Courbe génératrice a CX pour asymptote; puisque $z=0$ rend aussi $x=0$ dans l'équation générale de l'art. 3. Cela se verra dans l'art. 30. n. 1. & dans l'art. 55.

Ces Spirales commenceront toujours du côté des moindres ordonnées de leurs Courbes génératrices.

VI. De quelque manière que les ordonnées GH (z) croissent ou décroissent, si celle qui passe par le centre C est finie, la Spirale y arrivera après un nombre fini de révolutions; puisque z finie rend aussi x finie dans l'égalité générale de l'art. 3.

La Spirale ne fait qu'un nombre fini de révolutions avant que d'arriver à son centre, lorsque sa courbe génératrice y a une ordonnée finie.

VII. Mais si la Courbe génératrice HHV a quelque ordonnée (z) infinie, la Spirale fera une infinité de révolutions avant que d'arriver à son point E correspondant: de sorte que si cette asymptote ou ordonnée infinie (z) passe par le centre C de la Spirale, cette Spirale n'y arrivera jamais qu'après un nombre infini de révolutions. Et tout cela parce que z infinie rend aussi x infinie dans l'équation générale de l'art. 3. On le verra dans l'art. 30. n. 3. & dans l'art. 49.

La Spirale n'arrive à son centre qu'après un nombre infini de révolutions, lorsque sa Courbe génératrice y a une ordonnée infinie, c'est-à-dire, une asymptote pour ordonnée.

VIII. L'équation générale $cx=bx$ de l'art. 3. donnant aussi $ncz=nbx$, il est visible que $z=nb$ donnera toujours

La Spirale passera toujours par le point G de l'aba-

que ordonnée GH
multiple de son
paramètre AD .

$x = nc$; & par conséquent quelque nombre entier que n signifie , x sera un pareil multiple de c , que z le sera de b , c'est-à-dire , que x exprimera autant de révolutions complètes que z (GH) contiendra de fois b (AD). Et comme cette Spirale (quelle qu'elle soit) passe toujours par CX au commencement & à la fin de chaque révolution , & qu'elle a toujours (*art. 1.*) son rayon CE (y) égal à l'abscisse CG terminée par l'ordonnée GH (z) correspondante de sa Courbe génératrice HHV ; il suit que ce rayon CE sera alors en CG ; & qu'ainsi cette Spirale passera toujours par le pié G de chaque ordonnée GH (z) multiple de AD (b) , & qu'elle sera d'autant de révolutions (en tout) que la plus grande de ces ordonnées GH (z) contiendra de fois la droite AD (b) ; c'est-à-dire , d'une infinité de révolutions dans le cercle $ABYA$, lorsque la Courbe génératrice HHV y aura une ordonnée (z) infinie. Et de même d'une infinité hors ce même cercle , lorsque les ordonnées GH (z) croîtront à l'infini du côté de X ou de x . Si l'ordonnée (z) infinie étoit à la circonférence du cercle de révolution , comme en A , la Spirale feroit encore d'une infinité de révolutions au dedans ou au dehors de ce cercle , selon que l'accroissement des ordonnées de la Courbe génératrice en viendroit.

Maniere de
trouver en quels
points la Spirale
doit rencontrer
son axe.

FIG. II.
III.

IX. Il suit de cet art. 8. que si après avoir divisé la plus grande ordonnée XV ou CV de la Courbe génératrice HHV , en parties XR , RS , ST , &c. ou CR , RS , ST , &c. égales à AD , on fait RH , SH , TH , &c. toutes parallèles à CX , lesquelles aillent rencontrer la Courbe génératrice HHV en autant de points H , desquels soient faites les ordonnées HG de cette Courbe : la Spirale (quelle qu'elle soit) coupera l'axe CX en tous les points G de ces ordonnées ; les abscisses correspondantes CG en feront les rayons à la fin de chaque révolution complète ; & leurs parties GG feront les différences de ces rayons : de sorte que la nature de la Courbe HHV étant donnée , il n'y aura qu'à substituer nb au lieu de z dans son équation , & la valeur de y qui en résultera , sera celle du rayon CG où se terminera la révolution marquée par le nombre que n signifiera. Et en prenant

n pour un nombre moindre ou plus grand d'une unité que celui-là, la valeur de y , qui en résultera, sera aussi celle du rayon CG où se terminera la révolution immédiatement précédente ou immédiatement suivante. Ainsi la différence de ces deux valeurs de y , sera la valeur de la différence de ces deux rayons CG . De même en général, quelle que soit la différence de ces deux valeurs de n , celle des y , qui en résultera, sera aussi celle des rayons CG où se terminent les révolutions marquées par ces différentes valeurs de n .

Tout cela servira dans la suite pour trouver les valeurs des couches différentes des espaces spiraux.

X. Il suit encore de l'art. 8. qu'en prenant AD (b) pour l'ordonnée (z) qui passe par A dans chaque Courbe génératrice HHV , la Spirale qui en sera engendrée comme ci-dessus (art. 1.) passera alors par A , soit pour sortir du cercle de révolution, ou pour y entrer, le point A se trouvant alors un des points G du précédent art. 9 : de sorte que de quelque nature que soit cette Spirale, elle n'aura jamais plus d'une révolution du côté qu'elle aura commencé, soit au dedans ou au dehors du cercle $ABYA$, tant que les ordonnées GH (z) de la Courbe génératrice HHV iront en diminuant depuis D , soit du côté de C , ou du côté de X ; & si elles vont en diminuant de part & d'autre depuis D , la Spirale n'aura tout au plus que deux révolutions, une de chaque côté de AD : encore faudra-t'il pour les rendre completes, que ces ordonnées diminuent de part jusqu'à zero sans passer outre. Mais si ces ordonnées (z) vont en augmentant de part & d'autre depuis D , la Spirale aura autant de révolutions de chaque côté de AD , que cette droite sera contenue de fois dans la plus grande des ordonnées HG (z) qui s'y trouveront.

Quand la Spirale doit sortir de son cercle de révolution ou y entrer, & ce qu'elle doit faire de révolutions auparavant.

FIG. IV.
V.

XI. Jusqu'ici nous n'avons fait mention que des Spirales engendrées par des Courbes dont toutes les ordonnées n'étoient que d'un seul côté du centre C de ces Spirales. Mais si l'on veut que la Courbe génératrice HHV soit placée de maniere qu'elle ait des ordonnées HG de part & d'autre de ce centre C , ou (ce qui revient au même) que ce centre soit

Spirales dont les Courbes génératrices ont des ordonnées de part & d'autre de leurs centres.

Fig. VI. VII. sur l'axe AX de cette Courbe entre ses ordonnées, comme dans les Fig. 6. 7. il n'y a qu'à concevoir cette même Courbe HHV comme divisée par son ordonnée CS en deux autres Courbes génératrices $S HL$, SHV , & dire de chacune d'elles ce qu'on a dit jusqu'ici de la même : en concevant les deux portions de Spirales KZC , $CORQ$, comme deux différentes Spirales dont LHS , SHV , sont les Courbes génératrices. Il faut, dis-je, chercher sur CP prolongée du côté de P , & non du côté de C (Cp n'en est qu'une position) suivant les articles précédens quelle Spirale KZC doit résulter de la Courbe génératrice LHS , & de même quelle autre Spirale $CORQ$ doit aussi résulter de l'autre Courbe génératrice SHV ; concevoir ensuite ces deux Spirales comme n'en faisant plus qu'une seule $KZCORQ$: ce fera la Spirale entiere que doit engendrer toute la Courbe LHV . On trouvera de même toute autre Spirale engendrée par quelque Courbe HHV que ce soit, à quelque endroit de son axe AX que le centre C de la Spirale soit supposé.

Quand les Spirales doivent passer par leurs centres ; quand elles doivent s'y rebrousser, & de quelle maniere.

XII. Il suit des art. 6. & 7. que ces Spirales, aussi bien que celles dont les Courbes génératrices n'ont d'ordonnées que d'un côté de leurs centres, passeront toutes par ces mêmes centres, chacune par le sien, tant que leurs Courbes génératrices y auront des ordonnées ; & jamais, tant qu'elles n'y en auront point, comme lorsque le centre de la Spirale engendrée par une ou par deux hyperboles opposées, se trouve sur son axe transverse entre leurs sommets. Ce cas des Spirales, ainsi engendrées par des Courbes, dont aucune des ordonnées ne passeroit par leurs centres, n'a aucune difficulté particuliere : elles se trouveront comme celles des articles précédens, soit que leurs Courbes génératrices aient des ordonnées de part & d'autre de leurs centres, soit qu'elles n'en aient que d'un côté seulement. Et là il est encore à remarquer que tant que ces Courbes génératrices auront des ordonnées continues d'un côté à l'autre du centre C , les Spirales qui en naîtront s'y rebrousseront toujours, le premier rayon de leur retour se confondant

avec le dernier de leur arrivée en ce point : ce qui n'en fait qu'une seule touchante CY (Fig. 6. & 7.) des deux portions de la Spirale ZC & CO qui s'y terminent, laquelle touchante CY aura sa position dépendamment du rapport de AD à CS . Pour ce qui est de ce rebroussement en C , il fera de convexités opposées ZC, CO , si les ordonnées de la Courbe génératrice continuent de croître ou de décroître d'un côté à l'autre de celle qui passe par le centre C ; mais les convexités & concavités en feront tournées en même sens, dès que ses ordonnées croîtront ou décroîtront de part & d'autre de celle qui passe par ce centre. Cette seconde espece de rebroussement se trouvera même par-tout où les ordonnées des Courbes génératrices HHV feront des *plus grands*, ou des *plus petits*, de part & d'autre desquels ces Courbes s'étendent : c'est-à-dire, par-tout où ces Courbes auront des ordonnées comprises entre d'autres qui depuis elles aillent de part & d'autre en croissant ou en diminuant, comme dans la Fig. 8.

Il y auroit encore bien des Remarques à faire sur ce général : mais en voilà assez pour à présent : voyons-en donc seulement quelques usages.

E X E M P L E I.

XIII. Concevons que la Courbe génératrice HHV soit une des Paraboles à l'infini, dont l'équation générale soit (suivant les noms de l'art. 2.) $za^{m-1} = y^m$, ou $z = \frac{y^m}{a^{m-1}}$, ayant CX pour axe intérieur ou extérieur selon l'exigence de m , & l'origine des y en C . Si l'on substitue cette valeur de z dans l'équation génératrice de l'art. 3. l'on aura

$\frac{y^m}{a^{m-1}} = \frac{bx}{c}$, ou $cy^m = bxa^{m-1}$ pour celle de toutes les Spirales

paraboliques à l'infini, résultante de cette position de la Parabole générale HHV ; d'où (en prenant AD pour une ordonnée de cette Parabole générale HHV) l'on aura aussi $cy^m = xa^m$ pour l'équation générale de toutes ces Spirales pa-

Spirales paraboliques générales de M. de Fermat, appelées ici vertico-centrales pour les distinguer de tout ce qu'on peut encore trouver d'autres Spirales paraboliques.

FIG. IV.

78 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 raboliques, à cause qu'en A (art. 2.) ayant $GH(z) = AD(b)$,
 & $CE(y) = CB = CA(a)$, l'équation parabolique z
 $= \frac{y^m}{a^{m-1}}$ donne $b = a$. De sorte que si l'on prend $m = \frac{2}{p}$, l'on
 aura de même $cy^{\frac{2}{p}} = xa^{\frac{2}{p}}$, ou $c^p y^q = x^p a^q$, pour l'équa-
 tion de toutes ces mêmes Spirales paraboliques, laquelle
 est la même que si on les eût formées à la manière de M. de
 Fermat en prenant par tout $c^p x^p :: a^q x^q$.

Plusieurs autres Spirales paraboliques pouvant encore naître
 de la Parabole génératrice HHV dont il s'agit ici, selon la
 variété des points de son axe où leur centre se peut trouver; nous
 appellerons celles-ci Spirales paraboliques vertico-centrales,
 à cause qu'elles ont leur centre au sommet de leurs Paraboles
 génératrices. Voici les tangentes de ces Spirales, leurs déroule-
 mens en Paraboles, leurs longueurs, & leurs espaces entiers &
 par couches ré pondantes à tel nombre de révolutions & à telle ré-
 volution particuliere qu'on voudra.

Expression gé-
 nérale des soustan-
 gentes de ces
 Spirales parabo-
 liques vertico-
 centrales de tous
 les genres.

XIV. Pour trouver la Tangente ET requise à tel point
 E qu'on voudra de la Spirale COZAK, soit CT perpendi-
 culaire à CP, & qui rencontre cette Tangente en T; soit
 de plus Cp indéfiniment proche de CP, laquelle rencontre
 la Spirale en e, le cercle en b, & l'arc concentrique GE
 en F. Cela fait, on aura $CB(a)$. $CE(y) :: Bb(dx)$.

$EF = \frac{y dx}{a}$. Et de plus $Fe(dy)$. $EF\left(\frac{y dx}{a}\right) :: CE(y)$.

$CT = \frac{y y dx}{a dy}$. Mais l'équation $cy^m = xa^m$ de l'art. 13. don-

ne $dx = \frac{mcy^{m-1} dy}{a^m}$. Donc en substituant cette valeur de

dx dans la précédente valeur de CT, l'on aura $CT = \frac{mcy^{m-1}}{a^{m-1}}$ (à cause de $cy^m = xa^m$) $= \frac{mxy}{a}$. De sorte que

$\frac{mxy}{a}$ fera l'expression générale des soustantentes de toutes
 les Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini.

Et là il est à remarquer que quelque portion de circon-

férence circulaire (décrite du rayon $CB = a$, ou parcourue par le point B de la Regle mobile CP) que x signifie suivant l'art. 2. l'on aura toujours $\frac{x^2}{a}$ pour une semblable quantité de circonférence circulaire décrite du rayon $CE = y$, ou par le point de cette Regle, qui passe par celui d'attouchement dont il est ici question. Ainsi en général les soutangentes CT de ces Spirales paraboliques seront à ces quantités correspondantes $\frac{x^2}{a}$ de circonférences circulaires :: $m. 1.$

XV. De là, si l'on suppose $x = nc$, quelque nombre de révolutions complètes ou incomplètes que n signifie; l'art. 8. Autre expression générale des mêmes soutangentes.

donnant alors $nb = z$ (art. 13.) $= \frac{y^m}{a^{m-1}}$, ou $y = \sqrt[m]{nb a^{m-1}}$

(art. 13.) $= \sqrt[m]{na^m} = an^{\frac{1}{m}}$, la substitution de ces valeurs de x & de y dans l'expression générale $CT = \frac{mxy}{a}$ des soutangentes de toutes ces Spirales paraboliques, trouvée dans le

précédent art. 14. donnera aussi $CT = \frac{mncan^{\frac{1}{m}}}{a} = mc n^{\frac{1}{m} + 1}$

$= mc n^{\frac{m+1}{m}}$ pour l'expression générale des soutangentes qui se trouvent à la fin de tel nombre de leurs révolutions complètes ou incomplètes, qu'on voudra faire signifier à n . D'où l'on voit que toutes ces soutangentes sont comme

les $mn^{\frac{m+1}{m}}$ qui (multipliées par c) les expriment, quelque différences que les diverses valeurs de m puissent apporter entre les Spirales auxquelles elles appartiennent, & que dans la même de toutes ces Spirales, quelle qu'elle soit,

ces soutangentes sont toujours comme les $n^{\frac{m+1}{m}}$ correspondans.

Ainsi, par exemple, dans la Spirale d'Archimede qui donne $m = 1$, toutes ces soutangentes seront entr'elles comme les n^2 , c'est-à-dire, comme les carrés des nombres des révolutions complètes ou incomplètes qui leur répondent. De sorte que toutes celles de ces soutangen-

80 MEMOIRES DE L'ACADE'MIE ROYALE
 tes , dont les points d'attouchement correspondans se
 trouveront à la fin des révolutions completes de ces Spi-
 rales, seront entr'elles comme 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c.
 c'est-à-dire , comme les quarrés des nombres naturels , se-
 lon que le nombre n de ces révolutions fera 1, 2, 3, 4, 5,
 6, 7, &c.

De même si l'on suppose $m=2$, comme lorsque la Pa-
 rabole génératrice HHV est une Parabole ordinaire
 d'Archimede ou d'Apollonius; on trouvera aussi que tou-
 tes les soutangentes qui se trouvent à la fin des révolu-
 tions completes ou incompletes de la Spirale qui en ré-

sulte , seront entr'elles comme les $n^{\frac{3}{2}}$, ou $\sqrt{n^3}$, qui leur
 répondent; c'est-à-dire , comme les racines quarrées des
 cubes des nombres de ces révolutions. De sorte que tou-
 tes celles de ces soutangentes qui se trouvent à la fin des
 révolutions completes de cette Spirale, seront entr'elles

comme les racines quarrées $\sqrt{1}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{27}$, $\sqrt{64}$, $\sqrt{125}$,
 $\sqrt{216}$, $\sqrt{343}$, &c. des cubes des nombres naturels, selon
 que le nombre n des ces révolutions completes fera 1, 2,
 3, 4, 5, 6, 7, &c. Et ainsi de pareilles soutangentes de tou-
 tes les autres Spirales paraboliques vertico-centrales à
 l'infini, selon les valeurs différentes qu'on peut donner à m .

*Rapport général
 des mêmes sou-
 tangentes aux
 circonferences
 des cercles cir-
 conscrits; c'est-
 à-dire, décrits
 du centre des
 Spirales par
 leurs points d'at-
 touchement.*

XVI. Si présentement on veut savoir quel rapport
 toutes ces soutangentes CT des Spirales paraboliques
 vertico-centrales à l'infini, doivent avoir aux circonfé-
 rences circulaires qui (concentriques à ces Spirales) passent
 par leurs points d'attouchement E correspondans, quel-
 que nombre de révolutions completes ou incompletes
 que n puisse signifier depuis l'origine de ces Paraboles jus-
 qu'à ces points d'attouchement; il n'y a qu'à considérer
 que puisque (art. 15.) le rayon CE (y) de chacun de ces

cercles, est en général $= an^{\frac{1}{m}}$, l'on aura de même en gé-
 néral sa circonférence $= cn^{\frac{1}{m}}$ à cause de $an^{\frac{1}{m}} \cdot cn^{\frac{1}{m}} :: a. c.$
 qui

qui est (art. 2.) le rapport du rayon du cercle *ABYA* à sa

circconférence : car ayant déjà (art. 15.) $mcn^{\frac{m+1}{m}}$ pour l'expression générale des soutangentes qui leur répondent, l'on aura aussi en général chacune de ces soutangentes *CT* à la

circconférence du cercle décrit du centre *C* par le point

d'attouchement *E* correspondant :: $mcn^{\frac{m+1}{m}} \cdot cn^{\frac{1}{m}} :: mn. 1.$ c'est-à-dire, comme le produit du degré (*m*) de la Parabole génératrice *HHV*, par le nombre (*n*) des révolutions, est à l'unité : quels que soient ces nombres *m* & *n*, entiers ou rompus, il n'importe.

XVII. Donc si l'on prend *n* pour un nombre entier quelconque, lequel par conséquent exprime autant de révolutions complètes qu'on lui voudra supposer d'unités ; on trouvera de même en général que chaque soutangente *CT* à la fin de quelque révolution complète que ce soit, des Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, doit toujours être à la circonférence du cercle qui passe par le point d'attouchement correspondant *E*, lequel se trouve alors sur l'axe *AX*, c'est-à-dire, à la circonférence du cercle circonscrit à cette révolution :: $mn. 1.$ De sorte que ce sera comme *m*, *2m*, *3m*, *4m*, *5m*, *6m*, *7m*, &c. à l'unité, selon que le nombre *n* des révolutions complètes en question, sera *1*, *2*, *3*, *4*, *5*, *6*, *7*, &c. quel que puisse être le degré *m* de ces Spirales à l'infini.

Ainsi dans la Spirale, par exemple, d'Archimede, laquelle donne $m=1$, & qui par-là fait aussi que chaque soutangente de cette Spirale à la fin de tel nombre *n* qu'on voudra, de ses révolutions complètes, doit toujours être à la circonférence du cercle circonscrit, ou qui passe par le point d'attouchement correspondant :: $n. 1.$ c'est-à-dire, comme le nombre des révolutions complètes qui (*hyp.*) s'y termine, est à l'unité, la soutangente qui répond à la fin de la première révolution de cette Spirale d'Archimede, sera égale à la circonférence du cercle qui passe par-là, & qui a le même centre que cette Spirale, c'est-à-dire, du cercle

Le même rapport pour le cas des Touchantes à la fin de telle révolution complète qu'on voudra.

ABYA circonscrit à cette premiere révolution qui (*art.* 9. & 13.) finit en *A*; la soutangente qui répond à la fin de la seconde révolution, sera double du cercle circonscrit à cette seconde révolution; celle qui répond à la fin de la troisieme révolution, sera triple de la circonférence circulaire pareillement circonscrite; à la fin de la quatrieme, elle en sera quadruple; à la fin de la cinquieme, elle en sera quintuple; & ainsi à l'infini: c'est-à-dire, en général, que la soutangente de la Spirale d'Archimede à la fin de tant de révolutions completes qu'on voudra, sera toujours à la circonférence du cercle circonscrit, ou qui (concentrique à cette Spirale) passe par son point d'attouchement correspondant, comme ce nombre de révolutions sera à l'unité. Ce qui fait voir que toute la doctrine d'Archimede sur les Tangentes des Spirales, comprise dans les vingt premieres propositions du Traité qu'il en a fait, n'est qu'un Corollaire très-limité de celle-ci, dont un plus grand détail seroit également facile pour toutes les autres valeurs de *m* à l'infini.

Rapport des mêmes soutangentes reprises en général, à la circonférence du seul cercle circonscrit à la premiere révolution complete des Spirales touchées en quelque endroit que ce soit.

XVIII. Voilà (*art.* 15. 16. & 17.) pour le rapport général des soutangentes *CT* de toutes les Spirales paraboliques vertico-centrales entr'elles & aux circonférences circulaires qui, concentriques à ces Spirales, passent par leurs points d'attouchement *E* correspondans. Voici présentement celui de toutes ces mêmes soutangentes à la circonférence du cercle *ABYA* circonscrit (*art.* 9. & 13.) à la seule premiere révolution complete de ces Spirales. Les *art.* 15. & 2. le

donneront aussi en général :: $mcn^{\frac{m-1}{m}} . c :: mn^{\frac{m-1}{m}} . 1$. I. quels que soient les nombres *m* & *n*, entiers ou rompus, il n'importe: c'est-à-dire, pour toutes les Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, que chacune de leurs soutangentes à la fin de telle révolution complete ou incomplete qu'on voudra faire signifier à *n*, sera toujours à la circonférence du cercle *ABYA* circonscrit à la premiere de leurs

révolutions :: $mn^{\frac{m-1}{m}} . 1$.

Ainsi la Spirale, par exemple, d'Archimede, donnant

$m=1$, elle aura par-tout chacune de ses soubtangentes CT , à la circonférence du cercle $ABYA$ circonscrit à la première révolution :: n^2 . I. c'est-à-dire, comme le carré du nombre (n) de ses révolutions comprises entre son centre C & son point d'attouchement E correspondant, est à l'unité, D'où l'on voit que toutes celles de ces soubtangentes dont les points d'attouchement correspondans se trouveront à la fin des révolutions completes de cette Spirale, doivent être à la circonférence du cercle $ABYA$ circonscrit à sa première révolution, comme les quarrés des nombres naturels 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c. à l'unité, selon que le nombre n des révolutions completes fera 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c. Ce qui s'accorde parfaitement avec les art. 15. & 17.

On trouvera de même tous les rapports que les soubtangentes qui répondent à la fin de tel nombre de révolutions completes ou incompletes qu'on voudra faire signifier à n dans tout ce que les différentes valeurs de m peuvent exprimer d'autres Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, doivent avoir à la circonférence du cercle $ABYA$ circonscrit à la première révolution de chacune de ces Spirales; ainsi nous ne nous arrêterons pas davantage à leurs Tangentes. Passons à leurs Espaces.

XIX. Quant aux Espaces que ces Spirales paraboliques

comprennent, on a vu (art. 14.) que $EF = \frac{ydx}{a} = \frac{mcy^m dy}{a^{m+1}}$; &

qu'ainsi le triangle élémentaire ECF ou $ECe = \frac{mcy^{m+1} dy}{2a^{m+1}}$.

Donc, en intégrant, l'on aura $\frac{mcy^{m+2}}{2m+4} \times a^{m+1}$, ou (à cau-

se de l'équation $cy^m = xa^m$ de l'art. 13.) $\frac{mxyy}{2ma+4a}$ pour tout ce

que ces triangles forment de couches d'espace les unes sur les autres entre ces Spirales & leur rayon CE (y), selon (art. 2.) que x est moindre, égale ou plus grande que c . Par conséquent cette somme de couches d'espaces spiraux, doit être à un pareil nombre de couches d'espaces circulaires compris dans le secteur ou produit $\frac{xyy}{2a}$ (fait de ce rayon CE

Somme des couches d'espace comprises les unes sur les autres entre les Spirales paraboliques vertico-centrales depuis leur centre jusqu'à tel de leurs rayons qu'on voudra.

(y), & d'un arc $\frac{xy}{a}$ décrit de ce même rayon, & semblable à x) :: $m. m-1$.

Déroulement
de ces Spirales
en Paraboles
plus élevées
d'un degré que
leurs Paraboles
génératrices.

XX. On peut encore trouver ces espaces spiraux en déroulant leurs Spirales à la maniere de M. Bernoulli, Professeur à Groningue, rapportée dans les Actes de Leipfik de 1691. pag. 16. & 17. par M. son frere, Professeur à Bâle. Pour cela soit CQ perpendiculaire en C sur CX prolongée vers x , & qui soit rencontrée en Q, q , par les arcs de cercles EQ, eq , décrits du centre C , & des rayons CE, Ce . Imaginons ensuite une Courbe CLI dont les appliquées Ql, ql , paralleles à Cx , & (*hyp.*) indéfiniment proches

l'une de l'autre, aient $RL = EF$ (*art. 14.*) $= \frac{ydx}{a} = \frac{mcy^m dy}{a^{m+1}}$

pour différence. Il est visible que si l'on integre cette différence, l'on aura $\frac{mcy^{m+1}}{m-1 \times a^{m+1}}$ pour la valeur de chacune

de ces appliquées QL, ql , ou de leurs égales CN, Cn , en faisant LN, ln , paralleles à CQ : de sorte qu'ayant déjà (*art. 2.*) $LN = y$, si l'on fait aussi $CN = v$, l'on aura

$v = \frac{mcy^{m+1}}{m-1 \times a^{m+1}}$ pour l'équation de la Courbe CLI qu'on

voit être une Parabole plus élevée d'un degré que la génératrice CHV de la Spirale proposée, laquelle génératrice avoit (*art. 13.*) $za^{m-1} = y^m$ pour son équation. Donc en général toutes les Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, doivent se dérouler ainsi en Paraboles plus élevées d'un degré que leurs Paraboles génératrices.

Par exemple, la Spirale d'Archimede ayant $m = 1$, doit se dérouler en une Parabole dont l'équation soit $v = \frac{2y}{2a}$;

c'est-à-dire, en la Parabole ordinaire du même Archimede ou d'Apollonius, ainsi que Détonville & d'autres l'ont trouvé; au lieu que l'équation générale $za^{m-1} = y^m$ des Paraboles génératrices des Spirales en question, se réduisant ici à $z = y$, fait voir que la génératrice de la Spirale d'Archimede

de, est un triangle qui (suivant cette équation) peut passer pour une Parabole moindre d'un degré que celle d'Apolonius. Et ainsi des autres Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini.

XXI. De ce que (art. 20.) $RI = Qq = Fe, RL = FE,$ & que les angles sont droits en R & en F , il suit aussi que $Ll = Ee$; & ainsi de tous les autres élémens correspondans de la Courbe CLI , & de la Spirale $COZAK$. Donc (en intégrant) l'arc parabolique CL se trouvera toujours égal à l'arc spiral $COZAE$ correspondant. Ainsi (art. 20.) on peut encore dire en général que les arcs des Spirales paraboliques vertico-centrales de tous les genres, sont toujours égaux aux arcs correspondans de Paraboles plus élevées d'un degré que les génératrices de ces Spirales; & que par conséquent ces arcs de Spirales sont toujours rectifiables tant que l'exposant (m) du degré de leurs Paraboles génératrices est une fraction positive dont le numérateur est l'unité, & le dénominateur un nombre pair quelconque, & même aussi tant que cet exposant m est une fraction négative dont le numérateur est l'unité, & le dénominateur un nombre impair quelconque au-dessus de l'unité.

XXII. Enfin de ce que (art. 20.) $Nn = LR = EF,$ & $NL = CQ = CE,$ il suit que le quadrilatere élémentaire $NLln$ doit être double du triangle élémentaire correspondant ECe , & ainsi de leurs intégrales. Donc l'espace parabolique CLN (fait de tous ces quadrilateres) doit être double de ce que l'arc spiral correspondant $COZAK$ renferme de couches d'espace (fait de tous ces triangles) entre lui & son plus grand rayon CE . Or l'équation de la Parabole CLI étant

(art. 20.) $v = \frac{mcy^{m+1}}{m+1 \times a^{m+1}}$, on fait que l'espace CLN

doit être $= \frac{mcy^{m+2}}{m+2 \times a^{m+1}}$. Donc cette somme de couches

d'espace Spiral, doit être $= \frac{mcy^{m+2}}{2m+4 \times a^{m+1}}$ (à cause de

Longueurs de ces Spirales.

Autre maniere de trouver les sommes de couches des espaces spiraux de l'art. 20.

l'équation $cy^m = xa^m$ de l'art. 13.) $= \frac{mxyy}{2ma+4a}$, com-

Ce qu'il y a de ces espaces Spiraux en une ou plusieurs couches entre deux quelconques de leurs rayons.

me dans l'art. 19:

XXIII. Par la même raison, si l'on prend un autre point quelconque Z entre C & E sur la Spirale en question, & qu'on fasse son rayon $ZC = r$; l'on aura aussi

$\frac{mcr^{m+2}}{2m+4 \times a^{m+1}}$ pour tout ce qu'il y aura de plans ou de

couches d'espace entre le rayon ZC de cette Spirale, & son arc COZ compris depuis son centre C jusqu'à ce rayon. Donc tout ce qu'il y a d'espace Spiral depuis ZC jusqu'à la plus grande EC (en une ou en plusieurs couches) fera

$= \frac{mcy^{m+2} - mcr^{m+2}}{2m+4 \times a^{m+1}}$. Par conséquent en prenant f pour

la différence dont la plus grande EC (y) surpasse ZC (r), c'est-à-dire, $y - f = r$, ou $mcr^{m+2} = mcxy - f^{m+2}$; l'on aura

$\frac{mcy^{m+2} - mcxy - f^{m+2}}{2m+4 \times a^{m+1}}$ pour ce qu'il y aura d'espace (en une

ou en plusieurs couches) entre ZC & la plus grande EC .

Rapport général de ces espaces Spiraux compris (en une ou plusieurs couches) entre deux rayons quelconques, à la circonférence du cercle circonscrit, ou dont le rayon seroit le plus grand de ces deux-ci.

XXIV. Cela étant, si l'on considère que cette EC (y) est le rayon du cercle circonscrit, que la circonférence de ce

cercle est $= \frac{cy}{a}$, & son aire $= \frac{cyy}{2a}$; l'on aura cet espa-

ce Spiral à celui de ce cercle :: $\frac{mcy^{m+2} - mcxy - f^{m+2}}{2m+4 \times a^{m+1}}$.

$\frac{cyy}{2a} :: \frac{my^{m+2} - mxy - f^{m+2}}{m+2 \times a^m} . yy$. De quelque nombre de cou-

ches que soit fait ce même espace Spiral compris entre ZC & la plus grande EC .

Ainsi dans la Spirale, par exemple, d'Archimede, laquelle donne $m = 1$, cet espace Spiral fera toujours

par-tout à son cercle circonscrit :: $\frac{y^3 - y - f^3}{3a}$. yy :: $\frac{3fyy - 3ffy + f^3}{3a}$. yy . De sorte que si c'est à la fin des ré-

volutiones completes qu'il s'agisse de trouver l'espace de chacune, ayant alors $f = a$ distance de l'une à l'autre, & $y = na$ en prenant n pour un nombre entier qui soit celui de ces révolutions completes; l'espace Spiral de la dernière de ces révolutions exprimées par n , sera toujours ici à son cercle circonscrit :: $\frac{nna^2 - na^3 + a^3}{3a}$. $nnaa :: 3nm - 3n + 1$.

3m. Ce qui joint à l'art. 17. comprend tout le Traité d'Archimede *De Spiralibus*.

XXV. Pour trouver encore la même chose d'une autre maniere, & en général pour toutes sortes de Spirales vertico-centrales à l'infini, soient encore la plus grande CE (y) & CZ ($y-f$) deux rayons d'une même Spirale, à chacun desquels finisse tel nombre qu'on voudra de révolutions telles qu'on voudra aussi, à commencer en C de part & d'autre; soit présentement n un nombre entier ou rompu, il n'importe, qui exprime le nombre des révolutions completes ou incompletes terminées à la plus grande CE (y), lequel nombre surpasse d'une différence ou excès quelconque e le nombre des révolutions completes ou incompletes qui se terminent à CZ ($y-f$), enforte que $n-e$ exprime aussi ce dernier nombre de révolutions: il faut chercher d'abord la valeur du rayon CZ ($y-f$). Pour cela je considere que puisque (*hyp.*) n & $n-e$ sont les nombres de ce qu'il y a de révolutions completes ou incompletes depuis C jusqu'à la plus grande CE (y), & jusqu'à CZ ($y-f$); l'on aura (*art. 2.*) $nc = x$ pour le chemin que le point B (fixe sur la regle CP) fait autour de C pendant toutes les révolutions qui se terminent à la plus grande CE (y), & $nc - ec = x$ pour celui que fait de même ce point B de la Regle CP autour de C pendant toutes les révolutions qui se terminent à CZ ($y-f$). De sorte que suivant l'Analogie de l'équation générale $cy^m = xa^m$ de l'art. 13. l'on aura $nc.y^m :: c.a^m :: nc - ec.y - f^m$. Et par consé-

Autre maniere de trouver le même rapport.

séquent $y - f^m = \frac{nc - ec}{nc} \times y^m = \frac{n-e}{n} \times y^m$, ou $y - f = \frac{n - e^{\frac{1}{m}}}{n^{\frac{1}{m}}} \times y$,

ou bien aussi $y - f^{m+2} = \frac{n - e^{\frac{m+2}{m}}}{n^{\frac{m+2}{m}}} \times y^{m+2}$. Donc en

substituant cette valeur de $y=f^{m+2}$ dans l'Analogie générale de l'article 24. l'on aura $\frac{my^{m+2} - m \times y - f^{m+2}}{m+2 \times a^m}$

$$\frac{\frac{n^m - n - e^m}{m+2} \times \frac{my^{m+2}}{m+2 \times a^m}}{n^m} \text{ Par conséquent en gé-}$$

néral suivant ce même art. 24. l'espace Spiral parabolique vertico-central de tous les genres, & d'autant de couches ou de révolutions completes ou incompletes (à commencer par la dernière, c'est-à-dire, par le point E) qu'en marque le nombre e, sera toujours à son cercle circonscrit, ou décrit du

plus grand rayon CE (y) :: $\frac{n^m - n - e^m}{m+2} \times \frac{my^{m+2}}{m+2 \times a^m} \cdot y ::$
 $\frac{n^m - n - e^m}{m+2} \times \frac{my^m}{m+2} \cdot a^m$ (à cause que l'art. 13. donne

$$a^m = \frac{cy^m}{x}, \text{ \& qu'on suppose } x = nc) :: \frac{n^m - n - e^m}{m+2} \times \frac{my^m}{m+2} \cdot \frac{cy^m}{nc} :: n^m - n - e^m \cdot \frac{m+2}{m} \times n^{\frac{2}{m}}$$

Troisième manière de trouver le même rapport.

XXVI. Tout cela se peut encore trouver en général d'une manière encore plus simple, en continuant de supposer $x = nc$, quelque nombre de révolutions completes ou incompletes depuis C jusqu'à EC (y) que le nombre n (entier ou rompu) puisse signifier : car alors ayant $y = an^{\frac{1}{m}}$, comme dans l'art. 15. la substitution de ces valeurs

de x & de y dans la valeur (art. 19. & 22.) générale $\frac{mxy}{2ma+4a}$

de tout ce qu'il y a de couches d'espace Spiral les unes sur les autres dans tout ce que n marque de révolutions,

donnera aussi $\frac{mnc a a n^{\frac{2}{m}}}{2ma+4a}$, ou $\frac{macn^m}{2m+4}$ pour une pa-

reille

reille valeur de cette même somme de couches d'espace Spiral.

Par la même raison, si au lieu de n on met $n-e$ pour un moindre nombre quelconque de révolutions complètes ou incomplètes depuis C jusqu'à CZ , quel que soit encore le nombre e , entier ou rompu, il n'importe; on trouvera de

même $\frac{mac \times n - e^{\frac{m-1}{2}}}{2m+4}$ pour toutes les couches d'espace Spi-

ral, marquées par n depuis C jusqu'à E la plus éloignée de C , moins ce que le nombre e en marque depuis Z jusqu'à cette E : c'est-à-dire, pour ce qu'il y en aura depuis C jusqu'à Z .

Donc en retranchant cette valeur de la précédente, l'on

aura $\frac{macn^{\frac{m+2}{2}} - mac \times n - e^{\frac{m-1}{2}}}{2m+4}$ pour la valeur générale de ce

que ce nombre e marque de couches d'espace Spiral depuis Z jusqu'à E la plus éloignée de C . De sorte que si l'on con-

sidere que (*art. 16.*) $cn^{\frac{1}{2}}$ est la circonférence du cercle circonscrit dont la plus grande CE (y) = $an^{\frac{1}{2}}$ seroit le rayon, &

que par conséquent son aire est = $\frac{acn^{\frac{2}{2}}}{2}$; l'on aura tout ce que

le nombre e (quel qu'il soit) marque de couches d'espace Spiral entre Z & E la plus éloignée de C , à ce cercle circonscrit::

$$\frac{macn^{\frac{m-1}{2}} - mac \times n - e^{\frac{m-1}{2}}}{2m+4} \cdot \frac{acn^{\frac{2}{2}}}{2} :: \frac{mn^{\frac{m-1}{2}} - mn - e^{\frac{m-1}{2}}}{m+2}$$

$n^{\frac{2}{2}} :: n^{\frac{m-1}{2}} - n - e^{\frac{m-1}{2}} \cdot \frac{m+2}{m} \times n^{\frac{2}{2}}$. Ainsi que dans le précé-

dent *art. 25. Ce qu'il falloit encore trouver.*

XXVII. Donc en prenant présentement n & e pour deux nombres entiers quelconques, dont e soit le moindre à discrétion, ce rapport général deviendra celui que la somme des couches d'espace Spiral paraboliques vertico-central, d'autant de révolutions complètes (à commencer par la der-

Le même rapport pour le cas des couches d'espace complètes, ou de révolutions complètes, en quelque nombre qu'elles soient.

niere) que le nombre e renferme d'unités, aura à son cercle circonscrit. D'où l'on voit aussi qu'en faisant $e=1$, l'espace Spiral de la dernière d'autant de révolutions complètes qu'on voudra en faire signifier à n , se trouvera toujours à ce

cercle circonscrit :: $n^{\frac{m+2}{m}} - n - 1^{\frac{m+2}{m}} \cdot \frac{m+2}{m} \times n^{\frac{2}{m}}$. Ce qui servira de Regle générale pour discerner les valeurs des différentes couches d'espaces Spiraux paraboliques de tous les genres, engendrés (comme dans l'art. 13.) par des révolutions complètes différentes, & prises à discrétion.

Par exemple, pour la Spirale d'Archimede, laquelle donne $m=1$, ce rapport général donnera toujours l'espace Spiral de la dernière d'autant de révolutions complètes qu'on en voudra exprimer par le nombre entier n , à son cercle circonscrit :: $n^3 - n - 1^3 \cdot 3n^2 :: 3nm - 3n + 1 \cdot 3nm$. comme on l'a déjà vu dans l'art. 24. Ainsi la première révolution complète de cette Spirale d'Archimede, donnant $n=1$, l'espace en fera à son cercle circonscrit $ABYA :: 1 \cdot 3$. L'espace de la seconde révolution complète, laquelle donne $n=2$, fera de même à son cercle circonscrit :: 7. 12. Dans la troisième complète, laquelle donne $n=3$, ce sera :: 19. 27. Dans la quatrième, qui donne $n=4$, ce sera :: 37. 48. &c.

Si l'on suppose $m=2$, en sorte que l'équation (art. 13.) de la Spirale soit $cy = aax$: en ce cas le précédent rapport général donnera l'espace Spiral de la dernière de tant de révolutions complètes qu'on voudra, à son cercle circonscrit :: $n^2 - n - 1^2 \cdot 2n :: 2n - 1 \cdot 2n$. Ainsi dans la première révolution complète, qui donne $n=1$, ce sera :: 1. 2. Dans la seconde, qui donne $n=2$, ce sera :: 3. 4. Dans la troisième, qui donne $n=3$, ce sera :: 5. 6. Dans la quatrième, qui donne $n=4$, ce sera :: 7. 8. &c.

Si l'on suppose au contraire $m=\frac{1}{2}$, en sorte que l'équation (art. 13.) de la Spirale soit $cy^{\frac{1}{2}} = xa^{\frac{1}{2}}$, ou $ccy = axx$: en ce cas le précédent rapport général donnera l'espace Spiral de la dernière de tant de révolutions complètes qu'on voudra, à son cercle circonscrit :: $n^3 - n - 1^3 \cdot 5n^4 :: 5n^4 - 10n^3 +$

$10nn - 5n + 1. 5n^4$. Ainsi dans la premiere révolution complete, qui donne $n=1$, ce sera :: 1. 5. Dans la seconde, qui donne $n=2$, ce sera :: 31. 80. Dans la troisieme, qui donne $n=3$, ce sera :: 211. 405. Dans la quatrieme, qui donne $n=4$, ce sera :: 781. 1280. &c. Et ainsi de toutes les autres Spirales paraboliques vertico-centrales à l'infini, pour chacune desquelles le précédent rapport général fournira de même une expression littérale, qui détaillée comme ci-dessus, donnera tous les rapports de leurs espaces (pris un à un par révolutions completes) aux cercles circonscrits.

C'est ainsi que la Table suivante a été faite, & qu'on la peut continuer à l'infini selon les différentes valeurs de m qu'on lui substituera dans la précédente Analogie générale, en y prenant successivement n pour des nombres entiers qui suivent l'ordre des nombres naturels, comme dans la premiere colonne de la Table, où ils marquent chacun la dernière d'autant de révolutions completes pour chaque valeur de m , qu'il contient d'unités; ce qui détermine les valeurs correspondantes de l'espace Spiral de chaque révolution complete, à son cercle circonscrit, pour chaque valeur de m qui se trouve au-dessus d'elles.

Nombre n des révolutions completes.	Si $m = 1$		Si $m = 2$		Si $m = \frac{1}{2}$	
	Espaces.	Cercles.	Espaces.	Cercles.	Espaces.	Cercles.
1	1	3	1	2	1	5
2	7	12	3	4	31	80
3	19	27	5	6	211	405
4	37	48	7	8	781	1280
5	61	75	9	10	2101	3125
6	91	108	11	12	4651	6480
7	127	147	13	14	9031	12005
8	169	192	15	16	15961	20480
9	217	243	17	18	26281	32805
10	271	300	19	20	40951	50000
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.

Rapport général
des espaces Spi-
raux de l'art.
26. à la circon-
férence du cercle
de la première
révolution.

XXVIII. Si l'on veut présentement comparer l'espace Spiral compris entre deux rayons quelconques de chacune de ces Spirales paraboliques vertico-centrales au seul cercle *ABYA* de la 1^{re} révolution, il n'y a qu'à considérer que

suivant les noms de l'art. 2. l'aire de ce cercle est $= \frac{ae}{2}$, & que (art. 26.) $\frac{macn^{\frac{m+2}{m}} - mac \times n - e^{\frac{m+2}{m}}}{2m+4}$ est aussi la valeur

générale de ce que le nombre *e* (entier ou rompu) marque de couches d'espace Spiral depuis *Z* jusqu'à *E* la plus éloignée de *C*. Car alors cette somme de couches (completes ou incomplètes) d'espace Spiral parabolique vertico-central de tous les genres, se trouvera être en général à ce cercle

ABYA de la 1^{re} révolution :: $\frac{macn^{\frac{m+2}{m}} - mac \times n - e^{\frac{m+2}{m}}}{2m+4}$.
 $\frac{ae}{2} :: n^{\frac{m+2}{m}} - n - e^{\frac{m+2}{m}} \cdot \frac{m+2}{m}$. quels que soient les nombres

exprimés par *m*, *n*, *e*, entiers ou rompus, il n'importe.

De sorte qu'en prenant présentement *n* & *e* pour des nombres entiers, afin de rendre toutes ces couches complètes; ce rapport fera encore celui d'autant de couches complètes d'espace Spiral parabolique vertico-central de tous les genres (à commencer par la dernière) qu'il y aura d'unités dans *e*, au même cercle *ABYA* de la première révolution.

D'où l'on voit que si l'on fait enfin $e=1$, l'espace Spiral de la dernière d'autant de révolutions complètes que le nombre *n* contient d'unités, se trouvera aussi être au cercle

ABYA de la première révolution :: $n^{\frac{m+2}{m}} - n - 1 - \frac{m+2}{m}$.

Ce qui servira encore de Règle générale pour discerner les rapports de différentes couches d'espaces Spiraux paraboliques vertico-centraux de tous les genres, & de révolutions complètes, au cercle *ABYA* de la première. Le détail & la Table s'en feront comme ceux de l'art. 27.

XXIX. Il est à remarquer dans les deux articles précédens 27. & 28. que si au lieu d'y prendre *e* pour l'unité, on l'eût prise pour telle fraction, ou portion de l'unité, que l'on auroit voulu; la formule générale de chacun de ces deux articles, auroit donné de même le rapport de pareilles portions d'une couche d'espace Spiral de telle révolution complete que le nombre entier *n* puisse exprimer: par exemple, d'un demi, d'un tiers, d'un quart, d'un cinquieme, &c. de cette couche d'espace Spiral à son cercle circonscrit ou de la dernière révolution dans l'art. 27. & au cercle de la première révolution dans l'art. 28. selon que l'on auroit pris *e* pour $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, &c. De sorte que ces deux articles 27. & 28. fournissent ensemble le moyen de comparer & de trouver le rapport de telle couche qu'on voudra, entiere ou par parties quelconques, d'espace Spiral parabolique vertico-central de quelque genre que ce soit, à son cercle circonscrit, ou à celui de la première révolution.

Réflexion sur le détail des rapports précédens.

Les art. 25. & 26. fournissent aussi la maniere d'en comparer plusieurs couches completes ou incompletes à la fois à leur cercle circonscrit; d'où l'on voit ainsi que dans l'art. 28. la maniere de les comparer de même au seul cercle de la première révolution. L'art. 26. donne enfin la maniere de comparer toutes ces couches d'espaces entr'elles, une ou plusieurs à la fois, même dans des Spirales différentes. Tout cela joint aux art. 15. 16. 17. & 18. où l'on voit de même la maniere de comparer les soutangentes de toutes ces Spirales entr'elles, aux circonférences circulaires qui (concentriques à ces Spirales) passent par leurs points d'attouchement correspondans, & à la circonférence du seul cercle de la première révolution: tout cela, dis-je, marque assez la fécondité de la méthode qu'on suit ici. En voici encore un autre exemple.

E X E M P L E II.

Spirales hyperboliques asymptotiques, appelées ici cocentrales pour les distinguer de tout ce qu'on peut encore trouver d'autres Spirales hyperboliques asymptotiques.

FIG. V.

XXX. Si l'on suppose que la Courbe génératrice HHV soit une hyperbole asymptotique générale dont C soit le centre, & CV, CX , ses asymptotes; les Spirales hyperboliques de tous les genres, qui en doivent résulter, s'en déduiront avec leurs dépendances de même qu'on le vient de voir des Spirales paraboliques de l'exemple premier. Mais si l'on veut abrégér, & se servir de ce qui se trouve démontré de ces Spirales paraboliques dans ce premier exemple, il faut encore prendre ici AD pour une ordonnée de HHV , & considérer que de même qu'il n'y a qu'à rendre négatif l'exposant m de l'équation parabolique $z = \frac{y^m}{a^{m-1}}$ de l'art.

13. pour en faire l'équation générale $z = \frac{y^m}{a^{m-1}}$, ou $zy^m = a^{m-1}$

de toutes les hyperboles entre asymptotes à l'infini; il n'y a aussi qu'à rendre négatif l'exposant m de l'équation générale de toutes les Spirales paraboliques de l'art. 13. pour en faire $xy^m = ca^m$, qui est aussi l'équation de toutes les Spirales hyperboliques correspondantes à l'infini, dans lesquelles la transformation précédente de m positive en négative, la rend ici positive pour toute la suite de cet exemple. En voici les conséquences en supposant les mêmes noms que dans l'art. 13.

Les Spirales hyperboliques dont il s'agit ici, ayant les mêmes centres que leurs hyperboles génératrices, s'appelleront dans la suite Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales, pour les distinguer de plusieurs autres que ces mêmes hyperboles prises en dedans comme en dehors, pourroient engendrer dans tout ce qu'elles peuvent avoir d'autres positions par rapport aux centres de ces Spirales. Voici les conséquences de la précédente égalité générale de ces Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales.

L'origine ou le commencement de ces Spirales hyperboliques, est à une distan-

1°. Il suit de cette égalité générale $xy^m = ca^m$ que lorsque $AMB (x)$ est $= 0$, alors $CE (y)$ en AX est infinie. Ce qui fait voir que l'origine des abscisses $AMB (x)$ étant en

A, celle de ces Spirales doit être à une distance infinie de *C* du côté de *X*; au lieu que les Spirales paraboliques vertico-centrales de l'exemple premier ont la leur en *C*: & tout cela parce que (*art. 5.*) dans ces Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales les ordonnées *GH* de leurs hyperboles génératrices croissent de *X* vers *C* en commençant à une distance infinie, pendant que la Regle *CP* tourne de *A* vers *B* suivant *ABYA* en commençant en *A*; au lieu que dans les Spirales paraboliques vertico-centrales, la Regle *CP* tournant de même de *A* vers *B* en commençant en *A*, les ordonnées *GH* de leurs paraboles génératrices croissent de *C* vers *X* à l'infini en commençant en *C*.

ce infinie de leur centre.

2°. Lorsque *AMB* (*x*) est = *ABYA* (*c*), l'égalité présente $xy^m = ca^m$ donne aussi *AC* (*a*) = *CE* (*y*). Ce qui fait voir qu'à la fin de la première révolution les Spirales hyperboliques dont il s'agit ici, viennent couper en *A* le cercle de révolution *ABYA*, & entrent dedans pour n'en plus ressortir. Ce qui fait voir que l'arc Spiral de la première révolution est entièrement hors ce cercle *ABYA*, & tout le reste dedans.

Elles entrent dans le cercle de révolution à la fin de la première.

3°. Lorsque *CE* (*y*) fera = 0, c'est-à-dire, lorsque cette Spirale arrivera au centre *C* du cercle de révolution, alors *x* fera infinie. Ce qui fait voir conformément à l'*art. 7.* qu'elle n'y peut arriver qu'après une infinité de révolutions.

Elles n'arrivent au centre de ce cercle, qui est aussi le leur, qu'après une infinité de révolutions.

XXXI. En faisant encore *m* négative dans l'équation

$$v = \frac{mcy^{m+1}}{m+1 \times a^{m+1}}$$

Déroulement de ces Spirales hyperboliques.

qu'on a vue (*art. 20.*) devoir être celle de toutes les Spirales hyperboliques vertico-centrales dé-

$$\text{roulées, ce lieu donnera aussi en général } v = \frac{-mcy^{1-m}}{-m+1 \times a^{1-m}}$$

$$= \frac{mca^{m-1}}{m-1 \times y^{m-1}}$$

pour celui de toutes les Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales pareillement déroulées, en prenant toujours *v* pour les abscisses des Courbes qui en résultent, sur lesquelles abscisses les ordonnées perpendi-

96 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
culaires sont égales aux y (CE) correspondans de ces Spi-
rales. D'où l'on voit,

Quand elles se
déroulent en hy-
perboles.

1°. Que lorsque $m > 1$, ces Spirales-ci se déroulent en

hyperboles exprimées par ce même lieu $v = \frac{mca^{m-1}}{m-1 \times y^{m-1}}$.

Quand elles se
déroulent en pa-
raboles.

2°. Lorsque $m < 1$, ces mêmes Spirales se déroulent
en Paraboles, dont le lieu (tiré du précédent) est $v =$

$$\frac{mcy^{1-m}}{-1 + m \times a^{1-m}}, \text{ ou } -v = \frac{-mcy^{1-m}}{-1 + m \times a^{1-m}} = \frac{mcy^{1-m}}{1 - m \times a^{1-m}} \text{ sur}$$

l'axe renversé des hyperboles précédentes, & le parametre

$$= \frac{mc}{1 - m \times a^{1-m}}.$$

Et quand elles
se déroulent en
logarithmique
ordinaire.

3°. Mais lorsque $m = 1$, alors chacune de ces équations
(n. 1. & 2.) ne donnant que v infinie, je remonte à leur

différentielle qui me donne ici $-dv = \frac{cdy}{y}$ pour celle de la

Courbe résultante du déroulement de la Spirale hyperbo-
lique de ce cas. D'où l'on voit qu'elle se déroule en une
logarithmique ordinaire dont la soutangente vaut la circon-
férence $ABYA$ (c) du cercle de révolution.

Longueurs de
ces Spirales.

XXXII. Il suit aussi de ces déroulemens (*art. 20.*) que
les longueurs de ces Spirales hyperboliques sont précisé-
ment les mêmes (par parties correspondantes) que celles
des Courbes qui en sont déroulées. Par conséquent que
celles de ces Spirales qui se déroulent (*art. 31. n. 2.*) en

Paraboles, seront rectifiables tant que $\frac{1-m}{2m}$ sera un nom-

bre entier & positif, c'est-à-dire, tant que l'exposant (m)
du degré de leurs hyperboles génératrices sera une frac-
tion positive dont le numérateur soit l'unité, & le déno-
minateur un nombre impair quelconque au-dessus de l'uni-
té; & même aussi tant que cet exposant m sera une fraction
négative dont le numérateur soit l'unité, & le dénomina-
teur un nombre pair quelconque; au lieu que dans l'*art. 21.*

la

la premiere de ces deux fractions doit être négative, & la seconde positive pour rendre les Spirales paraboliques vertico-centrales rectifiables.

XXXIII. Quant au contour de toutes ces Spirales hyperboliques, on vient de voir (*art. 30. n. 1.*) que depuis le point N où elles sont coupées hors le cercle de révolution $ABYB$ par VC prolongée vers Q , elles vont à l'infini du côté de X sans jamais rencontrer CX . Pour voir présentement si c'est en s'éloignant de cette droite CX , ou bien en s'en approchant comme d'une asymptote, que cela arrive; imaginons en quelque point e à telle distance qu'on voudra du point C , avec le rayon Ce qui rencontre en b le cercle de révolution $ABYA$; soient aussi des points b & e sur CX ; deux perpendiculaires $bL = Sx$ (sinus de l'arc $AMB = x$, S marque sinus) & $eK = t$.

Contour de ces
mêmes Spirales

On aura $bL (Sx). eK (t) :: Cb (a). Ce (y) = \frac{a^t}{S^t}$.

Donc $y^m = \frac{a^m t^m}{S^m x}$; ce qui étant substitué dans l'égalité

générale $xy^m = c a^m$ (*art. 30.*) de ces Spirales hyperboli-

ques, donnera $\frac{x^t}{S^m x} = c$. De sorte que lorsque l'arc x

(Ab) fera $= dx$, c'est-à-dire infiniment petit, son sinus $Sx (bL)$ se trouvant aussi alors $= dx$, l'on aura pour lors

$c = \frac{t^m dx}{dx^m} = t^m dx^{1-m}$, ou $c^m \times c^{1-m} = t^m dx^{1-m}$; d'où résulte c^m .

$t^m :: dx^{1-m}. c^{1-m}$. Donc

1°. Lorsque $m = 1$, l'on aura $c = t$, c'est-à-dire, qu'en ce cas la Spirale hyperbolique s'éloignera continuellement de CX depuis N du côté de X , mais seulement de la longueur eK qui a une distance infinie du point C , ne vaudra que la circonférence $ABYA$ du cercle de révolution: de sorte qu'en prolongeant VC vers Q jusqu'à ce que CQ soit égale à cette circonférence, l'on aura QX (parallèle à CX) pour asymptote de cette premiere Spirale hyperbolique.

Les unes s'éloignent continuellement de leur axe CX , sans cependant s'en éloigner que d'une distance finie.

D'autres s'en éloignent d'une distance infinie.

2°. Si $m < 1$, l'Analogie précédente $c^m \cdot t^m :: dx^{1-m} \cdot c^{1-m}$ donnera c^m nulle par rapport à t^m ; & par conséquent t (eK) alors infinie. D'où l'on voit que toutes les Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales, dont l'exposant (m) est moindre que l'unité, s'éloignent aussi continuellement de la droite CX depuis N du côté de X , même jusqu'à devenir infiniment éloignées de cette droite CX ; au lieu que la précédente (*n. 1.*) où cet exposant (m) étoit = 1, ne s'en éloigne jamais plus que de la longueur de la circonférence de son cercle de révolution $ABYA$.

D'autres au contraire s'en approchent continuellement depuis un certain point, comme d'une asymptote qu'elles ne rencontrent qu'à une distance infinie.

3°. Enfin lorsque $m > 1$, l'Analogie précédente donnant $c^m \cdot t^m :: dx^{1-m} \cdot c^{1-m} :: \frac{t}{dx^{m-1}} \cdot \frac{1}{c^{m-1}} :: c^{m-1} \cdot dx^{m-1}$. L'on aura pour lors t^m nulle par rapport à c^m , c'est-à-dire, t (eK) = 0. D'où l'on voit que toutes les autres Spirales hyperboliques comprises dans ce dernier cas, s'approchent à l'infini de CX depuis N du côté de X , laquelle CX en devient pour cet effet l'asymptote.

Points d'inflexion de ces dernières Spirales hyperboliques.

XXXIV. Si au lieu d'infiniment éloignés qu'on vient d'imaginer entr'eux les points e , E , on les imagine à présent infiniment près l'un de l'autre, en sorte que l'arc de cercle FE (compris entre les rayons Ce , CE) soit infiniment petit; si de plus on fait $FE = dv$ constant, & le reste comme ci-dessus, la maniere ordinaire (*Anal. des Infin. petits, art. 66.*) de trouver les points d'inflexion ou de rebroussement, donneroit ici $dv^2 + dy^2 - yddy$ égal à zero ou à l'infini pour la formule générale qui les donne dans les Courbes dont les ordonnées CE , Ce , &c. concourent toutes dans un même point C : de sorte que si l'on y substitue les valeurs de dv , dy , ddy , selon la nature de la Courbe en question, cette formule générale deviendra celle de cette Courbe en particulier, & en déterminera le point d'inflexion ou de rebroussement, si elle en a, ou fera voir qu'elle n'en a point du tout.

Or suivant les noms donnés dans l'art. 2. l'on aura ici $\frac{ydx}{a} = dv$; & l'équation générale de toutes les Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales étant (*art. 30.*)

$xy^m = ca^m$, l'on aura aussi $y^m dx - mx y^{m-1} dy = 0$, ou

$$dx = \frac{m x y^{m-1} dy}{y^m} = \frac{m x dy}{y}; \text{ \& par conséquent } \frac{y dx}{a} (dv)$$

$$= \frac{m x dy}{a}; \text{ ce qui donne } dy = \frac{adv}{mx}; \text{ \& delà } - ddy = - \frac{adx dv}{mxx},$$

en différenciant dy négativement, à cause que la supposition de dv (EF) constante, fait augmenter les x pendant que les dy diminuent. Donc en substituant ces valeurs de dv , dy , ddy , dans la formule générale $dv^2 + dy^2 - y ddy$, elle se changera en $\frac{yydx^2}{aa} + dy^2 - \frac{aydx dv}{mxx} = \frac{yydx^2}{aa}$

$$+ dy^2 - \frac{yydx^2}{mxx} \left(\text{à cause de } dx = \frac{mxdy}{y} \right) = \frac{mxxdy^2}{aa} + dy^2 - mdy^2$$

$$= \frac{mxx + aa - maa}{aa} \times dy^2 \text{ pour toutes les Spirales hyperboli-$$

ques asymptotiques cocentrales en particulier: laquelle formule $\frac{mxx + aa - maa}{aa} \times dy^2$ égalée à zero, donnera mxx

$$+ aa - maa = 0; \text{ d'où résulte } x = \frac{a}{m} \sqrt{m - 1} \text{ au point d'inflexion de ces sortes de Spirales.}$$

Il suit delà que de toutes ces Spirales hyperboliques il n'y a que celles qui ont $m > 1$, lesquelles aient un point d'inflexion, cette valeur de x devenant zero ou imaginaire dans toutes celles qui ont $m = 1$, ou $m < 1$. Ce qui s'accorde parfaitement avec l'art. 33. où l'on voit (*n. 3.*) que les Spirales du premier de ces trois cas-ci, sont les seules qui depuis N s'approchent de CX du côté de X , les autres s'en éloignant toujours, quoiqu'à distances différentes.

Voilà (art. 30. 31. 32. 33. & 34.) pour ce qui concerne la forme générale, les déroulemens, & les longueurs de ces Spirales hyperboliques. Voici présentement leurs Touchantes, & les Espaces entiers & par couches répondantes à tel nombre de révolutions, & à telle révolution particulière qu'on voudra.

XXXV. On a trouvé ci-dessus (art. 14.) que la sou- Expression générale des touchantes des Spirales hyperboliques dont il s'agit ici.
tangente générale des Spirales paraboliques vertico-centrales étoit $\frac{mxy}{a}$: il n'y a qu'à y faire m négative, & la sou-

100 MEMOIRES DE L'ACADE'MIE ROYALE
 tangente des Spirales hyperboliques afymptotiques co-
 centrales fe trouvera $= -\frac{m \cdot xy}{a}$. Ce qui fait voir en général

qu'on doit prendre ici la même foutangente que pour les Spi-
 rales paraboliques vertico-centrales, mais en fens contraire.

On voit auffi delà & de l'équation générale $xy^m = ca^m$
 (art. 30.) des Spirales hyperboliques dont il s'agit ici, que
 dans celle qui a $m = 1$, toutes les foutangentes font égales
 chacune à la circonférence (c) du cercle de révolution
 $ABYA$; & par conféquent toutes égales entr'elles, & à
 celle de la ligne logarithmique en laquelle on a vû (art. 31.
 n. 3.) que cette Spirale hyperbolique fe déroule; que dans
 toutes les autres Spirales hyperboliques afymptotiques co-
 centrales, les foutangentes croiffent avec les y (CE) lorf-
 que $m < 1$; & qu'au contraire elles diminuent à mefure
 que les y croiffent, lorfque $m > 1$: parce que l'équation

générale $xy^m = ca^m$ de ces Spirales, donnant $x = \frac{ca^m}{y^m}$, leur

foutangente générale $(-\frac{m \cdot xy}{a})$ doit auffi être $= -\frac{m \cdot c \cdot a^{m-1}}{y^{m-1}}$

Tout cela revient à ce qui vient d'être dit de leurs dérou-
 lemens dans l'art. 31.

XXXVI. En faifant encore m négative dans l'art. 15.

Autre expref-
 fion générale des
 mêmes foutan-
 gentes.

on trouvera de même $-mcn^{\frac{1-m}{m}}$, ou $-mcn^{\frac{m-1}{m}}$ pour l'ex-
 preffion générale de toutes ces foutangentes hyperboli-
 ques à la fin de telle révolution complete ou incomplete
 qu'on voudra exprimer par le nombre n entier ou rompu.
 D'où l'on voit que toutes ces foutangentes font entr'elles

comme les $-mn^{\frac{m-1}{m}}$ qui les expriment, quelque variété
 que les différentes valeurs de m puiffent apporter entre les
 Spirales auxquelles elles appartiennent; & que dans la
 même de ces Spirales, quelle qu'elle foit, ces foutangen-
 tes font toujours comme les $-n^{\frac{m-1}{m}}$ correspondans: c'est-

à-dire, comme $mn^{\frac{m-1}{m}}$ dans le premier cas, & comme $n^{\frac{m-1}{m}}$ dans le second, en prenant de part & d'autre ces soutangentes négatives de positives qu'elles étoient dans l'art. 15. qui donne tout ceci.

Ainsi dans la Spirale engendrée comme ci-dessus par l'hyperbole asymptotique ordinaire, qui donne $m=1$, toutes ces soutangentes seront comme $n^{\frac{1-1}{1}} = n^0 = 1$, c'est-à-dire, égales entr'elles, conformément à ce qu'on en a déjà vû dans l'art. 35. quelque nombre de révolutions completes ou incompletes que n puisse signifier.

Si l'on suppose $m=2$, les soutangentes de la Spirale hyperbolique de ce cas, seront entr'elles comme $n^{\frac{1}{2}}$, ou \sqrt{n} , c'est-à-dire, comme les racines quarrées des nombres (n) des révolutions completes ou incompletes qui leur répondent. De sorte que toutes celles de ces soutangentes dont les points d'attouchement correspondans se trouvent à la fin des révolutions completes de cette Spirale, seront entr'elles comme $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \&c.$ c'est-à-dire, comme les racines quarrées des nombres naturels, selon que le nombre entier n de ces révolutions completes sera 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Si $m=\frac{1}{2}$, les soutangentes de la Spirale hyperbolique de ce cas, seront commé $n^{\frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}} = n^{-1} = \frac{1}{n}$, c'est-à-dire, l'une à l'autre en raison réciproque des nombres (n) des révolutions completes ou incompletes qui leur répondent. Et ainsi de pareilles soutangentes de toutes les autres spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales, qui doivent résulter de toutes les autres valeurs qu'on peut donner à m .

On trouvera de même le rapport de ces soutangentes de Spirales hyperboliques asymptotiques cocentrales de tous les genres, aux circonférences des cercles circonscrits, c'est-à-dire, des cercles qui (concentriques à ces Spirales) passent par leurs points d'attouchement correspondans, ou à la circonférence seule du cercle ABYA de la premiere révolution, en faisant m négative

dans les art. 16. 17. 18. Car alors le rapport des soutes tangentes des Spirales paraboliques vertico-centrales, à de pareilles circonferences circulaires, se changera en celui-là : ainsi en voilà assez pour ce qui regarde les Tangentes de ces Spirales. Passons donc à leurs Espaces, pour en dire aussi quelque chose : l'article suivant suffira.

Expression générale de ces espaces compris dans les Spirales hyperboliques dont il s'agit ici.

XXXVII. On a trouvé ci-dessus en général (art. 19. & 22.) que tout ce qu'il y a de couches d'espace Spiral parabolique vertico-central dans COEC (Fig. 4.) est

FIG. IV.
$$= \frac{mcy^{m+1}}{2m + 4 \times a^{m+1}}$$
. Donc en faisant encore ici m négative, l'on y aura de même
$$\frac{-mc^2 \cdot m}{-2m + 4 \times a^{1-m}}$$
 ou $\frac{mcy^{2-m}}{2m - 4 \times a^{1-m}}$ pour

FIG. V. l'expression ou la valeur de tout ce qu'il y a ici (Fig. 5.) de semblables couches d'espace Spiral hyperbolique asymptotique cocentral dans COEC, si $m < 2$; ou dans XCEX, c'est-à-dire, dans tout le reste de cet espace Spiral depuis CE jusqu'à son origine, si $m > 2$. Ainsi quoique (art. 30. n. 1. & 3.) cette origine soit à une distance infinie du côté de X, & que du côté du centre C ces Spirales fassent une infinité de révolutions avant que d'arriver en ce point C, ces espaces ne laissent pas d'être finis, le premier dans la Spirale qui a $m < 2$, & le second dans celle qui a $m > 2$; ils ont seulement leurs complémens infinis, chacun dans la sienne : il n'y a que le cas de $m=2$ qui rende l'un & l'autre de ces espaces infini dans une même Spirale hyperbolique asymptotique cocentrale.

Les différentes couches de ces espaces Spiraux hyperboliques, & leurs rapports aux cercles circonscrits, ou au seul cercle ABYA de la première révolution, se trouveront & se détailleront comme l'on a fait (art. 23. 24. 25. 26. 27. 28. & 29.) pour les espaces Spiraux paraboliques de l'exemple premier, en y rendant seulement m négative : ce seul changement transformant tout ce qu'il y a de parabolique dans cet exemple-là, en l'hyperbolique de celui-ci ; ce que les huit derniers articles précédens font assez voir. Ainsi nous ne nous y arrêterons pas davantage, non plus qu'à plusieurs autres propriétés de ces Spirales hyperboliques, le Pere

Nicolas, Jésuite, les ayant suffisamment détaillées dans le Traité qu'il en donna en 1696.

EXEMPLE III.

XXXVIII. Soit encore la Courbe génératrice HHV une Parabole quelconque, dont le sommet soit A , son axe AX , & son équation $a + y = z p^{m-1}$ (favoir $a - y$ depuis A jusqu'en C , ou y (GC) devient $= 0$; & après cela $a + y$, à cause qu'alors y (GC) se trouve négatif) ou

Autres Spirales paraboliques générales appellées ici co-verticales pour les distinguer de celles de l'exemple 1. art. 13. &c.

FIG. VI.

$z = \frac{a + y}{p^{m-1}}$. Ainsi l'équation générale des Spirales (art. 3.)

donnant aussi $z = \frac{bx}{c}$, l'on aura $\frac{a + y}{p^{m-1}} = \frac{bx}{c}$, ou $\frac{a + y}{p^{m-1}} = \frac{bx p^{m-1}}{c}$ pour l'équation de la Spirale $AEZCORQ$ résultante

de la position précédente de la Parabole générale qu'on lui vient de donner pour génératrice.

Il est visible que cette Spirale est la même que si elle eût été formée par les extrémités E des ordonnées BE ($a + y$) d'une Parabole quelconque, qui auroit son parametre $= \frac{bp^{m-1}}{c}$, son sommet en A ; & dont l'axe de ces ordonnées

auroit été roulé en cercle, ou plutôt (à cause des différens retours) autour d'un cercle $ABYAMB$, &c. au centre duquel elles tendroient toutes. De sorte que la Spirale parabolique que M. Bernoulli, Professeur à Bâle, a formée dans les Actes de Leipfik de 1691. p. 14. en roulant ainsi la Parabole d'Apollonius, n'est qu'un cas particulier de cette générale-ci.

Je laisserois volontiers à toutes ces nouvelles Spirales paraboliques le nom de Paraboles hélicoïdes que M. Bernoulli a donné à la sienne pour la distinguer de celles de l'exemple premier. Mais parce que l'on en peut trouver encore plusieurs autres lesquelles auroient aussi des Paraboles pour génératrices, & des contours tout-à-fait différens selon les différentes situations qu'on peut donner à ces Paraboles par rapport à l'axe AX qui passe

104 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 par le centre C du cercle de révolution ABYA; nous appellerons
 ces Spirales paraboliques co-verticales, en prenant A pour le
 sommet du cercle de révolution ABYA, où leurs Paraboles gé-
 nératrices ont aussi (hyp.) le leur.

Expression gé-
 nérale des soutan-
 gentes de ces
 Spirales para-
 boliques co-ver-
 ticales.

XXXIX. L'équation générale $a \sqrt[m]{+y} = \frac{bx p^{m-1}}{c}$ de
 ces Spirales paraboliques co-verticales, donnant dx
 $= \frac{mc \times a \sqrt[m]{+y} dy}{b p^{m-1}}$ tout positif, à cause que leurs x & leurs y
 croissent alternativement depuis A jusqu'en C, & qu'après
 cela elles croissent ensemble; l'on aura leurs soutangentes
 $= \frac{mcy y \times a \sqrt[m]{+y}}{ab p^{m-1}} = \frac{mxy y}{aa \sqrt[m]{+y}}$: savoir $\frac{mxy y}{aa - ay}$ depuis A
 jusqu'en C, & $\frac{mxy y}{aa + ay}$ dans tout le reste.

Autre expres-
 sion générale des
 mêmes soutan-
 gentes.

XL. Mais pour réduire toutes ces soutangentes à une
 même formule, soit l'arc de révolution $x = nc$, quelque
 portion ou quantité de la circonférence (c) du cercle de
 révolution ABYA que le nombre n (entier ou rompu)
 puisse signifier; l'art 8. donnant alors $nb = z$ (art. 38.)
 $= \frac{a \sqrt[m]{+y}}{p^{m-1}}$, l'on aura $a \sqrt[m]{+y} = \frac{z}{nb p^{m-1}}$; d'où résulte
 $\sqrt[m]{+y} = -a + \frac{z}{nb p^{m-1}}$, & delà $yy = aa + \frac{z^2}{nb p^{m-1}}$
 $- 2a \times \frac{z}{nb p^{m-1}}$. Donc en substituant ces valeurs de x ,
 $a \sqrt[m]{+y}$, yy , dans la précédente formule $\frac{mxy y}{aa \sqrt[m]{+y}}$ des sou-
 tangentes dont il s'agit ici, l'on aura aussi de cette manière
 $\frac{mnc a a + mnc \times \frac{z^2}{nb p^{m-1}} - 2mnc a \times \frac{z}{nb p^{m-1}}}{a \times \frac{z}{nb p^{m-1}}}$ pour l'ex-
 pression générale de ces mêmes soutangentes, par rapport

à quelque point d'attouchement que ce soit, c'est-à-dire, quelque nombre de révolutions complètes ou incomplètes que le nombre n (entier ou rompu) puisse signifier, depuis A jusqu'à ce point d'attouchement des Spirales paraboliques coverticales dont il est ici question, & quel que soit aussi le degré m de ces mêmes Spirales, ou de leurs Paraboles génératrices.

Ainsi, par exemple, dans celle de ces Spirales que M. Bernoulli appelle *Parabole hélicoïde*, laquelle donne $m=2$,

$$\text{ces soutangentes feront} = \frac{2ncaa + 2nncbp - 4nca\sqrt{np}}{a\sqrt{nbp}}$$

à la fin de quelque nombre de révolutions complètes ou incomplètes, qu'on puisse faire signifier à n .

De même si l'on suppose $m=1$, comme lorsque la Parabole génératrice HHV dégénère en une ligne droite faisant un angle de 45 deg. en A avec AX , les soutangentes

$$\text{de la Spirale qui en résultera, feront} = \frac{ncaa + n^3cbb - 2nncab}{nab}$$

$$= \frac{caa + nncbb - 2ncab}{ab}, \text{ quelque nombre de révolutions com-}$$

plètes ou incomplètes qu'on puisse encore faire signifier à n . Et ainsi des autres valeurs de m à l'infini.

On fera le même usage de ces soutangentes qu'on a fait de celles de l'art. 15. dans les art. 16, 17, & 18. Passons donc aux espaces renfermés dans les Spirales dont il s'agit ici. Mais auparavant il est bon d'avertir que dans la suite lorsque le si-

gne — précédera les grandeurs $a - y, a + y, a \pm y$, courvres chacune d'un trait, il signifiera moins ces grandeurs entières; ainsi quoiqu'il dût les changer en $-a + y, -a - y, -a \pm y$, on n'y fera ce changement de signes qu'en cessant de les regarder chacune comme simple, en leur ôtant le trait qui les courvre. C'est pour les reconnoître comme racines de celles de leurs puissances qui se trouveront aussi dans la suite, qu'on se contentera d'indiquer ainsi ce changement de signes sans le faire: on le fera dans les applications particulières.

XLI. Pour avoir présentement les espaces de ces Spi- Expression générale des espaces compris dans les Spirales parabo-

Lignes coveti-
cales.

Cp , deux positions de la Regle mobile de l'art. 1. infiniment proches l'une de l'autre, dont la seconde soit rencontrée en F par l'arc EG , & le reste comme dans cet article 1. Alors on aura $CB (a)$. $CE (y) :: Bb (dx)$. $EF = \frac{y dx}{a}$. De sorte que le triangle élémentaire ECE ou ECE de l'espace cherché $ACEA$, ou $AEZCORECA$, sera

$$\frac{y dx}{2a} (\text{art. 39.}) = \frac{mcyx \times a + y}{2abp^{m-1}} dy \quad (\text{en supposant } s = a + y) =$$

$$= \frac{mcs \times a - s \times s^{m-1} ds}{2abp^{m-1}} = \frac{mcaas^{m-1} ds - 2mcs^m ds + mcs^{m+1} ds}{2abp^{m-1}}$$

$$= \frac{mcs^{m-1} ds}{2bp^{m-1}} - \frac{mcs^m ds}{bp^{m-1}} + \frac{mcs^{m+1} ds}{2abp^{m-1}}. \text{ Donc en intégrant,}$$

l'on aura l'espace cherché = $\frac{c a s^m}{2bp^{m-1}} - \frac{mcs^{m+1}}{m+1 \times bp^{m-1}} +$

$$\frac{mcs^{m+1}}{2m+4 \times abp^{m-1}} \quad (\text{à cause de } s = a + y) = \frac{ca \times a + y}{2bp^{m-1}}$$

$$- \frac{mcs \times a + y}{m+1 \times bp^{m-1}} + \frac{mcs \times a + y}{2m+4 \times abp^{m-1}} \quad (\text{à cause de l'é-$$

quation $a + y = \frac{bxp^{m-1}}{c}$ de ces Spirales) = $\frac{ax}{2} - \frac{mx \times a + y}{m+1}$

$$+ \frac{mx \times a + y}{2ma + 4a} : \text{ savoir } ACEA = \frac{ax}{2} - \frac{mx \times a - y}{m+1} +$$

$$\frac{mx \times a - y}{2ma + 4a} \text{ depuis } A \text{ jusqu'au centre } C, \text{ dans lequel cen-}$$

tre y se trouvant = 0, ce qu'il y a d'espaces ou de couches

d'espace dans $AEZCA$, se trouvera = $\frac{ax}{2} - \frac{max}{m+1} +$

$$\frac{max}{2m+4} = \frac{ax}{m+1 \times m+2}. \text{ Après cela, les } y \text{ devenant}$$

négatifs, tout ce qu'il y aura de couches d'espace Spiral depuis A jusqu'à tel point E que l'on voudra par

de -là C dans $AEZCORECA$ &c. se trouvera

$$= \frac{ax}{2} - \frac{mx \times a + y}{m + 1} + \frac{mx \times a + y^2}{2ma + 4a}$$

XLII. On réduira aussi toutes ces quadratures en une même formule, en supposant l'arc $x = nc$, quelque portion ou quantité de la circonférence (c) du cercle de révolution $ABYA$, que le nombre n (entier ou rompu) puisse signifier.

Autre expression générale des mêmes espaces.

Car alors trouvant $a + y = \frac{nbp^{m-1}}{m}$ comme dans l'art. 40. la substitution de ces valeurs de x & de $a + y$ dans l'équation de l'espace général $ACEA$ ou $AEZCORECA =$

$$\frac{ax}{2} - \frac{mxc + y}{m + 1} + \frac{mxc + y^2}{2ma + 4a}$$

du précédent article 41. l'on aura aussi en général cet espace $= \frac{nac}{2} - \frac{mnc \times nbp^{m-1}}{m + 1} +$

$$\frac{mnc \times nbp^{m-1}}{2ma + 4a}$$

quelque nombre de révolutions complètes ou incomplètes que le nombre n (entier ou rompu) puisse signifier, depuis A jusqu'à quelque point E qu'on voudra des Spirales paraboliques coverticales dont il s'agit ici, quel que soit aussi le degré m de ces mêmes Spirales, ou de leurs Paraboles génératrices.

Ainsi, par exemple, dans celle de ces Spirales, que M.^e Bernoulli appelle *Parabole hélicoïde*, laquelle donne $m=2$, l'on aura $\frac{nac}{2} - \frac{2nc}{3} \sqrt{nbp} + \frac{2nbc^2}{4a}$ pour ce qu'elle aura d'espace $ACEA$, ou $AEZCORECA$, en une ou en plusieurs couches d'autant de révolutions complètes ou incomplètes que le nombre n (entier ou rompu) en marquera depuis A jusqu'à quelque point E que ce soit de cette Spirale. Et ainsi des espaces de toute autre Spirale résultante de telle autre valeur qu'on voudra donner à m .

On fera aussi le même usage de ces espaces qu'on a fait de ceux de l'art. 26. dans ce même article & dans les suiv. 27, 28, & 29, pour en avoir telle couche ou telle portion de couche qu'on voudra.

*Déroulement des
Spirales dont il
s'agit ici, avec
la manière d'en
trouver encore
les espaces.*

XLIII. En suivant la méthode dont on s'est servi dans l'art. 20. pour trouver en quelles Courbes se déroulent toutes les Spirales paraboliques dont les Paraboles génératrices ont leur sommet au centre du cercle de révolutions; on trouvera aussi (en se servant ici des mêmes noms que là) que les Spirales dont il s'agit ici, se déroulent toujours en Courbes dont l'équation générale est $v =$

$$\frac{c \times \overline{a+y}^m}{b p^{m-1}} - \frac{m c a \overline{+y}^{m+1}}{m+1 \times a b p^{m-1}}, \text{ en prenant (dis-je) } y \ \& \ v \text{ pour}$$

les coordonnées perpendiculaires de ces mêmes Courbes.

On verra de plus qu'entre les mêmes ordonnées (y) de part & d'autre, les longueurs de ces Courbes sont par-tout égales à celles des Spirales correspondantes, & leurs espaces doubles de ceux de ces Spirales. Tout cela se trouvera de la même manière qu'on l'a trouvé dans les art 21 & 22 pour les Spirales paraboliques vertico-centrales de l'exemple premier.

FIG. VI.
VII.

Il est à remarquer que si l'on faisoit présentement m négative, la Parabole génératrice HHV de l'art. 38 Fig. 6. se changeroit (Fig. 7.) en une hyperbole générale HHV entre les asymptotes orthogonales AX, AV; & par conséquent dont le centre seroit au point A de la circonférence du cercle de révolution ABYA, comme la Parabole y avoit son sommet. Les Spirales paraboliques qu'on a vû (art. 38.) résulter de cette Parabole, se changeroient de même en hyperboliques; & tout ce qu'on a dit de ces premières Spirales dans l'exemple où nous sommes, deviendroit propre à celles-ci, de même qu'on a vû (Exemple 2.) ce qui concerne les Spirales paraboliques de l'exemple premier, devenir propre aux hyperboliques de l'exemple second. Ainsi il n'y a rien là qui nous doive arrêter davantage. Nous ne nous arrêterons point non-plus aux rebrousemens que l'une & l'autre Spirale de cet exemple-ci, doit avoir en C; ce que nous en avons dit en général dans l'art. 12. doit suffire. L'art. 7. fait assez voir aussi que les Spirales hyperboliques, qui résulteroient ici de m négative, diffèrent encore de celles de l'exemple second, en ce que s'est en s'approchant du centre C que celles de cet exemple sont.

une infinité de révolutions autour de lui avant que d'y arriver; au lieu que ce seroit en s'écartant seulement d'une distance finie de ce centre que celles qui résulteroient ici de m négative, feroient une infinité de révolutions autour de lui, après y être arrivées en un nombre qui seroit seulement à l'unité comme l'ordonnée SC est au paramètre AD .

E X E M P L E I V.

XLIV. Soit la Courbe génératrice HHV un demi-cercle quelconque dont le diamètre soit CX , le centre F , & l'équation $z = \sqrt{2ry - yy}$, en supposant $CF = r$, & le reste comme dans l'art. 2. Donc en substituant cette valeur de z dans l'égalité générale $cz = bx$ ou $z = \frac{bx}{c}$ de l'art. 3.

l'on aura $\frac{bx}{c} = \sqrt{2ry - yy}$ ou $x = \frac{c}{b} \sqrt{2ry - yy}$ pour celle de la Spirale particulière $COEZAKLRESX$, laquelle on voit commencer en C (on pourroit aussi suivant l'art. 5. la concevoir commencer en X), suivre $COEZAK$ à mesure que les GH augmentent, arriver en A (art 8.) à la fin de la première révolution, en prenant AD (b) pour une des ordonnées (z) du cercle générateur; se rebrousser (art. 12.) au point K où l'arc circulaire $FK = \frac{crr - bcr}{ab}$ (tiré du centre C par F) la rencontre, ensuite revenir en arrière suivant $KLRESX$ à mesure que les GH diminuent jusqu'en X où elle arrive à la fin de son retour après avoir fait $FL = AF$.

XLV. De ce que (art. 44.) $x = \frac{c}{b} \sqrt{2ry - yy}$ est l'égalité qui exprime la nature de la Spirale dont il s'agit ici, l'on aura $\frac{cyy^2 - cy^3}{ab\sqrt{2ry - yy}}$, ou (à cause de l'équation précédente) $\frac{ccryy - ccy^3}{abbx}$ pour l'expression générale des soutangentes de cette Spirale.

XLVI. Quant à sa Quadrature, l'élément triangulaire $\frac{yy dx}{2a}$ de l'espace spiral $COEC$ se trouvant aussi

Spirale circulaire appellée ici vericocentiale pour la distinction de tout ce que les différentes positions de son cercle générateur en pourroit encore produire d'autres.

FIG. VIII.

Tangentes de cette Spirale circulaire.

Sa Quadrature, ou les espaces qu'elle renferme.

$$= \frac{cr y y dy - c y^3 dy}{2 ab \sqrt{2 r y - y y}} = \frac{c}{2 ab} \times \frac{\frac{5}{3} r y^4 dy - y^5 dy}{\sqrt{2 r y^5 - y^6}} (A) + \frac{cr}{3 ab} \times$$

$$dy \sqrt{2 r y - y y} (B) - \frac{4 cr}{3 ab} \times \frac{r y dy}{2 \sqrt{2 r y - y y}} (C). \text{ Or l'intégrale}$$

$$\text{de } A \text{ est } = \frac{c}{2 ab} \times \frac{1}{3} \sqrt{2 r y^5 - y^6} = \frac{c y^2}{6 ab} \sqrt{2 r y - y y}; \text{ celle}$$

$$\text{de } B \text{ est } = \frac{cr}{3 ab} \times H V C G H = \frac{cr}{3 ab} \times \frac{y \sqrt{2 r y - y y}}{2} + \frac{cr}{3 ab} \times \text{feg.}$$

$$C V H C; \text{ \& celle de } C \text{ est } = \frac{4 cr}{3 ab} \times \text{feg. } C V H C. \text{ Donc l'es-}$$

$$\text{pace spiral } C O E C \text{ est } = \frac{c y y}{6 ab} \sqrt{2 r y - y y} + \frac{cr}{3 ab} \times \frac{y \sqrt{2 r y - y y}}{2}$$

$$+ \frac{cr}{3 ab} \times \text{feg. } C V H C, \frac{4 cr}{3 ab} \times \text{feg. } C V H C = \frac{c y y + c r y}{6 ab} \times$$

$$\sqrt{2 r y - y y} - \frac{cr}{ab} \times \text{feg. } C V H C, \text{ depuis } C \text{ jusqu'en } K \text{ où}$$

l'accord des x & des y à croître ensemble, cesse pour croître alternativement depuis K jusqu'en X . De maniere

qu'en faisant l'ordonnée FN avec la corde CN , l'on

$$\text{aura tout l'espace } C O E Z A K C = \frac{c r^2}{3 ab} - \frac{cr}{ab} \times \text{feg. } C V H N C.$$

Au contraire depuis X jusqu'en K le secteur Spiral $C X S E C$

$$\text{fera } = \frac{c y y + c r y}{6 ab} \sqrt{2 r y - y y} - \frac{cr}{ab} \times \text{feg. } C V H N H C + \frac{cr}{ab} \times$$

$$C V H N H X C = \frac{c y y + c r y}{6 ab} \sqrt{2 r y - y y} + \frac{cr}{ab} \times \text{sect. } X C H.$$

De sorte qu'en K , où y est $= r$, & le secteur $X C H =$

$$= \text{sect. } X C N, \text{ l'on aura tout l'espace } C X S E R L K C =$$

$$= \frac{c r^2}{3 ab} + \frac{cr}{ab} \times \text{sect. } X C N.$$

On voit aussi delà que la différence dont cet espace

$$C X S E R L K C \text{ surpasse l'autre } C O E Z A K C, \text{ est } = \frac{cr}{ab} \times \text{sect.}$$

$$X C N + \frac{cr}{ab} \times \text{feg. } C V H N C = \frac{cr}{ab} \times C V N X C \text{ produit de}$$

$$\frac{cr}{ab} \text{ par le demi-cercle générateur } C N X C; \text{ \& leur somme,}$$

$$\text{c'est-à-dire, tout l'espace } C K A Z E O C K L R E S X C = \frac{2 c r^2}{3 ab}$$

$$+ \frac{cr}{ab} \times \text{sect. } X C N - \frac{cr}{ab} \times \text{feg. } C V H N C = \frac{2 c r^2}{3 ab} + \frac{cr}{ab} \times$$

$$2 \text{ triang. } C N F = \frac{2 c r^2}{3 ab} + \frac{c r^2}{ab} = \frac{5 c r^2}{3 ab}.$$

Les différentes couches d'espace, qui se trouvent les unes sur les autres dans tout cela, se détailleront comme l'on a fait celles des Spirales paraboliques de l'exemple premier.

XLVII. Il est aisé de voir par l'équation $x = \frac{c}{b} \sqrt{2ry - yy}$ Déroulement de cette Spirale circulaire. (art. 44.) de cette Spirale circulaire vertico-centrale, qu'elle se déroule en une Courbe mécanique dont l'équation différentielle est $dv = \frac{cxy dy - cy dy}{ab\sqrt{2ry - yy}}$, en prenant (comme cy-dessus art. 20.) v pour les abscisses de l'axe, & y pour les ordonnées de cette Courbe dont la longueur est égale à celle de cette Spirale par parties correspondantes.

XLVIII. Pour la construction de cette Courbe mécanique, imaginons-en une autre géométrique $CM(E)m$, Construction de sa Déroulée. dont l'équation soit $\frac{cxy - ryy}{b\sqrt{2ry - yy}} = s$, ses abscisses $CE = y$ & FIG. IX.

ses ordonnées perpendiculaires $EM = s$. Cette équation fait assez voir que cette Courbe doit commencer en C en touchant CG parallèle à ses ordonnées, & s'élever ensuite vers M de manière qu'en prenant $CE = \frac{3r - r\sqrt{s}}{2}$, son point M (au bout de l'ordonnée EM) soit le plus élevé de tous au-dessus de son axe CX , & la tangente en ce point parallèle à cet axe; qu'à la distance $CE (y) = r$ de son origine C , cette Courbe doit revenir couper son axe CX en (E) , & faire là avec lui un angle dont le sinus soit à celui de son complément :: $c. b.$ c'est-à-dire, comme la circonférence $AMBY$ du cercle de révolution est au paramètre AD . Qu'après cela elle doit se continuer à l'infini au-dessous de CX sans jamais rencontrer son ordonnée $X\mu$ distante de C de la valeur de $CX = 2r$, laquelle en devient ainsi l'asymptote.

Cela posé, & $(G) (g)$ étant perpendiculaire sur CX prolongée vers A en sorte que CA soit $= a$, si l'on fait le rectangle $CADG$ égal à l'espace $CEMC$: il est encore manifeste que le point F , dans lequel les perpendiculaires DG & ME se rencontreront, sera un de ceux de la Courbe cherchée; puisque l'on aura pour lors $adv = s dy$ (hyp.).

$$= \frac{cxydy - cy^2dy}{bv^2xy - yy}$$
, c'est-à-dire, $dv = \frac{cxydy - cy^2dy}{abv^2xy - yy}$ qu'on
 vient de voir (art. 47.) être l'équation de cette Courbe
 Donc en faisant par-tout de même, l'on aura $CF(F)f$
 $(f)f\phi$ pour la Courbe qui résulte du déroulement de la
 Spirale circulaire dont il s'agit ici, laquelle Courbe doit
 toucher l'axe CX en C ; avoir un point d'inflexion en F sous
 le point M le plus haut de la Courbe $CM(E)m$; descen-
 dre ensuite jusqu'au point (F) qu'on trouve répondre aussi
 au point (E) en faisant de même le rectangle $(G)CA(D)$
 égal à l'espace $CM(E)C$; la tangente en ce point (F) se
 trouve parallele à CX ; delà la Courbe $CF(F)$ remonte
 vers ϕ , à cause qu'au-delà du point (E) du côté de X , l'es-
 pace $(E)em(E)$ devenant négatif par rapport à $CM(E)C$, le
 rectangle $gCAd$ correspondant ne doit valoir que la diffé-
 rence de $CM(E)C$ à $(E)em(E)$; ce qui rehausse le point f
 vers l'axe CX , ou vers ϕ : de maniere que lorsque l'espace
 $(E)(e)(m)(E)$ est $= CM(E)C$, alors gd étant en CA , le
 point (f) de cette Courbe doit se trouver en (e) sur CX ; &
 ensuite monter vers f jusqu'en ϕ où elle doit toucher l'a-
 symptote μX prolongée à une distance $X\phi$ de l'axe CX , la-
 quelle rende l'espace fini $CM(E) - \mu m(E) X\mu = CA$
 $(d)(g)$.

FIG. VIII. Cela étant, il suit du déroulement qui a engendré cette
 IX. Courbe $CF(F)f(f)f\phi$, qu'en prenant ici (Fig. 9.) CE éga-
 le au petit rayon CE de la Fig. 8. l'on aura l'arc CF de cette
 déroulée, valant l'arc COE de la Spirale, & l'arc $CF(F) =$
 $COEZAK$; en prenant aussi Ce dans la Fig. 9. égale au
 grand rayon CE de la Fig. 8. l'on aura de même l'arc CF
 $(F)f = COEZAKLRE$, & $CF(F)f\phi = COEZAKLRE$
 SX ; par tout de même, en prenant CE de la Fig. 9. égale
 au petit rayon CE de la Fig. 8. ou Ce de la Fig. 9. égale
 au grand rayon CE de la Fig. 8.

FIG. IX. La Quadrature de cette Courbe $CF(F)f(f)f\phi$, prise
 comme dans la Spirale circulaire du déroulement de la-
 quelle cette Courbe résulte, se trouvant (à la manière de
 l'art. 22.) double de celle qu'on vient de trouver (art.
 46.) pour cette Spirale, on ne s'y arrêtera pas davantage.

EXEMPLE V.

E X E M P L E V.

XLIX. Soit la Courbe génératrice HHV une logarithmique dont l'asymptote soit CV parallèle à GH , ses ordonnées HK parallèles à CX , sa soutangente $KT=h$ constante, & les autres noms comme dans l'art. 2. l'équation de cette

Spirale logarithmique ordinaire.

FIG. X.

logarithmique sera $\frac{hdy}{y} = dz$ (à cause de l'équation $cz = bx$ des Spirales en général de l'art. 3.) $= -\frac{bdx}{c}$, ou $\frac{dy}{y} = -\frac{bdx}{bc}$: de sorte qu'en prenant les dx constantes, c'est-à-dire, les x (AMB ou $ABYAMB$) en progression arithmétique croissante, l'on aura les y (CE) en progression géométrique décroissante. Ce qui prouve que la Spirale $OZEAREX$ qui en résulte, est une Spirale logarithmique ordinaire, ainsi qu'on l'a déjà vu dans l'art. 4.

On voit aussi que cette Spirale entrera par A dans le cercle de révolution $ABYA$ à la fin de la première, conformément à l'art. 8. en prenant AD (b) pour une des ordonnées de la Courbe génératrice HHV . Et que suivant l'art. 7. elle fera une infinité de révolutions avant que d'arriver à son centre C .

On voit enfin que les ordonnées ou rayons de cette Spirale sont par-tout à ses soutangentes correspondantes :: ab . hc . c'est-à-dire, en raison constante; & par conséquent aussi les angles de cette Spirale avec ses ordonnées sont par-tout les mêmes, ainsi qu'on le suppose d'ordinaire dans la définition qu'on en donne.

L. Cela étant, on aura dy à l'élément (ds) de cette Spirale :: ab . $\sqrt{aabb + hhcc}$. Ce qui donne cet élément

Longueur de cette Spirale logarithmique.

$ds = \frac{dy}{ab} \sqrt{aabb + hhcc}$; & par conséquent $s = \frac{y}{ab} \sqrt{aabb + hhcc}$: c'est-à-dire, que l'arc de cette Spirale logarithmique, compris entre chaque ordonnée y (CE) & le centre C , est $= \frac{y}{ab} \sqrt{aabb + hhcc}$. D'où l'on voit que tous ces arcs sont finis, quoiqu'ils fassent chacun (art. 7.) une infinité de révolutions autour du centre C .

La Quadrature
en l'espace qu'il
le renferme.

LI. L'égalité $\frac{dy}{y} = -\frac{b dx}{bc}$ donne aussi $-\frac{bcy dy}{2ab} = \frac{yy dx}{2a}$ élé-
ment de l'espace $COZ EC$. Ainsi cet espace sera $= \frac{bcyy}{4ab}$,

dont les différentes couches se détailleront à l'infini comme l'on a fait celles des espaces spiraux paraboliques de l'exemple 1. dans l'art. 23. &c. Ces espaces spiraux logarithmiques $\left(\frac{bcyy}{4ab}\right)$ se trouvant ainsi comme les quarrés des ordonnées ou rayons (y), seront aussi (art. 49.) en raison géométrique pendant que les arcs (x) de révolution seront en progression arithmétique.

Cette Spirale
logarithmique
se déroule en un
triangle rectili-
gne rectangle,
qui en donne en-
core la longueur
& la quadratur-
re.

LII. Si l'on examine le déroulement de cette Spirale logarithmique $OZEAREX$ comme l'on a fait ceux des Spirales paraboliques du premier exemple dans les art. 20. 21. & 22. on trouvera que cette Spirale logarithmique se déroule en un triangle rectiligne rectangle dont la hauteur est à la base $:: ab. hc$. c'est-à-dire (art. 49.) comme les ordonnées sont aux sôturanges correspondantes de cette Spirale logarithmique; ce qui donne encore sa longueur & son espace tels qu'on les vient de trouver dans les art. 50. & 51. Car y (EC) étant la hauteur de ce triangle, cette Analogie donnera $\frac{bcy}{ab}$ pour sa base, & par conséquent $\frac{y}{ab} \sqrt{aabb + hhcc}$ pour son hypoténuse, & $\frac{bcyy}{2ab}$ pour son aire. Ainsi les longueurs correspondantes de quelque Spirale que ce soit, & de sa Déroulée, étant toujours égales entr'elles, & l'espace de la Spirale toujours moitié du correspondant de sa Déroulée; la longueur de la Spirale dont il s'agit ici doit être $= \frac{y}{ab} \sqrt{aabb + hhcc}$, & son espace $= \frac{bcyy}{4ab}$, comme on l'a déjà vu dans les art. 50. & 51.

Outre cette Spirale logarithmique connue de tous les Géometres, en voici encore cinq autres pareillement logarithmiques dont personne (que je sache) n'a parlé jusqu'ici.

E X E M P L E VI.

Première des
nouvelles Spirales
logarithmiques.

LIII. La première de ces cinq nouvelles Spirales logarithmiques est encore formée, comme la précédente, par

le moyen de la logarithmique ordinaire HHV , dont la soutangente GT soit encore $= h$ mais dont CX soit l'asymptote, & $-\frac{bdx}{dy} = z$ son équation différentielle. Il est visible que l'égalité $z = \frac{bx}{c}$ des Spirales en général de l'art. 3. donnant $dz = \frac{bdx}{c}$, si l'on substitue ces valeurs de z & de dz dans $-\frac{bdz}{dy} = z$, il en résultera $-\frac{bbdx}{cdy} = \frac{bx}{c}$, ou $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{b}$ pour l'équation de cette nouvelle Spirale logarithmique **COZEAREX**.

FIG. XI.

On voit de-là qu'en prenant ici les dy constantes, c'est-à-dire, les y (CE ou CG) en progression arithmétique décroissante, les x (AMB ou $ABYAMB$) en suivront une géométrique croissante; au lieu que dans l'autre Spirale logarithmique (*exemp. 5.*) les x étant en progression arithmétique, c'étoient les y qui en suivoient une géométrique. On a déjà vu tout cela dans l'art. 4.

LIV. Il suit encore de l'équation $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{b}$ (*art. 53.*) de la Spirale dont il s'agit ici, que les soutangentes de cette seconde Spirale logarithmique, sont par-tout $= -\frac{xy}{ab}$, c'est-à-dire qu'elles sont toujours aux y (CE) correspondantes $:: xy. ab$.

Tangentes de cette nouvelle spirale.

LV. On voit aussi (*art. 5.*) que cette Spirale-ci commence du côté de X à une distance infinie du point C ; qu'en suite (en prenant AD pour une ordonnée de HHV) elle entrera (*art. 8.*) par A dans le cercle $ABYA$ à la fin de la première révolution, pendant laquelle l'arc infini XRA aura été décrit; & qu'enfin (*art. 6.*) elle arrivera au centre C après un nombre fini de révolutions. Ce qui est tout le contraire de la précédente (*exemp. 5.*) qui commençoit à une distance finie du côté de X , & n'arrivoit au centre C qu'après une infinité de révolutions.

Cette Spirale commence à une distance infinie de son centre, où elle arrive après un nombre fini de révolutions.

LVI. Pour voir présentement, comme l'on a fait dans l'art. 33. pour les Spirales hyperboliques de l'exemple second, si c'est en s'éloignant ou en s'approchant de la droi-

A quelle distance de son axe elle commence.

re CX , que cette nouvelle Spirale logarithmique (qui coupe VC prolongée en N) va à l'infini depuis N du côté de X sans la rencontrer ; soit encore un de ses points quelconque e pris sur son arc NX à telle distance qu'on voudra de son centre C , avec le rayon Ce qui rencontre le cercle de révolution $ABYA$ en b ; soient aussi sur CX les perpendiculaires $bL = Sx$ (sinus de l'arc $Ab = x$: S signifie sinus), & $ek = t$.

On aura $bL (Sx)$. $ek (t) :: Cb (a)$. $Ce (y)$. Ce qui donne $a t = y \times Sx$, ou $a dt = y \times dSx - Sx \times dy$, ou bien aussi $\frac{adt - y \times dSx}{Sx} = -dy$ (à cause de l'équation $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{h}$ de l'art. 53.) $= \frac{hdx}{x}$. Mais parce que l'arc Ab , en devenant nul, rend $x = dx$, & $Sx = dx = dSx$; cette équation se changera alors en $\frac{adt - ydx}{dx} = \frac{hdx}{dx} = h$, ou en $adt - ydx = hdx$, d'où résulte $\frac{dt}{dx} = \frac{h+y}{a}$: de sorte qu'alors y , & par conséquent aussi $h+y$, se trouvant infinie par rapport à a , l'on aura de même dt infinie par rapport à dx infiniment petite du premier genre. Par conséquent cette nouvelle Spirale logarithmique $COZAREX$ à une distance infinie de C du côté de X , doit se trouver éloignée de la droite CX du moins d'une distance finie. Le cours de l'impression où ceci me vient, ne me permet pas d'en chercher davantage.

Déroulement de
cette nouvelle
Spirale logarith-
mique.

LVII. Si l'on examine le déroulement de cette Spirale logarithmique comme l'on a fait ceux des Spirales paraboliques du premier exemple, dans les art. 20, 21. & 22. en faisant de ses ordonnées concourantes (y) les ordonnées parallèles de sa Déroulée ; & en prenant v pour les abscisses de l'axe de cette Déroulée, auquel ces ordonnées soient perpendiculaires ; on trouvera $dv = \frac{vydy}{bb-by}$ pour l'équation de cette même Déroulée, dont la longueur sera aussi la même que celle de cette Spirale, & son espace double de celui de cette même Spirale : le tout pris par rapport à des arcs correspondans.

Ces longueurs, ces espaces entiers & par couches, se cher-

cheront comme dans l'exemple premier pour les Spirales paraboliques vertico-centrales. Je finis donc en rapportant seulement les constructions des quatre nouvelles Spirales qui nous restent encore à faire voir : réservant le surplus pour une autre fois.

E X E M P L E VII.

LVIII. Soit $dz = \frac{aby}{cyy} \sqrt{hh-yy}$ l'équation de la Courbe génératrice *HHV*. Il est visible que l'égalité générale (art. 3.) des Spirales, donnant $dz = \frac{b dx}{c}$, si l'on substitue cette valeur de dz dans l'égalité précédente, l'on aura $dx = \frac{ady}{yy} \sqrt{hh-yy}$, ou $\frac{y dx}{a} = \frac{dy \sqrt{hh-yy}}{y}$ pour l'équation de la Spirale que la Courbe génératrice proposée doit engendrer à la maniere de l'art. 1. De sorte qu'en prenant ds pour l'élément de cette Spirale, l'on aura $ds = \sqrt{dy^2 + \frac{hhd y^2 - yy dy^2}{yy}}$ Seconde des nouvelles Spirales logarithmiques.
 $= \frac{hdy}{y}$, ou $\frac{ds}{h} = \frac{dy}{y}$. D'où l'on voit qu'en prenant les arcs (*s*) de cette Spirale en progression arithmétique, ses ordonnées correspondantes (*y*) seront en progression géométrique. Ainsi cette Courbe sera encore une Spirale logarithmique d'une troisième espece.

Et si l'on prend encore *y* & *v* pour les coordonnées orthogonales de sa Dérivée, il est visible aussi que $dv = \frac{dy}{y} \sqrt{hh-yy}$ sera l'équation de cette Dérivée, dont la longueur sera égale à celle de cette Spirale, & son espace double celui de cette même Spirale : le tout pris par rapport à des arcs correspondans.

E X E M P L E VIII.

LIX. Soit de même $dz = \frac{abz dy}{\sqrt{aabbhh - ccyyzz}}$ l'équation de la Courbe génératrice *HHV*. L'égalité générale $z = \frac{bx}{c}$ Troisième des nouvelles Spirales logarithmiques.
 (article 3.) des Spirales, donnant $dz = \frac{b dx}{c}$, l'on aura

$dx = \frac{abxdy}{\sqrt{aabbhh - bbxyy}} = \frac{axy}{\sqrt{aahh - xxyy}}$; ce qui donne $aahhdx^2 = aaxxdy^2 + xxyydx^2$, ou bien $\frac{dx}{x} = \frac{\sqrt{aady^2 + yydx^2}}{aahb}$
 $= \sqrt{\frac{dy^2 + \frac{yydx^2}{aa}}{b}} = \frac{ds}{b}$ pour l'équation de la Spirale qui doit réfulter de la Courbe génératrice propofée, en prenant encore ds pour l'élément de cette Spirale. D'où l'on voit qu'en prenant les arcs (s) de cette même Spirale en progreflion arithmétique, les arcs correspondans (x) de révolution feront en progreflion géométrique. Ainfi cette Courbe fera encore une Spirale logarithmique d'une quatrieme espece.

Autrement. Puisque $dx = \frac{axy}{\sqrt{aahh - xxyy}}$, l'on aura $\frac{ydx}{a} = \frac{xydy}{\sqrt{aahh - xxyy}}$, & $ds = \sqrt{dy^2 + \frac{xxyydy^2}{aahh - xxyy}} = \frac{aby}{\sqrt{aahh - xxyy}}$
 $= \frac{b dx}{x}$, ou $\frac{ds}{b} = \frac{dx}{x}$, comme ci-deffus.

E X E M P L E IX.

Quatrieme des nouvelles Spirales logarithmiques.

LX. Soit présentement $aab^3hdyddy = aabbc dy^2 dz - bcc h y dy dz + c^3 y y dz^3$ l'équation de la Courbe génératrice HHV . L'égalité générale de l'art. 3. donnant $dz = \frac{bdx}{c}$, l'on aura $aab^3hdyddy = aab^3dxdy^2 - b^3hydx^2dy + b^3yydx^3$, ou $aahdyddy + h y dx^2 dy = aadxdy^2 + yydx^3$.
 Donc $\frac{b}{dx} \times \frac{aadydy + ydx^2dy}{\sqrt{aady^2 + yydx^2}} = \sqrt{aady^2 + yydx^2}$; & en intégrant (dx étant constante) $\frac{b}{dx} \sqrt{aady^2 + yydx^2} = f\sqrt{aady^2 + yydx^2}$,
 ou (en divifant le tout par a) $\frac{b}{dx} \sqrt{dy^2 + \frac{ydx^2}{aa}} = f\sqrt{dy^2 + \frac{yyax^2}{aa}}$,
 c'est-à-dire (en prenant encore ds pour l'élément de la Spirale) $\frac{bds}{dx} = s$, ou $\frac{ds}{s} = \frac{dx}{b}$ qui en fera l'équation. D'où l'on voit que cette Courbe est encore une Spirale logarithmique d'une cinquieme espece dont les arcs (s) feront enprogref-

fon géométrique pendant que les arcs correspondans (x) de révolution feront en progression arithmétique.

EXEMPLE X.

LXI. Soit enfin $aabb dy^3 = cchydydz^2 - cyydydz^2 + cchyydzddz$ l'équation de la Courbe génératrice

Cinquieme des nouvelles Spirales logarithmiques.

HHV. L'égalité générale $z = \frac{bx}{c}$ de l'article 3. donnant

$dz = \frac{bdx}{c}$, & $ddz = \frac{bd^2x}{c}$, la substitution de ces valeurs

de dz & d dz dans la précédente équation de la Courbe proposée, la changera en $aabb dy^3 = bbhydydx^2 - bbyydydx^2 + bbhyydxddx$, ou $aady^3 + yydydx^2 = hydydx^2 + hyydxddx$.

Ce qui donne $\frac{dy}{b} \sqrt{aady^2 + yydx^2} = \frac{ydydx^2 + yydxddx}{\sqrt{aady^2 + yydx^2}}$ de sorte

que si l'on integre en prenant dy constante, l'on aura $\frac{dy}{b} \times \sqrt{aady^2 + yydx^2} = \sqrt{aady^2 + yydx^2}$, ou (en divisant

le tout par a) $\frac{dy}{b} \times \sqrt{dy^2 + \frac{yydx^2}{aa}} = \sqrt{dy^2 + \frac{yydx^2}{aa}}$: c'est-à-dire,

$\frac{dy}{b} = ds$ ou $\frac{dy}{b} = \frac{d.s}{s}$ pour l'équation de la Spirale cher-

chée, en prenant encore ds pour son élément. D'où l'on voit qu'en prenant les arcs (s) de cette Spirale en progression géométrique, ses ordonnées (y) seront en progression arithmétique. Ainsi cette Courbe est encore une Spirale logarithmique d'une sixieme espece.

LXII. Telle est la construction des six Spirales logarithmiques promises ci-dessus, lesquelles comprennent toutes les combinaisons possibles de progression arithmétique & géométrique entre leurs arcs (s), ceux de révolutions (x), & leurs ordonnées (y), car,

Les six Spirales logarithmiques précédentes sont tout ce qu'il en peut résulter des combinaisons des progressions arithmétiques & géométriques de leurs ordonnées, de leurs arcs, & de ceux de révolution.

1°. Si l'on prend les arcs (x) de révolution en progression arithmétique, la Spirale de l'art. 49. aura ses ordonnées (y), & celle de l'art. 60. ses arcs (s) en progression géométrique; & réciproquement.

2°. En prenant les ordonnées ou rayons (y) de la Spi-

120 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 rale en progression arithmétique, celle de l'art. 53. aura
 ses arcs (x) de révolution, & celle de l'art. 61. ses pro-
 pres arcs (s) en progression géométrique; & réciproque-
 ment.

3°. Enfin en prenant les arcs (s) de la Spirale en pro-
 gression arithmétique, celle de l'art. 59. aura ceux (x) de
 révolution, & celle de l'art. 58. ses ordonnées (y) en pro-
 gression géométrique; & réciproquement.

*Voilà beaucoup plus d'exemples qu'on ne s'étoit d'abord pro-
 posé, de la formation générale des Spirales de l'art. 1. & de
 l'usage qu'on doit faire de leur équation universelle trouvée dans
 l'art. 3. Mais la facilité avec laquelle la construction des six pré-
 cédentes Spirales logarithmiques s'en déduit, m'a paru digne
 d'être observée. Voici présentement quelques usages de cette for-
 mation générale pour la description des Courbes dont les ordon-
 nées concourent en un même point quelconque de leur plan.*

U S A G E

*De la Formation générale des Spirales de l'art. 1. pour
 la description des Courbes dont les ordonnées
 concourent en quelque point que ce soit.*

*Maniere de
 trouver les géné-
 ratrices propres
 à décrire par le
 moyen de l'art.
 1. & comme au-
 tant de Spirales,
 les Courbes dont
 les ordonnées
 concourent en
 quelque point
 que ce soit.*

FIG. XII.

LXIII. Une Courbe quelconque OEZ , dont les ordonnées $EC, eC,$ &c. concourent toutes en quelque point C que ce soit, étant proposée à décrire, soit cette Courbe imaginée comme une espèce de Spirale, dont C soit le centre ou le pôle, $ABYA$ le cercle de révolution décrit de tel rayon AC qu'on voudra, la circonférence duquel soit rencontrée en B, b , par deux rayons ou ordonnées CE, Ce , de cette Courbe infiniment proches l'une de l'autre; & tout le reste comme dans l'article 1. Soient aussi les noms ici les mêmes que dans l'art. 2. Soient seulement de plus l'arc infiniment petit EF décrit du rayon CE , appelé dv , & AG ou BE appelée t ; & par conséquent $a - y = t$, ou $y - a = t$, selon que $AC(a)$ est plus grand ou moindre que $EC(y)$. Pour éviter cette variété de signes,

signes, nous supposerons toujours dans la suite AC plus grand que EC ; si le contraire arrive, on substituera $y - a$ & dy à la place de $a - y$ & $-dy$ dans ce que nous allons dire. Cela posé,

1°. Si t & x , ou y & x , sont les variables de l'équation de la Courbe OEZ proposée à décrire; il n'y a qu'à considérer que l'équation générale $zc = bx$ de l'art. 3. donne

$$x = \frac{zc}{b}, \text{ \& } dx = \frac{cdz}{b} : \text{ car la substitution de ces valeurs de}$$

x & de dx à la place de ce qui s'en trouve dans l'équation donnée de la Courbe OEZ , changera cette même équation en une autre où il n'y aura de variables que t & z , ou y & z , avec leurs différences, si elle en a; & qui par conséquent fera l'équation de la Courbe génératrice HHV requise pour décrire la Courbe OEZ à la manière de l'art. 1.

2°. Si dv se trouvoit avec une ou plusieurs des variables précédentes (j'y comprends aussi leurs différences s'il y en a) dans l'équation donnée de la Courbe OEZ proposée à décrire, il n'y auroit alors qu'à substituer dans cette équation la valeur de dv qui résulte de l'analogie $CB(a). CE(y)::$

$$Bb(dx). EF(dv) = \frac{ydx}{a}. \text{ Et pour lors n'y restant plus de variables}$$

que t & x , ou y & x , cette équation fera dans le cas précédent (n. 1.); ainsi il n'y aura plus qu'à en chasser x &

dx par la substitution de leurs valeurs $\frac{cz}{b}, \frac{cdz}{b}$, résultantes

de l'équation générale $cz = bx$ de l'art. 3. pour avoir celle de la Courbe cherchée HHV génératrice de la Courbe OEZ qu'on veut décrire.

E X E M P L E I.

LXIV. 1°. Soit $px = tt$ l'équation de la Courbe OEZ proposée à décrire. Cette équation donnera $x = \frac{tt}{p}$.

Mais l'équation générale $zc = bx$ de l'art. 3. donne aussi

$$x = \frac{zc}{b}. \text{ Donc } \frac{zc}{b} = \frac{tt}{p}, \text{ ou } \frac{cpz}{b} = tt \text{ fera l'équation de la}$$

122 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 Courbe HHV génératrice de la Courbe OEZ à décrire à la
 maniere de l'art. 1. Ce qui fait voir que cette génératrice
 HHV doit être ici une Parabole ordinaire touchée en son
 sommet A par la droite AC .

Cette Parabole ainsi trouvée, étant décrite, l'article 1.
 fait voir que si l'on prend l'arc AMB à une ordonnée quel-
 conque HG de cette Parabole, comme la circonférence
 entiere $ABYA(c)$ est à la droite constante $AD(b)$, & qu'a-
 près avoir tiré la droite CB , on fait (du centre C) l'arc circu-
 laire GE qui rencontre cette droite CB en E ; ce point E
 fera un de ceux de la Courbe OEZ à décrire.

En effet puisque (constr.) $AMB(x).HG(z) :: ABYA(c).$
 $AD(b)$, l'on aura $x = \frac{zc}{b}$. Donc en substituant x au lieu
 de cette valeur dans l'équation $\frac{cpx}{b} = tt$ de la Parabole gé-
 nératrice HHV , il en résultera $px = tt$ pour l'équation de
 la Courbe OEZ ainsi décrite par le moyen de cette Parabole
 génératrice HHV . Par conséquent cette équation $px = tt$
 étant la même que celle de la Courbe proposée à décrire, il
 s'ensuit que cette Courbe est aussi celle qui vient d'être dé-
 crite.

2°. Si au lieu de $px = tt$, on eût donné $px = a - y$
 pour l'équation de cette même Courbe OEZ ; l'on auroit
 eu $pdx = 2a - 2yx - dy = 2ydy - 2ady$, ou $dy = \frac{2ydy - 2ady}{p}$
 (à cause de $a - y = t$, ou $y - a = -t$, & $dy = -dt$)
 $\frac{-2t - dt}{p} = \frac{2tdt}{p}$. Mais l'équation générale $zc = bx$ de l'art.

3. donne aussi $dx = \frac{cdz}{b}$. Donc $\frac{cdz}{b} = \frac{2tdt}{p}$, ou (en inté-
 grant) $\frac{pcz}{b} = tt$ fera l'équation de la Courbe HHV , la-
 quelle par conséquent fera encore la génératrice de OEZ à
 la maniere de l'art. 1.

Il est à remarquer que cette Courbe OEZ est encore la Para-
 bole hélicoïde de M. Bernoulli, Professeur à Bâle, dont nous
 avons parlé ci-dessus art. 38.

E X E M P L E II.

LXV. Soit de même $dx = \frac{adt\sqrt{et-ee}}{ae-et}$ l'équation de la Courbe OEZ proposée à décrire. L'équation générale $zc = bx$ de l'art. 3. donnant aussi $dx = \frac{cdz}{b}$, l'on aura tout d'un coup $\frac{cdz}{b} = \frac{adt\sqrt{et-ee}}{ae-et}$, ou $dz = \frac{abdt\sqrt{et-ee}}{acc-cet}$ pour l'équation de la Courbe HHV génératrice de OEZ à la manière de l'art. 1.

Second exemple des Courbes à décrire par le moyen de l'article 1.

On décrira présentement cette Courbe comme l'on vient de faire celle du précédent exemple 1. art. 64.

Il est aussi à remarquer que cette Courbe OEZ est la Paracentrique elle-même, qu'on a démontrée dans les Mémoires de 1703. pag. 146. &c. avoir son origine entre A & C sur AC , & devoir faire une infinité de révolutions autour du centre C avant que d'y arriver : il n'y a de différence entre l'équation qu'on en donne ici, & celle qui s'en trouve dans la pag. 146. de ces Mémoires, qu'en ce qu'on appelle ici x, y, t, a, e, c, b, z , ce qu'on appelle là z, y, x, xc, a, e, g, k . La substitution de ces dernières grandeurs à la place des premières qui leur répondent, dans l'équation de la Courbe génératrice HHV qu'on vient de trouver, la rendroit aussi la même que celle de la génératrice de la seconde description qui se trouve de la précédente Paracentrique dans la pag. 149. des Mémoires dont on vient de parler.

E X E M P L E III.

LXVI. Soit aussi $dv = \frac{a-1 \times dz}{\sqrt{2at+2pt-st}}$ l'équation d'une Courbe OEZ proposée à décrire. Il suffit de considérer que $CB(a). CE(y) :: Bb(dx). EF(dv) = \frac{ydx}{a}$, & que l'égalité générale $zc = bx$ de l'art. 3. donnant $dx = \frac{cdz}{b}$, l'on aura $dv = \frac{ycdz}{ab}$ (art. 63.) = $\frac{a-1 \times cdz}{ab}$. Car la substitution de cette dernière valeur de dv dans l'égalité proposée, la changera

Troisième exemple des Courbes à décrire par le moyen de l'article 1.

en $\frac{a-t \times dz}{ab} = \frac{a-t \times dt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$, ou en $dz = \frac{abd t}{c\sqrt{2at+2pt-tt}}$, qui fera celle de la génératrice *HHV* propre à décrire à la manière de l'art. 1. la Courbe *OEZ* proposée : cette description se fera encore comme celle de l'exemple 1. art. 64.

A V I S.

La méthode de l'art. 1. pour la description des Courbes dont les ordonnées concourent en quel que point que ce soit, est générale ; mais elle n'est pas toujours la plus simple ni la plus facile.

LXVII. Quelque facile que paroisse la méthode de l'art. 1. pour la construction des Courbes dont les ordonnées concourent en un même point, il faut cependant avouer qu'il y a des cas où il s'en trouve de beaucoup plus faciles : par exemple, en voici une pour construire la Courbe *OEZ* du dernier exemple 3. beaucoup plus simple & plus facile que celle du précédent art. 66.

FIG. XIII.

En effet l'équation $d v = \frac{a-t \times dt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$ de cette Courbe

OEZ, donnant $\frac{adv}{a-t} (Bb) = \frac{adt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$, il est visible que

l'on aura aussi $Bb = \frac{a}{a+p} \times \frac{a+p \times dt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$. Or si l'on prend

$CR=p$; que du centre *R*, & du rayon *AR* ($a+p$), on décrit le demi-cercle *AVK*, avec une de ses ordonnées quelconque *GL*; & que de l'extrémité *l* de son élément *Ll* on suppose *lN* parallèle à *AK*, laquelle rencontre *GL* prolongée en *N*: l'on aura *GL* ($\sqrt{2at+2pt-tt}$). *LR* ($a+p$)::

Nl (dt). $lL = \frac{a+p \times dt}{\sqrt{2at+2pt-tt}}$. Donc $Bb = \frac{a \times lL}{a+p} = \frac{AC \times lL}{AR}$;

& (en intégrant) $AB = \frac{AC \times AL}{AR}$. Ce qui donne enfin

AL. *AB* :: *AR*. *AC*. c'est-à-dire, les secteurs correspondans *ARL* & *ACB* par-tout semblables entr'eux. D'où l'on voit qu'en prenant deux angles quelconques *ARL* & *ACB* égaux entr'eux, si après avoir fait l'ordonnée *LG*, on décrit du centre *C* par *G* l'arc *GE* qui rencontre le rayon *CB* en *E*; ce point *E* sera un de ceux de la Courbe à décrire *OEZ*, dont on voit que le contour doit être *AOEZCDK* en forme de **B**. Ce qu'il falloit trouver.

On voit, dis-je, combien cette méthode est plus simple & plus aisée que celle de l'art. 1. employée dans l'art. 66. &c. Mais aussi en récompense celle de l'art. 1. est-elle beaucoup plus universelle, en ce qu'elle peut servir à la construction de toutes les Courbes d'ordonnées concourantes, au lieu que celle du présent art. 67. ne convient qu'à la Courbe de cet article. Je finis par quelques Remarques sur cette méthode générale de l'art. 1. & sur quelques autres qu'elle m'a fait encore imaginer pour la formation de toutes sortes de Spirales à l'infini.

R E M A R Q U E S

Sur différentes Formations générales de Spirales à l'infini.

LXVIII. On a vu ci-dessus (art. 38.) la manière dont M. Moyen général de former des Spirales, différent de celui de l'art. 1. Bernoulli, Professeur à Bâle, a formé sa Parabole hélicoïde dans les Actes de Leipfik de 1691. p. 14. Il est visible qu'on pourroit aussi former autant d'autres Spirales qu'on peut imaginer d'autres Courbes au lieu de sa Parabole, roulées comme elle : c'est-à-dire, dont l'axe fût roulé en tant de FIG. XIV. révolutions qu'on voudroit sur la circonférence d'un cercle quelconque $ABYA$; ayant ses abscisses en AMB (x), dont l'origine est en A ; & ses ordonnées BE , tendantes toutes au centre C de ce cercle, ou directement à contre-sens. Il est, dis-je, visible que toutes les Spirales OEZ formées par les extrémités E de toutes ces ordonnées, seroient aussi différentes entr'elles que tout ce qu'on peut imaginer de Courbes ainsi roulées.

LXIX. Mais toutes ces Spirales se peuvent encore trouver aisément par la méthode de l'art. 1. en imaginant du centre C par-tout ces points E , autant d'arcs de cercles EG , Tout ce qui se peut former de Spirales par ce moyen, se peut aussi former par celui de l'art. 1. qui rencontrent AC prolongée vers X , x , en autant de points G , desquels soient élevées autant de perpendiculaires GH sur cet axe Xx , lesquelles soient chacune à une droite constante AD , comme l'abscisse correspondante AMB ou $nc + AMB$ de tant de révolutions qu'on vou-

dra, est à la circonférence (*c*) du cercle *ABYA*, sur laquelle circonférence on suppose que la génératrice, à la maniere de M. Bernoulli, a son axe roulé: car il est manifeste que la Courbe *HHV* qui passera par tous les points *H* ainsi trouvés, fera la génératrice de toutes ces Spirales à la maniere de l'art. 1.

Maniere de
passer des géné-
ratrices du précé-
dent art. 68. à
celles de l'art.
1. pour la des-
cription de ces
Spirales.

LXX. Il est aussi fort aisé de trouver l'équation de cette génératrice à la maniere de l'art. 1. par l'équation de l'autre génératrice à la maniere de M. Bernoulli: car si outre les noms de l'art. 2. on appelle *v*, les ordonnées *BE* de cette seconde génératrice roulée, dont les abscisses sont (*hyp.*) *AMB* ou $nc + AMB = x$; on trouvera $v = \pm a \sqrt{+y}$. Ainsi l'équation donnée de cette Courbe roulée, donnant *v* en *x* & en constantes, il en résultera une troisième équation de $\pm a \sqrt{+y}$ avec cette valeur de *v*, dans laquelle équation il n'y aura plus de variables que des *x* & des *y*; & qui par conséquent donnera de même *x* en *y* & en constantes, laquelle valeur de *x* étant substituée dans l'égalité générale $cx = bx$ (*art.* 3.) des Spirales engendrées comme dans l'art. 1. la changera en celle de la Courbe *HHV* requise pour décrire à la maniere de l'art. 1. la Spirale *OEZ* proposée.

Exemple. Soit cette Spirale, la Parabole hélicoïde de M. Bernoulli, engendrée à sa maniere par une Parabole ordinaire, laquelle ayant son axe roulé sur la circonférence du cercle *ABYA*, ait son sommet en *A*, *AMB* (*x*) pour ses abscisses *BE* (*v*) pour ses ordonnées tendantes au centre *C* de ce cercle, & son parametre = *l*. L'équation de cette Parabole fera $xl = v^2$, ou $v = \sqrt{xl}$. Ainsi ayant déjà (*hyp.*) $v = a \sqrt{+y}$, l'on aura aussi $\frac{a \sqrt{+y}}{\sqrt{xl}} = \sqrt{xl}$, ou $xl = \frac{a^2 + y^2}{l}$; d'où résultera de même $x = \frac{a^2 + y^2}{l}$. Donc ayant d'ailleurs (*art.* 3.) $cx = bx$, & par conséquent aussi $x = \frac{cz}{b}$; l'on aura enfin $\frac{cz}{b} = \frac{a^2 + y^2}{l}$, ou $\frac{czl}{b} = a^2 + y^2$ pour l'équation de la Courbe *HHV* propre à engendrer à la maniere de l'art. 1. la Parabole hélicoïde de M. Bernoulli:

aussi cette équation est-elle la même que celle qui résulte de l'équation parabolique générale $a\sqrt{+y}^m = zp^{m-1}$ de l'art. 38. qu'on a déjà vûe dans ce même article, devoir engendrer cette Spirale à la maniere de l'art. 1. en faisant $m = 2$. En effet cette équation générale de la Courbe *HHV*, se réduit-elle alors à cette particulière $a\sqrt{+y}^2 = zp$, dont le parametre p doit être ici $= \frac{c^2}{b}$ pour avoir à la maniere de l'art. 1. la même Spirale numériquement que M. Bernoulli a trouvée par la sienne. Et ainsi de telle autre Spirale qu'on voudra rapporter de la maniere de M. Bernoulli à celle de l'art. 1.

LXXI. On a vu à la fin de l'art. 3. que cette maniere de l'art. 1. quelque générale qu'elle soit, le peut encore devenir quelquefois davantage en faisant $zc^\pi = bx^\pi$ au lieu de $zc = bx$ dans cet art. 3. En voici quelques exemples.

Comparaison de deux équations de Spirales en général, résultantes de l'art. 1.

1°. L'équation $zc^\pi = bx^\pi$ donnant $z = \frac{bx^\pi}{c^\pi}$, si l'on introduit cette valeur de z dans l'équation génératrice circulaire $z = \sqrt{2ry - yy}$ de l'art. 44. l'on aura $\frac{bx^\pi}{c^\pi} = \sqrt{2ry - yy}$, ou $bbx^{2\pi} = 2ryc^{2\pi} = cyy^{2\pi}$ pour l'équation des Spirales circulaires qui en doivent résulter à la maniere de l'art. 1. qui donneroit alors $\overline{ABYA}^\pi (c^\pi)$, \overline{AMB}^π ou $\overline{ABYAMB}^\pi (x^\pi) :: AD (b)$, $GH (z)$. De sorte qu'en prenant $\pi = 1$, il en résulteroit $\frac{bx}{c} = \sqrt{2y - yy}$ pour l'équation de la Spirale circulaire particulière de l'art. 44. comme dans cet art.

2°. De même si l'on prend ici l'équation $\frac{dz}{b} = -\frac{dy}{y}$ de l'art. 49. pour génératrice de la Spirale à trouver par le moyen de l'équation $zc^\pi = bx^\pi$, en s'en servant encore comme l'on a fait de $zc = bx$ dans cet art. 49. Cette équation générale $zc^\pi = bx^\pi$ donnant $dz = \frac{\pi bx^{\pi-1} dx}{c^\pi}$,

l'on auroit ici $\frac{\pi b x^{\pi-1} dx}{hc^{\pi}} = -\frac{dy}{y}$ pour l'équation de la Spirale cherchée, au lieu de l'équation $\frac{bdx}{hc} = -\frac{dy}{y}$ à la Spirale logarithmique ordinaire, que $zc = bx$ donnoit là, & qu'on voit n'être encore qu'un cas de celle qu'on vient de trouver; puisqu'en faisant $\pi = 1$, son équation $\frac{\pi b x^{\pi-1} dx}{hc^{\pi}} = -\frac{dy}{y}$ se changera en $\frac{bdx}{hc} = -\frac{dy}{y}$ qui est celle de cette Spirale logarithmique ordinaire.

Et ainsi de plusieurs autres Spirales où l'équation générale $zc^{\pi} = bx^{\pi}$ doit porter une universalité beaucoup plus grande que ne feroit $zc = bx$.

*Continuation de
la comparaison
précédente.*

LXXII. Il est pourtant à remarquer que cette équation générale $zc^{\pi} = bx^{\pi}$ substituée à la place de $zc = bx$, ne produit pas toujours ce surcroît d'universalité, ainsi qu'on en a averti à la fin de l'art. 3. & qu'on le vient encore d'insinuer au commencement & à la fin du précédent art. 71. par les mots de *quelquefois* & de *plusieurs*.

En effet, 1^o. si l'on prend encore la logarithmique génératrice du second exemple de cet article 71. n. 2. pour génératrice de celui-ci, en y prenant seulement son asymptote pour son axe, ainsi que dans l'art. 53. au lieu que ci-dessus (art. 71. n. 2.) c'étoit une des ordonnées à son asymptote qu'on prenoit pour son axe, comme dans l'art. 49. en ce cas l'équation de cette logarithmique génératrice étant $\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{h}$ comme dans l'article 53. & l'équation générale $zc^{\pi} = bx^{\pi}$ donnant $z = \frac{bx^{\pi}}{c^{\pi}}$, & $xz = \frac{\pi b x^{\pi-1} dx}{c^{\pi}}$: la substitution de ces valeurs de z & de dz dans l'équation génératrice $\frac{dz}{z} = -\frac{dy}{h}$, donnera $-\frac{dy}{h} = \frac{\pi b x^{\pi-1} dx}{bx^{\pi}} = \frac{\pi dx}{x}$, ou $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{\pi h}$ pour celle de la Spirale cherchée, laquelle on voit être encore une Spirale logarithmique de même nature que celle que la même génératrice a engendrée dans l'article 53. par le moyen de $zc = bx$. Ainsi

$$zc^{\pi} = bx^{\pi}$$

$z c^{\pi} = b z^{\pi}$ ne produit rien ici de plus général que $z c = b x$, l'inégalité des constantes h & πh n'y faisant rien.

Pareillement 2°. si l'on prend l'équation parabolique

$z = \frac{y^m}{a^{m-1}}$ de l'art. 13. pour la génératrice de la Spirale à

trouver par le moyen de l'équation générale $z c^{\pi} = b x^{\pi}$;

cette équation donnant $z = \frac{b x^{\pi}}{c^{\pi}}$, l'on aura $\frac{y^m}{a^{m-1}} = \frac{b x^{\pi}}{c^{\pi}}$,

ou $c^{\pi} y^m = b x^{\pi} a^{m-1}$ pour l'équation de cette Spirale. De forte qu'en prenant $b = a$, comme dans l'art. 13. l'on aura $c^{\pi} y^m = x^{\pi} a^m$ pour l'équation de cette Spirale, laquelle on voit être celle de M. de Fermat, trouvée dans cet art. 13. par le moyen de $z c = b x$. Ainsi l'universalité de l'équation $z c^{\pi} = b x^{\pi}$ de l'art. 71. ne fait encore rien ici de plus que la simple $z c = b x$ de l'art. 3.

Je n'entrerai point dans un plus grand détail, ne m'étant déjà que trop étendu sur cette matiere. Voici cependant encore une autre maniere de former des Spirales à l'infini, qui me vient en pensée, laquelle est encore plus générale que celle de l'art. 1. Je n'en dirai que deux mots, me réservant à la traiter plus à fond dans une autre occasion.

LXXIII. Toutes choses demeurant les mêmes que dans l'art. 1. imaginons de plus une Courbe quelconque LLS mobile autour du centre C , avec la Regle CP qui en soit le diamètre ou l'axe, & dont les ordonnées soient EL qui fassent tel angle donné qu'on voudra avec cette Regle. Présentement après avoir trouvé chaque point E comme dans l'art. 1. au lieu d'y faire passer la Spirale cherchée, comme dans cet article, imaginons qu'elle passe par les extrémités L des ordonnées correspondantes EL de la Courbe LLS , que nous appellerons *seconde génératrice*, pour la distinguer de celle (HHV) dont nous nous sommes servis jusqu'ici, laquelle pour cette effet s'appellera *premiere génératrice*.

Troisième formation générale des Spirales à l'infini.
FIG. XV.

Il est visible que la Spirale $OLZLK$, qui en résultera, fera aussi très-universelle, & ce d'autant plus que sa seconde

génératrice générale LLS se peut diversifier en autant de particulières que sa première HHV , & avoir sur la Règle CP des positions aussi variables par rapport au centre C , que celles de HHV le sont sur CA par rapport à ce même point C .

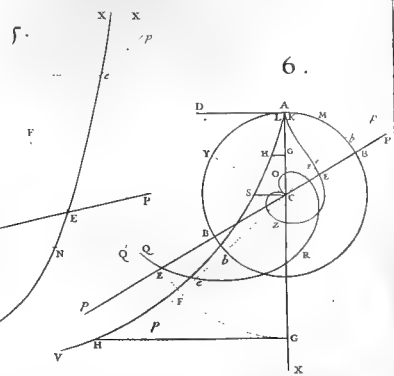
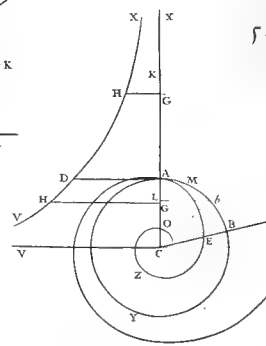
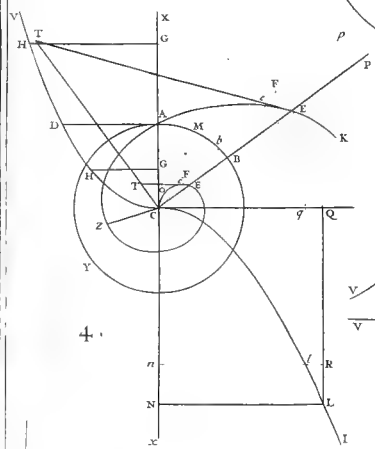
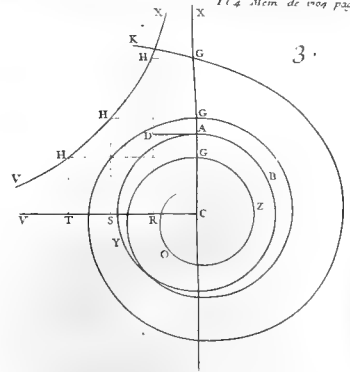
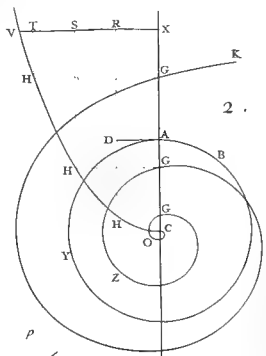
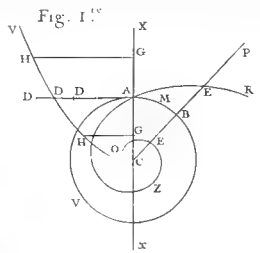
*Maniere de
trouver les
équations des
Spirales formées de cette
troisième façon.*

LXXIV. Les noms demeurant aussi les mêmes que dans l'art. 2. soient de plus les ordonnées $EL = v$. Il est encore manifeste que l'équation générale $zc = bx$ de l'art. 3. où celle $zc^n = bx^n$ de l'art. 71. doit entrer dans celle de la Spirale $OLZLK$ dont il s'agit ici; puisque cette équation sert à trouver les points E .

1° Il en faut chasser z par la substitution de sa valeur en y & en constantes, laquelle valeur de z se tirera de l'équation donnée de la première Courbe génératrice HHV , comme l'on a fait-ci-dessus pour trouver les équations particulières des Spirales qu'on y a examinées. Ce qui donnera l'équation de celles qui passeroient par E à la manière de l'art. 1. laquelle équation ne sera faite que de x , de y , & de constantes.

2°. Après cela l'équation donnée de la seconde génératrice LLS , donnant aussi y en v & en constantes, la substitution de cette valeur de y dans la dernière équation trouvée (n. 1.) pour celle des Spirales qui passeroient par E , se changera enfin en celle des Spirales qui doivent passer par L . *Ce qu'il falloit trouver.*

Exemple. Soit encore $z = \frac{y^m}{a^{m-1}}$ le lieu parabolique général de la première Courbe génératrice HHV , comme dans l'art. 13. & le circulaire $y = r \pm \sqrt{rr - vv}$ pour celui de la seconde LLS . La substitution de cette valeur de z dans l'équation $zc = bx$ de l'art. 3. la changera en $\frac{cy^m}{a^{m-1}} = bx$ qui est celle de la Spirale de l'art. 13. de laquelle résulte $y = \frac{bx a^{m-1}}{c^{\frac{1}{m}}}$, que la substitution de la valeur de y , donnée par l'équation de la seconde Courbe génératrice LLS ,



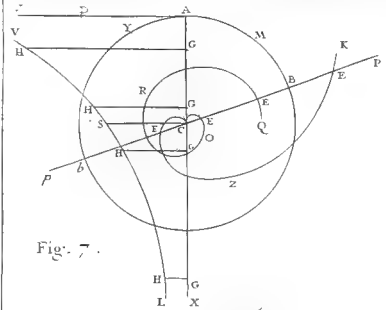
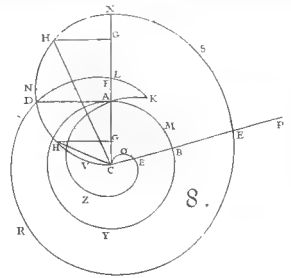
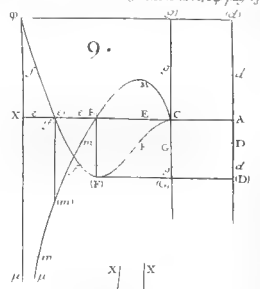


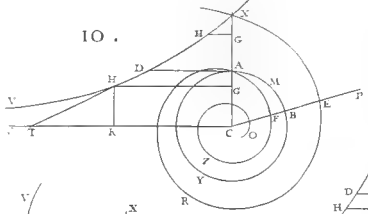
Fig. 7.



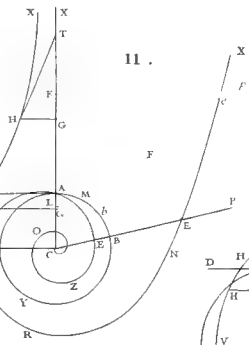
8.



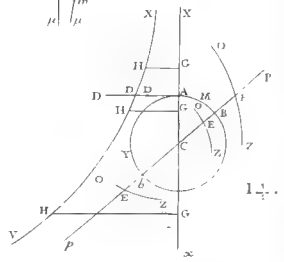
9.



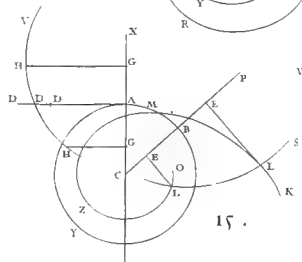
10.



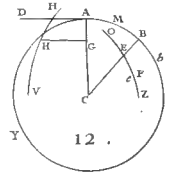
11.



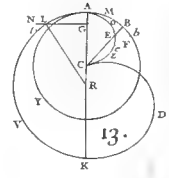
12.



13.



14.



15.

changera en $r \pm \sqrt{rr - vv} = \frac{b \times a^m - 1^m}{c^m}$, ou $rc^m + c^m \sqrt{rr - vv}$,

qui est l'équation cherchée de la Spirale OLZLK. Et ainsi des autres.

J'aurois encore bien des choses à dire sur cette dernière génération de Spirales : ce sera pour un autre Mémoire, celui-ci n'étant déjà que trop long.

OBSERVATION

D'UNE NOUVELLE TACHE

DANS LE SOLEIL.

PAR M. MARALDI.

Outre les trois différentes Taches qui ont paru au mois de Janvier & de Fevrier de cette année 1704, il en a paru une autre au mois de Mars. Nous commençames de la voir le 19. de Mars à 8. heures du matin proche du bord Oriental du Soleil. Nous déterminâmes aussi-tôt sa situation dans le Soleil par les fils qui se croisent au foyer de la Lunette, & qui font entr'eux des angles de 45 degrés. La différence d'ascension droite entre le bord Oriental & la Tache étoit de 15 secondes de temps, & la différence de déclinaison entre la Tache & le bord Septentrional étoit de 50 des mêmes parties.

1704.
5. Avril.

La Tache vûe avec une Lunette de 18 pieds étoit composée de deux Taches obscures un peu distantes l'une de l'autre, & enveloppées dans la même nébulosité. Le 20. à 10 heures, le Soleil s'étant découvert, la différence d'ascension droite entre le bord Oriental & la Tache fut de 27 secondes, & la différence de déclinaison fut de $53'' \frac{1}{2}$. Le 21. à 8 heures & demi la différence d'ascension droite entre le bord Oriental & la Tache fut de $38''$, & la différence de déclinaison entre le bord Septentrional & la Ta-

R ij

132 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
che de 7". La figure de la Tache étoit à peu près comme
les jours précédens , excepté qu'on voyoit une petite Tache
adhérente à la nébulosité qui n'avoit point paru le jour précé-
dent. Le 22. & le 23. Mars le Ciel fut couvert. Le 24. la
Tache étoit diminuée. A 2 heures $\frac{1}{4}$ la différence d'ascen-
sion droite entre le bord Oriental & la Tache fut 1' 20" , &
la différence de déclinaison entre le bord Méridional & la
Tache de 52" de temps. Par cette observation on trouve
que la Tache passa par le milieu du Soleil le matin du 23.
fort près de son centre apparent. Les jours suivans on ne put
plus voir la Tache , à cause qu'elle étoit diminuée , & que
le Ciel ne fut pas bien clair. Cette Tache étoit dans l'hémis-
phere Méridional du Soleil où se trouvent presque toutes
les Taches qui ont paru depuis trente ans : elle avoit aussi
une latitude Méridionale de 10 degrés , comme la plupart
des Taches qui paroissent depuis plusieurs années.

COMPARAISON

Des Observations de M. Manfredi avec les nôtres.

PAR M. MARALDI.

1704.
5. Avril.

Monsieur Manfredi nous a envoyé les observations des
Taches du Soleil qu'il a faites à Bologne les mois pré-
cédens , & ayant comparé ces observations avec celles que
nous avons faites à l'Observatoire , on trouve qu'une Tache
que M. Manfredi observa le 21. Decembre 1703, & qui ne
put être observée à Paris à cause que le Ciel fut couvert de-
puis le 17. jusqu'au 25. Decembre, est la même Tache que
nous observâmes proche du bord Oriental du Soleil le 7.
de Janvier : car si l'on compare la situation qu'avoit la
moyenne des trois Taches qu'il observa proche du bord
Occidental du Soleil , en supposant la révolution des Ta-
ches de 27 jours & demi , on trouve que cette Tache
après avoir parcouru l'hémisphère supérieur du Soleil ,

devoit se trouver à l'endroit où nous observâmes celle qui parut près du bord Oriental du Soleil le 7. Janvier. M. Manfredi trouva à la Tache du 21. Decembre une latitude Méridionale de 10 à 11 degrés, qui est celle que nous trouvâmes à la Tache du 7. Janvier. C'est pourquoi ces deux déterminations étant les mêmes, il n'y a pas lieu de douter qu'elle ne soit la même Tache qui est retournée. C'est aussi ce que M. Manfredi supposa lorsqu'il la vit le 12. de Janvier fort près du milieu du Soleil, ne l'ayant pu voir auparavant à cause des nuages. Ayant continué les observations de cette Tache autant que le temps le permit, il cessa de la voir fort proche du bord Occidental du Soleil le 18. de Janvier, qui fut aussi le dernier jour que nous l'observâmes, étant passée le jour suivant dans l'hémisphère supérieur du Soleil. Cette Tache retourna quatorze jours après au bord Oriental du Soleil; mais elle étoit si fort diminuée qu'elle ne put être observée à Paris & à Bologne avec des Lunettes ordinaires, que lorsqu'elle étoit éloignée du bord du Soleil, & approchoit du milieu de son disque. Elle fut encore observée à Paris & à Bologne le 9. de Février, ayant passé le milieu du Soleil où elle disparut entièrement, ayant fait presque deux révolutions entières autour du Soleil depuis la première observation que M. Manfredi en fit le 21. Decembre 1703.

La Tache que M. Manfredi observa le 25. Janvier près du bord Oriental du Soleil, & que nous ne pûmes voir que le 26. à cause du temps couvert, est celle que nous avions observée le 7. de Janvier proche du bord Occidental. Les observations qu'il a faites jusqu'à sa sortie du Soleil s'accordent avec les nôtres: car par l'observation qu'il fit de la Tache le 31. Janvier à 10 heures du matin, on trouve qu'elle étoit arrivée 9 heures auparavant au milieu du Soleil, comme nous avons trouvé par l'observation du 30. Il donne aussi à la Tache une latitude Méridionale de 11 à 12 degrés, comme nous la déterminâmes par nos observations.

Nous observâmes aussi le 10 Février à midi les nouvelles Taches que nous n'avions point vûes le 9, ni le matin

134 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 du 10, que nous observâmes le Soleil au travers des nua-
 ges rares. Le premier jour que ces Taches parurent il n'y
 en avoit que deux : les jours suivans on en remarqua trois.
 Nous avons trouvé ces dernieres dans un parallele qui dé-
 clina de l'équateur du Soleil de 13 degrés vers le midi.

Ces Taches ont été aussi observées à Genes par M. le
 Marquis Salvago ; à Marseille, par le P. de la Val Jesuite,
 & Professeur d'Hydrographie ; à Montpellier, par M. Plan-
 tade Conseiller à la Cour des Aydes, & par M. de Cla-
 pier ; & à Lyon, par les PP. Fulchiron & Thyoli qui nous
 ont envoyé leurs observations.

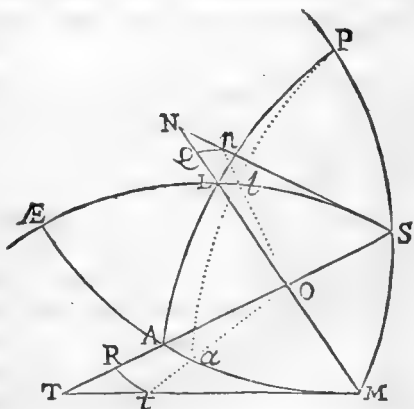
D E T E R M I N A T I O N

*Du temps auquel le mouvement du Soleil en longitude est
 égal en son mouvement en ascension droite.*

P A R M. P A R E N T.

1704.
 9. Avril.

SOit P le pole de la sphere, PSM un quart du colure
 des solstices, $\mathcal{A}ELS$ un quart de l'écliptique, $\mathcal{A}EM$
 un quart de l'équateur, \mathcal{A} l'équinoxe, S le sol-
 stice. L le lieu du So-
 leil dans l'écliptique au
 temps de son mouve-
 ment médiocre en as-
 cension droite qui est
 le temps désiré. PLA
 le quart d'un cercle de
 déclinaison mené du
 pole P par le Soleil L
 jusques à l'équateur en
 \mathcal{A} ; $Pl\alpha$ le quart d'un
 pareil cercle rencontrant l'écliptique au point l indéfini-
 ment proche de L , & l'équateur en α ; soient conçues aussi



les tangentes SN , MT à l'écliptique & à l'équateur au solstice S , & au point M de 90^d de l'équateur, lesquelles rencontrent les rayons Ol , OL , Oa , OA , menés du centre O de la sphere & prolongés indéfiniment aux points n , N , r , T .

Soit nommé a le sinus de l'arc PS complément de l'obliquité SM de l'écliptique; r le rayon OS , OL , OA , OM de la sphere; x la tangente SN ; & Nn , dx .

Menant donc encore nQ perpendiculaire à NO , on aura les triangles rectangles semblables nNQ , ONS ; ce qui donnera les analogies ($Nn | nQ || NO | OS || nO | IO || nQ | Ll$). Donc aussi ($Nn | Ll || NO^2 = OS^2 + NS^2 | OS^2$) ou ($dx | Ll || r^2 + x^2 | r^2$). D'où l'on tire ($Ll = \frac{dxr^2}{r^2+x^2}$).

Menant de même la perpendiculaire tR sur OT en R , on aura l'analogie ($Tt | Aa || TO^2 = OM^2 + TM^2 | OM^2$). Or on fait par les analogies des triangles sphériques rectangles que (le sinus de l'arc $PS = a$, est au sinus total $= r$, comme la tangente de l'arc LS , savoir, $NS = x$, est à la tangente de l'arc AM , savoir TM). Ce qui donne

($TM = \frac{rx}{a}$), & ($Tt = \frac{rdx}{a}$), d'où l'on tire l'analogie

($Tt = \frac{rdx}{a} | Aa = Ll$ (par la supposition) $= \frac{dxr^2}{r^2+x^2} ||$

$OM^2 + TM^2 = \frac{a^2r^2 + x^2r^2}{a^2} | r^2 = OM^2$), qui fournit l'éga-

lité suivante ($ar^2 + ax^2 = a^2r + rx^2$) qui se change en cette autre ($rx^2 - ax^2 = ar^2 - a^2r$), & divisant le tout par $(r-a)$ il reste enfin ($ar = x^2$).

D'où l'on conclut que la tangente x ou SN de la distance du solstice S au point L du mouvement médiocre en ascension droite, est moyenne proportionnelle entre le rayon de la sphere, & le sinus du complément de l'obliquité de l'écliptique.

Ajoutant donc le logarithme du sinus de $66^d 31'$ complément de la plus grande déclinaison du Soleil, savoir,

136 MEMOIRES DE L'ACADE' MIE ROYALE
99624627 au logarithme du sinus total qui est 100000000;
& prenant la moitié de la somme 199624527, savoir,
99812263½, on aura le logarithme de la tangente d'un arc
qui est le complément de 46^d 14'; ce qui fait voir que
quand le Soleil a 46^d 14' de longitude, son mouvement
sur l'écliptique est alors égal à son mouvement en ascen-
sion droite.

Ceci peut donc servir à corriger quelques Tables Astro-
nomiques qui pechent contre ce calcul, mettant le Soleil
vers le 44 ou 45 degré de longitude au temps de son mou-
vement médiocre. Voyez les Tables du Traité de Navi-
gation de M. Bouguer.

D E M O N S T R A T I O N

*Du Principe de M. Hughsens, touchant le centre de
Balancement, & de l'identité de ce centre
avec celui de percussion.*

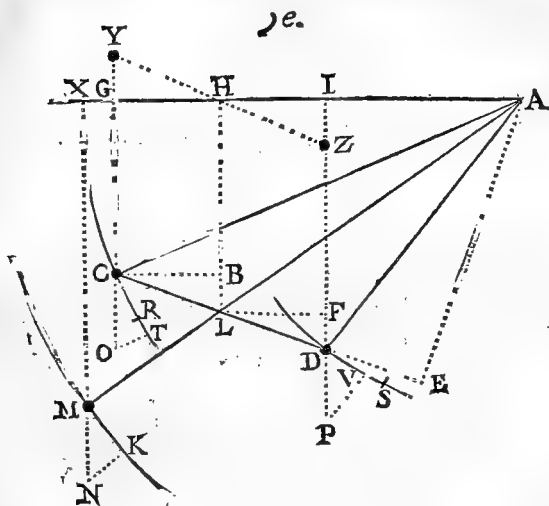
PAR M. BERNOULLI, Professeur à Bâle.

Lettre du 3. Avril 1704.

1704.
19. Avril.
* Voyez les
Mémoires de
1703. p. 78.

A Près la démonstration de la doctrine du centre de
Balancement que je donnai l'année passée à l'Aca-
démie, * par un principe incontestable tiré de la nature du
Levier, il me sera présentement facile, en retournant sur
mes pas, de démontrer la vérité du Principe de M. Hu-
ghens, qui peut-être sans cette démonstration seroit plus
sujet à être contesté: savoir, que le centre commun de gra-
vité des parties d'un Pendule, qui descendent conjointement &
remontent ensuite séparément chacune avec sa vitesse acquise;
doit remonter précisément à la même hauteur dont il est des-
cendu.

Pour



Pour cet effet soit la Figure que voici répétée de mon Mémoire du 13. Mars de l'année passée, présenté à l'Académie le 25. Avril de la même année. Soit, dis-je, encore AX l'axe horizontal du balancement; AXM un plan vertical droit à l'axe; AM le diamètre de la figure qui balance, auquel on ait appliqué dans le même plan l'ordonnée CLD à angle donné ALD , en sorte que CL soit égale à LD , & dont C, D , soient deux petites parcelles de la figure, qui décrivent dans leur balancement les arcs CT, DS ; soit aussi AM la longueur du pendule simple qui fait ses vibrations dans le même-tems que la figure. Soient de plus les verticales MX, CY, LH, DI , lesquelles rencontrent l'horizontale AX en X, G, H, I ; & sur lesquelles prolongées de haut en bas, soient prises des parties infiniment petites & égales MN, CO, DP , qui expriment chacune ce que la pesanteur ajoute d'impulsion à chaque moment à chacun des poids M, C, D . Ensuite après avoir mené les droites NK, OT, PV , perpendiculaires aux arcs MK, CT, DV , soient CB, LF perpendiculaires sur LH, DI , & le reste comme on le voit dans la Figure.

Quant aux noms, soient encore comme dans le Mémoire du 25. Avril 1703. pag. 83. $MN=CO=DP=a$ sinus total, le sinus de l'angle $LAE=g$, $AC=l$, $AD=m$, $AM=t$, $AL=x$, $LC=LD=y$, $C=D=dp$. D'où l'on a trouvé dans ce Mémoire $LE=\frac{gx}{a}$, $ll(\overline{AC})=xx+yy+\frac{2gxy}{a}$, $mm(\overline{AD})=xx+yy-\frac{2gxy}{a}$, & enfin $t=\frac{\sqrt{xx+yy+dp}}$. Outre ces noms soient aussi $NK=c$, & le sinus de l'angle $LCB=e$.

Cela fait, supposons que le diametre de la figure qui balance (ainsi que le pendule simple isochrone) soit descendu de AX en AM , & que les poids M , C , D , &c. s'étant ensuite détachés d'ensemble, remontent séparément chacun avec sa vitesse acquise: il est clair que le poids M du pendule simple doit remonter à la même hauteur MX d'où il est descendu; mais que les poids C & D remonteront à des hauteurs différentes, comme CY , DZ , lesquelles se trouveront de la maniere que voici.

$$MN(a). NK(c) :: AL(x). LH=\frac{cx}{a} :: AM(t). MX=\frac{ct}{a}.$$

$$\overline{AM}(tt). \overline{AC}(ll) :: MX\left(\frac{ct}{a}\right). CY=\frac{cll}{at}.$$

$$\overline{AM}(tt). \overline{AD}(mm) :: MX\left(\frac{ct}{a}\right). DZ=\frac{ctm}{at}.$$

$$\text{Sin. tot.}(a). \text{fin. ang.} LCB(e) :: LC \text{ ou } LD(y). LB \text{ ou } DF=\frac{ey}{a}.$$

$$\text{Ce qui donne} \left\{ \begin{array}{l} CG=LH-LB=\frac{cx-ey}{a}. \\ DI=LH+DF=\frac{cx+ey}{a}. \\ GY=CY-CG=\frac{cll}{at}-\frac{cx+ey}{a}. \\ IZ=DI-DZ=\frac{cx+cx}{a}-\frac{ctm}{at}. \end{array} \right.$$

Donc le produit du petit poids C ou Y par GY sera $=\frac{clldp}{at}-\frac{cxdp+eydp}{a}$, & celui du petit poids D ou Z par $IZ=\frac{cxdp+eydp}{a}-\frac{ctmdp}{at}$. Et par conséquent la somme de

tous les produits de Y par GY (moment de tous les poids Y par rapport à la ligne AX) $= \int \frac{ell dp}{at} - \int \frac{cx dp}{a} + \int \frac{ey dp}{a}$
 $= \frac{c}{at} \int ell dp - \frac{c}{a} \int x dp + \frac{c}{a} \int y dp$; & la somme de
 tous les produits de Z par IZ (moment de tous les
 poids Z par rapport à la même ligne AX) $= \int \frac{cxdp}{a}$
 $+ \int \frac{cydp}{a} - \int \frac{cmm dp}{at} = \frac{c}{a} \int x dp + \frac{c}{a} \int y dp - \frac{c}{at} \int mmdp$.

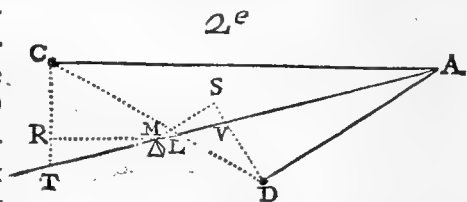
Or ces deux sommes sont égales entr'elles; ce qui
 se prouve par mon Mémoire du 25. Avril de l'année
 passée, en ce que j'y démontrai $t = \frac{\int xx + yy \times dp}{\int x dp}$: car si
 l'on multiplie les deux parties de cette équation par
 $\frac{2c}{at} \int x dp$, l'on aura $\frac{2c}{a} \times \int x dp = \frac{2c}{at} \times \int \frac{xx + yy \times dp}{\int x dp}$ (à
 cause de $ll + mm = 2xx + 2yy$) $= \frac{c}{at} \times \int ll + mm \times dp$
 $= \frac{c}{at} \int ell dp + \frac{c}{at} \times \int mmdp$; & en ôtant de part & d'au-
 tre $\frac{c}{a} \times \int x dp - \frac{c}{a} \times \int y dp + \frac{c}{at} \times \int mmdp$, on trouvera
 (comme j'ai dit) $\frac{c}{a} \times \int x dp + \frac{c}{a} \int y dp - \frac{c}{at} \times \int mmdp =$
 $\frac{c}{at} \times \int ell dp - \frac{c}{a} \times \int x dp + \frac{c}{a} \times \int y dp$: c'est-à-dire, que
 le moment de tous les Z est égal au moment de tous les Y
 par rapport à la ligne AX . Donc le centre commun de
 gravité de tous ces poids se trouve dans la même ligne AX ;
 & par conséquent il est remonté aussi haut qu'il étoit des-
 cendu. *Ce qu'il falloit premierement démontrer.*

La même chose se peut encore prouver d'une autre ma-
 nière plus succincte, en faisant voir que la somme des pro-
 duits de Y par GY (en comprenant aussi sous Y les Z de
 l'autre côté) est égale à zero; ce qui est facile: on n'a qu'à
 substituer simplement $xx + yy$ au lieu de ll , & effacer
 entièrement $\frac{c}{a} \times \int y dp$; parce que toutes les $y dp$ positives
 d'une part sont détruites par autant de $y dp$ de l'autre: de

cette maniere l'on aura $\frac{c}{a} \times \int \sqrt{xx+yy} \times dp - \frac{c}{a} \times \int x dp$ pour la somme de ces produits, c'est-à-dire, (en mettant $\int \sqrt{xx+yy} \times dp$ au lieu de t) $\frac{c}{a} \times \int x dp - \frac{c}{a} \times \int x dp = 0$. Car delà il suit encore que le centre commun de gravité de toutes les parties du pendule se trouve dans la ligne AX .

Identité des Centres d'oscillation & de percussion.

Pour démontrer l'identité des Centres d'oscillation & de percussion, soient conçues trois verges AC, AD, AT , inflexibles, sans péfanteur, & liées ensemble en un angle invariable CAD dans la seconde Figure; que les deux premières de ces



verges soient chargées à leurs extrémités de poids égaux C, D , & que la troisième passe par L centre commun de gravité de ces poids. Il s'agit de trouver le centre de percussion M , qui doit être tel qu'ayant mù l'angle CAD autour du point A , les chocs ou les *momens* de percussion à l'égard du point M comme de l'appui, soient égaux de part & d'autre. Pour cela soient menées CT, DS , perpendiculaires à AC, AD ; & MR, MS , perpendiculaires à CT, DS . Les droites CT, DS , seront les lignes de direction des poids, lorsque dans leur mouvement circulaire ils arriveront en C & en D : ainsi le produit du poids C par la vitesse AC & par la distance MR , & celui du poids D par la vitesse AD & par la distance MS , marqueront les chocs de ces poids, ou leurs *momens* de percussion par rapport à l'appui M . Ayant donc marqué les quantités homologues à celles du Mémoire du 25. Avril de l'année passée par les mêmes lettres répétées au commencement de cet Ecrit-ci, nous trouverons ce qui suit.

$AC(l)$. $LC(y) :: \text{fin. ang. } \overline{ALC} (\sqrt{aa-gg})$. $\text{fin. ang. } \overline{LAC} = \sqrt{\frac{aayy-ggyy}{ll}}$. Et $AD(m)$. $LD(y) :: \text{fin. ang. } \overline{ALD} (\sqrt{aa-gg})$. $\text{fin. ang. } \overline{LAD} = \sqrt{\frac{aayy-ggyy}{mm}}$. Donc
 $\text{fin. ang. } \overline{ATC} = \sqrt{aa \frac{-aayy+ggyy}{ll}} = \sqrt{\frac{aall-aayy+ggyy}{l}}$,
 & $\text{fin. ang. } \overline{AVD} = \sqrt{aa \frac{-aayy+ggyy}{mm}} = \sqrt{\frac{aamm-aayy+ggyy}{m}}$;
 c'est-à-dire, (en mettant au milieu de ll & mm leurs valeurs)
 $\text{fin. ang. } \overline{ATC} = \frac{\sqrt{aaxx+2agxy+ggyy}}{l} = \frac{ax+gy}{l}$, & $\text{fin. ang. } \overline{AVD} = \frac{\sqrt{aaxx-2agxy+ggyy}}{m} = \frac{ax-gy}{m}$. Après cela

on trouve $\text{fin. ang. } \overline{ATC} \left(\frac{ax+gy}{l}\right)$ $\text{fin. tot. } (a) :: AC(l)$. $AT = \frac{all}{ax+gy}$. Et $\text{fin. ang. } \overline{AVD} \left(\frac{ax-gy}{m}\right)$ $\text{fin. tot. } (a) :: AD(m)$. $AV = \frac{amm}{ax-gy}$. Donc $TM = AT - AM = \frac{all}{ax+gy} - t$, & $MV = AM - AV = t - \frac{amm}{ax-gy}$.

De plus $\text{fin. tot. } (a)$. $\text{fin. ang. } \overline{ATC} \left(\frac{ax+gy}{l}\right) :: TM \left(\frac{all}{ax+gy} - t\right)$. $MR = \frac{all-axt-gyt}{al}$. Et $\text{fin. tot. } (a)$ $\text{fin. ang. } \overline{MVS}$ ou $\overline{AVD} \left(\frac{ax-gy}{m}\right) :: MV \left(t - \frac{amm}{ax-gy}\right)$.
 $MS = \frac{axt-gyt-amm}{am}$. Donc $C \times AC \times MR = dp \times l \times \frac{all-axt-gyt}{al} = \frac{all-axt-gyt}{a} \times dp$ (en mettant pour ll sa valeur) $= \frac{aax+ayy+2gxy-axt-gyt}{a} \times dp$, & $D \times AD \times MS = dp \times m \times \frac{axt-gyt-amm}{am} = \frac{axt-gyt-amm}{a} \times dp$ (en mettant pour mm sa valeur) $= \frac{axt-gyt-aax-ayy+2gxy}{a} \times dp$.

Donc aussi puisque la somme de tous les produits $C \times AC \times MR$ doit être égale à la somme de tous les produits $D \times AD \times$

MS, l'on aura $\int xxdp + \int yydp + \frac{z}{a} \times \int gxydp - t \times \int xdp$
 $- \frac{t}{a} \times \int gydp = t \times \int xdp - \frac{t}{a} \times \int gydp - \int xxxdp - \int yydp$
 $+ \frac{z}{a} \times \int gxydp$; ce qui nous fournit $t = \frac{\int xxxdp + \int yydp}{\int xdp}$

$\int \frac{xx+yy \times dp}{\int xdp}$. On trouvera encore la même chose en ne considérant qu'une seule des deux sommes précédentes, en effaçant tous les termes où y n'a qu'une dimension, & égalant le reste à zero: on trouvera, dis-je, encore de cette maniere $t = \frac{\int xx+yy \times dp}{\int xdp}$, qui est la même quantité que nous avons trouvée pour le centre d'oscillation dans le Mémoire du 25. Avril de l'année passée. Donc le centre d'oscillation & de percussion ne sont toujours qu'un seul & même point. *Ce qui est la seconde chose qu'il falloit ici démontrer.*

R E F L E X I O N S

Sur des Memoires touchant la Correction Gregorienne, communiquées par M. Bianchini à M. Cassini.

1704.
9. May.

Monsieur Bianchini, Camerier d'honneur du Pape, a trouvé dans la Bibliotheque Vaticane des Mémoires de ce qui s'est passé dans les Congrégations tenues sur le Calendrier sous le Pape Gregoire XIII.

Il témoigne que l'abrégé du Calendrier de Lylius, envoyé par le Pape l'an 1577. aux Princes & aux Académies principales, fut recu avec de grandes louanges, & qu'il jugea de l'avis presque de tous qu'il devoit être préféré aux autres.

Cependant on ne laissa pas de tenir encore des Congrégations sur le Calendrier l'an 1580. Le Cardinal Sirlet, le Patriarche d'Antioche, l'Evêque de Mont-Royal, M. Olivieri Auditeur de Rote, le Pere Clavius, Pierre Ciacconi, Antoine Lylius frere de Louis Auteur du Calendrier, & le Pere Ignace Dantes y arrêterent des hypotheses, parmi les-

quelles il y en a des nouvelles, qui n'ont pas été suivies ni dans le Calendrier de Lilius, ni dans celui de Clavius qui est en usage présentement, & d'autres qui sont dans l'usage commun.

Par la première hypothèse, suivant l'usage de l'Eglise, le jour commence à minuit, & dure 24 heures.

Par la seconde hypothèse, si la pleine Lune arrive aux six dernières heures du jour, elle s'entend être du jour suivant.

Dans la troisième, on attribue au Concile de Nicée le Decret de célébrer la Pâque le Dimanche qui suit immédiatement le quatorzième du premier mois, que l'on reconnoît être celui dont le quatorzième arrive dans l'Equinoxe du Printems, ou le suit de plus près; on suppose que le quatorzième précède immédiatement la Lune pleine, qu'on dit être le quinzième de la Lune.

Dans la quatrième, on reconnoît que cet Equinoxe, par les observations, arrive tantôt au 20, tantôt au 21 de Mars, & l'on veut que quand le quatorzième de la Lune arrive au 20 Mars, il appartienne au premier mois, quoique la Pâque ne doive jamais être célébrée avant le 22 de Mars.

Dans la cinquième, que la faute que l'on feroit en célébrant la Pâque au second mois, ne feroit pas si grande que si on la célébroit au douzième mois.

La sixième est, qu'à cause des hérétiques Quartadecimains, il est défendu absolument de célébrer la Pâque le quatorzième de la Lune.

La septième, que s'il y a de l'erreur dans un Cycle, elle est plus grande lorsque le lieu de la conjonction ou de l'opposition du Soleil & de la Lune anticipe, que quand il suit les nouvelles & les pleines Lunes.

La première de ces hypothèses est commune & naturelle: le midi divisant le jour composé de 24 heures par la moitié, sa première partie commence à minuit précédent, la seconde finit à minuit suivant.

La seconde hypothèse qui attribue au jour suivant la pleine Lune qui arrive aux six dernières heures du jour, ne paroît pas conforme à la première, qui ne finit le jour qu'à minuit suivant.

Pour ce qui est de la troisieme, nous avons reconnu que la célébration de la Pâque fut autorisée immédiatement par le Concile de Nicée; & nous avons attribué aux Alexandrins, députés par le Concile de Nicée, la regle de la célébrer le Dimanche qui suit immédiatement le quatorzieme de la Lune; d'autant que même après le Concile de Nicée les Latins soutenoient encore leur regle ancienne, de ne pas la célébrer que le Dimanche qui suit le quinzieme, comme ils avoient pratiqué auparavant, jusqu'à ce que saint Leon Pape eut acquiescé à la détermination des Alexandrins.

Touchant le rapport du quatorzieme de la Lune avec la Lune pleine, nous avons remarqué que le plein de la Lune arrivoit tantôt le 14, tantôt le 15 & tantôt le 16 du mois lunaire Ecclésiastique, & que cela est conforme à la pratique du Concile de Nicée.

La quatrieme hypothese: que le quatorzieme de la Lune qui arrive au 20 Mars, appartient au premier mois, à cause que l'Equinoxe Astronomique arrive tantôt au 21, tantôt au 20 de Mars, paroît être une hypothese toute nouvelle, diverse de la pratique du Concile de Nicée ou de ses députés, qui ne pouvoient pas ignorer que l'Equinoxe véritable arrivoit en ce temps-là, tantôt au 21, tantôt au 20 de Mars. Et néanmoins ils prenoient toujours pour Equinoxe Ecclésiastique le 21 de Mars, & pour premier mois lunaire celui dont le quatorzieme arrivoit au 21 ou après; ce qui s'est observé même jusqu'à la Correction Grégorienne, quand l'Equinoxe Astronomique arrivoit au dixieme ou à l'onzieme de Mars, d'où il fut remis au 21; cette hypothese n'est pas non plus conforme à la Correction Grégorienne ni à la pratique d'aujourd'hui, qui tolere la différence d'un ou de deux jours entre l'Equinoxe Ecclésiastique & l'Astronomique, & regle la Pâque à l'Equinoxe Ecclésiastique fixé au 21 de Mars, le tenant autant d'accord avec l'Astronomique qu'il se peut par l'obmission de 3 jours en 400 années.

Il y a apparence que le Pape ne trouva pas bon qu'on se

se conformât à cette hypothese nouvelle , pour ne pas préférer une subtilité plus grande à l'usage ancien des saints Peres. Ainsi Clavius qui avoit signé cette hypothese , n'y eut point d'égard dans l'exécution.

A l'égard de la cinquieme & de la septieme hypothese , elles sont conformes à celles des anciens Peres contre l'usage de ceux qui en ce temps-là prenoient pour premier mois un mois d'hyver , & pour premier jour du mois lunaire un jour qu'on voyoit encore la Lune dans son cours. Ils parloient contre ces anticipations extraordinaires qui étoient tolérées de plusieurs , ainsi qu'il paroît par les Prologues de Théophile & de S. Cyrille.

Pour la sixieme hypothese , qui est , qu'à cause des Quartadecimans , il est défendu de célébrer la Pâque au quatorzieme de la Lune ; il nous a paru que cette défense ne regarde point le concours accidentel de notre quinzieme , dans lequel nous pouvons célébrer la Pâque avec la quatorzieme des Quartadecimans déterminée par une méthode différente de la nôtre , laquelle est la seule que nous devons reconnoître pour quatorzieme légitime , quand elle est conforme à la détermination du Concile de Nicée , & à la Bulle de Gregoire XIII.

Il y a apparence que la raison que les Alexandrins avoient de ne célébrer la Pâque qu'après le quatorzieme de la Lune , & celle que les Latins avoient , de ne la célébrer qu'après le quinzieme , étoit parce que la Résurrection de Notre Seigneur que nous célébrons le jour de Pâque , n'arriva que le Dimanche après le quatorzieme de la Lune.

M. Bianchini propose une Période Paschale de 1184 années , qu'il appelle *Clementine* , dont il tire les Epactes par une méthode particuliere , & il les compare avec celles qui résultent de la Période de 11600 ans , que j'ai proposée dans l'Astronomie Indienne , & avec celles que le Pere Bonjour a publiées.

D E S É Q U A T I O N S
D E S M O I S L U N A I R E S
E T D E S A N N É E S S O L A I R E S .

P A R M. C A S S I N I .

1704.
31. May.

Les inventions excellentes du temps passé méritent d'être mises dans leur jour, afin qu'elles ne soient pas négligées faute d'être éclaircies.

Les Equations des mois Lunaires & des années Solaires proposées par les Grégoriens, sont aussi conformes aux Astronomiques qu'on le puisse souhaiter : leurs regles consistent en deux mots. Elles sont très-faciles à pratiquer, & aussi propres pour l'usage populaire, que pour l'Astronomique. Ceux qui auroient dû les employer n'en ont pas profité. Ils ont employé à leur place diverses Tables Astronomiques, qui ne sont pas si d'accord ensemble que ces Equations Grégoriennes le sont avec ces mêmes Tables : car elles sont comme moyennes entre celles qui sont employées indifféremment au même sujet. Clavius, Auteur de l'explication du Calendrier auroit été plus d'accord avec soi-même, sans s'éloigner de l'Astronomie, s'il se fût attaché uniquement à ces Equations qui lui étoient proposées.

Quoique les Astronomes calculent par leurs Tables les heures, minutes & secondes des nouvelles & des pleines Lunes, & même des Equinoxes, & ne les négligent pas même dans les observations, l'expérience continuelle fait connoître que diverses observations ne s'accordent pas toujours dans les minutes, dans les Ecliptes de Lune qu'on emploie à la construction des Tables Lunaires, ni à un quart-d'heure près dans les observations des Equinoxes que l'on emploie à la construction des Tables du Soleil. Dans la

derniere Eclipe de Lune totale, dont le temps étoit plus facile à déterminer à cause qu'elle entroit plus directement dans l'ombre que jamais, divers Observateurs très-habiles ne se font accordés ensemble dans la durée de l'Immerfion qu'à deux ou trois minutes près. On peut juger par là de la différence qu'il y aura eu dans les observations des Anciens, qui n'avoient pas de Lunettes d'approche pour distinguer assez bien les termes de l'ombre de la Lune, ni d'horloges assez propres pour mesurer le temps à minutes d'heure.

Les Tables Astronomiques ne font jamais plus exactes que les observations sur lesquelles elles font fondées.

Quand les Tables ne different pas plus entr'elles que les observations sur lesquelles elles font fondées, il n'y a point de raison de préférer les plus difficiles à construire & à pratiquer, aux plus faciles, ou à une méthode qui n'ait pas besoin de Tables ni de Livres pour être pratiquée, & qui donne comme le milieu entre les Tables les plus estimées.

Les Equations des mois Lunaires & des années Solaires ont été introduites dans la Correction Grégorienne pour les accorder de temps en temps avec les Astronomiques, quand elle s'en éloigne environ d'un jour. Dans l'usage Civil & Ecclésiastique, on tient un milieu entre la facilité populaire, & l'exactitude Astronomique, en composant les mois & les années de jours entiers, & tolérant des excès & des défauts dans les heures & dans les minutes, qui se recompensent partie les uns les autres, & se réduisent enfin à l'égalité avec les Astronomiques par l'addition ou soustraction de quelques jours d'extraordinaire.

Au lieu de faire les mois Lunaires de 29 jours 12 heures & 44 minutes comme font les Astronomes, on est obligé de les faire d'abord alternativement de 30 jours, qui excèdent les Astronomiques de 11 heures 16 minutes, & de 29 jours qui different des Astronomiques de 12 heures 44 minutes: mais deux de ce mois se recompensent enforte que leur somme ne differe de 2 mois Astronomiques que d'une heure & 28 minutes, dont on tient compte en certains temps,

148 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
interrompant cette alternative, & faisant deux mois de suite de 30 jours.

De même au lieu de faire les années Solaires de 365 jours & presque 6 heures comme les Astronomes les supposent, on en fait trois de suite de 365 jours, qui sont les communes, & la quatrième de 366 jours, qui est la Bissextile; de sorte que la somme de 4 années Civiles est à peu près égale à la somme de 4 années Astronomiques. Celle-ci est l'Equation Julienne des années Civiles, qui les rapproche plus des Astronomiques: mais parce que quatre années Civiles égalées par cette manière excèdent quatre années Astronomiques d'environ 43 minutes 12 secondes, qui en 400 ans font trois jours, on en retranche 3 jours en 400 années, qui est l'Equation Grégorienne du Soleil.

En comparant les mois Lunaires avec les années Solaires, on fait ces années de 12 mois Lunaires & onze jours. Ces onze jours sont l'Epacte Lunaire en une année Solaire supposée de 365 jours & un quart, quoique dans l'usage l'on ne fasse point réflexion à cette différence d'un quart de jour, attribuant la même Epacte indifféremment aux années communes & aux Bissextiles.

Une année portant l'autre, l'Epacte Civile & Ecclésiastique excède d'abord l'Astronomique de quelques heures: mais quand les Epactes de plusieurs années excèdent 30 jours, on prend ces 30 jours pour un mois Embolismique, au lieu de prendre 29 jours & demi. Cette soustraction excessive rapproche l'Epacte Civile de l'Astronomique, de sorte qu'en 4 années qui en comprennent une Bissextile & une Embolismique, l'Epacte Civile & Ecclésiastique s'égalent à l'Astronomique à une ou deux minutes d'heure près, ce qui arrive souvent deux fois de suite. Mais il y a aussi souvent deux Embolismiques en quatre années, qui troublent cette égalité par l'excès d'onze heures & 20 minutes.

Les Anciens ont supposé pendant quelque temps, qu'en quatre années Solaires il y ait 49 mois Solaires & demi, & par conséquent 99 mois en 8 années. Mais on y a de

puis trouvé une différence qui monte à un jour & demi, ce qui a obligé de s'éloigner de cette hypothese. On s'est plus approché de la précision Astronomique, lorsqu'on a supposé que dix-neuf années Solaires Juliennes de 365 jours & un quart contiennent 235 mois Lunaires, & que 76 années Juliennes comprennent 940 mois Lunaires. Le Concile de Nicée se servit de cette hypothese dans la détermination des quatorziemes Paschales.

Mais les observations de 24 siècles comparées ensemble, ont fait connoître que quatre Cycles de 19 années Solaires Juliennes, qui en font un de 76 années, excèdent 940 mois Lunaires de 5 heures 50 minutes, qui est l'Epacte & l'Equation Lunaire qui convient à ces 76 années.

Les Grégoriens ont déterminé cette Equation en raison de huit jours en vingt-cinq siècles. La partie proportionnelle de cette Equation dûe à un Cycle de 19 années, est d'une heure 27' 33" 7''' 12''''; ainsi 235 mois Lunaires s'accomplissent en 6939 jours 16 heures 32' 26" 52''' 48'''' . Le mois Lunaire qui en résulte est de 29 jours 12 heures 44' 3" 10''' 41'''' 34^{es}. On peut construire sur ce fondement une Table des mois Lunaires, & des Epactes Astronomiques qui serviront pour tous les siècles.

La regle des Equations Lunaires Grégorienne attribue donc des Epactes aux intervalles composés de Cycles de 19 années Juliennes, auxquels les Anciens n'en attribuoient point. Et c'est dans cette Epacte inconnue aux Anciens, distribuée proportionnellement aux années Solaires Juliennes en raison de 8 jours en 25 siècles, que consiste l'Equation Grégorienne de la Lune.

Quoique les termes de cette Analogie Grégorienne soient des siècles entiers & des jours entiers, elle se trouve très-conforme aux mois Lunaires moyens déterminés par des excellens Astronomes à jours, heures, minutes, secondes & tierces; & pour des intervalles encore plus grands que ceux qui sont échus depuis le commencement du monde jusqu'à présent, elle donne les Epactes qui s'accordent

150 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
à deux ou trois minutes près avec celles que l'on trouve par
les bonnes Tables Astronomiques.

En 7600 années Juliennes qui comprennent 400 Cycles de 19 années, on trouve par cette Analogie pratiquée par la regle Arithmétique des proportions, l'Equation Grégorienne de 24 jours 7 heures 40 minutes & 48 secondes, qui est l'Épacte Grégorienne de ces années Juliennes.

Par les Tables Astronomiques employées par Clavius, auxquelles sont assez conformes les Tables Rudolphines & celles de Riccioli, on trouve l'Épacte de 7600 années, au Chapitre 12 & 28 du Calendrier Grégorien, de 24 jours 7 heures 42' 27" 5", qui excède la Grégorienne d'une minute 19" 5". Au Chapitre 14 du même Livre, on la trouve de 24 jours 7 heures 37' 53" 20" moindre que la Grégorienne de 2' 54" 40". Celle qui se trouve par l'Analogie Grégorienne sans Tables, qui est de 24 jours 7 heures 40' 48", est donc moyenne entre celle qui se trouve par ces différentes Tables employées par le même Auteur, qui sont si conformes à celles des autres Astronomes dont nous avons parlé, qu'elles n'en different tout au plus que de trois minutes dans un si grand intervalle, dans lequel cette différence est tout-à-fait insensible.

Cet intervalle excède de trois fois les plus grands intervalles qui se trouvent entre les observations modernes de la Lune & les plus anciennes que nous ayons, qui ne sont pas si précises qu'il n'y ait souvent de l'ambiguité de quelque quart-d'heure, d'autant que les Anciens avoient de la peine à répondre des heures précises de leurs observations. Ainsi la différence de quelque demi-heure qu'il y auroit dans un triple intervalle entre les Épactes trouvées par ces Equations & celles qui se tirent de quelques Tables Astronomiques, passeroit pour insensible par rapport à la précision que l'on peut avoir jusqu'à présent, en comparant les observations les plus recentes avec les plus anciennes.

L'accord des Épactes trouvées par l'Analogie Grégorienne sans les secours des Tables Astronomiques pour un

si grand intervalle, est donc aussi précis que l'Astronomie d'aujourd'hui le puisse avoir avec certitude, par la comparaison des observations que nous avons jusqu'à présent.

La facilité de trouver ces Epactes par cette Analogie est grande : si l'on se contente de les avoir à heure pour de si grands intervalles, une opération par la règle ordinaire des proportions en très-petits nombres est suffisante.

Dans le cas proposé, on fera comme 25 siècles à huit jours. Ainsi 76 siècles à 24 jours & $\frac{8}{3}$ qui sont un peu moins de 8 heures, un vingt-cinquième de jour ne diffère d'une heure que de deux minutes 24". Les vingt-cinquièmes fractions ordinaires dans cette Analogie peuvent donc passer pour des heures dans les calculs, quand on ne cherche point les minutes, dont on n'a pas toujours de besoin. Si l'on ne veut pas négliger les minutes, on n'a qu'à en ôter autant de fois : 24" qu'il y a de vingt-cinquièmes, prenant le reste pour heures & minutes : huit fois 2' 24" font 19' 12", qui ôtées de 8 heures font 7 heures 40' 48"; ainsi l'Equation due à 76 siècles, qui est son Epacte Grégorienne, se trouve de 24 jours 7 heures 40' 48", & celle de 100 ans, est de 7 heures 40' 48". Car 7500 années qui est le triple de 2500 demandent 24 jours.

Parmi 4 Périodes de 19 années Civiles Juliennes, il y en a toujours une qui n'a que 4 années Bissextiles : mais les Périodes de 76 années qui en comprennent 4 de 19 en ont toujours 19 Bissextiles, & sont égales entr'elles. Tous les intervalles composés de Périodes de 76 années Civiles ont les Epactes égales à leurs Equations : car l'Epacte Lunaire d'une Période d'année Civile est l'excès de ces années sur les mois Lunaires entiers qu'elles comprennent, & cet excès dans le Cycle de 19 années & dans ceux qui en sont composés, est l'Equation Lunaire Grégorienne.

Par l'Analogie Grégorienne, on trouvera l'Equation d'une Période de 76 années de 5 heures 50' 12" 28''' 48''''', qui est aussi son Epacte. La Table des Epactes Astronomi-

152 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 ques de Clavius inférée au Chapitre 28 du Calendrier, qui parmi celles qu'il emploie est la plus conforme à l'Analogie Grégorienne, la donne de 5 heures 50' 13" 20". Elle n'excede pas ici la Grégorienne d'une seconde entiere, mais seulement de 51" 12", qui sont des fractions insensibles, & elles s'accordent aussi dans les secondes avec celle qui est inférée au Chapitre 13, que Clavius donne comme conforme aux Tables calculées par Molelius, par Magini & par Paul de Middelbourg, & à celle qu'il rapporte encore au Chapitre 25 du Calendrier. Mais dans la Table inférée au Chapitre 8 & au Chapitre 14, Clavius calcule cette Epacte de 5 heures 50 minutes 10" 44". Celle qui se trouve par l'Analogie Grégorienne excède cette dernière d'une minute 44" 48". Cette plus grande différence ne monte qu'à une minute & trois quarts en 4560 ans. On pourroit refaire ces Tables sur l'Analogie Grégorienne, s'il en valoit la peine. Mais pour l'usage Civil, & même pour l'Astronomique, il est indifférent de quelle de ces Tables l'on se serve : car la plus fine Astronomie d'aujourd'hui ne sauroit répondre de cette différence en tout l'intervalle qui est échu depuis le commencement du monde jusqu'à présent ; & pour des grands intervalles composés de Périodes de 76 années, on a plutôt fait de trouver les Epactes Astronomiques par le calcul tiré de l'Analogie Grégorienne, que d'avoir recours à un Livre pour les calculer par les Tables mêmes.

C'est une chose digne de remarque que les intervalles composés de 25 années, donnent les Equations Lunaires précises à secondes sans autres fractions, & que les intervalles composés de Périodes de 125 années, donnent les Equations précises à minutes. Que ceux qui sont composés de Périodes de 625 années, donnent les Equations précises à jours entiers. En 25 années, l'Equation Lunaire est d'une heure 55' 12"; en 125 années, elle est de 9 heures 36 minutes, & en 625 années, elle est de deux jours entiers; ce qui facilite le calcul & la construction des Tables

bles des Equations Lunaires Grégoriennes & Astronomiques.

Ayant assigné à 2500. années l'Equation de huit jours, & prenant la moitié de ces nombres, il est aisé de voir qu'elle avoit augmenté de 4. jours entiers en 1250. ans qui étoient échus depuis le Concile le Nicée jusqu'au Pontificat de Grégoire XIII. tant suivant la regle, que suivant les Tables de Clavius, qui dans l'exécution ne les augmenta que de trois jours.

Cette Equation Grégorienne remet les nouvelles Lunes en 400. années Juliennes au même jour & à la même heure, à une demi-minute près sous le même méridien.

Viete reprochoit à Clavius de n'avoir pas fait mention dans son Apologie de cette période de 340. années. Clavius pouvoit lui répondre qu'on trouve cette période marquée dans ses Tables des Epactes inserées dans son Apologie, où il ne donne à 340. années qu'une minute & 11. secondes d'Epactes; & néanmoins Clavius lui répond qu'il ne sauroit faire mention de ce qui n'est pas, & qui ne se trouve point écrit d'aucun Auteur de mérite, quoiqu'il ne nie point qu'elle n'approche beaucoup de la vérité. Une minute & 11" de différence en 3400 années doit passer pour insensible dans l'Astronomie, & d'autant plus dans l'usage Ecclésiastique. Clavius même a calculé la Table des Fêtes mobiles pour une de ces périodes de 3400 années, qui commence par l'année 1600, & finit par l'année 5000.

Des Epoques Grégoriennes.

Après avoir démontré la conformité de l'Analogie Grégorienne, qui regle les Equations des mois Lunaires & des Epactes, avec les Tables Astronomiques les plus célèbres, il reste à examiner la conformité des Epoques de ces Equations, qui sont les principales d'où l'on peut tirer toutes les autres.

Les Astronomes prennent pour Epoque de leurs Tables

154 MEMTOIRES DE L'ACADE'MIE ROYALE
quelque année, & quelque jour mémorable, & une heure
commode sous quelque méridien célèbre. Il n'importe pas
quelle année ni quel jour ou heure l'on prenne, pourvû
que l'on sache le rapport qu'elle a avec l'Epoque usuelle.
La plus célèbre de toutes les Epoques est présentement
l'année même de Jesus-Christ suivant l'usage vulgaire, qui,
dans le rang des années Juliennes, est supposée Bissextile &
premiere des Cycles de 19. années, marquée du nombre
d'Or I, suivant l'ordre qui s'observe présentement depuis
le Concile de Nicée.

Il y a des Astronomes qui dans leurs Tables prennent
pour Epoque des Epactes Astronomiques le midi qui précéda
le premier de Janvier de cette année de Jesus-Christ,
& d'autres qui prennent le minuit qui précéda ce même
jour; d'autres qui prennent le midi du même jour. Il y en
a d'autres qui prennent le midi du dernier jour de la même
année, d'autres le minuit suivant, & d'autres le midi
du premier jour de Janvier suivant. Il y a enfin de ceux
qui prennent pour Epoque des années Bissextiles, le midi
du premier Janvier, & des années communes, le midi
précédent, afin qu'entre les années communes & les Bif-
sextiles, il n'y ait différence qu'en Janvier & Février; au
lieu que suivant les autres méthodes, il n'y a point de dif-
férence en ces deux mois: mais il y a la différence d'un
jour aux autres dix mois de l'année Bissextile. Dans le
Calendrier Grégorien on assigne la même Epacte au premier
de Janvier & au premier de Mars, tolérant dans l'année
Bissextile trois mois Lunaires de suite de 30. jours, cet ex-
cès récompensant le défaut d'autres mois.

Il y auroit de la commodité & plus de justesse à pren-
dre toujours pour Epoque des Epactes, le premier de Mars
qui suit toujours l'intercalation du jour dont le mois de Fé-
vrier est prolongé aux années Bissextiles. C'est aussi le mois
où arrive l'Equinoxe du Printemps, que l'on emploie à déter-
miner le premier mois Lunaire dans lequel arrive la Pâque.

L'on voit assez que les Epoques des mois Lunaires Eg-

clésiastiques & de leurs Epactes, ne sauroient s'accorder sans réduction avec les Epôques de divers Astronomes, qui ne s'accordent pas tous dans la même Epoque, ni dans le jour, ni dans l'heure, ni dans le méridien, d'autant que le choix en est arbitraire.

Les Epactes annuelles Ecclésiastiques, qui conviennent au nombre d'Or courant pendant un ou deux Siecles, ont particulièrement cette sujettion, qu'il faut qu'elles s'accomodent aux Epactes disposées dans le Calendrier à chaque jour des mois, pour marquer la nouvelle Lune au jour du mois ou elles sont placées. Si l'on changeoit cette disposition dans le Calendrier, il faudroit aussi changer les Epactes annuelles assignées au même nombre d'Or dans le Cycle de 19. années. En changeant les Epactes sous les mêmes nombres d'Or sans changer les Epactes dans le Calendrier, on trouveroit les nouvelles Lunes en différens jours du même mois.

L'Epacte d'une année trouvée par le nombre d'Or, peut être différente de l'Epacte de la même année trouvée par les Tables Astronomiques, & s'accorder avec elle en montrant dans le Calendrier la nouvelle Lune au même jour que l'Epacte Astronomique la donne suivant les préceptes des Tables.

Dans la Correction Grégorienne on assigna 7 jours d'Epacte à la premiere année des Cycles des trois premiers Siecles de Jesus-Christ. La Lune eut sept jours accomplis d'Epacte Astronomique le premier jour de Mars de l'année même de Jesus-Christ Bissextile premiere d'un Cycle de 19 années sur le midi à un méridien plus Oriental que Rome d'une heure & 17 minutes, comme est à peu près celui de Nicée.

C'est un Epoque célèbre des Epactes Lunaires, qui moyennant le Cycle de 19 années & les Equations Grégoriennes, sert à trouver aisément toutes les autres Epactes avant & après.

Suivant ces Equations, l'Epacte ordinaire augmente d'un jour en 312 ans & demi. Mais pour la commodité popu-

laire on a trouvé à propos de l'augmenter 7 fois d'un jour de 300. ans en 300. ans, & la huitieme fois d'un jour en 400 ans, qui font en tout huit jours en 2500 ans.

A ce compte, après avoir pris pour Epoque des Epactes l'année de Jesus-Christ, on auroit dû les augmenter d'un jour l'année 300. Clavius marque l'Equation à l'année 320, & Lilius à l'année 325, qui fut celle du Concile de Nicée; ce qui est une licence prise contre la regle ordinaire de faire les Equations aux centiemes années toujours pratiquée de l'un & de l'autre Auteur. Pour le reste du Siecle du Concile de Nicée, & pour les deux Siecles suivans, les Tables Grégoriennes donnent aux premieres années des Cycles l'Epacte huit, qui étant placée au 23 de Mars, y montre la nouvelle Lune Ecclésiastique en ces premieres années.

Nous avons remarqué que la nouvelle Lune Astronomique arrivoit aussi ordinairement au 23 de Mars aux premieres années des Cycles de ce temps-là, qui furent la 304, 323, 342, 361, 380 & 399 de Jesus-Christ. Mais que sous le même méridien elles arriverent en différentes heures du même jour en ces différens Cycles, jusqu'à ce qu'elles montoient au soir du 22, d'où elles retournoient le Cycle suivant au 23 de Mars.

Nous les avons comparées d'abord au méridien d'Alexandrie, où les Tables de Ptolomée avoient été construites, supposant que ces Tables pouvoient avoir été consultées, dans la détermination des nouvelles Lunes Ecclésiastiques; ce que nous avons fait pour entrer dans les desseins que le Concile pouvoit avoir eu de les conformer à l'Astronomie de ce temps-là, autant qu'il le jugeoit convenable à l'usage de l'Eglise.

Nous les comparerons présentement au méridien de Rome, employant notre Epoque ordinaire qui suppose la conjonction moyenne de la Lune avec le Soleil à ce méridien sur le point de midi le premier de Janvier de l'an 32 de Jesus-Christ; ce qui s'accorde à une ou deux minutes près avec les Tables Astronomiques les plus excellen-

tes; & supposant le moyen mouvement des Tables corrigées par l'Analogie Grégorienne, nous avons trouvé que la nouvelle Lune de Mars arrivoit alors aux premieres années du Cycle le 23. de ce mois, comme on voit ici.

*Conjonctions moyennes de la Lune avec le Soleil au
Siecle du Concile de Nicée aux premieres années
du Cycle pour le méridien de Rome.*

L'année 304 de J. C.	le 23 de Mars	à 0 ^h 6 ^{min.}	du matin.
L'année 323	le 23 de Mars	à 4 ^h 38 ^{min.}	du soir.
L'année 342	le 23 de Mars	à 9 ^h 11 ^{min.}	du matin.
L'année 361	le 23 de Mars	à 1 ^h 43 ^{min.}	du matin.
L'année 380	le 22 de Mars	à 6 ^h 16 ^{min.}	du soir.
L'année 399	le 23 de Mars	à 10 ^h 48 ^{min.}	du matin.

On voit qu'au Siecle du Concile de Nicée, les nouvelles Lunes de Mars, aux premieres années des Cycles réduites au méridien de Rome, arrivoient ordinairement au 23. de ce mois, & que de six Cycles, il n'y en a que le penultieme, dont la premiere année eût la nouvelle Lune le soir du 22 de Mars à un quart-d'heure de la nuit suivante, d'où elle retournoit le Cycle suivant au 23.

Ainsi dans le Calendrier ancien le nombre d'Or I. placé au 23 de Mars monroit la nouvelle Lune Ecclésiastique conforme à l'Astronomique aux premieres années des Cycles au Siecle du Concile de Nicée, & l'Epaëte huit qui dans le Calendrier Grégorien de Lilius & dans celui de Clavius est placée au 23. de Mars, où elle marque la nouvelle Lune, dans les Tables Grégoriennes de ces deux Auteurs, est bien attribuée au nombre d'Or I. au Siecle du Concile de Nicée, quand les nouvelles Lunes Astronomiques de ces premieres années arrivoient ordinairement au 23 Mars. On pourra donc juger que les nouvelles Lunes Ecclésiastiques seront remises au même état qu'elles avoient été au Siecle du Concile de Nicée, quand elles concour-

ront avec les Astronomiques de la même maniere qu'elles concouroient au Siecle du Cycle de Nicée, avec les différences qui résultent nécessairement d'un Cycle à l'autre.

Il n'y a pas aucune regle Ecclésiastique de rapporter les nouvelles Lunes plutôt à un méridien qu'à l'autre, quoique dans leurs Epoques elles se trouvent assez proche du méridien de Rome. Elles s'accoutument dans la suite à d'autres méridiens en diverses années du même Cycle, aux mêmes années de divers Cycles. Cette variation est naturelle; on n'a pas entrepris de l'éviter dans la Correction Grégorienne, où pendant un ou deux Siecles on attribue la même Epacte à la même année de différens Cycles, quoique dans cet intervalle les heures des nouvelles Lunes varient beaucoup sous le même méridien, duquel on les rapproche, quand à la fin des Siecles elles s'en sont éloignées d'un jour ou environ.

Suivant le projet Grégorien l'an 1900 l'Equation de la Lune sera 13, & l'Equation du Soleil contraire sera aussi 13, & ainsi l'Epacte Grégorienne sera nulle. Cette année sera donc considérable non-seulement pour finir le 19 Siècle, & être la premiere du centième Cycle de 19. années après l'Epoque de J. C. qui fut la premiere d'un Cycle; mais aussi principalement pour n'avoir point d'Epacte Grégorienne, & avoir par conséquent la nouvelle Lune Ecclésiastique & l'Astronomique au premier de Janvier & de Mars, où l'Epacte nulle est marquée dans le Calendrier.

Elle sera donc naturellement une nouvelle Epoque des Cycles & des Epactes, qui exemptera la postérité d'avoir recours aux Epoques éloignées. C'est delà qu'on pourra prendre non-seulement les Cycles de 19 années, comme on les prend présentement de l'Epoque de J. C. mais aussi les Equations de la Lune & du Soleil.

OBSERVATION

Sur un battement de veines semblable au battement des arteres.

PAR M. HOMBERG.

LE battement des arteres suit à peu près les contractions du cœur, selon les portions du sang qui en sont poussées alternativement & par secouffes dans les arteres: mais ce sang étant ressorti des artères par leurs extrémités capillaires & pressé ensuite dans les veines, il y coule uniformément & sans secouffes, perdant entierement les pulsations dont on s'appercevoit pendant qu'il couloit dans les arteres. Ceci s'observe ordinairement dans tous les animaux, qu'ils soient malades ou en bonne santé. Je ne me souviens pas d'avoir vû aucun Auteur qui ait remarqué un mouvement pareil aux veines que nous remarquons aux arteres; j'ai eu le hazard d'en observer un que je rapporte par la singularité du cas.

1704.
11. Juin.

Une Dame âgée d'environ trente-cinq ans étant malade depuis quinze ou seize ans des poumons, à ce qu'on croyoit, me pria de l'assister de mes conseils dans le dernier temps de sa vie: ses principaux symptomes étoient un asthme cruel & fréquent, un très-grand mal de tête qui ne la quittoit jamais, accompagné d'une insomnie perpétuelle, des douleurs dans la poitrine très-vives & sans relâche, & au moindre effort qu'elle faisoit, son asthme la prenoit avec une palpitation du cœur très-violente, qui duroit quelquefois une heure ou une heure & demie, outre beaucoup d'autres accidens très-facheux, dont je ne fais point mention, qui changeoient & qui se succédoient les uns aux autres.

Tous ces symptomes redoubloient, particulièrement son asthme, & mettoient la malade à la mort à chaque fois

que ses ordinaires étoient accoutumés de paroître, & qui avoient cessé peu de temps avant que je l'aie vûe.

Je ne marquerai pas les remèdes que plusieurs personnes habiles lui avoient faits devant moi, ni ceux que je lui ai ordonnés pendant deux ans que je l'ai traitée avec grand soin, sans la pouvoir guérir, ne faisant rien à l'observation dont il s'agit.

La malade étant morte & ayant été ouverte, l'on a trouvé toutes les parties de la tête dans leur état naturel & sans aucun défaut, quoiqu'elle ait eu un coup violent à la tête à l'âge de douze ans dont elle a pensé mourir, & qu'on a toujours soupçonné être la première cause de sa maladie. Les parties du bas ventre étoient extrêmement flétries, aussi-bien que les poulmons, sans être autrement gâtées. Son estomac étoit très-petit, & ne paroissoit pas pouvoir contenir la valeur d'une chopine. Son cœur étoit une fois plus grand qu'il ne devoit être, & flétri comme une poche de cuir mollasse: les cavités en étoient fort amples, & les parois fort minces: il y avoit dans chaque tronc des artères un polype attaché aux parois internes du cœur, dont celui qui bouchoit l'aorte, ayant été arraché, avoit plus de deux pieds de long sans les extrémités qui étoient restées dans les branches de cette artère: le tronc de ce polype étoit d'une chair fibreuse, vermeille & ferme comme de la vraie chair, de la longueur d'environ six ou sept pouces: le reste changeoit insensiblement, prenant la couleur & la consistance du sang caillé.

Dans le temps que cette Dame étoit le plus agitée des palpitations du cœur, qui accompagnoient toujours ses accès d'asthme, on sentoit aux veines des bras & du col un battement très-sensible, dont la fréquence étoit un peu différente de celle des artères, mais qui suivoit exactement les violentes secousses que l'on sentoit que le cœur se donnoit; & quand cet accès étoit fini, on ne s'appercevoit plus du battement à ces veines. Ceci arrivoit ordinairement une fois ou deux en vingt-quatre heures, & quelquefois plus souvent. Je me suis imaginé que ce batte-
ment

ment de veines ait pu se faire de cette maniere : le sang couloit sans aucun obstacle dans le cœur , parce qu'il n'y avoit pas de polype dans les veines : ce sang sortoit du cœur avec embarras , parce que les troncs des arteres étoient bouchés par les polypes : le cœur étoit donc continuellement rempli de sang , qui en dilatoit & amincissoit les parois : cette dilatation étant douloureuse au cœur en a causé des contractions convulsives , ce qui faisoit sans doute la palpitation du cœur : ces contractions convulsives s'étant jointes aux contractions naturelles du cœur , ont comprimé le sang contenu dans ses cavités , plus violemment que par les seules contractions naturelles : ces violentes contractions ont repoussé par secousses le sang dans les veines , leurs valvules étant forcées par l'effort violent dont le cœur les pressoit : ce sang repoussé par secousses dans les veines , les a gonflées par intervalles , en conservant fort sensiblement les impressions de ces secousses , ce qui a imité dans les veines les plus proches du cœur , une pulsation approchante de celle que l'on sent aux arteres ; & comme ces pulsations étoient seulement causées par les contractions convulsives du cœur , elles suivoient exactement ces contractions , en quoi elles étoient différentes des pulsations des arteres , qui m'ont toujours paru avoir des contractions propres & indépendantes du cœur. L'on pourroit comparer ce repoussement surnaturel du sang dans les veines , au gonflement & au repoussement des eaux coulantes des rivieres par les hautes marées.

Le gonflement extraordinaire des veines qui s'observoit toujours dans cette malade , causé par les arteres bouchées , nous donne occasion d'expliquer facilement tous les symptômes dont elle étoit affligée.

Son asthme n'est provenu que de la trop grande quantité de sang qui occupoit les poumons , & qui par conséquent n'admettoit pas une suffisante quantité d'air dont il avoit besoin.

Les veines du cerveau trop gonflées ont comprimé le

162 MEMOIRES DE L'ACADE'MIE ROYALE
cerveau, & en partie dérangé, ce qui a causé son mal de tête continuel; & comme la douleur toujours réitérée réveille continuellement, elle a souffert une insomnie perpétuelle.

Les douleurs aiguës dans la poitrine, qui ne la quittoient jamais, ont été, selon toutes les apparences, l'effet de la dilatation douloureuse du cœur & des poumons, produite par la trop grande quantité de sang qu'ils contenoient.

Le volume du sang qui occupoit douloureusement les parties qui en étoient inondées, étant augmenté par les fermentations menstruales, redoubloit toutes les incommodités de la malade dans le temps que ses ordinaires devoient paroître; & cela, d'autant plus que ses ordinaires étoient arrêtés, parce que le gonflement de la masse du sang, ordinaire dans cette occasion, se faisant, mais non pas assez fort pour forcer les extrémités des artères, qui devoient en laisser échapper une partie, ne faisoit que presser davantage & augmenter les douleurs, lesquelles n'ont jamais été soulagées que par la saignée; & même la saignée ayant précédé ce gonflement, les douleurs ne se sont pas augmentées.

J'ai observé un fait particulier à cette Dame, qui est, qu'elle ne prenoit presque pas de nourriture. Elle a vécu plusieurs mois sans prendre autre chose qu'environ un demi-septier de bouillon maigre par jour, c'est-à-dire, une décoction simple de quelque herbe potagere dans de l'eau avec un peu de sel, & elle ne buvoit environ qu'une chopine d'eau cuillerée à cuillerée pendant les vingt-quatre heures.

Il est étonnant qu'avec si peu de nourriture une personne ait pu vivre sans diminuer considérablement. Voici comment je m'imagine que cela ait pu se faire: nous ne sommes obligés de prendre de la nourriture que pour réparer ce que l'insensible transpiration sépare de notre substance. La transpiration m'a toujours paru se faire plus ou moins, selon que le sang contenu dans les artères est poussé

avec plus ou moins de force ou de quantité dans les parties qui doivent être nourries, & que selon cette force la nouvelle matière nourricière se plaçant, elle pousse & chasse l'ancienne par tous les vaisseaux excrétoires.

Nous avons trouvé dans notre malade, non-seulement les embouchures, mais aussi tous les gros canaux des artères presque bouchés par des polypes, qui ont premièrement admis fort peu de sang dans les artères : secondement les artères étant remplies d'un corps solide comme le polype, n'ont pas pu se contracter librement, en sorte qu'il s'y est poussé foiblement fort peu de sang à la fois; ainsi l'ancienne matière nourricière n'étant déplacée que lentement & en petit nombre, il ne s'est presque pas fait de transpiration dans notre malade, & par conséquent elle n'a pas eu besoin de beaucoup de nourriture, c'est-à-dire, de réparer la diminution de sa substance que la transpiration non empêchée auroit pu causer. Nous voyons à peu près arriver la même chose aux Vipères enfermées, qui vivent un an entier sans manger, & à certains animaux dans les pays froids, qui dorment presque tout l'hiver sans prendre de nourriture, & sans diminuer considérablement de substance; parce que ne faisant aucun exercice, ils ne donnent pas d'occasion à la transpiration, & ils conservent par-là la plupart de la graisse qu'ils avoient au commencement de l'hiver.



*QUE TOUS LES BAROMETRES ,
tant doubles que simples qu'on a construits jusqu'ici ,
agissent non-seulement par le plus ou le moins de
poids de l'air , mais encore par son plus ou moins
de chaleur ; & le moyen de prevenir dorénavant
ce défaut dans la construction des Barometres dou-
bles , & d'en corriger l'erreur dans l'usage des Ba-
rometres simples.*

PAR M. AMONTONS.

1704.
18. Juin.

It est à propos avant toute chose de rapporter le détail de quelques expériences pour en déduire ensuite , s'il est possible , une construction qui puisse remédier à l'altération que la chaleur cause dans le poids du mercure dont les Barometres ordinaires sont remplis.

PREMIERE EXPERIENCE.

Les Thermometres dont il est parlé à la fin de la Connoissance des Temps de 1704. étant à 54 pouces 5 lignes, on a empli de Mercure un Aréometre dans lequel il en est entré 18 onces 7 gros 63 grains pesant. Après avoir vuïdé l'Aréometre on l'a rempli d'esprit de vin : il y en est entré 1 once 1 gros 28 grains. Le mercure, l'esprit de vin & le Thermometre avoient été un temps considérable , comme de plusieurs jours , dans le même lieu l'un proche de l'autre.

Il suit de cette expérience , que le poids du mercure est à celui de l'esprit de vin en masse égale , environ comme $16 \frac{1}{4}$ à 1 , lorsque nous n'expérimentons ni un grand froid ni un grand chaud.

SECONDE EXPERIENCE.

Les mêmes Thermometres étant à 54 pouces 11 lignes, on a rempli un petit verre de Thermometre ordinaire plein de mercure, il y en est entré en tout 757 grains pesant : la grosseur du tube étoit telle, que sur la longueur de 11 lignes il contenoit 18 grains pesant. Sur ce pied un tube de pareille grosseur & de 38 pouces 6 lignes $\frac{2}{3}$ de long, auroit contenu les 757 grains pesant de mercure. Les Thermometres étant descendus à 50 pouces 11 lignes, le petit Thermometre à mercure étoit baissé de 2 lignes justes ; d'où l'on doit conclurre que du grand chaud au grand froid de notre climat communément pris, c'est-à-dire, dans le temps que mes Thermometres parcourent depuis 50 jusqu'à 58 pouces de leur graduation, le mercure augmente son volume d'environ $\frac{1}{11}$ de celui qu'il avoit dans le grand froid, & qu'en volumes égaux il diminue de son poids dans le grand chaud aussi, de $\frac{1}{11}$ de celui qu'il auroit dans le grand froid.

TROISIEME EXPERIENCE.

Les Thermometres étant à 54 pouces, on a mis de l'esprit de vin dans un tube de verre scellé par un bout : il occupoit dans ce tube 32 pouces 4 lignes en long ; on a ensuite scellé l'autre bout du tube, & on l'a laissé en expérience. Les Thermometres étant descendus à 50 pouces, l'esprit de vin du tube étoit baissé de 7 lignes $\frac{1}{4}$; d'où il suit que du grand froid au grand chaud de notre climat communément pris, l'esprit de vin augmente son volume d'environ $\frac{1}{7}$ de celui qu'il avoit dans le grand froid.

Il suit encore des trois expériences ci-dessus, que dans le grand froid de notre climat, le poids du mercure est à celui de l'esprit de vin environ comme 16 à 1.

Ceci établi, si nous supposons que dans le grand froid l'espace entre les surfaces du mercure des deux boîtes du Barometre double est de 28 pouces 8 lignes : un de ces

pouces contrebalancera ou fera équilibre à 16 pouces d'esprit de vin , & le dessus de ces 16 pouces d'esprit de vin marquera pour lors dans son tube en cet endroit , que l'atmosphère égale les 27 pouces 8 lignes restans.

En prenant au-dessus & au-dessous de ce point, des parties égales de 16 lignes, chacune de ces parties seront analogues aux lignes de mercure du Barometre simple; c'est-à-dire, que l'esprit de vin du tube étant à la première division au-dessous de celle qui marque 27 pouces 8 lignes, marquera que l'air pesera alors 27 pouces 9 lignes, & seulement 27 pouces 7 lignes lorsque l'esprit de vin sera à la première division au-dessus de celle qui marque 28 pouces 8 lignes.

Il faut cependant observer que chacune de ces parties de 16 lignes doivent être diminuées de $\frac{1}{18}$ de ligne, si l'ouverture du tube que contient l'esprit de vin, est la moitié de celle d'une ligne, & que le diamètre de la boîte soit d'un pouce, dont la raison est que l'esprit de vin, qui entre dans ce tube, ne sauroit sortir de la boîte, qu'il ne fasse descendre le vis-à-vis d'une quantité qui égale $\frac{1}{18}$ de ligne; ce qui fait une différence de $\frac{1}{9}$ de ligne dans la hauteur du mercure pour chaque partie, & qu'il faut $\frac{2}{9}$ d'esprit de vin pour équilibrer $\frac{1}{9}$ de mercure.

Le froid étant supposé toujours le même, & le Barometre étant ainsi réglé, il est évident qu'il marquera précisément tous les changemens qui arriveront au poids de l'atmosphère, avec cet avantage sur le Barometre simple, qu'il les marquera au moins quatorze fois aussi sensiblement: mais dans les grandes chaleurs de notre climat, ces 28 pouces 8 lignes de mercure, qui dans le grand froid faisoient équilibre avec le poids de l'atmosphère, peseront $\frac{1}{15}$ moins, & devroient par conséquent, pour continuer à contrebalancer la même pesanteur d'air, être augmentés d'environ 3 lignes, qui sont à peu près le $\frac{1}{15}$ de 28 pouces 8 lignes, sans quoi l'esprit de vin baisseroit dans son tube de 48 lignes moins $\frac{2}{14}$ de ligne, c'est-à-dire, d'un peu plus de 3 pouces $\frac{1}{4}$.

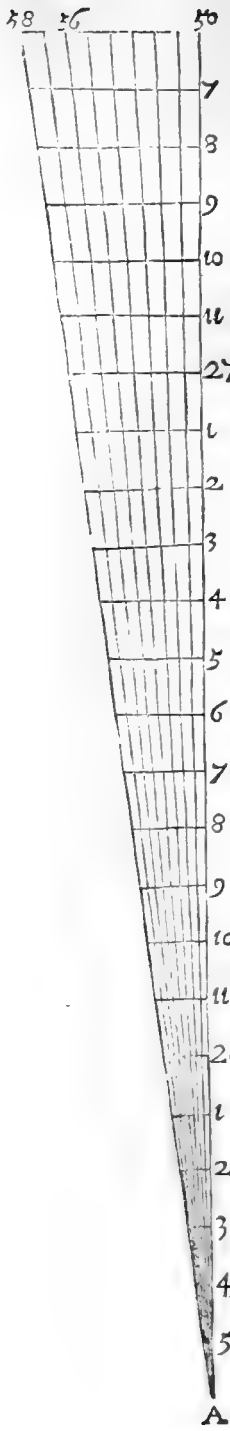
Cette augmentation de 3 lignes à la hauteur de la colonne de mercure , ne se sauroit faire que la surface du mercure de la boîte inférieure ne baisse d'une ligne & demie : car alors cette ligne & demie de mercure étant chassée dans la boîte supérieure , fera une hauteur totale de mercure de 28 pouces 11 lignes entre les surfaces du mercure des deux boîtes. Or il faudroit , pour empêcher que cet abaissement du mercure dans la boîte inférieure n'apportât aucun changement à la hauteur de l'esprit de vin du tube , que la partie de l'esprit de vin , qui est dans la boîte inférieure , se dilatât assez pour remplir cet espace d'une ligne & demie que le mercure abandonne ; ce qui arrivera nécessairement , si on donne à la partie de la boîte qui contient l'esprit de vin , une capacité égale à celle d'un cylindre de même diamètre que la boîte , & de 40 lignes $\frac{1}{2}$ de haut , puisque ces 40 lignes $\frac{1}{2}$ contiennent 27 fois 1 ligne & demie , & que l'esprit de vin par la troisième Expérience ci-devant rapportée , augmente son volume de $\frac{1}{27}$ du grand froid au grand chaud.

Il reste maintenant à considérer les changemens que la chaleur peut apporter à l'esprit de vin contenu dans le tube , suivant qu'il s'y trouve à des hauteurs différentes , & que les degrés de chaleur varient.

Premièrement , il est maintenant bien certain que tant que le poids de l'atmosphère arrêtera l'esprit de vin au bas du tube qui le contient , quelque changement qui arrive à la chaleur de l'air , l'esprit de vin dans le tube ne changera pas de situation , & que toute l'action de la raréfaction de la liqueur se fera du côté de la boîte supérieure.

Il est encore bien évident que dans le grand froid , quelque hauteur qu'ait l'esprit de vin dans le tube qui le contient , il marquera toujours précisément l'augmentation ou la diminution du poids de l'atmosphère , puisque c'est dans l'état du grand froid qu'on suppose que le Barometre a été réglé.

Il n'y a donc uniquement que les différentes hauteurs



168 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 de l'esprit de vin dans le tube, hors le temps du grand froid, qui peut apporter quelque altération dans la précision de ce Barometre; & quoique cette altération dans les plus grandes hauteurs de l'esprit de vin dans le temps des plus grandes chaleurs ne puisse aller au plus qu'à environ 14 lignes, & qu'elle est très-peu considérable dans tous les autres temps où la chaleur est moindre, voici cependant de quelle maniere on en pourra faire la correction lorsqu'il s'agira de précision dans les observations.

Si dans le tube qui contient l'esprit de vin, il y étoit monté par le peu de pesanteur de l'atmosphère dans le temps des grandes chaleurs à la hauteur de 28 pouces, il y auroit alors sur cette hauteur de 28 pouces, un pouce de correction à faire; parce qu'alors ces 28 pouces ne peseroient qu'autant que 27 pouces dans le temps du grand froid. C'est pourquoi, si l'on prend ce tube de 28 pouces pour l'une des jambes d'autour l'angle droit d'un triangle rectangle, & qu'à cette hauteur de 28 pouces on tire une ligne d'un pouce perpendiculaire au tube, qui fasse l'autre jambe de l'angle droit dudit triangle; cette dernière jambe étant divisée en autant de parties égales que le Thermometre contient de degrés de l'hiver à l'été, & numérotés de même, par exemple, en 8 avec les mêmes chiffres, & que de chacune de ces parties on mene des lignes droites à l'extrémité de l'autre jambe, en sorte qu'elles partagent le triangle en huit triangles égaux, il n'y aura plus que de toutes les divisions de cette premiere jambe, mener des lignes paralleles à la seconde jambe: ces paralleles seront divisées chacune en autant de parties qu'elle, par les lignes menées de ses divisions à l'extrémité de la premiere jambe, & toutes ces divisions seront analogiques aux degrés du Thermometre, & indiqueront la correction qu'on doit faire à la liqueur, c'est-à-dire, combien on doit retrancher de sa hauteur.

E X E M P L E.

Le Thermometre étant à 56 pouces, la liqueur du Barometre à 27, on retranchera de la hauteur de la liqueur une

A

une quantité égale à la partie de la parallèle 27 comprise entre les lignes 50 *A* & 56 *A*, & ainsi des autres.

Pour ce qui est du Barometre simple, comme toute l'étendue de la marche est bornée en un trop petit espace pour qu'une échelle semblable à la précédente pût servir utilement à faire la correction nécessaire, on peut se servir de la Table suivante, qui marque de combien une colonne de mercure de 28 pouces 7 lignes s'allongeroit ou diminueroit à tous les degrés de chaleur indiqués par mon Thermometre.

Cette augmentation ou diminution est exprimée dans cette Table par des $\frac{1}{2}$ de ligne. Ainsi, par exemple, vis-à-vis 55 pouces 5 ligne on trouve 65, ce qui veut dire que dans le temps que mes Thermometres marquent 55 pouces 5 lignes, il faut diminuer la hauteur du mercure du Barometre simple d'une quantité égale à 2 lignes $\frac{1}{2}$ de ligne.

Il est encore bon d'avertir ici que quoique 28 pouces 9 lignes ne soient pas la hauteur moyenne du Barometre simple, cette hauteur étant le plus ordinairement de 27 pouces 6 lignes; on peut néanmoins se servir utilement de cette Table, sans craindre de tomber dans aucune erreur sensible.

TABLE DES HAUTEURS DE MERCURE
qu'il faut ajouter ou ôter de celle du Barometre simple, suivant les différens degrés de chaleur indiqués par mon Thermometre.

Degrés du Thermometre.			Hauteurs à corriger.
49 ^{pouc.}	0 ^{lign.}	_____ ajoutez	12 32 ^{es} de ligne.
49 —	1	_____	11
49 —	2	_____	10
49 —	3	_____	9
49 —	4	_____	8 ou $\frac{1}{4}$ de ligne.
49 —	5	_____	7
49 —	6	_____	6
49 —	7	_____	5
49 —	8	_____	4

170 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

Degrés du Thermometre.

Hauteurs à corriger.

49 ^{pouc.}	9 ^{lign.}	ajoutez	3 32 ^{es} de ligne.
49	10		2
49	11		1
50	0		0
50	1	ôtez	1
50	2		2
50	3		3
50	4		4
50	5		5
50	6		6
50	7		7
50	8		8 ou $\frac{1}{4}$ de ligne.
50	9		9
50	10		10
50	11		11
51	0		12
51	1		13
51	2		14
51	3		15
51	4		16 ou $\frac{1}{2}$ de ligne.
51	5		17
51	6		18
51	7		19
51	8		20
51	9		21
51	10		22
51	11		23
52	0		24 ou $\frac{3}{4}$ de ligne.
52	1		25
52	2		26
52	3		27
52	4		28
52	5		29
52	6		30
52	7		31
52	8		32 ou 1 ligne.
52	9		33
52	10		34
52	11		35
53	0		36
53	1		37
53	2		38

Degrés du Thermometre.

Hauteurs à corriger.

Degrés du Thermometre.	Hauteurs à corriger.
53 ^{pouc.} 3 ^{liga.} _____	ôtez 39 3 ^{es} de ligne.
53 — 4 _____	40 ou 1 ligne $\frac{1}{4}$.
53 — 5 _____	41
53 — 6 _____	42
53 — 7 _____	43
53 — 8 _____	44
53 — 9 _____	45
53 — 10 _____	46
53 — 11 _____	47
54 — 0 _____	48 ou 1 ligne $\frac{1}{2}$.
54 — 1 _____	49
54 — 2 _____	50
54 — 3 _____	51
54 — 4 _____	52
54 — 5 _____	53
54 — 6 _____	54
54 — 7 _____	55
54 — 8 _____	56 ou 1 ligne $\frac{3}{4}$.
54 — 9 _____	57
54 — 10 _____	58
54 — 11 _____	59
55 — 0 _____	60
55 — 1 _____	61
55 — 2 _____	62
55 — 3 _____	63
55 — 4 _____	64 ou 2 lignes.
55 — 5 _____	65
55 — 6 _____	66
55 — 7 _____	67
55 — 8 _____	68
55 — 9 _____	69
55 — 10 _____	70
55 — 11 _____	71
56 — 0 _____	72 ou 2 lignes $\frac{1}{4}$.
56 — 1 _____	73
56 — 2 _____	74
56 — 3 _____	75
56 — 4 _____	76
56 — 5 _____	77
56 — 6 _____	78
56 — 7 _____	79
56 — 8 _____	80 ou 2 lignes $\frac{1}{2}$.

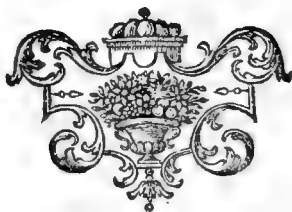
Y ij

172 MEMOIRES DE L'ACADE'MIE ROYALE

Degrés du Thermometre.

Hauteurs à corriger.

56 ^{pouc.}	9 ^{lign.}	ôtez	81	32 ^{es} de ligne.
56	— 10	_____	82	
56	— 11	_____	83	
57	— 0	_____	84	
57	— 1	_____	85	
57	— 2	_____	86	
57	— 3	_____	87	
57	— 4	_____	88	ou 2 lignes $\frac{3}{4}$.
57	— 5	_____	89	
57	— 6	_____	90	
57	— 7	_____	91	
57	— 8	_____	92	
57	— 9	_____	93	
57	— 10	_____	94	
57	— 11	_____	95	
58	— 0	_____	96	ou 3 lignes.
58	— 1	_____	97	
58	— 2	_____	98	
58	— 3	_____	99	
58	— 4	_____	100	
58	— 5	_____	101	
58	— 6	_____	102	
58	— 7	_____	103	
58	— 8	_____	104	ou 3 lignes $\frac{1}{4}$.
58	— 9	_____	105	
58	— 10	_____	106	
58	— 11	_____	107	
59	— 0	_____	108	ou 3 lignes $\frac{1}{8}$.



NOUVELLE STATIQUE

AVEC FROTTEMENTS

ET SANS FROTTEMENTS,

O V

Regles pour calculer les Frottemens des machines dans l'état
de l'équilibre.

PREMIER MEMOIRE,

Qui contient tout ce qui se fait sur des plans inclinés.

PAR M. PARENT.

De l'angle que doit faire une ligne avec un plan pour glisser dessus.

1° **S**Oit un plan rude FG contre lequel une puissance A ^{1704.} pousse la verge solide AB sous l'inclinaison ABG ; ^{25. Juin.} si l'on prend sur AB la partie CB pour exprimer la puissance A , & qu'ayant mené la parallèle CE & la perpendiculaire CD à FG , on divise l'effort fait selon CB dans les 2 CE, CD ; ce dernier marquera la quantité d'effort dont la puissance A presse le plan FG , lequel effort cause le frottement en B , & CE exprimera en même-temps la quantité d'effort dont la puissance A agit parallèlement à FG pour vaincre ce frottement. De sorte qu'on peut envisager si l'on veut l'effort CD comme un poids qui pese en B , & l'effort CE comme une force qui tirant ce poids vers F le tient tout prêt à partir, en supposant l'angle ABG tel, que AB soit toute prête à glisser. Cela étant, il est évident que la tangente CD de l'inclinaison de la verge AB sur le plan FG , doit être au sinus total BD ou CE , comme le poids de la verge AB couchée sur FG à la force qu'il faudroit pour commencer à vaincre son frottement sur le plan FG , si on la tiroit parallèlement à ce plan. De sorte que si l'on fait l'angle ABG un peu plus grand, la verge ne pourra glisser;

quelque effort que l'on fasse. Et si au contraire on fait cet angle ABG moindre, la verge AB ne pourra s'arrêter, quelque peu d'effort qu'on employe. On appellera dorénavant ABC l'angle d'équilibre.

On peut dire si l'on veut pour le rapport du frottement de AB sur FG à sa pesanteur celui de 7 à 20, que nous avons démontré dans cette Assemblée le 9. Janvier 1700, ou prendre tout d'un coup (pour abréger) celui de 1 à 3, à cause que les frottemens ne sont pas précisément les mêmes pour tous les corps, & que ce rapport est à peu près un milieu entre les plus grands & les moindres, puisqu'il convient au fer, au cuivre, au plomb & au bois enduits d'oiing, & combinés entr'eux.

De l'angle que doit faire un plan avec l'horison, afin qu'un corps posé dessus commence à glisser.

FIG. II.

2°. De même lorsqu'on aura un corps DHE sur un plan incliné AB , ayant pris sur la direction PE de son centre de gravité P la partie arbitraire PE pour marquer son poids, mené la parallèle PG & la perpendiculaire PF à AB , & divisé l'effort PE dans les 2 PG , PF , ce dernier marquera la quantité dont le poids DHE presse ce plan, & PG l'effort qu'il fait pour glisser & vaincre le frottement causé par l'effort PF . De sorte qu'il est constant que quand l'angle ABC est tel, que ce corps est prêt à glisser, l'effort PG doit être à l'effort PF , comme le frottement de ce corps sur AB supposé horizontal est à sa pesanteur, en le supposant tiré parallèlement à AC . Or à cause des parallèles PE , AC , les angles PEF , BAC étant égaux, & les angles PFE , ACB droits, les triangles PFE , ACB sont semblables. Donc $PF | FE = PG || BC | CA$; c'est-à-dire, que pour que le corps DHE soit prêt à glisser, il faut que le sinus total EC soit à la tangente CA de l'élevation du plan AB sur l'horison BC , comme PF à FE ou PG , ou comme le poids de ce corps à son frottement sur AB supposé horizontal.

De sorte que pour peu que AB soit plus élevé, le corps DHE glissera aussi-tôt; & pour peu qu'il le soit moins, le corps DHE y demeurera en repos, comme sur un plan horizontal.

Nous appellerons le plan AB qui tient le corps prêt à glisser *plan d'équilibre*, & l'angle ABC l'*élévation d'équilibre*.

Il est évident que si l'angle ABC étant moindre que l'*élévation d'équilibre*, la direction PE du corps DHE sortoit hors de sa base du côté de E , il tomberoit en roulant seulement vers B : mais si cette élévation étoit plus grande; la direction PE tombant sur la base HE du corps, il glisseroit seulement embas. Enfin si la direction PE tomboit hors la base HE , le plan AC étant au-dessus de l'*élévation d'équilibre*; alors le corps DHE rouleroit, & glisseroit en même-temps vers le bas du plan.

De la Force nécessaire pour tirer selon quelque direction que ce soit un corps situé sur un plan qui soit incliné à souhait.

3°. Si l'on a un corps pesant GDE à tirer sur un plan AC incliné sous un angle quelconque ACB , ayant pris sur sa direction DF pour marquer son poids, & divisé cet effort dans un parallèle DG & dans un perpendiculaire DE au plan, comme dans les deux articles précédens, on prendra encore sur la direction DM de la force motrice M la partie DI pour marquer cette force; on mènera la parallèle IL à AC sur DE en L , & la perpendiculaire IH sur DG prolongée, & divisant l'effort DI dans les 2 IL, IH ; $DL = IH$ marquera la quantité de force dont M presse le plan AC , & DH celle avec laquelle elle fait effort pour vaincre la force opposée DG du poids GDE , & le frottement qui naît des pressions DE, DL .

FIG. III.

Appellant donc DF, p ; DI, f ; CB, b ; AB, h ; & supposant que DM coupe AC en M , on aura DE pour la tangente de l'angle donné DME , & ME pour le sinus

total; & l'on nommera DE, t , & EM, s . Or à cause des paralleles LI, EM , on aura ($DL \parallel LI \parallel DI \parallel DE \parallel LM \parallel DM$.) D'où l'on tirera les Analogies $AC = \sqrt{b^2 + h^2} \parallel CB = b \parallel DF = p \parallel \left(GF = \frac{pb}{\sqrt{b^2 + h^2}} = DE. \right)$ Et $AC = \sqrt{b^2 + h^2} \parallel AB = h \parallel AF = p \parallel \left(DG = \frac{pb}{\sqrt{b^2 + h^2}} = EI \right)$:
Et $DM = \sqrt{s^2 + t^2} \parallel ME = s \parallel DI = f \parallel LI = \frac{fs}{\sqrt{s^2 + t^2}} = DH$.

Et enfin $DM = \sqrt{s^2 + t^2} \parallel DE = t \parallel DI = f \parallel \left(DL = \frac{ft}{\sqrt{s^2 + t^2}} \right)$.

Faisant donc encore comme le poids π du corps GDE , est à son frottement ϕ sur le plan AC supposé horizontal;

ainsi les deux pressions ensemble $DE, DL = \frac{pb}{\sqrt{b^2 + h^2}} + \frac{ft}{\sqrt{s^2 + t^2}}$ à un quatrieme terme $\left(\frac{pb\phi}{\pi\sqrt{b^2 + h^2}} + \frac{f\phi}{\pi\sqrt{s^2 + t^2}} \right)$;

on aura la force nécessaire pour vaincre le frottement qui naît des pressions DL, DE , en tirant parallelement à AC ; mais il faut outre cela vaincre la force DG . Il faut donc 1^o. que le seul effort DH soit égal à ce frottement total, & à DG ensemble, ce qui donne l'égalité suivante:

$\left(\frac{pb\phi}{\pi\sqrt{b^2 + h^2}} + \frac{f\phi}{\pi\sqrt{s^2 + t^2}} + \frac{pb}{\sqrt{b^2 + h^2}} = \frac{fs}{\sqrt{s^2 + t^2}} \right)$. D'où l'on

tire en transposant cet autre $\left(\frac{\frac{b\phi}{\pi} + ph}{\sqrt{b^2 + h^2}} = \frac{fs - \frac{\phi}{\pi}f}{\sqrt{s^2 + t^2}} \right)$; &

enfin $\left(f = \frac{\frac{b\phi}{\pi} + h\sqrt{s^2 + t^2}}{\sqrt{b^2 + h^2} \times s - \frac{\phi t}{\pi}} \times f \right) = \left(p \times \frac{h}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times \frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{s} \right)$

lorsque ($\phi = 0$).

2^o. Si l'on suppose que DM passe entre DH , & EDN au-dessus de DH ; alors $DL = \frac{ft}{\sqrt{s^2 + t^2}}$ auroit le signe — dans l'égalité précédente; ce qui donneroit dans ce cas ($f =$

($f = \frac{\frac{b^{\frac{p}{2}}}{2} + h\sqrt{s^2 + t^2}}{\sqrt{b^2 + h^2 \times s + \frac{p}{2}}}$) $\times p$). Ce qui est aisé à voir.

3^o. Si *DM* passoit entre *DE* & *DG* au-dessous de *DE*, la force *DH* s'unissant alors à la force *DG*, on auroit l'égalité ($\frac{pb\phi + f\phi}{\pi\sqrt{b^2 + h^2 \times \pi\sqrt{s^2 + t^2}}} = \frac{fs}{\sqrt{s^2 + t^2}} + \frac{ph}{\sqrt{b^2 + h^2}}$) au lieu de celle du premier cas; d'où l'on tireroit ($\frac{\frac{p}{2}pb - ph}{\sqrt{b^2 + h^2}} = \frac{fs - \frac{p}{2}ft}{\sqrt{s^2 + t^2}}$)

qui donneroit ($f = \frac{+\frac{p}{2}b - h\sqrt{s^2 + t^2}}{\sqrt{b^2 + h^2 \times +s + \frac{p}{2}t}} \times p$).

4^o. Si *DM* passoit entre *DG* & *DN* au-dessous de *DN* en *DP*, le second terme de l'égalité précédente ($\frac{ft\phi}{\pi\sqrt{s^2 + t^2}}$) auroit le signe (-) ce qui donneroit alors

($f = \frac{+\frac{p}{2}b - h \times \sqrt{s^2 + t^2}}{\sqrt{b^2 + h^2 \times s - \frac{p}{2}t}} \times p$).

5^o. Si dans le second cas ci-dessus *DM* tomboit sur *DF* prolongée en dessus en *DO*, prenant *t* pour sinus total & *s* pour tangente, les rapports ($\frac{\frac{p}{2}b + h}{\sqrt{b^2 + h^2}}$) & ($\frac{\frac{p}{2}t + s}{\sqrt{s^2 + t^2}}$) seroient alors les mêmes; ce qui donneroit seulement ($f = p$) comme on le fait.

6^o. Mais si *DM* tomboit sur *DF* vers le bas, on auroit dans le troisieme cas encore $f = p$, c'est-à-dire, *f* arbitrai-

re comme *p*, parce qu'alors les rapports ($\frac{+\frac{p}{2}b + h}{\sqrt{b^2 + h^2}}$) & ($\frac{+\frac{p}{2}t + s}{\sqrt{s^2 + t^2}}$), prenant *t* & *s* comme dans le cas pr  c  dent;

$b^{\frac{p}{2}}$, devant dans celui-ci être = *h*, ($\frac{p}{2}t = s$).

7^o. Si dans le premier cas *DM*   toit parallèle à *CB*; les angles *DMF*, *ACB*, étant égaux, on auroit l'Analogie

gie : $b | h || s | t$. Ce qui donneroit $(f = \frac{\frac{\pi}{2}b + h}{b - \frac{\pi}{2}h} \times p)$ & $(= \frac{b}{\pi} \times p)$, quand $\varphi = 0$.

8°. Mais dans le quatrieme cas où la puissance tire selon DP , on auroit $(f = \frac{+\frac{\pi}{2}b + h}{b + \frac{\pi}{2}h} \times p)$.

9°. Si dans le premier & le second cas DM est parallele au plan AC tirant selon DH , $t = DE$ fera $= 0$ par rapport à $EM = S$; ce qui donnera simplement

$(f = \frac{\frac{\pi}{2}b + h}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times p)$ & $(= \frac{h}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times p)$, quand $(\varphi = 0)$.

Soit $b = 30$, $h = 1$, $\varphi = 5$, $\pi = 7$, & $p = 3000$ livres, on aura avec frottement $f = 2243$ livres au lieu de 700 livres, comme on le trouve dans les Mémoires de l'Académie des Sciences en 1699. page 207.

10°. Mais si dans le troisieme & quatrieme cas DM est parallele à AC tirant vers le bas selon DG , on aura

$(f = \frac{+\frac{\pi}{2}b + h}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times p)$.

11°. Si DM dans le troisieme cas tomboit sur DE tirant vers E , on auroit alors $(s = 0)$ & t infinie; ce qui donneroit

$(f = \frac{h - \frac{\pi}{2}b}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times \frac{\pi}{\varphi} p)$ ($=$ l'infini) lorsque $(\varphi = 0)$.

12°. Si dans le quatrieme cas DM tombe sur DN tirant vers N , on aura toujours $(s = 0)$, & t infinie; ce qui donneroit

$(f = \frac{-h + \frac{\pi}{2}b}{\sqrt{b^2 + h^2}} \times \frac{\pi}{\varphi} p)$.

13°. Si $h = 0$, ou si le plan AC est l'horison DM tirant en bas entre DH & DE comme dans le premier cas, on aura

$(f = \frac{\varphi \sqrt{s^2 + t^2}}{\pi s - \varphi t} \times p)$ ($= 0$, lorsque $\varphi = 0$).

14°. Si AC étant horizontal, DM passe au-dessus de DH , comme dans le second cas, on aura ($f = \frac{\phi p \sqrt{s^2 + t^2}}{\pi s + \phi t}$)
($= 0$, lorsque $\phi = 0$).

15°. Si AC étant toujours horizontal, DM tombe sur DH , S étant alors infinie, on aura seulement ($f = \frac{p\phi}{\pi}$)
comme on l'a supposé.

16°. Si AC est vertical, on aura dans le premier cas
 $b = CB = 0$; ce qui donnera aussi ($f = \frac{\pi \sqrt{s^2 + t^2}}{\pi s - \phi t} \times p$)
($= \frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{s} \times p$, lorsque $\phi = 0$).

17°. Si AC étant toujours vertical, DM tire en bas
comme dans le troisième cas, on aura encore ($b = 0$), ce
qui donnera ($f = \frac{\pi p \sqrt{s^2 + t^2}}{\phi t - \pi s}$).

18°. Enfin si AC étant toujours vertical, DM tombe sur
 DE , on aura $s = 0$, ce qui donnera $f = \frac{\pi p}{\phi}$, & f infinie
quand $\phi = 0$.

*Une verge étant posée dans un angle, trouver le point où il faut
suspendre un corps, pour commencer à la faire glisser
d'un côté ou d'autre.*

4°. Soient encore deux plans rudes inclinés CA , BA , FIG. IV.
sur lesquels on ait posé la verge solide & rude GF , à laquelle
il faut suspendre le poids N en H ; ensorte que cette verge
soit prête à glisser d'un côté ou d'un autre, & cela sans avoir
égard à son poids. Pour trouver le poids H , on le partagera
par pensée en deux autres I & L , que l'on concevra suspen-
dus en G & F , & qui soient entre eux réciproquement comme
les distances FH , GH ; on prendra sur les directions FL ,
 GI les parties FQ , GW qui expriment ces poids; on mena-
ra les perpendiculaires FT , $GÆ$, aux plans CA , BA , & sur ces
plans & sur leurs perpendiculaires les perpendiculaires QS ,
 QT , WK , $WÆ$, afin de diviser les efforts FQ , GW , dans les
efforts FT , FS ; $GÆ$, GK . On prendra aussi sur GF prolongée,
si l'on veut, les parties FP , GX égales entr'elles, pour
Z ij

marquer l'effort que cette ligne fait selon sa longueur vers F & vers G ; & menant les perpendiculaires PO, PV, XY, XZ , sur les plans & sur leurs perpendiculaires, on divisera les efforts FP, GX , dans les efforts FO, FV ; GY, GZ , & on considerera que quand le point H est tel que FG doive glisser vers B , demeurant cependant en équilibre, l'effort que G fait selon GY doit vaincre l'effort opposé de I selon GK plus le frottement qui naît des pressions $GZ, GÆ$; & l'effort de L selon FS doit vaincre l'effort contraire de FG selon FO plus le frottement qui naît des pressions FV, ET , d'où nous tirerons l'inconnue GH .

Mais quand le point h est tel que G doive glisser vers A , alors l'effort GK de I doit vaincre l'effort contraire GY , plus le frottement qui vient des pressions $GZ, GÆ$; & l'effort FO de GF doit en même-temps vaincre l'effort contraire FS de L plus le frottement produit par les charges FV, FT du plan AC .

Soit donc appelée la base AD du plan AB, b ; sa hauteur BD, h ; le rapport du poids de FG à son frottement, en la tirant directement sur AB supposé horizontal, ($= \frac{\pi}{\varphi}$) la base AE du plan AC, B ; sa hauteur CE, H ; le rapport du poids de FG à son frottement sur AC pris comme ci-dessus ($= \frac{p}{f}$). Soient aussi les longueurs arbitraires AC, AB ; $= c$, menez les perpendiculaires FR, GM sur BA, CA , appellés $GM, T; FM, S; GR, s; FR, t; GF, q$; la force dans GF, f ; GH, x , & le poids N, a ; on aura $HF = q - x$; ce qui donnera l'Analogie: $GF = q \mid HF = q - x \mid a = N \mid I = \left(\frac{aq - ax}{q} \right)$, d'où l'on tirera ($L = N - I = \frac{ax}{q}$). On aura aussi à cause des triangles rectangles semblables, & des parallèles: $GF = q$ est à $FM = S$, comme la force $FP = f$, est à l'effort ($FO = \frac{fS}{q}$); & $GF = q$, est à $GM = T$, comme la force $FP = f$, est à l'effort ($FV = \frac{fT}{q}$). On aura aussi, comme $AC = c$, est à $CE = H$; ainsi la force $FQ = \frac{ax}{q}$ à l'effort

$FS = \frac{Hax}{cq}$; & comme $AC = c$, est à $AE = B$, ainsi la force $FQ = \frac{ax}{q}$, à l'effort ($FT = \frac{Bax}{cq}$). Faisant encore comme P est à F , ainsi l'effort $FV + FT = \frac{fT}{q} + \frac{Bax}{cq}$, à un quatrième terme, on aura ($\frac{FTf}{qP} + \frac{BaxF}{cqP}$) pour tout le frottement en F . Ce qui donnera dans le premier cas l'effort FS égal à tout ce frottement plus l'effort FO , ou ($\frac{Hax}{cq} = \frac{FTf}{qP} + \frac{BFax}{cqP} + \frac{fs}{q}$), d'où l'on tire ($\frac{PH - FB}{SP + TF} \times \frac{ax}{c} = f$).

Faisant de même comme $GF = q$ est à $GR = s$, ainsi la force $GX = f$ à l'effort $GY = \frac{fs}{q}$; & comme $GF = q$ est à $FR = t$, ainsi la force $GX = f$ à l'effort $GZ = \frac{ft}{q}$; & comme $BA = c$ est à $BD = h$, ainsi la force $GW = \frac{aq - ax}{q}$ à ($GK = \frac{baq - bax}{cq}$); & comme $AB = c$ est à $AD = b$; ainsi $GW = \frac{aq - ax}{q}$ à ($GÆ = \frac{baq - bax}{cq}$); & enfin comme π est à ϕ , ainsi les deux pressions ensemble $GZ + GÆ = \frac{ft}{q} + \frac{baq - bax}{cq}$ à un quatrième terme ($\frac{ft\phi}{\pi q} + \frac{baq\phi - bax\phi}{\pi cq}$), on aura tout le frottement en G . Egalant donc dans le premier cas l'effort GY à ce frottement total, & à GK , on aura l'égalité ($\frac{fs}{q} = \frac{f\phi}{\pi q} + \frac{baq\phi - bax\phi}{\pi cq} + \frac{baq - bax}{cq}$); d'où l'on tire ($f = \frac{+baq\pi + bax\pi + baq\phi + bax\phi}{+s\pi + t\phi c}$).

Enfin égalant ces deux valeurs de f , on en tire aussi ($x = \frac{b\pi + \phi\phi \times Si + TF \times q}{PH - FB \times + S\pi + t\phi \times + b\pi + b\phi \times SP + TF}$) ($= \frac{Sbq}{sH + Sb}$) lorsque ϕ & F sont $= 0$.

Pour le second cas on a au lieu de la première égalité ci-dessus : ($\frac{sf}{q} = \frac{FBax}{Pcq} + \frac{FTf}{Pq} + \frac{Hax}{cq}$), d'où l'on tire ($f = \frac{HP + FB}{SP - ET} \times \frac{xa}{c}$), & au lieu de la 2^e ($\frac{baq - bax}{cq} = \frac{baq\phi - bax\phi}{\pi cq}$

+ $\frac{f\varphi}{\pi q}$ + $\frac{sf}{q}$), d'où l'on tire ($f = \frac{\pi baq - bax\pi - baq\varphi + bax\varphi}{i\varphi c + s\pi c}$);

& comparant ces deux valeurs de f , on en tire la valeur de $Gh = \left(x = \frac{\pi h - b\varphi \times SP - FT \times q}{HP + FB \times i\varphi + s\pi + SP - FT \times h\pi - b\varphi} \right) \left(= \frac{Shq}{Hs + hs} \right)$ lorsque φ & F font $= 0$, comme ci-dessus.

Il est évident que si l'on veut avoir la partie Hh (qu'on pourroit appeller *Aquinétique*, puisqu'un corps suspendu dans toute son étendue y demeure en repos), on n'a qu'à prendre les différences des deux valeurs GH , Gh , ou des deux x ci-dessus, qui fera $= 0$, lorsque φ & F font $= 0$.

Lorsque AB est un plan horifontal, & AC un plan vertical, les lignes BD , AE étant alors $= 0$, $AB = AD = AC = CE$; $GR = S = GM = T$, & $FR = t = FM = S$, la premiere valeur de x se change en celle-ci :

($x = \frac{PS + TF}{T} \times \frac{\varphi}{P\pi + F\varphi} \times q$) $= HG = 0$, lorsque φ & F

font $= 0$; & toute cette partie GH est *aquinétique* & $= 0$, lorsque φ & F font $= 0$.

Trouver l'élevation d'une échelle, afin qu'un homme étant tout au haut, elle soit prête à glisser dans un plan vertical.

FIG. V.

Si l'on suppose que GF soit une échelle appuyée contre un mur vertical CM , N le poids du corps d'un homme situé tout au haut en F , & qu'on veuille que cette échelle demeure stable dans la situation la plus droite qu'il se puisse; on supposera que cet homme étant en F , le centre de gravité tant de l'homme que de l'échelle soit en H . Ainsi prenant sur GF le centre de gravité φ de l'échelle, nommant $G\varphi$, a , & $F\varphi$, $q - a$, le poids de l'échelle e , & celui de l'homme H . On aura à cause du centre de gravité commun $e | h || FH | H\varphi$, & $e + h | h || F\varphi = q - a |$

($\frac{hq - ba}{e + h} = H\varphi$); ce qui donnera $GH = \frac{ae + ah + qh - ab}{e + h} =$

$\frac{ae + qh}{e + h}$, & cette valeur étant égalée à x ci-dessus, donnera

l'égalité suivante: ($\frac{ae + qh}{e + h} = \frac{PS + TF}{T} \times \frac{\varphi}{P\pi + F\varphi} \times q$). Dans

laquelle substituant la valeur de $T = GM = \sqrt{q^2 - s^2}$, il vient cette autre égalité $(\frac{ac + qb}{e + b} - \frac{F\phi q}{P\pi + F\phi} = \frac{P\phi qs}{P\pi + F\phi\sqrt{q^2 - s^2}})$ & $(\frac{ac + qb}{e + b} \times P\pi + F\phi - F\phi p = \frac{P\phi qs}{\sqrt{q^2 - s^2}})$ & $(\frac{aeP\pi + acF\phi + qbP\pi - F\phi qe}{e + b} = \frac{P\phi qs}{\sqrt{q^2 - s^2}})$, & quarrant le tout, & nommant qb^2 le premier membre de cette équation, on a $(q^2 b^4 = \frac{P^2 \phi^2 q^2 s^2}{q^2 - s^2})$, & $(b^4 q^2 = P^2 \phi^2 + b^4 \times s^2)$, & enfin $\frac{b^4 q^2}{P^2 \phi^2 + b^4} = s^2$, ou $(s = \frac{b^2 q}{\sqrt{P^2 \phi^2 + b^4}})$ *FM* désirée, qui est le sinus de l'angle *FGM*, *GF* étant prise pour sinus total. On a *FM* = *FG* lorsque $\phi = 0$, ce qu'on connoît d'ailleurs.

Trouver la situation d'une échelle, dans laquelle elle est prête à glisser, par sa propre pesanteur dans un plan vertical.

Si l'on veut avoir la situation dans laquelle l'échelle est prête à glisser par son seul poids, on supposera le poids *N* de l'homme = $h = 0$; ce qui donnera $(qb^2 = aP\pi + aF\phi - F\phi q)$ dans l'égalité ci-dessus, & dans la valeur de *s*.

Enfin si l'on suppose en même-temps que $a = G\phi = \frac{1}{2}$, $GF = \frac{q}{2}$, & toujours $h = 0$, on aura $(qb^2 = \frac{qP\pi}{2} - \frac{qF\phi}{2})$ & $(b^2 = \frac{P\pi - F\phi}{2})$ & $(b^4 = \frac{P\pi - F\phi^2}{4})$; ce qui changera la valeur de *s* ci-dessus en cette autre $(s = \frac{q \times P\pi - F\phi}{\sqrt{4P\phi + P\pi - F\phi^2}})$ qui donne $(s = \frac{4}{3}q)$, en supposant $(\pi | \phi || P | F || 3 | 1)$. On a encore $(s = q)$ ou *FM* = *FG* lorsque $\phi = 0$.

Trouver la situation d'une échelle ou d'un prisme posé de travers contre un mur dans laquelle il est prêt à tomber.

5°. Soit encore *AB* une verge solide fixe par un de ses bords sur le sol en *B*, & s'appuyant de l'autre *A* contre un

mur vertical $CEAF$. Soit BC une perpendiculaire au mur menée du point B dans le plan horizontal, & CE une verticale menée sur le plan vertical. Je suppose de plus que la droite solide AB soit mobile autour de CB comme axe, & qu'elle soit tellement panchée à l'égard de la verticale CE , qu'elle soit prête à glisser de E vers A , & à tomber; & je demande quelle est son obliquité dans cet état à l'égard de CE .

Pour cet effet je décris du point C comme centre avec l'intervalle CA un arc de cercle qui rencontre CE en E ; je mene la perpendiculaire AD sur CE , & je cherche quelle est la valeur de l'arc AE en degrés, ou quel est son sinus AD . Et afin d'y parvenir je considère que quelque poids O qu'on suspende à la verge AB , & en quelque endroit Q qu'on l'attache, il n'y apportera aucun changement; & lorsqu'elle sera une fois prête à tomber, elle le sera toujours, quoi qu'on y ajoute. Car en quelque endroit Q qu'on attache ce poids, il fera la même chose que s'il étoit partagé en deux autres F, P , suspendus en A & B , qui fussent entr'eux dans le rapport réciproque de BQ à QA , puisqu'alors Q seroit le centre de gravité de ces deux poids P & F . Or l'effort du poids P seroit entièrement anéanti par la résistance du point B . Donc en quelque endroit qu'on suppose Q , il ne fera pas un autre effet, que si on le suspendoit en A , à l'égard du renversement de AB . Supposant donc une partie du poids de la verge, ou du poids de cette verge & du poids O considérés comme un seul F suspendue en A , menant le rayon CA & la tangente AI à l'arc EA , prenant sur AF la partie AG pour exprimer ce poids, menant sur AC , AI les perpendiculaires GH, GI , je divise l'effort AG dans les efforts AH, AI ; & élevant encore la perpendiculaire HM au plan CEA qui rencontrera BA comme en M , & divisant la résistance de la verge BA ou du point fixe B selon BA dans les deux efforts MH, HA , je considère que l'effort MH fait tout le frottement en A qui doit être vaincu par l'effort AI du poids F , puisque AI est la route du point A .

A l'égard

A l'égard de l'effort AH du poids F , il est égal, & par conséquent anéanti par l'effort contraire HA de la résistance B , puisqu'on suppose que le point B est immobile.

Nommant donc F ou AG , p ; AB , l ; CB , d ; CE ou AC , r ; AD , x ; on aura $CD = \sqrt{r^2 - x^2}$; & $AC = r = \sqrt{l^2 - d^2}$, à cause des angles droits ADC , ACB . De plus les angles alternes ACD , CAF , dans les triangles rectangles ACD , CAF , donneront l'Analogie : $r = AC \mid CD = \sqrt{r^2 - x^2} \parallel AG = p \mid \left(\frac{p\sqrt{r^2 - x^2}}{r} = AH \right)$: & $AC = r \mid AD = x \parallel AG = p \mid GH = \left(AI = \frac{px}{r} \right)$. De plus les triangles rectangles AHM , ACD , semblables à cause de l'angle commun A , donneront l'Analogie : $AC = r \mid CB = d \parallel AH = \frac{p\sqrt{r^2 - x^2}}{r} \mid \left(HM = \frac{pd\sqrt{r^2 - x^2}}{r^2} \right)$.

Enfin supposant que le poids de AB est à son frottement sur le plan AEC supposé horizontal en la tirant parallèlement à ce plan, comme π est à ϕ , on multipliera la valeur de HM ci-dessus par le rapport $\left(\frac{\phi}{\pi} \right)$, ce qui donnera $\left(\frac{pd\phi}{\pi r^2} \right) \sqrt{r^2 - x^2}$ pour le frottement en A , qu'il faut éga-
ler à l'effort AI du poids F ; ce qui donne l'égalité $\left(\frac{pd\phi\sqrt{r^2 - x^2}}{\pi r^2} = \frac{px}{r} \right)$, d'où l'on tire $(d\phi\sqrt{r^2 - x^2} = \pi r x)$, & quarrant chaque membre on a $(d^2\phi^2 r^2 - d^2\phi^2 x^2 = \pi^2 r^2 x^2)$ & $\left(\frac{d^2\phi^2 r^2}{\pi^2 r^2 - \phi^2 d^2} = x^2 \right)$, & enfin $\left(\frac{d\phi r}{\sqrt{\pi^2 r^2 - \phi^2 d^2}} = x \right)$ désirée; dans laquelle valeur substituant, si l'on veut, la valeur de $r = \sqrt{l^2 - d^2}$, on trouve $\left(x = \frac{d\phi\sqrt{l^2 - d^2}}{\sqrt{\pi^2 l^2 - \pi^2 d^2 + \phi^2 d^2}} \right)$ ($= 0$, lorsque $\phi = 0$), comme on le fait d'ailleurs.

Si l'on suppose $\frac{\phi}{\pi} = \frac{1}{3}$, on aura $(-\pi^2 d^2 + \phi^2 d^2 = -2\pi^2 d^2)$;

ce qui donnera $\left(x = \frac{d\sqrt{l^2 - d^2}}{\sqrt{3l^2 - 2d^2}} \right)$, & $AC \mid AD \parallel \sqrt{l^2 - d^2}$

$$\frac{8\sqrt{l^2-d^2}}{\sqrt{3l^2-2d^2}} \parallel \sqrt{3l^2-2d^2} \mid d, \& \left(AD = \frac{d \times AC}{\sqrt{3l^2-2d^2}} \right).$$

On voit que la valeur du poids $F = p$ n'entre point dans la composition de x ; ce qui confirme ce qu'on a avancé au commencement de cette Analyse, que tel que fût le poids F , l'arc AE seroit toujours le même, tandis que BC , BA , demeureroient les mêmes.

Si l'angle ABC étoit de 45^d , on auroit ($\sqrt{l^2-d^2} = d$) & ($2d^2 = l^2$), ce qui donneroit ($x = \frac{d^2}{\sqrt{2}l^2} = \frac{d^2}{\sqrt{4}d^2} = \frac{d^2}{2d} = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}AC = AD$) ce qui donneroit l'arc AE de 30^d .

Si l'angle ABC est de 60^d , & BAC de 30 , on aura ($BC = \frac{1}{2}AB$) & ($BC^2 = d^2 = \frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{4}l^2$), ce qui donnera ($\sqrt{l^2-d^2} = \sqrt{\frac{3}{4}l^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$), & ($\sqrt{3l^2-2d^2} = \sqrt{\frac{10}{4}l^2} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$); ce qui donneroit ($x = \frac{d\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{10}d\sqrt{30}$) $\frac{AC}{\sqrt{10}} = AD$, & l'arc AE de $18^d 27$. minutes.

Enfin si l'angle ABC est de 30^d ou BAC de 60 , on aura ($BC = d$, $\sqrt{\frac{1}{2}l^2} \times \sqrt{\frac{3}{2}l^2} = \sqrt{\frac{3}{2}l^2}$), & ($2d^2 = \frac{3}{2}l^2$) & ($\sqrt{3l^2-2d^2} = \sqrt{\frac{3}{2}l^2}$), & enfin ($x = AC \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{AC}{\sqrt{2}}$) : & ($\sqrt{2} \mid 1 \parallel AC \mid AD = x$) ou ($2 \mid 1 \parallel AC^2 \mid AD^2$.) Donc l'arc AE seroit alors de 45^d .

On peut remarquer que si $d = CB = 0$, $AD = 0$; & que si $d = CB = l = AB$, alors ($AD = AC$), c'est-à-dire, que le point A seroit alors sur la ligne horifontale CR .

S E C O N D M E M O I R E.

*Trouver la force avec laquelle il faut pousser un coin, pour
séparer un corps ou directement, ou sur un point
fixe, ou sur deux.*

1704.
2. Juillet.

1°. **S**I au lieu de concevoir que la puissance M (1. Fig.) tient le poids D en équilibre sur le plan incliné AC en tirant horifontalement, tandis qu'une autre puissance N

arrête le plan incliné en le repoussant selon l'horizontale NO , comme dans le premier Mémoire; on suppose que la puissance M retient seulement le poids D , tandis que la puissance N pousse le plan incliné ACB sous ce poids; le plan incliné ACB s'appellera alors un coin rectangle. Or il est évident que les deux puissances M & N étant opposées doivent être égales, puisqu'elles sont en équilibre entr'elles. Donc les mêmes dénominations subsistant, comme dans l'article 3. du premier Mémoire, on aura la puissance

$$\left(N = \frac{\varphi b + \pi b}{\pi b - \varphi b} = f \right) \text{ comme dans le 7}^{\text{e}} \text{ cas de cet article}$$

3. A quoi il faudra ajouter le frottement causé par le poids D , & même par le plan ACB sur le plan horizontal PQ

$$\left(= \frac{D + ACB \times \varphi}{\pi} \right).$$

2°. Si l'on joint ensemble deux coins égaux semblables au précédent dans la droite BC pour en composer le coin scalene ACa (2. Fig.), que l'on introduise ce coin dans la fente TOt , d'un corps $TQPt$, dont on veut écarter les deux portions $TQ\mathcal{A}$, $tP\mathcal{A}$, en les faisant glisser sur le plan horizontal QP ; on cherchera premièrement la résistance que ces deux parties font à être séparées directement dans leur partie commune $O\mathcal{A}$ selon la droite YXy perpendiculairement à $O\mathcal{A}$; à quoi on ajoutera la résistance qui vient du frottement de la partie $TQ\mathcal{A}$ sur le plan QP , lorsqu'elle s'écarte de la partie $tP\mathcal{A}$, savoir

$$\left(\frac{\varphi}{\pi} \times TQ\mathcal{A} \right), \text{ \& on appellera ces deux résistances ensemble } p,$$

parce qu'elles font le même effet ici que le poids D du cas précédent. On partagera ensuite la force motrice M ou f en deux égales, qu'on appliquera à chaque moitié du coin ABC , aBC ; alors ce cas deviendra tout semblable au précédent, en regardant la surface dans laquelle les deux coins s'appuient l'un sur l'autre, comme le plan horizontal PQ du cas précédent; ce qui donnera pour chaque force qui doit être appliquée aux moitiés ABC , aBC , du coin

$\left(\frac{\varphi b + \pi b}{\pi b - \varphi b} \times p\right)$. Donc la force totale *M* ou *f* de tirée ($= 2p \times \frac{\varphi b + \pi b}{\pi b - \varphi b}$), ce qui donne aussi ($p = \frac{f}{2} \times \frac{\pi b - \varphi b}{\varphi b + \pi b}$). On a aussi ($f = \frac{2pb}{b}$) & ($p = \frac{fb}{2b}$), lorsque $\varphi = 0$.

3°. Mais lorsqu'il faut séparer les parties *TQÆ*, & *PÆ* (3. Fig.) sur un point fixe *Æ*, l'effort *M* est très-différent du précédent; & pour le trouver je le suppose partagé en deux parties égales, & chaque moitié appliquée à chaque demi-coin *ABC*, *aBC*, comme ci-dessus agissante selon les directions verticales *ND*, *nd*, qui passent par les centres de gravité *D*, *d*, des faces *TI*, *ti*, du coin. Je prens sur ces verticales les parties arbitraires *ND*, *nd*, qui marquent ces deux forces ou $\frac{1}{2}f$. Je mene les perpendiculaires *HDL*, *hdl*, à ces faces, & je divise chacun des efforts *ND*, *nd*, dans les perpendiculaires & parallèles *NT*, *NH*, *nt*, *nh*, aux faces *AC*, *ac*; je mene encore les perpendiculaires *DE*, *de*, à l'axe du coin *BC*, & je prens dessus les parties *De*, *de*, qui expriment les résistances que ces deux coins rectangles se font l'un à l'autre dans leur base commune *BC*. Je divise de même les efforts *ED*, *ed*, dans les parallèles & perpendiculaires *EG*, *EF*, *eg*, *ef*, aux faces du coin, & je considere que les efforts *HD*, *GD*, *hd*, *gd*, font tout le frottement en *D*, *d*, & que les efforts *NH*, *nh*, de *M* doivent vaincre ces frottemens, & outre cela les efforts contraires *EG*, *eg*, de la résistance *BC*. Je réduis ensuite par pensée toutes les résistances des parties de *OÆ* dans leur centre *X* agissantes selon la perpendiculaire *YXy* à *OÆ*, en supposant que ces parties sont au moins un peu extensibles (puisque l'expérience nous apprend qu'il n'y a point de corps qui n'ait du ressort, & que les filets de verre même sont fort sensiblement extensibles); & prolongeant les directions *HGDL*, *hgdl*, & *TD*, *td*, je mene dessus les perpendiculaires *ÆL*, *Æl*; *ÆR*, *Ær*; & je considere que l'effort *NH* diminué de l'effort contraire *EG*, & multiplié par son levier *ÆR* se

joint à l'effort de $OÆ$ selon YXy multiplié par son levier $ÆX$ pour équilibrer l'effort HD plus l'effort GD multipliés par leur levier commun $ÆL$, les premiers agissant autour de $Æ$ du sens contraire des derniers, & de même pour l'autre face aC du coin.

Ceci étant établi, j'appelle p la résistance en YXy multipliée par $ÆX$; $ÆL$, a ; $ÆR$, d ; AM , h ; MC , b ; AC , c ; $ND = nd$, $\frac{1}{2}f$; & DE , x . Or les triangles rectangles NDT ; ACM , DEF , semblables en ce sens, donnent les Analogies:

$$AC = c \mid CM = b \parallel ND = \frac{1}{2}f \mid \frac{f^b}{d^c} = DT = NH, \text{ \&}$$

$$AC = c, AM = h \parallel ND = \frac{f}{2} \mid NT = DH = \frac{hf}{2}. \text{ On}$$

$$\text{aura aussi: } AC = c \mid AM = h \parallel DE = x \mid DF = \frac{bx}{c} = EG,$$

$$\text{\& } AC = c \mid CM = b \parallel DE = x \mid EF = DG = \frac{bx}{c}, \text{ supposant}$$

aussi que π est à ϕ , comme le poids du coin AC à son frottement sur la face TO du corps à fendre supposée horizontale, en tirant parallèlement à cette face, on aura l'Analogie, comme π est à ϕ , ainsi les pressions DH plus DG ensemble $(= \frac{hf}{2c} + \frac{bx}{c})$ à un 4^e terme $(\frac{bf\phi}{2c\pi} + \frac{bx\pi}{c\pi})$ qui fera la valeur du frottement causé en D par les pressions DH , DG .

Egalant donc maintenant l'effort NH aux deux frottements DH , DG , & à l'effort contraire EG , on a l'égalité

$$\left(\frac{\pi fb}{2c\pi} = \frac{bf\phi + 2bx\phi + 2hx\pi}{2c\pi}\right). \text{ D'où l'on tire } \left(\frac{\pi fb - bf\phi}{2b\phi + 2b\pi} = x\right).$$

$$\text{On aura aussi l'équilibre } (\overline{HD + GD} \times \overline{ÆL} = \overline{NH - EG} \times \overline{ÆR} + p); \text{ c'est-à-dire, } \left(\frac{abf + 2abx}{2c} = \frac{fbd - 2hxd + 2cp}{2c}\right).$$

$$\text{D'où l'on tire } (2abx + 2hdx = fbd + 2cp - ahf), \text{ \& } \left(x = \frac{fbd + 2cp - ahf}{2ab + 2hd}\right).$$

Enfin égalant le premier x avec le second, on aura l'égalité $\left(\frac{\pi fb - bf\phi}{b\phi + b\pi} = \frac{fbd + 2cp - ahf}{ab + hd}\right)$, & $(2cpb\phi + 2cph\pi =$

$$\overline{ah^2\pi + ab^2\pi - ch^2\phi - db^2\phi \times f}), \text{ \& enfin } \left(f = \frac{2cp \times b\phi + b\pi}{a\pi c^2 - ch^2 - db^2 \times \phi}\right)$$

& $(f = \frac{2p \times b\phi + b\pi}{a\pi - c\phi \times c})$, en supposant $AC = \mathcal{A}ER$, ce qui est libre.

On auroit donc aussi $(p = \frac{fc}{2} \times \frac{a\pi - c\phi}{b\phi + b\pi})$, ce qui se réduit à $(f = \frac{2pb}{ac})$ & $(\frac{fac}{2b} = p)$ lorsque $(\phi = 0)$.

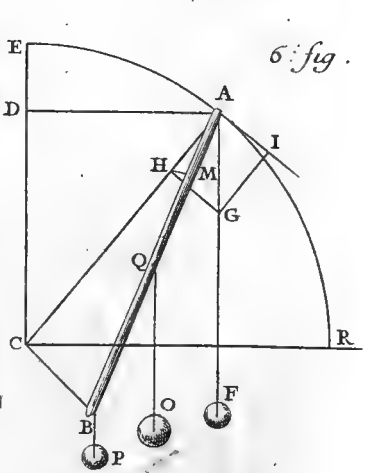
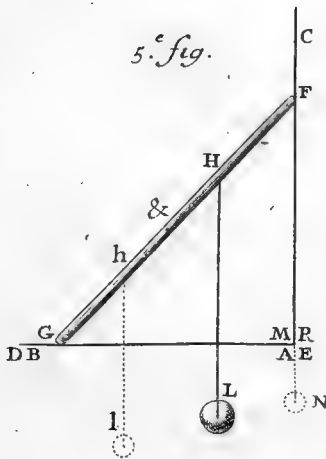
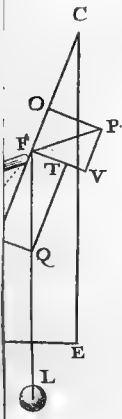
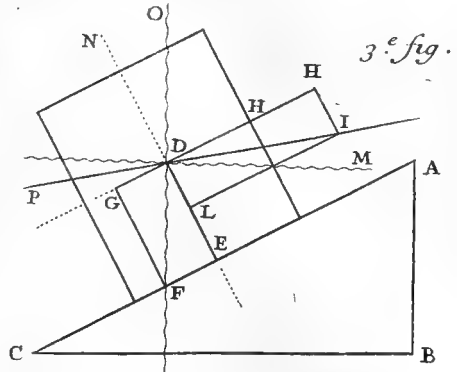
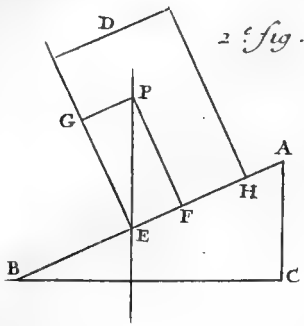
4°. Si au lieu d'un point fixe P , on supposoit que le corps à fendre fut situé sur le plan horizontal Qq (4. Fig.) sans pouvoir glisser, enforte que ses deux moitiés dussent s'écarter l'une de l'autre en tournant sur leurs extrémités Q, q , comme points fixes; ayant prolongé les directions HD, hd , des faces du coin, on meneroit dessus les perpendiculaires QE, qe , & ayant multiplié la résistance en X par la distance perpendiculaire QY, qy , de points Q, q , à la direction YXy , on meneroit encore les perpendiculaires QV, qu , aux faces du coin prolongées, & ayant nommé QE, a ; QV, d , & le produit de la résistance X par QY, p , & le reste demeurant comme ci-dessus, on auroit encore f & p des mêmes valeurs, comme il est évident.

SUITE DU SECOND MEMOIRE,

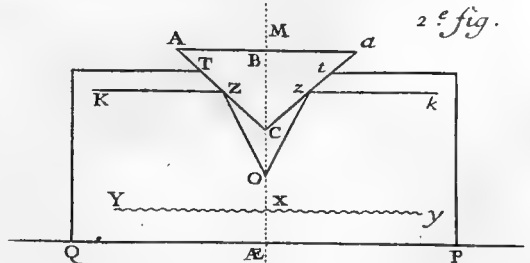
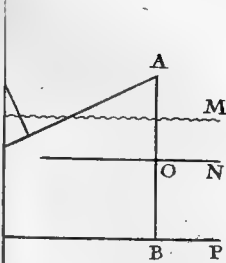
Qui comprend ce qui se fait ordinairement avec la vis ancienne ou à écrou, & la vis-sans-fin.

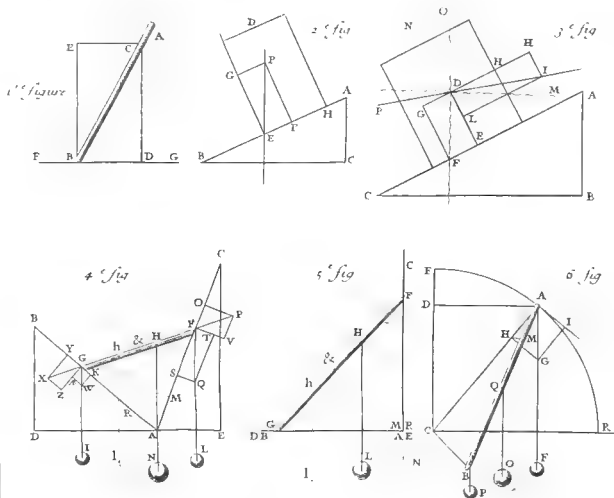
De la Force de la vis ancienne, y compris les frotemens contre son écrou, & contre sa base.

5°. Soit encore un plan incliné (5. & 6. Fig.) dont AB soit la hauteur, & CB la base, & DCA un autre plan incliné tout semblable & égal au précédent, dont AD soit la base, & CD la hauteur, qui soit posé sur le premier en sens renversé, enforte que leurs hypoténuses AC se couvrent. Si l'on met sur le plan ADC un poids E , on pourra le concevoir distribué à tous les points du plan AC ; & si l'on suppose qu'une puissance F pousse le plan incliné ACB selon la droite FG parallèle à la base CB , tandis qu'une autre puissance G égale à la première retient le plan incliné ACB

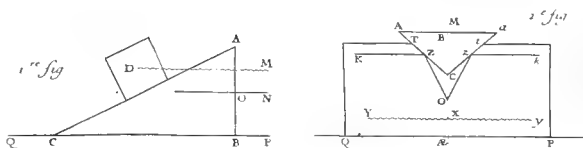


Second memoire





Second memoir



selon la même GF ; alors ACB sera seulement regardé comme un plan incliné, & ADC comme un poids. Mais si l'on conçoit G poussante, & F seulement résistante, ACB sera alors regardé comme un coin. Et de même s'il s'agit de presser des corps E ou I , qui soient de côté ou d'autre des bases des plans inclinés AD , CB , alors ces plans sont simplement regardés comme des coins; les plans inclinés ne se disant qu'à l'égard des poids à élever, & non pas à l'égard de toutes sortes de pressions.

Si l'on tourne maintenant le rectangle $ADCB$ (5. Fig.) sur un cylindre droit, en sorte que ses côtés CB , AD , soient parallèles aux circuits de ses bases, la droite AC sera changée dans une véritable hélice ou vis; de sorte que si CB est égale en longueur au circuit d'une des bases développée, AC formera la longueur d'un des pas de l'hélice, & AB sa hauteur; ou si AB est égale à toute la hauteur du cylindre, telle qu'elle soit, AC sera égale à la longueur de l'hélice entière, & CB au circuit de sa base pris autant de fois qu'il y a de pas dans la vis.

Supposant donc que la puissance F ou G agisse toujours selon une tangente à la surface du cylindre laquelle soit parallèle à sa base, la force sera la même ou pour faire monter le plan incliné ADC sur ACB , ou pour introduire le coin ACB sous le plan incliné ADC , que si ces deux plans étoient encore sur un même plan. De sorte que si la pression E ou I qu'il faut produire selon EI , c'est-à-dire, selon l'axe de la vis, est donnée $=p$, & qu'on veuille trouver la force f nécessaire pour pousser le plan incliné ADC , ou le coin ACB , c'est-à-dire, pour faire tourner ou la vis ou l'écrou, on aura selon le septième cas de l'article 3. du 1^r Mémoire

($f = \frac{\varphi b + \pi b}{\pi b - \varphi b} \times p$). Ou si f est donnée, & qu'on veuille connoître l'effort p , qu'elle est capable de produire selon la

longueur du cylindre de la vis, on aura ($p = f \times \frac{\pi b - \varphi b}{\varphi b + \pi b}$).

Où h signifie ou la hauteur d'un des pas, & b le centre de la base; ou h la hauteur entière de la vis, & b le cercle de la

192 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 base multiplié par le nombre des pas ; ou enfin h la tangente
 de l'élevation de la vis sur le cercle de sa base , & b le sinus
 total ; π & ϕ marquant toujours le rapport du poids de l'écrou
 à son frottement sur le plan incliné de la vis supposé horison-
 tal. On aura $\left(\frac{hp}{b} = f\right)$ & $\left(\frac{bf}{b} = p\right)$ lorsque $\phi = 0$.

Où il faut remarquer que nous n'avons point égard au fro-
 tement causé par les résistances E ou I contre un des collets
 de l'écrou ou de la vis , selon que l'un des deux est mobile.

Et pour avoir égard à ce frottement , on considèrera que
 le frottement du collet CB de la vis (par exemple) contre la
 sole GH ne se fait pas également dans tous ses points , com-
 me si l'on tiroit ce collet en ligne droite sur GH ; mais cha-
 que point de ce collet résiste plus ou moins , selon qu'il est
 plus ou moins éloigné de l'axe de la vis , & cela à l'égard
 de la force motrice qu'on suppose toujours appliquée au
 centre de gravité de la face de la vis ou de l'écrou. On
 pourroit penser aussi que les points de ce collet devroient
 résister encore à proportion de leurs vitesses particulieres
 autour de l'axe. Mais on verra par les expériences suivantes,
 que dans le commencement du frottement , ces vitesses
 n'ont nul effet. Il reste donc que le centre du frottement du
 collet soit le même que son centre de gravité g , en suppo-
 sant ce collet développé sur sa tangente ce en $bcde$ (Fig. 7.
 & 8.)

Appellant donc d la distance du milieu de la face d'un
 des pas de la vis à son axe AB ; e la distance ag du même
 axe au centre de frottement , & $\left(\frac{F}{p}\right)$ le rapport du frote-
 ment de ce collet sur GH à sa pesanteur , on aura pour son
 frottement comparé à la force motrice supposée au centre
 des pas $\left(\frac{pef}{dP}\right)$ ce qui donnera enfin $\left(f = \frac{\phi b + \pi b}{\pi b - \phi b} + \frac{Fe}{Pd} \times p\right)$
 & $\left(p = \frac{dfP \times \pi b - \phi h}{dP \times \phi b + \pi b + Fe \times \pi b - \phi b}\right)$, & $\left(f = \frac{hp}{b}\right)$ ou $\left(p = \frac{hf}{b}\right)$
 lorsque ϕ & F sont $= 0$, comme ci-dessus.

De la force de la vis-fans-fin, y compris les frottemens contre la dent de la roue, contre son collet, & contre celui de la vis.

6°. Supposant encore que D (Fig. 9. & 10.) soit une dent de la roue d'une vis-fans-fin, qui obligée de se mouvoir selon la droite DG tangente au cercle de cette roue, par la pression que lui fait la partie AC de la vis; soit CB (Fig. 9.) une portion du circuit de la vis-fans-fin qui répond à AC , & AB une parallèle à son axe; enforte que ACB est un triangle rectangle dont AC est l'hypoténuse, & CB la base. Si l'on conçoit la force motrice appliquée au circuit de la vis-fans-fin, la vis deviendra un coin ABC rectangle en B , poussé par une puissance selon sa base BC , ou selon sa parallèle OE , entre la dent D qui tient lieu de poids, & le collet de son arbre, dont la résistance contre son paillier est marquée par le corps solide QP , le long duquel on suppose le coin ABC glisser. De même la dent D ne sauroit qu'avancer selon DG , étant retenue par la pression du collet de sa roue contre son paillier, que je représente par le corps solide EF contre lequel elle est obligée de glisser. De sorte que la puissance N a non-seulement le poids D à faire avancer selon DG , mais encore les frottemens en AC , en BC , & en EF à vaincre. C'est pourquoi on ne se trompe pas lorsqu'on croit communément que cette machine est une de celles où les frottemens sont les plus grands.

Nommant donc toujours le sinus total BC , b ; la tangente AB de l'angle ACB de la vis & de sa base h ; l'effort avec lequel la dent est portée contre le coin ACB selon GD par le poids à vaincre p ; $\frac{p}{\phi}$ le rapport du poids de cette dent à son frottement sur AC supposé horizontal, & la force Nf le rapport du poids du plan ACB à son frottement contre $QB = \frac{P}{F}$, & enfin $\frac{P}{F}$ le rapport du poids de la dent à son frottement contre EF ; e le rayon de ce frottement pris comme ag dans l'article précédent, & g celui de la roue DHI ; x le frottement en CB multiplié par e , & divisé par d , comme dans la vis précédente.

Pour avoir en D le frottement contre EF , il est évident qu'il faudra prendre tout l'effort contre $EF = f - x$, & le multiplier par le rapport $\left(\frac{Fc}{Pg}\right)$; & comme ce frottement est conçu résister selon GD , ou dans le même sens que la dent D , il faudra l'ajouter à l'effort de cette dent; savoir à p , afin d'avoir toute la pression contre $QP = f - x \times \frac{cF}{gP} + p = \left(\frac{fFc - xcF + pgP}{Pg}\right)$. Multipliant donc cette pression contre QP par le rapport $\left(\frac{Fe}{Pd}\right)$, on aura le frottement contre CB ou à la circonférence de la vis = $\left(x = \frac{fFc - xcF + pgP}{PgPd} \times Fe\right)$. D'où l'on tirera l'égalité $(PPx dg = Ffc - Fxc + Fpg \times Fe)$, qui donne $\left(x = \frac{Ffc + Pgp}{PPdg + FFce} \times Fe\right)$.

Or l'effort N ayant à vaincre le frottement en $CB = x$, & le poids D plus son frottement sur AC , avec son frottement en EF ; si on retranche de l'effort f le frottement x , & qu'on regarde le poids D , & son frottement en EF , comme un seul poids agissant selon GD , l'effort $f - x$ devra être le même que le premier effort f de l'article précédent; savoir $\left(\frac{\varphi b + \pi h}{\pi b - \varphi h} \times p\right)$, en substituant au lieu de p la valeur $\left(f - \frac{xcF}{Pg} + p\right)$, c'est à-dire, le poids D plus son frottement sur EF , ce qui donnera l'égalité $\left(f - x = \frac{\varphi b + \pi h}{\pi b - \varphi h} \times \frac{Fcf - Fcx + Ppg}{Pg}\right)$. D'où l'on tire $(Pgf \times \overline{\pi b - \varphi h} = \overline{\varphi b + \pi h} \times Fcf + Ppg + \overline{\pi b - \varphi h} \times Pg - \overline{\varphi b - \pi h} \times Fc \times \frac{Ffc + Pgc \times Fc}{PPdg + FFce})$, en substituant la valeur de x ci-dessus.

Or on tire delà cette autre égalité $(Pgf \times \overline{\pi b - \varphi h} \times \overline{PPdg + FFce} - \overline{\varphi b - \pi h} \times \overline{PPdg} + \overline{FFce} \times Fcf - \overline{\pi b + \varphi h} \times \overline{PPfcg} + \overline{\varphi b + \pi h} \times \overline{FFcfe} = \overline{\varphi b + \pi h} \times \overline{PPdg} + \overline{FFce} \times \overline{Ppg} + \overline{\pi b - \varphi h} \times \overline{Pg} - \overline{\varphi b - \pi h} \times \overline{Fc} \times \overline{PPeg})$.

D'où l'on tire en réduisant ($P^2Pg^2df \times \pi b - \phi b - PPFcdg \times \phi b + \pi h = \phi b + \pi h \times P^2Pg^2d + \pi b - \phi h \times P^2FPg^2e$), qui

donne enfin en divisant ($f = \frac{\phi b + \pi h \times Pd + \pi b - \phi b \times Fe}{Pg \times \pi b - \phi b - Fe \times \phi b + \pi b} \times \frac{Pp}{Pd}$) qui

se réduit à ($\frac{\phi b + \pi h}{\pi b - \phi b} + \frac{Fe}{Pd} \times p$) quand $F = 0$, comme dans l'article précédent.

On aura aussi ($p = \frac{Pfd}{Pg} \times \frac{Pg \times \pi b - \phi b - Fe \times \phi b + \pi b}{Pd \times \phi b + \pi b + Fe \times \pi b - \phi b}$), lorsque f sera donnée.

SUITE DU SECOND MEMOIRE.

Expériences pour les frottemens des corps, dont les parties se meuvent avec différentes vitesses, lues le 7. Juillet 1703.

7°. J'ai pris deux planches $ABCD$, $FGHI$, (Fig. 11.) de 4 pouces en carré, & tirées d'une même piece, que j'ai fait raboter tout du long avant de la couper.

1°. Chacune de ces pieces étant chargée d'un poids de 6 livres NL , & tirée avec un ressort MP sur un tapis fort uni, résistoit de 11 quarterons, la table qui portoit le tapis étant fort horifontale; & lorsqu'on mettoit les deux ais l'un sur l'autre, comme en X , & les deux poids par dessus, il falloit 22 quarterons de force pour commencer à les mouvoir sur le même tapis en tirant de même.

2°. Lorsqu'on mettoit les deux ais à côté l'un de l'autre, en sorte qu'ils se touchoient, avec un des poids N dessus, comme en Y , il falloit 13 quarterons pour les mouvoir sur un plan incliné en tirant parallèlement à ce plan, & en les mettant l'un sur l'autre, & le même poids N par-dessus, comme en Z , il ne falloit précisément que le même poids de 13 quarterons. Ce qui prouve que la grandeur de la surface qui frotte ne change pas le frottement, mais seulement le poids dont elle est chargée.

3°. J'ai appliqué les deux mêmes ais contre un levier AB , FG , soutenu contre le point fixe E , & ayant posé sur chacun les mêmes poids N & L de six livres, j'ai tourné une ficelle OM autour d'un des ais, que j'ai tirée avec le même ressort MP toujours parallèlement à la table qui étoit alors horizontale & couverte du même tapis. De plus les milieux O & Q de AB , & FG étoient d'abord également éloignés de l'appui E , & j'ai trouvé que pour commencer à mouvoir ces deux poids, il falloit encore précisément 22 quarterons, comme quand les ais étoient l'un sur l'autre, ou l'un à côté de l'autre, & les 2 poids par-dessus.

4°. Ayant ensuite divisé la distance QQ du levier en 3 parties égales, j'en ai donné 2 à QE , & une à EO , afin que les vitesses de ces 2 ais fussent entr'elles comme 2 à 1; & j'ai trouvé qu'il falloit 34 quarterons pour commencer à les mouvoir, au lieu de 33 qu'il auroit fallu trouver, en prenant 11 pour N , & 22 pour L , selon la proportion de leurs distances à E ; ce qui étoit presque insensible avec le ressort dont je me servois.

Et ayant ensuite donné 2 parties à EO , & une seulement à EQ , il a fallu 16 quarterons pour commencer à les mouvoir, au lieu de $16\frac{1}{2}$, en prenant toujours 11 pour N , & $5\frac{1}{2}$ pour L , selon le rapport des distances au point fixe E .

5°. J'ai ensuite divisé OQ en 4 parties égales, & en ayant donné 3 à QE , & 1 à EO , il a fallu 46 quarterons pour les mouvoir, au lieu de 44, en prenant toujours 11 pour N , & 33 pour L , selon la proportion des parties QE , EO .

Et ayant donné une seule partie à QE , & 3 à EO , j'ai trouvé qu'il falloit 14 quarterons $\frac{1}{2}$, au lieu de $14\frac{2}{3}$, prenant toujours 11 pour N , & $3\frac{2}{3}$ pour L , selon la proportion de 3 à 1, ou de EO à EQ .

6°. Enfin j'ai divisé QO en 5 parties, & en ayant donné 3 à QE , & les 2 autres à EO , il a fallu 27 quarterons pour commencer à faire le mouvement, au lieu de $2\frac{1}{2}$, donnant 11 quarterons à N , & $16\frac{1}{2}$ à L , selon le rapport $\frac{3}{5}$.

Et ayant donné au contraire 2 parties à QE , & 3 à EO , il a fallu 18 quarterons pour commencer à les mouvoir,

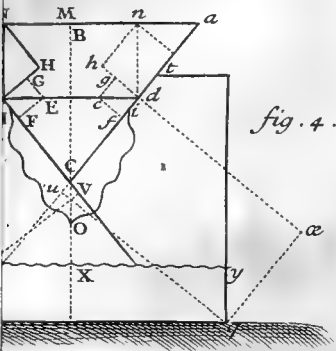


fig. 4.

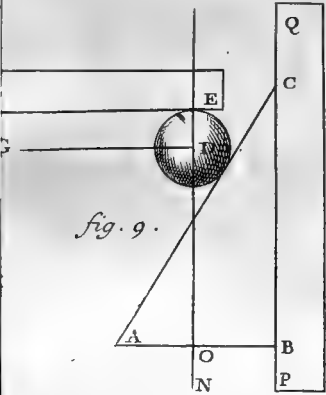


fig. 9.

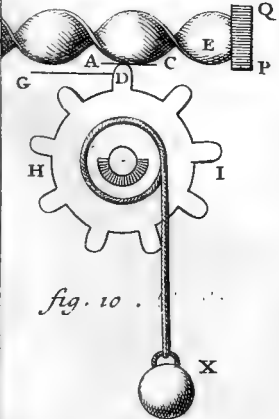


fig. 10.

figure 1. ere

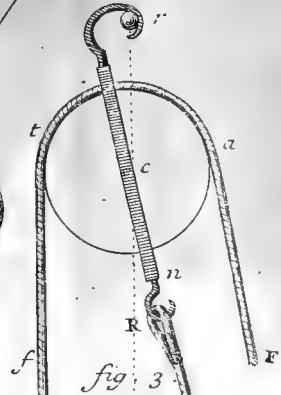
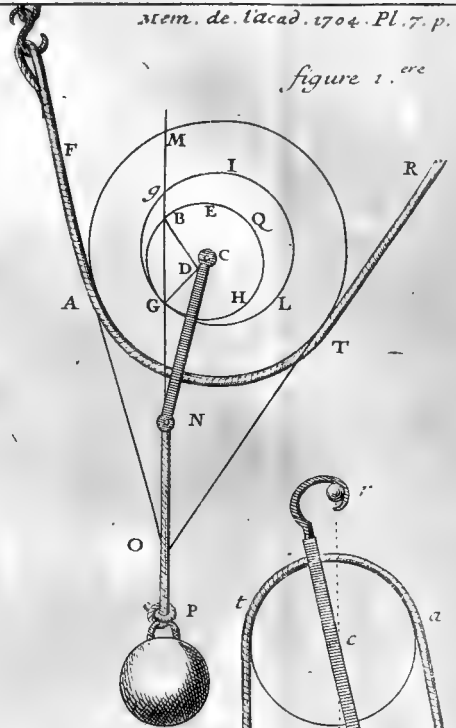


fig. 3.

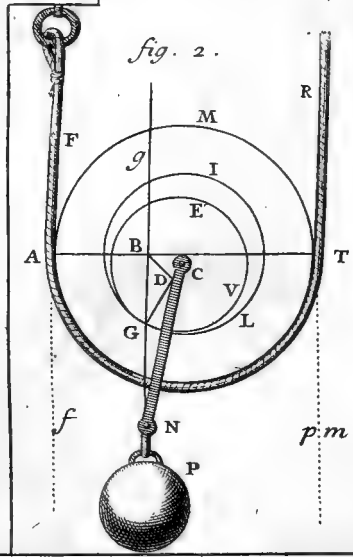


fig. 2.

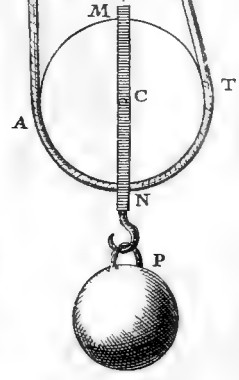


figure 1^{re}

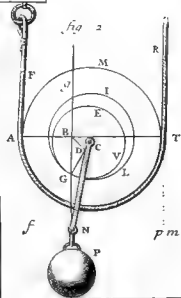
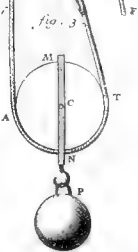
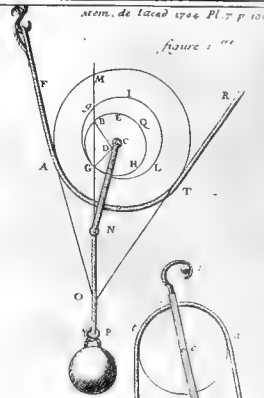


fig 2

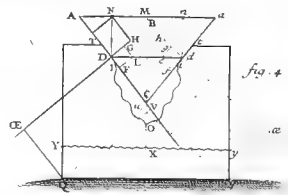


fig 4

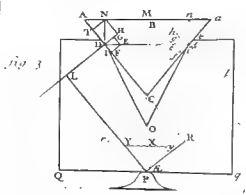


fig 3

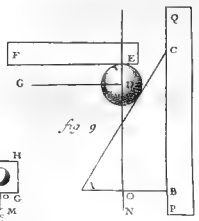


fig 9

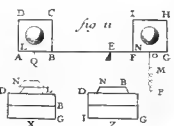


fig 11

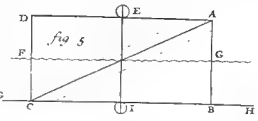


fig 5

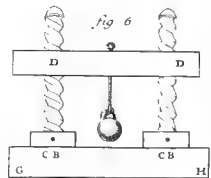


fig 6

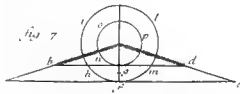


fig 7

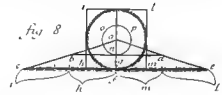


fig 8

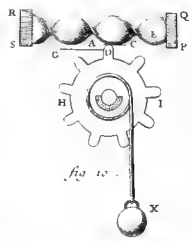


fig 10

au lieu de $18 \frac{1}{3}$, en donnant 11 à N , & $7 \frac{1}{3}$ à L , selon le rapport de EO à EQ , ou de 3 à 2.

Or toutes ces expériences font voir que les différentes vitesses insensibles n'alterent point le rapport des distances.

O B S E R V A T I O N S

D E L A

DERNIERE ECLIPSE DE LUNE.

PAR M. CASSINI.

LA dernière Eclipsé de Lune qui est arrivée le 17 de 1704:
5. Juillet. Juin de cette année 1704, n'a pas été observée à Paris, parce que l'horison étoit couvert de nuages à l'endroit où la Lune se leva, lorsqu'elle étoit prête de sortir entièrement de l'ombre.

Nous en avons deux observations, une qui a été faite à Modene par le Pere Fontana, Theatin, très-versé dans les observations Astronomiques. Les nuages ne lui permirent pas de l'observer aussi-tôt que la Lune fut levée. Il la vit entre les nuages à 8 heures 3 minutes pendant un très-petit espace de temps, lorsqu'elle recouvroit sa lumiere, & qu'il y restoit environ 9 doigts d'Eclipsé. Il la vit vers la fin de l'Eclipsé, lorsqu'il étoit difficile de distinguer l'ombre de la pénombre; & autant que cette difficulté le lui permit, il jugea que la fin arriva à $8^h 53'$. Il lui resta encore quelque scrupule sur l'horloge dont il se servoit, qu'il ne vérifia point après l'observation.

L'autre observation de cette Eclipsé a été faite par Messieurs de Plantade, Bon, & de Clapies à Montpellier.

Elle s'accorde avec celle de Modene dans la grande difficulté qu'il y avoit à distinguer l'ombre de la pénombre; ce qui empêcha de déterminer la grandeur des phases.

Autant qu'il fut permis par les nuages qui interrompoient l'observation, on la vit pendant 29 minutes & de-

198 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
mie ; au lieu qu'à Modene on la vit pendant cinquante
minutes.

La fin à Montpellier fut marquée à $8^h 15' 6''$. La fin de
la pénombre à $8^h 18' 40''$.

Il seroit inutile de comparer ensemble ces temps des Ob-
servateurs, puisque le Pere Fontana ne donne pas la sienne
pour assurée, tant par la difficulté de distinguer le terme de
l'ombre, que pour n'avoir pas rectifié l'horloge par la hau-
teur d'une étoile fixe.

On peut plus compter sur celle de Montpellier, où l'hor-
loge avoit été réglée par les observations correspondantes
du Soleil, & rectifiée deux fois après l'Eclipse par les hau-
teurs de la Lire, qui donnoit l'heure dans la même seconde
que la pendule.

Cette dernière Eclipse de Lune est arrivée six mois &
demi après la dernière Eclipse du Soleil, dont nous obser-
vâmes le commencement à l'Observatoire Royal le 8 De-
cembre 1703 à 4 heures précises du soir. Les autres cir-
constances de cette observation ont été rapportées distincte-
ment dans le Livre des Connoissances des Temps de l'an-
née 1704.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

DE M. MANFREDI,

*Sur une Eclipse de Venus par la Lune, observée à
Bologne le 30 Juin 1704. & rapportée
par M. Maraldi.*

1704.
19. Juillet.

Hier le 30 Juin après midi, je finis une observation
assez singulière de l'occultation de Venus par la Lu-
ne en plein jour, & dans une distance du Soleil d'envi-
ron 17 degrés. La Lune la toucha selon mon observation
avec une Lunette de dix pieds $\frac{1}{2}$ à 4 heures $30' 15''$, & elle

la couvrit toute entiere à 4 heures 30' 33". Mais suivant l'observation de M. Stancari, le centre de Venus fut caché par la Lune à 4^h 30' 18", & toute Venus fut couverte à 4^h 30' 33" avec une Lunette de huit pieds. Comme l'on ne voyoit point la Lune même par des Lunettes qu'avec une grande peine, & par rapport à Venus qu'on favoit lui être fort voisine, aussi-tôt que Venus fut cachée l'on ne vit plus la Lune; aussi il ne fut pas possible d'en observer l'Emerfion.

O B S E R V A T I O N

*De l'Eclipse de Lune faite à Bologne le 17 Juin 1704,
par Messieurs Manfredi & Stancari, &
rapportée par M. Maraldi.*

LEs observations des Taches ont été faites avec une excellente Lunette de dix pieds. Le temps est marqué à l'heure vraie après midi. 1704.
19. Juillet.

- | | | | |
|----------------|-----|-----|---|
| 8 ^h | 40' | 47" | La Lune commence à fortir des nuages, & Proclus est forti de l'ombre. |
| 8 | 41 | 2 | Mare Crisium commence à fortir de l'ombre. |
| 8 | 42 | 0 | L'ombre à la moitié de Mare Crisium. |
| 8 | 42 | 22 | Hermes se découvre. |
| 8 | 43 | 0 | Messale se découvre. |
| 8 | 43 | 42 | Cléomédes se découvre. |
| 8 | 44 | 31 | Mare Crisium se découvre entierement. |
| 8 | 47 | 15 | La fin de l'Eclipse. |

*Observations des doigts avec une Lunette de douze pieds,
qui avoit un Micrometre à son foyer.*

- | | | | |
|----------------|----|-----|--|
| 8 ^h | 2' | 20" | La Lune est éclipsée de huit doigts 35', & la Lune se cache aussi-tôt. |
| 8 | 39 | 57 | La partie éclipsée de la Lune est de 1 ^{doigt} 45' |
| 8 | 41 | 17 | elle est de 1 ^{doigt} 17. |

8^h 42' 17" 1^{doigt} 9'

8 43 42 0 50

8 47 $\frac{1}{4}$ Fin de l'Eclipse.9^h 0 Le diametre de la Lune passa par un cercle horaire
en 2' 33".*Occultation de l'Etoile β dans le Scorpion faite par la Lune
le 15 Juin 1704, & observée par M. Stancari.*

- 9 19 0 Temps vrai après midi, le diametre de la
Lune étoit de 32' 53".
- 9 49 42 L'étoile est cachée par la Lune.
- 10 59 2 L'étoile sort du bord de la Lune en ligne
droite avec Prostarachus & la partie supé-
rieure de Langrenus.

REPONSE DE M. DE LAGNY

AUX REMARQUES

DE M. CHAZELLES

*Sur son Mémoire Hydrographique.*1704.
1. Août.

L Es Remarques de M. Chazelles ayant été imprimées dans les Mémoires de l'Académie de 1702, & mon Mémoire ne l'ayant été qu'avec ceux de 1703 en mon absence & sans ma participation, je n'ai pu y répondre plutôt.

Voici par où il commença.

1°. *La supposition de la rondeur de la terre dans la construction des Cartes & dans l'usage de la Navigation, que M. de Lagny veut abandonner, fondé sur les observations de sa mesure faite par Snellius, par Riccioli & par M. Picart, me paroît suffisamment prouvée par l'apparence de son ombre dans les éclipses de Lune, & par la figure sphérique de toutes les Planètes. Ce sont les propres termes de M. Chazelles.*

Je

Je répons premièrement, que dans la construction des Cartes réduites & dans l'usage de la Navigation, j'ai supposé la rondeur de la terre. Cela est évident par le Theoreme géométrique, sur la construction de ces Cartes, rapporté dans les Mémoires de 1703, pages 99 & 100 : car j'y suppose pour méridien un cercle, & non pas une ellipse. Ce Theoreme est la seule chose essentielle de mon Mémoire, & c'est la seule dont il n'a point parlé. Comment M. Chazelles peut-il donc supposer que j'abandonne l'hypothese de la rondeur de la terre ? J'ay seulement touché en passant les raisons qui paroissent prouver sa sphéroïdité.

Je répons en second lieu, que l'apparence de son ombre dans les Eclipses de Lune prouve plutôt pour que contre la figure elliptique. Hevelius, dans sa Sélénographie, a remarqué qu'un diametre de l'ombre étoit beaucoup plus petit qu'il n'auroit dû l'être, suivant l'hypothese ordinaire ; & dans les Journaux de Leipsik de 1686, page 52, & de 1687, page 157, on rapporte des observations sur cette ombre qui prouvent au contraire la sphéroïdité de la terre.

Enfin, la figure sphérique de toutes les Planetes n'est qu'un simple préjugé pour la sphéricité de la terre, & cela seulement dans l'hypothese de Copernic, où la terre est elle-même une Planete. C'est une Analogie, une pure vraisemblance qui ne peut rien prouver contre des observations exactes qui établiroient le contraire. D'ailleurs nous ne sommes assurés qu'à peu près de la sphéricité des Planetes : elles sont si éloignées & nous paroissent si petites, qu'elles pourroient être elliptiques, & nous paroître sphériques, parce que les deux angles sous lesquels nous verrions leur grand & leur petit axe ne différeroient pas sensiblement.

Jupiter a paru long-temps elliptique.

2°. M. Chazelles prétend qu'on peut aisément accorder Snellius & le P. Riccioli, quoique la différence de leurs observations aille à neuf milles Italiques par degré. *Il n'y a, dit-il, pour cela qu'à faire quelques petites corrections tant dans leurs mesures actuelles que dans les opérations Trigonométriques & Astronomiques, telles que l'inégalité du terrain, & la petitesse ou le défaut des instrumens peuvent laisser supposer.* Le P.

Riccioli a pris la peine de le faire par le moyen de quelques suppositions & corrections qu'on n'a pas de peine à lui accorder.

Il faut être bien prévenu pour raisonner de cette maniere. Il n'y a qu'à faire quelques suppositions, &c. M. Chazelles peut voir la réfutation de cette prétendue conciliation dans la Differtation de M. Eifenschmid de *figura telluris elliptico-spheroidica*, pag. 27 & 28.

3°. Après avoir tâché de concilier ces deux Auteurs, M. Chazelles veut aussi concilier Riccioli & M. Picart. Il rejette la différence qui se trouve entre leurs observations sur l'erreur que peut avoir causé la réfraction dans la hauteur apparente des deux termes, & sur la finesse des divisions des instrumens de M. Picart. Il seroit, je crois, assez difficile à M. Chazelles de prouver que les instrumens de Riccioli n'étoient pas divisés avec autant de finesse que ceux de M. Picart. M. Chazelles auroit pû dire avec plus de raison que les instrumens de M. Picart avoient un avantage considérable sur ceux de Riccioli, parce que M. Picart avoit ajouté des Lunettes à ses instrumens. A l'égard de la réfraction, c'est une supposition purement arbitraire. Mais à quoj aboutissent toutes ces conjectures sur les erreurs de Snellius & de Riccioli, puisqu'il n'en veut conclurre que l'égalité des degrés de latitude, & que suivant les dernières observations de M. Cassini que M. Chazelles approuve, si M. Picart lui-même avoit fait des observations à Boulogne & en Hollande, il auroit dû trouver des grandeurs sensiblement différentes? M. Chazelles veut-il que ces degrés soient égaux & inégaux tout ensemble?

4°. Il s'attache ensuite à faire l'éloge des observations de M. Picart, & en cela je suis tout-à-fait de son sentiment. Mais quand il ajoute: *Tout cela fait sentir que la grandeur trouvée d'un degré de la terre est à cent toises près la véritable*, il me permettra de lui demander ce qu'il entend par ces mots, *tout cela fait sentir*. Ce n'est point par sentiment qu'on juge de ces sortes de choses, comme on juge d'une piece d'éloquence ou de poésie. Il faudroit par un calcul exact fixer des limites d'erreurs fondées sur l'expérience des plus

habiles Observateurs : par exemple, de tant de secondes sur chaque angle observé, tant de pieds sur tant de toises mesurées actuellement, & prendre ensuite toutes ces erreurs par excès & par défaut, on auroit de cette maniere des limites justes de la certitude des observations. Mais encore une fois, la grandeur trouvée d'un degré de latitude terrestre par M. Picart, ne peut être la véritable qu'entre les paralleles où il a observé.

5°. M. Chazelles se repentant en quelque maniere de l'approbation qu'il avoit donnée aux observations de M. Cassini, ajoute qu'on peut attendre avant que de prendre son parti, que les observations pour le méridien aient été achevées du côté du Nord, comme elles le sont du côté du Sud. Si l'on avoit des observations faites en Afrique ou en Amérique proche de l'Equateur, on auroit raison de dire qu'elles sont achevées du côté du Sud. C'est là où la différence doit être plus sensible, en comparant ces observations avec celles qu'il faudroit faire proche du pole en Suede ou en Laponie, &c.

6°. Les sécantes augmentent autant les unes sur les autres que les sinus des complémens de latitude. Si l'on prend ces termes à la rigueur, c'est un paralogisme, & la proposition est évidemment fausse. Il confond la raison & la proportion géométrique avec la raison & la proportion arithmétique. Les sécantes augmentent beaucoup plus, & indéfiniment plus les unes sur les autres que le sinus de complémens. Il falloit dire, les sécantes croissent en même raison que les sinus de complémens.

7°. M. Chazelles se donne beaucoup de peine pour prouver qu'il faut s'accommoder à la portée des Pilotes : que leurs calculs ne sont pas capables de l'exaëtitude géométrique : qu'il est inutile de rechercher cette exaëtitude dans une partie du calcul, lorsque les autres parties ne peuvent pas l'avoir. Je soutiens au contraire, & c'est une maxime de la dernière évidence, que lorsqu'on ne peut pas être exact en tout, il faut l'être du moins dans la partie qui est susceptible de cette exaëtitude. C'est même un motif pour redoubler notre attention & notre exaëtitude.

Je conviens avec M. Chazelles de l'incertitude de l'estime, de celle du rhumb de vent, de la dérive, &c. Mais que conclut tout cela contre la plus grande exactitude des Cartes réduites? Je veux bien supposer avec lui que la construction que je propose passe la portée ordinaire des Pilotes: mais l'usage n'en fera en rien plus difficile pour eux, & c'est uniquement de quoi il s'agit. Mon Theoreme en est-il moins vrai, ou moins digne de l'attention des Géometres? C'est plus en Géometre qu'en Hydrographe que je l'ai proposé. Je dis plus, l'erreur des Cartes réduites peut devenir très-sensible proche des poles, parce que la raison des deux sommes du nombre infini de sécantes comprises entre chaque deux arcs prochains y differe très-sensiblement de la raison simple des deux sécantes de ces mêmes arcs, & l'erreur pourra être du simple au double, au triple & au centuple, & à l'infini.

8°. *L'Arbalestrille est le meilleur instrument qu'on employe à la mer.* Je ne vois pas pourquoi M. Chazelles, contre le sentiment des plus habiles Hydrographes, préfere l'Arbalestrille au Quartier Anglois.

9°. *Les meilleurs Pilotes abandonnent les Tables des Sinus; les Tables Loxodromiques, &c.* Il devoit dire: *Le commun des Pilotes, ce n'est pas habileté, c'est ignorance ou paresse.*

10°. *L'on seroit trop heureux si toute l'erreur se trouvoit dans la supposition qu'on fait en se servant du Quartier de réduction, que le chemin du Vaisseau est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, &c.* Les erreurs du Quartier de réduction sont si considérables, que dans quelques exemples rapportés par certains Auteurs qui sont entre les mains de tous les Pilotes, elles vont à dix & douze degrés de différence en longitude. Après cela peut-on dire qu'on seroit trop heureux, &c.

11°. Ma Remarque sur les sondes de haute comme de basse mer ne paroît praticable à M. Chazelles que dans les Cartes particulieres & Topographiques, & dans les Cartes générales on doit, dit-il, se contenter de celles de basse mer. C'est déjà quelque chose que ma Remarque puisse être utile pour les Cartes particulieres. Mais peut-on nier que

même dans les Cartes générales où l'on marque un si grand nombre de sondes de basse mer, il ne fût très-facile & très-utile d'y marquer une seule fois en chiffre romain dans chaque Port & à l'embouchure des rivières la sonde de haute mer? Où est l'embaras, & l'utilité n'est-elle pas évidente?

12°. *On peut marquer les courans par des traits.* M. Chazelles remarque que cela ne se peut à l'égard des courans qui ne sont pas réglés. Hé, qui en doute! La comparaison que je fais des vents alifés qui sont marqués de même dans des Cartes Angloises, ne fait-elle pas voir que je n'ai entendu parler que des courans réglés? On ne sauroit marquer sur une Carte le cours des vents irréguliers; on ne peut pas non plus y marquer ceux des courans qui varient: mais on le pourroit, & on le devoit faire à l'égard des courans réglés & sensibles. M. Chazelles ne niera pas qu'il n'y en ait, les uns en tout temps, les autres par rapport à l'heure, à l'âge de la Lune; & on pourroit les marquer tous, les premiers absolument suivant leur direction, les autres avec des marques respectives au temps où ils arrivent. Ce que M. Chazelles rapporte de l'irrégularité des courans sur la côte de Poitou, ne prouve donc rien absolument contre moi.

Je conclus que mon Théoreme sur la construction des Cartes réduites, & toutes mes Remarques sur les Cartes marines en général subsistent en leur entier.

Il faut remarquer par rapport à ce Théoreme que dans les pages 99 & 100 des Mémoires de 1703, il faut entendre par le mot d'hyperbole équilatere, une hyperbole formée par la somme des sécantes du quart de cercle, de même que l'hyperbole ordinaire est formée par les sécantes du triangle rectangle. C'est la Courbe *AQRS*, &c. qui est l'hyperbole dont j'entens parler, & la Courbe *AKLM*, &c. est l'hyperbole ordinaire.



TROISIEME MEMOIRE.

Des Poulies & de leurs Tourillons.

PAR M. PARENT.

1704.
1. Août.

1°. Soit une poulie *AMT* (Fig. 1.) soutenue sur la corde *FAIR*, *GIL* un trou autour du centre de la poulie qui sert de paillier, *GEH* le tourillon fixe avec la chape *CN* dont *G* soit le centre, *P* le poids suspendu à la chape par la corde *PN*, *G* le point d'attouchement du tourillon & du paillier lorsque la puissance motrice *F* tirant la corde *AF* a mis le tourillon *GEH* en état de commencer à glisser, de sorte que *G* soit le plan d'équilibre du tourillon : il est évident que la verticale *PN* étant continuée passera par *G*, puisque *G* est le point de suspension de *P*. On ne doit pas douter non plus qu'ayant prolongé les directions *FA*, *RT*, elles ne se coupent sur *NP* comme en *O*, puisqu'autrement le poids *P* ne seroit pas soutenu par les puissances *F* & *R*, & ne demeureroit pas en repos, comme on le suppose. L'équilibre étant donc ainsi établi entre *PE* & *R*, & entre *P* & le frottement du plan *G*; il est évident que si l'on prend sur *ON* prolongée la partie *BG* pour marquer le poids *P*, que l'on mène le rayon *CG*, & sur *CG* la perpendiculaire *BD*; *BD* sera à *DG*, comme le frottement du tourillon sur le paillier *IGL* est à sa pesanteur.

De plus le poids *P* étant soutenu par les deux puissances *F*, *R*, il est évident que la verticale *GP* est leur direction composée. Puis donc que dans l'état de l'équilibre tout est fixe, si l'on veut regarder le tourillon *GEH* comme immobile & fixe, & la puissance *F* comme vaincante la puissance *R* autour du point fixe *G*, on tombera dans le cas où les deux puissances *F* & *R* appliquées à la circonférence d'une même roue, sont équilibre entr'elles autour d'un tourillon *GEH* immobile, qu'on examinera dans le Mémoire suivant.

Mais comme en tirant la corde *AF* pour amener le

tourillon GEH sur le plan d'équilibre G , les directions FA , RT , qui d'abord faisoient des angles égaux en O avec NP , changent continuellement pour en faire d'inégaux; cela pourroit apporter quelque difficulté à déterminer la force F , qui ne seroit pas récompensée par le peu de fruit qu'on en retireroit. C'est pourquoi nous supposerons maintenant les directions AF , RT , toutes deux verticales ou paralleles à GP (Fig. 2.) qui est le cas le plus d'usage, réservant le cas général pour le Mémoire suivant.

Menant donc la droite AT qui sera parallele à l'horizon, comme il est aisé de le voir, & prolongeant la verticale PG sur AT en B , menant BD perpendiculaire à CG , on aura les triangles rectangles semblables $CG B$, BGD , à cause de l'angle commun G . C'est pourquoi supposant que BD soit à DG , comme f à p ; appellant AC ou CT , a ; CG , b ; F , x ; & P , m ; on aura l'Analogie $BG \parallel BD \parallel \sqrt{p^2 + f^2} \mid f \parallel CG = b \left(CB = \frac{bf}{\sqrt{p^2 + f^2}} \right)$, d'où l'on tirera $(BT = \frac{a\sqrt{p^2 + f^2} + bf}{\sqrt{p^2 + f^2}})$. Mais on a par les principes

de Statique l'Analogie : $AT = 2a \mid BT = \frac{a\sqrt{p^2 + f^2} + bf}{\sqrt{pm + f}} \parallel P = M \mid \left(\frac{am\sqrt{p^2 + f^2} + mbf}{2a\sqrt{p^2 + f^2}} = F \right)$, qui devient $(F = \frac{a}{2})$ quand $f = 0$, comme on le voit.

Si l'on veut avoir R , on aura par les mêmes principes de Statique l'Analogie : $AT = 2a \mid AB = \frac{a\sqrt{p^2 + f^2} - fb}{\sqrt{p^2 + f^2}} \parallel P = M \mid \left(R = \frac{am\sqrt{p^2 + f^2} - fmb}{2a\sqrt{p^2 + f^2}} \right)$, qui devient $\frac{m}{2}$ lorsque $f = 0$.

Donc $F \parallel R \parallel a\sqrt{p^2 + f^2} + fb \mid a\sqrt{p^2 + f^2} - bf$.

On aura donc aussi $\left(m = \frac{2aF\sqrt{p^2 + f^2}}{a\sqrt{p^2 + f^2} + bf} \right) = P$, lorsque F sera connue, & m inconnue; ou $\left(m = \frac{2a\sqrt{p^2 + f^2}R}{a\sqrt{p^2 + f^2} - fb} \right)$.

2. Si l'on veut supposer au contraire que la puissance f

tirant de haut en bas soutienne le poids p ou m au moyent de la corde fMp passée par-dessus la poulie AMI (Fig. 3.), on aura $(F = \frac{mbf + am\sqrt{p^2 + f^2}}{a\sqrt{p^2 + f^2} - fb})$, qui se réduit à m lorsque $f = 0$.

Et si l'on veut comparer cette valeur avec celle de F du premier cas de cet article, on verra que F dans le premier cas est à F dans le second réciproquement, comme $(a\sqrt{p^2 + f^2} - fb)$ est à $2a\sqrt{p^2 + f^2}$, c'est-à-dire, comme 1 à 2 lorsque $f = 0$.

On aura donc aussi dans ce 2^d cas $(\frac{aF\sqrt{p^2 + f^2} - fFb}{a\sqrt{p^2 + f^2} + bf} = m)$ lorsque F sera connue, qui donne aussi $F = m$, quand $f = 0$.

3°. Lorsque le tourillon GEH (Fig. 1.) sera fixe avec la poulie (ce qui réussit toujours mieux dans la pratique), le seul changement qui arrivera, est que l'attouchement g sera sur la partie opposée du paillier de la chape au point où la direction PN la rencontre, à cause que PNG fait des angles égaux en G & g , avec la circonférence du paillier $GgIL$. Donc puisque les angles des directions FAO , RAO , avec GPO feront les mêmes, & P le même que dans le premier cas, il est évident que les puissances F & R feront encore les mêmes.

Au reste nous avons supposé le diametre du tourillon à fort peu près égal à celui de son paillier comme dans l'usage ordinaire, laissant le reste aux curieux Géometres.

Des Mouffles ou Poulies composées à plaisir.

4°. Enfin si l'on a un poids P (Fig. 30.) suspendu à une poulie AMT par sa chape MCN au moyen de la corde fAT , qui passant par-dessous AMT va s'attacher d'un bout R à la chape mcn d'une seconde poulie amt suspendue en r , & qui tournant ensuite par-dessus amt , est tirée par la force F , en telle sorte que les tourillons C & c de ces

ces deux poulies soient prêts à glisser ; on trouvera la force F , en cherchant d'abord celle qu'il faut mettre en f pour soutenir le poids P donné, comme dans le premier cas. Regardant ensuite la force connue f comme un poids à soutenir par la force F , par dessus la poulie amt , on aura comme dans le second cas la force F capable de soutenir f , & par conséquent P ; & ainsi d'un plus grand nombre de poulies tant supérieures qu'inférieures.

Au reste il est évident que les tourillons Cc doivent être les moindres qu'il soit possible, puisque si dans quelque-une des valeurs de F ci-dessus on suppose ($b=0$), les frottemens s'évanouiront.

Il resteroit d'examiner la résistance causée par la dureté des cordages ; mais nous remettrons ceci à un autre Mémoire, comme étant d'un autre nature.

DESCRIPTION D'UN LIEU

G E O M E T R I Q U E ,

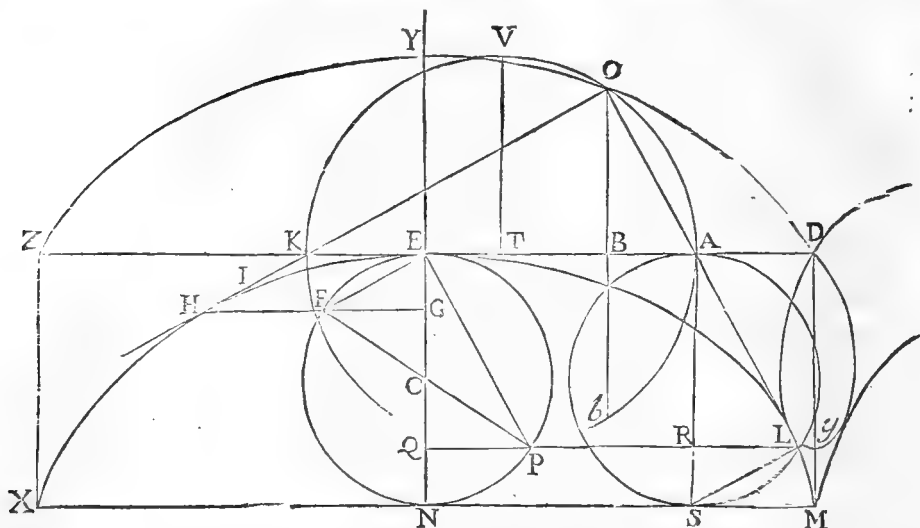
*Où sont les sommets des angles égaux formés par deux
Touchantes d'une Cycloïde.*

PAR M. DE LA HIRE.

Soit une Cycloïde $XELM$ dont le cercle générateur est EPN ; la base XM , & l'axe EN . Soit achevé le rectangle XD sur la base XM . De quel point A on voudra de la ligne ED soit mené AL touchante de la Cycloïde en L ; & sur ED soit pris AK égale à ED ; & sur AK pour diamètre soit décrit le cercle $AO K$. Ayant prolongé LA jusqu'au cercle $AO K$ en O ; du point O soit abaissé OBb perpendiculaire sur ED , & du point A soit aussi abaissé AS perpendiculaire sur NM . Si l'on décrit sur AS le demi-cercle générateur ALS , on fait par les propriétés de la Cycloïde, que ce cercle passera par le

1704.
26. Juillet.

250 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 point touchant L , & que la partie de la base SM sera égale à l'arc SL , qui fera aussi égal à AD . Mais ayant mené LS & LRQ parallèle à MN , le triangle $LR S$ fera semblable au triangle ARL & au triangle OBA .



Il s'en suit donc de là que l'arc AO ou Ab du cercle AOK est semblable à l'arc SL du demi cercle SLA ; & par conséquent il y aura même raison du diamètre AS au diamètre AK , que de l'arc SL ou de la ligne droite AD , à l'arc AO , ou que de la corde SL à la corde AO .

La ligne $LRPQ$ étant parallèle à la base XM , rencontrera au point P le cercle générateur EPN dont le diamètre est placé sur l'axe de la Cycloïde, & EP fera parallèle à AL , & PN parallèle à LS .

Mais si par le point P du cercle générateur & par son centre C on mène le diamètre PCF qui rencontre le cercle en F , & qu'on tire ensuite la corde EF ; & que par le point F on mène la ligne GFH parallèle à NM qui rencontre la Cycloïde en H , on fait que la ligne HI parallèle à EF touchera la Cycloïde en H .

Je dis maintenant que cette ligne HI étant prolongée

passera par le point K , & ensuite par le point O du cercle AOK .

Par la construction AK est égale à DE , & par conséquent $E K$ sera égale à AD qui est égale à l'arc SL ou NP ou EF . Mais l'arc EF est égal à FH ; donc $E K$ est égale à HF : mais HI & FE sont parallèles; donc HI passe en K en formant le parallélograme $EFHK$. HK doit aussi passer en O : car les deux lignes HIK , LAO sont parallèles aux deux lignes EP , EF qui forment un angle droit dans le demi cercle PEF , elles formeront donc aussi un angle droit par leur rencontre; & comme elles passent par les extrémités du diamètre KA du cercle AOK , elles se rencontreront nécessairement en O sur sa circonférence.

Il s'ensuit donc de là que les deux touchantes OL , OH de la Cycloïde menées du point O , feront un angle droit dans ce point O .

Je dis maintenant que tous les points comme O d'où deux touchantes menées à la Cycloïde contiennent un angle droit, sont dans la courbure d'une Cycloïde $ZYDy$, qui est le lieu de ces angles droits qui sont faits par les touchantes de la Cycloïde proposée.

Je dis de plus que cette Cycloïde a pour cercle générateur le cercle AOK dont le diamètre KA est égal à la circonférence du demi cercle générateur de la Cycloïde proposée: mais que cette Cycloïde est une Cycloïde raccourcie, & qu'il n'y a que la portion DYZ qui est au-dessus de la ligne DE , qui passe par le centre de son cercle générateur, dont tous les points servent à mener deux touchantes à la Cycloïde proposée.

Par la démonstration précédente il est évident que tous les points comme O seront tous dans la circonférence du même cercle AOK : mais dans des différentes positions de son diamètre KA sur la ligne DE .

Nous avons vû que la ligne AD , où l'arc SL sera toujours à l'arc AO dans une même raison, qui est celle des diamètres AS à AK ; ou EN à NM , ou ED .

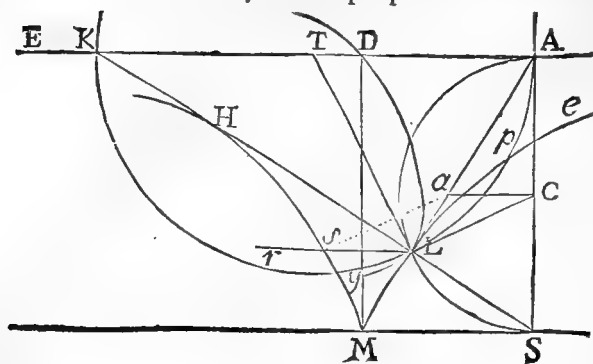
Si l'on place donc le diamètre du demi cercle AOK sur

DE, & que le point décrivant *O* étant en *D*, le diamètre & le centre se meuvent sur *DE* d'un mouvement égal à celui que le point décrivant de la Cycloïde proposée feroit sur son cercle générateur si elle commençoit en *M* en allant par *L* en *E*, ou égal à celui qui feroit le centre du cercle *ALS*: car dans la Cycloïde *MLE*, le mouvement du centre du cercle générateur sur une ligne parallèle à sa base, est égal à celui du point décrivant, enforte que quand le point décrivant de la Cycloïde *MLE* aura parcouru l'arc *SL*, l'extrémité de son diamètre qui étoit en *M* aura parcouru la partie *MS* de sa base, laquelle est égale à l'arc *SL*; & de même l'extrémité *A* du diamètre *AD* du cercle générateur du lieu *DOY* aura parcouru la partie *DA* égale à *SM*: mais le point décrivant *O*, qui étoit d'abord en *D*, aura parcouru l'arc *AO* qui aura même raison à *DA* ou à l'arc *SL*, que son diamètre *AK* au diamètre *EN*; alors la ligne menée du point *O* au point *L* qui passera par *A*, touchera la Cycloïde proposée en *L*, ce qui est évident par ce qui a été démontré ci-devant. Mais si dans le même-temps que le demi cercle générateur s'est mu de *M* en *S*, le demi cercle générateur *EFN* dont le diamètre étoit posé sur l'axe, s'est mu de *E* en *K* sur *EK* égale à *SM*, le point décrivant ayant parcouru l'arc *EF* égal à l'arc *SL*, ou à *SM*, ou à *EK*, ce point décrivant fera sur la Cycloïde en *H*, & la ligne menée du même point *O* au point *H* fera aussi touchante en *H*, ce sera par tout de même. Ce qu'il falloit démontrer.

On voit par là que lorsque le point décrivant *O* de la Cycloïde *DOY* fera venu en *Y* sur l'axe *NE* de la Cycloïde proposée; alors le point décrivant *S* & le point décrivant *E* de la Cycloïde proposée chacun sur leur demi cercle, feront venus dans la ligne parallèle à la base, laquelle passe par le centre *C*; & les deux touchantes menées du point *Y* rencontreront la Cycloïde dans ces points, & feront un angle droit en *Y*.

Mais comme la Cycloïde n'est point une ligne terminée, & qu'on peut l'imaginer continuée à l'infini, en sup-

Enfin l'on doit remarquer que la Cycloïde du lieu touchera la Cycloïde proposée : car les deux cercles géné-



rateurs ayant toujours le point *A* commun sur la ligne *DE* dans toutes leurs différentes positions en se mouvant, comme il paroît par la génération : aussi la ligne *K S* y demeurera toujours la même ; & cette

ligne *K S* passant en *L* où les deux cercles se coupent, lorsque le point *L* fera sur la Cycloïde proposée, il sera aussi sur celle du lieu : car les arcs *S L*, *A L* des générateurs feront semblables, & ce sera ce point *L* dans cette position qui formera le point touchant des deux Cycloïdes, & la ligne *A L* les touchera toutes deux dans ce même point ; ce que je démontre comme il suit.

Lorsque le point décrivant de la Cycloïde proposée *M L e* fera arrivé en *L*, c'est-à-dire, lorsque l'arc *S L* sera égal à la partie de la base *S M*, & que le cercle générateur fera en *A L S*, & son diamètre en *A S*, on fait que la ligne *A L* touche la Cycloïde *M L e* au point *L*. Mais alors le cercle générateur du lieu *y L D* fera dans la position *A L K* ; si l'on mène donc les rayons *T L*, *C L* au point commun *L*, l'angle *T L C* fera droit, & puisque le point décrivant du lieu étant en *L* se meut d'un mouvement composé de deux autres, l'un par *L C* touchante de son cercle générateur, & l'autre par *L r* parallèle à *K A* ; pendant que le mouvement par *L r* sera égal à *A D* ou à l'arc *S L* par la génération du lieu, le mouvement par *L C* doit être égal à l'arc *L p A*. Mais l'arc *S L* est à l'arc *L p A* qui lui est semblable, comme leurs rayons, ce qui est comme

LC à LT , ou comme leurs cordes semblables SL , AL . Enfin si par le centre C on mène Ca parallèle à AK qui rencontre AL en a , on aura à cause des triangles semblables ACa , ALS , aC ou sL son égale sur Lr , à CA ou CL son égale, comme SL à LA ; donc AaL est touchante de la Cycloïde du lieu au point L .

Il me reste maintenant à chercher le lieu du sommet de tous les angles aigus & obtus égaux entr'eux, lesquels sont formés par les touchantes d'une Cycloïde.

La Cycloïde XEM étant décrite comme ci-devant par le moyen du cercle générateur $EPNF$, dont le diamètre est posé sur l'axe de la Cycloïde EN , & le rectangle DX étant achevé; si de quel point L on voudra de la Cycloïde on mène la ligne LQ parallèle à la base, laquelle rencontre l'axe en Q , & le cercle générateur en P ; du point E ayant mené la corde EP , on fait que la ligne LAO parallèle à EP , touchera la Cycloïde en L .

Voyez la Figure suivante.

Mais du point A ayant abaissé AS perpendiculaire sur la base NM , & sur cette ligne ayant décrit le cercle générateur ALS , il est évident aussi qu'il rencontrera la Cycloïde en L , & que l'arc SL ou NP , ou bien les lignes SM ou AD seront d'une même grandeur, & par conséquent la ligne EA sera égale à l'arc EP .

Soit maintenant l'angle PEF dans le cercle générateur, lequel soit proposé pour celui que les touchantes de la Cycloïde doivent faire, soit qu'il soit obtus ou aigu, comme il est représenté dans la Figure; & soit pris sur DZ la grandeur AK égale à l'arc PEF du cercle générateur, & sur AK soit décrit le cercle $AVKv$, dont l'arc AVK reçoive des angles égaux à l'angle proposé PEF .

Il est évident que si par le point F on mène la ligne FH parallèle à la base MX qui rencontre la Cycloïde en H , & que par le point H on mène HK parallèle à FE , laquelle touchera la Cycloïde en H , cette ligne HK étant prolongée, rencontrera la touchante LAO sur le cercle en O ; & par conséquent ces deux touchantes HK , LA contiendront un angle LOH égal à l'angle proposé

L'arc Ab dans le cercle KOA fera semblable à l'arc PN ou LS du cercle générateur ; c'est pourquoi dans toutes les différentes positions de la corde KA sur ZD , & à proportion que le point A s'approchera de D , le point O descendra sur l'arc OVA , enforte qu'il y aura toujours même raison du mouvement du point O sur son cercle KVA , que du mouvement du point décrivant L de la Cycloïde sur son cercle générateur ; & les arcs de ces mouvemens seront entr'eux en même raison que les cordes des semblables qui soutiennent ces arcs, comme la corde SL à la corde Ab ou Og , ou bien comme le diametre du cercle générateur EN , au diametre Vv du cercle KOA .

Il s'ensuit donc delà que le point O se meut par la composition de deux mouvemens, l'un par le transport du point A de la corde KA du même cercle KOA sur la ligne ZD prolongée tant qu'on voudra, & l'autre par le mouvement du point O sur la circonférence du cercle KOA . Et les mouvemens de ces deux points étant toujours en même raison ; savoir, celui du point A comme les arcs SL , & celui du point O comme les arcs semblables Ab , la Courbe que décrit le point O fera une Cycloïde, qui est le lieu cherché.

Il est facile à voir par ce qui a été démontré de l'angle droit, & par la génération de cette Cycloïde, qu'elle est toujours raccourcie, soit que l'angle proposé soit obtus ou aigu, puisque la corde AK étant égale à l'arc PEF du cercle générateur, elle fera toujours plus grande que la corde semblable PF qui soutient l'angle PEF ; & par conséquent le cercle générateur du lieu KOA fera toujours plus grand que le cercle générateur de la Cycloïde proposée, & le mouvement du point O sur son cercle par des arcs en même raison que celui du point A sur ZD , qui est celui du point L par des arcs semblables à celui du point L , sera plus grand que celui du point A sur ZD , ou que celui du centre T du cercle KVA sur Td parallèle à ZD , ce qui fait la Cycloïde raccourcie : car dans la simple ces deux mouvemens sont égaux.

On démontrera aussi que la Cycloïde du lieu doit tou-

l'arc EP . Si l'on mene donc NP prolongée jusqu'à ED en p , je dis que Ep fera toujours plus grande que EA ; ce que j'ai démontré dans le troisieme Lemme de mon Traité des Epicycloïdes page 16. en considérant la ligne ED comme un cercle infini; & par conséquent la ligne Av parallele à NP ou perpendiculaire à AO qui est parallele à PE , donnera toujours le point v sur EN non prolongée, pour l'extrémité du diametre du cercle $VOAv$ générateur du lieu.

Il s'ensuit donc delà que le commencement de la Cycloïde du lieu fera toujours sur la ligne parallele à ED , laquelle passera par le point v , & dans le point où elle rencontrera la ligne DM ; & comme le diametre du générateur du lieu est donné, on pourra décrire ce lieu.

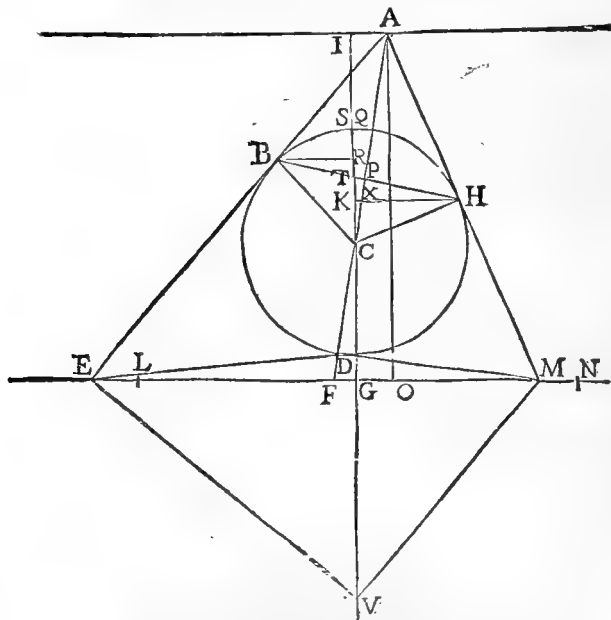
J'ai démontré dans mon Traité des Sections Coniques, *in-folio*, quel étoit le lieu qui étoit formé par les sommets des angles droits que faisoient les touchantes des trois Sections Coniques, & celui des angles aigus & obtus de la Parabole; & j'avois seulement averti qu'on trouveroit celui des angles aigus ou obtus de l'Ellipse & de l'hyperbole en se servant de la même méthode; mais au mois de May 1694 j'ai lu dans l'Assemblée de l'Académie une démonstration générale de tous ces lieux, laquelle je donne ici à cause qu'elle n'a point été imprimée, & qu'elle est entierement différente de la premiere.



C O N S T R U C T I O N
G E N E R A L E

*Des lieux où sont les sommets de tous les angles égaux
droits, aigus ou obtus, qui sont formés par les
Touchantes des Sections Coniques.*

PAR M. DE LA HIRE.



1704.
2. Août.

LE cercle $SBDH$ étant donné, & la position de la ligne droite EFN par rapport au cercle, & ayant pris deux points EM tels qu'on voudra sur cette ligne, d'où l'on mene les touchantes EBA , MHA au cercle, lesquelles se rencontrent en A , on cherche la position du point A .

Du point A soit la perpendiculaire AI sur le diamètre

ICD du cercle donné, & que ce diametre ICD soit perpendiculaire à la ligne donnée EN, laquelle il rencontre en G.

Soit le rayon du cercle CB ou CS=r. CI=IA=x. CG=d.

A cause des touchantes AB, AH, & du diametre AC & de sa rencontre P avec BH qui joint les points touchans, on aura CP, CQ, CA continuellement proportionnelles : mais CA= $\sqrt{yy+xx}$, donc CP= $\frac{rr}{\sqrt{yy+xx}}$.

On connoît par les propositions du premier Livre de mes Sections Coniques, *in-folio*, que toutes les lignes comme BH qui joignent les points touchans des touchantes qui sont menées de chaque point de la ligne AI, passeront par le point T du diametre IC, enforte que les points DTSI diviseront la ligne ID harmoniquement; & par conséquent CT, CS, CI seront trois lignes en proportion continue; c'est pourquoi CT= $\frac{rr}{y}$.

Maintenant à cause des angles droits CIA, CBA, on aura AB= $\sqrt{yy+xx-rr}$ =AH.

On aura aussi CI | IA || CP | PT= $\frac{rr}{y\sqrt{yy+xx}}$.

Mais pour abrégér soit posé zz=yy+xx.

On aura donc le quarré de BP égal au quarré de CB moins le quarré de CP, ce qui est $\sqrt{rr-\frac{r^4}{zz}}$, ou bien BP= $\frac{r}{z}\sqrt{zz-rr}$.

Et par conséquent BT= $\frac{r}{z}\sqrt{zz-rr}-\frac{xr}{yz}$, ou bien $\frac{r}{z}\sqrt{zz-rr}-\frac{rx}{y}$.

A cause des triangles semblables CTP, BTR, on a CT | BT || CP | BR, ce qui est en termes analytiques $\frac{rr}{y} \left| \frac{r}{z}\sqrt{zz-rr}-\frac{rx}{y} \right| \left| \frac{rr}{z} \left| \frac{r^3}{zz}\sqrt{zz-rr}-\frac{rx}{y} \right| = BR$, ce

qui se réduit à $\frac{ry}{zz} \times \sqrt{zz - rr - \frac{rx}{y}} = BR$.

Mais aussi $CT \parallel PT \parallel BT \parallel TR$, ce qui est en termes analytiques $\frac{rr}{y} \left| \frac{rr}{yz} \right|$, ou bien $z \parallel x \left| \frac{r}{z} \times \sqrt{zz - rr - \frac{rx}{y}} \right|$
 $\frac{rx}{zz} \times \sqrt{zz - rr - \frac{rx}{y}} = TR$.

De plus à cause des triangles semblables BRC, AOE , on a $BR \parallel CR \parallel AO$ ou $IG \parallel OE$, ce qui est en termes analytiques $\frac{ry}{zz} \times \sqrt{zz - rr - \frac{rx}{y}} \left| \frac{rr}{y} \right| + \frac{rx}{zz} \times \sqrt{zz - rr - \frac{rx}{y}} \left| \right|$;
 ou bien ayant divisé par $\sqrt{zz - rr - \frac{rx}{y}}$, on réduit ce premier rapport à $\frac{ry}{zz} \left| \frac{rr}{y\sqrt{zz - rr - rx}} \right| + \frac{rx}{zz}$, ou bien multipliant par zz ; & divisant par ry , on a $1 \left| \frac{rzz}{yy\sqrt{zz - rr - rx}} \right| + \frac{x}{y} \left| \right|$
 $y + d \left| \frac{yzz + dx}{yy\sqrt{zz - rr - rxy}} \right| + \frac{yx + dx}{y} = OE$, & delà on tirera la valeur de $GE \frac{yzz + dx}{yy\sqrt{zz - rr - rxy}} + \frac{xd}{x} = GE$.

Maintenant si du point H on mène HK perpendiculaire à IG & qui coupe CA en X , on aura les triangles semblables HKT, CPT , & par conséquent $CT \parallel PT \parallel HT \parallel TK$, ce qui est $z \parallel x \left| \frac{r}{x} \times \sqrt{zz - rr + \frac{rx}{y}} \right| \left| \frac{rx}{zz} \times \sqrt{zz - rr + \frac{rx}{y}} \right| = TK$.

Mais aussi on aura $CT \parallel CP \parallel HT \parallel HK$, ce qui est $\frac{rr}{y} \left| \frac{rr}{z} \right|$ ou bien $z \parallel y \left| \frac{r}{z} \times \sqrt{zz - rr + \frac{rx}{y}} \right| \left| \frac{ry}{zz} \times \sqrt{zz - rr + \frac{rx}{y}} \right| = HK$.

Et à cause des triangles semblables CHK, MAO , on a $HK \parallel CK = CT - TK \parallel AO \parallel OM$, ce qui est $\frac{ry}{zz} \times \sqrt{zz - rr + \frac{rx}{y}} \left| \frac{rr}{y} - \frac{rx}{zz} \times \sqrt{zz - rr + \frac{rx}{y}} \right|$, ou bien en divisant ce rapport par $\sqrt{zz - rr + \frac{rx}{y}}$; & le divisant encore par ry , & multipliant ensuite par zz , on aura $1 \left| \frac{rzz}{yy\sqrt{zz - rr + rxy}} - \frac{x}{y} \right| \left| y + d \left| \frac{yzz + dx}{yy\sqrt{zz - rr + rxy}} - \frac{yx + dx}{y} \right| = OM$;

& si l'on ajoute à OM , $GO = x$, on aura $\frac{yrzz + drzz}{yy\sqrt{zz} - rr + rxy}$
 $-\frac{dx}{y} = GM$.

On a fait toute l'opération précédente pour trouver les valeurs de GE & de GM : mais il faut remarquer que si la ligne EFN passoit au-dedans du cercle, ou si elle le touchoit, il y auroit quelque changement dans les valeurs trouvées & dans les signes, comme aussi suivant les différentes positions des points EM par rapport à IG : mais ces cas différens ne changent pas l'opération ni les dimensions des inconnues.

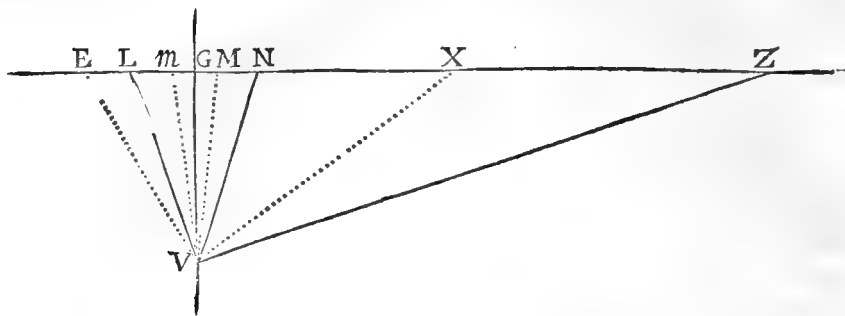
Maintenant si l'on fait un produit de GE par GM , & qu'on le pose $= pp$, on aura une équation qui se réduira à $yyrrzz + 2ydrzz + ddrzz - 2xxrrdy - xxddr - xxddy = ppy^4 - ppryy$.

Et si l'on restitue la valeur de $zz = yy - xx$, on aura enfin $\frac{rxx - ddx + ryy + 2rddy + rdd}{yy - rr} = pp$.

Ce qui fait aussi connoître que le produit de GE par GM est égal à la première partie de cette équation: car pp a été posée égale à ce produit.

On remarquera que l'on peut encore mener des points M & E deux autres touchantes au cercle, lesquelles par leur rencontre donneront un point semblable au point A de l'autre côté du cercle pour lequel on aura la même valeur que celle qu'on vient de trouver; & l'on tirera de ces touchantes & de leurs rencontres, les propriétés qui sont expliquées dans le premier & le second Livre de mes Sections Coniques.

Mais comme on peut trouver sur EN une infinité de points comme EM , ensorte que le produit des GE par GM soit toujours égal à une même quantité que j'ai appelée pp , & qui sera déterminée; on aura aussi une infinité de points comme A , lesquels formeront un lieu dont l'équation vient d'être trouvée, & ce lieu sera une des Sections Coniques ou une ligne droite; puisque les dimensions des inconnues n'y surpassent pas le plan.



Soit la ligne droite EZ & GV qui lui soit perpendiculaire en G ; soit aussi l'angle LVN tel qu'on voudra dont le sommet est en V , & que cet angle soit coupé en deux également par VG ; & par conséquent GL est égale à GN .

Du point V ayant mené VZ perpendiculaire à VL qui rencontre EZ en Z , & soit coupé LZ en deux parties égales entr'elles au point X .

Soit aussi du point V les lignes VE , VM , qui fassent l'angle EVM égal à l'angle LIN ; si le point M tombe au-delà de G vers Z , on portera la grandeur GM en Gm , d'où il est évident que l'angle LVm sera égal à l'angle LVE ; & par les propositions du premier Livre de mes Sections coniques , la ligne ZE fera coupée harmoniquement aux points $ELmZ$, & les lignes Xm , XL , XE feront en proportion continue ; d'où il suit que le carré de XL sera égal au rectangle des parties Xm , XE .

Ce fera la même chose pour tous les angles égaux à l'angle LVN , dont les sommets seront en V : car le carré de XL demeurera toujours le même pour toutes les différentes parties Xm , XE .

Il s'ensuit delà que si l'angle proposé LVN étoit droit , le point Z tomberoit en N , & le point X en G ; en sorte que XL seroit égale à GV . Mais de quelque grandeur que soit l'angle LVN ou aigu ou obtus , XL sera toujours

jours plus grande que GV , puisque le point X feroit le centre d'un cercle qui passeroit en V , & dont le diametre feroit ZL , à cause de l'angle droit ZVL ; mais XV égale à XL , & qui est l'hypotenufe du triangle rectangle XGV , sera toujours plus grande que le côté GV : car dans le cas de l'angle aigu ou obtus, le point X fera toujours hors du point G .

Il s'ensuit aussi que le même point X servira pour les angles obtus & aigus, dont les uns sont les suppléments des autres: car LVG étant la moitié de l'angle aigu proposé, on aura à cause de l'angle droit LVZ , l'angle GVZ qui sera la moitié de l'angle obtus complément de l'angle LVG . C'est pourquoi VL est perpendiculaire au côté VZ , comme VZ est perpendiculaire au côté VL , & la même ligne ZL sert pour ces deux angles, & par conséquent le point X leur sera aussi commun.

On doit remarquer que dans les différentes positions de l'angle proposé autour du point V , si l'une de ses jambes est parallèle à la ligne EZ , l'autre jambe VM tombera au point X , & le rectangle de XM infiniment petite par XE infiniment grande, quoique ce ne soient que des quantités imaginaires, doit être considéré égal au carré de XL qui est une quantité déterminée. Ces sortes de cas & d'autres semblables ne changent rien aux démonstrations que nous venons de donner.

Application aux Sections Coniques.

Que le cercle $SBDH$ soit la base d'un cône, & que la ligne EFN soit *Directrice* de la section de ce cône, c'est-à-dire, la rencontre du plan de la base avec le plan par le sommet du cône, lequel est parallèle au plan de la section: c'est le nom que j'ai donné à cette ligne dans mon *Traité des Sections Coniques*. Enfin que le sommet du cône droit ou oblique soit placé dans un plan perpendiculaire à la base, lequel il rencontre dans la ligne ICG , qui est perpendiculaire à la *Directrice*, & qui passe par le centre de la base. Soit aussi imaginé que le plan par le sommet du cône EVN

soit couché sur la base pour s'en servir aux démonstrations suivantes, la Directrice demeurant commune à la base & à ce plan, en sorte que le point V soit le sommet du cone, & la ligne GV la distance du sommet V au point G de la Directrice.

Mais si le même sommet V du cone est aussi le sommet d'une autre espece de cone ou pyramide qui ait pour base le lieu des points A , il s'en suit par ce que j'ai démontré dans mes Sections Coniques que la section de cette pyramide fera une courbe de la même nature que celle de la base, ce qui est facile à démontrer : car la section étant faite sur un plan perpendiculaire au plan par le sommet & par ICG , la courbe de la section aura pour axe la rencontre de ce plan aussi bien que la Section Conique, ce qui suit de la position de la directrice.

J'ai démontré dans mon *Traité des Sections Coniques*, que l'angle que font deux touchantes de la section, est toujours égal à celui qui est fait sur le plan par le sommet, par les verticales ou les lignes menées du sommet aux points de la directrice, où les touchantes du cercle qui forment les touchantes de la section rencontrent la directrice, comme dans la Figure, les touchantes de la section formées par les touchantes du cercle EB , MH , feront un angle égal à l'angle EVM . Et si tous les points comme E & M sont placés sur la directrice, en sorte que les angles EVM soient toujours égaux entr'eux; aussi les angles des touchantes de la section formés par les angles EAM seront tous égaux entr'eux, & par conséquent la ligne formée sur le plan de la section par le lieu des points A de la base, sera le lieu de tous les angles égaux à l'angle EVM .

Pour les Angles droits.

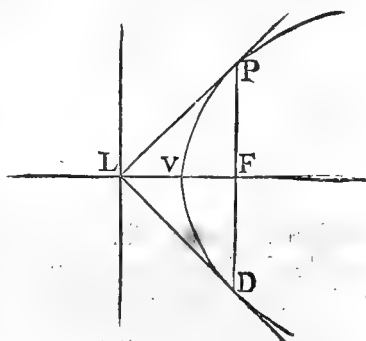
Par le Lemme tous les points comme EM de la directrice, qui sont donnés par des angles droits autour du sommet V , feront que les rectangles des GE par les GM , seront chacun égaux au quarré de GV ; & par conséquent

l'équation qu'on a trouvée d'abord servira pour tous les angles droits en posant $p = GV$.

1°. Si la directrice touche le cercle de la base, ce qui donne la parabole sur la section, alors CG sera égale à CD , & dans l'équation en substituant $r = CD$ à la place de d , on la réduit à $rryy + 2r^2y + r^4 = ppyy - ppr$, qui est un lieu à la ligne droite, où les x deviennent infinies. Mais ce lieu sur la base étant perpendiculaire à l'axe IG , il sera aussi sur la section perpendiculaire à l'axe de la parabole, & ce sera le lieu des angles droits faits par les touchantes de la parabole.

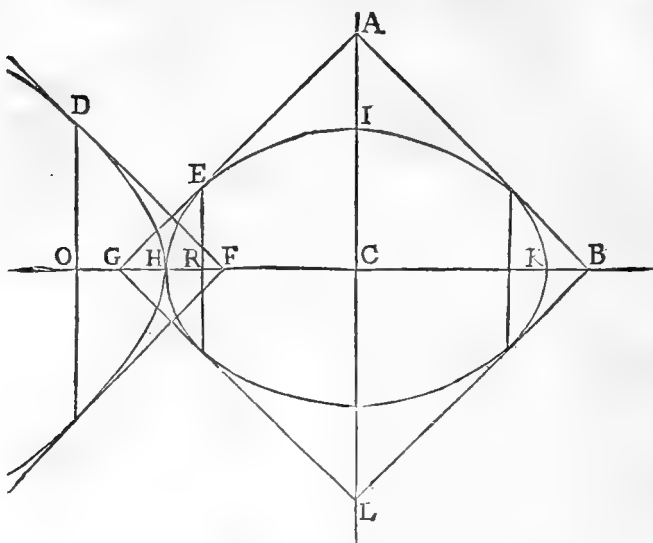
Pour ce qui est de la position de cette ligne sur la section,

soit l'axe LF de la parabole PVD , & que ses touchantes qui viennent du point L de l'axe, fassent un angle droit PLD dans ce point L , & par conséquent PD qui joint les points touchants P, D , sera perpendiculaire à l'axe, & l'angle PLF étant demi-droit, l'angle LPF sera aussi demi-droit; c'est pourquoi



FP & FL seront égales : mais j'ai démontré dans le Livre des foyers de mes Sections Coniques, que si l'angle PLF que fait une touchante de la parabole avec l'axe est demi-droit, l'ordonnée PF passera par le foyer F ; c'est pourquoi le point L par où passe le lieu, & qui est autant éloigné du sommet V de la parabole, qu'en est le foyer F , en sera éloigné de la quantité du quart de parametre de l'axe.

2°. Puisque dans l'équation du lieu des points A qu'on a trouvé d'abord, on a supposé le produit des GE par les GM toujours égal au carré des GV , & que ce lieu est une des Sections Coniques, aussi le lieu qu'il formera sur le plan de la section par toutes les lignes menées du sommet V du cone aux points de ce lieu sur la base, sera une



section Conique ; suivant ce que j'ai démontré de ces sortes de sections dans mon Traité ; & par conséquent les points de ce lieu sur le plan de l'Ellipse comme B & G sur l'axe KH donneront des touchantes comme GA, GL qui feront un angle droit en G , & de l'autre côté les touchantes BA, BL feront l'angle droit en B , & les angles AGB, ABG feront chacun un demi droit, & les parties CB, CG de l'axe seront égales, & enfin la rencontre A des deux touchantes GA, BA sera sur l'autre axe CI , & le triangle GAB sera isocèle ; & par conséquent l'angle A sera aussi droit ; ce que l'on peut aussi conclure de la formation des touchantes. Ce point A sera donc un de ceux du lieu ; & par conséquent la Section Conique qui est le lieu & qui passe par GAB sera un cercle dont le centre sera le point C qui est aussi celui de l'Ellipse, puisque l'angle à la section en A sur son axe GB est un angle droit.

Ce sera la même démonstration pour les touchantes de l'Hyperbole : car l'équation du lieu sur la base devient la même.

me lorsque la directrice coupe le cercle, les signes étant seulement changés.

Il faut maintenant démontrer quelle est la grandeur du diamètre de ce cercle, ou quel rapport les points G & B peuvent avoir avec l'Ellipse ou avec l'hyperbole.

Dans l'Ellipse dont les demi-axes sont CH , CI , & la touchante GE en E qui fait l'angle GER demi-droit, l'ordonnée ER fera égale à la soutangente GR .

A cause de la touchante EG & de l'ordonnée ER , on aura CR , CH , CG en proportion continue.

Mais soit $CH=r$. $CR=y$. $CI=s$; d'où l'on aura

$$CG = \frac{rr}{y}.$$

Mais à cause de l'Ellipse on aura $rr|ss||rr-yy \left| \frac{rrss-yyss}{rr} = \right.$ carré de ER . Et par ce qui a été posé que GR est égale à ER , on a $\frac{rr}{y} - y$, ou bien $\frac{rr-yy}{y} = \frac{\sqrt{rrss-yyss}}{rr}$; & quar-

rant $\frac{r^4 - 2rryy + y^4}{yy} = \frac{rrss - yyss}{rr}$, & divisant par $rr-yy$, on

aura $\frac{rr-yy}{yy} = \frac{ss}{rr}$, ou bien $\frac{r^4 - ryy}{yy} = ss = CI$ carré.

Mais le carré de $CG = \frac{r^4}{yy}$, & le carré de CG moins

le carré de CH fera $\frac{r^4}{yy} - rr$, ou bien $\frac{r^4 - ryy}{yy}$, ce qui vient d'être trouvé égal à CI carré; donc le rectangle KG , GH , étant égal au carré de CI , il s'enfuit que le point G est le foyer de l'hyperbole DH , qui a les mêmes axes que l'Ellipse HIK .

Soit maintenant l'hyperbole DH , qui ait les mêmes axes que l'Ellipse HIK dont nous venons de parler; & soit sa touchante FD , qui fasse avec son axe HK l'angle demi droit DFO , & par conséquent DO sera égale à FO .

On aura donc de même que dans l'Ellipse CF , CH , CO en proportion continue, & ayant posé $CO=z$. $CH=r$.

$CI=s$, on aura $CF = \frac{rr}{z}$, & à cause de l'hyperbole $rr \left|$

$ss \parallel zz - rr \left| \frac{sszz - ssrr}{rr} = OD \text{ carré. Mais aussi par}$
 l'hypothese on a $z - \frac{rr}{z}$, ou bien $\frac{zz - rr}{z} = OD$. Donc
 $\frac{z^4 - 2zrr + r^4}{zz} = \frac{sszz - ssrr}{rr}$; & ayant divisé par $zz - rr$, on
 aura $\frac{zz - rr}{zz} = \frac{ss}{rr}$, ou bien $\frac{zzrr - r^4}{zz} = ss = CI \text{ carré.}$

Mais le carré de CH moins le carré de $CF = rr - \frac{r^4}{zz}$,
 ou bien $= \frac{rrzz - r^4}{zz}$; donc le carré de CH moins le carré
 de CF , ce qui est le rectangle $\triangle F, HF$, sera égal au quar-
 ré de CI ; & par conséquent le point F fera le foyer de
 l'Ellipse qui a les mêmes axes CH, CI que l'hyperbole, &
 le lieu de tous les angles droits qui sont faits par les tou-
 chantes de l'hyperbole ou des sections opposées, sera le
 cercle dont le centre est C & le rayon CF .

Pour les Angles aigus ou obtus.

Par le Lemme, tous les angles aigus ou obtus autour du
 sommet V du cone sur le plan vertical ou par le sommet, &
 qui donnent les points comme EM sur la directrice, donne-
 ront des rectangles XE, XM ou Xm qui seront tous égaux
 au carré de XV ; c'est pourquoi les valeurs de GE & de
 GM qu'on a trouvées d'abord, doivent être augmentées
 chacune de la quantité de XG , qui est toujours la même, &
 que j'appellerai r , qui est donnée par la nature de l'angle don-
 né, & par conséquent l'équation qu'on a trouvée d'abord
 doit être changée par l'augmentation de r dans GE & dans
 Gm avant que d'en faire le produit, & ce produit sera aussi
 égal au carré de XL ou XV , & si l'on retient pour GL
 ou GN , la valeur p , on aura $XV = p + r$; c'est pourquoi
 le produit XE par XM ou Xm sera $= pp + 2pr + rr$.

Mais pour abrégé le calcul on posera $GE = e$, & $GM = i$,
 on aura l'équation $rr + ri + re + ie = pp + 2pr + rr$, la-
 quelle se réduira à $ri + re + ie = pp + 2pr$.

Maintenant si à la place de ie on substitue la valeur qu'on a trouvée d'abord $= pp$, & de même pour ti & te , qu'on y mette leur valeur, ou aura toute l'équation

$$\frac{ty^3 + tyryxx + tdryy + tdrxx + try^3 + tryxx + tdryy + tdrxx}{yy\sqrt{yy+xx-rr+rx} + rrxx - ddx + rryy + zrdy + rdd} + \frac{yy\sqrt{yy+xx-rr-rxy}}{yy-rr} = pp + 2pr.$$

Mais cette équation se réduit à $\sqrt{yy + xx - rr} = \frac{ddxx - rrx - rry - zrdy - rdd + tpyy - tpr - ppy - ppr}{zrd + zry}$, la-

quelle étant réduite, en ôtant le signe radical, fera le lieu d'une ligne courbe du second genre; c'est pourquoi elle formera aussi sur le plan de la section une ligne du second genre. On la pourra facilement construire sur le plan de la base, en la réduisant & en se servant des touchantes du cercle de la base, lesquelles seront menées des points E & M . Mais dans le cas de la parabole où la directrice touche le cercle de la base, & où les d sont égales aux r , si dans toute cette équation on substitue r à la place de d , l'é-

quation se réduira à la suivante $\sqrt{yy + xx - rr} = \frac{rxy - 2r^3y - r^4 + tpyy - tpr + ppy - ppr}{zrr + zry}$; & posant

$v - r = y$, & substituant ses valeurs à la place des valeurs de y , on réduira cette équation à $\sqrt{vv - 2vr + xx} = \frac{rvv + 2pv - 4pr + ppv - ppr}{zrr}$, dont chaque partie étant

quarrée donnera un lieu à l'une des sections coniques; c'est pourquoi cette courbe formera aussi sur le plan de la section, une section conique qui sera le lieu des angles aigus ou obtus, dont les uns sont supplément des autres; ce qui paroît par ce qui a été démontré dans le Lemme.

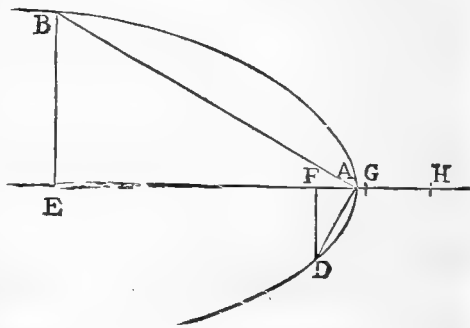
Mais comme la directrice de la section parabolique est aussi la directrice de la section du cone du lieu, & que cette directrice coupe le lieu sur la base, comme il est facile à voir par la construction du lieu: car elle touche le cercle base du cone, & par conséquent elle coupe la section conique base du lieu; c'est pourquoi le lieu sur la section sera les hyperboles oppoées, dont l'une sera le lieu

des angles obtus, laquelle est formée par la partie du lieu de la base coupée par la directrice, & laquelle est du côté du cercle base de la section parabolique, & l'autre partie fera celle de l'autre côté qui donne les angles aigus.

Mais si l'on veut déterminer sur l'axe de la parabole, qui est aussi l'axe des hyperboles du lieu, quelle est la grandeur de leur axe, on le pourra faire par le moyen de la base : car le point de rencontre des deux touchantes du lieu sur la base à l'endroit où la directrice la rencontre, formera le centre des sections ou hyperboles opposées, & les extrémités de l'axe sur la base du lieu formeront les extrémités de l'axe du lieu.

On pourra aussi trouver la grandeur de l'axe des hyperboles du lieu sur l'axe de la parabole, si dans la parabole BAD dont l'axe

est AE , on mène du sommet A la corde AB , qui fasse l'angle BAE égal à la moitié de l'angle aigu proposé, & que du même sommet A on tire la corde AD perpendiculaire à AB , qui



par conséquent fera l'angle DAE égal à la moitié de l'angle obtus supplément de l'angle aigu proposé. Ce sera la même chose si l'on commence par l'angle obtus. Des points B & D ayant tiré les ordonnées BE , DF à l'axe, le quart de EF sera le quart de l'axe des hyperboles opposées du lieu qui sera égale à GH , & le quart de AF fera la distance AG dont le sommet G de l'hyperbole du lieu des angles obtus sera éloigné du sommet A de la parabole : ce qui est évident par les propriétés des touchantes de la parabole qui font des angles donnés.

OCCULTATION.

OCCULTATION DE JUPITER

PAR LA LUNE,

OBSERVÉE EN PLEIN JOUR.

PAR Mrs. CASSINI & MARALDI.

Nous avons trouvé par le calcul que le 27 de Juillet de cette année 1704 Jupiter devoit être caché par la Lune; & quoique ce calcul marquât que l'Eclipse de Jupiter dût arriver de jour, nous ne perdîmes pas l'espérance de la pouvoir observer; parce que dans une pareille Eclipsse arrivée l'an 1679, & en diverses rencontres, M. Cassini avoit observé cette Planete bien avant dans le jour, & qu'il y avoit un mois que nous l'observions au méridien même avec une Lunette de deux pieds. Nous nous préparâmes donc à observer cette Eclipsse; & pour tirer de ces observations la parallaxe de la Lune, nous prîmes ce jour-là le passage de ces deux Planetes par le méridien, & observâmes à différentes heures du jour la différence d'ascension droite & de déclinaison entre la Lune & Jupiter, par le moyen des fils qui se croisent à angles de 45 degrés au foyer de la Lunette, suivant la méthode de M. Cassini.

1704
23. Août.

à 1^h 22' 51". Après-midi, le bord Occidental de Jupiter commença de toucher le bord éclairé de la Lune avec une Lunette de 8 pieds.

1 22 57 Le même bord toucha la Lune avec une Lunette de 18 pieds.

1 24 20 Jupiter fut entierement caché par la Lune.

Pour observer la sortie de Jupiter du bord Occidental de la Lune, qui n'étoit pas visible à cause que la Lune étoit en décours, on tenoit toujours la corne Septentrionale de

1704.

Gg

la Lune dans l'interfection des quatre fils par le moyen de la machine parallatique; & ayant observé à l'égard de ces fils l'endroit où Jupiter avoit été caché par le bord Oriental de la Lune, nous étions attentifs à pareille distance des fils vers l'Occident où devoit être le bord obscur de la Lune, & d'où devoit sortir Jupiter, que nous apperçumes seulement lorsqu'il paroissoit à moitié sorti; ce qui arriva à 2^h 6' 43' après-midi, & il sortit entierement à 2^h 7' 29". Après ces observations on continua à comparer la Lune avec Jupiter qu'on voyoit distinctement, quoique sa lumiere ne fût pas aussi vive que celle d'un grand nombre d'étoiles fixes qu'on peut voir commodément pendant le jour avec des Lunettes ordinaires de 3 à 4 pieds. Cependant Jupiter, qui au commencement de Juillet ne passoit au méridien que deux heures avant le Soleil, se voyoit mieux que Saturne qui passoit par le même méridien trois heures avant Jupiter; & la lumiere de Saturne étoit encore plus foible que celle de Mercure, que nous avons vû le mois de Juin passé pendant plusieurs jours au méridien même avec une Lunette de 3 pieds lorsqu'il étoit près de sa digression Occidentale; ce que nous avons continué de faire pendant plusieurs jours au mois de Juillet lorsqu'il étoit dans sa digression Orientale.

Après avoir donné part à l'Académie de ces observations de Mercure, qui sont les premieres qui lui aient été communiquées, nous l'avons fait savoir à plusieurs Astronomes avec lesquels nous avons correspondance, afin qu'ils puissent s'appliquer aussi à ces observations, par le moyen desquelles on réglera plus facilement le mouvement de cette Planete.

Messieurs Manfredi & Stancari ont fait aussi la même observation de Jupiter à Bologne chacun séparément de la maniere qui suit :

Jupiter commença de toucher le			
bord de la Lune à	M. Manfredi.	M. Stancari.	
	2 ^h 6' 18"	2 ^h 6' 27"	
Tout Jupiter est caché par la Lune.	2 7 48	2 7 39	

Quoiqu'ils fussent attentifs à l'Emer-
 sion, ils ne purent voir Jupiter qu'à
 lorsqu'ils jugerent qu'il étoit tout
 sorti de la Lune.

M. Manfredi. M. Stancari.
 2^h 51' 32" 2^h 51' 38"

HISTOIRE DU FORMICA-LEO,

PAR M. POUPART.

LE Formica-leo est un insecte qui ressemble assez bien à l'araignée, par ses inclinations, par sa maniere de filer, par la figure & par la mollesse de son corps. Il a aussi quelque chose du cloporte, & du premier coup d'œil on le prendroit pour ce petit animal. Il est d'un gris sale, & marqué de points noirs, qui sont comme autant de petites aigrettes qui le font paroître tout armé de piquans comme un porc-épic, quand on le regarde avec la loupe. Son corps est entouré de plusieurs anneaux qui le rendent tout ridé. Il a six pieds; quatre sont attachés à sa poitrine, & deux à une longue avance qu'on peut prendre pour son col. Sa tête est menue & platte, ses deux cornes sont dures, creuses, longues de deux lignes, un peu plus grosses qu'un cheveu, & crochues par le bout comme les ongles d'un chat. Quand on les regarde avec le microscope, elles paroissent à peu près comme les cornes d'un grand scarabé, qu'on appelle cerf-volant. Il y a à chacune de leur base un petit œil noir qui voit fort clair: car l'animal fuit au moindre objet qu'il apperçoit.

1704.
 30. Août.
 FIG. 1. & 2.

Cet insecte a été nommé Formica-leo, parce qu'il vit ordinairement des fourmis qui donnent dans ses embuscades; mais cela ne mérite pas de le faire nommer un lion, car il n'a que la finesse du renard; il seroit donc mieux de l'appeller Formica-vulpes.

La sobriété est d'un grand secours à ce petit animal, d'autant qu'il ne vit que de quelques fourmis, ou autres

insectes qui donnent par hazard dans ses pieges : mais il n'y en a guere qui lui conviennent mieux que la fourmi, parce que tous les petits animaux qui ont des aîles évitent ses surprises; la plupart des autres sont trop gros, ou bien ils ont la peau trop dure pour être percés avec ses cornes.

Voici de quelle maniere il s'y prend pour attraper les insectes. Il se campe ordinairement sous le pied d'une vieille muraille pour être à couvert de la pluie. Il faut que cet endroit soit garni d'un sable fort menu & bien sec, afin qu'il y puisse faire une fosse ou trémie qui ait la figure d'un cone concave renversé.

Quand il ne veut creuser qu'une petite fosse, il courbe en bas son derriere qui est fait en pointe, dont il se sert comme d'une espece de soc de charrue, avec lequel il laboure la terre en marchant à reculons & à petites secouffes. Lorsqu'il est arrivé à une petite profondeur, il jette le sable fort haut avec sa tête à divers coups réitérés promptement, & sa trémie se trouve faite.

Mais lorsqu'il veut faire une fosse profonde, il trace d'abord un grand cercle qui est la base du cone ou de la fosse qu'il veut creuser. Ils'enfonce ensuite sous le sable, qu'il jette fort haut avec sa tête à chaque pas qu'il fait toujours à reculons. En descendant il décrit une ligne spirale, qui va finir intérieurement à la pointe du cone concave qu'il a formé.

Sa tête est fort propre pour jeter le sable, car elle est plate, & son col fort long quand il ne le retire pas : ainsi il peut donner de grandes secouffes, comme je l'ai vû faire à ceux que j'ai observés, qui jettoient quelquefois à un demi pied de leurs trémies les petits animaux qu'ils avoient succés. Quand la fosse est achevée, il se tient à côté de son fond, & il ne fait paroître que ses deux cornes qu'il écarte dans la pointe de la fosse.

Pendant qu'il est ainsi en embuscade, si quelque fourmi ou autre insecte semblable vient à passer sur le bord de sa fosse, & qu'il fasse ébouler du sable dans le fond, cela avertit le Formica-leo qu'il y a du gibier pour lui. Alors il jette du sa-

ble avec sa tête sur la fourmi pour la faire tomber dans le fond de la fosse entre ses deux cornes : car il ne court jamais après elle. Mais comme cela n'arrive pas toujours du premier coup, & qu'elle s'apperçoit des pièges qu'on lui tend, elle grimpe pour sortir de la fosse, & quelquefois elle retombe à cause de la mobilité du sable ; elle veut enfin remonter : mais le *Formica-leo* qui est toujours à l'aguet, jette encore du sable sur la fourmi. Si elle tombe entre ses cornes, il la ferre, & les plonge assez avant dans son corps : car il les peut même croiser l'une sur l'autre ; il la tire quelquefois sous le sable, & la succe tant qu'il y trouve de l'humour. Quand il ne reste plus que la peau de la fourmi, il la jette hors de sa trémie ; & si elle est démolie, il la raccommode pour une seconde chasse.

Cet animal mourroit plutôt de faim que d'aller chercher sa vie comme font les autres insectes : mais ce n'est pas par lâcheté, comme on le pourroit croire, qu'il fait cette guerre de renard ; il ne la peut faire autrement, parce qu'il ne marche jamais qu'à reculons, & à petites secouffes. Il est jour & nuit à l'affût caché sous le sable dans le fond de sa fosse ; parce que ne pouvant chercher son gibier, il faut que le hazard le lui amène, ce qui arrive rarement ; ainsi il est obligé de faire avec le temps, ce que la nature ne lui permet pas de faire par la course.

Mais il semble pour les raisons que je vais apporter, que toutes ces ruses sont inutiles pour la subsistance de ce petit animal, qu'on diroit n'attraper les insectes que par inclination, & pour s'en divertir comme fait le chasseur, qui ne va à la chasse que pour son plaisir.

1°. Il ne ferre jamais les insectes qu'avec l'extrémité de ses cornes, qui semblent n'être point percées par le bout ; ainsi il est difficile de se persuader qu'il attire le suc de ces petits animaux par cet endroit.

2°. Quand on le regarde avec la loupe, on n'apperçoit point qu'il allonge un aiguillon pour succe les petits animaux qu'il attrape, comme font plusieurs insectes, & l'on

voit toujours une distance considérable en re la tête , & l'animal qu'il tient avec la pointe de ses cornes.

3^e. L'on a mis plusieurs Formica leo dans une boîte qu'on a fermée exactement pendant six mois , de peur qu'il ne tombât quelques insectes dans leurs fosses ; cependant ils ont vécu comme ceux à qui l'on a donné des mouches , & ils ont fait leurs trémies , & les changemens dont on parlera dans la suite : ce qui pourroit faire croire que le Formica-leo peut vivre sans recevoir de nourriture.

Mais quand on considère que ses cornes croissent après qu'on les a coupés ; qu'il devient plus petit quand il ne prend point d'aliment ; qu'après avoir seulement attrapé un insecte, il paroît beaucoup plus gros qu'il n'étoit , & qu'ayant succé une mouche pendant deux ou trois heures , elle devient sèche à se réduire en poudre en la froissant entre les doigts ; l'on est persuadé que, quoiqu'il puisse vivre sans qu'on s'appërçoive par quel endroit il tire sa nourriture , il ne laisse pas d'en recevoir.

Je crois donc qu'on pourroit regarder les cornes du Formica-leo comme deux seringues avec lesquelles il pompe le suc des animaux. En effet, je les ai considérées avec un microscope à liqueurs qui grossit extrêmement les objets , & j'ai apperçu un corps transparent & membraneux , qui va tout du long de la concavité de la corne , qui pourroit bien être le piston de la seringue.

Quand le Formica-leo est parvenu à un certain âge , & qu'il veut se renouveler , afin de paroître sous une autre forme ; alors il ne fait plus de trémies , mais il laboure le sable , sur lequel on ne voit plus que des traces , & des routes fort irrégulieres.

Après qu'il a long-temps labouré , il s'arrête sous le sable où il fait une boule creute dans laquelle il se renferme pour changer de forme. Cette boule est faite de soie , de colle & de sable , le tout mêlé ensemble. Il file la soie avec son derriere à peu près comme fait l'araignée : la colle fort de toutes les parties de son corps , & il prend le sable dans le lieu où il fait sa retraite.

FIG. 5.

Pour faire cette boule il tourne insensiblement en rond comme sur un centre , en portant son derriere à droit & à gauche , qu'il fait toucher au sable pour y attacher la soie , soit qu'elle s'embarasse aux inégalités des grains de sable , soit qu'elle s'y colle avec la matiere gluante dont elle peut être empreinte. De quelque maniere que la chose arrive , les grains de sable sont si bien attachés à la soie , qu'il est assez difficile de les en séparer , même en la secouant très-fort tandis que l'ouvrage est encore tout molasse , ou bien en la frottant avec les doigts.

Cette soie est incomparablement plus fine que la soie ordinaire , puisqu'on ne la peut guere appercevoir qu'avec le secours du microscope. Pour la bien voir il faut déterrer l'ouvrage de ces petits animaux avant qu'il soit entierement achevé ; on le trouvera mou comme du coton , parce qu'il n'a pas encore été endurci par la colle qui ne sort que fort lentement du corps de l'animal : on levera cette soie en l'air avec la pointe d'une aiguille , & l'on verra de l'espace entre les grains de sable qui sont suspendus , sans qu'on puisse appercevoir la soie , à moins de se servir d'une loupe , tant il est vrai que cette soie est fine.

Il est impossible , sans quelque artifice , de voir comme ces petits animaux filent leur soie , & comme ils bâtissent leurs loges , parce qu'ils travaillent toujours sous le sable. Il faut pour cela leur ôter plusieurs fois leurs ouvrages avant qu'ils soient achevés , ils les recommenceront , & à la fin ces petits animaux deviendront si foibles qu'ils n'auront plus la force de se cacher sous le sable comme ils ont accoutumé de faire ; & alors on leur verra filer lentement leur soie avec le derriere sur la superficie du sable , de la maniere que je l'ai déjà fait remarquer.

Après que le Formica-leo a long-temps travaillé , il se trouve au milieu d'une grosse boule molle , qui n'est encore faite que de soie & de sable mêlés ensemble. Cette boule s'endurcit peu à peu en s'humectant de la viscosité qui sort du corps de l'animal , laquelle pénètre cette loge de tous côtés.

Ce qui m'assura principalement qu'il transfudoit une humeur gluante du corps de ces petits animaux, c'est qu'il s'attacha plusieurs grains de sable sur le col d'un de mes Formica-leo, qui formerent un petit rocher assez dur. Pendant qu'il eut cette masse sur le col il ne fit plus de trémie, parce que ce fardeau lui empêchoit le mouvement de la tête. Je cassai ce petit rocher avec des pinces, aussi-tôt le Formica-leo fit sa trémie, & quelque-temps après il travailla à former sa loge.

Quand le Formica-leo est renfermé dans sa maisonnette, il la drape par dedans avec la soie qu'il file. Cette soie ne se mêlant plus avec le sable, il se forme un tissu fort ferré, qui ressemble à un petit satin couleur de perle, dans lequel l'animal reste en repos la tête entre les jambes. On pourroit croire d'abord que ce satin est une colle seche qui s'est détachée du corps de l'animal : mais si cela étoit, on le casseroit aisément quand on le plie, ce qui n'arrive point, & il ne seroit pas flexible comme il est. D'ailleurs cette petite étoffe est continue à la loge, du moins elle y est si bien attachée qu'on ne l'en peut séparer sans détruire la boule. J'ai mis ce satin dans de l'eau pendant quelques jours, il ne s'est point fondu comme il semble que devoit faire de la colle : mais il a perdu sa belle couleur; ce qui persuade que le peu de colle qui s'étoit mêlée avec la soie & qui lui donnoit peut-être cette belle couleur s'est fondue, & que l'étoffe est restée toute seule. Ce petit satin ressemble un peu à celui que font certaines araignées sur les feuilles des arbres, qui leur sert de loge ou de nid pour faire leurs œufs, mais il est plus épais que celui de ces araignées.

Pour marquer que le Formica-leo ne travaille à draper sa maisonnette par dedans qu'après qu'elle est achevée; c'est que si on l'ouvre avant qu'elle soit endurcie, on ne la verra point tapissée du satin dont on a parlé.

Mes Formica-leo resterent dans leurs loges pendant six semaines ou deux mois avant que de se changer en vermisses : mais le temps qu'ils y restent n'est point fixé. Ils avoient

avoient la tête entre les jambes. afin de s'arrondir autant qu'ils pouvoient pour occuper moins de place, & s'accommoder à la figure concave de leurs petites boules.

Quand il fut temps de changer de figure, ils commencerent à se dépouiller de leur première peau, à laquelle leurs cornes, leurs yeux & leurs poils restèrent attachés. Cette peau ressembloit pour lors à un petit peloton ratatiné, blanchâtre par dedans, qui avoit une ouverture tout au long du ventre, par laquelle étoit sorti un insecte dont on va parler.

Après que le *Formica-leo* a quitté sa peau, il paroît sous la forme d'un vermisseau qui a environ trois lignes de long quatre ailes membraneuses, six pieds, deux grosses cornes ou antennes molles & creuses, deux yeux noirs, & deux tenailles en forme de scie qui lui servent de dents. Ce vermisseau reste encore quelque temps dans sa petite retraite avant que de paroître sous une nouvelle forme : mais on ne peut savoir le temps qu'il y demeure, parce que le *Formica-leo* dont il sort, est caché dans sa loge quand il se métamorphose en ver.

FIG. 6. 7.
& 8.

Lorsque le vermisseau veut sortir de sa maisonnette pour se métamorphoser, il y fait un petit trou rond avec ses dents qui ressemblent assez bien à celles des fauterelles. Cependant le trou qu'il y fait, ne paroît pas rond, parce que la piece y demeure ordinairement attachée par un côté, ce qui rend le passage si étroit, que la moitié du vermisseau reste dans la loge, & l'autre moitié dehors. En cet état le vermisseau n'est plus vivant, ce n'est qu'un fourreau membraneux & transparent, qui a des cornes ou antennes, des yeux, des dents, des ailes, des pieds, &c. qui sont les étuis de semblables parties d'une belle mouche qu'on appelle *Demoiselle*, qui est sortie de ce fourreau par une crevasse qui s'est faite sur son dos proche de sa tête. Cette mouche a quinze ou seize lignes de long : mais ses ailes n'en ont d'abord que deux ; parce qu'ayant été emboîtées en des étuis qui n'ont aussi que deux lignes, elles en ont pris la figure & la grandeur. Elles sont humides

FIG. 9.

& plissées de plusieurs plis qui se développent en deux minutes de temps , & deviennent plus longues que son corps. Lorsque la Demoiselle est sortie de son fourreau , elle reste quelque temps sur ses pieds sans mouvement pour dessécher ses ailes afin de prendre la volée , & jouir d'une vie plus heureuse que celle qu'elle menoit sous la peau du pauvre Formica-leo.

FIG. 10.

Tandis que la Demoiselle est renfermée dans son vermicelle , elle ne peut avoir que trois lignes de long , parce qu'il n'a lui-même que cette grandeur : mais aussitôt qu'elle en est sortie , elle s'allonge de plus de quinze lignes. Ce déploiement subit vient de ce que pendant que la Demoiselle est encore dans son fourreau , elle est raccourcie & pliée comme un courcaillet qu'on presseroit par les deux bouts. Mais aussi-tôt qu'elle en est sortie , elle s'étend de toute sa grandeur , comme une éponge qu'on serre entre les doigts , qui reprend sa grosseur quand on ne la presse plus.

En l'année 1703 les Formica-leo que j'avois observés ne changèrent point en Demoiselles ; cette métamorphose n'arriva que l'année suivante. Cela me fait croire que ces petits animaux ne changent pas dès la première année , & qu'il leur faut un certain âge avant que de se métamorphoser.

Après que la Demoiselle est sortie , si l'on ouvre la maisonnette où s'étoit renfermé le Formica-leo , on verra , comme nous avons dit , qu'elle est tapissée d'un petit fatin poli & couleur de perle. On y trouvera la peau du Formica-leo , qui est ce petit peloton ratatiné , applati & hérissé de poils , dont on a déjà parlé. On y remarquera aussi le fourreau membraneux qui enveloppoit immédiatement

FIG. 11.

la Demoiselle. Mais ce qu'il y a de singulier , c'est qu'on y trouve quelquefois un œuf que la mouche y fait avant que d'en fortir. Cet œuf a deux lignes de long , une d'épaisseur , & ressemble un peu à un petit gland allongé. Sa coquille est dure , & toute semblable à celle des œufs de poules. La substance qu'il contient n'est pas fluide , & j'ai remarqué

que l'œuf changeoit de couleur en différens temps. J'ai exposé un de ces œufs pendant quelques jours aux grandes chaleurs du Soleil, la matiere qu'il renfermoit est devenue dure & noire comme de l'encre.

Il semble que ces petites Demoiselles ne font qu'un œuf: car on n'en a trouvé qu'un dans le corps de quelques-unes qu'on a ouvertes: un seul qu'une autre avoit déposé dans sa loge avant que d'en sortir, & une Demoiselle étant montée au haut de la boîte dans laquelle on l'avoit renfermée, quelques heures après elle fit aussi un œuf. Cependant il n'y a pas d'apparence que chacune de ces Demoiselles ne fassent qu'un œuf, parce qu'il s'en trouve toujours quelques-uns qui ne sont pas féconds, & quelques-autres produisent des mâles, d'où il est aisé de conclurre que peu à peu l'espece auroit entierement manqué.

On peut voir par la précipitation avec laquelle ces Demoiselles font leurs œufs, qu'elles n'attendent pas toujours les approches du mâle pour les déposer. C'est peut-être à cause de la rareté de ces accouplemens que les Formica-leo & les petites Demoiselles qui en sortent sont assez rares.

Les petites boules dans lesquelles se renferment les Formica-leo sont absolument nécessaires pour la naissance des Demoiselles: car j'en ai rompu quelques-unes pour mettre le Formica-leo à nud sur le sable dans le temps qu'ils étoient prêts de se métamorphoser, ils n'ont pas laissé de se dépouiller de leur peau: mais les Demoiselles n'ont pû sortir des vermissieux dans lesquels elles étoient renfermées, quoiqu'elles aient vécu fort long-temps après, & fait plusieurs mouvemens pour en sortir. Un des principaux usages de cette boule, c'est que par son moyen, la Demoiselle se dépouille du vermissieux dans lequel elle est renfermée, en passant avec difficulté par le petit trou que le même vermissieux y fait avec les dents.

Il faut remarquer que les différentes Demoiselles qu'on voit voltiger durant l'été le long des ruisseaux & autour des buissons, ne sortent pas toutes de ce petit animal. Celles

qui en viennent ont deux antennes qui sont menues proche la tête, & vont en grossissant jusqu'au bout. Elles ont deux gros yeux aux côtés de la tête, & n'en ont point dessus comme les autres especes de Demoiselles. Leur ventre n'est point cannelé tout du long comme il arrive aux autres, & le bout de leur queue est hérissé de poils. Leurs ailes sont d'un blanc cendré, marquées de quelques points noirs, & ne sont bigarrées d'aucunes vives couleurs. Ainsi il y a de l'apparence que les belles mouches, que la variété des couleurs a fait nommer Demoiselles, aussi-bien que toutes leurs différentes especes, ont une autre origine.

Il y a deux autres belles especes de grandes Demoiselles, dont l'origine est bien différente de celles dont nous venons de parler. Elles viennent de deux animaux aquatiques qui ne ressemblent point au Formica-leo.

Nous ferons voir quelque jour que les animaux d'où sortent ces grandes especes de Demoiselles sont de véritables poissons : car nous avons remarqué leurs ouies, & nous les avons fait dessiner par avance à la Figure 14 & 15. & les animaux tous entiers à la Figure 12. 13. & 16.



EXPLICATION DES FIGURES.

1. Cette Figure représente le Formica-leo dessiné trois fois aussi grand que nature, pour faire voir comme il est hérissé de piquans. Il n'y a rien de plus naturel que ce dessein.

2. Le dessous du Formica-leo.

3. La tête & le col du Formica-leo séparés de la poitrine, & dessinés beaucoup plus grands que nature, afin qu'on puisse voir distinctement les plus petites parties.

4. La fosse ou trémie que le Formica-leo a faite pour y faire tomber les insectes. Il est caché au fond, où il ne fait paroître que ses cornes, qu'il tient écartées pour être tout prêt à saisir les petits animaux.

5. La loge dans laquelle le Formica-leo s'est renfermé pour changer de forme.

6. Vermisseau qui paroît après que le Formica-leo a quitté sa peau, dans lequel la Demoiselle (10) est renfermée.

7. Cette figure représente le Vermisseau (6) dessiné beaucoup plus grand que nature, afin qu'on puisse voir distinctement ses yeux, ses pieds, ses ailes, qui sont des fourreaux dans lesquels les mêmes parties de la Demoiselle sont renfermées.

8. Cette Figure grotesque qu'on a dessinée beaucoup plus grande que nature, est le Vermisseau qu'on a représenté à la Figure 6 & 7, en la situation où il est dans sa loge. Il a le dos courbé, afin de s'accommoder à la figure de sa loge, & d'occuper moins de place.

9. La boule ou loge du Formica-leo avec le Vermisseau marqué 6, qui est partie dedans & partie dehors, dont la Demoiselle (10) est sortie par une crevasse qui s'est faite sur le dos du vermisseau.

10. Cette Figure représente la Demoiselle qui est sortie du Vermisseau 6, ou 7, ou 8. Il semble que ce dessein vole, & que c'est un corps aérien tant il paroît léger.

11. Les œufs que les Demoiselles font presque aussi-tôt

246 MEMOIRES DE L'ACADE'MIE ROYALE
qu'elles sont sorties de leurs petites loges ou boules.

12. Animal aquatique , d'où fort une grande espece de Demoiselle , autre que celle qui vient du Formica-leo. Ce petit animal est un véritable poisson.

13. Le dessous de l'animal aquatique représenté à la Figure 12.

14. Maniere de masque qui couvre la tête de l'animal aquatique marqué 12 , qui sont ses ouies vues par dehors.

15. Masque qui couvre le devant de la tête de l'animal aquatique marqué 12 , qui sont ses ouies vues par dedans.

16. Autre animal aquatique un peu différent du précédent , d'où fort une grande espece de Demoiselle bigarrée de belles couleurs. On diroit que ces trois petits animaux seroient vivans.

O B S E R V A T I O N S

*De la conjonction de Jupiter avec la Lune , au matin
du 24. Août 1704. à l'Observatoire.*

PAR M. DE LA HIRE.

1704.
5. Septem-
bre.

Jupiter étant proche de sa conjonction avec la Lune , nous l'observâmes avec le micrometre appliqué à la Lunette de 7 pieds.

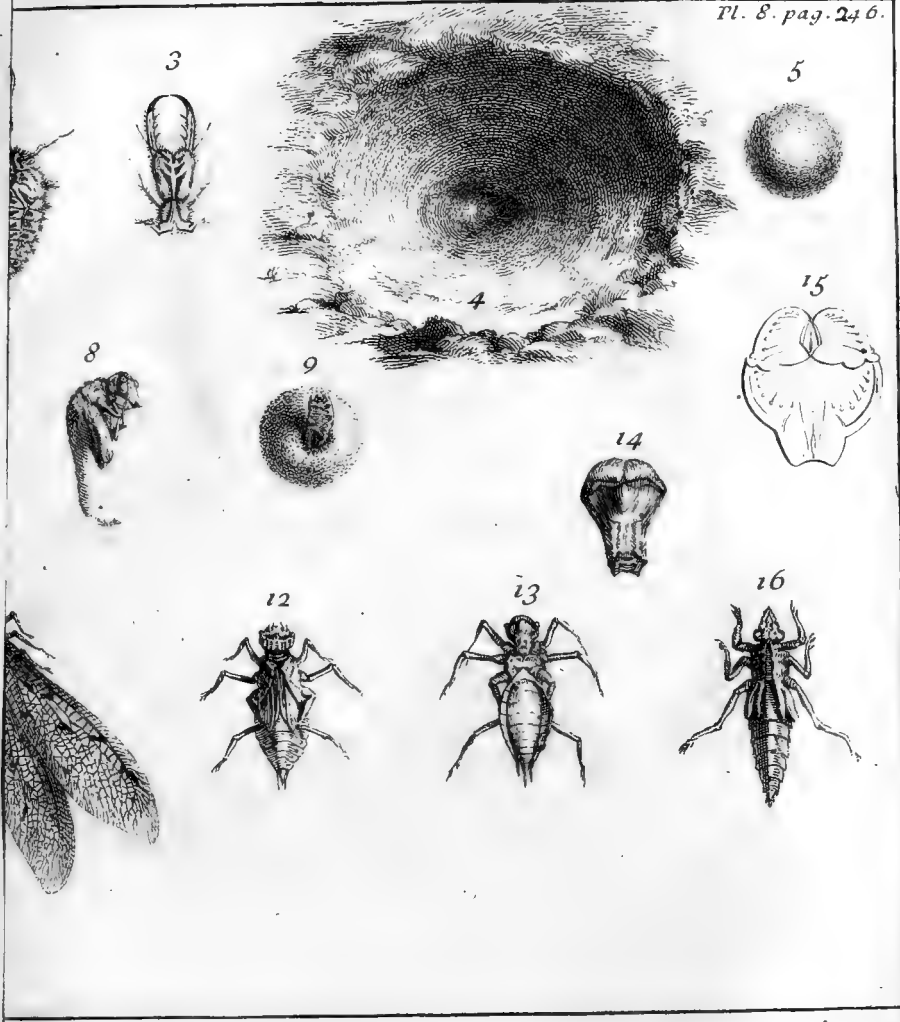
Nous trouvâmes qu'à $1^h 55' 50''$ il étoit éloigné de la ligne qui passoit par le centre & par les cornes de la Lune, de $32'$.

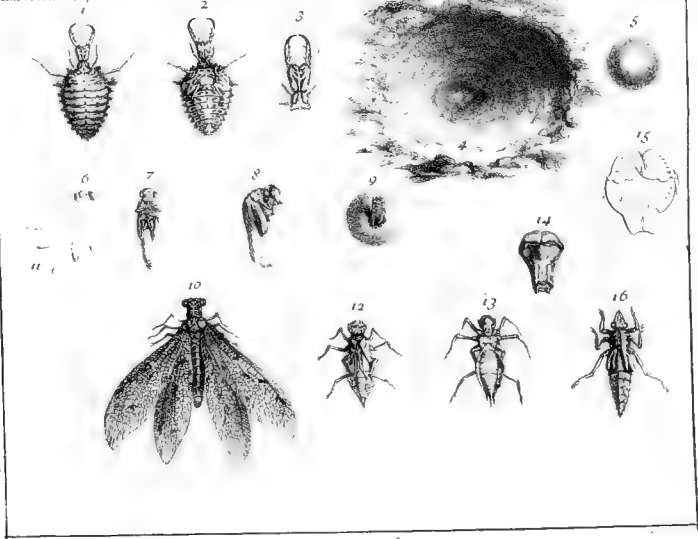
A $2^h 11' 56''$ son éloignement à la même ligne étoit de $25' 20''$.

A $2^h 25'$ il n'étoit plus éloigné de la même ligne que de $18' 20''$.

A $2^h 32'$ la distance entre le centre de Jupiter & la ligne qui touchoit la Lune , & qui étoit perpendiculaire à celle qui passoit par les cornes $2' 14''$.

A $2^h 36' 25''$ le centre de Jupiter étoit dans la ligne touchante de la Lune , laquelle étoit parallele à celle qui passoit par les cornes.





A $2^h 53' 0''$ le centre de Jupiter étoit dans la ligne touchante de la Lune, laquelle étoit perpendiculaire à celle qui passoit par les cornes.

A $3^h 10' 6''$ le centre de Jupiter étoit dans la ligne qui passoit par les cornes & par le centre de la Lune. Cette ligne a été déterminée exactement par le moyen de deux filets du micrometre qui étoient éloignés l'un de l'autre de la distance du demi-diametre de la Lune, & par le moyen des cornes visibles. La distance du centre de Jupiter à la corne australe étoit alors de $1' 54''$, & ç'a été le vrai temps de la conjonction apparente de ces deux astres.

Nous avons aussi observé le diametre de Jupiter de $41''$ avec le micrometre appliqué à une Lunette de 16 pieds.

Nous trouvâmes aussi le diametre de la Lune à la hauteur de 28° à peu près, & à $2^h 16'$ de $3' 5''$.

CONJONCTION DE JUPITER

AVEC LA LUNE,

Observée le 24 Août 1704.

PAR Mrs. CASSINI & MARALDI.

A Près l'occultation de Jupiter par la Lune, arrivée le 27 Juillet, nous avons observé la conjonction de la même Planete fort proche de la Lune le matin du 24 Août; ce que nous avons fait en observant avant & après la conjonction, les différences d'ascension droite & de déclinaison entre la Lune & Jupiter, par les passages de la Lune & de Jupiter par les fils qui se croisent au foyer de la Lunette, de la maniere qui a été expliquée autrefois.

Le 22 Août le centre de la Lune passa au mé-

ridien à
Et le bord à

$5^h 43' 16''$
 $5 44 18$

1704.
6. Septem-
bre.

La hauteur méridienne de la corne supérieure de la Lune, fut de	59 ^h 11' 50''
Celle de la corne inférieure	58 41 10
Le centre de Jupiter passa au méridien à	7 21 14
Et sa hauteur méridienne fut de	63 53 0
Le 23 Août le centre de la Lune passa au méridien à	6 3 58
Le bord suivant de la Lune passa au méridien à	6 33 5
Hauteur méridienne de la corne supérieure	62 5 0
Hauteur méridienne de la corne inférieure à	61 33 30
Le centre de Jupiter passa au méridien à	7 18 13
Le bord de la Lune au fil perpendiculaire à	11 55 46
Jupiter au fil perpendiculaire.	12 1 27
Différence du passage.	0 5 41.
Différence de déclinaison en temps dont Jupiter étoit plus méridional que la corne Septentrionale de la Lune.	0 22
Immersion du premier Satellite dans l'ombre de Jupiter : mais cette observation n'est pas exacte, à cause que Jupiter étoit fort près de la Lune.	1 25 47
Le centre de la Lune au fil perpendiculaire.	1 56 13
Le bord au même fil.	1 57 21
Jupiter au même fil.	1 58 39.
Différence d'ascension droite entre le bord de la Lune & Jupiter.	1 18
En temps différence de déclinaison à l'égard de la corne méridionale.	0 36
Le bord au fil perpendiculaire.	2 7 19 ¹ / ₂
Le centre de Jupiter.	2 8 18
Différence.	0 55 ¹ / ₂
Différence de déclinaison.	29
Le bord au fil perpendiculaire.	2 16 40
Jupiter au même fil.	17 18
Différence d'ascension droite:	0 38
	Différence

Différence de déclinaison.		24
Le bord de la Lune au fil perpendiculaire.	2 24	58
Le centre de Jupiter.	2 25	20
Diff. de déclinaison en temps vers le Septentrion à l'égard de la corne méridionale.	0	22
	0	18 $\frac{1}{2}$
Le bord de la Lune au fil perpendiculaire.	2 34	7
Le centre de Jupiter.	2 34	13
Différence d'ascension droite.	0	6

Par les observations faites à 2^h 25', & à 2^h 34', on trouve que Jupiter & le bord suivant de la Lune avoient la même ascension droite à 2^h 37' 33".

Et par la comparaison des observations faites à 2^h 25', & 3^h 14', Jupiter arriva au parallèle de la corne méridionale de la Lune à 2^h 57' 47".

A 3^h 4' 9" le Satellite fut perpendiculaire à la corne méridionale à la distance d'un diamètre de Jupiter.

A 3^h 10' 14" le bord précédent de Jupiter fut perpendiculaire à la corne.

A 3^h 11' 56" le bord suivant de Jupiter fut perpendiculaire à la corne.

Donc à 3^h 11' 5" le centre de Jupiter fut perpendiculaire à la corne, qui est le temps de sa conjonction en longitude; & pour lors le centre de Jupiter étoit éloigné de deux de ses diamètres de la corne méridionale.

La conjonction de Jupiter avec la Lune en longitude précéda la conjonction en ascension droite de presque deux minutes de temps, & elle arriva à 3^h 13' 3", comme on la tire par les observations suivantes.

Jupiter au fil perpendiculaire à	3 ^h 13'	45"
Le bord de la Lune au même fil.	3 14	57
Différence du passage entre le centre de Jupiter & le bord de la Lune.	1	12
Différence de déclinaison entre la corne de la Lune & Jupiter, dont Jupiter est plus méridional.	0	9 $\frac{1}{2}$
Jupiter au fil perpendiculaire.	3 15	52

250 MEMOIRES DE L'ACADE'MIE ROYALE

Le bord de la Lune.	3 ^h 19'	7"
Différence d'ascension droite.	1	15
Différence de déclinaison.		10 $\frac{1}{2}$
Jupiter au fil perpendiculaire.	3 18	14 $\frac{1}{2}$
Le bord de la Lune au fil perpendiculaire.	3 19	35
Différence d'ascension droite.	1	20 $\frac{1}{2}$
Différence de déclinaison.		12 $\frac{1}{2}$
Jupiter au fil perpendiculaire.	3 22	10 $\frac{1}{2}$
Le bord au fil perpendiculaire.	23	37 $\frac{1}{2}$
Différence d'ascension droite.	1	27
Différence de déclinaison méridionale.		13 $\frac{1}{2}$
Jupiter au fil perpendiculaire.	3 25	17 $\frac{1}{2}$
Le bord de la Lune au fil perpendiculaire.	3 26	50
Différence d'ascension droite entre Jupiter & le bord de la Lune.	1	32 $\frac{1}{2}$
Différence de déclinaison.	0	32 $\frac{1}{2}$



*DESCRIPTION ET USAGE
D'UN NIVEAU
D'UNE NOUVELLE CONSTRUCTION.*

PAR M. DE LA HIRE.

Les grandes conduites d'eau que les Anciens ont faites, 1704.
12. Novemb.
bre.
Lauroient pû nous persuader qu'ils étoient fort favans dans l'art de niveler, si les instrumens, dont il se sont servis, & tout l'artifice qu'ils y ont employé, n'étoient venus jusqu'à nous dans les Ouvrages de Vitruve. Leur grand Niveau qu'ils appelloient le *Chorobate*, étoit une piece de bois de 20 pieds de longueur, soutenue par quelques pieces aux extrémités; & qui avoit dans sa partie supérieure un canal qu'on remplissoit d'eau, avec quelques petits plombs qui pendoient aux côtés, pour s'assurer si cette piece étoit de niveau; & c'étoit toute la longueur de leurs nivellemens: car ils transportoient le *Chorobate* de 20 pieds en 20 pieds pour conduire leurs ouvrages.

Mais les nouvelles découvertes qu'on a faites dans l'Académie des Sciences, & les différens niveaux qu'on y a inventés avec les Lunettes d'approche qui y servent de pinules, nous ont donné moyen de faire des nivellemens d'une bien plus grande justesse, & avec beaucoup plus de facilité que tout ce qui avoit été fait jusqu'alors; puisqu'on peut niveler tout d'un coup une distance de 1000 toises sans aucune erreur sensible.

Nous avons entre les mains les niveaux de Messieurs Picard, Mariotte, Hughs, Thevenot & Roëmer, dont les constructions sont toutes différentes, & j'en ai aussi donné un qui tire sa justesse de la superficie de l'eau, dont j'ai fait imprimer la description dans le *Traité du Nivellement* de M. Picard en 1684, & qu'on a copié ensuite dans

les Memoires de l'Académie en 1699. Mais les nivellemens que j'ai faits autrefois par ordre du Roi en différens endroits & à différentes reprises par l'espace de près de 100 lieues, m'ont fait connoître que tous ces niveaux avoient de grandes incommodités dans l'usage qu'on en fait, & qu'on ne pouvoit les transporter facilement sans être obligé de les rectifier, & quelquefois d'en rétablir les pinules, ce qui demande des opérations assez embarrassantes. Ce n'est pas qu'il soit nécessaire de se servir d'un niveau qui soit juste pour faire des nivellemens exacts, puisqu'on en peut facilement venir à bout en prenant quelques précautions, comme il est marqué dans le Nivellement de M. Picard, & comme je l'ai expliqué ensuite dans un petit Traité du Nivellement que j'ai donné au public.

Le niveau dont je donne ici la description, & que j'ai depuis quelque temps, est construit sur un principe différent de tous les autres niveaux qui ont paru jusqu'à présent : car ils tirent tous leur justesse ou du centre de gravité du corps de tout le niveau, lequel est suspendu par un corps flexible ou autrement, ou d'un plomb aussi suspendu à un fil très-délié comme un cheveu, ou enfin de la superficie de l'eau, ou de quelqu'autre corps liquide dont la superficie se met toujours de niveau. Mais celui-ci n'est point suspendu par quelque corps que ce soit : au contraire, le centre de gravité du corps qui lui sert de regle comme à plusieurs autres, est placé au-dessus du point d'appui, en sorte que s'il étoit possible de faire que le centre de gravité du corps qui est un point mathématique, demeurât immobile sur l'appui, qui est un point le plus fin qu'il est possible de le faire ; on auroit alors le véritable niveau, qui seroit la ligne perpendiculaire menée à celle qui passe par le centre de gravité & par l'appui. Mais comme il est impossible de faire que le centre de gravité demeure dans une position fixe au-dessus du point d'appui, on prend pour le vrai niveau la position où ce point est comme indifférent à tomber d'un côté ou d'autre.

On dira peut-être que ce principe n'est pas si juste que celui où le corps pesant est suspendu par un corps flexible : mais pour peu qu'on fasse réflexion sur ces suspensions, on verra qu'il y a des irrégularités très-grandes qui sont causées par la nature de ces corps, outre que si toute la machine est exposée à un petit vent, elle est dans un balancement & dans une agitation continuelle, & il est impossible de déterminer le niveau. Je ne parle point des remèdes qu'on a apportés à ces balancemens, comme de faire plonger le poids suspendu à la machine dans de l'eau ou dans de l'huile pour en arrêter les vibrations, puisque ce remède par lui-même a de grandes incommodités, & qu'il n'est pas encore suffisant.

Celui que je propose est ferme, solide & inébranlable, étant une fois bien construit, & il se peut transporter comme on voudra sans craindre qu'il puisse s'altérer ; & si l'on y fait quelque changement, il sera très-facile de le rectifier sans changer de place, ou, comme on dit, d'une seule station.

Les nouvelles pinnules sur du verre, comme je les ai proposées à l'Académie, & comme elles sont décrites dans les Mémoires de l'année 1700, & dans mes Tables Astronomiques, lui donnent aussi un très-grand avantage par-dessus tous les autres : car ces pinnules sont inaltérables à tous les changemens de l'air, & ne sauroient être gâtées par quelqu'autre accident que ce soit, quoiqu'elles soient un peu moins aussi fines & déliées que les filets de ver à soie qu'on avoit considérés jusqu'à présent comme les plus propres à faire des observations exactes. Il est très-facile de les faire, puisque ce n'est qu'une petite ligne ou un trait fort délicat qu'on marque avec la pointe d'un diamant sur un petit morceau de verre ou de glace, que l'on arrête au foyer du verre objectif de la Lunette : car le centre de l'objectif tient lieu de pinnule objective, & le trait sur le verre sert de pinnule oculaire. Il est aisé de juger que cette pinnule oculaire ne peut souffrir aucune altération ou changement, soit par la chaleur ou par le froid, soit par les

petits insectes qui s'attachent aux filets de soie , soit en y touchant , ou enfin en transportant l'instrument de quelque maniere que ce soit ; car elle sera aussi solide que la pinnule objective.

La principale partie de ce niveau est une regle de fer qui porte à ses deux extrémités les pinnules ou dioptrés , qui est un verre objectif de Lunette pour la pinnule objective , & pour la pinnule oculaire un petit morceau de verre avec un petit trait , comme je viens de dire. Ce verre coule dans un chassis ou coulisse pour le pouvoir arrêter à quelle hauteur on veut. Cette regle tient lieu du corps d'une Lunette qui n'a point de verre oculaire , & qui n'a point d'autre tuyau que toute la boîte qui est noircie par dedans & qui est bien fermée.

Il y a sous cette regle de fer une autre regle posée sur le champ , qui sert à la rendre plus ferme , & qui porte dans son milieu une autre piece de fer ou de laiton d'une longueur égale à peu près aux deux tiers de la premiere , avec laquelle elle est posée à l'équerre. Cette piece va en s'élargissant par le bas , en sorte que sa largeur est perpendiculaire à la longueur de la regle de la Lunette. A l'extrémité de cette piece on y soude des deux côtés les pivots sur lesquels la machine se meut , & par conséquent tout le corps du niveau se mouvant , quand les pivots seront à peu près de niveau , la Lunette haussera & baissera dans son mouvement.

Pour les pivots ils demandent un peu de soin dans leur construction. Leur coupe doit être en forme de losange fort aigu , & même un peu tranchant d'un côté & d'autre , qui est le haut & le bas , car c'est par ces endroits où tout le niveau est soutenu sur l'appui.

Les pivots sont d'acier trempé , & l'endroit où ils posent sur l'appui est un peu creusé quoique tranchant , afin que dans le mouvement du niveau ils ne puissent pas s'écartier d'un côté ni d'autre. Il y a deux cavités semblables à l'opposite l'une de l'autre pour l'usage que nous expliquerons ensuite.

Les appuis sont attachés avec des vis à une pièce particulière laquelle est de bois, & cette pièce est arrêtée dans le fond de la boîte avec des vis, en sorte qu'on peut la retirer quand on veut hors de la boîte avec tout le niveau qui pose sur ses appuis.

Ces appuis sont faits d'une pièce plate d'acier trempé; dans laquelle il y a deux ouvertures rondes, dont l'intérieur est tranchant émouffé, pour soutenir les pivots du niveau, & pour être assez fermes pour ne se pas gâter dans le mouvement du niveau.

Pour la boîte où l'on enferme le niveau, on peut la faire de quelle figure on voudra à l'extérieur; mais tout le niveau ayant la figure d'un *T*, la boîte doit aussi être de la même figure à peu près, & elle doit contenir l'instrument, en sorte qu'il ait seulement la liberté de se mouvoir un peu d'un côté & d'autre. Aux deux extrémités de la partie d'en haut de la boîte, qui est la traverse du *T*, il y a deux ouvertures rondes, à l'une desquelles est attaché un bout de tuyau, où entre le canon qui porte l'oculaire: car l'oculaire ne tient point à la Lunette, & l'on peut par ce moyen l'approcher ou le reculer de la pinnule oculaire suivant la force de la vue de l'Observateur. L'ouverture de l'autre bout de la boîte sert à laisser passer les rayons des objets qui viennent rencontrer le verre objectif ou la pinnule objective.

Vers l'oculaire à la partie de dessous de la longueur de la boîte, il y a une vis assez longue qui se meut dans un écrou qui est attaché à la boîte. Cette vis sert à élever le bout de la règle de fer suivant l'usage & la nécessité. Le pas de cette vis est très-fin, pour pouvoir élever la règle comme insensiblement en tournant la vis.

À l'opposite de la vis, c'est-à-dire, dans le haut de la traverse de la boîte, il y a par-dedans une lame d'un ressort très-mince, qui est arrêtée à la boîte par son extrémité la plus éloignée de l'oculaire, & par l'autre elle porte une tige avec un bouton qui passe au-dehors de la boîte. Cette tige sert à pousser le ressort vers le bas: car dans son état

256 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
naturel il est appliqué contre le dessus de la boîte par le dedans.

Il y a à la vis un repaire ou marque pour l'enfoncer dans l'écrou jusqu'en cet endroit , & alors la regle de la Lunette étant appuyée sur la vis , la Lunette se trouve vis-à-vis des ouvertures de la boîte.

Il ne s'agit donc plus que de placer les pinnules de telle maniere , que leur ligne de foi soit perpendiculaire au plan qui passe par le centre de gravité de tout le niveau , & par la ligne des appuis , & c'est ce qu'on appelle le *rectifier* ; & comme toutes les parties qui le composent sont solides , étant une fois bien rectifié , il ne changera plus dans la suite : c'est pourquoi il suffit de le bien rectifier en le construisant , par quelqu'une des manieres qui sont expliquées dans le *Traité du Nivellement* de M. Picard , en établissant deux points de niveau , & même avec le niveau sans être rectifié.

Pour rectifier le Niveau.

Supposant donc qu'on ait deux points de niveau *A* & *B* éloignés l'un de l'autre de 100 toises environ , on placera la Lunette à l'un de ces points comme *A* , & on la pointera vers l'autre point *B* , en baissant ou en élevant doucement la boîte. Et lorsque l'objet *B* paroît sur la pinnule oculaire , si la regle de la Lunette est posée sur la pointe de la vis , & qu'elle ne soit pas en état de tomber sur le devant , c'est-à-dire , vers l'objectif , ce qu'on connoît en poussant ou en élevant un peu la regle en tournant la vis , car alors la Lunette donne plus bas , & elle est encore posée sur la vis : c'est une marque que la partie de tout le niveau qui est vers l'oculaire , est trop pesante ; il faudra donc charger la partie de la regle vers l'objectif , par le moyen d'un petit poids qui coulera sur la regle , & qu'on pourroit y arrêter en quel endroit on voudroit avec une petite vis , ou bien seulement la charger avec un peu de cire molle & du plomb. On chargera cette partie de la
regle ;

regle, tant que les pinnules étant pointées vers l'objet *B*, soient indifférentes à rester sur la pointe de la vis, ou à tomber sur le devant, & alors il sera rectifié.

Mais si d'abord les pinnules étant pointées vers l'objet *B*, la règle ne peut pas se tenir sur la vis, on connoîtra delà que la partie du niveau vers l'oculaire est trop legere, & alors il la faut charger comme on a fait dans l'autre cas, jusqu'à ce que le niveau soit dans un état indifférent de tomber ou de rester sur la pointe de la vis; & alors le niveau sera rectifié.

On pourroit aussi au lieu de charger la règle d'un côté ou d'autre, élever ou abaisser la pinnule oculaire dans son châssis, jusqu'à ce que le niveau fût juste; ce qu'on pourroit faire si le niveau n'étoit pas bien éloigné d'être juste.

On remarquera que dans ces opérations, toutes les fois que la Lunette tombe sur le devant, on la remet sur la pointe de la vis, en poussant le ressort du haut de la boîte, lequel pousse en bas le châssis de la pinnule oculaire, & remet par ce moyen la règle sur la pointe de la vis.

Comme ce niveau peut être mis dans une situation renversée, qui est lorsque la Lunette est audessous des pivots, il faut expliquer ce qu'on doit observer en le construisant pour servir dans cet état.

Il est certain que si les pivots étoient une ligne mathématique, lorsqu'on renverseroit le niveau, il pointerait au même endroit où il pointoit dans sa situation droite, pourvu que cet endroit fût parfaitement de niveau avec le lieu où le niveau est placé; & il faudroit seulement pour le rectifier, faire donner la Lunette au même point dans les deux situations du niveau, en augmentant ou en diminuant peu à peu la pesanteur de l'un des bouts de la règle. Mais comme les pivots doivent avoir une grosseur considérable pour les rendre solides, il peut arriver que le plan, qui passe par le centre de gravité de tout le niveau, & par la ligne où les pivots s'appuient, ne fera pas la même dans les deux situations du niveau: c'est pourquoi il faut le rectifier dans sa position renversée de même que

dans la droite. Mais comme on ne doit pas changer les pinnules qui sont rectifiées pour la position droite, il faudra seulement corriger l'endroit des pivots où ils portent sur l'appui dans la position renversée.

Le niveau étant donc renversé, si les pinnules ne donnent pas le même point que dans la situation droite rectifiée, il faudra limer un peu des pivots pour en repousser le tranchant vers l'objectif, si les pinnules donnent trop bas dans la situation renversée, ou vers l'oculaire si elles donnent trop haut.

On peut aussi faire les pivots d'une autre manière, en sorte que le plan qui passera par le centre de gravité de l'instrument, & par l'endroit où les pivots s'appuient, sera le même dans les deux situations du niveau droite & renversée, & ainsi on pourra rectifier ce niveau d'une seule station sans avoir une ligne de niveau.

Dans cette seconde manière les pivots doivent être cylindriques, & très-bien tournés & polis dans l'endroit où ils portent & touchent leurs appuis, qui doit être un peu creusé en forme de poulie. De plus, il faut que le bas & le haut du trou de l'appui qui soutient les pivots, soient presque en ligne droite, afin que les pivots n'y puissent toucher sensiblement qu'en un point.

Il est évident que dans cette construction des pivots, le centre de gravité du niveau, & la ligne qui passera par les endroits où les pivots s'appuient dans les deux situations du niveau, seront toujours dans un même plan, lequel passera aussi par l'axe du cylindre des pivots.

Cette suspension du niveau n'est pas si fine que la première, à cause que l'endroit du pivot où il touche sur l'appui est de figure circulaire, & dans la première il est d'une figure tranchante un peu émouffée.

Usage du Niveau.

Pour se servir de ce niveau, il faut mettre d'abord la vis à son repaire, afin que les pinnules soient vis-à-vis des

ouvertures de la boîte. Ensuite par le moyen du ressort on pousse la règle de la Lunette contre le bout de la vis, en sorte qu'elle ne tombe pas de l'autre côté, ce qui est facile à faire en inclinant la boîte; & dans cet état la règle de la Lunette étant posée sur la vis sans que le ressort l'y retienne, on penche peu à peu la boîte vers le bout où est l'objectif, jusqu'à ce que la Lunette tombe de ce côté-là. Alors on arrête la boîte le plus ferme qu'il est possible dans cet état ou sur un pié ou contre quelque corps solide; il faut que la Lunette soit alors pointée vers l'objet qu'on veut niveler, & l'on doit remarquer exactement la partie de l'objet qui paroît sur le trait qui sert de pinnule oculaire. Mais comme je suppose que la Lunette soit posée sur la vis, on doit pousser doucement la vis jusqu'à ce que la Lunette tombe de l'autre côté, & remarquer bien la partie de l'objet qui paroît sur le trait quand la Lunette tombe; & pour s'en assurer, on doit repousser la Lunette sur la vis par le moyen du ressort, & remarquer si elle tombe encore, & si c'est le même objet qui paroît sur le trait du verre lequel y paroïssoit auparavant. On pourra alors détourner la vis d'une très-petite partie, & repoussant la Lunette sur la vis, observer quelle différence il y aura entre l'objet qui paroîtra sur le trait en cet état de la Lunette, & celui qui y paroïssoit auparavant. Il faut aussi considérer si la Lunette s'arrête alors sur la vis, ou si elle tombe encore de l'autre côté: car pour avoir le point du niveau juste, il faut que la Lunette étant posée sur le bout de la vis, soit en état de tomber de l'autre côté sans qu'elle tombe, & qu'on ne puisse pas l'élever de la moindre quantité par le moyen de la vis sans qu'elle tombe; c'est alors que l'objet qui paroît dans la Lunette sur le trait de la pinnule, est de niveau avec le trait de cette pinnule.

Ce que je dis du niveau se doit toujours entendre du niveau apparent par rapport au lieu où est l'instrument qui sert à niveler, comme il est expliqué dans le Traité du Nivellement: car pour avoir le vrai niveau correspondant à celui où est posé l'instrument, il faut faire la correction au

point de niveau apparent par rapport à la distance entre le lieu où est l'instrument & le point nivelé : mais il ne s'agit pas ici de la pratique du nivellement.

Un des avantages de ce niveau , c'est de pouvoir être renversé , & de servir encore de niveau dans cette situation sans aucune préparation ni changement ; & quoiqu'il ait alors quelques vibrations , elles ne durent que peu de temps : car elles ne viennent que du corps de l'instrument , & non - pas du mouvement de la boîte qui doit être arrêtée ferme , mais sans aucune sujettion , puisqu'elle ne fait rien perdre de la justesse du niveau. On pourra aussi arrêter facilement les balancemens du niveau , en appuyant doucement le ressort contre le chassis de la pinnule , & en le laissant remettre ensuite en son état naturel.

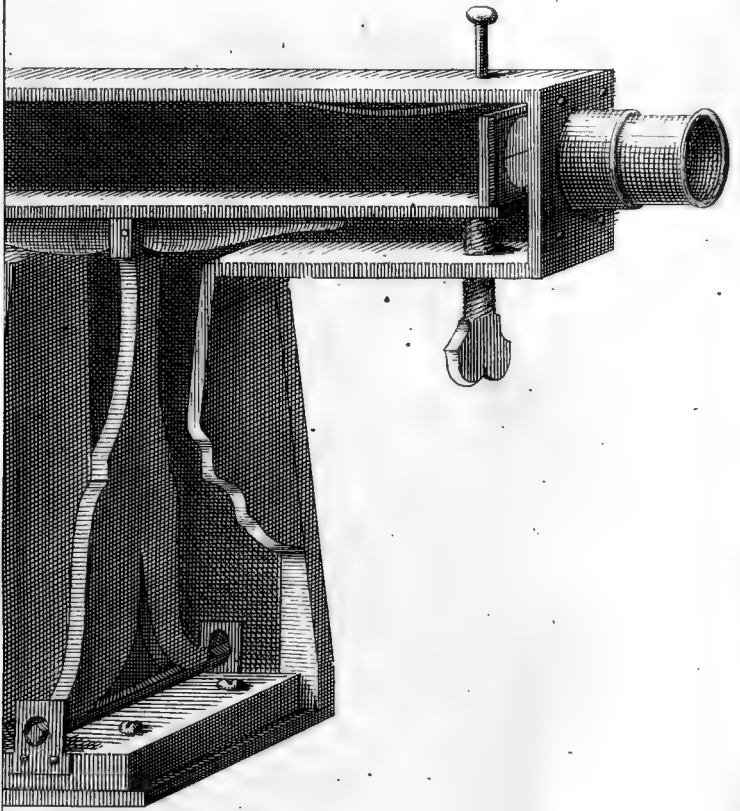
Pour la grandeur de ce niveau elle n'est point déterminée ; car plus la Lunette sera grande , & plus les objets éloignés paroîtront distinctement : mais il sera bien plus incommode à être transporté.

J'ai éprouvé qu'un de ces niveaux , dont la hauteur & la longueur n'est que de 10 pouces , détermine le niveau à 3 ou 4 pouces près à une distance de 1000 toises ; ce qui est tout ce qu'on peut espérer d'un niveau , puisqu'un objet de cette grosseur à cette distance , est entièrement couvert par un filet simple de ver à soye.

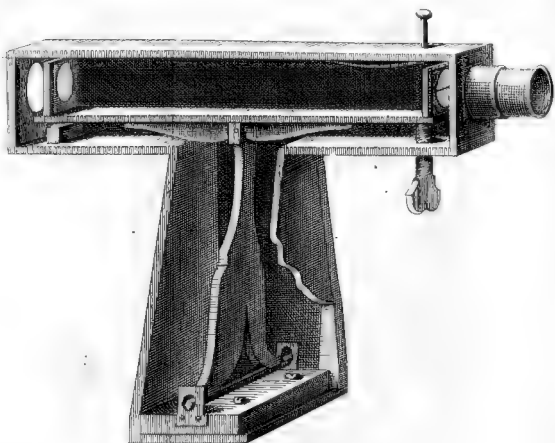
On pourra se servir de différens soutiens : mais une des manieres des plus commodes pour l'usage , sera d'attacher la boîte du niveau bien ferme avec une vis contre la traverse d'un chevalet de Peintre qui soit solide. On pourra aussi le tenir seulement à la main , & l'appuyer contre quelque corps bien stable pendant qu'on fait les opérations.

Il faut remarquer que lorsqu'on veut transporter ce niveau , il est bon que les pivots ne portent point sur leurs appuis ; ce qui sera facile si ces pivots débordent un peu hors de la boîte , & qu'il y ait en cet endroit sur la boîte deux espèces de crochets qui s'engagent dans les bouts des pivots , & qui tiennent tout le niveau élevé hors des appuis.

*du Niveau proposé dans sa boîte
dont le devant est ôté.*



*Figure du Niveau proposé dans sa boîte
dont le devant est ôté.*



On pourra aussi arrêter la Lunette contre le bout de la vis par le moyen du ressort qu'on arrêtera sur la pinnule. Mais si l'on veut ouvrir le couvercle de la boîte, on pourra engager tout le niveau entre quelques tasseaux qui l'empêcheront de balancer d'un côté ni d'autre en le transportant dans un long voyage.

DES MOUVEMENTS DE L'IRIS,

*Et par occasion, de la partie principale de l'Organe
de la vue.*

PAR M. MERY.

L' Iris est un cercle membraneux, posé sur le devant de l'œil. On l'a ainsi nommé à cause des différentes couleurs qui dans l'homme paroissent sur sa surface au travers de la cornée transparente. 1704.
12. Novem-
bre.

Ce cercle forme dans son centre un trou à qui on a donné le nom de prunelle, apparemment parce qu'il paroît de couleur noire. Ce trou est absolument nécessaire pour la vision : car s'il avoit été fermé par l'Iris qui est opaque, les rayons de la lumière, sans lesquels la vision ne se peut faire, n'auroient pu passer dans l'œil.

La prunelle se dilate dans l'ombre & dans l'eau : elle se resserre dans l'air étant exposée aux rayons de la lumière, sans qu'on s'aperçoive que la volonté ait part à ses mouvements. Quand la prunelle se dilate, les fibres de l'Iris s'accourcissent ; quand elle se resserre, ces fibres s'allongent.

Or comme on ne remarque point de fibres circulaires dans l'Iris pour rétrécir la prunelle, il y a lieu de croire que sa dilatation dépend uniquement du ressort des fibres

262 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
droites de l'Iris, qui toutes vont se terminer à la circonfé-
rence interne de ce cercle.

Mais quoiqu'il paroisse que le rétrécissement de la prunelle dépende absolument des rayons de la lumière, néanmoins ces rayons ne peuvent pas d'eux-mêmes prolonger les fibres de l'Iris, ni rétrécir la prunelle. Tout ce qu'ils peuvent faire c'est de donner seulement, par leur entrée dans l'œil, occasion aux esprits animaux de couler dans les fibres de l'Iris plus abondamment qu'ils ne font dans l'ombre; ce sont donc ces esprits qui, en prolongeant les fibres de l'Iris, sont effectivement la cause de la dilatation de la prunelle. D'où il s'en suit que ce trou doit plus ou moins se rétrécir, selon que la lumière, étant plus ou moins forte, détermine une plus ou moins grande quantité d'esprits à couler dans les fibres de l'Iris: mais pour cet effet la respiration doit être de la partie; car quand elle vient à manquer, le mouvement des esprits animaux s'arrête, & alors la lumière devient inutile.

L'observation que je vais rapporter prouve cette hypothese dans toutes ses parties. Quand l'on plonge dans l'eau la tête d'un chat vivant, si l'on expose ses yeux aux rayons du Soleil, la prunelle se dilate au lieu de se rétrécir; au contraire exposés dans l'air aux mêmes rayons de cet Astre, la prunelle se rétrécit au lieu de se dilater.

Par l'explication du premier de ces deux phénomènes qui semble détruire l'hypothese que je veux établir, je vais démontrer que la dilatation de la prunelle dépend uniquement du ressort des fibres de l'Iris. Par celle du second, je ferai connoître que les esprits animaux sont la cause immédiate de son rétrécissement, & que la lumière n'en peut être que l'occasion.

Quant au premier phénomène, il faut remarquer que, lorsque la tête du chat est plongée dans l'eau, cet animal ne peut plus respirer: or le mouvement de toute la matière des esprits animaux dépendant du mouvement circulaire du sang, & celui-ci de la respiration, il est évident que quand elle vient à manquer, la circulation du sang &

le mouvement des esprits animaux doivent cesser bien-tôt après. On observe qu'à mesure que le mouvement de ces esprits se ralentit, la prunelle se dilate, les esprits animaux ne peuvent donc pas être la cause de son élargissement. Il faut donc nécessairement que sa dilatation dépende uniquement du ressort des fibres de l'Iris.

A l'égard du second phénomène, si l'on retire le chat de l'eau encore vivant, & qu'on expose ses yeux aux rayons du Soleil, on voit la prunelle se rétrécir à mesure que la respiration se rétablit. Donc les esprits animaux qui pour lors viennent à couler dans les fibres de l'Iris, sont la cause immédiate du rétrécissement de la prunelle : car l'on ne peut pas l'attribuer aux rayons de la lumière ; parce que les yeux de cet animal étant plongés dans l'eau, la prunelle se dilate, quoiqu'il entre dans leur globe beaucoup plus de lumière, que lorsqu'ils sont dans l'air exposés à ses rayons ; la lumière ne peut donc être que l'occasion de l'écoulement des esprits animaux dans les fibres de l'Iris : mais elle ne le peut procurer, si l'animal ne respire ; d'où il est aisé de juger que la lumière ne cesse de produire cet effet, quand la tête du chat est plongée dans l'eau, que parce que le mouvement des esprits animaux est arrêté dans leur source par le défaut de la respiration dont il dépend absolument, de même que celui du sang.

Que la dilatation de la prunelle dépende uniquement du ressort des fibres de l'Iris, son rétrécissement des esprits animaux immédiatement, & par occasion de la lumière ; en voici des preuves bien convaincantes.

Premièrement, quand par l'obstruction des nerfs optiques les esprits animaux ne peuvent plus s'écouler dans les yeux de l'homme, la prunelle se dilate ; il est donc visible que sa dilatation ne dépend pas de ces esprits, mais du ressort des fibres de l'Iris, qui fait que dans cette maladie ces fibres s'accourcissent.

Secondement, si pendant l'obstruction de ces nerfs on expose les yeux de cet homme à la plus grande lumière, la

prunelle reste dans la même dilatation ; les rayons du Soleil ne peuvent donc pas être d eux - mêmes la cause de son rétrécissement.

Troisièmement, si on leve l'obstruction des nerfs optiques, & qu'on expose ensuite les yeux de cet homme aux rayons de la lumière, la prunelle se resserre ; il est donc évident que les esprits animaux, qui dans ce moment viennent à couler dans les fibres de l'Iris qu'ils prolongent, sont la cause immédiate du rétrécissement de la prunelle, & que la lumière n'en peut être que l'occasion ; d'où il s'ensuit que la force du ressort des fibres de l'Iris étant en équilibre avec la puissance des esprits animaux, la prunelle doit rester dans une moyenne dilatation : mais pour cela il ne faut qu'une lumière médiocre, car quand elle est trop foible ou trop forte, l'équilibre se rompt, & alors la prunelle se dilate ou se rétrécit considérablement.

Une lumière foible, telle qu'elle est dans l'ombre, déterminant peu d'esprits animaux à couler dans les fibres de l'Iris, leur ressort l'emporte sur ces esprits, & dans ce moment la prunelle s'élargit davantage. Au contraire une lumière forte donnant occasion aux esprits animaux de couler plus abondamment dans les fibres de l'Iris, ces esprits surmontent par leur puissance la force du ressort de ces fibres, & alors la prunelle se rétrécit beaucoup plus.

De ces preuves soutenues par des expériences si évidentes l'on peut enfin conclure. 1°. Que les esprits animaux sont la cause immédiate du rétrécissement de la prunelle. 2°. Que la lumière ne fait que donner occasion à l'écoulement de ces esprits. 3°. Que la volonté n'y a point de part. 4°. Que le ressort des fibres de l'Iris est l'unique cause de la dilatation de la prunelle.

Sur ce système, quoique fondé sur des observations indubitables, il se présente néanmoins à l'esprit trois difficultés considérables, dont voici la première : Savoir s'il entre moins de lumière dans les yeux lorsqu'ils sont dans l'air, que quand ils sont dans l'eau exposés aux rayons du Soleil.

Pour reconnoître dans lequel de ces deux éléments il
passe

passé plus de lumière dans les yeux, il n'y a qu'à remarquer qu'un lieu est d'autant plus éclairé, qu'il reçoit plus de ses rayons; & que plus ce lieu est éclairé, mieux on voit les objets qu'il renferme.

Or on ne peut discerner aucunes des parties contenues dans les yeux exposés dans l'air; au lieu que plongés dans l'eau, on les voit fort distinctement, excepté les humeurs & la rétine, qui disparaissent de telle sorte, que le dedans du globe des yeux semble n'être rempli que d'un air lumineux. Il entre donc beaucoup moins de rayons de lumière dans les yeux exposés à l'air, que plongés dans l'eau; ce qui arrive par les raisons que je vais rapporter.

Quelque polie que paroisse la surface extérieure de la cornée transparente, il est néanmoins constant qu'elle a beaucoup d'inégalités imperceptibles, qui n'étant point applanies, réfléchissent dans l'air un grand nombre de rayons de la lumière qui tombent sur cette membrane.

D'ailleurs lorsque les yeux sont exposés dans l'air aux rayons du Soleil, la prunelle se rétrécit considérablement. Il ne peut donc passer en cet état qu'un très-petit nombre de ses rayons dans les yeux; ce qui n'étant pas suffisant pour éclairer leur globe, il n'est pas étrange qu'on ne puisse discerner aucune des parties qui y sont renfermées.

Mais aussi n'est-il pas extraordinaire de les y appercevoir quand les yeux sont plongés dans l'eau; parce que les inégalités de la cornée étant applanies par ce liquide, & la prunelle tout à fait dilatée, tous les rayons du Soleil qui tombent sur la cornée transparente passent à travers, & entrant dans le globe des yeux, ils l'éclairent si fort, qu'on peut voir alors très-distinctement l'extrémité du nerf optique, & la choroïde avec toutes ses couleurs & ses vaisseaux. Mais l'on ne peut nullement appercevoir ni les humeurs, ni la rétine; parce qu'étant transparentes comme l'eau, elles semblent ne faire qu'un même corps avec elle; ce qui fait qu'on ne peut les distinguer d'avec l'eau.

Què la surface de la cornée, quelque polie qu'elle pa-

roisse , soit remplie d'inégalités que l'eau applanit ; en voici une preuve bien sensible. Dans la goutte sereine, la prunelle de l'homme se dilate entierement , & ses yeux étant exposés à la plus grande lumiere , ce trou ne peut se rétrécir.

Or si la surface de la cornée étoit parfaitement polie , tous les rayons de lumiere qu'elle recevroit , devroient passer dans les yeux de l'homme exposés à l'air , comme ils font dans ceux du chat plongés dans l'eau , & l'on découvroit également dans l'un & dans l'autre la choroïde. On n'apperçoit point cette membrane dans les yeux de l'homme , on la voit dans ceux du chat ; il faut donc qu'il y ait sur la surface de la cornée des inégalités imperceptibles que l'air ne peut unir , mais que l'eau applanit. Et c'est par cette raison qu'un homme , pour peu qu'il ait les yeux plongés dans l'eau , apperçoit un objet au fond d'une riviere , qu'il ne peut plus voir lorsqu'il les a hors de l'eau appliqués à demie ligne de sa superficie. C'est aussi par la même raison , la vie étant éteinte , que la choroïde d'un chat que l'on voit dans l'eau , ne peut être apperçue dans l'air , quoique la prunelle reste également dilatée dans ces deux élémens après la mort de cet animal.

L'applanissement des inégalités de la cornée par l'eau , se vérifie encore par l'exemple du verre. Il reste toujours au plus poli des parties raboteuses qui réfléchissent dans l'air quand il y est exposé , une grande partie des rayons de la lumiere qui viennent se rendre sur sa surface : mais lorsqu'il est plongé dans l'eau , tous ces rayons passent à travers ; parce que toutes les inégalités du verre étant applanies par ce liquide , il ne se fait plus de réflexion dans l'air d'aucune partie de la lumiere.

Il est donc certain par toutes ces expériences , premièrement , que les inégalités de la cornée ne pouvant être applanies par l'air lorsqu'elle y est exposée , elles doivent repousser la plus grande partie des rayons de la lumiere qui viennent frapper cette membrane ; ce qui fait qu'il en passe si peu dans le globe des yeux , qu'on ne peut voir la choroïde , lors même que la prunelle est entierement dilatée dans un grand jour.

Secondement, que les inégalités de la cornée étant applanies par l'eau, alors tous les rayons de lumière que reçoit cette membrane, doivent passer à travers, & rendre en entrant dans le globe des yeux la choroïde visible avec toutes ses couleurs & ses vaisseaux.

La seconde difficulté consiste à savoir, si les rayons de la lumière qui entrent dans le globe des yeux par la prunelle, déterminent effectivement les esprits animaux à couler dans les fibres de l'Iris, ou si ces rayons s'insinuant dans ces fibres ne font seulement que raréfier ce qu'ils renferment de ces esprits; ce qui pourroit produire le même effet, c'est-à-dire, prolonger les fibres de l'Iris, comme peuvent faire les esprits animaux par leur épanchement.

Pour répondre à cette difficulté, il ne faut qu'examiner si la matière des esprits animaux peut s'exhaler sitôt que leur mouvement vient à cesser. Comme il n'y a pas d'apparence qu'elle se dissipe avant la mort, il est aisé de décider la question par l'expérience de la tête du chat que je viens de rapporter.

Quand la tête d'un chat vivant est plongée dans l'eau, ses yeux exposés au Soleil, il est constant qu'il entre beaucoup plus des rayons de cet astre dans leur globe, que lorsqu'ils sont dans l'air exposés à sa lumière.

Dans l'eau la prunelle se dilate, & le mouvement des esprits animaux cesse. Donc tous les rayons du Soleil qui entrent dans les yeux du chat, ne sont pas capables par eux-mêmes de raréfier la matière de ces esprits renfermée dans les fibres de l'Iris, puisque ces fibres s'accourcissent dans l'eau.

Au contraire, si on retire de l'eau la tête du chat encore vivant, & qu'on expose ses yeux aux rayons du Soleil, les esprits animaux reprennent leur cours, & alors la prunelle se resserre. Donc le peu de lumière qui entre dans le globe des yeux, détermine effectivement les esprits animaux à couler dans les fibres de l'Iris, puisque ces fibres s'allongent dans l'air.

On me demandera peut-être comment les rayons de la lumière peuvent donner occasion à l'écoulement des esprits animaux dans les fibres de l'Iris. Voici sur cela quelle est ma conjecture.

Je viens de faire remarquer que ce n'est point en raréfiant la matière de ces esprits. On peut donc penser qu'en même temps que les rayons de la lumière entrent dans le globe des yeux, ils s'insinuent dans leurs nerfs, & rendent la matière des esprits animaux plus fluide qu'elle n'est naturellement; ce qui donne occasion à ces esprits de couler dans les fibres de l'Iris plus abondamment qu'ils ne font dans l'obscurité.

La troisième difficulté qui se présente à l'esprit contre l'hypothèse que je soutiens, c'est qu'on a peine à comprendre que les fibres de l'Iris puissent s'allonger à mesure de ce qu'ils reçoivent d'esprits animaux; parce qu'on est prévenu que tous les muscles s'accourcissent d'autant plus, qu'ils en sont pénétrés d'une plus grande quantité; au lieu que les fibres de l'Iris s'allongent d'autant plus, qu'ils en reçoivent davantage.

Pour résoudre cette difficulté qui paroît la plus embarrassante, je me représente la structure des fibres de l'Iris, semblable à celle des corps caverneux de la verge, qui s'allongent à mesure qu'ils reçoivent plus ou moins d'esprits animaux. Les fibres de l'Iris doivent donc s'étendre de même, selon qu'ils en sont plus ou moins remplis, si leur structure est la même que celle des corps caverneux.

Ce qui semble confirmer davantage cette idée, c'est qu'il est certain que le raccourcissement des fibres de l'Iris dépend, de même que celui des corps caverneux, de leur ressort.

Au reste l'expérience qui m'a appris que les humeurs des yeux disparaissent lorsqu'elles sont dans l'eau exposées aux rayons du Soleil, me fournit un moyen assuré pour résoudre aisément ce problème; savoir, quelle est la partie principale de l'organe de la vûe.

On ne doute pas que ce ne soit celle sur laquelle se va peindre l'image des objets. Or les trois humeurs de l'œil

donnant passage aux rayons de la lumiere , il est constant que l'image des objets ne peut se former sur aucune de ces humeurs , nulle d'entr'elles ne peut donc être la partie principale de l'organe de la vûe.

Et parce que ces mêmes rayons de la lumiere qui entrent dans le globe de l'œil traversent encore la rétine , il n'y a pas non plus d'apparence que cette membrane puisse être la partie principale de cet organe à laquelle on doit rapporter la vision ; puisque l'image des objets ne peut pas aussi se peindre sur cette membrane , qui , comme les humeurs , disparoît dans l'eau étant exposée aux rayons du Soleil ; ce qui confirme l'observation de M. Mariot.

Ce savant Académicien a remarqué il y a long-temps , que lorsque les rayons de la lumiere réfléchie par les objets tombent sur l'extrémité du nerf optique où la choroïde est percée , on ne peut appercevoir l'objet d'où ils partent ; parce que ces rayons s'enfoncent dans le corps de ce nerf , où ils s'amortissent & s'éteignent.

Or la rétine n'étant qu'un développement fort superficiel de sa moëlle , que ces rayons peuvent percer beaucoup plus aisément , ne peut pas les arrêter ; donc cette membrane ne peut pas être la partie principale de l'organe de la vûe.

D'ailleurs cette même expérience qui m'a fait découvrir , que les rayons de la lumiere traversent les humeurs & la rétine , m'a fait aussi connoître que ces mêmes rayons sont enfin arrêtés par la choroïde qui est opaque ; il y a donc bien de l'apparence que c'est plutôt sur la surface de cette membrane que sur la rétine , qui est transparente , que va se peindre l'image des objets ; la choroïde est donc la partie principale de l'œil. C'est ce que la maniere dont se fait la vision fera aisément comprendre.

Lorsque la lumiere vient directement du corps lumineux frapper la choroïde , ses rayons réfléchis par cette membrane contre la rétine , ébranlent les filets de celle-ci , & donnent aux esprits animaux dont ils sont remplis , une modification particuliere , qui produit dans l'ame le sentiment de lumiere.

Quand au contraire la lumiere sortant du corps lumineux se porte sur un objet capable de la réfléchir, & que par réflexion elle tombe sur la choroïde, ses rayons repoussés par cette membrane, donnent alors aux esprits animaux renfermés dans les filets de la rétine qu'ils ébranlent par leur retour, une autre modification qui cause dans l'ame le sentiment de couleur.

Et parce que la lumiere en se réfléchissant se revêt de la figure & de la grandeur du corps qui la renvoie, cela fait qu'avec la couleur on apperçoit aussi la figure & la grandeur de l'objet; & c'est en quoi consiste toute son image.

Contre l'usage de la choroïde que je viens d'établir sur des expériences sensibles, on pourroit cependant me faire cette objection.

La maniere dont vous expliquez la vision, montre qu'elle dépend de l'ébranlement des petits filets nerveux de la rétine, & de la modification des esprits animaux qui y sont renfermés. Cela étant, les rayons de la lumiere sont donc capables, étant réfléchis seulement par les objets, de donner d'abord en entrant dans l'œil, aux filets de la rétine & aux esprits animaux, ce mouvement particulier que vous dites être nécessaire pour la sensation. La rétine est donc dans votre principe la principale partie de l'œil qui sert à la vision, & non la choroïde.

Pour répondre à cet argument, je dis que si les rayons de la lumiere réfléchis par les objets, n'étoient une seconde fois réfléchis par la choroïde, nous ne pourrions voir les objets. C'est ce que nous montre l'expérience: car quand les rayons de la lumiere modifiés seulement par les corps qui les renvoient vers nos yeux, tombent sur le centre du nerf optique où la choroïde est percée; nous ne pouvons pas, comme a fort bien remarqué M. Mariot, appercevoir les objets: nous les voyons quand ces rayons viennent frapper la choroïde. C'est donc cette membrane, qui repoussant une seconde fois les rayons de la lumiere contre la rétine, modifie les filets nerveux de cette membrane

d'une maniere propre à faire sentir à l'ame & la lumiere, & les objets. La choroïde est donc enfin la partie principale de l'organe de la vûe.

DISCOURS SUR LES BAROMETRES.

PAR M. AMONTONS.

PArmi les découvertes de Physique du dernier Siecle, celle du Barometre, ou de la maniere de mesurer le poids de l'atmosphere peut bien tenir le premier rang. 1704.
12. Novem-
bre.

La netteté & l'évidence avec lesquelles on explique à présent plusieurs effets de la nature, où l'on ne voyoit avant cette découverte qu'obscurité & qu'incertitude, en sont des preuves assez convaincantes. Personne presque n'ignore que les effets qu'on attribuoit autrefois à l'horreur du vuide, avoient des causes qui étoient alors tout à fait inconnues à ceux-mêmes qui se servoient le plus volontiers de cette expression.

C'est ainsi que ce qui est très-obscur & presque impénétrable dans un temps, devient de la dernière évidence dans un autre.

Mais quoiqu'il soit vrai que depuis cette découverte on ait éclairci sur ce sujet une infinité de choses très-difficiles avec toute la clarté qu'on peut souhaiter; on ne peut néanmoins douter qu'il n'en reste encore un grand nombre, & que ces dernières le sont d'autant plus, qu'elles sont moins apparentes, & qu'elles ne se présentent pas d'abord à l'esprit comme les premières.

Dans la nouveauté du Barometre, les effets surprenans du poids de l'air ont seuls attiré toute l'attention de ceux qui les voyoient. On se laissoit volontiers prévenir qu'il étoit la seule cause du mouvement du mercure; & si l'on faisoit réflexion qu'il n'y a rien sur quoi la chaleur n'agisse, on croyoit qu'en ce rencontre c'étoit si peu de chose que

272 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
cela ne valloit pas la peine de s'y arrêter. On passoit aisément pardessus un raisonnement qui n'avoit rien de nouveau, pour admirer un systéme dont la nouveauté surprenoit agréablement par son heureux succès; & l'on n'avoit, pour ainsi dire, des yeux que pour considérer une foule d'expériences toutes curieuses, qui se présentoient & s'expliquoient comme d'elles-mêmes, sans qu'il fût besoin de rien déterminer de précis.

En effet, il importoit peu pour rendre raison, par exemple, des pompes, des siphons, & de presque toutes les autres expériences de la pesanteur de l'air, de savoir que le poids du mercure n'étoit pas le même en été qu'en hiver. Il suffisoit qu'on fût assuré que ce n'étoit pas d'une quantité assez considérable pour empêcher de déterminer en général l'élévation du mercure dans les tubes environ à 28 pouces, & celle de l'eau à 32 pieds.

Mais enfin ces effets apparens & palpables du poids de l'atmosphère étant maintenant suffisamment expliqués d'une manière générale, il nous reste à le faire d'une manière plus particulière & plus précise, & à porter notre attention sur d'autres, qui, pour être plus cachés, n'en sont pas moins utiles.

La seule chose qui pourroit en cela nous faire de la peine, c'est que le Barometre propre à expliquer en gros l'effet des pompes & des siphons, devient fautif & mauvais quand il s'agit, par exemple, de mesurer les vicissitudes du poids de l'atmosphère, d'en déterminer la hauteur & de niveler plusieurs points sur la surface de la terre. Dans l'observation du plus ou du moins de pesanteur de l'atmosphère, on peut trouver une différence de trois lignes & plus dans la hauteur du mercure, quoique véritablement le poids de l'atmosphère n'ait point changé; ce qui provient de l'effet que la chaleur produit sur le mercure du Barometre, l'expérience ayant fait connoître qu'une colonne de mercure de 28 pouces 9 lignes en hiver, & une de 29 pouces en été, ne pesent pas plus l'une que l'autre. De même le Barometre simple étant porté dans

dans le temps du grand froid de notre climat, d'un lieu élevé sur la surface de la terre, dans un autre creusé au-dessous, pourra donner une différence, dans la hauteur du mercure, d'une ligne & demie, qu'on attribuerait fausement au poids de la colonne d'air qui seroit entre ces deux lieux: & si l'on s'avoit de vouloir déterminer sur cette expérience, la hauteur de l'atmosphère, ou la différence du niveau de deux endroits de la terre, on courroit grand risque de faire très-mal l'un & l'autre.

Les Barometres ou sont simples, c'est-à-dire, chargés seulement de mercure; ou bien ils sont doubles, c'est-à-dire, qu'outre le mercure on y emploie encore une seconde liqueur qui est ordinairement de l'huile de tarte teinte. Pour ce qui est des Barometres simples, l'étendue de leur mouvement est fort médiocre, n'excédant guere 23 à 24 lignes, & à ceux-ci il n'y a autre chose à faire pour éviter l'erreur, que de dresser une Table de correction qui montre les quantités proportionnelles dont la chaleur fait allonger la colonne de mercure de l'hiver à l'esté, & qu'il convient par conséquent retrancher des hauteurs indiquées par le Barometre lors de l'observation. Par exemple, mes Thermometres, c'est-à-dire, ceux dont on trouve la description à la fin de la Connoissance des Temps de 1704, & dans les Mémoires de 1702 & 1703; ces Thermometres, dis-je, marquant 58 pouces, qui est le temps de nos grandes chaleurs, il y a 3 lignes à retrancher de la hauteur où se trouve le mercure dans le Barometre simple; 2 lignes lorsque ces Thermometres marquent 55 pouces 4 lignes; 1 ligne seulement lorsqu'ils ne marquent que 52 pouces 8 lignes, & 0 ou rien lorsqu'ils ne marquent que 50 pouces, & ainsi des autres corrections à faire pour tous les autres degrés de chaleur entre ceux-ci, qu'on trouvera en dressant une Table exacte sur ce fondement.

Mais quant aux Barometres doubles dont le mouvement est beaucoup plus considérable, & sur lesquels la chaleur produit des effets différens dont la combinaison empêche

D 274 MEMOIRES DE L'ACADE'MIE ROYALE
qu'on n'en puisse facilement faire la correction par une Table, joint que les personnes qui se servent de ces Barometres sont pour la plupart peu accoutumés à ces sortes de corrections ; voici le moyen dont je me suis servi afin que cette correction se pût faire comme d'elle-même & sans Table.

Ces Barometres sont composés de deux boîtes de verre *AB*, qui ont communication l'une à l'autre par un tube recourbé *ACB*.

La boîte *A* se termine en une pointe qui est scellée hermétiquement. La moitié supérieure de cette boîte est vuide d'air grossier : l'autre moitié, le tube *ACB*, & la moitié inférieure de la boîte *B*, contiennent du mercure. Cette boule *B* se termine en un tube fort menu *BD*, ouvert en *D*. La moitié supérieure de la boîte *B*, & une partie du tube *BD* contiennent une liqueur qui hausse & baisse dans le tube, suivant que l'atmosphère est plus ou moins léger ; le mercure *AC* contre-balançant & faisant toujours équilibre avec le mercure *CB*, la liqueur *BD* & l'atmosphère.

Tout ceci est à présent connu presque de tout le monde : mais ce qui paroît n'avoir encore été remarqué de personne, c'est que le mercure contenu en *AB* devenant plus léger en esté qu'en hiver, l'atmosphère repousse vers le bas la liqueur contenue dans le tube *BD* assez sensiblement, comme de 3 à 4 pouces, & donne fausement à présumer que l'atmosphère est devenu plus pesant de cette quantité, quoiqu'en effet sa pesanteur n'ait point changé.

Pour prévenir donc ce défaut, il faudroit que la colonne de mercure *AB* pût s'allonger suffisamment pour remplacer le poids que la chaleur leur fait perdre, sans que la liqueur du tube change de place. Pour cela, j'ai pris une liqueur qui se raréfioit aisément par la chaleur, comme fait l'esprit de vin ; j'ai substitué cette liqueur à l'huile de tartre, qu'on emploie ordinairement, & qui ne se raréfie pas à beaucoup près si sensiblement.

J'ai augmenté la capacité de la boîte *B*, qui contient ordinairement cette liqueur, afin qu'il y en pût tenir davan-



tage, & assez pour produire une raréfaction suffisante pour faire baisser le mercure de la même boîte, & allonger par ce moyen la colonne de mercure *AB*, qui sans cela ne s'allongeroit pas, quoique la chaleur l'eût rendue plus légère; parce que l'atmosphère ne pesant pas immédiatement sur le mercure de la boîte *B*, mais sur la liqueur du tube *D*, il feroit baisser cette liqueur, & suppléeroit par ce moyen à la légèreté du mercure; ce qui, comme j'ai déjà dit, donneroit fausement à présûmer que l'atmosphère seroit devenu plus pesant, quoiqu'il n'ait point changé: au lieu que la liqueur de la boîte *B* trouvant dans sa raréfaction toujours la même résistance du côté de l'atmosphère, supposé que son poids n'ait point changé; & en trouvant moins du côté du mercure, rendu plus léger par la chaleur, cette liqueur emploie toute l'action de sa raréfaction contre le mercure qu'elle repousse & qu'elle remet toujours en équilibre avec l'atmosphère, sans que la liqueur du tube *D* sur laquelle l'atmosphère agit immédiatement soit contrainte de changer de place, que lors seulement que l'atmosphère change de poids; & tout l'artifice qu'il y a en cela ne gît qu'à bien proportionner la capacité qui contient la liqueur à la capacité du tube du Barometre: car une trop petite ne corrigeroit pas entierement l'erreur; & une trop grande, en repoussant trop le mercure, feroit que la liqueur dans la raréfaction trouveroit à la fin trop de résistance de la part du mercure, & seroit obligée d'agir du côté de l'atmosphère, ce qui donneroit fausement à présûmer que l'air seroit devenu plus léger.

Il me reste à remarquer qu'encore que par ce moyen l'erreur qui pourroit arriver par le plus ou le moins de légèreté de mercure se corrige d'elle-même, il y en a encore une seconde à éviter qui pourroit être causée par le plus ou le moins de légèreté de la liqueur.

Cette erreur ne seroit pas à la vérité si considérable que la première, & pourroit fort bien être négligée sans grande conséquence: mais il sera toujours mieux d'y avoir égard,

276 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
principalement dans le cas où il s'agit de précision; & c'est
ce qu'on pourra faire par le moyen de la graduation, ainsi
que je le vais dire.

On divise ordinairement cette graduation en parties éga-
les entr'elles, qui ne signifient rien, & qui ne sont seule-
ment que pour exprimer par leur nombre plus ou moins
grand que la liqueur est plus ou moins haute, & par consé-
quent que l'atmosphère est plus ou moins léger; mais non
pas de combien, & ces nombres n'expriment jamais le poids
de l'atmosphère.

J'ai donc jugé qu'il seroit plus à propos que ces parties,
quoique de beaucoup plus grandes, représentassent les pou-
ces & les lignes que le mercure parcourt dans le Barometre
simple de la moindre à la plus grande légereté de l'atmos-
phère.

Ainsi je divise toute ma graduation qui est d'environ 28
pouces en 24 parties égales, qui expriment les 24 lignes
comprises dans le Barometre simple entre 28 pouces 4 li-
gnes, qui est la plus grande pesanteur que j'aie experimen-
tée dans l'atmosphère, & 26 pouces 4 lignes qui est la
moindre.

Je donne à cette graduation une largeur d'environ 14 li-
gnes par haut, & seulement une ligne un quart ou environ
par bas.

Je divise chacune de ces largeurs en huit parties égales,
& je mene des lignes droites des divisions d'enhaut à celles
d'embas; ce qui forme huit trapezes d'environ 28 pouces
de longueur.

Finalement, je coupe tous ces trapezes par des lignes pa-
ralleles entr'elles tirées des 24 divisions qui montent, &
après avoir numéroté ces 24 divisions en descendant depuis
26 pouces 4 lignes jusqu'à 28 pouces 4 lignes, je numérote
les 8 divisions latérales depuis 50 jusqu'à 58, le tout ainsi
qu'on le peut voir par la Figure ci-jointe.

Ces huit divisions latérales représentent les huit pouces
compris sur la graduation de mon Thermometre depuis 50

jusqu'à 58, c'est-à-dire, depuis le plus grand froid jusqu'au plus grand chaud de notre climat, & me servent à faire la correction de l'erreur que le plus ou le moins de légereté de la liqueur du Barometre pourroit causer, & cela en la maniere qui suit.

Je regarde premierement sur mon Thermometre à quelle division il est ; ensuite je prends sur mon Barometre vis-à-vis l'endroit où il se trouve la partie latérale comprise entre la premiere ligne montante de la graduation, & la ligne montante qui répond à la division que j'ai observée sur le Thermometre.

Ajoutant cette partie à la hauteur du mercure que le Barometre indique, j'ai précisément le poids de l'atmosphere.

Ce seroit ici l'endroit de rendre raison de la construction particuliere de ce Barometre & de sa graduation : mais comme elle se déduit d'un détail qui seroit ennuyeux, & que je l'ai déjà donnée dans les Mémoires du 18 Juin dernier ; ceux qui en voudront sçavoir davantage pourront y avoir recours. Je me contenterai d'avertir que ce Barometre, outre sa grande précision, a encore l'avantage d'être presque de moitié plus sensible que les autres, & qu'il faut soigneusement prendre garde qu'il ne reste point d'air dans le haut de la boîte supérieure au-dessous du mercure.

Après ce que je viens de dire de l'effet de la chaleur sur les liqueurs dont le Barometre double est rempli, il reste à examiner quelle peut être son action sur le verre qui contient ces liqueurs, & s'il n'y a point lieu de craindre que cela n'altère encore l'indication du plus ou du moins de pesanteur de l'atmosphere ; ce qui n'est pas sans fondement. Car enfin nous ne connoissons rien dans la nature, de tout ce qui tombe sous les sens, sur quoi la chaleur ne manifeste son pouvoir : ainsi il n'y a point de doute qu'elle n'agisse sur le verre comme sur toute autre chose, & qu'elle ne le dilate de sorte que, véritablement parlant, la capacité d'un vase ou bouteille de verre est plus grande en été qu'en hiver. Mais la question est de sçavoir si cela pourroit être assez con-

278 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
considérable pour causer quelque altération dans le Barometre.

Or par plusieurs expériences exactes, j'ai trouvé qu'une bouteille de verre blanc, assez épais, de figure cylindrique, & telle que sont celles qu'on bouche ordinairement d'un bouchon de verre, pleine d'eau commune, dont le degré de chaleur mesuré par mon Thermometre étoit égal à 54 pouces, & qui contenoit environ 14 onces de cette eau, n'a augmenté sa capacité que de $\frac{1}{2688}$ lorsque je l'ai plongée dans d'autre eau, dont le degré de chaleur mesuré par le même Thermometre étoit de 64 pouces: d'où l'on peut bien juger que cet effet est si peu de chose, qu'il ne peut être sensible dans le verre d'un Barometre, dont la capacité n'est pas à beaucoup près si considérable que celle de cette bouteille.

MANIERE DE RECOMPOSER

*le Soufre commun par la réunion de ses principes,
& d'en composer de nouveau par le mélange de
semblables substances, avec quelques conjectures sur
la composition des métaux.*

P A R M. G E O F F R O Y.

1704.
12. Novem-
bre.

Rien ne nous découvre mieux la nature d'un corps mixte que l'Analyse exacte que l'on en fait en le réduisant parfaitement à ses principes. Il n'est pas facile d'y parvenir. Le feu, qui est le principal agent que nous pouvons y employer, sépare bien à la vérité les différentes substances du mixte: mais elles en sont si altérées qu'elles ne peuvent nous conduire à la vraie connoissance de la nature du corps qu'elles composoient. Pour les autres dissolvans dont on pourroit se servir, ou ils ne rendent pas ces principes plus simples & plus purs, ou bien ils ne les séparent pas tous.

Ce n'est donc qu'en traitant de différentes manières les corps dont on veut découvrir la composition, & en comparant les différentes substances que l'on en a séparées dans ces différentes opérations, que l'on peut parvenir à quelque chose de certain. Mais ce qui nous assure entièrement que nous avons réussi dans la recherche que nous faisons de la composition des corps, c'est lors qu'après avoir réduit le corps mixte en des substances aussi simples que la Chymie puisse les réduire, nous le récompensons par la réunion de ces mêmes substances.

Le Soufre commun dont M. Homberg avoit entrepris l'Analyse il y a quelque temps, est un des corps mixtes des plus difficiles à décomposer.

Les principes dont il est formé, volatiles de leur nature, ou s'élèvent tous ensemble sans pouvoir être desunis, ou bien échappent à l'Artiste dans l'instant de leur desunion. Le Soufre dans des vaisseaux fermés s'élève en fleurs par le feu, & ces fleurs ne sont que le Soufre même : si on le travaille dans des vaisseaux ouverts, l'acide & la partie bitumineuse qui le composent se divisent bien à la vérité : mais elles s'envolent.

Après bien des moyens employés pour retenir ces substances séparées, M. Homberg est enfin parvenu à retirer par deux différentes suites d'opérations, rapportées dans les Mémoires de cette Académie, trois substances de ce minéral, un sel acide, un Soufre ou une substance bitumineuse, & de la terre mêlée de quelques parties métalliques.

Par cette Analyse de Soufre qui paroît aussi exacte qu'elle le peut être, & par les idées qu'elle nous donne du Soufre dans ses principes ; il nous a rendu si sensible la composition du Soufre commun dans la terre, que j'ai cru qu'il ne seroit pas impossible d'imiter la nature & de composer ce Soufre, soit en réunissant les mêmes principes, soit en mêlant des substances toutes semblables à ces principes.

Pour y réussir, j'ai considéré ce qui se pouvoit passer dans les entrailles de la terre pour la production de ce mineral,

& j'ai observé que l'acide vitriolique & le bitume de la terre qui se rencontrent tous deux très-abondamment dans les lieux d'où se tire le Soufre, s'unissoient ensemble par une longue & forte digestion, pendant laquelle une portion de ces substances mêlées très-intimement avec l'alcali de la terre formoit enfin le Soufre.

Sur cette idée j'ai mêlé l'esprit de Soufre bien déflegmé, du baume de Soufre tiré selon le procédé de M. Homberg, de chacun parties égales; j'ai fait digérer ce mélange quelque temps; j'y ait joint une partie d'huile de tartre, & le mélange ayant digéré de nouveau, je l'ai poussé par la cornue à un feu assez vif; il en est sorti du flegme, quelque peu d'huile, & la distillation finie, j'ai trouvé dans la cornue une matiere saline jaune en quelques endroits, & rouge en d'autres, rendant une odeur de Soufre assez forte; j'ai fait une lessive de toute la matiere, je l'ai filtrée, j'y ai versé ensuite du vinaigre distilé qui l'a troublée, & en a fait exhiler une odeur de lait de Soufre très-defagréable. Il s'est précipité à la fin une poudre blanchâtre qui étoit du Soufre brûlant tout pur.

J'ai joint dans cette occasion le sel de tartre aux autres matieres, pour suppléer à l'alcali terreux qui sert de base au Soufre minéral dans la terre.

J'ai voulu voir si des substances de même nature que celles que l'on sépare du Soufre ne pourroient pas en produire de la même maniere; & pour cela, j'ai choisi l'huile de vitriol & l'huile de terebentine.

J'ai mêlé parties égales de l'un & de l'autre; j'ai laissé digérer le tout pendant quelque temps, d'abord le mélange s'est échauffé très-considérablement, il est devenu fort rouge, & il a rendu une odeur assez agréable approchant du citron: cette odeur est devenue un peu plus forte par la suite & moins agréable. J'ai mêlé dans cette liqueur qui s'étoit épaissie, de l'huile de tartre: les matieres ont fermenté pendant un long temps, mais sans grande violence; la fermentation finie, il s'en est fait une li-
queur

queur assez épaisse & savonneuse, dont j'ai distillé une portion ; j'en ai retiré une huile jaune, transparente, d'une odeur forte & d'un goût très-acre, avec un flegme aussi très-acre. Il est venu ensuite une huile plus brune, plus épaisse, douce sur la langue, & d'une odeur d'huile de cire. Enfin il est venu une huile épaisse, douce, de la même odeur & de la même consistance que le beurre de cire. J'ai trouvé au fond de la cornue une masse saline, jaune & d'une odeur de Soufre ou d'œufs pourris assez forte. J'ai dissous cette matière dans de l'eau, & j'ai versé sur la dissolution du vinaigre distillé qui l'a blanchie ; il s'est précipité une poudre grise inflammable, qui est du Soufre pur.

J'ai voulu essayer si je ne pourrois pas abrégér cette opération en la faisant à feu ouvert ; & pour cela j'ai fait dessécher l'autre portion du mélange d'huile de vitriol, d'huile de térébenthine, & d'huile de tartre. Je l'ai jettée ensuite dans un creuset rougi entre les charbons, elle s'est enflammée d'abord, rendant une odeur toute semblable à celle de l'oliban que l'on brûle. Enfin cette matière achevant de brûler, son odeur d'oliban s'est convertie en une odeur de Soufre très-pénétrante. J'ai retiré pour lors la matière à demi fondue, & je l'ai trouvée en partie jaune couleur de Soufre, en partie rouge brune avec une odeur de Soufre très-forte.

J'ai employé avec le même succès l'esprit de Soufre & l'esprit d'alun en la place de l'huile de vitriol dans la distillation, ces liqueurs acides ne différaient point essentiellement.

Comme il m'a paru que dans ces opérations je faisois un tartre vitriolé par le mélange de l'huile de tartre avec les esprits acides, j'ai essayé si le tartre vitriolé & les autres sels de la même nature ne produiroient pas le même effet. L'événement a répondu à mon attente. Le tartre vitriolé, le sel fixe de vitriol, autrement sel de colcotar, le sel qui résulte du mélange de l'esprit de Soufre & de l'huile de tartre, le sel de Glauber qui n'est que l'acide du vitriol fixé par l'alkali du sel marin, l'alun calciné qui est un acide

vitriolique concentré dans beaucoup de terre : tous ces sels ; dis-je , joints avec différentes sortes d'huiles , m'ont donné du Soufre brûlant. Voici un exemple du procédé que j'ai tenu pour cela dans la composition du Soufre par le mélange de l'esprit de vin avec le sel fixe du vitriol.

J'ai mêlé une once de sel de colcotar avec deux gros de sel de tartre ; j'ai fait fondre la matiere à grand feu , & dans le temps qu'elle commençoit à fondre , j'y ai versé à diverses reprises une once d'esprit de vin. Lorsque la matiere , en cessant de brûler , a commencé à rendre une odeur de Soufre pénétrante , je l'ai retirée du feu , la flamme en étoit bleuâtre , & lorsqu'elle a été refroidie , la matiere étoit jaune en quelques endroits , & rouge en d'autres , avec une odeur de Soufre ou d'œufs pourris ; j'en ai fait la lessive sur laquelle j'ai versé du vinaigre distillé , qui en a précipité du Soufre brûlant.

J'ai joint dans cette opération un peu de sel de tartre au sel de colcotar , pour aider à la fusion qui rend le mélange des Soufres avec les sels beaucoup plus exact , & qui fournit par conséquent une plus grande quantité de Soufre brûlant.

Il est surprenant qu'un Soufre aussi subtil & aussi volatil que paroît être celui de l'esprit de vin , puisse se fixer si promptement avec un sel tout embrasé & en fusion , au milieu d'un feu très-violent & dans un creuset ouvert.

J'ai substitué à l'esprit de vin différentes substances bitumineuses & huileuses , comme la matiere bitumineuse du Soufre , le pétrole , l'huile distillée de succin , l'huile de térébenthine , & les huiles fétides tirées des animaux. Ces substances unies avec ces sels m'ont toutes donné du Soufre.

Toutes les autres matieres inflammables , comme le bois ; le charbon de bois , le charbon de terre , ou autres , unies avec quelqu'un de ces sels , ne manquent point de produire du Soufre de la même maniere.

J'ai voulu faire la même opération avec le sel marin décrépité , & avec le nitre fixé ; mais je n'en ai point du tout retiré de Soufre : peut-être ces sels étant d'une autre nature

que le fel vitriolique ne fauroient-ils produire de Soufre.

Je n'oserois encore cependant rien prononcer de général là-dessus, jusqu'à ce que je m'en sois assuré par un plus grand nombre d'expériences.

Les différentes compositions du Soufre commun que je viens de décrire, nous assurent pleinement de ce que M. Homberg avoit déjà montré par son Analyse, que le Soufre minéral n'est qu'un composé de fel acide, de Soufre principe, & d'un alkali salin ou terreux.

Boyle & Glauber qui ont travaillé tous deux à faire du Soufre commun, ont donné chacun une maniere différente de le composer.

Le procédé de Boyle est un mélange d'huile de vitriol & d'huile de térébenthine, qui rend par la distillation, premièrement une huile qui paroît peu différente de l'esprit de térébenthine, ensuite une liqueur un peu acide, blancheâtre, trouble, au fond de laquelle se précipite une poudre jaune qui est du Soufre commun. L'opération finie on trouve de ce même Soufre attaché au haut de la cornue le long du col, & aux parois du récipient. Il reste au fond une masse legere, noire & luisante, qui n'est pas une simple terre comme je le dirai ci-après.

J'ai fait la même opération en employant l'esprit de vin au lieu de l'huile de térébenthine, & j'en ai retiré du même Soufre brûlant.

Je ne doute point après cela que suivant ce même procédé on ne tirât du Soufre de toutes les liqueurs inflammables mêlées avec les acides vitrioliques.

Dans cette opération, le Soufre s'éleve & passe par le bec de la cornue dans le récipient, parce qu'il n'y a pas assez de matieres fixes pour le retenir; & dans les deux autres opérations que j'ai rapportées, il reste au fond de la cornue ou du creuset où il est retenu par le fel fixe du tartre, ou la terre du fel fixe du vitriol.

Le procédé de Glauber est un mélange de fel connu sous le nom de *Sal mirabile Glauberi*, & du charbon de

bois réduit en poudre. Ce mélange jetté dans un creuset au milieu d'un grand feu, & fondu, rend une odeur de Soufre assez forte. Si on le retire du feu dans ce même temps, la matiere qui est rouge brune, rend du Soufre brûlant par la lessive & par la précipitation avec le vinaigre distillé.

Glauber n'avoit donné cette opération qu'avec son sel & le charbon, & je l'ai rendue générale en faisant voir que le mélange de tous les sels vitrioliques & de toutes les matieres inflammables, produisoient le même effet.

Glauber prétend que le Soufre qu'il a par son opération, n'est que celui du charbon. Boyle réfute ce sentiment par l'impossibilité qu'il y a que ce Soufre fût contenu dans une si petite quantité de charbon : il croit qu'il étoit plutôt renfermé dans le sel, de même qu'il se persuade que celui qu'il a tiré par son opération étoit dans l'huile de vitriol. Mais ils se trompent tous deux : car il paroît par les différentes compositions que j'ai faites du Soufre, & par l'Analyse de ce minéral, que le Soufre commun n'est contenu ni dans les sels vitrioliques, ni dans les matieres huileuses séparément, & qu'il ne se forme que de l'union des deux ensemble.

Je n'entreprends point de rendre ici raison de la maniere dont ces principes s'unissent pour composer le Soufre commun, & toutes les autres matieres bitumineuses & inflammables que l'on peut aussi produire par leurs différentes combinaisons. M. Homberg doit donner tout ce détail dans son Traité particulier du Soufre principe.

J'ajouterai seulement une conjecture que m'ont fournie les travaux que j'ai eu occasion de faire sur les matieres sulfureuses en cherchant à les recomposer, qui est que les métaux pourroient bien n'être que des bitumes ou des composés de Soufre principe, de sel vitriolique & de terre.

Si la difficulté qu'il y a de pénétrer la composition des métaux ne m'a pas encore permis de suivre cette conjecture dans tous, du moins suis-je presque convaincu qu'elle

est vraie pour la composition du fer en particulier.

Si on observe ce métal, outre son sel vitriolique qui se découvre par le goût, & parce qu'il se dissout facilement de lui-même à la moindre humidité, on reconnoît qu'il est presque tout sulphureux. Il s'allume très-promptement lorsqu'on le jette en limaille sur la flamme d'un flambeau. La vapeur sulphureuse qui s'élève de sa dissolution par les esprits acides, s'enflamme très-aisément & brûle assez longtemps.

Mais ce qui paroît devoir convaincre entièrement de la vérité de ce que j'avance, ce sont les deux expériences suivantes.

J'ai fait sécher de l'argile dont on fait les briques, j'ai mêlé cette terre pulvérisée avec une quantité d'huile de lin suffisante pour en pouvoir former une pâte que j'ai réduite en petites boules; j'ai rempli de ces boules une cornue, & j'en ai distillé au feu poussé par degrés, jusqu'à l'extreme violence, une huile fort pénétrante semblable à l'huile de brique ou des Philosophes. J'ai retiré de la cornue les boules toutes noires après les avoir réduites en poudre, j'en ai emporté toute la terre par un grand nombre de lotions. Il est resté après ces lotions une poudre noire & pesante qui s'attache à l'aiman, & qui paroît être du fer.

Dans cette expérience que j'ai faite sur le procédé que Becker en a donné dans son Livre *De Physicâ subterraneâ*, l'acide vitriolique contenu dans l'argile, & le principe du Soufre contenu dans l'huile de lin, semblent avoir composé le fer par leur mélange & par la violente cuisson qu'ils ont reçue.

Il me restoit cependant quelques doutes sur cette production du fer, & quoique je me fusse assuré autant qu'il m'étoit possible, que ces petites parties métalliques n'étoient point contenues dans l'argile, je ne laissois pas de me défier encore de mes épreuves; lorsque je fis réflexion que si mon raisonnement sur la composition de ce métal étoit vrai, je devois pareillement trouver du fer dans le

286 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
caput mortuum du mélange de l'huile de vitriol & de l'huile
de térébenthine après leur distillation.

Pour m'en assurer, j'examinai ce *caput mortuum*, où la
matiere noire & luisante qui étoit restée après la distillation
de ce mélange: j'y trouvai, de même que dans la précéden-
te, des petites parties qui s'attachoient à l'aiman, & que je
crois être de fer.

Je travaillerai à m'assurer si ces petites parties sont véri-
tablement du fer, j'observerai avec soin ce qui se passe
dans la composition de ce métal, & je rendrai compte de
mes travaux à la Compagnie.

MANIERE DE DISCERNER

*les vitesses des corps mis en lignes courbes; de trou-
ver la nature ou l'équation de quelque Courbe que
ce soit, engendrée par le concours de deux mouve-
mens connus; & réciproquement de déterminer une
infinité de vitesses propres deux à deux à engendrer
ainsi telle Courbe qu'on voudra, & même deux,
pour la décrire de telle vitesse qu'on voudra, sui-
vant cette Courbe.*

PAR M. VARIGNON.

1704.
22. Novem-
bre.

ETant tombé par hasard, il y a quelque temps, sur le
chap. 6. part. 3. de l'*Art de jeter des Bombes*, par M.
Blondel, l'embaras de la démonstration qu'il y donne,
pour prouver que *les lignes des projections obliques sont para-
boliques*, de même que celles des projections horizonta-
les, en négligeant de part & d'autre la résistance de l'air,
me fit penser à les chercher par le calcul, lequel me les
donna en deux coups de plume, comme on le verra ci-
après dans l'art. 13. Il fit plus: il me donna occasion de
remarquer que la supposition qu'on fait d'ordinaire dans

L'hypothese de Galilée touchant les vitesses des chutes en lignes courbes, savoir que ces vitesses y sont comme les racines des hauteurs de ces chutes, n'est vraie que lorsque les corps tombent le long des Courbes, qui (comme en relief) les soutiennent en tombant, ou qu'ils sont soutenus par des suspensions équivalentes, c'est-à-dire, perpendiculaires aux Courbes, ou suivant les rayons de leurs Développées, & même seulement dans le cas des chutes commencées à quelque point de ces Courbes, ou de leurs tangentes le long de ces mêmes tangentes, & non ailleurs, ni suivant aucun plan qui leur soit incliné.

En ce cas de chutes commencées à un point d'un plan incliné à une Courbe, & le long de ce plan, je détermine quelles devroient être alors les vitesses du corps tombant le long de cette Courbe dans cette même hypothese de Galilée, qui est la seule (touchant la pesanteur) dont il s'agira dans la suite, tant qu'on n'y en marquera point d'autre.

Je passe ensuite aux vitesses des corps qui décrivent des Courbes sans s'appuyer sur elles, ou sans être soutenus par aucune suspension équivalente; mais seulement par des compositions de mouvemens, lesquels étant donnés tels qu'on aura voulu, je détermine toujours la nature des Courbes qui en résultent. Par exemple, je détermine quelle Courbe doit décrire un corps jetté d'une vitesse de projection variable à discrétion, quelle que soit celle de sa pesanteur, & quelque angle que les directions de ces vitesses fassent entr'elles; ce qui donne tout d'un coup la Parabole ordinaire pour cette ligne de projection, lorsque la première de ces vitesses est uniforme, & la seconde comme les racines des hauteurs chutes, ainsi qu'on l'a trouvé jusqu'ici par d'autres voies, & pour ce cas seulement.

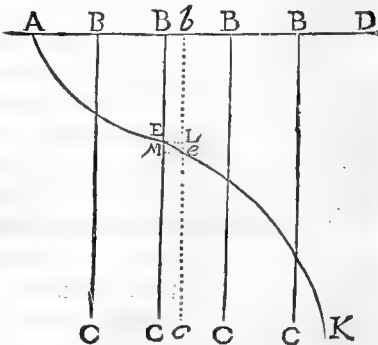
Réciproquement la nature d'une Courbe quelconque étant donnée, je détermine aussi toujours deux vitesses du concours desquelles elle peut résulter. Je trouve même uné infinité de vitesses propres deux à deux à engendrer par leur concours une même Courbe, quelle qu'elle soit, géo-

288 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 métrique ou mécanique, il n'importe. Par exemple, je trouve
 quelles devroient être les vitesses de projection & de pesan-
 teur d'un corps, pour lui faire décrire par leur concours une
 hyperbole, ou quelque autre Courbe que ce soit : & entre une
 infinité de vitesses que je trouve propres deux à deux à faire
 ainsi décrire une Parabole, l'uniforme & celle qui suit les ra-
 cines des hauteurs, se trouvent encore la devoir engendrer
 par leur concours ; & ainsi de toute autre Courbe à l'infini.

De sorte qu'il n'y a aucune Courbe que je ne puisse déduire
 des mouvemens donnés qui l'engendrent deux à deux, ou
 pour laquelle donnée je ne puisse trouver une infinité de vi-
 tesses propres deux à deux à l'engendrer par leur concours,
 & même en déterminer toujours deux du concours desquel-
 les cette Courbe sera décrite de telle vitesse qu'on voudra.
 Commençons par les vitesses des corps mûs en lignes
 courbes.

I. Pour discerner ces vitesses je considère d'abord qu'il
 n'y a point de Courbe ima-
 ginable qui ne puisse être dé-
 crite par le concours de
 deux mouvemens, dont un
 fera toujours à discrétion.

En effet si l'on conçoit une
 Courbe fixe quelconque
AEK seulement tracée,
 avec une droite ou une
 Regle *BC* qui se meuve
 toujours parallèlement à el-
 le-même, & d'une vitesse



à discrétion de *A* vers *D*, pendant que le point *E* se meut
 de *B* vers *C* le long de cette droite *BC*, & de manière qu'il
 se trouve successivement dans tous les points où elle cou-
 pera la Courbe *AEK*, quel que soit l'angle *ABC* : cela
 (dis-je) conçu, il est manifeste que le concours d'action
 des deux mouvemens ou impressions qui font ainsi suivre
 la trace de cette Courbe *AEK* au point *E* sans s'appuyer
 dessus ;

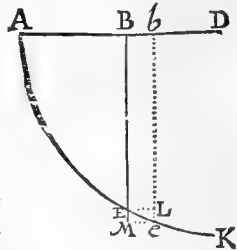
dessus, la lui feroit décrire de même que quand elle n'y seroit pas; puisque la suivre ainsi sans s'appuyer dessus, c'est la décrire comme si effectivement elle n'y étoit pas. Donc il n'y a point de Courbe imaginable qui ne puisse être ainsi décrite par le concours de deux mouvemens dont l'un sera toujours à discrétion. L'autre se trouvera aussi toujours par le moyen de celui-ci & de la Courbe donnée, comme on le verra ci-après dans l'art. 14.

II. Imaginons présentement deux situations BC, bc , de la Regle mobile, infiniment proches l'une de l'autre, avec EL parallele à AD , & le petit parallélogramme ML qui ait pour diagonale l'élément Ee de la Courbe AEK décrite comme ci-dessus art. 1. Il suit de cette description que le point E (il s'appellera dans la suite *point décrivant*) parcourt cet élément Ee par le concours d'action des mouvemens ou impressions supposées suivant AD & BC , pendant le temps que chacune d'elles lui auroit fait parcourir celui des élémens EL ou EM , suivant lequel elle est dirigée. Donc la vitesse résultante de ce concours d'action au point E suivant Ee , doit être à ce que chacune de ces impressions particulieres en auroit donné séparément à ce point décrivant, suivant EL & EM comme Ee est à EL & à EM . Ainsi en prenant EL & EM pour les élémens des coordonnées d'une Courbe décrite par le concours de deux mouvemens, ou plutôt de deux forces quelconques dirigées suivant ces mêmes coordonnées; on trouvera en général que ce que ces forces auroient donné séparément de vitesse suivant ces coordonnées en chaque point E de cette Courbe, au corps qui la décrit, doit toujours être à ce qu'elles lui en donnent effectivement ensemble en ce point suivant cette même Courbe, comme les élémens EM & EL sont chacun au correspondant Ee de cette Courbe. De sorte qu'en appellent v & z les vitesses qui résulteroient ainsi de ces forces séparées, suivant les coordonnées qui en sont les directions, c'est-à-dire, suivant les élémens EM & EL de ces coordonnées; le

concours de ces forces donnera d'une part $\frac{v \times Ee}{EM}$, & de

l'autre $\frac{z \times Ee}{EL}$, pour la vitesse du corps décrivant au point E suivant l'élément Ee de la Courbe AEK .

III. Voilà ce que ces deux forces suivant EM & EL ; ont ensemble d'action sur le point E suivant Ee . Mais si une d'elles cessoit d'agir, par exemple, celle qui est suivant EL , en sorte que le corps E n'eût plus que celle qui tend suivant EM , & qu'appuyé sur le relief d'une Courbe effective AEK , il ne la suivît qu'en vertu de cette force que je suppose être celle de sa pesanteur; alors il lui arriveroit comme à tout autre corps seulement pesant, qui, au lieu de tomber suivant la verticale EM , tomberoit le long d'un plan incliné Ee . Ainsi en tombant le long de la Courbe AEK en vertu de sa seule pesanteur, il y doit tomber comme le long d'une infinité de plans contigus, dont on va voir (*article 6.*) que les angles infiniment petits ne diminuent rien de la vitesse

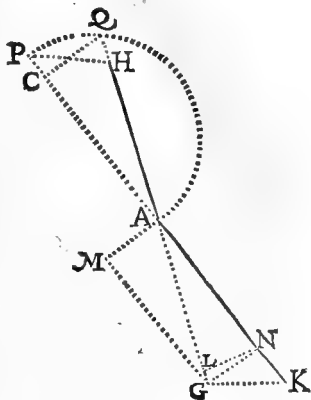


qu'il auroit en tombant de pareille hauteur le long d'un seul & même plan dans l'hypothèse de Galilée. Or on fait que dans cette hypothèse, les vitesses acquises par des chutes faites chacune le long d'un même plan quelconque, sont toujours comme les racines des hauteurs de ces chutes. Donc aussi dans l'hypothèse de Galilée, les vitesses d'un corps qui tombe le long d'une Courbe quelconque AEK en vertu de sa seule pesanteur, doivent être dans tous les points E de cette Courbe suivant EK , comme les racines des hauteurs BE de leurs chutes commencées en quelque point A que ce soit de cette Courbe, ainsi qu'on le suppose d'ordinaire.

IV. Pour voir présentement pourquoi les angles d'un Polygone infini-latere sous la forme duquel on considère chaque Courbe, ne diminuent point les vitesses d'un corps qui tombe le long de cette même Courbe en vertu de sa seule pesanteur, vu ce que j'ai démontré dans les Mémoires de 1693. pag. 182. de la perte qu'en doit faire un corps

qui tombe le long de plusieurs plans contigus à angles finis : pour voir, dis-je, la raison de cette différence, il n'y a qu'à appliquer aux Courbes ce que j'ai dit de ces plans ; voici en deux mots ce qu'il nous en faut par rapport à ceci.

Soient deux plans contigus HA & AK , inclinés l'un à l'autre comme on voudra, le long desquels un corps tombe du point H ; par ce point H & par un point G quelconque de HA prolongé, soient les horizontales HP & GK , qui rencontrent en P & en K la droite KA prolongée vers P ; soit de plus le parallélogramme rectangle MN dont AG soit la diagonale.



Cela fait, il est visible que la vitesse acquise de H en A suivant AG , doit être la même au point A que si elle résulteroit du concours de deux forces capables de donner en ce point au corps qui tombe, des vitesses suivant AM & AN , lesquelles fussent à celle qu'il a au point A suivant AG , comme les côtés AM & AN du parallélogramme MN , sont à sa diagonale AG . Or en ce cas la force qui pousseroit ce corps suivant AM , étant soutenue toute entière par le plan AK qui lui résiste (*hyp.*) perpendiculairement, il ne resteroit plus à ce corps que l'impression de la force suivant AN pour suivre cette ligne d'une vitesse qui seroit à celle qui lui résulteroit de leur concours, c'est-à-dire (*hyp.*) à celle qu'il a effectivement en A suivant AG après sa chute de H en A par HA , comme AN est à AG . Donc la vitesse que la chute de H en A par HA , donne à ce corps au point A suivant AG , est à ce que la rencontre du plan AK lui en laisse suivant sa direction AK , comme AG est à AN . Par conséquent en faisant du centre A , & du rayon AN , l'arc

O o ij

NL qui rencontre AG en L , l'on aura LG pour ce que la rencontre du plan AK fait perdre de vitesse au corps qui tombe, en passant de HA en AK ; c'est-à-dire, que cette perte de vitesse doit être à ce qu'il en doit avoir en A suivant AG , comme LG est à GA . Ainsi l'angle fini KAG rendant LG finie de même que AG & AN ou AL , cette perte de vitesse doit aussi être finie & réelle par rapport à ce que le corps tombé de H en A , en auroit en A pour suivre AG sans l'obstacle du plan AK , & par rapport à ce que cet obstacle en laisse à ce corps suivant ce plan AK . Et par conséquent l'inflexion des plans HA & AK le long desquels on le suppose tomber, doit l'empêcher d'avoir autant de vitesse en K qu'il en auroit eu en tombant de P en K le long du seul plan PK , ou qu'il en auroit acquis en G en tombant du point H le long du seul plan HG .

V. Delà on peut voir au juste de quel point du plan PK ce corps auroit dû tomber le long de ce plan pour avoir en K la même vitesse qu'il y acquiert en vertu de sa chute de H par HAK : car si l'on décrit sur le diamètre PA un demi cercle PQA qui rencontre HA prolongée en Q , & que de ce point Q on mene QC perpendiculaire sur PA , on trouvera que le corps tombé de H en K par HAK , ne doit avoir de vitesse en K , qu'autant qu'il y en auroit en tombant de C en K le long du plan PK , bien loin d'y en avoir autant que s'il étoit tombé de P en K le long de ce même plan, ainsi que Galilée l'a supposé.

En effet puisque (*hyp.*) HP est horizontale, on fait que les vitesses acquises en A suivant AK par la chute d'un corps de P en A , & suivant AG par la chute de H en A , doivent être égales. Donc (*art. 4.*) en ce point A la vitesse acquise suivant AK par la chute de ce corps de P en A , seroit à ce qu'il lui en reste suivant la même direction AK après sa chute de H en A : : AG . AN : : AQ . AC : : \sqrt{AP} . \sqrt{AC} . Or on fait aussi que ce que ce corps acquerroit de vitesse en A suivant AK par sa chute de P en A , seroit pareillement à ce qu'il en acquerroit en ce même point A suivant AK par sa chute de C en A : :

$\sqrt{AP} \cdot \sqrt{AC}$. Donc la vitesse en A suivant AK , acquise par sa chute de H en A , est la même que si le corps qui a fait cette chute, fût tombé de C en A , en commençant en C ; & non-pas la même que s'il fût tombé de P en A , comme on le suppose d'ordinaire avec Galilée.

VI. Voilà ce que cause l'angle fini GAK : mais si on le suppose infiniment petit, l'arc LN qui en est la mesure, se trouvera aussi pour lors infiniment petit, & pouvant ainsi passer pour une petite ligne droite perpendiculaire sur AG , les angles (*hyp.*) droits ANG & ALN donneront $AL \cdot LN :: LN \cdot LG$. Et par conséquent LG sera une *differentio-différentielle*, ou une différentielle du second genre par rapport à la grandeur finie AL ou AN . Or on a vu (*art. 4.*) que LG est à AN , comme la perte de vitesse causée en A par l'opposition du plan AK à la chute de H en G , est à ce qu'il en reste suivant AK . Donc cette perte de vitesse faite en A , doit être aussi un infiniment petit du second genre par rapport à ce qu'il en reste suivant AK au corps tombé de H en K par HAK , dans cete hypothese de l'angle GAK infiniment petit.

Or en considérant les Courbes comme autant de Polygones infini-lateres, dont les angles d'attouchement sont les complémens des intérieurs des ces polygones, ainsi que GAK l'est ici de HAK ; un corps tombant le long de la concavité d'une Courbe quelconque; y doit tomber comme le long d'une infinité de plans contigus, dont les angles (complémens des intérieurs au travers desquels ce corps passe) sont infiniment petits. Donc les pertes de vitesse qu'il y doit faire à la rencontre des plans ou des côtés infiniment petits sur lesquels il passe, ne doivent être que des infiniment petits du second genre par rapport aux vitesses avec lesquelles il passe. Et par conséquent quoique le nombre infini d'angles qui se trouvent dans chaque Courbe ainsi regardée comme polygone, cause à ce corps une infinité de pareilles pertes, leur somme ne fera jamais qu'un infiniment petit du premier genre par rapport à ce qu'il y a de vitesse en chaque point de cette Courbe.

parce que (*art. 6.*) l'angle de la touchante PA avec la Courbe, n'y doit faire aucun obstacle.

IX. Delà on voit aussi que lorsqu'une Courbe AEK a plusieurs touchantes AP , ET , &c. terminées à une même horizontale PM de laquelle commencent les chutes, il est indifférent par laquelle de ces tangentes le corps tombe le long de cette Courbe, par rapport à sa vitesse en quelque point K que ce soit de cette même Courbe, pris au-dessous de toutes ces tangentes; puisque sa vitesse y fera toujours (*art. 8.*) comme \sqrt{LE} , c'est-à-dire, la même par toutes ces tangentes.

Ainsi si cette Courbe AEK étoit, par exemple, une Paracentrique le long de laquelle un corps tombant de P par la tangente PA ; approchât également de quelque point N que ce soit en temps égaux, les arcs EK seroient aussi paracentriques par rapport à ce même point N en vertu des chutes commencées en T par les tangentes TE , c'est-à-dire, que ce corps en poursuivant chaque arc EK en vertu d'une chute faite de T par TE , s'approcheroit aussi toujours également du point N en temps égaux; parce que ses vitesses acquises en E suivant EK en vertu de ses chutes faites de P par PAE , & de T par TE , sont les mêmes, étant de par & d'autre (*art. 8.*) comme \sqrt{LE} , c'est-à-dire, telles qu'ils les acquerroit en E suivant LE en tombant de L par LE : Et tout cela, parce que (*art. 6.*) les angles infiniment petits des tangentes avec les Courbes, n'y apportent aucun obstacle.

X. Il n'en est pas de même des angles finis: car si l'on suppose que la droite HA rencontre la Courbe AEK en A sous quelque angle fini que ce soit, c'est-à-dire, qu'elle fasse un angle fini quelconque HAP avec la tangente PA de cette Courbe; on trouvera par les articles 4. & 5. qu'un corps tombé de H par HAE , n'aura pas la même vitesse en E suivant EK , que s'il fût tombé de l'horizontale HM par LE , ni par conséquent une vitesse qui soit comme \sqrt{LE} . Au contraire si après avoir prolongé l'horizontale MH jusqu'à la rencontre en P de la tangente AP ,

on décrit sur le diamètre AP le demi cercle AQP qui rencontre AH prolongée en Q , & que de ce point Q on mène QC perpendiculaire sur AC ; on trouvera (*art. 5.*) que la vitesse en A suivant AE , acquise en tombant de H en A par HA , doit être la même que si le corps fût tombé de C en A par la tangente CA ; & par conséquent aussi (*art. 8.*) la même en E suivant EK , qu'elle y auroit été suivant FE si ce corps fût tombé de l'horizontale CG par FE , c'est-à-dire, seulement comme \sqrt{FE} , & non-pas comme \sqrt{LE} , quoique les chutes faites de H en E par HAE , & de L en E par LE , soient (*hyp.*) de même hauteur.

XI. On voit donc pour toutes sortes de Courbes, non-seulement que les vitesses commencées à quelque point que ce soit de ces Courbes ou de leurs tangentes, sont par tout le long de ces tangentes & de ces Courbes, comme les racines des hauteurs de ces chutes: mais aussi que c'est là le seul cas où ces vitesses soient en cette raison, quoi qu'acquises par la seule pesanteur des corps qui tombent en s'appuyant sur le relief des Courbes qu'ils suivent.

Pour ce qui est des Courbes que ces corps tracent eux-mêmes par le concours de deux forces ou impressions différentes, sans être soutenus ni s'appuyer sur ces Courbes; on a aussi vû dans l'art. 2. que quand même la pesanteur de chaque corps seroit une de ces deux forces, les vitesses le long de la Courbe qu'il décriroit par le concours de cette force avec toute autre, ne seroient point encore comme les racines des hauteurs que sa pesanteur lui auroit fait parcourir; mais seulement comme on les a démontrées dans cet art. 2.

XII. Tel est le discernement qu'il faut faire des vitesses des corps mus en lignes courbes; voici aussi quelque chose de l'usage qu'on peut faire des vitesses résultantes du concours de plusieurs forces.

Soit une Courbe quelconque AEK décrite (*art. 1.*) par le concours de deux mouvemens, c'est-à-dire, par un corps agité

La même équation générale de la Courbe *AEK* se peut encore trouver sans se mettre en peine de ce que le corps *descrivant* peut avoir de vitesse le long de cette Courbe : il suffit de considérer que ce corps ne parcourt (*hyp.*) l'élément *Ee* qu'en vertu des deux impressions *C & D*, qui séparément lui feroient parcourir *EM & EL* dans le même temps que par leur concours elles lui feroient parcourir *Ee* : car alors voyant que ces autres élémens *EM & EL* devoient être ainsi parcourus en même-temps, on verra aussi qu'ils doivent toujours être entr'eux comme les vitesses (telles qu'elles puissent être) *v & z* requises pour cela : c'est-à-dire, *EM (dx) . EL (dy) :: v . z*. Et par conséquent $zdx = vdy$, comme ci-dessus.

XIII. Pour faire quelque usage de cette formule ou équation générale, supposons (si l'on veut) que la force suivant *AC* ou *BE*, par le concours de laquelle avec une autre suivant *AD*, se décrit (*hyp.*) la Courbe *AEK*, soit la pesanteur du corps *descrivant*; & qu'ainsi les vitesses *v* en chaque point *E* suivant *BE* soient comme les racines des hauteurs *AF* ou *BE (x)* correspondantes; & par conséquent la Courbe *PG* sera une Parabole ordinaire dont le sommet est en *A*, & son lieu $v = \sqrt{x}$. Si l'on substitue cette valeur de *v* dans la précédente équation générale $zdx = vdy$, l'on aura $zdx = dy \sqrt{x}$, ou $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{z}$ pour l'équation de toutes les Courbes décrites par le concours de la pesanteur des corps *desrivans*, & de quelqu'autre impression ou force que ce soit suivant *AD*, quelque vitesse *z* qu'elle soit capable de donner seule suivant cette direction, & quelque angle aussi *CAD* que cette direction fasse avec la verticale *AC*. De forte qu'il n'y a plus qu'à substituer ici la valeur de *z* résultante (en *y* & en constantes) de l'équation de la Courbe *QH* suivant telle hypothèse qu'on voudra faire, & l'équation $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{z}$ se changera en celle de la Courbe *AEK* particulière à cette hypothèse.

Par exemple, si l'on imagine cette Courbe *AEK* dé-

crite par un corps jetté du point A suivant AD , & qu'on prenne à l'ordinaire la vitesse z de projection suivant AD pour constante & par-tout la même, en faisant (si l'on veut) $z = \sqrt{a}$, & en changeant ainsi la Courbe QH en une ligne droite parallèle à AD ; la substitution de cette valeur de z dans l'équation précédente $\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{z}$, la changera ici en $\frac{dx}{\sqrt{x}}$

$= \frac{dy}{\sqrt{a}}$, dont l'intégrale $2\sqrt{x} = \frac{y}{\sqrt{a}}$, ou $4ax = yy$ fera l'é-

quation de la Courbe AEK dans ce cas-ci. D'où l'on voit que cette Courbe de projection devient ici une Parabole ordinaire, dont le parametre au point A de projection, doit être quadruple de la hauteur a d'où le corps jetté auroit dû tomber pour acquérir par sa seule pesanteur la vitesse \sqrt{a} de projection qu'on lui vient de supposer suivant AD , quel que soit l'angle CAD que cette ligne AD de projection fasse avec la verticale AC , ainsi qu'on l'a trouvé jusqu'ici par d'autres manieres beaucoup moins simples que celles-ci.

Pour trouver cette Courbe encore plus facilement, il suffit de considérer que puisque (*hyp.*) la vitesse de projection suivant AD , est uniforme, l'on aura par-tout AB comme le temps que le corps jetté emploie à parcourir AE ; & par conséquent Bb ou EL (dy) pour l'instant que ce corps emploie à parcourir Ee ; ou qu'il employeroit à parcourir EM (dx) en vertu de sa seule pesanteur, d'une vitesse qui seroit comme \sqrt{BE} (\sqrt{x}). Donc en prenant dy pour cet instant, & \sqrt{x} pour cette vitesse, l'on aura $\frac{dx}{\sqrt{x}} = dy$, dont l'intégrale $2\sqrt{x}$

$= y$, ou $4x = yy$ est encore un lieu à la Parabole ordinaire, lequel deviendra (comme ci-dessus) $4ax = yy$ en substituant a pour 1 afin d'observer la loi des homogenes.

On trouvera de même toute autre Courbe AEK résultante du concours d'action de deux forces quelconques dirigées suivant AC & AD , quelque angle CAD que ces directions fassent entr'elles, & quelles que soient aussi les vitesses v & z que ces forces seroient capables de donner séparément en E suivant ces mêmes directions ou leurs parallèles.

les, au corps *décrivant*; c'est-à-dire, de quelque nature qu'on suppose les Courbes *PC* & *QH* qui expriment ces vitesses par leurs ordonnées *FG* & *BH* correspondantes: & cela, comme l'on voit, en substituant dans l'équation générale $z dx = v dy$ les valeurs de ces vitesses v & z résultantes des équations données de ces deux Courbes-ci.

XIV. L'équation générale de l'art. 12. ne donne pas seulement toutes les Courbes qui se peuvent engendrer par des compositions de mouvemens connus, c'est-à-dire, chacune par le concours de deux vitesses connues, quelles qu'elles soient; mais elle donne aussi toujours deux vitesses qui par leur concours peuvent ainsi engendrer quelque Courbe donnée que ce soit: elle donne même une infinité de vitesses propres deux à deux à engendrer ainsi une même Courbe donnée, quelle qu'elle soit, géométrique ou mécanique, il n'importe. En effet l'équation $z dx = v dy$ donnant $z = \frac{v dy}{dx}$, & la Courbe donnée *AEK* donnant aussi la valeur de $\frac{dy}{dx}$ en x , & en constantes; si l'on substitue cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans cette équation $z = \frac{v dy}{dx}$, il ne restera plus qu'à y déterminer une des deux vitesses v ou z , en x ou en y , & en constantes, pour avoir l'autre. Or on a vu ci-dessus (art. 1.) qu'une de ces vitesses est toujours à discrétion, & qu'ainsi on peut toujours en déterminer une; par exemple v , dans cette équation. Donc par ce moyen l'autre z fera aussi toujours déterminée. Par conséquent l'équation générale $z dx = v dy$, & celle de la Courbe donnée *AEK*, pourront toujours ainsi donner ensemble deux vitesses v & z propres à engendrer cette Courbe par leur concours: & même en donner une infinité d'autres propres deux à deux à engendrer ainsi la même Courbe; puisque par ce moyen z aura autant de valeurs que v , qui étant (art. 1.) à discrétion, en peut avoir de différentes à l'infini.

Par exemple, soit la Courbe *AEK* une hyperbole dont le lieu soit $y = \sqrt{\frac{p^2 x^2 + p x x}{b}}$, & qu'il faille la faire décrire à un

corps jetté suivant AD , par le concours de sa pesanteur suivant la verticale AC , quelque angle CAD que ces directions fassent entr'elles : on demande quelles vitesses v & z de pesanteur & de projection il faut à ce corps pour cela.

On voit déjà qu'une de ces vitesses ; par exemple, celle de la pesanteur, étant (*art. 1.*) arbitraire, on la peut prendre à l'ordinaire en chaque point E suivant chaque verticale BE correspondante, comme la racine de cette hauteur (\sqrt{x}), & faire ainsi $v = \sqrt{x}$. D'un autre côté l'équation précédente à l'hyperbole proposée, donnera aussi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{pb + 2px}{2\sqrt{pbx + pbx}} = \frac{pb + 2px}{2\sqrt{x} \times \sqrt{pb + pbx}}$$

tant ces valeurs de v & de $\frac{dy}{dx}$ dans la précédente équation générale $z = \frac{vdy}{dx}$, l'on aura l'autre vitesse suivante $z = \frac{pb + 2px}{2\sqrt{pbx + pbx}}$, qui sera celle de projection. Ainsi l'on aura pour lors \sqrt{x} , & $\frac{pb + 2px}{2\sqrt{pbx + pbx}}$ pour les expressions des

deux vitesses v & z propres à engendrer par leur concours l'hyperbole requise AEK .

Si au lieu d'une hyperbole, on veut que le corps jetté suivant AD , décrive une Parabole AEK par le concours de sa pesanteur suivant la verticale AC , quelque angle que ces deux directions fassent entr'elles : il est visible qu'en prenant encore sa vitesse de pesanteur $v = \sqrt{x}$, ainsi qu'on le voit permis dans l'*art. 1.* il n'y a qu'à faire b infinie dans la précédente valeur de z pour avoir la vitesse de projection requise en ce cas-ci : car de même que b infinie dans la précédente équation hyperbolique

$y = \sqrt{\frac{pbx + px^2}{b}}$, la changeroit en une parabolique $y = \sqrt{px}$; de même aussi b infinie dans la précédente expres-

sion $z = \frac{pb + 2px}{2\sqrt{pbx + pbx}}$ de la vitesse de projection requise avec celle de pesanteur $v = \sqrt{x}$ pour faire décrire une hyperbole au corps jetté, changera cette vitesse de projection

en $z = \frac{pb}{2\sqrt{pb}} = \frac{p}{2\sqrt{p}} = \frac{\sqrt{p}}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}p}$, qui sera aussi celle de projection requise avec cette même vitesse $v = \sqrt{x}$ de pesanteur pour lui faire décrire une Parabole. Ce qui fait voir que cette vitesse z de projection doit être constante, c'est-à-dire, uniforme, & telle que ce corps l'acqueroit en vertu de sa seule pesanteur en tombant de la hauteur du quart du parametre (p) de cette Parabole.

La même chose se trouvera encore immédiatement si l'on considère seulement que l'équation parabolique $y = \sqrt{px}$ donne $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}}$; car la substitution de cette valeur de $\frac{dy}{dx}$, & celle de $v = \sqrt{x}$ dans l'équation générale $z = \frac{vdy}{dx}$, donnera encore tout d'un coup $z = \frac{\sqrt{p}}{2} = \sqrt{\frac{1}{4}p}$.

Quelque autre Courbe, soit géométrique ou mécanique, qu'on veuille faire ainsi décrire à un corps jetté, on trouvera de même quelle vitesse de projection il requiert pour cela avec ce que sa pesanteur lui en donne, ou avec telle autre qu'on lui voudra supposer, & quelque angle que les directions de ces vitesses fassent entr'elles. On voit aussi par la manière dont $v = \sqrt{x}$ vient de donner la valeur de z , que d'autres valeurs de v substituées de même dans l'égalité générale $z = \frac{vdy}{dx}$, avec la valeur de $\frac{dy}{dx}$ résultante de l'équation donnée de la Courbe requise, auroient aussi donné d'autres valeurs de z ; & qu'ainsi la vitesse v pouvant (*art. 1.*) en avoir de différentes à l'infini, on pourra aussi trouver de même une infinité de vitesses z propres chacune par son concours avec la vitesse v qui l'aura ainsi déterminée, à engendrer cette même Courbe; par exemple, la même hyperbole, ou la même Parabole que ci-dessus; & ainsi de toute autre Courbe à l'infini.

XV. Non-seulement on peut ainsi trouver une infinité de vitesses collatérales propres deux à deux, à décrire par leur concours une Courbe donnée quelconque; mais

aussi parmi ce nombre infini de vitesses suivant les coordonnées de la Courbe, on peut toujours en déterminer deux, qui ensemble seront propres à décrire ainsi cette Courbe avec telle vitesse qu'on voudra; c'est-à-dire, à donner au corps *décrivant* telle vitesse qu'on voudra le long de cette même Courbe: voici comment.

1°. Soit c la vitesse requise le long de la Courbe donnée AEK , ou de son élément Ee , lequel soit appelé ds . Il est manifeste que cette vitesse (c) suivant la diagonale Ee (ds) du petit parallélogramme ML , fera aux vitesses (v), (z), suivant les côtés EM , (dx), EL (dy), de ce parallélogramme, c'est-à-dire, suivant les coordonnées AF (x), FE (y), de cette Courbe, comme cette diagonale est à ces mêmes côtés; ce qui donne $v = \frac{cdx}{ds}$, & $z = \frac{cdy}{ds}$.

2°. Il faut ensuite faire évanouir les différences dx , dy , ds , par la substitution de leurs valeurs tirées de l'équation de la Courbe donnée; & ces valeurs de v , z , ainsi délivrées de toutes différences, exprimeront des vitesses collatérales suivant EM , EL , non-seulement propres à engendrer ensemble la Courbe proposée, mais aussi à donner au corps *décrivant* la vitesse requise (c) le long de cette Courbe.

3°. Pour le voir il n'y a qu'à substituer ces valeurs de v , z , ainsi délivrées de toutes différences, dans l'équation générale $v dy = z dx$ de l'art. 12. Et l'on en verra non-seulement naître la Courbe requise; mais aussi, en faisant comme un des côtés EM (dx) ou EL (dy) du parallélogramme infiniment petit MN , est à la diagonale Ee (ds) de ce parallélogramme, ainsi celle des vitesses délivrée de différences, qu'on vient de trouver (*n. 2.*) suivant ce petit côté, est à la vitesse le long de l'élément Ee de la Courbe; cette dernière vitesse délivrée de différences par le moyen de l'équation donnée de cette Courbe requise, se trouvera être la même (c) avec laquelle on vouloit que cette Courbe fût décrite.

Exemple. Soit la Courbe proposée une parabole qui doit être décrite avec une vitesse quelconque appelée c ; constante ou variable à discrétion, il n'importe. Soit $y = \sqrt{x}$ l'équation de cette Parabole : prenant les différences, on aura $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, & $ds (\sqrt{dx^2 + dy^2}) = \sqrt{dx^2 + \frac{dx^2}{4x}} = \frac{dx\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}$. Donc en substituant ces valeurs de dy , ds ; dans les équations $v = \frac{cdx}{ds}$, $z = \frac{cdy}{ds}$, du nombre 1. l'on aura $v = \frac{2c\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}}$, $z = \frac{c}{\sqrt{4x+1}}$, pour les vitesses collatérales propres à décrire par leur concours la Parabole requise avec la vitesse (c) qu'on demande suivant cette Courbe.

Pour le voir il n'y a qu'à substituer suivant le nomb. 3. ces valeurs de v , z , dans la regle générale $v dy = z dx$ de l'art. 12. Et l'on aura $\frac{2cdy\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}} = \frac{cdx}{\sqrt{4x+1}}$, c'est-à-dire, $2dy\sqrt{x} = dx$, ou $dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, dont l'intégrale est $y = \sqrt{x}$ qui est le lieu de la Parabole requise : d'où l'on voit que les deux vitesses collatérales qu'on vient de trouver, sont propres à la décrire par leur concours.

Pour voir de même que la vitesse qui en résultera suivant cette Courbe au corps *descrivant*, sera aussi la vitesse requise (c), il n'y a qu'à faire comme un des côtés, par exemple $EM(dx)$, est à la diagonale $Ee(ds)$ du petit parallélogramme ML , ainsi la vitesse $\left(\frac{2c\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}}\right)$ trouvée suivant ce petit côté, est à la vitesse suivant cette diagonale Ee : car ayant par-là $\frac{2cds\sqrt{x}}{dx\sqrt{4x+1}}$ pour la vitesse suivant cette même diagonale, la substitution de la valeur de ds trouvée ci-dessus $= \frac{dx\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}$, donnera c pour la vitesse suivant cet élément Ee de la Parabole requise.

Donc

Donc les vitesses collaterales $\frac{2c\sqrt{x}}{\sqrt{4x+1}} (v)$, $\frac{c}{\sqrt{4x+1}} (z)$

qu'on vient de trouver, seront non-seulement propres à décrire par leur concours la Parabole proposée, mais aussi à la décrire avec la vitesse requise (*c*) suivant cette même Courbe. Il en est ainsi de toute autre Courbe à l'infini.

XVI. Il est facile après ce qu'on vient de dire des Courbes qui ont leurs ordonnées parallèles entr'elles, d'appliquer la méthode aux Courbes dont les ordonnées concourent en un point. Ainsi dans la Spirale d'Archimede, par exemple, outre les deux mouvemens du concours desquels cet Auteur la décrit, la méthode précédente en peut encore fournir une infinité d'autres propres à décrire cette Spirale; entre lesquels on pourra même toujours en trouver deux propres à la décrire ainsi par leur concours avec telle vitesse qu'on voudra; c'est-à-dire, propres à donner ensemble au corps *descrivant* telle vitesse qu'on voudra suivant cette Courbe. Il en est ainsi de toute autre Courbe à l'infini dont les ordonnées concourent en quelque point que ce soit.

Après cela la méthode de M. de Roberval pour trouver les tangentes par le moyen des mouvemens composés, devient praticable en une infinité de manieres pour toutes sortes de Courbes; au lieu qu'elle ne l'étoit ci-devant que pour quelques-unes, dont la génération présentoit seulement pour chacune deux mouvemens composans. Cependant comme (*art. 2. & 12.*) ces mouvemens ou vitesses composantes *v*, *z*, de quelque variété de valeurs qu'elles se puissent trouver, doivent toujours être entr'elles comme les élémens *dx*, *dy*, des coordonnées des Courbes qui résultent de leur concours; & que pour avoir chacune de ces vitesses, l'autre étant donnée, il faut trouver le rapport de ces élémens entr'eux, lequel rapport donneroit, lui seul, les tangentes de ces Courbes; on ne compte pas ici pour beaucoup le secours que la méthode précédente de M. de Roberval pourroit tirer de la détermination de ces vitesses, quelque grand qu'il fût par rapport à elle. Ce n'a point été

306 MEMOIRES DE L'ACADE'MIE ROYALE
aussi dans cette vûe qu'on a entrepris d'en parler ici , mais
seulement pour discerner ce qu'il en doit résulter le long
des Courbes décrites par leur concours , d'avec ce qu'une
seule des forces productrices de ces vitesses , par exemple ,
la pesanteur du corps *décrivant* lui en donneroit en tombant
le long de ces Courbes , soutenu par leur relief ou par des
suspensions équivalentes , selon les différens points où com-
menceroit sa chute ; discernement absolument nécessaire
pour ne se pas méprendre dans la mécanique des mouve-
mens en lignes Courbes. On donnera encore d'autres usa-
ges de tout ceci dans la suite.

C O N S I D E R A T I O N S

S U R L A

T H E O R I E D E S P L A N E T E S .

P A R M. M A R A L D I .

1704.
26 Novem-
bre.

LA Théorie des Planetes est une recherche qui a de
grandes difficultés , à cause des différens mouvemens
dont il faut chercher les regles , & de plusieurs élémens
qui concourent à la détermination de ces mouvemens.
La justesse de cette détermination dépend en partie d'un
grand nombre d'observations faites avec précision : mais
quoique depuis 30 ou 40 ans ces observations aient été
faites avec beaucoup de subtilité , on n'oseroit pas se pro-
mettre qu'elles eussent toute la précision qui est nécessai-
re , & qu'elles fussent suffisantes pour trouver pendant plu-
sieurs années le mouvement des Planetes entre les termes
que l'on se propose communément : car outre que nos in-
strumens , quelque grands qu'ils puissent être , ont une trop
petite proportion à la grandeur des orbes que les Planetes
décrivent , dans les observations on est souvent en doute

pour la détermination des petites parties qui peuvent échapper facilement aux Observateurs les plus exacts ; & avant de mettre en usage ces observations , elles ont besoin de quelques corrections & réductions qui peuvent causer des variations dans la situation de la Planete.

Quand même les observations ne seroient point sujettes à ces variations , & qu'elles auroient la justesse que l'on peut souhaiter , on n'est pas assuré de rencontrer juste dans l'usage que l'on en fait pour trouver les différens élémens qui sont nécessaires dans la Théorie des Planetes , & qu'il faut distinguer des uns les autres.

L'Apogée & le Périgée , d'où commencent & finissent les premieres inégalités des Planetes , ne sont pas des points visibles , mais des termes qu'il faut trouver par la comparaison de plusieurs observations faites en certains lieux de l'orbe de la Planete , & en certaines configurations avec le Soleil , qui sont des circonstances qui se rencontrent rarement ensemble de la même maniere. Une petite erreur que l'on peut faire dans les observations , en produit une beaucoup plus grande dans la détermination de l'Apogée ; c'est pourquoi il est fort difficile de le déterminer au juste. On peut connoître ces difficultés par la différente détermination que plusieurs Astronomes en ont faite depuis un siecle , quoiqu'ils se soient fondés principalement sur les observations de Tycho. Or une erreur qu'il est aisé de faire dans la situation de ces points , en produit d'autres dans toutes les parties de l'orbe de la Planete : car si on fait l'Apogée plus avancé dans le Zodiaque qu'il ne doit être , on fera dans quelque degré l'équation additive , lorsqu'il la faudroit faire substrative & réciproquement ; il en résultera aussi dans les trois premiers signes une équation substrative plus petite que la véritable , & plus grande dans les trois signes suivans jusqu'au Périgée. Il arrive la même chose de l'équation additive dans les six autres signes du Zodiaque : car dans les trois premiers signes depuis le Périgée , elle sera moindre que la véritable , & plus grande dans les trois derniers.

Il n'y a pas moins de difficulté dans la recherche de l'excentricité des Planetes ; on la peut trouver par des méthodes qu'on a inventées à cette fin , & qui ont toutes leurs difficultés , parce qu'elles sont naturellement attachées à cette recherche. On la peut aussi trouver en observant les Planetes dans l'Apogée ou dans le Périgée , & dans les moyennes distances ; & comparant le vrai mouvement trouvé entre ces deux termes avec le moyen qui appartient au temps échu entre ces observations , on trouve la plus grande équation qui détermine l'excentricité des Planetes. Mais outre que dans cette méthode on y suppose le lieu de l'Apogée & du Périgée bien déterminé , il est extraordinairement rare de pouvoir faire ces observations dans des circonstances aussi favorables , faute desquelles on est obligé d'employer les observations les plus proches de ces termes , qu'il faut réduire aux mêmes termes , ce qui ne se peut faire qu'à peu près , & à l'aide des hypothèses. Or l'erreur qu'il est difficile d'éviter en déterminant l'excentricité de la Planete se répand , quoiqu'en moindre quantité dans toutes les parties de son orbe : car si on prend l'excentricité plus petite que la véritable , l'équation de la Planete dans tous les degrés de son anomalie sera aussi plus petite : le contraire arrivera si on prend l'excentricité trop grande.

Supposant la plus grande équation trouvée avec toutes la précision que l'on peut souhaiter , il reste une autre difficulté dans la maniere de la distribuer par tous les degrés de l'orbe de la Planete. Comme on donne dans les Tables Astronomiques cette équation calculée pour chaque degré d'anomalie , & que pour la trouver par des observations immédiates , il faudroit un grand nombre d'observations exactes qu'il est difficile d'avoir jusqu'à présent dans la plupart des Planetes ; les Astronomes , pour suppléer à ce défaut , ont inventé diverses méthodes par le moyen desquelles l'excentricité étant donnée , on calcule pour tous les degrés d'anomalie l'équation qui lui convient : mais cette

équation se distribue différemment selon les différentes hypothèses que l'on emploie ; & on est en doute quelle est la plus conforme à la nature , étant fort difficile de le vérifier par les observations.

On peut aussi se tromper dans le choix que l'on fait de l'Époque : car quoiqu'on la tire d'un grand nombre d'observations faites dans les occasions les plus favorables , & qu'on y évite les erreurs auxquelles ces observations peuvent être sujettes , on ne peut la déterminer sans supposer tous ces élémens que nous avons indiqués , & que nous avons dit être très-difficiles à déterminer avec précision. La même erreur que l'on fait dans le choix de l'Époque , se répand aussi dans tous les autres calculs.

La recherche des nœuds des Planetes , & celle de l'inclinaison de leur orbite à l'égard de l'Ecliptique , n'est pas moins difficile que les autres élémens. Pour déterminer les nœuds des Planetes qui ne sont point des termes visibles , la meilleure maniere est d'observer pendant plusieurs jours la situation de la Planete , lorsque sa latitude change d'espece : car si l'on ne peut pas observer immédiatement le temps que la Planete n'a point de latitude , on le trouvera par la comparaison des observations précédentes & suivantes , ce qui donnera l'arrivée de l'étoile au nœud : mais comme à une petite variation de latitude , il en répond une beaucoup plus grande en longitude , à cause du peu d'inclinaison des orbites des Planetes , il ne faut pas prétendre de trouver ce nœud avec beaucoup de précision , principalement dans les Planetes qui ont peu d'inclinaison. Le lieu du nœud ainsi trouvé , n'est son lieu véritable , que lorsque ce lieu vû de la terre concourt avec le lieu du Soleil , ou à son opposé : excepté ces deux cas qui sont extraordinairement rares , il faut réduire par le moyen des hypothèses corrigées par les observations , la situation de ce nœud vû de la terre , à celle qu'il auroit étant vû du Soleil , pour avoir sa véritable situation.

L'inclinaison de l'orbite des Planetes à l'Ecliptique , se

peut déterminer en observant la latitude de la Planete lorsqu'elle est en quadrature avec le Soleil, & que le Soleil est en même-temps dans un des nœuds de la Planete, qui sont des circonstances rares. On la peut aussi trouver par le moyen de la plus grande latitude de la Planete vûe de la terre qu'on ne peut pas souvent observer, mais seulement en quelque rencontre. La plus grande latitude étant trouvée, il faut la réduire par le rapport des distances de la Planete au Soleil, & du Soleil à la terre, de l'apparence qu'elle fait à la terre à celle qu'elle feroit au Soleil. Cette latitude ainsi réduite, & comparée à sa distance au nœud, donnera l'inclinaison de l'orbite de la Planete, qui est celle qu'on met dans les Tables pour en calculer la latitude.

La proportion de l'orbite du Soleil à celle des Planetes qui sert à connoître leur seconde inégalité, se peut chercher en deux manieres; la premiere, par les observations jointes aux hypotheses: mais ces proportions seront différentes suivant l'espece de ligne que l'on supposera que les Planetes décrivent, & selon la différente excentricité qu'on aura établie: la seconde maniere seroit en trouvant la seconde inégalité par les observations; ce qui ne se peut pratiquer que dans Jupiter, dont les Satellites peuvent servir à la connoître en certaines rencontres.

Pour les autres Planetes, il faut employer la distance du Soleil à la terre, & le lieu de la Planete vû du Soleil qu'il faut trouver par les hypotheses, & qu'il faut comparer avec le lieu de la Planete vûe de la terre, & trouvé par les observations. Par cette méthode, la moyenne distance de la Planete au Soleil, que l'on tire des distances trouvées en différens endroits de l'orbe de la Planete, devroit être à peu près la même; & cependant elle se trouve souvent fort différente, ce qui fait voir les difficultés qu'il y a aussi dans cette recherche, quoiqu'elle ne soit pas des plus difficiles dans la Théorie des Planetes.

Après avoir établi le mieux qu'il est possible tous ces éléments, il reste à déterminer le moyen mouvement des Pla-

rietes, le mouvement de leur Apogée, & celui de leurs nœuds, dont on se sert à trouver pour les siècles à venir, les lieux des Planetes dans le Zodiaque.

Dans ces recherches, nous ne sommes pas seulement exposés aux erreurs que nous faisons en déterminant ces éléments par nos observations, mais encore à celles qui dépendent des observations des anciens Astronomes, qui n'ayant pas les secours que nous avons présentement, ne faisoient souvent qu'à la vûe, & à peu près, les observations qu'il faut employer pour les comparer aux nôtres. Pour cette comparaison, on choisit pour l'ordinaire les plus anciennes observations qu'on puisse avoir; parce que l'erreur qui peut s'y être glissée étant partagée dans un plus grand intervalle de temps, reste beaucoup moins sensible. Mais comme plusieurs doutent de la justesse des plus anciennes observations, & que parmi celles qui ont été faites dans la suite, il y en a qui paroissent plus exactes, ils ont aimé mieux se fonder sur ces observations moins anciennes, préférant cette précision à l'avantage qu'on pourroit tirer d'un plus long intervalle. Par la comparaison de différentes observations, le moyen mouvement vient un peu différent, & il est difficile de déterminer lequel on doit préférer, n'étant pas possible de représenter toutes les observations faites en différens temps, quoique les hypotheses qui s'éloignent le moins des observations, & qui en représentent un plus grand nombre, doivent être censées les meilleures.

On ne sauroit trouver qu'à peu près la situation de l'Apogée des Planetes par les observations anciennes, à cause que celles qui sont venues jusqu'à nous, sont en petit nombre, & qu'elles n'ont pas l'exacitude qui seroit nécessaire: c'est pourquoi le mouvement de l'Apogée qu'on tire de la situation qui résulte de ces observations, comparée à la situation où on le trouve présentement, ne peut pas être d'une grande précision, & ce mouvement se trouve différent suivant les différentes observations anciennes que l'on emploie.

Ce sont là les difficultés générales; outre d'autres parti-

culieres que les Astronomes rencontrent lorsqu'ils entreprennent de donner des regles des mouvemens des Planetes. Nous les avons exposées afin qu'on connoisse que ce n'est pas sans raison que les plus grands Astronomes se défient de leurs forces dans une si grande entreprise ; & que Kepler après avoir médité avec un grand succès pendant près de 30 années sur les observations de Tycho, n'ose pas se promettre une grande précision dans le rapport de ses hypotheses avec les mouvemens célestes pour les siècles suivans.

Pour surmonter ces difficultés autant qu'il y auroit lieu de l'espérer par des observations indépendamment des hypotheses, quand le mouvement est plus simple, & n'a qu'une inégalité qui dépend de l'excentricité & de la distance de l'Apogée suivant les hypotheses communes, il faudroit avoir un assez grand nombre d'observations pour déterminer les équations à autant de degrés d'anomalie qu'il est besoin d'en mettre dans les Tables; & quand la Planete a une seconde inégalité qui demande la connoissance des différentes distances de la même Planete au Soleil, & du Soleil à la terre, il faudroit des observations à toutes les variations & combinaisons des distances & des configurations apparentes avec le Soleil, qui ne retournent les mêmes en quelques Planetes qu'après plusieurs siècles.

Il n'y a que le Soleil dont nous puissions avoir ces observations, à cause que le mouvement apparent de cet astre est plus simple que celui des autres, & que la période de son retour au même degré d'anomalie s'acheve en peu de temps. C'est aussi la Planete dont on connoît mieux le mouvement: car depuis l'an 1655 que M. Cassini en a construit des Tables sur lesquelles divers Astronomes célèbres ont calculé les Ephémérides, elles se sont trouvées autant conformes qu'on pouvoit espérer aux observations. C'est pourquoi dans la Théorie des autres Planetes, où il faut employer le mouvement du Soleil, nous n'avons cru pouvoir mieux faire que de l'emprunter de ces Tables,

qui

qui sont à l'épreuve de 50 années d'observations faites avec de très-grands instrumens & fort exacts.

Dans l'impossibilité où nous sommes d'avoir pour les autres Planetes autant d'observations qu'il seroit necessaire, nous emploierons le plus grand nombre que nous pourrons avoir de celles qui ont été faites depuis 30 ou 40 ans. La plus grande partie de ces observations a été faite par M. Cassini, en prenant au méridien la différence du passage entre ces Planetes & le Soleil, ou différentes étoiles fixes qui se rencontroient dans la même parallele, & observant leur hauteur méridienne. Une autre partie des observations a été faite hors du méridien, en observant la différence d'ascension droite & de déclinaison entre la Planete & quelque étoile fixe, lorsqu'elle se rencontroit proche du même parallele, soit que ces étoiles fussent proches l'une de l'autre en ascension droite, soit qu'elles en fussent fort éloignées.

Cette maniere de déterminer la situation des Planetes, s'est pratiquée par le moyen des fils qui se croisent à angles de 45 degrés au foyer de la Lunette, tant appliquée au quart de cercle, que d'une Lunette posée sur une machine, appelée parallactique par M. Cassini, par le moyen de laquelle on suit facilement le cours de l'étoile à l'Occident. On laisse ces Lunettes dans une situation immobile, & on compte l'heure, la minute & la seconde que l'étoile la plus Occidentale passe par les trois fils. On fait la même chose à l'égard de l'étoile plus Orientale; ce qui détermine la différence d'ascension droite & la déclinaison d'une étoile à l'égard de l'autre; & la situation d'une de ces étoiles étant connue par rapport aux cercles de la sphere, on connoitra la situation de l'autre. Nous n'entrons point dans le détail de cette méthode, ni la maniere aisée d'abrégér ces calculs en se servant de la machine parallactique, parce qu'elle a été expliquée à l'Académie par M. Cassini à l'occasion de diverses conjonctions des Planetes, des observations des Taches du Soleil & de la Lune, & communiquée à presque tous les Astronomes

314 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
d'Europe depuis fort longtems qu'il a trouvé ces métho-
des & qu'il les pratique. Il suffira de remarquer que par
ces méthodes on peut trouver l'ascension droite & la dé-
clinaison de la Planete presque aussi facilement & aussi exa-
ctement qu'on pourroit faire par des observations faites au
méridien, pourvû que la situation des étoiles fixes, auxquel-
les on compare la Planete, soit une fois bien déterminée ;
parce que le temps qui sert à déterminer la différence de dé-
clinaison, est aussi sensible que le peuvent être les divi-
sions des instrumens dont on se sert pour connoître la dé-
clinaison.

On a encore cet avantage par ces méthodes, que lors-
qu'il y a des observations importantes, qui souvent ne se
peuvent faire au méridien, à cause de quelques nuages qui
surviennent dans le temps que ces étoiles passent au méri-
dien, on le peut faire à toute autre situation de l'astre sur
l'horison & à des heures commodes, & qu'on les peut re-
faire plusieurs fois lorsqu'on n'est pas content des premières ;
ce qui ne se peut pratiquer à l'égard des observations qu'on
fait au méridien. Et parce que nous employons un grand
nombre d'observations faites par ces méthodes, & que la
détermination exacte des Planetes dépend de celle des étoi-
les fixes, auxquelles elles ont été comparées, pour une plus
grande précision nous avons déterminé l'ascension droite
& la déclinaison de toutes ces étoiles par des observations
faites au méridien, le plus exactement qu'il a été possible.

Les hypotheses du mouvement de Saturne.

Pour établir les hypotheses de Saturne, nous avons d'a-
bord calculé un grand nombre d'observations faites dans
l'opposition de cette Planete avec le Soleil en diverses
parties de l'orbe de la Planete, & nous avons comparé ces
observations aux Tables de Kepler. Cette comparaison
nous a fait connoître qu'aux années 1672 & 1673, ces Ta-
bles donnoient le lieu de Saturne plus avancé dans le Zo-

diague que les observations de 20 à 21 minutes ; qu'aux années 1686 & 1687, entre les observations & les Tables, il n'y avoit que 10 à 12 minutes, dont les Tables étoient plus avancées ; & qu'enfin aux années 1700, 1701 & 1702, cette différence étoit environ de 21 minutes comme trente années auparavant.

Nous avons choisi en premier lieu ces observations pour en faire la comparaison avec les Tables ; parce que, suivant toutes les hypothèses, cette Planete se trouvoit alors près des moyennes distances, où l'erreur, qui pourroit être dans le calcul (quand même la situation de l'Apogée ne seroit pas bien déterminée dans ces Tables) ne peut faire qu'une petite différence dans la première équation. C'est pourquoi cette comparaison est très-propre pour établir la plus grande équation de la Planete, & l'Époque de son mouvement.

Pour connoître l'erreur qui vient de l'Époque, & celle qui est causée par la plus grande équation, & distinguer l'une de l'autre, nous avons considéré que la différence entre les observations & les Tables, seroit toujours la même dans les différentes parties de l'anomalie, si elle venoit toute de l'erreur qu'il y auroit dans l'Époque ; que si elle étoit causée toute par l'erreur qu'il y a dans la plus grande équation, elle seroit en excès dans un demi-cercle de l'anomalie, & en défaut dans les six autres signes. Mais parce que les Tables donnent toujours le lieu de Saturne plus avancé que les observations, & que dans la différence qu'il y a, on trouve une variation de 9 à 10 minutes, l'erreur doit être attribuée, partie à l'Époque, partie à la plus grande équation. Par les observations des années 1672 & 1673, & par celles des années 1700, 1701 & 1703, faites toutes près des moyennes distances où l'équation est soustractive, la différence est plus grande d'environ 10 minutes que dans les moyennes distances où l'équation est additive, comme il paroît par les observations des années 1686 & 1687. Cela nous a fait connoître qu'il faut augmenter de la moitié de cette différence, qui est de 5,

316 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 minutes, la plus grande équation de Saturne déterminée
 par Kepler qui la fait de $6^{\circ} 31' 30''$, & la faire de $6^{\circ} 36' 30''$,
 ce qui est à une minute près de celle qui a été déterminée
 par M. Bouillaud. Outre cette correction il en faut faire une
 seconde à l'Époque, en ôtant 16 minutes au moyen mou-
 vement de 1607 que Kepler fait de $6 28^{\circ} 3' 52''$, & la faire
 de $6 27^{\circ} 47' 52''$. Nous examinerons dans la suite s'il faut
 plutôt faire cette correction au moyen mouvement échu
 depuis les observations de Tycho jusqu'aux nôtres : mais
 en attendant nous la faisons à l'Époque, étant indifférent
 pour les observations que nous employons dans cet examen,
 sur lequel de ces deux élémens tombe cette correction.

Voyez-en
 l'observa-
 tion, Miscel.
 Berol. vol. 1.
 P. 205.

L'Époque & la première inégalité ainsi établie, nous
 avons examiné d'autres observations faites dans les autres
 parties de l'orbite de la Planète, & principalement celles
 qui ont été faites proche de l'Apogée & du Périgée pour
 déterminer leur situation. Nous avons une observation cé-
 lebre de la conjonction précise de Saturne avec une étoile
 fixe proche du Périgée de Saturne, que M. Kirchius fit par
 le moyen d'une Lunette de 10 pieds, & qui arriva l'an
 1679 le 17 de Janvier à 5 heures du matin. L'étoile qui
 fut cachée par Saturne est la moyenne de la corne méridio-
 nale du Taureau, & qui, suivant nos observations réduites
 en ce temps-là, se trouvoit en $7^{\circ} 59'$ des Gemeaux avec une
 latitude australe de deux degrés & 20 minutes, ce qui est
 aussi la longitude & la latitude qu'avoit alors Saturne.

Pour représenter cette observation, en supposant les
 corrections déjà faites, & en employant le mouvement du
 Soleil, des Tables de M. Cassini, nous avons trouvé qu'il
 faut avancer de 52 minutes le lieu de l'Aphélie de Satur-
 ne déterminé par Kepler, & l'établir en $28^{\circ} 28'$ du Sagit-
 taire, comme le donnent les Tables de M. Bouillaud. Cet-
 te détermination est aussi confirmée par les observations
 que nous avons faites proche l'Aphélie de Saturne, l'an
 1694, & quoique parmi ces observations il y en ait de cel-
 les qui demandent le lieu de l'Aphélie avancé d'environ

un demi-degré plus que ne demanderoit l'observation de l'année 1679, ayant eu égard au mouvement fait depuis ce temps-là, nous nous sommes arrêtés à la détermination qui résulteroit d'un plus grand nombre d'observations, la différence qui s'y trouve pouvant être causée de quelque petite erreur à laquelle on est exposé dans la détermination des lieux des Planetes.

Ayant ainsi déterminé l'Epoque, la plus grande équation & le lieu de l'Aphélie, nous avons calculé plusieurs oppositions de Saturne avec le Soleil, observées en différentes parties de l'orbe de la Planete; & en employant l'équation calculée dans la forme elliptique, nous représentons par ces hypothèses 27 oppositions observées depuis l'an 1672, parmi lesquelles il n'y a que celles des années 1698 & 1699, qui s'éloignent de 4 minutes de l'observation, la différence des autres étant plus petite ou nulle, ce qui confirme ces trois élémens établis auparavant.

Après ces comparaisons, nous avons cherché la proportion de la distance de Saturne au Soleil, dans les parties de l'orbe annuel, laquelle est un des élémens nécessaires pour calculer la seconde équation qui convient à la Planete hors de ses oppositions & conjonctions avec le Soleil. Nous l'avons cherchée en déterminant par les observations le lieu véritable de Saturne dans ses quadratures avec le Soleil, & en le comparant à la situation de Saturne vue du Soleil, qu'on calcule par les hypothèses comptées sur les observations de l'opposition la plus prochaine. Par cette méthode & par un grand nombre d'observations faites en différens endroits de l'anomalie de Saturne, dans les conjonctures les plus favorables, nous n'avons pas trouvé cette moyenne distance précisément la même: mais ayant pris un milieu entre la plus grande & la plus petite, nous l'avons déterminée 955000 parties, dont la moyenne distance du Soleil à la terre est 100000.

Nous avons cherché le nœud de Saturne par des observations faites au méridien, lorsque cette Planete n'avoit

point de latitude, ce qui arriva au mois de Mai de l'année 1696, cette Planete étant en $26^{\circ} 36'$ du Capricorne, qui étoit le lieu du nœud vû de la terre: mais l'ayant réduit au Soleil à l'aide des hypotheses, on trouve le lieu véritable du nœud austral de Saturne en $22^{\circ} 10'$ du Capricorne. Il faut remarquer que comme la variation de la latitude de Saturne n'est pas sensible en 15 jours, on peut se tromper du moins d'un demi-degré dans cette détermination. D'où vient que par les observations faites la même année dans l'opposition avec le Soleil, nous trouvons le lieu du nœud moins avancé dans le Zodiaque, que par les observations précédentes d'environ 25 minutes.

Les occasions les plus favorables qu'il y ait eu depuis long-temps de trouver l'inclinaison de l'orbite de Saturne à l'Ecliptique, sont celles qui se sont présentées les années 1688 & 1703. Par les observations de l'année 1688 faites fort près des limites des plus grandes latitudes de Saturne, & dans l'opposition de cette Planete avec le Soleil, qui arriva en $21^{\circ} 46'$ de Libra, on trouve la latitude Septentrionale de Saturne de $2^{\circ} 48' 0''$. Par le moyen de cette latitude & des rapports des distances du Soleil à Saturne & du Soleil à la terre, on trouve la parallaxe de latitude de $17' 15''$, qui étant ôtée de la latitude trouvée, donne la véritable inclinaison de Saturne à l'Ecliptique de $2^{\circ} 30' 45''$. Par les observations de l'année 1703, on trouve la latitude méridionale de Saturne de $2^{\circ} 48' 50''$, qui étant réduite comme la précédente, donne la même inclinaison de $2^{\circ} 31' 0''$, qui ne differe de la précédente que de 15 secondes, & ayant pris un milieu entre les deux, on établira cette inclinaison de $2^{\circ} 30' 50''$, qui est comme moyenne entre celle qui a été déterminée par Kepler & par M. Bouillaud.

Nous avons dit que pour bien représenter les observations de Saturne faites depuis 30 ans, il falloit ôter 16 minutes à l'Epoque du moyen mouvement établie par Kepler. On peut aussi représenter ces observations en corrigeant le moyen mouvement qui convient au temps échu

depuis les observations de Tycho jusqu'aux nôtres , & il est indifférent laquelle de ces deux corrections on emploie pour représenter nos observations. Il n'en est pas de même à l'égard des observations de Tycho : car si on fait cette correction à l'Epoque , les Tables ne peuvent représenter ces mêmes observations de Tycho , qu'environ à un tiers ou un quart de degré près ; au lieu que si on distribue cette correction au moyen mouvement , on pourra mieux représenter les observations de Tycho avec les nôtres : & c'est le parti que nous avons cru d'abord qu'il falloit prendre. Mais en diminuant dans la même proportion le moyen mouvement de près de 20 siècles , pour calculer la plus ancienne observation que nous ayons de cette Planète , qui est celle qui a été faite par les Assyriens 229 ans avant l'Epoque de J. C. le calcul fondé sur cette hypothèse s'éloigne de plusieurs degrés de l'observation. Cette différence nous a paru trop grande pour pouvoir être tolérée dans une observation semblable , de la conjonction de Saturne avec une étoile fixe , & qui , suivant le témoignage de Ptolomée , est exacte , & sur laquelle il ne faut pas avoir aucun doute. C'est pourquoi nous n'avons pas trouvé à propos de faire cette correction au moyen mouvement ; il reste donc toujours les mêmes difficultés de représenter les observations de Tycho avec les nôtres.

Pour les résoudre , nous avons tenté diverses voies. Nous avons cherché en premier lieu si les oppositions de Saturne calculées sur les observations de Tycho étoient bien déterminées , & s'il ne s'étoit pas glissé quelques erreurs , auxquelles on est exposé dans les longs calculs qu'il faut faire pour les trouver. Nous avons donc fait tout de nouveau les calculs de ces oppositions , dans lesquels nous avons employé les distances des Planetes avec les étoiles fixes telles qu'elles ont été observées par Tycho. Pour les distances des étoiles fixes entr'elles , nous les avons supposées telles qu'elles résultent de nos observations , aussi-bien que la longitude & la latitude de ces étoiles , & réduites au

320 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
temps des observations de Tycho. Par ces nouveaux calculs, on a trouvé à la vérité dans plusieurs oppositions quelques minutes de différence : mais comme elle est quelquefois favorable , quelquefois contraire à la correction de l'Époque , nous n'avons pû tirer de ce travail beaucoup d'éclaircissement.

Nous avons ensuite cherché d'accorder ces observations de Tycho avec les nôtres , en supposant dans l'Apogée un mouvement plus vite que par les Tables ordinaires. Par ce moyen on représenteroit un bon nombre des observations de Tycho : mais il n'y auroit pas moyen d'accorder les observations faites près des moyennes distances, outre d'autres inconvéniens qui en résultent dans les observations anciennes.

Après ces recherches nous nous sommes enfin déterminés à chercher le moyen mouvement par la comparaison des observations éloignées entr'elles , du plus grand intervalle de temps qu'il est possible , parce que l'erreur qu'on auroit pû faire dans ces observations, partagée dans un plus grand nombre d'années , reste moins sensible en chacune , au lieu que si on vouloit conclurre le moyen mouvement de 20 siècles par les observations éloignées seulement de cent ans , comme sont celles de Tycho à l'égard des nôtres , l'erreur que l'on peut faire dans les observations qu'on compare , se multiplie dans la raison du petit intervalle au grand.

D'ailleurs nous avons reconnu , autant qu'on le peut faire par les observations de 32 années , que le moyen mouvement de Saturne dû à cet intervalle , ne demande pas la correction proportionnée à celle qu'il faudroit faire au moyen mouvement pour représenter également les observations de Tycho & les nôtres. Ce qui est aussi confirmé par plusieurs observations faites depuis 50 ans par le P. Riccioli & par Muti , qui s'accordent assez bien au moyen mouvement que nous avons tiré de la comparaison de nos observations avec celle qui fut faite 229 ans avant J. C. par laquelle comparaison le moyen mouvement de Saturne

turne pour cent ans, résulte de $4\ 23^{\circ}\ 26'\ 24''$.

Pour les différences qui restent entre les hypothèses que nous établissons, & les observations de Tycho, de Longomontanus, de Kepler & d'autres Astronomes plus anciens, dont il y en a qui montent à un tiers de degré; ceux qui cherchent à accorder entièrement les hypothèses aux observations, pourroient examiner si ces différences ne viennent point de quelques-unes de ces équations séculaires, dont Kepler nous avoit promis un Traité, & qu'il dit qu'il faut faire aux Planetes.

A l'égard du mouvement de l'Apogée, nous n'en avons point de détermination exacte faite par les Anciens, & le moyen qui nous reste pour le trouver, est de représenter le mieux qu'il est possible, les observations anciennes faites en divers temps, comme est celle qui fut faite 229 ans avant J. C. Par la comparaison du lieu de l'Apogée qui résulte de cette observation avec la situation où nous le trouvons présentement par nos observations, le mouvement de l'Apogée se trouve fort peu différent de celui qui a été déterminé par M. Bouillaud; c'est pourquoi on peut s'en servir tel qu'il est dans ses Tables.

Nous avons cherché le mouvement des nœuds par la comparaison de nos observations avec celles que Tycho fit l'an 1592, lorsque Saturne étant en $23^{\circ}\frac{1}{4}$ de Cancer, avoit une latitude Septentrionale de 8 minutes. Par cette observation, toutes réductions étant faites, nous trouvons le nœud Septentrional de Saturne en 21 degrés de Cancer. Nous l'avons trouvé l'an 1696 par les observations faites la même année en $22^{\circ}\ 10'$ du même signe; donc en 104 années il auroit eu un mouvement de $1^{\circ}\ 8'$ selon la suite des signes. Mais ces observations sont trop peu éloignées l'une de l'autre pour pouvoir conclure avec quelque exactitude le mouvement des nœuds par un espace plus grand que cent ans.

Ptolomée observa de son temps que la plus grande latitude de Saturne étoit au commencement de Libra, &

322 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
par les observations récentes on trouve cette plus grai de
latitude en 22 du même signe ; donc en 1550 ans environ
les limites de la plus grande latitude de Saturne , & par
conséquent ses nœuds, se seroient avancés de 22 degrés
selon la suite des signes ; ce qui seroit en raison d'environ
1° 28' en cent ans.

O B S E R V A T I O N

*D'une petite Tache dans le Soleil en Novembre 1704.
à l'Observatoire.*

PAR M. MARALDI.

1704.
29. Novem-
bre.

LE 25 à midi , j'observai une petite Tache sur le disque
du Soleil. Elle passa par le méridien après le premier
bord du Soleil 2' 2'', ou 18'' avant le dernier bord du So-
leil ; car tout le diametre du Soleil passoit en 2' 20''.

La hauteur méridienne apparente de cette Tache étoit
de 20° 14' 10'', & celle du bord supérieur du Soleil étoit
de 20° 37' 10'' ; donc 23 de différence.

Je n'ai pû voir le Soleil qu'aujourd'hui 29 au matin au
travers de quelques petits nuages : mais avec une Lunette
de 6 pieds je n'ai pû rien remarquer de la Tache qui auroit
dû paroître plus grande que le 25 , puisqu'elle auroit dû
être vers le milieu du Soleil ; ce qui me fait croire qu'elle
s'est dissipée.



**SUR LA PLUS GRANDE
PERFECTION POSSIBLE
DES MACHINES.**

Etant donnée une Machine qui ait pour puissance motrice quelque corps fluide que ce soit , comme , par exemple , l'eau , le vent , la flamme , &c. & qui doive servir à élever des poids solides ou liquides , comme des pierres , de la mine , des eaux , &c. on se propose de trouver la charge qu'il faut donner à cette Machine , & la proportion que ses différentes parties doivent avoir , afin qu'elle produise le plus grand effet possible , c'est-à-dire , qu'elle élève une plus grande quantité de poids dans un même temps , qu'avec toute autre charge , & toute autre proportion possible ; & dans cet état de déterminer la vitesse de chacune de ses parties , & la quantité de ce plus grand effet. De plus une Machine étant construite au hasard , & étant mue comme la précédente , on détermine la vitesse de ses parties , l'effet qu'elle produira , & en même temps son degré de perfection.

PAR M. PARENT.

ART. I. **D**epuis le temps qu'on s'est avisé d'employer des Machines pour élever des poids , toute la perfection que les plus habiles Machinistes ont pu atteindre , s'est bornée à les mettre d'abord en équilibre avec la charge qu'il s'agissoit de faire monter , & à diminuer ensuite au hasard cette charge ; ou à augmenter le rayon de quelqu'une des roues , ou accourcir celui de quelqu'une des lanternes , ou à faire enfin quelque chose d'équivalent , afin que la puissance motrice l'emportant sur la charge , elle mît la Machine en mouvement ; encore le

1704.
29. Novemb.
bre.

Sf ij

nombre de ces savans Machinistes est-il très-petit. A l'égard des autres qui ne sont qu'en trop grand nombre pour le malheur du Public , on peut dire qu'ils sont tout au hasard , & que les plus habiles d'entr'eux ne réussissent dans leurs entreprises , que parce qu'ils emploient souvent autant de force pour une seule Machine , qu'il en faudroit pour en mouvoir plusieurs semblables. C'est de-là que sont venues tant de réformations de Machines qu'on voit tous les jours , soit par les Auteurs mêmes de ces Machines, soit par d'autres , qui le plus souvent n'ont pas plus de connoissance qu'eux , ce qui ne peut manquer de causer un grand préjudice aux propriétaires , aux Machinistes mêmes , & à ceux qui s'affoient avec eux.

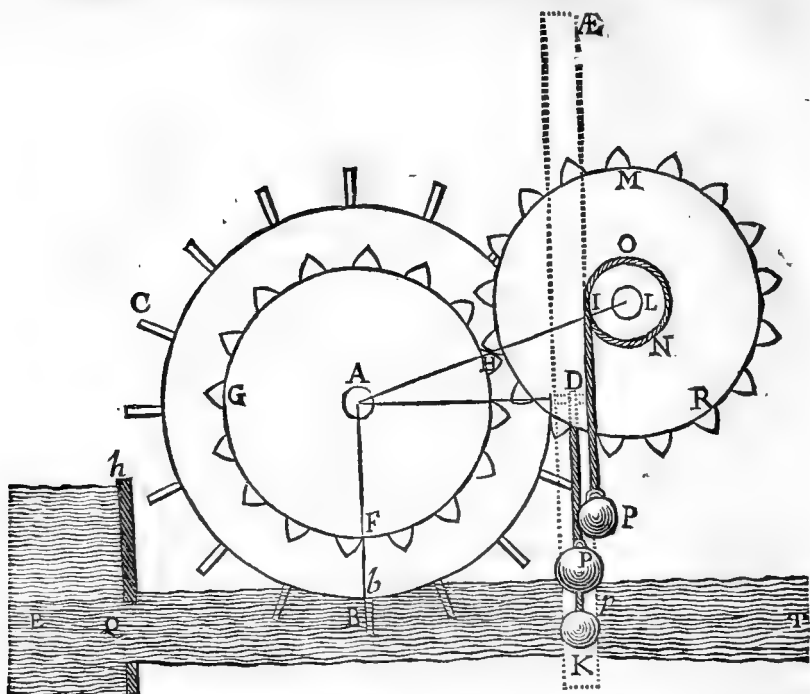
Mais quoiqu'on soit sûr du mouvement d'une Machine , lorsqu'après l'avoir mise en équilibre , on a diminué le poids dont elle est chargée , de quelque chose (en faisant abstraction des frottemens) ou changé quelques-uns de ses leviers , il s'en faut cependant beaucoup encore qu'elle ne soit dans son état de perfection : car à mesure que l'on diminue sa charge , on augmente à la vérité sa vitesse , ce qui pourroit augmenter l'effet ; mais cela même pourroit aussi fort bien le diminuer. De même , en augmentant le rayon d'une des roues , ou diminuant celui d'une des lanternes ou pignons , on peut augmenter à la vérité la charge : mais aussi on diminue d'autant sa vitesse , ce qui peut aussi-tôt diminuer l'effet que l'augmenter ; de sorte qu'il est très-important de trouver la proportion qui donne le plus grand effet.

Ce fut en visitant & en calculant les différentes Machines hydrauliques de Paris & des environs , que j'eus occasion de faire la première fois ces sortes de réflexions : mais quoique je fusse donner l'équilibre à une machine , j'étois encore bien éloigné de savoir lui donner les proportions les plus parfaites. Il falloit pour cela des principes pour le calcul des Machines dans l'état du mouvement , lorsqu'elles sont mues par toutes sortes de puissances ; & nous n'en avons encore que pour les calculer dans l'état du

repos, outout au plus dans l'état du mouvement lorsqu'elles sont mues par des puissances animées, ce qui n'est qu'un cas très-particulier. M'étant donc appliqué à la recherche de ces principes, je les expliquai en 1700 dans mes Elémens, où je déterminai les viteffes d'un corps mu par un fluide, comme l'eau, le vent, &c. dans un autre fluide, comme, par exemple, dans une riviere, dans un étang, &c. & j'allai même jusqu'à indiquer les voies pour donner à une telle Machine les proportions nécessaires, afin de lui faire produire le plus grand effet dont la force motrice est capable.

Enfin après un travail de quatre années (interrompu à la verité par quantité d'autres occupations) je suis heureusement parvenu à applanir toutes les difficultés qui m'avoient d'abord rebuté, & à les réduire à la portée de toutes les personnes qui ont les premieres teintures des Mathématiques; & j'ai trouvé des regles qui, toutes générales qu'elles sont, ne laissent pas de pouvoir être pratiquées par ceux qui ne savent que l'arithmétique commune. J'ai ajouté à cette premiere découverte celle des proportions les plus avantageuses des Machines mues par des animaux; & enfin à cette derniere, celle des Machines quelconques mues par des fluides, & au moyen desquelles il s'agit d'élever des poids solides ou liquides, comme des marbres, de l'eau, &c. Ces trois découvertes composent trois Mémoires différens: voici la derniere.

ART. II. Mais auparavant de venir au fait, j'ai jugé qu'il seroit à propos d'expliquer quelques termes dont je me sers, & les principes que je suppose. 1°. A l'égard des termes, si EB est un fluide quelconque, comme l'eau, le vent, &c. qui vienne dans le sens de la droite EB choquer les ailes ou paletes B, D du moulin CBD dont A est le centre, & AB, AD des rayons tirés du centre A aux centres d'impression B & D de ses ailes; & si le rayon AD étant supposé dans une situation horisontale, on suspend au centre de l'aile D un poids P suffisant pour arrêter l'effort du fluide EB , & tenir le moulin en repos, j'appelle



ce poids P en général poids d'équilibre, & en particulier la force ou l'effort absolu du fluide EB , qu'on suppose ici connu par les regles ordinaires des hydrauliques.

2°. L'effet produit par le fluide EB après un certain temps, étant plus ou moins grand, non seulement à mesure que les poids solides qu'il élève, sont plus ou moins grands, mais encore à proportion que ces mêmes poids montent plus ou moins vite, j'appelle l'effet général d'un fluide, le produit de la multiplication du poids solide qu'il élève par la vitesse du même poids : mais j'appelle en particulier le produit du poids P par la vitesse même du fluide EB , l'effet naturel du fluide, parce que c'est le même effet que si P étant mis dans une gondole sur l'eau EB , flottoit au gré de l'eau avec toute la vitesse du fluide.

A l'égard des poids liquides, comme des colonnes d'eau élevées par des hydrauliques, l'effet dépend uniquement de la grosseur de ces colonnes & de leur vitesse : c'est pourquoi l'exposant de l'effet est alors le produit de la base de la colonne par sa vitesse.

3°. Si GHE est une lanterne fixe autour de l'arbre A du moulin CDB , laquelle engraine dans les dents de la roue HMR dont L est le centre ou l'arbre ; en sorte que H soit le point d'attouchement de deux dents de la lanterne & de cette roue, & AH, LH deux rayons menés de leurs centres au point H ; & qu'enfin ION soit un tambour fixe autour de l'arbre L de la roue HMR , lequel tambour porte un poids P capable d'arrêter l'effort du fluide EB , j'appellerai aussi le poids P *poids d'équilibre* : mais si l'on ôte quelque partie de ce poids P , afin que le fluide EB puisse mettre la Machine en mouvement, j'appelle le poids restant p , *poids diminué* en général, ou *poids de mouvement* ; & si ce poids p a la grandeur requise pour la perfection de la Machine, je l'appelle alors *poids naturel* de la Machine.

4°. Si au lieu de diminuer le poids P , on augmente un des rayons AB, LH des roues ; ou si l'on diminue un des rayons AH, LI des lanternes & des tambours, j'appellerai ces rayons *rayons augmentés* ou *diminués* en général, ou *rayons de mouvement* ; & si en même temps ces rayons ont la proportion nécessaire pour faire produire à cette Machine son plus grand effet, je les appelle alors *rayons naturels*. Au reste, s'il s'agissoit de Machines où les rayons ou leviers ne se manifestassent pas, comme dans les plans inclinés, dans les vis, &c. on pourroit prendre pour le levier de la force motrice la ligne qui marque son chemin, & de même pour le poids, ces chemins étant faits en même temps, ce qui est connu de tout le monde.

A l'égard des principes mécaniques sur lesquels je me fonde, je suppose 1°. qu'on est prevenu que l'effort d'un fluide EB contre une surface B est marqué par le produit de la multiplication de sa masse ou pesanteur spécifique du

328 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
fluide par le quarré de sa vitesse & par B ; & que pour avoir l'effort ou moment du même fluide à l'encontre du poids P , il faut encore multiplier ce dernier produit par le produit des rayons des roues AB , LH .

2°. Que l'effort ou moment du poids P à l'encontre du fluide EB est simplement le produit de P par le produit des rayons LI , AH des tambours & des lanternes, sans avoir aucun égard à la vitesse avec laquelle le poids P monte ou descend, dont la raison est que, suivant le principe de Galilée de l'accélération des corps qui tombent, un poids qui tombe devrait accélérer sa vitesse indéfiniment, sans la résistance de l'air. Or telle que soit la cause qui le fasse ainsi accélérer, la vitesse naturelle de cette cause doit encore surpasser la plus grande vitesse de ce corps (puisqu'il est impossible de faire impression sur un corps qui se meut, sans se mouvoir plus vite que lui.) Donc, selon Galilée, la vitesse de cette cause est indéfiniment grande; d'où il suit évidemment que quand on élève un corps avec une vitesse finie, on ne souffre pas plus de résistance de la cause de sa pesanteur, que si on le soutenoit simplement en repos; & quand on descend un corps de même avec une vitesse finie, on ne souffre pas moins de charge de la cause de cette pesanteur, que si on le soutenoit immobile, puisqu'une vitesse indéfiniment grande augmentée ou diminuée d'une vitesse finie, n'augmente son effort en rien. Ainsi toute la différence qu'on pourroit appercevoir dans ces différentes actions, ne procede que du mouvement de notre corps, de ses parties, & de leurs différentes situations; de sorte que si une personne étant assise dans une chaise soutenoit un poids en sa main, tandis qu'on la feroit monter & descendre sans aucune secousse, au moyen d'une corde tirée par-dessus une poulie, ou d'une bascule, cette personne ne se sentiroit pas plus chargée en montant, ni moins en descendant, que quand on la soutiendrait simplement en repos, ce qui est conforme à l'expérience journaliere.

3°. Que si le fluide EB choquant l'aile B d'une certaine
vitesse

que s'il étoit en repos, suivant le second principe ci-dessus.

5°. Enfin que la vitesse de B est toujours à celle de P en raison composée du rayon AB au rayon AH , & du rayon LH au rayon LI ; c'est-à-dire, que la vitesse de B est à celle de P , comme le produit des rayons des roues AB , LH , au produit des rayons des lanternes & tambours AH , LI , ce qui est connu de tout le monde.

ART. III. Toutes ces choses étant proposées, je nomme V la vitesse du fluide EB , & x la vitesse inconnue que prendra le point B . J'appelle AB, B ; AH, b ; LH, C & LI, c ; & je prens P pour marquer l'effort du fluide contre l'aile B à l'encontre du poids d'équilibre P , ce qui donne dans l'état d'équilibre l'égalité ($P \times AB \times LH = P \times LI \times AH$), ou ($P \times B \times C = P \times c \times b$) d'où l'on tire la valeur de ($P = \frac{P \times B \times C}{b \times c}$). Supposant maintenant qu'on réduise P à p ; alors la Machine commencera de se mouvoir d'une vitesse qui accélérera peu à peu jusqu'à un certain point, ou étant arrivée elle y demeurera ensuite continuellement, (& cela en faisant toujours abstraction des frottemens.) C'est cette vitesse x que j'appelle *vitesse uniforme*. Au reste cette réduction de vitesse à l'uniformité, vient de ce que l'effort du fluide contre l'aile B diminue à mesure que la vitesse de B augmente; de sorte que la vitesse de B ne peut jamais atteindre celle du fluide, puisque si ces deux vitesses étoient égales, le fluide ne feroit plus aucun effort sur B , ainst p descendroit au lieu de monter. Or lorsque le point B aura atteint sa vitesse uniforme x , celle du fluide à l'égard de B ne fera plus que $V - x$, & son carré $\overline{V - x}^2$ par le quatrieme principe; au lieu que B étoit choqué avec la vitesse totale V du fluide, quand le fluide étoit en équilibre avec P . Mais comme dans ce premier & second choc c'est toujours le même fluide qui choque & la même base B qui est choquée, il est évident que ni la pesanteur naturelle du fluide, ni la base B ne doivent point entrer dans la comparaison de ces deux efforts. On aura donc simplement selon le troisieme & quatrieme

principe, l'Analogie ($V^2 \mid \overline{V-x^2} \mid \mid P \mid p$), d'où l'on tire l'égalité ($V^2 p = \overline{V-x^2} \times P$); & tirant les racines quarrées de part & d'autre, on a ($V \sqrt{p} = \overline{V-x} \times \sqrt{P}$), d'où l'on déduit ($x = \frac{\overline{V P - \sqrt{p} \times V}}{\sqrt{P}}$). Mais (par le principe 5.) x est à la vitesse de $p = u$, comme $AB \times LH$ est à $AH \times LI$, ou comme BC à bc ; ce qui donne pour la vitesse u désirée de p ($\frac{\sqrt{\overline{V P - \sqrt{p}}} \times \frac{Vbc}{BC}}{\sqrt{P}}$) ($\frac{bcx}{BC}$), ou substituant la valeur de P ci-dessus, on a ($u = \frac{Vbc}{BC} \times \overline{1 - \sqrt{\frac{pb c}{PBC}}}$) pour la même vitesse uniforme de p , de quelque grandeur que soit p au-dessous de P . On voit de plus à l'œil quelle seroit cette vitesse uniforme de p , quelque composée que fût la Machine.

ART. IV. Si l'on multiplie maintenant cette vitesse de p par p , on aura ($\frac{\sqrt{\overline{V P - \sqrt{p}}} \times \frac{bc p V}{BC}}$) pour l'exposant de l'effet de la Machine (par la seconde définition), lequel effet changera à mesure que p ou B, C, b, c , varieront, comme il est aisé de le voir.

ART. V. Si l'on suppose donc maintenant B, C, b, c , constans, & que l'on diminue, ou que l'on augmente p autant qu'il est possible; c'est à-dire, qu'on le fasse passer par tous les changemens de grandeur dont il est susceptible, afin de trouver sa valeur qui fasse produire à la Machine son plus grand effet, on aura p variable dans la valeur générale de l'effet de l'article précédent, & prenant la différentielle de cette valeur, sçavoir, ($\overline{V P - \frac{1}{2} V \sqrt{p}} \times \frac{Vbc d p}{BC \sqrt{P}}$) afin de l'égaliser à zero (selon la méthode des Infiniment petits) il en résulte l'égalité ($\overline{V P} = \frac{1}{2} V \sqrt{p}$), d'où l'on tire ($\frac{1}{3} V \overline{P} = V \sqrt{p}$), & enfin ($\frac{4}{9} P = p$) désirée ($= \frac{4}{9} \frac{PBC}{bc}$). Ce qui nous apprend que si l'on réduit le poids d'équilibre P aux ($\frac{4}{9}$), ce poids aura la proportion propre à faire produire à la Machine son plus grand effet, & cette proportion est comme on le voit aussi simple que générale.

ART. VI. Pour trouver à présent l'exposant de ce plus grand effet, il est manifeste qu'il ne faut pas substituer cette valeur de $(p = \frac{4}{9} P)$ dans celle de l'effet général

$(\frac{\sqrt{P - \frac{1}{3}P} \times \frac{bc \times pV}{BC}}{\sqrt{P}})$, & il en résultera $(\frac{4}{27} \sqrt{P})$ pour la valeur du plus grand effet; ce qui nous apprend que le plus grand effet qu'une telle Machine puisse produire, ne passe jamais les $(\frac{4}{27})$

du produit de P par la vitesse du fluide, que nous avons appelé *l'effet naturel* dans la seconde définition; ce qui servira à déterminer aisément le degré de perfection de ces sortes de Machines lorsqu'elles seront faites au hasard: car il ne faudra pour cela que diviser l'effet général ci-dessus par l'effet parfait $(\frac{4}{27} \sqrt{P} = \frac{4}{27} \frac{V P b c}{BC})$, ce qui donnera le rap-

port $(\frac{\frac{27 p \times \sqrt{P - \frac{1}{3}P}}{4 P V p}}{\frac{27 bc \times \sqrt{P} BC - \sqrt{pbc}}{4 P BC V P BC}})$, qui marquera le

degré de la Machine. Enfin divisant l'effet parfait $(\frac{4}{27} \sqrt{P})$ par la valeur de $p = \frac{4}{9} P$, il vient $(\frac{\sqrt{P}}{3})$ pour la vitesse uniforme du poids p dans l'état de perfection $(= \frac{V}{3} \times \frac{bc}{BC})$ & $(x = \frac{V}{3})$. L'on peut remarquer que comme les rayons des roues, lanternes & tambours de la Machine n'entrent point dans la valeur du plus grand effet $(\frac{4}{27} \sqrt{P})$, il s'en suit que quelques changemens qu'on fasse à ces rayons (pourvu qu'on ait mis la Machine dans son état de perfection, comme on a fait ci-dessus) le plus grand effet de la Machine sera toujours le même.

ART. VII. Supposons maintenant que le poids p à élever soit donné & constant, en sorte qu'il soit permis seulement de faire quelques changemens aux rayons, AB, AH, LH, LI , je dis que pour faire produire à la Machine son plus grand effet, il ne faut que disposer d'abord tellement ces rayons, que p soit en équilibre avec l'effort du fluide EB , ou avec P , & ensuite augmenter un ou plusieurs des

rayons AB , HL de la force motrice, ou diminuer un ou plusieurs rayons AH , Ll de la charge p , ou faire l'un & l'autre en même-temps, & cela en telle proportion que le fluide n'ait que les $\frac{4}{9}$ de sa charge d'équilibre p à soutenir, & alors la Machine sera dans son état de perfection.

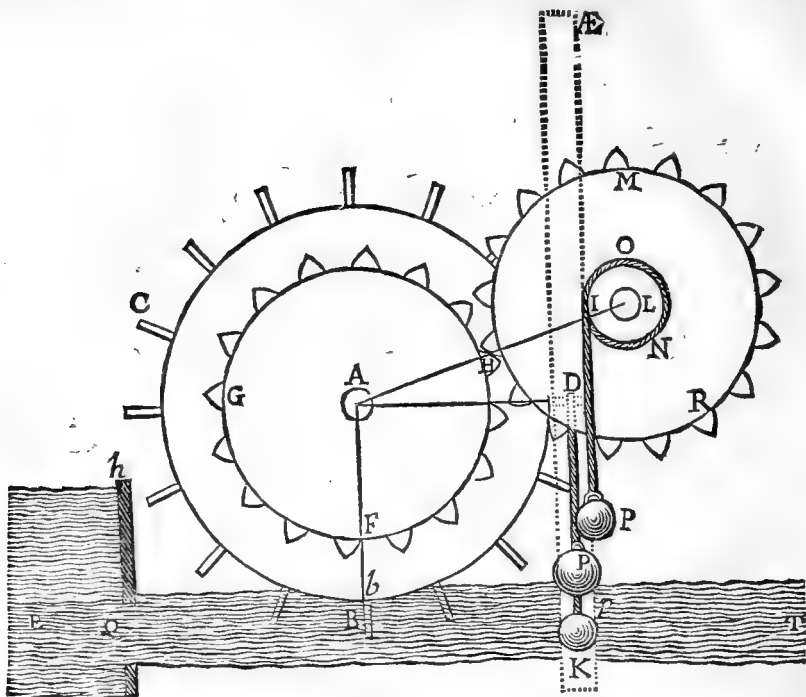
La raison en est aisée à voir, en ce que p dans cet état de mouvement peut toujours être regardé comme les $\frac{4}{9}$ d'un autre poids P , qui étant appliqué à cette Machine après y avoir fait le changement marqué dans le rapport de 4 à 9, seroit en équilibre avec P ou avec l'effort du fluide EB , puisqu'après ce changement ainsi fait, le fluide n'a plus que les $\frac{4}{9}$ de sa charge à soutenir; ainsi ce cas retombe dans le premier.

Il faut donc conclure aussi que le plus grand effet sera encore $\frac{4}{27}VP$, & la vitesse de p encore $\left(\frac{V}{3} \times \frac{bc}{BC}\right)$, comme dans le premier cas.

Voici donc deux paradoxes très-remarquables; savoir le premier qu'une puissance n'ayant que les $\frac{4}{9}$ de sa charge, produise après un certain temps un plus grand effet, que si elle portoit beaucoup davantage.

Le second, que quelque changement qu'on fasse à une Machine, son produit n'excedera jamais $\left(\frac{4}{27}\right)$ de son effet naturel, c'est-à-dire, de ce que la force motrice produiroit sans Machine.

ART. VIII. Pour faire maintenant application de ces principes à quelque chose d'usage, je supposerai que EB soit le jet horizontal d'une vanne dont l'ouverture soit Q , que Qh soit la distance du centre de cette ouverture à la surface de l'eau, & qu'il faille connoître la quantité d'eau que cette vanne est capable d'élever à une hauteur donnée $K \mathcal{A}$ avec la Machine la plus parfaite de toutes. Pour y parvenir, je considère que la force du jet sera alors $(Q \times Qh = P)$ ce qui donnera en prenant $K \mathcal{A}$ pour l'unité $\left(P = \frac{Qh \times Q}{K \mathcal{A}}\right)$; & cette valeur de P étant substituée dans celle du plus grand effet $\left(= \frac{4}{27}VP\right)$, il en résulte



$\left(\frac{4}{27} \times \frac{Qh \times V \times Q}{K \mathcal{A}}\right)$ pour la quantité d'eau produite en \mathcal{A} dans l'état de perfection ; d'où l'on tire l'Analogie générale pour toutes ces sortes d'hydrauliques.

Comme 27 fois la hauteur proposée $K \mathcal{A}$ est à 4 fois la hauteur de la chute de l'eau Qh , ainsi la dépense D de la vanne $Q = VQ$ à sa dépense en \mathcal{A} avec la Machine la plus parfaite.

ART. IX. Enfin si l'on suppose que le fluide EB vient choquer l'aile B avec différentes vitesses qui soient entr'elles comme les nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. Et si l'on substitue $1V, 2V, 3V, 4V, 5V, \&c.$ au lieu de V , & $1P, 4P, 9P, 16P, 25P, \&c.$ au lieu de P dans la valeur générale du plus grand effet $\left(\frac{4}{27} VP\right)$, il en résultera

les plus grands effets $\frac{4}{27}VP$, $\frac{32}{27}VP$, $\frac{108}{27}VP$, $\frac{256}{27}VP$, $\frac{500}{27}VP$,
qui répondent aux forces $4P$, $9P$, $16P$, $25P$.

Or les nombres 132 , 108 , 256 , 500 , &c. sont quadruples des nombres 1 , 8 , 27 , 64 , 125 , &c. & ceux-ci sont les cubes des vitesses 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , &c. Donc ces plus grands effets sont entr'eux comme les cubes des racines quarrées des différentes forces du fluide, ou des causes qui les produisent.

Ou si l'on veut comparer ces mêmes effets parfaits aux différens efforts du fluide contre l'aube B , on ôtera de la vitesse V du fluide celle de B dans l'état parfait $= \frac{V}{3}$, ce qui donnera pour la vitesse relative du fluide à l'égard de B $\frac{2}{3}V$, dont le quarré $\frac{4}{9}V^2$ marquera en même-temps son effort. Donc lorsque les vitesses absolues du fluide seront $1V$, $2V$, $3V$, $4V$, $5V$, &c. ses vitesses relatives contre A seront $\frac{2}{3}V$, $\frac{4}{3}V$, $\frac{6}{3}V$, $\frac{8}{3}V$, $\frac{10}{3}V$, &c. dont les quarrés qui marqueront les différens efforts du fluide, sont comme les nombres 4 , 16 , 36 , 64 , 100 , &c. ou comme les quarrés naturels 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , &c. Donc ces différens efforts sont entr'eux comme les différentes forces du fluide; c'est-à-dire, encore comme les quarrés des racines cubiques des différens effets qu'ils produisent. Donc même dans l'état parfait du mouvement, *les effets ne sont proportionnels ni aux forces ou causes, ni aux efforts qui les produisent*, comme on l'avoit cru jusqu'ici; ce qui peut passer encore pour un troisieme paradoxe.

ART. X. Il ne nous reste maintenant pour épuiser cette matiere entierement, que de résoudre les cinq problemes qu'on peut faire sur la grandeur du poids à élever, sur celle des aubes, sur les leviers de la force motrice, sur ceux du poids, & enfin sur la vitesse, c'est-à-dire, quatre de ces cinq différentes choses étant données à souhait de trouver la cinquieme.

Pour y parvenir je suppose une eau dont la vitesse v soit connue, comme de 26 piés par 2^e qui est celle qu'elle

acquiert en tombant par 13 piés dans une pareille 2^e. selon les expériences les plus exactes du P. Sebastien & de M. Mariotte, avec le poids π qu'elle est capable de soutenir (à même distance de l'appui) en choquant contre une surface plate α d'un pié en quarré, lequel poids seroit ici de 910 liv. (ce qui s'accorde aussi à très-peu de chose près avec les expériences du même M. Mariotte faites en différens endroits de la Seine, en déduisant quelque petite chose pour le frottement de son moulin) ce qui donnera l'Analogie en nommant A l'aube B : ($V^2 A | P || v^2 \alpha | \pi$) d'où l'on tire ($P = \frac{V^2 A \pi}{v^2 \alpha}$) & ($P = \frac{V^2 A \pi B C}{u^2 \alpha b c}$). Mettant donc dans l'équation de l'art. 3. ($V^2 p = \sqrt{V^2 - x^2} P$) les valeurs de P de ($x = \frac{u B C}{b c}$), on la change en cette autre ($V^2 p = \sqrt{V^2 - B C u^2} \times \frac{V^2 A B C \pi}{v^2 \alpha b^2 c^2}$), d'où l'on tire ($p v^2 \alpha b^2 c^2 = V^2 A B C \pi b^2 c^2 - u^2 A B^2 C^2 \pi - 2 V u B^2 C^2 A b c \pi$).

Si l'on demande donc le poids p , tout le reste étant donné, on aura ($p = \frac{V^2 b c - u B C^2}{v^2 \alpha b^2 c^2} \times A B C \pi$).

Si l'on demande l'aube A , tout le reste étant connu, on aura ($A = \frac{p v^2 \alpha b^2 c^2}{V^2 b c - u B C^2 \times B C \pi}$).

Si l'on veut avoir la vitesse u du poids p qu'on a trouvée dans l'art. 3. ($= \frac{V b c}{B C} \times \sqrt{1 - \frac{P b c}{P B C}}$), il ne faudra qu'y substituer la valeur de P ci-dessus, & il viendra ($u = \frac{b c}{B C} \times \sqrt{V^2 - u^2} \frac{P b c \alpha}{\pi B C A}$).

Pour trouver un des rayons de la force motrice comme B , on tirera de l'égalité ci-dessus ($B^3 - B^2 \times \frac{2 V b c}{u C} + B \times \frac{V^2 b^2 c^2}{u^2 c^2} - \frac{p v^2 \alpha b^2 c^2}{\pi u^2 A C^3} = 0$), laquelle en supposant ($B = z + \frac{2 V b c}{3 u C}$) se transforme en cette autre ($z^3 - z \times \frac{V^2 b^2 c^2}{3 u^2 C^2} + \frac{2 V^3}{27 u} - \frac{p v^2 \alpha}{A \pi} \times \frac{b^2 c^2}{u^2 C^2} = 0$) qui contient deux cas tous deux irréductibles;

irréductibles, le quarré de la moitié de l'absolu étant toujours moindre que le cube du tiers du coëfficient, à cause que up est toujours moindre que $\frac{4}{27}VP$; c'est pourquoi on les résoudra par les Tables du cercle fort aisément, comme on le dira ci-après.

Enfin pour trouver un des rayons du poids comme b , on en prendra un à plaisir comme e , avec lequel on cherchera comme ci-dessus le rayon B de la force motrice: on cherchera aussi avec e le rayon β du fluide EB qui feroit un équilibre entre p & le fluide, faisant ($pec = PC\beta$) ou ($pec = \frac{V^2 A \pi C \beta}{b^2 u}$) & ($\frac{pec u^2 \alpha}{V^2 A C \pi} = \beta$) en distribuant la valeur de P ci-dessus, & on fera cette Analogie comme B est à β ; ainsi e a un quatrieme terme qui fera la valeur de l'inconnue b .

Pour résoudre la dernière équation ci-dessus, supposant premièrement que l'absolu ait le signe $+$, ou ce qui est le même que ($\frac{4}{27}VP$) soit plus grand que $(2up)$, on prendra la racine quarrée du tiers du coëfficient, savoir ($\frac{\sqrt{bc}}{3uC}$), & l'on divisera l'absolu par les $\frac{2}{3}$ du même coëfficient pour avoir ($\frac{2V^3 A \pi - 27up u^2 \alpha}{6V^2 u C A \pi} \times bc$). On fera ensuite cette Analogie: $\frac{Vbc}{3uC} \parallel \frac{2V^3 A \pi - 27up u^2 \alpha}{6V^2 u C A \pi} \times bc \parallel 1 \parallel 1 - \frac{27up u^2 \alpha}{2V^3 A \pi} \parallel$ ($1 \parallel 1 - \frac{2up}{\frac{4}{27}VP}$); ainsi le sinus total des Tables du cercle a un quatrieme terme qui fera un sinus dont on prendra l'arc, & le tiers de cet arc & le double sinus de ce tiers. On fera ensuite cette seconde Analogie: comme le sinus total est au double sinus trouvé, ainsi ($\frac{\sqrt{bc}}{3uC}$) a un quatrieme terme, qui

fera une des valeurs de z , savoir la moindre des 2 vraies.

Et pour avoir l'autre valeur, on prendra 5 fois le tiers d'arc trouvé, & le double sinus de ces $\frac{5}{3}$; après quoi on fera cette dernière Analogie: comme le sinus total est au

338 MEMOIRES DE L'ACADE'MIE ROYALE
double sinus dernier , ainsi $\left(\frac{vbc}{3uc}\right)$ a un quatrieme terme ,
qui sera la plus grande valeur vraie de z .

Enfin si l'absolu a le signe — , ou si $\left(\frac{4}{27}VP\right)$ est moins
que $(2up)$, il n'y aura qu'une valeur vraie de z , qui
sera égale à la somme des z qu'on vient de trouver.

Ayant z & y joignant $\left(\frac{2Vbc}{3uc}\right)$, on aura aussi-tôt la va-
leur desirée de B . Ce qui restoit.

EXTRAIT DES OBSERVATIONS

FAITES A LA MARTINIQUE

Par le P. Feuillée en 1703 & 1704.

Comparées aux observations qui avoient été déjà faites en
cette Isle par M^{rs} des Hayes & du Glos.

Et à celles qui ont été faites en même-temps à l'Observatoire
Royal.

PAR M. CASSINI le fils.

1704.
6. Decem-
bre.

LE P. Feuillée qui, dans son voyage du Levant & des
Isles de l'Archipel , a déjà fait plusieurs observations
Astronomiques dont j'ai fait le rapport à l'Académie , a
entrepris depuis son retour à Marseille un autre voyage
dans le dessein d'y faire de nouvelles observations. Il a
commencé par la Martinique où il a demeuré plus d'un
an , comme il paroît par le Journal de ses observations
qu'il a envoyées depuis peu à M. le Comte de Pontchar-
train. Elles ont été souvent interrompues par de longues
maladies qui lui sont survenues , & par des pluies très-
abondantes qu'il y a fait depuis le mois de Juin de l'année
1703 , jusqu'au mois de Mars de cette année 1704. Il n'a
pas laissé d'y faire un nombre considérable d'observations
d'Eclipses de Satellite de Jupiter , dont il y en a deux du

premier qui ont été faites en même-temps à l'Observatoire, & qui servent à déterminer avec exactitude la longitude de la Martinique. Il y en a plusieurs autres dont nous n'avons pas pû observer ici les correspondantes, tant à cause du temps qui n'est pas toujours favorable, que parce qu'elles sont arrivées de jour à Paris, ou bien lorsque Jupiter n'étoit plus sur l'horison. Nous ne laisserons pas de les comparer avec celles qui résultent à Paris par le calcul corrigé par les observations plus prochaines, & nous préfererons les observations qui précèdent ou suivent immédiatement celles qui ont été faites à Paris, comme étant les moins sujettes à erreur.

Observations des Satellites de Jupiter faites à la Martinique. 1703.

Le 19 Juillet à 2^h 41' 15'' du matin à la Martinique, Immersion du 1 Satellite dans l'ombre de Jupiter.

6 53 57 à Paris par le calcul corrigé.

4 12 42 différence des Méridiens entre

Paris & la Martinique, dont Paris est plus à l'Orient.

Cette Immersion n'a pas pû être observée immédiatement à Paris, y étant arrivée pendant le jour. Elle a été tirée de l'Immersion suivante, qui fut observée le 21. Juillet à 1^h 22' 22'' du matin.

Le 26. Juillet à 4^h 35' 20'' du matin à la Martinique, Immersion du 1 Satellite dans l'ombre de Jupiter.

8 47 43 à Paris par le calcul corrigé.

4 12 23 différence des Méridiens entre

Paris & la Martinique. Cette observation est aussi arrivée de jour à Paris.

Le 7 Decembre à 7^h 10' 31'' du soir à la Martinique, Emerision du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter.

Le 7 Decembre à $11^h 23' 1''$ à Paris par le calcul corrigé.

4 12 30 différence des Méridiens entre Paris & la Martinique.

Le 12 Decembre à $10^h 4' 54''$ du soir à la Martinique, Emerfion du 2 Satellite de l'ombre de Jupiter.

Le 20 Decembre à $0^h 41' 10''$ du matin à la Martinique, Emerfion du 2 Satellite de l'ombre de Jupiter. Je n'ai point comparé ces deux observations du fecond Satellite avec celles qui réfultent à Paris du calcul corrigé, n'en ayant pas observé vers ce temps-là.

Le 14 Decembre à $9^h 1' 44''$ du soir à la Martinique, Emerfion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter au travers de foibles nuages.

13 15 0 Emerfion du 1 Satellite observée à Paris.

4 13 16 différence des Méridiens entre Paris & la Martinique.

Le 29 Decembre à $0^h 44' 51''$ du matin à la Martinique, Emerfion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter.

4 58 4 à Paris par le calcul corrigé.

4 13 13 différence des Méridiens entre Paris & la Martinique. Cette Emerfion n'a pas pu être observée à Paris, Jupiter étant alors fous l'horifon.

Le 30 Decembre à $7^h 12' 59''$ du soir à la Martinique, Emerfion du 1 Satellite de l'ombre de Jupiter.

11 26 40 Emerfion du 1 Satellite observée à Paris.

4 13 41 différence des Méridiens entre Paris & la Martinique.

1704.

Le 14 Février à 7^h 30' 40" du soir à la Martinique, Emer-
sion du 1 Satellite de l'om-
bre de Jupiter.

11 43 19 à Paris par le calcul corrigé.

4 12 39 différence des Méridiens entre
Paris & la Martinique.

Le 21 Février à 9^h 26' 28" du soir à la Martinique, Emer-
sion du 1 Satellite de l'om-
bre de Jupiter.

13 39 31 à Paris par le calcul corrigé.

4 13 3 différence des Méridiens entre
Paris & la Martinique.

Le 8. Mars à 7^h 49' 6" du soir à la Martinique, Emer-
sion du 1 Satellite de l'om-
bre de Jupiter.

0 2 27 à Paris par le calcul corrigé.

4 13 21 différence des Méridiens entre
Paris & la Martinique.

En prenant un milieu entre les deux observations du 14
& du 30 Decembre faites en même-temps à Paris & à la
Martinique, l'on a la différence des Méridiens entre ces
lieux de 4^h 13' 28". Cette différence excède celle qui ré-
sulte de la comparaison des autres observations, & est plus
petite que celle qui fut déterminée en 1682 de 4^h 14' 45",
par une observation de M^{rs} des Hayes & du Glos, qui est
rapportée dans le Livre des voyages de l'Académie, dont
la correspondante ne fut pas observée en même-temps à
Paris : c'est pourquoi je crois qu'il est plus à propos de pré-
férer la différence qui résulte des deux observations du P.
Feuillée comparées aux nôtres immédiates, & de détermi-
ner la différence des Méridiens entre Paris & la Martini-
que de 4^h 13' 28" ou 6^d 22' 0".

Observations pour la latitude de la Martinique.

Le P. Feuillée s'est servi pour déterminer la hauteur du Pole de la Martinique d'un anneau Astronomique de 18 pouces de diametre, avec lequel il a fait un grand nombre d'observations de hauteurs Méridiennes du Soleil. Quoique cet instrument ne puisse pas donner les hauteurs avec autant de précision que les grands quarts de cercle dont nous nous servons ordinairement, l'on ne laisse pas de reconnoître la bonté de celui dont s'est servi le P. Feuillée, & en même-temps son exactitude à observer, puisque ces observations, qui sont au nombre de plus de 60, donnent la hauteur du Pole de cette Isle entre $14^{\text{d}} 42' 23''$, & $14^{\text{d}} 43' 55''$; de sorte qu'entre les extremes il n'y a qu'une minute & demie de différence.

Dans le Livre des voyages de l'Académie la hauteur du Pole de cette Isle fut déterminée en 1682 de $14^{\text{d}} 44' 0''$, & cette détermination fut confirmée par le dernier voyage que M. des Hayes fit à la Martinique, où il la trouva de même qu'elle est marquée dans le Livre des voyages; ainsi il n'y a pas lieu de rien changer à cette détermination, qui d'ailleurs ne s'écarte pas d'une minute de celle qui résulte des observations du P. Feuillée.

Observations pour la variation de l'Aimant.

Le P. Feuillée s'étoit servi dans son voyage du Levant d'une Bouffole dont la boîte étoit de cuivre: mais ayant remarqué que dans le même endroit l'aiguille varioit quelquefois diversément, & ayant attribué cette variation au cuivre, il fit avant son départ de Marseille une boîte de bois d'un pied de diametre, dans laquelle il plaça une aiguille de 9 pouces 7 lignes de très-fin acier, dans le dessein d'observer la variation de l'Aimant avec le plus d'exactitude qu'il lui seroit possible.

Ayant placé cette Bouffole sur une pierre de niveau où

il avoit tracé avec beaucoup de soin une ligne Méridienne , il trouva le 9 Février 1704 à la Martinique la variation de l'Aimant de $6^{\text{d}} 5' 0''$ Nord-Est , & le 20 du même mois de $6^{\text{d}} 10' 0''$.

La variation de l'Aimant avoit été observée à la Martinique au mois de Novembre de l'année 1682 par M^{is} des Hayes & du Glos de 4^{d} & $10'$ ou environ Nord-Est , comme il est rapporté dans le Livre des voyages de l'Académie. Il y a donc eu dans cet intervalle de temps , qui est de 21 années & quelques mois , une augmentation de la variation de l'Aimant d'environ deux degrés du Nord vers l'Est , au lieu que celle que l'on a observée à Paris a augmenté depuis ce temps-là du Nord vers l'Ouest : car en 1682 au mois de May , elle fut observée à Paris de $3^{\text{d}} \frac{1}{2}$, au lieu qu'elle fut trouvée en 1703 au mois d'Octobre , de 9 degrés du Nord vers l'Ouest , comme il est rapporté dans la Connoissance des Temps de cette année ; desorte qu'à peu près dans le même intervalle de temps que celui qui s'est écoulé entre les observations de la Martinique , il y a eu à l'Observatoire $5^{\text{d}} \frac{1}{2}$ d'augmentation du Nord vers l'Ouest ; ce qui est en raison de 15 à 16 minutes par année.

La différente direction de l'aiguille aimantée , qui dans l'Europe est du Nord vers l'Ouest , & dans l'Amérique Méridionale du Nord vers l'Est , est apparemment ce qui a donné lieu à l'hypothèse de M. Halley , qui trace dans les mers qui se trouvent entre ces deux continens , une ligne courbe où il n'y a point de variation de l'Aimant , & qui est le terme des variations Orientales & Occidentales. Il a , selon les apparences , fondé son hypothèse sur diverses observations qu'il a faites lui-même , & qu'il a tirées des voyageurs. En effet , il y a dans ces mers , suivant les dernières observations que M. des Hayes a faites en Amérique en 1699 & 1700 , plusieurs endroits où il n'y a point de variation. Mais dans la traversée de Gorée à la Cayenne , le lieu où cesse la variation , selon M. des Hayes , est éloigné de celui par où passe la ligne de M. Halley , M.

Halley faisant passer cette ligne beaucoup plus proche du Cap-Verd & de la Gorée que de Cayenne, au lieu que l'endroit où M. des Hayes n'a point trouvé de variation est plus proche de Cayenne que de Gorée. Car il rapporte que dans la plus grande partie de la traversée de Gorée à Cayenne, la variation a toujours été Nord-Ouest, comme en France & en Canada, mais pas si grande; que 6 ou 7 jours avant l'atterage de Cayenne elle étoit nulle; qu'elle passoit ensuite au Nord-Est d'abord de peu, & qu'à Cayenne elle est de $5^{\text{d}} \frac{1}{2}$. Ainsi, suivant cette observation, cette ligne devrait être dans la traversée de Gorée à Cayenne beaucoup à l'Occident de l'endroit où elle est marquée dans la Carte de M. Halley.

Pour ce qui est de la déclinaison de l'aiguille à Cayenne que M. des Hayes marque être de $5^{\text{d}} \frac{1}{2}$ du Nord vers l'Est, elle s'accorde assez bien à celle de M. Halley, où elle paroît être de 6 degrés.

Celle de la Martinique differe un peu plus, ayant été observée par le P. Feuillée de $6^{\text{d}} 10'$, au lieu qu'elle est marquée dans la Carte de M. Halley de $5^{\text{d}} 20'$: mais il ne faut pas s'étonner de cette différence, puisqu'elle de Paris n'y est marquée que de 7 degrés, quoique dans le temps que M. Halley a imprimé sa Carte, elle y ait été observée de 8 degrés ou environ; aussi il n'y a pas d'apparence qu'il ait prétendu représenter les variations de l'Aiman dans la dernière précision.

M. des Hayes remarque aussi que dans une partie de la traversée pour le retour des Isles en France, la variation est encore Nord-Est jusqu'à la latitude de 30 à 31 degrés, & qu'après elle repasse au Nord-Ouest, & y reste jusqu'en France. En ceci il paroît s'accorder à ce qui est représenté dans la carte de M. Halley. Mais quand même toutes les observations que l'on pourroit faire en ce temps-ci s'accorderoient aux variations qui sont marquées dans la Carte de M. Halley, il faudroit toujours une nouvelle hypothèse pour exprimer les variations qui arriveroient dans la suite. Car en 1682 la variation de l'Aiman ayant été

été observée à Paris de $3^{\text{d}} \frac{1}{2}$ du Nord vers l'Ouest, & à la Martinique de $4^{\text{d}} 10'$ du Nord vers l'Est, il y avoit alors $7^{\text{d}} 40'$ de différence de variation qui répondoient à l'intervalle qui est entre ces lieux. Présentement la variation est à Paris de 9^{d} vers l'Ouest, & à la Martinique de $6^{\text{d}} 10'$ vers l'Ouest; de sorte que dans le même intervalle il y a à présent $15^{\text{d}} 10'$ de différence de variation, ce qui est environ le double de celle qui a été observée il y a 21. ans. Si ces différences de variation, l'une du Nord vers l'Ouest, & l'autre du Nord vers l'Est, continuent à augmenter comme il y a quelque apparence, l'hypothese de M. Halley aura dans la suite besoin de corrections qui demanderoient un grand nombre d'observations faites dans une longue suite d'années.

DESCRIPTION

De deux especes de Chamærhododendros observées sur les côtes de la Mer Noire.

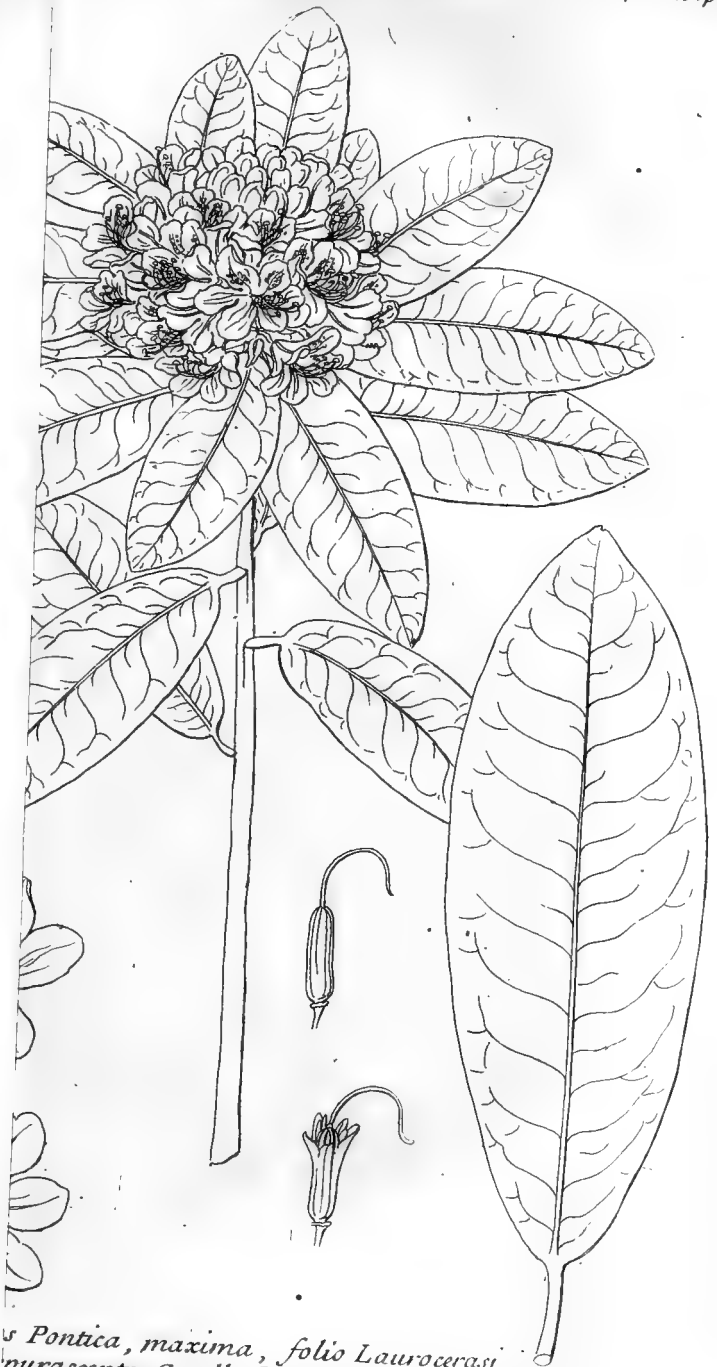
PAR M. TOURNEFORT.

Chamærhododendros Pontica, maxima, folio Laurocerasi, flore à cæruleo purpurascente. Coroll. hist. rei herb. 42.

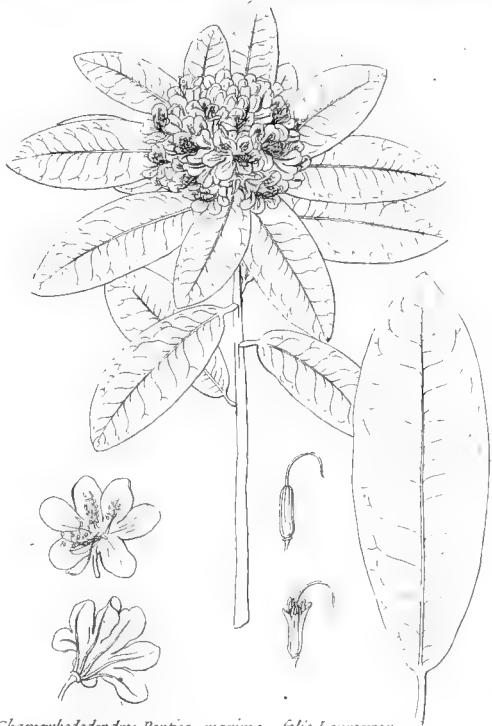
C Et arbrisseau s'éleve ordinairement à la hauteur d'un homme. On en trouve quelquefois de plus grands, dont le principal tronc est presque aussi gros que la jambe. Sa racine trace jusqu'à cinq ou six pieds de long, partagée d'abord en quelques autres racines grosses comme le bras, distribuées en subdivisions qui ne sont guere plus épaisses que le pouce. Celles-ci diminuent insensiblement, & sont accompagnées de beaucoup de chevelu. Elles sont dures, ligneuses, couvertes d'une écorce brune, & produisent plusieurs tiges de différentes grandeurs qui environnent le tronc. Le bois en est blanc, cassant, revêtu d'une écor-

1704.
10. Decem-
bre.

ce grisâtre , qui tire en quelques endroits sur le brun. Les branches sont assez touffues , & naissent souvent dès le bas : mais elles sont mal formées , inégales & garnies de feuilles seulement vers les extrémités. Ces feuilles quoique rangées sans ordre sont d'une grande beauté , & ressemblent tout à fait à celles du Laurier-cerise. Les plus grandes ont sept ou huit pouces de long sur environ deux ou trois pouces de large vers le milieu : car elles se terminent en pointe par les deux bouts. Leur couleur est verd gai , leur surface lisse & presque luisante , leur consistance ferme & solide. Le dos en est relevé d'une grosse côte arrondie ; ce n'est qu'un allongement de la queue , laquelle a près de deux pouces de long sur une ligne de large. Cette côte , qui est sillonnée en devant , distribue des vaisseaux de part & d'autre , qui se répandent & se subdivisent sur ces côtes dans un ordre comme alterne. Les feuilles deviennent moindres à mesure qu'elles approchent des sommités : cependant on y en aperçoit assez souvent qui sont encore plus grandes que leurs inférieures. Depuis la fin d'Avril jusqu'à celle de Juin , ces sommités sont chargées de bouquets de quatre ou cinq pouces de diametre , composés chacun de vingt ou trente fleurs qui naissent chacune des aisselles d'une feuille longue d'un pouce & demi , membraneuse , blanchâtre , large de quatre ou cinq lignes , pointue , creusée en goutiere & posée en écaille avec ses voisines. Le pédicule des fleurs a depuis un pouce jusqu'à quinze lignes de long : mais il n'est épais que d'environ demi-ligne. Chaque fleur est d'une seule piece , longue d'un pouce & demi ou deux , rétrécie dans le fond , évalée & découpée en cinq ou six quartiers. Celui d'en haut , qui est quelquefois le plus grand , est large d'environ sept ou huit lignes , arrondi par le bout ainsi que les autres , légèrement frisé , orné vers le milieu de quelques points jaunes , ramassés en maniere d'une grosse tache. Les quartiers d'embas sont un peu plus petits , & découpés plus profondément que les autres. A l'égard de leur couleur , le plus souvent elle est violette tirant sur le gris



*s Pontica, maxima, folio Laurocerasi
purascente Coroll. Inst. rei Herb. 42*



*Chamaerhododendron Pontica, maxima, foliis Lauracearum
flore e caeruleo purpurascente Coroll. Inst. rei Herb. 42*

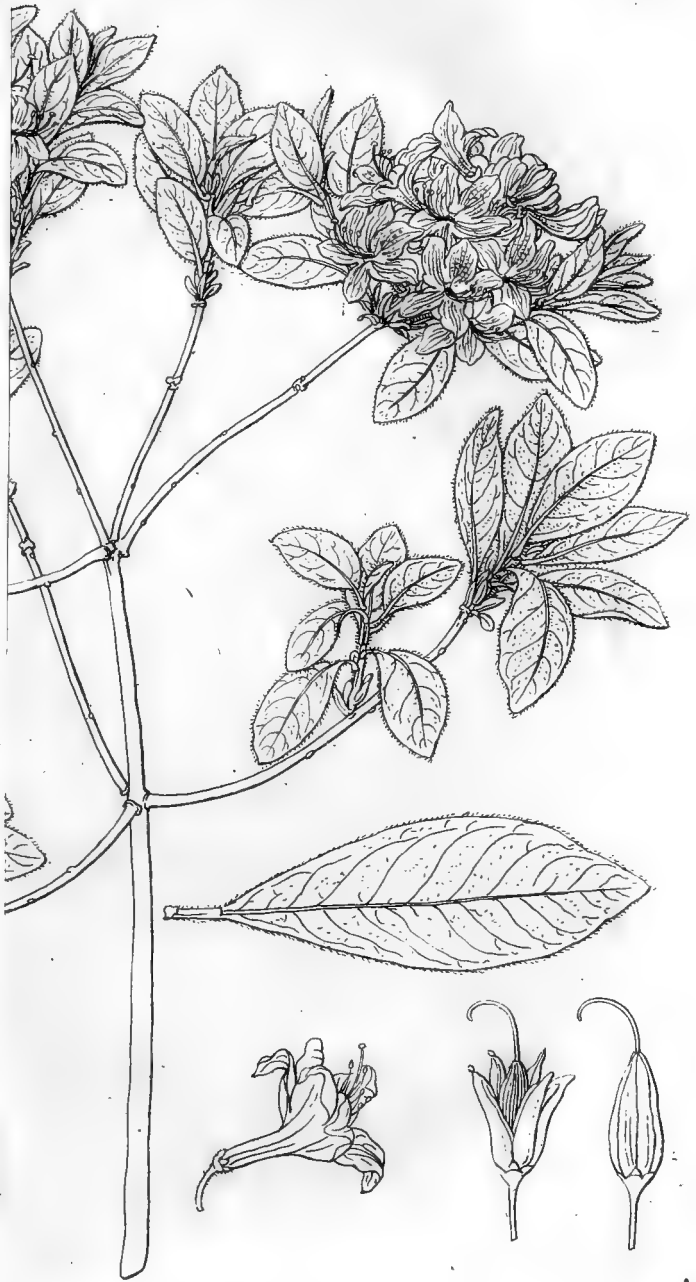
de lin. On trouve des pieds de cette plante à fleurs blanches, & d'autres à fleurs purpurines, plus ou moins foncées. Toutes ces fleurs sont marquées de points jaunes dont on vient de parler, & leurs étamines qui naissent en touffe, sont plus ou moins colorées de purpurin, mais blanches & cotonneuses à leur naissance. Ces étamines sont inégales, crochues & entourent le pistile : leurs sommets sont posés en travers, longs de deux lignes sur une ligne de large, divisés en deux bourses pleines d'une poussière jaunâtre. Le calice des fleurs n'a qu'environ une ligne & demie de largeur, légèrement cannelé en six ou sept pointes purpurines. Le pistile est une espece de cone de deux lignes de long, relevé à sa base d'un ourlet verdâtre & comme frisé. Un filet purpurin, courbe & long de 15 ou 18 lignes termine ce pistile, & finit par un bouton verd-pâle. Les bouquets des fleurs sont très-gluans avant qu'elles s'épanouissent : lorsqu'elles sont passées, le pistile devient un fruit cylindrique, long d'un pouce à quinze lignes, épais d'environ quatre lignes, cannelé, arrondi par les deux bouts. Il s'ouvre vers le haut en cinq ou six parties, & laisse voir autant de loges qui le partagent en sa longueur, & qui sont séparées les unes des autres par les ailes d'un pivot qui en occupe le milieu. C'est ce pivot qui est terminé par le filet du pistile ; & bien loin de se dessécher il devient plus long tandis que le fruit est verd & ne tombe point. Les graines sont très-menues, brun clair, longues de près d'une ligne.

Les feuilles de cette plante sont stiptiques sans autre faveur. Les fleurs ont une odeur agréable, mais qui se passe facilement.

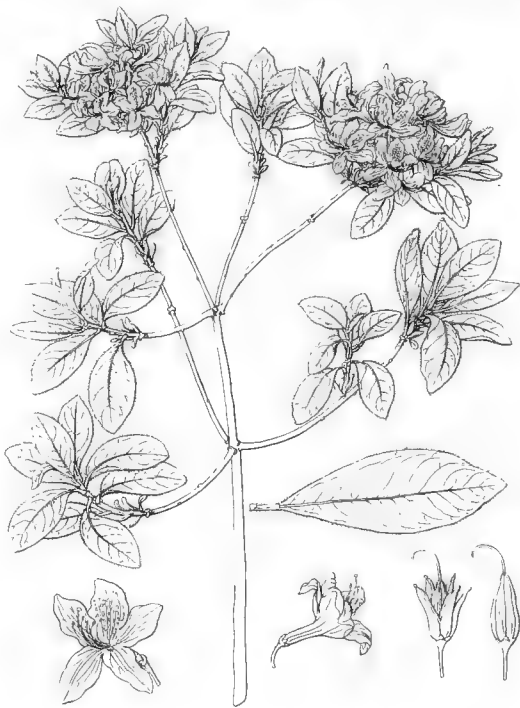
Cette plante aime la terre grasse & humide. Elle vient sur les côtes de la Mer noire le long des ruisseaux, depuis la riviere d'Ava qui n'est qu'à trente lieues de la sortie du Bosphore de Thrace jusqu'à Trébifonde.

*Chamaerhododendros Pontica , maxima , Mespili folio ,
flore luteo. Coroll. hist. rei herb. 42.*

Cette espece s'éleve quelquefois plus haut que la précédente , & produit un tronc de même grosseur , accompagné de plusieurs tiges plus menues , divisées en branches inégales , foibles , cassantes , blanches en dedans , couvertes d'une écorce grisâtre & lisse , si ce n'est aux extrémités où elles sont velues & garnies de bouquets de feuilles assez semblables à celles du Néflier des bois. Ces feuilles sont longues de quatre pouces sur un pouce & demi de largeur vers le milieu , pointues par les deux bouts , & surtout par celui d'embas , verd gai , légèrement velues , excepté sur les bords où les poils forment comme une espece de sourcil. Leur côte est assez forte , & se distribue en nervure sur toute la surface. Cette côte n'est que la suite de la queue des feuilles , qui le plus souvent n'a que trois ou quatre lignes de longueur sur une ligne d'épaisseur. Les fleurs naissent dix-huit ou vingt ensemble , ramassées en bouquets à l'extrémité des branches , soutenues par des pédicules d'un pouce de long , velus & qui naissent des aisselles de petites feuilles membraneuses , blanchâtres , longues de sept ou huit lignes sur trois lignes de large. Chaque fleur est un tuyau de deux lignes & demie de diamètre , légèrement cannelé , velu , jaune tirant sur le verdâtre. Il s'évase au-delà d'un pouce d'étendue , & se divise en cinq quartiers , dont celui du milieu a plus d'un pouce de long sur presque autant de largeur , réfléchi en arriere ainsi que les autres , & terminé en arcade gothique , jaune pâle , quoique doré vers le milieu. Les autres quartiers sont un peu plus étroits & plus courts , jaune pâle aussi. Cette fleur est percée en derriere , & s'articule avec le pistile qui est pyramidal , cannelé , long de deux lignes , verd blanchâtre , légèrement velu , terminé par un filet courbe long de deux pouces , lequel finit par un bouton verd pâle. Des environs du trou de la fleur sortent cinq étamines plus courtes que le pistile , inégales , courbes , chargées de



Andros Pontica, maxima, Mespili folio,
coll. Inst. rei Herbar. 42.



Chamærhododendron Fontica, maxima, Mespili folio,
flore lato coroll. Inst. rei Herbar. 42

fômments longs d'une ligne & demie , remplis de poussiere jaunâtre. Les étamines sont de même couleur , velues de leur naissance jusques vers le milieu , & toutes les fleurs ainsi que celles de l'espece précédente sont penchées sur les côtés de même que celles de la Fraxinelle. Le pistile devient dans la suite un fruit d'environ quinze lignes de long , du diametre de six ou sept lignes , relevé de cinq côtes , dur , brun & pointu. Il s'ouvre de la pointe à la base en sept ou huit parties , creusées en goutiere , lesquelles assemblées avec le pivot cannelé qui en occupe le milieu , forment autant de loges. Je n'en ai pas vû la graine mûre.

Les feuilles de cette plante sont stiptiques. L'odeur des fleurs approche de celle de la Chevrefeuille , mais elle est plus forte & porte à la tête.

Cette fleur me parut si belle que j'en fis un bouquet pour présenter à Numan Coprogli Pacha de Candie présentement , & Pacha d'Erzeron dans le temps que j'eus l'honneur de l'accompagner sur la Mer noire : mais je fus averti par son Chaia que cette fleur excitoit des vapeurs & caufoit des vertiges. La raillerie me parut assez plaisante : car le Pacha se plaignoit de ces sortes d'incommodités : cependant le Chaia ne railloit pas , & venoit d'apprendre par les gens du pays que cette fleur étoit nuisible au cerveau. Ces bonnes gens par une tradition fort ancienne , fondée apparemment sur plusieurs observations , assurent aussi que le miel que les abeilles font de ce qu'elles succent sur cette fleur , étourdit ceux qui en mangent & leur donne des nausées.

Dioscoride a parlé de ce miel à peu près dans les mêmes termes : Autour d'Heraclee du Pont , dit-il , en certains “ Lib. 2. c. 103. & Expor. lib. 2. c. 38. ” temps de l'année , le miel rend insensés ceux qui en mangent , & c'est sans doute par la vertu des fleurs d'où il est tiré. Ils suent très-copieusement : mais on les soulage en leur donnant de la Rue , des salines & de l'hydromel à mesure qu'ils vomissent. Ce miel , ajoute le même Auteur , est acre & fait éternuer. Il efface les rousseurs du visage si

„ on le broye avec du Costus, mêlé avec du sel ou de l'Aloës :
 „ il dissipe les noirceurs que laissent les meurtrissures. Si les
 „ chiens ou les cochons avalent les excréments des person-
 „ nes qui ont mangé de ce miel, ils souffrent les mêmes
 „ accidens.

Les deux Plantes dont on vient de parler, se trouvent
 autour d'Héraclée du Pont, que l'on appelle aujourd'hui
 Penderachi ou Elegri, & naissent en abondance tout le
 long des côtes & dans les bois jusqu'au delà de Trébison-
 de. La premiere espece passe aussi pour malfaisante. Les
 bestiaux n'en mangent que lorsqu'ils ne trouvent pas de
 meilleure nourriture.

*Arist. de Mi-
 rab. Auscult.*

Pline a mieux débrouillé l'histoire de ces arbrisseaux
 que Dioscoride ni qu'Aristote, qui a cru que les abeilles
 amassoient ce miel sur le Bouis; qu'il rendoit insensés ceux
 qui en mangeoient & qui se portoit bien auparavant;
 qu'au contraire il guérissoit les insensés. Pline s'en expli-
 que de la sorte: Il est des années, dit-il, où le miel est très-

*Lib. 21.
 cap. 12.*

„ dangereux autour d'Héraclée du Pont. Les Auteurs n'ont
 „ pas connu de quelles fleurs les abeilles le tiroient. Voici
 „ ce que nous en savons. Il y a une Plante dans ces quar-
 „ tiers; appelée *Ægolethron*, dont les fleurs dans les Prin-

*Α' εζών
 ἑλιθός
 Caprarum
 pernicius.*

„ temps humides acquierent une qualité très-dangereuse
 „ lorsqu'elles se flétrissent. Le miel que les abeilles en font
 „ est plus liquide que l'ordinaire, plus pesant & plus rouge.
 „ Il a une odeur étrangere, & provoque à éternuer. Ceux
 „ qui en ont mangé, furent horriblement, se couchent à ter-
 „ re, & ne demandent que des rafraichissemens. Il ajoute
 „ ensuite les mêmes choses que Dioscoride, dont il semble
 „ qu'il ait traduit les paroles: mais outre le nom d'*Ægolethron*
 „ qui ne se trouve pas dans cet Auteur, voici une excellente
 „ remarque qui appartient uniquement à Pline.

„ On trouve, continue-t'il, sur les mêmes côtes du Pont
 „ une autre sorte de miel qui est nommé *Mænomenon*; parce
 „ qu'il rend insensés ceux qui en mangent. On croit que les
 „ abeilles l'amassent sur la fleur du *Rhododendros* qui s'y trou-
 „ ve communément parmi les forêts; & les peuples de ce

quartier-là quoiqu'ils payent aux Romains une partie de leur tribut en cire, se gardent bien de leur donner de leur miel.

Il semble que sur ces paroles de Pline l'on peut déterminer les noms de nos deux especes de *Chamærhododendros*. La seconde suivant les apparences est l'*Ægolethron* de cet Auteur : car la premiere qui fait des fleurs purpurines approche beaucoup plus du *Rhododendros*, & l'on peut la nommer *Rhododendros Pontica Plinii* pour la distinguer du *Rhododendros* ordinaire, qui est notre Laurier-rose connu par Pline sous le nom de *Rhododaphne* & *Nerium*. Il est certain que le Laurier-rose ne croît point sur les côtes du Pont Euxin, cette Plante aime les pays chauds. On n'en voit guere passé les Dardanelles : mais elle est fort commune le long des ruisseaux dans les Isles de l'Archipel, ainsi le *Rhododendros* du Pont ne sauroit être nôtre Laurier-rose : mais il est très-vrai-semblable que le *Chamærhododendros* à fleur purpurine est le *Rhododendros* de Pline.

Lib. 24. cap. XI.

Quand l'Armée des dix mille approcha de Trébifonde, il lui arriva un accident fort étrange, & qui causa une grande consternation, ainsi que le rapporte Xenophon qui étoit un des principaux Chefs de ces troupes. Comme il y avoit plusieurs ruches d'abeilles, dit cet Auteur, les soldats n'en épargnerent pas le miel. Il leur prit un dévoiement par haut & par bas, suivi de rêveries; de sorte que les moins malades ressembloient à des ivrognes, & les autres à des personnes furieuses ou moribondes. On voyoit la terre jonchée de corps comme après une bataille. Personne néanmoins n'en mourut, & le mal cessa le lendemain environ l'heure qu'il avoit pris; de sorte que les soldats se leverent le troisieme & le quatrieme jour, mais en l'état qu'on est après avoir pris une forte medecine.

Xenophon
lib. 4. Retraite des dix mille.

Diodore de Sicile rapporte le même fait dans les mêmes circonstances. Il y a toute apparence que ce miel avoit été tiré de quelqu'une de nos especes de *Chamærho-*

Lib. 14.

352 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
dodendros. Tous les environs de Trebifonde en sont pleins ;
 & le Pere Lamberti, Missionnaire Theatin, convient que
 le miel que les abeilles succent sur un certain arbrisseau
 de la Colchide ou Mengrelie , est dangereux & fait vomir.
 Il appelle cet arbrisseau *Oleandro giallo* , c'est-à-dire, Laurier
 rose jaune , qui sans contredit est notre *Chamærhododendros*
Pontica , *maxima* , *Mespili folio* , *luteo*. La fleur , dit - il ,
 tient le milieu entre l'odeur du musc & celle de la cire jau-
 ne. Elle nous paroît assez semblable à celle de la *Chevre-*
feuille , mais incomparablement plus forte.

Relation de
 la Colchide
 imprimée à
 Naples 1652.
 in quarto.

O B S E R V A T I O N S

De l'Eclipse de Lune qui est arrivée le 11. Décembre
 1704. au matin à l'Observatoire.

PAR M^{rs}. DE LA HIRE.

1704.
 13. Decem-
 bre.

LE ciel ayant toujours été couvert pendant les 10
 jours qui ont précédé celui de cette Eclipse, il sem-
 bloit qu'il n'y avoit aucune espérance d'en pouvoir rien
 observer. Cependant le soir précédent le ciel commença
 à s'éclaircir : mais le vent qui regnoit toujours vers le Sud ,
 ne promettoit pas une grande sérénité. Aussi vers les 4
 heures du matin le ciel étoit fort brouillé, & la Lune
 étoit couverte de nuages cotonneux qui empêchoient de
 voir bien distinctement les taches de la Lune. Il faisoit
 alors peu de vent : mais vers les 6 heures le vent s'étant
 un peu augmenté, le ciel devenoit quelquefois assez serein
 pour laisser voir clairement la Lune : mais l'ombre de la
 terre sur le corps de la Lune n'a point été bien terminée
 dans tout ce que nous avons pû observer.

Sur les 5^h $\frac{1}{2}$ on croyoit voir tantôt une pénombre, &
 tontôt elle paroïssoit se dissiper entierement. Enfin à 5^h 51'
 la pénombre paroïssoit distinctement & assez forte entre
 les taches Grimaldi & Tycho.

A 5^h 51'

A 5^h 51' le bord de la Lune paroiffoit fort fombre, & la pénombre sembloit occuper 2 $\frac{1}{2}$ doigts.

A 6^h 8' la Lune paroiffoit éclipsée d'un doigt à la feule estime, & l'on ne remarquoit pas de pénombre fenfible, & l'ombre étoit fort douteufe.

A 6^h 11' 30" L'ombre touchoit le bord de *Mare humorum*.

14 30 Commencement de Grimaldi.

16 0 La Lune éclipsée de 2 doigts 12'.

17 30 Fin de Grimaldi.

21 0 Commencement de Tycho.

27 0 L'ombre n'étoit point diftincte.

32 0 La Lune éclipsée de 3 doigts 51'.

34 0 Kepler peu diftinctement.

36 0 Copernic douteux.

46 0 La Lune éclipsée de 5 doigts 22'.

56 0 La Lune éclipsée de 5 doigts 49'.

à 7 0 0 La Lune éclipsée de 6 doigts 3'.

11 0 La Lune éclipsée de 6 doigts 33'.

Après ce temps-là la Lune entra dans des nuages fort épais, & on ne la vit plus. La partie de la Lune qu'on voyoit un peu dans le fort de l'ombre paroiffoit de couleur grisâtre.

Quelque temps avant l'Eclipsé nous observâmes avec le Micrometre que le diametre de la Lune étoit de 30' 46" à la hauteur de 25 degrés.

Il fera facile de faire une figure exacte de la Lune avec fes Taches par les distances de quelques-unes que nous avons observées un peu avant l'Eclipsé.

Distances des Taches au bord le plus proche de la Lune.

du bord	Au milieu de Platon.	3' 11"
de la	Au milieu de Grimaldi.	0 46
	Au milieu de Tycho.	4 26
Lune.	Au bord le plus proche de <i>Mare Crisium</i> .	1 34
	Au <i>Promontorium acutum</i> .	8 14
	A Aristarque.	2 45

Distances des Taches entr'elles.

Entre Platon & Grimaldi.	18' 18"
Grimaldi & Tycho.	14 20
<i>Promontorium acutum</i> & Tycho.	14 39
<i>Promontorium acutum</i> & Platon.	15 17

On remarquera que nous n'avons pas pris pour le *Promontorium acutum* une petite avance claire & pointue qui est entre les deux Taches, mais une petite Tache claire qui en est proche & vers le milieu de la Lune.

Nous nous sommes servis de Lunettes de 7 pieds pour faire ces observations, & nous avons appliqué le Micro-metre à l'une de ces Lunettes.

Les Ephémérides de Mezzavacca marquent que cette Eclipsé ne fera pas visible à Bologne, à cause qu'elle arrivera à 8^h 9', ce qui doit s'entendre du milieu. Cependant si elle a duré 2^h 40', le commencement aura été à 6^h 49', ce qui est près de trois quarts d'heures plutôt que le lever du Soleil, & par conséquent on en aura pû voir le commencement. Ce milieu réduit à Paris est 7^h 31'.

Les Ephémérides de M. de Beaulieu marquent le milieu à Paris à 7^h 28', le commencement à 6^h 5', & la fin à 8^h 51; donc la durée 2^h 46', & la grandeur de 7 doigts 29'.

Les Ephémérides de l'Académie donnent le milieu de cette Eclipsé à 7^h 27' 53'', le commencement à 6^h 6' 56'', la fin à 8^h 48' 50'', la durée 2^h 41' 54'', & la quantité 6 doigts 21'.

Le milieu de cette Eclipsé dans ces trois Ephémérides est peu différent, & les deux dernières sont dans la même minute: il n'y a que la quantité qui est fort différente: car celles de M. de Beaulieu la font plus grande que les nôtres de 1 doigt 8', ce qui est difficile à accorder avec sa durée: mais ce pourroit être une faute d'impression: car on auroit pû mettre 7^d 29' au lieu de 6 doigts 29', ce qui semble devoir être.

Les différences considérables qu'on remarque à l'ombre

de la terre sur le corps de la Lune, ne peuvent venir que de la densité & de la figure de l'Atmosphère plus ou moins élevée au-dessus de la terre dans les endroits qui font l'ombre, & où le Soleil se leve alors pour la Lune: car les rayons qui traversent l'Atmosphère où ils se rompent, portent sur la partie de la Lune entièrement éclipsee, cette fausse lueur qui paroît de différentes couleurs dans différentes Eclipses, & quelquefois dans la même. Mais comme l'ombre de la terre paroît quelquefois assez terminée, & quelquefois fort confuse & inégale, il faut nécessairement en rechercher la cause dans l'inégalité de l'extrémité de l'Atmosphère qui donnera une ombre inégale; & l'Atmosphère étant tantôt plus rare & tantôt plus dense, détournera un peu plus ou un peu moins les derniers rayons qui la rencontrent vers cette extrémité inégale, & fera que la figure de l'ombre ne fera point terminée, comme si l'Atmosphère étoit un corps fort différent de l'Ether. Ce sont aussi ces rayons qui traversant cette Atmosphère inégale dans sa superficie, peuvent causer ces différentes couleurs qu'on voit dans le milieu de l'ombre.

Mais il y a encore une autre cause de la confusion de l'ombre de la terre dans les Eclipses, laquelle est par rapport à la partie du Soleil qui fait l'ombre, & c'est ce que nous appelons proprement *pénombre*, & qui devient plus dense à proportion qu'il y a moins de parties du Soleil qui éclairent le corps, comme nous le remarquons dans les ombres de tous les corps sur la terre, & cette pénombre sera toujours la même par rapport à la figure du corps qui fait l'ombre. Mais cette pénombre se mêlant avec l'ombre inégale & confuse de l'extrémité de l'Atmosphère, causera toutes les variétés qu'on y remarque dans les Eclipses.



OBSERVATION

De l'Eclipse de Lune du 10 Decembre 1704.

PAR M^{rs} CASSINI ET MARALDI.1704.
13. Decem-
bre.

Le soir du 10. Decembre le ciel s'étant découvert, on mesura le passage de la Lune par le cercle horaire quatre fois depuis 6 heures & demie jusqu'à 7 heures. Il se trouva de 2 minutès 17 secondes d'heure.

La Lune ce jour là & le jour suivant retourna au méridien en 24 heures 51', qui donnent 360^d; donc 2' 17'' d'heure font 33' 5'' de degrés du parallele de la Lune, qui étant réduit à un grand cercle par la déclinaison de la Lune qui étoit alors 12 degrés 16 minutes, donnent 30' 38'' diametre de la Lune.

A 7 heures 8' par le Micrometre, on mesura le diametre apparent de la Lune de 30' 43'', la Lune étant élevée sur l'horison, de 30 degrés.

On observa la disposition des Taches de la Lune, & l'on trouva que le milieu de Grimaldi & la pointe de *Promontorium acutum* étoient précisément dans le diametre de la Lune qui concouroit avec la ligne de son mouvement composé à l'Occident, & que son centre apparent étoit au bord Occidental de *Sinus medius*, comme dans la Figure insérée dans le Livre de la Connoissance des Temps de cette année 1704. La disposition des autres Taches principales fut déterminée par le passage de ces Taches par le fil perpendiculaire à la trace de Lune, & par le fil incliné de 45 degrés, suivant la méthode pratiquée dans notre grande Figure de la Lune, & dans celle qui a été insérée jusqu'à présent dans la Connoissance des Temps.

On ne put pas observer le passage de la Lune par le méridien la même nuit, parce que le ciel étoit couvert. Il se

découvrit un quart-d'heure après, & pendant le reste de la nuit la Lune tantôt paroissoit, tantôt se cachoit.

Le matin suivant on voyoit la Lune dans un air trouble. Le diametre de la Lune mesuré par le Micrometre fut trouvé de 30' 21'', moindre de 22 secondes que le soir précédent, presque à la même hauteur de la Lune sur l'horison; ce qui doit être attribué au mouvement de la Lune vers son Apogée.

A 6 heures, on voyoit la pénombre sur la Lune du côté de la Tache de Schicardus. On commença de douter du commencement de l'Eclipse à 6^h 3' 30''.

Il fut plus évident à 6^h 4' 40'' par une Lunette de 3 pieds.

Commencement à 6^h 5' 10'' par une Lunette de 8 pieds.

Aux momens plus favorables, on mesura les doigts de l'Eclipse par le Micrometre.

A 6^h 10' Partie de la Lune éclipsee..... 0^{doigts}. 38^{min.}

12 0 L'ombre au bord de *Mare humorum*.

14 30 Un doigt de la Lune éclipsee.

15 0 Tout *Mare humorum* couvert.

18 L'ombre à Grimaldi. On ne voit plus Tycho.

20 40 Deux doigts éclipsees.

26 0 Deux doigts & demi d'éclipsees.

30 Deux doigts 44'.

34 40 Trois doigts & demi.

39 Trois doigts 55'.

39 40 Quatre doigts.

49 20 Quatre doigts 55'.

50 20 Cinq doigts.

56 0 Cinq doigts 23'.

59 20 Cinq doigts 49'.

à 7^h 2' 0" Six doigts.

10 0 Six doigts 6'.

Dans ces quatre dernieres observations on voyoit assez distinctement le terme de l'ombre. La Lune se cacha ensuite & ne parut plus.

R E M A R Q U E S

Sur les nombres Quarrés, Cubiques, Quarrés-Quarrés,
Quarrés-Cubiques, & des autres degrés à l'infini.

PAR M. DE LA HIRE.

PROPOSITION PREMIERE.

Tout nombre Quarré joint à sa racine fait un nombre pair ou binaire.

Le quarré est pair ou impair ; s'il est pair, sa racine est aussi paire, & par conséquent la somme du pair du quarré & du pair de la racine sera aussi un nombre pair ou binaire : mais s'il est impair, sa racine sera impaire ; donc l'impair du quarré joint à l'impair de sa racine fait un nombre pair ou binaire. *Ce qu'il falloit démontrer.*

PROPOSITION II.

Tout nombre Cubique est plus grand que son prochain Cubique inférieur, ou dont la racine est moindre que la sienne d'une unité, d'un nombre senaire & divisible par 6, & de plus d'une unité.

On fait que tout nombre Cubique, dont la racine est plus grande que celle de son prochain inférieur, de l'unité, est plus grand que l'inférieur, de trois fois le quarré de la racine de l'inférieur plus trois fois la racine du même, & de plus d'une unité. Mais par la Proposition I. un nombre quarré plus sa racine est un nombre binaire, dont le triple de cette somme fera un nombre senaire ou divisible par 6 ; car il doit être binaire & ternaire, & il n'y a point de nombre plus petit que 6 qui soit l'un & l'autre, & de plus il y a l'unité.

Par exemple, le Cube 125 a pour sa racine le nombre 5, & le Cube immédiatement inférieur 64 a le nombre 4 pour sa racine : la différence de ces deux Cubes doit être

trois fois le carré de 4 qui est 16, plus trois fois sa racine 4, ce qui fera 60, plus l'unité, ce qui est 61 : mais 60 est un nombre divisible par 6. Donc 61 est divisible par 6, & il reste l'unité.

PROPOSITION III.

Maintenant si au lieu de prendre deux Cubes dont les racines soient seulement différentes d'une unité, qu'on en prenne deux dont les racines diffèrent de plusieurs unités, comme les Cubes de 4 & de 7.

Je dis que la différence des deux Cubes sera encore divisible par 6, & qu'il restera 3 unités après la division, c'est-à-dire autant d'unités qu'il y en a dans la différence des racines.

Car par la Proposition II. la différence du Cube de 4 au Cube de 5 son prochain supérieur, sera divisible par 6, & il restera une unité. De même la différence du Cube de 5 au Cube de 6 son prochain supérieur, sera aussi divisible par 6, & il restera une unité; & enfin la différence du Cube de 6 au Cube de 7 sera divisible par 6, & il restera une unité; donc les trois différences sont divisibles par 6, & il restera trois unités qui sont les trois restes.

Comme le Cube de 4 est 64, le Cube de 7 est 343 : la différence des deux Cubes est 279, qui est divisible par 6, & il reste 3.

Ce sera la même chose pour tous les autres Cubes:

PROPOSITION IV.

On voit par la Proposition précédente, que si les racines des Cubes sont différentes entr'elles de 6 unités, alors leur différence sera divisible par 6 exactement.

Car il devroit y avoir 6 unités restantes, qui font le nombre diviseur 6.

PROPOSITION V.

Tout nombre Cubique étant donc proposé, si l'on en ôte un nombre Cubique tel qu'on voudra, & que le reste soit divisé par 6, les unités restantes étant jointes à la racine du Cube ôté, donneront la racine du Cube proposé, si elle est moindre que la somme de 6 plus la racine du Cube ôté, ou

360 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
bien en y ajoutant 6 ou un multiple de 6, si elle est plus grande.

Cette Proposition est évidente par les précédentes.

PROPOSITION VI.

Il s'en suit donc de la Proposition précédente, que si d'un nombre Cubique on en ôte o considéré ici comme premier Cube ôté, le reste qui sera le nombre Cubique proposé étant divisé par 6, il restera après la division un nombre qui sera la racine du Cube proposé, si la racine de ce Cube est moindre que 6; mais si elle est plus grande il faudra ajouter 6 ou un multiple de 6 à ce reste.

Cette Proposition ne differe point de la précédente: car o qui a aussi o pour sa racine, est pris pour le Cube ôté.

PROPOSITION VII.

On peut par la même méthode trouver la même chose pour tout autre nombre que pour le Cubique. Comme pour le Quarré-quarré on trouvera qu'il ne faut le diviser que par 2: pour le quarré Cubique qu'il faut le diviser par 10: pour le Quarré-quarré Cubique qu'il faut le diviser par 14, & ainsi des autres nombres des puissances supérieures.

On aura toujours dans quelque puissance que ce soit le moindre diviseur du nombre ajouté à cette puissance pour faire la supérieure, laquelle ait sa racine plus grande d'une unité par la regle suivante.

R E G L E.

Toutes les puissances proposées dont l'exposant est pair, auront toutes pour leur diviseur le binaire ou le nombre 2, comme le Quarré, le Quarré-quarré, le Cube-cube, &c. Mais celles dont l'exposant est pair de la progression double, comme 2, 4, 8, 16, 32, &c. & au-dessus de 4, auront pour diviseur le nombre 4.

Mais toutes les puissances dont l'exposant est nombre premier au-dessus de 2, auront toujours pour leur diviseur le double de l'exposant de la puissance: comme pour le Cube qui a 3 pour exposant de sa puissance, on aura 6 pour diviseur: pour le Quarré-cube qui a 5 pour son exposant,

posant, on aura 10 pour son diviseur: pour le Quarré-quarré-cube qui a 7 pour son exposant, on aura 14 pour son diviseur, & ainsi des autres.

Toutes les autres puissances dont l'exposant est impair, n'auront que 2 pour diviseur, à moins qu'elles ne soient nombres quarrés; car alors elles se réduisent au nombre de leur racine, comme la 25^e puissance a le même diviseur que la 5^e, la 9^e que la 3^e, &c.

L E M M E I.

Toutes les puissances d'une même racine numérique multipliées par différens nombres, contiennent chacune autant de fois le nombre multipliant, qu'il y a d'unités dans la puissance.

Cela est évident.

L E M M E II.

Le plus grand diviseur commun de différentes puissances d'une même racine multipliées par différens nombres, sera le plus grand diviseur commun des nombres multipliers.

Car puisque la commune mesure sera dans les multipliers par le Lemme précédent, la commune mesure se trouvera aussi dans les produits des puissances par les nombres multipliers, & elle les mesurera exactement.

L E M M E III.

Si l'on joint ensemble deux puissances différentes de la même racine, lesquelles soient multipliées par un même nombre; le nombre sera aussi autant de fois dans la somme des puissances qu'il y aura d'unités dans cette somme.

Ce qui est évident.

D E M O N S T R A T I O N.

Soit proposé la puissance de 6 dimensions ou dont l'exposant est 6; & que la racine soit appelée r , & la racine de la même puissance plus l'unité soit $r + 1$, la différence de ses deux puissances sera

$$6r^5 + 15r^4 + 20r^3 + 15rr + 6r + 1.$$

Ayant retranché l'unité de cette différence, on trouvera les termes $6r^5$, $6r$, & $15r^4$, $15rr$, qui sont affectés

362 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
 des mêmes nombres 6 & 15, il restera encore 20 r : il faut donc par les Lemmes précédens chercher le plus grand diviseur commun des trois nombres 6, 15, 20, mais on trouve qu'il n'y a que l'unité. Donc si la racine est paire, l'unité est le commun diviseur qui fera un binaire.

Mais si la racine est impaire, la somme des deux impairs $6r^1$ & $6r$ fera un nombre pair, & de même la somme des deux autres $15r^4$ & $15rr$; mais les r^3 étant un nombre impair, si on divise en 2 les $20r^3$, on aura $10r^3$ qui seront aussi un pair : mais les trois nombres 6, 15, 10 n'ont point non plus de commune mesure que l'unité, & par conséquent cette unité est paire, & le nombre diviseur cherché ne peut être que le nombre 2 ou le binaire.

Si l'on propose une puissance de 7 dimensions, on aura pour la différence

$$7r^6 + 21r^5 + 35r^4 + 35r^3 + 21rr + 7r + 1.$$

Et en ayant ôté l'unité, on trouvera que la commune mesure des nombres qui multiplient les puissances de la racine, fera le nombre 7; & par les raisons rapportées ci-devant, soit que la racine soit paire ou impaire, le nombre fera toujours pair, & par conséquent il faudra doubler 7 qui fera 14 pour le diviseur cherché.

Voici un exemple de la 17^e puissance, dans laquelle il ne faut avoir égard qu'aux nombres qui multiplient les différens degrés de r, & qui seront 17, 136, 680, 2380, 6108, 12376, 19448, 24310, & les autres qui sont les mêmes répétés en descendant jusqu'à l'unité, & tous ces nombres sont divisibles par 17, dont le double est 34, qui sera le diviseur de cette puissance, suivant ce qui a été expliqué ci-devant.

Il est toujours très-facile de trouver tous ces nombres multipliers dans l'ordre de toutes les puissances de suite : car ils seront chacun égaux à la somme du supérieur immédiatement, & de celui qui le précède.

MEMOIRE SUR LES COMBINAISONS.

PAR LE R. P. SEBASTIEN TRUCHET.

DAns le dernier voyage que j'ai fait au Canal d'Orleans par ordre de son Altesse Royale, je trouvai dans un Château nommé la Motte S. Lyé à 4 lieues en-deçà d'Orleans, plusieurs Carreaux de fayence quarrés & mipartis de deux couleurs par une ligne diagonale, qui étoient destinés à carreler une Chapelle & plusieurs autres appartemens. Pour pouvoir former des desseins & des figures agréables par l'arrangement de ces carreaux, j'examinai d'abord en combien de manieres deux de ces Carreaux pourroient se joindre ensemble, en les disposant toujours en échiquier.

Je trouvai qu'il y avoit 64 manieres différentes de ranger deux de ces carreaux, qui font 64 combinaisons, ce qui paroît surprenant : car deux lettres ou deux chiffres ne se combinent ordinairement que deux fois, parce qu'ils ne changent de situation que pour être mis l'un après l'autre dans une ligne, la base demeurant toujours la même : mais dans l'arrangement de deux Carreaux, l'un des deux peut prendre quatre situations différentes, dans chacune desquelles l'autre Carreau peut changer 16 fois, ce qui donne les 64 combinaisons que nous avons figurées & cottées dans la premiere Table suivante, dont l'explication est à côté.

*Voyez la 1.^e
Table.*

Nous avons trouvé ensuite qu'il y avoit des figures semblables dans ces 64 combinaisons, & que l'on pouvoit les réduire à 32 figures différentes, parce que chaque figure est répétée deux fois dans la même situation, & que les deux figures ne sont différentes l'une de l'autre que par la transposition du Carreau le plus ombré, comme on le peut voir dans la seconde Table, où elles sont toutes figurées deux à deux, & cottées des mêmes chiffres qu'elles ont dans la premiere Table.

*Voyez la 2.^e
Planche.*

Z z ij

Nous avons encore trouvé que ces 32 figures différentes se peuvent réduire à 10 semblables, si l'on n'a pas d'égard à leur situation & au même point de vûe, & que les figures semblables ne different que par leur position différente sur leurs quatre côtés ; comme on le peut voir dans la troisième Table de la seconde Planche, où elles sont figurées & cottées de suite des mêmes chiffres qu'elles ont dans la première & seconde Table.

2. Planche.

Après avoir examiné les combinaisons de deux Carreaux, on pourroit mettre ici les combinaisons que l'on pourroit faire avec 3, 4, 5, &c. & plusieurs Carreaux : mais comme ce détail sera long, & que nous ne sommes pas encore content de ce que nous avons fait là-dessus, nous remettrons cet article à un autre Mémoire.

Nous avons consulté les Livres de l'Architecture civile, & ceux qui traitent des combinaisons, pour nous assurer si quelqu'un avoit déjà fait les mêmes remarques que nous : mais nous n'y avons rien trouvé qui en approchât.

Nous avons cherché ensuite à former des desseins & des compartimens avec ces figures jointes ensemble, & toujours en échiquier ; & nous en avons trouvé une trop grande quantité, pour les rapporter tous : nous en avons choisi seulement un cent que nous avons mis au net, afin que chacun puisse juger par ses yeux de la vérité de ce que nous avons dit, & de la fécondité de ces combinaisons dont l'origine est pourtant simple.

On n'a gravé dans ces Mémoires que 30 de ces desseins, pour ne point trop grossir le volume. L'explication de chaque dessein est à côté, avec la maniere de les construire par la première Table, qui sert comme d'un Dictionnaire pour trouver les combinaisons dont on s'est servi pour les former. Ils sont tous construits par l'arrangement de deux Carreaux pris ensemble, & placés dans l'ordre que nous avons marqué à côté de chaque Planche.



TABLE I.

Mem. de l'Acad. 1704. p. 353.

ans de deux Carreaux mipartis de deux couleurs

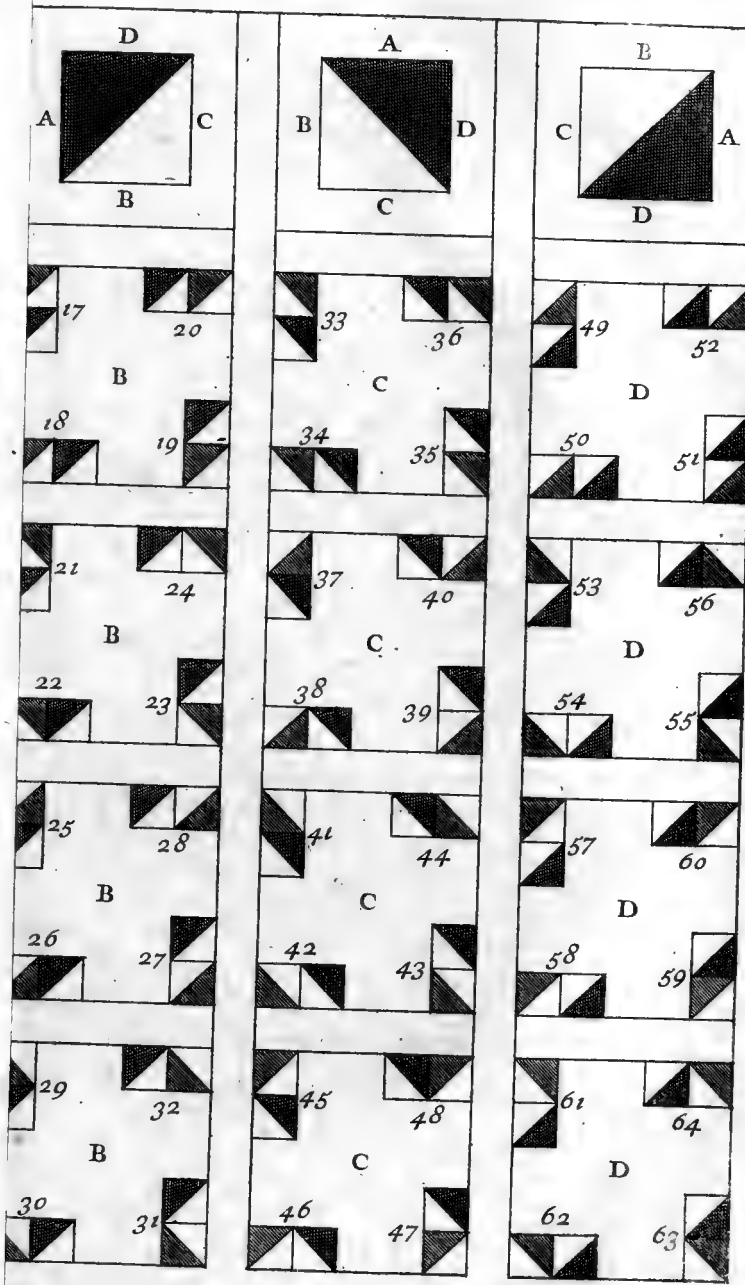


TABLE. I.

Des 64. combinaisons de deux Carreaux nupartis de deux couleurs.

C D A B	D A B C	A B C D	B C D A
1 4 A	17 20 B	33 36 C	49 52 D
2 3 A	18 19 B	34 35 C	50 51 D
5 8 A	21 24 B	37 40 C	53 56 D
6 7 A	22 23 B	38 39 C	54 55 D
9 12 A	25 28 B	41 44 C	57 60 D
10 11 A	26 27 B	42 43 C	58 59 D
13 16 A	29 32 B	45 48 C	61 64 D
14 15 A	30 31 B	46 47 C	62 63 D

EXPLICATION DE LA I. TABLE.

*Des 64 combinaisons de deux Carreaux mipartis
de deux couleurs.*

ON a figuré dans cette Planche les 64 combinaisons que l'on peut faire avec deux Carreaux mipartis en couleur par leur diagonale.

Cette Planche est divisée en 4 colonnes de haut en bas : chaque colonne est partagée en cinq quarrés. Dans le premier quarré de chaque colonne on a figuré en grand un seul Carreau, qui est différemment situé dans chacune, comme on le peut voir par les 4 lettres *ABCD*, qui marquent toujours les mêmes côtés de chaque Carreau ; savoir, *AD* les deux côtés colorés, & *BC* les deux côtés blancs, enforte que dans tous les quarrés de la premiere colonne le Carreau le plus ombré est toujours comme appuyé horizontalement sur le côté *A*.

Dans la seconde colonne il est sur le côté *B*, sur le côté *C* dans la troisieme, & sur le côté *D* dans la quatrieme colonne.

Dans les quatre quarrés qui achevent la premiere colonne, & qui ont la lettre *A* au centre, on a figuré les 16 combinaisons qui se peuvent faire avec 2 Carreaux, l'un desquels, qui est le plus ombré, demeure toujours horizontal sur le côté *A* : on l'a coloré d'une teinte plus forte pour le distinguer de celui qui change de situation.

On a suivi le même ordre dans les trois autres colonnes : les quarrés de chacune sont marqués d'une même lettre, comme de *B* dans la seconde, de *C* dans la troisieme, & de *D* dans la quatrieme colonne.

Dans chaque colonne on a séparé les combinaisons de quatre en quatre, pour éviter la confusion.

EXPLICATION DE LA II. TABLE.

De la réduction des 64 combinaisons à 32 figures.

Cette Table a été faite pour faire voir la réduction des 64 combinaisons de la premiere Table à 32 figures, qui paroissent semblables & dans la même situation.

Elle est partagée d'abord en deux grandes colonnes de 16 lignes chacune.

Chaque colonne est subdivisée en 4 autres, dont la premiere marque le nombre des réductions : la seconde marque les mêmes chiffres que les figures semblables ont dans la premiere Table : la troisieme & quatrieme colonne marquent les deux mêmes figures, qui ne sont différentes que par la transposition du Carreau le plus ombré.

La seconde grande colonne n'est différente de la premiere, que parce que l'on a mis à la derniere colonne les nombres qui marquent les réductions.

EXPLICATION DE LA III. TABLE.

Cette troisieme Table montre que l'on peut encore réduire les 32 figures de la seconde Table à 10 figures qui sont semblables, mais qui sont situées de 4 manieres différentes, comme on le peut voir dans chaque ligne qui contient d'abord le chiffre de la réduction, ensuite les chiffres des combinaisons semblables, & enfin les figures de ces mêmes combinaisons situées & contournées comme elles le sont dans la premiere Table.



TABLE II. Mem. de l'Acad. 1704. p. 366. Pl. 13
binaisons a 32. figures qui paroissent semblables.

^e 1		3		la 21. ^e et la 47. ^{me}	21		47		17
^e 2		4		la 22. ^e et la 48. ^{me}	22		48		18
^e 5		31		la 23. ^e et la 45. ^{me}	23		45		19
^{1e} 6		32		la 24. ^e et la 46. ^{me}	24		46		20
^{2e} 7		29		la 25. ^e et la 59. ^{me}	25		59		21
^{2e} 8		30		la 26. ^e et la 60. ^{me}	26		60		22
^{2e} 9		43		la 27. ^e et la 57. ^{me}	27		57		23
^{2e} 10		44		la 28. ^e et la 58. ^{me}	28		58		24
^{2e} 11		41		la 33. ^e et la 35. ^{me}	33		35		25
^{2e} 12		42		la 34. ^e et la 36. ^{me}	34		36		26
^{2e} 13		55		la 37. ^e et la 63. ^{me}	37		63		27
^{2e} 14		56		la 38. ^e et la 64. ^{me}	38		64		28
^{2e} 15		53		la 39. ^e et la 61. ^{me}	39		61		29
^{2e} 16		54		la 40. ^e et la 62. ^{me}	40		62		30
^{2e} 17		19		la 49. ^e et la 51. ^{me}	49		51		31
^{2e} 18		20		la 50. ^e et la 52. ^{me}	50		52		32

TABLE III.
fig. a 10 seulement, mais differamment situées.

3. 35	50. 52	1		3		18		20		33		35		50		52	
4. 36	49. 51	2		4		17		19		34		36		49		51	
9. 61	24. 46	5		31		16		54		39		61		24		46	
0. 62	21. 47	6		32		13		55		40		62		21		47	
7. 63	22. 48	7		29		14		56		37		63		22		48	
8. 64	23. 45	8		30		15		53		38		64		23		45	
		9		43		28		58									
		10		44		25		59									
		11		41		26		60									
		12		42		27		57									

TABLE II. Mém. de l'Acad. 1702. p. 366 Pl. 13
 Reduction des 64. combinaisons a 32. figures qui paroissent semblables.

1	la 1. ^{re} et la 3. ^{me}		la 21. ^e et la 47. ^{me}		17
2	la 2. ^e et la 4. ^{me}		la 22. ^e et la 48. ^{me}		18
3	la 5. ^e et la 31. ^{me}		la 23. ^e et la 45. ^{me}		19
4	la 6. ^e et la 32. ^{me}		la 24. ^e et la 46. ^{me}		20
5	la 7. ^e et la 29. ^{me}		la 25. ^e et la 59. ^{me}		21
6	la 8. ^e et la 30. ^{me}		la 26. ^e et la 60. ^{me}		22
7	la 9. ^e et la 43. ^{me}		la 27. ^e et la 57. ^{me}		23
8	la 10. ^e et la 44. ^{me}		la 28. ^e et la 58. ^{me}		24
9	la 11. ^e et la 41. ^{me}		la 33. ^e et la 35. ^{me}		25
10	la 12. ^e et la 42. ^{me}		la 34. ^e et la 36. ^{me}		26
11	la 13. ^e et la 55. ^{me}		la 37. ^e et la 63. ^{me}		27
12	la 14. ^e et la 56. ^{me}		la 38. ^e et la 64. ^{me}		28
13	la 15. ^e et la 53. ^{me}		la 39. ^e et la 61. ^{me}		29
14	la 16. ^e et la 54. ^{me}		la 40. ^e et la 62. ^{me}		30
15	la 17. ^e et la 19. ^{me}		la 49. ^e et la 51. ^{me}		31
16	la 18. ^e et la 20. ^{me}		la 50. ^e et la 52. ^{me}		32

TABLE III.
 Reduction des 32. fig. a 10 seulement, mais differamment situées

1	1 3 18 20 33 35 50. 52				
2	2 4 17 19 34 36 49. 51				
3	5 31 16. 54 30 61 24. 46				
4	6 32 13 55 40 62 21. 47				
5	7 29 14 56 37 63 22. 48				
6	8 30 15 53 38 64 23. 45				
7	9 43 28 58				
8	10 44 25 59				
9	11 41 26. 60				
10	12. 42 27. 57				

CONSTRUCTION DES SIX DESSEINS
de la premiere Planche.

A V I S G E N E R A L.

Pour construire tous les Dessesins qu'on a figurés dans cette Planche & dans les suivantes, il faut avoir recours à la premiere Table des 64 combinaisons, dans laquelle toutes les combinaisons dont on s'est servi sont cottées par des chiffres, & prendre celles qu'on a marquées pour former chaque rang des Dessesins, & les mettre de suite de gauche à droit comme on met les lettres dans chaque ligne d'écriture ordinaire.

LE premier Dessen marqué *A*

Est construit avec la seconde combinaison répétée de suite, & recommencée à chaque rang.

Le second Dessen marqué *B*

Est formé en faisant une premiere rangée entière avec la seconde combinaison, puis une seconde rangée avec la 34^e. Ces deux rangées répétées font tout le Dessen.

Le troisieme Dessen marqué *C*

Se fera en formant alternativement une 1^{re} rangée avec la 12^e combinaison, & une seconde avec la 10^e

Le quatrieme Dessen marqué *D*

Se forme alternativement d'une 1^{re} rangée de la 6^e combinaison répétée de suite, & d'une seconde rangée de la 40^e répétée, de même.

Le cinquieme Dessen marqué *E*

Se construit ainsi. On fait un 1^r rang avec les 2 combinaisons 24 & 14 mises alternativement; un second rang avec la 22 & la 16^e aussi alternées; un 3^e rang avec les 2 combinaisons du premier, mais en mettant la 14^e avant la 24; & enfin le 4^e rang, comme le second, en renversant l'ordre, & en mettant la 16^e avant la 22^e.

Le sixieme Dessen marqué *F*

Se fait en mettant alternativement au 1^r rang la 24^e combinaison répétée de suite, & au second rang la 16^e répétée de même.

CONSTRUCTION DES SIX DESSEINS
de la seconde Planche.

LE premier Dessein marqué *G*

Se fait avec la 42^{me} combinaison répétée de fuite dans le premier rang, & avec la 10^{me} répétée de même dans le second : Le 3^{me} rang se fait comme le second ; le 4^{me} & le 5^{me} rang, comme le premier.

Le second Dessein marqué *H*

Est fait avec les trois combinaisons 28, 26 & 50 mises de fuite dans le premier rang ; puis avec les 26, 50 & 28 mises de même dans le second ; & enfin avec les 50, 28 & 26 de fuite dans le troisieme rang.

Le troisieme Dessein marqué *I*

Se construit avec les 2 combinaisons 10 & 12 mises de fuite dans le premier rang, & avec les 12 & 10 mises aussi de fuite dans le second & troisieme rang.

Le quatrieme Dessein marqué *L*

Se forme avec la 14^{me} combinaison répétée de fuite dans le premier rang, & avec les 2 combinaisons 40^e & 8^e mises de fuite dans le second ; puis avec les 38^e & 6^e mises aussi de fuite dans le troisieme ; & enfin avec la 22^e répétée de fuite dans le quatrieme rang.

Le cinquieme Dessein marqué *M*

Est fait avec la combinaison 24^e répétée de fuite dans le premier rang, & avec la 22^e répétée de même dans le second.

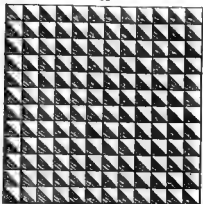
Le sixieme Dessein marqué *N*

Se fait avec les combinaisons 6^e & 38^e mises ensemble & de fuite dans le premier rang, avec la 40^e & la 8^e mises de même dans le second, avec la 38^e & la 6^e rangées de même dans le troisieme, & enfin avec la 8^e & la 40^e dans le quatrieme rang.

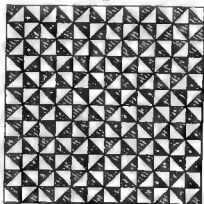
CONSTRUCTION

Première planche des desseins.

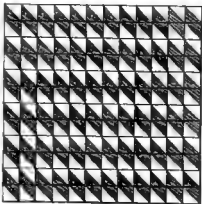
A



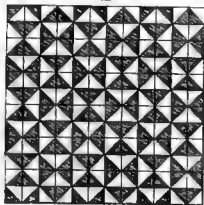
D



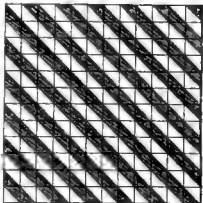
B



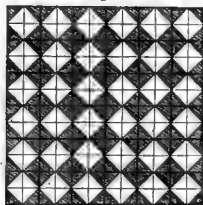
E



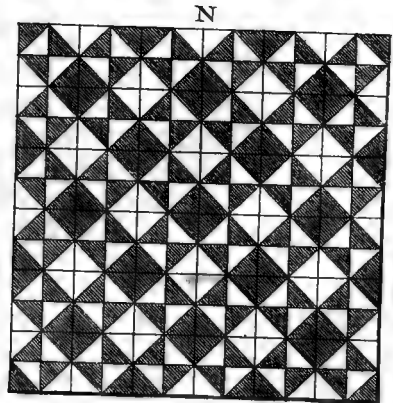
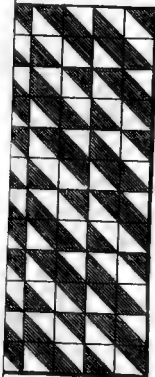
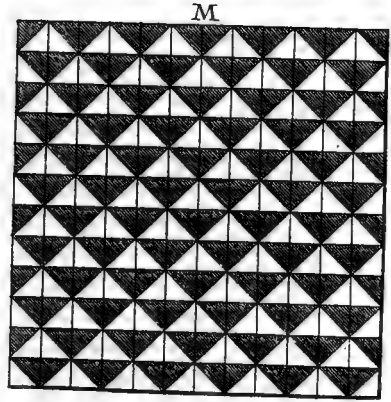
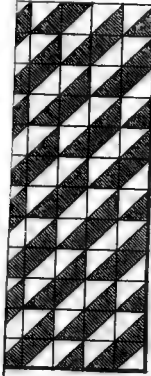
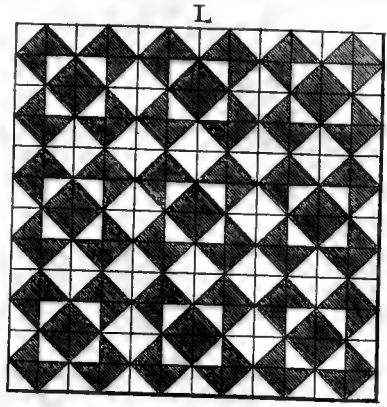
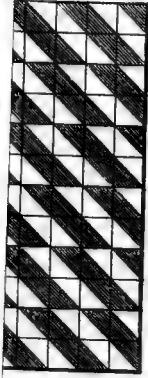
C



F

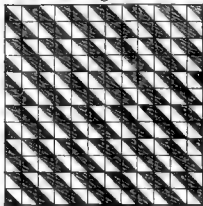


nde Planche des desseins

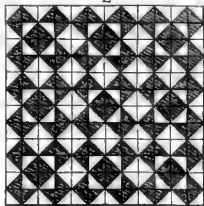


Seconde Planche des Dessains

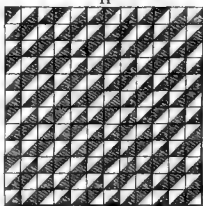
G



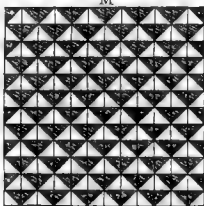
L



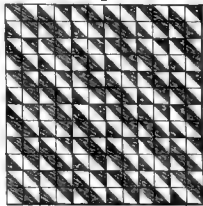
H



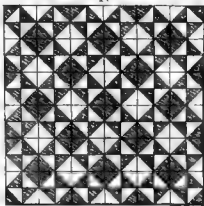
M



I



N



CONSTRUCTION DES SIX DESSEINS
de la troisieme Planche.

LE premier Dessein marqué *O* se fait avec les deux combinaisons 14^e & 24^e mises ensemble & répétées de suite dans le premier rang, & avec les mêmes dans un ordre renversé dans le second, c'est-à-dire, en commençant par la 24^e.

Le second Dessein marqué *P* est fait avec la 24^e combinaison répétée de suite dans le premier rang, & avec la 14^e répétée de même dans le second.

Le troisieme Dessein marqué *Q* se forme avec la 50^e & la 2^e mises ensemble & répétées de suite dans le premier rang, & avec la 18^e & la 34^e mises de même dans le second.

Le quatrieme Dessein marqué *R* se fait avec la 14^e combinaison répétée de suite en chaque rang.

Le cinquieme Dessein marqué *S* se fait avec la 14^e & la 24^e mises ensemble & répétées de suite dans chaque rang.

Le sixieme Dessein marqué *T* se fait avec la 28^e & la 12^e mises ensemble & répétées de suite : tous les rangs se font de la même maniere.



370 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE
CONSTRUCTION DES SIX DESSEINS
de la quatrieme Planche.

LE premier Dessein marqué *V* est composé avec les combinaisons 10, 14, 10 & 6^e mises & répétées de suite au 1^r rang, puis avec les 16, 12, 8 & 12^e répétées de même au second, ensuite avec les 14, 10, 6, 10^e, rangées de même au 3^e; avec les 12, 8, 12 & 16^e dans le 4^e; avec les 10, 6, 10 & 14^e dans le 5^e; avec les 8, 12, 16 & 8^e dans le 6^e; avec les 6, 10, 14 & 10^e dans le 7^e; & enfin avec les 12, 16, 12 & 8^e pour le 8^e rang.

Le second Dessein marqué *U* se forme en faisant un 1^r rang avec les deux combinaisons 28 & 12^e mises de suite, un second avec la 14^e & la 22^e aussi de suite, un 3^e avec la 12^e & 28^e, & un 4^e enfin avec la 22^e & la 14^e.

Le troisieme Dessein marqué *X* se fait avec les combinaisons 10, 14 & 12^e répétées de suite dans le 1^r rang; avec les 22, 34 & 2^e de suite dans le second; avec les 14, 12 & 10^e dans le 3^e; avec les 34, 2 & 22^e dans le 4^e; avec les 12, 10 & 14^e pour le 5^e; & enfin avec les 2, 22 & 34^e pour le 6^e rang.

Le quatrieme Dessein marqué *Y* est fait avec les 2 combinaisons 28 & 12^e mises & répétées de suite dans le 1^r rang; avec les 26 & 10^e de même dans le second; avec les 10 & 26^e dans le 3^e; & enfin avec les 12 & 28^e mises & répétées de même dans le 4^e rang.

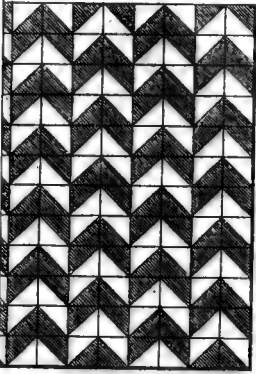
Le cinquieme Dessein marqué *Z* se fait avec les 2 combinaisons 24 & 16^e mises ensemble & répétées de suite dans le 1^r rang, puis avec les 26 & 10^e mises de même dans le second rang.

Le sixieme Dessein marqué *W* se forme avec les 2 combinaisons 28 & 10^e mises ensemble & répétées ainsi dans le 1^r rang; avec les 26 & 12^e dans le second; avec les 12 & 26^e dans le 3^e; & enfin avec les 10 & 28^e rangées de même dans le 4^e rang.

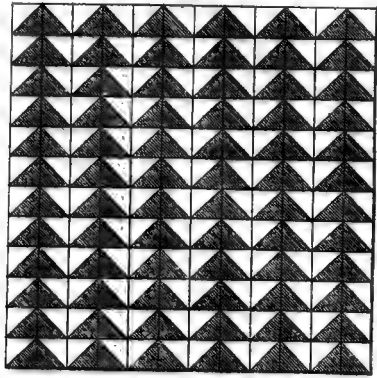
Troisième Planche

Mem. de l'Acad. 1704. p. 369. Pl. 16

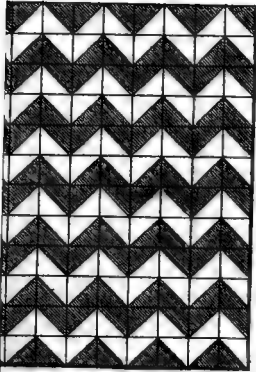
O



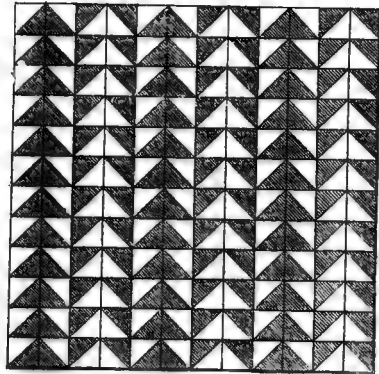
R



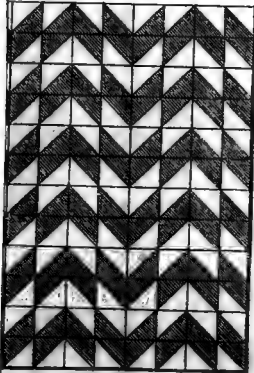
P



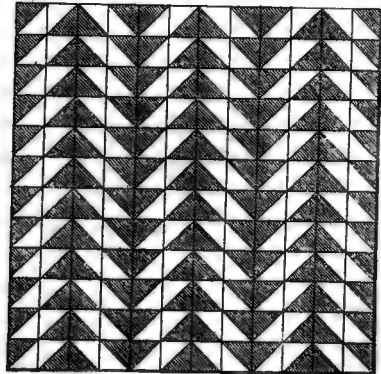
S



Q

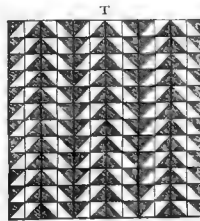
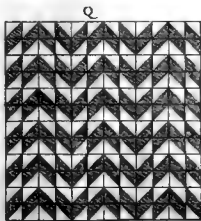
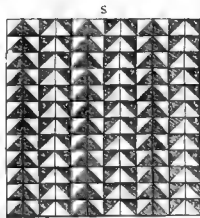
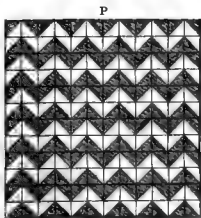
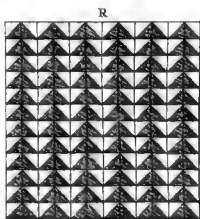
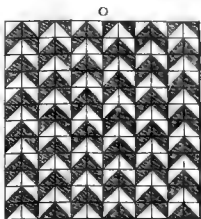


T



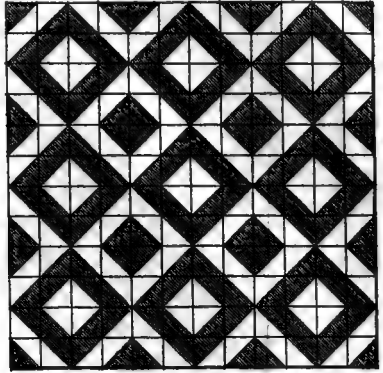
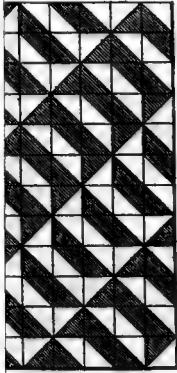
Troisième Planche

Mém. de L'Acad. 1768. p. 309. Pl. 16

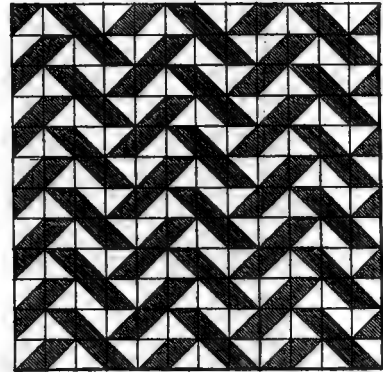
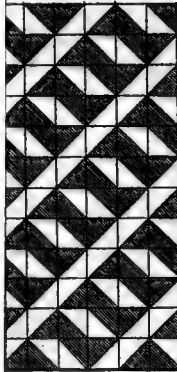


Quatrieme Planche

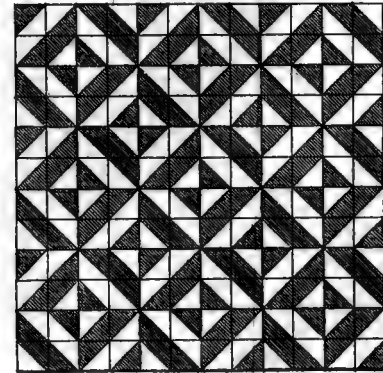
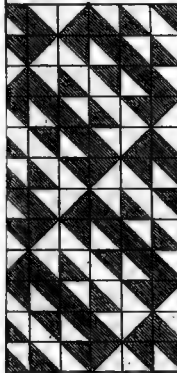
Y



Z



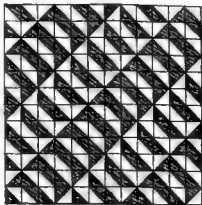
8654831



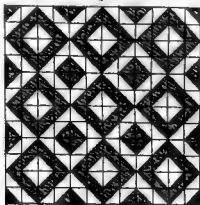
Quatrieme Planche

Mem de L'Acad. 1704. p. 370. Pl. 17

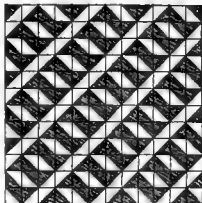
V



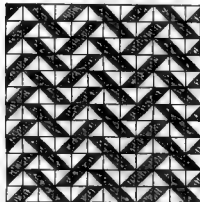
Y



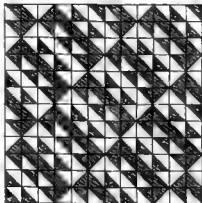
U



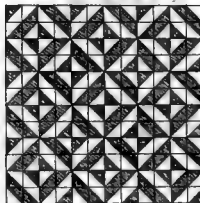
Z



X



&c



*CONSTRUCTION DES DEUX DESSELNS
de la cinquieme Planche.*

LE premier Dessein marqué 1 est construit de cette maniere. On forme le premier rang avec la 12^e combinaison répétée deux fois de suite & avec la 28 répétée de même, & ainsi en continuant alternativement pour le 1^r rang : le second se fait avec les deux combinaisons 28 & 12 répétées chacune deux fois de suite en continuant alternativement : le 3^e se fait avec la 26 & la 10^e répétées chacune deux fois de suite : le 4^e se fait comme le second rang : le 5^e est formé comme le 3^e : le sixieme avec la 10 & 26^e répétées deux fois chacune, comme nous avons dit : le 7^e avec la 12 & la 28 répétées chacune deux fois de suite : le 8^e se forme de la même maniere que le 6^e rang,

Le second Dessein marqué 2 se forme en mettant au premier rang une fois la 14^e combinaison, & une fois la 22^e, puis 2 fois de suite la 14^e; & ainsi de suite : le second rang se fait avec les 3 combinaisons 12, 16 & 28 mises de suite & répétées dans le même ordre : le 3^e rang se fait avec les 3 combinaisons 10, 24 & 26^e mises & répétées de même : le 4^e rang avec les trois combinaisons 26, 16 & 10^e de suite & répétées comme aux autres rangs : le 5^e avec les 3 combinaisons 28, 24, & 12^e mises de même : le 6^e rang se fait en mettant d'abord la 22 & la 14^e chacune une fois, puis deux fois de suite la 22^e, & en continuant de la même maniere on acheve tout le Dessein.



CONSTRUCTION DES DEUX DESSEINS
de la sixieme Planche.

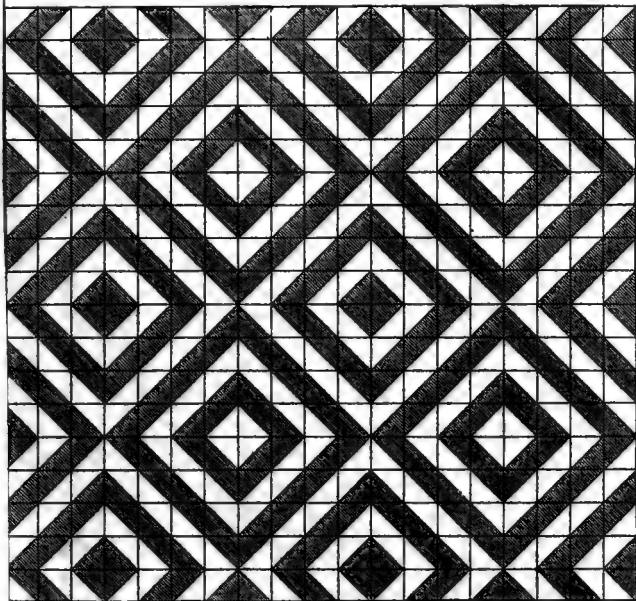
LE premier Dessen marqué 3 se forme en mettant dans le premier rang la 24^c combinaison deux fois de suite, puis la 12^c, la 14^c & la 28^c chacune une fois de suite : le second rang avec la 14^c mise deux fois; puis la 10^c, la 22^c & la 26^c chacune une fois : le 3^c rang est fait en mettant deux fois la 24^c, puis la 12, la 16 & la 28^c une fois chacune : le 4^c rang en mettant la 8, la 40, la 28, la 24 & la 12^c chacune une fois : le 5^c se forme avec la 6, la 38, la 12, la 16 & la 28^c mises de suite chacune une fois : le 6^c se fait avec la 16^c mise deux fois, la 28, la 24 & la 12^c chacune une fois : le 7^c rang avec la 22^c répétée deux fois, puis la 26, la 14 & la 10^c chacune une fois : le 8^c se fait avec la 16^c mise deux fois, puis la 28, la 22 & la 12^c chacune une fois : le 9^c en mettant la 22^c deux fois, & la 14^c 3 fois de suite : enfin le 10^c rang se forme avec la 14^c mise deux fois, & avec la 22^c mise trois fois de suite.

Le second Dessen marqué 4 se range ainsi. Mettez une fois la 28^c combinaison, puis 2 fois la 12^c, une fois la 22^c, & enfin une fois la 28^c, & ainsi de suite pour le premier rang : le second se fait avec la 26^c une fois, la 10^c deux fois, la 22^c & la 26^c chacune une fois : le 3^c rang, avec la 18, la 34, la 12, la 16 & la 28^c chacune une fois : le 4^c, avec la 28, la 12, la 10, la 22 & la 26^c chacune une fois : le 5^c, avec la 12, la 28, la 26, la 14 & la 10^c une fois chacune : le 6^c, avec la 2, la 50, la 28, la 24 & la 12^c mises une fois chacune : le 7^c, avec la 10^c une fois, la 26^c deux fois, la 14 & la 10^c une fois chacune : le 8^c, avec la 12^c une fois, la 28^c deux fois, la 14 & la 12^c une fois chacune : le 9^c, avec la 10, la 26, la 50, la 24 & la 2^c une fois chacune : enfin le 10^c rang se fait avec les 26, 10, 34, 16 & 18^c combinaisons mises chacune une fois.

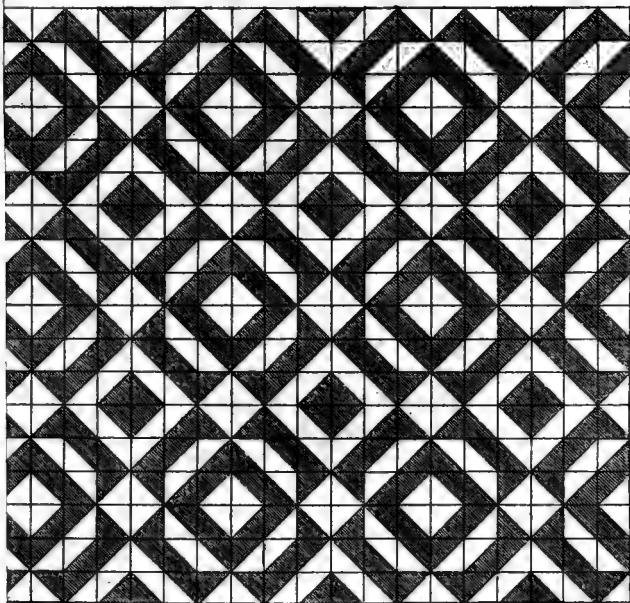
Cinquième Planche

Mem. de l'Acad. 1704. p. 371. Pl. 18.

1



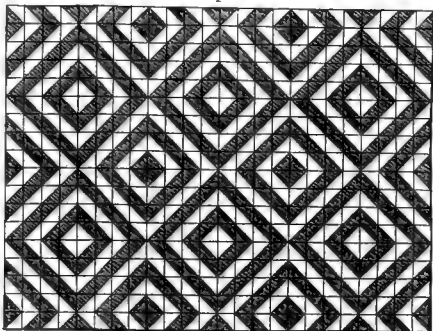
2



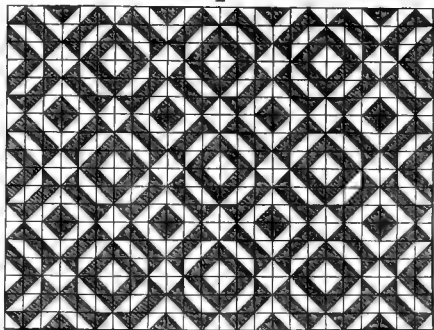
Cinquieme Planche

Mem. de L'Acad. des S. p. 376 Pl. 18

1



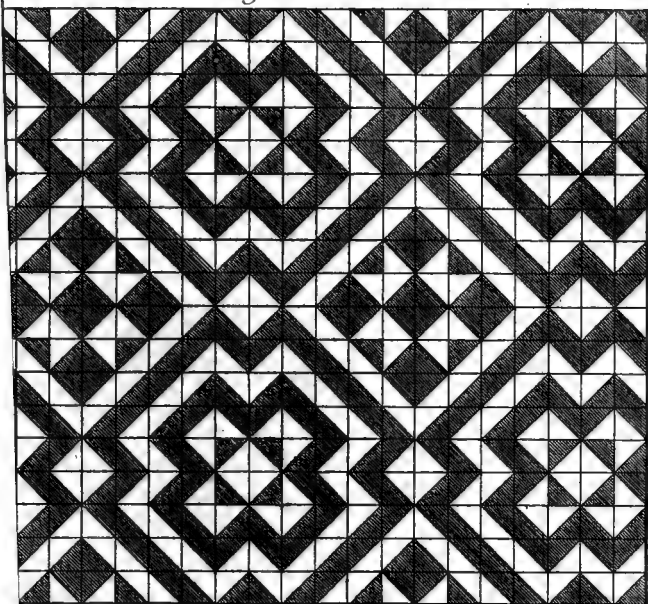
2



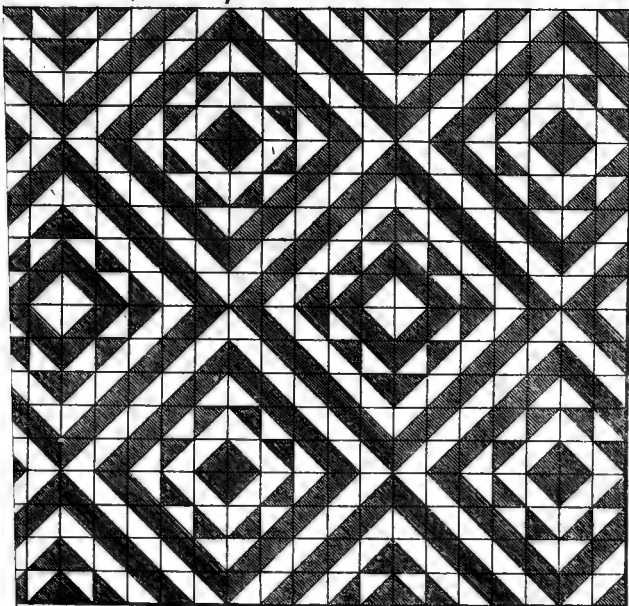
Sixième Planche

Mém. de l'Acad. 1704. p. 372. P.

3



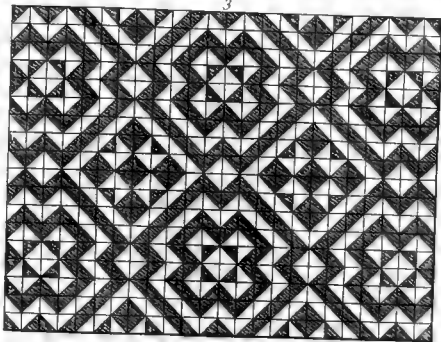
4



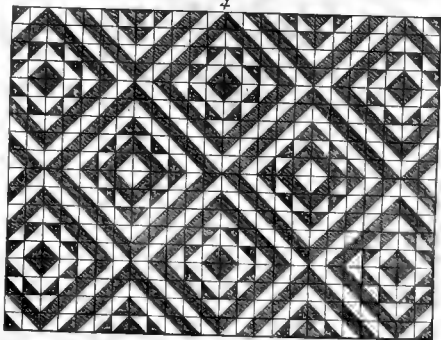
Sixieme Planche

Memoire de L'Acad. des Sciences p. 372 Pl. 19

3



4



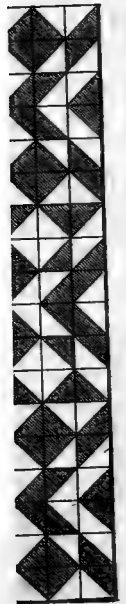
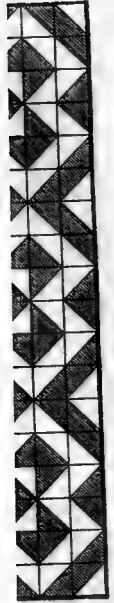
Lud. Simonsen

CONSTRUCTION DES DEUX DESSEINS
de la septieme Planche.

LE premier Dessen marqué 5 est formé avec la 26^e combinaison, la 22 & la 10^e mises de suite chacune une fois dans le premier rang; avec la 28, la 16 & la 12^e mises une fois chacune dans le second; avec la 12, la 14 & la 28^e mises de même dans le 3^e; ensuite avec la 28, la 22 & la 12^e dans le 4^e; avec la 12, la 24 & la 28^e de suite dans le 5^e; & enfin avec la 10, la 14 & la 26^e aussi de suite & chacune une fois dans le 6^e rang.

Le second Dessen marqué 6 se fait avec le 16 & la 8^e chacune une fois, puis la 22^e deux fois, ensuite la 40^e & la 16^e chacune une fois pour le premier rang: le second se forme avec la 34^e, la 6^e, la 50^e, la 2^e, la 38 & la 18^e chacune une fois: le 3^e se fait avec la 12, la 8, la 26, la 10, la 40 & la 28^e mises de suite une fois chacune: le 4^e, par la 28, la 6, la 10, la 26, la 38 & la 12^e une fois chacune: le 5^e est fait par la 50, la 8, la 34, la 18, la 40 & la 2^e mises chacune une fois de suite: le 6^e rang, avec la 24 & la 32^e chacune une fois, puis la 14^e deux fois de suite, la 28 & la 24^e chacune une fois: le 7^e, avec la 22 & la 40^e chacune une fois, puis deux fois de suite la 16^e, & une fois chacune la 8 & la 22^e: le 8^e se fait par la 2, la 38, la 18, la 34, la 6 & la 50^e mises une fois chacune: le 9^e, avec la 10, la 40, la 28, la 12, la 8 & la 26^e mises de suite: le 10^e, par la 26, la 38, la 12, la 28, la 6 & la 10 mises aussi de suite: le 11^e, avec la 18, la 40, la 2, la 50, la 8 & la 34^e chacune une fois de suite: enfin le douzieme rang est fait par la 14 & la 38^e chacune une fois, la 24 deux fois de suite, la 6 & la 14^e chacune une fois.

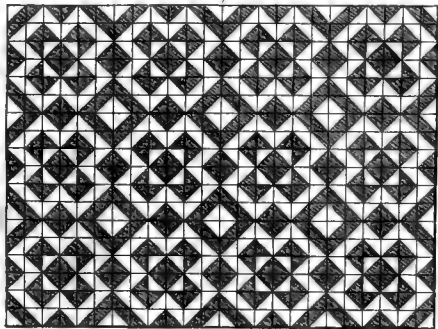
Fin des Mémoires.



Septième Planche

Mém. de L'Acad. 1704. p. 373 Pl. 20

5



6

