INTRODUCTION

A LA

THÉORIE DES FONCTIONS

D'UNE VARIABLE

PAR

JULES TANNERY

MEMBRE DE L'INSTITUT

SOUS-DIRECTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

DEUXIÈME ÉDITION ENTIÈREMENT REFONDUE

TOME DEUXIÈME

INTÉGRALES DÉFINIES, DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE

LANGAGE GÉOMÉTRIQUE, FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES

Avec une Note de M. HADAMARD.

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN & FILS

LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1910

Vient de Paraître :

Hadamard (J.), *Professeur au Collège de France.* — **Leçons sur le Calcul des Variations**, *recueillies* par M. Fréchet. *Tome I.* — 1 *vol. in*-8° *de* 520 *pages.* (*Prix* : 18 *francs*). *Hermann et fils, éditeurs. Paris*, 1910.

M. Hadamard s'est proposé, dans ces Leçons, l'exposition complète et rigoureuse du Calcul des Variations, en considérant ce calcul comme un premier chapitre du Calcul fonctionnel. Ce point de vue, qui a conduit l'auteur à certaines modifications de la terminologie actuelle, l'a aussi amené à insister spécialement sur les difficultés particulières que soulève le Calcul des Variations.

Le livre rappelle d'abord, en la complétant, la théorie classique des maxima et minima (ou *extrema*) des fonctions d'une ou de plusieurs variables, et précise les principes relatifs aux équations différentielles qui seront nécessaires dans la suite. Ce premier volume est divisé en trois livres. Le livre I, consacré à *la position du problème*, montre la nature de la question (exemple de la brachistochrone), et introduit la notion de *variation* d'une intégrale : cette notion soulève une importante objection, que l'on évite en précisant, d'après Weierstrass, la notion de *voisinage* de deux fonctions. La question était maintenant bien posée, on arrive avec le livre II : *La variation première et les conditions du premier ordre*, aux premiers calculs nécessaires à sa solution ; il s'agit d'abord de la transformation fondamentale de la variation première, par rapport à un paramètre, d'une intégrale dépendant de fonctions inconnues y de la variable x et de leurs premières dérivées, et du lemme concernant l'annulation de cette variation ; d'où les équations différentielles qui définissent les fonctions inconnues y dans le cas de l'extremum libre entre des limites fixes ; ces équations sont aussitôt appliquées aux exemples classiques, puis transformées dans le cas où les inconnues y et la variable x sont exprimées paramétriquement. L'auteur étudie ensuite la délicate question de la détermination des solutions du problème, ou *extrémales*, passant par deux points donnés, qui comporte d'intéressants exemples ; puis il ramène au problème étudié celui d'un extremum lié assujetti à un nombre fini de conditions (exemple des géodésiques), et il établit les équations du problème quand l'intégrale renferme des dérivées d'ordre supérieur au premier. On arrive alors au cas des limites d'intégration variables ; le chapitre III est consacré à la célèbre formule *aux limites*, dite de Gauss, et à ses nombreuses conséquences géométriques ; l'auteur y rattache toutes les propriétés des équations différentielles du Calcul des Variations, en faisant ressortir leurs analogies avec les équations générales de la Dynamique, qui en sont des cas particuliers, il termine le chapitre par une intéressante application à l'intégration des équations aux dérivées partielles. Le chapitre suivant étend, à l'aide de la formule aux limites, les résultats du début aux cas généraux où le chemin d'intégration n'a plus ses extrémités fixes ; on y examine les variations unilatérales, et les solutions discontinues. Le chapitre V traite des problèmes *isopérimétriques*, c'est-à-dire du genre du suivant : trouver, parmi toutes les lignes de même longueur tracées sur une surface donnée, celle qui délimite l'aire maxima

INTRODUCTION

À LA

THÉORIE DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE

INTRODUCTION

A LA

THÉORIE DES FONCTIONS

D'UNE VARIABLE

PAR

JULES TANNERY

MEMBRE DE L'INSTITUT

SOUS-DIRECTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

DEUXIÈME ÉDITION ENTIÈREMENT REFONDUE

TOME DEUXIÈME

INTÉGRALES DÉFINIES, DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE

LANGAGE GÉOMÉTRIQUE, FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES

Avec une Note de M. HADAMARD

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN & FILS

LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE

6, RUE DE LA SORBONNE, 6

1910

INTRODUCTION A LA THÉORIE

DES

FONCTIONS D'UNE VARIABLE

CHAPITRE VII

INTÉGRALES DÉFINIES

I. — INTÉGRALES PAR EXCÈS ET PAR DÉFAUT. MESURE DES ENSEMBLES. FONCTIONS A VARIATION BORNÉE

238. — Étant donnée une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle (a_0, a_1), il est naturel de se demander s'il existe une fonction $F(x)$ qui, dans le même intervalle, admette $f(x)$ pour dérivée; cette fonction, si elle existe, est dite fonction *primitive* de la fonction $f(x)$. Elle est nécessairement continue dans l'intervalle (a_0, a_1) puisqu'elle admet une dérivée en chaque point de cet intervalle, et qu'elle est donc continue en ce point (n° **204**).

Il est aisé de trouver toutes les fonctions définies dans l'intervalle (a_0, a_1) et qui y admettent $f(x)$ pour dérivée, si l'on en connaît une $F(x)$: soit en effet $\Phi(x)$ l'une quelconque des fonctions cherchées; dans l'intervalle (a_0, a_1), la dérivée de la fonction $\Phi(x) - F(x)$ sera constamment nulle; cette fonction sera donc une constante C, et l'on aura

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

Réciproquement, si C désigne une constante quelconque, il est clair que la dérivée de la fonction $F(x) + C$ sera la même que la dérivée de la fonction $F(x)$. On a donc le théorème suivant :

Si, dans l'intervalle (a_0, a), la fonction $F(x)$ admet pour dérivée la fonction $f(x)$, toute fonction qui, dans ce même intervalle, aura $f(x)$ pour dérivée s'obtiendra en ajoutant à $F(x)$ une constante; toutes les fonctions ainsi formées auront d'ailleurs $f(x)$ pour dérivée.

On peut évidemment déterminer la constante de manière à obtenir une fonction qui prenne une valeur F_0, arbitrairement donnée, pour une valeur x_0 appartenant à l'intervalle (a_0, a); cette fonction est $F(x) + F_0 - F(x_0)$.

Toutes les fonctions primitives de la fonction

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m,$$

où les A désignent des constantes, s'obtiennent en ajoutant une constante arbitraire à la fonction

$$\frac{A_0 x^{m+1}}{m+1} + \frac{A_1 x^m}{m} + \ldots A_{m-1} \frac{x^2}{2} + A_m x.$$

Les fonctions e^x, a^x, $\sin x$, $\cos x$ admettent pour fonctions primitives les fonctions e^x, $\frac{a^x}{\log a}$, $-\cos x$, $\sin x$; dans tout intervalle dont les limites sont des nombres positifs, la fonction x^m, où m est une constante autre que -1, admet pour fonction primitive $\frac{x^{m+1}}{m+1}$; la fonction $x^{-1} = \frac{1}{x}$ admet pour fonction primitive la fonction $\log |x|$, dans tout intervalle auquel o n'appartient pas.

Les exemples qui précèdent ne nous apprennent rien sur la réponse à la question posée au début : étant donnée une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle (a_0, a), existe-t-il une fonction $F(x)$ dont la dérivée soit, dans cet intervalle, égale à $f(x)$? La solution de cette question, pour une classe étendue de fonctions, dépend de l'étude de certaines sommes dans lesquelles le nombre des éléments augmente indéfiniment tandis que ces éléments décroissent indéfiniment et qui, sous des conditions qu'on précisera, tendent vers des limites. La considération de pareilles sommes s'introduit tout naturellement, en géométrie, lorsqu'on cherche à évaluer l'aire d'une courbe; je les définirai, dans le numéro suivant, en restant au point de vue de la pure analyse.

239. — Soient a_0, a $(a_0 < a)$ deux nombres fixes quelconques; soit $f(x)$ une fonction déterminée, dont je suppose seulement qu'elle est bornée dans l'intervalle (a_0, a) [1]. Je désignerai par m et M ses bornes inférieure et supérieure dans cet intervalle.

Partageons l'intervalle (a_0, a) en n intervalles partiels

$$(a_0, a_1), \quad (a_1, a_2), \ldots, \quad (a_{n-1}, a)$$

en désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ des nombres assujettis aux conditions

$$a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a;$$

Soient m_1 et M_1, m_2 et M_2, ..., m_n et M_n les bornes inférieure et supérieure de $f(x)$ dans les intervalles partiels (a_0, a_1), ..., (a_{n-1}, a). Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des nombres assujettis aux conditions

$$(1) \qquad m_1 \leqq f_1 \leqq M_1, \quad m_2 \leqq f_2 \leqq M_2, \ldots, \quad m_n \leqq f_n \leqq M_n$$

et considérons les trois sommes

$$(2) \qquad \begin{aligned} \underline{S} &= (a_1 - a_0)\, m_1 + (a_2 - a_1)\, m_2 + \ldots + (a - a_{n-1})\, m_n \\ S &= (a_1 - a_0)\, f_1 + (a_2 - a_1)\, f_2 + \ldots + (a - a_{n-1})\, f_n \\ \overline{S} &= (a_1 - a_0)\, M_1 + (a_2 - a_1)\, M_2 + \ldots + (a - a_{n-1})\, M_n \end{aligned}$$

dont je dirai qu'elles sont relatives à la décomposition $(a_0, a_1, \ldots a)$ de l'intervalle (a_0, a). Ces sommes s'introduisent naturellement en étudiant géométriquement le problème posé à la fin du n° précédent.

Puisque les facteurs $a_1 - a_0$, $a_2 - a_1$, ..., $a - a_{n-1}$ sont tous positifs il est clair que l'on a

$$\underline{S} \leqq S \leqq \overline{S},$$

et il est d'ailleurs bien aisé de voir que lorsque $f_1, f_2, \ldots, f_n$ prennent toutes les valeurs compatibles avec les conditions (1), S prend toutes les valeurs appartenant à l'intervalle $(\underline{S}, \overline{S})$. Je désignerai les deux sommes $\underline{S}$, $\overline{S}$, dont les valeurs sont déterminées quand on

---

[1] Dans ce numéro et dans les suivants jusqu'au n° **248**, toutes les fois qu'il sera question d'un intervalle (α, β) on supposera toujours $\alpha < \beta$.

se donne la décomposition $(a_0, a_1, \ldots a)$ de l'intervalle, sous les noms de *sommes inférieure* et *supérieure* relatives à cette décomposition.

La borne inférieure m de la fonction $f(x)$, dans l'intervalle (a_0, a) est la plus petite des bornes inférieures $m_1, m_2, \ldots, m_n$ relatives aux intervalles partiels (a_0, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, a); de même la borne supérieure M est le plus grand des nombres M_1, M_2, ..., M_n. Si, dans les seconds membres des égalités qui définissent $\underline{S}$ et $\overline{S}$, on remplace $m_1, m_2, \ldots, m_n$ par m, et $M_1, M_2, \ldots, M_n$ par M, on voit tout de suite, puisque les coefficients $(a_1 - a_0)$, $(a_2 - a_1)$, ... sont positifs, que l'on a

$$\underline{S} \geqq (a - a_0)\, m, \qquad \overline{S} \leqq (a - a_0)\, M.$$

En résumé, si les trois sommes $\underline{S}$, S, $\overline{S}$ se rapportent à la même décomposition, on peut écrire

$$(3) \qquad (a - a_0)\, m \leqq \underline{S} \leqq S \leqq \overline{S} \leqq (a - a_0)\, M.$$

J'aurai besoin de quelques remarques concernant les sommes supérieures et inférieures, que je place immédiatement.

Considérons la décomposition $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a)$ et la somme supérieure $\overline{S}$ qui lui correspond. Introduisons un nombre intercalaire de plus, par exemple a'_2 entre a_2 et a_3. Soient M'_2 et M''_2 les bornes supérieures de $f(x)$ dans les intervalles (a_2, a'_2), (a'_2, a_3); la borne supérieure M_3 dans l'intervalle (a_2, a_3) est le plus grand des deux nombres M'_2, M''_2. A la nouvelle décomposition, où les deux intervalles partiels (a_2, a'_2), (a'_2, a_3) remplacent l'intervalle (a_2, a_3) de la première, correspond une nouvelle somme supérieure, qui ne diffère de la première $\overline{S}$ que parce que la somme

$$(a'_2 - a_2)\, M'_2 + (a_3 - a'_2)\, M''_2,$$

remplace le terme unique

$$(a_3 - a_2)\, M_3 = (a'_2 - a_2)\, M_3 + (a_3 - a'_2)\, M_3;$$

la différence, positive ou nulle, entre $\overline{S}$ et la nouvelle somme supérieure est donc, suivant les cas, égale à l'un ou l'autre des nombres

$$(a_3 - a'_2)\,(M_3 - M''_2), \qquad (a'_2 - a_2)\,(M_3 - M'_2);$$

elle ne peut jamais dépasser $\eta\,(M - m)$, en désignant par η le plus grand des écarts des intervalles

$$(a_0, a_1), \quad (a_1, a_2), \ldots, \quad (a - a_{n-1}).$$

Si, au lieu d'introduire un seul nouveau nombre intercalaire, on en introduisait $p - 1$, il est clair, puisqu'on peut introduire un à un ces nombres intercalaires, que l'on peut écrire

$$0 \leqq \overline{S} - \overline{\Sigma} \leqq (p-1)\eta(M-m),$$

en désignant par $\overline{\Sigma}$ la somme supérieure relative à la nouvelle décomposition. On aura de même pour les sommes inférieures

$$0 \leqq \underline{\Sigma} - \underline{S} \leqq (p-1)\eta(M-m).$$

Il est bien évident que ces inégalités subsistent lors même que quelques-uns des nouveaux nombres intercalaires se confondent avec les anciens.

Considérons maintenant trois décompositions

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a), \quad (a_0, a'_1, \ldots, a'_{p-1}, a), \quad (a_0, \alpha_1, \ldots, a)$$

et les sommes supérieures correspondantes $\overline{S}$, $\overline{S}'$, $\overline{\Sigma}$. Les deux premières décompositions sont quelconques ; quant à la troisième, je suppose que les nombres $a_0, \alpha_1, \ldots, a$ ne soient autre chose que les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a'_1, \ldots, a'_{p-1}, a$ rangés par ordre de grandeurs croissantes, en sorte que cette troisième décomposition est obtenue soit en introduisant dans la première $p - 1$ nouveaux nombres intercalaires $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{p-1}$, soit en introduisant dans la seconde $n - 1$ nouveaux nombres intercalaires $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$.

On aura évidemment, en vertu des inégalités précédentes

$$0 \leqq \overline{S}' - \overline{\Sigma} \leqq (n-1)\eta(M-m), \qquad 0 \leqq \underline{\Sigma} - \underline{S}' \leqq (n-1)\eta(M-m).$$

240. — Ces préliminaires établis, j'arrive aux définitions. La fonction $f(x)$ est dite *intégrable* dans l'intervalle (a_0, a) s'il existe un nombre J jouissant de la propriété suivante :

Toute somme relative à une décomposition quelconque de l'intervalle (a_0, a) diffère aussi peu qu'on le veut du nombre J, pourvu que les intervalles partiels soient suffisamment petits. D'une façon plus précise, à chaque nombre positif ε correspond un nombre positif η tel que la différence entre J et n'importe quelle somme relative à n'importe quelle décomposition de l'intervalle (a_0, a) soit moindre que ε, pourvu que, dans cette décomposition, l'écart de chaque intervalle partiel soit moindre que η.

C'est ce que l'on exprime souvent en disant que le nombre fixe J (à supposer qu'il existe) est la limite d'une somme (variable) relative à une décomposition (variable) de l'intervalle (a_0, a), lorsque le nombre des intervalles partiels croissant indéfiniment, les écarts de ces intervalles décroissent indéfiniment. Le mot *limite* n'est pas pris ici dans le sens précis où on l'a employé jusqu'ici ; mais l'idée est la même : une somme relative à une décomposition dépend de cette décomposition, des valeurs choisies pour $f_1, f_2, \ldots$; elle varie quand la décomposition ou les valeurs choisies pour $f_1, f_2, \ldots$ varient ; pourvu que les écarts des intervalles partiels tendent vers o, la somme s'approche de la limite J.

En supposant toujours l'existence de J, il est commode de dire d'une somme

$$(a_1 - a_0)f_1 + (a_2 - a_1)f_2 + \ldots (a - a_{n-1})f_n$$

qu'elle est une valeur approchée de J, et une valeur aussi approchée qu'on veut, pourvu que les intervalles partiels soient suffisamment petits.

Quoiqu'il en soit, si le nombre J existe, il est ce qu'on appelle la valeur de l'*intégrale définie* de la fonction $f(x)$ prise dans l'intervalle (a_0, a) ou encore *entre la limite inférieure* a_0 et *la limite supérieure* a ; on le représente par le symbole

$$\int_{a_0}^{a} f(x)\, dx,$$

qui s'énonce *somme de* a_0 *à* a *de* $f(x)\, dx$. Le signe $\int$ est un S déformé, initiale du mot somme ; le symbole dx, placé à côté de $f(x)$, est la trace de ces *différences* $a_1 - a_0,\ a_2 - a_1, \ldots,\ a - a_{n-1}$ qui figuraient dans la somme relative à la décomposition $(a_0, a_1, \ldots, a)$. La lettre d est l'initiale du mot différence.

Les fonctions intégrables au sens précédent (sens de Riemann) constituent une classe particulière parmi les fonctions bornées dans l'intervalle (a_0, a). Ce que je vais dire maintenant ne suppose pas que la fonction $f(x)$ appartienne à cette classe, mais seulement qu'elle soit bornée.

241. — Désignons par $(\overline{E})$ l'ensemble des sommes supérieures $\overline{S}$: un nombre A appartient à $(\overline{E})$ s'il est une somme supérieure, c'est-à-dire s'il y a une décomposition telle que la somme supérieure correspondante soit égale à A ; un nombre A n'appartient pas à $(\overline{E})$ s'il n'y a point de décomposition telle que la somme supérieure correspondante soit égale à A. Soit, de même, $(\underline{E})$ l'ensemble des sommes inférieures $\underline{S}$. Les ensembles $(\overline{E})$ et $(\underline{E})$ sont bornés en haut et en bas puisque tous leurs éléments appartiennent à l'intervalle

$$[(a_0 - a)m, \qquad (a_0 - a)M],$$

en vertu des inégalités (3) du n° **239**. La borne inférieure $\overline{J}$ de l'ensemble $(\overline{E})$ et la borne supérieure $\underline{J}$ de l'ensemble $(\underline{E})$ sont ce qu'on appelle, l'une, l'intégrale *par excès*, l'autre, l'intégrale *par défaut* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a_0, a) et on les représente respectivement par les symboles

$$\overline{\int_{a_0}^{a} f(x)\,dx}, \qquad \underline{\int_{a_0}^{a} f(x)\,dx},$$

qui rappellent la notation de l'intégrale définie, quand celle-ci existe.

Ce rapprochement est naturel, en vertu de la proposition suivante :

A chaque nombre positif ε correspond un nombre positif η tel que l'on ait à la fois, pour une même décomposition,

$$0 \leqq \overline{S} - \overline{J} < \varepsilon, \qquad 0 \leqq \underline{J} - \underline{S} < \varepsilon,$$

sous la seule condition que les écarts des intervalles partiels de la décomposition à laquelle se rapportent les sommes supérieure et inférieure $\overline{S}$ et $\underline{S}$ soient tous inférieurs à η.

Ici encore, en employant un langage sur lequel je me suis expliqué plus haut, on dit que $\overline{S}$ et $\underline{S}$ sont respectivement des valeurs approchées de $\overline{J}$ et de $\underline{J}$, aussi approchées qu'on veut, pourvu que les intervalles partiels soient suffisamment petits ; on dit aussi que les sommes $\overline{S}$ et $\underline{S}$ ont respectivement pour limites les nombres $\overline{J}$ et $\underline{J}$, quand les intervalles partiels tendent vers 0.

Je raisonnerai sur les sommes supérieures.

Reprenons les notations de la fin du numéro précédent relatives aux trois décompositions

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a), \qquad (a_0, a'_1, \ldots, a'_{p-1}, a), \qquad (a_0, \alpha_1, \ldots, a),$$

dont on spécifiera tout à l'heure les deux premières, et dont la troisième est déterminée dès que les deux premières le sont ; je désignerai toutefois par η_1 au lieu de η le plus grand des écarts des intervalles partiels de la première décomposition, ou un nombre plus grand. $\overline{S}$, $\overline{S}'$, $\overline{\Sigma}$ sont toujours les sommes supérieures relatives aux trois décompositions. On aura

$$\begin{aligned} &o \leqq \overline{\Sigma} - \overline{J} \leqq \overline{S}' - \overline{J}, \\ &o \leqq \overline{S} - \overline{\Sigma} \leqq (p-1)\,\eta_1\,(M-m), \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$o \leqq \overline{S} - \overline{J} \leqq (p-1)\,\eta_1\,(M-m) + \overline{S}' - \overline{J}.$$

Donnons-nous un nombre positif ε et choisissons ensuite un nombre positif $\varepsilon' < \varepsilon$. D'après la définition même de la borne inférieure d'un ensemble, il y a dans l'ensemble $\overline{E}$ un élément dont la différence avec $\overline{J}$ est moindre que ε' ; soit $\overline{S}'$ cet élément et choisissons pour $a_0, a_1, \ldots, a'_{p-1}, a$ une décomposition pour laquelle $\overline{S}$ soit la somme supérieure ; p est alors déterminé ; choisissons le nombre positif η_1 de façon que l'on ait

$$\eta_1 < \frac{\varepsilon - \varepsilon'}{(p-1)(M-m)};$$

quelle que soit la décomposition $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, pourvu que tous les écarts des intervalles partiels ne dépassent pas η_1, on aura

$$o \leqq \overline{S} - \overline{\Sigma} < \varepsilon - \varepsilon', \qquad o \leqq \overline{S} - \overline{J} < \varepsilon.$$

On déterminera de même un nombre positif η_2 tel que pour toute décomposition où les écarts des intervalles partiels sont moindres que η_2, la différence, positive ou nulle, $\underline{J} - \underline{S}$ soit moindre que ε et l'on prendra pour η le plus petit des nombres η_1, η_2. La proposition énoncée est entièrement démontrée.

242. — La condition pour que la fonction $f(x)$, bornée dans l'intervalle (a_0, a), soit intégrable dans cet intervalle est maintenant bien claire ; il faut et il suffit que les nombre $\overline{J}$ et $\underline{J}$ soient égaux.

La condition est nécessaire, puisqu'il y a des sommes relatives à une décomposition pour lesquelles les écarts des intervalles partiels sont aussi petits qu'on veut, et qui diffèrent aussi peu qu'on le veut soit de $\overline{J}$, soit de $\underline{J}$. Elle est suffisante, car si l'on suppose $\overline{J} = \underline{J}$ et si l'on désigne par J la valeur commune de ces deux nombres, à chaque nombre positif ε, correspond un nombre positif η tel que l'on ait, pour toute décomposition où les écarts des intervalles partiels sont moindres que η

$$\underline{S} \leqq J \leqq \overline{S}, \qquad \overline{S} - J < \varepsilon, \qquad J - \underline{S} < \varepsilon;$$

dès lors, puisque toute somme S relative à la même décomposition appartient à l'intervalle $(\underline{S}, \overline{S})$, on aura certainement $|S - J| < \varepsilon$; et cette inégalité sera assurée pourvu que les écarts des intervalles partiels de la décomposition à laquelle S se rapporte soient moindres que η.

Pour que l'on ait $\overline{J} = \underline{J}$, il faut et il suffit qu'à chaque nombre positif ε corresponde une décomposition $(a_0, a_1, \ldots, a)$ telle que la différence

$$\overline{S} - \underline{S} = (a_1 - a_0)(M_1 - m_1) + (a_2 - a_1)(M_2 - m_2) + \ldots \\ + (a - a_{n-1})(M_n - m_n)$$

entre les deux sommes supérieure et inférieure relatives à cette décomposition soit moindre que ε.

La condition est nécessaire puisque si l'on a $\overline{J} = \underline{J} = J$, il y a des décompositions pour lesquelles les sommes supérieure et inférieure diffèrent de J aussi peu qu'on le veut.

Elle est suffisante : on a, en effet, quelle que soit la décomposition,

$$0 \leqq \overline{J} - \underline{J} \leqq \overline{S} - \underline{S};$$

il faut que le nombre fixe $\overline{J} - \underline{J}$ soit nul, pour que le dernier nombre puisse être rendu plus petit que tel nombre positif qu'on voudra.

Quand la fonction $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle (a_0, a), la valeur de l'intégrale $\int_{a_0}^{a} f(x)\,dx$ appartient toujours à l'intervalle $(\underline{S}, \overline{S})$ quelle que soit la décomposition à laquelle se rapportent les deux sommes $\underline{S}$, $\overline{S}$ et l'écart $\overline{S} - \underline{S}$ de cet intervalle est une limite supérieure de l'erreur que l'on commet en prenant pour l'intégrale une somme quelconque relative à cette décomposition. En particulier la valeur de l'intégrale appartient toujours à l'intervalle $[(a - a_0)m, (a - a_0)M]$.

La condition d'intégrabilité peut encore être transformée comme il suit.

Pour que la fonction $f(x)$ soit intégrable dans l'intervalle (a_0, a) il faut et il suffit qu'à chaque couple de nombres positifs K et α corresponde une décomposition $(a_0, a_1, \ldots, a)$ telle que la somme des écarts des intervalles partiels où l'écart de la fonction $f(x)$ est supérieur ou égal à K soit moindre que α.

Si, en effet, pour une décomposition quelconque $(a_0, a_1, \ldots, a)$, on désigne par σ la somme des écarts des intervalles partiels où l'écart de la fonction est égal ou supérieur à K et si, d'ailleurs, on garde les mêmes notations on aura évidemment

$$\sigma K \leqq \overline{S} - \underline{S} \leqq (a - a_0) K + \sigma (M - m).$$

La condition est nécessaire, car lorsqu'on se donne K et α, la supposition $\overline{S} - \underline{S} < \alpha K$, entraine $\sigma < \alpha$. Elle est suffisante; supposons en effet qu'elle soit vérifiée; si l'on se donne le nombre positif ε et si l'on choisit K et α tels que l'on ait

$$(a - a_0) K + \alpha (M - m) < \varepsilon,$$

on voit qu'il y aura une décomposition pour laquelle $\overline{S} - \underline{S}$ sera moindre que ε.

Cette dernière forme de la condition d'intégrabilité est due à Riemann; elle montre en particulier que si la fonction $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle (a_0, a), elle est encore intégrable dans tout intervalle contenu dans celui-là.

C'est des fonctions intégrables que je m'occuperai surtout. Je n'ai guère parlé des intégrales par excès et par défaut, dont l'introduction est due à M. Darboux (1), que pour mieux éclaircir la notion de l'intégrale définie proprement dite. Toutefois avant de m'occuper exclusivement des fonctions intégrables, je dois introduire

(1) *Annales de l'Ecole normale*, 2e série, t. IV.

quelques notions où interviennent soit les intégrales par excès ou par défaut, soit des considérations très analogues à celles que je viens de développer.

243. — Considérons un ensemble borné (E), dont tous les points appartiennent à l'intervalle (a, b). Je vais définir une fonction $f(x)$ dans cet intervalle : si x est un point de (E), on prendra $f(x) = 1$; si x n'appartient pas à (E), on prendra $f(x) = 0$. Cette fonction étant bornée, les intégrales par excès et par défaut [1]

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx, \qquad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

ont une signification précise. La valeur de la première est *l'étendue extérieure* de l'ensemble (E), la seconde est *l'étendue intérieure* de cet ensemble. Ces nombres ont été introduits dans la théorie des ensembles par M. G. Cantor et par M. Jordan. Lorsqu'ils sont égaux, lorsque la fonction $f(x)$ est intégrable, au sens que l'on a donné à ce mot au n° **242**, l'un ou l'autre est ce que l'on appelle la *mesure* de l'ensemble (E) *au sens de M. Jordan.*

Si l'on se reporte à la définition des intégrales par excès ou par défaut, on voit que la somme supérieure relative à une décomposition est la somme des écarts des intervalles partiels auxquels appartient quelque point de l'ensemble (E), que la somme inférieure est la somme des écarts des intervalles partiels dont tous les points appartiennent à (E). Ces deux sommes sont des valeurs approchées des étendues extérieure ou intérieure de (E), aussi approchées qu'on veut, pourvu que les écarts des intervalles partiels de la décomposition soient assez petits.

L'ensemble (E_1), *complémentaire de l'ensemble* (E) *par rapport à l'intervalle* (a, b), est, par définition, l'ensemble des points de cet intervalle qui n'appartiennent pas à (E). Si l'on considère une décomposition quelconque de l'intervalle (a, b), un intervalle partiel qui contient quelque point de (E), contiendra un point qui n'appartient pas à (E_1), il ne figurera donc pas dans la valeur ap-

(1) J'utilise ici, comme je l'ai fait d'ailleurs déjà au n° **239**, l'exposition de M. de la Vallée-Poussin, dans son *Cours d'Analyse infinitésimale*.

prochée de l'étendue intérieure de l'ensemble (E_1); ne figureront dans cette valeur approchée que les intervalles qui ne contiennent aucun point de E, c'est-à dire ceux qui ne figurent pas dans la valeur approchée de l'étendue extérieure de (E); d'où cette conclusion :

Si (E) et (E_1) sont deux ensembles contenus dans l'intervalle (a, b) et complémentaires par rapport à cet intervalle, la somme de l'étendue extérieure de l'un et de l'étendue intérieure de l'autre est égale à $b - a$.

L'étendue extérieure d'un ensemble contenu dans l'intervalle (a, b) et dense dans cet intervalle est égale à $b - a$; son étendue intérieure est nulle.

L'étude de la mesure des ensembles a fait l'objet de recherches très intéressantes [1].

244. — Observons d'abord que si l'on considère un ensemble dénombrable dont les éléments soient des intervalles, il est permis de parler de la somme des écarts de ces intervalles (ou, plus brièvement, de la somme de ces intervalles) : c'est, en la supposant convergente, la somme de la série dont les termes, tous positifs, sont ces écarts; si la série divergeait, on pourrait dire que la somme des intervalles est infinie; c'est d'ailleurs au cas où elle converge que se rapporte ce que l'on va dire.

Un ensemble de nombres ou de points (E) est dit de *mesure nulle* lorsqu'à chaque nombre positif ε correspond un ensemble fini ou dénombrable d'intervalles dont la somme est moindre que ε et tels que chaque point de (E) appartienne au moins à l'un de ces intervalles.

Il suit de là que tout ensemble dénombrable est de mesure nulle; en effet, si on se donne le nombre positif ε, on peut former une série à termes positifs

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

dont la somme soit moindre que ε; il suffit pour cela de partir

---

(1) Voir, en particulier, les *Leçons sur la théorie des fonctions* de M. Borel et les *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* de M. Lebesgue.

Je ne dois pas citer ce dernier ouvrage sans signaler l'extension de la notion d'intégrale qu'on y trouve. Malgré l'importance considérable de cette extension, elle m'a paru en dehors du cadre de la présente *Introduction*.

d'une série convergente à termes positifs quelconque, ayant pour somme A, et de multiplier chacun de ses termes par $\frac{\alpha}{A}$, en désignant par α un nombre positif quelconque plus petit que ε. Ceci posé, puisque (E) est dénombrable, on peut en faire correspondre les éléments aux nombres de la suite naturelle 1, 2, 3, ... : on regardera l'élément qui correspond au nombre n comme le centre d'un intervalle dont l'écart soit égal à u_n ; la somme des intervalles sera la somme de la série $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$; la proposition énoncée est évidente.

Par exemple l'ensemble des nombres rationnels qui appartiennent à l'intervalle (0, 1) est dénombrable ; il est donc de mesure nulle, au sens qu'on vient de dire. Il est clair que le mot *mesure* est pris ici dans un sens différent de celui de M. Jordan ; l'ensemble considéré, qui est dense dans tout l'intervalle (0, 1), a une étendue extérieure égale à 1, une étendue intérieure égale à 0 ; il n'a pas de mesure au sens de M. Jordan.

La pensée d'un ensemble de mesure nulle, au sens qu'on a expliqué plus haut, et dense dans un intervalle choque quelque peu notre intuition spatiale, et le précédent exemple montrera peut-être au lecteur qu'il ne faut pas se fier outre mesure à cette intuition, si féconde qu'elle soit : il justifiera peut-être aussi à ses yeux la minutie de certaines démonstrations. Quoiqu'il en soit, je pénètrerai un peu plus avant, en indiquant, d'après M. Borel (1), quelques résultats intéressants.

245. — Considérons, d'une part, l'intervalle (a, b), et, d'autre part, un ensemble (I), formé d'intervalles, qui peut, d'ailleurs, être fini ou infini, dénombrable ou non ; je dirai que cet ensemble (I) recouvre l'intervalle (a, b), ou que les intervalles de (I) recouvrent (a, b) pour dire que chaque point de (a, b) est *intérieur* à quelque intervalle de l'ensemble (I). Ceci posé, on a le théorème suivant, dont j'emprunterai la démonstration à M. Lebesgue (2) :

Si l'ensemble d'intervalles (I) recouvre l'intervalle (a, b), il existe un nombre *fini* d'intervalles, appartenant tous à (I), dont l'ensemble I_0 recouvre (a, b).

(1) *Leçons sur la théorie des fonctions*, p. 42.
(2) *Leçons sur l'intégration, etc.*, p. 105.

Supposons en effet que l'ensemble (I) recouvre (a, b). Soit (E) l'ensemble des points x de (a, b) tels que l'intervalle (a, x) soit recouvert par un nombre fini d'intervalles appartenant à (I) ; tout revient à démontrer que b appartient à (E). Observons d'abord que l'ensemble (E) contient certainement des points : tels sont les points de (a, b) intérieurs à l'intervalle de (I) auquel a est lui-même intérieur. Soit x_0 la borne supérieure de l'ensemble (E), ensemble dont tous les points appartiennent à (a, b) ; le point x_0 appartient lui même à (a, b), soit qu'il appartienne à (E), ou qu'il en soit un point d'accumulation. Il y a donc un intervalle (α_0, β_0), appartenant à (I), auquel le point x_0 est intérieur ; il y a un point x_1 $(x_1 \leqq x_0)$ appartenant à (E) et suffisamment rapproché de x_0 pour être intérieur à la fois à (a, b) et à (α_0, β_0). Puisque le point x_1 appartient à (E), c'est que l'intervalle (a, x_1) est recouvert par un nombre fini d'intervalles appartenant à (I) : adjoignons à ces intervalles, qui recouvrent (a, x_1), l'intervalle (α_0, β_0), s'il n'en fait pas déjà partie : on obtiendra ainsi un ensemble fini d'intervalles qui recouvrira manifestement l'intervalle (a, x), pourvu que x soit un point intérieur à (α_0, β_0) ; en d'autres termes, x est certainement un point de (E) pourvu que x appartienne à (a, b) et soit intérieur à (α_0, β_0). En particulier x_0 appartient à (E) ; enfin x_0 est égal à b ; car si l'on avait $x_0 < b$, il y aurait, au-delà de x_0, des points de (a, b) qui seraient intérieurs à (α_0, β_0) ; x_0 ne serait pas la borne supérieure de (E).

Il suit de là que, si l'ensemble (I) recouvre l'intervalle (a, b) et s'il est dénombrable, en sorte qu'on puisse parler de la somme des intervalles qui le composent, on peut être assuré que cette somme dépasse $(b - a)$: en effet, la somme des intervalles de (I) est au moins égale à la somme des intervalles de (I_0) ; ces derniers intervalles étant en nombre fini et recouvrant (a, b), leur somme est certainement supérieure à $b - a$; c'est là un point sur lequel il me semble inutile d'insister.

Inversement, si l'on part d'un ensemble dénombrable d'intervalles (I), et si l'on sait que la somme σ des intervalles de cet ensemble est inférieure à $b - a$, on peut être certain qu'il y a des points de l'intervalle (a, b) qui n'appartiennent à aucun des intervalles de (I).

Supposons en effet, pour arriver à une contradiction, que chaque point de (a, b) appartienne à quelqu'un des intervalles de (I). Il ne lui sera pas nécessairement intérieur; mais il est aisé de construire un ensemble d'intervalles (I') dont la somme sera encore inférieure à $b - a$, et tel que chaque point de (a, b) soit intérieur à un intervalle de (I'); il suffit pour cela, en conservant son centre à chacun des intervalles de (I), d'agrandir un peu cet intervalle en le multipliant par $(1 + \alpha)$; la somme des intervalles de (I') sera $\sigma(1 + \alpha)$ et il suffira de prendre le nombre positif α assez petit pour que cette somme soit moindre que $(b - a)$: tout point qui appartenait à un intervalle de (I) sera intérieur à l'intervalle correspondant de (I'); ainsi, dans l'hypothèse où nous nous plaçons, l'ensemble (I') recouvre entièrement l'intervalle (a, b); il y a alors un ensemble fini (I'_0), contenu dans (I'), dont les intervalles ont donc une somme au plus égale à $\sigma(1 + \alpha) < b - a$, dont enfin les intervalles, *en nombre fini*, recouvrent (a, b): l'absurdité est manifeste.

Soit donc, en supposant toujours que la somme σ des intervalles de (I) soit moindre que $b - a$, (E) l'ensemble des points de (a, b) qui n'appartiennent à aucun des intervalles de (I); je dis que (E) n'est pas dénombrable; si, en effet (E) était dénombrable, sa mesure serait nulle; il y aurait un ensemble (J) d'intervalles, ayant une somme σ' inférieure à $b - a - \sigma$, et tels que chaque point de (E) fût intérieur à quelque intervalle de (J); l'ensemble (I) + (J) des intervalles qui appartiennent soit à (I) soit à (J) recouvrirait (a, b); la somme des intervalles de cet ensemble (I) + (J) serait au au plus égale à $\sigma + \sigma'$ et par conséquent moindre que $b - a$; on a vu que cela était impossible.

Ce dernier résultat, l'impossibilité qu'il y a à ce que l'ensemble (E) soit dénombrable, n'a rien de surprenant lorsque cet ensemble contient tous les points d'un intervalle contenu dans (a, b), mais il n'en est pas toujours ainsi.

Prenons, par exemple, pour l'ensemble dénombrable (I) un ensemble d'intervalles dont les centres sont les points à abscisse rationnelle de l'intervalle (0, 1) et pour lequel la somme des intervalles soit moindre que 1. L'ensemble (E) est l'ensemble des points de l'intervalle (0, 1) dont aucun n'appartient à un intervalle de (I); si m, m' désignent deux points de cet ensemble, il y a certainement entre m et m' un point r à abscisse rationnelle; il est le centre d'un des intervalles de (I) qui sépare ainsi les deux points m, m'; entre deux points quelconques de l'ensemble non dénombrable (E), il y a des points qui n'appartiennent pas à (E) : il est impossible que tous les points d'un intervalle, si petit qu'il soit, appartiennent à (E).

246. — Soit $f(x)$ une fonction de x définie dans l'intervalle (a_0, a); je désignerai sous le nom de somme Σ relative à la décomposition $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a)$ $(a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a)$, la somme

$$\Sigma = |f(a_1) - f(a_0)| + |f(a_2) - f(a_1)| + \ldots + |f(a) - f(a_{n-1})|$$

La fonction $f(x)$ est dite *à variation bornée* dans l'intervalle (a_0, a) s'il existe un nombre positif A qui dépasse toutes les sommes Σ. relatives aux diverses décompositions possibles de l'intervalle (a_0, a).

Si la fonction $f(x)$ est à variation bornée dans l'intervalle (a_0, a), elle est aussi à variation bornée dans tout intervalle (α, β) contenu dans (a_0, a), puisqu'on peut faire figurer les nombres α, β parmi les nombres intercalaires. Toute somme relative à une décomposition de l'intervalle (α, β) est moindre que A. On a d'ailleurs.

$$|f(a) - f(a_0)| \leqq |f(a_1) - f(a_0)| + |f(a_2) - f(a_1)| + \ldots \\ + |f(a) - f(a_{n-1})| < A$$

et par suite, $|f(a)| < A + |f(a_0)|$; si x est un point quelconque de l'intervalle (a_0, a), la fonction est à variation bornée dans l'intervalle (a_0, x) et l'on a aussi

$$|f(x)| < A + |f(a_0)|;$$

toute fonction à variation bornée dans un intervalle est *bornée* dans cet intervalle.

Une fonction qui est non-décroissante, dans l'intervalle (a_0, a), ou non-croissante (n° **163**), est à variation bornée; en effet toutes les sommes Σ sont égales à $f(a) - f(a_0)$ dans le premier cas, à $-[f(a) - f(a_0)]$ dans le second.

Si la fonction $f(x)$ est à variation bornée dans l'intervalle (a_0, a), l'ensemble des sommes Σ relatives aux diverses décompositions de cet intervalle est borné en haut. Sa borne supérieure $V(a_0, a)$ est la *variation totale* de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a_0, a) : elle est au plus égale à V. Il est clair que, si l'on supprime quelqu'un des nombres intercalaires $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, la somme Σ reste la même ou diminue ; que, si on introduit de nouveaux nombres intercalaires, tout en conservant les anciens, la somme Σ reste la même ou augmente ; qu'il y a parmi les sommes Σ des nombres aussi voisins qu'on le veut de $V(a_0, a)$. Il y a en particulier des sommes Σ aussi voisines qu'on le veut de $V(a_0, a)$ et pour lesquelles les intervalles partiels sont aussi petits qu'on le veut : il suffit en effet de partir d'une quelconque Σ_0 des sommes Σ telle que l'on ait $0 \leqq V - \Sigma_0 < \varepsilon$, et de subdiviser ensuite les intervalles en intervalles partiels, plus petits que la limite qu'on s'est fixée. Mais on ne peut affirmer ici, en général, comme pour les intégrales par excès et par défaut, qu'une somme Σ diffère aussi peu qu'on le veut de $V(a_0, a)$ pourvu que les intervalles soient suffisamment petits, parce que l'introduction ou la suppression d'un nombre intercalaire α pour lequel la fonction serait discontinue peut modifier la somme Σ d'une quantité finie, quelque petits que soient les intervalles. Il est aisé de voir que, si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a_0, a) et si elle est à variation bornée dans ce même intervalle, les choses se passent comme pour les intégrales par excès et par défaut : une somme Σ est aussi approchée de la variation totale que l'on veut, pourvu que les intervalles partiels soient suffisamment petits.

En effet, si l'on désigne par δ le plus grand des écarts de la fonction $f(x)$ relatifs aux intervalles (a_0, a_1), (a_1, a_2) ... (a_{n-1}, a), on reconnaît sans peine que l'introduction d'un nombre intercalaire dans la suite $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a$ ne peut augmenter la somme Σ que de 2δ au plus ; l'introduction de r nombres intercalaires ne peut de même augmenter Σ que de $2r\delta$; d'autre part on sait que δ peut être supposé aussi petit qu'on le veut, pourvu que les intervalles partiels soient suffisamment petits (n° **164**) ; dès lors la démonstration du n° **241**, avec quelques petits changements que le lecteur fera de lui-même, conduit à la proposition énoncée.

Supposons toujours que la fonction $f(x)$ soit à variation bornée. Une somme Σ relative à la décomposition $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a)$ de l'intervalle (a_0, a) est la somme des valeurs absolues des différences

$$f(a_1) - f(a_0), f(a_2) - f(a_1), \ldots, f(a) - f(a_{n-1}).$$

Parmi ces différences, si l'on ne tient pas compte de celles qui sont nulles, les unes sont positives, les autres sont négatives ; soit p la somme de celles qui sont positives, $-n$ la somme de celles qui sont négatives ; à chaque décomposition correspond un nombre p et un nombre n : on va montrer que l'ensemble des nombres p et l'ensemble des nombres n qui correspondent aux diverses décompositions possibles sont des ensembles bornés en haut et que leurs bornes supérieures que je désignerai par $P(a_0, a)$, $N(a_0, a)$ satisfont aux relations

$$(1) \qquad \begin{cases} P(a_0, a) + N(a_0, a) = V(a_0, a) \\ P(a_0, a) - N(a_0, a) = f(a) - f(a_0). \end{cases}$$

On a en effet, pour la décomposition considérée

$$(2) \qquad p + n = \Sigma \qquad p - n = f(a) - f(a_0).$$

La première de ces égalités (2) montre que les nombres positifs p, n ne peuvent dépasser Σ et, par conséquent, $V(a_0, a)$; l'ensemble des nombres p et l'ensemble des nombres n sont donc bornés en haut. Ceci posé, si l'on se donne un nombre positif ε, il y a certainement une décomposition pour laquelle les nombres Σ, p, n diffèrent respectivement de leurs bornes supérieures $V(a_0, a)$, $P(a_0, a)$, $N(a_0, a)$ de quantités moindres que ε : en effet, il y a certainement trois décompositions telles que les trois nombres positifs ou nuls $V(a_0, a) - \Sigma$, $P(a_0, a) - p$, $N(a_0, a) - n$ soient moindres que ε, étant entendu que Σ se rapporte à la première décomposition, p à la seconde, n à la troisième ; rangeons par ordre de grandeur tous les nombres intercalaires qui entrent dans ces décompositions : il en résultera une quatrième décomposition où les nombres Σ, p, n seront remplacés par des nombres Σ', p', n', au moins égaux : donc les nombres toujours positifs ou nuls $V(a_0, a) - \Sigma'$, $P(a_0, a) - p'$, $N(a_0, a) - n'$ seront, *a fortiori*, plus petits que ε. Dès lors, les deux égalités (1) sont des conséquences évidentes des égalités (2).

Dans le cas où la fonction $f(x)$ est non-décroissante dans l'intervalle (a_0, a), il est clair que l'on a $V(a_0, a) = f(a_0) - f(a)$

$= P(a_0, a), N(a_0, a) = 0$; si la fonction $f(x)$ est non-croissante, on a au contraire $V(a_0, a) = f(a_0) - f(a) = -N(a_0, a)$, $P(a_0, a) = 0$.

Si, en supposant $a < b < c$, la fonction $f(x)$ est à variation bornée dans les intervalles (a, b), (b, c) elle est évidemment à variation bornée dans l'intervalle (a, c); je dis de plus que l'on a

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} V(a, c) &= V(a, b) + V(b, c), \\ P(a, c) &= P(a, b) + P(b, c), \\ N(a, c) &= N(a, b) + N(b, c). \end{aligned}\right.$$

Occupons-nous de la première de ces égalités.

Employons pour distinguer ce qui se rapporte aux divers intervalles, les notations $\Sigma(a, b)$, $\Sigma(b, c)$, $\Sigma(a, c)$: elles désigneront des sommes formées comme celles que l'on a désignées précédemment par Σ, et relatives à des décompositions des intervalles (a, b), (b, c), (a, c).

Si la décomposition de l'intervalle (a, c) à laquelle se rapporte la somme $\Sigma(a, c)$ est obtenue par la juxtaposition des deux décompositions des intervalles (a, b), (b, c) auxquelles se rapportent les sommes $\Sigma(a, b)$, $\Sigma(b, c)$, il est clair que l'on a

$$(4)\qquad \Sigma(a, c) = \Sigma(a, b) + \Sigma(b, c).$$

Donnons-nous un nombre positif ε : il existe une décomposition de l'intervalle (a, c), une décomposition de l'intervalle (a, b), une décomposition de l'intervalle (b, c) telles que les différences respectives entre les quantités $V(a, c)$, $V(a, b)$, $V(b, c)$ et les sommes $\Sigma(a, c)$, $\Sigma(a, b)$, $\Sigma(b, c)$ qui se rapportent à ces décompositions soient moindres que ε; mais, pour ces sommes, l'égalité (4) n'est pas vérifiée, en général. Rangeons par ordre de grandeur croissante tous les nombres qui figurent dans ces trois décompositions, y compris les nombres a, b, c; il en résultera trois nouvelles décompositions des intervalles (a, c), (a, b), (b, c) telles que la première résulte manifestement de la juxtaposition des deux dernières; pour ces nouvelles décompositions l'égalité sera vérifiée; mais les nouvelles sommes $\Sigma(a, c)$, $\Sigma(a, b)$, $\Sigma(b, c)$ sont supérieures ou égales aux anciennes, puisque les décompositions auxquelles elles se rapportent se déduisent des anciennes en introduisant de nouveaux nombres intercalaires ; les nouvelles différences

$$\mathrm{V}(a, c) - \Sigma(a, c),\ \mathrm{V}(a, b) - \Sigma(a, b),\ \mathrm{V}(b, c) - \Sigma(b, c),$$

qui sont toujours positives ou nulles sont certainement plus petites que ε ; il faut donc que l'égalité

$$\mathrm{V}(a, c) = \mathrm{V}(a, b) + \mathrm{V}(b, c)$$

soit vérifiée, puisqu'il y a des nombres aussi voisins qu'on le veut de $\mathrm{V}(a, c)$, $\mathrm{V}(a, b)$, $\mathrm{V}(b, c)$ qui vérifient cette égalité.

Les formules

$$\mathrm{P}(a, b) = \frac{\mathrm{V}(a, b) + f(b) - f(a)}{2},$$

$$\mathrm{N}(a, b) = \frac{\mathrm{V}(a, b) - [f(b) - f(a)]}{2}$$

qui sont des conséquences immédiates des égalités (1), et les formules analogues relatives aux intervalles (b, c), (a, c), permettent de déduire de la première égalité (3) la seconde et la troisième de ces égalités.

Il me sera commode d'avoir remarqué que, si une décomposition de l'intervalle (a, c) résulte de la juxtaposition de deux décompositions des deux intervalles (a, b), (b, c), on a

$$[\mathrm{V}(a, c) - \Sigma(a, c)] = [\mathrm{V}(a, b) - \Sigma(a, b)] + [\mathrm{V}(b, c) - \Sigma(b, c)]$$

et que les trois différences entre crochets sont positives ou nulles ; si, par conséquent, on sait que la première est plus petite que le nombre positif ε, on est certain qu'il en est de même des deux autres.

247. — Supposons que la fonction $f(x)$ soit à variation bornée dans l'intervalle (a, b) : si les nombres α, β appartiennent à cet intervalle, les symboles $\mathrm{V}(\alpha, \beta)$, $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$, $\mathrm{N}(\alpha, \beta)$ ont, par ce qui précède, une signification bien claire, pourvu que α soit moindre que β ; il est tout naturel de leur attribuer la valeur o quand β est égal à α ; j'exclus le cas où β serait inférieur à α. $\mathrm{P}(\alpha, \beta)$, $\mathrm{N}(\alpha, \beta)$ sont positifs ou nuls.

On a, en supposant que x appartienne à l'intervalle (a, b),

$$f(x) - f(a) = \mathrm{P}(a, x) - \mathrm{N}(a, x);$$

puis, en supposant que h soit positif et que $x + h$ appartienne aussi à l'intervalle (a, b)

$$\mathrm{P}(a, x + h) = \mathrm{P}(a, x) + \mathrm{P}(x, x + h),$$
$$\mathrm{N}(a, x + h) = \mathrm{N}(a, x) + \mathrm{N}(x, x + h);$$

les deux dernières égalités montrent que les fonctions $\mathrm{P}(a, x)$, $\mathrm{N}(a, x)$ [et par conséquent, la fonction $\mathrm{V}(a, x)$] sont non-décroissantes dans l'intervalle (a, b). En vertu de la première égalité, on voit que la fonction $f(x)$ peut être, dans l'intervalle (a, b), regardée comme la différence entre deux fonctions non-décroissantes.

Si la fonction $f(x)$ est non-décroissante dans l'intervalle $(a_0 a)$, la fonction $\mathrm{N}(a, x)$ est constamment nulle; c'est au contraire la fonction $\mathrm{P}(a, x)$ qui est toujours nulle quand la fonction $f(x)$ est non-croissante.

Si la fonction $f(x)$ est continue et à variation bornée dans l'intervalle (a, b), les fonctions $\mathrm{V}(a, x)$, $\mathrm{P}(a, x)$, $\mathrm{N}(a, x)$ sont continues dans le même intervalle.

A cause des relations, valables dans tout l'intervalle (a, b),

$$2\,\mathrm{P}(a, x) = \mathrm{V}(a, x) + f(x) - f(a),$$
$$2\,\mathrm{N}(a, x) = \mathrm{V}(a, x) - f(x) + f(a),$$

il suffit évidemment de démontrer la continuité de la fonction $\mathrm{V}(a, x)$.

Soit ε un nombre positif donné; il lui correspond un nombre positif η tel que l'on ait $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ sous la condition que x et x' appartiennent à l'intervalle (a, b) et que l'on ait $|x' - x| < \eta$, tel aussi que la différence positive ou nulle $\mathrm{V}(a, b) - \Sigma(a, b)$ soit moindre que ε pourvu que tous les intervalles partiels de la décomposition à laquelle se rapporte la somme $\Sigma(a, b)$ soient moindres que η. Soient maintenant α, β deux nombres quelconques appartenant à l'intervalle (a, b) et dont la différence soit moindre, en valeur absolue, que η. Considérons une décomposition de l'intervalle (a, b) où α, β soient deux nombres consécutifs et telle que tous les intervalles partiels soient moindres que η, les sommes $\Sigma(a, \alpha)$, $\Sigma(a, \beta)$ qui interviendront plus loin, se rapporteront à cette décomposition arrêtée au nombre α ou au nombre β; d'après une remarque antérieure, les différences positives ou nulles $V(a, \alpha) - \Sigma(a, \alpha)$, $V(a, \beta) - \Sigma(a, \beta)$ seront moindres que ε; on a d'ailleurs

$$\Sigma(a, \alpha) = \Sigma(a, \beta) \pm |f(\alpha) - f(\beta)|$$

en prenant le signe + ou le signe — suivant que β est plus petit ou plus grand que α. On aura donc

$$V(a, \beta) - V(a, \alpha) = [V(a, \beta) - \Sigma(a, \beta)] - [V(a, \alpha) - \Sigma(a, \alpha)] \\ \pm [f(\alpha) - f(\beta)]$$

et par conséquent

$$|V(a, \beta) - V(a, \alpha)| < 2\varepsilon,$$

sous la seule condition $\beta - \alpha < \eta$. La proposition est démontrée.

II. FONCTIONS INTÉGRABLES. INTÉGRALES DÉFINIES

248. — Revenons maintenant aux fonctions intégrables.

On a démontré au n° **242** que, pour que la fonction bornée $f(x)$ soit intégrable dans l'intervalle (a_0, a), il faut et il suffit qu'on puisse, à chaque nombre positif ε, faire correspondre une décomposition $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a)$ de l'intervalle (a_0, a), telle que l'on ait

$$(a_1 - a_0)(M_1 - m_1) + (a_2 - a_1)(M_2 - m_2) + \ldots + (a - a_{n-1})(M_n - m_n) < \varepsilon,$$

en désignant par M_1, m_1, par M_2, m_2, ..., par M_n, m_n les bornes supérieures et inférieures de la fonction $f(x)$ dans les intervalles partiels (a_0, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, a).

Cette condition montre tout d'abord que, si la fonction $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle (a_0, a), elle est intégrable dans tout intervalle contenu dans l'intervalle (a_0, a). De même, si une fonction $f(x)$ est intégrable dans les deux intervalles contigus (a, b), (b, c) elle est intégrable dans l'intervalle (a, c).

Toute fonction $f(x)$ continue dans l'intervalle (a_0, a) est intégrable dans cet intervalle.

Si, en effet, la fonction $f(x)$ est continue, à chaque nombre positif ε correspond un nombre positif η tel que, dans tout intervalle contenu dans (a_0, a) et dont l'écart est moindre que η, l'écart de la fonction soit moindre que ε; si donc les écarts des intervalles partiels de la décomposition $(a_0, a_1, \ldots, a)$ sont moindres que η, la somme

$$(a_1-a_0)(M_1-m_1)+(a_2-a_1)(M_2-m_2)+\ldots+(a-a_{n-1})(M_n-m_n)$$

sera moindre que $(a-a_0)\varepsilon$. La proposition est démontrée.

Si la fonction $f(x)$ est définie dans l'intervalle (a_0, a) et si, dans cet intervalle, elle est soit non-décroissante, soit non-croissante (n° **163**), elle est intégrable dans cet intervalle.

Plaçons-nous dans le premier cas ; on a alors

$$\begin{aligned} M_1 &= f(a_1),\ M_2 = f(a_2),\ \ldots,\ M_n = f(a),\\ m_1 &= f(a_0),\ m_2 = f(a_1),\ \ldots,\ m_n = f(a_{n-1}), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &(a_1-a_0)(M_1-m_1)+(a_2-a_1)(M_2-m_2)+\ldots+(a-a_{n-1})(M_n-m_n)\\ &\quad=(a_1-a_0)[f(a_1)-f(a_0)]+(a_2-a_1)[f(a_2)-f(a_1)]+\ldots\\ &\qquad+(a-a_{n-1})[f(a)-f(a_{n-1})]. \end{aligned}$$

Soit η le plus grand des écarts des intervalles partiels ; le second membre est au plus égal à

$$\begin{aligned} &\eta[f(a_1)-f(a_0)+f(a_2)-f(a_1)+\ldots+f(a)-f(a_{n-1})]\\ &=\eta[f(a)-f(a_0)]; \end{aligned}$$

si l'on se donne le nombre positif ε, il suffira de prendre

$$\eta<\frac{\varepsilon}{f(a)-f(a_0)}.$$

249. — Si une fonction $f(x)$, bornée dans l'intervalle (a_0, a), est intégrable dans cet intervalle, il en sera de même d'une fonction bornée $F(x)$ égale à la fonction $f(x)$ pour toutes les valeurs de x

appartenant à l'intervalle (a_0, a), sauf quelques valeurs en nombre limité, et l'on a

$$\int_{a_0}^{a} f(x)\,dx = \int_{a_0}^{a} \mathrm{F}(x)\,dx;$$

si, en effet, pour les deux fonctions $f(x)$, $\mathrm{F}(x)$ on considère par exemple deux sommes supérieures relatives à une même décomposition, on voit que les éléments de ces deux sommes ne peuvent différer que pour les intervalles partiels auxquels appartiennent des valeurs de x qui rendent différentes les deux fonctions $f(x)$, $\mathrm{F}(x)$; la différence entre les deux sommes peut donc être supposée aussi petite qu'on le veut, puisque ces intervalles sont en nombre limité; le même raisonnement s'applique à deux sommes inférieures relatives au même mode de décomposition, etc.

Il est bien aisé de voir que la proposition subsisterait si l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les deux fonctions $f(x)$, $\mathrm{F}(x)$ diffèrent était infini, mais d'étendue extérieure nulle.

Si l'on a $a_0 < b < a$ et si la fonction $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle (a_0, a), on a

$$\int_{a_0}^{a} f(x)\,dx = \int_{a_0}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{a} f(x)\,dx.$$

Si, étant donnée une fonction $f(x)$ dans un intervalle (a_0, a), on peut décomposer cet intervalle en intervalles partiels tels que dans chacun d'eux la fonction soit, ou continue, ou constante, ou non-croissante, ou non-décroissante, la fonction sera susceptible d'intégration dans l'intervalle (a_0, a) et l'intégrale définie relative à cet intervalle sera la somme des intégrales relatives aux intervalles partiels.

On a supposé jusqu'ici $a_0 < a$. Lorsqu'on a $a_0 > a$ et que la fonction $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle (a, a_0), on pose

$$\int_{a_0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{a}^{a_0} f(x)\,dx,$$

et cette égalité peut être regardée comme une définition du premier membre; du reste, on reconnaît immédiatement que la définition de l'intégrale, donnée au n° **240**, s'applique dans ce cas, avec des modifications insignifiantes dans le langage. Si l'on a $a_0 = a$, l'intégrale, par définition, est nulle.

On n'aura aucune peine à démontrer que, si la fonction $f(x)$ est intégrable dans le plus grand des intervalles bornés par deux des trois nombres a, b, c, on a

$$\int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

Cette égalité subsiste si deux des nombres a, b, c sont égaux.

Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions intégrables dans l'intervalle (a_0, a), on voit tout de suite que, en désignant par A et B des constantes quelconques, la fonction

$$\mathrm{A}f(x) + \mathrm{B}\varphi(x)$$

est aussi intégrable dans le même intervalle et que l'on a

$$\int_{a_0}^a [\mathrm{A}f(x) + \mathrm{B}\varphi(x)]\,dx = \mathrm{A}\int_{a_0}^a f(x)\,dx + \mathrm{B}\int_{a_0}^a \varphi(x)\,dx.$$

Si les deux fonctions bornées $f(x)$, $\varphi(x)$ sont intégrables dans l'intervalle (a_0, a), il en est de même de la fonction $f(x) \times \varphi(x)$.

Supposons en effet que, dans un même intervalle, les bornes inférieures des deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ soient respectivement m, μ et leurs écarts d, δ; on aura, en désignant par x et x' deux valeurs quelconques appartenant à cet intervalle,

$$f(x) = m + hd, \qquad f(x') = m + h'd,$$
$$\varphi(x) = \mu + \eta\delta, \qquad \varphi(x') = \mu + \eta'\delta,$$

h, h' η, η' étant des nombres qui appartiennent à l'intervalle $(0, 1)$; on en déduit

$$f(x) \times \varphi(x) - f(x') \times \varphi(x') = (h - h')\mu d + (\eta - \eta')m\delta + (h\eta - h'\eta')d\delta;$$

si donc on désigne par P un nombre positif supérieur aux valeurs absolues de m et μ, on voit que, dans l'intervalle considéré, l'écart de la fonction $f(x) \times \varphi(x)$ sera moindre que

$$\mathrm{P}(d + \delta) + d\delta;$$

ceci posé, considérons une décomposition $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a)$ de l'intervalle (a_0, a) : soient $d_1, d_2, \ldots, d_n$ et $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ les écarts des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ dans les intervalles partiels (a_0, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, a) ; si A est un nombre auquel les valeurs absolues des fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ restent inférieures dans l'intervalle (a_0, a), la somme S des écarts de la fonction $f(x)\varphi(x)$ dans les intervalles (a_0, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, a), respectivement multipliés par les écarts de ces intervalles, sera moindre que

$$\begin{aligned}(a_1 - a_0)\,[\mathrm{A}(d_1 + \delta_1) + d_1\delta_1] + (a_2 - a_1)\,[\mathrm{A}(d_2 + \delta_2) + d_2\delta_2] \\ + \ldots + (a - a_{n-1})\,[\mathrm{A}(d_n + \delta_{n-1}) + d_n\delta_n] ;\end{aligned}$$

dès lors, si ε désigne un nombre positif arbitraire, on peut, puisque les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ sont intégrables dans l'intervalle (a_0, a), supposer la décomposition telle que l'on ait

$$\begin{aligned}(a_1 - a_0)d_1 + (a_2 - a_1)d_2 + \ldots + (a - a_{n-1})d_n < \varepsilon, \\ (a_1 - a_0)\delta_1 + (a_2 - a_1)\delta_2 + \ldots + (a - a_{n-1})\delta_n < \varepsilon ;\end{aligned}$$

si donc on désigne par B un nombre positif égal ou supérieur à l'écart de la fonction $\varphi(x)$ dans l'intervalle total (a_0, a), au moins égal par conséquent à chacun des nombres $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, on aura

$$\mathrm{S} < (2\mathrm{A} + \mathrm{B})\,\varepsilon ;$$

puisque ε est arbitraire, et que les nombres A et B sont fixes, on voit que la décomposition peut être supposée telle que la différence S entre deux sommes supérieure et inférieure soit moindre que tel nombre que l'on voudra ; la fonction $f(x) \times \varphi(x)$ est donc intégrable dans l'intervalle (a_0, a).

On démontrera d'une façon analogue que, si $\varphi(x)$ est une fonction bornée intégrable dans l'intervalle (a_0, a), et dont la valeur absolue reste supérieure à un nombre positif A, la fonction $\frac{1}{\varphi(x)}$ sera intégrable dans le même intervalle.

250. — La définition de l'intégrale définie permet, lorsqu'on se donne la fonction à intégrer et les limites de l'intégrale, d'obtenir des valeurs approchées de l'intégrale définie, mais ce n'est que dans des cas très particuliers qu'elle fournit la valeur exacte de cette intégrale ; je me contenterai de citer l'exemple suivant :

Soit, en désignant par α un nombre quelconque différent de 1 en valeur absolue,

$$J = \int_0^\pi \log(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx.$$

La fonction $\log(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)$ étant continue dans l'intervalle considéré, elle est intégrable, et l'on a par définition

$$J = \lim_{n=\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{i=0}^{i=n-1} \log\left(1 - 2\alpha\cos\frac{i\pi}{n} + \alpha^2\right)$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{\pi}{n} \log \prod_{i=0}^{i=n-1} \left(1 - 2\alpha\cos\frac{i\pi}{n} + \alpha^2\right);$$

mais, en vertu d'une identité bien connue, on a

$$\prod_{i=0}^{i=n-1} \left(1 - 2\alpha\cos\frac{i\pi}{n} + \alpha^2\right) = \frac{(\alpha^{2n} - 1)(\alpha - 1)}{\alpha + 1},$$

on aura donc

$$J = \lim_{n=\infty} \frac{\pi}{n}\left[\log\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \log(1 - \alpha^{2n})\right],$$

ou

$$J = \lim_{n=\infty} \frac{\pi}{n}\left[\log\frac{\alpha-1}{\alpha+1} + \log(\alpha^{2n} - 1)\right],$$

suivant que α sera, ou non, compris entre -1 et $+1$; dans le premier cas, J est manifestement nul; dans le second cas, l'identité

$$\log(\alpha^{2n} - 1) = n\log\alpha^2 + \log\left(1 - \frac{1}{\alpha^{2n}}\right)$$

montre que J a pour valeur $\pi\log\alpha^2$.

On aperçoit bien que c'est grâce à une circonstance très particulière que l'on a pu parvenir au résultat final.

251. — L'évaluation des intégrales définies, la recherche des fonctions primitives sont deux problèmes connexes, ainsi qu'il résulte de la proposition suivante.

Si, dans l'intervalle (a_0, a), la fonction $F(x)$ admet pour dérivée la fonction $f(x)$ [ce qui implique la continuité de $F(x)$], et si, dans ce même intervalle, la fonction $f(x)$ est bornée et intégrable, on a

$$\int_{a_0}^{a} f(x)\,dx = F(a) - F(a_0).$$

Soit, en effet, $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a)$ une décomposition quelconque de l'intervalle (a_0, a); on aura, en vertu de la formule des accroissements finis (n° 216),

$$\begin{aligned} F(a) - F(a_0) &= F(a_1) - F(a_0) + F(a_2) - F(a_1) + \ldots + F(a) - F(a_{n-1}) \\ &= (a_1 - a_0)f(x_1) + (a_2 - a_1)f(x_2) + \ldots + (a - a_{n-1})f(x_n), \end{aligned}$$

en désignant par $x_1, x_2, \ldots x_n$ des nombres intérieurs respectivement aux intervalles (a_0, a_1), (a_1, a_2), ... (a_{n-1}, a). La différence $F(a) - F(a_0)$ peut donc être regardée comme une des sommes relatives à une décomposition quelconque $(a_0, a_1, \ldots, a)$, sommes dont la considération est le point de départ de la définition de l'intégrale $\int_{a_0}^{a} f(x)\,dx$. Si la fonction $f(x)$ est intégrable dans l'intervalle (a_0, a), c'est qu'il y a un nombre J dont s'approchent autant qu'on le veut les sommes relatives à une décomposition quelconque pourvu que les intervalles partiels soient suffisamment petits. Ce nombre J est donc égal à $F(a) - F(a_0)$. Tel est le cas si la fonction $f(x)$ est continue, ou à variation bornée, dans l'intervalle (a_0, a). Mais le seul fait, pour une fonction $f(x)$, d'être la dérivée d'une fonction $F(x)$, n'implique pas l'intégrabilité de cette fonction.

Les conclusions auxquelles on vient d'arriver peuvent se déduire en partie de l'étude de la fonction de x [1].

$$\varphi(x) = \int_{a_0}^{x} f(x)dx$$

[1] Il convient de remarquer que, dans la notation usuelle

$$\int_{a_0}^{x} f(x)dx$$

la lettre x n'a pas le même sens dans $f(x)dx$ et comme limite supérieure de où l'on suppose que x appartienne à l'intervalle (a_0, a) et que la fonction $f(x)$ soit bornée et intégrable dans cet intervalle.

On a

$$(x - a_0)m \leqq \varphi(x) \leqq (a - x)M,$$

en désignant toujours par m et M les bornes inférieure et supérieure de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a_0, a); la fonction $\varphi(x)$ est donc bornée dans cet intervalle ; soient $(x_0, x_0 + h)$ un intervalle contenu dans (a_0, a) et m_0, M_0 les bornes inférieure et supérieure de $f(x)$ dans cet intervalle ; la quantité

$$\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0 + h} f(x)\,dx$$

appartiendra à l'intervalle (m_0, M_0) ; elle sera au plus égale, en valeur absolue, au plus grand μ des nombres $|m|$ et $|M|$; l'inégalité

$$|\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)| \leqq |h|\mu$$

montre clairement que la fonction $\varphi(x)$ est continue pour tout nombre x_0 appartenant à l'intervalle (a_0, a).

Si la fonction $f(x)$ est continue pour $x = x_0$, l'écart de l'intervalle (m_0, M_0), auquel appartient aussi la valeur de $f(x_0)$ peut être supposé moindre que le nombre positif ε, pourvu que l'on ait $|h| < \eta$, en désignant par η un nombre positif, correspondant à ε. Sous les mêmes conditions, on aura donc

$$\left|\frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} - f(x_0)\right| < \varepsilon.$$

La fonction $\varphi(x)$ admet $f(x)$ pour dérivée, en tout point de l'intervalle (a_0, a), où la fonction $f(x)$ est continue. Si cette fonction est continue dans tout l'intervalle, $\varphi(x)$ admettra, dans tout l'intervalle, $f(x)$ pour dérivée.

---

l'intégrale : la notation précédente veut dire la valeur pour $z = x$ de la fonction de z

$$\varphi(z) = \int_{a_0}^{z} f(x)\,dx.$$

Il convient, en passant, de faire la remarque suivante : si l'on a $a_0 < a_1 < a$ et si $f_0(x)$, $f_1(x)$ sont des fonctions continues dans les intervalles (a_0, a_1), (a_1, a), mais telle que l'on n'ait pas

$$f_0(a_1) = f_1(a_1),$$

une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle (a_0, a) par cette condition qu'elle soit dans l'intervalle (a_0, a_1) constamment égale à $f_0(x)$ et, dans l'intervalle (a_1, a) constamment égale à $f_1(x)$, sauf pour la valeur $x = a_1$, qui lui fait acquérir la valeur $f(a_1) = f_0(a_1)$, sera (n° **248**) intégrable dans l'intervalle (a_0, a) ; dans ce même intervalle, la fonction

$$\varphi(x) = \int_{a_0}^{a} f(x)dx$$

est continue ; elle admet pour dérivée $f_0(x)$ dans l'intervalle (a_0, a_1) et $f_1(x)$ à l'intérieur de l'intervalle (a_1, a) (n° 206) ; pour $x = a_1$, elle admet $f_0(x)$ pour dérivée à droite et $f_1(x)$ pour dérivée à gauche. On voit, sur cet exemple simple, que la continuité de la fonction $\varphi(x)$ n'entraîne pas l'existence de la dérivée.

Je rappelle maintenant la question posée au début de ce chapitre : Une fonction $f(x)$ étant donnée, dans l'intervalle (a_0, a) existe-t-il une fonction dont $f(x)$ soit la dérivée dans cet intervalle ?

Je laisse de côté le cas où la fonction $f(x)$ est discontinue.

Dans le cas où $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a_0, a), la fonction

$$\varphi(x) = \int_{a_0}^{x} f(x)dx$$

admet $f(x)$ pour dérivée dans l'intervalle (a_0, a). Toutes les fonctions qui jouissent de la même propriété s'obtiennent en ajoutant à celle-là une constante arbitraire.

Inversement, si l'on connaît une fonction $F(x)$ définie dans l'intervalle (a_0, a) et admettant $f(x)$ pour dérivée, on peut être certain qu'il existe une constante C telle que l'on ait, pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a_0, a),

$$F(x) + C = \int_{a_0}^{x} f(x)\, dx\ ;$$

cette égalité devant subsister pour $x = a_0$, il faut que l'on ait

$$F(a_0) + C = 0 :$$

on aura donc

$$\varphi(x) = \int_{a_0}^{x} f(x)\, dx = F(x) - F(a_0).$$

Par exemple on aura

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x, \qquad \int_a^x \frac{dx}{x} = \log \frac{x}{a}$$

en supposant x positif dans la première égalité, a et x de mêmes signes dans la seconde :

$$\int_0^x \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc tg}\, x, \qquad \int_a^x \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc tg}\, x - \text{arc tg}\, a,$$

quels que soient a et x ;

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \text{arc sin}\, x - \text{arc sin}\, a,$$

en supposant a et x compris entre -1 et $+1$.

Je rappelle que les valeurs des fonctions arc tg x, arc sin x appartiennent toujours à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

On désigne souvent par le symbole

$$\int f(x)\, dx$$

la fonction primitive de la fonction $f(x)$; la valeur de ce symbole n'est déterminée qu'à une constante près. On lui donne le nom d'intégrale *indéfinie*. On peut le regarder comme une intégrale *définie* dont la limite supérieure serait x et la limite inférieure arbitraire.

On écrit par exemple

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \text{arc tg}\, x, \qquad \int \cos x\, dx = \sin x, \qquad \text{etc.} \ldots$$

C'est l'objet de l'un des chapitres du calcul intégral que de faire connaître des classes très étendues de fonctions $f(x)$ dont on peut obtenir les fonctions primitives exprimées au moyen des fonctions algébriques, des fonctions e^x, $\log x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, ... et des combinaisons de ces fonctions ; un autre problème, qui peut donner lieu à des développements indéfinis, est le suivant : des propriétés de la fonction donnée $f(x)$ déduire les propriétés de la fonction

$$\int_{a_0}^{x} f(x)\,dx\,;$$

on peut, par exemple, chercher à retrouver les propriétés de la fonction logarithmique en partant de la *définition*

$$\log x = \int_{1}^{x} \frac{dx}{x},$$

et l'on comprend comment la fonction logarithmique, si elle n'avait pas été connue avant l'invention du calcul intégral, se serait introduite d'une façon nécessaire pour répondre à cette question : quelle est la fonction dont la dérivée est $\frac{1}{x}$? la fonction logarithmique aurait ensuite conduit à la fonction e^x dont elle est la fonction inverse ; on pourrait en dire autant des fonctions $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ et $\operatorname{tg} x$, etc. On conçoit ainsi comment le problème posé au début de ce chapitre conduit inévitablement à la définition de nouvelles fonctions transcendantes. L'étude des propriétés de ces fonctions, des relations qu'elles ont entre elles ou avec les fonctions précédemment connues, a, dans le siècle précédent, conduit à des résultats considérables, dont il est impossible de prévoir le terme.

252. — On a déjà eu plusieurs fois l'occasion de s'appuyer sur ce fait que, si l'on suppose la fonction $f(x)$ finie et susceptible d'intégration dans l'intervalle (a_0, a), la valeur de l'intégrale

$$J = \int_{a_0}^{a} f(x)\,dx$$

appartient à l'intervalle $[m(a - a_0), M(a - a_0)]$, en désignant par M et m les bornes supérieure et inférieure de la fonction $f(x)$; il est naturel de se demander si la valeur de J peut atteindre une des bornes de l'intervalle auquel elle appartient, la seconde, par exemple.

Si l'on considère une décomposition $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a)$ de l'intervalle (a_0, a), J appartient à l'intervalle borné par les deux nombres

$$(a_1 - a_0)m_1 + (a_2 - a_1)m_2 + \ldots + (a - a_{n-1})m_n,$$
$$(a_1 - a_0)M_1 + (a_2 - a_1)M_2 + \ldots + (a - a_{n-1})M_n,$$

en désignant par $m_1, m_2, \ldots, m_n, M_1, M_2, \ldots, M_n$ les bornes inférieures et supérieures de la fonction dans les intervalles partiels; puis donc que les nombres $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sont au plus égaux à M, J ne peut être égal à

$$(a - a_0)M = (a_1 - a_0)M + (a_2 - a_1)M + \ldots + (a - a_{n-1})M$$

que si l'on a

$$M_1 = M_2 = \ldots = M_n = M.$$

Par conséquent le nombre J ne peut être égal à $(a - a_0)M$ que dans le cas où, quels que soient les nombres différents p, q appartenant à l'intervalle (a_0, a), la fonction $f(x)$ a M pour borne supérieure dans l'intervalle (p, q); s'il en était ainsi et si l'on savait d'ailleurs que la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a_0, a), ou que cet intervalle peut être décomposé en un nombre fini d'intervalles partiels tels que dans chacun d'eux la fonction fût, ou continue, ou croissante, ou décroissante, ou constante, on pourrait affirmer que, dans l'intervalle (a_0, a), la fonction $f(x)$ est constamment égale à M.

De même, pour que le nombre J fût égal à $(a - a_0)m$, il faudrait que, dans tout intervalle (p, q) dont les limites p, q, supposées distinctes, appartiennent à l'intervalle (a_0, a), la borne inférieure de la fonction $f(x)$ fût égale à m.

Par conséquent, sauf dans les cas exceptionnels qui viennent d'être précisés, on peut affirmer que le nombre J est égal au produit de $a - a_0$ par un nombre μ compris entre m et M, ces limites étant exclues. En particulier, si, dans tout l'intervalle (a_0, a), on a $f(x) \geqq 0$, on peut affirmer que l'intégrale, en supposant $a > a_0$, est positive; elle ne pourrait être nulle que si, dans tout intervalle contenu dans (a_0, a), la borne inférieure de la fonction était nulle.

Si la fonction $f(x)$ est continue, il y a (n° **186**) un nombre ξ appartenant à l'intervalle (a_0, a) tel que l'on ait

$$f(\xi) = \mu.$$

On peut donc écrire

$$(1) \qquad \int_{a_0}^{a} f(x)\,dx = (a - a_0) f(\xi)\,;$$

on peut même supposer dans ce cas le nombre ξ différent de a_0 et de a ; soient en effet x' et x'' les deux nombres de l'intervalle (a_0, a) pour lesquels on a

$$f(x') = \mathrm{M}, \quad f(x'') = m\,;$$

la fonction continue $f(x) - \mu$ étant positive pour $x = x'$, négative pour $x = x''$, s'annule pour un nombre ξ compris entre x' et x'', par conséquent compris entre a_0 et a et distinct de ces limites.

Si $\mathrm{F}(x)$ est une fonction qui, dans l'intervalle (a_0, a), admette $f(x)$ pour dérivée, on aura

$$\int_{a_0}^{a} f(x)\,dx = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(a_0)$$

et l'égalité (1) deviendra

$$\mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(a_0) = (a - a_0) f(\xi)\,;$$

cette égalité exprime le théorème démontré d'une autre façon dans le n° **216** ; mais, à la vérité, la nouvelle démonstration suppose la continuité de la dérivée $f(x)$ de la fonction $\mathrm{F}(x)$, continuité qui n'était pas supposée dans la première démonstration.

On peut aussi établir de la même façon une formule analogue à celle du n° **230** ; je vais le faire en suivant une méthode due à M. Darboux [1], et qui, d'ailleurs a été utilisée déjà au n° **231**.

---

(1) *Sur les développements en série des fonctions d'une seule variable* (*Journal de Liouville*, 3e série, t. II, p. 295).

Soit $\varphi(t)$ un polynome entier en t du degré n, et $f(x)$ une fonction de x admettant des dérivées première, seconde, ..., $(n+1)^{\text{ième}}$,

$$f'(x), \quad f''(x), \ldots, \quad f^{(n+1)}(x);$$

je suppose que la dernière de ces dérivées soit continue.

Considérons la fonction de t

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= \varphi^{(n)}(t)f(x+ht) - h\varphi^{(n-1)}(t)f'(x+ht)\\ &+ h^2\varphi^{(n-2)}(t)f''(x+ht) + \ldots + (-1)^{n-1}h^{n-1}\varphi'(t)f^{(n-1)}(x+ht)\\ &\qquad + (-1)^n h^n \varphi(t) f^{(n)}(x+ht),\end{aligned}$$

où h est une constante et où $\varphi'(t)$, $\varphi''(t)$, ..., $\varphi^{(n)}(t)$ sont les dérivées successives du polynome $\varphi(t)$; en prenant les dérivées des deux membres par rapport à t, on trouvera (nos **210**, **231**)

$$\Psi'(t) = (-1)^n h^{n+1} \varphi(t) f^{(n+1)}(x+ht).$$

On en déduira, en intégrant entre les limites o et 1,

$$\Psi(1) - \Psi(0) = (-1)^n h^{n+1} \int_0^1 \varphi(t) f^{(n+1)}(x+ht)\,dt,$$

ou, en désignant le second membre par R_n et en remarquant que $\varphi^{(n)}(1)$ est égal à $\varphi^{(n)}(0)$, puisque $\varphi^{(n)}(t)$ ne dépend pas de t,

$$\begin{aligned}&\varphi^{(n)}(0)\,[f(x+h) - f(x)]\\ &\quad = h\,[\varphi^{(n-1)}(1)f'(x+h) - \varphi^{(n-1)}(0)f'(x)]\\ &\quad - h^2\,[\varphi^{(n-2)}(1)f''(x+h) - \varphi^{(n-2)}(0)f''(x)]\\ &\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\quad - (-1)^n h^n\,[\varphi(1)f^{(n)}(x+h) - \varphi(0)f^{(n)}(x)] + R_n.\end{aligned}$$

Si, dans cette formule, on remplace $\varphi(t)$ par $(1-t)^n$ et que l'on divise les deux membres par $(-1)^n\, 1.2\ldots n$, on aura

$$\begin{aligned}f(x+h) - f(x) &= \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots\\ &+ \frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{1.2\ldots n}\int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(x+ht)\,dt.\end{aligned}$$

253. — Soient $\varphi(x)$ et $f(x)$ deux fonctions finies et intégrables dans l'intervalle (a_0, a); il en sera de même de leur produit; supposons que, dans cet intervalle, la première fonction $\varphi(x)$ ne soit jamais négative, ou jamais positive, on aura

$$\int_{a_0}^{a} \varphi(x) f(x) \, dx = \mu \int_{a_0}^{a} \varphi(x) \, dx,$$

en désignant par μ un nombre compris entre la borne inférieure m et la borne supérieure M de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a_0, a) [1]; sauf dans des cas exceptionnels, que la démonstration précisera suffisamment, on peut affirmer que le nombre μ est distinct des nombres m et M. Je supposerai, pour la démonstration, que la fonction $\varphi(x)$ ne soit jamais négative. Les fonctions

$$\varphi(x)[\mathrm{M} - f(x)], \qquad \varphi(x)[f(x) - m],$$

ne sont, en vertu des hypothèses que l'on a faites, jamais négatives dans l'intervalle (a_0, a); leurs bornes inférieures sont donc, ou nulles, ou positives; on a donc, d'après le théorème démontré dans le numéro précédent,

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \int_{a_0}^{a} \varphi(x)[\mathrm{M} - f(x)] \, dx \geqq 0, \\ & \int_{a_0}^{a} \varphi(x)[f(x) - m] \, dx \geqq 0; \end{aligned} \right.$$

on ne pourrait avoir le signe $=$ dans la première inégalité que si la fonction

$$\varphi(x)[\mathrm{M} - f(x)]$$

avait pour borne inférieure o dans tout intervalle contenu dans l'intervalle (a_0, a); de même pour la seconde inégalité.

D'ailleurs, les inégalités qui précèdent équivalent aux suivantes:

$$(2) \qquad m \int_{a_0}^{a} \varphi(x) \, dx \leqq \int_{a_0}^{a} \varphi(x) f(x) \, dx \leqq \mathrm{M} \int_{a_0}^{a} \varphi(x) \, dx,$$

qui démontrent la proposition énoncée.

---

(1) On donne souvent à ce théorème le nom de *premier théorème de la moyenne*.

Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a_0, a), il y aura une valeur ξ appartenant à cet intervalle pour laquelle on aura

$$f(\xi) = \mu ;$$

et l'on pourra écrire

$$\int_{a_0}^{a} \varphi(x) f(x)\, dx = f(\xi) \int_{a_0}^{a} \varphi(x)\, dx.$$

S'il y a un intervalle contenu dans l'intervalle (a_0, a) dans lequel la fonction $\varphi(x)$ ait une borne inférieure autre que zéro et dans lequel la fonction continue $f(x)$ ne soit pas constante, on peut affirmer que le nombre ξ est différent de a_0 et de a. Dans ce cas, en effet, il y aura un intervalle contenu dans l'intervalle considéré et dans lequel les fonctions $M - f(x)$, $f(x) - m$ ne s'annuleront pas et resteront supérieures à un certain nombre positif ; il en sera de même du produit de ces fonctions par $\varphi(x)$; en sorte que le signe $=$ devra être exclu des inégalités (1) ou (2) ; au reste, si l'on désigne par x', x'' les valeurs appartenant à l'intervalle (a_0, a) pour lesquelles on a

$$f(x') = M, \qquad f(x'') = m,$$

les inégalités (2) équivalent à dire que la fonction continue de x

$$f(x) \int_{a_0}^{a} \varphi(x)\, dx - \int_{a_0}^{a} \varphi(x) f(x)\, dx$$

(où les intégrales doivent être regardées comme des constantes), est positive pour $x = x'$, négative pour $x = x''$; cette fonction s'annule donc pour un nombre ξ compris entre x' et x'', distinct de ces nombres et par conséquent de a_0 et de a.

En se reportant, par exemple, à l'expression considérée à la fin du dernier paragraphe,

$$\int_0^1 (1 - t)^n f^{(n+1)}(x + ht)\, dt,$$

on voit que cette expression, si la fonction de t, $f^{(n+1)}(x + ht)$, est continue dans l'intervalle $(0, 1)$, peut s'écrire

$$f^{n+1}(x + \theta h) \int_0^1 (1 - t)^n\, dt = \frac{1}{n + 1} f^{(n+1)}(x + \theta h),$$

θ étant un nombre compris entre zéro et un ; en multipliant cette quantité par $\frac{h^n}{1.2\ldots n}$, on retrouve l'expression du reste de la série de Taylor, donnée par Lagrange.

Considérons encore l'expression

$$J = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

où la constante k^2 est supposée plus petite que un et où la limite supérieure x de l'intégrale est un nombre positif plus petit que un ; on aura, en désignant par ξ un nombre compris entre zéro et x,

$$J\sqrt{1-k^2\xi^2} = \text{arc sin } x,$$

et par conséquent

$$\sin\left(J\sqrt{1-k^2}\right) < x < \sin J.$$

254. — Au théorème qui fait l'objet du numéro précédent se rattache une autre proposition, un peu plus cachée, à laquelle on donne habituellement le nom de second théorème de la moyenne [1] ; elle est due à O. Bonnet et repose sur le lemme d'Abel établi au n° **138**.

Je ferai d'abord la remarque suivante : Soit $f(x)$ une fonction bornée et intégrable de la variable x dans l'intervalle (a_0, a) ; soit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a$ une décomposition de l'intervalle (a_0, a) en intervalles partiels : désignons par $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}, f_n$ les valeurs de la fonction $f(x)$ pour les valeurs $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a$ attribuées à la variable x ; la somme

$$(a_1 - a_0)f_0 + (a_2 - a_1)f_1 + \ldots + (a - a_{n-1})f_{n-1}$$

sera une valeur approchée de l'intégrale

$$\int_{a_0}^{a} f(x)\,dx,$$

---

[1] *Mémoire sur la théorie générale des séries*, dans les Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers, publiés par l'Académie royale de Belgique (t. XXIII, p. 8).

et l'erreur commise en substituant la somme à l'intégrale sera au plus égale à la somme δ des écarts de la fonction $f(x)$ dans les intervalles partiels (a_0, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, a) respectivement multipliés par les écarts $a_1 - a_0$, $a_2 - a_1$, ..., $a - a_{n-1}$ de ces intervalles ; de même les quantités

$$\begin{aligned} s_1 &= (a_1 - a_0)f_0, \\ s_2 &= (a_1 - a_0)f_0 + (a_2 - a_1)f_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_i &= (a_1 - a_0)f_0 + (a_2 - a_1)f_1 + \ldots + (a_i - a_{i-1})f_{i-1} \end{aligned}$$

pourront être prises pour des valeurs approchées des intégrales

$$\int_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx, \quad \int_{a_0}^{a_2} f(x)\,dx, \ldots, \quad \int_{a_0}^{a_i} f(x)\,dx$$

et, pour chacune d'elles, l'erreur sera moindre que δ ; si donc on désigne par A_0 et A les bornes inférieure et supérieure, dans l'intervalle (a_0, a), de la fonction

$$\int_{a_0}^{x} f(x)\,dx$$

on peut affirmer que les quantités s_1, s_2, ..., s_n appartiennent toutes à l'intervalle $(A_0 - \delta, A + \delta)$; enfin, je rappelle que, si ε est un nombre positif arbitrairement donné, on peut supposer la décomposition $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a)$ telle que l'on ait $\delta < \varepsilon$.

Ceci posé, soit $\varphi(x)$ une fonction de la variable x qui, dans l'intervalle (a_0, a), ne soit jamais négative, qui, en outre, soit non-croissante ; la fonction $f(x)\varphi(x)$ sera intégrable dans l'intervalle (a_0, a).

Si, tout en conservant les notations précédemment adoptées, on désigne par $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ les valeurs de la fonction $\varphi(x)$ pour les valeurs $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ attribuées à la variable x, la somme

$$S = (a_1 - a_0)f_0\varphi_0 + (a_2 - a_1)f_1\varphi_1 + \ldots + (a - a_{n-1})f_{n-1}\varphi_{n-1},$$

sera une valeur approchée de l'intégrale

$$J = \int_{a_0}^{a} f(x)\varphi(x)\,dx,$$

et la décomposition $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a)$ peut être supposée telle que les conditions précédemment imposées, relatives à la fonction $f(x)$, soient vérifiées et que l'erreur commise dans l'évaluation de la dernière intégrale soit moindre que ε. Dès lors les quantités $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ étant toutes positives (ou nulles) et formant une suite non croissante, et les quantités $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ appartenant toutes à l'intervalle $(A_0 - \varepsilon, A + \varepsilon)$, la quantité S appartiendra à l'intervalle $[(A_0 - \varepsilon)\varphi_0, (A + \varepsilon)\varphi_0]$, ainsi qu'il résulte de l'identité

$$\begin{aligned} S &= \varphi_0 s_1 + \varphi_1(s_2 - s_1) + \ldots + \varphi_{n-1}(s_n - s_{n-1}) \\ &= s_1(\varphi_0 - \varphi_1) + s_2(\varphi_1 - \varphi_2) + \ldots + s_{n-1}(\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) + s_n\varphi_{n-1}, \end{aligned}$$

dans le dernier membre de laquelle toutes les quantités

$$\varphi_0 - \varphi_1, \quad \varphi_1 - \varphi_2, \ldots, \quad \varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}, \quad \varphi_{n-1}$$

sont positives ou nulles ; mais les inégalités

$$\begin{gathered} (A_0 - \varepsilon)\varphi_0 \leqq S \leqq (A + \varepsilon)\varphi_0, \\ S - \varepsilon < J < S + \varepsilon, \end{gathered}$$

entraînent les suivantes :

$$A_0\varphi_0 - \varepsilon(\varphi_0 + 1) < J < A\varphi_0 + \varepsilon(\varphi_0 + 1) ;$$

et, comme ε peut être pris aussi petit que l'on veut, il faut que l'on ait

$$A_0\varphi_0 \leqq J \leqq A\varphi_0 ;$$

c'est la proposition que j'avais en vue. En résumé, si, dans l'intervalle (a_0, a), la fonction $f(x)$ est bornée et intégrable, si, dans le même intervalle, la fonction $\varphi(x)$ n'est jamais négative et, en outre, non-croissante, on aura

$$\varphi(a_0)A_0 \leqq \int_{a_0}^{a} f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqq \varphi(a_0)A, \tag{1}$$

en désignant par A_0 et A les bornes inférieure et supérieure de la fonction de x,

$$\int_{a_0}^{x} f(x)\,dx,$$

continue dans l'intervalle (a_0, a).

Les inégalités (1) donnent lieu à la remarque suivante : si la fonction $\varphi(x)$ n'est pas continue pour la valeur $x = a_0$ qui, dans l'énoncé du théorème comme dans la démonstration, est supposée plus petite que a, cette fonction, lorsque le nombre x tend vers a_0 par des valeurs décroissantes, tend vers une limite, puisque, dans ces conditions, elle ne décroît jamais et reste toujours inférieure ou égale à $\varphi(a_0)$; désignons, en adoptant une notation employée par Lejeune Dirichlet, cette limite par $\varphi(a_0 + 0)$; si la fonction $\varphi(x)$ était continue pour $x = a_0$, le symbole $\varphi(a_0 + 0)$ ne représenterait pas autre chose que $\varphi(a_0)$. Dans tous les cas, la valeur de l'intégrale

$$\int_{a_0}^{a} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

ne serait pas modifiée, si l'on remplaçait la fonction $\varphi(x)$ par une fonction $\Phi(x)$ égale à $\varphi(a_0 + 0)$ pour $x = a_0$, et à $\varphi(x)$ pour toutes les autres valeurs de x appartenant à l'intervalle (a_0, a) ; d'ailleurs la fonction $\Phi(x)$ jouirait des propriétés requises pour l'application du théorème ; on peut donc substituer aux inégalités (1) les suivantes, où les nombres A_0 et A conservent les mêmes significations :

$$(2) \qquad A_0\varphi(a_0 + 0) \leqq \int_{a_0}^{a} f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqq A\varphi(a_0 + 0).$$

Enfin, la fonction de x,

$$\int_{a_0}^{x} f(x)\,dx,$$

devant prendre n'importe quelle valeur B appartenant à l'intervalle (A_0, A) pour une valeur ξ de x, appartenant à l'intervalle (a_0, a), les inégalités précédentes peuvent être remplacées par l'égalité

$$(3) \qquad \int_{a_0}^{a} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(a_0 + 0)\int_{a_0}^{\xi} f(x)\,dx,$$

ξ étant un nombre dont on sait seulement qu'il appartient à l'intervalle (a_0, a).

Weierstrass a transformé ce dernier énoncé de manière à obtenir une proposition applicable à une fonction $\varphi(x)$ qui, dans l'intervalle (a_0, a), est ou non-croissante, ou non-décroissante.

Supposons qu'on soit dans le premier cas, la fonction

$$\varphi(x) - \varphi(a - 0),$$

où $\varphi(a - 0)$ désigne la limite vers laquelle tend l'expression $\varphi(x)$, lorsque x tend vers a par des valeurs croissantes, sera non-croissante dans l'intervalle (a_0, a) et ne sera négative pour aucune valeur de x appartenant à cet intervalle ; on pourra donc lui appliquer le théorème qu'exprime l'égalité (3) et l'on aura ainsi

$$\int_{a_0}^{a} f(x)[\varphi(x) - \varphi(a-0)]\,dx = [\varphi(a_0+0) - \varphi(a-0)]\int_{a_0}^{\xi} f(x)dx,$$

ou

$$(4)\quad \int_{a_0}^{a} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(a_0 + 0)\int_{a_0}^{\xi} f(x)dx + \varphi(a-0)\int_{\xi}^{a} f(x)dx\,;$$

ξ désigne toujours un nombre appartenant à l'intervalle (a_0, a). C'est l'égalité que j'avais en vue ; elle subsisterait, si dans l'intervalle (a_0, a) la fonction $\varphi(x)$ était non-décroissante ; on le verra en remplaçant dans l'égalité (3) $\varphi(x)$ par $\varphi(a - 0) - \varphi(x)$.

255. — On a supposé jusqu'ici, lorsque l'on a considéré une intégrale définie

$$\int_{a_0}^{a} \varphi(x)\,dx,$$

que, dans l'intervalle (a_0, a), la fonction $\varphi(x)$ était bornée ; on peut étendre la notion d'intégrabilité à des fonctions qui ne satisfont pas à cette condition.

Soit (a_0, a) un intervalle et supposons que, quelque petit que soit le nombre positif $\varepsilon < a - a_0$, la fonction $\varphi(x)$ soit bornée et intégrable dans l'intervalle $(a_0, a - \varepsilon)$; si la quantité

$$\chi(\varepsilon) = \int_{a_0}^{a-\varepsilon} \varphi(x)\,dx,$$

définie tant que l'on a $0 < \varepsilon < a - a_0$, tend vers une limite J lorsque ε tend vers zéro (par valeurs positives), il sera naturel de regarder le nombre J comme étant, par définition, la valeur du symbole

$$\int_{a_0}^{a} \varphi(x)\,dx.$$

Cette circonstance se présentera nécessairement si la fonction $\varphi(x)$ est bornée et intégrable dans l'intervalle (a_0, a), puisque alors $\chi(\varepsilon)$ est une fonction continue de ε et la nouvelle définition du symbole

$$\int_{a_0}^{a} \varphi(x)\,dx$$

coïncidera avec celle qui avait été primitivement adoptée ; mais la quantité désignée par $\chi(\varepsilon)$ peut avoir une limite, lors même que la fonction $\varphi(x)$ ne serait pas bornée dans l'intervalle $(a - \varepsilon, a)$, lors même qu'elle ne serait pas *définie*, ou n'aurait pas de sens pour $x = a$; on sait, par exemple, que l'on a, quel que soit le nombre x compris entre zéro et un,

$$\int_{0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \operatorname{arc\,sin} x\ ;$$

lorsque x tend vers 1 par valeurs croissantes, le second membre tend vers la limite $\frac{\pi}{2}$; il en est nécessairement de même du premier, quoique la fonction $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ grandisse indéfiniment quand x tend vers 1 par valeurs croissantes et qu'elle n'ait point de sens pour $x = 1$. On dira que la fonction $\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ est intégrable dans l'intervalle $(0, 1)$ et l'on écrira

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Ce qui vient d'être dit pour la limite supérieure a de l'intervalle s'applique à la limite inférieure a_0 ; on pourra écrire, par exemple,

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Supposons maintenant que, b étant un nombre compris entre a_0 et a, la fonction $\varphi(x)$, quelque petits que soient les nombres positifs ε, η, soit bornée et intégrable dans les intervalles $(a_0, b-\varepsilon)$, $(b+\eta, a)$ et que la quantité

$$\chi(\varepsilon, \eta) = \int_{a_0}^{b-\varepsilon} \varphi(x)\,dx + \int_{b+\eta}^{a} \varphi(x)\,dx,$$

définie tant que l'on a

$$0 < \varepsilon < b - a_0, \qquad 0 < \eta < a - b,$$

tende vers une limite J lorsque les nombres ε, η tendent vers zéro. On dira que la fonction $\varphi(x)$ est intégrable dans l'intervalle (a_0, a) et l'on écrira

$$J = \int_{a_0}^{a} \varphi(x)\,dx;$$

c'est ce qui arrivera certainement si la fonction $\varphi(x)$ est bornée et intégrable dans l'intervalle $(b-\varepsilon, b+\eta)$, et par conséquent dans l'intervalle (a_0, a) ; mais cela pourrait arriver sans que la fonction $\varphi(x)$ fût bornée dans l'intervalle $(b-\varepsilon, b+\eta)$, lors même qu'elle n'aurait point de sens, ou ne serait pas définie, pour $x = b$. Par exemple, dans tout intervalle qui ne contient pas zéro, la fonction $\sqrt[3]{x}$ a pour dérivée $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; on en conclut, ε et η étant positifs,

$$\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{\eta}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3(2 - \sqrt[3]{\varepsilon} - \sqrt[3]{\eta});$$

lorsque ε et η tendent vers zéro par des valeurs positives, le second membre a pour limite le nombre 6 ; telle est donc aussi la limite du premier membre ; la fonction $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ qui grandit indéfiniment quand x tend vers zéro, qui n'a pas de sens pour $x = 0$, est intégrable dans l'intervalle $(-1, +1)$ et l'on a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 6.$$

En disant en général que $\chi(\varepsilon, \eta)$ tend vers la limite J lorsque

ε, η tendent vers zéro par des valeurs positives, on entend qu'à chaque nombre positif α correspond un nombre positif α' tel que les inégalités

$$0 < \varepsilon < \alpha', \qquad 0 < \eta < \alpha',$$

entraînent l'inégalité

$$|\chi(\varepsilon, \eta) - J| < \alpha.$$

C'est ce qui arrivera évidemment si les deux intégrales dont $\chi(\varepsilon, \eta)$ est la somme tendent respectivement vers des limites quand ε, η tendent vers o et c'est ce qui n'arrivera que dans ce cas, comme le lecteur n'aura pas de peine à s'en convaincre.

Un exemple simple montrera comment l'expression $\chi(\varepsilon, \eta)$, lorsque les deux intégrales dont elle est la somme n'ont pas de limites, peut s'approcher de valeurs très différentes quand on fait tendre ε, η vers o.

Soit, en conservant les notations antérieures,

$$\varphi(x) = \frac{1}{x - b},$$

on aura

$$\int_{a_0}^{b-\varepsilon} \frac{dx}{x - b} + \int_{b+\eta}^{a} \frac{dx}{x - b} = \log \frac{a - b}{b - a_0} + \log \frac{\varepsilon}{\eta};$$

il suffit de faire tendre ε et η vers o de façon que leur rapport ait pour limite un nombre positif arbitraire k pour que le second membre tende vers la limite

$$\log \frac{a - b}{b - a_0} + \log k.$$

En restant à ce point de vue, on n'attribuera donc pas de signification au symbole

$$\int_{a_0}^{a} \varphi(x)\, dx$$

si les deux intégrales dont la somme est $\chi(\varepsilon, \eta)$ ne tendent pas vers des limites lorsque ε, η tendent vers o.

Le cas où cette somme tend vers une limite lorsqu'on suppose

$\eta = \varepsilon$ et que ε tend vers o est, toutefois, digne d'intérêt : la limite vers laquelle tend alors

$$\int_{a_0}^{b-\varepsilon} \varphi(x)\, dx + \int_{b+\varepsilon}^{a} \varphi(x)\, dx$$

est ce que Cauchy a appelé *la valeur principale* de l'intégrale

$$\int_{a_0}^{a} \varphi(x)\, dx.$$

En me bornant toujours aux valeurs qui appartiennent à un intervalle (a_0, a) et b étant une de ces valeurs, je dirai d'une fonction $\varphi(x)$ qui peut n'être pas définie ou n'avoir pas de sens pour $x = b$, mais qui est définie pour les valeurs voisines appartenant à l'intervalle $(a_0\, a)$, qu'elle devient infinie aux environs de b, si quelque grand que soit le nombre positif P, on a

$$|\varphi(x)| > \mathrm{P}$$

pour des valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (a_0, a), qui sont différentes de b, mais aussi voisines de b qu'on le veut. Il résulte du n° **160** qu'une fonction définie dans l'intervalle (a_0, a) et qui ne devient pas infinie aux environs de quelque valeur appartenant à cet intervalle, est nécessairement bornée.

Si une fonction $\varphi(x)$ est définie pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle $(a_0\, a)$ sauf, peut-être, pour un nombre limité de ces valeurs, si elle ne devient infinie qu'aux environs d'un nombre limité de valeurs appartenant à l'intervalle, si enfin elle est intégrable dans tout intervalle contenu dans $(a_0\, a)$ auquel n'appartient aucune des valeurs de x aux environs desquelles la fonction devient infinie, il est clair qu'on pourra étendre à cette fonction les considérations développées au début de ce numéro et chercher si elle est, ou non, intégrable dans l'intervalle $(a_0\, a)$. Comme dans le cas où la fonction ne devient infinie qu'aux environs d'une seule valeur de x, on ramènera, en décomposant l'intervalle (a_0, a) en un nombre suffisant d'intervalles partiels, le problème au cas où la fonction ne devient infinie qu'aux environs, soit de la limite supérieure, soit de la limite inférieure de l'intégrale. Les raisonnements étant les mêmes pour les deux limites, je ne considérerai que la limite supérieure.

256. — Soit donc $\varphi(x)$ une fonction qui, quelque voisin du nombre a que soit le nombre ξ, compris entre $a_0 < a$ et a, soit bornée et intégrable dans l'intervalle (a_0, ξ); il s'agit, en supposant que la fonction $\varphi(x)$ devienne infinie aux environs de $x = a$, de reconnaître si l'intégrale

$$\Phi(\xi) = \int_{a_0}^{\xi} \varphi(x)\, dx$$

tend vers une limite lorsque ξ tend vers a par des valeurs croissantes.

C'est un problème de même nature que celui qui consiste à reconnaître si une série donnée est convergente ou non.

On remarquera d'abord que rien n'empêche, quand on cherche à répondre seulement à la question posée, de substituer au nombre a_0 un nombre fixe quelconque compris entre a_0 et a, mais distinct de a.

Le théorème du n° **158** fournit immédiatement la règle suivante :

Pour que l'intégrale proposée ait une limite, il faut et il suffit qu'à chaque nombre positif α corresponde un nombre $a' < a$, tel que les inégalités

$$a' < \xi < \xi' < a$$

entraînent l'inégalité

$$\left| \int_{\xi}^{\xi'} \varphi(x)\, dx \right| < \alpha\,;$$

mais l'application de cette règle générale est souvent malaisée et il ne sera pas inutile de donner des règles particulières qui, dans des cas assez étendus, permettent de trancher la question.

Supposons que la fonction $\varphi(x)$ puisse se mettre sous la forme $f(x)\psi(x)$, $f(x)$ étant une fonction bornée et intégrable dans l'intervalle $(a_0\, a)$ et $\psi(x)$ étant une fonction qui devienne infinie aux environs de a, mais qui, quel que soit le nombre ξ *intérieur* à l'intervalle (a_0, a), soit toujours dans l'intervalle (a_0, ξ), bornée et intégrable, et de plus ne soit jamais négative dans ce même intervalle, ou jamais positive : je supposerai dans ce qui suit qu'elle ne soit jamais négative ; on ramènerait l'autre cas à celui-là, en remplaçant $\varphi(x)$ par $-\varphi(x)$.

L'intégrale $\int_{a}^{\xi} \psi(x)\, dx$ considérée comme une fonction de ξ est alors une fonction non-décroissante dans tout intervalle contenu dans (a_0, a) ; elle peut, lorsque ξ tend vers a, tendre vers une limite ou vers $+\infty$.

En supposant d'abord qu'elle tende vers une limite, je vais montrer qu'il en est de même de l'intégrale

$$\int_{a_0}^{\xi} \varphi(x)\, dx.$$

Supposons en effet $a_0 < \xi < \xi' < a$, la fonction $f(x)\psi(x)$, produit de deux fonctions bornées et intégrables dans l'intervalle (ξ, ξ'), est elle-même bornée et intégrable dans ce même intervalle et le premier théorème de la moyenne fournit l'inégalité

$$\left|\int_{\xi}^{\xi'} f(x)\psi(x)\, dx\right| < \mathrm{A}\int_{\xi}^{\xi'} \psi(x)\, dx,$$

en désignant par A un nombre positif que l'on peut prendre égal à la borne supérieure de $|f(x)|$ dans (a_0, a), ou plus grand.

Mais, par hypothèse, l'intégrale qui figure dans le second membre peut être supposée aussi petite qu'on le veut, pourvu que ξ, ξ' soient suffisamment voisins de a ; il en est de même du premier membre et la proposition est démontrée.

Le lecteur reconnaîtra sans peine que l'on a encore dans ce cas

$$m\int_{a_0}^{a} \psi(x)\, dx \leqq \int_{a_0}^{a} f(x)\psi(x)\, dx \leqq \mathrm{M}\int_{a_0}^{a} \psi(x)\, dx,$$

en désignant par m et M les bornes inférieure et supérieure de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a_0, a). Il est à peine utile de dire que cette dernière conclusion s'étend au cas où la fonction $\psi(x)$ supposée toujours non négative, bornée et intégrable dans tout intervalle dont les bornes a_0', a' vérifient les conditions $a_0 < a_0' < a' < a$, deviendrait infinie aux environs de a_0 au lieu de le devenir aux environs de a, ou encore deviendrait infinie aux environs de a_0 et de a, pourvu que l'intégrale $\int_{a_0}^{a} \varphi(x)\, dx$ ait un sens.

Supposons maintenant que, la fonction $\psi(x)$ satisfaisant toujours aux mêmes conditions, l'intégrale

$$\int_{a_0}^{\xi} \psi(x)\,dx$$

grandisse indéfiniment quand ξ tend vers a par valeurs croissantes ; s'il arrive que, a'_0 désignant un nombre fixe quelconque compris entre a_0 et a et distinct de ce dernier nombre, la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a'_0, a) conserve le même signe et reste supérieure, en valeur absolue, à un nombre positif B, le premier théorème de la moyenne fournira encore l'inégalité

$$\left|\int_{a'_0}^{\xi} f(x)\,\psi(x)\,dx\right| > B\int_{a'_0}^{\xi} \psi(x)\,dx,$$

qui montre clairement que le premier membre, comme le second, grandit indéfiniment quand ξ tend vers a par valeurs croissantes ; il en est de même de la valeur absolue de l'intégrale proposée

$$\int_{a_0}^{\xi} \varphi(x)\,dx.$$

On voit sans peine que, dans ce cas, le rapport

$$\frac{\displaystyle\int_{a_0}^{\xi} \varphi(x)\,dx}{\displaystyle\int_{a_0}^{\xi} \psi(x)\,dx}$$

finit par rester, lorsque ξ tend vers a par valeurs croissantes, compris entre deux bornes fixes, dont aucune n'est nulle ; c'est ce que l'on exprime en disant que le numérateur devient infini comme le dénominateur ; cette locution prendra un sens plus précis si $f(x)$ tend vers une limite, $f(a-0)$, différente de zéro, quand x tend vers a par des valeurs croissantes ; le précédent rapport a aussi pour limite $f(a-0)$. On voit en effet tout d'abord que, dans ce cas, le numérateur augmente indéfiniment par des valeurs positives ou négatives, suivant que la quantité $f(a-0)$ est positive ou négative. Soit maintenant α un nombre positif aussi petit qu'on le voudra, on pourra lui faire correspondre un nombre $a' < a$ tel que, sous les conditions

$$a' < x < a,$$

on ait

$$|f(x) - f(x-0)| < \alpha.$$

En désignant par ε un nombre positif égal ou inférieur à $a - a'$ et par ξ un nombre compris entre $a - \varepsilon$ et a, on aura, toujours en vertu du premier théorème de la moyenne,

$$f(a-0) - \alpha < \frac{\int_{a-\varepsilon}^{\xi} f(x)\,\psi(x)\,dx}{\int_{a-\varepsilon}^{\xi} \psi(x)\,dx} < f(a-0) + \alpha\,;$$

d'ailleurs, une fois ε fixé comme on vient de le dire, on pourra prendre ξ assez voisin de a pour que les deux rapports

$$\frac{\int_{a_0}^{a-\varepsilon} \varphi(x)\,dx}{\int_{a-\varepsilon}^{\xi} \varphi(x)\,dx}, \qquad \frac{\int_{a_0}^{a-\varepsilon} \psi(x)\,dx}{\int_{a-\varepsilon}^{\xi} \psi(x)\,dx}$$

soient, en valeur absolue, moindres que α, puisque leurs dénominateurs peuvent être supposés aussi grands qu'on le veut ; dès lors l'identité

$$\frac{\int_{a_0}^{\xi} \varphi(x)\,dx}{\int_{a_0}^{\xi} \psi(x)\,dx} = \frac{\int_{a-\varepsilon}^{\xi} \varphi(x)\,dx}{\int_{a-\varepsilon}^{\xi} \psi(x)\,dx} \; \frac{1 + \dfrac{\int_{a_0}^{a-\varepsilon} \varphi(x)\,dx}{\int_{a-\varepsilon}^{\xi} \varphi(x)\,dx}}{1 + \dfrac{\int_{a_0}^{a-\varepsilon} \psi(x)\,dx}{\int_{a-\varepsilon}^{\xi} \psi(x)\,dx}},$$

montre que le premier membre est compris entre les deux quantités

$$[f(a-0)+\alpha]\frac{1+\alpha}{1-\alpha},$$

et

$$[f(a-0)-\alpha]\frac{1-\alpha}{1+\alpha}.$$

Or, le nombre α pouvant être supposé assez petit pour que l'une et l'autre de ces deux quantités soient aussi voisines que l'on voudra de $f(a-0)$, la proposition énoncée est démontrée. Le lecteur ne manquera pas de rapprocher cette proposition de l'une des règles de l'Hospital (n° 235).

Les remarques précédentes permettront, dans bien des cas, de ramener le problème proposé à un problème plus simple.

Supposons, par exemple, qu'on puisse mettre la fonction sous le signe $\int$ sous la forme

$$\varphi(x)=f_1(x)+(a-x)^{-r}f_2(x),$$

$f_1(x)$ et $f_2(x)$ étant des fonctions bornées et intégrables dans l'intervalle (a_0, a) et r un nombre positif ; on aura

$$\int_{a_0}^{\xi}\varphi(x)\,dx=\int_{a^0}^{\xi}f_1(x)\,dx+\int_{a_0}^{\xi}(a-x)^{-r}f_2(x)\,dx\,;$$

on n'a pas à s'occuper de la première intégrale du second membre ; quant à la seconde, si l'on applique la méthode précédente en prenant pour $\psi(x)$ la fonction positive $\frac{1}{(a-x)^r}$, on voit tout de suite, en partant de l'identité

$$D_x(a-x)^{-r+1}=(r-1)(a-x)^{-r},$$

valable tant que r est différent de 1, que l'on a

$$\int_{a_0}^{\xi}(a-x)^{-r}\,dx=\frac{1}{r-1}\left[(a-\xi)^{1-r}-(a-a_0)^{1-r}\right];$$

si l'on a $r<1$, le second membre tend certainement vers une limite quand ξ tend vers a par valeurs croissantes ; dans ce cas, l'intégrale

$$\int_{a_0}^{a} \varphi(x)\, dx$$

a un sens ; si l'on a $r > 1$ et si, lorsque x s'approche de a, la fonction $f_2(x)$ finit par garder un signe constant et par rester supérieure, en valeur absolue, à un nombre positif fixe, l'intégrale

$$\int_{a_0}^{\xi} \varphi(x)\, dx$$

grandit indéfiniment en valeur absolue quand ξ tend vers a par valeurs croissantes ; elle devient infinie comme

$$\frac{1}{(a-\xi)^{r-1}};$$

si l'on avait $r = 1$, on aurait

$$\int_{a_0}^{\xi} (a-x)^{-1}\, dx = \log \frac{a-a_0}{a-\xi};$$

si la fonction $f_2(x)$ finit encore par garder un signe constant et par rester supérieure en valeur absolue à un nombre positif fixe, l'intégrale proposée deviendra infinie comme $\log(a-x)$.

Par exemple, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

où k^2 est un nombre plus petit que 1, a un sens, puisque l'on a

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-k^2x^2)}},$$

et que le facteur $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ qui devient infini aux environs de $x = 1$ est affecté de l'exposant $-\frac{1}{2}$ dont la valeur absolue est moindre que 1 ; au contraire si l'on avait $k^2 = 1$, l'intégrale proposée n'aurait pas de sens et l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^2}}$$

deviendrait, quand x tend vers 1 par valeurs croissantes, infinie comme $\log(1-x)$.

L'intégrale eulérienne de première espèce

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

où p, q sont des nombres positifs, a toujours un sens, bien que la quantité sous le signe $\int$ devienne infinie aux limites inférieure et supérieure de l'intégrale, quand les nombres p, q sont plus petits que 1.

L'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\cos x}$$

devient infinie comme $\log\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs croissantes; on a en effet

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - x}\,\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)},$$

et le second facteur a pour limite l'unité quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs croissantes; on a d'ailleurs, pour x compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$,

$$\int_0^x \frac{dx}{\cos x} = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

On a considéré au n° **250** l'intégrale

$$\int_0^\pi \log(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\,dx,$$

en supposant $\alpha^2 \leqq 1$; pour $\alpha = 1$, la fonction sous le signe $\int$ peut s'écrire

$$\log(1-\cos x)^2 = \log 4 + 4\log\sin\frac{x}{2};$$

elle devient infinie pour $x = 0$; mais l'identité

$$\log \sin \frac{x}{2} = x^{-r} \left(x^r \log \sin \frac{x}{2} \right),$$

où l'on suppose que r est un nombre positif quelconque plus petit que 1 et où le facteur qui, dans le second membre, multiplie x^{-r} a 0 pour limite quand x tend vers 0 par valeurs positives, montre que l'intégrale proposée a un sens; en appliquant une méthode analogue à celle du n° **250**, on trouve

$$\int_0^{\pi} \log(1 - \cos x)^2 \, dx = -2\pi \log 2 \text{ (}^1\text{)}.$$

Les remarques précédentes montrent que l'on peut donner un sens au symbole

$$\int_{a_0}^{a} \Phi(x) \, dx$$

lors même que, dans l'intervalle (a_0, a), la fonction $\varphi(x)$, devient infinie aux environs d'un nombre limité de valeurs; cette intégrale est alors la limite d'une somme d'intégrales relatives à des intervalles partiels auxquels il faudrait, pour obtenir l'intervalle total (a_0, a), adjoindre un nombre fini d'intervalles infiniment petits. Si cette limite existe, on dira encore que la fonction $f(x)$, quoiqu'elle ne soit pas bornée dans l'intervalle (a_0, a), quoiqu'elle puisse ne pas être définie pour un certain nombre de valeurs, est intégrable dans l'intervalle (a_0, a).

Bien que cette extension de la notion d'intégrale puisse être poussée beaucoup plus loin [2], c'est à ce cas simple, inévitable dès les élements, que je me bornerai.

---

[1] La comparaison à $(x - a)^{-r}$ d'une fonction $\varphi(x)$ qui devient infinie aux environs de $x = a$ ne suffit pas toujours à décider de la nature de l'intégrale $\int_{a_0}^{a} \varphi(x)\, dx$. On peut alors avoir recours aux critériums logarithmiques dont l'usage sera exposé au n° **257**; le lecteur fera sans peine les légers changements qui permettent d'appliquer ces critériums au problème actuel, lequel, comme on le verra ne diffère pas au fond du problème traité au n° **255**.

[2] Voir les premières pages des *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* de M. Henri Lebesgue.

Plusieurs des théorèmes démontrés pour les fonctions bornées et intégrables dans un intervalle donné s'étendent d'eux-mêmes aux fonctions intégrables, mais non bornées; tels sont ceux qu'expriment les égalités

$$\int_{a_0}^{a} [\mathrm{A}f(x) + \mathrm{B}g(x)]\,dx = \mathrm{A}\int_{a_0}^{a} f(x)\,dx + \mathrm{B}\int_{a_0}^{a} g(x)\,dx,$$

$$\int_{a}^{c} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{c} f(x)\,dx,$$

où, pour la première, A et B désignent des constantes.

Je m'arrêterai un instant sur le second théorème de la moyenne. Supposons que la fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle (a_0, a), sauf peut-être pour $x = a_0$, ne devienne infinie qu'aux environs de ce point et que l'intégrale

$$\int_{a_0}^{a} f(x)\,dx$$

ait un sens; désignons, en reprenant les notations du n° **254**, par $\varphi(x)$ une fonction non-croissante dans l'intervalle (a_0, a) et qui ne soit jamais négative dans cet intervalle. On voit d'abord que l'intégrale

$$\int_{a_0}^{a} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

a elle-même un sens; car si l'on désigne par a_0', $a_0'' > a_0'$ deux nombres quelconques appartenant à l'intervalle (a_0, a) et plus grands que a_0, mais aussi voisins de a_0 qu'on voudra, on aura, en vertu de ce second théorème de la moyenne

$$\int_{a_0'}^{a_0''} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \mu\varphi(a_0' + 0),$$

en désignant par μ un nombre appartenant à l'intervalle formé par la plus grande et la plus petite des valeurs de l'expression

$$\int_{a_0'}^{x} f(x)\,dx$$

quand x varie de a'_0 à a''_0; mais, puisque l'on suppose que l'intégrale

$$\int_{a_0}^{a} f(x)\,dx$$

a un sens, la valeur absolue de μ peut être supposée aussi petite qu'on le veut, pourvu que a'_0 et a''_0 soient suffisamment voisins de a_0; il suit de là que l'intégrale

$$\int_{a_0}^{a} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

a un sens.

Si, maintenant, on désigne toujours par A_0 et A les bornes inférieure et supérieure de la fonction de x

$$\int_{a_0}^{x} f(x)\,dx$$

dans l'intervalle (a_0, a), puis par A'_0 et A' les bornes inférieure et supérieure de la fonction de x

$$\int_{a'_0}^{x} f(x)\,dx$$

dans l'intervalle (a'_0, a) on aura

$$A_0 - \varepsilon \leqq A'_0 \leqq A_0 + \varepsilon, \qquad A - \varepsilon \leqq A' \leqq A + \varepsilon,$$

en posant

$$\varepsilon = \left| \int_{a_0}^{a'_0} f(x)\,dx \right|;$$

le nombre ε peut être supposé aussi petit qu'on le veut, pourvu que a'_0 soit suffisamment voisin de a_0; d'ailleurs le second théorème de la moyenne appliqué à l'intervalle (a'_0, a) donne

$$A'_0\varphi(a'_0 + 0) \leqq \int_{a'_0}^{a} f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqq A'\varphi(a'_0 + 0)$$

d'où

$$(1)\quad (A_0 - \varepsilon)\varphi(a'_0 + 0) - \varepsilon \leqq \int_{a_0}^{a} f(x)\,\varphi(x)\,dx \leqq (A + \varepsilon)\,\varphi(a'_0 + 0) + \varepsilon.$$

Mais, lorsque a'_0 tend vers a_0 par valeurs décroissantes, $\varphi(a'_0+0)$ tend vers la limite $\varphi(a_0+0)$; en effet on peut faire correspondre au nombre positif α un nombre positif β tel que l'on ait

$$\varphi(a_0+0)-\varphi(a'_0+h)<\alpha$$

sous les conditions

$$0 \leqq h \qquad a'_0+h-a_0<\beta.$$

Si l'on fait tendre h vers o par valeurs décroissantes, on voit qu'on aura sous les mêmes conditions,

$$\varphi(a_0+0)-\varphi(a'_0+0)\leqq\alpha;$$

quand a'_0 tend vers a_0 par valeurs décroissantes, $\varphi(a'_0+0)$ a donc pour limite $\varphi(a_0+0)$. Cette remarque jointe à ce que, dans ces conditions, ε tend vers o montre, que dans les inégalités (1), le premier et le troisième membres sont aussi voisins qu'on le veut de $A_0\varphi(a_0+0)$, $A\varphi(a_0+0)$, en sorte qu'on peut écrire

$$A_0\varphi(a_0+0)\leqq\int_{a_0}^{a} f(x)\,\varphi(x)\,dx\leqq A\varphi(a_0+0).$$

La forme donnée par Weierstrass à ce second théorème de la moyenne subsiste évidemment dans les mêmes conditions.

Pour ce qui est des propositions qui ne sont pas susceptibles d'extension, je me contenterai de faire remarquer que si les deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont intégrables dans l'intervalle (a_0, a) sans y être bornées, on ne peut plus affirmer que leur produit soit intégrable, comme on le voit en prenant par exemple

$$a_0=0, \qquad a=1, \qquad \varphi(x)=\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

257. — Voici maintenant un autre problème analogue à celui que l'on vient de traiter.

Soit $\varphi(x)$ une fonction de x définie pour toutes les valeurs de x supérieures à a et intégrable dans tout intervalle (a, ξ), où ξ désigne un nombre quelconque plus grand que a : lorsque ξ augmente indéfiniment par valeurs positives, l'expression

$$\int_a^\xi \varphi(x)\,dx$$

tend-elle vers une limite?

S'il en est ainsi, on représente cette limite par le symbole

$$\int_a^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Remarquons d'abord que, lorsqu'on cherche à répondre à cette question, on peut remplacer la limite inférieure de l'intégrale par tel nombre que l'on voudra, plus grand que a; puis, que la proposition générale du n° **158** fournit immédiatement la règle générale que voici :

Pour que l'expression

$$\int_a^\xi \varphi(x)\,dx$$

tende vers une limite lorsque ξ augmente indéfiniment par valeurs positives, il faut et il suffit qu'à chaque nombre positif α corresponde un autre nombre positif A, tel que les inégalités

$$\xi > \mathrm{A}, \qquad \xi' > \mathrm{A}$$

entraînent l'inégalité

$$\left| \int_\xi^{\xi'} \varphi(x)\,dx \right| < \alpha.$$

Supposons d'abord que, à partir d'une certaine valeur de x, la fonction $\varphi(x)$ conserve le même signe. On pourra alors, sans nuire à la généralité, supposer que cette fonction soit positive pour les valeurs de x plus grandes que a; s'il en est ainsi, l'intégrale

$$\int_a^\xi \varphi(x)\,dx,$$

où ξ est plus grand que a, augmentera avec ξ; ou elle tendra vers une limite, ou elle tendra vers $+\infty$; pour reconnaître ce qui en est, on comparera l'intégrale proposée à une autre de même nature,

$$\int_a^\xi \psi(x)\,dx,$$

où $\psi(x)$ est aussi une fonction qui reste positive lorsque la valeur de x est supérieure à a ; si l'on a, pour les valeurs de x supérieures à un certain nombre fixe,

$$\varphi(x) \leqq \psi(x),$$

et que la seconde intégrale tende vers une limite, il en sera de même de la proposée ; si, au contraire, on a

$$\varphi(x) \geqq \psi(x)$$

et que la seconde intégrale augmente indéfiniment avec ξ, il en sera de même de la première.

Il sera souvent commode, pour faire la comparaison, d'étudier le rapport

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

si ce rapport reste compris, pour toutes les valeurs de x supérieures à un certain nombre fixe, entre deux nombres fixes positifs (non nuls) α, β, les deux intégrales auront le même caractère : toutes deux augmenteront indéfiniment avec leur limite supérieure ξ, ou tendront vers une limite ; on sera certainement dans ce cas si, pour $x = +\infty$, le précédent rapport a une limite différente de zéro. Le lecteur reconnaîtra sans peine que, s'il en est ainsi, et si les deux intégrales augmentent indéfiniment avec ξ, leur rapport aura, pour $\xi = +\infty$, une limite égale à celle du rapport $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, pour $x = +\infty$. Si le même rapport, pour les valeurs de x supérieures à un certain nombre fixe, reste plus petit qu'un nombre β, ce qui arrivera certainement s'il a pour limite zéro, la première intégrale tendra vers une limite si la seconde tend vers une limite. Si, enfin, le rapport $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ finit par rester plus grand qu'un nombre positif et non nul α, et si la seconde intégrale augmente indéfiniment, il en sera de même de la première.

On voit tout d'abord que l'intégrale

$$\int_a^\xi \varphi(x)\,dx$$

augmentera indéfiniment si, pour les valeurs de x supérieures à un nombre fixe, la fonction $\varphi(x)$ reste plus grande qu'un nombre fixe $\beta > 0$: en effet, l'intégrale

$$\int_a^\xi \beta\,dx = \beta(\xi - a)$$

augmente indéfiniment avec ξ; mais lors même que l'on aurait

$$\lim_{x=\infty} \varphi(x) = 0,$$

on ne pourrait affirmer l'existence d'une limite pour l'intégrale proposée; par exemple, l'intégrale

$$\int_1^\xi \frac{dx}{x} = \log \xi$$

croît indéfiniment avec ξ.

L'intégrale la plus simple qui puisse être prise pour terme de comparaison est la suivante :

$$\int_a^\xi \frac{dx}{x^r},$$

où r est un nombre positif; elle est égale à

$$\frac{\xi^{1-r} - a^{1-r}}{1-r}$$

si r est différent de 1, à $\log\frac{\xi}{a}$ si r est égal à 1; elle tend vers une limite, ou augmente indéfiniment suivant que l'on a

$$r > 1, \qquad \text{ou} \qquad r \leqq 1;$$

on pourra donc appliquer les règles précédentes en comparant la fonction $\varphi(x)$ à la fonction $\frac{1}{x^r}$.

Considérons par exemple l'intégrale

$$\int_0^{\xi} \frac{f(x)}{F(x)} dx,$$

où $f(x)$ et $F(x)$ sont deux polynomes entiers en x et n'admettant point de diviseur commun ; je supposerai, afin que la fonction

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

finisse par rester positive, que les coefficients des plus hautes puissances de x dans les deux polynomes soient de même signe ; pour que cette fonction soit intégrable dans un intervalle, il faut que le polynome $F(x)$ n'admette pas de racine dans cet intervalle ; pour que l'intégrale proposée ait un sens quelque grand que soit le nombre positif ξ, il faut donc que le polynome $F(x)$ n'ait pas de racine positive. Si le degré de $f(x)$ était égal ou supérieur à celui de $F(x)$, la fonction $\frac{f(x)}{F(x)}$ finirait par rester supérieure à un nombre positif fixe et l'intégrale proposée augmenterait indéfiniment avec ξ ; si le degré de $f(x)$ n'était inférieur que d'une unité à celui de $F(x)$, le rapport de $\frac{f(x)}{F(x)}$ à $\frac{1}{x}$ aurait, pour x infini, une limite différente de zéro et l'intégrale proposée deviendrait infinie comme $\log \xi$; si enfin le degré de $f(x)$ est inférieur à celui de $F(x)$ de deux unités au moins, on voit en comparant la fonction $\frac{f(x)}{F(x)}$ à $\frac{1}{x^2}$, que l'intégrale proposée a une limite pour ξ infini. En résumé, l'expression

$$\int_0^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)} dx$$

aura un sens si le polynome $F(x)$ n'a pas de racine positive ou nulle et si le degré de $f(x)$ est inférieur de deux unités au moins à celui de $F(x)$.

Soit encore l'expression

$$\int_a^{\xi} x^{p-1} e^{-x} dx,$$

où a est un nombre positif quelconque; si l'on compare l'expression $x^{p-1}e^{-x}$ à $\frac{1}{x^r}$, r étant un nombre plus grand que 1, on reconnaît sans peine que l'intégrale précédente a une limite pour ξ infini; il est aisé de reconnaître qu'il en est de même lorsque a tend vers 0; on en conclut que l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$$

(*intégrale eulérienne de seconde espèce*) a un sens pour $p > 0$. On en représente la valeur par $\Gamma(p)$.

Lorsque la comparaison de la fonction $\varphi(x)$ à $\frac{1}{x^r}$ ne réussit pas, ce qui arrive quand le produit $x^r\varphi(x)$ augmente indéfiniment avec x pour $r \geqq 1$ et tend vers zéro pour $r < 1$, on peut employer d'autres termes de comparaison [1], dont je vais dire quelques mots.

Si l'on pose

$$\begin{aligned}\log^2 x &= \log\log x,\\ \log^3 x &= \log\log\log x,\\ &\dots\dots\dots\\ \log^m x &= \log\log\dots\log x,\end{aligned}$$

on aura, à cause de l'identité

$$\log^m x = \log\log^{m-1} x,$$

et de la règle de dérivation relative aux fonctions de fonction,

$$D_x(\log^m x) = \frac{D_x(\log^{m-1} x)}{\log^{m-1} x} = \frac{1}{x\log x\log^2 x\dots\log^{m-1} x};$$

d'où, en désignant par a un nombre suffisamment grand,

$$\int_a^\xi \frac{dx}{x\log x\log^2 x\dots\log^{m-1} x} = \log^m \xi - \log^m a;$$

lors donc que ξ augmente indéfiniment, le premier membre augmentera aussi indéfiniment. Il en sera de même de l'intégrale

$$\int_a^\xi \varphi(x)\,dx$$

(1) Abel, *Œuvres*, 2e éd., t. II, p. 200.

si, pour les valeurs de x supérieures à un nombre positif fixe, le rapport

$$\frac{\varphi(x)}{x \log x \log^2 x \ldots \log^{m-1} x}$$

reste supérieur à un nombre positif fixe.

Au contraire l'identité

$$-\frac{1}{\alpha} D\left[\frac{1}{(\log^m x)^\alpha}\right] = \frac{1}{x \log x \log^2 x \ldots \log^{m-1} x (\log^m x)^{1+\alpha}},$$

où l'on suppose que α est un nombre positif, montre que l'on a

$$\int_a^\xi \frac{dx}{x \log x \log^2 x \ldots \log^{m-1} x (\log^m x)^{1+\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{(\log^m a)^\alpha} - \frac{1}{(\log^m \xi)^\alpha}\right];$$

et cette égalité prouve que le second membre tend vers la limite

$$\frac{1}{\alpha} \frac{1}{(\log^m a)^\alpha}$$

lorsque ξ augmente indéfiniment ; l'expression

$$\int_a^\infty \varphi(x)\, dx$$

aura donc un sens si, pour les valeurs de x supérieures à un certain nombre fixe, le rapport

$$\frac{\varphi(x)}{x \log x \log^2 x \ldots \log^{m-1} x (\log^m x)^{1+\alpha}}$$

reste inférieur à un certain nombre positif fixe.

L'analogie entre ces règles et celles qui regardent la détermination de la convergence ou de la divergence d'une série à termes positifs n'a pu manquer de frapper le lecteur. Le lien qui unit les deux questions est mis en pleine lumière par la remarque suivante, qui est due à Cauchy.

Soit $\varphi(x)$ une fonction de x qui, pour toutes les valeurs de x supérieures à un certain nombre fixe a, soit positive et non-croissante, en sorte que, pour toutes les valeurs de x, x' qui satisfont aux conditions

$$x' \geqq x \geqq a,$$

on ait

$$\varphi(x) \geqq \varphi(x') > 0;$$

la série

$$\varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) + \ldots$$

dont les termes finissent par être positifs sera, ou non, convergente suivant que l'intégrale

$$\int_a^\xi \varphi(x)\,dx$$

tend, ou non, vers une limite, quand ξ augmente indéfiniment par valeurs positives.

Soient en effet p, q des nombres naturels plus grands que a et supposons $q > p$; si l'on divise l'intervalle (p, q) en $q - p$ intervalles égaux à l'unité,

$$(p, p+1), \qquad (p+1, p+2), \ldots (q-1, q),$$

les bornes supérieures de la fonction $\varphi(x)$ dans ces intervalles seront respectivement

$$\varphi(p), \qquad \varphi(p+1), \ldots, \qquad \varphi(q-1),$$

tandis que les bornes inférieures seront

$$\varphi(p+1), \qquad \varphi(p+2), \ldots, \qquad \varphi(q).$$

En désignant en général par s_n la somme des n premiers termes de la série proposée, en sorte que l'on ait

$$s_q - s_p = \varphi(p+1) + \varphi(p+2) + \ldots + \varphi(q),$$
$$s_{q-1} - s_{p-1} = \varphi(p) + \varphi(p+1) + \ldots + \varphi(q-1),$$

on voit que l'on aura

$$(1) \qquad s_q - s_p \leqq \int_p^q \varphi(x)\,dx \leqq s_{q-1} - s_{p-1}.$$

Supposons que la série proposée soit convergente, et soit S sa somme; si, p restant fixe, q augmente indéfiniment, l'intégrale

$$\int_p^q \varphi(x)\,dx$$

reste toujours inférieure à $s_{q-1} - s_{p-1}$ et par suite à $S - s_{p-1}$: donc, puisqu'elle augmente avec q, elle tend vers une limite ; il en est de même de l'intégrale

$$\int_a^\xi \varphi(x)\,dx$$

quand ξ augmente indéfiniment par valeurs positives.

Réciproquement, si cette dernière intégrale a une limite L, l'intégrale

$$\int_p^q \varphi(x)\,dx$$

restera, lorsque q augmentera indéfiniment, inférieure au nombre

$$L - \int_a^p \varphi(x)\,dx\,;$$

il en sera de même, à cause de l'inégalité (1) de la quantité $s_q - s_p$, ce qui suffit à prouver la convergence de la série proposée.

On a dans tous les cas

$$(2) \qquad 0 \leqq \int_p^q \varphi(x)\,dx - (s_q - s_p) \leqq \varphi(p) - \varphi(q)\,;$$

cette inégalité donne lieu aux remarques suivantes :

Si la série est convergente, en sorte que l'on ait certainement

$$\lim_{q=\infty} \varphi(q) = 0,$$

on voit, en désignant par R_p le reste de la série limitée au $p^{\text{ième}}$ terme $\varphi(p)$ et en faisant croître q indéfiniment, que l'on a

$$0 \leqq \int_p^\infty \varphi(x)\,dx - R_p \leqq \varphi(p)\,;$$

ainsi, en prenant pour le reste R_p de la série la valeur

$$\int_p^\infty \varphi(x)\,dx,$$

on commettra une erreur au plus égale au dernier terme conservé $\varphi(p)$.

Je vais maintenant établir, dans le cas où la série est divergente, des conclusions qui sont évidentes lorsqu'elle converge. On déduit des inégalités (2) les suivantes :

$$(3) \qquad \Phi(p) \leqq \Phi(q) \leqq \varphi(p) - \varphi(q) + \Phi(p),$$

en représentant d'une façon générale par $\Phi(n)$ la quantité

$$\int_a^n \varphi(x)\,dx - s_n,$$

où n est un nombre naturel plus grand que a. Ces inégalités montrent que la fonction $\Phi(n)$ augmente avec n et qu'elle n'augmente pas indéfiniment ; elle tend donc vers une limite, lorsque n augmente indéfiniment par valeurs naturelles.

Par exemple, l'égalité

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x,$$

jointe aux remarques précédentes, montre que la quantité

$$F(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

tend vers une limite lorsque n augmente indéfiniment ; les inégalités (1) montrent que $\log n$ est compris entre

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

et

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1};$$

Enfin les propositions que l'on vient de démontrer montrent que la série dont on obtient les termes en faisant $x = a, a+1, \ldots$ a suffisamment grand dans l'expression

$$\frac{1}{x \log x \log^2 x \ldots \log^{n-1} x (\log^n x)^{1+\alpha}},$$

est convergente si α est positif, divergente si α est nul ou négatif.

Si, dans l'intégrale

$$\int_a^{\xi} \varphi(x)\,dx,$$

la fonction $\varphi(x)$ ne garde point un signe constant pour les valeurs de x supérieures à un nombre fixe, les méthodes précédentes ne peuvent s'appliquer ; c'est ce qui arrivera par exemple si l'on suppose

$$\varphi(x) = \sin x^2 \qquad \text{ou} \qquad \varphi(x) = \cos x^2;$$

on montrera toutefois, dans le numéro suivant, que les intégrales

$$\int_0^{\infty} \sin x^2\,dx, \qquad \int_0^{\infty} \cos x^2\,dx$$

ont un sens; ces intégrales jouent un rôle important en physique mathématique et dans la théorie des nombres.

Au lieu de supposer que, dans une intégrale, la limite supérieure augmente indéfiniment par valeurs positives, on peut supposer que la limite inférieure augmente indéfiniment par valeurs négatives; si la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\eta}^{a} \varphi(x)\,dx$$

tend vers une limite lorsque η augmente indéfiniment par valeurs positives, on représentera cette limite par le symbole

$$\int_{-\infty}^{a} \varphi(x)\,dx.$$

Enfin si, lorsque η et ξ augmentent indéfiniment par valeurs positives, indépendamment l'un de l'autre, l'expression

$$\int_{-\eta}^{\xi} \varphi(x)\,dx$$

tend vers une limite, on représente cette limite par le symbole

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

Pour que ce symbole ait un sens, il faut et il suffit que les deux symboles

$$\int_{-\infty}^{a} \varphi(x)\,dx, \qquad \int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx,$$

où a est un nombre quelconque, aient aussi une signification ; la somme de leurs valeurs est alors égale à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx.$$

En appliquant les méthodes précédentes, on trouvera par exemple que l'expression

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

a un sens. On démontrera plus tard qu'elle est égale à $\sqrt{\pi}$.

Il ne faudrait pas conclure de ce que l'expression

$$\int_{-\xi}^{+\xi} \varphi(x)\,dx$$

tend vers une limite lorsque ξ augmente indéfiniment par valeurs positives que le symbole

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$$

a un sens. On a par exemple, en désignant par ξ, η des nombres positifs,

$$\int_{-\eta}^{+\xi} \frac{x\,dx}{1 + x^2} = \log \sqrt{\frac{1 + \xi^2}{1 + \eta^2}}.$$

Cette quantité ne tend vers aucune limite lorsque ξ et η augmentent indéfiniment et indépendamment par des valeurs positives; elle est au contraire toujours nulle si l'on suppose $\eta = \xi$.

258. — Bien que je n'aie pas l'intention d'exposer les divers procédés qui servent à la détermination des intégrales définies ou indéfinies, j'établirai une proposition fondamentale sur laquelle reposent presque tous ces procédés.

Considérons l'intégrale

$$J = \int_{a_0}^{a} \varphi(x)\,dx;$$

je suppose que dans l'intervalle (A_0, A) la fonction $\varphi(x)$ soit continue et que les nombres a_0, a appartiennent à cet intervalle. Soit maintenant $f(y)$ une fonction de la variable y; sur cette fonction, je suppose : qu'elle admette dans l'intervalle (b_0, b) (¹) une dérivée continue $f'(y)$; que l'on ait

$$f(b_0) = a_0, \qquad f(b) = a;$$

enfin que, pour toutes les valeurs de y appartenant à l'intervalle (b_0, b), on ait

$$A_0 \leqq f(y) \leqq A;$$

dans ces conditions, en désignant par $\psi(y)$ la fonction de y que l'on obtient en remplaçant x par $f(y)$ dans $\varphi(x)$, on a

$$J = \int_{b_0}^{b} \psi(y) f'(y)\,dy.$$

Soit en effet, en désignant par y une valeur quelconque appartenant à l'intervalle (b_0, b),

$$\Psi(y) = \int_{b_0}^{y} \psi(y) f'(y)\,dy;$$

(¹) On ne suppose pas $b_0 < b$. La supposition $b_0 = b$ entraînerait $a_0 = a$; l'intégrale proposée et la transformée seraient nulles; la proposition resterait vraie, mais la démonstration ne s'appliquerait plus.

la fonction $\Psi(y)$ admettra dans l'intervalle (b_0, b) une dérivée $\Psi'(y)$ égale à $\psi(y)f'(y)$, puisque cette dernière fonction est continue. Soit de même, en supposant que x appartienne à l'intervalle (a_0, a),

$$\Phi(x) = \int_{a_0}^{x} \varphi(x)\,dx;$$

la fonction $\Phi(x)$ admettra, dans l'intervalle (a_0, a), une dérivée par rapport à x égale à $\varphi(x)$, à cause de la continuité de cette dernière fonction. Si maintenant dans $\Phi(x)$ on remplace x par $f(y)$, on obtiendra une fonction $\Psi_1(y)$ de la variable y, définie dans l'intervalle (b_0, b) et y admettant une dérivée égale à $\psi(y)f'(y)$; dans l'intervalle (b_0, b), les deux fonctions $\Psi(y)$ et $\Psi_1(y)$ ont des dérivées égales, elles ne peuvent donc différer que par une constante, et cette constante est nulle puisque l'on a, pour $y = b_0$,

$$\Psi(b_0) = 0, \qquad \Psi_1(b_0) = \Phi(a_0) = 0.$$

Les deux fonctions $\Psi(y)$ et $\Psi_1(y)$ sont donc égales pour toutes les valeurs de y appartenant à l'intervalle (b_0, b), en particulier pour $y = b$; on a donc

$$\Psi(b) = \Psi_1(b) = \Phi(a),$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Il convient de remarquer que, lorsque y varie de b_0 à b, la fonction $f(y)$, qui peut d'ailleurs être tantôt croissante, tantôt décroissante, doit prendre, à cause de la continuité, toutes les valeurs qui appartiennent à l'intervalle (a_0, a); il est aisé de voir comment, si elle en prend d'autres, sa variation en dehors de cet intervalle n'influe pas sur la valeur finale de l'intégrale

$$\int_{b_0}^{b} \psi(y)\,f'(y)\,dy$$

dont on pourrait alors resserrer les limites; je laisse ce soin au lecteur.

La proposition resterait vraie si, pour un certain nombre limité de valeurs de y appartenant à l'intervalle (b_0, b), la dérivée $f'(y)$ cessait d'exister en devenant infinie : il suffira de supposer que cette circonstance se présente pour la limite supérieure b, et seulement pour cette valeur; on aura alors, en désignant par b' un nombre quelconque compris entre b_0 et b et par a' le nombre $f(b')$,

$$\int_{a_0}^{a'} \varphi(x)\,dx = \int_{b_0}^{b'} \psi(y)f'(y)\,dy;$$

si on fait tendre b' vers b par valeurs croissantes, a' tendra vers a, à cause de la continuité de la fonction $f(y)$ et, par conséquent, le premier membre de l'égalité précédente aura pour limite

$$\int_{a_0}^{a} \varphi(x)\,dx;$$

le second membre tendra vers la même limite qui doit, en vertu des conventions adoptées plus haut, être représentée par

$$\int_{b_0}^{b} \psi(y)f'(y)\,dy,$$

quand même $f'(y)$ n'aurait pas de sens pour $y = b$.

Au lieu de prendre pour point de départ le théorème relatif aux dérivées des fonctions de fonction, on peut, afin de justifier la règle qui fait l'objet de ce numéro, partir de la définition même de l'intégrale définie; on arrive ainsi à des conditions différentes, encore suffisantes pour l'application de cette règle et moins restrictives sous certains rapports. Je me contenterai de faire, dans ce sens, les remarques qui suivent.

Si la fonction $\varphi(x)$ est bornée et intégrable dans l'intervalle (a_0, a); si la fonction $f(y)$ est continue et non-décroissante ou non-croissante dans l'intervalle (b_0, b); si, dans ce même intervalle, elle admet une dérivée bornée $f'(y)$; si l'on a

$$a_0 = f(b_0), \qquad a = f(b);$$

si enfin, la fonction $\psi(y)f'(y)$, où $\psi(y)$ désigne toujours ce que devient $\varphi(x)$ quand on y remplace x par $f(y)$, est intégrable dans l'intervalle (b_0, b), on a

$$\int_{a_0}^{a} \varphi(x)\,dx = \int_{b_0}^{b} \psi(y)f'(y)\,dy.$$

Supposons en effet que la fonction $f(y)$ soit non-décroissante : à chaque nombre positif ε correspond un nombre positif η tel que, sous les conditions

$$b_0 \leqq y \leqq y' \leqq b, \qquad y' - y < \eta,$$

on ait

$$0 \leqq f(y') - f(y) < \varepsilon.$$

Ceci posé, soit $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, b)$ une décomposition de l'invalle (b_0, b) en intervalles partiels ayant tous une étendue moindre que η ; si l'on pose

$$a_1 = f(b_1), \ldots, \qquad a_{n-1} = f(b_{n-1}),$$

on aura

$$a_0 \leqq a_1 \leqq \ldots \leqq a_{n-1} < a,$$

et, de plus, les intervalles partiels qui constituent le mode de décomposition $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a)$ de l'intervalle (a_0, a) auront tous des écarts moindres que ε.

Soient encore $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ des nombres respectivement compris entre b_0 et b_1, b_1 et b_2, ..., b_{n-1} et b tels que l'on ait (n° **216**),

$$\begin{aligned} a_1 - a_0 &= (b_1 - b_0)f'(\beta_0), \\ a_2 - a_1 &= (b_2 - b_1)f'(\beta_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a - a_{n-1} &= (b - b_{n-1})f'(\beta_{n-1}); \end{aligned}$$

soient enfin

$$\alpha_0 = f(\beta_0), \qquad \alpha_1 = f(\beta_1), \ldots, \qquad \alpha_{n-1} = f(\beta_{n-1});$$

les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ appartiendront respectivement aux intervalles (a_0, a_1), (a_1, a_2), ..., (a_{n-1}, a) et les deux sommes égales

$$(a_1 - a_0)\varphi(\alpha_0) + \ldots + (a - a_{n-1})\varphi(\alpha_{n-1}),$$
$$(b_1 - b_0)\psi(\beta_0)f'(\beta_0) + \ldots + (b - b_{n-1})\psi(\beta_{n-1})f'(\beta_{n-1}),$$

seront des valeurs approchées des intégrales

$$\int_{a_0}^{a} \varphi(x)\,dx, \qquad \int_{b_0}^{b} \psi(y) f'(y)\,dy;$$

il faut donc que ces intégrales soient égales, car on peut supposer ε et η assez petits pour que les différences respectives entre les intégrales définies et les sommes précédentes soient inférieures à tel nombre qu'on voudra.

Il faut remarquer que la continuité des fonctions $\varphi(x)$, $f(y)$ n'est pas supposée.

Le même mode de raisonnement montre que, si p et q sont des nombres fixes, la substitution $x = py + q$ est toujours légitime, en sorte qu'on peut assurément écrire

$$\int_{pb_0+q}^{pb+q} \varphi(x)\,dx = \int_{b_0}^{b} p\varphi(py+q)\,dy,$$

pourvu qu'on sache que l'un des membres de cette égalité a un sens.

259. — Voici maintenant quelques exemples. Soit l'intégrale

$$\int_p^\xi \frac{dx}{(x-a)^2+b^2},$$

on posera

$$x = a + by;$$

aux valeurs p et ξ de la variable x correspondront les valeurs

$$\frac{p-a}{b}, \qquad \frac{\xi-a}{b}$$

de la variable y, et l'on aura

$$\int_p^\xi \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{1}{b}\int_{\frac{p-a}{b}}^{\frac{\xi-a}{b}} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{b}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\xi-a}{b} - \operatorname{arc\,tg}\frac{p-a}{b}\right];$$

le symbole arc tg désigne toujours, suivant nos conventions, un nombre compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$: si l'on suppose que ξ augmente indéfiniment par valeurs positives et p par valeurs négatives, la quantité entre crochets tendra vers π si b est positif, vers $-\pi$ si b

est négatif, en sorte que l'on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-a)^2+b^2} = \frac{\pi}{b} \operatorname{sgn} b \ (^1).$$

Soit encore l'intégrale

$$\int_0^{\xi} \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x},$$

où a, b sont des nombres positifs; on est amené naturellement, afin de rendre rationnelle la quantité à intégrer, à faire la substitution $x = \operatorname{arc\,tg} y$; la fonction $\operatorname{arc\,tg} y$, toujours comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, est continue et admet, dans tout intervalle une dérivée par rapport à y, à savoir $\frac{1}{1+y^2}$. Si ξ est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$; la fonction $\operatorname{arc\,tg} y$ prendra les valeurs 0 et ξ pour $y = 0$ et $y = \operatorname{tg} \xi$, en sorte qu'on aura

$$\int_0^{\xi} \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} = \int_0^{\operatorname{tg}\xi} \frac{dy}{ay^2+b};$$

le second membre, comme on le voit en posant $y = u\sqrt{\frac{b}{a}}$, est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} \xi\right).$$

On en conclura, pourvu que les nombres ξ_0, ξ appartiennent à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dx}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \left[\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} \xi\right) - \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} \xi_0\right)\right];$$

mais la méthode précédente cesse d'être applicable si ξ n'appartient pas à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, puisqu'il ne peut y avoir alors de nombre η tel que l'on ait $\xi = \operatorname{arc\,tg} \eta$.

---

(1) D'une façon générale, le symbole $\operatorname{sgn} x$ représente $+1$ ou -1, suivant que x est positif ou négatif. On lui attribue habituellement la valeur 0 pour $x = 0$: $\operatorname{sgn} x$ est une fonction discontinue de x.

A la vérité, en fractionnant convenablement l'intervalle d'intégration, on peut s'arranger pour que chaque intervalle partiel soit contenu dans un intervalle tel que $\left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ et chacune des intégrales se ramène alors par un changement de variables de la forme $x = n\pi + x'$ à une intégrale du type précédent; mais il est préférable de s'adresser à une fonction continue ayant pour dérivée

$$\frac{1}{a \sin^2 x + b \cos^2 x}.$$

On a défini une telle fonction à la fin du n° **214**; c'est, avec les notations de ce numéro

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{Arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} x\right);$$

on a donc, quel que soit le nombre ξ,

$$\int_0^{\xi} \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{Arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} \xi\right).$$

Le lecteur n'aura aucune peine à reconnaître que la relation

$$(1 - \varepsilon \cos y)(1 + \varepsilon \cos x) = 1 - \varepsilon^2,$$

où ε désigne un nombre positif < 1, permet de définir soit y comme une fonction continue de x, soit x comme une fonction de y, de manière que les deux fonctions s'annulent en même temps et varient dans le même sens; leurs dérivées sont données par la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{1 + \varepsilon \cos x} = \frac{1 - \varepsilon \cos y}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}};$$

ces deux fonctions peuvent d'ailleurs s'écrire sous la forme

$$y = 2 \operatorname{Arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right), \quad x = 2 \operatorname{Arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{y}{2}\right).$$

Le changement de variable défini par ces relations conduit aux formules suivantes

$$\int_0^x \frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^n} = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{n-\frac{1}{2}}} \int_0^y (1-\varepsilon\cos y)^{n-1}\,dy,$$

$$\int_0^x \frac{dx}{(\varepsilon+\cos x)^n} = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{n-\frac{1}{2}}} \int_0^y (1-\varepsilon\cos y)^{n-1}\frac{dy}{\cos^n y};$$

dans la première n et x sont quelconques; dans la seconde, si n est un nombre négatif dont la valeur absolue est une fraction irréductible à dénominateur impair, x peut être quelconque; autrement il doit être intérieur à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$ en posant

$$\alpha = \operatorname{arc}\cos(-\varepsilon);$$

y est alors intérieur à l'intervalle $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Il convient d'observer qu'un changement de variable très simple permet de ramener l'un à l'autre les problèmes traités aux nos **255** et **256**.

La fonction de y

$$x = \frac{\lambda y + \mu}{\lambda' y + \mu'}$$

varie toujours dans le même sens; si l'on suppose que $-\frac{\mu'}{\lambda'}$ n'appartienne pas à l'intervalle (b_0, b), on pourra choisir λ, μ de manière que les nombres b_0, b correspondent aux nombres a_0, a et par conséquent transformer une intégrale où les limites sont a_0, a en une autre où les limites soient b_0, b. Si l'une (seulement) des limites est infinie, on peut par ce procédé, la remplacer par une autre intégrale où les deux limites soient finies; inversement, on peut s'arranger pour qu'une des limites soit infinie. On prévoit, sans que j'insiste davantage, que les questions relatives à la signification d'une intégrale dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ devient infinie pour l'une des limites d'intégration, ou pour laquelle l'une des limites est infinie, se ramènent l'une à l'autre; on n'a parlé des critères logarithmiques que dans le second cas; il est bien aisé de reconnaître qu'ils s'appliquent aussi directement au premier.

Les méthodes exposées aux nos 255, 256 pour traiter ce genre de questions ne s'appliquent pas toujours; elles ne s'appliquent pas, on l'a déjà dit, aux intégrales

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx, \qquad \int_0^\infty \cos x^2\,dx.$$

C'est par une méthode spéciale qu'on prouvera que ces intégrales ont un sens; il suffira de raisonner sur la première.

Soit

$$J = \int_0^\xi \sin x^2\,dx,$$

il s'agit de montrer que, lorsque le nombre positif ξ augmente indéfiniment, la quantité J tend vers une limite. La fonction $\sin x^2$ reste positive quand x varie de $\sqrt{2n\pi}$ à $\sqrt{(2n+1)\pi}$, négative quand x varie de $\sqrt{(2n+1)\pi}$ à $\sqrt{(2n+2)\pi}$; on peut donc poser

$$J = u_0 - u_1 + u_2 - \ldots \pm u_p \mp u'_p,$$

en faisant

$$u_{2n} = \int_{\sqrt{2n\pi}}^{\sqrt{(2n+1)\pi}} \sin x^2\,dx,$$

$$u_{2n+1} = -\int_{\sqrt{(2n+1)\pi}}^{\sqrt{(2n+2)\pi}} \sin x^2\,dx\,;$$

l'indice p est égal à la partie entière de $\frac{\xi^2}{\pi}$; le dernier terme $\mp u'_p$ est égal à

$$\int_{\sqrt{p\pi}}^{\xi} \sin x^2\,dx.$$

En faisant dans les deux termes u_{2n}, u_{2n+1} les substitutions respectives

$$x = \sqrt{2\pi n + y}, \qquad x = \sqrt{(2n+1)\pi + y},$$

on trouve sans peine

$$u_{2n} = \frac{1}{2}\int_0^\beta \frac{\sin y\,dy}{\sqrt{2\pi n + y}}, \qquad u_{2n+1} = \frac{1}{2}\int_0^{\beta'} \frac{\sin y\,dy}{\sqrt{(2n+1)\pi + y}}.$$

en posant

$$\beta = \sqrt{(2n+1)\pi} - \sqrt{2n\pi},$$

$$\beta' = \sqrt{(2n+2)\pi} - \sqrt{(2n+1)\pi};$$

ces formules entraînent les inégalités

$$\beta' < \beta < \pi.$$

Les deux quantités u_{2n}, u_{2n+1} sont positives et la seconde est plus petite que la première : on a en effet

$$\int_0^{\beta} \frac{\sin y\, dy}{\sqrt{2n\pi + y}} = \int_0^{\beta'} \frac{\sin y\, dy}{\sqrt{2n\pi + y}} + \int_{\beta'}^{\beta} \frac{\sin y\, dy}{\sqrt{2n\pi + y}};$$

le second terme du second membre est positif; d'ailleurs l'inégalité

$$\int_0^{\beta'} \frac{\sin y\, dy}{\sqrt{2n\pi + y}} > \int_0^{\beta'} \frac{\sin y\, dy}{\sqrt{(2n+1)\pi + y}}$$

résulte de ce que l'on a, pour les valeurs de y comprises entre o et π,

$$\frac{\sin y}{\sqrt{2n\pi + y}} > \frac{\sin y}{\sqrt{(2n+1)\pi + y}};$$

on établit de même l'inégalité

$$u_{2n+1} < u_{2n+2}.$$

Les termes u_{2n}, u_{2n+1} tendent vers o quand n augmente indéfiniment; dans l'intervalle $(0, \beta)$, en effet, on a

$$\frac{\sin y}{\sqrt{2n\pi + y}} < \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$$

et par suite

$$u_{2n} < \frac{\beta}{2\sqrt{2n\pi}} < \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2n}};$$

enfin on voit de même que le dernier terme u'_p est plus petit que u_p et par conséquent décroît indéfiniment quand ξ, et par suite

p, augmentent indéfiniment. Dans ces conditions J a pour limite la somme de la série convergente

$$u_0 - u_1 + u_2 - \ldots + u_{2n} - \ldots .$$

On démontre d'ailleurs que l'on a

$$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

260. — Soit $f(x, y)$ une fonction des deux variables x, y définie et bornée dans l'ensemble (XY) des systèmes de valeurs qui satisfont aux conditions

$$(1) \qquad a_0 \leqq x \leqq a, \qquad b_0 \leqq y \leqq b,$$

a_0, a, b_0, b étant des nombres donnés. Si, lorsque l'on attribue à y une valeur fixe appartenant à l'intervalle (b_0, b), la fonction $f(x, y)$, regardée comme une fonction de x, est intégrable dans l'intervalle (a_0, a), et cela, quelle que soit la valeur choisie pour y, l'intégrale

$$\int_{a_0}^a f(x, y)\,dx$$

définira, dans l'intervalle (b_0, b), une fonction de y : désignons cette fonction par $\varphi(y)$; on peut se demander si elle est continue et si elle admet une dérivée dans l'intervalle (b_0, b).

Soient y', y'' deux valeurs appartenant à cet intervalle, on aura

$$(2) \qquad \varphi(y'') - \varphi(y') = \int_{a_0}^a [f(x, y'') - f(x, y')]\,dx.$$

Regardons pour un moment y' comme donné; si à chaque nombre positif ε correspond un nombre positif η tel que, pour toutes les valeurs de x, y'' qui vérifient les inégalités

$$(3) \qquad \begin{cases} a_0 \leqq x \leqq a, \quad b_0 \leqq y'' \leqq b, \\ \quad |y'' - y'| < \eta, \end{cases}$$

on ait

$$(4) \qquad |f(x, y'') - f(x, y')| < \varepsilon$$

la fonction $\varphi(y)$ sera continue pour $y = y'$; on aura en effet, pour toutes les valeurs de y'' qui vérifient les inégalités (3),

$$|\varphi(y'') - \varphi(y')| \leqq \varepsilon(a - a_0).$$

Si à chaque nombre positif ε correspond un nombre positif η tel que l'inégalité (4) soit vérifiée pour toutes les valeurs de x, y', y'' qui vérifient les inégalités

$$a_0 \leqq x \leqq a, \quad b_0 \leqq y' \leqq b, \quad b_0 \leqq y'' \leqq b,$$
$$|y'' - y'| < \eta,$$

la fonction $\varphi(y)$ sera continue dans l'intervalle (b_0, b). Il en sera ainsi certainement si la fonction des deux variables x, y est continue (n° **165**) dans l'ensemble (XY) défini par les inégalités (1).

Si, en particulier, la fonction $f(x, y)$ admet une dérivée $f'_y(x,y)$ par rapport à y, pour chaque système de valeurs x, y appartenant à l'ensemble (XY), et si cette dérivée reste toujours inférieure en valeur absolue à un certain nombre positif M, on aura, quelles que soient les valeurs x, y', y'' appartenant à l'ensemble (XY),

$$|f(x, y'') - f(x, y')| < \mathrm{M}\,|y'' - y'|;$$

dans ce cas la continuité de la fonction $\varphi(y)$ est manifeste.

Cette continuité étant supposée, ainsi que l'existence de la dérivée $f'_y(x, y)$, on a, en supposant toujours que y', y'' appartiennent à l'intervalle (b_0, b),

$$\frac{\varphi(y'') - \varphi(y')}{y'' - y'} = \int_{a_0}^{a} \frac{f(x, y'') - f(x, y')}{y'' - y'}\, dx \tag{5}$$

Regardons dans cette égalité y' comme fixe et faisons tendre y'' vers y'; la quantité

$$\frac{f(x, y'') - f(x, y')}{y'' - y'},$$

où la seule variable est y'', tendra vers la limite $f'_y(x, y')$, en désignant par ce symbole ce que devient $f'_y(x, y)$ quand on y remplace y par y'; on ne peut en conclure que le second membre ait pour limite

$$\int_{a_0}^{a} f'_y(x, y')\, dx$$

ni même que ce symbole ait un sens; mais cette conclusion deviendra légitime, si la fonction de x, $f'_y(x, y')$, est intégrable dans l'intervalle (a_0, a) et si, en outre, à chaque nombre positif ε correspond un nombre η tel que l'on ait, pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a_0, a),

$$(6)\qquad \left|\frac{f(x, y'') - f(x, y')}{y'' - y'} - f'_y(x, y')\right| < \varepsilon$$

sous les seules conditions

$$(7)\qquad \begin{cases} a_0 \leqq x \leqq a, & b_0 \leqq y'' \leqq b, \\ y'' \lessgtr y', & |y'' - y'| < \eta. \end{cases}$$

Dans ce cas, en effet, la valeur absolue de la quantité

$$\frac{\varphi(y'') - \varphi(y')}{y'' - y'} - \int_{a_0}^{a} f'_y(x, y')dx,$$

ou

$$\int_{a_0}^{a}\left[\frac{f(x, y'') - f(x, y')}{y'' - y'} - f'_y(x, y')\right]dx$$

sera, pour toutes les valeurs de y'' qui vérifient les inégalités (7), plus petite que $(a - a_0)\varepsilon$.

On sera certainement dans ce cas si la fonction $f'_y(x, y)$ est continue dans l'ensemble (XY); on a, en effet (n° **216**)

$$\frac{f(x, y'') - f(x, y')}{y'' - y'} = f'_y(x, y'''),$$

en désignant par y''' un nombre compris entre y' et y''; l'inégalité (6) équivaut donc à la suivante :

$$|f'_y(x, y''') - f'_y(x, y')| < \varepsilon;$$

si à chaque nombre positif ε correspond un nombre positif η' tel que cette inégalité soit vérifiée sous les seules conditions

$$a_0 \leqq x \leqq a, \qquad b_0 \leqq y'' < b$$
$$|y''' - y'| < \eta',$$

et c'est ce qui aura certainement lieu quand la fonction $f'_y(x, y)$ des deux variables x, y est continue dans l'ensemble (XY), il est clair que l'on pourra satisfaire aux inégalités (6) sous les conditions (7) et que l'emploi de la formule

$$D_y\left[\int_{a_0}^{a} f(x, y)\right] dx dy = \int_{a_0}^{a} D_y[f(x, y)] dx$$

sera légitime pour toutes les valeurs de y qui appartiennent à l'intervalle (b_0, b).

III. — INTÉGRALES EULÉRIENNES

261. — Les règles qu'on vient de donner, soit pour reconnaître la continuité d'une intégrale définie qui contient un paramètre variable et que l'on regarde comme une fonction de ce paramètre, soit pour prendre la dérivée de cette fonction par rapport au paramètre, sont soumises à des conditions trop étroites ; beaucoup de travaux ont eu pour objet d'obtenir des conditions plus larges ; malgré l'intérêt et l'importance pratique de ces travaux, je n'en développerai pas les résultats et je me contenterai de traiter un exemple.

Ainsi qu'on l'a vu au n° **257**, l'intégrale

$$(1) \qquad \int_0^{\infty} x^{y-1}e^{-x}dx = \Gamma(y)$$

est une fonction définie de y, pour toutes les valeurs positives de y. Je signale, en passant, la propriété qu'exprime l'égalité

$$(2) \qquad \Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$$

où, bien entendu, on suppose y positif ; cette égalité s'obtient en partant de la relation

$$[x^y e^{-x}]' = yx^{y-1}e^{-x} - x^y e^{-x},$$

où le premier membre désigne la dérivée par rapport à x de la quantité entre crochets ; il suffit d'intégrer les deux membres entre les limites 0 et ∞, ce qui donne 0 pour le premier membre.

De la relation (2) résultent immédiatement les formules suivantes, où y désigne un nombre naturel plus grand que 1

$$\Gamma(y) = 1.2.3\ldots(y-1); \tag{3}$$

on reconnaît d'ailleurs directement que l'on a

$$\Gamma(1) = 1.$$

La fonction $\Gamma(y)$ est continue dans tout intervalle (a, b) borné par des nombres positifs. Ceci, toutefois, n'apparaît pas sur la définition (1), parce que, si y est plus petit que 1, la fonction sous le signe $\int$ n'est pas continue pour $x = 0$ et parce que la limite supérieure est infinie. Cette continuité peut s'établir comme il suit; on a, quels que soient les nombres positifs α et A,

$$\Gamma(y) = \int_0^\alpha x^{y-1}e^{-x}dx + \int_\alpha^A x^{y-1}e^{-x}dx + \int_A^\infty x^{y-1}e^{-x}dx.$$

Or, si on se donne un nombre positif ε, on peut prendre α assez petit et A assez grand pour que la première et la troisième intégrale du second membre soient plus petites que ε, quelle que soit la valeur de y appartenant à l'intervalle (a, b). On a en effet, en supposant $a < b$, puis $\alpha < 1$, $A > 1$,

$$\int_0^\alpha x^{y-1}e^{-x}dx < \int_0^\alpha x^{a-1}e^{-x}dx,$$

$$\int_A^\infty x^{y-1}e^{-x}dx < \int_A^\infty x^{b-1}e^{-x}dx.$$

Dire qu'on peut prendre α assez petit, A assez grand pour que les seconds membres de ces inégalités soient moindres que ε, c'est dire que les intégrales qui figurent dans ces seconds membres ont un sens.

D'un autre côté, en vertu des règles du numéro précédent, l'intégrale

$$\varphi(y) = \int_\alpha^A x^{y-1}e^{-x}dx$$

est continue. La démonstration peut maintenant s'achever à peu près comme au n° **180** :

Après avoir choisi α assez petit, A assez grand pour que l'on ait, en supposant que y appartienne à l'intervalle (a, b),

$$\int_0^{\alpha} x^{y-1}e^{-x}dx < \varepsilon \quad , \quad \int_A^{\infty} x^{y-1}e^{-x}dx < \varepsilon,$$

on peut faire correspondre au nombre ε un nombre positif η, tel que l'on ait

$$|\varphi(y + h) - \varphi(y)| < \varepsilon$$

sous la condition que les deux nombres y, $y + h$ appartiennent à l'intervalle (a, b) et que l'on ait $|h| < \eta$. On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}\Gamma(y + h) - \Gamma(y) = & \int_0^{\alpha} x^{y+h-1}e^{-x}dx - \int_0^{\alpha} x^{y-1}e^{-x}dx \\ & + \int_A^{\infty} x^{y+h-1}e^{-x}dx - \int_A^{\infty} x^{y-1}e^{-x}dx \\ & + \varphi(y + h) - \varphi(y),\end{aligned}$$

et, par conséquent, sous les conditions précédentes,

$$|\Gamma(y + h) - \Gamma(y)| < 5\varepsilon;$$

la continuité est évidente.

Si, sans se préoccuper de la légitimité de l'application, on calcule par la règle du numéro précédent, la dérivée de l'intégrale définie $\Gamma(y)$ par rapport à y, on trouve

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{y-1} \log x\, dx.$$

Mon but est de prouver que cette expression est effectivement égale à $\Gamma'(y)$. Le premier point serait d'établir qu'elle a un sens ; il est aisé de montrer, plus généralement, que l'expression

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{y-1} \log^n x\, dx,$$

où n est un nombre naturel quelconque, a un sens pour $y > 0$ et même qu'elle représente une fonction continue de y : je ne m'arrêterai pas à ce point, qui est facile, et je désignerai, dans ce qui suit, par $\theta(y)$ la fonction de y dont il s'agit d'établir qu'elle est égale à $\Gamma'(y)$.

La légitimité de la formule

$$\varphi'(y) = \int_\alpha^A e^{-x} x^{y-1} \log x \, dx,$$

où α et A sont des nombres positifs, résulte du numéro précédent. Puisque l'intégrale qui figure dans le second membre conserve un sens quand on la prend entre les limites 0 et ∞, c'est que, y étant donné, on peut, à chaque nombre positif ε, faire correspondre des nombres positifs α_0 et A_0 tels qu'on ait

$$\left| \int_0^\alpha e^{-x} x^{y-1} \log x \, dx \right| < \varepsilon \quad , \quad \left| \int_A^\infty e^{-x} x^{y-1} \log x \, dx \right| < \varepsilon ;$$

sous les conditions $0 < \alpha < \alpha_0$, $A > A_0$; sous les mêmes conditions, on peut donc écrire

$$(4) \qquad | \theta(y) - \varphi'(y) | < 2\varepsilon.$$

Or, on a

$$\frac{\Gamma(y+h) - \Gamma(y)}{h} = \frac{\varphi(y+h) - \varphi(y)}{h} + \int_0^\alpha e^{-x} x^{y-1} \frac{x^h - 1}{h} \log x \, dx$$
$$+ \int_A^\infty e^{-x} x^{y-1} \frac{x^h - 1}{h} \log x \, dx.$$

Quand h est très petit en valeur absolue, $\dfrac{x^h - 1}{h}$ est voisin de $\log x$; on peut prévoir que la première, par exemple, des intégrales qui figurent au second membre est voisine de

$$\int_0^\alpha e^{-x} x^{y-1} \log^2 x \, dx$$

intégrale dont on sait qu'elle a un sens, lorsque y et α sont positifs, et qui peut par conséquent être supposée aussi petite qu'on le veut, pourvu que α soit assez petit. Il doit en être de même pour la première intégrale du second membre.

Afin de justifier cette dernière assertion, rappelons d'abord (n° **216**) que l'on peut écrire, en désignant par λ un nombre positif moindre que 1,

$$\frac{x^h - 1}{h} = \frac{e^{h \log x} - 1}{h} = x^{\lambda h} \log x,$$

en sorte que le coefficient de dx, dans notre première intégrale, peut s'écrire

$$e^{-x} x^{y-1} x^{\lambda h} \log^2 x.$$

Dans ce coefficient, x doit prendre des valeurs appartenant à l'intervalle $(0, \alpha)$, donc plus petites que 1, si, comme il est évidemment permis, on suppose $\alpha < 1$. D'ailleurs dans le même coefficient, tous les facteurs sont positifs, on aura donc

$$e^{-x} x^{y-1} x^{\lambda h} \log^2 x < e^{-x} x^{y - 1 - \eta_0} \log^2 x,$$

en désignant par η_0 un nombre supérieur à $|h|$. Je le supposerai en outre moindre que y. Sous ces conditions, l'inégalité

$$\int_0^\alpha e^{-x} x^{y-1} \frac{x^h - 1}{h} \log x dx < \int_0^\alpha e^{-x} x^{y - \eta_0 - 1} \log^2 x\, dx$$

est évidente. D'ailleurs, quand on se donne le nombre positif y et que l'on a choisi le nombre positif η_0, l'intégrale qui figure dans le second membre a un sens ; c'est donc qu'on peut, à chaque nombre positif ε, faire correspondre un nombre positif α'_0 tel qu'on ait

$$\int_0^\alpha e^{-x} x^{y - \eta_0 - 1} \log^2 x\, dx < \varepsilon$$

sous la condion $\alpha < \alpha'_0$ et, par conséquent,

$$\int_0^\alpha e^{-x} x^{y-1} \frac{x^h - 1}{h} \log x\, dx < \varepsilon$$

sous les conditions $\alpha < \alpha'_0$, $|h| < \eta_0$. On prouverait de même qu'il existe un nombre A'_0 tel que l'on ait

$$\int_A^{\infty} e^{kx} x^{y-1} \frac{x^h - 1}{h} \log x \, dx < \varepsilon$$

sous les conditions $A > A'_0$, $|h| < \eta_0$.

Sous les mêmes conditions, on pourra donc écrire

$$\left| \frac{\Gamma(y+h) - \Gamma(y)}{h} - \frac{\varphi(y+h) - \varphi(y)}{h} \right| < 2\varepsilon.$$

Ayant pris arbitrairement $\eta_0 < y$, ayant ensuite pris α inférieur au plus petit des nombres α_0. α'_0, et A supérieur au plus grand des nombres A_0, A'_0, on peut faire correspondre au nombre positif ε un nombre positif $\eta < \eta_0$ tel que, que sous la condition $|h| < \eta$, on ait

$$\left| \frac{\varphi(y+h) - \varphi(y)}{h} - \varphi'(y) \right| < \varepsilon$$

ou en raison de l'inégalité (4)

$$\left| \frac{\varphi(y+h) - \varphi(y)}{h} - \theta(y) \right| < 3\varepsilon$$

et, finalement,

$$\left| \frac{\Gamma(y+h) - \Gamma(y)}{h} - \theta(y) \right| < 5\varepsilon$$

toujours sous la condition $|h| < \eta$. Il est donc bien prouvé que $\theta(y)$ est la dérivée de $\Gamma(y)$.

Un raisonnement analogue montrerait que l'on a, en général

$$\frac{d^n \Gamma(y)}{dy^n} = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{y-1} \log^n x \, dx.$$

262. — La fonction $\Gamma(y)$ peut être mise sous une autre forme que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^{y-1} \, dx$$

par laquelle on l'a définie. Si n désigne un nombre naturel très grand, e^{-x} est à peu près égal à $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$: on est ainsi porté à penser que l'intégrale qui définit $\Gamma(y)$ est voisine de

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{y-1}\,dx.$$

On montrera tout à l'heure que l'on a effectivement

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty}\left[\int_0^\infty e^{-x} x^{y-1}\,dx - \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{y-1}\,dx\right] = 0$$

Je me propose d'abord d'évaluer l'intégrale $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{y-1}\,dx$.

En y faisant le changement de variable $x = nt$, elle devient

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{y-1}\,dx = n^y \int_0^1 (1-t)^n t^{y-1}\,dt.$$

Si l'on intègre, entre les limites 0 et 1, les deux membres de l'identité

$$\frac{d}{dt}[(1-t)^n t^y] = y(1-t)^n t^{y-1} - n(1-t)^{n-1} t^y,$$

on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t)^n t^{y-1}\,dy &= \frac{n}{y}\int_0^1 (1-t)^{n-1} t^y\,dy \\ &= \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &= \frac{n(n-1)\dots 1}{y(y+1)\dots(y+n-1)}\,\frac{1}{y+n}\end{aligned}$$

et par suite

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{y-1}\,dx = \frac{n^y}{y}\,\frac{1.2\dots n}{(y+1)(y+2)\dots(y+n)}.$$

En admettant la proposition énoncée plus haut, on aurait donc

$$(2) \quad \frac{1}{\Gamma(y+1)} = \frac{1}{y\Gamma(y)} = \lim_{n=\infty}\left[n^{-y}\left(1+\frac{y}{1}\right)\left(1+\frac{y}{2}\right)\dots\left(1+\frac{y}{n}\right)\right].$$

La propriété qu'exprime cette égalité sera établie si l'on a établi la proposition qu'exprime l'égalité (1).

J'établirai d'abord cette dernière en regardant y comme un nombre fixe compris entre o et 1.

On a évidemment

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{y-1}\, dx - \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{y-1}\, dx$$
$$= \int_0^n x^{y-1}\left[e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right] dx + \int_n^\infty e^{-x} x^{y-1}\, dx.$$

Que la seconde intégrale qui figure dans le second membre tende vers la limite o quand n tend vers $+\infty$, c'est ce qui résulte évidemment de ce que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-x} x^{y-1}\, dx$ a un sens ; tout revient donc à démontrer que l'on a

$$\lim_{n=\infty} \int_0^n \left[e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\right] x^{y-1}\, dx = 0.$$

L'étude qu'on va faire de la quantité entre crochets, que je désignerai par $\Psi(x)$, montrera que cette fonction, nulle pour $x = 0$, est positive pour les autres valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle $(0, n)$, qu'elle passe par un minimum et que la valeur de ce minimum est moindre que

$$\frac{1}{(n-1)e}.$$

Il résultera de là que l'on a

$$\int_0^n \Psi(x)\, x^{y-1}\, dx < \int_0^n \frac{x^{y-1} dx}{(n-1)e} \quad \text{ou} \quad \frac{n^y}{y(n-1)e};$$

cette dernière quantité tend évidemment vers o quand y est un nombre fixe compris entre o et 1 et que n augmente indéfiniment. La proposition qu'exprime l'égalité (5) sera donc établie pour ces valeurs de y, dès qu'on aura établi les propriétés de $\Psi(x)$ qu'on a annoncées plus haut.

L'égalité

$$\Psi'(x) = - e^{-x} + \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}$$

montre que $\Psi'(x)$ s'annule en même temps que la fonction

$$\varphi(x) = x + (n - 1) \log\left(1 - \frac{x}{n}\right),$$

dont la dérivée est $\frac{1 - x}{n - x}$. On reconnaît sans peine que la fonction $\varphi(x)$ s'annule une seule fois dans l'intervalle $(0, n)$ et cela, pour une valeur x_0 qui est plus grande que 1. Cette valeur x_0 correspond à un maximum de $\Psi(x)$, lequel est égal à

$$M = e^{-x_0} - \left(1 - \frac{x_0}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x_0}{n}\right)^{n-1} \frac{x_0}{n};$$

la dernière égalité résulte de ce que $\Psi'(x_0)$ est nul; la fonction $\Psi(x)$ croît de 0 à M dans l'intervalle $(0, x_0)$, décroît de M à e^{-n} dans l'intervalle (x_0, n); $\Psi(x)$ s'annule pour $x = 0$ et est positif pour les autres valeurs de l'intervalle $(0, n)$. Enfin, si l'on regardait M comme une fonction de x_0, on verrait immédiatement que, dans l'intervalle $(0, n)$, le maximum de M a lieu pour $x = 1$; il est

$$\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{n - 1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

On a d'ailleurs

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{e}:$$

car cette inégalité équivaut à la suivante

$$n \log\left(1 - \frac{1}{n}\right) < - 1,$$

qui devient évidente en développant le logarithme en série.

On a donc

$$M < \frac{1}{(n - 1)e};$$

c'est ce que l'on avait annoncé.

263. — L'égalité

$$(1)\qquad \frac{1}{\Gamma(1+y)} = \lim_{n=\infty} \left[n^{-y}\left(1+\frac{y}{1}\right)\left(1+\frac{y}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{y}{n}\right)\right]$$

est donc établie pour les valeurs de y comprises entre o et 1, et la démonstration même prouve que, pour ces valeurs, la quantité entre crochets tend vers une limite, lorsque n augmente indéfiniment.

Il est aisé d'établir directement cette dernière affirmation *pour toutes les valeurs de* y.

Remplaçons en effet, dans la quantité entre crochets, n^{-y} par une puissance de e dont l'exposant soit

$$y \log n = -y\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-C-\alpha_n\right),$$

en désignant par C la constante d'Euler (n° **194**) et par α_n une quantité qui tend vers o quand n augmente indéfiniment ; on aura

$$n^{-y}\left(1+\frac{y}{1}\right)\left(1+\frac{y}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{y}{n}\right)$$

$$= e^{Cy}\left\{\left(1+\frac{y}{1}\right)e^{-\frac{y}{1}}\right\}\left\{\left(1+\frac{y}{2}\right)e^{-\frac{y}{2}}\right\}\cdots\left\{\left(1+\frac{y}{n}\right)e^{-\frac{y}{n}}\right\}(1+\varepsilon_n)$$

en posant

$$e^{\alpha_n y} = 1+\varepsilon_n,$$

en sorte que ε_n tend vers o quand n augmente indéfiniment.

On va montrer, que si l'on pose en général

$$\left(1+\frac{y}{r}\right)e^{-\frac{y}{r}} = 1+u_r,$$

le produit infini

$$\prod_{r=1}^{r=\infty}(1+u_r)$$

est absolument et uniformément convergent pour les valeurs de y appartenant à n'importe quel intervalle, en sorte qu'il représente une fonction $f(y)$ continue dans tout intervalle.

Si l'on admet qu'il en soit ainsi, il est clair que l'on aura, quel que soit y,

$$\lim_{n=\infty}\left[n^{-y}\left(1+\frac{y}{1}\right)\left(1+\frac{y}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{y}{n}\right)\right]=e^{Cy}f(y).$$

Quant à la convergence uniforme du produit infini, elle résulte de ce que l'on a, en vertu de la définition de u_r,

$$u_r=-\frac{y^2}{2r^2}+\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}\right)\frac{y^3}{r^3}-\left(\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}\right)\frac{y^3}{r^4}+\cdots$$

et de ce que, si A désigne un nombre positif quelconque, la série, à termes positifs,

$$\frac{A^2}{2}+\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}\right)A^3+\cdots+\left[\frac{1}{1.2\ldots(p-1)}-\frac{1}{1.2\ldots p}\right]A^p+\cdots$$

est manifestement convergente, en sorte que si l'on désigne sa somme par B, on a, pour toutes les valeurs de y qui appartiennent à l'intervalle $(-A, A)$,

$$|u_r|<\frac{B}{r^2};$$

la série dont le $r^{\text{ième}}$ terme est $\frac{B}{r^2}$ étant convergente, le produit infini dont le $r^{\text{ième}}$ facteur est $1+u_r$ est absolument et uniformément convergent dans l'intervalle $(-A, A)$.

Il convient de remarquer en passant la façon étroite dont la fonction $f(x)$, que l'on vient de définir, est liée à la fonction $\sin \pi x$.

En partant de la relation

$$\sin \pi x=\pi x\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right),$$

établie au n° **200**, on est tenté d'écrire

$$\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)=\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(1+\frac{x}{r}\right)\times\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(1-\frac{x}{r}\right);$$

mais les deux produits infinis qui figurent dans le second membre n'ayant pas de sens, ce second membre est, comme eux, dénué de signification ; au contraire, l'égalité

$$\prod_{r=1}^{r=\infty}\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right)=\prod_{r=1}^{r=\infty}\left\{\left(1+\frac{x}{r}\right)e^{-\frac{x}{r}}\right\}\prod_{r=1}^{r=\infty}\left\{\left(1-\frac{x}{r}\right)e^{\frac{x}{r}}\right\},$$

où les deux produits infinis du second membre sont convergents, d'après ce qui précède, est évidemment légitime ; on en conclut

$$\text{(2)}\qquad \sin\pi x=\pi x f(x) f(-x)=\pi x\prod{}'\left\{\left(1-\frac{x}{r}\right)e^{-\frac{x}{r}}\right\},$$

en entendant que, dans le produit $\prod'$, r doit prendre toutes les valeurs entières (positives ou négatives), *à l'exclusion de la valeur* o.

L'égalité (1) ou, ce qui revient au même, l'égalité

$$\Gamma(y)=\lim_{n=\infty}\left[\frac{1.2\ldots n.n^{y-1}}{y(y+1)\ldots(y+n)}\right],$$

ou encore, en désignant par ε_n une quantité qui tend vers o quand n augmente indéfiniment,

$$\Gamma(y)=\frac{1.2\ldots n.n^{y-1}}{y(y+1)\ldots(y+n)}(1+\varepsilon_n)$$

n'est établie que sous la condition $0<y<1$. Il est maintenant aisé de voir que cette égalité, évidente pour $y=1$, subsiste quelle que soit la valeur *positive* de y, c'est-à-dire pour toutes les valeurs de y pour lesquelles la fonction

$$\Gamma(y)=\int_0^\infty e^{-x}x^{y-1}\,dx$$

a été définie.

Remarquons en effet que si l'on pose

$$g(y)=\lim_{n=\infty}\left[\frac{1.2\ldots n\times n^{y-1}}{y(y+1)\ldots(y+n)}\right]=\frac{1.2\ldots n\times n^{y-1}}{y(y+1)\ldots(y+n)}(1+\varepsilon_n),$$

la fonction $g(y)$, définie pour toutes les valeurs de y qui ne sont pas des nombres entiers nuls ou négatifs, jouit de la propriété

$$g(y+1)=y\,g(y)$$

établie plus haut pour la fonction $\Gamma(y)$, en partant de l'intégrale définie : on a en effet

$$\frac{g(y+1)}{g(y)} = \frac{yn}{y+n+1}(1+\varepsilon'_n);$$

Le second membre, quand n grandit indéfiniment, tend vers y; d'où résulte la proposition à démontrer.

Soit alors en supposant $y > 1$, K la partie entière de y et

$$y = \mathrm{K} + y_0 \qquad (0 < y_0 < 1).$$

On aura

$$\Gamma(y) = (y-1)(y-2)\ldots(y-\mathrm{K}+1)\,\Gamma(y_0),$$
$$g(y) = (y-1)(y-2)\ldots(y-\mathrm{K}+1)\,g(y_0),$$

et, puisque $g(y_0)$ est égal à $\Gamma(y_0)$, il faut bien que $g(y)$ soit égal à $\Gamma(y)$.

On peut donc regarder la définition de $g(y)$ comme une nouvelle définition de la fonction $\Gamma(y)$ définie d'abord, mais incomplètement, au moyen d'une intégrale : la nouvelle définition s'étendant à toutes les valeurs de y autres que $0, -1, -2, \ldots$; il revient exactement au même de définir la fonction $\Gamma(y)$ par les égalités

$$\frac{1}{\Gamma(y)} = y\,e^{Cy} f(y), \quad f(y) = \prod_{r=1}^{r=\infty} \left\{ \left(1+\frac{y}{r}\right) e^{-\frac{y}{r}} \right\},$$

d'où il suit que $\Gamma(y)$ est l'inverse d'une fonction continue dans tout intervalle, fonction qui s'annule pour $y = 0, -1, -2, \ldots$, et seulement pour ces valeurs. De ces égalités et de l'égalité (3) résulte immédiatement la relation

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

qui pour $x = \frac{1}{2}$ donne

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

d'où l'on déduit, en remplaçant x par x^2,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

CHAPITRE VIII

SUR QUELQUES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE

264. — Reprenons la formule, établie au nº **231**.

$$(1)\quad \begin{cases} f(x+h) = f(x) + \dfrac{h}{1}f'(x) + \dfrac{h^2}{1\,.\,2}f''(x) + \dots \\ \quad + \dfrac{h^{n-1}}{1\,.\,2\,\dots\,(n-1)}f^{(n-1)}(x) + \dfrac{(1-\theta)^{n-p}\,h^n}{1\,.\,2\,\dots\,(n-1)\,p}f^{(n)}(x+\theta h)\,; \end{cases}$$

θ est un nombre compris entre o et 1, n et p sont des nombres naturels. Cette formule sera légitime si la fonction $f(x)$ admet une dérivée $n^{\text{ième}}$ dans un intervalle auquel appartiennent les nombres x, $x+h$, ce qui implique la continuité de la fonction $f(x)$, l'existence et la continuité des dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$, dans cet intervalle.

Supposons que ces conditions soient vérifiées quelque grand que soit n, et que, en outre, pour les valeurs considérées de x et h, le terme complémentaire

$$\frac{(1-\theta)^{n-p}\,h^n}{1\,.\,2\,\dots\,(n-1)\,p}f^{(n)}(x+\theta h)$$

ait pour limite o quand n augmente indéfiniment ; alors la série indéfinie

$$f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1\,.\,2}f''(x) + \dots + \frac{h^{n-1}}{1\,.\,2\,\dots\,(n-1)}f^{(n-1)}(x) + \dots$$

sera convergente et aura pour somme $f(x+h)$, puisque la somme de ses n premiers termes diffère de $f(x+h)$ d'une quantité qui a pour limite 0 quand n augmente indéfiniment ; on pourra donc écrire alors

$$(2) \qquad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(x) + \dots;$$

cette formule permettra de développer la fonction $f(x+h)$ suivant les puissances entières et positives de h, si les conditions pour qu'elle soit applicable sont réalisées ; à la vérité, il est souvent difficile de reconnaître qu'il en est ainsi, lorsqu'on part d'une fonction donnée $f(x)$; l'expression générale de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de cette fonction peut être fort compliquée, et il devient alors fort malaisé de reconnaître si le terme complémentaire tend vers 0 quand n augmente indéfiniment.

On reconnaît immédiatement que ce terme complémentaire tend vers 0, pour les fonctions $f(x)$ telles que leurs dérivées $f^n(x)$ restent toutes inférieures, en valeur absolue, à un nombre positif fixe pour les valeurs de x appartenant à un certain intervalle. C'est ce qui arrive pour les fonctions $\sin x$, $\cos x$, e^x, auxquelles la formule (1) s'applique sans difficulté.

Quand on a affaire à une fonction $f(x)$ dont on sait que $f(x+h)$ est développable en une série qui procède suivant les puissances entières et positives de h et pour laquelle on sait effectuer le développement, la formule (2) permet, en s'appuyant sur ce que ce développement ne peut s'effectuer que d'une seule façon (n° **173**), de trouver la forme de la $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}(x)$ de $f(x)$.

Si, par exemple, on prend $f(x) = e^{-x^2}$, on trouve sans peine, pour la dérivée $n^{\text{ième}}$ de cette fonction, l'expression

$$(-1)^n e^{-x^2} \Big[(2x)^n - \frac{n(n-1)}{1} (2x)^{n-2} + \dots$$
$$+ (-1)^i \frac{n(n-1)\dots(n-2i+1)}{1 \cdot 2 \dots i} (2x)^{n-2i} + \dots \Big];$$

la quantité entre crochets est un polynome de degré n dont le dernier terme s'obtiendra en faisant $i = \frac{n-1}{2}$ ou $i = \frac{n}{2}$ suivant que n sera impair ou pair.

La formule de Maclaurin (n° 232),

$$(3)\quad \begin{cases} f(x) = f(0) + \dfrac{x}{1} f'(0) + \dfrac{x^2}{1.2} f''(0) + \dots \\ \quad + \dfrac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + \dfrac{(1-\theta)^{n-p} x^n}{1.2\dots(n-1)p} f^{(n)}(\theta x), \end{cases}$$

suppose que la $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}(x)$ de la fonction $f(x)$ existe dans l'intervalle $(0, x)$. Elle donne lieu aux mêmes observations que la formule dite de Taylor, d'où elle a été déduite. Si elle est applicable quelque grand que soit n et si le terme complémentaire

$$\frac{(1-\theta)^{n-p} x^n}{1.2\dots(n-1)p} f^{(n)}(\theta x)$$

tend vers 0 quand n augmente indéfiniment, la série indéfinie

$$f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + \dots$$

sera convergente et aura pour somme $f(x)$; si l'on arrive à reconnaître que ces conditions sont réalisées, on pourra donc développer la fonction $f(x)$ suivant les puissances entières et positives de x par la formule

$$(4)\qquad f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \dots.$$

Cette formule s'applique immédiatement, en vertu d'une remarque faite sur la formule de Taylor, aux fonctions e^x, $\sin x$, $\cos x$ et d'une façon un peu plus difficile, aux fonctions $(1+x)^m$, $\log(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, lorsque x est intérieur à l'intervalle $(-1, 1)$. On montre alors que le terme complémentaire tend vers 0 quand n augmente indéfiniment. Je ne m'y arrêterai pas.

265. — A la formule de Taylor se rattache une formule importante dite habituellement *formule sommatoire* de Maclaurin, bien qu'elle soit due à Euler, qui en a d'ailleurs tiré grand parti [1].

---

(1) *Institutiones calculi differentialis*. Chap. V. L'attribution de cette formule à Euler est due à M. Eneström; voir dans le tome V des *Acta Mathematica* p. 2 la réimpression du mémoire de Malmsten. *Sur la formule*

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta u''_x - \dots$$

C'est, pour ce qui concerne le reste de la série, l'analyse de Malmsten qu'on trouvera plus loin.

Soit $f(x)$ une fonction dont je supposerai qu'elle admette, dans un intervalle auquel appartiennent les valeurs x, $x+h$ de la variable, des dérivées continues $f'(x)$, $f''(x)$, ... d'un ordre au moins égal à l'ordre de celles qui figureront dans les formules qui vont suivre : posons pour abréger

$$f^{(i)}(x+h) - f^{(i)}(x) = \Delta f^{(i)}(x);$$

on pourra écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} \Delta f(x) = hf'(x) + \dfrac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots + \dfrac{h^p}{1.2\ldots p} & f^{(p)}(x) + h^{p+1}\rho_0, \\ h\Delta f'(x) = \qquad\qquad \dfrac{h^2}{1}f''(x) + \ldots + \dfrac{h^p}{1.2\ldots(p-1)} & f^{(p)}(x) + h^{p+1}\rho_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ h^{p-1}\Delta f^{(p-1)}(x) = & \dfrac{h^p}{1}f^{(p)}(x) + h^{p+1}\rho_{p-1}, \end{array}\right.$$

en posant, suivant qu'on adopte une forme ou l'autre du terme complémentaire de la formule de Taylor,

$$\rho_i = \frac{1}{1.2\ldots(p-i+1)} f^{p+1}(\xi_i)$$

ou

$$\rho_i = \frac{1}{1.2\ldots(p-i)} \int_0^1 (1-t)^{p-i} f^{p+1}(x+ht)\,dt;$$

dans ces formules i doit prendre les valeurs $0, 1, 2 \ldots p-1$: dans la première ξ_i désigne un nombre dont on sait seulement qu'il est compris entre x et $x+h$. Il est clair que, entre les équations (1), on peut éliminer les quantités

$$h^2 f''(x), \quad h^3 f'''(x), \ldots, \quad h^p f^{(p)}(x);$$

il suffit pour cela de les ajouter membre à membre après les avoir multipliées par des nombres $A_0, A_1, \ldots A_{p-1}$ qui vérifient les équations

$$\begin{aligned} &A_0 = 1, \\ &\frac{A_0}{1.2} + \frac{A_1}{1} = 0, \\ &\frac{A_0}{1.2.3} + \frac{A_1}{1.2} + \frac{A_2}{1} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{A_0}{1.2\ldots p} + \frac{A_1}{1.2\ldots(p-1)} + \ldots + \frac{A_{p-1}}{1} = 0. \end{aligned}$$

Si l'on adopte ces valeurs pour A_0, A_1, ..., A_{p-1}, on aura

$$(2)\qquad A_0\Delta f(x) + A_1\Delta f'(x) + \ldots + A_{p-1}\Delta f^{(p-1)}(x) = A_0 h f'(x) + h^{p+1} S_p,$$

en posant, pour abréger,

$$S_p = A_0\rho_0 + A_1\rho_1 + \ldots + A_{p-1}\rho_{p-1}.$$

Des équations qui déterminent A_0, A_1, ..., A_{p-1} on tire successivement

$$A_0 = 1,\quad A_1 = -\frac{1}{2},\quad A_2 = \frac{1}{12},\quad A_3 = 0,\ \ldots$$

On remarquera d'abord que, si l'on augmente p, les premières équations restent toujours les mêmes, en sorte que les valeurs écrites ci-dessus, par exemple, conviennent quelque grand que soit p. Les valeurs des coefficients A_0, A_1, A_2, ... sont manifestement rationnelles.

Enfin ces équations ne dépendent en aucune façon de la fonction $f(x)$ et cette remarque, en prenant pour $f(x)$ des fonctions particulières, va nous fournir des renseignements sur les valeurs des nombres A_0, A_1, ..., A_{p-1}.

En prenant d'abord $f(x) = e^x$, les quantités $\Delta f(x)$, $\Delta f'(x)$, ... sont toutes égales à

$$e^{x+h} - e^x = e^x(e^h - 1)$$

en sorte que la formule (2) donne, après avoir divisé par $e^x(e^h - 1)$, et en tenant compte de ce que A_0 est égal à 1,

$$\frac{h}{e^h - 1} = 1 + A_1 h + A_2 h^2 + \ldots + A_{p-1} h^{p-1} - \frac{S_p e^{-x} h}{e^h - 1} h^p;$$

cette dernière formule subsiste pour $h = 0$, si l'on convient d'attribuer alors la valeur 1 à la fonction $\frac{h}{e^h - 1}$ qui, dans ces conditions, est une fonction continue, quel que soit h. Dans le dernier terme du second membre, le coefficient de h^p est une fonction bornée de h, pour h voisin de 0 ; il résulte de là que ce second membre n'est autre chose que le développement par la formule de Maclaurin de la fonction de h

$$\frac{h}{e^h - 1}.$$

développement qui contient p termes réguliers et le terme complémentaire

$$-\frac{S_p\, e^{-x}\, h}{e^h - 1}\, h^p.$$

Puisqu'il ne peut s'effectuer que d'une seule façon (n° **194**), A_n est la valeur, pour $z = 0$, de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction

$$\frac{z}{e^z - 1},$$

divisée par $1.2.3 \ldots n$.

Bien que la conclusion ne suppose pas qu'on ait établi la possibilité de développer cette dernière fonction en une série (indéfinie) entière en z, je prierai le lecteur d'admettre cette possibilité ; il me sera commode, dans un instant, de pouvoir l'invoquer. Dans un autre chapitre, on établira que ce développement est légitime, sous la condition $|z| < 2\pi$; on a l'habitude de l'écrire sous la forme

$$\text{(B)}\qquad \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{B_1}{1.2}z^2 - \frac{B_2}{1.2.3.4}z^4 + \ldots$$
$$+ (-1)^{n+1}\frac{B^n}{1.2\ldots 2n}z^{2n} + \ldots ;$$

sauf $-\frac{1}{2}z$, il n'y figure aucun terme de degré impair ; cela résulte de ce que la fonction

$$\frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2}\,\frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \frac{z}{2}\,\frac{\operatorname{ch}\frac{z}{2}}{\operatorname{sh}\frac{z}{2}}$$

étant paire, son développement ne doit pas changer quand on change z en $-z$. Puisque le développement de $\frac{e^z}{e^z - 1}$ ne peut se faire que d'une seule façon, il est clair que l'on doit avoir

$$A_{2n+1} = 0, \qquad A_{2n} = (-1)^{n+1}\frac{B_n}{1.2 \ldots 2n},\ (n = 1, 2, \ldots).$$

Les nombres rationnels B_1, B_2, ..., B_n, ..., définis comme on vient de le faire, sont ce que l'on appelle les nombres de Bernoulli ;

ils s'introduisent dans de nombreuses questions d'Analyse et jouissent de curieuses propriétés arithmétiques ; voici la valeur des dix premiers

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},\ B_6 = \frac{691}{2730},$$

$$B_7 = \frac{7}{6},\ B_8 = \frac{3617}{510},\ B_9 = \frac{43867}{798},\ B_{10} = \frac{174611}{330}.$$

En adoptant ces notations, et en prenant $p = 2n$, la formule (2) peut s'écrire

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} hf'(x) &= \Delta f(x) - \frac{h}{2}\Delta f'(x) + \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta f''(x) - \frac{B_2 h^4}{1.2.3.4}\Delta f^{\text{IV}}(x) + \ldots \\ &\quad + (-1)^n \frac{B_{n-1} h^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2)}\Delta f^{(2n-2)}(x) + R_{2n+1}, \end{aligned}\right.$$

en posant

$$R_{2n+1} = -\frac{h^{2n+1}}{1.2\ldots 2n}\left[\rho_0 - \frac{1}{2}\rho_1 + \frac{B_1}{1.2}\rho_2 + \ldots + (-1)^n \frac{B_{n-1}}{1.2\ldots(2n-2)}\rho_{2n-2}\right].$$

Si l'on prend pour $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{2n-2}$ les expressions qui comportent une intégrale définie, que l'on a rappelées un peu plus haut, on peut écrire

$$R_{2n+1} = -\frac{h^{2n+1}}{1.2\ldots 2n}\int_0^1 \Phi(t)\, f^{2n+1}(x+ht)\, dt,$$

en posant

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi(t) &= (1-t)^{2n} - \frac{1}{2}\frac{2n}{1}(1-t)^{2n-1} + \frac{2n(2n-1)}{1.2}B_1(1-t)^{2n-2} \\ &\quad + \ldots - (-1)^i \frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2i+1)}{1.2\ldots 2i}B_i(1-t)^{2n-2i} + \ldots \\ &\quad - (-1)^{n-1}\frac{2n(2n-1)}{1.2}B_{n-1}(1-t)^2. \end{aligned}\right.$$

Dans cette formule, en avant des nombres de Bernoulli, figurent les coefficients binomiaux, pris de deux en deux, et relatifs à la puissance $2n^{\text{ième}}$. Avant de transformer l'expression de R_{2n+1}, je ferai de la formule (4) une application qui nous conduira à des résultats importants en eux-mêmes et indispensables pour cette transformation.

Si l'on suppose que, dans la formule (4), $f(x)$ soit un polynome de degré inférieur à $2n+1$, le reste disparaîtra de lui-même; on obtiendra ainsi des identités qui, en égalant dans les deux membres les coefficients des diverses puissances de x, fourniront des équations qui permettraient de calculer successivement B_1, B_2, ...; sans nous arrêter à ce point, prenons en particulier

$$f(x) = (x-1)^{n+1}, \qquad h = 1,$$

on aura

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} (n+1)(x-1)^n = x^{n+1} - (x-1)^{n+1} - \frac{n+1}{1}\,\frac{1}{2}[x^n-(x-1)^n] \\ + B_1\frac{(n+1)n}{1.2}[x^{n-1}-(x-1)^{n-1}] \\ - B_2\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}[x^{n-3}-(x-1)^{n-3}] + \dots \end{aligned}\right.$$

Le dernier terme contient $[x-(x-1)]$ quand n est pair et $[x^2-(x-1)^2]$ quand n est impair. Si l'on désigne par p un nombre entier positif, que l'on remplace dans l'équation (6) x successivement par $1, 2, \dots, p$ et que l'on ajoute, on aura, après avoir divisé par $n+1$,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} 1^n + 2^n + \dots + (p-1)^n = \frac{1}{n+1}\Big[p^{n+1} - \frac{n+1}{1}\,\frac{1}{2}p^n \\ + B_1\frac{(n+1)n}{1.2}p^{n-1} - B_2\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4}p^{n-3} + \dots\Big]. \end{aligned}\right.$$

Le second membre de cette formule, quand on y replace l'indéterminée x au lieu de l'entier p, est ce que l'on appelle un *polynome de Bernoulli*. je le désignerai dans ce qui suit par $\varphi_n(x)$; si l'on tient compte de la remarque précédemment faite à propos du dernier terme de la formule (6), on voit qu'il convient d'écrire

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
(2n+1)\varphi_{2n}(x) &= x^{2n+1} - \frac{2n+1}{1}\,\frac{1}{2}\,x^{2n} + \mathrm{B}_1\frac{(2n+1)\,2n}{1.2}\,x^{2n-1} \\
&\quad - \mathrm{B}_2\frac{(2n+1)\,2n\,(2n-1)\,(2n-2)}{1.2.3.4}\,x^{2n-3} + \ldots \\
&\quad - (-1)^i\mathrm{B}_i\frac{(2n+1)\,2n\ldots(2n-2i+2)}{1.2\ldots 2i}\,x^{2n-2i+1} + \ldots \\
&\quad - (-1)^n\mathrm{B}_n\frac{2n+1}{1}\,x, \\
2n\varphi_{2n-1}(x) &= x^{2n} - \frac{2n}{1}\,\frac{1}{2}\,x^{2n-1} + \mathrm{B}_1\frac{2n(2n-1)}{1.2}\,x^{2n-2} \\
&\quad - \mathrm{B}_2\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4}\,x^{2n-4} + \ldots \\
&\quad - (-1)^i\mathrm{B}_i\frac{2n(2n-1)\ldots(2n-2i+1)}{1.2\ldots 2i}\,x^{2n-2i} + \ldots \\
&\quad - (-1)^{n-1}\mathrm{B}_{n-1}\frac{2n(2n-1)}{1.2}\,x^2.
\end{aligned}
\right.
$$

Les formules (6) et (8) mettent en évidence les relations suivantes :

$$
(9)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\varphi_n(x) - \varphi_n(x-1) &= (x-1)^n, \\
\varphi_{2n}(x) + \varphi_{2n}(-x) &= -x^{2n}, \\
\varphi_{2n-1}(x) - \varphi_{2n-1}(-x) &= -x^{2n-1}.
\end{aligned}
\right.
$$

En changeant dans la première de ces équations n en $2n$, x en $1-x$ et ajoutant, membre à membre, à la seconde équation, on trouve

$$
(10)\qquad \varphi_{2n}(x) + \varphi_{2n}(1-x) = 0;
$$

on obtient de même

$$
(10^{\text{bis}})\qquad \varphi_{2n-1}(x) - \varphi_{2n-1}(1-x) = 0.
$$

Ces relations montrent que $\varphi_{2n}(x)$ est une fonction impaire de $x - \frac{1}{2}$, et par conséquent s'annule pour $x = \frac{1}{2}$; au contraire $\varphi_{2n-1}(x)$ est une fonction paire de $x - \frac{1}{2}$.

Les formules (8) montrent que tous les polynomes $\varphi_n(x)$ sont nuls pour $x = 0$; la première des formules (9) montre ensuite qu'ils sont tous nuls pour $x = 1$.

Enfin, si dans les équations (8) on prend les dérivées des deux membres, on trouve immédiatement

$$
(11) \qquad \begin{cases} \varphi'_{2n}(x) = 2n\varphi_{2n-1}(x) - (-1)^n B_n, \\ \varphi'_{2n+1}(x) = (2n+1)\varphi_{2n}(x), \end{cases}
$$

qui vont permettre d'établir la proposition suivante :

Le polynome $\varphi_{2n}(x)$ nul pour $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$, garde le même signe pour les valeurs de x comprises entre 0 et $\frac{1}{2}$, change de signe pour $x = \frac{1}{2}$, et garde un signe constant pour les valeurs de x comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1. Le polynome $\varphi_{2n+1}(x)$, nul pour $x = 0$ et $x = 1$, garde un signe constant pour les valeurs de x comprises entre ces deux nombres.

Ce théorème se vérifie sans peine pour les petites valeurs de n; admettons qu'il soit vrai pour les polynomes $\varphi_{2n-1}(x)$, $\varphi_{2n}(x)$, et démontrons qu'il subsiste pour les polynomes $\varphi_{2n+1}(x)$, $\varphi_{2n+2}(x)$.

Si le polynome $\varphi_{2n+1}(x)$ s'annulait pour une valeur α de x, autre que 0 et 1, appartenant à l'un des intervalles $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, au premier par exemple, sa dérivée $\varphi'_{2n+1}(x)$ s'annulerait pour un nombre compris entre 0 et α, distinct de ces limites; il en serait de même, en vertu de la deuxième égalité (11), du polynome $\varphi_{2n}(x)$, ce qui est contraire à l'hypothèse; il résulte de la même égalité que la fonction $\varphi_{2n+1}(x)$ varie toujours dans le même sens quand x croît de 0 à $\frac{1}{2}$, et dans un sens contraire quand x croît de $\frac{1}{2}$ à 1 : la fonction

$$
(2n+2)\varphi_{2n+1}(x) + (-1)^n B_{n+1}
$$

peut donc s'annuler seulement une fois dans l'intervalle $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ et seulement une fois dans l'intervalle $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; il en est de même de la fonction $\varphi'_{2n+2}(x)$ qui lui est égale, en vertu de la première égalité (11). Or si la fonction $\varphi_{2n+2}(x)$ s'annulait pour une valeur β de x autre que 0, $\frac{1}{2}$, 1, comprise par exemple entre 0 et $\frac{1}{2}$, la dérivée φ'_{2n+2} devrait s'annuler pour un nombre compris entre o et β, et pour un nombre compris entre β et $\frac{1}{2}$, ce qu'on vient de démontrer être impossible. Il résulte de ce qui précède que, dans l'intervalle (o, 1), la fonction $\varphi_{2n+1}(x)$ passe, pour $x = \frac{1}{2}$, par un maximum ou un minimum et que, dans l'intervalle (o, 1), il n'y a pas d'autre valeur de la variable qui lui fasse acquérir soit un maximum, soit un minimum.

La valeur de ce maximum ou de ce minimum se trouve facilement en partant de ce fait que l'on obtient le polynome $\varphi_n(x)$ en multipliant par 1.2.3. ... n le coefficient de z^n dans le développement en série, suivant les puissances entières et positives de z, de la fonction [1]

$$\frac{e^{xz} - e^z}{e^z - 1}.$$

Cette proposition se vérifie immédiatement. La formule (B) fournit les développements en série des fonctions

$$\frac{1}{e^z - 1}, \qquad \frac{e^z}{e^z - 1} = 1 + \frac{1}{e^z - 1};$$

en multipliant la première série par

$$1 + \frac{xz}{1} + \frac{x^2z^2}{1.2} + \ldots$$

et retranchant du résultat la seconde série, on obtient le développement cherché [2].

---

(1) La plupart des propriétés des polynomes de Bernoulli peuvent se déduire de là. Voir sur ce sujet le *Traité de calcul différentiel* de M. Bertrand (p. 352); j'ai emprunté au même ouvrage la démonstration de l'existence du maximum ou du minimum pour $x = \frac{1}{2}$.

(2) Notons en passant que, en supposant x entier positif, la fonction considérée peut être remplacée par

$$1 + e^z + e^{2z} + \ldots + e^{(x-1)z}$$

et que le coefficient de z^n dans le développement de cette expression est manifestement

$$\frac{1}{1.2 \ldots n}[1^n + 2^n + \ldots + (x-1)^n].$$

Il suit de là que $\varphi_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ s'obtiendra en multipliant par

$$1.2\ldots(2n-1)$$

le coefficient de z^{2n-1} dans le développement de

$$\frac{e^{\frac{z}{2}}-e^{z}}{e^{z}-1}=-\frac{2}{e^{z}-1}+\frac{1}{e^{\frac{z}{2}}-1}-1;$$

le second membre se développe de suite en série au moyen de la formule (B) et l'on trouve

$$(12)\qquad \varphi_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)=(-1)^n\frac{B_n}{n}\,\frac{2^{2n}-1}{2^{2n}}.$$

Enfin la première égalité (11) conduit à la suivante :

$$\varphi_{2n}(1)-\varphi_{2n}(0)=2n\int_0^1\varphi_{2n-1}(x)\,dx-(-1)^n B_n,$$

d'où

$$(13)\qquad \int_0^1\varphi_{2n-1}(x)\,dx=\frac{(-1)^n}{2n}B_n.$$

Nous sommes maintenant en mesure de transformer l'expression du terme complémentaire.

En comparant les équations (5) et (8), on voit que l'on a

$$\Phi(t)=2n\varphi_{2n-1}(1-t);$$

le second membre, en vertu de l'égalité (10^{bis}), est égal à $2n\varphi_{2n-1}(t)$; finalement on a

$$(14)\qquad R_{2n+1}=\frac{-h^{2n+1}}{1.2\ldots(2n-1)}\int_0^1\varphi_{2n-1}(t)f^{2n+1}(x+ht)\,dt.$$

La fonction $\varphi_{2n-1}(t)$ ne changeant pas de signe dans l'intervalle (0, 1) on peut appliquer à l'intégrale définie le premier théorème de la moyenne et, si l'on tient compte de l'équation (13), écrire

$$(15)\qquad R_{2n+1}=\frac{(-1)^{n+1}B_n}{1.2\ldots 2n}h^{2n+1}f^{2n+1}(x+\theta h),$$

en désignant par θ un nombre compris entre 0 et 1.

Si dans l'intervalle $(0, 1)$ la fonction de t, $f^{2n+1}(x + ht)$, ne changeait pas de signe, on pourrait appliquer d'une autre façon le même théorème de la moyenne et, en s'appuyant sur ce que $\varphi_{2n-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ est un maximum ou un minimum de la fonction $\varphi_{2n-1}(t)$ dans l'intervalle $(0, 1)$, écrire

$$(16) \qquad R_{2n-1} = \theta \frac{(-1)^{n+1} B_n}{1.2 \ldots 2n} \frac{2^{2n} - 1}{2^{2n-1}} h^{2n} \Delta f^{2n}(x),$$

en désignant par θ un nombre appartenant à l'intervalle $(0, 1)$. Les formules (15) et (16) sont dues à Malmsten. Lorsque R_{2n-1} diminue indéfiniment quand n augmente indéfiniment, l'équation (4) peut être remplacée par une autre équation, dans le second membre de laquelle figure une série indéfinie. La convergence de cette série n'a lieu que dans des cas très particuliers (¹); mais la formule (4) n'en a pas moins une grande importance : on a vu plus haut comment elle fournissait immédiatement la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des p premiers nombres entiers ; elle conduit de la même façon à une expression de la somme

$$f'(1) + f'(2) + \ldots + f'(p)$$

qui pourra servir à l'évaluation approchée de cette somme, si pour des valeurs convenables de n le reste complémentaire se trouve être suffisamment petit. Je me contenterai de citer dans cet ordre d'idées l'application de la formule d'Euler aux hypothèses suivantes :

$$h = 1, \quad f'(x) = \log \Gamma(x),$$

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x) = \frac{1}{2}\log(2\pi) + x \log x - x,$$

en renvoyant le lecteur, pour le détail des calculs, au mémoire déjà cité de Malmsten. On parvient ainsi à la formule de *Stirling* savoir :

$$\begin{aligned}\log \Gamma(x+1) = {} & \frac{1}{2}\log(2\pi) + \left(x + \frac{1}{2}\right)\log x - x \\ & + \frac{B_1}{1.2}\frac{1}{x} - \frac{B_2}{3.4}\frac{1}{x^3} + \frac{B_3}{5.6}\frac{1}{x^5} - \ldots \\ & + \ldots \frac{(-1)^n B_{n-1}}{(2n-3)(2n-2)}\frac{1}{x^{2n-3}} - \frac{(-1)^n B_n}{(2n-1)2n}\frac{\theta}{x^{2n-1}} \; (^2),\end{aligned}$$

(¹) Voir le mémoire de M. Darboux : *Sur quelques développements en série.*

(²) L'expression, du reste, est due à Cauchy.

où θ est compris entre 0 et 1. Cette formule, qui est légitime, pourvu que x soit positif, fournit des valeurs très approchées de $\Gamma(x+1)$, ou si x est entier, du produit $1.2 \ldots x$, lorsque x est très grand.

La formule d'Euler, légèrement modifiée, permet aussi de calculer approximativement une intégrale définie.

Soit en effet $F(x)$ une fonction continue et admettant des dérivées dans l'intervalle (a, b), et soit, en désignant par p un nombre entier positif et en posant $h = \frac{b-a}{p}$,

$$S_p = h\,[F(a) + F(a+h) + \ldots + F(a+(p-1)h)];$$

si, dans la formule (4), on remplace $f'(x)$ par $F(x)$, $\Delta f(x)$ par $\int_x^{x+h} F(x)\,dx$ et que l'on ajoute membre à membre toutes les équations qu'on déduit de l'équation ainsi obtenue en y remplaçant successivement x par $a, a+h, a+2h, \ldots, a+(p-1)h$, on trouve

$$\begin{aligned} S_p = \int_a^b F(x)\,dx - \frac{h}{2}[F(b) - F(a)] \\ + \frac{B_1 h^2}{1.2}[F'(b) - F'(a)] \\ + \ldots + (-1)^n \frac{B_{n-1}\,h^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2)}[F^{(2n-3)}(b) - F^{(2n-3)}(a)] \\ + T_{2n}. \end{aligned}$$

Quant au terme complémentaire, si l'on se reporte à la formule (15), on voit qu'on pourra, en désignant par M_{2n} un nombre positif égal ou supérieur aux valeurs absolues de $F^{(2n)}(x)$ dans l'intervalle (a, b), et par θ' un nombre appartenant à l'intervalle $(-1, +1)$, l'écrire sous la forme

$$T_{2n} = \theta' \frac{(b-a)\,B_n\,h^{2n}}{1.2\ldots 2n} M_{2n}.$$

Si la formule (16) est applicable, on pourra écrire

$$T_{2n} = \theta \frac{(-1)^{n+1} B_n}{1.2\ldots 2n} \frac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}} h^{2n}[F^{(2n-1)}(b) - F^{(2n-1)}(a)].$$

Ces formules résolvent entièrement le problème posé.

266. — Soit

$$(1) \qquad f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

une série dont les termes sont des fonctions bornées et intégrables de la variable x dans l'intervalle (a_0, a) ; si cette série est uniformément convergente dans cet intervalle, au sens étroit (n° **182**), il en est de même de la série

$$(2) \qquad \int_{a_0}^{x} f_1(x)\,dx + \int_{a_0}^{x} f_2(x)\,dx + \ldots + \int_{a_0}^{x} f_n(x)\,dx + \ldots ;$$

soient $\varphi(x)$ et $\Phi(x)$ les sommes respectives des séries (1) et (2) ; la fonction $\varphi(x)$ est bornée et intégrable dans l'intervalle (a_0, a), et l'on a, pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à cet intervalle,

$$\Phi(x) = \int_{a_0}^{x} \varphi(x)\,dx.$$

Désignons en effet par $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de la série (1) et par $R_n(x)$ le reste correspondant, en sorte que l'on ait

$$\varphi(x) = S_n(x) + R_n(x).$$

Je dis d'abord que la fonction $\varphi(x)$ est bornée et intégrable dans l'intervalle (a_0, a).

Soit en effet ε un nombre positif arbitraire ; puisque la série (1) est uniformément convergente, au nombre ε correspond un nombre naturel p tel que l'on ait, pour toutes les valeurs de l'indice n supérieures à p et pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a_0, a),

$$|\, R_n(x) \,| < \varepsilon.$$

De cette inégalité et de ce que la fonction $S_n(x)$ est bornée, il résulte d'abord que la fonction $\varphi(x)$ est bornée dans l'intervalle (a_0, a). Dans ce même intervalle, l'écart de $R_n(x)$ est inférieur à 2ε. Ceci posé, soit x une valeur quelconque appartenant à l'intervalle (a_0, a) : la fonction $S_n(x)$ étant, par hypothèse, intégrable dans l'intervalle (a_0, x), au nombre positif ε correspond certainement une décomposition de l'intervalle (a_0, x), telle que la différence entre les sommes supérieure et inférieure, relatives à cette décomposition et évaluées pour la fonction $S_n(x)$, soit moindre que ε; la même différence, évaluée pour la fonction $R_n(x)$, sera moindre que $2(a-a_0)\varepsilon$, puisque l'écart de cette fonction est moindre que 2ε et que l'écart de l'intervalle (a_0, x) est au plus égal à $(a-a_0)$; la même différence enfin, évaluée pour la fonction $S_n(x)+R_n(x)$, ou $\varphi(x)$, sera moindre que

$$\varepsilon[1+2(a-a_0)];$$

comme ε est arbitraire et que le facteur qui le multiplie est constant, ce produit peut être supposé plus petit que tel nombre positif arbitraire que l'on voudra; il est donc démontré que la fonction $\varphi(x)$ est intégrable dans l'intervalle (a_0, a); il en est de même de la fonction

$$R_n(x) = \varphi(x) - S_n(x)$$

et l'on a, pourvu que x appartienne à l'intervalle (a_0, a),

$$\int_{a_0}^{x} \varphi(x)\,dx = \int_{a_0}^{x} S_n(x)\,dx + \int_{a_0}^{x} R_n(x)\,dx. \tag{3}$$

La seconde intégrale du second membre est, en valeur absolue, moindre que $\varepsilon(a-a_0)$; on voit donc que, sous les seules conditions

$$a_0 \leqq x \leqq a, \qquad n \geqq p,$$

on peut affirmer que la différence entre $\int_{a_0}^{x} \varphi(x)\,dx$ et

$$\int_{a_0}^{x} S_n(x)\,dx = \int_{a_0}^{x} f_1(x)\,dx + \int_{a_0}^{x} f_2(x)\,dx + \ldots + \int_{a_0}^{x} f_n(x)\,dx,$$

est moindre que $\varepsilon(a-a_0)$; cette dernière quantité pouvant représenter tel nombre positif que l'on voudra, il est prouvé que la série (2) est uniformément convergente dans l'intervalle (a_0, a) et que sa somme $\Phi(x)$ est égale à $\int_{a_0}^{x} \varphi(x)\,dx$.

Supposons, en conservant d'ailleurs les notations et les autres hypothèses, que la convergence de la série (1) ne soit assurée, dans l'intervalle (a_0, a), qu'au sens large. On peut, à chaque nombre positif ε, faire correspondre un nombre naturel n tel que l'on ait $|R_n(x)| < \varepsilon$ pour toutes les valeurs de x appartenant à l'intervalle (a_0, a). Le raisonnement dont on s'est servi prouve que la fonction $\varphi(x)$ est intégrable dans l'intervalle (a_0, a) et que $\int_{a_0}^{x} S_n(x)\,dx$ est une valeur approchée de $\int_{a_0}^{x} \varphi(x)\,dx$ avec une erreur moindre que $\varepsilon(a - a_0)$, erreur qui peut être supposée aussi petite qu'on le veut; mais on ne peut conclure de là ni la convergence de la série (2), ni l'égalité de la somme de cette série à $\int_{a_0}^{x} \varphi(x)\,dx$; on pourrait en effet s'éloigner de cette dernière quantité en prenant dans la série (2) plus de n termes.

Si l'on suppose par exemple [1] la série (1) telle que $S_n(x)$ soit égal à nxe^{-nx^2} ou à 0 suivant que n est impair ou pair, cette série sera uniformément convergente, au sens large, dans l'intervalle (0, 1) et $\varphi(x)$ sera égal à 0. On a d'ailleurs suivant les cas

$$\int_0^1 S_n(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right), \text{ ou } \int_0^1 S_n(x)dx = 0.$$

La série (2) n'est pas convergente.

C'est sur le cas d'une série dont les termes sont des fonctions d'une variable x qu'on a appelé l'attention ; mais le lecteur, s'il veut bien se reporter au n° **181**, n'aura aucune peine à énoncer et à démontrer une proposition plus générale que le théorème relatif à l'intégration, terme par terme, d'une série. Ce dernier théorème entraîne la réciproque que voici :

Soit

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

une série convergente dans l'intervalle (a_0, a), soit $\varphi(x)$ la somme de cette série ; supposons que, dans l'intervalle (a_0, a), les fonctions

---

(1) Cet exemple est dû à M. Osgood (*Bulletin of the american mathematical society*, 2e série, T. IX, p. 553).

$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ admettent des dérivées continues $f'_1(x)$, $f'_2(x), \ldots, f'_n(x), \ldots$; si, dans le même intervalle, la série

$$(4)\qquad f'_1(x) + f'_2(x) + \ldots + f'_n(x) + \ldots$$

est uniformément convergente (au sens étroit), la fonction $\varphi(x)$ admettra une dérivée dans l'intervalle considéré et cette dérivée sera la somme $\varphi'(x)$ de la série precédente.

Si en effet on applique à cette série le théorème direct, on voit que, en désignant par x un nombre appartenant à l'intervalle (a_0, a), on aura

$$\int_{a_0}^{x} \varphi'(x)\,dx = \int_{a_0}^{x} f'_1(x)\,dx + \int_{a_0}^{x} f'_2(x)\,dx + \ldots ;$$

mais on a, en général

$$\int_{a_0}^{x} f'_n(x)\,dx = f_n(x) - f_n(a_0),$$

puisque la fonction $f'_n(x)$ est continue dans l'intervalle (a_0, a). On aura donc

$$\begin{aligned}\int_{a_0}^{x} \varphi'(x)\,dx &= f_1(x) - f_1(a_0) + f_2(x) - f_2(a_0) + \ldots \\ &= \varphi(x) - \varphi(a_0).\end{aligned}$$

La fonction $\varphi'(x)$ étant continue, puisque la série (4) est uniformément convergente, cette égalité montre que $\varphi'(x)$ est bien la dérivée de $\varphi(x)$ (nº **251**).

Une série peut être uniformément convergente, avoir pour termes des fonctions continues, sans que la série des dérivées soit convergente. La fonction sans dérivée étudiée au nº **237** peut servir d'exemple ; il en est de même de la série dont le $n^{\text{ième}}$ terme est

$$\frac{\sin(1.2.3\ldots n.x)}{1.2.3\ldots n},$$

qui, comme M. Darboux l'a montré, n'a pas non plus de dérivée.

Voici maintenant quelques applications.

Considérons la série, entière en x,

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 x + \ldots + u_n x^n + \ldots,$$

où $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ sont des constantes ; supposons que cette série soit absolument convergente pour $x = A$; elle sera uniformément convergente dans l'intervalle $(-A, A)$ et si x appartient à cet intervalle, on aura

$$\int_0^x \varphi(x)\,dx = u_0 x + u_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + u_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots$$

On a vu, en particulier, que l'on avait, en supposant $|x| < 1$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots,$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} x^{2n} + \ldots$$

et que les trois séries qui figurent dans les seconds membres sont absolument convergentes dans l'intervalle $(-A, A)$ en supposant $0 < A < 1$; si donc x appartient à cet intervalle, si, en d'autres termes, sa valeur absolue est inférieure à 1, on aura

$$\log(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

$$\operatorname{arc\,sin} x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots.$$

En supposant toujours $|x| < 1$, on démontrera de même que l'on a (n° **196**)

$$\operatorname{ath} x = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$$

$$\operatorname{ash} x = \log(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{x}{1} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \ldots$$
$$+ (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots;$$

on reconnaîtra plus tard que ces formules subsistent pour $x = 1$ ou $x = -1$ lorsque les séries correspondantes sont convergentes : on reconnaît d'ailleurs immédiatement que celles des valeurs 1 ou

— 1 qui rendent divergente une de ces séries rendent infinie la fonction correspondante. On a déjà signalé (n° **193**) l'utilité de certaines de ces séries pour le calcul des logarithmes. L'expression de arc tg x appliquée à l'identité, bien aisée à démontrer,

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$$

fournit le moyen facile de calculer π avec une très grande approximation.

Considérons encore la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2},$$

elle est uniformément convergente pour les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$, en désignant par α un nombre positif plus petit que π. La somme de cette série est d'ailleurs (n° **201**) égale à $\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}$; cette égalité subsiste même pour $x = 0$, si l'on convient de regarder la fonction $\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}$ comme prenant, pour $x = 0$, sa vraie valeur, à savoir 0 ; on aura donc

$$\int_0^x \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) dx = \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^x \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}\, dx,$$

pourvu que x appartienne à l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$: cette égalité équivaut à la suivante :

$$\log \frac{\sin x}{x} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right);$$

pour $x = 0$, on doit remplacer $\frac{\sin x}{x}$ par 1. Le second membre est une série uniformément convergente dans l'intervalle $(-\alpha, \alpha)$. On déduit immédiatement de cette égalité

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right);$$

cette égalité, démontrée pour les valeurs de x comprises entre $-\pi$ et $+\pi$, subsiste évidemment pour les valeurs $-\pi$ et $+\pi$, qui annulent $\sin x$, et pour toutes les valeurs de x à cause de la périodicité des deux membres. On voit ainsi comment se relient les résultats pour lesquels on avait été obligé de donner deux démonstrations distinctes (nos **200, 201**).

267. — Les *séries trigonométriques* sont des séries de la forme

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \ldots$$
$$+ (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots;$$

x est une variable que l'on supposera, dans ce qui suit, appartenir à l'intervalle $(-\pi, +\pi)$; $a_0, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ sont des coefficients constants; $a_n \cos nx + b_n \sin nx$ est le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme de la série; on a affecté le premier terme du coefficient $\frac{1}{2}$ pour la commodité des calculs ultérieurs.

L'importance de ces séries, qui se sont introduites naturellement dans l'Analyse pour la solution de certains problèmes de mécanique et de physique mathématique a été révélée par cette remarque, due à Fourier, qu'elle paraissent aptes à représenter une fonction quelconque définie dans un intervalle d'écart égal à 2π.

Soit en effet $f(x)$ une fonction bornée dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et supposons que l'on ait, pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à cet intervalle,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2}a_0 &+ (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) \\ &+ \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \end{aligned}\right.$$

Multiplions les deux membres par $\cos px$, p étant l'un quelconque des nombres $0, 1, 2, 3, \ldots$; supposons que l'égalité subsiste quand on intègre le premier membre entre les limites $-\pi$ et π, et le second, terme par terme, entre les mêmes limites, en sorte que l'on ait

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos px\,dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-\pi}^{+\pi}\cos px\,dx \\ &+ \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{+\pi}\cos nx\cos px\,dx + b_n\int_{-\pi}^{+\pi}\sin nx\cos px\,dx\right) + \ldots \end{aligned}\right.$$

C'est ce qui arriverait certainement si la série qui figure dans le second membre de l'égalité (1) était uniformément convergente dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$. Si maintenant on tient compte des égalités

$$\int \cos nx \cos px\, dx = \frac{1}{2}\int [\cos (n - px) + \cos (n+p)x]\, dx$$
$$= \frac{\sin (n-p)x}{2(n-p)} + \frac{\sin (n+p)x}{2(n-p)} \qquad (p \lessgtr n),$$
$$\int \sin nx \cos px\, dx = \frac{1}{2}\int [\sin (n+p)x + \sin (n-p)x]\, dx$$
$$= -\frac{\cos (n+p)x}{2(n+p)} - \frac{\cos (n-p)x}{2(n-p)} \qquad (p \lessgtr n),$$
$$\int \cos^2 px\, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 2px)\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2px}{4p} \qquad (p \lessgtr 0),$$
$$\int \sin px \cos px\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2px\, dx = -\frac{1}{4p}\cos 2px,$$

qui entraînent les suivantes :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx \cos px\, dx = 0 && (p \lessgtr n), \\ &\int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx \cos px\, dx = 0 && (p \lessgtr n), \\ &\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 px\, dx = \pi, && (p > 0), \\ &\int_{-\pi}^{+\pi} \sin px \cos px\, dx = 0, && \end{aligned} \right.$$

on voit de suite que l'égalité (2) revient à celle-ci :

$$(4) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos px\, dx = a_p \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots);$$

en multipliant de même les deux membres de l'égalité (1) par $\sin px$, et intégrant de la même façon, on trouvera sans peine

$$(5) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin px\, dx = b_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Sans doute, si l'on ne sait rien sur la nature de la convergence de la série qui figure dans le second membre de l'égalité (1), les calculs qui précèdent ne sont en aucune façon légitimes; mais les formules (4) et (5) ont un sens pourvu que la fonction $f(x)$ soit bornée et intégrable dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$; il n'est même pas nécessaire que la fonction $f(x)$ soit bornée dans cet intervalle, pourvu que les fonctions $f(x) \sin px$, $f(x) \cos px$, qui peuvent elles-mêmes être infinies aux environs d'un nombre fini ou infini de valeurs appartenant à cet intervalle, soient intégrables, quel que soit l'entier p, entre les limites $-\pi$ et $+\pi$. Dans ces conditions, il est bien naturel de se demander ce qu'est la série trigonométrique dont les coefficients a_p, b_p sont définis par les formules (4) et (5), si cette série est convergente dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, si, dans cet intervalle, sa somme est égale à $f(x)$. La recherche de conditions très larges, sous lesquelles on peut affirmer qu'il en est ainsi, a été l'objet d'un grand nombre de travaux importants. Je considérerai seulement le cas qui a été étudié par Lejeune Dirichlet, celui où l'intervalle $(-\pi, \pi)$ peut être décomposé en un nombre fini d'intervalles partiels tels que dans chacun d'eux la fonction $f(x)$ soit continue et varie dans le même sens (si elle varie).

Si dans le $(p+1)^{\text{ième}}$ terme $a_p \cos px + b_p \sin px$ de la série

$$(\mathrm{S}) \quad \frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots,$$

on remplace les coefficients a_p, b_p par leurs valeurs déduites des formules (4) et (5), qu'il convient d'écrire sous la forme

$$a_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(y) \cos py \, dy, \qquad b_p = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(y) \sin py \, dy$$

afin de ne pas confondre la variable x qui figure dans les termes de la série (S) avec la variable d'intégration, on trouvera

$$a_p \cos px + b_p \sin px = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(y) \cos p(y - x) \, dx;$$

on aura donc pour la somme S_n des $n+1$ premiers termes de la série (S),

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(y) \, \mathrm{T}_n dy,$$

en posant pour abréger

$$T_n = \frac{1}{2} + \cos(y - x) + \cos 2(y - x) + \ldots + \cos n(y - x);$$

mais en vertu de l'identité bien connue

$$\frac{\sin(2n+1)\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}} = \frac{1}{2} + \cos a + \cos 2a + \ldots + \cos na,$$

on a

$$T_n = \frac{\sin(2n+1)\frac{y-x}{2}}{2\sin\frac{y-x}{2}},$$

d'où

$$(6) \qquad S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(y)\frac{\sin(2n+1)\frac{y-x}{2}}{2\sin\frac{y-x}{2}}\,dy,$$

en entendant que, pour $y = x$, le rapport

$$\frac{\sin(2n+1)\frac{y-x}{2}}{2\sin\frac{y-x}{2}}$$

doit être remplacé par sa vraie valeur $n + \frac{1}{2}$. Relativement à l'intégration, la quantité x qui figure sous le signe $\int$ doit être regardée comme un paramètre constant. La question posée revient ainsi à chercher si, lorsque n augmente indéfiniment par valeurs entières et positives, l'intégrale qui figure dans le second membre tend vers une limite et, s'il y a lieu, à évaluer cette limite.

En faisant dans cette intégrale la substitution

$$y = x + 2z,$$

on aura

$$\pi S_n = \int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz.$$

L'intégrale qui figure dans le second membre a sa limite inférieure négative et sa limite supérieure positive, puisque x est supposé compris entre $-\pi$ et $+\pi$; elle peut être remplacée par la somme de deux autres intégrales, portant sur la même quantité et ayant pour limites, la première $-\frac{\pi+x}{2}$ et o, la seconde o et $\frac{\pi-x}{2}$; en faisant dans la première la substitution $z=-\zeta$ et remettant ensuite la lettre z à la place de ζ, on trouve finalement

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \pi S_n &= \int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz \\ &+ \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\,dz. \end{aligned}\right.$$

Les limites supérieures $\frac{\pi+x}{2}$, $\frac{\pi-x}{2}$ des deux intégrales qui figurent dans le second membre sont comprises entre o et π et peuvent atteindre l'une ou l'autre de ces limites.

Cette formule montre que le problème posé revient au suivant : Reconnaître si l'intégrale

$$\int_0^a \varphi(z)\frac{\sin mz}{\sin z}\,dz,$$

où a est un nombre positif fixe au plus égal à π, où $\varphi(z)$ est une fonction bornée dans l'intervalle (o, a), tend vers une limite lorsque m augmente indéfiniment par valeurs positives impaires ; c'est le problème que je vais traiter, sous certaines conditions imposées à la fonction $\varphi(z)$.

268. — Je ferai d'abord deux remarques préliminaires concernant l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin mz}{\sin z}\,dz,$$

où α, β sont des nombres appartenant à l'intervalle $\left(o, \frac{\pi}{2}\right)$ et où m désigne, comme je le supposerai dans ce numéro et le suivant, un nombre naturel impair.

Je montrerai d'abord que la valeur absolue de cette intégrale, quels que soient les nombres α, β, m, assujettis toutefois aux conditions précédemment énoncées, est toujours inférieure à un nombre fixe, que l'on peut prendre égal à π. Supposons $\alpha < \beta$. Lorsque z varie de α à β, la fonction $\sin z$ reste positive et croissante. Quant à la fonction $\sin mz$, elle est, en général, tantôt positive, tantôt négative : décomposons l'intervalle (α, β) en intervalles partiels tels que, dans chacun d'eux, $\sin mz$ garde le même signe ; si l'on désigne par i et j les parties entières des quantités $\frac{\alpha m}{\pi}$, $\frac{\beta m}{\pi}$, ces intervalles partiels seront bornés par les nombres

$$\alpha, \quad (i+1)\frac{\pi}{m}, \quad (i+2)\frac{\pi}{m}, \ldots, \quad (j-1)\frac{\pi}{m}, \quad j\frac{\pi}{m}, \quad \beta;$$

l'intégrale proposée peut être remplacée par la somme de $j-i+1$ intégrales (¹) dans lesquelles le signe $\int$ porte toujours sur la même expression

$$\frac{\sin mz}{\sin z}\,dz,$$

et qui se rapportent aux intervalles partiels définis par la suite précédente ; dans le premier intervalle, $\sin mz$ a le signe de $(-1)^i$, puis les signes vont en alternant ; l'une quelconque des intégrales intermédiaires peut être représentée par

$$\int_{r\frac{\pi}{m}}^{(r+1)\frac{\pi}{m}} \frac{\sin mz}{\sin z}\,dz, \qquad (r = i+1,\ i+2,\ \ldots,\ j-1).$$

Si, dans cette intégrale, on fait la substitution

$$z = r\frac{\pi}{m} + \frac{\zeta}{m};$$

elle devient

$$(-1)^r \int_0^{\pi} \frac{\sin\zeta}{m\sin\left(r\frac{\pi}{m} + \frac{\zeta}{m}\right)}\,d\zeta;$$

(¹) Ce mode de décomposition joue le rôle essentiel dans la démonstration de Dirichlet.

cette forme montre tout d'abord que la valeur absolue de cette intégrale diminuerait si l'on remplaçait r par l'un quelconque des nombres $r+1$, $r+2$, ..., $j-1$; en effet les limites de l'intégrale resteraient les mêmes et la quantité $\left(r\frac{\pi}{m}+\frac{\zeta}{m}\right)$ sera remplacée par une quantité au plus égale à β et par suite à $\frac{\pi}{2}$; ainsi à partir de la deuxième intégrale, les signes vont en alternant, et les valeurs absolues vont en diminuant ; cette conclusion s'étend même, puisque $m(\beta - j\pi)$ est inférieur à π, à la dernière intégrale dont la valeur est

$$(-1)^j \int_0^{m(\beta-j\pi)} \frac{\sin\zeta}{m\sin\left(j\frac{\pi}{m}+\frac{\zeta}{m}\right)}\,d\zeta\,;$$

ainsi (n° **137**) la somme des intégrales qui suivent la première est du signe de $(-1)^{i+1}$ et est, en valeur absolue, inférieure à

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\zeta\,d\zeta}{m\sin\left[(i+1)\frac{\pi}{m}+\frac{\zeta}{m}\right]} < \int_0^{\pi}\frac{\sin\zeta\,d\zeta}{m\sin\frac{\zeta}{m}}\,;$$

quant à la première intégrale, elle est du signe de $(-1)^i$ et sa valeur absolue est égale à

$$\int_{m(\alpha-i\pi)}^{\pi} \frac{\sin\zeta\,d\zeta}{m\sin\left(i\frac{\pi}{m}+\frac{\zeta}{m}\right)},$$

quantité qui, puisque la limite inférieure $m(\alpha - i\pi)$ est positive et inférieure à π, est elle-même au plus égale au second membre de l'inégalité précédente.

La valeur de ce second membre est donc supérieure à la valeur de l'intégrale proposée ; mais on a, pour les valeurs de ζ comprises entre zéro et π,

$$m\sin\frac{\zeta}{m} \geqq \sin\zeta,$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $m=1$; en effet, pour ces valeurs de ζ la dérivée $\cos\frac{\zeta}{m} - \cos\zeta$ de la fonction $m\sin\frac{\zeta}{m} - \sin\zeta$ est positive : cette dernière fonction est donc croissante, et par conséquent positive, dans l'intervalle $(0, \pi)$. On a donc

$$\int_0^\pi \frac{\sin \zeta\, d\zeta}{m \sin \frac{\zeta}{m}} < \int_0^\pi \frac{\sin \zeta}{\sin \zeta}\, d\zeta,$$

le second membre de cette inégalité est égal à π : la proposition annoncée est démontrée.

L'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin mz}{\sin z}\, dz,$$

est égale à $\frac{\pi}{2}$, ainsi qu'il résulte de l'identité, déjà utilisée dans le précédent numéro,

$$\frac{\sin mz}{\sin z} = 1 + 2 \cos z + 2 \cos 2z + \ldots + 2 \cos (m - 1) z.$$

269. — Ces remarques préliminaires faites, je suivrai, pour l'étude de l'intégrale

$$\int_0^a \frac{\varphi(z)}{\sin z} \sin mz\, dz$$

la méthode que l'on doit à Ossian Bonnet.

Le premier point consiste à établir que l'on a

$$\lim_{m=\infty} \int_b^c \frac{\varphi(z)}{\sin z} \sin mz\, dz = 0$$

en supposant que b, c sont des nombres fixes, intérieurs à l'intervalle $(0, \pi)$, que la fonction $\varphi(z)$ est bornée dans l'intervalle (b, c), enfin que cet intervalle peut être subdivisé en intervalles partiels tels que, dans l'un quelconque d'entre eux, la fonction $\varphi(z)$ soit ou bien non-croissante, ou bien non-décroissante.

On supposera $b < c$, pour la démonstration. Il suffit évidemment de démontrer la proposition en supposant que la fonction $\varphi(z)$ soit non-croissante ou non-décroissante dans l'intervalle (b, c). On peut même supposer, comme je le ferai, que les nombres b, c

appartiennent tous deux soit à l'intervalle $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, soit à l'intervalle $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Si, en effet, ces conditions n'étaient pas vérifiées pour l'intervalle (b, c), on subdiviserait cet intervalle en intervalles partiels pour lesquels les conditions seraient vérifiées : la proposition établie pour chacun des intervalles partiels s'étend évidemment à l'intervalle total.

Supposons d'abord que l'on ait $0 < b < c \leq \frac{\pi}{2}$ et que la fonction $\varphi(z)$, dans l'intervalle (b, c), soit non-croissante et ne soit jamais négative. Il en sera de même de la fonction $\frac{\varphi(z)}{\sin z}$; on pourra donc appliquer le second théorème de la moyenne et écrire, en désignant par ξ un nombre appartenant à l'intervalle (b, c),

$$\int_b^c \frac{\varphi(z)}{\sin z} \sin mz\, dz = \frac{\varphi(b+0)}{\sin b} \int_b^\xi \sin mz\, dz$$
$$= \frac{\varphi(b+0)}{m \sin b} (\cos mb - \cos m\xi)$$

et, par suite,

$$(1) \qquad \left| \int_b^c \frac{\varphi(z)}{\sin z} \sin mz\, dz \right| \leq 2 \frac{\varphi(b+0)}{m \sin b} ;$$

dans ce cas, la proposition énoncée est établie. L'inégalité précédente s'applique en particulier dans le cas où l'on a $\varphi(z) = 1$, et l'on en conclut

$$(2) \qquad \left| \int_b^c \frac{\sin mz}{\sin z} \right| \leq \frac{2}{m \sin b}.$$

Conservons les autres suppositions, mais n'astreignons plus la fonction $\varphi(z)$ à ne jamais être négative. Dans l'intervalle (b, c) la fonction $\varphi(z) - \varphi(c)$ sera, comme $\varphi(z)$, non-croissante, et, de plus, ne sera jamais négative, on pourra donc lui appliquer l'inégalité (1) et écrire

$$\left| \int_b^c \frac{\varphi(z) - \varphi(c)}{\sin z} \sin mz\, dz \right| = \left| \int_b^c \frac{\varphi(z)}{\sin z} \sin mz\, dz - \varphi(c) \int_b^c \frac{\sin mz}{\sin z}\, dz \right|$$
$$\leq \frac{2\varphi(b+0) - 2\varphi(c)}{m \sin b} ;$$

on déduit de là, en tenant compte de l'inégalité (1)

$$\left|\int_b^c \frac{\varphi(z)}{\sin z}\sin mz\,dz\right| \leqq \frac{2\,|\varphi(c)|}{m\sin b} + \frac{2\varphi(b+0)-2\varphi(c)}{m\sin b}$$

et, *a fortiori*, en désignant par L la borne supérieure de la fonction $|\varphi(z)|$ dans l'intervalle (b, c), ou un nombre plus grand,

$$(3)\qquad \left|\int_b^c \frac{\varphi(z)}{\sin z}\sin mz\,dz\right| \leqq \frac{6\,\mathrm{L}}{m\sin b}.$$

Observons que si l'inégalité (1) est vérifiée, il en est certainement de même de l'inégalité (3), dont on peut donc affirmer qu'elle est vraie pourvu que l'on ait $0 < b < c \leqq \frac{\pi}{2}$ et que la fonction $\varphi(z)$ soit non-croissante dans l'intervalle (b, c). Si, au lieu d'être non-croissante, $\varphi(z)$ était non-décroissante, la fonction $-\varphi(z)$ serait non-croissante ; il n'y aurait qu'à lui appliquer l'inégalité (3), pour reconnaître que, dans ce cas encore, cette inégalité subsiste.

Enfin si l'on avait $\frac{\pi}{2} \leqq b < c < \pi$ et, si dans l'intervalle (b, c) la fonction $\varphi(z)$ était soit non-croissante, soit non-décroissante, on appliquerait l'inégalité (3) à la fonction $\varphi(\pi - z)$ en remplaçant b et c par $\pi - c$ et $\pi - b$; on aurait alors

$$\left|\int_{\pi-c}^{\pi-b} \frac{\varphi(\pi - z)}{\sin z}\sin mz\,dz\right| \leqq \frac{6\,\mathrm{L}}{m\sin c}$$

d'où l'on conclut, en changeant z en $\pi - z$ dans l'intégrale,

$$(4)\qquad \left|\int_b^c \frac{\varphi(z)}{\sin z}\sin mz\,dz\right| \leqq \frac{6\,\mathrm{L}}{m\sin c}.$$

La proposition énoncée est évidemment établie. Il me sera commode d'avoir fait les remarques suivantes.

Supposons seulement sur les nombres b, c qu'ils sont intérieurs à l'intervalle $(0, \pi)$; désignons par λ le plus petit des quatre nombres positifs b, c, $\pi - b$, $\pi - c$. Ne supposons plus que la fonction $\varphi(z)$ soit toujours non-croissante ou toujours non-décroissante dans l'intervalle (b, c), mais que cet intervalle puisse être décomposé en p intervalles partiels où $\varphi(z)$ satisfasse à la condition précédente. Si l'un de ces intervalles partiels contient à son intérieur le nombre $\frac{\pi}{2}$, on le décomposera en deux intervalles partiels ayant $\frac{\pi}{2}$ pour borne commune : on aura ainsi $p+1$ intervalles partiels, auxquels s'appliqueront, soit l'inégalité (3) soit l'inégalité (4), en y remplaçant b et c par les bornes de l'intervalle partiel. Dans tous les cas la valeur absolue de l'intégrale partielle correspondante sera au plus égale à

$$\frac{6\,\mathrm{L}}{m \sin \lambda},$$

en désignant par L la borne supérieure de $|\varphi(z)|$ dans l'intervalle total (b, c). On aura donc, sous les conditions imposées

$$(5) \qquad \left| \int_b^c \frac{\varphi(z)}{\sin z} \sin mz \, dz \right| \leqq \frac{6(p+1)\mathrm{L}}{m \sin \lambda},$$

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que l'intégrale

$$\int_0^b \varphi(z) \frac{\sin mz}{\sin z} dz$$

a une limite pour m infini et d'évaluer cette limite en supposant toujours que l'on ait

$$0 < b < \pi,$$

que, dans l'intervalle $(0, b)$ la fonction $\varphi(z)$ reste inférieure ou égale, en valeur absolue, à un nombre positif fixe L, et enfin que l'on puisse partager l'intervalle $(0, b)$ en un nombre fini p d'intervalles partiels tels que dans chacun d'eux la fonction $\varphi(z)$ soit, ou bien non-croissante ou bien non-décroissante.

Soit en effet ε un nombre positif arbitraire. D'après les conditions imposées à la fonction $\varphi(z)$, il est clair que cette fonction tend vers une limite lorsque z tend vers 0 par valeurs positives ; désignons cette limite par $\varphi(+0)$; au nombre ε correspondra un nombre positif η, tel que, sous les conditions

$$0 < x < \eta,$$

on ait

$$|\varphi(x) - \varphi(+0)| < \varepsilon.$$

Ceci posé, désignons par β un nombre positif moindre que γ, b, $\pi - b$ et tel que dans l'intervalle $(0, \beta)$ la fonction $\varphi(z)$ soit ou bien non-croissante ou bien non-décroissante.

On aura

$$\int_0^b \varphi(z) \frac{\sin mz}{\sin z} dz = \int_0^\beta \varphi(z) \frac{\sin mz}{\sin z} dz + \int_\beta^b \varphi(z) \frac{\sin mz}{\sin z} dz.$$

La seconde intégrale du second membre peut se représenter par

$$\theta' \frac{6(p+1)L}{2m \sin \beta}$$

en désignant par θ' un nombre compris entre -1 et $+1$. Quant à la première intégrale du second membre, on peut lui appliquer le second théorème de la moyenne, et la remplacer par l'expression

$$\begin{aligned} &\varphi(+0)\int_0^\xi \frac{\sin mz}{\sin z} dz + \varphi(\beta - 0)\int_\xi^\beta \frac{\sin mz}{\sin z} dz \\ &\quad = \varphi(+0)\int_0^\beta \frac{\sin mz}{\sin z} dz + [\varphi(\beta - 0) - \varphi(+0)]\int_\xi^\beta \frac{\sin mz}{\sin z} dz, \end{aligned}$$

où ξ désigne un nombre compris entre 0 et β ; en remplaçant dans le second membre de cette dernière égalité la première intégrale par

$$\frac{\pi}{2} + \frac{2\theta}{m \sin \beta}$$

et en se rappelant que la seconde est, en valeur absolue, au plus égale à π, on voit qu'on peut écrire finalement

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^b \varphi(z) \frac{\sin mz}{\sin z} dz = \frac{\pi}{2} \varphi(+0) + R_m, \\ &R_m = \frac{2\theta}{m \sin \beta} \varphi(+0) + \frac{6(p+1)L\theta'}{2m \sin \beta} + \varepsilon\theta''\pi, \end{aligned} \right.$$

θ'' étant, comme θ et θ', compris entre -1 et $+1$; on peut choisir d'abord le nombre ε, puis le nombre m, pour que R_m soit, en valeur absolue, plus petit que tel nombre que l'on voudra : l'intégrale

$$\int_0^b \varphi(z) \frac{\sin mz}{\sin z} dz$$

a donc pour limite $\frac{\pi}{2}\varphi(+0)$ quand m augmente indéfiniment [1].

Supposons que la fonction $\varphi(z)$ dépende d'un paramètre x et écrivons-la $\varphi(x, z)$; supposons même que le nombre positif b dépende aussi de ce paramètre ; si, pour chaque valeur de x appartenant à un intervalle (g, h), la fonction de z, $\varphi(x, z)$, satisfait aux conditions précédemment spécifiées, et qu'en outre b et $\pi - b$ ne soient jamais nuls, il est clair qu'on pourra écrire

$$\int_0^b \varphi(x, z) \frac{\sin mz}{\sin z} dz = \frac{\pi}{2}\varphi(x, +0) + R_m(x),$$

$R_m(x)$ étant une quantité qui, pour chaque valeur de x appartenant à l'intervalle (g, h) tend vers o quand m augmente indéfiniment. De l'expression de R_m résulte en outre la conséquence suivante : si les valeurs de L et p qui correspondent aux diverses valeurs de x restent, tant que x apppartient à l'intervalle (g, h), inférieures à des nombres fixes ; si les valeurs de b et de $\pi - b$ restent supérieures à un nombre positif fixe ; si, en outre, la fonction $\varphi(x, z)$ tend uniformément vers sa limite $\varphi(x, +0)$ quand z

---

(1) On a supposé dans ce qui précède m impair ; ce cas est le seul dont on aura besoin dans ce qui suit ; mais il convient de remarquer que la conclusion à laquelle on vient d'arriver ne suppose en aucune façon cette restriction ; elle n'est intervenue dans ce qui précède que par l'égalité

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin mz}{\sin z} dz = \frac{\pi}{2};$$

on établira sans peine que lorsque m augmente indéfiniment par valeurs paires et positives, le premier membre de l'égalité précédente a pour limite $\frac{\pi}{2}$, ce qui suffit pour les déductions ultérieures.

La méthode qu'on a suivie dans ce paragraphe permet, en imposant les mêmes conditions à la fonction $\varphi(z)$, d'établir l'égalité

$$\lim_{m=\infty} \int_0^b \varphi(z) \sin mz \frac{dz}{z} = \frac{\pi}{2}\varphi(+0).$$

Kronecker a donné à l'intégrale qui figure dans le premier membre le nom d'intégrale de Dirichlet.

tend vers o par des valeurs positives, en sorte qu'à chaque nombre positif ε corresponde un nombre positif η tel que l'on ait

$$|\varphi(x, z) - \varphi(x, +0)| < \varepsilon,$$

sous les conditions

$$g \leqq x \leqq h, \quad 0 < z < \eta;$$

la quantité $R_m(x)$ convergera uniformément vers o pour les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle (g, h), c'est-à-dire qu'à chaque nombre positif ε' correspondra un nombre entier positif m' tel que l'on ait

$$\left| \int_0^b \varphi(x, z) \frac{\sin mz}{\sin z} dz - \frac{\pi}{2} \varphi(x, +0) \right| < \varepsilon'$$

sous les conditions

$$g \leqq x \leqq h, \quad m \geqq m'.$$

Revenons maintenant à la question posée au n° **267** et notamment à la formule

$$(6)\quad \begin{cases} \pi S_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi + x}{2}} f(x - 2z) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz \\ \quad + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi - x}{2}} f(x + 2z) \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} dz. \end{cases}$$

Supposons que la fonction $f(x)$ soit bornée et intégrable dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, que cet intervalle puisse être partagé en un nombre fini d'intervalles partiels tels que, dans chacun d'eux, elle soit, ou bien non-croissante ou non-décroissante; il en sera évidemment de même, relativement aux intervalles $\left(0, \frac{\pi+x}{2}\right)$, $\left(0, \frac{\pi-x}{2}\right)$ des fonctions de z, $f(x - 2z)$ et $f(x + 2z)$, en supposant que le nombre x appartienne à l'intervalle $(-\pi, +\pi)$; supposons d'abord que ce nombre ne soit égal ni à π ni à $-\pi$; les propositions précédemment démontrées relativement à l'intégrale

$$\int_0^b \varphi(x, z) \frac{\sin mz}{\sin z} dz$$

sont applicables, et l'on aura

$$\lim_{m=\infty} \int_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2z)\frac{\sin mz}{\sin z}\,dz = \frac{\pi}{2} f(x-0),$$

$$\lim_{m=\infty} \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2z)\frac{\sin mz}{\sin z}\,dz = \frac{\pi}{2} f(x+0),$$

$$\lim_{m=\infty} S_n = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2};$$

cette dernière limite ne sera autre chose que $f(x)$, si la fonction $f(x)$ est continue pour la valeur considérée de x; il résulte aussi de l'analyse précédente que si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (A, B), en supposant

$$-\pi < A < B < \pi,$$

et satisfait en outre aux conditions précédemment imposées, la quantité S_n tendra uniformément vers sa limite $f(x)$ pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à un intervalle quelconque (A′, B′) intérieur à l'intervalle (A, B).

Supposons maintenant que l'on ait $x = -\pi$, la formule (6) donnera

$$\pi S_n = \int_0^{\pi} f(-\pi+2z)\frac{\sin mz}{\sin z}\,dz;$$

le second membre peut être remplacé par la somme de deux intégrales dont l'une ait pour limites o et $\frac{\pi}{2}$, l'autre $\frac{\pi}{2}$ et π; en faisant dans cette dernière la substitution $z = \pi - \zeta$, on trouve finalement

$$\pi S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\pi+2z)\frac{\sin mz}{\sin z}\,dz + \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-2z)\frac{\sin mz}{\sin z}\,dz,$$

et par conséquent, en appliquant toujours le même théorème,

$$\lim_{m=\infty} S_n = \frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2};$$

si l'on supposait $x = \pi$, on trouverait la même limite.

En résumé :

Si $f(x)$ est une fonction bornée dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, si cet intervalle peut être décomposé en un nombre fini d'intervalles partiels tels que dans chacun d'eux la fonction $f(x)$ soit, ou bien non-croissante ou bien non-décroissante, la série

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

où l'on suppose

$$a_i = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos ix\, dx \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin jx\, dx \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots),$$

sera convergente pour toutes les valeurs de x qui appartiennent à l'intervalle $(-\pi, +\pi)$; pour une telle valeur, sa somme sera égale à

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

si x n'est égal ni à $-\pi$, ni à $+\pi$; dans ces deux derniers cas, la somme de la série est égale à

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2}.$$

Si la fonction $f(x)$, que l'on suppose toujours satisfaire aux conditions précédentes, est continue dans l'intervalle (A, B), en supposant

$$-\pi < A < B < \pi$$

et si A', B' désignent deux membres tels que l'on ait

$$A < A' < B' < B,$$

la série sera uniformément convergente dans l'intervalle (A', B') et y représentera $f(x)$; enfin si la fonction $f(x)$ est continue dans tout l'intervalle $(-\pi, +\pi)$ et si l'on a

$$f(-\pi) = f(\pi),$$

la série sera uniformément convergente dans ce même intervalle et y représentera $f(x)$.

Il est à peine utile de faire remarquer que la somme d'une série trigonométrique supposée convergente est une fonction périodique de x, en sorte que les valeurs de cette somme se déduisent, quel que soit x, des valeurs relatives à l'intervalle $(-\pi, +\pi)$.

Les formules qui donnent les coefficients a_i, b_j montrent que si $f(x)$ est une fonction impaire, tous les coefficients a sont nuls; au contraire si $f(x)$ est une fonction paire, tous les coefficients b sont nuls.

Le théorème précédent permet de construire des séries dont les sommes sont des fonctions continues ou discontinues dans l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, fonctions qui peuvent être définies dans des portions de cet intervalle par des lois algébriques différentes; je me contenterai d'indiquer les résultats suivants.

La série

$$\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots+\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}+\ldots,$$

est convergente quel que soit x; si x est compris entre 0 et π, sa somme est $\frac{\pi}{4}$; cette somme est au contraire $-\frac{\pi}{4}$ si x est compris entre 0 et $-\pi$; elle est nulle si x est égal à 0 ou à π.

On a

$$\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\ldots$$

pour x compris entre $-\pi$ et $+\pi$; si l'on a $x=\pm\pi$, la somme de la série est nulle.

CHAPITRE IX

LANGAGE GÉOMÉTRIQUE

I. DÉFINITIONS FONDAMENTALES

270. — Dans les chapitres qui précèdent, on s'est occupé presque exclusivement de fonctions d'une variable. L'étude des fonctions de deux variables est grandement facilitée par l'emploi du langage géométrique et des figures de géométrie plane. Ce langage a déjà été employé, puisqu'on a presque constamment confondu les nombres et les points d'un axe dont ces nombres sont les abscisses; mais la signification numérique de ce langage était alors manifeste.

Lorsqu'il s'agit de fonctions de deux variables, et que l'on veut ne pas perdre le bénéfice du langage géométrique, il est nécessaire d'expliquer ce langage et de lui donner encore une signification purement numérique. C'est ce que je vais essayer de faire dans le présent chapitre. Le lecteur n'y trouvera aucune discussion concernant la nature des êtres géométriques ou des axiomes géométriques. Le procédé qui sera suivi consiste simplement à prendre comme définition certains des résultats de la géométrie analytique plane. Une fois qu'il a été saisi, et que les définitions sont acquises, le développement est facile, sauf pour quelques points sur lesquels j'insisterai davantage. On reconnaîtra sans peine que les théorèmes de géométrie plane (euclidienne) s'interprètent aisément, et que, tout en prétendant rester dans le pur nombre, il est permis de les invoquer et de s'aider des figures qui leur correspondent.

271. — J'appellerai *point* un système de deux nombres (x, y); ces deux nombres sont les *coordonnées* du point : le premier en est l'*abscisse*, le second en est l'*ordonnée*. On désignera un point soit par le système de ses coordonnées, mises entre parenthèses [1], soit par une seule lettre. L'*origine* est le point (o, o). Deux points (x, y), (x', y') sont confondus si l'on a $x = x'$, $y = y'$, distincts dans le cas contraire. La *distance* de ces deux points est

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2};$$

leur *distance réduite* est le plus grand des deux nombres $|x - x'|$, $|y - y'|$. La distance, réduite ou non, de deux points n'est nulle que si ces deux points sont confondus.

Le *plan* est l'ensemble de tous les points.

Une *figure* est un ensemble de points. La figure (F) est *égale* à la figure (F') si l'on peut établir entre les points de l'une et les points de l'autre une correspondance parfaite, telle que les coordonnées (x, y) et (x', y') de deux points correspondants de la figure (F) et de la figure (F') soient liées par des relations de la forme

(1) $\quad x = p + x' \cos\omega - y' \sin\omega, \qquad y = q + x' \sin\omega + y' \cos\omega,$

où p, q, ω restent les mêmes quels que soient les points correspondants. La distance de deux points de (F) est alors égale à la distance des deux points correspondants de (F') [2].

Il est très aisé de reconnaître que, dans cette définition, les trois conditions imposées à toute définition de l'égalité sont vérifiées :

Une figure (F) est égale à elle-même. Si la figure (F') est égale à la figure (F), (F) est égale à (F'). Si (F) est égale à (F') et (F') à (F''), (F) est égale à (F'').

272. — Une *droite* est l'ensemble de tous les points (x, y) dont les coordonnées vérifient une même équation du premier degré $Ax + By + C = 0$; celle-ci est l'*équation* de la droite; il est sous-entendu que A, B ne sont pas nuls simultanément. Lorsque B n'est pas nul, la *pente* de la droite est $-\dfrac{A}{B}$; lorsque B est nul,

---

(1) La confusion entre le *point* (x, y) et l'*intervalle* (x, y) n'est guère à craindre.

(2) Il en serait de même si la correspondance était exprimée par les formules

$$x = p + x' \cos\omega + y' \sin\omega, \qquad y = q + x' \sin\omega - y' \cos\omega.$$

On pourrait dire alors que l'une des figures est égale à la figure *symétrique* de l'autre.

on dit que la pente de la droite est infinie. Toutes les droites du plan sont des figures égales.

Un point est ou n'est pas sur une droite, celle-ci passe ou ne passe pas par ce point suivant que les coordonnées du point vérifient ou non l'équation de la droite. On reconnaît immédiatement, sur les équations de deux droites, si celles-ci ont un point commun (si elles se coupent), si elles n'ont aucun point commun (si elles sont parallèles), si elles sont confondues. Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles ou confondues.

Par deux points distincts on peut faire passer une droite et une seule.

Il est souvent commode de regarder une droite comme l'ensemble des points (x, y) que l'on obtient en donnant à t toutes les valeurs possibles dans les formules

$$x = a + \alpha t, \qquad y = b + \beta t,$$

où a, b, α, β sont des coefficients dont les deux derniers ne sont pas nuls à la fois ; on désigne alors souvent un point de la droite par la valeur correspondante de t ; on dit « le point t » au lieu de dire « le point (x, y) ».

Si l'on considère deux points distincts t_0, t_1 de cette droite, le *segment* de droite, borné à ces deux points t_0, t_1, est l'ensemble des points que l'on obtient en donnant à t, dans les formules précédentes, toutes les valeurs qui appartiennent à l'intervalle (t_0, t_1) ; tout point de ce segment, autre que les deux points t_0, t_1, est dit *entre* ces deux points.

Le segment prend le nom de *vecteur* si l'on distingue l'ordre des deux points t_0, t_1 et si l'on regarde l'un de ces deux points comme le premier (ou l'origine), l'autre comme le second (ou l'extrémité) : pour exprimer que le point t_0, par exemple, est l'origine et le point t_1 l'extrémité, on dit que le vecteur *va* du point t_0 au point t_1. Dans les mêmes conditions, on dit que le vecteur est *décrit* par le point t quand la variable t croît de t_0 à t_1, si l'on a $t_0 < t_1$, décroît de t_0 à t_1, si l'on a $t_0 > t_1$. Cette façon de parler, dont l'origine est dans l'idée de mouvement, n'implique rien de plus (n° 172) qu'un certain ordre de succession attribué aux nombres de l'intervalle (t_0, t_1) ou aux points du vecteur.

Sur la droite indéfinie, il y a une infinité de vecteurs : les deux vecteurs qui vont l'un du point t_0 au point t_1, l'autre du point t_2 au point t_3, sont dits de même sens, ou de sens contraires, suivant que $t_1 - t_0$ et $t_3 - t_2$ sont, ou non, de mêmes signes.

Une légère difficulté relative aux définitions précédentes consiste en ce que les coordonnées des points d'une même droite pouvant, d'une infinité de façons, être mises sous la forme

$$(1) \qquad x = a + \alpha t, \qquad y = b + \beta t,$$

on peut se demander si les définitions que l'on a adoptées ne dépendent pas de la façon que l'on a choisie pour représenter la droite. Cette difficulté est aisée à lever. On reconnaît en effet sans peine que, pour que les équations

$$(2) \qquad x = a' + \alpha' t', \qquad y = b' + \beta' t'$$

déterminent, quand t' varie, le même ensemble de points que les équations (1), il faut et il suffit qu'il existe deux nombres λ, μ, dont le premier n'est pas nul, et tels que l'on ait

$$\alpha' = \lambda\alpha, \qquad a' = a + \alpha\mu,$$
$$\beta' = \lambda\beta, \qquad b' = b + \beta\mu;$$

s'il existe de pareils nombres, les équations (1) et (2) définiront le même point quand les valeurs de t et de t' se correspondent de façon que l'on ait

$$t = \lambda t' + \mu.$$

Lorsque λ est positif, t et t' croissent ensemble ; lorsque λ est négatif t décroît lorsque t' croît ; dans tous les cas, si $t_1 - t_0$ et $t_3 - t_2$ sont, ou non, de mêmes signes, il en sera de même pour $t_1' - t_0'$ et $t_3' - t_2'$, etc.

Quand on parle du sens, ou de la direction, d'une droite, c'est qu'on a fixé sur elle un vecteur, par exemple le vecteur qui va du point t_0 au point t_1. En disant alors d'un vecteur porté par la droite qu'il a, ou non, le sens choisi sur la droite, on entend simplement que le sens de ce vecteur est le même que le sens du vecteur qui va du point t_0 au point t_1 ; on dit aussi, suivant que t_0 est plus petit ou plus grand que t_1, que le sens choisi sur la droite est celui dans lequel elle est parcourue quand t varie de $-\infty$ à $+\infty$, ou de $+\infty$ à $-\infty$; on peut aussi parler du sens qui correspond aux valeurs croissantes de t, ou aux valeurs décroissantes.

On désigne sous le nom de demi-droite ayant pour origine le point (a, b) et pour *coefficients directeurs* les nombres α, β l'ensemble des points que l'on obtient en donnant à t, dans les formules $x = a + \alpha t$, $y = b + \beta t$, la valeur o et toutes les valeurs positives. Le point (x, y) *décrit* cette demi-droite quand t croît de o à $+\infty$; le *sens* de la demi-droite est le sens qui, sur la droite indéfinie, correspond aux valeurs croissantes de t. Les relations

$$a + \alpha t = a + (-\alpha)(-t), \qquad b + \beta t = b + (-\beta)(-t)$$

montrent que l'ensemble des points obtenus en donnant à t des valeurs négatives ou nulles et, par conséquent, à $-t$ des valeurs positives ou nulles, constitue une demi-droite ayant pour origine le point (a, b) et pour coefficients directeurs les nombres $-\alpha$, $-\beta$. La direction est *opposée* à celle de la première demi-droite. L'ensemble des deux demi-droites est la droite indéfinie. L'axe des x est la droite dont l'équation est $y = 0$. La partie positive de cet axe est la demi-droite formée par les points dont l'abscisse est nulle ou positive. La direction positive de l'axe des x correspond aux x croissants. Des dénominations analogues s'emploient pour l'axe des y.

Les deux demi-droites (D), (D') définies par les équations

$$(\mathrm{D}) \qquad x = a + \alpha t, \quad y = b + \beta t$$

$$(\mathrm{D}') \qquad x = a' + \alpha t, \quad y = b' + \beta t$$

et dont, ainsi, les coefficients directeurs sont les mêmes, sont parallèles ou confondues; par définition, elles sont de même *sens*.

Par un point donné on peut mener une infinité de droites; on peut en mener une, et une seule, parallèle à une direction donnée.

Les deux vecteurs qui vont respectivement du point (x_0, y_0) au point (x_1, y_1) et du point (x'_0, y'_0) au point (x'_1, y'_1) sont parallèles si l'on a

$$\frac{x'_1 - x'_0}{x_1 - x_0} = \frac{y'_1 - y'_0}{y_1 - y_0},$$

ils sont de même sens, ou de sens contraires, suivant que ces rapports sont positifs ou négatifs ; ils sont *équipollents* si les rapports sont égaux à 1 ; dans ce dernier cas, on voit tout de suite que les vecteurs qui vont l'un du point (x_0, y_0) au point (x'_0, y'_0), l'autre du point (x_1, y_1) au point (x'_1, y'_1) sont aussi équipollents ; les deux premiers vecteurs et les deux seconds forment le contour d'un *parallélogramme*, sauf dans le cas où les quatre points sont en ligne droite.

La demi-droite (D), définie par les équations

$$x = a + \alpha t, \quad y = b + \beta t$$

où t ne doit prendre que des valeurs positives ou nulles, a la même direction que le vecteur qui va de l'origine au point (α, β), ou au point $(\lambda\alpha, \lambda\beta)$ quand λ est positif. Si le point (a, b) varie et si α, β restent les mêmes ou sont remplacés par des nombres proportionnels, le coefficient de proportionnalité étant positif, la direction de la demi-droite (D) reste la même. On peut ainsi, sans changer la direction d'une demi-droite, multiplier ses coefficients directeurs par un même facteur positif. Les quantités

$$\cos\varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

s'appellent les *cosinus directeurs* de la demi-droite (D), ou de la direction définie par cette demi-droite ; lorsqu'on se donne α et β, le nombre φ est déterminé par les équations précédentes, à un multiple près de 2π : si l'on pose $r = t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, les équations qui définissent (D) peuvent être remplacées par les suivantes

$$x = a + r\cos\varphi, \quad y = b + r\sin\varphi,$$

r est de même signe que t ; si r est positif, le point (x, y) est sur la demi droite (D) ; il est sur la demi-droite opposée si r est négatif ; dans tous les cas, la valeur absolue de r est la distance du point (x, y) au point (a, b). Les quantités

$$-\cos\varphi = \cos(\varphi + \pi), \quad -\sin\varphi = \sin(\varphi + \pi)$$

sont les cosinus directeurs de la direction opposée à (D).

Deux demi-droites parallèles à une troisième et de même direction que cette troisième, ou de direction opposée à cette troisième, ont la même direction.

273. — La distance des deux points t', t'' de la droite définie par les deux équations

$$x = a + \alpha t, \qquad y = b + \beta t$$

est égale à $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,|t' - t''|$; on voit tout de suite que, si trois points t', t'', t''' sont sur la droite et si le point t'' est entre les deux points t' et t''', la distance des deux points t', t''' est égale à la somme des distances des points t', t'' et t'', t'''. Il en est de même pour les distances réduites, car la distance réduite des deux points t', t'' est $|\alpha|\,|t' - t''|$ ou $|\beta|\,|t' - t''|$ suivant que le nombre $|\alpha|$ est plus grand ou plus petit que $|\beta|$.

L'inégalité

$$\sqrt{(a + a')^2 + (b + b')^2} < \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a'^2 + b'^2},$$

qui ne se transforme en égalité que si $ab' - a'b$ est nul, permet de montrer que, si les trois points (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ne sont pas en ligne droite, la distance de deux quelconques d'entre eux est plus petite que la somme de leurs distances au troisième, et que la distance de deux de ces points ne peut être égale à la somme ou à la différence de leurs distances au troisième que si les trois points sont en ligne droite : elle est alors égale à la somme des distances au troisième si celui-ci est entre les deux premiers points ; autrement, elle est égale à leur différence.

Pour ce qui concerne les distances réduites, la proposition analogue peut s'énoncer ainsi :

La distance réduite de deux points est égale ou inférieure à la somme des distances réduites de ces points à un troisième point.

274. — Deux droites, dont les coefficients directeurs sont respectivement α, β et α', β' sont *perpendiculaires* lorsqu'on a $\alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$. Les deux axes sont perpendiculaires. Par un point, on peut mener une perpendiculaire à une droite et une seule.

Le carré de la distance d'un point fixe à un point variable d'une droite fixe est une fonction du second degré de la variable qui détermine la position du point variable sur la droite ; l'étude de la variation de cette fonction est très aisée ; la fonction est minimum quand le point variable coïncide avec le pied de la perpendiculaire menée du point fixe à la droite ; la valeur de ce minimum est la *distance* du point fixe à la droite. La même étude fournit les théorèmes classiques sur les longueurs des perpendiculaires et des obliques.

275. — Considérons une droite (D), et soit $ax + by + c = 0$ son équation. Deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2) qui n'appartiennent pas à cette droite sont dits *du même côté* par rapport à cette droite, si les deux nombres $ax_1 + by_1 + c$, $ax_2 + by_2 + c$ sont de mêmes signes ; dans le cas contraire, les points sont de *côtés différents* par rapport à (D). Si les deux points sont d'un même côté, il en est de même de tous les points qui appartiennent au segment qui relie les deux points, segment qui ne rencontre pas (D). S'ils sont de côtés différents, il y a un point (x', y') de (D) sur le segment qui les relie ; tous les points du segment qui relie (x', y') à (x_1, y_1), sauf le point (x', y'), sont d'un côté de la droite ; tous les points du segment qui relie (x', y') à (x_2, y_2), sauf le point (x', y'), sont de l'autre côté. On dit alors de la droite (D) qu'elle est *entre* les deux points (x_1, y_1), (x_2, y_2).

On peut définir le côté *droit* et le côté *gauche* d'une droite (D) quand on a choisi une direction sur cette droite. Supposons que cette droite soit définie par les équations

$$x = a + \alpha t, \qquad y = b + \beta t$$

et qu'on ait choisi sur cette droite le sens qui correspond à t croissant : soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux points de cette droite correspondant aux valeurs t_1, t_2 du paramètre ; soit (x_0, y_0) un point en dehors de la droite, le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ a + \alpha t_1 & b + \beta t_1 & 1 \\ a + \alpha t_2 & b + \beta t_2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= [\alpha(y_0 - b) - \beta(x_0 - a)](t_2 - t_1)$$

n'est pas nul ; son signe, qui détermine de quel côté de la droite (D) se trouve le point (x_0, y_0), ne dépend du choix des points t_1, t_2 que par le signe de $t_2 - t_1$; supposons $t_2 > t_1$, en sorte que le sens du vecteur qui va du point t_1 au point t_2 soit le sens qui, sur la droite (D), correspond, aux t croissants : on dira que le point (x_0, y_0) est à gauche ou à droite de (D) suivant que le déterminant est positif ou négatif ; on dit, avec la même signification que le point (x_0, y_0) est à gauche où à droite du vecteur qui va du point (x_1, y_1) au point (x_2, y_2), ou de la demi-droite qui, sur (D), a la direction de ce vecteur. Tout point pris sur la partie positive de l'axe des y est à gauche de la direction positive sur l'axe des x ; tout point pris sur la partie positive de l'axe des x est à droite de la direction positive sur l'axe des y. Etant donnés trois points A_0, A_1, A_2 non en ligne droite, si A_0 est à gauche du vecteur A_1A_2, le point A_1 est à gauche du vecteur A_2A_0 et le point A_2 est à gauche du vecteur A_0A_1, etc.

Si l'on considère deux droites parallèles sur lesquelles on a choisi la même direction, ces deux droites partagent l'ensemble des points qui ne sont pas situés sur elles en trois ensembles, les points situés à gauche des deux droites, les points situés à droite des deux droites, les points situés à droite de l'une, à gauche de l'autre ; ces derniers sont dits *entre* les deux droites : tout segment qui joint deux points situés dans l'un de ces ensembles lui appartient tout entier. Les points situés entre les deux droites appartiennent à des segments dont les extrémités sont respectivement situées sur ces deux droites.

276. — Les points situés sur une droite (D), à laquelle on a attribué un sens, ne sont situés ni à droite ni à gauche de (D). Il est commode, dans un très grand nombre de cas, de pouvoir dire d'un point *quelconque* qu'il est à droite ou à gauche de (D) ; pour cela, on considère cette droite comme double, comme formée de deux droites parallèles, confondues en réalité, mais que l'on distingue par la pensée : on dit alors que cette droite constitue une *coupure*, dont les deux *bords* sont respectivement ces deux parallèles, l'une constituant le *bord droit*, l'autre le *bord gauche* ; le bord droit est regardé comme faisant partie de l'ensemble des points qui sont à droite de la coupure (D), le bord gauche est regardé comme faisant partie de l'ensemble des points qui sont à gauche de (D). Alors un point quelconque est, soit à droite, soit à gauche de (D) ; mais si ce point est sur (D), il ne suffit pas, pour le spécifier, de donner ses coordonnées ; il faut encore dire s'il appartient au bord gauche ou au bord droit de (D). Lorsqu'on a à figurer une droite à laquelle on donne cette signification de coupure, il est commode d'employer un schéma où les deux *bords* sont distincts.

277. — Considérons les deux demi-droites (D), (D′) définies par les équations

$$(\mathrm{D}) \qquad x = a + \alpha t, \qquad y = b + \beta t$$
$$(\mathrm{D}') \qquad x = a + \alpha' t', \qquad y = b + \beta' t'$$

où t, t' doivent prendre des valeurs nulles ou positives ; elles ont même origine ; supposons que $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ ne soit pas nul, c'est-à-dire que les deux droites ne soient pas confondues.

La figure formée par ces deux demi-droites est ce qu'on appelle un *angle*. Le *sommet* de cet angle est le point (a, b) ; les deux demi-droites (D), (D′) sont les côtés de cet angle.

La demi-droite (D′) est à gauche de la demi-droite (D) si $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ est positif ; elle est à droite si $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ est négatif. Lorsqu'on attribue un ordre aux deux côtés, on dit que l'angle est *orienté* et qu'il a la disposition directe si le second côté est à gauche du premier, la disposition indirecte si le second côté est à droite du premier. L'angle dont le premier côté est la partie positive de l'axe des x, dont le second côté est la partie positive de l'axe des y a la disposition directe.

Puisque $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ n'est pas nul, les équations

$$x = a + \alpha t + \alpha' t', \qquad y = b + \beta t + \beta' t'$$

peuvent être résolues par rapport à t, t' ; ces formules établissent une correspondance parfaite entre les systèmes (x, y) et les systèmes (t, t'). L'ensemble des points (x, y) que l'on obtient en donnant à t, t' des valeurs positives (non nulles) constitue ce qu'on appelle l'*intérieur* de l'angle ; l'*extérieur* est l'ensemble des autres points, en exceptant toutefois ceux qui appartiennent aux côtés de l'angle. Si l'on regarde (D) comme le premier côté de l'angle, (D′) comme le second, et si la disposition est directe, tous les points situés à l'intérieur de l'angle sont à gauche de (D), à droite de (D′) ; réciproquement, tout point qui est à gauche de (D), à droite de (D′), est alors à l'intérieur de l'angle. Ce serait l'inverse si la disposition de l'angle était indirecte. Si deux points sont à l'intérieur d'un angle, il en est de même de tous les points du segment qui les relie. Tous les points d'une demi-droite ayant son origine sur l'un des côtés d'un angle, parallèle à l'autre côté et de même sens, sont intérieurs à l'angle, sauf l'origine de cette demi-droite. Tous les points situés entre les deux extrémités d'un segment qui relie deux points des deux côtés d'un angle sont intérieurs à cet angle et tous les points intérieurs à l'angle peuvent être obtenus de cette façon.

Les droites indéfinies (Δ), (Δ') sur lesquelles sont situées les demi-droites (D), (D') forment quatre angles; en désignant par (D_1), (D'_1) les demi-droites opposées à (D), (D'), ces angles ont pour côtés (D) et (D'), (D') et (D_1), (D_1) et (D'_1), (D'_1) et (D). Chacun de ces angles est *adjacent* au suivant et au précédent; le troisième est *opposé par le sommet* au premier; de même le second est opposé par le sommet au quatrième. Tout point qui n'appartient pas aux droites (Δ), (Δ') est intérieur à l'un des quatre angles et à un seul. On voit sans peine, pour chacun de ces angles, de quel côté, par rapport aux directions (D), (D'), sont les points intérieurs. Deux angles opposés par le sommet ont la même disposition en supposant qu'on regarde comme premier côté de l'un des angles la direction opposée au premier côté de l'autre.

On a vu plus haut comment la considération d'un angle défini par les deux demi-droites (D), (D') permettait de décomposer le plan en deux régions, l'une intérieure à l'angle, l'autre extérieure. En supposant que (D) soit le premier côté et (D') le second côté de l'angle, il est parfois commode de pouvoir désigner l'une de ces région comme étant à gauche, l'autre comme étant à droite de l'angle, cet angle étant regardé comme la figure formée par les deux demi-droites. En supposant que l'angle ait la disposition directe, les points intérieurs sont dits à droite de l'angle et les points extérieurs à gauche; c'est le contraire si la disposition est inverse. Pour accorder cette définition avec l'intuition, on doit regarder le premier côté comme ayant, non la direction (D) définie par les deux coefficients directeurs α, β, mais la direction opposée; en employant le langage cinématique qui, comme on l'a déjà dit, n'implique pas autre chose qu'un ordre de succession attribué aux points de la figure formée par la réunion des deux demi-droites

(D), (D'), on regardera le premier côté comme parcouru par un mobile dont les coordonnées successives s'obtiennent en faisant *décroître* t de $+\infty$ à 0; au contraire, pour le second côté, les coordonnées s'obtiendront en faisant croître t de 0 à $+\infty$.

Dans ces conditions, si la disposition de l'angle est directe, les points intérieurs à l'angle sont effectivement à droite des deux côtés. Quant aux points extérieurs, ceux qui sont dans les angles adjacents à l'angle donné sont à gauche des deux côtés; bien que les points situés dans l'angle opposé par le sommet soient à droite des deux côtés, on les regarde comme étant à gauche de l'*angle*.

278. — Considérons deux angles orientés (A), (A') dont le premier et le second côté sont respectivement définis par les formules

$$\left.\begin{array}{ll} x = a + r\cos\varphi, & y = b + r\sin\varphi, \\ x = a + r\cos\psi, & y = b + r\sin\psi, \end{array}\right\} \quad (r \geqq 0),$$

pour le premier angle, par les formules

$$\left.\begin{array}{ll} x' = a' + r'\cos\varphi', & y' = b' + r'\sin\varphi', \\ x' = a' + r'\cos\psi', & y' = b' + r'\sin\psi', \end{array}\right\} \quad (r' \geqq 0),$$

pour le second; on a vu plus haut comment les équations qui déterminent les côtés peuvent toujours être ramenées à cette forme. Les deux figures (A) et (A') seront égales si l'on peut établir entre les points des côtés une correspondance du type précisé au n° **271** et telle que les premiers côtés des deux angles se correspondent, ainsi que les seconds côtés; les sommets se correspondent nécessairement; écrivons que les deux premiers côtés se correspondent point par point; puisque la distance de deux points doit être égale à la distance de deux points correspondants, il faut évidemment que l'on ait, pour de tels points, $r = r'$. Les égalités

$$\begin{aligned} a + r\cos\varphi &= p + (a' + r\cos\varphi')\cos\omega - (b' + r\sin\varphi')\sin\omega, \\ a + r\sin\varphi &= q + (a' + r\cos\varphi')\sin\omega + (b' + r\sin\varphi')\cos\omega, \end{aligned}$$

qui doivent être des identités en r, exigent que les nombres φ et $\varphi' + \omega$ diffèrent seulement d'un multiple de 2π: il doit en être de même des nombres ψ et $\psi' + \omega$, comme on le voit en considérant les seconds côtés; ceci exige qu'il en soit de même des nombres $\psi - \varphi$ et $\psi' - \varphi'$; si cette dernière condition est vérifiée, on pourra prendre pour ω le nombre $\varphi - \varphi'$ ou $\psi - \psi'$, et il est aisé de constater qu'on peut alors déterminer les constantes p, q de manière à réaliser la correspondance qui assure l'égalité des deux figures (A), (A'). La condition

$$\psi' - \varphi' \equiv \psi - \varphi \pmod{2\pi}$$

qui s'énonce $\psi' - \varphi'$ congru à $\psi - \varphi$ suivant le module 2π et qui signifie que les deux membres séparés par le signe $\equiv$ ne diffèrent que d'un multiple de 2π, est donc la condition nécessaire et suffisante pour que les deux figures (A), (A') soient *égales,* au sens qu'on vient de préciser. Le nombre $\psi - \varphi$, dont l'importance est manifeste, ou ce nombre augmenté d'un multiple de 2π, est la *mesure* de l'angle (A) ; lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre, on dit souvent que l'angle (A) est égal à $\psi - \varphi$.

Ces définitions s'appliquent lors même que l'angle (A) n'existe pas à proprement parler, c'est-à-dire lorsque la quantité

$$\cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\psi = \sin(\psi - \varphi)$$

est nulle, ou que $\psi - \varphi$ est un multiple de π ; lorsque $\psi - \varphi$ est un multiple de 2π, les deux côtés de l'angle sont confondus, on dit souvent que l'angle est nul ; tous les points, sauf ceux qui sont sur les côtés, sont extérieurs à l'angle ; lorsque $\psi - \varphi$ est un multiple impair de π, les deux côtés de l'angle sont dans le prolongement l'un de l'autre : il importe de remarquer que les mots *intérieur* ou *extérieur* de l'angle n'ont plus de sens dans ce dernier cas. Celle des valeurs de $\psi - \varphi + 2n\pi$ (n entier) qui est la plus petite en valeur absolue, est la *valeur principale* (de la mesure) de l'angle ; ceci n'a de sens que si $\psi - \varphi$ n'est pas un multiple impair de π ; la valeur principale d'un angle est positive ou négative suivant que l'angle a, ou non, la diposition directe.

L'angle de deux directions quelconques (D), (D') est, par définition l'angle de deux demi-droites ayant pour origine un point quelconque et respectivement paralèlles aux deux directions données ; je représenterai souvent cet angle, ou sa mesure, par le symbole (D, D') en supposant que D soit la première direction, et (D') la seconde. Si (D), (D'), (D'') sont trois directions quelconques, on a

$$(D, D') + (D', D) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2\pi),$$
$$(D, D') + (D', D'') + (D'', D) \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2\pi),$$
$$(D, D'') \equiv (D, D') + (D', D'') \qquad (\text{mod. } 2\pi).$$

En conservant les notations antérieures, les directions (D), (D') seront parallèles ou confondues si $\psi - \varphi$ est un multiple de π ; de même sens, si $\psi - \varphi$ est un multiple pair de π, opposées si $\psi - \varphi$ est un multiple impair de π. Les deux directions sont perpendiculaires si la mesure de leur angle est un multiple impair de $\frac{\pi}{2}$.

On a

$$\varphi \equiv (X, D), \quad \frac{\pi}{2} - \varphi \equiv (D, Y) \quad (\text{mod. } 2\pi),$$

en désignant par X et Y les directions positives sur l'axe des x et sur l'axe des y.

Les formules

$$x = a + r \cos\varphi, \; y = b + r \sin\varphi, \quad r \geqq 0$$

quand on attribue une valeur déterminée à φ, définissent une demi-droite dont l'origine est (a, b).

Cette demi-droite varie avec φ ; si φ croît ou décroît, de α à β, on dit que la demi-droite tourne autour du point (a, b) de la position initiale, correspondant à la valeur $\varphi = \alpha$, à la position finale, correspondant à la valeur $\varphi = \beta$; dans le sens direct si l'on a $\alpha < \beta$, dans le sens indirect si l'on a $\alpha > \beta$; dans les deux cas, on dit qu'elle a tourné de l'angle $\beta - \alpha$: le lecteur ne doit pas oublier, d'une part, que cette façon de parler n'implique rien autre chose (n° **172**) qu'un ordre attribué aux valeurs de φ et aux positions correspondantes de la demi-droite et, d'autre part, qu'elle appelle l'attention non seulement sur les positions extrêmes (initiale et finale) de la demi-droite, mais aussi sur les positions intermédiaires. Lorsque $\beta - \alpha$ est, en valeur absolue, moindre que π, l'angle dont a tourné la demi-droite n'est autre chose que la valeur principale de l'angle dont les deux côtés sont la position initiale et la position finale de la demi-droite. Dans ce cas, toutes les positions intermédiaires sont intérieures à cet angle et toute position de la demi-droite intérieure à l'angle correspond à une valeur de φ comprise entre α et β. Lorsque $\beta - \alpha$ est égal à π ou à $-\pi$, on dit que la demi-droite a décrit un demi-plan : les deux positions extrêmes sont opposées. Lorsque $\beta - \alpha$ est égal à 2π ou -2π, on dit que la demi-droite a décrit tout le plan ; sa position finale coïncide alors avec sa position initiale.

Considérons un angle orienté dont les deux côtés (D), (D′) sont des demi-droites ayant leur origine au point (a, b), et dont je désignerai la valeur principale par ω. Si l'on imagine que la demi-droite mobile coïncide d'abord avec (D), elle peut tourner autour de (a, b) de manière à décrire l'intérieur de l'angle ; elle tournera de droite à gauche ou de gauche à droite, suivant que ω sera positif ou négatif ; quand elle a tourné de l'angle ω, elle a décrit l'intérieur de l'angle ; elle coïncide avec (D′). Si elle continue de tourner dans le même sens, elle décrira l'extérieur de l'angle ; pour le décrire tout entier, elle doit, à partir de la position (D′), tourner d'un angle égal à $2\pi - \omega$ si ω est positif, à $-2\pi - \omega$, si ω est négatif; elle a alors tourné, à partir de (D), d'un angle égal à 2π, ou à -2π, suivant les cas ; elle est revenue à la position initiale. Le lecteur continuera sans peine ; il reprendra les choses, s'il veut, en supposant que la demi-droite tourne d'abord, à partir de (D), de manière à décrire l'extérieur de l'angle (D, D′) ; il constatera que, dans tous les cas, toutes les fois que la demi-droite mobile coïncide avec (D′), elle a tourné, à partir de (D) d'un angle égal à $2n\pi + \omega$, n étant un entier.

Considérons une suite de nombres

$$\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n-1},\ \beta$$

rangés par ordre de grandeur croissante si β est plus grand que α, décroissante si β est plus petit que α, tels, en outre que la différence entre deux nombres consécutifs soit moindre que π en valeur absolue.

A cette suite de nombres correspond une suite de positions (D), (D_1), (D_2), ... de la demi-droite mobile, une suite d'angles (D, D_1), (D_1, D_2), ... ; la somme des valeurs principales de ces angles est l'angle dont la demi-droite doit tourner pour passer de la position initiale à la position finale, ainsi qu'il résulte de l'identité

$$\beta - \alpha = (\alpha_1 - \alpha) + (\alpha_2 - \alpha_1) + \ldots + (\beta - \alpha_{n-1}).$$

Considérons une demi-droite fixe (Δ) ayant son origine au point (a, b) et deux demi-droites quelconques (D), (D′) ayant leur origine au même point (a, b) et dont aucune ne coïncide avec (Δ). La demi droite (Δ) peut servir à définir, sans ambiguïté, et d'une façon qui est souvent commode, l'une des mesures de l'angle (D, D′). On imagine une demi-droite mobile coïncidant d'abord avec (D), tournant autour de (a, b) de manière à coïncider avec (D′) *sans passer par la position* (Δ); elle aura décrit l'intérieur de l'angle (D, D′) si (Δ) est extérieur à cet angle, l'extérieur de l'angle (D, D′), si (Δ) est intérieur à cet angle. Dans tous les cas, on choisit pour la mesure de l'angle (D, D′) l'angle dont la demi-droite a tourné.

En particulier, quand on prend pour la demi-droite (Δ), la direction négative sur l'axe des x, l'angle, défini comme on vient de le faire, de la direction positive sur le même axe et d'une direction quelconque n'est autre chose que la valeur principale de l'angle de ces deux directions.

279. — Un cercle dont le centre est le point (x_0, y_0) et dont le rayon est le nombre positif r est l'ensemble (le lieu) des points dont la distance au centre (x_0, y_0) est r; c'est donc l'ensemble des points dont les coordonnées x, y vérifient l'équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2;$$

ces points sont *sur* le cercle, qui *passe* par chacun d'eux. L'ensemble des points dont la distance au centre est moindre que r constitue l'*intérieur* du cercle; je dirai de tous ces points et des points situés sur le cercle qu'ils *appartiennent* au cercle : l'ensemble des points dont la distance au centre est plus grande que r constitue l'extérieur du cercle. Sur le segment qui joint un point intérieur au cercle à un point extérieur, entre les deux extrémités, il y a un point du cercle et un seul. Le segment qui joint deux points intérieurs au cercle est tout entier intérieur au cercle. Sur chaque demi-droite qui a son origine à l'intérieur du cercle il y a un point du cercle et un seul. Les théorèmes classiques sur l'intersection d'une droite indéfinie et d'un cercle, sur l'intersection mutuelle de deux cercles, et sur les positions relatives de deux cercles s'établissent sans aucune difficulté.

Deux cercles dont les rayons sont égaux sont des figures égales.

Tous les points situés sur le cercle de rayon r et de centre (x_0, y_0) s'obtiennent en attribuant à la variable ω, dans les formules

$$(1) \qquad x = x_0 + r\cos\omega, \qquad y = y_0 + r\sin\omega,$$

toutes les valeurs qui appartiennent à un intervalle dont l'écart est 2π ; les valeurs extrêmes donnent le même point ; les autres points ne sont obtenus qu'une fois. Si l'on fait varier ω dans un intervalle d'écart moindre, on obtient un *arc* de cercle.

Si, dans les mêmes formules, on regarde ω comme une variable qui doit appartenir à un intervalle d'écart égal à 2π et r comme une variable qui doit appartenir à l'intervalle (o, R), l'ensemble des points distincts ainsi obtenus sera l'ensemble des points qui *appartiennent* au cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon R. Cet ensemble comprend les points intérieurs au cercle et les points situés sur le cercle.

280. — L'ensemble des points dont la distance réduite à un point fixe (x_0, y_0) est égale à un nombre positif donné r constitue un *carré* (ou, si l'on veut, le contour d'un carré) dont les côtés sont des segments parallèles aux axes et ont pour longueur $2r$; l'ensemble des points dont la distance réduite au *centre* (x_0, y_0) du carré est moindre que r constitue l'*intérieur* du carré ; je dirai des points intérieurs au carré et situés sur le carré qu'ils appartiennent au carré ; l'ensemble des points dont la distance réduite au centre (x_0, y_0) du carré est plus grande que r constitue l'*extérieur* du carré. Le lecteur énoncera sans peine des propositions pareilles à celles qu'on vient de rappeler pour le cercle.

Plus généralement, on dit des points dont les abscisses appartiennent à l'intervalle (a, a') et les ordonnées à l'intervalle (b, b'), qu'ils appartiennent à un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes [1], et dont les *sommets* sont les points (a, b), (a', b), (a', b'), (a, b'). Les points qui sont sur le rectangle (sur le contour) sont ceux des points précédemment définis dont l'abscisse est égale

(1) Dans ce numéro et ceux qui le suivent immédiatement, il ne sera question que de tels rectangles ; aussi je supprimerai le plus souvent les mots « dont les côtés sont parallèles aux axes ».

soit à a, soit à a', ou dont l'ordonnée est égale soit à b, soit à b' : leur ensemble constitue les quatre côtés du rectangle. Les points qui appartiennent au rectangle sans être *sur* le rectangle sont à l'*intérieur* du rectangle. Le segment de droite qui joint deux points intérieurs au rectangle est tout entier intérieur à ce rectangle. Les points qui n'appartiennent pas au rectangle lui sont extérieurs. Les *dimensions* du rectangle sont les nombres $|a - a'|$, $|b - b'|$. L'*aire* d'un rectangle est le produit de ses dimensions. La distance réduite de deux points intérieurs est moindre que la plus grande des dimensions.

J'appellerai premier sommet du rectangle le sommet qui a la plus petite abscisse et la plus petite ordonnée, troisième sommet celui qui a la plus grande abscisse et la plus grande ordonnée ; le second sommet a même ordonnée que le premier, le quatrième sommet a même abscisse que le premier. Un rectangle est déterminé quand on donne son premier et son troisième sommet.

Si l'on a $a < a'$, $b < b'$, le premier, le second, le troisième, le quatrième sommet sont les points (a, b), (a', b), (a', b'), (a, b').

La distance de deux points appartenant à un rectangle est au plus égale à la distance du premier et du troisième sommet, ou à $\sqrt{h^2 + k^2}$, en désignant par h et k les dimensions du rectangle.

Le point $\left(\frac{a + a'}{2}, \frac{b + b'}{2}\right)$ est le centre du rectangle.

281. — Si deux rectangles (R), (R') sont tels que tous les points qui appartiennent au second appartiennent au premier, je dirai que le premier *contient* le second. En désignant par (a_1, a_1'), (b_1, b_1') les intervalles auxquels doivent appartenir respectivement les abscisses et les ordonnées des points qui appartiennent au second rectangle (R_1), et en supposant $a < a'$, $b < b'$, $a_1 < a_1'$, $b_1 < b_1'$, dire que (R) contient (R_1) revient à dire que l'on a $a \leqq a_1 < a_1' \leqq a'$, $b \leqq b_1 < b_1' \leqq b'$.

Considérons deux systèmes de nombres

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n+1},$$
$$b_1, b_2, \ldots, b_{p+1}$$

tels que l'on ait

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}, \quad b_1 < b_2 < \ldots < b_{p+1} ;$$

le rectangle (R) dont le premier et le troisième sommet sont les points (a_1, b_1), (a_{n-1}, b_{p-1}) contient chacun des np rectangles $(R_{i,j})$ $(i = 1, 2, \ldots n; j = 1, 2, \ldots p)$ dont le premier et le troisième sommet sont les points (a_i, b_j), (a_{i+1}, b_{j+1}). Réciproquement chaque point du rectangle (R) appartient à un au moins des rectangles $(R_{i,j})$; s'il est intérieur à l'un de ces rectangles, il n'appartient qu'à lui. On peut décomposer de cette façon en np rectangles tout rectangle (R) dont les côtés sont parallèles aux axes. L'aire du rectangle (R) est la somme des aires des rectangles $(R_{i,j})$.

Considérons deux suites de nombres, indéfinies dans les deux sens,

$$\ldots a_{-n-1}, a_{-n}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots,$$
$$\ldots b_{-n-1}, b_{-n}, \ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}, \ldots,$$

telles que, pour l'une et l'autre suite, les termes aillent en croissant avec l'indice et que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} a_n = +\infty, \quad \lim_{n=\infty} a_{-n} = -\infty,$$

$$\lim_{n=\infty} b_n = +\infty, \quad \lim_{n=\infty} b_{-n} = -\infty;$$

les parallèles aux axes dont les équations sont de la forme $x = a_i$, d'une part, $y = b_j$, de l'autre, en désignant par i, j des entiers quelconques, partagent le plan en *bandes* indéfinies; une de ces bandes est, par exemple, l'ensemble des points dont les abscisses appartiennent à l'intervalle (a_i, a_{i+1}); une autre est l'ensemble des points dont les ordonnées appartiennent à l'intervalle (b_j, b_{j+1}).

L'ensemble des droites $x = a_i$, $y = b_j$ détermine ce que j'appellerai un *quadrillage* du plan : le plan se trouve décomposé en rectangles tels que le rectangle dont le premier et le troisième sommet sont les points respectifs (a_i, b_j), (a_{i+1}, b_{j+1}). Un point quelconque du plan appartient à l'un de ces rectangles au moins; il peut appartenir à un seul, à deux ou à quatre.

II. — SUITES; ENSEMBLES; LIENS; FONCTIONS

282. — Nous aurons à considérer des suites et des ensembles de points [1]. Un très grand nombre de définitions et de propositions relatives aux suites et aux ensembles de nombres (ou de points sur un axe) s'étendent immédiatement aux suites et aux ensembles de couples des deux nombres (ou de points dans le plan) : je résume ci-dessous les principales : lorsqu'il n'y aura pas d'explications, c'est qu'elles sont inutiles ou que celles qu'on a données au chapitre III suffisent. On a toutefois à remplacer les différences entre les nombres par des distances entre les points ; on considérera, suivant que cela est plus commode, des distances réduites ou des distances vraies ; remarquons d'ailleurs, une fois pour toutes, que lorsqu'on dit que la distance de deux points tend vers o ou croît indéfiniment, il n'importe pas que la distance soit réduite ou non, puisque le rapport de l'une à l'autre appartient à l'intervalle $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Considérons une suite de points (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \ldots, \infty)$: on dit que le point (x_n, y_n) admet, pour n infini, le point (a, b) comme limite, lorsque la distance des deux points (x_n, y_n) (a, b) a pour limite o quand n augmente indéfiniment. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$\lim_{n=\infty} x_n = a \quad , \quad \lim_{n=\infty} y_n = b.$$

[1] Le mot *point* est pris ici dans le sens du n° **271** : c'est un système de deux nombres ; le langage adopté dans le premier Volume peut prêter à quelques confusions, qu'il suffit de signaler au lecteur pour qu'il n'y tombe pas : jusqu'au présent chapitre, le mot *point* a été en effet systématiquement confondu avec le mot *nombre* ; c'est ainsi qu'on a dit un *point* d'accumulation d'un ensemble de nombres ; alors un point était un seul nombre : c'est, maintenant, un système de deux nombres : au point de vue géométrique on peut dire qu'il s'agissait alors de points *sur* un axe et qu'il s'agit maintenant de points *dans le plan*. Quand il s'agira d'ensembles tels que ceux qu'on a principalement considérés jusqu'ici, dont chaque élément est *un* nombre, et lorsque quelque confusion sera à craindre, je dirai *élément d'accumulation* au lieu de *point d'accumulation* ; ce dernier terme sera, au contraire, employé pour les ensembles de points, tels que je les considère actuellement.

On dit qu'un ensemble (E) de points est *borné* quand les abscisses et les ordonnées de ses points sont moindres en valeur absolue qu'un nombre positif P ; il est clair que les points de l'ensemble sont intérieurs au carré dont les sommets sont les points ($\pm$P, $\pm$P) ; au reste l'ensemble des abscisses des points de (E) admet dans ce cas une borne inférieure a, et une borne supérieure a' ; de même l'ensemble des ordonnées des points de (E) admet une borne inférieure b et une borne supérieure b' ; tous les points de l'ensemble (E) appartiennent au rectangle donc le premier et le troisième sommet sont les points (a, b), (a', b') : ce rectangle se réduirait à un segment de droite si l'on avait $a = a'$, ou $b = b'$, à savoir, dans le premier cas, au segment dont les extrémités seraient les points (a, b), (a, b') ; cette circonstance, comme il est aisé de le voir, ne peut se présenter que dans le cas où tous les points de (E) appartiendraient à ce segment. Les notions de bornes supérieure et inférieure ne s'étendent pas aux ensembles de points tels que nous les considérons actuellement.

L'*écart* d'un ensemble borné de points est la borne supérieure de l'ensemble des distances de deux points de cet ensemble.

On appelle point d'accumulation d'un ensemble infini (E) de points un point A tel que, quelque petit que soit le nombre positif ε, il y ait une infinité de points appartenant à (E) dont la distance (réduite ou non) au point A soit moindre que ε. Le point A peut d'ailleurs appartenir ou non à (E). Si A n'est pas un point d'accumulation de (E), on peut regarder ce point comme le centre d'un cercle, ou d'un carré, auquel n'appartiennent aucun point de (E) sauf A lui-même, si A appartient à (E) : dans ce dernier cas, A est un point *isolé* de l'ensemble.

Si un ensemble (E) de points est borné et s'il comprend une infinité de points, il admet au moins un point d'accumulation.

Soient en effet (A) l'ensemble des abscisses et (B) l'ensemble des ordonnées des points de (E). Ces deux ensembles sont bornés. A chaque élément a de (A) correspondent les points de (E), en nombre fini ou infini, dont l'abscisse est a ; je dirai que les ordonnées de ces points sont les éléments de (B) qui correspondent à a et j'en désignerai l'ensemble, fini ou infini, par (B_a).

S'il y a dans (A) un élément a auquel correspondent une infinité de points de (E), et, par conséquent, un ensemble infini (B_a), ce dernier ensemble admettra un élément d'accumulation b, et le point (a, b) sera un point d'accumulation de (E). Cette circonstance se produira certainement si (A) est fini : car s'il n'y avait, dans (A), que p nombres distincts, et si à chacun de ces nombres ne correspondaient, dans (B) qu'un nombre fini d'éléments, au plus égal à q, il y aurait, au plus, pq points dans (E).

Si, maintenant, l'ensemble (A) est infini, soit α un de ses éléments d'accumulation ; quelque petit que soit le nombre positif ε, il y aura une infinité de points de (E) dont les abscisses, distinctes de α, appartiendront à l'intervalle $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$; soient (E_ε) l'ensemble de ces points, (B_ε) l'ensemble de leurs ordonnées ; si l'on a $\varepsilon'' > \varepsilon'$, il est clair que $(E_{\varepsilon''})$ contiendra $(E_{\varepsilon'})$, c'est-à-dire que tout point de $(E_{\varepsilon'})$ sera un point de $(E_{\varepsilon''})$, que $(B_{\varepsilon''})$ contiendra $(B_{\varepsilon'})$; donc (n° 156), il y aura au moins un nombre β qui appartiendra à tous les ensembles (B_ε), ou qui sera pour chacun d'eux un élément d'accumulation. Dans les deux cas, le point (α, β) sera un point d'accumulation de (E) : dans le premier cas, parce qu'il y aura dans (E), quelque petit que soit le nombre ε, au moins un point d'ordonnée β dont l'abscisse, autre que α, appartiendra à l'intervalle $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$; dans le second cas, parce que, quelque petits que soient les nombres positifs ε, η il y aura dans (E) au moins un point, dont l'abscisse, autre que α, appartiendra à l'intervalle $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ et l'ordonnée à l'intervalle $(\beta - \eta, \beta + \eta)$.

Il y a lieu de remarquer que, par la démonstration précédente, se trouve établie la proposition que voici :

Soient (E) un ensemble de points, infini et borné, et (D) une droite parallèle à l'axe des y : si l'on sait que, quelque petit que soit le nombre positif ε, il y a une infinité de points dans (E) qui sont à une distance de (D), inférieure à ε, on peut affirmer qu'il y a, sur la droite (D), un point d'accumulation de (E). Le lecteur n'aura aucune peine à reconnaître que la proposition subsiste lors même que la droite (D) n'est pas parallèle à l'un des axes de coordonnées.

L'ensemble des points d'accumulation d'un ensemble (E) est l'ensemble *dérivé* (E') de (E).

Un ensemble infini borné est dit *clos*, *fermé*, ou *complet* s'il contient tous ses points d'accumulation.

L'ensemble dérivé d'un ensemble borné est clos, ou ne contient qu'un nombre fini de points.

Un ensemble clos est *parfait* s'il coïncide avec son dérivé.

Si l'ensemble (E) contient l'ensemble (E_1), l'ensemble dérivé (E') de (E) contiendra l'ensemble dérivé (E_1') de (E_1).

L'ensemble des points qui appartiennent à un rectangle (ou à un cercle) est clos. L'ensemble des points intérieurs à un rectangle (ou à un cercle) n'est pas clos, puisque les points du contour (ou de la circonférence) sont des points d'accumulation et n'appartiennent pas à l'ensemble.

283. — La proposition du nº **156** se généralise aussi immédiatement.

Désignons par (P) un ensemble de nombres positifs dont 0 soit un élément d'accumulation, qui n'appartient d'ailleurs pas à (P). Regardons les nombres qui constituent (P) comme des valeurs attribuées à la variable ε.

Soit $E(\varepsilon)$ un ensemble de points, déterminé pour chaque valeur de ε appartenant à (P). Je suppose essentiellement, sur l'ensemble $E(\varepsilon)$, qu'il *existe*, c'est-à-dire qu'il contient des points, en nombre fini ou infini, pour chaque valeur ε de (P). Je suppose en outre qu'il satisfasse aux deux conditions suivantes.

1° Si ε' et ε'' appartiennent à (P) et si l'on a $\varepsilon' > \varepsilon''$, l'ensemble $E(\varepsilon')$ contient l'ensemble $E(\varepsilon'')$.

2° L'ensemble $E(\varepsilon)$ est borné, quelque soit le nombre ε appartenant à (P).

Sous ces conditions, je dis qu'il existe au moins un point k qui appartient à tous les ensembles $E(\varepsilon)$ ou qui, pour chacun de ces ensembles, est un point d'accumulation.

Soient, en effet, $A(\varepsilon)$ et $B(\varepsilon)$ l'ensemble des abscisses et l'ensemble des ordonnées des points de $E(\varepsilon)$. A chaque élément a de $A(\varepsilon)$ correspondent un ou plusieurs points de $E(\varepsilon)$, qui ont pour abscisse a; à chaque élément a de $A(\varepsilon)$ correspondent par conséquent un ou plusieurs éléments de $B(\varepsilon)$, à savoir les ordonnées de ces points de $E(\varepsilon)$ qui ont a pour abscisse.

On voit tout de suite, par le théorème du nº **156**, qu'il existe au moins un nombre α qui appartient à tous les ensembles $A(\varepsilon)$ ou qui est, pour chacun d'eux, un élément d'accumulation.

Plaçons-nous dans le premier cas : α appartient à tous les ensembles $A(\varepsilon)$. Soit $B'(\varepsilon)$ l'ensemble des ordonnées des points de $E(\varepsilon)$ dont l'abscisse est α ; $B'(\varepsilon)$ est borné ; il existe, quelque soit le nombre ε appartenant à P ; $B'(\varepsilon')$ contient $B'(\varepsilon'')$ si l'on a $\varepsilon' > \varepsilon''$. Il y a donc (n° **156**) un nombre η qui appartient à tous les ensembles $B'(\varepsilon)$ ou qui est, pour chacun de ces ensembles, un élément d'accumulation ; dans la première hypothèse, le point (α, η) appartient à tous les ensembles $E(\varepsilon)$; dans la seconde hypothèse, il est, pour chacun d'eux, un élément d'accumulation.

Plaçons-nous maintenant dans le second cas : α est pour chacun des ensembles $A(\varepsilon)$, un élément d'accumulation. Désignons par D le parallèle à l'axe des y dont l'équation est $x = \alpha$. Dans chaque ensemble $E(\varepsilon)$ il y a une infinité de points dont la distance à D est moindre que tel nombre positif qu'on voudra, il y a donc sur D un ou plusieurs points d'accumulation de $E(\varepsilon)$. Soit maintenant $B'(\varepsilon)$ l'ensemble des ordonnées de ces points d'accumulation : on voit comme tout à l'heure qu'il y a au moins un nombre η qui appartient à tout les ensembles $B'(\varepsilon)$ ou qui, pour chacun d'eux, est un élément d'accumulation. Dans les deux hypothèses le point (α, η) est un point d'accumulation pour tous les ensembles $E(\varepsilon)$, puisqu'il y a, dans chacun de ces ensembles un point dont l'abscisse est aussi voisine qu'on veut de α et dont l'ordonnée est, ou η, ou un nombre aussi voisin de η qu'on le veut.

L'ensemble $E(o)$ des points k, dont on vient de démontrer l'existence, et qui appartiennent à tous les ensembles $E(\varepsilon)$ ou sont des points d'accumulation pour tous ces ensembles, est clos, ou ne contient qu'un nombre fini de points.

Si k' est un point quelconque qui n'appartienne pas à l'ensemble $E(o)$, on peut fixer des nombres positifs ε_0, η_0 tels que dans le carré, ou le cercle, dont le centre est k' et dont le demi-côté, ou le rayon, est η_0 il n'y ait aucun point de l'ensemble $E(\varepsilon)$ si l'on a $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Si tous les ensembles $E(\varepsilon)$ sont clos, l'ensemble $E(o)$ est contenu dans chacun de ces ensembles.

Si l'on considère une suite infinie de rectangles

$$(R_1), (R_2), \ldots, (R_n), \ldots$$

tels que chacun d'eux contienne le précédent et que les dimensions de (R_n) aient pour limite o quand n croît indéfiniment, le point (x_n, y_n), assujetti seulement à appartenir au rectangle R_n, a pour limite, quand n croît indéfiniment, un point (a, b) appartenant à tous les rectangles.

Les propositions et définitions contenues dans les numéros 80, 81,..., 86 s'étendent sans difficulté ainsi que les démonstrations.

284. — Soit (E) un ensemble de points ; supposons que, à chaque point de cet ensemble, corresponde un nombre que l'on regarde comme une valeur attribuée à une lettre f : on dit que f est une fonction déterminée des deux variables (x, y) dans l'ensemble (E) ; on entend par là qu'à chaque système de valeurs de ces variables qui est un point de (E) correspond une valeur de f, que l'on désigne par $f(x, y)$. Si l'on *définit* (ou si l'on donne) le mode de correspondance, en sorte que, pour chaque point (x, y) de l'ensemble on puisse calculer la valeur de f, la fonction est *définie* (ou donnée) dans l'ensemble.

Une fonction de deux variables n'est donc autre chose qu'un mode de correspondance entre les éléments d'un ensemble (E) formé de couples de nombres, de points si l'on veut, et les éléments d'un ensemble (f) formé de nombres, à savoir les valeurs distinctes que prend la fonction pour les différents points de (E).

Au lieu d'employer deux lettres x, y pour désigner un point, rien n'empêche d'employer une seule lettre, z par exemple, et de donner au symbole $f(z)$ exactement le même sens qu'au symbole $f(x, y)$; on dira, si l'on veut, que f est une fonction du point z ; ceci permet de rapprocher les définitions, énoncés et démonstrations qui concernent les fonctions de deux variables des définitions, énoncés et démonstrations qui concernent les fonctions d'une seule variable, et que l'on a développés au Chapitre IV. Le langage employé dans ce chapitre se transporte à peu près textuellement dans la théorie qui nous occupe, à la condition, lorsque z et z' désignent deux points, de regarder le symbole $|z - z'|$ comme représentant la distance des deux points, réduite ou non suivant que l'on verra quelque commodité à adopter l'une ou l'autre [1].

---

(1) Lorsqu'il sera question des variables imaginaires, ce symbole représentera exclusivement la distance vraie, et non la distance réduite, des deux points z, z'.

Parmi les propositions et définitions que j'ai en vue, je me contenterai de rappeler les suivantes, qui sont particulièrement importantes.

La fonction $f(z)$, déterminée dans l'ensemble de points (E), est dite *bornée* en haut, ou en bas, si l'ensemble des valeurs distinctes qu'elle prend pour les différents points de (E) est borné en haut ou en bas. Elle sera dite bornée (sans épithète) si elle est bornée en haut et en bas; son *écart* dans l'ensemble (E) est alors la différence $M - m$ entre sa borne supérieure M et sa borne inférieure m.

Lorsque a est un point d'accumulation de l'ensemble (E), de coordonnées α, β, on dit que la fonction $f(z)$ ou $f(x, y)$ admet pour $z = a$ la limite A et l'on écrit

$$\lim_{z=a}. f(z) = A, \text{ ou } \lim_{x=\alpha,\, y=\beta}. f(x, y) = A,$$

pour dire que, quelque petit que soit le nombre positif ε, il lui correspond un nombre positif η tel que l'on ait

$$|f(z) - A| < \varepsilon \text{ ou } |f(x, y) - A| < \varepsilon$$

pour tous les points z, ou (x, y), qui appartiennent à l'ensemble (E) et dont la distance au point a, ou (α, β), est moindre que η.

Si le point d'accumulation a appartient à l'ensemble (E), et si les conditions précédentes sont vérifiées, on dira que la fonction $f(z)$ est continue en ce point.

Supposons que l'ensemble (E) soit clos et que la fonction $f(z)$ soit continue en chacun des points d'accumulation de (E) : cette fonction jouira des propriétés que je vais énoncer en désignant par (F) l'ensemble des valeurs distinctes qu'elle prend dans (E).

1° La fonction $f(z)$ est bornée dans l'ensemble (E); en d'autres termes, l'ensemble (F) est borné.

2° La fonction $f(z)$ atteint sa borne supérieure M et sa borne inférieure m; en d'autres termes, il y a un point de l'ensemble (E) pour lequel on a $f(z) = M$, et un point pour lequel on a $f(z) = m$. Plus généralement, l'ensemble (F) est ou clos, ou composé d'un nombre fini d'éléments.

La fonction $f(z)$ est uniformément continue dans l'ensemble (E), c'est-à-dire qu'à chaque nombre positif ε, si petit qu'il soit, on peut faire correspondre un nombre η tel que l'on ait $|f(z)-f(z')|<\varepsilon$ sous la condition que les points z, z' appartiennent à l'ensemble (E) et que leur distance soit moindre que η.

Lorsqu'on dit qu'une fonction $f(x, y)$ est continue en un point (x_0, y_0), sans parler de l'ensemble des points pour lesquels cette fonction est définie, on sous-entend que la fonction est définie non seulement en ce point, mais aux *environs*, c'est-à-dire, par exemple, pour l'ensemble des points appartenant à un rectangle de centre x_0, y_0 et dont les dimensions h, k sont d'ailleurs aussi petites qu'on le veut ; dès lors le point x_0, y_0 étant un point d'accumulation pour cet ensemble, la définition de la continuité s'applique.

285. — La distance d'un point fixe A aux différents points d'un ensemble clos (E) est une fonction continue dans cet ensemble ; la borne inférieure r de cette fonction est atteinte pour un certain point (au moins) de l'ensemble (E) ; elle est par définition la *distance* du point A à l'ensemble : elle n'est nulle que si A appartient à (E).

Le cercle décrit du point A comme centre avec le rayon r ne contient à son *intérieur* aucun point de (E) : c'est le plus grand cercle possible, de centre A, qui jouisse de cette propriété. Il contient sur sa circonférence un ou plusieurs points de (E), dont la distance à A est égale à r.

La distance du point A à (E) peut être regardée comme une fonction $r(A)$ de ce point, définie pour tout point A ; considérée de cette façon, $r(A)$ est une fonction continue en chaque point : cela résulte de ce que la différence $r(A)-r(A')$ est au plus égale en valeur absolue à la distance AA' des deux points A, A' : car s'il en était autrement, l'un des deux cercles décrits respectivement des points A, A' comme centres, avec les rayons $r(A)$, $r(A')$ serait intérieur à l'autre ; supposons que ce soit le premier ; on pourrait alors décrire du point A comme centre, avec un rayon plus grand que $r(A)$, un cercle à l'intérieur duquel il n'y aurait aucun point de (E).

Considérons deux ensembles clos (E), (E_1). La distance d'un point de (E) à l'ensemble (E_1) est une fonction définie et continue dans (E) : elle atteint sa borne inférieure, qui est un nombre positif ou nul : si cette borne δ n'est pas nulle, il n'y a pas de point de

(E₁) à l'intérieur de n'importe quel cercle décrit d'un point de (E) comme centre avec un rayon égal à δ : les deux ensembles n'ont alors aucun point commun.

La borne δ est nulle ou positive suivant que les deux ensembles ont ou n'ont pas de point commun : la borne inférieure de la distance d'un point de (E) à (E₁) est aussi la borne inférieure de la distance d'un point de (E₁) à (E) : elle est, par définition, la *distance* des deux ensembles (E), (E₁) ; c'est évidemment la borne inférieure de l'ensemble des distances d'un point de (E) et d'un point de (E₁) : il suit de ce qu'on vient de dire qu'il y a un couple de points appartenant l'un à (E), l'autre à (E₁) dont la distance est inférieure ou égale à la distance de deux points quelconques pris l'un dans (E), l'autre dans (E₁). De même, il y a un couple de points appartenant respectivement à (E) et à (E₁) dont la distance est supérieure ou égale à la distance de deux points quelconques, pris l'un dans (E), l'autre dans (E₁). Si l'on considère un seul ensemble clos (E), il y a dans cet ensemble deux points dont la distance est égale à l'écart de E (nº **282**).

Les notions, propositions et démonstrations qui précèdent subsistent évidemment quand on considère des distances réduites au lieu des distances vraies.

On n'a défini la distance d'un point A à un ensemble que pour un ensemble clos et, par conséquent, borné. Mais la définition s'étend à un ensemble (E), même non borné, qui contient ses points d'accumulation. Dans cet ensemble il existe toujours un point M tel que la distance du point A au point M soit inférieure ou égale à la distance du point A à n'importe quel point de l'ensemble et la distance du point A au point M est, par définition la distance du point A à l'ensemble (E). L'existence du point M s'aperçoit immédiatement en imaginant un cercle de centre A qui contienne quelque point de (E) : on reconnait sans peine que l'ensemble des points de (E) qui appartiennent au cercle est fini ou clos, etc.

La distance d'un ensemble clos (E) à un ensemble non borné (E₁), qui contient ses points d'accumulation se définit d'une façon analogue ; mais si les deux ensembles (E), (E₁), tout en contenant leurs points d'accumulation, ne sont bornés ni l'un, ni l'autre, on ne peut pas affirmer l'existence de deux points appartenant, l'un à (E), l'autre à (E₁) tels que leur distance soit inférieure ou égale à la distance de deux points quelconques, pris l'un dans (E), l'autre dans (E_1).

286. — Dans le présent numéro, je représenterai habituellement un point par une seule lettre et la distance de deux points P, Q par le symbole $|P - Q|$ ou $|Q - P|$.

Les fonctions de point, ou de deux variables x, y, dont j'ai parlé jusqu'ici étaient des fonctions numériques. Une généralisation toute naturelle consiste à considérer un point B comme fonction d'un point A ; cela revient à considérer à la fois deux fonctions des coordonnées x, y du point A, fonctions qui seraient les coordonnées du point B. On peut encore présenter les choses comme il suit :

Soit $(\mathcal{A})$ un ensemble de points : je réserverai la lettre majuscule A, affectée ou non d'indices ou d'accents, pour désigner les points de cet ensemble. Supposons qu'à chaque point A de $(\mathcal{A})$ corresponde un point B, que j'appellerai l'*image* du point A. J'emploierai la lettre B, affectée des mêmes marques que A pour désigner le point correspondant ainsi à A. Les points B, images des points de $(\mathcal{A})$, forment un ensemble $(\mathcal{B})$. En disant que le point B est une fonction $\varphi(A)$ du point A, déterminée dans l'ensemble $(\mathcal{A})$, on emploie un langage pareil à celui qu'on a expliqué au n° **148**.

La fonction $\varphi(A)$ est dite *bornée* si l'ensemble $(\mathcal{B})$ est contenu dans un cercle ayant son centre à l'origine.

Soit a un point d'accumulation de $(\mathcal{A})$, qui peut d'ailleurs appartenir ou non à $(\mathcal{A})$. Si la fonction $\varphi(A)$ est bornée, on a une proposition analogue à celle du n° **157** et qui se démontre de même : il existe un ensemble clos ou fini de points aux environs desquels s'accumulent les images de points A voisins de a.

Soient en effet ε un nombre positif quelconque, $(\mathcal{A}_\varepsilon)$ l'ensemble des points A qui sont à une distance du point a inférieure à ε, et $(\mathcal{B}_\varepsilon)$ l'ensemble des points B images des points de $(\mathcal{A}_\varepsilon)$. L'ensemble $(\mathcal{B}_\varepsilon)$ est borné ; il existe (contient des points) quelque petit que soit ε ; il contient l'ensemble $(\mathcal{B}_{\varepsilon'})$ si l'on a $\varepsilon > \varepsilon'$; il y a donc au moins un point b qui appartient à tous les ensembles $(\mathcal{B}_\varepsilon)$ ou qui est pour chacun d'eux un point d'accumulation : Je désignerai par $\mathcal{B}_a$ l'ensemble des points b qui appartiennent à tous les ensembles $\mathfrak{B}_\varepsilon$ ou qui sont pour chacun d'eux point d'accumulation. C'est l'ensemble dont il vient d'être question : chacun de ses points b, jouit de la propriété suivante : quels que soient les nombres positifs α, β, il existe un point A tel que l'on ait

$$|A - a| < \alpha, \quad |B - b| = |\varphi(A) - b| < \beta ;$$

aucun point pris en dehors de l'ensemble $\mathfrak{B}_a$ ne jouit de cette propriété. La proposition précédente n'exige évidemment pas que la fonction $\varphi(A)$ soit bornée dans tout l'ensemble $(\mathfrak{A})$, mais seulement aux environs du point d'accumulation a, c'est-à-dire dans l'ensemble $(\mathfrak{A})$ des points de $(\mathfrak{A})$ qui sont à une distance de a moindre que tel nombre positif donné que l'on voudra.

Si le point d'accumulation a est un point A_0 de $(\mathfrak{A})$, on dit que la fonction $\varphi(A)$ est *continue* en ce point A_0 pour dire qu'à chaque nombre positif β on peut faire correspondre un nombre positif α tel que l'inégalité $|A - A_0| < \alpha$ entraîne l'inégalité $|B - B_0| < \beta$, en désignant par B_0, B les images des points A_0, A. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la fonction $\varphi(A)$ soit bornée aux environs du point A_0 et que l'ensemble fini ou clos $\mathfrak{B}_{A_0}$, dont on a donné la définition plus haut, se réduise au point B_0. La démonstration est analogue à la démonstration d'une proposition du même genre que l'on a donnée au n° **157**.

Si l'ensemble $(\mathfrak{A})$ est clos, la fonction $B = \varphi(A)$ est dite continue dans cet ensemble, lorsqu'elle est continue en chacun de ses points d'accumulation. Elle est alors bornée dans tout l'ensemble $(\mathfrak{A})$; de plus elle est *uniformément continue* ; c'est-à-dire qu'à chaque nombre positif β correspond un nombre positif α tel que l'inégalité $|A - A'| < \alpha$ entraîne toujours l'inégalité $|B - B'| < \beta$, quels que soient les points A, A' de l'ensemble $(\mathfrak{A})$, dont B et B' sont les images. La démonstration du n° **162** se transpose en effet ici sans difficulté.

Je vais maintenant faire sur l'ensemble $(\mathfrak{A})$ et sur la fonction $B = \varphi(A)$ les suppositions suivantes :

1° L'ensemble $(\mathfrak{A})$ est clos.

2° Les images de deux points distincts sont des points distincts ; en d'autres termes la correspondance entre les deux ensembles $(\mathfrak{A})$ et $(\mathfrak{B})$ est parfaite. Cette supposition entraîne les conclusions suivantes : le point A peut être regardé comme une fonction $\Phi(B)$ du point B, déterminée dans l'ensemble $(\mathfrak{B})$, de même que le point B est une fonction de A, déterminée dans l'ensemble $(\mathcal{A})$. Les fonctions $B = \varphi(A)$, $A = \Phi(B)$ sont *inverses* l'une de l'autre (n° **168**).

3° La fonction $\varphi(A)$ est continue dans l'ensemble $(\mathcal{A})$.

L'ensemble $(\mathfrak{B})$, d'après ce qui précède, est borné ; je vais montrer qu'il est clos et que la fonction $\Phi(B)$ est continue dans cet ensemble.

Observons d'abord qu'il résulte évidemment des hypothèses précédentes que l'image de tout point d'accumulation de $(\mathcal{A})$, point qui appartient à $(\mathcal{A})$ puisque cet ensemble est clos, est un point de $(\mathfrak{B})$ et, de plus, un point d'accumulation de cet ensemble.

Pour prouver que l'ensemble $(\mathfrak{B})$ est clos, il faut prouver que tout point d'accumulation b de cet ensemble lui appartient. Or b étant un point d'accumulation de $(\mathfrak{B})$, il existe, comme on vient de le montrer, au moins un point a, tel que, quels que soient les nombres positifs α, β, il y ait un point B pour lequel on a

$$|B - b| < \beta, \quad |A - a| = |\Phi(B) - a| < \alpha;$$

l'ensemble $(\mathcal{A}_b)$ des points a qui jouissent de cette propriété est clos ou fini. Puisqu'il y a des points A de $(\mathcal{A})$ aussi voisins de a qu'on le veut, a est ou un point de $(\mathcal{A})$, ou un point d'accumulation de $(\mathcal{A})$: c'est toujours un point de $(\mathcal{A})$, puisque cet ensemble est clos. Pour me conformer aux notations expliquées plus haut, je désignerai ce point a par A_0 et je vais montrer que le point b n'est autre que l'image B_0 du point A_0 ; en effet, d'une part, il y a des points correspondants A, B qui sont respectivement aussi voisins qu'on le veut de a (ou A_0) et de b ; d'autre part, en vertu de la continuité de la fonction $\varphi(A)$, l'image de A est aussi voisine qu'on le veut de B_0, pourvu que A soit suffisamment voisin de A_0 : ces deux affirmations ne peuvent coexister que si le point b coïncide avec B_0. D'une part, il est prouvé que le point b appartient à l'ensemble $(\mathfrak{B})$: cet ensemble est clos. D'autre part, il est prouvé que l'ensemble $(\mathcal{A}_b)$ se réduit au point A_0 ; donc la fonction $\Phi(B)$ est continue au point d'accumulation b (ou B_0) ; comme le raisonnement s'applique à tous les points d'accumulation de l'ensemble $(\mathfrak{B})$, la fonction $A = \Phi(B)$ est continue dans cet ensemble.

Pour exprimer alors les propriétés de la correspondance entre les deux ensembles $(\mathcal{A})$ et $(\mathcal{B})$, je dirai que cette correspondance est parfaite et continue.

La proposition qu'on vient d'établir s'applique évidemment lorsque l'ensemble $(\mathcal{A})$ est un ensemble de points situés sur l'axe des x; en d'autres termes, elle s'applique aux fonctions d'une variable : à ce titre elle complète ce qui a été dit aux n^{os} **168** et **169**, dont il convient de la rapprocher.

Dans le cas où l'ensemble $(\mathcal{A})$ est un ensemble parfait, les autres conditions étant toujours vérifiées, il en est évidemment de même de l'ensemble $(\mathcal{B})$. On peut supposer, par exemple, que l'ensemble $(\mathcal{A})$ soit un rectangle, dont chaque point A ou (x, y) est défini par les inégalités

$$x_0 \leqq x \leqq x_1, \qquad y_0 \leqq y \leqq y_1,$$

et que chaque point correspondant B ou (X, Y) soit défini par les formules

$$(1) \qquad X = f(x, y), \qquad Y = g(x, y)$$

où $f(x, y)$, $g(x, y)$ sont des fonctions continues dans le rectangle $(\mathcal{A})$, telles que l'on n'ait jamais à la fois, pour deux points distincts (x, y) et (x', y') de ce rectangle

$$f(x, y) = f(x', y'), \qquad g(x, y) = g(x', y');$$

alors le rectangle $(\mathcal{A})$ aura pour image un ensemble parfait $(\mathcal{B})$ et les équations (1) définiront, sans ambiguïté, deux fonctions

$$(2) \qquad x = F(X, Y), \qquad y = G(X, Y)$$

continues dans l'ensemble parfait $(\mathcal{B})$, fonctions dont les valeurs x, y seront toujours les coordonnées d'un point du rectangle $(\mathcal{A})$ et vérifieront les équations (1) : à deux systèmes distincts de valeurs pour X, Y correspondront des systèmes distincts de valeurs pour x, y.

287. — Un ensemble de points (E) étant défini, l'ensemble (E_0) des points qui n'appartiennent pas à (E) est défini par là même;

on peut désigner ces deux ensembles (E), (E_0) sous le nom d'ensembles *complémentaires* (1).

Un *point frontière* d'un d'ensemble (E) est un point [qui peut d'ailleurs appartenir ou ne pas appartenir à (E)] tel que, à l'intérieur de tout cercle décrit de ce point comme centre, il y ait au moins un point appartenant à (E) et un point n'appartenant pas à (E), appartenant par conséquent à l'ensemble complémentaire (E_0); l'ensemble des points frontières de (E) est la *frontière* (F) de (E); cette frontière est évidemment commune aux deux ensembles complémentaires (E) et (E_0); un point isolé fait partie de la frontière de (E). Un point d'accumulation de (E) fait aussi partie de la frontière de (E), sauf dans le cas où il fait partie de (E) et où l'on peut, de ce point d'accumulation comme centre, décrire un cercle tel que tous les points intérieurs à ce cercle appartiennent aussi à (E).

Tout ensemble de points, autre que l'ensemble des points du plan, admet une frontière : il n'y a lieu à démonstration, d'après ce qu'on vient de dire, que pour un ensemble (E) qui n'admet pas de point isolé, et qui contient chacun de ses points d'accumulation ainsi que les points intérieurs à un cercle suffisamment petit, décrit de ce point d'accumulation comme centre. Soit, s'il est possible, A un point qui n'appartienne pas à un tel ensemble (E). Puisque l'ensemble (E) contient ses points d'accumulation, il y a un point B appartenant à (E) et dont la distance au point A est égale ou inférieure à la distance du point A à n'importe quel point de (E) : on voit tout de suite que les points du segment de droite limité aux points A et B ne peuvent appartenir à (E), sauf le point (B) : cela est d'ailleurs impossible, puisque par hypothèse on peut décrire du point B comme centre un cercle tel que tous les points intérieurs à ce cercle appartiennent à (E). Un ensemble de points qui n'a pas de frontière est donc l'ensemble des points du plan.

Tout point d'accumulation de la frontière (F) d'un ensemble (E) appartient nécessairement à cette frontière. En effet, si, de ce

---

(1) Cette définition peut s'étendre : si (E) est contenu dans l'ensemble (C), l'ensemble des points de (C) qui n'appartiennent pas à (E) peut être regardé comme l'ensemble complémentaire de (E) par rapport à (C) : cet ensemble complémentaire n'existe que si les deux ensembles (E) et (C) ne sont pas identiques.

point d'accumulation comme centre, on décrit un cercle quelconque, il y aura, à l'intérieur de ce cercle un point de (F). De ce dernier point comme centre décrivons un second cercle assez petit pour qu'il soit contenu tout entier à l'intérieur du premier : le second cercle, décrit d'un point frontière comme centre, contiendra au moins un point de (E) et un point n'appartenant pas à (E) ; il en sera de même du premier cercle, dont le centre est donc un point frontière. Si (F) est un ensemble borné, ce sera donc un ensemble clos ou fini. Il en sera ainsi, en particulier, quand l'ensemble (E) est lui-même borné. Un ensemble clos contient sa frontière.

La distance à un ensemble clos (E) d'un point A qui ne fait pas partie de cet ensemble est égale à la distance de ce point à la frontière (F) de cet ensemble : soit, en effet, B le point de (E) [ou l'un des points de (E)] dont la distance à A est la plus petite possible ; les points du segment de droite dont les extrémités sont A et B ne peuvent, sauf B, appartenir à (E) ; il en résulte que B appartient à (F) ; d'ailleurs, puisque tous les points de (F) appartiennent à (E), il ne peut y avoir, dans (F), un point plus rapproché de A que le point B.

288. — Considérons deux points (x_0, y_0), (x_1, y_1), puis deux fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ continues dans l'intervalle (t_0, t_1) et telles que l'on ait

$$\varphi(t_0) = x_0, \quad \psi(t_0) = y_0, \quad \varphi(t_1) = x_1, \quad \psi(t_1) = y_1.$$

L'ensemble (T) des points $[\varphi(t), \psi(t)]$, obtenus en donnant à t toutes les valeurs qui appartiennent à l'intervalle (t_0, t_1) est un ensemble parfait.

Tout d'abord, en effet, cet ensemble est borné. On voit ensuite, à cause de la continuité des fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$, que chacun de ses points est un point d'accumulation. Enfin, l'ensemble (T) n'a pas de point d'accumulation qui ne lui appartienne pas : en effet si (α, β) est un point quelconque, la fonction

$$\sqrt{[\varphi(t) - \alpha]^2 + [\psi(t) - \beta]^2},$$

étant continue dans l'intervalle (t_0, t_1) atteint son minimum pour une valeur t' de t appartenant à l'intervalle (t_0, t_1) : si ce minimum

δ n'est pas nul, il n'y a aucun point de (T) à l'intérieur du cercle décrit de (α, β) comme centre avec un rayon égal à δ ; le point (α, β) ne peut être un point d'accumulation de (T) que si ce minimum est nul ; le point (α, β) est alors le point de (T) qui correspond à la valeur t' du paramètre.

Je dirai que cet ensemble (T) relie (d'une façon continue) le point (x_0, y_0) au point (x_1, y_1) et je le désignerai comme un *lien* entre ces deux points. Si je ne le désigne pas sous le nom de *courbe*, c'est que ce dernier mot éveille dans notre esprit une image, relativement simple, qui est souvent très différente de cet ensemble que l'on vient de définir, lequel peut être d'une nature très compliquée ([1]).

Supposons, pour fixer le langage, $t_0 < t_1$. Si l'on imagine que t croisse de t_0 à t_1, on range par là-même les points de (T) dans un certain ordre, les points qui correspondent à une valeur de t étant regardés comme précédant ceux qui correspondent à une valeur plus grande. En faisant décroître t de t_1 à t_0, on rangerait les points dans l'ordre inverse. On dira dans le premier cas que le lien est *parcouru* dans le sens qui correspond aux valeurs croissantes de t ; dans le second cas, qu'il est parcouru dans le sens qui correspond aux valeurs décroissantes de t. Un point du lien sera *entre* deux autres si la valeur de t auquel il correspond est intermédiaire aux valeurs de t auxquelles correspondent les deux autres.

Toutefois, quand on emploie ce langage, il ne faut pas oublier qu'un point du lien n'est spécifié que par la valeur de t auquel il correspond ; il n'est pas nécessairement spécifié par ses deux coordonnées x, y ; rien n'empêche, en effet, dans la définition du lien, qu'un même point x, y puisse être obtenu pour deux valeurs distinctes de la variable, les équations

$$\varphi(t') = \varphi(t''), \qquad \psi(t') = \psi(t'') \tag{1}$$

pouvant être vérifiées par des nombres distincts t', t'' qui appartiennent à l'intervalle (t_0, t_1). Dans ces conditions, un même point de (T) (un même couple de nombres) peut se trouver avant ou

([1]) M. Peano a donné l'exemple d'un ensemble de cette nature, formé de tous les points qui appartiennent à un carré.

après un point du lien qui coïncide avec lui, avant et après un autre point du lien.

Le lien (T) est dit *simple*, lorsque deux points qui correspondent à deux valeurs distinctes de t, appartenant à l'intervalle (t_0, t_1) sont toujours distincts, lorsque, en d'autres termes, les équations (1) n'admettent pas de solution où t', t'' soient des nombres distincts qui appartiennent à l'intervalle (t_0, t_1).

En d'autres termes encore, si le lien (T) est simple, il y a une correspondance parfaite entre les points de (T) et les nombres de l'intervalle (t_0, t_1), nombres que l'on peut, si l'on veut, regarder comme les points d'un segment porté par un axe. Les propositions du n° 286 s'appliquent : un point A de (T) est une fonction continue de t, définie dans l'intervalle (t_0, t_1); inversement t est une fonction continue de A définie dans l'ensemble (T); on peut écrire $t = \Phi(x, y)$ en désignant par x, y les coordonnées de A.

Supposons que les deux équations

$$x = f(u), \ y = g(u), \qquad (u_0 \leqq u \leqq u_1),$$

où $f(u)$ et $g(u)$ sont des fonctions continues de u dans l'intervalle (u_0, u_1) définissent le même lien simple (T) que les formules

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \qquad (t_0 \leqq t \leqq t_1),$$

en sorte qu'il y ait une correspondance parfaite entre l'ensemble (T) et l'intervalle (u_0, u_1), comme entre l'ensemble (T) et l'intervalle (t_0, t_1); il en résulte une correspondance parfaite entre les deux intervalles (u_0, u_1), (t_0, t_1), étant entendu que t et u se correspondent s'ils correspondent à un même point de T; t sera une fonction continue de u, définie dans l'intervalle (u_0, u_1), à savoir, en conservant les notations précédentes

$$t = \Phi[f(u), g(u)] = h(u),$$

de même u sera une fonction continue de t, définie dans l'intervalle (t_0, t_1). La fonction $t = h(u)$, par exemple, qui exprime t au moyen de u, est nécessairement ou croissante dans tout l'intervalle (u_0, u_1), ou décroissante dans tout cet intervalle (n° 169). Dans le premier cas, t_0 correspond à u_0; il correspond à u_1, dans le second. Réciproquement, si dans les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ on remplace t par une fonction $h(u)$ définie dans l'intervalle (u_0, u_1), continue et croissante (ou décroissante), dans ce même intervalle, et prenant, suivant les cas, les valeurs qui vont de t_0 à t_1 ou de t_1 à t_0 quand u croît de u_0 à u_1, il est clair que l'on aura des expressions de x, y en u qui représenteront le même lien simple que celui d'où l'on est parti.

Lorsque u croît de u_0 à u_1, le lien est parcouru, suivant les cas, dans le sens qui correspond aux valeurs croissantes de t, ou aux valeurs décroissantes.

Lorsqu'on donne un lien simple (T) dont tous les points correspondent d'une façon parfaite à l'intervalle (t_0, t_1), on définit sans ambiguïté le sens dans lequel ce lien est parcouru en se donnant deux points A, B de ce lien et en disant lequel de ces deux points doit être regardé comme le premier. Les explications qui précèdent montrent clairement qu'on peut toujours, en changeant au besoin la variable, s'arranger pour que le sens du parcours choisi corresponde aux valeurs croissantes de la variable.

J'aurai souvent l'occasion, dans ce qui suit, de parler d'un *lien* défini par des formules telles que

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1 ;$$

il devra toujours être sous-entendu que les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont continues dans l'intervalle (t_0, t_1).

289. — Si l'on se donne une suite de points $A_0, A_1, \ldots, A_p$ dont chacun est relié au suivant par un lien, on se donne, par là-même, un lien qui relie le premier au dernier ; l'ensemble des points qui lui appartiennent n'est autre chose que l'ensemble des points qui appartiennent aux liens partiels.

Il suffira, pour la démonstration, de considérer trois points (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Supposons que les liens qui relient le point (x_0, y_0) au point (x_1, y_1) et ce dernier point au point (x_2, y_2) soient définis par les formules

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1 ;$$
$$x = \varphi'(t'), \qquad y = \psi'(t'), \qquad t'_0 \leqq t' \leqq t'_1,$$

en sorte que l'on ait

$$\begin{array}{ll} x_0 = \varphi(t_0), & y_0 = \psi(t_0), \\ x_1 = \varphi(t_1) = \varphi'(t'_0), & y_1 = \psi(t_1) = \psi'(t'_0), \\ x_2 = \varphi'(t'_1), & y_2 = \psi'(t'_1). \end{array}$$

Soient maintenant α, β, γ trois nombres fixes quelconques, tels que l'on ait $\alpha < \beta < \gamma$.

Définissons u comme une fonction de t dans l'intervalle (t_0, t_1), comme une fonction de t' dans l'intervalle (t'_0, t'_1), par les formules

$$u = \frac{\alpha - \beta}{t_0 - t_1} t + \frac{\beta t_0 - \alpha t_1}{t_0 - t_1}, \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1,$$

$$u = \frac{\beta - \gamma}{t'_0 - t'_1} t' + \frac{\gamma t'_0 - \beta t'_1}{t'_0 - t'_1}, \qquad t'_0 \leqq t' \leqq t'_1$$

qui donnent la même valeur $u = \beta$ pour $t = t_1$ et $t' = t'_0$; lorsque t croîtra de t_0 à t_1, u croîtra de α à β; lorsque t' croîtra de t'_0 à t'_1, u croîtra de β à γ.

Considérons maintenant deux fonctions de u, $f(u)$ et $g(u)$ définies de la façon suivante dans l'intervalle (α, γ) :

Pour les valeurs de u qui appartiennent à l'intervalle (α, β), valeurs auxquelles correspondent des valeurs de t appartenant à l'intervalle (t_0, t_1) on a

$$f(u) = \varphi(t), \; g(u) = \psi(t);$$

Pour les valeurs de u qui appartiennent à l'intervalle (β, γ), valeurs auxquelles correspondent des valeurs de t' appartenant à l'intervalle (t'_0, t'_1), on a

$$f(u) = \varphi'(t'), \; g(u) = \psi'(t');$$

à la valeur $u = \beta$ correspondent à la fois la valeur t_1 de t et la valeur t'_0 de t' ; mais les deux définitions fournissent les mêmes valeurs tant pour $f(u)$ que pour $g(u)$.

Dès lors, il est clair que le lien défini par les formules

$$x = f(u), \; y = g(u), \qquad \alpha \leqq u \leqq \beta$$

n'est autre chose que l'ensemble des points qui appartiennent aux deux liens donnés, qui reliaient le point x_0, y_0 au point x_1, y_1 et le point x_1, y_1 au point x_2, y_2. Il est à peine utile de dire que la continuité des fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t')$, $\psi'(t')$ entraîne la continuité des fonctions $f(u)$, $g(u)$ dans l'intervalle (α, γ).

290. — Un lien (T) défini par les formules

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1$$

est dit *fermé*, lorsque son origine coïncide avec son extrémité ; on a alors

$$\varphi(t_0) = \varphi(t_1), \qquad \psi(t_0) = \psi(t_1).$$

Dans ce cas, le lien relie à lui-même le point $[\varphi(t_0), \psi(t_0)]$; on suppose d'ailleurs que le lien ne se réduit pas à ce point.

Le lien fermé (T) sera dit *simple*, si les équations

$$\varphi(t') = \varphi(t''), \qquad \psi(t') = \psi(t'')$$

n'ont pas, dans l'intervalle (t_0, t_1), d'autre solution où t' soit différent de t'' que la solution $t' = t_0$, $t'' = t_1$ ou $t' = t_1$, $t'' = t_0$. Un lien fermé simple, n'est pas un lien simple, au sens du n° **288** ; par conséquent l'épithète « fermé » ne doit jamais être sous-entendue ; au reste, si l'on veut appuyer sur la distinction, on pourra qualifier d'*ouverts* les liens simples définis au n° **288**.

Dans le cas d'un lien fermé, il est souvent commode, au lieu de regarder les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ comme définies seulement dans l'intervalle (t_0, t_1), de les regarder comme des fonctions périodiques de t, la période étant $\omega = t_1 - t_0$. S'il s'agit d'un lien fermé simple, ces fonctions ne reprennent à la fois la même valeur que si la différence des valeurs de t est un multiple de ω. De cette façon, le point spécial qui est à la fois l'origine et l'extrémité du lien n'est pas spécifié.

On a déjà fait remarquer qu'on pouvait établir une correspondance parfaite et continue entre les points d'un lien simple ouvert et les points d'un segment de droite. On peut, de même, établir une correspondance parfaite et continue entre les points d'un lien fermé simple et les points d'un cercle.

Considérons, sur le lien fermé simple (T), défini comme on a dit plus haut, deux points distincts A et B qui correspondent à deux valeurs α, β $(\alpha < \beta)$ de t. Ces deux points décomposent le lien fermé en deux liens simples ouverts, qui relient A à B. L'un de ces liens correspond aux valeurs de t qui satisfont aux conditions $\alpha \leqq t \leqq \beta$ et l'autre aux valeurs de t qui satisfont soit aux conditions $t_0 \leqq t \leqq \alpha$, soit aux conditions $\beta \leqq t \leqq t_1$.

Lorsqu'il s'agit d'un lien simple ouvert, on a vu qu'il suffisait, pour définir le sens dans lequel ce lien est parcouru, de spécifier lequel de ses deux points extrêmes devait être regardé comme l'origine, lequel comme l'extrémité.

Lorsqu'il s'agit d'un lien fermé simple, pour définir de même le sens du parcours, on peut se donner deux points distincts A, B du lien, choisir l'un des liens partiels dans lequel le lien est décomposé par ces points et dire que ce lien partiel (ouvert) est parcouru, par exemple de A vers B; il est alors sous-entendu que l'autre lien partiel doit être parcouru de B vers A. On peut aussi se donner, sur le lien fermé, trois points A, B, C et spécifier, par exemple, qu'ils doivent se suivre dans l'ordre A, B, C; les deux points A, B partagent encore le lien fermé en deux liens partiels ouverts, dont l'un contient le point C; celui des deux liens partiels qui ne contient pas le point C doit être parcouru de A vers B et l'autre de B vers C, puis de C vers A.

Ici encore, on peut toujours, en changeant au besoin la variable, s'arranger pour que le sens de parcours choisi corresponde aux valeurs croissantes de la variable.

Si le lien (T) est fermé, à chaque nombre positif α correspond un nombre positif β tel que la distance de deux points du lien soit sûrement moindre que α lorsque la différence entre les valeurs correspondantes de t est moindre que β, ou lorsque les différences respectives entre l'une de ces valeurs et t_0, entre l'autre de ces valeurs et t_1, sont moindres que β en valeur absolue. Si le lien est fermé et simple, à chaque nombre positif α correspond un nombre positif β tel que, lorsqu'on sait que la distance entre deux points du lien est moindre que β, on peut affirmer que la différence entre les valeurs correspondantes de t est moindre que α en valeur absolue, ou bien que les différences respectives entre l'une de ces valeurs et t_0, entre l'autre de ces valeurs et t_1 sont moindres que α en valeur absolue. Ces énoncés peuvent être un peu simplifiés lorsqu'on regarde, comme on l'a expliqué plus haut, les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ comme périodiques.

291. — Soit (E) un ensemble de points et (F) sa frontière; soient A_0 et A_1 deux points dont le premier appartient à (E), dont le second ne lui appartient pas : sur tout lien qui relie le point A_0 au point A_1, il y a un point de la frontière (F).

Supposons en effet que le lien (T), qui relie A_0 à A_1 soit défini par les formules

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1$$

et que A_0, A_1 correspondent respectivement aux valeurs t_0, t_1 de t. Soit t' une valeur de t appartenant à l'intervalle (t_0, t_1) et plus grande que t_0. Si l'on ne peut choisir t' de manière que tous les points de (T) qui correspondent à des valeurs de t appartenant à l'intervalle (t_0, t') soient contenus dans (E), c'est qu'il y a des points de (T) aussi voisins de A_0 qu'on veut, qui n'appartiennent pas à (E); A_0, qui appartient à (E), est alors un point frontière. Écartons ce cas.

Si l'on peut choisir t' de manière que tous les points de (T) qui correspondent à l'intervalle (t_0, t') appartiennent à (E), soit θ la borne supérieure de l'ensemble des nombres t' qui jouissent de cette propriété. Le nombre θ est au plus égal à t_1. Le point P du lien, dont les coordonnées sont $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$, est un point frontière de (E). En effet, supposons d'abord θ inférieur à t_1. Si θ' est un nombre quelconque compris entre θ et t_1, il y a dans l'intervalle (θ, θ') quelque valeur de t à laquelle correspond un point du lien qui n'appartient pas à (E); autrement θ ne serait pas la borne supérieure des nombres t', borne qui serait au moins égale à θ'; puisque θ' peut être pris aussi voisin qu'on veut de θ, il y a des points, aussi voisins de P qu'on veut, qui n'appartiennent pas à (E); il y a aussi des points de (E) qui sont aussi voisins de (P) qu'on le veut, à savoir les points du lien qui correspondent à des valeurs de t plus petites que θ et suffisamment voisines de θ. P est donc, pour (E), un point frontière.

Enfin, si θ est égal à t_1, le point P coïncide avec A_1 qui n'appartient pas à (E); les points du lien qui correspondent à des valeurs de t, plus petites que θ et aussi voisines de θ qu'on le veut appartiennent à (E); P (ou A_1), est un point frontière de (E).

Dans tous les cas, il y a, sur le lien (T) un point de la frontière de (E), point qui peut d'ailleurs être A_0 ou A_1.

292. — Considérons le lien (T), défini par les formules

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1.$$

Soit θ une valeur du paramètre t appartenant à l'intervalle (t_0, t_1) et soient ξ, η les coordonnées du point correspondant que je désignerai par P; je désignerai par M le point variable dont les coordonnées x, y correspondent à la valeur t du paramètre et par A un point fixe, de coordonnées a, b, qui n'appartienne point au lien; soit δ la distance du point fixe A au lien.

La mesure de l'angle (AP, AM) a été définie au n° **277**; c'est un nombre ω déterminé à un multiple près de 2π par les formules concordantes

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} \cos\omega &= \frac{(\xi - a)(x - a) + (\eta - b)(y - b)}{\rho r} = g(t) \\ \sin\omega &= \frac{(\xi - a)(y - b) - (x - a)(\eta - b)}{\rho r} = h(t) \end{aligned} \right.$$

où ρ, r désignent les distances

$$\rho = \sqrt{(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2}, \qquad r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

du point A aux points P, M, et où les seconds membres sont évidemment des fonctions continues de t dans l'intervalle (t_0, t_1).

On va montrer que cet angle peut être défini dans le même intervalle comme une fonction continue de t, s'annulant pour $t = \theta$; ces conditions, d'ailleurs, définissent entièrement la fonction.

Soit θ' une valeur de t appartenant à l'intervalle (t_0, t_1) et assez voisine de θ pour que la distance du point M au point P soit moindre que $\delta\sqrt{2}$ lorsque t appartient à (θ, θ'); on aura, pour ces valeurs de t,

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = \rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\omega < 2\delta^2;$$

ρ et r sont au moins égaux à δ; $\rho^2 + r^2$ est au moins égal à $2\delta^2$; l'inégalité précédente entraîne donc $\cos\omega > 0$; il y a donc un angle ω, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, à savoir

$$\omega = \text{arc sin } h(t) = \text{arc tg } \frac{h(t)}{g(t)}.$$

qui vérifie les égalités (1); il s'annule pour $t = \theta$: cet angle, ainsi défini dans l'intervalle (θ, θ'), est la seule fonction continue de t qui satisfasse aux équations (1) et qui s'annule pour $t = \theta$; car si une autre fonction Ω satisfaisait aux mêmes conditions, la différence $\Omega - \omega$ serait aussi une fonction continue de t dans l'intervalle (θ, θ'); elle doit d'ailleurs être un multiple de 2π; ce serait donc une constante et cette constante serait nulle puisqu'elle est nulle pour $t = 0$.

Désignons par $[\theta, t]_A$ la fonction de t définie dans l'intervalle (θ, θ') par les conditions suivantes : elle vérifie les équations (1); elle est continue; elle s'annule pour $t = \theta$. La fonction $[\theta, t]_A$ n'est définie que pour les valeurs de t qui sont suffisamment voisines de θ; afin d'atteindre des valeurs qui s'en éloignent, je supposerai qu'on intercale dans l'intervalle (t_0, t_1) une suite de nombres croissants $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ assez rapprochés pour que, si l'on considère l'un quelconque des intervalles partiels (t_0, θ_1), (θ_1, θ_2), ... (θ_r, t_1), l'intervalle (θ_n, θ_{n+1}), par exemple, la distance des points t et θ_n du lien soit sûrement moindre que $\delta\sqrt{2}$ pourvu que la valeur de t appartienne à l'intervalle $[\theta_n, \theta_{n+1}]$; je suppose enfin que θ soit l'un des nombres de la suite $t_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, t_1$, le nombre θ_n par exemple. Si t appartient à l'intervalle (θ_p, θ_{p+1}), on définira l'angle ω par l'une ou l'autre des deux formules

$$\omega = [\theta_n, \theta_{n+1}]_A + [\theta_{n+1}, \theta_{n+2}]_A + \ldots + [\theta_p, t]_A,$$
$$\omega = [\theta_n, \theta_{n-1}]_A + [\theta_{n-1}, \theta_{n-2}]_A + \ldots + [\theta_{p+1}, t]_A$$

suivant que p est plus grand ou plus petit que n.

La fonction de t ainsi définie satisfait aux équations (1) ainsi qu'il résulte du n° **278**; elle est continue pour chaque valeur de t appartenant à l'intervalle (t_0, t_1) et par conséquence dans tout cet intervalle; le même raisonnement qu'on a utilisé tout à l'heure montre qu'elle est la seule à satisfaire à ces conditions. Je la désignerai en général par la même notation $[\theta, t]_A$ qui a servi tout d'abord dans le cas où t était suffisamment voisin de θ : je la désignerai encore comme étant l'angle (AP, AM) défini au moyen du lien (T). La seule partie du lien qui serve dans cette définition est celle qui va du point θ au point t.

Si le lecteur veut se reporter à ce que l'on a dit à la fin du du n° **278** sur la définition sans ambiguïté de la mesure d'un angle ayant pour sommet un point A, au moyen d'une demi-droite Δ qui part de ce point A, il reconnaîtra sans peine, en se fondant toujours sur la continuité, que si l'intervalle (θ, t) est tel qu'on puisse mener par le point A une demi-droite Δ qui n'ait aucun point commun avec la portion du lien qui correspond à cet intervalle, la valeur de $[\theta, t]_A$ n'est autre chose que l'angle dont il faut faire tourner une demi-droite partant du point A pour l'amener, sans rencontrer Δ, de la position où elle passe par le point P (ou θ) du lien, à la position où elle passe par le point M (ou t). Cette propriété aurait pu servir de point de départ pour la définition de $[\theta, t]_A$.

Remarquons encore que, si l'on considère une direction fixe AD, partant du point A et d'ailleurs quelconque, les remarques précédentes permettent de définir sans ambiguïté, l'angle (AD, AM) comme une fonction continue de t. On pourra par exemple, choisir arbitrairement l'une des déterminations de l'angle (AD, AP) et poser ensuite

$$(AD, AM) = (AD, AP) + [\theta, t]_A.$$

Il est clair que l'angle $[\theta, t]_A$, que l'on a regardé jusqu'ici surtout comme une fonction de t, est une fonction des deux variables θ, t assujetties l'une et l'autre à appartenir à l'intervalle (t_0, t_1). Cette fonction jouit des propriétés qu'expriment les égalités

$$[\theta, t]_A = -[t, \theta]_A,$$
$$[t, t']_A + [t', t'']_A + [t'', t]_A = 0,$$

qui, lorsque les angles qui y figurent sont moindres que $\frac{\pi}{2}$ en valeur absolue, résultent de la définition de l'angle donnée au n° **277**. Quand il n'en est pas ainsi, il suffira, pour les établir, de fractionner les intervalles.

La relation $[t, t']_A = [\theta, t']_A - [\theta, t]_A$ montre que la fonction $[t, t']_A$ des deux variables t, t', définies dans l'ensemble de ces variables qui satisfont aux conditions

$$t_0 \leqq t \leqq t_1, \qquad t_0 \leqq t' \leqq t_1,$$

est, dans cet ensemble, une fonction continue de ces deux variables.

La fonction $[\zeta, t]_A$ dépend des coordonnées a, b du point A, que l'on a jusqu'ici regardées comme fixes, et on peut la considérer comme une fonction de ces coordonnées; mais il importe de remarquer, à ce point de vue, que cette fonction de a, b n'est définie que si le point A n'appartient pas au lien, s'il n'y a pas de valeur de t appartenant à l'intervalle (t_0, t_1) pour laquelle on ait à la fois

$$a = \varphi(t), \qquad b = \psi(t).$$

En reprenant les notations du début on voit tout de suite que $g(t)$, $h(t)$ sont des fonctions continues de a, b en un point qui n'appartient pas au lien (T), et il est bien aisé d'en conclure qu'il en est de même de l'expression $[\zeta, t]_A$ regardée comme une fonction de a, b; on observera encore que si l'un des nombres a, b au moins est suffisamment grand en valeur absolue, la fonction $[\zeta, t]_A$ est certainement très petite en valeur absolue; cela résulte, si l'on veut, de l'égalité

$$\rho^2 \left\{ 1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{\rho}\right) \cos\,[\theta, t]_A \right\} = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

où le second membre, quels que soient les nombres ζ, t appartenant à l'intervalle (t_0, t_1), reste inférieur à un nombre positif fixe, tandis que ρ^2 est très grand : l'égalité exige que le facteur qui multiplie ρ^2 soit très petit; il faut pour cela que $\frac{r}{\rho}$ et $\cos\,[\zeta, t]_A$ soient très voisins de 1, et par suite que $[\zeta, t]_A$ soit très voisin de 0, au moins lorsque t est suffisamment voisin de ζ pour qu'on sache que $[\zeta, t]_A$ est en valeur absolue moindre que $\frac{\pi}{2}$; s'il en est autrement, l'intercalation de nombres convenables entre ζ et t permet d'achever la démonstration.

293. — Lorsque l'on a

$$\varphi(t) = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0), \; \psi(t) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{t_1 - t_0}(t - t_0),$$

en sorte que le lien (T) se réduise au vecteur qui va du point P_0 ou (x_0, y_0) au point P_1 ou (x_1, y_1), l'angle $[t_0, t_1]_A$ défini plus haut n'est autre chose que la détermination principale (n° **278**) de l'angle (AP_0, AP_1) sous lequel on voit le vecteur P_0P_1 du point A ; il est positif ou négatif suivant que le point A est à gauche ou à droite du vecteur P_0P_1 ; il n'est pas défini quand le point A appartient au vecteur P_0P_1 ; il est nul quand le point A est sur la droite indéfinie qui passe par les deux points P_0, P_1 mais non sur le vecteur P_0P_1. Il est très voisin de π ou de $-\pi$ lorsque A est très voisin du vecteur, mais non des points P_0 et P_1. Si l'on remplace le vecteur par une *coupure* (n° **276**) formée de deux vecteurs confondus en réalité, mais qu'on regarde comme distincts et comme constituant le bord gauche et le bord droit de la coupure, on peut attribuer à l'angle $[t_0, t_1]_A$ ou (AP_0, AP_1) la valeur π quand le point A est situé sur le bord gauche et la valeur $-\pi$ quand il est sur le bord droit. L'angle (AP_0, AP_1) est alors défini pour tous les points A du plan, *sauf pour les points* P_0, P_1, pourvu que l'on dise, lorsque A est sur le vecteur P_0P_1, entre P_0 et P_1, s'il est situé sur le bord gauche ou sur le bord droit de la coupure. C'est manifestement une fonction continue du point A, pourvu que ce point ne soit pas sur la coupure.

294. — Reprenons les notations du numéro **292** et les notations $[\theta, t]_A$, $[\theta, t]_B$ qui désignent des fonctions parfaitement déterminées des variables θ, t quand on se donne le lien (T) et les deux points fixes A, B extérieurs au lien (T) ; M et P désigneront toujours les points de (T) qui correspondent aux valeurs t et θ du paramètre.

Mon but est d'établir, en supposant que le lien (T) n'ait aucun point commun avec le vecteur AB, la relation

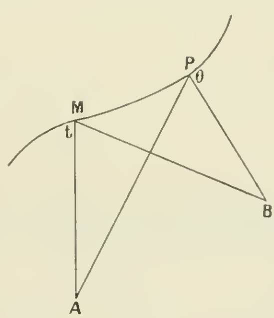

Fig. 9.

$$(1)\quad [\theta, t]_B - [\theta, t]_A = (MA, MB) - (PA, PB),$$

où (MA, MB), (PA, PB) désignent respectivement les valeurs principales des angles dont les côtés sont MA et MB, PA et PB.

Il est tout d'abord aisé de reconnaître que les deux membres de l'égalité précédente ne peuvent différer que d'un multiple de 2π; en effet les quantités $[\vartheta, t]_B$, $[\theta, t]_A$ ne sont autres que des déterminations spéciales des angles (BP, BM) et (AP, AM), ou (PB, MB), et (PA, MA), puisque l'angle de deux directions est égal à l'angle des directions opposées : or on a

$$\begin{aligned}(PA, MB) &\equiv (PA, PB) + (PB, MB) \\ &\equiv (PA, MA) + (MA, MB) \pmod{2\pi},\end{aligned}$$

d'où résulte immédiatement

$$(PB, MB) - (PA, MA) \equiv (MA, MB) - (PA, PB) \pmod{2\pi}.$$

Ceci posé, regardons ϑ comme fixe et t comme variable : l'expression

$$[\theta, t]_B - [\theta, t]_A - (MA, MB) + (PA, PB),$$

où il est entendu que (MA, MB), (PA, PB) sont les déterminations principales des angles de même nom, est une fonction continue de t, puisque le lien (T) n'a pas de point commun avec le vecteur AB ; d'un autre côté cette expression doit être un multiple de 2π, c'est donc une constante ; elle est nulle quand t est égal à ϑ, et que, par conséquent, le point M coïncide avec le point P : elle est donc toujours nulle : c'est ce qu'il fallait établir.

295. — Le cas où le lien (T) est fermé, c'est-à-dire où l'on a

$$\varphi(t_0) = \varphi(t_1), \quad \psi(t_0) = \psi(t_1),$$

mérite une attention particulière ; la fonction $[t_0, t_1]_A$, définie dans le n° **292**, pour laquelle on suppose toujours que A est en dehors de (T), est un multiple de 2π, puisque les deux points du lien (son origine et son extrémité), qui correspondent aux valeurs t_0, t_1 du paramètre, coïncident. Ainsi, le lien (T) étant donné, à chaque point A non situé sur ce lien, correspond un nombre entier, positif, nul ou négatif,

$$n = \frac{[t_0, t_1]_A}{2\pi}.$$

Je désignerai ce nombre sous le nom d'*ordre* [1] du point A relatif au lien (T).

Puisque $[t_0, t_1]_A$ est une fonction continue de a, b aux environs d'un point qui n'appartient pas au lien (T), il en est de même de n qui, aux environs de ce point, ne peut donc que demeurer constant. Quand, en particulier, le point (a, b) est très éloigné, le nombre n doit être très voisin de o, comme on l'a vu à la fin du n° **292** ; il est donc nul. Au reste, cette dernière conclusion résulte aussi de ce que, en vertu d'une remarque antérieure, le nombre $[t_0, t_1]_A$ est nul toutes les fois qu'on peut regarder le point A comme l'origine d'une demi-droite qui n'a aucun point commun avec le lien fermé (T). L'ordre n du point A restera évidemment nul si ce point se déplace sur un lien qui n'ait aucun point commun avec (T). On prévoit que la considération de ce nombre entier permettra de décomposer le plan en régions distinctes, où il restera le même et dans chacune desquelles ne se trouvera aucun point de (T) : c'est ce qu'on élucidera un peu plus tard ; j'aurai alors besoin des définitions et remarques qui suivent.

296. — Considérons un lien (T), ouvert ou fermé, défini par les formules

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1.$$

Je continuerai d'appeler M le point de ce lien dont les coordonnées sont $\varphi(t)$, $\psi(t)$.

Je dirai que le lien (T) *traverse* une droite (Δ) en un point C, si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

1° Pour une valeur α de la variable t, intérieure à l'intervalle (t_0, t_1), le point M est en C (sur Δ).

2° Il existe deux nombres α', α'' $(\alpha' < \alpha < \alpha'')$ appartenant à l'intervalle (t_0, t_1), tels que M soit d'un côté de (Δ) pour $\alpha' < t < \alpha$ et de l'autre côté pour $\alpha < t < \alpha''$.

---

[1] Cette expression a été introduite par M. L. D. Ames dans sa thèse « *An arithmetic treatment of some problems in Analysis situs* » Baltimore, 1905. M. Ames a montré l'importance de cette notion ; j'aurai d'ailleurs l'occasion d'utiliser un peu plus loin son Mémoire, pour la démonstration d'un théorème fondamental (n^{os} 306,..., 309). Voir aussi Osgood, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, t. I, ch. v.

Dans ce qui suit, je supposerai que le lien (T) est fermé [1].

Je désigne par (T_0) la partie du lien (T) qui correspond aux valeurs de t appartenant à l'intervalle (α', α''), par (T_1) la partie restante, qui correspond aux valeurs de t appartenant aux intervalles (t_0, α') et (α'', t_1). D'après les suppositions précédentes le lien partiel (T_0) n'a pas d'autre point commun avec (Δ) que le point C.

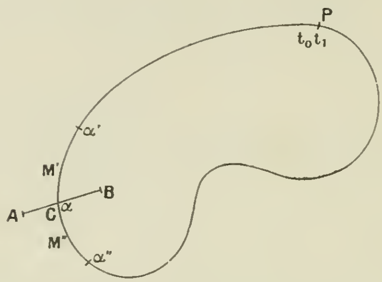

Fig. 10.

Je suppose en outre que le lien partiel (T_1) ne passe pas par le point C, en d'autres termes ce point n'est pas un point double du lien (T) : on sera sûrement dans ce cas si le lien est simple. La distance du point C au lien partiel (T_1) ne sera pas nulle ; on pourra donc prendre deux points A, B sur la droite (Δ) situés, de part et d'autre de C, à une distance de C moindre que la distance de C à (T_1) et l'on sera dès lors certain que le lien (T_1) n'a aucun point sur le vecteur AB. Je vais montrer que, s'il en est ainsi, on a

$$[t_0, t_1]_B - [t_0, t_1]_A = \pm 2\pi,$$

en prenant le signe + lorsque le lien traverse le vecteur AB de gauche à droite, c'est-à-dire lorsque les points de ce lien qui corres-

---

[1] La définition précédente semble exclure le cas, que je ne considérerai pas ici, où le lien fermé traverserait la droite (Δ) au point qui est à la fois l'origine et l'extrémité du lien. Le lecteur apercevra sans peine les modifications qu'il conviendrait d'apporter au langage pour ne pas exclure ce cas, que l'on peut d'ailleurs ramener au cas considéré par un changement de la variable. — On peut aussi regarder les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ comme périodiques. Il me paraît inutile d'insister sur ces détails.

pondent aux valeurs de t comprises entre α' et α sont à gauche du vecteur et que les points du lien qui correspondent aux valeurs de t comprises entre α et α'' sont à droite ; on prendra au contraire le signe — lorsque le lien traverse le vecteur de droite à gauche.

Soit P la position du point M qui correspond aux valeurs t_0, t_1 du paramètre ; soient M', M'' les points du lien qui correspondent à des valeurs t', t'' telles que l'on ait

$$\alpha' < t' < \alpha, \quad \alpha < t'' < \alpha'' ;$$

on aura, en employant les mêmes notations qu'au nº 292

$$\begin{aligned}(t_0, t_1)_B - (t_0, t_1)_A = {} & (t_0, t')_B - (t_0, t')_A \\ & + (t', t'')_B - (t', t'')_A \\ & + (t'', t_1)_B - (t'', t_1)_A.\end{aligned}$$

Le premier membre est un multiple de 2π ; dans le second membre, les termes qui figurent sur la seconde ligne sont aussi petits qu'on veut pourvu que t' et t'' soient suffisamment voisins de α : on a d'ailleurs, puisqu'il n'y a pas sur le vecteur AB de points du lien pour les valeurs de t qui appartiennent aux intervalles (t_0, t'), (t'', t_1),

$$\begin{aligned}(t_0, t')_B - (t_0, t')_A &= (M'A, M'B) - (PA, PB), \\ (t'', t_1)_B - (t'', t_1)_A &= (PA, PB) - (M''A, M''B) ;\end{aligned}$$

la somme des seconds membres est la différence

$$(M'A, M'B) - (M''A, M''B)$$

des angles compris entre $-\pi$ et $+\pi$ sous lesquels on voit le vecteur AB des points M', M'' ; or le premier de ces angles, dans l'hypothèse où l'on s'est placé est très voisin de π, le second est très voisin de $-\pi$; on a donc dans tous les cas,

$$(t_0, t_1)_B - (t_0, t_1)_A = \pm 2\pi,$$

le signe + correspondant au cas où le point M' est à gauche, le point M'' à droite du vecteur AB ; le signe — correspond à l'autre cas.

Il suit de là que si par un point C d'un lien fermé (T), point dont on suppose qu'il n'est obtenu que pour une seule valeur du paramètre, on peut mener une droite que le lien traverse, on peut trouver sur cette droite, aussi près qu'on veut du point C, des points non situés sur le lien et dont les ordres diffèrent d'une unité : il est par conséquent impossible de relier ces points, par un lien qui n'ait aucun point commun avec (T). Dans le cas où le lien fermé (T) est simple et où l'on peut mener par chacun de ses points, sauf peut-être pour un nombre fini de points, des droites qu'il traverse, on voit qu'aux environs de chacun des points du lien se trouvent des points, non situés sur lui, dont les ordres relatifs au lien diffèrent d'une unité.

Lorsqu'il s'agit d'un lien fermé simple (T), l'ordre d'un point non situé sur le lien (T) par rapport à ce lien ne dépend pas de l'origine (confondue avec l'extrémité) du lien, mais seulement du sens de parcours. Si l'on définit ce sens de parcours, comme on l'a expliqué au n° **290**, en choisissant sur (T) deux points distincts A, B et l'un des liens partiels AB ainsi déterminés, lien partiel qui devra être parcouru de A vers B, tandis que l'autre BA est parcouru de B vers A, on reconnaît tout de suite, en supposant par exemple que le sens de parcours ainsi choisi corresponde aux valeurs croissantes du paramètre, que l'ordre, multiplié par 2π, d'un point M non situé sur (T) est égal à la somme des deux angles (MA, MB), (MB, MA) définis, le premier par le lien partiel AB, le second par l'autre lien partiel BA. Il est clair, par là même, que le nombre trouvé ne dépend pas des deux points A, B, pourvu que le sens de parcours reste le même, et que ce nombre change de signe, sans changer de valeur absolue, si l'on change le sens du parcours.

297. — Considérons deux points distincts A, B et trois liens simples (P), (Q), (R) dont chacun relie le point A au point B et tels que deux d'entre eux n'aient pas de point commun, en dehors des points A et B; deux de ces liens constituent un lien fermé simple; on forme ainsi trois liens fermés simples, que je désignerai respectivement par (Q, R), (R, P), (P, Q).

Soit I un point quelconque, n'appartenant à aucun des liens (P), (Q), (R). Si l'on choisit sur les liens fermés (Q, R), (R, P), (P, Q) un sens de parcours convenable, les ordres respectifs du point I par rapport à ces liens fermés, seront, au facteur 2π près, les sommes $(IA, IB)_Q + (IB, IA)_R$, $(IA, IB)_R + (IB, IA)_P$, $(IA, IB)_P + (IB, IA)_Q$, où $(IA, IB)_Q$, par exemple, désigne l'angle (IA, IB) défini au moyen du lien (Q) (n° **292**). La somme des trois ordres est manifestement nulle, puisque l'on a

$$(IA, IB)_P + (IB, IA)_P = 0.$$

. . . .

Il est clair qu'en changeant les sens de parcours, on aurait pu s'arranger pour que l'un des ordres fût égal à la somme des deux autres.

III. — CONTINUUMS. PROPOSITIONS D'ANALYSIS SITUS

298. — Il importe d'avoir pour les systèmes de deux variables x, y une notion qui tienne le même rôle que la notion d'intervalle pour une seule variable.

Une telle notion, trop particulière à la vérité, mais dont on a déjà vu l'utilité est celle de l'ensemble parfait formé par les points qui appartiennent à un rectangle (R); les propositions du n° **284** s'appliquent immédiatement et l'on conçoit ce qu'est une fonction déterminée dans ce rectangle (en tous les points qui appartiennent à ce rectangle), une fonction continue dans ce rectangle, comment une telle fonction atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure pour des points appartenant à ce rectangle (situés à l'intérieur ou sur le contour), comment on peut subdiviser ce rectangle (R) en rectangles partiels assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'écart de la fonction soit moindre que tel nombre qu'on voudra, etc... Au lieu d'un rectangle on peut considérer un cercle ou plutôt l'ensemble des points qui appartiennent à un cercle : c'est encore un ensemble parfait. Au lieu du cercle on pourra prendre une ellipse, ou plus généralement, une de ces courbes que l'on sait définir analytiquement, ainsi que leur intérieur et leur extérieur.

En opposition avec ces notions particulières, il convient de signaler une notion très générale, qui est due à Weierstrass, celle de *continuum*.

Un continuum est un ensemble (C) de points qui satisfait aux conditions suivantes :

1° A chaque point A de l'ensemble (C) correspond un nombre positif α tel que tous les points de (C) qui sont à une distance de A égale ou inférieure à α appartiennent à (C). En d'autres termes chaque point de (C) est le centre d'un cercle (ou d'un carré), tel que tous les points qui appartiennent au cercle (ou au carré) appartiennent à (C). Aucun point de l'ensemble (C) n'est isolé.

2° Deux points quelconques A et B de l'ensemble peuvent être reliés par un lien (T) donc tous les points appartiennent à l'ensemble. On dit d'un tel lien qu'il est intérieur à (C).

Si l'ensemble (C) satisfait à ces deux conditions (s'il est un continuum), on verra plus tard que le lien (T) peut toujours être constitué par une ligne brisée.

A cause de la condition 1°, un point frontière du continuum (C) ne peut appartenir à ce continuum : un continuum n'est pas un ensemble clos. Un continuum ne contenant pas de point isolé, sa frontière est formée de points d'accumulation du continuum, qui n'appartiennent pas à ce continuum. Un point P est un point frontière de (C) lorsque tout cercle décrit de P comme centre contient des points de (C) et des points qui n'appartiennent pas à (C), ne fût-ce que le seul point P ou d'autres points frontières. Si la frontière est bornée, si en particulier le continuum est borné, cette frontière est un ensemble clos (n° **287**), ou fini.

Voici quelques exemples de continuums.

Le plan est un continuum sans frontière. On verra tout à l'heure que c'est le seul continuum sans frontière.

Le plan, à l'exclusion de certains points A, B, C, ... en nombre fini, est un continuum dont la frontière est formée par ces points. Le plan, à l'exclusion des points d'un segment AB, est un continuum dont AB constitue la frontière.

L'ensemble de points *intérieurs* à un rectangle, ou à un triangle, ou à un trapèze, ou à un cercle, constitue un continuum dont la frontière est formée par le contour du rectangle, ou du triangle, ou du trapèze, ou par la circonférence du cercle. L'ensemble clos des points qui appartiennent à un rectangle ou à un cercle n'est pas un continuum. L'ensemble des points extérieurs à un cercle est un continuum.

Si le cercle (A) est intérieur au cercle (B), l'ensemble des points extérieurs au cercle (A) et intérieurs au cercle (B) est un continuum (C), dont la frontière est formée par les circonférences des cercles (A) et (B). L'ensemble des points qui n'appartiennent ni à (C) ni à sa frontière n'est pas un continuum; il se compose de deux continuums, dont l'un est l'ensemble des points extérieurs à (A), dont l'autre est l'ensemble des points intérieurs à (B).

299. — Revenons au cas général. Soit (C) un continuum et soient A_0, A_1 l'origine et l'extrémité du lien (T) défini par les formules

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_0 \leqq t \leqq t_1.$$

Supposons que A_0 appartienne au continuum (C) et que A_1 ne lui appartienne pas. Il suffit de se reporter au n° **291** pour voir qu'il y a un nombre θ plus grand que t_0 et au plus égal à t_1, tel que les points de (T) qui correspondent aux valeurs de t appartenant à l'intervalle (t_0, θ) soient tous des points du continuum (C), à l'exception du point qui correspond à la valeur θ, lequel est un point frontière et, ainsi, n'appartient pas au continuum.

En particulier, tout vecteur $A_0 A_1$ partant d'un point A_0 du continuum et aboutissant à un point A_1 qui n'appartient pas à ce continuum contient un point de la frontière, nécessairement situé entre A_0 et A_1, sauf dans le cas où A_1 est un point frontière.

Les points qui appartiennent à un continuum (C) sont dits *intérieurs* à ce continuum : un point est extérieur à (C) s'il n'appartient ni à (C) ni à sa frontière. Un lien (T) est intérieur (ou extérieur) au continuum (C), si tous ses points sont intérieurs (ou extérieurs) à ce continuum.

L'ensemble des points extérieurs à un continuum (C), en supposant qu'il y ait de tels points, satisfait à la condition 1°.

Soit en effet A un point extérieur au continuum; la distance du point A à la frontière (F) de (C) est un nombre positif δ; le cercle décrit du point A comme centre avec un rayon $r < \delta$ ne contient aucun point de la frontière ni à son intérieur ni sur sa circonférence; il ne contient non plus aucun point B du continuum, car alors le vecteur AB contiendrait un point frontière. Mais, pour que l'ensemble des points extérieurs à un continuum soit lui-même un continuum, il faut que la condition 2° soit vérifiée.

Soit (C) un continuum et (F) sa frontière ; soit (C') l'ensemble des points extérieurs à (C) et (F') la frontière de cet ensemble. L'ensemble (F) contient l'ensemble (F') ; en effet un point de (F') ne peut appartenir à (C'), puisque les points suffisamment voisins d'un point de (C') appartiennent tous à (C') ; un point de (F') ne peut non plus appartenir à (C) ; il appartient donc à (F). Mais tout point de (F) n'appartient pas nécessairement à (F') ; un point P de (F) n'appartient pas à (F') lorsqu'un cercle de centre P et de rayon suffisamment petit ne contient aucun point extérieur à (C) ; un tel cercle ne peut alors contenir que des points appartenant à (C) ou à (F).

Lorsqu'il existe de tels points P, on peut dire qu'ils appartiennent à l'ensemble $(F) - (F')$; en les adjoignant au continuum (C), on forme un ensemble (C_1) qui est encore un continuum ; en effet, on voit d'abord qu'il satisfait à la condition 1° tant pour les points de (C) que pour les points P de l'ensemble $(F) - (F')$, puisque tous les points appartenant à un cercle de centre P et de rayon suffisamment petit sont des points de (C_1). D'ailleurs un tel cercle, puisque P est un point frontière de (C), contient nécessairement un point de (C), auquel P peut être relié par un vecteur dont tous les points appartiennent à (C_1) ; enfin deux points de (C) peuvent être reliés par un lien intérieur à (C) et, par conséquent, à (C_1) : la condition 2° est aussi vérifiée. Les points extérieurs à (C_1) sont les mêmes que les points extérieurs à (C) ; le continuum (C_1) et l'ensemble (C') admettent (F') comme frontière commune.

300. — On a signalé plus haut des exemples de continuums très simples ; je vais montrer comment on peut constituer d'autres continuums en partant de continuums donnés.

Soient (C) et (C') deux continuums, (F) et (F') leurs frontières respectives. Si les deux continuums ont un point commun A, il est clair que tous les points qui appartiennent à un cercle décrit de A comme centre avec un rayon moindre que les distances de A à (F) et à (F') sont aussi communs aux deux continuums (C), (C') ;

l'ensemble des points communs aux deux continuums qui peuvent être reliés à A par un lien intérieur à la fois à (C) et à (C′) forme un continuum ; soit (G) ce continuum. Il peut d'ailleurs arriver que l'ensemble des points communs à (C) et à (C′) forme plusieurs continuums séparés.

Supposons qu'un point B de (C) n'appartienne pas à (G) ; ce point, puisqu'il appartient à (C) comme A, peut être relié à A par un lien intérieur à (C) ; ce lien ne peut être aussi intérieur à (C′) puisque B n'appartient pas à (G) : il contient des points qui n'appartiennent pas à (C′) et le point A qui appartient à (C′) ; il contient donc un point de (F′) ; il y a au moins un point de (F′) qui appartient à (C).

Si donc le continuum (C) ne contient aucun point de la frontière du continuum (C′), il est contenu tout entier dans ce continuum (C′) ou lui est tout entier extérieur. On sera sûrement dans le premier cas, si les deux continuums ont un point commun.

Remarquons en passant que si les continuums (C), (C′) sont tels que chacun d'eux ne contienne aucun point de la frontière de l'autre, ils sont certainement extérieurs l'un à l'autre, à moins qu'ils ne soient confondus.

En supposant toujours que le point A appartienne à la fois aux deux continuums (C), (C′), considérons maintenant l'ensemble (C″) des points qui appartiennent soit à (C), soit à (C′) : cet ensemble (C″) constitue un continuum ; en effet, la condition 1° est évidemment vérifiée pour tous les points de (C″) ; il en est de même de la condition 2°, puisque deux points de (C″) peuvent être reliés à A par des liens intérieurs soit à (C), soit à (C′) ; ces deux points peuvent donc être reliés entre eux par un lien dont tous les points appartiennent à (C″).

301. — Si les deux continuums (C), (C′) n'ont pas de point commun, mais s'ils ont une partie de frontière commune, on peut encore, sous certaines conditions, en déduire un continuum formé de tous les points appartenant soit à (C), soit à (C′), soit à la frontière commune, à l'exception de deux de ces derniers points.

Les conditions que je supposerai vérifiées par la partie commune de la frontière, sont les suivantes :

1° Cette partie commune peut être regardée comme un lien (T) défini par les formules

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta.$$

Je désignerai par (T′) l'ensemble des points du lien (T) autres que son origine A et son extrémité B, lesquelles correspondent aux valeurs α, β de t.

2° Chaque point P de (T′) peut être regardé comme centre d'un cercle (P) tel que tous les points qui lui appartiennent appartiennent soit à (C), soit à (C′), soit à (T′). Puisque P est à la fois sur la frontière de (C) et de (C′), tout cercle ayant pour centre le point P contient des points de (C), des points de (C′), des points de (T′); l'hypothèse est qu'il n'en contient pas d'autres à son intérieur, ou sur sa circonférence, pourvu que son rayon soit suffisamment petit; en particulier il ne doit pas, en dehors des points de l'ensemble (T′), contenir de points frontières de (C), ou de (C′), pas même les points A, B qui, par suite, ne doivent correspondre à aucune valeur de t, intérieure à l'intervalle (α, β).

D'ailleurs, en dehors de (T), les frontières de (C) et de (C′) peuvent avoir des points communs, ou des parties communes, dont je ne m'occupe point.

Je vais montrer que, dans ces conditions, l'ensemble (E) des points qui appartiennent soit à (C), soit à (C′), soit à (T′) constitue un continuum; je dirai que ce continuum est obtenu en supprimant la frontière commune.

Tous les points qui appartiennent au cercle (P) appartiennent à l'ensemble (E) qu'on vient de définir. Que tous les points de l'ensemble (E) vérifient la condition 1° du n° **298**, c'est ce qui est évident. D'un autre côté, le cercle (P) contient des points de (C) et de (C′), qui peuvent être reliés l'un à n'importe quel point de (C), l'autre à n'importe quel point de (C′) par des liens intérieurs à (C) ou à (C′), qui, enfin, peuvent être reliés à P par des vecteurs intérieurs à (P) : deux points de (C) ou de (C′), un de ces points et un point de (T′) peuvent donc être reliés par un lien dont tous les points appartiennent à (E) : (E) est un continuum.

Un point K de la frontière de (C), ou de (C′), qui n'appartient pas à (T′) est un point frontière de (E) ; car tout cercle décrit de K comme centre contient le point K, qui n'appartient pas à (E), et contient des points de (E). Un point quelconque de (T) appartient à (E); un point extérieur à (C) et à (C′) est le centre d'un cercle tel qu'aucun des points qui lui appartienne n'appartienne ni à (C), ni à (C′); il ne peut appartenir à la frontière de (E) qui, ainsi, est formée de l'ensemble des points qui appartiennent à la frontière de (C), ou à la frontière de (C′), sans appartenir à (T). Les points A et B appartiennent à cette frontière de (E).

Plaçons-nous maintenant dans le cas où les deux continuums (C) et (C′) satisfaisant toujours aux conditions qui précèdent, sont bornés, et où leurs frontières (F), (F′) sont constituées chacune par un lien fermé : ces liens seront définis par des formules telles que

$$(F)\begin{cases} x = f(u), \quad y = g(u), \quad u_0 \leqq u \leqq u_1, \\ f(u_0) = f(u_1), \quad g(u_0) = g(u_1); \end{cases}$$
$$(F')\begin{cases} x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad t_0 \leqq t \leqq t_1, \\ \varphi(t_0) = \varphi(t_1), \quad \psi(t_0) = \psi(t_1). \end{cases}$$

Je suppose enfin que le lien (T) qui, par hypothèse, fait partie de (F) et de (F′) ne contienne pas les points dont les coordonnées s'obtiennent en remplaçant u par u_0 ou par u_1 dans $f(u)$ et dans $g(u)$ et t par t_0 ou par t_1 dans $\varphi(t)$ et $\psi(t)$. C'est là d'ailleurs une supposition qui n'a rien d'essentiel et qu'on peut toujours réaliser par un changement de variable. Ce lien pourra alors être défini par des formules telles que

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta, \qquad (t_0 < \alpha < \beta < t_1),$$

ou

$$x = f(u), \; y = g(u), \qquad \gamma \leqq u \leqq \delta, \qquad (u_0 < \gamma < \delta < u_1),$$

en supposant que chacun de ces systèmes de formules fournisse le même ensemble de points, et que l'on ait, en particulier

$$\varphi(\alpha) = f(\gamma), \qquad \psi(\alpha) = g(\gamma),$$
$$\varphi(\beta) = f(\delta), \qquad \psi(\beta) = g(\delta).$$

D'après ce que l'on a dit plus haut, la frontière de l'ensemble (E), obtenu par la suppression du lien (T), est le lien fermé constitué par les parties de (F′) qui correspondent aux valeurs de t

qui appartiennent aux intervalles (t_0, α), (β, t_1) et les portions de (F) qui correspondent aux valeurs de u qui appartiennent aux intervalles (u_0, γ), (δ, u_1). En vertu des formules précédentes, ces quatre liens partiels se raccordent pour former un lien fermé, lequel sera évidemment simple si les frontières (F), (F′) sont elles-mêmes des liens simples et si elles n'ont pas de points communs en dehors de l'ensemble (T).

Les propositions qu'on vient d'établir permettent de constituer des continuums assez compliqués en juxtaposant des continuums simples, des triangles, des rectangles, des trapèzes... ; la frontière d'un continuum ainsi formé, peut d'ailleurs se composer de plusieurs liens séparés. Le cas particulier qu'on vient d'examiner montre comment, en procédant ainsi, on peut s'arranger pour que les continuums successifs que l'on forme aient toujours pour frontière un lien fermé, et même un lien fermé simple. Les continuums de cette nature ont un rôle important dans la théorie de certaines fonctions.

302. — Soit (C) un continuum et (F) sa frontière ; on peut concevoir qu'une fonction φ soit déterminée ou définie pour chaque point appartenant à ce continuum : on peut dire alors que la fonction est déterminée ou définie dans le continuum. Une fonction définie dans le continuum (C) est définie aux environs de chaque point de ce continuum, c'est-à-dire dans un cercle de rayon suffisamment petit décrit autour de ce point comme centre : il est donc permis de parler d'une fonction définie et continue en chaque point d'un continuum (C) ; on dira, si l'on veut, qu'elle est définie et continue dans le continuum (C) ; mais on ne peut affirmer d'une telle fonction qu'elle est uniformément continue dans le continuum, parce que ce continuum n'est pas un ensemble clos. Il est d'ailleurs bien aisé de voir que la différence entre deux valeurs d'une fonction continue pour deux points d'un continuum peut rester supérieure, en valeur absolue, à un nombre fixe, lors même que les deux points auxquels correspondent ces deux valeurs sont très voisins, si ces deux points sont très voisins de la frontière. Voici un exemple simple.

Considérons, comme à la fin du n° **278**, un point fixe O et une demi-droite fixe (Δ) partant de ce point ; soit (C) le continuum obtenu en supprimant du plan les points qui appartiennent à la demi-droite (Δ), laquelle est évidemment la frontière de (C). Soit maintenant (D) une autre demi-droite fixe partant encore du point O, mais distincte de (Δ); soit enfin α le plus petit angle positif dont il faut faire tourner une demi-droite autour du point O (dans le sens direct) pour l'amener de (D) sur (Δ).

Si l'on considère un point quelconque M du continuum, on a défini l'angle dont il faut faire tourner une demi-droite, autour de O, pour l'amener de (D) sur OM, sans passer par (Δ): cet angle est compris entre α et $-2\pi+\alpha$; on voit tout de suite que c'est une fonction continue de M, en chaque point du continuum. Si M_1, M_2, sont deux points situés très près de (Δ), l'un à droite, l'autre à gauche, l'angle considéré, en M_1, sera très voisin de α; il sera très voisin de $-2\pi+\alpha$ en M_2; la différence entre les deux angles est très voisine de 2π. Si, au contraire, les deux points M_1, M_2 étaient très voisins de (Δ), mais du même côté de (Δ), les deux angles seraient très voisins l'un de l'autre.

On retrouve ici la notion de coupure, introduite au n° **276**; considérons la demi-droite Δ comme double; l'une des deux demi-droites, dont je dirai qu'elle est à gauche, étant regardée comme voisine des points situés à gauche de (Δ) et à une petite distance, l'autre dont je dirai qu'elle à droite, étant regardée comme voisine des points situés à droite de (Δ) et à une petite distance. Dans cet ordre d'idée, deux points situés près de (Δ) ne doivent être regardés comme voisins que s'ils sont d'un même côté de (Δ).

Avec cette convention, la fonction du point M dont il a été question plus haut, l'angle de (D) et de OM, peut être défini dans tout le plan, sauf au point O; mais, si le point M est sur (Δ) on devra dire s'il se trouve sur le *bord gauche* ou sur le *bord droit* de la frontière : en deux points, confondus en réalité, mais qu'on regarde comme étant l'un sur le bord gauche, l'autre sur le bord droit, les valeurs de la fonction diffèrent de 2π.

Une fonction d'un point variable (ou de ses coordonnées) continue pour tous les points d'un continuum, est uniformément continue dans tout ensemble clos contenu dans ce continuum (n° **284**).

Soit (C) un continuum borné et (F) sa frontière. L'ensemble $(C)+(F)$ des points qui appartiennent soit au continuum, soit à sa frontière est un ensemble parfait. Une fonction continue pour tous les points de cet ensemble sera uniformément continue dans cet ensemble.

Reprenons les notations employées dans le numéro précédent pour deux continuums bornés (C), (C') qui n'ont pas de point commun, dont les frontières respectives (F), (F') sont des liens fermés et admettent une partie commune, constituée par un lien (T) dont l'origine et l'extrémité sont les points A et B, et qui satisfait aux conditions que l'on a précisées. (T') désigne toujours l'ensemble des points de (T) autres que A, B; (E) est le continuum qui résulte de la juxtaposition des deux continuums (C), (C') et de la suppression de la frontière commune (T'). Désignons enfin par (F_1) la frontière de (E), frontière qui se compose des points de (F) et de (F') qui n'appartiennent pas à (T'), et par (E_1) l'ensemble parfait (E) + (F_1).

Soient φ, φ' des fonctions continues, l'une dans l'ensemble (C) + (F), l'autre dans l'ensemble (C') + (F'), et supposons que l'on ait $\varphi = \varphi'$ pour n'importe quel point de (T). Il est clair que la fonction ψ définie comme étant égale à φ dans (C), à φ' dans (C'), à φ ou à φ' pour les différents points de (T') sera continue en tout point de (E).

Si les frontières (F), (F') n'ont pas de points communs en dehors de (T), il est clair que le même procédé permet de construire une fonction continue dans (E_1), égale à φ pour tous les points de (C) + (F), à φ' pour tous les points de (C') + (F'); mais il n'en sera plus de même si les frontières (F), (F') ont des points communs en dehors de (T), car on n'a pas supposé qu'en un tel point les deux fonctions φ et φ' fussent égales.

On est alors amené à dédoubler en quelque sorte des points de (F_1) qui proviendraient d'un point commun à (F) et à (F') et n'appartenant pas à (T); on convient de garder le souvenir de la provenance de pareils points, que l'on regarde comme séparés si l'un provenait de (F), et l'autre de (F'). La frontière (F_1) de (E) est ainsi remplacée par un autre ensemble (F_2) dans lequel un même point, un même lien partiel, peuvent figurer deux fois; je le répète, ce point, ce lien partiel ne sont pas regardés comme les mêmes suivant qu'ils proviennent de (F) ou de (F_1). Dans le cas où (F) et (F') sont des liens fermés simples, on peut, en vertu de la même fiction, regarder encore (F_2) comme un lien fermé simple, dans lequel des valeurs différentes du paramètre fournissent des points qui, à la vérité coïncident, mais qui sont essentiellement distincts, d'après leur provenance. Si P et P' sont ainsi deux points coïncidants provenant l'un de (F), l'autre de (F'), le premier est regardé comme voisin des points de (C) qui sont à une petite distance de lui, mais non des points de (C') que l'on ne pourrait atteindre, sans s'éloigner de P, en suivant un lien continu intérieur à (E). De même, P' est regardé comme voisin des points de (C') qui sont à une petite distance de lui, mais non des points de (C). De même qu'on a remplacé la frontière (F_1) par la frontière (F_2), on remplace l'ensemble $(E_1) = (E) + (F_1)$, par l'ensemble $(E_2) = (E) + (F_2)$, lequel contient alors sur sa frontière des points qui coïncident et que l'on regarde comme distincts, qui ne sont spécifiés que, lorsque, après avoir donné leurs coordonnées, on dit s'ils proviennent de (F) ou de (F').

Sans que j'insiste davantage, le lecteur voit s'étendre la notion de coupure et se rend compte du sens dans lequel il est permis de dire qu'une fonction est uniformément continue dans (E_2). Les parties communes à (F) et à (F'), en dehors de (T), constituent des coupures, dont un *bord* provient de (F), un autre bord de (F'); près d'une coupure, les points voisins d'un même bord proviennent, soit du continuum (C), soit du continuum (C') et ce n'est que pour les points voisins d'un même bord que les valeurs de la fonction diffèrent très peu.

Prenons encore pour exemple l'angle qu'une demi-droite fixe (D), partant d'un point fixe O, fait avec la demi-droite qui va de ce point O à un point variable M. Je suppose essentiellement que le point O est extérieur aux continuums (C) et (C').

Supposons qu'on puisse mener, à partir de O, une demi-droite (Δ) extérieure au continuum (C) et distincte de (D); on peut alors définir, pour tout point M appartenant à l'ensemble $(C) + (F)$, l'angle de (D) et de OM, par le procédé qu'on a expliqué à la fin du n° **278**; cet angle est une fonction continue du point M dans l'ensemble parfait $(C) + (F)$; il en sera de même si on lui ajoute un multiple quelconque de 2π; si donc M_0 est un point fixe quelconque de $(C) + (F)$ et si l'on choisit arbitrairement l'une des valeurs φ_0 de l'angle dont les deux côtés sont (O) et OM_0, on pourra définir une fonction φ de M, continue dans l'ensemble parfait (C) + (F), qui prendra la valeur φ_0 quand M sera en M_0, et qui sera toujours égale à la mesure de l'un des angles dont les côtés sont (D) et OM. Il n'y a d'ailleurs qu'une fonction qui jouisse de cette propriété.

Supposons maintenant qu'on puisse mener une demi-droite (Δ), distincte de (D) et extérieure à (C) : on pourra encore définir, pour tout point M de (C') + (F'), l'angle de (D) et de OM, comme une fonction continue de M. Lorsque M appartient à (T), les deux angles définis, l'un dans (C) + (F), l'autre dans (C') + (F') ne peuvent différer que d'un multiple de 2π, lequel, à cause de la continuité, reste évidemment le même tout le long de (T) ; en modifiant le second angle de ce multiple de 2π, les deux angles seront égaux tout le long de (T), en sorte que l'angle de (D) et de OM pourra être défini comme une fonction continue de M dans tout l'ensemble $(E_2) = (E) + (F_2)$, à la condition de regarder au besoin la frontière (F_2) comme comportant des bords séparés. Cette fonction est définie sans ambiguïté par la condition qu'on lui a imposée, d'être égale à φ_0 quand le point M coïncide avec M_0. Il est clair qu'on pourrait continuer ainsi en considérant un troisième continuum (C'') qui aurait une partie de frontière commune avec (E_2), etc...

On peut former ainsi, par adjonctions successives, un continuum très compliqué, auquel le point O doit toujours être extérieur, ayant toujours pour frontière un lien fermé simple, ou même un de ces liens fermés à bords distincts que l'on ne peut qualifier de simples que par fiction. L'angle de (D) et de OM se définira comme une fonction continue dans l'ensemble parfait obtenu en adjoignant la frontière au continuum, fonction qui, en un point M_0, se réduira à l'une des valeurs arbitrairement choisie de l'angle dont les côtés sont (D) et OM_0. En particulier, si l'on fait coïncider (D) et OM_0, on pourra définir l'angle (M_0, M) de OM_0 et de OM comme une fonction continue de M dans l'ensemble parfait, fonction qui s'annule quand M coïncide avec M_0.

On verra, à la fin du présent chapitre qu'une telle définition est toujours applicable à l'ensemble parfait (C) + (F) pourvu que le point O n'appartienne pas à cet ensemble, que le continuum (C) soit borné et que sa frontière (F) soit un lien fermé simple, soumis à certaines conditions.

Si l'on suppose les deux points M_0, M reliés par un lien dont tous les points soient intérieurs au continuum, sauf peut-être les extrémités M_0, M qui peuvent appartenir à la frontière, l'angle (M_0, M) tel qu'on vient de le définir, n'est autre chose que l'angle de OM_0 et de OM défini au moyen du lien (n° **292**) : cet angle ne dépend pas du lien, tant que ce lien reste assujetti aux conditions qu'on vient de préciser. L'ordre du point O par rapport à un lien fermé quelconque intérieur au continuum est nul. Si M_0, M_1, M_2 sont trois points appartenant au continuum, on aura

$$(M_0, M_2) = (M_0, M_1) + (M_1, M_2).$$

En effet les deux membres qui sont, dans tout le continuum, des fonctions continues des points M_0, M_1, M_2, ne peuvent différer que d'un multiple de 2π, qui est nul quand M_2 coïncide avec M_1.

303. — Soit (T) un lien et soit δ un nombre positif; je désignerai sous le nom de *voisinage* $V(\delta)$ du lien (T) l'ensemble des points tels que chacun soit intérieur à quelque cercle de rayon δ dont le centre est un point de T.

Cet ensemble est un continuum. Considérons, en effet, un point A satisfaisant à la condition précédente, c'est-à-dire intérieur à un cercle (a) de rayon δ et dont le centre a est situé sur (T) : Tout point appartenant à un cercle de centre A et intérieur au cercle (a) est intérieur à ce dernier cercle ; la condition 1° du n° **298** est vérifiée. Remarquons, en passant, que le point A est à une distance de (T) inférieure à δ. Soit maintenant B un autre point de $V(\delta)$, et soit b le centre, situé sur (T), du cercle de rayon δ auquel B est intérieur : on peut aller de A à B, par le lien formé en allant de A à a en ligne droite, de a à b sur (T), de b à B en ligne droite ; tous les points du lien ainsi formé appartiennent à $V(\delta)$; la condition 2° est vérifiée.

Soit P un point quelconque, δ' sa distance à (T) et p un point de (T) qui soit à une distance de P égale à δ'. Si P est intérieur à $V(\delta)$, on a, d'après une observation antérieure, $\delta' < \delta$. Réciproquement si l'on a $\delta' < \delta$, le point P est intérieur à $V(\delta)$ puisqu'il est intérieur à un cercle décrit de p comme centre avec un rayon compris entre δ' et δ. Si donc P n'appartient pas à $V(\delta)$, on a $\delta' \geq \delta$: si l'on a $\delta' = \delta$, tout point, autre que P_1, du vecteur qui va de P à p appartient à $V(\delta)$; il y a des points de $V(\delta)$ aussi voisins que l'on veut du point P, lequel n'appartient pas à $V(\delta)$: P est alors un point frontière de $V(\delta)$; si l'on a $\delta' > \delta$, il ne peut y avoir, dans un cercle décrit de P comme centre et de rayon moindre que $\delta' - \delta$, de point dont la distance à (T) soit inférieure à δ : P est extérieur à $V(\delta)$.

Suivant que δ' est inférieur, égal, ou supérieur à δ le point P est intérieur à $V(\delta)$, sur la frontière de $V(\delta)$, extérieur à $V(\delta)$.

Il est clair que si l'on a $\delta' > \delta$, l'ensemble $V(\delta')$ contient l'ensemble $V(\delta)$ et sa frontière. Les frontières des continuums $V(\delta)$, $V(\delta')$ n'ont aucun point commun.

Il est à peine inutile de dire qu'on aurait pu définir un continuum jouissant de propriétés analogues à celle du voisinage $V(\delta)$ en considérant des distances réduites au lieu des distances vraies.

304. — Considérons un continuum (C) et sa frontière (F). Soit M ou (x, y) un point qui ne soit pas situé sur la frontière; si on décrit du point M comme centre un cercle dont le rayon soit égal à la distance du point M à la frontière, ce cercle ne convient à son intérieur que des points intérieurs, ou des points extérieurs, au continuum, suivant que M est intérieur, ou extérieur, au continuum : sa circonférence contient au moins un point de la frontière; ces propriétés caractérisent évidemment les cercles dont le rayon est égal à la distance du centre à la frontière du continuum.

Soient M_0 et M_1, ou (x_0, y_0) et (x_1, y_1), deux points intérieurs au continuum : supposons-les reliés par un lien (T), intérieur à (C), défini par les formules

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1;$$
$$x_0 = \varphi(t_0), \; y_0 = \psi(t_0), \quad x_1 = \varphi(t_1), \; y_1 = \psi(t_1) ;$$

soit δ un nombre positif plus petit que la distance du lien (T) à la frontière (F) du continuum : considérons le voisinage $V(\delta)$ du lien (T), il est clair que ce continuum sera contenu dans (C).

On peut relier le point M_0 au point M_1 par une ligne brisée, dont tous les points appartiennent à $V(\delta)$ et, par conséquent à (C). Il suffit d'intercaler entre t_0, t_1 des nombres croissants

t', t'', t''', ... tels que les distances de deux points consécutifs du lien (T) qui correspondent aux nombres t_0, t', t'', ..., t_1 soient moindres que δ. Si l'on décrit de ces points comme centres des cercles de rayon δ, chacun de ces cercles contiendra le centre du cercle suivant; tous les points qui appartiennent à la ligne brisée dont les éléments joignent les centres consécutifs appartiennent évidemment à $V(\delta)$.

On peut, d'ailleurs, s'arranger pour que la ligne brisée qui va du point (x_0, y_0) au point (x_1, y_1) ne se croise pas elle-même : en effet, supposons d'abord que la ligne brisée soit construite comme on l'a expliqué et que l'on donne les numéros $1, 2, \ldots, p, \ldots, q, \ldots, r$ aux vecteurs successifs qui la composent : soit p le numéro du premier vecteur qui croise un vecteur ultérieur, le $q^{\text{ième}}$ par exemple $(q > p+1)$: on limitera le $p^{\text{ième}}$ vecteur au point de croisement, et l'on continuera par un vecteur situé sur le $q^{\text{ième}}$, en prenant le point de croisement pour origine : on aura supprimé, de la ligne brisée, la portion fermée qui ramenait au point de croisement. En continuant de la même façon, on parviendra évidemment, au bout d'un nombre fini de suppressions, à une ligne brisée joignant les deux points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) qui ne se croise pas elle-même.

305. — Le lecteur reconnaîtra sans peine comment est constitué le voisinage d'un segment de droite, d'un cercle, d'un arc de cercle, et quelle en est la frontière. Je me bornerai à quelques indications qu'il complètera aisément sur le voisinage $V(\delta)$ d'une ligne brisée simple, ouverte ou fermée, que je désignerai par (L), en supposant que 2δ soit moindre que la distance de deux côtés non consécutifs de (L). Je supposerai la ligne (L) parcourue dans un sens déterminé, de façon à pouvoir parler de la droite et de la gauche des vecteurs qui la composent et même de ses angles (n° **277**), le premier côté de chaque angle étant décrit en se rapprochant du sommet, le second en s'en éloignant.

La frontière de $V(\delta)$ est composée de vecteurs parallèles aux côtés correspondants de (L) et d'arcs de cercles ayant pour centres respectifs les sommets de (L); elle constitue un ou deux liens simples et fermés, suivant que la ligne (L) est ouverte ou fermée.

Dans le premier cas, si on supprime de la frontière les deux demi-cercles qui correspondent à l'origine et à l'extrémité de (L), il reste deux liens simples ouverts dont on peut dire que l'un est à droite et l'autre à gauche de (L), parce que les éléments qui constituent le premier lien, par exemple, sont à droite des angles correspondants de (L).

Dans le second cas, on peut dire aussi, avec la même signification, que les deux liens fermés qui composent la frontière de V(δ) sont l'un à droite, l'autre à gauche de la ligne polygonale (L) : je les désignerai comme étant la frontière de droite et la frontière de gauche. La ligne (L), qui fait partie de V(δ), décompose ce continuum en deux continuums, dont le premier, qui peut être qualifié de voisinage de droite, a pour frontière la frontière de droite et (L), dont le second, qui peut être qualifié de voisinage de gauche a pour frontière la frontière de gauche et (L). Chacun d'eux est constitué, conformément aux explications données au n° **301** en juxtaposant une suite de trapèzes et de secteurs circulaires dont on supprime les côtés communs. Chaque trapèze a pour côtés parallèles un côté de (L) et le côté correspondant de la frontière de droite ou de gauche. Les secteurs circulaires correspondent aux arcs de cercle des frontières. Deux de ces éléments, trapèzes ou secteurs, n'empiètent jamais l'un sur l'autre.

On reconnaît sans peine que, d'un point quelconque non situé sur (L), on peut mener un vecteur qui n'ait aucun point commun avec (L) et qui aboutisse à un point de la frontière de V(δ).

La ligne (L), suivant qu'elle est ouverte ou fermée, se comporte d'une façon très différente par rapport à l'ensemble des points du plan.

Dans le premier cas, on peut relier deux points quelconques du plan, non situés sur (L), par un lien qui ne contienne aucun point de (L) : il suffira en effet d'aller de chacun de ces points à la frontière de V(δ) sans toucher L ; la frontière elle-même relie les deux points auxquels on aboutit sur elle.

En d'autres termes, l'ensemble des points du plan qui n'appartiennent pas à une ligne brisée simple et ouverte constitue un continuum dont cette ligne brisée est la frontière.

Dans le second cas, où la ligne brisée (L) est fermée, un point quelconque non situé sur (L) peut être relié par un vecteur qui ne contient aucun point de (L), soit à la frontière de droite V(δ), soit à la frontière de gauche. Il est clair que tous les points qui peuvent être reliés ainsi à une même frontière constituent dans leur ensemble un continuum. Les points du plan qui n'appartiennent pas à L constituent donc au plus deux continuums; qu'il y en ait deux distincts, c'est ce qui résulte clairement du n° **295**. L'un de ces continuums contient les points du plan situés à une distance très grande de la ligne fermée : il lui est *extérieur*. En traversant la ligne brisée on entre dans le continuum intérieur.

Quand on se place au point de vue géométrique, on est tenté de regarder comme intuitives les deux propositions dont on vient d'esquisser une démonstration, qu'il serait très aisé de présenter en employant un langage purement numérique. La facilité de cette démonstration tient à la facilité avec laquelle on reconnaît la nature du voisinage V(δ) d'une ligne brisée simple, et de sa frontière, pour δ suffisamment petit. Le lecteur ne peut manquer d'apercevoir l'extension des propriétés précédentes à des liens formés d'arcs de courbe suffisamment simples.

306. — M. Jordan a démontré, d'un façon générale, que tout lien fermé simple (T), partageait de même le plan en deux continuums distincts, l'un extérieur à (T), l'autre intérieur. Je me contenterai de montrer, en adoptant la voie suivie par M. Ames (¹), que cette proposition est vraie quand le lien fermé simple peut être décomposé en un nombre fini de liens partiels dont chacun est défini par des formules telles que

$$y = f(x), \qquad x_0 \leqq x \leqq x_1$$

ou

$$x = \varphi(y), \qquad y_0 \leqq y \leqq y_1,$$

$f(x)$ et $\varphi(y)$ désignant des fonctions continues dans les intervalles considérés.

Considérons un point M appartenant à l'un des liens partiels et qui n'en soit ni l'origine ni l'extrémité; on pourra mener par ce point un vecteur (parallèle à l'un ou l'autre des axes) qui traverse ce lien partiel; il n'aura pas, avec celui-ci, d'autre point commun que le point M; s'il est assez petit, plus petit par exemple que la

(¹) Voir la note du n° **295**.

distance du point M aux autres liens partiels, il n'aura aucun point commun avec ces liens partiels; il n'aura pas d'autre point commun avec le lien fermé (T) que le point M. Ce lien (T) jouit donc (n° **296**) de la propriété suivante : aux environs de chaque point du lien fermé, il y a des points dont les ordres, relatifs à ce lien, diffèrent d'une unité. Comme tous les points qu'on peut relier à un point fixe sans rencontrer le lien fermé constituent un continuum, on voit que ce lien sépare le plan en deux continuums, au moins.

Soit (C) un continuum. Considérons le lien (X), défini par les formules

$$y = f(x), \qquad x_0 \leqq x \leqq x_1;$$

je désignerai par K_0 et K_1 l'origine et l'extrémité de ce lien; les abscisses des points K_0 et K_1 sont respectivement x_0 et x_1. Je suppose que ce lien appartienne tout entier au continuum (C), sauf peut-être les points K_0, K_1 qui peuvent appartenir à la frontière de (C). On va montrer que l'ensemble (C') des points qui appartiennent à (C) sans appartenir à (X) constitue au plus deux continuums et que (C') constitue un seul continuum lorsque K_0 et K_1 ne sont pas tous les deux sur la frontière de (C).

L'ensemble (C') satisfait évidemment à la première des conditions du n° **298**, imposées à tout continuum :

Je dirai d'un point A de (C') qu'il est au-dessus ou au-dessous de (X) s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

1° Son abscisse a appartient à l'intervalle (x_0, x_1) : elle est toutefois différente de x_0 si K_0 appartient à la frontière de C, de x_1 si K_1 appartient à cette frontière.

2° Tous les points du vecteur dont l'origine est le point $[a, f(a)]$ et dont l'extrémité est A appartiennent à (C).

Dans ces conditions, A est au-dessus ou au-dessous de (X) suivant que son ordonnée est plus grande ou plus petite que $f(a)$.

Lorsque tous les points de (X) appartiennent à (C), il y a des points au-dessus et au-dessous de (X), dont l'abscisse est n'importe quel nombre appartenant à l'intervalle (x_0, x_1).

Deux points A, A' de (C) situés tous deux au-dessus de (X), ou tous deux au-dessous, peuvent être reliés par un lien intérieur à (C) et ne rencontrant pas (X).

Soient en effet a et a' ($a' > a$) les abscisses des points A, A′ que je supposerai au-dessus de (X). Soient A_1, A'_1 les points de (X) dont les abscisses sont a et a'. Choissons le nombre positif α plus petit que la distance à la frontière de (C) du lien défini par les formules

$$y = f(x), \qquad a \leqq x \leqq a',$$

lien qui, par hypothèse, appartient tout entier à (C), et dont l'origine et l'extrémité sont les points A_1, A'_1. On est certain qu'aucun point du lien (L) défini par les formules

$$y = f(x) + \alpha, \qquad a \leqq x \leqq a'$$

n'appartient à la frontière de (C) : d'ailleurs le lien (L) n'a évidemment aucun point commun avec (X) ; soient A_2 et A'_2 son origine et son extrémité. D'après la façon dont on a choisi α, il ne peut y avoir aucun point de la frontière sur le vecteur A_1A_2, non plus que sur le vecteur $A'_1A'_2$; ces vecteurs sont intérieurs à (C) ; il en est de même par hypothèse, des vecteurs A_1A, A'_1A' et, par conséquent, des vecteurs A_2A, A'_2A' : on peut aller, sans atteindre la frontière, de A à A_2 par le vecteur AA_2, de A_2 à A'_2 par le lien (L), de A'_2 à A′ par le vecteur A'_2A' ; on est parti d'un point de (C), on est resté dans (C). D'ailleurs le chemin décrit n'a manifestement aucun point commun à (X).

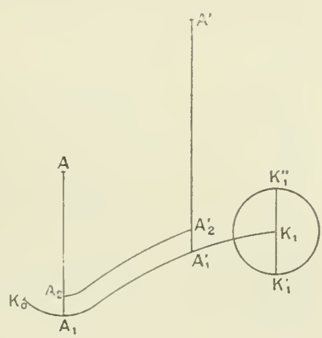

Fig. 11.

Examinons le cas où l'extrémité K_1 de (X) n'est pas sur la frontière de (C). Si de ce point K_1 comme centre, avec un rayon inférieur à la distance de K_1 à cette frontière, on décrit un cercle, tous les points qui appartiennent à ce cercle appartiendront évidemment à (C) ; la parallèle à l'axe des y menée par son centre partage le cercle en deux demi-cercles et le rencontre en deux points K'_1, K''_1 situés, l'un au-dessous de (X), l'autre au-dessus ; le premier K'_1 peut être relié, par un lien intérieur à (C) et n'atteignant pas (X), à n'importe quel point de (C) situé au-dessous de (X) : de même K_1'' à tout point situé au-dessus. Le demi-cercle situé à droite du diamètre $K_1' K_1''$ relie d'ailleurs K_1' à K_1''. Donc, dans ce cas, deux points de (C), situés l'un au-dessus de (X), l'autre au-dessous, peuvent être reliés par un lien intérieur à (C) et n'atteignant pas (X). Il est clair aussi que tout point (autre que K_1) situé à l'intérieur du demi-cercle de droite, sur ce demi-cercle, ou son diamètre, peut être relié de même aux points de (C) situés au-dessus ou au-dessous de (X). Des conclusions toutes pareilles concerneraient le cas où K_0 n'appartiendrait pas à la frontière de (C).

Reprenons le cas général. (X) est intérieur à (C), sauf peut-être les points extrêmes K_0, K_1 qui peuvent être sur la frontière.

Soient A, B deux points fixes, arbitrairement choisis dans (C), l'un au-dessus de (X), l'autre au-dessous. Soit P un point quelconque de (C), non situé sur (X) : je dis qu'il peut être relié à l'un des points A, B par un lien intérieur à (C), qui n'atteigne pas (X).

Puisque P et A appartiennent au continuum (C), il y a un lien (T), intérieur à (C), défini par des formules telles que

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1,$$

qui relie P à A : je suppose que le point P est l'origine du lien et correspond ainsi à la valeur t_0 du paramètre.

Si (T) n'a pas de point commun avec (X), la proposition est vérifiée. Supposons que (T) atteigne (X) ; il peut l'atteindre une infinité de fois, mais un raisonnement qui a été souvent employé, prouve l'existence d'un nombre m appartenant à l'intervalle (t_0, t_1), qui est la plus petite valeur de t pour laquelle on obtienne un point M de (T) qui soit sur (X). Le lien partiel (T') défini par les formules

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq m$$

est intérieur à (C) et n'a pas d'autre point sur (X) que son extrémité M. L'abscisse μ de M appartient à l'intervalle (x_0, x_1) ; d'ailleurs, puisque M appartient à (C), μ ne peut être égal à x_0 que si K_0 n'est pas sur la frontière de (C), μ ne peut être égal à x_1 que si K_1 n'est pas sur la même frontière.

Supposons d'abord $x_0 < \mu < x_1$. Décrivons un cercle du point M comme centre, avec un rayon inférieur à $x_1 - \mu$, à $\mu - x_0$ et à la distance de M à la frontière de C : tous les points intérieurs à ce cercle et non situés sur X sont au-dessus, ou au-dessous, de X ; il en est ainsi pour n'importe quel point M′ de T′, autre que M, et situé à l'intérieur du cercle ; on peut aller de P à M′ puis de M à A ou à B, suivant que M′ est au-dessus ou au-dessous de X, par un lien intérieur à C et n'atteignant pas X.

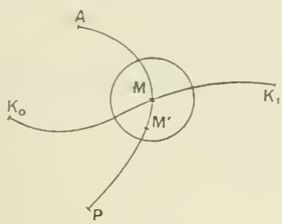

Fig. 12.

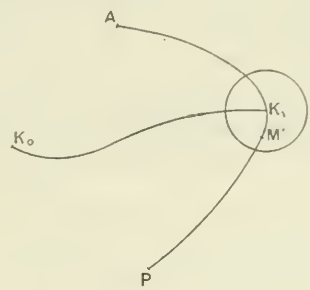

Fig. 13.

Supposons que l'on ait $\mu = x_1$; le raisonnement serait le même si l'on avait $\mu = x_0$. Le point M coïncide avec K_1 ; je rappelle qu'il n'est pas sur la frontière ; on prendra alors le point M′ du lien T arbitrairement dans le cercle décrit de K_1 comme centre avec un rayon moindre que $x_1 - x_0$ et que la distance de K_1 à la frontière de C ; ce cercle est divisé en deux par la droite $x = x_1$. Si M′ est dans le demi-cercle de gauche, il sera forcément au-dessus de X ou au-dessous et le raisonnement précédent s'appliquera. Si M′ est sur le demi-cercle de droite ou sur le diamètre $x = x_1$, on pourra le rejoindre tant au point A qu'au point B, sans sortir de C et sans rencontrer X.

En résumé, l'ensemble des points P intérieurs à C et non situés sur X constitue au plus deux continuums dont l'un est l'ensemble du point A et de tous les points de C qui peuvent être reliés à A sans sortir de C et sans atteindre X, dont l'autre est l'ensemble du point B et de tous les points de C qui peuvent être reliés à B sans sortir de C et sans atteindre X. Ces deux ensembles peuvent ne pas être distincts et ne former qu'un continuum : il en sera ainsi quand l'un des points K_0, K_1 n'est pas sur la frontière de C.

Il en est encore ainsi toutes les fois que les deux ensembles ont un point commun. Lorsqu'on dira qu'en supprimant de (C) les points de (X) qui appartiennent à (C) il reste deux continuums, il faudra entendre que ces deux continuums sont distincts, qu'ils n'ont pas de point commun; en d'autres termes qu'ils sont extérieurs l'un à l'autre.

La frontière du continuum (C'), ou les frontières des deux continuums dans lesquels se décompose (C'), sont évidemment formées par les points de (X) et les points de la frontière de (C). Dans le second cas, (X) est une frontière commune, puisque les points situés au-dessus de (X) appartiennent à l'un des continuums et que les points situés au-dessous appartiennent à l'autre.

Il est manifeste que les conclusions seraient les mêmes si le lien (X), au lieu d'être défini par les formules

$$y = f(x), \qquad x_0 \leqq x \leqq x_1$$

était défini par des formules telles que

$$x = f(y), \qquad y_0 \leqq y \leqq y_1.$$

J'aurai souvent à parler de liens définis par des formules telles que les précédentes, d'une sorte ou de l'autre: je les désignerai sous le nom de *liens élémentaires du type* $\mathcal{A}$ et je désignerai sous le nom de lien du type $\mathcal{A}$ un lien simple, ouvert ou fermé, qui puisse se décomposer en une suite limitée de liens élémentaires du type $\mathcal{A}$. L'extrémité de chacun de ces liens élémentaires coïncide avec l'origine du lien élémentaire suivant; si le lien est fermé, l'extrémité du dernier lien élémentaire coïncide avec l'origine du premier lien élémentaire; deux des liens élémentaires n'ont pas de points communs, en dehors de ceux qu'on vient de spécifier; cela résulte de ce que, par hypothèse, le lien total, ouvert ou fermé, est simple.

Un point *ordinaire* d'un lien du type $\mathcal{A}$ est un point qui n'est ni l'origine ni l'extrémité d'un des liens élementaires qui le composent, en sorte qu'on puisse sûrement mener par ce point un vecteur, parallèle à l'un des axes, que le lien traverse (n° **296**). Pour qu'un lien défini par les formules

$$x = g(t),\ y = h(t), \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta,$$

soit composé d'un nombre fini de liens élémentaires du type A, il faut et il suffit que l'intervalle (α, β) puisse être décomposé en un nombre fini d'intervalles partiels tels que dans chacun l'une au moins des fonctions $g(t)$, $h(t)$ soit ou croissante ou décroissante.

La condition est suffisante ; si, en effet, dans l'intervalle (α', β') la fonction $g(t)$, par exemple, est croissante, l'équation $x = g(t)$ définira t comme une fonction continue et croissante de x dans l'intervalle $[g(\alpha'), g(\beta')]$ et la formule $y = h(t)$ achèvera de définir y comme une fonction continue de x dans le même intervalle.

En se reportant aux nos **168** et **169** le lecteur reconnaîtra sans peine que la condition est nécessaire.

307. — Considérons un lien du type $\mathcal{A}$ et soient (X_1), (X_2), …, (X_n) la suite des liens élémentaires du type A qui le composent. Je supposerai d'abord que le lien soit ouvert.

Le plan constitue un continuum sans frontière. Quand on en supprime les points de (X_1), il reste un continuum (C_1), dont la frontière est (X_1). Si, de ce nouveau continuum, on supprime les points de (X_2) dont l'origine, mais non l'extrémité, appartient à la frontière de (C_1), on aura un nouveau continuum (C_2), dont la frontière sera l'ensemble des points qui appartiennent à (X_1) et à (X_2) ; en supprimant ensuite, successivement, les points de (X_3), …, de (X_n), on parviendra à un continuum (C_n), dont la frontière sera le lien considéré. Tout point du plan qui n'est pas sur ce lien appartient au continuum.

Supposons maintenant que le lien soit fermé : c'est alors, puisqu'il est simple, que l'extrémité de (X_n) coïncide avec l'origine de (X_1). En supprimant du continuum (C_{n-1}), dont la frontière est formée des points de (X_1), (X_2), … (X_{n-1}), les points de (X_n), dont l'origine et l'extrémité appartiennent à la frontière de (C_{n-1}), on peut former au plus deux continuums. On en forme effectivement deux : considérons en effet un vecteur AB qui soit traversé par le lien en un point M et qui soit assez petit pour n'avoir aucun autre point commun avec le lien fermé que le point M ; supposons que ce lien soit parcouru dans un certain sens ; les points A et B, dont les ordres par rapport au lien fermé diffèrent d'une unité, ne peuvent appartenir au même continuum. L'un des continuums s'étend à l'infini ; l'ordre des points à l'infini étant nul, il en est de même de l'ordre d'un point quelconque du continuum ; ce continuum est dit *extérieur* au lien fermé : l'autre continuum sera dit *intérieur*.

En disant d'un point, d'un ensemble de points, qu'ils sont intérieurs au lien fermé, on entend que ce point, que tous les points de cet ensemble, appartiennent au continuum intérieur au lien ; de même, si tous les points d'un ensemble appartiennent au continuum extérieur au lien, on dira que cet ensemble est extérieur au lien.

Supposons que le point A soit intérieur et que le point B soit extérieur au lien : l'ordre du point B sera nul ; l'ordre de A est $+ 1$ ou $- 1$ suivant que le vecteur AB est traversé de droite à gauche ou de gauche à droite. Tous les points intérieurs ont le même ordre : par conséquent, tous les vecteurs analogues à AB, qui vont d'un point intérieur à un point extérieur et qui sont traversés par le lien sans avoir plus d'un point commun avec lui sont traversés de la même façon, de droite à gauche, par exemple, si l'ordre des points intérieurs est $+ 1$: on dit dans ce cas que le lien est parcouru dans le sens direct : il serait parcouru dans le sens indirect si l'ordre des points intérieurs était $- 1$, si tous les vecteurs analogues à AB étaient traversés de gauche à droite.

Rappelons enfin qu'on ne peut passer par un lien continu d'un point du continuum intérieur à un point du continuum extérieur sans rencontrer leur frontière commune (n° **291**).

308. — Reprenons la démonstration du théorème fondamental en partant, non plus du plan, mais d'un continuum (C), dont je désignerai la frontière par (F).

Dans le présent numéro (F') désignera un lien simple, ouvert ou fermé, du type $\mathcal{L}$, dont aucun point ne sera extérieur à (C), qui pourra être tout entier intérieur à (C), qui pourra avoir un point et un seul situé sur (F), ou même comprendre un lien partiel dont tous les points appartiennent à (F), tous les autres points étant intérieurs à (C). On exclut la supposition où (F') aurait deux points distincts A, B situés sur (F) et tels qu'on ne puisse pas aller de l'un à l'autre par un lien qui fasse partie à la fois de (F') et de (F). On exclut aussi la supposition où tous les points de (F') appartiendraient à (F) : ainsi, il doit y avoir quelque lien élémentaire du type $\mathcal{A}$ qui fait partie de (F') et qui est intérieur à (C) : on peut donc mener un petit vecteur intérieur à (C) qui soit traversé par (F').

Ceci posé, la même démonstration que dans le cas du plan montre que l'ensemble des points de (C) qui restent après la suppression des points de (F') qui appartiennent à (C) (et non à sa frontière) constitue un ou deux continuums.

Quand le lien (F') est ouvert, il reste un seul continuum dont la frontière se compose évidemment des points de (F) et de (F'). Si, par exemple (C) est le voisinage V(δ) du lien ouvert (F'), il ne reste qu'un continuum quand on supprime de V(δ) les points de (F') : on peut donc relier par une ligne brisée qui n'atteint pas (F') et dont tous les points sont à une distance de (F') moindre que δ deux points quelconques non situés sur (F') et à une distance de (F') moindre que δ.

Supposons maintenant, en revenant au cas d'un continuum quelconque (C), que (F') soit fermé. Il suffit de considérer un petit vecteur AB, intérieur à (C), traversé en M par (F') et n'ayant pas d'autre point commun avec (F') que M, pour reconnaître que les deux points A, B dont le premier est extérieur et le second intérieur à (F'), ne peuvent appartenir à un même continuum, quand on a supprimé de (C) les points de (F') qui appartiennent à (C). Après cette supression, il reste deux continuums dont l'un (C_1) est l'ensemble des points [tous extérieurs à (F')] que l'on peut relier à A par un lien intérieur à (C) qui n'atteint pas (F'), dont l'autre (C'_1) est l'ensemble des points [tous intérieurs à (F')] que l'on peut relier à B de la même façon. (C_1) est l'ensemble des points de (C) qui sont extérieurs à (F'). (C'_1) est l'ensemble des points de (C) qui sont intérieurs à (F'). Tout point de (F') intérieur à (C) est un point de la frontière de (C_1) et de la frontière de (C'_1) ; cela est clair s'il s'agit d'un point ordinaire de (F') et, puisqu'une frontière est un ensemble clos, cela reste vrai pour les points, en nombre fini, où se raccordent deux liens élémentaires, puisque ces points peuvent être regardés comme des points d'accumulation de l'ensemble des points ordinaires. Les points de (F) sont des points frontières, soit pour (C_1), soit pour (C'_1). Inversement, tout point frontière de (C_1), ou de (C'_1), appartient soit à (F), soit à (F').

Si, par exemple, (C) est le voisinage $V(\delta)$ du lien fermé (F'), et si l'on supprime de ce voisinage les points de (F'), il restera deux continuums, dont l'un sera intérieur à (F') et l'autre extérieur.

Revenons au cas général. Le lien fermé (F'), qui sépare (C) en deux continuums (C_1) et (C_1'), sépare aussi le plan en deux continuums dont l'un (C') est l'ensemble des points du plan qui sont intérieurs à (F'); le continuum (C') contient donc (C_1'); pour qu'il lui soit identique, il faut et il suffit qu'aucun point de (F) ne soit intérieur à (F'); cette condition, évidemment nécessaire, est suffisante. Si, en effet, on la suppose vérifiée, (C') est contenu dans (C) ou est extérieur à (C) (nº **300**); or la seconde supposition est inadmissible puisqu'il y a des points de (C) intérieurs à (C'); un point de (C') appartenant à (C) et étant intérieur à (F') appartient nécessairement à (C_1') : les deux continuums (C_1') et (C') sont identiques. Dans ce cas, la frontière de (C_1') est évidemment (F'), la frontière de (C_1) se compose de (F) et de (F'), lorsque (F) et (F') n'ont pas de point commun ou ont un point commun et un seul.

Au lieu du lien (F') assujetti aux conditions énumérées plus haut, considérons un lien fermé (Φ), du type $\mathcal{A}$, dont un point soit intérieur à (C) et qui ne contienne à son intérieur aucun point de (F). On reconnaîtra sans peine, comme tout à l'heure, que l'ensemble des points de (C) qui sont intérieurs à (Φ) est identique au continuum intérieur à (Φ), c'est-à-dire à l'ensemble des points du plan qui sont intérieurs à (Φ). Les points de (Φ) sont ou des points de (C), ou des points de (F).

Reprenons le continuum (C) : considérons maintenant n liens fermés (F'), (F''), ..., $[F^{(n)}]$, du type $\mathcal{A}$, tous intérieurs à (C) et, par conséquent, sans point commun à la frontière (F) de (C); supposons en outre que les n liens (F'), (F''), ..., $[F^{(n)}]$ soient extérieurs deux à deux les uns aux autres. Dans ces conditions, l'ensemble des points intérieurs à (C) et extérieurs à (F'), (F''), ..., $[F^{(n)}]$ constitue un continuum (C_n), comme on le voit en procédant de proche en proche : l'ensemble des points intérieurs à (C) et extérieurs à (F') constitue un continuum (C_1) : l'ensemble des points intérieurs à (C_1) et extérieurs à (F'') constitue un continuum (C_2) que l'on peut tout aussi bien définir comme l'ensemble des points intérieurs à (C) et extérieurs à la fois à (F') et à (F''); etc....

Si aucun point de (F) n'est intérieur à (F'), (F''), ..., [F$^{(n)}$], on peut dire que ces n derniers liens décomposent (C) en $n+1$ continuums : à savoir, les n continuums (C'), (C''), ..., [C$^{(n)}$] respectivement intérieurs à (F'), (F''), ..., [F$^{(n)}$] et le continuum (C_n) : la frontière de ce dernier continuum se compose de la frontière (F) de (C) et des liens (F'), (F''), ..., [F$^{(n)}$]. Tout point de (C) qui n'appartient à aucun des liens (F'), (F''), ..., [F$^{(n)}$] appartient à l'un des $n+1$ continuums et à un seul. Deux points de (C_n) peuvent être reliés par un lien (une ligne brisée, si l'on veut) qui soit tout entier intérieur à (C_n) ; cela revient à dire que deux points quelconques du continuum (C), extérieurs aux liens fermés (F'), (F''), ..., [F$^{(n)}$] peuvent être reliés par un lien intérieur à (C) et n'ayant aucun point commun avec les liens (F'), (F''), ..., [F$^{(n)}$]. Il nous sera commode, un peu plus tard, d'avoir fait cette remarque évidente.

309. — Soient (F) et (F') deux liens fermés du type $\mathcal{A}$ qui n'ont aucun point commun, ou qui n'ont qu'un point commun, ou encore qui ont un lien partiel commun, mais sans aucun point commun en dehors de ce lien partiel ; soient (C) et (Γ) les continuums intérieur et extérieur à (F) ; soient (C') et (Γ') les continuums intérieur et extérieur à (F').

Remarquons d'abord que, en vertu des suppositions, chacun des liens (F), (F'), en faisant abstraction des points communs, s'il y en a, est tout entier dans le continuum intérieur ou tout entier dans le continuum extérieur à l'autre. Plaçons-nous, en effet, dans le cas où (F), (F') ont un lien partiel commun. La partie du lien (F'), par exemple, autre que ce lien partiel commun, ne peut pas contenir à la fois un point intérieur à (F) et un point extérieur à (F) sans contenir un point de (F), contrairement à l'hypothèse.

Les points de (F'), non situés sur (F), sont donc tous intérieurs à (F), ou tous extérieurs à (F) [1]. Dès lors, les propositions établies au n° **308** s'appliquent immédiatement.

I. Plaçons nous d'abord dans le cas où les points de (F') non situés sur (F) sont tous intérieurs à (F). Il est aisé de voir que les

[1] Si tous les points de (F') appartenaient à (F), les deux liens (F'), (F) coïncideraient, ainsi que les continuums (C) et (C'), (Γ) et (Γ').

continuums (Γ) et (C') sont extérieurs l'un à l'autre et sont respectivement intérieurs à (Γ') et à (C).

En effet, puisque (Γ) ne contient aucun point de (F'), frontière de (C') comme de (Γ'), (Γ) est extérieur à (C') ou contenu dans (C'); il est extérieur à (Γ') ou contenu dans (Γ'). Or, (Γ) ne peut être contenu dans (C') dont tous les points sont à distance finie; il ne peut être extérieur à (Γ'), puisque (Γ) et (Γ') ont des points communs, à savoir les points très éloignés : (Γ) est donc extérieur à (C') et intérieur à (Γ') : au surplus, ces deux affirmations sont équivalentes. (C') étant extérieur à (Γ) est forcément contenu dans (C).

Par des considérations analogues, et sans aucune peine, le lecteur établira les conclusions relatives au second cas, que je me contente d'énoncer.

II. Lorsque les points de (F') non situés sur (F) sont tous extérieurs à (F), deux sous-cas sont possibles.

1° (Γ') et (C) sont extérieurs l'un à l'autre et sont respectivement intérieurs à (Γ) et à (C'). Ce cas n'est pas réellement distinct du cas I : seulement le rôle des lettres accentuées et des lettres non accentuées est interverti.

2° (Γ) contient (C'), (Γ') contient (C) : (C) et (C') sont extérieurs l'un à l'autre.

Que les deux cas puissent se présenter effectivement, il suffit pour s'en assurer de penser au cas où (F) et (F') sont deux cercles.

Remarquons encore que si l'on supprime du plan les points de (F) et de (F'), il reste trois continuums.

Dans le cas I, ces trois continuums sont : le continuum (C'), de frontière (F') ; le continuum (Γ), de frontière (F) ; un continuum intérieur à (C) est extérieur à (C'), qui n'est autre que le continuum (C_1) ensemble des points de (C) qui sont extérieurs à (F') : sa frontière, lorsque (F') est tout entier intérieur à (C), se compose des liens (F), (F'). Les circonstances sont analogues quand on se place dans le sous-cas 1° du cas II. Enfin dans le sous-cas 2° du même cas II, les trois continuums sont le continuum (C), le continuum (C') et le continuum ensemble des points extérieurs à la fois à (F) et à (F'), dont ces deux liens constituent la frontière.

310. — Je vais maintenant étudier la figure formée par le lien fermé (F), du type $\mathcal{A}$, et par un lien simple (T) du type $\mathcal{A}$, qui joint[1] deux points K_0, K_1 de (F) et n'a aucun point commun avec (F) en dehors des points K_0 et K_1. Je désignerai par (T') l'ensemble des points du lien (T) autres que K_0 et K_1 ; (T') est tout entier intérieur soit au continuum (C) intérieur à (F), soit au continuum (Γ) extérieur à (F).

Les deux points K_0, K_1 partagent (F) en deux liens partiels que je désignerai par (Φ') et (Φ''). (Φ') et (T) d'une part, (Φ'') et (T) d'autre part, forment des liens fermés du type $\mathcal{A}$ que je désignerai par (F') et (F''). Soient enfin (C') et (C'') les continuums intérieurs à ces liens, (Γ') et (Γ'') les continuums extérieurs. Plaçons-nous d'abord dans le cas où (T') est tout entier intérieur à (C). D'après ce que l'on a dit au n° **309**, les continuums (C') et (C'') sont intérieurs à (F) ; aucun de ces continuums ne contient de point appartenant à la frontière de l'autre ; il faut donc qu'ils soient extérieurs l'un à l'autre ou qu'ils soient identiques (n° **300**) : cette dernière alternative doit être rejetée puisque les deux continuums n'ont pas la

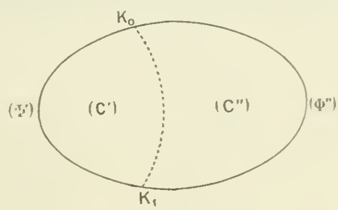

Fig. 14.

même frontière. D'autre part, quand on supprime de (C) les points de (F') qui appartiennent à (C), c'est-à-dire les points de (T'), il reste deux continuums dont l'un est (C') ; en regardant (T) comme appartenant à (F''), on voit qu'en supprimant (T)

[1] Si l'on considère un point K de la frontière d'un continuum, il n'est pas évident qu'on puisse le relier à un point quelconque du continuum par un lien intérieur au continuum, sauf son origine K : cela, toutefois, résulte immédiatement de la définition d'un continuum, si le point K peut être regardé comme l'origine d'un petit vecteur appartenant au continuum, sauf le point K lui-même. Si, en particulier, la frontière comporte un lien élémentaire du type $\mathcal{A}$, tel que les vecteurs suffisamment petits et parallèles à l'axe des y, par exemple, qui sont traversés par ce lien sont ainsi divisés en deux parties dont l'une est intérieure au continuum, tous les points du lien élémentaire, sauf peut-être son origine et son extrémité jouiront de la propriété considérée. Tout les points ordinaires d'un lien fermé F du type $\mathcal{A}$ jouissent de cette propriété. Deux de ces points peuvent être reliés par une ligne brisée qui soit, sauf son origine et son extrémité, tout entière intérieure à F ou tout entière extérieure.

de (C). il doit rester deux continuums dont l'un est (C″) : Puisque les deux continuums (C′) et (C″) sont distincts, il faut bien que les deux continuums qui subsistent lorsqu'on supprime (T′) du continuum (C) soient précisément (C′) et (C″).

Un point du plan qui n'appartient ni à (F) ni à (T) peut n'appartenir à aucun des trois continuums (C), (C′), (C″) ; il appartient alors au continuum (Γ) extérieur à (F) : s'il appartient à l'un des trois continuums, il appartient à deux et à deux seulement.

En pensant à un petit vecteur traversé soit par (Φ′), soit par (Φ″), soit par (T′), on reconnaît immédiatement la vérité de la proposition suivante :

Un mobile qui décrit successivement les liens fermés (F′), (F″) dans le sens direct, se trouve avoir décrit le lien (F) dans le sens direct et, en plus, le lien ouvert (T) deux fois, une fois dans un sens. une fois dans le sens opposé.

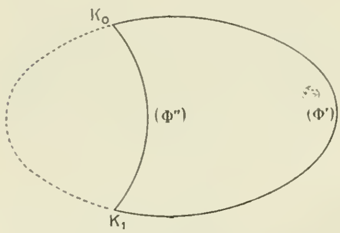

Fig. 15.

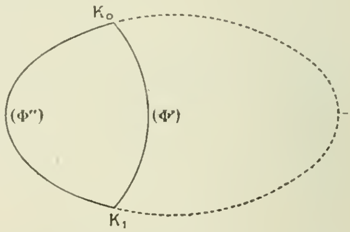

Fig. 16.

Supposons maintenant que (T′) soit extérieur à (C) : puisque (C) ne contient aucun point de (F″), (C) est intérieur à (C′) ou extérieur à (C′). Les deux cas peuvent d'ailleurs se présenter.

Les frontières des deux continuums (C) et (C′) ont en commun le lien (Φ′) : si le premier continuum est intérieur au second, le reste (Φ″) de sa frontière est aussi intérieur à (C′), sauf les points K_0 et K_1, en sorte qu'on est ramené au cas que l'on vient d'examiner, si ce n'est que (F′) remplace (F) et que (Φ″) remplace (T) : le lien (Φ″) partage (C′) en deux continuums (C) et (C″).

Si (C) est extérieur à (C′), on est dans le cas, examiné au n° **301**, de deux continuums, extérieurs l'un à l'autre, qui ont une portion de frontière commune et dont la réunion (par la suppression de la frontière commune), constitue le continuum (C″) ; sauf la différence des notations, c'est encore la figure examinée en premier lieu.

Au surplus, ces divers résultats se tirent sans peine de la proposition du n° **297** : les trois liens fermés (F), (F'), (F'') sont constitués en prenant deux des liens (Φ'), (Φ''), (T) qui joignent K_0 et K_1 : on peut toujours s'arranger, en choisissant convenablement les sens de parcours, pour que la somme des ordres d'un point quelconque par rapport à (F), (F'), (F'') soit nulle : on en conclut qu'un point doit être extérieur aux trois liens ou à un seul de ces trois liens, etc.

311. — On a souvent à considérer des liens composés de liens élémentaires du type $\mathcal{A}$ et formés d'un lien simple ouvert AB et d'un lien fermé simple passant par le point B et auquel le lien AB est extérieur, sauf le point B. Je désignerai un tel lien sous le nom de *lacet*, le lien simple AB étant la *tige* et la courbe fermée la *boucle* du lacet. Sauf dans le cas où la tige n'existe pas, parce que les points A et B sont confondus, un lacet n'est pas un lien du type $\mathcal{A}$ puisque ce n'est pas un lien simple. Décrire le lacet, c'est

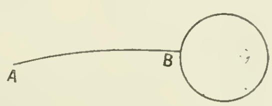

Fig. 17.

décrire d'abord la tige AB, en allant de l'origine A vers l'extrémité B, puis la boucle, puis la tige de B vers A. Suivant qu'on a décrit la boucle dans le sens direct ou dans le sens indirect, on dira qu'on a décrit le lacet dans le sens direct ou dans le sens indirect.

Un point qui n'appartient pas au lacet lui est intérieur ou extérieur suivant qu'il est intérieur ou extérieur à la boucle.

Si on considère un continuum (C) et un lacet dont tous les points appartiennent au continuum, sauf peut-être l'origine qui peut appartenir à la frontière, et qu'on supprime de (C) tous les points du lacet (sauf l'origine lorsqu'elle appartient à la frontière), il restera deux continuums. En effet, quand on supprime la tige (sauf peut-être l'origine), il reste un continuum (C') ; on est alors ramené au cas où l'on supprime d'un continuum les points d'un lien fermé simple (la boucle) qui a un point commun (l'extrémité de la tige) avec la frontière. L'un des deux continuums est intérieur à la boucle, et l'autre extérieur. Le premier se confond avec l'ensemble des points du plan intérieurs à la boucle si celle-ci ne contient à son intérieur aucun point de la frontière de (C).

312. — Considérons un lien fermé (F), du type $\mathcal{A}$, le continuum (C) intérieur à ce lien fermé et, comme à la fin du n° **308**, n liens fermés (F'), (F''),..., [$F^{(n)}$], du type $\mathcal{A}$, tous intérieurs à (F) et dont chacun est extérieur aux autres; Le continuum (C_n), ensemble des points de (C) qui sont extérieurs à (F'), (F''),... [$F^{(n)}$], a pour frontière les liens (F), (F'), (F''),..., [$F^{(n)}$]; pour abréger, je désignerai cette frontière par (H). Un mobile qui parcourt (F) dans le sens direct et (F'), (F''),..., [$F^{(n)}$], dans le sens indirect traverse de droite à gauche les vecteurs qui vont de l'intérieur de (C_n) à l'extérieur et cela sur quelque partie de la frontière que se trouve le mobile; pour cette raison, il convient de dire que le mobile considéré parcourt la frontière (H) dans le sens direct.

Je désignerai sous le nom d'ordre d'un point non situé sur (H), par rapport à (H), la somme des ordres de ce point par rapport aux liens (F), (F'),... [$F^{(n)}$] parcourus dans le sens qu'on vient de dire. Il est clair que l'ordre, par rapport à (H), d'un point extérieur à (C) et, par conséquent aux $n+1$ liens (F), (F'),..., [$F^{(n)}$] est nul, puisque l'ordre de ce point par rapport à chacun de ces liens est nul; l'ordre par rapport à (H) d'un point intérieur à (F') est encore nul, car il est la somme de l'ordre par rapport à (F) qui est égal à $+1$, de l'ordre par rapport à (F') qui est égal à -1, des ordres par rapport à (F''), (F'''),..., [$F^{(n)}$] qui sont tous nuls; on voit de même que l'ordre par rapport à (H) d'un point intérieur à (C_n) est égal à 1. On voit donc qu'en prenant les ordres par rapport à (H), les choses se passent comme pour un lien fermé du type $\mathcal{A}$: les points extérieurs à (C_n) ont un ordre nul, qu'ils soient d'ailleurs extérieurs à (F) ou intérieurs à l'un des liens (F'), (F''),..., [$F^{(n)}$]; les points intérieurs à (C_n) ont un ordre égal à 1.

Je veux maintenant montrer qu'on peut décomposer le continuum (C_n) en deux continuums, dont chacun est le continuum intérieur à un lien fermé du type $\mathcal{A}$, et cela au moyen de $n+1$ liens du type $\mathcal{A}$, dont chacun, isolé des autres, est tout entier intérieur à (C_n), sauf son origine et son extrémité [1], le premier

[1] La figure est faite en supposant $n = 2$.

$\alpha\alpha'$ ira d'un point α de (F) à un point α' de (F'), le second $\beta'\alpha''$ d'un point β' de (F') à un point α'' de (F''),..., le dernier $\beta^{(n)}\beta$ d'un point $\beta^{(n)}$ de $F^{(n)}$ à un point β de (F). Les points α, α', β',..., β peuvent être pris arbitrairement sur les liens auxquels ils doivent appartenir, pourvu que ce soient des points ordinaires et que les deux points qui appartiennent à un même lien soient distincts.

Chacun des liens fermés (F), (F'), (F''),... est ainsi décomposé en deux liens partiels par le couple de points situés sur lui. Afin de distinguer ces deux liens partiels, imaginons que chaque lien fermé soit parcouru comme on l'a expliqué plus haut, en sorte que (H) soit parcouru dans le sens direct; soient (Φ) et (Φ_1) les deux parties de (F) que le mobile parcourt, la première de α à β, la seconde de β à α; soient de même (Φ') et (Φ'_1) les deux parties

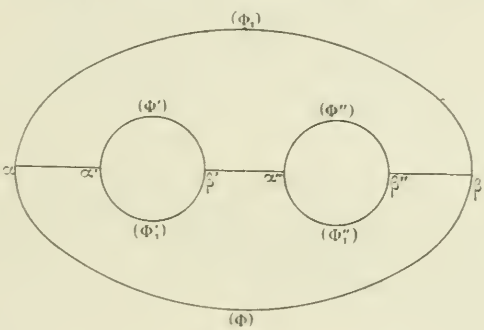

Fig. 18.

de (F') que le mobile parcourt, la première de α' à β', la seconde de β' à α'; etc.

J'arrive à la démonstration qui montrera comment on satisfait aux diverses conditions imposées, une fois qu'on a choisi les points α, α',..., β comme on l'a expliqué.

Partons du continuum (C). Il résulte d'abord des conditions imposées aux points α, α', β', ..., β et de la remarque faite à la fin du n° 309 que l'on peut mener un lien de α à α' qui soit tout entier, sauf son origine α, intérieur à (C), qui n'ait pas de point commun avec (F'), sauf α', qui, enfin, n'ait aucun point commun avec (F''), (F'''), ..., $[F^{(n)}]$; le lien $\alpha\alpha'$ peut être regardé comme la tige d'un lacet (L') dont la boucle serait (F'); l'ensemble des points de (C) qui sont extérieurs à (L') constitue un continuum

(G') dont la frontière est formée de (F) et de L' : les liens (F''), (F'''), ..., $[F^{(n)}]$ sont intérieurs à (G') ; on peut mener un lien de β à α' qui soit tout entier, sauf son origine β', intérieur à (G'), qui n'ait pas de point commun avec (F'') sauf α'', qui, enfin, n'ait aucun point commun avec (F'''), ..., $[F^{(n)}]$. Le lien $\beta'\alpha''$ peut être regardé comme la tige d'un lacet L'' dont la boucle serait le lien (F'') ; l'ensemble des points de (G') qui sont extérieurs à (F'') constitue un continuum (G'') dont la frontière est formée de (F) et des lacets L', L''. On peut continuer ainsi ; on parvient à un continuum G_n, dont la frontière est formée de (F) et des lacets (L'), (L''), ..., $[L^{(n)}]$; c'est l'ensemble des points de C qui sont extérieurs à (F'), (F''), ..., $[F^{(n)}]$ et qui ne sont pas sur les liens $\alpha\alpha'$, $\beta'\alpha''$, $\beta''\alpha'''$, ..., $\beta^{(n-1)}\alpha^{(n)}$; ou, si l'on préfère, l'ensemble des points de C_n qui ne sont pas sur ces derniers liens.

Jusqu'à présent, tout en modifiant à chaque fois la frontière du continuum, on n'obtenait jamais qu'un continuum ; seulement, à chaque fois, on diminuait le nombre de morceaux dont se composait la frontière, en sorte que maintenant cette frontière est, comme on dit, d'un seul tenant ; pour la décrire, on peut, en partant par exemple du point α, décrire successivement (Φ), (Φ_1), $\alpha\alpha'$, (Φ'), $\beta'\alpha''$, ..., $[\Phi^{(n)}]$, $[\Phi_1^{(n)}]$, $\alpha^{(n)}\beta^{(n-1)}$, ..., (Φ_1'), $\alpha'\alpha$; le lien formé ainsi n'est pas simple : chacun des liens partiels $\alpha\alpha'$, $\beta'\alpha''$, ... que l'on a introduits est décrit deux fois, une fois dans un sens, une fois dans l'autre ; le reste se compose de la frontière (H) du continuum (C), décrite dans le sens direct. Si, maintenant, on mène un lien intérieur à (G_n), sauf son origine et son extrémité, qui joigne β_n à β, on a achevé la décomposition : on va voir en effet que les points de (G_n) qui n'appartiennent pas au lien $\beta_n\beta$, forment deux continuums (G_n'), (G_n'') : le premier est le continuum intérieur au lien fermé du type $\mathcal{A}$, dont la frontière (H') se compose des liens partiels

$$(\Phi),\ \beta\beta^{(n)},\ [\Phi_1^{(n)}],\ \alpha^{(n)}\beta^{(n-1)},\ \dots\ (\Phi_1'),\ \alpha'\alpha\ ;$$

le second est le continuum intérieur au lien fermé du type $\mathcal{B}$, dont la frontière (H'') se compose des liens partiels

$$\alpha\alpha',\ (\Phi'),\ \beta'\alpha'',\ \dots,\ [\Phi^{(n)}],\ \beta^{(n)}\beta,\ (\Phi_1).$$

On voit d'abord, comme au n° **310**, que ces deux continuums

(G'_n), (G''_n) sont tous deux intérieurs à (G_n) et extérieurs l'un à l'autre. Il reste à montrer que tout point de (G_n) qui n'appartient pas au lien $\beta''\beta$ ou, ce qui revient au même, tout point de (G_n) qui n'appartient à aucun des liens $\alpha\alpha'$, $\beta'\alpha''$, ..., $\beta'''\beta$ appartient soit à (G'_n) soit à (G''_n). Cela résulte immédiatement de ce que l'ordre d'un point quelconque par rapport à (H) est la somme des ordres du même point par rapport aux liens fermés (H'), (H''), le mouvement sur ces liens fermés correspondant à la succession des liens partiels qui les composent, tels qu'ils sont énumérés plus haut : dans cette dernière somme, en effet, se retrouvent toutes les parties qui constituent l'ordre par rapport à (H), et en outre des parties relatives aux liens partiels qui se détruisent manifestement. Ceci posé, si l'on considère un point de (G_n), la somme de ces ordres par rapport à (H'), (H'') doit être égale à 1 ; ce qui suppose que l'un des deux ordres est 1 et l'autre 0, c'est-à-dire que le point considéré est intérieur à l'un des liens, et extérieur à l'autre.

313. — On a vu au n° **310** comment, en partant du continuum (C) intérieur à un lien fermé (F) du type $\mathcal{A}$, on pouvait, au moyen d'un lien intérieur à ce continuum et joignant deux points de sa frontière, le décomposer en deux continuums intérieurs eux-mêmes à deux liens fermés du type $\mathcal{A}$: comment, en décrivant ces deux derniers liens dans le sens direct, on se trouvait avoir décrit la frontière du premier continuum dans le sens direct et le lien intérieur deux fois, dans des sens opposés. On peut décomposer de la même façon l'un ou l'autre des deux continuums partiels, ou tous les deux, et continuer de la même façon. En procédant ainsi, par dichotomie, on subdivisera (C) en m continuums partiels (c_1), (c_2), ..., (c_m) ayant respectivement pour frontières des liens fermés (f_1), (f_2), ..., (f_m) du type $\mathcal{A}$. Les continuums (c_1), (c_2), ..., (c_m), tous intérieurs à (C), sont extérieurs les uns aux autres. Tout point de (C) appartient soit à l'un des continuums (c_1), (c_2), ..., (c_m), soit à la frontière d'un de ces continuums. Les liens fermés simples (f_1), (f_2), ..., (f_m) ont des parties intérieures à (C) qui appartiennent à la fois à deux frontières ; quelques-uns au moins ont des parties sur (F).

Tout point de (F) appartient d'ailleurs à l'un des liens (f_1), (f_2),

..., f_m, en sorte que si, au lieu des continuums C, c_1, c_2, ..., c_m, on considère les continuums complétés par leur frontière $C + F$, $c_1 + f_1$, $c_2 + f_2$, ..., $c_m + f_m$, on peut dire que tout point appartenant au premier appartient à l'un au moins des m suivants, et que tout point qui appartient à l'un de ces m derniers appartient à C. Si l'on parcourt chacun des liens f_1, f_2, ..., f_m dans le sens direct, on se trouve avoir finalement parcouru F une fois dans le sens direct et chacune des parties de f_1, f_2, ..., f_m qui appartiennent à C deux fois dans des sens opposés, en sorte que, si l'on considère un point qui n'appartienne à aucun des liens f_1, f_2, ..., $f_{(m)}$, et si l'on regarde tous ces liens et le lien F comme étant parcourus dans le sens direct, on peut affirmer que l'ordre de ce point par rapport à F est la somme des ordres de ce point par rapport à f_1, f_2, ..., f_m.

Tout cela apparaît clairement en procédant de proche en proche. On ne fait jamais qu'appliquer les propositions du n° **310**.

J'ai supposé qu'on partait d'un continuum C intérieur à un lien fermé du type $\mathcal{A}$; on aurait pu aussi bien partir d'un continuum tel que le continuum C_n du numéro précédent et de sa frontière H, composée de $n + 1$ liens fermés du type $\mathcal{A}$. On commencerait par décomposer ce continuum, au moyen de $n + 1$ liens du type $\mathcal{A}$, comme on l'a expliqué dans le numéro précédent; le reste est évident.

Peut-on toujours, en poussant la décomposition assez loin, s'arranger pour que l'écart de chaque continuum c_1, c_2, ..., c_m soit moindre qu'un nombre positif arbitrairement donné à l'avance? Que la réponse doive être affirmative, c'est ce qui ne paraît guère douteux. La proposition n'est pas sans importance, à cause des conséquences qu'on en tire. On peut évidemment se borner au cas où il s'agit du continuum intérieur à un lien fermé du type $\mathcal{A}$. Pour rendre la démonstration aisée, je me bornerai à un cas un peu plus particulier.

314. — Je désignerai sous le nom de liens du type $\mathcal{A}'$ des liens simples ouverts ou fermés, composés d'un nombre fini de liens élémentaires, qui peuvent d'ailleurs appartenir à deux espèces différentes :

Les liens élémentaires de la première espèce, que j'appellerai côtés (Y) sont simplement des segments de droite parallèles à l'axe des y. Les liens élémentaires de la seconde espèce, que j'appellerai côtés (X) doivent pouvoir être définis par des formules telles que

$$y = f(x), \qquad \alpha \leqq x \leqq \beta$$

où $f(x)$ est une fonction continue de x dans l'intervalle (α, β).

Soit (F) un lien fermé du type $\mathcal{A}'$ et (C) le continuum intérieur à ce lien.

Quand on parlera des côtés d'un tel lien, on devra toujours entendre que ces côtés sont aussi étendus que possible : chaque côté (Y) devra être borné au point le plus bas et au point le plus haut possible ; en d'autres termes, aucun côté (Y) ne peut être contigu à un autre côté (Y) ; de même deux liens partiels définis respectivement par les formules

$$y = f(x), \qquad \alpha \leqq x \leqq \beta$$
$$y = g(x), \qquad \beta \leqq x \leqq \gamma, \qquad f(\beta) = g(\beta),$$

doivent être regardés comme appartenant à un même côté (X). Un *sommet* de (F) est un point où se réunissent un côté (Y) et un côté (X), ou deux côtés (X). D'après ce qu'on vient de dire, une parallèle à l'axe des y menée par un sommet où se réunissent deux côtés (X) laisse ces deux côtés soit à sa droite, soit à sa gauche. Un côté est borné par deux sommets.

Les liens fermés simples ainsi constitués peuvent ne contenir aucun côté (Y), mais il est clair qu'ils contiennent au moins un côté (X) ; on prévoit qu'ils en contiennent au moins deux ; c'est d'ailleurs ce qui va être éclairci.

Un côté (X) traverse la parallèle à l'axe des y menée par ses points ordinaires : on convient de regarder la direction de ces parallèles comme étant la direction positive de l'axe des y. Soient M le point où une telle parallèle est traversée, P et Q deux points de la parallèle situés de part et d'autre de M, assez près pour qu'il n'y ait, en dehors de M, aucun point de (F) sur le segment PQ ; les ordres des points P, Q par rapport au lien (F), parcouru dans le sens direct, diffèrent d'une unité ; l'un de ces points, P par exemple, appartiendra au continuum (C), l'autre lui sera extérieur : tous les points du segment MP, autres que M, appartiendront alors à (C), et même tous les points de ce segment, prolongé au-delà de

P, tant qu'on n'aura pas atteint (F). Comme les points à l'infini sur le prolongement de ce segment sont extérieurs à (C), il faut que ce prolongement rencontre (F) en un second point. Ainsi toute parallèle à l'axe des y qui rencontre un côté (X) rencontre nécessairement un second côté (X). Le lien (F) contient au moins deux côtés (X).

S'il n'en contient que deux, toute parallèle à l'axe des y qui rencontre l'un de ces côtés rencontre forcément l'autre. Le lien (F) ne peut alors se composer que des deux côtés (X) définis respectivement par des formules telles que

$$(1)\qquad \begin{cases} y = f(x), & \alpha \leqq x \leqq \beta, \\ y = g(x), & \alpha \leqq x \leqq \beta, \end{cases}$$

et des deux côtés (Y) qui joignent les points $[\alpha, f(\alpha)]$, $[\alpha, g(\alpha)]$ d'une part, les points $[\beta, f(\beta)]$, $[\beta, g(\beta)]$ d'autre part ; le premier de ces côtés (Y) disparaît d'ailleurs si l'on a $f(\alpha) = g(\alpha)$, et le second, si l'on a $f(\beta) = g(\beta)$. Il est à peine utile de dire que la différence $f(x) - g(x)$ ne peut, puisque le lien est simple, s'annuler dans l'intervalle (α, β) pour aucune valeur de x autre que α ou β. En abusant un peu du mot, je désignerai, dans le présent numéro, sous le nom de *trapèze*, l'ensemble des points appartenant soit au lien fermé simple du type considéré et n'ayant que deux côtés (Y), soit au continuum intérieur à ce lien fermé simple. Si les deux côtés sont définis par les formules (1) et si l'on suppose $f(x) < g(x)$ pour $\alpha < x < \beta$, ce continuum intérieur sera l'ensemble des points (x, y) dont les coordonnées satisfont aux conditions

$$\alpha < x < \beta, \qquad f(x) < y < g(x).$$

La dénomination de *trapèze* continuera d'être employée, lors même qu'il n'y aurait point de côté (Y).

Il est clair qu'une parallèle à l'axe des y dont l'équation est $x = a$ $(\alpha < a < \beta)$ décompose le précédent trapèze en deux trapèzes, et que, par suite, un trapèze peut être subdivisé, au sens du précédent numéro, en trapèzes tels que la distance entre les deux côtés (Y) qui limitent chacun d'eux soit aussi petite qu'on le voudra ; il est clair aussi que ces nouveaux trapèzes peuvent être subdivisés par des parallèles à l'axe des x en rectangles et en trapèzes ;

que, enfin, le trapèze primitif peut être subdivisé, par dichotomie, en rectangles et en trapèzes tels que l'écart de chacun d'eux soit aussi petit qu'on le voudra.

Donc, pour démontrer que la figure formée par un lien fermé (F) du type considéré et par le continuum (C) intérieur à (F) peut être subdivisée en continuums complétés par leurs frontières dont les écarts soient aussi petits qu'on le veut, il suffit de prouver que cette figure peut être subdivisée en trapèzes. On y parviendra sans peine, par induction, en montrant qu'une figure de l'espèce considérée, qui n'est pas un trapèze, peut être décomposée en deux autres de la même espèce, dont chacune a moins de côtés (X) que la proposée. C'est cette démonstration qui va maintenant nous occuper ; on raisonnera sur le lien (F) et le continuum intérieur (C).

Considérons un segment de droite AA′ parallèle à l'axe des y, joignant deux points A, A′ situés sur (F) et dont tous les points, autres que A et A′, soient intérieurs à (C). Les points A, A′ décomposent (F) en deux parties et le segment AA′ décompose (C) en deux continuums partiels dont les frontières respectives sont formées de l'une des parties de (F) et du segment AA′, commun aux deux frontières. En d'autres termes, la frontière de chaque continuum partiel se déduit de (F) en conservant l'une des parties de (F) et en remplaçant l'autre par le segment AA′ ; si donc la partie de (F) que l'on a supprimée contient un côté (X) de (F) tout entier, la partie conservée contiendra sûrement un côté (X) de moins que (F) et il en est de même de la frontière obtenue en lui adjoignant le côté AA′, qui est du type (Y). Donc, toutes les fois qu'on pourra mener un segment AA′ parallèle à l'axe des y, dont les extrémités A et A′ sont sur (F), dont tous les points, autres que ces extrémités, appartiennent à (C), tel enfin que les deux parties de (F) que déterminent les points A, A′ contiennent chacune un côté entier de (F) du type (X), la réduction annoncée sera effectuée.

Si les autres conditions imposées au segment AA′ sont vérifiées, la dernière l'est aussi lorsque l'un des points A, A′, le point A par exemple, se trouve être un sommet. Ce sommet, en effet, peut être commun soit à deux côtés (X), soit à un côté (X) et à un côté (Y). Dans le premier cas, les deux côtés (X) qui se réunissent en A, n'ont pas d'autre point commun avec AA′ que le point A : ils appartiennent donc tout entiers, le premier à l'une des parties de (F), le second à l'autre partie. Dans le second cas, soit P le sommet du côté (X'), autre que A. Le segment AA' dont les points, sauf A et A', sont intérieurs à (C) ne peut être que sur le prolongement, au-delà de A, du côté AP ; il ne peut avoir d'autre point que le point A commun avec le côté (X) qui passe par A, il n'a aucun point commun avec le côté (X') qui passe par le point P ; le premier de ces côtés (X) appartient tout entier à l'une des parties de (F) ; le second côté (X'), ainsi que le côté AP, appartient tout entier à l'autre partie. Dans les deux cas, le segment AA' permet d'effectuer la décomposition annoncée.

Considérons un côté (X) de (F), défini par les formules

$$y = f(x), \qquad \alpha \leqq x \leqq \beta ;$$

je désignerai par A et B les deux sommets, d'abscisses respectives α et β, que joint ce côté ; pour fixer les idées, je supposerai que, sur ce côté, l'abscisse d'un mobile qui décrit (F) dans le sens di-

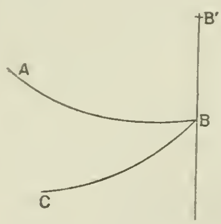

Fig. 19.

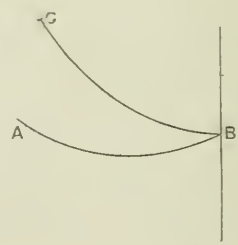

Fig. 20.

rect va en croissant ; alors ce côté traverse les parallèles à l'axe des y de gauche à droite : les points voisins appartiennent à (C) ou non, suivant qu'ils sont au-dessus ou au-dessous de ce côté.

Considérons maintenant le second côté BC qui part du point B et supposons d'abord que ce soit un côté X ; la parallèle à l'axe des y menée par le point B laisse alors à sa gauche les deux côtés BA, BC : les points voisins de BC sont intérieurs ou extérieurs au continuum (C) suivant qu'ils sont au-dessous ou au-dessus de BC. Deux cas sont d'ailleurs possibles, suivant que le côté BC est, dans le voisinage du point B, au-dessous ou au-dessus du côté BA. Dans le premier cas, c'est, au voisinage de B, les points situés au-dessus de BA, au-dessous de BC, sur la parallèle à l'axe des y

menée par le point B ou à droite de cette parallèle qui appartiennent au continuum (C) et non les points situés entre les deux côtés BA et BC ; c'est l'inverse dans le second cas.

Soit, dans le premier cas, B′ le premier point où la parallèle à l'axe des y menée par le point B et prolongée, soit vers le haut, soit vers le bas, rencontre (F) ; le segment de droite BB′ qui appartient tout entier au continuum sauf les points B et B′ permet évidemment d'effectuer la décomposition demandée.

Supposons maintenant que le côté BC soit un côté (Y), il peut descendre ou monter à partir du point B ; le lecteur reconnaîtra sans aucune peine la façon dont sont placés les points voisins des côtés AB, BC qui appartiennent au continuum (C) et s'assurera que dans le premier cas, le prolongement du côté CB vers le haut, au-delà du point B, pénètre dans le continuum et que si on désigne par B′ le premier point où ce prolongement rencontre (F),

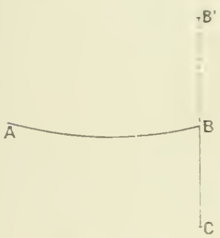

Fig. 21.

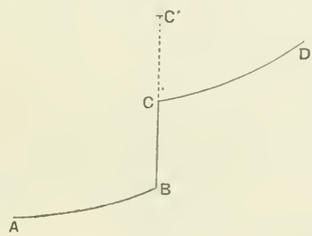

Fig. 22.

le segment de droite BB′ permet encore d'effectuer la décomposition cherchée. Si le côté BC monte à partir du point B, le côté suivant, qui part de C, peut être à droite ou à gauche de BC ; s'il est à droite, on reconnaît encore que le prolongement de BC vers le haut, au-delà du point C pénètre dans le continuum (C), en sorte que si l'on désigne par C′ le premier point où le prolongement rencontre (F), le segment CC′ répond encore à la question.

Des observations toutes pareilles se rapporteraient au sommet A et aux côtés voisins. En réunissant toutes ces observations on reconnaît que les seuls cas qui échappent à la démonstration sont les suivants :

1° Les côtés AQ, BC, autres que AB, qui passent par les points A, B sont des côtés (Y) qui, à partir des points A, B montent vers le haut ; le côté QP, autre que AQ qui passe par le point Q est un côté (X) situé à droite de AQ ; le côté CD, autre que BC, qui passe par le point C est un côté (X) situé à gauche de BC.

2° Les autres cas rentrent dans celui-là, en supposant que le point Q se confonde avec le point A, ou que le point C se confonde avec le point B ; les droites AQ et BC doivent alors être remplacées par les parallèles à l'axe des y, menées par les points A ou B. Si, par exemple, C est confondu avec B, il faut entendre que le côté, autre que AB, qui part de B est un côté (X) situé à gauche de la parallèle à l'axe des y menée par B.

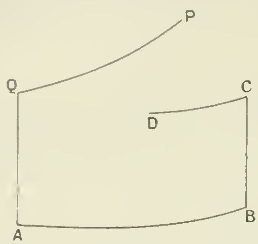

Fig. 23.

Je ne m'occuperai que du cas 1°.

Définissons, dans l'intervalle (α, β) la fonction $h(x)$ par les conditions suivantes : pour $x = \alpha$ et pour $x = \beta$, ses valeurs respectives sont les valeurs des ordonnées des points Q, C ; pour x compris entre α et β, sa valeur est celle de l'ordonnée du premier point de (F) que l'on rencontre en s'élevant sur la parallèle à l'axe des y à partir du point $[x, f(x)]$, en sorte que tous les points du segment qui va du point $[x, f(x)]$ au point $[x, h(x)]$ sont, sauf ces deux points, intérieurs à (C). On reconnaît très aisément que la fonction $h(x)$, définie sans ambiguïté dans tout l'intervalle (α, β) est continue (à droite) pour $x = \alpha$ et (à gauche) pour $x = \beta$, qu'elle est continue pour toute valeur x_0 comprise entre α et β telle que le point $[x_0, h(x_0)]$ ne soit pas un sommet, parce que, alors, quand x est suffisamment voisin de x_0, le point $[x, h(x)]$ reste sur le côté qui contient le point $[x_0, h(x_0)]$. Lorsque ce dernier point est un sommet, ce sommet peut être le sommet qui limite un côté (X) à droite ou à gauche ; la fonction $h(x)$ est alors continue, pour $x = x_0$, à gauche ou à droite. Comme cas particulier x_0 peut être l'abscisse commune à tous les points d'un côté (Y) qui joint le sommet de droite d'un côté (X) au sommet de gauche d'un autre côté (X). Dans tous les cas, si x_0 est un nombre intérieur à l'intervalle (α, β) pour lequel la fonction $h(x)$ est discontinue, le segment qui va du point $[x_0, f(x_0)]$ au point $[x_0, h(x_0)]$, *qui est un sommet*, permet d'obtenir la décomposition demandée du continuum (C).

Le seul cas qui échapperait maintenant à la démonstration serait celui où la fonction $h(x)$ serait continue dans tout l'intervalle (α, β) ; mais alors le lien constitué par les deux côtés AQ, BC, du type (A) et les deux côtés (A) que définissent les formules

$$y = f(x), \qquad \alpha \leqq x \leqq \beta,$$
$$y = h(x), \qquad \alpha \leqq x \leqq \beta,$$

serait fermé ; (F) se réduirait à ce lien, on aurait affaire à un trapèze.

La démonstration est terminée.

On vient d'établir que l'ensemble parfait (C) + (F) formé des points qui appartiennent soit au lien fermé simple (F), du type $\mathcal{A}'$, soit au continuum (C) intérieur à ce lien, pouvait être décomposé en deux ensembles parfaits (C') + (F'), (C'') + (F''), constitués comme l'ensemble proposé, mais avec des frontières (F'), (F'') qui ont chacune un ou plusieurs côtés (A) de moins que (F) : ces frontières ont une partie commune, à savoir le segment de droite, parallèle à l'axe des y, qui a servi à effectuer la décomposition ; en dehors de ce segment de droite, elles n'ont pas de point commun ; les deux continuums (C'), (C'') sont extérieurs l'un à l'autre ; en supprimant la frontière commune, ils se réunissent, ainsi qu'on l'a expliqué au n° **301**, pour reproduire le continuum (C).

Ceci rappelé, considérons, comme à la fin du n° **302**, un point fixe O extérieur à l'ensemble (C) + (F), une direction fixe (D) partant de ce point O et un point variable M ; si l'angle dont les côtés sont (D) et OM peut être défini comme une fonction continue du point M dans chacun des ensembles parfaits (C') + (F'), (C'') + (F''), il pourra être défini comme une fonction continue dans l'ensemble (C) + (F), ainsi qu'on l'a expliqué au n° **302**. Dès lors il suffit de remarquer que l'angle considéré peut être défini comme une fonction continue de M dans un trapèze et d'appliquer le procédé d'induction, comme on l'a fait dans le présent numéro, pour démontrer que cet angle peut être défini comme une fonction continue du point M dans l'ensemble (C) + (F) ; c'est ce qui avait été annoncé au n° **302**.

315. — Reprenons les notations du n° **313** relatives à un lien fermé (F), du type $\mathcal{A}$, frontière du continuum intérieur (C) et à la décomposition dichotomique de l'ensemble $(C) + (F)$ en ensembles $(c_1) + (f_1)$, $(c_2) + (f_2)$, ..., $(c_m) + (f_m)$ dont les frontières (f_1), (f_2), ..., (f_m) sont aussi des liens fermés du type $\mathcal{A}$. A la fin du présent numéro, nous aurons besoin de supposer que les écarts des ensembles $(c_1) + (f_1)$, $(c_2) + (f_2)$, ..., $(c_m) + (f_m)$ sont plus petits que tel nombre positif que l'on veut. A partir de ce moment, on supposera que (F) appartient au type $\mathcal{A}'$; on pourra alors supposer que les décompositions qui aboutissent aux ensembles $(c_i) + (f_i)$ ont été effectuées comme on l'a expliqué dans le précédent numéro, de manière à obtenir d'abord des trapèzes, puis d'autres trapèzes, qui peuvent être aussi petits qu'on veut, en poussant les décompositions assez loin.

Ceci posé, soient $g(x, y)$, $h(x, y)$ deux fonctions continues du point (x, y) dans l'ensemble parfait $(C) + (F)$. Je désignerai le point dont les coordonnées sont

$$\xi = g(x, y), \qquad \eta = h(x, y)$$

comme l'image du point x, y. Il est clair que, si un mobile décrit un lien fermé dont tous les points appartiennent à l'ensemble $(C) + (F)$, son image décrira aussi un lien fermé. En particulier, si le mobile décrit les liens fermés (F), (f_1), (f_2), ..., (f_m) dans le sens direct, son image décrira dans un sens correspondant les liens fermés (Φ), (φ_1), (φ_2), ..., (φ_m) images des précédents. Un mobile qui parcourt les liens fermés (f_1), (f_2), ..., (f_m) dans le sens direct se trouve avoir parcouru le lien fermé (F) dans le sens direct et, en outre, deux fois, dans des sens opposés, les parties de (f_1), (f_2), ..., (f_m) qui n'appartiennent pas à (F) ; l'image de ce mobile aura donc parcouru (Φ) dans le sens qui correspond au sens direct sur (F) et, en outre, deux fois dans des sens opposés, les images des parties de (f_1), (f_2), ..., (f_m) qui n'appartiennent pas à (F). Si donc on considère un point I qui ne soit situé sur aucun des liens fermés (φ_1), (φ_2), ..., (φ_m), on peut affirmer que la somme des ordres de ce point par rapport à ces divers liens sera égale à son ordre par rapport au lien (Φ), chacun des liens (Φ), (φ_1), ..., (φ_m) étant parcouru dans le sens qui correspond au sens direct sur les liens (F), (f_1), (f_2), ..., (f_m).

Mon objet est maintenant de démontrer la proposition suivante :

I. Si les équations

$$(1) \qquad g(x, y) = \alpha, \quad h(x, y) = \beta$$

n'ont pas de solution dans l'ensemble (C) + (F), l'ordre du point (α, β) par rapport à (Φ) est nul.

Par conséquent :

II. Si cet ordre n'est pas nul, les équations (1) admettent une solution dans l'ensemble (C) + (F).

Du moment que l'on parle de l'ordre du point (α, β) on suppose implicitement que cet ordre existe, c'est-à-dire que le point (α, β) n'appartient pas à (Φ), ou encore que les deux équations (1) n'admettent pas de solution x_0, y_0 tellle que le point (x_0, y_0) appartienne à (F).

Pour établir la proposition énoncée, je vais supposer que les équations (1) n'aient pas de solution, dans l'ensemble (C) + (F) et je démontrerai que dans ces conditions, l'ordre du point (α, β) par rapport à (Φ) est nul.

La distance

$$\sqrt{[\alpha - g(x, y)]^2 + [\beta - h(x, y)]^2}$$

du point (α, β) au point (ξ, η) est une fonction continue de x, y dans l'ensemble parfait (C) + (F); elle atteint donc sa borne inférieure et cette distance n'est pas nulle, puisque, par hypothèse, les équations (1) n'ont pas de solution dans l'ensemble (C) + (F); il y a donc un nombre positif ρ tel que les images de tous les points de l'ensemble (C) + (F) soient extérieures au cercle de centre (α, β) et de rayon ρ.

Ceci posé, soit ε un nombre positif tel que la distance des images de deux points de (C) + (F) soit sûrement moindre que ρ lorsque la distance de ces points est moindre que ε. Supposons maintenant que la décomposition de l'ensemble (C) + (F) en ensembles $(c_1) + (f_1)$, $(c_2) + (f_2)$, ..., $(c_m) + (f_m)$ soit telle que les écarts de ces différents ensembles soient tous moindres que ε : d'une part, si P_i est l'image d'un point de l'ensemble $(c_i) + (f_i)$, les images de tous les points de cet ensemble seront intérieures au cercle décrit de P_i comme centre avec un rayon égal à ρ; toutes ces images sont d'ailleurs à une distance du point (α, β) supérieure à ρ; en d'autres termes le point (α, β) est extérieur à ce cercle décrit de P_i comme centre qui contient à son intérieur les images de tous les points de $(c_i) + (f_i)$; l'ordre du point (α, β) par rapport à l'image (φ_i) du lien fermé (f_i) est donc nul, puisqu'on peut regarder le point (α, β) comme l'origine d'une demi-droite qui ne rencontre pas (φ_i). Il en résulte que l'ordre du point (α, β) par rapport à (Φ) est nul, puisque cet ordre est la somme des ordres du point (α, β) par rapport aux liens fermés (φ_1), (φ_2), ..., (φ_m).

Tout ceci s'étend immédiatement à la figure que l'on a considérée au n° **312** et qui est formée du lien fermé (F), des liens fermés (F'), (F''), ..., $[F^{(n)}]$ intérieurs à (F) et extérieurs les uns aux autres deux à deux, enfin du continuum (C_n) ensemble des points intérieurs à (F) et extérieurs à (F'), (F''), ..., $[F^{(n)}]$.

On continuera de représenter par (H) la frontière de (C_n), formée des liens (F), (F'), ..., $[F^{(n)}]$; mais on supposera maintenant que tous ces liens appartiennent au type $\mathcal{N}$. Les fonctions $g(x, y)$, $h(x, y)$ seront supposées continues dans l'ensemble parfait $(C_n) + (H)$. Décrire (H) dans le sens direct, c'est décrire (F) dans le sens direct et les liens (F'), (F''), ..., $[F^{(n)}]$ dans le sens indirect; les liens fermés (Φ), (Φ'), ..., $[\Phi^{(n)}]$, images des liens (F), (F'), ..., $[F^{(n)}]$, sont alors décrits chacun dans un sens déterminé et à chacun d'eux correspond ainsi un ordre déterminé pour chaque point I du plan qui n'est point situé sur eux; la somme de tous ces ordres sera ce que j'appellerai l'ordre du point I par rapport à l'image de (H).

Si les équations

$$g(x, y) = \alpha, \qquad h(x, y) = \beta$$

n'ont pas de solution x_0, y_0 telle que le point (x_0, y_0) appartienne à l'ensemble $(C_n) + (H)$, l'ordre de ce point par rapport à l'image de (H) sera nul.

Il suffit, pour s'en convaincre, de décomposer l'ensemble $(C_n) + (H)$ en deux continuums complétés par leurs frontières, lesquelles sont des liens fermés simples, ainsi qu'on l'a expliqué au n° **312**; seulement les $n + 1$ liens que l'on emploie pour la décomposition doivent être du type $\mathcal{N}$. On n'aura alors qu'à appliquer le théorème I aux deux frontières des deux continuums partiels et à ajouter les deux égalités ainsi obtenues; le théorème énoncé en dernier lieu en résulte évidemment, puisque, lorsqu'on décrit ces deux frontières dans le sens direct, chacun des $n+1$ liens introduits se trouve décrit deux fois dans des sens opposés et qu'il en est de même dans les images, etc.

IV. — COURBES

316. — Mon but est maintenant de particulariser la notion de *lien* pour arriver à la notion de *courbe*.

Considérons un lien (T) défini par les formules

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta.$$

Je vais montrer que, pour qu'on puisse étendre à ce lien la notion d'arc de courbe, il faut et il suffit que les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ soient des fonctions à variation bornée.

Si l'on a $\alpha < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < \beta$ je dirai comme au n° **239** que les nombres croissants $\alpha, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, \beta$ définissent une décomposition de l'intervalle (α, β). A une telle décomposition correspond une ligne brisée, dont je dirai qu'elle est inscrite dans le lien ; ses sommets successifs sont les points du lien qui correspondent aux valeurs $\alpha, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, \beta$. Les longueurs de pareilles lignes brisées auront, dans ce qui suit, le même rôle que les sommes inférieures dans la définition de l'intégrale définie.

La longueur d'une ligne brisée inscrite est égale ou supérieure à la distance entre l'origine et l'extrémité du lien ; l'égalité ne peut avoir lieu que si la ligne brisée se réduit au vecteur qui va de l'origine du lien à son extrémité.

Si, partant d'une décomposition $(\alpha, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, \beta)$ de l'intervalle (α, β), on décompose ensuite les intervalles partiels (α, t_1), (t_1, t_2), …, (t_{n-1}, β), on définira par là même une nouvelle décomposition de l'intervalle (α, β) ; la ligne brisée correspondante, obtenue en juxtaposant les lignes brisées inscrites dans les portions du lien qui correspondent aux intervalles partiels de la première décomposition, a une longueur supérieure ou égale à la longueur de la première. A chaque décomposition $(\alpha, t_1, t_2, \ldots, \beta)$ de l'intervalle (α, β) correspondent, d'une part la longueur L de la ligne brisée inscrite et d'autre part les nombres

$$\Phi = |\varphi(t_1) - \varphi(\alpha)| + |\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| + \ldots + |\varphi(\beta) - \varphi(t_{n-1})|,$$
$$\Psi = |\psi(t_1) - \psi(\alpha)| + |\psi(t_2) - \psi(t_1)| + \ldots + |\psi(\beta) - \psi(t_{n-1})|;$$

il est manifeste que le nombre L est supérieur ou égal à chacun des nombres Φ, Ψ et qu'il est au plus égal à leur somme. Je désignerai par (L), (Φ), (Ψ) les ensembles respectifs des nombres distincts L, des nombres distincts Φ, des nombres distincts Ψ, relatifs aux diverses décompositions possibles de l'intervalle (α, β).

Pour que l'ensemble (L) soit borné en haut, il faut et il suffit évidemment que les ensembles (Φ), (Ψ) soient eux-mêmes bornés en haut, c'est-à-dire que les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ soient à variation bornée dans l'intervalle (α, β).

Supposons qu'il en soit ainsi et soit S la borne supérieure de l'ensemble (L). Je dis alors que S peut être regardé comme la limite de la longueur d'une ligne brisée inscrite variable pour laquelle les écarts des intervalles partiels de la décomposition tendent vers o; en d'autres termes, à chaque nombre positif ε correspond un nombre positif η tel que la différence (positive ou nulle) S — L soit moindre que ε, pourvu que les intervalles partiels de la décomposition à laquelle se rapporte la longueur L de la ligne brisée aient tous un écart moindre que η. L peut être regardé comme une valeur approchée de S, aussi approchée qu'on le veut, pourvu que η soit suffisamment petit.

La démonstration, que je crois inutile de détailler, est tout à fait analogue à celle qu'on trouve dans le n° **241**; elle repose essentiellement sur ce que, quel que soit le nombre positif ε', il existe sûrement une décomposition déterminée pour laquelle on a $S - L < \varepsilon'$, en désignant par L la longueur de la ligne brisée inscrite qui correspond à la décomposition, et sur la comparaison entre les longueurs L, L' de cette ligne brisée et d'une autre ligne brisée inscrite pour laquelle les écarts des intervalles partiels soient suffisamment petits, plus petits en particulier que le plus petit écart des intervalles partiels de la première décomposition, à laquelle se rapporte L. En superposant les deux décompositions, on est conduit à une troisième décomposition, à une troisième ligne brisée dont la longueur L'' diffère très peu de L' ; la démonstration s'achève en remarquant que l'on a $S \leq L'' \leq L$. Le nombre S ainsi déterminé est égal ou supérieur à la distance entre l'origine et l'extrémité du lien. Pour qu'il soit égal à cette distance, il faut d'abord que, quels que soient les nombres t_1, t_2, ..., satisfaisant à la condition

$$\alpha < t_1 < t_2 < \ldots < \beta,$$

les points correspondants du lien se trouvent sur le vecteur qui va de l'origine du lien à son extrémité ; cela exige que tous les points du lien soient sur le vecteur. Il faut en outre que, si l'on a $t_1 < t_2 < t_3$, le point du vecteur qui correspond à t_2 soit compris entre les points qui correspondent à t_1, t_3 ou confondu avec l'un d'eux ; mais si les points qui correspondent à t_2, t_3 sont confondus, il faut encore, et pour la même raison, que tous les points qui correspondent aux valeurs intermédiaires soient aussi confondus, en sorte que les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ soient toutes les deux constantes dans l'intervalle (t_2, t_3). Si donc on écarte le cas où l'intervalle (α, β) contiendrait un intervalle partiel dans lequel les deux fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ seraient constantes, la correspondance entre l'intervalle (α, β) et les points du vecteur sera parfaite et le point $[\varphi(t), \psi(t)]$, quand t croîtra de α, β, décrira le vecteur de son origine à son extrémité, toujours dans le même sens. Ces remarques donnent un sens précis à la proposition : la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.

Il résulte de là qu'un lien quelconque, qui ne se réduit pas à un point, et qui a une longueur, a une longueur positive.

Si les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont à variation bornée dans l'intervalle (α, β), elles sont évidemment à variation bornée dans tout intervalle contenu dans (α, β) ; en sorte que si t_1, t_2 appartiennent à l'intervalle (α, β), le lien partiel défini par les formules

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \qquad t_1 \leq t \leq t_2,$$

a une longueur : désignons-la par $S(t_1, t_2)$: on voit immédiatement que si l'on suppose $t_1 < t_2 < t_3$, on aura

$$S(t_1, t_3) = S(t_1, t_2) + S(t_2, t_3) \tag{1}$$

et que, si l'on convient de poser en général

$$S(t_2, t_1) = - S(t_1, t_2),$$

l'égalité (1) subsistera, quels que soient les nombres t_1, t_2, t_3 appartenant à l'intervalle (α, β).

L'égalité (1) montra que la fonction $S(\alpha, t)$, à laquelle on attribuera la valeur o pour $t = \alpha$ est croissante dans l'intervalle (α, β); elle croît de o à $S = S(\alpha, \beta)$. Il est aisé de voir qu'elle est continue; si en effet, en supposant $t_1 < t_2$, on désigne par $V_\varphi(t_1, t_2)$, $V_\psi(t_1, t_2)$, les variations totales des fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ on aura

$$S(t_1, t_2) \leqq V_\varphi(t_1, t_2) + V_\psi(t_1, t_2);$$

or les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ étant continues, les fonctions de t, $V_\varphi(\alpha, t)$, $V_\psi(\alpha, t)$ sont continues dans l'intervalle (α, β); par conséquent, pourvu que la différence $t_2 - t_1$ soit suffisamment petite, les nombres $V_\varphi(t_1, t_2)$, $V_\psi(t_1, t_2)$ seront aussi petits que l'on veut; il en sera de même de $S(t_1, t_2)$: cela suffit à montrer que la fonction $S(\alpha, t)$ est continue dans l'intervalle (α, β).

Puisque la fonction $S(\alpha, t)$ est continue et croissante dans l'intervalle (α, β), l'équation $s = S(\alpha, t)$ définit t comme une fonction continue et croissante de s dans l'intervalle (o, S); en remplacant t par cette fonction dans $\varphi(t)$, $\psi(t)$ on voit que les formules qui définissent le lien peuvent être prises sous la forme

$$x = f(s), y = g(s), \qquad o \leqq s \leqq S$$

s désignant la longueur du lien à partir de son origine.

317. Conservons toujours la même notation

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta,$$

pour définir le lien (T). Afin d'abréger un peu, au lieu d'appeler $[\varphi(t), \psi(t)]$ le point du lien (T) qui correspond à la valeur t du paramètre, je me contenterai souvent de dire : le point t.

Supposons que les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ admettent, dans l'intervalle (t_0, t_1), des dérivées $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$; considérons les deux points t, $t + h$, qui corespondent à deux valeurs voisines de la variable, valeurs que l'on suppose appartenir à l'intervalle (α, β); l'équation de la droite qui joint ces deux points peut s'écrire

$$\frac{x-\varphi(t)}{\dfrac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}}=\frac{y-\psi(t)}{\dfrac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h}};$$

lorsque h tend vers 0, les deux dénominateurs ont évidemment pour limite $\varphi'(t)$ et $\psi'(t)$ et l'on dit, en supposant que ces deux quantités ne soient pas nulles simultanément, que la droite donc l'équation est

$$\frac{x-\varphi(t)}{\varphi'(t)}=\frac{y-\psi(t)}{\psi'(t)}$$

est *tangente* à (T) au point t; on dit que, sur cette tangente, la direction définie par les coefficients directeurs $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ est la direction qui correspond aux valeurs croissantes de t, et cette façon de parler est justifiée par ce fait que la direction dont les coefficients directeurs sont

$$\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}, \quad \frac{\psi(t+h)-\psi(t)}{h}$$

est, *lorsque h est positif*, la direction du vecteur qui va du point t au point $t+h$.

On désigne le nombre positif

$$V(t)=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$$

sous le nom de *vitesse*, emprunté à la cinématique. Le même nom s'applique aussi à un vecteur dont l'orgine est le point $(0, 0)$ et l'extrémité le point $[\varphi'(t), \psi'(t)]$, ou au vecteur équipollent, ayant son origine au point t; la direction de ce vecteur est précisément ce qu'on vient d'appeler la direction sur la tangente qui correspond aux valeurs croissantes de t.

Le nombre positif $V(t)$ est la limite, pour $h=0$, de la *vitesse moyenne* relative à l'intervalle $(t, t+h)$, c'est-à-dire du rapport à la valeur absolue de h de la distance des deux points t et $t+h$; en d'autres termes, on a :

$$V(t)=\lim_{h=0}\frac{\sqrt{[\varphi(t+h)-\varphi(t)]^2+[\psi(t+h)-\psi(t)]^2}}{|h|}$$

comme on le voit sans peine en remplaçant dans le second membre

$$\varphi(t+h)-\varphi(t),\ \psi(t+h)-\psi(t) \text{ par } h[\varphi'(t)+\varepsilon],\ h[\psi'(t)+\eta],$$

où ε, η désignent des nombres aussi petits qu'on le veut, en valeur absolue, pourvu qu'on suppose assez petite la valeur absolue de h.

En posant

$$A=\varphi'^2(t)+\psi'^2(t),\quad K=2\varepsilon\varphi'(t)+2\eta\psi'(t)+\varepsilon^2+\eta^2,$$

on pourra s'appuyer sur l'inégalité

$$|\sqrt{A+K}-\sqrt{A}|\leqq\sqrt{|K|}$$

qui a certainement lieu si l'on a $|K|\leqq A$. La démonstration n'exige pas la continuité des dérivées, mais elle permet de reconnaître que, si ces dérivées sont continues et si elles ne s'annulent pas simultanément dans l'intervalle (α, β), la vitesse moyenne

$$\frac{\sqrt{[\varphi(t+h)-\varphi(t)]^2+[\psi(t+h)-\psi(t)]^2}}{|h|}$$

tend uniformément vers sa limite $V(t)$, quand h tend vers o; en d'autres termes à chaque nombre positif ε correspond un nombre positif η, tel que l'on ait,

$$\left|\frac{\sqrt{[\varphi(t+h)-\varphi(t)]^2+[\psi(t+h)-\psi(t)]^2}}{|h|}-V(t)\right|<\varepsilon$$

pour tous les nombres t et $t+h$ qui satisfont aux conditions

$$\alpha\leqq t\leqq\beta,\quad \alpha\leqq t+h\leqq\beta,\quad |h|<\eta.$$

318. — Considérons la vitesse moyenne $\frac{\Delta}{\beta-\alpha}$ relative à l'intervalle (α, β) : Δ représente les distances des deux points α, β. Je vais montrer, en supposant que les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ admettent des dérivées dans l'intervalle (α, β), qu'il existe un nombre ξ, appartenant à l'intervalle (α, β) et tel que l'on ait [1]

$$\frac{\Delta}{\beta-\alpha}\leqq V(\xi).$$

---

[1] M. Darboux dans son Mémoire *Sur les développements en série des fonctions d'une variable* (Journal de Liouville, 2^e série t. II) a montré l'importance de cette proposition qui joue dans plusieurs questions un rôle analogue à celui du théorème du n° **215**.

Supposons en effet $\alpha < t_1 < t_2 \ldots < t_{n-1} < \beta$ et considérons la ligne brisée inscrite dont les sommets successifs sont les points $\alpha, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, \beta$ du lien ; soient $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ les côtés de cette ligne brisée, il est clair que l'on aura

$$\frac{\Delta}{\beta - \alpha} \leqq \frac{\delta_1 + \delta_2 + \ldots \delta_n}{\beta - \alpha};$$

or le second membre est compris entre le plus petit et le plus grand des nombres

$$\frac{\delta_1}{t_1 - \alpha}, \frac{\delta_2}{t_2 - t_1}, \ldots, \frac{\delta_n}{\beta - t_{n-1}};$$

je désignerai par $\frac{\Delta_1}{\beta_1 - \alpha_1}$ le plus grand de ces nombres : α_1, β_1 sont deux consécutifs des nombres $\alpha, t_1, t_2, \ldots, \beta$ et Δ_1 est la distance des points correspondants du lien, on aura alors

$$\frac{\Delta}{\beta - \alpha} \leqq \frac{\Delta_1}{\beta_1 - \alpha_1};$$

On peut raisonner sur l'intervalle (α_1, β_1) comme on a fait sur l'intervalle (α, β) et poursuivre indéfiniment ; on formera ainsi une suite infinie d'intervalles $(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1), \ldots (\alpha_p, \beta_p), \ldots$ dont chacun est contenu dans le précédent ; les écarts de ces intervalles vont en diminuant ; rien n'empêche de s'arranger pour qu'il décroissent indéfiniment ; si l'on suppose donc que l'on a $\lim_{p=\infty} (\beta_p - \alpha_p) = 0$, il est clair que les deux suites infinies $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots$ auront une limite commune ξ et qu'on pourra écrire

$$\alpha \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \xi \leqq \ldots \leqq \beta_2 \leqq \beta_1 \leqq \beta;$$

Si, maintenant, on désigne par δ'_p, et δ''_p les distances des points α_p, β_p au point ξ ; on aura

$$\frac{\Delta_p}{\beta_p - \alpha_p} \leqq \frac{\delta'_p + \delta''_p}{\beta_p - \alpha_p},$$

le second membre est d'ailleurs compris entre le plus grand et le plus petit des deux rapports

$$\frac{\delta'_p}{\xi - \alpha_p}, \frac{\delta''_p}{\beta_p - \xi};$$

pourvu que p soit assez grand, chacun de ces deux rapports est aussi voisin qu'on le veut de $V(\xi)$: la suite d'inégalités

$$\frac{\Delta}{\beta-\alpha} \leqq \frac{\Delta_1}{\beta_1-\alpha_1} \leqq \ldots \leqq \frac{\Delta_p}{\beta_p-\alpha_p}$$

exige donc que l'on ait

$$\frac{\Delta}{\beta-\alpha} \leqq V(\xi).$$

En reprenant la démonstration, on s'assurera sans peine qu'on peut affirmer l'existence d'un nombre appartenant à l'intervalle (α, β) tel que l'on ait

$$\frac{\Delta}{\beta-\alpha} < V(\xi),$$

sauf dans le cas où le lien (T) se réduit au vecteur qui va de l'origine du lien à son extrémité et où les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont du premier degré en t.

Un raisonnement tout pareil montre, en supposant que le lien (T) ait une longueur $S(\alpha, \beta)$, qu'il y a un nombre ξ', appartenant à l'intervalle (α, β), pour lequel on a

$$\frac{S(\alpha, \beta)}{\beta-\alpha} \geqq V(\xi').$$

Il suffit, pour cela, de partir de l'égalité

$$\frac{S(\alpha, \beta)}{\beta-\alpha} = \frac{S(\alpha, t_1) + S(t_1, t_2) + \ldots + S(t_{1-n}, \beta)}{\beta-\alpha}$$

dans laquelle le second membre est plus grand que le plus petit des rapports

$$\frac{S(\alpha, t_1)}{t_1-\alpha}, \quad \frac{S(t_2, t_1)}{t_2-t_1}, \ldots, \quad \frac{S(t_{n-1}, \beta)}{\beta-t_{n-1}}.$$

319. — Reprenons, en supposant toujours $\alpha < t_1 < t_2 < \ldots < \beta$, la ligne brisée inscrite dans le lien ; si l'on suppose que les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ admettent des dérivées dans l'intervalle (α, β), on pourra appliquer le premier théorème du précédent numéro aux intervalles (α, t_1), $(t_1, t_2), \ldots, (t_{n-1}, t_n)$ et affirmer l'existence de nombres $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ appartenant respectivement à ces intervalles, tels qu'on ait

$$\frac{\delta_1}{t_1 - \alpha_1} \leq V(\xi_1), \quad \frac{\delta_2}{t_2 - t_1} \leq V(\xi_2), \ldots, \quad \frac{\delta_n}{\beta - t_{n-1}} \leq V(\xi_n)$$

et, par suite,

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n \leq (t_1 - \alpha_1) V(\xi_1) + (t_2 - t_1) V(\xi_2) + \ldots + (\beta - t_{n-1}) V(\xi_n).$$

Supposons que la fonction $V(t)$ soit bornée et intégrable dans l'intervalle (α, β); pourvu que les intervalles partiels soient suffisamment petits, le second membre est une valeur aussi approchée qu'on le veut de l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta V(t)\, dt;$$

donc, pourvu que les intervalles partiels soient suffisamment petits, la longueur de la ligne brisée inscrite reste au-dessous d'un nombre fixe; elle reste donc toujours au-dessous de ce nombre fixe, puisqu'elle ne peut qu'augmenter quand on subdivise les intervalles partiels : l'ensemble (L) du n° **316** est borné en haut et l'on a, en reprenant les notations de ce même numéro,

$$\text{(1)} \qquad S(\alpha, \beta) \leq \int_\alpha^\beta V(t)\, dt,$$

puisque la différence entre $S(\alpha, \beta)$ et $\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n$ est aussi petite qu'on le veut, pourvu que les intervalles partiels soient suffisamment petits. On peut maintenant appliquer la seconde proposition ; elle conduira à une inégalité de la forme

$$\begin{aligned} S(\alpha, \beta) &= S(\alpha, t_1) + S(t_1, t_2) + \ldots + S(t_{n-1}, \beta) \\ &\geq (t_1 - \alpha) V(\xi'_1) + (t_2 - t_1) V(\xi'_2) + \ldots + (\beta - t_{n-1}) V(\xi'_n), \end{aligned}$$

en désignant par $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$ des nombres qui appartiennent respectivement aux intervalles (α, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_{n-1}, β). Le dernier membre, pourvu que les intervalles soient assez petits, est une valeur aussi approchée qu'on veut de

$$\int_\alpha^\beta V(t)\, dt;$$

on a donc

$$(2) \qquad S(\alpha, \beta) \geq \int_\alpha^\beta V(t)\,dt;$$

Par conséquent, lorsque les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ont des dérivées dans l'intervalle (α, β) et que la fonction $V(t)$ est bornée et intégrable, on a, en vertu des inégalités (1) et (2),

$$S(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta V(t)\,dt.$$

Lorsqu'on suppose que la fonction $V(t)$ est continue et ne s'annule pas, la démonstration peut se faire d'une façon beaucoup plus facile en se fondant sur ce que le rapport

$$\frac{\sqrt{[\varphi(t+h)-\varphi(t)]^2+[\psi(t+h)-\psi(t)]^2}}{|h|}$$

tend uniformément vers $V(t)$, quand h tend vers o.

320. — Considérons le lien défini par les formules

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t) \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta.$$

Je supposerai, dans tout ce numéro, que les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ admettent, dans l'intervalle (α, β), des dérivées continues $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ qui ne s'annulent pas pour une même valeur de t. En chaque point du lien, il y a alors une tangente.

Si $\varphi'(t)$ ne s'annule pas à l'intérieur de l'intervalle (α, β), la fonction $\varphi(t)$ est ou constamment croissante, ou constamment décroissante dans l'intervalle (α, β). On a alors affaire à un lien élémentaire du type $\mathcal{A}'$. Il est clair, d'après cela, que le lien appartient au type $\mathcal{A}$ lorsqu'il est simple et que l'une des dérivées $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, supposées continues dans l'intervalle (α, β), ne s'annule qu'un nombre fini de fois dans cet intervalle.

Reprenons la supposition antérieure; à l'intérieur de l'intervalle (α, β), la fonction $\varphi'(t)$ ne s'annule pas; ajoutons à cette supposition la suivante : la pente $\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ de la tangente, qui est alors évidemment continue pour toutes les valeurs de t intérieures à l'intervalle, est toujours croissante, ou toujours décroissante, pour chacune de ces valeurs. Je n'exclus pas d'ailleurs le cas où l'une des quantités $\varphi'(\alpha)$, $\varphi'(\beta)$ serait nulle. Quoiqu'il en soit, la fonction $\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ ne peut atteindre qu'une fois une valeur donnée quand t croît de α à β.

Je dis que, sous les conditions prescrites, le lien ne peut avoir plus de deux points communs avec une droite.

Cela revient à dire que l'équation

$$a\varphi(t) + b\psi(t) + c = 0$$

ne peut avoir plus de deux racines appartenant à l'intervalle (α, β) ; si, en effet, le premier membre de cette équation s'annulait pour trois valeurs t_0, t_1, t_2 $(t_0 < t_1 < t_2)$, sa dérivée

$$a\varphi'(t) + b\psi'(t) = \varphi'(t)\left[a + b\,\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]$$

s'annulerait pour une valeur de t comprise entre t_0 et t_1 et pour une autre valeur comprise entre t_1 et t_2, ce qui est contraire aux hypothèses. On remarquera que si cette dérivée s'annule pour $t = \alpha$, ou pour $t = \beta$, elle ne peut s'annuler pour aucune autre valeur appartenant à l'intervalle (α, β) ; que si elle s'annule pour une valeur $t = t_0$ intérieure à cet intervalle, elle change de signe pour cette valeur. Si la dérivée $a\varphi'(t) + b\psi'(t)$ ne s'annule pas à l'intérieur de l'intervalle (α, β), la fonction $a\varphi(t) + b\psi(t) + c$ varie toujours dans le même sens, quand t croît de α à β, et ne peut donc s'annuler qu'une fois. Cette même fonction peut s'annuler une ou deux fois, si $a\varphi'(t) + b\psi'(t)$ admet une racine t_0, comprise entre α et β : dans ce cas, la fonction $a\varphi(t) + b\psi(t) + c$ varie toujours dans le même sens dans l'intervalle (α, t_0) et dans le sens contraire dans l'intervalle (t_0, β). Elle peut s'annuler, ou non, à l'intérieur de chacun de ces intervalles ; lorsqu'elle s'annule ainsi, pour une valeur autre que t_0, elle change de signe en s'annulant, le lien traverse alors la droite. Enfin si la fonction $a\varphi(t) + b\psi(t) + c$ s'annulait pour la valeur $t = t_0$ qui annule la dérivée, elle ne pourrait s'annuler pour aucune autre valeur de t appartenant à l'intervalle (α, β), et ne changerait pas de signe pour $t = t_0$; la droite, qui serait alors la tangente au point t_0, n'aurait qu'un point commun avec le lien et celui-ci resterait, abstraction faite du point de contact, tout entier du même côté de la droite. Cette dernière conclusion s'appliquerait au cas où la droite considérée serait tangente à l'origine ou à l'extrémité du lien.

En résumé, sous les conditions imposées, la droite peut ne pas avoir de point commun avec le lien, le traverser une ou deux fois, lui être tangente en le laissant alors tout entier d'un même côté.

Lorsque les fonctions $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ admettent elles-mêmes des dérivées $\varphi''(t)$, $\psi''(t)$, que je supposerai aussi continues dans l'intervalle (α, β), l'hypothèse relative à la fonction $\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ revient à dire que la fonction

$$\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)$$

garde le même signe dans l'intervalle (α, β). Il est alors aisé de reconnaître que, si l'on regarde la direction de la tangente au point t_0 comme étant celle qui correspond aux valeurs croissantes de t et que déterminent les quantités $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$ considérées comme des paramètres directeurs, le lien reste constamment à gauche ou à droite de sa tangente suivant que la quantité $\varphi'(t)\psi''(t) - \psi'(t)\varphi''(t)$ est positive ou négative.

La direction sur la *normale* au lien, qui, en partant du point t_0, est à gauche de la tangente, a pour paramètres directeurs les quantités $-\psi'(t_0)$, $\varphi'(t_0)$.

Le lecteur reconnaîtra sans peine que, sous le bénéfice des suppositions qui ont été faites au début de ce numéro, la distance d'un point variable t du lien à un point fixe t_0 du même lien, va en augmentant quand la valeur absolue de la différence $t - t_0$ augmente, pourvu que cette valeur absolue reste suffisamment petite. Il en conclura qu'un cercle de rayon suffisamment petit, de centre t_0 $(\alpha < t_0 < \beta)$ ne rencontre le lien qu'en deux points, correspondant à des valeurs t', t'' entre lesquelles t_0 est compris. Le lien décompose l'intérieur du cercle en deux continuums; il est, pour ces deux continuums une partie de la frontière.

Je désignerai sous le nom d'*arc élémentaire* un lien qui peut être défini par les formules

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqq t \leqq \beta$$

où les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$, continues dans l'intervalle (α, β) satisfont aux conditions qui vont être énumérées.

Les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ admettent dans l'intervalle (α, β) des dérivées continues $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$. Aucune de ces dérivées ne s'annule à l'intérieur de l'intervalle (α, β), à moins d'être constamment nulle dans cet intervalle, auquel cas l'autre dérivée ne s'annule pas; ainsi on n'exclut pas le cas où le lien se réduirait à un segment de droite parallèle à l'un des axes. La fonction $\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ est ou croissante ou décroissante pour toute valeur de t intérieure à l'intervalle (α, β); il résulte de cette hypothèse que, si $\varphi'(t)$ s'annule pour l'une des bornes, le précédent rapport tend soit vers $+\infty$, soit vers $-\infty$, soit vers une limite, quand t s'approche de cette borne.

Je réserverai le nom de *courbe* aux liens qui peuvent être décomposés en un nombre fini d'arcs élémentaires. Une courbe est *simple* dans les mêmes conditions qu'un lien.

Lorsque, dans la figure formée par un lien simple du type A et le continuum intérieur, le lien est une courbe, je désignerai cette figure sous le nom de *domaine simplement connexe* ou de *domaine simple*. La courbe frontière est alors souvent désignée sous le nom de *contour* du domaine; l'intérieur du domaine est le continuum intérieur à la frontière. La figure formée par une courbe fermée simple, m courbes fermées simples intérieures à la première et extérieures les unes aux autres et par le continuum ensemble des points intérieurs à la première courbe et extérieurs aux m autres est un *domaine* $m+1$ *fois connexe*; l'intérieur de ce domaine est le continuum qu'on vient de définir; sa frontière est formée de $m+1$ contours. Un domaine $m+1$ fois connexe peut être décomposé en deux domaines simplement connexes au moyen de $m+1$ courbes simples (n° 312).

CHAPITRE X

NOMBRES IMAGINAIRES

321. — Les nombres imaginaires (ou complexes) s'introduisent dans la résolution de l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0,$$

où p, q sont des nombres réels. Les expressions que l'on trouve pour les racines,

$$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

n'ont de sens que si l'on a $\frac{p^2}{4} - q \geqq 0$, et l'on sait d'ailleurs que l'équation ne peut être résolue que dans ce cas.

Si dans le polynome $x^2 + px + q$, on remplace x par $-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, et que l'on développe les calculs, ce qui d'ailleurs n'a de sens que si $\frac{p^2}{4} - q$ est positif ou nul, on constate que le radical disparaît de lui-même, et que, si l'on remplace son carré par $\frac{p^2}{4} - q$, le résultat est identiquement nul. La supposition que $\frac{p^2}{4} - q$ est positif ou nul n'intervient que pour donner un sens au calcul.

Lorsque $\frac{p^2}{4} - q$ est négatif, quel sens peut-on attribuer à ce résultat du calcul, que l'on traduit en disant que l'équation du second degré a une racine imaginaire de la forme $a + \sqrt{-\alpha}$, où α est le nombre positif $q - \frac{p^2}{4}$?

Plus généralement, quelle signification peut-on attribuer à l'assertion suivante :

Un polynome donné $f(x)$ à coefficients numériques réels admet la racine imaginaire $a + \sqrt{-\alpha}$, où a et α sont des nombres réels donnés, le second étant positif ?

Cette façon de parler exprimera le même fait que tout à l'heure : en remplaçant dans $f(x)$, x par $a + \sqrt{-\alpha}$, développant les puissances de $a + \sqrt{-\alpha}$ par la formule du binome comme si $-\alpha$ était positif, remplaçant partout $\sqrt{-\alpha}\sqrt{-\alpha}$ par $-\alpha$, les termes qui contiennent $\sqrt{-\alpha}$ en facteur se détruisent et il en est de même des autres. Les calculs que l'on a faits, à la vérité, n'ont pas de sens, mais il n'y aura plus aucune difficulté en procédant comme il suit :

On commence par remplacer x par $u + \sqrt{v}$, u et v étant des indéterminées, on développe les puissances de $u + \sqrt{v}$ suivant la formule du binome, en remplaçant partout $(\sqrt{v})^{2n+1}$ par $v^n\sqrt{v}$, $(\sqrt{v})^{2n}$ par v^n et l'on met le résultat sous la forme

$$\varphi(u, v) + \sqrt{v}\,\psi(u, v),$$

$\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ étant des polynomes entiers en u, v ; dans ces polynomes on remplace u par a et v par $-\alpha$: dire que le polynome $f(x)$ admet la racine imaginaire $a + \sqrt{-\alpha}$, c'est dire que l'on a

$$\varphi(a, -\alpha) = 0 \qquad \psi(a, -\alpha) = 0.$$

Or, si dans le polynome $f(x)$ on avait remplacé x par $u + i\sqrt{v}$, au lieu de le remplacer par $u + \sqrt{v}$, et si l'on avait fait les mêmes calculs, c'est-à-dire si l'on avait, après le développement des puissances, remplacé $(i\sqrt{v})^{2n+1}$ par $i^{2n+1}v^n\sqrt{v} = (i^2v)^n i\sqrt{v}$, et $(i\sqrt{v})^{2n}$ par $(i^2v)^n$, il est clair que l'on aurait trouvé

$$\varphi(u, i^2v) + i\sqrt{v}\,\psi(u, i^2v).$$

Les deux équations $\varphi(a, -\alpha) = 0$, $\psi(a, -\alpha) = 0$ peuvent s'interpréter en disant que les deux polynomes en i^2,

$$\varphi(a, i^2\alpha), \qquad \psi(a, i^2\alpha)$$

s'annulent quand on y remplace i^2 par -1, ce qui revient à dire qu'ils sont divisibles par $i^2 + 1$. Il en est de même évidemment du polynome en i

$$\varphi(a, i^2\alpha) + i\sqrt{\alpha}\,\psi(a, i^2\alpha)$$

qui peut être regardé comme le résultat de la substitution de $a + i\sqrt{\alpha}$ à la place de x. Réciproquement, ce polynome en i ne peut être divisible par $i^2 + 1$ que si les deux nombres $\varphi(a, -\alpha)$ et $\psi(a, -\alpha)$ sont nuls : ces deux nombres sont en effet les restes de la division par $i^2 + 1$ des deux polynomes en i^2 $\varphi(a, i^2\alpha)$, $\psi(a, i^2\alpha)$, d'où l'on conclut immédiatement que

$$\varphi(a, -\alpha) + i\sqrt{\alpha}\,\psi(a, -\alpha)$$

est le reste de la division par $i^2 + 1$ de

$$\varphi(a, i^2\alpha) + i\sqrt{\alpha}\,\psi(a, i^2\alpha),$$

reste qui ne peut être nul que si $\varphi(a, -\alpha)$ et $\psi(a, -\alpha)$ sont nuls, puisque l'on suppose $\alpha > 0$.

Voici donc le sens précis que nous sommes amenés à donner à cette assertion : le polynome $f(x)$ admet la racine imaginaire $a + \sqrt{-\alpha}$. Elle veut dire : quand on remplace dans ce polynome x par $a + i\sqrt{\alpha}$, le polynome en i que l'on obtient ainsi est divisible par $i^2 + 1$.

Le théorème fondamental de l'Algèbre peut s'énoncer ainsi : Étant donné un polynome $f(x, i)$ à deux variables x et i, à coefficients numériques réels, il existe deux nombres réels a, b tels que le polynome (en i) $f(a + bi, i)$, obtenu en remplaçant x par $a + bi$, soit divisible par $i^2 + 1$. Si l'on ordonne le polynome $f(x, i)$ par rapport à x, les coefficients des diverses puissances de x deviennent des polynomes en i; rien n'empêche évidemment de substituer à ces polynomes les restes que l'on obtient en les divisant par $i^2 + 1$, puisque la partie que l'on supprime ainsi est toujours divisible par $i^2 + 1$: on ne restreindra donc pas la généralité de l'énoncé en supposant, comme on le fait d'habitude, que le polynome $f(x, i)$ est du premier degré en i. C'est à Gauss que l'on doit les premières démonstrations de ce théorème, et l'une de celles qu'il a données reste, à un certain point de vue, supérieure à toutes les autres, malgré ce qu'elle a de compliqué et de détourné, parce qu'elle semble réduire au minimum la partie de la démonstration qui n'est pas algébrique. Le seul postulat qui, dans la démonstration de Gauss, n'appartient pas à la pure Algèbre est en effet le suivant : toute équation de degré impair, à coefficients réels, admet une racine réelle. Cette proposition est contenue, comme cas particulier, dans l'une de celles que l'on a établies au nº **166**.

Ce théorème laisse prévoir l'importance de l'introduction en Algèbre des nombres dits imaginaires. Ces nombres ne jouent pas un rôle moins important en Analyse, ainsi que cela avait été reconnu longtemps avant que leur signification ne fût précisée. Il reste à définir ces nombres et à expliquer les règles de calcul qui les concernent : ce qui précède justifiera et leur introduction, et les règles de leur calcul. Le lecteur, auquel le sujet est sans doute familier, me permettra de le traiter brièvement.

322. — Un nombre imaginaire est, par définition, une expression $\alpha + \beta i$, du premier degré en i, où α, β sont des nombres réels qui peuvent d'ailleurs être quelconques, expression soumise à des règles de calcul qu'on va expliquer ; pour le moment, on doit porter son attention sur ce qu'un tel nombre est défini quand on se donne les deux coefficients réels, au moyen desquels est formé le binome du premier degré par lequel il s'exprime : ces deux coefficients α, β ne jouent pas le même rôle, le premier α est la *partie réelle* du nombre imaginaire, le second est le *coefficient de i*.

On fait rentrer les nombres réels dans les nombres imaginaires en convenant de regarder $\alpha + \beta i$, lorsque β est nul, comme étant la même chose que le nombre réel α. En particulier lorsque α et β sont nuls, le symbole $\alpha + \beta i$ est la même chose que le nombre réel o. Lorsque la partie réelle α est nulle, on dit que le nombre $\alpha + \beta i$, ou βi, est *purement imaginaire*.

On dit que les nombres imaginaires $\alpha + \beta i$, $\alpha' + \beta' i$, où α, β, α', β' sont réels, sont égaux lorsque ces nombres sont les mêmes, c'est-à-dire lorsque l'on a $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Cette définition, d'une part, s'applique lorsque les coefficients de i sont nuls, c'est-à-dire dans le cas où les nombres imaginaires se réduisent à des nombres réels ; d'autre part elle satisfait évidemment aux conditions de toute définition de l'égalité $A = A$, $A = B$ entraîne $B = A$:

$A = C$ et $B = C$ entraînent $A = B$. Enfin les définitions des opérations seront telles qu'on pourra dans ces opérations remplacer, sans changer le résultat, tel nombre imaginaire que l'on voudra, par un nombre imaginaire égal.

On définit d'un seul coup l'*addition*, la *soustraction*, la *multiplication* effectuée, sur des nombres imaginaires, en disant que ces opérations se font comme si les expressions $\alpha + \beta i$ étaient des binomes ordinaires du premier degré, si ce n'est qu'on remplace le résultat, ordonné par rapport à i, par son reste relativement à $i^2 + 1$: ce reste, étant lui-même un binome du premier degré en i, est un nombre imaginaire.

Rien n'empêche de désigner par une seule lettre un binome du premier degré en i ou, si l'on veut, un nombre imaginaire. Si A, A', A'', ..., désignent les binomes $\alpha + \beta i$, $\alpha' + \beta' i$, $\alpha'' + \beta'' i$, ..., où α, β, α', β', α'', β'', ..., sont des nombres réels, le résultat d'opérations d'addition, de soustraction, de multiplication... effectuées sur les nombres imaginaires A, A', A'', ..., s'obtiendra, d'après ce que l'on vient de dire, de la façon suivante :

Considérons un certain polynome en A, A', A'', ..., tel, par exemple, que

$$A - A'^2A + A'A'' - AA'A'' + \dots .$$

On y remplacera A, A', A'', ... par $\alpha + \beta i$, $\alpha' + \beta' i$, $\alpha'' + \beta'' i$, ..., on développera et on ordonnera par rapport à i, puis on divisera le polynome en i ainsi obtenu par $i^2 + 1$, le reste sera le résultat cherché.

On a en particulier

$$\begin{aligned} A + A' &= \alpha + \alpha' + (\beta + \beta')\, i, \\ A - A' &= \alpha - \alpha' + (\beta - \beta')\, i, \\ AA' &= \alpha\alpha' - \beta\beta' + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\, i. \end{aligned}$$

Revenons au cas général : il est clair que le reste de la division par $i^2 + 1$ n'est pas modifié quand, dans le polynome en A, A', ..., on remplace soit un terme de ce polynome, soit un produit de facteurs dans un terme, par le reste de la division par $i^2 + 1$ de ce terme ou de ce produit de facteurs. Cette simple remarque permet très facilement l'extension aux nombres imaginaires des propriétés fondamentales de l'addition et de la multiplication

$$
\begin{aligned}
&A + A' = A' + A, && AA' = A'A,\\
&A + (A' + A'') = (A + A') + A'', && A(A'A'') = (AA')A'',\\
&A + 0 = A, && A \times 1 = A,\\
& && A(A' + A'') = AA' + AA''.
\end{aligned}
$$

Le seul nombre qui, ajouté à A reproduise A est o. Le seul nombre qui ajouté à A donne pour somme A' est A' — A ; en particulier le seul nombre qui ajouté à A donne pour somme o est le nombre $-A = -\alpha - \beta i$, symétrique de A.

Si n est un nombre naturel, i^n est égal à 1, i, -1, $-i$ suivant que le reste de la division de n par 4 est 0, 1, 2 ou 3.

Le fait que, en vertu des règles admises, i^2 est égal à -1 explique que l'on emploie souvent le symbole $\sqrt{-1}$, qui par lui-même est dénué de sens, avec la même signification que la lettre i.

Un produit de facteurs imaginaires ne peut être nul que si l'un de ses facteurs est nul ; cela est clair, si l'on se reporte à ce théorème d'algèbre : le produit de plusieurs polynomes premiers à i^2+1 est premier à i^2+1 : cela s'établit directement sans aucune peine. La proposition s'étend immédiatement à trois, quatre, ... facteurs. On en retrouvera d'ailleurs la démonstration, un peu plus loin, sous une autre forme.

Il reste, pour en finir avec les opérations rationnelles, à définir le quotient de deux nombres imaginaires $A = \alpha + \beta i$, $A' = \alpha' + \beta' i$. Cette définition résulte de la proposition suivante.

Si A' n'est pas nul, il existe un nombre imaginaire $x + yi$, et un seul, tel que son produit par A' soit égal à A. Ce nombre unique est, par définition, le quotient de la division du nombre imaginaire A par le nombre imaginaire A' : dire que l'on a

$$\alpha + \beta i = (\alpha' + \beta' i)(x + yi),$$

c'est, en vertu des conventions précédentes, dire que l'on a

$$
\begin{aligned}
\alpha' x - \beta' y &= \alpha,\\
\beta' x + \alpha' y &= \beta,
\end{aligned}
$$

le déterminant $\alpha'^2 + \beta'^2$ de ces deux équations en x, y n'étant pas nul, par hypothèse, ces équations admettent une solution et une seule à savoir

$$x = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2}, \quad y = \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha'^2 + \beta'^2};$$

le nombre imaginaire

$$\frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2} + \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha'^2 + \beta'^2}i$$

est, par définition, le quotient de la division de $\alpha + \beta i$ par $\alpha' + \beta' i$.

Lorsque α' et β' sont nuls, les équations précédentes n'ont pas de solution, sauf dans le cas où α et β seraient nuls, auquel cas, la solution est entièrement indéterminée. Pour les nombres imaginaires, comme pour les nombres réels, la division par 0 n'a pas de sens.

La règle donnée plus haut pour évaluer i^n s'étend au cas où n est un entier négatif; en particulier i^{-1} ou $\frac{1}{i}$ est égal à $-i$.

Lorsqu'il s'agit de nombres réels, les propriétés des fractions généralisées (dont les termes sont des nombres réels quelconques) résultent de ce que la valeur d'une telle fraction est le seul nombre qui multiplié par le dénominateur reproduise le numérateur, et des propriétés de l'addition, de la soustraction et de la multiplication : ces diverses propriétés ayant été étendues aux nombres imaginaires, les propriétés des fractions dont les termes sont des nombres imaginaires s'en suivent immédiatement. Ainsi on peut, sans changer la valeur (définie plus haut) d'une telle fraction, multiplier ou diviser les deux termes par un même nombre, différent de 0, etc.

323. — On a dit plus haut qu'un nombre imaginaire $x + yi$, était défini par le couple de nombres réels (x, y). En employant le langage expliqué dans le chapitre précédent, on peut appeler *point* ce couple de nombres réels ; la partie réelle x est l'abscisse, le coefficient y de i est l'ordonnée de ce point. Le nombre imaginaire $x + yi$ est dit l'*affixe* du point dont les coordonnées sont x, y ; on dit que le point (x, y) représente le nombre imaginaire $x + yi$. Dans bien des cas, il est commode de confondre le point et l'affixe, de dire le point $x + yi$ pour dire le point dont les coordonnées sont x, y. En ce sens, le point o est l'origine des coordonnées. Quand y est nul, c'est-à-dire quand le nombre imaginaire $x + yi$ se réduit à un nombre réel, ce nombre est représenté par un point de l'axe des abscisses, que, pour cette raison, on appelle aussi *axe des quantités réelles*, ou plus brièvement *axe réel* : J'emploierai les termes un peu incorrects *axe positif*, *axe négatif* pour désigner les demi-droites sur lesquelles sont situés les points qui représentent respectivement les nombres positifs et les nombres négatifs.

Un nombre *purement imaginaire* yi est représenté par un point situé sur l'axe des ordonnées, ou *axe des quantités purement imaginaires*, ou encore *axe imaginaire*, par un point situé au-dessus de l'axe des abscisses, ou au-dessous suivant que y est positif ou négatif. Je dirai, suivant les cas, que ce point est situé sur l'axe des ordonnées positives ou sur l'axe des ordonnées négatives.

Il va de soi que cette représentation géométrique peut être regardée soit comme un simple mode de langage, soit comme une représentation géométrique véritable, si l'on attribue une réalité au plan, aux points, ... Elle fournit pour l'emploi des nombres imaginaires des figures qui sont extrêmement utiles pour s'orienter.

Au lieu de représenter le nombre imaginaire $x + yi$ par un point A, on peut le représenter par le *vecteur* OA dont l'origine est l'origine des coordonnées (ou le point o), et l'extrémité le point A ou $x + iy$. Il est souvent commode de dire d'un vecteur quelconque qu'il représente un nombre imaginaire : on entendra que ce nombre est représenté par le vecteur OA, équipolleur au vecteur considéré, dont l'origine est le point o.

La longueur du vecteur OA, ou la distance du point $x + yi$ à l'origine des coordonnées, est ce qu'on appelle la *valeur absolue* ou le *module* [1] du nombre imaginaire $x + yi$. Ainsi la valeur absolue d'un nombre imaginaire est la racine carrée arithmétique de la somme des carrés de la partie réelle et du coefficient de i dans ce nombre. La valeur absolue est un nombre essentiellement positif, sauf dans le cas où le nombre imaginaire considéré est nul, auquel

---

(1) Il me paraît désirable de rejeter cette dernière expression, dans ce sens. Le mot *module* a déjà, en mathématiques, trop de significations diverses, en dehors de celle-là.

cas sa valeur absolue est nulle : lorsque le nombre imaginaire se réduit à un nombre réel, la valeur absolue a la même signification que dans la théorie des nombres réels. La valeur absolue d'un nombre purement imaginaire est la valeur absolue du coefficient de i dans ce nombre.

La valeur absolue d'un nombre réel ou imaginaire z se représente par $|z|$.

L'*argument* d'un nombre imaginaire $x + yi$, représenté par le point A, est l'une quelconque des valeurs de l'angle dont le premier côté est la direction positive de l'axe des abscisses et le second côté la demi-droite qui a la même origine et le même sens que le vecteur OA; cet argument est déterminé à un multiple entier de 2π près.

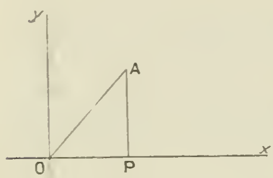

Fig. 24.

Lorsque le nombre $x + yi$ se réduit à un nombre réel, c'est-à-dire lorsque y est nul, son argument peut être pris égal à 0 si x est positif, à $-\pi$ ou à π si x est négatif; l'argument d'un nombre purement imaginaire yi peut être pris égal à $+\frac{\pi}{2}$ ou à $-\frac{\pi}{2}$ suivant que y est positif ou négatif.

L'argument de 0 est radicalement indéterminé.

La valeur principale de l'argument (ou l'argument principal) du nombre $x + yi$ est celui des arguments qui est compris entre $-\pi$ et $+\pi$; elle est entièrement déterminée lorsque $x + yi$ n'est pas un nombre négatif ou nul.

La valeur absolue et l'argument peuvent être encore définis comme il suit :

Etant donné le nombre imaginaire $x + iy$, ou les nombres réels x, y, il existe un nombre positif ρ et une infinité de nombres θ formant une progression arithmétique dont la raison est 2π, qui vérifient les deux équations

$$\rho \cos \theta = x, \qquad \rho \sin \theta = y;$$

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la valeur absolue du nombre imaginaire $x + yi$; cette valeur absolue étant déterminée, et étant supposée différente de 0, l'angle θ est déterminé, à 2π près, par les formules concordantes

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{\rho}$$

qui entraînent

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}.$$

Il suit de là qu'un nombre imaginaire $x + yi$ dont la valeur absolue et l'argument sont respectivement ρ et θ peut s'écrire

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta);$$

c'est la *forme trigonométrique* d'un nombre imaginaire. Inversement, pourvu que ρ soit positif, cette forme représente un nombre imaginaire dont la valeur absolue est ρ et l'argument θ, ou θ augmenté de tel multiple entier de 2π que l'on voudra.

Pour que deux nombres imaginaires soient égaux, il faut et il suffit que leurs valeurs absolues soient égales et que leurs arguments diffèrent d'un multiple entier de 2π.

A chaque nombre imaginaire $x + yi$ correspond le nombre imaginaire $x - yi$ qui est dit *conjugué* du premier; celui-ci est le conjugué du second. Deux nombres imaginaires conjugués sont distincts, sauf dans le cas où ils se réduisent à un nombre réel. Ils sont représentés par deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses; ils ont même valeur absolue; leurs arguments sont symétriques.

Deux nombres imaginaires symétriques sont représentés par deux points symétriques par rapport à l'origine.

324. — Si les points A, (*fig.* 25) A' représentent respectivement les nombres imaginaires $\alpha + \beta i$, $\alpha' + \beta' i$, la somme de ces deux nombres sera représentée par l'extrémité du vecteur OA'' somme géométrique des vecteurs OA, OA'. La différence $(\alpha+\beta i) - (\alpha'+\beta' i)$ sera représentée par le vecteur qui va du point A', dont l'affixe est le nombre à retrancher $\alpha' + \beta' i$, au point A d'affixe $\alpha + \beta i$, ou encore par l'extrémité A''' d'un vecteur partant du point O et équipollent au vecteur A'A.

En particulier les longueurs des vecteurs OA'', A'A sont les valeurs absolues de la somme et de la différence des nombres $\alpha + \beta i$, $\alpha' + \beta' i$.

La valeur absolue de la somme ou de la différence de deux nombres est au plus égale à la somme des valeurs absolues, et au moins égale à la différence des valeurs absolues de ces deux nombres.

Si l'on considère les deux nombres imaginaires

$$\rho (\cos \theta + i \sin \theta), \qquad \rho' (\cos \theta' + i \sin \theta')$$

dont les valeurs absolues et les arguments sont respectivement ρ, θ, ρ', θ', leur produit est

$$\begin{aligned} & \rho\rho' (\cos \theta + i \sin \theta) (\cos \theta' + i \sin \theta') \\ = & \rho\rho' [\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i (\cos \theta \sin \theta' + \cos \theta' \sin \theta)] \\ = & \rho\rho' [\cos (\theta + \theta') + i \sin (\theta + \theta')]. \end{aligned}$$

Ainsi la valeur absolue du produit de deux nombres imaginaires est le produit des valeurs absolues de ces deux nombres ; l'argu-

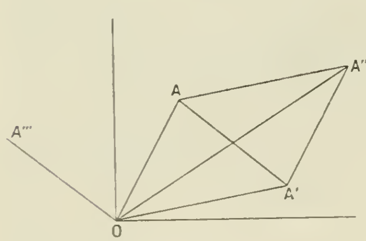

Fig. 25.

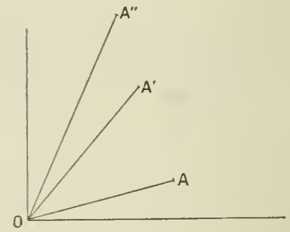

Fig. 26.

ment du produit de deux nombres imaginaires est la somme des arguments de ces deux nombres ; les propositions s'étendent immédiatement au produit de trois, quatre, ..., facteurs.

La proposition relative à la valeur absolue d'un produit fournit évidemment une nouvelle démonstration de ce qu'un produit de nombres imaginaires ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul.

Le produit de deux nombres conjugués est le carré de la valeur absolue de l'un ou l'autre de ces nombres.

Le produit de deux nombres imaginaires ne peut être réel que si la somme de leurs arguments est un multiple de π.

La multiplication du nombre imaginaire que représente le point A', par le nombre imaginaire que représente le point A (*fig.* 26) peut s'interpréter comme il suit. On fait tourner autour du point O le vecteur OA' d'un angle égal à l'argument du vecteur OA ; sur la direction ainsi obtenue on prend un point A'' tel que la longueur OA'' soit égale au produit des longueurs OA, OA'. On peut dire encore que le point A'' s'obtient en construisant sur OA' un triangle OA'A'' directement semblable au triangle OUA, dont le sommet U est le point d'affixe 1.

En particulier la multiplication d'un nombre par i, ou par $-i$, revient à faire tourner autour de O le vecteur qui représente le nombre de l'angle $+\frac{\pi}{2}$, ou $-\frac{\pi}{2}$.

Du théorème sur le produit de deux nombres résulte le théorème que voici sur le rapport.

Le rapport de deux nombres imaginaires a pour valeur absolue le rapport des valeurs absolues de ces deux nombres et pour argument la différence entre les arguments de ces deux nombres. L'argument du rapport des deux nombres représentés par les points A', A est l'angle dont il faut faire tourner le vecteur OA pour l'amener sur le vecteur OA'.

Le théorème sur la multiplication appliqué à m facteurs égaux à $\cos\theta + i\sin\theta$ donne la *formule de Moivre*

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta,$$

qui peut, si l'on veut, être regardée comme un cas particulier de la formule

$$(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\ldots(\cos\theta_m + i\sin\theta_m)$$
$$= \cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_m).$$

En développant $(\cos\theta + i\sin\theta)^m$ par la formule du binome, et tenant compte des valeurs de i^2, i^3, i^4, ..., puis égalant dans les deux membres les parties réelles et les parties imaginaires, on trouve des démonstrations immédiates des formules

$$\cos m\theta = \cos^m \theta - \frac{m(m-1)}{1.2}\cos^{m-2}\theta \sin^2\theta$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\cos^{m-4}\theta \sin^4\theta + \dots$$
$$= \cos^m\theta\left[1 - \frac{m(m-1)}{1.2}\operatorname{tg}^2\theta + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\operatorname{tg}^4\theta + \dots\right].$$
$$\sin m\theta = \frac{m}{1}\cos^{m-1}\theta\sin\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos^{m-3}\theta\sin^3\theta + \dots$$
$$= \cos^m\theta\left[\frac{m}{1}\operatorname{tg}\theta - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\operatorname{tg}^3\theta + \dots\right],$$

déjà utilisées au n° **197**. De même la formule générale fournit les relations

$$\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \dots \cos\theta_m (1 - S_2 + S_4 - S_6 + \dots$$
$$\sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_m) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \dots \cos\theta_m (S_1 - S_3 + S_5 - \dots)$$

où S_1, S_2, S_3, ... désignent la somme de $\operatorname{tg}\theta_1$, $\operatorname{tg}\theta_2$, ..., $\operatorname{tg}\theta_m$, la somme des produits deux à deux, trois à trois, ... formés avec les mêmes quantités.

En réunissant les théorèmes relatifs aux valeurs absolues d'une somme et d'un produit, on obtient la proposition suivante :

La valeur absolue d'une somme de produits de nombres imaginaires est inférieure ou égale à la somme des produits des valeurs absolues de ces nombres.

Ou encore :

Si l'on considère un polynome dont les coefficients soient tous positifs, et si l'on remplace dans ce polynome les variables par des nombres imaginaires, la valeur absolue du résultat est au plus égale au nombre positif obtenu en remplaçant les variables par les valeurs absolues des nombres imaginaires qu'on leur avait d'abord substitués.

On n'a considéré jusqu'ici que des opérations rationnelles effectuées sur des nombres imaginaires.

325. — La recherche de la racine $n^{ième}$ d'un nombre imaginaire $\alpha + \beta i$, c'est-à-dire d'une solution, par un nombre imaginaire, de l'équation

$$x^n = \alpha + \beta i,$$

peut être regardée comme un cas particulier de la recherche des racines d'une équation dont le premier membre est un polynome, racines dont l'existence est affirmée par le théorème fondamental de l'algèbre, mais la considération de l'argument permet d'obtenir immédiatement le résultat.

Soient en effet r et θ la valeur absolue et l'argument du nombre donné $\alpha + \beta i$, ρ et ω la valeur absolue et l'argument du nombre cherché : on doit avoir

$$\rho^n (\cos n\omega + i \sin n\omega) = r (\cos \theta + i \sin \theta),$$

d'où

$$\rho^n = r, \qquad n\omega = \theta + 2k\pi,$$

k étant un nombre entier arbitraire ; on en conclut $\rho = \sqrt[n]{r}$ en donnant au radical sa signification arithmétique, puis $\omega = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ et

$$x = \sqrt[n]{r} \left[\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right];$$

x est susceptible de n valeurs que l'on obtient en donnant à k n valeurs incongrues suivant le module n, c'est-à-dire telles que la différence entre deux quelconques d'entre elles ne soit pas divisible par n, par exemple les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$; les n valeurs de x sont figurées par n points situés sur le cercle de centre O et de rayon égal à $\sqrt[n]{r}$, formant les sommets d'un polygone régulier de n côtés. La valeur absolue de la différence entre deux d'entre elles est au moins égale à $2\sqrt[n]{r} \sin \frac{\pi}{2n}$. On peut les obtenir en multipliant l'une d'elles, par exemple

$$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right),$$

par les n nombres distincts

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

qui sont les racines de l'équation binome

$$x^n - 1 = 0,$$

et que l'on appelle racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

On observera que les racines $n^{\text{ièmes}}$ de $\alpha + \beta i$ peuvent s'écrire $\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i \sin\frac{\theta}{n}\right)$ en désignant par θ l'un quelconque des arguments de $\alpha + \beta i$. Si l'on choisit cet argument, la racine, en un certain sens, est déterminée par cela même ; c'est, comme on le verra, une convention qu'il est souvent commode de faire.

326. — La considération des ensembles de nombres imaginaires se confond en quelque sorte avec la considération des ensembles de points qui représentent ces nombres : les mots ensemble borné, point d'accumulation, ensemble clos, ensemble parfait s'entendront comme il a été expliqué au n° **282**.

On peut considérer de même une suite infinie de nombres imaginaires (ou de points) $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$; dire que cette suite a pour limite le nombre imaginaire Z, ou que z_n admet, pour n infini, Z pour limite, écrire

$$\lim_{n=\infty} z_n = Z,$$

cela signifie que, quelque petit que soit le nombre positif ε, il lui correspond un nombre naturel p tel que l'on ait, sous la condition $n > p$,

$$| z_n - Z | < \varepsilon,$$

ou encore que le point z_n a pour limite le point Z, ou encore que la distance entre le point Z et le point z_n a pour limite o, quand n augmente indéfiniment. Si l'on suppose que l'on ait

$$z_n = x_n + y_n i, \qquad Z = X + Yi,$$

en désignant par x_n, y_n, X, Y des nombres réels, cela revient à dire que l'on a

$$\lim_{n=\infty} x_n = X, \qquad \lim_{n=\infty} y_n = Y.$$

Pour que la suite $z_1, z_2, \ldots z_n, \ldots$ ait une limite, il faut et il suffit que, à chaque nombre positif ε, corresponde un nombre naturel n tel que l'on ait

$$| z_p - z_q | < \varepsilon,$$

pourvu que les nombres naturels p, q soient plus grands que n.

Si l'on a

$$\lim_{n=\infty} z_n = Z,$$

il est clair, à cause de la continuité de la fonction $\sqrt{x^2+y^2}$, que l'on a

$$\lim_{n=\infty} |z_n| = |Z|.$$

On reconnaît de même que, dans le cas où Z n'est pas nul, l'un des arguments de z_n a pour limite un argument de Z.

On dit que z_n tend vers ∞, ou vers le point ∞, et l'on écrit

$$\lim_{n=\infty} Z_n = \infty,$$

pour dire que la valeur absolue de z_n tend vers $+\infty$ quand m augmente indéfiniment (n° **60**). L'expression « le point ∞ » provient d'une interprétation de la représentation géométrique d'un nombre imaginaire dont je dirai un mot, en employant d'ailleurs le langage géométrique avec sa signification vulgaire.

327. — Considérons une sphère, dont le rayon, si l'on veut, sera très grand, tangente à l'origine des coordonnées au plan qui sert à représenter les nombres imaginaires : le lecteur pourra se représenter cette sphère comme étant au-dessous du plan. Soit O' l'extrémité du diamètre de la sphère qui passe par le point O, origine des coordonnées.

A chaque point A du plan on peut faire correspondre le point A_1 de la sphère où celle-ci est rencontrée par la droite qui joint le point O' au point A ; inversement on peut faire correspondre au point A_1 de la sphère le point A du plan : ce mode de correspondance est bien connu du lecteur sous le nom de projection stéréographique : remarquons que le point O' de la sphère n'a pas de correspondant dans le plan.

Ceci posé, au lieu de prendre le point A comme représentant d'un nombre imaginaire $x+yi$ on peut tout aussi bien prendre le point A_1, sa perspective sur la sphère. Dès lors, quand la valeur absolue du nombre $x+yi$ est très grande, en d'autres termes, quand le point (x, y) du plan est très éloigné de l'origine, il est clair que sa perspective sur la sphère est très voisine du point O' ;

tous les nombres dont la valeur absolue est très grande sont ainsi représentés par des points de la sphère très voisins du point O′, qui peut être regardé lui-même comme la limite de la représentation sur la sphère d'un nombre imaginaire donc la valeur absolue grandit indéfiniment. Au lieu du point O′, on dit le point ∞. On comprend dès lors l'origine de ces façons de parler « la variable, ou le point $x+yi$ tend vers le point ∞ ou s'approche du point ∞ ».

Sans me servir, dans ce qui suit, de la représentation sphérique des nombres imaginaires, je conserverai ces façons de parler, qui sont commodes, pour dire simplement que $\sqrt{x^2+y^2}$ augmente indéfiniment. Cette façon de parler d'ailleurs se justifie d'une autre façon :

Nous aurons souvent l'occasion de faire correspondre au point $Z = x + iy$ du plan le point

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} i ;$$

Le point $\frac{1}{z}$ se déduit du point z par la construction suivante : on prend d'abord le symétrique z' du point z par rapport à l'axe des abscisses, puis le point inverse du point z' par rapport au cercle de centre o et de rayon égal à 1 : ce point n'est autre que le point $\frac{1}{z}$. Sans m'arrêter à ce mode de correspondance sur lequel j'aurai l'occasion de revenir, on voit qu'à chaque point z du plan, sauf au point o, correspond un point $\frac{1}{z}$ du même plan, que lorsque z est très voisin de l'origine, le point $\frac{1}{z}$ en est très éloigné, et réciproquement. On supprime les exceptions du langage en disant que « le point ∞ du plan » et le point o se correspondent par le mode de correspondance défini plus haut. En ce sens, dire que le point $z_n = x_n + iy_n$ tend vers le point ∞ qnand n augmente indéfiniment, c'est dire que le point $\frac{1}{z_n}$ a pour limite le point o.

Observons que cette façon de parler « z_n tend vers ∞ », ou cette façon d'écrire

$$\lim_{n=\infty} z_n = \infty ,$$

donne bien un renseignement sur la valeur absolue de z_n, mais qu'elle n'en donne aucun sur l'argument de z_n. Dans quelque direction que le point z_n s'éloigne indéfiniment, que ce soit sur l'axe des abscisses, des ordonnées, sur une autre direction, à droite, à gauche, en bas et en haut, on le regarde comme tendant vers le même point ∞. Dans ce mode de langage, tous les éléments à l'infini du plan sont regardés comme condensés en un point [1] ; toutes les droites du plan, en particulier sont regardées comme passant par ce point.

J'abandonne cette digression, uniquement destinée à expliquer des façons de parler, mais je veux encore remarquer que conformément à une convention déjà faite au n° 60, tout en écrivant

$$\lim_{n=\infty} z_n = \infty,$$

j'entendrai toujours, en parlant de la limite d'une variable, que cette limite est finie.

328. — On peut considérer des séries

$$(U) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

dans lesquelles les termes sont des nombres imaginaires ; je supposerai que l'on ait en général $u_n = x_n + iy_n$, x_n et y_n désignant des nombres réels ; une telle série sera convergente si la somme S_n de ses n premiers termes a une limite pour n infini : cette limite sera la somme de la série. Si la somme S_n n'a pas de limite pour n infini, ou si elle tend vers ∞, la série est *divergente*. Dire que la série précédente est convergente, c'est dire que les deux séries à termes réels

$$(X) \qquad x_1 + x_2 + \ldots + x_n + \ldots,$$

$$(Y) \qquad y_1 + y_2 + \ldots + y_n + \ldots$$

sont convergentes ; si l'on désigne par X, Y les sommes respectives de ces séries, la somme de la série proposée est $X + Yi$.

Pour que la série (U) soit convergente, il faut et il suffit qu'on

(1) Au lieu d'être regardés comme situés sur une droite, ainsi que dans la géométrie projective.

puisse faire correspondre à chaque nombre positif ε un nombre naturel n tel que l'on ait

$$|u_p + u_{p+1} + \ldots + u_q| < \varepsilon$$

sous les conditions $q > p > n$ (n° **56**).

On dit que la série (U) est absolument convergente si la série à termes positifs ou nuls

$$u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n + \ldots$$

formée avec les valeurs absolues $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n, \ldots$ des termes de la la série (U) est convergente. S'il en est ainsi, il est clair que les deux séries à termes réels (X), (Y) sont absolument convergentes, puisque les valeurs absolues de leurs termes sont au plus égales aux termes correspondants de la série (U'), et il s'ensuit que la série (U), supposée *absolument convergente* au sens qu'on vient de dire, est *convergente* en ce sens que la somme de ses n premiers termes tend vers une limite quand n augmente indéfiniment. Au reste cette conséquence résulterait aussi bien de la règle générale qu'on vient de donner.

Si la série (U) est absolument convergente, les sommes des séries (X), (Y) à termes réels, qui sont elles-mêmes absolument convergentes, ne dépendent pas de l'ordre de leurs termes : il en est donc de même de la somme de la série (U).

La valeur absolue de la somme des n premiers termes de la série absolument convergente (U) est au plus égale à la somme des n premiers termes de la série (U') ; il en résulte que la valeur absolue de la somme de la série (U) est au plus égale à la somme de la série U'.

Le *reste* d'une série convergente à termes imaginaires se définit comme dans le cas d'une série à termes réels. Si l'on a affaire à une série absolument convergente, il suit de la proposition précédente que la valeur absolue de son reste est au plus égale au reste correspondant de la série (U').

En restant toujours dans les séries absolument convergentes, il est clair que les propositions qui concernent les séries à entrée multiple (n^{os} **105, 106, 107**), la règle pour la mulplication des séries (n° **114**), fondées uniquement sur des identités formelles qui subsistent que les termes soient réels ou imaginaires, et sur ce fait que la valeur absolue d'une somme est au plus égale à la somme des valeurs absolues de ses termes, s'appliquent évidemment dans le cas où les séries ont leurs termes imaginaires.

327. — Les propositions du n° **139** s'étendent, en les modifiant convenablement, aux séries à termes imaginaires.

Considérons une suite de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n, \ldots$ tels que la série à termes positifs

$$(\varepsilon) \qquad |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\varepsilon_2 - \varepsilon_3| + \ldots + |\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n| + \ldots$$

soit convergente et remarquons d'abord que cette hypothèse entraîne l'existence d'une limite pour ε_n quand n augmente indéfiniment. En effet dire que la série précédente est convergente c'est dire que la série dont le $n^{\text{ième}}$ terme est $(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1})$ converge absolument : or, la somme des $n - 1$ premiers termes de cette série est $\varepsilon_1 - \varepsilon_n$.

Ceci posé, considérons, avec la série (U), la série

$$\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \ldots + \varepsilon_n u_n + \ldots;$$

On peut en désignant par S_n la somme des n premiers termes de la série (U), écrire

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \ldots + \varepsilon_n u_n &= \varepsilon_1 S_1 + \varepsilon_2 (S_2 - S_1) + \ldots + \varepsilon_n (S_n - S_{n-1}) \\ &= (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) S_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) S_2 + \ldots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) S_{n-1} + \varepsilon_n S_n.\end{aligned}$$

Le premier membre aura certainement une limite pour n infini, si les deux quantités $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) S_1 + \ldots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) S_{n-1}$ et $\varepsilon_n S_n$ ont chacune une limite.

Supposons que l'ensemble des nombres $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ soit borné, ce qui arrivera en particulier si la série (U) est convergente; la série

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) S_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) S_2 + \ldots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) S_{n-1} + \ldots$$

sera convergente et même absolument convergente, comme il résulte immédiatement de l'hypothèse relative à la série (ε) et de la règle n° **130** : il suit de là que l'expression

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) S_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3) S_2 + \ldots + (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) S_{n-1}$$

a une limite pour n infini ; il en est de même de $\varepsilon_n S_n$, si S_n a une limite pour n infini ou bien si l'ensemble des nombres S_n étant borné, on a $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$.

Donc, en supposant convergente la série

$$|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + |\varepsilon_2 - \varepsilon_3| + \ldots + |\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n| + \ldots,$$

on peut affirmer la convergence de la série

$$\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \ldots + \varepsilon_n u_n + \ldots$$

1° quand la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

est convergente ; 2° quand la somme des n premiers termes de cette série reste, quel que soit n, moindre en valeur absolue qu'un nombre positif fixe et que l'on a $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$ [1].

330. — Le produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + a_n)$$

où a_n désigne un nombre réel ou imaginaire est dit *absolument convergent* si la série $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty} a_n$ est absolument convergente, c'est-à-dire si la série à termes positifs ou nuls

$$a'_1 + a'_2 + \ldots + a'_n + \ldots$$

où l'on a posé $a'_n = |a_n|$ est convergente.

---

[1] Ces deux propositions sont dues à M. Dedekind, qui les a données dans ses *Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie*. Voir dans le tome XXXVI des *Sitzungsberichte* de l'Académie des Sciences de Bavière un Mémoire de M. Landau *Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen*, d'où je les ai extraites.

S'il en est ainsi, on montrera que le produit des n premiers facteurs, à savoir

$$\prod_{\chi=1}^{\chi=n}(1+a_\chi)$$

tend vers une limite quand n augmente indéfiniment; cette limite est la *valeur* du produit infini. Cette valeur est indépendante de l'ordre des facteurs. Elle ne peut être nulle que si un facteur est nul. Tout cela résulte immédiatement du n° **119**, dont les raisonnements s'appliquent immédiatement au cas où les nombres a_n sont imaginaires. Les propositions concernant les produits infinis (absolument convergents) à entrée multiple, les règles pour la transformation d'un produit infini absolument convergent en série.... subsistent ainsi que leurs démonstrations.

CHAPITRE XI

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES

I. — FONCTIONS RATIONNELLES ; EXEMPLES DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES

331. — Il n'y a aucune difficulté à transporter aux fonctions de variables imaginaires les définitions générales qui ont été données dans le Chapitre IV.

Considérons un ensemble (E) de nombres imaginaires : on regardera ces nombres comme des valeurs qui peuvent être attribuées à une lettre z. Supposons qu'à chaque élément de l'ensemble (E) corresponde un nombre imaginaire qui sera regardé comme une valeur attribuée à la lettre z' ; z' sera une fonction $f(z)$ de la variable z, déterminée dans l'ensemble (E). Les valeurs distinctes de z' forment elles-mêmes un ensemble (E′) de nombres imaginaires dont chacun correspond à un ou plusieurs éléments de (E) ; si chaque élément de (E′) ne correspond qu'à un élément de (E), c'est-à-dire si les valeurs de z' qui correspondent à deux valeurs distinctes de z sont toujours distinctes, la correspondance entre les deux ensembles (E), (E′) est parfaite et l'on peut regarder z comme une fonction $F(z')$ de z' déterminée dans l'ensemble (E′) ; les deux fonctions $f(z)$, $F(z')$ sont inverses l'une de l'autre.

Puisqu'un nombre imaginaire n'est qu'un système de deux nombres réels, on peut regarder les ensembles (E), (E′) comme des ensembles dont les éléments sont des systèmes de deux nombres réels, ou encore des points ; les valeurs de z, z' sont les affixes de ces points. Une fonction de variable imaginaire, telle qu'on vient de la définir, n'est rien autre chose qu'une correspondance entre deux ensembles de points, et l'on se trouve avoir répété, avec de légères différences dans le langage et les notations, ce qu'on a dit au début du n° **286**. Ce qu'il faut entendre quand on dit que la fonction $f(z)$ est continue en un point d'accumulation de (E) qui appartient à cet ensemble, qu'elle est continue dans tout l'ensemble (E) supposé clos, le fait que la fonction est alors uniformément continue dans l'ensemble (E), tout cela a été expliqué au n° **286** ; on y a vu encore que si la fonction $f(z)$ est continue dans l'ensemble clos (E), et si la correspondance entre les ensembles (E), (E') est parfaite, l'ensemble (E') est clos et la fonction $F(z')$, inverse de la fonction $f(z)$, est continue dans l'ensemble (E').

Si l'on pose $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, en désignant par x, y, x', y' des variables réelles, deux éléments correspondants des ensembles (E), (E') peuvent se représenter par (x, y), (x', y') et la définition de z' comme fonction de z revient à la définition, dans le même ensemble, de deux fonctions réelles

$$x' = \varphi(x, y), \quad y' = \psi(x, y)$$

des variables réelles x, y. Si $f(z)$ est une fonction continue en un point d'accumulation z_0 ou (x_0, y_0) de l'ensemble (E) des points (x, y), les fonctions $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ seront continues au point (x_0, y_0). Ces mêmes fonctions seront (uniformément) continues dans tout l'ensemble (E), supposé clos, si la fonction $f(z)$ est continue dans cet ensemble ; il en sera de même de la valeur absolue de $f(z)$ ou de la fonction $\sqrt{x'^2 + y'^2}$, qui atteint par conséquent son maximum et son minimum pour des points appartenant à (E).

Les façons d'écrire que voici

$$\lim_{z=a} f(z) = \infty,$$

$$\lim_{z=\infty} f(z) = A,$$

$$\lim_{z=\infty} f(z) = \infty$$

ont à peine besoin d'explication. La première suppose que la fonction $f(z)$ est définie dans un ensemble (E) dont a est un point d'accumulation ; elle signifie que l'on peut faire correspondre à chaque nombre positif P, si grand qu'il soit, un nombre positif ε

tel que l'on ait $|f(z)| > P$, pourvu que z appartienne à l'ensemble et que l'on ait $|z - a| < \varepsilon$; la seconde et la troisième supposent que la fonction $f(z)$ est définie dans un ensemble contenant des nombres z dont la valeur absolue est aussi grande qu'on veut, et signifient : la seconde, qu'à chaque nombre positif ε, aussi petit qu'on le veut, on peut faire correspondre un nombre positif P tel que l'on ait

$$|f(z) - A| < \varepsilon,$$

sous la condition que z appartienne à l'ensemble et que l'on ait $|z| > P$: la troisième, qu'à chaque nombre positif P, aussi grand qu'on le veut, on peut faire correspondre un nombre positif Q tel que l'on ait

$$|f(z)| > P$$

sous la condition que z appartienne à l'ensemble et que l'on ait

$$|z| > Q.$$

En convenant de parler comme si le point ∞ appartenait à l'ensemble (E) et d'attribuer en ce point la valeur A à la fonction $f(z)$ on peut, au lieu d'écrire $\lim\limits_{z=\infty} f(z) = A$, dire que la fonction $f(z)$ est continue au point ∞.

Quand on dit d'une fonction $f(z)$ qu'elle est continue au point z_0 sans parler de l'ensemble des valeurs de z dans lequel la fonction est déterminée, on entend d'une part que la fonction $f(z)$ est déterminée dans les environs du point z_0, c'est-à-dire pour tous les points z qui appartiennent à un cercle de centre z_0 et de rayon suffisamment petit, et, d'autre part, que, si on la regarde comme étant définie dans cet ensemble de points, dont le point z_0 est manifestement un point d'accumulation, elle est continue en ce point.

Rien n'empêche de prendre pour l'ensemble (E) un lieu (T) défini par les formules

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad \alpha \leqq t \leqq \beta;$$

c'est un ensemble parfait. Définir, dans cet ensemble, la fonction $z' = f(z)$ comme une fonction continue, c'est définir x', y' comme des fonctions réelles continues de la variable réelle t dans l'intervalle (α, β); l'ensemble des points z' ou (x', y') constitue un lien (T'). En parlant du point t du lien (T) ou du lien (T') on entend le point de l'un ou de l'autre de ces liens qui correspond à la valeur t du paramètre.

Si z' ne s'annule pour aucune valeur de t appartenant à l'intervalle (α, β), si, en d'autres termes, le lien (T') ne passe pas par l'origine O des coordonnées, on pourra, d'une infinité de façons, définir l'argument de z' comme une fonction continue de t; cette fonction sera déterminée si l'on se donne la valeur qu'elle doit prendre en un point t_0 du lien (T'), laquelle doit, bien entendu, être une des valeurs de l'argument de z' en ce point. Les autres fonctions répondant à la question s'obtiennent en ajoutant à celle-là un multiple de 2π. La différence entre les valeurs de l'une quelconque de ces fonctions pour $t = t_0$ et $t = t_1$, ou, comme l'on dit, la variation de l'argument de z' quand on passe du point t_0 au point t_1 est l'angle, défini au moyen du lien (T'), dont le premier côté est la direction qui va de l'origine O au point t_0 du lien (T') et le second côté la direction qui va de l'origine au point t_1 du même lien (n° **292**).

Quand le lien (T) est fermé, il en est évidemment de même du lien (T'), et la variation de l'argument, lorsqu'on passe de l'origine α de ce lien à l'extrémité β, confondue avec l'origine, n'est autre chose que l'ordre, multiplié par 2π, du point O par rapport au lien (T').

Considérons maintenant une courbe fermée simple (F), le continuum (C) intérieur à cette courbe et l'ensemble parfait $(C) + (F)$ dont les points appartiennent soit à (C) soit à (F); prenons cet ensemble parfait pour l'ensemble (E); dire que la fonction

$$z' = x' + iy' = f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

est définie et continue dans cet ensemble, c'est dire que les fonctions réelles $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ sont elles-mêmes définies et continues dans cet ensemble. Soit (F') l'ensemble des points z' ou (x', y') qui correspondent aux points de (F): (F') est un lien fermé; si ce lien ne passe pas par le point O, ce point admet un certain ordre par rapport à (F'), qui n'est autre chose, au facteur 2π près, que la variation qu'éprouve l'argument de z' quand le point z décrit une fois la courbe fermée (F). Si cette variation n'est pas nulle, on peut affirmer (n° **315**) que les deux équations

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0$$

admettent une solution (x_0, y_0) qui appartient au continuum (C); on peut tout aussi bien dire que l'équation $f(z) = 0$ admet une racine en un point de ce même continuum.

Les définitions et propositions concernant la convergence uniforme des séries ou des produits infinis dont les termes sont des fonctions d'une variable (**179-186**) se transportent sans difficulté au cas d'une variable imaginaire; je crois inutile d'y revenir; le lecteur ne peut avoir aucune peine à faire les petits changements indispensables, soit dans le langage, soit dans l'interprétation. Il devra toutefois laisser de côté le n° **184**, relatif aux séries entières; c'est là un sujet très important sur lequel j'insisterai bientôt.

332. — Au point de vue où je me suis placé dans le précédent numéro, les fonctions de variables imaginaires ne présentent rien de nouveau; on a répété, en changeant un peu le langage, ce que l'on avait dit au n° **286**; on a parlé d'une fonction d'une variable imaginaire au lieu de parler de deux fonctions (réelles) de deux variables réelles. On ne conçoit guère qu'il puisse y avoir grand intérêt à rester à ce point de vue général. Les fonctions particulières que je vais considérer seront définies, soit dans tout le plan, soit dans certains continuums complétés, ou non, par leurs frontières, de façon à conserver autant que possible les propriétés des fonctions d'une seule variable. Elles rentrent dans la classe des *fonctions analytiques* qui seront définies ultérieurement dans leur généralité.

Par exemple, si l'on voulait rester dans l'ordre d'idées du numéro précédent, il serait naturel, en désignant par x, y des variables réelles, d'appeler fonction rationnelle entière de $z = x + iy$, ou polynome en z, une expression de la forme $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, en désignant par $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ des polynomes quelconques à coefficients réels en x, y, d'appeler fonction rationnelle de z une expression de la même forme, où $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ seraient des fonctions rationnelles à coefficients réels, des deux variables x, y; mais, encore une fois, en procédant ainsi, on n'aurait rien de plus qu'en considérant deux polynomes, ou deux fonctions rationnelles en x, y.

On appelle fonction rationnelle entière en $z = x + yi$, ou polynome en z, une expression de la forme

$$g(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_n,$$

où $A_0, A_1, \ldots, A_n$ sont des nombres réels ou imaginaires ; c'est là aussi une généralisation très naturelle des polynomes à coefficients réels, ne dépendant que d'une variable. Un polynome du degré n, tel qu'on vient de le définir, peut bien se mettre, en posant $z = x + iy$, sous la forme $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, où $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ désignent des polynomes entiers en x, y à coefficients réels ; mais ces polynomes sont très particuliers, comme on le voit immédiatement en faisant le compte des $2n + 2$ coefficients réels qui y figurent, à savoir les $n + 1$ parties réelles et les $n + 1$ coefficients de i dans $A_0, A_1, \ldots, A_n$, tandis que, dans deux polynomes généraux à deux variables, du degré n, il y a $(n + 1)(n + 2)$ coefficients. Une fonction rationnelle en z sera le quotient de deux polynomes en z ; elle est bien de la forme $\varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ où φ et ψ sont des fonctions rationnelles de x, y, mais ici encore φ et ψ sont des fonctions rationnelles très particulières de x, y, comme on le voit toujours en faisant le compte des constantes.

Plusieurs propriétés des polynomes réels s'étendent immédiatement aux polynomes à coefficients et à variables imaginaires.

Tout d'abord un polynome en z, dont on donne les coefficients, est évidemment une fonction de z définie pour toute valeur de z, ou, comme on dit, dans tout le plan qui sert à représenter cette variable.

Les remarques du n° **173** sur la continuité au point o, sur la façon d'ordonner un polynome quand on veut l'étudier aux environs de ce point, sur l'impossibilité qu'un polynome soit nul pour toutes les valeurs de la variable sans être identiquement nul, sur la condition relative à l'identité de deux polynomes, la proposition d'après laquelle la valeur absolue d'un polynome dépasse tel nombre positif que l'on veut, pourvu que la valeur absolue de la variable dépasse un nombre positif, convenablement choisi, la notion de la dérivée, de racine simple ou multiple, la continuité en un point quelconque s'établissent exactement comme dans le cas d'une variable réelle. Seules, les propositions concernant le signe du polynome, ou son mode de croissance, n'ont pas ici leurs équivalentes.

D'un autre côté, la règle de la division algébrique et ses conséquences s'appliquent sans modification. Il en est de même des propositions contenues dans le n° **174** et des formes qui permettent d'étudier une fraction rationnelle dans le voisinage de o, d'un point quelconque, pour les valeurs de la variable très grandes en valeur absolue, ou, comme l'on dit, dans le voisinage du point ∞, du calcul des vraies valeurs d'une fraction rationnelle, ...

333. — Les propositions relatives aux polynomes doivent être complétées par la démonstration du théorème fondamental de l'Algèbre, énoncé au n° **321** sous une forme purement algébrique, qu'on peut remplacer par la suivante :

Tout polynome en z, à coefficients réels ou imaginaires, admet une racine réelle ou imaginaire.

Cette proposition résulte immédiatement des observations qui ont été faites au n° **315**.

Considérons en effet, en posant toujours $z = x + iy$, le polynome en z

$$z' = f(z) = A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_n = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Désignons en général par a_k, α_k ($k = 0, 1, 2, \ldots n$) la valeur absolue et l'argument du coefficient A_k, par r et par θ la valeur absolue et l'argument de z, par r' et θ' la valeur absolue et l'argument de z', on aura

$$\begin{aligned} x' = r' \cos\theta' &= a_0 r^n \cos(\alpha_0 + n\theta) + a_1 r^{n-1} \cos[\alpha_1 + (n-1)\theta] + \ldots \\ &\quad + a_n \cos\alpha_n, \\ y' = r' \sin\theta' &= a_0 r^n \sin(\alpha_0 + n\theta) + a_1 r^{n-1} \sin[\alpha_1 + (n-1)\theta] + \ldots \\ &\quad + a_n \sin\alpha_n. \end{aligned}$$

On suppose essentiellement que a_0 n'est pas nul. On voit tout de suite que le rapport

$$\frac{r'}{r^n} = a_0 \sqrt{1 + \frac{1}{r}\frac{2a_1}{a_0}\cos(\alpha_0 - \alpha_1 + \theta) + \ldots}$$

est très voisin de α_0 quand r est un nombre positif très grand; et que l'on peut par conséquent écrire

$$\cos\theta' = \cos(\alpha_0 + n\theta) + \varepsilon, \qquad \sin\theta' = \sin(\alpha_0 + n\theta) + \eta,$$

en désignant par ε, η des nombres réels qui sont aussi petits qu'on le veut, en valeur absolue, pourvu que r soit suffisamment grand; l'une des valeurs de θ' qui vérifient les équations précédentes est alors très voisine de $\alpha_0 + n\theta$.

Considérons un nombre positif R très grand et le cercle (Γ) de rayon R dont le centre est l'origine O des coordonnées. Soit (C) le continuum intérieur au cercle (Γ); si R est suffisamment grand, la valeur absolue du polynome z' est elle-même très grande sur (Γ) et pour les points extérieurs à (Γ); en particulier z' ne s'annule pour aucun point de (Γ). Si l'on fait croître θ de o à 2π, le point

$$z = R(\cos\theta + i\sin\theta)$$

décrira le cercle (Γ) dans le sens direct, et le point correspondant z' décrira un lieu fermé correspondant (Γ'); d'après ce qu'on vient de dire, on peut prendre pour l'argument θ' de z' une valeur voisine de $\alpha_0 + n\theta$; cet argument θ', ainsi défini, sera une fonction continue de θ: quand le point z décrit (Γ) dans le sens direct, la variation de l'argument de z' est alors voisine de $2n\pi$: elle est exactement égale à $2n\pi$ puisqu'elle doit être un multiple de 2π; l'ordre du point o par rapport au lieu fermé (Γ') est n. La fonction $f(z)$ s'annule donc pour un point intérieur au continuum (C).

Ainsi qu'on le sait, il résulte de là très aisément que le polynome $f(z)$ admet n racines, en comptant chaque racine autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité: si l'on désigne par z_1, z_2, …, z_p les racines distinctes de $f(z)$ et par α_1, α_2, …, α_p leurs ordres respectifs de multiplicité, on a, identiquement en z,

$$f(z) = A_0(z - z_1)^{\alpha_1}(z - z_2)^{\alpha_2}\dots(z - z_p)^{\alpha_p},$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = n.$$

Inversement, une pareille identité exige que z_1, z_2, …, z_p soient les racines de $f(z)$ et α_1, α_2, …, α_p leurs ordres de multiplicité; les nombres $z_1, z_2, \ldots z_p$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ sont déterminés quand on se donne les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Si ces coefficients sont réels, à chaque racine imaginaire (non réelle), correspond une racine imaginaire conjuguée avec le même ordre de multiplicité.

Il est maintenant aisé d'établir la proposition suivante.

334. — Soit (F) une courbe fermée simple qui ne passe par aucun des points $z_1, z_2, \ldots, z_p$: la variation de l'argument de $f(z)$, quand le point z décrit une fois la courbe (F) dans le sens direct est égale au produit par 2π du nombre de racines de l'équation $f(z) = 0$ situées à l'intérieur de (F), chacune des racines étant comptée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

En effet, considérons d'abord le cas simple où (F) est un cercle décrit de l'une des racines comme centre, de z_1 par exemple, et qui ne contient ni à son intérieur ni sur sa circonférence aucune autre racine.

Partons de la formule qui donne la décomposition de $f(z)$ en facteurs ; l'argument de $f(z)$ doit être défini comme une fonction continue sur le cercle : on peut, pour cela, le regarder comme la somme des arguments des facteurs, pourvu que ces arguments soient eux-mêmes des fonctions continues sur le cercle. La variation de l'argument de $f(z)$, quand le point z décrit le cercle une fois est la somme des variations des arguments des facteurs ; parmi ces facteurs, on n'a pas à tenir compte de la constante A. La variation de l'argument de $z - z_2$ est l'angle décrit par la direction qui va de z_2 à z quand z décrit le cercle ; cet angle est manifestement nul ; la variation des arguments des facteurs $(z - z_2)^{\alpha_2}$, $(z - z_3)^{\alpha_3}, \ldots$ est nulle ; au contraire l'angle que décrit le rayon qui va de z_1 à z est égal à 2π quand le point z décrit le cercle dans le sens direct ; la variation du facteur $(z - z_1)^{\alpha_1}$ est $2\pi\alpha_1$; dans ce cas particulier, la proposition est établie.

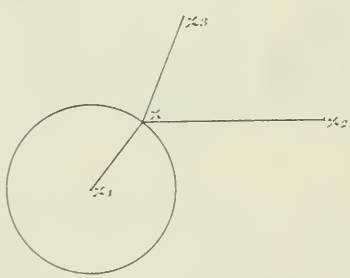

Fig. 27.

Considérons maintenant une courbe fermée simple (F) contenant à son intérieur plusieurs racines distinctes $z_1, z_2, \ldots, z_p$: aucune autre racine ne doit se trouver d'ailleurs ni sur (F), ni à l'intérieur de (F) ; regardons les points $z_1, z_2, \ldots, z_p$ comme les centres de cercles $(F_1), (F_2), \ldots, (F_p)$ assez petits pour être tous intérieurs à (F) et extérieurs les uns aux autres ; regardons le point $f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ comme l'image du point $z = x + iy$; les propositions établies au n° **315** s'appliquent immédiatement : les équations $f(z) = 0$, ou les équations $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ ne sont vérifiées pour aucun point du continuum obtenu en supprimant de l'intérieur de (F) les points qui appartiennent aux cercles $(F_1), (F_2), \ldots, (F_p)$, ni pour aucun point de la frontière de ce continuum : l'ordre total du point o par rapport à l'image de la courbe (F) et des cercles $(F_1), (F_2), \ldots, (F_p)$ est nul ; on peut dire aussi que l'ordre du point o par rapport à l'image de (F) est égal à la somme des ordres du même point par rapport aux images des cercles, toutes les images étant décrites dans le sens qui correspond au sens direct, ou encore que la variation de l'argument de $f(z)$ quand le point z décrit la courbe (F) dans le sens direct est égale à la somme des variations de l'argument de $f(z)$ quand le point z décrit dans le sens direct les cercles $(F_1), (F_2), \ldots, (F_p)$, c'est-à-dire à $2\pi(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p)$.

335. — Une fonction rationnelle de z

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$$

est le quotient de deux polynomes en z, $\varphi(z)$ et $\psi(z)$. Il est clair qu'une telle fonction est continue pour chaque point z, sauf pour ceux qui annulent $\psi(z)$, lesquels d'après le théorème fondamental de l'algèbre, sont en nombre fini. Soit a un tel point. On a vu au n° **174** comment on pouvait étudier la fonction $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ aux environs du point a, comment en particulier cette fonction avait *une vraie valeur* lorsque a était une racine commune à $\varphi(z)$ et à $\psi(z)$, d'ordre de multiplicité dans $\varphi(z)$ au moins égal à l'ordre de multiplicité dans $\psi(z)$; il est assez naturel d'attribuer alors à la fraction rationnelle cette « vraie valeur » pour $z = a$; lorsque a n'est pas racine de $\varphi(z)$, ou est pour $\varphi(z)$ une racine d'ordre de multiplicité moindre que pour $\psi(z)$, la fraction rationnelle se met sous la forme

$$\frac{A}{(z-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(z-a)^{\alpha-1}} + \dots \frac{A_{\alpha-1}}{z-a} + \frac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}$$

où A, $A_1, \dots A_{\alpha-1}$ sont des constantes réelles ou imaginaires et où $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ sont deux polynomes en z dont le second ne s'annule plus pour $z=a$; cette formule montre de suite que la valeur absolue de la fraction augmente indéfiniment quand ce point z s'approche du point a; en d'autres termes, on peut écrire

$$\lim_{z=a} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \infty.$$

Lorsqu'une fonction rationnelle peut être mise sous une telle forme, on dit que le point a est un pôle d'ordre de multiplicité α de cette fonction, un pôle simple si α est égal à 1. Le coefficient $A_{\alpha-1}$ qui joue un rôle très particulier, comme on le verra plus tard, s'appelle le résidu de la fonction relatif au pôle a.

Si l'on convient toujours d'attribuer à une fonction rationnelle $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ sa vraie valeur, lorsqu'elle en a une, rien n'empêche de supprimer d'abord les facteurs communs au numérateur et au dénominateur, en d'autres termes de regarder $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ comme des polynomes premiers entre eux; les seuls pôles de la fraction sont alors les racines du dénominateur, et l'ordre de multiplicité d'un pôle a est l'ordre de multiplicité α de a regardé comme racine de $\psi(z)$; dans ce même cas, $\psi_1(z)$ est égal au quotient de la division de $\psi(z)$ par $(z-a)^{\alpha}$.

336. — La définition de toute fonction $y=f(x)$ de la variable imaginaire (x) [1] équivaut à une correspondance entre le point x et le point y, le premier étant naturellement assujetti à rester dans l'ensemble (E) où la fonction $f(x)$ est définie. Il sera bon de se rendre compte de la nature de cette correspondance, pour quel-

---

[1] Jusqu'ici lorsqu'il s'agissait d'une variable imaginaire les lettres x, y étaient employées pour désigner la partie réelle et le coefficient de i de cette variable, ou, si l'on veut, les coordonnées du point dont la variable était l'affixe. J'abandonne cette habitude, et j'emploierai aussi bien les lettres x, y pour désigner des variables imaginaires quelconques.

ques-unes des fonctions de variable imaginaire déjà définies. Il peut être commode de se figurer les variables x, y comme représentées dans des plans distincts, *le plan des x* et *le plan des y*; parfois aussi, il est commode de se figurer ces deux plans comme coïncidants.

Si la fonction $f(x)$ est un polynome, elle est définie dans tout le plan; à chaque point du plan des x correspond un point du plan des y. Si la fonction $y = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ est une fonction rationnelle ou le quotient de deux polynomes, que l'on peut supposer premiers entre eux, elle est définie pour tous les points du plan des x, sauf pour ses pôles, où l'on peut dire qu'elle est infinie. Ces pôles sont en nombre fini.

Si l'on considère la fonction $y = x + a$, où a est une constante, et si l'on figure le point a, on voit que cette fonction fait correspondre à chaque point x un point y, extrémité d'un vecteur ayant le point x pour origine et équipollent au vecteur qui a pour origine le point o et pour extrémité le point a. En d'autres termes le point y correspondant à x se déduit de ce dernier par une *translation* égale à ce vecteur.

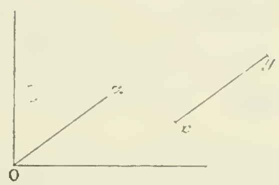

Fig. 28.

Soit maintenant $y = ax$, et supposons d'abord a réel. La correspondance entre le point x et le point y est une homothétie dont le

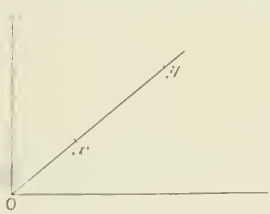

Fig. 29.

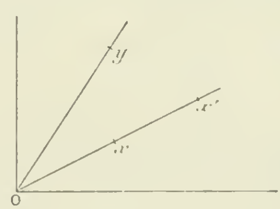

Fig. 30.

centre sera le point o et le rapport le nombre a; l'homothétie est directe ou inverse suivant que a est positif ou négatif.

Si $a = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ est imaginaire, on pourra remplacer la relation $y = ax$ par les deux relations

$$x' = rx \quad , \quad y = x'(\cos\theta + i\sin\theta).$$

La première fera correspondre au point x le point x' par homothétie directe. La seconde fera correspondre au point x' le point qui s'en déduit en faisant tourner de l'angle θ, autour du point o, le vecteur qui part de ce même point et aboutit au point x'. Il est clair que la correspondance entre y et x est une correspondance par *similitude*. Le point o est le centre de similitude.

Soit $y = ax + b$: on substituera à cette relation, les deux suivantes

$$x' = ax \quad , \quad y = x' + b$$

qui définissent deux correspondances déjà étudiées ; il est clair, d'après cela, que la correspondance définie par l'égalité $y = ax + b$ est une correspondance par similitude. C'est la correspondance par similitude directe la plus générale possible, si l'on ne fixe pas les constantes a, b. Le centre de similitude est le point $\frac{b}{1 - a}$.

On a dit déjà quelques mots (n° **327**) de la correspondance définie par la relation $y = \frac{1}{x}$: considérons d'une façon plus générale la relation $y = \frac{a}{x}$ et supposons d'abord que a soit positif.

On déduira le point y du point x de la façon suivante : on décrit du point o comme centre un cercle de rayon égal à $\sqrt{a}$, et on prend le point x' symétrique (1) du point x par rapport à ce cercle, puis le point y symétrique du point x' par rapport à l'axe des abscisses ; ces deux opérations peuvent d'ailleurs être interverties.

Si $a = r(\cos\omega + i\sin\omega)$ est imaginaire, on remplace la relation $y = \frac{a}{x}$ par les deux relations

$$x' = x(\cos\omega + i\sin\omega) \quad , \quad y = \frac{r}{x'},$$

dont la première revient à une rotation autour de l'origine, la seconde à une symétrie par rapport à l'axe des abscisses suivie

(1) C'est-à-dire un point situé sur la demi-droite qui part du centre et qui contient le point x, de manière que le produit des distances des points x, x' au centre soit égal au carré du rayon du cercle. Le point x' peut être aussi regardé comme le second point commun à tous les cercles passant par le point x et orthogonaux au cercle donné. Cette définition s'appliquerait encore si le dernier cercle était remplacé par une droite et conduirait alors à la symétrie ordinaire.

d'une symétrie par rapport à un cercle de rayon $\sqrt{r}$ ayant son centre à l'origine. La rotation autour de l'origine et la symétrie par rapport à l'axe des x reviennent à une symétrie par rapport à une droite convenable passant par l'origine. On déduit de là aisément, en remarquant que la transformation $y = \frac{a}{x}$ laisse inaltérés les deux points $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$, que cette transformation revient à une symétrie par rapport à la droite qui joint ces deux points, suivie d'une symétrie par rapport au cercle décrit sur cette droite comme diamètre.

Une telle transformation change en cercles les cercles et les droites qui ne passent pas par l'origine, elle change en droites les cercles et les droites qui passent par l'origine.

Soit la fonction

$$y = \frac{ax + b}{a'x + b'} = \frac{a}{a'} + \frac{\dfrac{ba' - ab'}{a'^2}}{x + \dfrac{b'}{a'}}$$

où l'on suppose a' et $ba' - ab'$ différents de zéro ; on remplacera la transformation précédente par les transformations suivantes

$$x' = x + \frac{b'}{a'}, \quad x'' = \frac{ba' - ab'}{a'^2} \frac{1}{x'}, \quad y = x'' + \frac{a}{a'},$$

dont la première est une translation, la seconde une symétrie par rapport à une droite suivie d'une symétrie par rapport à un cercle, la troisième encore une translation ; cette décomposition montre que la transformation proposée, d'une part n'altère pas les angles, d'autre part change les droites et les cercles du plan des x en droites ou en cercles dans le plan des y. Si on convient de regarder les droites d'un plan comme des cercles qui passent par le point ∞ de ce plan, on dira que la transformation considérée change les cercles en cercles ; il en est évidemment de même de la transformation *inverse*

$$x = \frac{-b'y + b}{a'y - a}$$

qui est de même nature que la proposée.

La propriété de la transformation considérée de changer les cercles en cercles résulte aussi de la relation

$$\frac{y - y_1}{y - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2} : \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}$$

qui lie évidemment quatre points x, x_1, x_2, x_3 à leurs correspondants y, y_1, y_2, y_3 ; notons, en passant, que cette relation prouve que la transformation considérée est déterminée quand on se donne trois points x_1, x_2, x_3 et leurs correspondants y_1, y_2, y_3. Elle montre, en considérant les valeurs absolues des rapports qui figurent dans les deux membres, que si le point x décrit un cercle tel que le rapport des distances d'un point quelconque de ce cercle aux deux points fixes x_1, x_2, soit constant, c'est-à-dire un cercle appartenant au faisceau dont les points x_1, x_2 sont les *points limites* (au sens de la géométrie des cercles), le point y décrira un cercle tel que le rapport des distances d'un quelconque de ses points aux points y_1, y_2 soit aussi constant, c'est-à-dire un cercle appartenant au faisceau de cercles dont les points y_1, y_2 sont les points limites.

La même relation, en considérant les arguments au lieu des rapports, et en se rappelant les théorèmes de géométrie sur les angles inscrits, montre que, si le point x décrit un cercle passant par les points x_1, x_2, le point y décrira un cercle passant par les points y_1, y_2. On voit ainsi que la transformation considérée change un faisceau de cercles en un faisceau de cercles, deux faisceaux de cercles tels que les cercles du premier faisceau soient orthogonaux aux cercles du second faisceau, en deux faisceaux qui jouissent de la même propriété ; cela résulte aussi du principe de la conservation des angles, en vertu duquel il est clair que deux cercles orthogonaux doivent se changer en deux cercles orthogonaux. La figure formée par un cercle et deux points symétriques par rapport à ce cercle se change en un cercle et deux points symétriques par rapport à ce cercle.

Au point ∞ du plan des x correspond le point $\frac{a}{a'}$ du plan des y ; les droites du plan des x ont pour transformées des cercles du plan des y qui passent par le point $\frac{a}{a'}$; le point $-\frac{b'}{a'}$ du plan des x a pour correspondant le point ∞ du plan des y ; les cercles du plan des x qui passent par le point $-\frac{b'}{a'}$ ont pour transformés des droites du plan des y, les droites du plan des x qui passent par le point $-\frac{b'}{a'}$, du plan des x ont pour transformées des droites du plan des y qui passent par le point $\frac{a}{a'}$. Soient C_x un cercle du plan des x et C_y le cercle correspondant du plan des y. Le centre du cercle C_y est le point correspondant, dans le plan des y, du point du plan des x qui est symétrique du point $-\frac{b'}{a'}$ par rapport à C_x. Si le cercle C_x contient à son intérieur le point $-\frac{b'}{a'}$, l'intérieur du cercle C_x a pour transformé l'extérieur du cercle C_y, etc.

337. — Dans les correspondances précédemment étudiées, à deux points distincts du plan des x correspondent deux points distincts du plan des y. La correspondance entre les deux plans est parfaite, si toutefois on convient de parler du point ∞ d'un plan comme d'un point proprement dit. Il n'en est plus de même pour une correspondance telle que celle qui est définie par l'égalité $y = x^2$. Il est clair qu'aux points x et $-x$ ne correspond qu'un point du plan des y.

L'ensemble des points x^2 recouvre deux fois le plan des y. Inversement il faut et il suffit que deux points x, x' soient symétriques par rapport au point o pour qu'ils aient même correspondant y.

J'insisterai un peu sur la correspondance entre x et y, et sur la définition de $\sqrt{y}$: c'est que les considérations sur lesquelles est fondée cette définition, se retrouvent dans une foule de cas, avec quelques différences que le lecteur reconnaîtra de lui-même.

Ne considérons (*fig.* 31) que le demi-plan des x qui est à droite de l'axe des ordonnées ou, si l'on veut, les points x pour lesquels la partie réelle de l'affixe est positive : il est clair que deux points distincts de ce dernier plan auront pour correspondants dans le plan des y des points distincts ; il n'y a exception que pour les points mêmes de l'axe des ordonnées qui ont leurs correspondants sur l'axe négatif dans le plan des y. Si l'on imagine un point x décrivant l'axe des ordonnées, de bas en haut, le point correspondant y décrira deux fois l'axe des quantités négatives de $-\infty$ à o puis de o à $-\infty$; un même point de l'axe négatif dans le plan des y correspond manifestement à deux points de l'axe des ordonnées du plan des x, symétriques par rapport au point o. On reconnaît d'ailleurs qu'un point du demi-plan des x situé très près de l'axe des ordonnées a pour correspondant un point y situé au-dessus de l'axe négatif ou au-dessous de cet axe suivant que le point x est lui-même au-dessus ou au-dessous de l'axe des abscisses dans son plan. Sauf les points situés dans le plan des y sur l'axe négatif, chaque point y est le correspondant d'un seul point du demi-plan des x : ce point a pour affixe $\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ en désignant par r la valeur absolue et par θ l'argument principal de y. Les points de l'axe négatif (du plan des y) sont les correspondants de deux

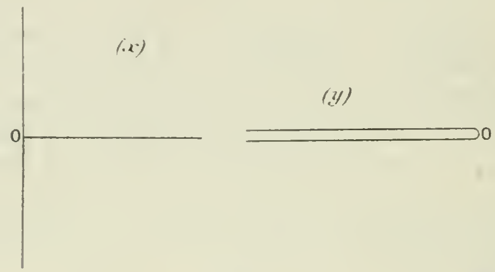

Fig. 31.

points (du plan des x) dont les affixes sont purement imaginaires et symétriques.

Imaginons qu'on pratique dans le plan des y, le long de l'axe négatif une *coupure* allant du point o au point $-\infty$; quand le point x se meut dans le plan des x, d'une manière continue, sans jamais pénétrer dans la région située à gauche de l'axe des ordonnées, le point y se déplace d'une façon continue dans son plan sans jamais traverser la coupure ; quand le point x vient affleurer la moitié supérieure de l'axe des ordonnées, le point y vient affleurer le bord *supérieur* de la coupure, qu'il est ainsi naturel de rattacher à la partie du plan des y qui est située au-dessus de l'axe des quantités négatives ; de même, quand le point x vient affleurer la moitié inférieure de l'axe des ordonnées, le point y vient affleurer le bord *inférieur* de la coupure du plan des y que l'on rattachera ainsi à la partie inférieure du plan des y. Les deux bords de la coupure ont été figurés par deux droites parallèles rapprochées ;

ces deux bords sont en réalité confondus avec l'axe négatif ; ils ne sont distincts que dans la pensée ; le bord supérieur est regardé comme correspondant à la moitié supérieure de l'axe des ordonnées, du plan des x, le bord inférieur comme correspondant à la moitié inférieure du même axe. Le plan des y, ainsi découpé, peut être regardé comme correspondant parfaitement à la moitié de droite du plan des x.

Si le point x décrit, dans le plan des x (*fig.* 32), une demi-droite partant du point o, le point $y = x^2$ décrira, dans le plan des y, une demi-droite partant du point o de ce plan ; son argument sera double de l'argument de la première demi-droite ; si celle-ci tourne autour

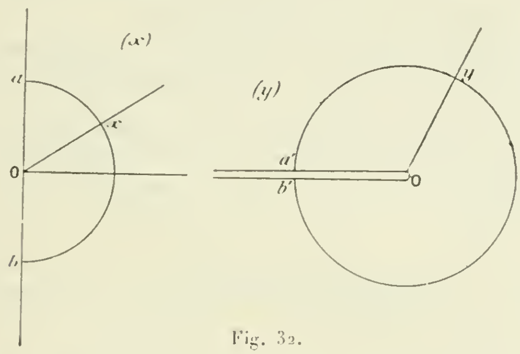

Fig. 32.

du point o du plan des x de manière que son argument croisse de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, la demi-droite du plan des y tournera autour du point o de façon que son argument croisse de $-\pi$ à π ; la première aura décrit la moitié du plan des x qui s'étend à droite de l'axe des ordonnées, la seconde tout le plan des y ; à deux positions distinctes de la première correspondent deux positions distinctes de la seconde, sauf pour les deux directions d'argument $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, opposées sur l'axe des ordonnées : à ces deux directions ne correspond dans le plan des y qu'une seule demi droite, qu'il est très naturel de dédoubler comme on l'a expliqué, en faisant correspondre le bord supérieur de la coupure à la demi-droite de l'axe des x dont l'argument est $+\frac{\pi}{2}$ et le bord inférieur à la demi-droite dont l'argument est $-\frac{\pi}{2}$.

Considérons encore, dans le plan des x, le demi-cercle décrit du point o avec le rayon r, situé à droite de l'axe imaginaire et rencontrant cet axe aux points a, b. Supposons que le point x décrive ce demi-cercle du point le plus bas b au point le plus haut a ; l'argument de x variera de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$: le point correspondant y décrira le cercle de centre o, dans le plan des y, et de rayon r^2 du point b' situé sur le bord inférieur de la coupure au point coïncidant a' du bord supérieur de la coupure.

Puisque la correspondance entre le demi-plan des x situé à droite de l'axe imaginaire et le plan des y découpé comme on l'a expliqué, est parfaite, on peut au moyen de cette correspondance, définir $x = \sqrt{y}$ comme une fonction univoque de y.

Cette définition équivaut aux suivantes : $\sqrt{y}$ est, pour chaque valeur de y, la racine carrée de y dont la partie réelle est positive.

Si l'on choisit pour l'argument de y la valeur principale de cet argument, l'argument de $\sqrt{y}$ sera la moitié de l'argument de y, la valeur absolue de $\sqrt{y}$ sera la racine carrée arithmétique de la valeur absolue de y.

Ces deux définitions tombent naturellement en défaut quand y est un nombre réel négatif, quand le point y est sur la coupure : pour les compléter, il faut dire si y appartient au bord supérieur ou au bord inférieur de la coupure ; suivant les cas, suivant que le point y sera en a' ou en b', le point $x = \sqrt{y}$ sera en a ou en b, $\sqrt{y}$ sera un nombre purement imaginaire dans lequel le coefficient de i est positif ou négatif.

On peut dire encore, en désignant par $\sqrt{-y}$ la racine carrée arithmétique du nombre positif $-y$, que $\sqrt{y}$ est égal à $i\sqrt{-y}$ ou à $-i\sqrt{-y}$ suivant que y est sur le bord supérieur ou sur le bord inférieur de la coupure.

La fonction $\sqrt{y}$ ainsi définie est continue dans tout le plan des y, quand on a pratiqué la coupure, si l'on convient, comme il a été expliqué plus haut, de regarder comme distincts les bords de la coupure, de ne pas regarder comme voisins deux points qui coïncident en réalité, mais qui appartiennent l'un au bord supérieur, l'autre au bord inférieur, ou deux points très rapprochés de la coupure et situés de part et d'autre. La continuité de $\sqrt{y}$ en un point y_0 de la coupure, situé par exemple sur le bord supérieur, consiste en ce qu'à chaque nombre positif ε correspond un nombre positif η tel que l'on ait $|\sqrt{y}-\sqrt{y_0}|<\varepsilon$ si l'on a $|y-y_0|<\eta$ et si le coefficient de i dans y est positif.

338. — On vient d'employer un procédé particulier pour définir $\sqrt{y}$, ou $\sqrt{x}$, car le nom de la variable n'importe évidemment pas ; on peut en adopter d'autres, pourvu que le carré de la valeur adoptée pour $\sqrt{x}$ soit toujours égal à x : cette condition est, en particulier, aussi bien vérifiée pour $-\sqrt{x}$ que pour $\sqrt{x}$. C'est par des raisons de continuité qu'on se laisse habituellement guider dans le choix qu'on adopte.

Dans tous les cas, la valeur absolue de $\sqrt{x}$ devra être la racine carrée arithmétique de la valeur absolue de x. On peut convenir d'adopter pour argument de $\sqrt{x}$ la moitié de l'argument de x ; dès lors, toutes les fois qu'on a adopté une règle pour déterminer l'argument de x, la fonction $\sqrt{x}$ se trouve définie par là-même.

Par exemple, la définition adoptée dans le numéro précédent revient, de ce point de vue, à adopter pour l'argument de x sa valeur principale, comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

Considérons un lien (T) défini par les formules

$$x=f(t)+ig(t), \qquad t_0 \leqq t \leqq t_1,$$

où $f(t)$, $g(t)$ sont des fonctions réelles et continues dans l'intervalle $(t_0,\ t_1)$ de la variable réelle t : ces formules définissent bien un lien, au sens du n° **288**, puisqu'elles définissent l'abscisse $f(t)$ et l'ordonnée $g(t)$ d'un point quelconque de ce lien. Je suppose essentiellement, sur ce lien, qu'il ne passe pas par le point o ; en d'autres termes les fonctions $f(t)$, $g(t)$ ne doivent pas s'annuler pour une même valeur de t appartenant à l'intervalle $(t_0,\ t_1)$. Soit θ une valeur de t appartenant à l'intervalle $(t_0,\ t_1)$, ξ le point correspondant du lien et α une valeur déterminée de l'argument de ξ. L'argument de x peut être défini, sans ambiguïté, pour chaque valeur de t, comme une fonction continue de t qui, pour $t=\theta$, se réduit à α : ce sera la somme de α et de l'angle, défini au moyen du lien (T), dont le sommet est au point o, dont le premier côté passe par le point ξ et dont le second côté passe par le point du lien qui correspond à la valeur considérée du paramètre. Alors $\sqrt{x}$

sera définie sans ambiguïté pour chaque valeur de t : ce sera manifestement une fonction continue de t. On reconnaît immédiatement que pour définir ainsi $\sqrt{x}$, il n'est pas nécessaire de se donner α, il suffit de se donner la valeur de $\sqrt{\xi}$; car on pourra prendre ensuite α égal au double de l'un quelconque des arguments de $\sqrt{\xi}$. On peut caractériser cette façon de faire en disant que $\sqrt{x}$ est définie au moyen du lien et de sa valeur en un point du lien.

Si le lien (T) est simple et ouvert, on peut dire aussi que la fonction $\sqrt{x}$ est définie sans ambiguïté pour chaque point x du lien ; mais, s'il en est autrement, la valeur de x ne suffit pas, il faut savoir à quelle valeur de t elle correspond. Si le même point x correspond aux deux valeurs t', t'', les valeurs de $\sqrt{x}$ peuvent être égales, comme elles peuvent être symétriques, lorsqu'on regarde x comme correspondant à t' ou à t''. Cette circonstance peut se présenter quand le lien est simple et fermé ; les valeurs de $\sqrt{x}$ pour $t = t_0$ et pour $t = t_1$ peuvent être égales ; elles peuvent être symétriques.

Pour pouvoir comparer la nouvelle définition avec celle du numéro précédent et éviter les confusions d'écritures, convenons, pour un moment, d'employer les notations $\sqrt{x}$, $(\sqrt{x})$, la première avec la signification du numéro précédent, la seconde avec la signification qu'on vient d'expliquer ; x désigne toujours un point du lien. Afin de simplifier un peu, je supposerai, relativement à la définition de $(\sqrt{x})$, que la valeur θ de t pour laquelle on a fixé l'argument de x coïncide avec t_0, en sorte que le point ξ correspondant est l'origine du lien : je supposerai en outre que le point ξ n'est pas situé sur l'axe négatif et qu'on ait pris pour α la valeur principale de l'argument ; alors, à l'origine du lien (T), $\sqrt{x}$ et $(\sqrt{x})$ coïncident. En un point quelconque du lien, correspondant à la valeur t du paramètre, $(\sqrt{x})$ est une fonction continue de t : il en est de même de $\sqrt{x}$, pourvu que x ne soit pas sur l'axe négatif. La différence $\sqrt{x} - (\sqrt{x})$ est continue tant que ses deux termes sont des fonctions continues ; elle est d'ailleurs égale soit à o, soit à $\pm 2\sqrt{x}$; dans ce dernier cas, elle reste toujours supérieure, en valeur absolue, à un nombre positif fixe, puisque la valeur absolue de x est au moins égale à la distance du point o au lien, qui n'est pas nulle. Il suit de là que la différence $\sqrt{x} - (\sqrt{x})$ nulle pour $t = t_0$ reste nulle, lorsque t croît à partir de t_0, tant que l'on n'atteint pas l'axe négatif. Supposons qu'on atteigne cet axe une première fois, au point x', pour $t = t'$; si, pour t un peu plus petit et un peu plus grand que t', le coefficient de i garde le même signe, si, en d'autres termes, le point x ne *traverse* pas la coupure, alors la conclusion subsiste : la différence reste nulle pour $t = t'$ et pour t un peu plus grand que t', pourvu que l'on regarde x' comme appartenant à celui des bords de la coupure qu'il faut considérer comme voisin des points du lien qui correspondent aux valeurs de t un peu plus petites ou un peu plus grandes que t' ; la même conclusion subsisterait, avec une condition analogue si, dans l'intervalle (t', t'') le point x restait sur l'axe négatif et si le coefficient de i dans x restait, pour les valeurs de t un peu plus grandes que t'', du même signe que pour les valeurs un peu plus petites que t'.

Mais les choses se passent différemment si pour $t = t'$, le lien (T) *traverse* l'axe négatif ; pour des valeurs de t suffisamment voisines de t', le point x est d'un côté ou de l'autre de l'axe négatif suivant que t est plus petit ou plus grand que t' : les valeurs principales de l'argument pour deux points ainsi placés de côté et d'autre de l'axe négatif diffèrent à peu près de 2π ; les deux valeurs de $\sqrt{x}$ sont à peu près symétriques, en sorte que la valeur de $-(\sqrt{x})$ pour t un peu plus grand que t' est voisine de la valeur de $(\sqrt{x})$ pour t un peu plus petit que t' : pour t plus petit que t', $\sqrt{x}$ coïncide avec $(\sqrt{x})$; pour t un peu plus grand que t', c'est au contraire $-\sqrt{x}$ qui coïncide avec $(\sqrt{x})$; lorsque t continue de croître à partir de t', on a toujours $-\sqrt{x} = (\sqrt{x})$, tant que l'on n'atteint pas l'axe négatif, etc...

J'abandonne maintenant la signification spéciale attribuée aux notations $\sqrt{x}$, $(\sqrt{x})$.

Considérons un *domaine* simple Δ (n° **320**). Je suppose essentiellement que le point o soit extérieur à ce domaine. On a démontré au n° **314** que l'argument de x, l'angle dont le premier côté est l'axe positif, dont le second côté va du point o au point x, peut être défini comme une fonction continue de x qui, pour le point donné x_0 du domaine, se réduit à une valeur φ_0 arbitrairement choisie parmi les arguments de x_0. Par là-même $\sqrt{x}$ se trouve définie dans tout le domaine ; il n'est même pas nécessaire de se donner φ_0 ; il suffit de se donner la détermination $\sqrt{x_0}$ de $\sqrt{x}$ en x_0 ; $\sqrt{x}$ est alors définie comme une fonction de x, continue dans le domaine et se réduisant à $\sqrt{x_0}$ pour $x = x_0$. On pourra si l'on veut prendre α_0 égal au double de l'un des arguments de $\sqrt{x_0}$.

Soit (T) un lien dont tous les points appartiennent au domaine et qui contienne le point x_0; définissons maintenant la fonction $(\sqrt{x})$ le long de ce lien, au moyen de la valeur $\sqrt{x_0}$ qu'elle doit prendre en ce point, en sorte que la fonction $(\sqrt{x})$ coïncide en x_0 avec la fonction $\sqrt{x}$, définie dans tout le domaine. Les deux fonctions $(\sqrt{x})$ et $\sqrt{x}$ coïncideront tout le long de (T), comme on le voit en raisonnant ainsi qu'on a fait un peu plus haut.

Considérons plusieurs liens partant du point x_0, aboutissant au point x_1 et contenus tout entiers dans le domaine ; si l'on définit la fonction $\sqrt{x}$, sur chacun des liens, en partant de la même valeur initiale $\sqrt{x_0}$, on aboutira au point x_1 à la même valeur de $\sqrt{x_1}$ quel que soit le lien que l'on considère.

Si, en particulier, on considère un lien fermé, contenu dans le domaine, et si on définit $\sqrt{x}$ le long de ce lien en partant d'une valeur déterminée $\sqrt{x_0}$, au point de départ x_0, on reviendra en ce point, après avoir parcouru le lien, avec la même valeur $\sqrt{x_0}$.

339. — Ces diverses définitions de $\sqrt{x}$ sont fondées sur la notion d'angle ; elles peuvent être utilisées pour certaines fonctions qui se trouvent être définies sans ambigüité quand on se donne l'argument de x ; en particulier, elles s'appliquent, avec quelques modifications qui ne peuvent échapper au lecteur, à la définition précise de la fonction x^m, où m est un nombre réel, soit dans le plan coupé comme au n° **337**, soit le long d'un lien, soit dans un domaine simple comme à la fin du précédent numéro. Le point o ne doit appartenir ni au lien, ni au domaine.

Si le lecteur veut bien réfléchir un peu sur les définitions de l'angle considéré comme on l'a fait au précédent chapitre, il reconnaîtra immédiatement que le succès de ces définitions tient, d'une part, à ce que les diverses valeurs qu'on peut attribuer à un angle diffèrent d'une quantité finie (un multiple de 2π), et que, d'autre part, on peut faire varier l'angle d'une façon continue. Rien n'empêche de fonder la définition de $\sqrt{x}$ sur des propriétés analogues, sans passer par l'argument, en employant d'ailleurs des raisonnements analogues à ceux des n^{os} **292**, **302**. Je m'arrête un instant sur cette méthode, en raison de sa généralité.

Considérons d'abord l'ensemble parfait (C) + (F) constitué par un continuum (C) et sa frontière (F); je suppose que le point o n'appartienne pas à cet ensemble dont tous les points seront par suite à une distance du point o supérieure ou égale à un nombre fixe, que je désigne par δ. Soit ε l'écart de l'ensemble; je supposerai $\varepsilon < \delta$. Dans ces conditions, il est aisé de définir une fonction y de x, continue dans l'ensemble (C) + (F), vérifiant identiquement l'équation $y^2 = x$, et prenant pour un point x_0, qui appartient à l'ensemble, une valeur y_0 arbitrairement choisie parmi les deux racines de l'équation $y^2 = x_0$; ces conditions d'ailleurs déterminent entièrement la fonction y ou $\sqrt{x}$.

Soit en effet x un point quelconque de l'ensemble; on va choisir pour la valeur correspondante de $\sqrt{x}$ celle des deux racines de l'équation (en y) $y^2 = x$ qui est la plus voisine de y_0: on va voir d'ailleurs que ces deux racines ne peuvent être également éloignées de y_0; on a en effet

$$(y_0 - y)(y_0 + y) = x_0 - x,$$

en désignant par y l'une des deux racines; on en déduit

$$|y_0 - y|\,|y_0 + y| \leqq \varepsilon;$$

l'un au moins des deux nombres $|y_0 - y|$, $|y_0 + y|$, est donc inférieur ou égal à $\sqrt{\varepsilon}$; on peut supposer qu'il en est ainsi du premier, car, autrement, on changerait y en $-y$. Dès lors, on a certainement $|y_0 + y| > \sqrt{\varepsilon}$, car les deux inégalités $|y_0 - y| \leqq \varepsilon$, $|y_0 + y| \leqq \varepsilon$ entraîneraient

$$2\,|y_0| \leqq |y_0 + y| + |y_0 - y| \leqq 2\sqrt{\varepsilon};$$

or ceci est contraire aux suppositions que l'on a faites qui entraînent $|y_0| \geqq \sqrt{\delta} > \sqrt{\varepsilon}$.

On a donc certainement $|y_0 - y| < |y_0 + y|$: cette condition ou, si l'on préfère, l'inégalité $|y_0 - y| \leqq \sqrt{\varepsilon}$ déterminent y ou $\sqrt{x}$ sans ambiguïté dans l'ensemble (C) + (F). La fonction ainsi définie est continue dans cet ensemble; soient en effet x_1, x_2 deux points du domaine et y_1, y_2 les valeurs de $\sqrt{x}$ définies comme on l'a expliqué; on peut poser $y_1 = y_0 + \rho_1\sqrt{\varepsilon}$, $y_2 = y_0 + \rho_2\sqrt{\varepsilon}$ en désignant par ρ_1, ρ_2, des nombres imaginaires dont les valeurs absolues sont moindres que 1 ; on a d'ailleurs

$$y_2 - y_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 + y_1} = \frac{x_2 - x_1}{2y_0 + (\rho_1 + \rho_2)\sqrt{\varepsilon}},$$

puis

$$|2y_0 + (\rho_1 + \rho_2)\sqrt{\varepsilon}| \geqq 2|y_0| - |\rho_1 + \rho_2|\sqrt{\varepsilon} \geqq 2\sqrt{\delta} - 2\sqrt{\varepsilon}.$$

On a, par conséquent

$$|y_2 - y_1| \leqq \frac{|x_2 - x_1|}{2(\sqrt{\delta} - \sqrt{\varepsilon})};$$

et cette inégalité rend manifeste la continuité de la fonction dans tout l'ensemble (C) + (F).

Il n'y a d'ailleurs dans l'ensemble qu'une seule fonction continue qui vérifie identiquement l'équation $y^2 = x$ et qui pour $x = x_0$ prenne la valeur prescrite y_0 : considérons en effet une seconde fonction satisfaisant à ces deux conditions et prenant en un point x' de l'ensemble une valeur différente de $\sqrt{x'}$; il suffirait de relier le point x_0 au point x' par un lien contenu dans l'ensemble (C) + (F), et de se rappeler un raisonnement déjà employé plus d'une fois pour voir que la différence entre les deux fonctions ne peut être, le long du lien, une fonction continue du paramètre dont la valeur détermine chaque point du lien, sans être nulle.

Il suit de là que si, au lieu de partir du point x_0 avec la valeur initiale y_0 pour $\sqrt{x_0}$, on était parti du point x'_0 avec la valeur y'_0, on aurait en procédant de la même façon, défini la même fonction, si y'_0 se trouve être la valeur de $\sqrt{x'_0}$ qui résulterait de la première définition.

Ceci posé, si l'on considère un lien (T), défini par la formule

$$x = f(t) + ig(t) \quad (t_0 \leqq t \leqq t_1),$$

et qui ne passe pas par le point o, on pourra définir $\sqrt{x}$ comme une fonction continue de t qui prenne pour t_0 (par exemple) une valeur prescrite $\sqrt{x_0}$, dont le carré toutefois soit égal à x_0 ; on intercalera entre t_0 et t_1, des nombres croissants t', t'', ..., en s'arrangeant de façon que les intervalles (t_0, t'), (t', t''), ..., $(t^{(n-1)}, t_1)$ soient assez petits pour que les liens partiels qui correspondent à ces intervalles puissent être regardés comme contenus dans des ensembles parfaits qui satisfassent aux mêmes conditions que l'on a imposées tout à l'heure à l'ensemble $(C + F)$. Dès lors $\sqrt{x}$ peut être définie dans le premier ensemble et par suite dans l'intervalle (t_0, t') en partant de la valeur $\sqrt{x_0}$; puis, dans le second ensemble et par suite dans l'intervalle (t', t''), en partant de la valeur $\sqrt{x'}$ qui correspond à $t = t'$, etc.

Soit maintenant Δ un domaine simple auquel le point o soit extérieur; soit x_0 un point de ce domaine. On va montrer, en restant dans le même ordre d'idées, qu'il existe une fonction $\sqrt{x}$, continue dans le domaine, qui, pour $x = x_0$ se réduit à la valeur prescrite $\sqrt{x_0}$. Cette fonction est unique.

Je vais d'abord établir cette proposition quand le domaine simple est une de ces figures que j'ai désignées au n° **314** sous le nom de *trapèzes*; le contour de ce trapèze comprend : 1° deux arcs de courbes A_0A_1, $A'_0A'_1$ dont les origines A_0, A'_0 ont même abscisse a_0, dont les extrémités A_1, A'_1 ont même abscisse a_1; à chaque abscisse appartenant à l'intervalle (a_0, a_1) correspond un point sur la première courbe et un point sur la seconde, d'ordonnée plus grande; toutefois les points A_0 et A'_0, A_1 et A'_1, peuvent être confondus; 2° deux côtés $A_0A'_0$, $A_1A'_1$ parallèles à l'axe des ordonnées; l'un ou l'autre de ces côtés peut être de longueur nulle. Tous les points du trapèze sont supposés à une distance du point o supérieure à un nombre positif fixe δ.

On peut décomposer ce trapèze par des parallèles à l'axe des ordonnées, dont les distances mutuelles soient moindres que le nombre positif $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, en une première série de trapèzes, se succédant de gauche à droite.

Considérons celui qui contient le point x_0. On le décomposera, par des parallèles à l'axe des abscisses dont les distances mutuelles soient moindres que $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, en une seconde série de petits trapèzes comprenant des rectangles. Chacun de ces petits trapèzes peut être regardé comme cet ensemble parfait du début, où tous les points sont à une distance du point o supérieure à δ, où deux points quelconques sont à une distance mutuelle inférieure à $\varepsilon < \delta$. Le mode de définition pour $\sqrt{x}$ s'applique. On l'appliquera tout d'abord au trapèze qui contient le point x_0, pour lequel $\sqrt{x_0}$ est donnée ; dans tout le petit trapèze la fonction $\sqrt{x}$ est définie et continue; il en est ainsi sur les côtés parallèles à l'axe des abscisses; considérons un de ces côtés, il est commun avec un second trapèze, contigu au premier ; on prendra un point x_1 sur ce côté ; en ce point, la valeur de $\sqrt{x_1}$ est définie, et l'on peut par conséquent par le même procédé, définir $\sqrt{x}$ dans tout le second trapèze ; en raison de la continuité sur le côté commun aux deux trapèzes, les valeurs de $\sqrt{x}$ qui résultent de la première ou de la seconde définition sont les mêmes, puisqu'elles sont les mêmes en x_1 ; on continuera ainsi successivement de trapèze en trapèze, par exemple

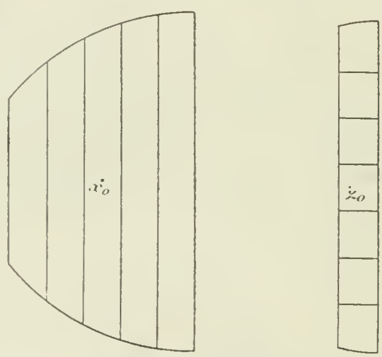

Fig. 33.

en descendant à partir du trapèze qui contient x_0, puis, quand on a achevé de descendre, en remontant à partir du même trapèze ; on aura ainsi défini $\sqrt{x}$ dans tout un trapèze de la première série, celui qui continuait x_0 ; on procèdera pour les trapèzes de la première série comme on a fait pour les trapèzes de la seconde ; la fonction $\sqrt{x}$ est ainsi définie pour tout le trapèze primitif.

La proposition, une fois établie pour un trapèze, il suffit d'appliquer au domaine total ce procédé de décomposition que l'on a décrit au n° **314** et qui aboutit à des trapèzes, puis d'employer le même mode de raisonnement, pour démontrer par induction qu'on peut définir $\sqrt{x}$ dans tout le domaine comme une fonction continue.

340. — Soit $f(x, y)$ un polynome en x, y du degré n en y; soit (Δ) un domaine simple ne contenant aucun point x pour lequel l'équation en y $f(x, y) = 0$ ait des racines infinies ou multiples; il n'est pas difficile d'établir les propositions suivantes :

Les racines $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de l'équation (x, y) sont bornées dans le domaine (Δ). La différence entre deux quelconques de ces racines est supérieure, en valeur absolue, à un nombre positif fixe δ, pour tous les points du domaine. Quelque petit que soit le nombre positif ε, on peut lui faire correspondre un nombre positif η tel que, si l'on suppose $|x' - x''| < \eta$ et si l'on désigne respectivement par $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ et par $y''_1, y''_2, \ldots, y''_n$ les racines de l'équation en y pour les deux points x' et x'' de (Δ), on pourra accoupler chaque racine de la première suite, à une racine de la seconde suite de façon que l'on ait

$$|y'_1 - y''_1| < \varepsilon, \quad |y'_2 - y''_2| < \varepsilon, \ldots, \quad |y'_n - y''_n| < \varepsilon.$$

Ces propositions une fois établies, on pourra définir sans ambiguïté, dans le domaine simple (Δ), n fonctions continues y_1, $y_2, \ldots, y_n$ de la variable x, satisfaisant toutes identiquement à l'équation $f(x, y) = 0$ et prenant respectivement au point x' les valeurs $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$. Les raisonnements sont analogues à ceux du numéro précédent. Cette définition est le point de départ de la théorie des fonctions algébriques; mais, comme je n'ai pas l'intention d'entrer dans cette théorie, je me bornerai aux indications qui précèdent.

341. — Considérons encore la fonction $\sqrt{1 - x^2}$, dont nous aurons besoin plus tard. C'est, si l'on veut, une fonction de fonction. Posons $u = 1 - x^2$; la valeur de u est définie pour chaque valeur de x; en adoptant l'une ou l'autre des définitions de $\sqrt{u}$ que l'on a exposées plus haut, la fonction $\sqrt{1 - x^2}$ sera évidemment définie. Comme au n° **337**, je regarderai $\sqrt{u}$ et $\sqrt{1 - x^2}$ comme définies par la condition que leurs parties réelles soient positives; il n'y a d'ambiguïté que si u ou $1 - x^2$ sont négatifs; x, qui doit alors être égal à $\pm\sqrt{1 - u}$, est réel et plus grand que 1 en valeur absolue. Figurons dans le plan qui sert à représenter la variable x, deux coupures, pratiquées le long de l'axe réel, l'une du point 1 jusqu'à $+\infty$, l'autre du point -1 jusqu'à $-\infty$. En tout point

x, non situé sur l'une ou l'autre des deux coupures, la fonction $\sqrt{1-x^2}$ définie comme on a fait est continue. Les deux coupures correspondent à la coupure que l'on tracerait dans le plan des u,

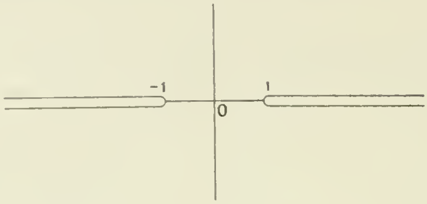

Fig. 34.

le long de l'axe négatif, pour définir $\sqrt{u}$ comme il a été expliqué au n° **337**. Il reste à définir $\sqrt{1-x^2}$ sur les bords des deux coupures.

Supposons le point u un peu au-dessus de l'axe négatif, en sorte que son argument principal soit un peu plus petit que π. Il suffit de se reporter à la construction du point $1-u$ pour reconnaître que l'argument principal de $1-u$ est négatif et petit en valeur absolue; des deux points $\pm\sqrt{1-u}$, symétriques par rapport au

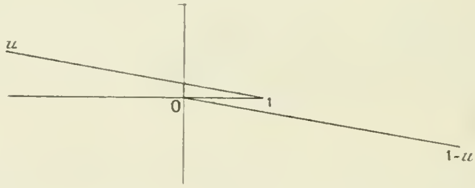

Fig. 35.

point o, l'un, dont l'argument est la moitié de l'argument de $1-u$, est situé un peu au-dessous de la coupure qui va de 1 à $+\infty$, l'autre un peu au-dessus de la coupure qui va de -1 à $-\infty$. Inversement, pour les points x ainsi placés, le coefficient de i, dans $\sqrt{1-x^2}$ ou $\sqrt{u}$, est positif; au contraire, pour les points x placés un peu au-dessus de la coupure qui va de 1 à $+\infty$, ou un peu au-dessous de la coupure qui va de -1 à $-\infty$, le coefficient de i dans $\sqrt{1-x^2}$ est négatif.

Quand x est sur le bord inférieur de la coupure $+1$ —— $+\infty$ ou sur le bord supérieur de la coupure -1 —— $-\infty$, $\sqrt{1-x^2}$

est égal à $i\sqrt{x^2-1}$, en donnant à $\sqrt{x^2-1}$ sa signification arithmétique ; quand x est sur le bord supérieur de la coupure $+1 —— +\infty$, ou sur le bord inférieur de la coupure $-1 —— -\infty$, $\sqrt{1-x^2}$ est égal à $-i\sqrt{x^2-1}$.

Je laisse au lecteur le soin de montrer que $\sqrt{1-x^2}$ n'est réel que si x est réel et compris entre -1 et $+1$, ou si x est pure-

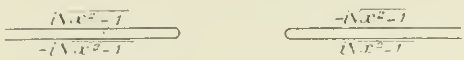

Fig. 36.

ment imaginaire ; quand x est dans l'angle des coordonnées positives, ou dans l'opposé par le sommet, le coefficient de i dans $\sqrt{1-x^2}$ est négatif ; il est positif quand x est dans l'un ou l'autre des deux autres angles.

On arrive aux mêmes conclusions par un raisonnement qui se généralise aisément et dont l'emploi est souvent commode. Définissons $\sqrt{1-x^2}$ comme un nombre imaginaire dont l'argument soit la moitié de l'argument de $1-x^2$; quand à l'argument de $1-x^2$, on le définira par continuité le long d'un lien qui ne passe par aucun des points -1, 1 pour lesquels $1-x^2$ s'annule,

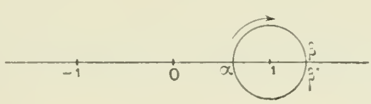

Fig. 37.

par exemple le long d'un demi-cercle décrit du point 1 comme centre avec un rayon aussi petit qu'on voudra, partant d'un point α situé sur l'axe réel entre les points 0 et 1 et aboutissant au point β sur le bord supérieur de la coupure de droite, ou au point β' sur le bord inférieur. Au point α, $1-x^2$ est réel et positif ; son argument est un multiple de 2π ; si l'on veut que $\sqrt{1-x^2}$ soit positif, on devra prendre pour l'argument de $1-x^2$ un multiple pair de 2π, 0 par exemple. Il reste à voir comment varie l'argument de $1-x^2$ quand x décrit, par exemple, le demi-cercle supérieur $\alpha\beta$. On a $1-x^2=(1-x)(1+x)$, la variation de l'argument de $1-x^2$ est égale à la somme des variations des arguments des deux facteurs $1-x$, $1+x$; la variation de l'argument de $x+1$ est l'angle que décrit le vecteur qui va du point -1 au point x quand x décrit le demi-cercle $\alpha\beta$; il est nul [1]. La variation de l'argument de $1-x$ ou de $x-1$ est l'angle que décrit, dans les mêmes conditions, le vecteur qui va du point 1 au point x ; il est évidemment égal à $-\pi$; la variation de l'argument de $1-x^2$ quand on passe du point α au point β en suivant le demi-cercle est égale à $-\pi$; l'argument de $1-x^2$ reste égal à $-\pi$ tout le long du bord supérieur de la coupure ; celui de $\sqrt{1-x^2}$ est égal à $-\frac{\pi}{2}$; il est égal à $\frac{\pi}{2}$ sur le bord inférieur de la coupure.

En procédant comme pour $\sqrt{x}$, on pourrait aussi définir $\sqrt{1-x^2}$ comme une fonction continue de t le long d'un lien (T) qui ne passe par aucun des points $+1$, -1 pour lesquels les deux valeurs possibles de $\sqrt{1-x^2}$ viennent se confondre : cette fonction sera déterminée si on a choisi la détermination que l'on veut faire correspondre à une valeur t_0 de t. Quand le lien traverse l'une ou l'autre des coupures, les choses se passent comme pour $\sqrt{x}$. De même on pourra définir $\sqrt{1-x^2}$ comme une fonction continue de x dans tout domaine simple auquel les points $+1$ et -1 sont extérieurs.

II. — SÉRIES ENTIÈRES EN x ; SÉRIES ET PRODUITS INFINIS DONT LES TERMES SONT DES SÉRIES ENTIÈRES EN x ; PROLONGEMENT D'UNE FONCTION.

342. — La considération de séries dont les termes sont des fonctions d'une variable imaginaire fournit un moyen précieux pour étendre à une telle variable la notion de certaines fonctions d'une variable réelle, pour créer de nouvelles fonctions, comme aussi pour en établir les propriétés. Les séries qui procèdent suivant les puissances entières et positives de la variable tiendront un rôle prépondérant.

La notion fondamentale de convergence uniforme, développée dans le premier paragraphe du Chapitre V s'étend si facilement

---

(1) Il suffirait d'observer que cette variation est évidemment négligeable si le rayon du cercle de centre 1 est suffisamment petit.

aux suites, aux séries, aux produits infinis dont les termes sont des fonctions d'une variable imaginaire, que je crois inutile d'y revenir : on n'oubliera pas toutefois que les mots « valeur absolue » doivent maintenant être entendus avec le sens qu'ils ont dans la théorie des nombres imaginaires. La proposition I du n° **183**, en particulier, est d'une application fréquente ; rappelons la conséquence qu'on en a tirée au n° **184**, pour lui donner la signification générale qu'elle est susceptible de prendre maintenant.

Considérons une série *entière en* x

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots ;$$

les coefficients numériques $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ sont des nombres réels ou imaginaires dont je désignerai les valeurs absolues par $a'_0, a'_1, \ldots, a'_n, \ldots$. Supposons que l'on connaisse un nombre positif A tel que la série à termes positifs

$$(2) \qquad a'_0 + a'_1 \mathrm{A} + a'_2 \mathrm{A}^2 + \ldots + a'_n \mathrm{A}^n + \ldots$$

soit convergente. On est alors certain que la série (1) est uniformément et absolument convergente, pour l'ensemble des points x pour lesquels on a $|x| \leqq \mathrm{A}$; sa somme est une fonction continue de x dans ce même ensemble, c'est-à-dire pour tous les points qui appartiennent au cercle de centre o et de rayon A : ce cercle remplace maintenant l'intervalle $(-\mathrm{A}, \mathrm{A})$ que l'on considérait au n° **184** ; les autres conséquences de ce numéro s'étendent d'elles-mêmes ; je n'y reviens pas. Observons que la supposition faite sur le nombre A revient à dire que la série (1) est absolument convergente pour un nombre x dont la valeur absolue est A.

Si, pour $x = x_0$, l'ensemble des termes de la série (1) est borné en haut ; si, en d'autres termes, il existe un nombre positif P tel que l'on ait, quel que soit le nombre naturel n,

$$|a_n x_0^n| \leqq \mathrm{P},$$

la série (1) est absolument convergente pour tout nombre x_1 dont la valeur absolue est inférieure à celle de x_0. Pour un tel nombre x_1, la série à termes positifs

$$1 + \left|\frac{x_1}{x_0}\right| + \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{x_1}{x_0}\right|^n + \ldots$$

est, en effet, convergente : elle reste convergente si on en multiplie respectivement les termes par les termes correspondants de la suite

$$|a_0|, \quad |a_0 x_0|, \quad |a_0 x_0^2|, \ldots |a_0 x_0^n|, \ldots,$$

qui sont au plus égaux à P ; or on obtient ainsi la série

$$|a_0| + |a_0 x_1| + |a_0 x_1^2| + \ldots + |a_0 x_0^n|, \ldots;$$

dire que cette série est convergente, c'est dire que la série (1) est absolument convergente pour $x = x_1$: on pourra prendre pour le nombre A n'importe quel nombre positif moindre que x_0.

La proposition qu'on vient d'établir est due à Abel.

Si, en particulier, la série (1) est convergente pour $x = x_0$, l'ensemble des nombres $(a_0 x_0^n)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ est certainement borné en haut : la série (1) est alors absolument convergente pour $|x| < |x_0|$.

Soit α un nombre positif ; si l'on sait que la série (1) est absolument convergente lorsqu'on a $|x| < \alpha$, on peut affirmer qu'elle est absolument convergente sous la même condition. Si, en effet, on a $|x_1| < \alpha$, il suffit de considérer un nombre x_2 dont la valeur absolue soit comprise entre α et $|x_1|$, la série sera convergente pour x_2, elle sera donc absolument convergente pour x_1.

Si la série (1) est divergente pour $x = x'$, elle sera certainement divergente pour tout nombre x'' dont la valeur absolue dépasse celle de x' ; si, en effet, la série était convergente pour x'', elle serait aussi convergente pour x'.

Ceci posé, considérons l'ensemble (E) des nombres positifs ou nuls ρ tels que la série

$$a'_0 + a'_1\rho + a'_2\rho^2 + \ldots + a'_n\rho^n + \ldots$$

soit convergente ; si un nombre ρ fait partie de cet ensemble, il en est évidemment de même de tous les nombres positifs plus petits que lui ; cela résulterait d'ailleurs du théorème d'Abel.

Si l'ensemble (E) n'est pas borné en haut, c'est que la série (1) est absolument convergente quel que soit x ; inversement, si cette série est convergente quel que soit x, l'ensemble (E) n'est pas borné en haut : en effet, si on se donne le nombre positif ρ, la série (1) doit être convergente pour un nombre dont la valeur absolue dépasse ρ, donc elle est absolument convergente pour $|x| = \rho$.

Dans ce cas, la somme de la série est une fonction continue pour toute valeur de x; elle est uniformément continue dans tout ensemble clos : c'est une fonction (transcendante) entière.

Les séries

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots,$$

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots$$

fournissent des exemples.

Il peut arriver que la série (1) ne soit convergente que pour $x = 0$, l'ensemble (E) se réduit alors au nombre 0; c'est le cas pour la série

$$1 + x + 1.2\,x^2 + \ldots + 1.2\ldots n x^n + \ldots$$

Supposons enfin que l'ensemble (E) ait une borne supérieure non nulle R; que, en d'autres termes, la série (1) soit convergente pour quelque valeur de x autre que 0 et ne soit pas toujours convergente.

Le cercle décrit du point 0 comme centre avec le rayon R est alors le *cercle de convergence* de la série, R est le *rayon de convergence*. La série converge absolument en tout point intérieur au cercle; sa somme est une fonction continue en tout point intérieur au cercle, uniformément continue dans tout ensemble clos intérieur au cercle. Lorsque la borne supérieure R de l'ensemble (E) appartient à cet ensemble, c'est-à-dire quand la série (3) est convergente pour $\rho = R$, ou, ce qui revient au même, quand la série (1) est absolument convergente en un point de la circonférence de son cercle de convergence, la série (1) est absolument et uniformément convergente dans l'ensemble des points qui appartiennent (nº **279**) au cercle de convergence, qu'ils soient intérieurs ou sur la circonférence; dans ce même ensemble, qui est parfait, sa somme est uniformément convergente. C'est ce qui arrive pour la série

$$\frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots$$

Si R n'appartient pas à (E), la série peut être convergente ou divergente en certains points de la circonférence du cercle de convergence. Ainsi la série

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^n}{n}+\ldots$$

pour laquelle $R = 1$ est divergente pour $x = 1$, convergente pour les autres points du cercle (n° **139**). Dans ce cas, si la série converge en un point de la circonférence du cercle de convergence, elle n'y converge pas absolument. Elle peut diverger pour tous les points de la circonférence du cercle de convergence, c'est ce qui arrive pour la série

$$x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$$

dont le rayon de convergence est encore égal à 1.

Les règles que l'on a données au n° **128** s'appliquent évidemment à la détermination du rayon de convergence.

On dit souvent que le rayon de convergence est infini, quand l'ensemble (E) n'est pas borné en haut, qu'il est nul quand l'ensemble (E) se réduit au nombre 0.

343. — La série

$$(4)\qquad a'_0+a'_1x+a'_2x^2+\ldots$$

dont les coefficients a'_0, a'_1, a'_2, ... sont les valeurs absolues des coefficients a_0, a_1, a_2, ... de la série (1) a même cercle de convergence que cette dernière; sa somme est positive pour toute valeur positive de x, elle croît quand x croît de 0 à R; elle peut d'ailleurs être finie ou infinie pour $x = R$. Désignons par x' la valeur absolue de x, par $f(x)$ la somme de la série (1), par $F(x)$ la somme de la série (4); il est clair que l'on a

$$(5)\qquad F(x') \geqq |f(x)|$$

pour toutes les valeurs de x qui rendent la série (1) absolument convergente. L'égalité ne peut avoir lieu que si, pour toutes les valeurs de n, on a $a_n x^n = a'_n x^n$.

Une inégalité telle que (5), considérée indépendamment de la définition particulière des fonctions $f(x)$, $F(x)$, caractérise la fonction $F(x)$ comme étant ce qu'on appelle une fonction *majorante* de la fonction $f(x)$. On doit entendre que cette dernière fonction est définie dans un certain ensemble (ici l'ensemble des points x intérieurs au cercle de convergence), et que la fonction $F(x)$ est réelle quand on y remplace la variable par la valeur absolue x' d'un quelconque des nombres x qui appartiennent à l'ensemble où $f(x)$ est définie.

Dans le cas particulier où je me suis placé, je désignerai la fonction $F(x)$, somme de la série (4), comme étant la *majorante naturelle* de la fonction $f(x)$, somme de la série (1). Lorsque les coefficients de cette dernière série sont réels et positifs, la fonction $f(x)$ est à elle-même sa majorante naturelle.

Tel est le cas, par exemple, en supposant $|x| < 1$, pour la fonction

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots;$$

Soit a un nombre quelconque, différent de 0 et soit a' sa valeur absolue; l'égalité précédente montre, en y remplaçant x par $\frac{x}{a}$, que, sous la condition $x' < a'$, on a

$$(1) \qquad \frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} - \frac{x^2}{a^3} - \ldots;$$

la majorante naturelle du second membre, pour les valeurs considérées de x est

$$\frac{1}{a'} + \frac{x}{a'^2} + \frac{x^2}{a'^3} + \ldots = \frac{1}{a'-x};$$

telle est donc, pour les mêmes valeurs de x, la majorante naturelle de $\frac{1}{x-a}$; au reste, pour ces valeurs, l'inégalité $\left|\frac{1}{x-a}\right| \leqq \frac{1}{a'-x'}$, résulte de l'inégalité évidente $|x-a| \geqq a'-x'$; cette même inégalité, en désignant par n un nombre positif, entraîne

$$\left|\frac{1}{(x-a)^n}\right| \leqq \frac{1}{(a'-x')^n};$$

la fonction $\frac{1}{(a'-x)^n}$ est donc, pour les valeurs considérées de x une majorante de la fonction $\frac{1}{(x-a)^n}$; que ce soit la majorante naturelle, c'est ce que le lecteur reconnaîtra immédiatement, dès qu'il aura vu l'extension de la formule du binome aux valeurs imaginaires de la variable.

On déduira encore sans peine de l'égalité (1) que les fonctions

$$\frac{x}{a'(a'-x)}, \qquad \frac{x^2}{a'^2(a'-x)}, \ldots$$

sont, en supposant toujours $|x| < a$, les majorantes naturelles des fonctions

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{a}, \qquad \frac{1}{x-a}+\frac{1}{a}+\frac{x}{a^2}, \ldots$$

344. — Quoique je n'aie pas l'intention de traiter des fonctions de plusieurs variables, je dois cependant indiquer une généralisation immédiate de la notion de série entière en x.

Considérons la série à entrée p^{uple}

$$(1) \qquad \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots, x_p^{\alpha_p},$$

où les $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ sont des coefficients numériques et où $x_1, x_2, \ldots, x_p$ désignent p variables ; $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des nombres entiers positifs ou nuls ; la sommation est étendue à tous les systèmes distincts $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$; on a vu au Chapitre II comment ces systèmes formaient un ensemble dénombrable.

En désignant par $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des nombres positifs, je suppose que la série à termes positifs ou nuls que l'on déduit de la série (1) en y remplaçant les coefficients $A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}$ par leurs valeurs absolues et $x_1, x_2, \ldots, x_p$ respectivement par $a_1, a_2, \ldots, a_p$, soit convergente. Il est clair que la série (1) sera absolument convergente pour les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ qui satisfont aux conditions

$$(2) \qquad |x_1| \leqq a_1, \qquad |x_2| \leqq a_2, \ldots, \qquad |x_p| \leqq a_p ;$$

la somme de la série, pour l'ensemble de ces valeurs est une fonction des p variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$. En supposant toujours que ces variables satisfassent aux conditions (2), on peut ordonner la série comme l'on veut ; on peut par exemple, écrire le terme indépendant $A_{0,0,\ldots,0}$, puis les p termes du premier degré, puis les

$\frac{p(p+1)}{1.2}$ termes du second degré, etc... ; on peut aussi ordonner par rapport à l'une des variables, x_1 par exemple ; on obtient alors une série entière en x_1 dont les coefficients sont des séries analogues à la série (2), mais ne contenant plus que $p - 1$ variables $x_2, x_3, \ldots, x_p$, etc... .

La fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est continue, c'est-à-dire que :

Quel que soit le nombre positif ε, on peut lui faire correspondre p nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$, tels que l'on ait

$$|f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_p) - f(x_1, x_2, \ldots, x_p)| < \varepsilon$$

sous la condition que les nombres $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$ satisfassent aux conditions (2) comme les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et que l'on ait

$$|x'_1 - x_1| < \varepsilon_1, \qquad |x'_2 - x_2| < \varepsilon_2, \ldots, \qquad |x'_p - x_p| < \varepsilon_p.$$

La démonstration est pareille à celle que l'on a donnée pour le cas d'une variable.

Enfin on a une proposition semblable au théorème d'Abel :

Soient $b_1, \ldots, b_p$ n nombres quelconques, différents toutefois de 0 : si l'ensemble des nombres positifs ou nuls

$$|A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \ldots, b_p^{\alpha_p}|$$

est borné en haut, on pourra prendre pour $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des nombres positifs quelconques, respectivement plus petits que $|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_p|$; la série (1), à entrée p^{uple} sera absolument convergente pour $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_p = a_p$.

En effet, les séries à termes positifs

$$1 + \left|\frac{a_1}{b_1}\right| + \left|\frac{a_1}{b_1}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{a_1}{b_1}\right|^{\alpha_1} + \ldots$$

$$1 + \left|\frac{a_2}{b_2}\right| + \left|\frac{a_2}{b_2}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{a_2}{b_2}\right|^{\alpha_2} + \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$1 + \left|\frac{a_p}{b_p}\right| + \left|\frac{a_p}{b_p}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{a_p}{b_p}\right|^{\alpha_p} + \ldots$$

sont convergentes, il en est de même de leur produit

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} \left|\frac{a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots, a_p^{\alpha_p}}{b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \ldots, b_p^{\alpha_p}}\right|$$

et de la série que l'on déduit de celle-là en multipliant respectivement ces termes par des nombres positifs qui restent tous inférieurs à un nombre positif fixe, par exemple en multipliant par $|A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} \ldots b_p^{\alpha_p}|$ le terme

$$\left|\frac{a_1^{\alpha_1} \; a_2^{\alpha_2} \; \ldots, \; a_p^{\alpha_p}}{b_1^{\alpha_1} \; b_2^{\alpha_2} \; \ldots, \; b_p^{\alpha_p}}\right|;$$

la série à termes positifs ou nuls

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} |A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots, a_p^{\alpha_p}|$$

est donc convergente, c'est ce que l'on avait annoncé.

Il est tout naturel d'étendre à ce cas l'expression de fonction majorante, et de dire que la fonction $F(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ somme de la série

$$(3) \qquad \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} |A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p}| x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots, x_p^{\alpha_p}$$

dont les coefficients sont les valeurs absolues des coefficients de la série (1) est une fonction majorante de la fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_p)$: on a, pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_p$ qui satisfont aux conditions (1),

$$F(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_p|) \geqq |f(x_1, x_2, \ldots, x_p)|.$$

Revenons aux séries à une variable.

345. — Lorsque la série

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

dont je désignerai la somme par $f(x)$, est absolument convergente pour $x = x_0$, elle est, d'après ce qu'on vient de dire, uniformément convergente pour l'ensemble des points qui appartiennent au cercle dont le centre est au point o et qui passe par le point x_0. Abel a montré que si la série est convergente pour x_0 (sans supposer qu'elle le soit absolument), elle est uniformément convergente pour l'ensemble des points appartenant au rayon qui va du point o au point x_0. Si l'on avait $x_0 = 1$, cela reviendrait à dire que la série est uniformément convergente pour les valeurs réelles de x qui appartiennent à l'intervalle (o, 1); il suffit, dans le cas général, de faire la transformation $x = x_0 \xi$, pour être ramené à ce cas, que je considérerai seul.

En supposant donc que la série

$$(2) \qquad a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$$

soit convergente, il s'agit de prouver que la série

$$(1) \qquad a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

est uniformément convergente dans l'intervalle (o, 1).

Cela va résulter d'une forme du reste, qui comme l'a montré M. O. Stolz, met en évidence non seulement le théorème d'Abel, mais une proposition plus générale. Cette forme du reste résulte elle-même de l'égalité

$$(3) \qquad f(x) = (1 - x)(s_0 + s_1 x + \ldots + s_n x^n + \ldots),$$

où s_n désigne en général la somme des $n+1$ premiers termes de la série (2); cette égalité est vraie pourvu que la valeur absolue de x, que je désignerai par x', soit moindre que 1. Qu'il en soit ainsi, c'est ce que l'on voit, soit par une simple vérification, en effectuant la multiplication indiquée dans le second membre et en constatant qu'on retrouve ainsi, après avoir ordonné, la série (1), soit en observant que la série

$$(4) \qquad s_0 + s_1 x + \ldots + s_n x^n + \ldots$$

résulte de la multiplication, par la règle ordinaire, de la série (1) par la série

$$(5) \qquad 1 + x + \ldots + x^n + \ldots$$

dont la somme est $\frac{1}{1-x}$. Les deux opérations sont légitimes : d'une part, en effet, de ce que la limite de s_n, pour n infini, est la somme $f(1)$ de la série (2), il résulte que la valeur absolue des nombres s_n ne peut dépasser un certain nombre positif fixe P, la borne supérieure de l'ensemble des nombres $|s_n|$, que, par conséquent, la série (4), dont le terme général est au plus égal, en valeur absolue, à $P_n x'^n$ est absolument convergente pour $x' < 1$, en sorte que la multiplication de cette série par $1 - x$ ne comporte aucune difficulté; d'autre part, la série (5) est absolument convergente, comme la série (1), pour $x' < 1$; la règle de la multiplication s'applique donc bien à ces deux séries.

Ceci posé, quand x' est moindre que 1, la somme de la série (4) est au plus égale en valeur absolue à

$$P(1 + x' + \ldots + x'^n + \ldots) = \frac{P}{1 - x'}.$$

Sous la condition $x' < 1$, on aura donc, à cause de l'identité (3),

$$|f(x)| \leqq P \frac{|1 - x|}{1 - x'};$$

Ceci posé, soit λ un nombre réel plus grand que 1; pour l'ensemble des nombres x qui vérifient les deux conditions

$$x' < 1, \qquad \frac{|1 - x|}{1 - x'} \leqq \lambda$$

on aura

$$(6) \qquad |f(x)| \leqq \lambda P,$$

et cette inégalité subsiste pour $x = 1$; en effet les relations

$$|s_n| \leqq P, \qquad \lim_{n=\infty} s_n = f(1),$$

impliquent $|f(1)| \leqq P$.

Le reste de la série (1), limitée au terme $a_n x^n$, peut s'écrire

$$R_n(x) = x^{n+1}\varphi(x)$$

en posant

$$\varphi(x) = a_{n+1} + a_{n+2}x + \ldots;$$

l'inégalité (6) s'applique aussi bien à la série $\varphi(x)$; seulement on doit remplacer P par la borne supérieure de l'ensemble des nombres

$$(7) \qquad |a_{n+1}|, \quad |a_{n+1} + a_{n+2}|, \quad |a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}|, \ldots;$$

or, en raison de la convergence de la série (1) on peut faire correspondre à chaque nombre positif ε un nombre naturel p tel que tous les nombres (7) soient moindres que ε sous la condition $n > p$; sous cette condition, on aura donc

$$|R_n(x)| < \lambda\varepsilon$$

pourvu que x satisfasse aux conditions suivantes : ou bien x est égal à 1, ou bien on a à la fois

$$(8) \qquad x' < 1, \qquad \frac{|1 - x|}{1 - x'} \leqq \lambda.$$

En d'autres termes la série (2) est uniformément convergente (au sens étroit) pour tout ensemble de valeurs de x qui satisfont à ces conditions, par exemple pour l'intervalle (0, 1), où l'on a $x = x'$.

Quand à l'ensemble des points x qui vérifient les conditions (8), on reconnaît bien facilement qu'il constitue, en y comprenant le point 1, un domaine simple dont le contour est la petite boucle d'un limaçon de Pascal ayant son point double au point 1; si l'on prend ce point pour pôle et la direction qui va vers le point 0 pour axe polaire, on pourra construire cette boucle au moyen de l'équation, en coordonnées polaires r et θ,

$$r = \frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1}(\lambda \cos\theta - 1),$$

en faisant croître θ de $-\operatorname{arc}\cos\frac{1}{\lambda}$ à $+\operatorname{arc}\cos\frac{1}{\lambda}$. On voit tout de suite que cette courbe est aussi voisine qu'on veut du cercle de convergence pourvu que λ soit assez grand, et que l'angle des tangentes au point double qui contiennent la courbe est, dans ces conditions, aussi voisin de deux droits que l'on veut. Dans ce domaine, la série est uniformément convergente; sa somme est donc une fonction continue de x, puisque ses termes sont des fonctions continues.

En particulier, quand le point x s'approche du point 1 en suivant une corde, ou le diamètre, qui aboutit en ce point, $f(x)$ a pour limite $f(1)$.

Voici des applications où je supposerai x réel, d'autant que les fonctions $\log(1 + x)$, $\operatorname{arc}\operatorname{tg} x$ n'ont pas encore été définies pour d'autres valeurs de x.

On a démontré, en supposant $|x| < 1$, les égalités

$$\log(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots,$$
$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots;$$

elles subsistent pour $x = 1$, puisque, pour cette valeur $\log(1 + x)$ et $\operatorname{arc\,tg} x$ sont des fonctions continues : on a donc

$$\log 2 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$
$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

On a démontré que, si les deux séries

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots,$$
$$b_0 + b_1 + \ldots + b_n + \ldots$$

étaient absolument convergentes, la série

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + \ldots + (a_0b_n + \ldots + a_nb_0) + \ldots$$

était absolument convergente, et que sa somme était égale au produit des sommes des deux premières ; il suffit, pour pouvoir affirmer cette dernière propriété, que les trois séries soient convergentes ; en effet les trois séries

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$
$$b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + \ldots,$$
$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \ldots + (a_0b_n + \ldots + a_nb_0)x^n + \ldots$$

sont absolument convergentes pour $|x| < 1$; pour de telles valeurs, on a

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{A}(x) \times \mathrm{B}(x)$$

en désignant par $\mathrm{A}(x)$, $\mathrm{B}(x)$, $\mathrm{P}(x)$ les sommes de ces trois séries. Il suffit maintenant de faire tendre x vers 1 par valeurs réelles et plus petites que 1 pour arriver à la conclusion énoncée.

346. — Soit

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$$

une série que je suppose convergente tant que l'on $|x| < R$, en désignant par R un nombre positif.

Pour $x = 0$, $f(x)$ se réduit à a_0; c'est d'ailleurs une fonction continue : si a_0 n'est pas nul, $f(x)$ ne sera pas nul tant que la valeur absolue de x sera suffisamment petite; en d'autres termes on pourra décrire de o comme centre un cercle de rayon suffisamment petit pour que $f(x)$ soit différent de o pour tous les points x qui appartiennent au cercle.

Supposons maintenant

$$a_0 = 0,\ a_1 = 0, \ldots,\ a_{n-1} = 0,\ a_n \neq 0;$$

on aura

$$f(x) = x^n(a_n + a_{n+1}x + \ldots).$$

Dans un cercle suffisamment petit décrit autour du point o comme centre, la série qui figure entre parenthèses dans le second membre ne s'annule pas; dans le même cercle, la fonction $f(x)$ ne peut s'annuler qu'au centre, pour $x = 0$.

Si donc tous les coefficients de la série (1) ne sont pas nuls, la fonction $f(x)$ ne peut s'annuler pour tous les points d'un ensemble dont o serait un point d'accumulation. En particulier, elle ne peut être nulle pour toutes les valeurs de x.

Deux séries entières en x ne peuvent, sans être identiques terme à terme, prendre des valeurs égales pour tous les points d'un ensemble dont o serait un point d'accumulation.

347. — Si l'on a des séries entières en x, convergentes tant que l'on a $|x| < R$, on peut les ajouter, les retrancher, les multiplier par des règles semblables à celles que l'on applique aux polynomes ordonnés suivant les puissances croissantes de x : le résultat est toujours une série entière en x, convergente tant que l'on a $|x| < R$.

Pour ce qui est de la division, on donnera plus tard (n° **398**) une règle plus précise que celle qui suit; il nous sera toutefois commode de savoir immédiatement que l'opération peut se faire et qu'elle est valable pourvu que la valeur absolue de la variable soit suffisamment petite.

Considérons d'abord une série de la forme

$$\varphi(x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots,$$

dans laquelle on suppose $|\alpha_n| \leqq 1$, en sorte que cette série est absolument convergente pour $|x| < 1$. Je me propose de chercher s'il y a une série

$$\psi(x) = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots,$$

tel que le produit $f(x)\,g(x)$ soit égal à 1 pour toutes les valeurs de x qui rendent les deux séries convergentes; d'après le numéro précédent, il faut que, si l'on forme le produit $\varphi(x)\,\psi(x)$ par la règle ordinaire, le premier coefficient soit égal à 1 et que les autres coefficients soient nuls; on obtient ainsi les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \beta_1 + \alpha_1 = 0 \\ \beta_2 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2 = 0 \\ \beta_3 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3 = 0 \end{array}\right.$$

qui déterminent successivement et sans ambiguïté les nombres $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$; Ces nombres satisfont évidemment aux inégalités

$$\begin{array}{l} |\beta_1| = |\alpha_1| \leqq 1, \\ |\beta_2| \leqq |\alpha_1| + |\alpha_2| \leqq 2, \\ |\beta_3| \leqq 2\,|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| \leqq 2^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

et $|\beta_n| \leqq 2^{n-1}$, comme il est bien aisé de le reconnaître.

La série $1 + x + 2x^2 + \ldots + 2^{n-1}x^n + \ldots$ est absolument convergente pour $|x| < \frac{1}{2}$; il en sera de même de la série $\psi(x)$, en supposant les coefficients $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n, \ldots$ déterminés par les équations (1), et il est clair que l'on aura $\varphi(x)\,\psi(x) = 1$, pourvu que la valeur absolue de x soit inférieure à $\frac{1}{2}$. — On remarquera que, si l'on veut calculer seulement $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, il suffit de connaître $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et que, au lieu d'employer la méthode des coefficients indéterminés, on pourra faire la division de 1 par le polynome $1 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$, en s'arrêtant, au quotient, au terme en x^n.

Observons encore que, par le raisonnement dont on s'est servi, on est assuré que l'équation $\varphi(x) = 0$ n'a pas de racine dont la valeur absolue soit inférieure à $\frac{1}{2}$.

Si l'on veut diviser par $\varphi(x)$ une série entière $\Phi(x)$, pour laquelle le rayon de convergence est R, il suffit de former la série $\psi(x)$, puis d'effectuer le produit $\Phi(x)\psi(x)$; le résultat est une série entière absolument convergente pourvu que la valeur absolue de x soit inférieure à la fois à R et à $\frac{1}{2}$.

On ramènera au cas précédent la division par une série entière

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

dans laquelle on suppose que a_0 ne soit pas nul, en faisant d'abord le changement de variable $x = k\xi$, ce qui donne

$$f(k\xi) = a_0\left(1 + \frac{a_1 k}{a_0}\xi + \dots + \frac{a_n k^n}{a_0}\xi^n + \dots\right)$$

et en déterminant le nombre positif k de manière que l'on ait, quel que soit le nombre naturel n,

$$k \leq \sqrt[n]{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|}.$$

La division par $f(k\xi)$ sera légitime si l'on a $|\xi| < \frac{1}{2}$ et, par conséquent, la division par $f(x)$ sera elle-même légitime si l'on a $|x| < \frac{1}{2k}$; Quant à la condition imposée à k, on peut certainement y satisfaire; soit en effet λ un nombre positif pour lequel la série proposée soit convergente; on aura $\lim_{n=\infty} |a_n \lambda^n| = 0$; il existe donc un nombre naturel n à partir duquel on a $|a_n\lambda^n| < |a_0|$, ou

$$\lambda < \sqrt[n]{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|};$$

on prendra k plus petit que λ et que

$$\sqrt{\left|\frac{a_0}{a_1}\right|},\ \sqrt[2]{\left|\frac{a_0}{a_2}\right|},\ \dots,\ \sqrt[n-1]{\left|\frac{a_0}{a_{n-1}}\right|}.$$

Dans la pratique, pour effectuer la division par $f(x)$ d'une série entière en x, ou plutôt pour calculer les termes du quotient jusqu'au terme en x^m, on substituera au dividende et au diviseur les deux polynomes que l'on obtient en supprimant les termes de degré supérieur à m, on effectuera la division d'après la règle relative aux polynomes ordonnés suivant les puissances croissantes de x, et en s'arrêtant au terme en x^m.

On reconnaît immédiatement que le quotient contient un terme indépendant de x s'il y en a un au dividende; plus généralement, si le dividende commence par un terme en x^p, il en sera de même du quotient.

348. — On a supposé que le premier coefficient a_0 du diviseur n'était pas nul; si ce coefficient est nul, si le diviseur par exemple peut se mettre sous la forme

$$a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots,$$

on voit tout de suite comment les choses se passent en se reportant à la division des polynomes; on peut continuer, pour trouver les premiers termes du quotient, d'appliquer la même règle; on peut aussi effectuer la division par la même série

$$a_n + a_{n+1} x + a_{n+2} x^2 + \dots,$$

puis diviser chaque terme du quotient par x^n; ce quotient, si l'on ne peut pas mettre en facteur au dividende une puissance de x égale ou supérieure à n, se présentera sous la forme

$$\frac{A_r}{x^r} + \frac{A_{r-1}}{x^{r-1}} + \dots + \frac{A_1}{x} + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

où r désigne un nombre naturel. Cette forme est valable pourvu que x ne soit pas nul et que sa valeur absolue soit suffisamment petite. On dit alors que, pour le quotient, le point o est un pôle d'ordre r.

Cette notion de pôle, qui s'est déjà introduite dans les fractions rationnelles, est très importante, il convient de la présenter d'une façon générale.

On dit que a est un pôle d'ordre r de la fonction $f(x)$ de la variable imaginaire x si cette fonction peut, pour les valeurs de x autres que a et suffisamment voisines de a, se mettre sous la forme

$$(2)\quad f(x) = \frac{A_r}{(x-a)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x-a)^{r-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + P(x-a)$$

où $P(x-a)$ désigne une série entière en $x-a$, convergente quand $x-a$ est suffisamment petit en valeur absolue et où $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_1$ sont des constantes dont la première n'est pas nulle : Dans ce développement, le coefficient A_1 de $\frac{1}{x-a}$ joue un rôle particulièrement important : on l'appelle *résidu* du pôle a. Ce pôle est dit simple quand r est égal à 1 ; dans ce cas le résidu est manifestement la limite, pour $x = a$, du produit $f(x)(x-a)$.

D'une façon générale, le second membre de l'égalité (2) sera dit le développement de la fonction $f(x)$ relatif au pôle a et l'expression

$$\frac{A_r}{(x-a)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x-a)^{r-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a}$$

sera désignée comme la *partie principale* de ce développement, ou de la fonction, relative au pôle a. C'est un polynome en $\frac{1}{x-a}$ sans terme constant.

349. — Soit

$$(1)\qquad u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

une série dont les termes sont eux-mêmes des séries entières en x ; je poserai en général

$$u_n(x) = u_{0,n} + u_{1,n}x + \ldots + u_{p,n}x^p + \ldots ; \quad (n = 0, 1, 2 \ldots).$$

Je suppose toutes les séries $u_n(x)$ absolument convergentes pour $x = a$, a étant un nombre positif. Je désignerai en général par $U_n(x)$ la majorante naturelle de $u_n(x)$ et par A_n la valeur que prend $U_n(x)$ pour $x = a$; en d'autres termes A_n est le nombre positif ou nul

$$|u_{0,n}| + |u_{1,n}a| + \ldots + |u_{p,n}a^p| + \ldots$$

Je suppose enfin que la série, à termes positifs ou nuls

$$A_0 + A_1 + \dots + A_p + \dots$$

soit convergente ; on a alors les deux propositions qui suivent

I. La série

$$u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x)$$

est absolument et uniformément convergente dans le domaine des points x défini par l'inégalité $|x| \leqq a$; dans ce domaine, la somme de la série est une fonction continue de x et peut se représenter par une série entière en x, absolument convergente.

II. Dans le même domaine, le produit infini

$$(2) \qquad [1 + u_0(x)][1 + u_1(x)] \dots [1 + u_n(x)] \dots$$

est absolument et uniformément convergent ; sa valeur est une fonction continue de x, et peut se représenter par une série entière en x, absolument convergente.

Ces deux propositions seront généralisées plus loin (n° 402) : sous la forme restreinte où on vient de les énoncer, elles rendent déjà de grands services et leur démonstration est immédiate. Il n'y a évidemment lieu à démontrer que les dernières parties des énoncées ; que la série (1) et le produit infini (2) soient absolument et uniformément convergents dans le domaine considéré, que leurs valeurs respectives soient des fonctions continues, c'est ce qui résulte évidemment du n° **183**, interprété comme il convient quand on considère des nombres imaginaires.

I. D'après les hypothèses que l'on a faites, la série à double entrée

$$\sum_{n,\,p} |u_{p,n} a^p|, \qquad \begin{array}{l} p = 0, 1, 2, \dots, \\ n = 0, 1, 2, \dots. \end{array}$$

est absolument convergente ; il en est de même, sous la condition $|x| \leqq a$, de la série à double entrée

$$\sum_{n,p} u_{p,n} x^p ;$$

on peut, dans cette série, grouper les termes comme l'on veut ; en réunissant d'abord les termes où n est le même, puis en faisant varier n de o à ∞, on reproduit la série (1); en réunissant au contraire les termes où p est le même et en faisant ensuite varier p de o à ∞ on obtient la série entière en x

$$v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \ldots + v_p x^p + \ldots,$$

en posant

$$v_p = u_{p,0} + u_{p,1} + \ldots + u_{p,n} + \ldots;$$

c'est le résultat qu'on avait énoncé.

II. La seconde proposition résulte de celle qu'on vient de démontrer, en transformant comme on l'a expliqué au nº **124**, le produit infini en une série

$$1 + S_1 + S_2 + \ldots + S_r + \ldots$$

où

$$S_r = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} u_{\alpha_1}(x)\; u_{\alpha_2}(x)\; \ldots\; u_{\alpha_r}(x),$$

la sommation, étant étendue à l'ensemble des systèmes différents de nombres entiers, positifs ou nuls, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ tels que l'on ait $\alpha_1 < \alpha_2 \ldots < \alpha_r$. La série à entrée r^{uple} S_r est absolument convergente pour $x \leqq a$; elle reste telle quand on y remplace $u_1, u_2, \ldots$ par $A_1, A_2, \ldots$; le terme

$$u_{\alpha_1}\; u_{\alpha_2}\; \ldots\; u_{\alpha_r}$$

peut d'ailleurs être mis sous forme d'une série entière en x, en appliquant les règles de la multiplication des séries : le résultat est toujours absolument convergent dans le domaine défini par la condition $|\, x \,| \leqq a$. Enfin la valeur absolue de ce terme est au plus égal à $A_{\alpha_1}\; A_{\alpha_2}\; \ldots\; A_{\alpha_r}$. La série

$$\Sigma_r = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r} A_{\alpha_1}\; A_{\alpha_2}\; \ldots\; A_{\alpha_r}$$

est convergente ; il en est de même de la série

$$1 + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots + \Sigma_r.$$

On voit donc que toutes les conditions imposées dans le théorème I sont vérifiées pour la série $1 + S_1 + S_2 + \ldots$: cette série, où le produit infini, peut donc être mis sous forme d'une série entière en x.

Il convient de remarquer que le coefficient du terme en x dans cette série est le même que dans le développement du produit infini

$$(1 + u_{0,0} + u_{1,0}x)(1 + u_{0,1} + u_{1,1}x) \dots (1 + u_{0,n} + u_{1,n}x) \dots$$

Dans le cas où le produit infini

$$P_0 = (1 + u_{0,0})(1 + u_{0,1}) \dots (1 + u_{0,n}) \dots$$

n'est pas nul, c'est-à-dire dans le cas où le produit infini (2) ne s'annule pas pour $x = 0$, ce coefficient peut s'écrire

$$P_0 \left[\frac{u_{1,0}}{1 + u_{0,0}} + \frac{u_{1,1}}{1 + u_{0,1}} + \dots + \frac{u_{1,n}}{1 + u_{0,n}} + \dots \right];$$

si P_0 était nul, l'un des facteurs, par exemple $1 + u_{0,p}$, serait nul, et le coefficient cherché s'obtiendrait en multipliant par $u_{1,p}$ le produit infini dont les différents facteurs s'obtiendraient en donnant à r, dans $1 + u_{0,r}$ toutes les valeurs 0, 1, 2, ..., sauf la valeur p.

La remarque suivante nous sera encore utile : les majorantes naturelles $U_0(x)$, $U_1(x)$, ... des séries $u_0(x)$, $u_1(x)$, ... satisfont évidemment aux conditions imposées à ces fonctions pour l'application des théorèmes (I) et (II) ; sous ces conditions, par conséquent, et dans le domaine $|x| \leqq a$, la série

$$U_0(x) + U_1(x) + \dots + U_n(x) + \dots$$

et le produit infini

$$[1 + U_0(x)][1 + U_1(x)] \dots [1 + U_n(x)] \dots$$

sont absolument convergents, sont des fonctions continues, sont développables en série entière en x ; ces fonctions sont respectivement des majorantes de la série

$$u_0(x) + u_1(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

et du produit infini

$$[1 + u_0(x)][1 + u_1(x)] \dots [1 + u_n(x)] \dots .$$

III. Supposons que la série, entière en y,

$$g(y) = b_0 + b_1 y + \ldots + b_n y^n + \ldots$$

soit absolument convergente sous la condition $|y| \leqq b$, en désignant par b un nombre positif. Soit maintenant

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

une série entière en x, absolument convergente sous la condition $|x| \leqq a$, en désignant toujours par a un nombre positif. Je suppose en outre que la somme de la série

$$|a_0| + |a_1 a| + \ldots + |a_n a^n| + \ldots$$

soit au plus égale à b.

Dans ces conditions, si, dans la série $g(y)$, on regarde y comme étant égal à $f(x)$, il est clair qu'on aura défini une fonction continue de x dans le domaine $|x| \leqq a$. Cette fonction peut encore être représentée par une série entière en x.

C'est une conséquence aisée de la proposition I; en effet $y, y^2, \ldots, y^n, \ldots$ sont des séries entières en x, absolument convergentes pour $x \leqq a$; les sommes de ces séries, quand on y remplace les coefficients par leurs valeurs absolues et x par a, restent au plus égales à $b, b^2, \ldots, b^n, \ldots$; on en conclut que les conditions imposées dans le théorème I sont vérifiées pour la série $b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots$, quand on y regarde les termes comme les séries entières en x que l'on vient de définir.

Dans le cas où la série $g(y)$ est convergente quel que soit y, le rayon de convergence de la série en x que l'on obtient en procédant comme on l'a expliqué est au moins égal au rayon de convergence de la série $f(x)$.

IV. La proposition III est susceptible d'une généralisation qu'il suffira d'énoncer.

Soit, en reprenant les notations du n° **344**,

$$(1) \qquad \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_p^{\alpha_p},$$

une série p^{uple} à p variables, absolument convergente sous les conditions

$$(2) \qquad |x_1| \leqq a_1, \qquad |x_2| \leqq a_2, \quad \ldots, \qquad |x_p| \leqq a_p,$$

où a_1, a_2, ..., a_p sont des nombres positifs; si l'on regarde x_r ($r = 1, 2, \ldots, p$) comme la somme d'une série entière en x, absolument convergente sous la condition $|x| \leqq a$ (a positif), et dont la majorante naturelle prenne pour $x = a$ une valeur au plus égale à a_r, la somme de la série (1) sera une fonction de x, définie sous la condition $|x| \leqq a$, qui peut se mettre sous forme d'une série entière en x absolument convergente pour $x = a$.

Dans les propositions I, II, III, IV, $u_n(x)$, $f(x)$, x_r ont désigné des séries entières en x; naturellement les propositions subsistent quand quelques unes de ces séries se réduisent à des polynomes; c'est ce qui arrive dans l'importante proposition qui suit.

350. — Soit

$$(1) \qquad f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

une série entière en x. Pour ne pas multiplier les notations, je me permettrai d'employer le même symbole $f(x)$ pour désigner la série et sa somme. Je désignerai par x' la valeur absolue de x et par a'_n celle de a_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Je suppose que la série (1) converge absolument sous la condition $x' < A$, A étant un nombre positif, que l'on pourra prendre arbitrairement si la série (1) converge quel que soit x, que l'on prendra, dans le cas contraire, égal ou inférieur au rayon de convergence R de la série (1). Il est à peine besoin de dire que l'on exclut le cas insignifiant où ce rayon serait nul.

Je regarderai provisoirement x et x' comme fixes; on suppose $x' < A$; soit H un nombre positif fixe moindre que $A - x'$; soit h une variable assujettie à la condition $|h| \leqq H$. La fonction de h

$$f(x+h) = a_0 + a_1(x+h) + \ldots + a_n(x+h)^n + \ldots$$

est définie pour toutes les valeurs de h qui satisfont à cette condition; la série

$$a'_0 + a'_1(x'+H) + \ldots + a'_n(x'+H)^n + \ldots$$

est d'ailleurs convergente puisque $x' + H$ est moindre que A.

Il suit de là que la série

$$(h) \qquad a_0 + a_1(x+h) + \ldots + a_n(x+h)^n + \ldots,$$

où h est la variable, satisfait aux conditions sous lesquelles le théorème I du numéro précédent est applicable : $a_n(x+h)^n$ remplace $u_n(x)$; $a'_n(x'+H)^n$ remplace A_n. On peut donc développer et ordonner suivant les puissances de h : le coefficient de h^n est le produit par

$$\frac{1}{1.2\ldots n}$$

de la série

$$n(n-1)\ldots 1\,a_n+(n+1)n\ldots 2\,a_{n+1}x+(n+2)(n+1)\ldots 3\,a_{n+2}x^2+\ldots$$
$$+(n+p)(n+p-1)\ldots(p+1)a_{n+p}x^p+\ldots,$$

qui, en vertu du théorème même que l'on applique, est une série convergente pour $|x|<A$.

En résumé, on est parvenu au théorème que voici :

Soit

$$(1)\qquad f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n+\ldots$$

une série entière en x, convergente pour $|x|<A$; sous la même condition, les séries

$$(2)\quad\left\{\begin{aligned}
&f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+(n+1)a_{n+1}x^n+\ldots,\\
&f''(x)=1.2\,a_2+2.3\,a_3x+3.4\,a_4x^2+\ldots+(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&f^{(p)}(x)=1.2\ldots p\,a_p+2.3\ldots(p+1)a_{p+1}x+\ldots\\
&\qquad\qquad+(n+1)(n+2)\ldots(n+p)a_{n+p}x^n+\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

sont absolument convergentes et l'on a

$$(3)\quad f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2\ldots n}f^{(n)}(x)+\ldots,$$

sous les conditions

$$(4)\qquad |x|<A,\qquad |x|+|h|<A.$$

La première de ces conditions, nécessaire pour que la seconde puisse être vérifiée par quelque valeur de h, est nécessaire aussi pour que l'on soit assuré de la convergence des séries $f'(x)$, $f''(x)$, ...

On remarquera que la série $f''(x)$ se déduit de la série $f'(x)$ comme la série $f'(x)$ se déduit de la série $f(x)$; de même, la série $f'''(x)$ de la série $f''(x)$, etc... Si l'on se donnait la série $f'(x)$, les coefficients de la série $f(x)$ seraient tous déterminés, sauf a_0; $f(x)$ serait déterminée à une constante additive près.

Les séries $f'(x)$, $f''(x)$, ... convergent pourvu que l'on ait $|x| < A$; leur rayon de convergence est au moins égal à A.

Si la série $f(x)$ est convergente quel que soit x, il en est de même des séries $f'(x)$, $f''(x)$, ...

Si le rayon de convergence de la série (1) est R, il en est de même pour les séries $f'(x)$, $f''(x)$, ... D'abord le rayon de convergence de ces dernières séries est au moins égal à R, puisqu'on peut prendre $A = R$. Si, maintenant, la série $f'(x)$, par exemple, converge pour la valeur x, son $n^{\text{ième}}$ terme $na_n x^{n-1}$ tend vers 0 quand n augmente indéfiniment; il en est de même, *a fortiori*; de $a_n x^{n-1}$ et, par suite de $a_n x^n$; on a donc $|x| \leqq R$ (n° **342**) et par conséquent le rayon de convergence de la série $f'(x)$ ne peut dépasser R : il est égal à R.

Toutefois, sur la circonférence même du cercle de convergence, le caractère de la série $f(x)$ et de la série $f'(x)$ n'est pas le même, en général. Si la dernière série est absolument convergente au point x, il en est de même de la première, dont les coefficients sont plus petits en valeur absolue; mais la réciproque n'est pas vraie, comme on le voit en prenant, par exemple,

$$f(x) = \frac{x}{1^2} + \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots,$$

d'où l'on tire

$$f'(x) = \frac{1}{1} + \frac{x}{2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n} + \dots.$$

La première série converge pour $x = 1$, et non la seconde.

Si la série (1) est convergente quel que soit x, on peut prendre A aussi grand qu'on le veut, la série (h) est convergente quel que soit h; l'égalité (3) a lieu quels que soient x et h.

Si le rayon de convergence de la série (1) est R, on peut prendre $A = R$; x est une constante assujettie à la condition $|x| < R$; la série (h) est absolument convergente, et la formule (3) est valable, pourvu que l'on ait $|h| < R - |x|$; le rayon de convergence de la série (h), entière en h, est au moins égal à $R - |x|$.

Il est aisé de montrer sur un exemple que le rayon de convergence peut dépasser $R - |x|$. Considérons par exemple la série

$$1 + x + x^2 + \ldots,$$

dont le rayon de convergence est 1 et dont la somme est $\frac{1}{1-x}$; si l'on y remplace x par $x + h$, et qu'on ordonne par rapport à h, les opérations seront légitimes sous les conditions

$$|x| < 1, \qquad |h| < 1 - |x|;$$

la série en h à laquelle on parviendra aura pour somme

$$\frac{1}{1-x-h} = \frac{1}{1-x} \frac{1}{1 - \dfrac{h}{1-x}}$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{h}{(1-x)^2} + \ldots + \frac{h^n}{(1-x)^{n+1}} + \ldots;$$

elle sera donc identique à la série qui figure dans le dernier membre de l'égalité précédente; c'est ce qu'on reconnaîtrait d'ailleurs aisément en faisant le calcul: l'égalité précédente est valable, et la série qui figure dans le second membre est convergente, sous la seule condition $|h| < |1 - x|$: or, on a $|1 - x| > 1 - |x|$, si x n'est pas réel.

Il est tout naturel de se demander si les choses se passeront en général comme dans l'exemple précédent, c'est-à-dire si l'égalité (3), qui n'est démontrée que sous la condition $|h| < R - |x|$, subsiste tant que la série qui figure dans le second membre est convergente; on établira un peu plus tard qu'il en est bien ainsi, en supposant

$$|x| < R, \qquad |x + h| < R.$$

On établira aussi que le rayon de convergence de la série (h) est au plus égal à $R + |x|$.

La proposition qui fait l'objet principal du présent numéro s'étend sans peine aux séries entières à plusieurs variables. Je me borne à quelques indications sur ce sujet.

351. — Reprenons les notations du nº **344** relatives à la série

$$f(x_1, x_2, \dots x_p) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_p^{\alpha_p};$$

regardons $x_1, x_2, \dots, x_p$ comme des constantes satisfaisant aux conditions

$$|x_1| < a_1, \quad |x_2| < a_2, \dots, \quad |x_p| < a_p,$$

où cette fois l'égalité est exclue; soient $H_1, H_2, \dots, H_p$ des nombres positifs respectivement inférieurs à

$$a_1 - |x_1|, \quad a_2 - |x_2|, \dots, \quad a_p - |x_p|,$$

et $h_1, h_2, \dots, h_p$ des variables assujetties aux conditions

$$|h_1| \leqq H_1 \quad |h_2| \leqq H_2, \dots, \quad |h_p| \leqq H_p;$$

sous ces conditions, la fonction $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_p + h_p)$ peut se mettre sous la forme d'une série entière en $h_1, h_2, \dots, h_p$ absolument convergente; les coefficients sont eux-mêmes des séries entières en $x_1, x, \dots x_p$, absolument convergentes sous les conditions énoncées. Je n'insiste pas sur la loi de ces coefficients, je me contenterai de remarquer que le coefficient de h_1 est

$$\sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p} \alpha_1 x_1^{\alpha_1 - 1} x_2^{\alpha_2} \dots x_p^{\alpha_p},$$

où il est entendu qu'il ne figure pas de puissance des variables à exposant négatif; le terme écrit disparait quand α_1 est nul.

352. — Supposons que la fonction $f(x)$ soit définie au point x et aux environs. Si, en désignant par ε un nombre positif, qui peut d'ailleurs être aussi petit qu'on le veut, la fonction $f(x + h)$ de la variable h peut sous la condition $|h| < \varepsilon$, se mettre sous la forme

$$f(x + h) = A_0 + A_1 \frac{h}{1} + A_2 \frac{h^2}{1.2} + \dots + A_n \frac{h^n}{1.2 \dots n} + \dots,$$

la fonction $f(x)$ est dite *régulière* au point x. Le nombre A_0 est forcément égal à $f(x)$, puisque l'égalité précédente doit subsister pour $h = 0$. La fonction ne peut pas être régulière au point x sans y être continue.

Les nombres $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ sont, par définition, les *dérivées première, seconde, ..., $n^{\text{ième}}$*, ... de la fonction $f(x)$ au point x.

Supposons que la fonction $f(x)$ soit régulière en chaque point x d'un continuum C; alors, à chaque point correspondra une suite de nombres $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, qui pourront donc être regardés comme les valeurs au point x d'une suite de fonctions $f'(x)$, $f''(x), \ldots, f^{n}(x), \ldots$ définies dans le continuum, fonctions auxquelles on donne aussi le nom de fonctions dérivées successives de la fonction $f(x)$. Ainsi, à chaque point x du continuum correspond un nombre ε tel que l'on ait, sous la condition $|h| < \varepsilon$,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^{(n)}(x) + \ldots;$$

on dira alors que la fonction est régulière dans tout le continuum (C).

Supposons, par exemple, en désignant par x_0 un nombre fixe, que $f(x)$ soit la somme de la série entière en $x - x_0$,

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

dont je suppose le rayon de convergence égal à R_0; cette fonction, d'après ce qu'on a vu au numéro précédent, sera régulière dans le continuum défini par l'inégalité $|x - x_0| < R_0$; ses dérivées successives seront

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \ldots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \ldots,$$
$$f''(x) = 1.2a_2 + 2.3a_3(x - x_0) + \ldots + (n-1)na_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

A la vérité, c'est dans le cas où x_0 est nul que ces propositions ont été établies, mais le passage d'un cas à l'autre se fait évidemment en prenant $x - x_0$ pour variable. Rappelons encore, en passant, que la série, entière en $X - x$,

$$f(x) + f'(x)\frac{X - x}{1} + f''(x)\frac{(X - x)^2}{1.2} + \ldots$$

est convergente et a pour somme $f(X)$ si l'on a

$$|X - x| < R_0 - |x - x_0|.$$

La loi par laquelle la série $f'(x)$ se déduit de la série $f(x)$ est manifeste : c'est la même loi qui donne la dérivée d'un polynome. C'est aussi par la même loi que $f''(x)$ se déduit de $f'(x)$, que $f'''(x)$ se déduit de $f''(x)$, etc. Ainsi la dérivée seconde est la dérivée de la dérivée première, la dérivée troisième est la dérivée de la dérivée seconde, etc.

Cette dernière proposition s'étend évidemment à une fonction régulière quelconque $F(x)$, puisqu'une fonction régulière au point x_0 peut être représentée, aux environs de ce point, par une série entière en $x - x_0$.

353. — Cette façon d'introduire la notion de dérivée, qui ne s'applique d'ailleurs qu'aux fonctions qu'on a définies comme étant régulières, est tout à fait différente de la façon que l'on a adoptée au Chapitre VI dans le cas des variables réelles. Je veux, dès à présent, dire un mot sur l'extension au cas des variables imaginaires de cette dernière définition de la dérivée.

Soit en général $f(x)$ une fonction de la variable imaginaire x, définie dans un continuum (C). Soit x un point de ce continuum et h une variable, suffisamment petite en valeur absolue pour que $x + h$ appartienne aussi à (C) : en d'autres termes, $|h|$ doit rester inférieure à la distance de x à la frontière de (C). Considérons la fonction de h

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

définie pour les valeurs de h, autres que o, qui satisfont à la condition précédente. Si cette fonction de h admet une limite pour $h = 0$, on dit que la fonction $f(x)$ admet une dérivée au point x, dérivée qui n'est autre que la limite dont on suppose l'existence.

Si la fonction $f(x)$ admet une dérivée en chaque point du continuum, la fonction dérivée $f'(x)$ est définie en chaque point de ce continuum ; pour qu'il en soit ainsi il est évidemment nécessaire que la fonction $f(x)$ soit continue en chaque point de ce continuum ; mais cette condition est loin d'être suffisante.

Cette nouvelle définition de la dérivée est la généralisation immédiate de la définition de la dérivée dans un intervalle donné au Chapitre VI ; toutefois dans ce chapitre, on a considéré la dérivée pour les bornes de l'intervalle ; pour poursuivre l'analogie, il conviendrait de parler de la dérivée pour les points frontières du continuum. C'est un point sur lequel je reviendrai aux nos **378** et **379**.

Je laisse de côté, pour le moment, les conséquences de cette seconde définition de la dérivée : je me borne à remarquer que si la fonction $f(x)$ est régulière, au point x, si l'on peut poser, pourvu que h soit suffisamment petit en valeur absolue,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots;$$

$f'(x)$ sera bien la dérivée de la fonction $f(x)$, au point x, avec le sens de limite qu'on vient de donner au mot dérivée ; l'égalité précédente montre en effet que l'on a

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \frac{h}{1.2} f''(x) + \frac{h^2}{1.2.3} f'''(x) + \ldots;$$

le second membre est une fonction continue de h qui, pour $h = 0$, se réduit à $f'(x)$.

J'abandonne maintenant le point de vue où je me suis placé dans ce numéro, pour m'attacher à la définition de la dérivée tirée de la notion de fonction régulière.

354. — Les règles élémentaires pour le calcul des dérivées se déduisent très aisément de cette définition ; ainsi le lecteur reconnaîtra sans aucune peine que, si les fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ sont régulières au point x, il en est de même de leur somme, de leur produit, de leur quotient (en supposant que le diviseur ne soit pas nul au point x), et retrouvera immédiatement les règles usuelles pour prendre la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient. Voici quelques cas un peu plus compliqués.

Reprenons les notations des propositions I, II du no **349**. Les séries $u_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, entières en x, sont absolument convergentes pour $x = a$ $(a > 0)$; $U_n(x)$ est la majorante naturelle de $u_n(x)$. Les fonctions $u_n(x)$, $U_n(x)$ ont des dérivées

$$u'_n(x),\; u''_n(x),\; \ldots,$$
$$U'_n(x),\; U''_n(x),\; \ldots;$$

les fonctions qui figurent sur la seconde ligne sont manifestement les majorantes naturelles des fonctions qui figurent sur la première ligne : on suppose, en posant $A_n = U_n(a)$, que la série $A_0 + A_1 + \ldots$ est convergente.

Il est bien aisé de voir que la fonction

$$(1) \qquad f(x) = u_0(x) + u_1(x) \ldots + u_n(x) + \ldots$$

est régulière en tout point x du continuum défini par la condition $|x| < a$.

Dans la démonstration, je regarderai x comme fixe ; h sera la variable ; pour la commodité de l'écriture je poserai

$$|x| = x', \qquad |h| = h', \qquad H = a - x'.$$

H est un nombre positif fixe, la variable h est assujettie à la condition $h' \leqq H$. On a

$$(2) \quad f(x+h) = u_0(x+h) + u_1(x+h) + \ldots + u_n(x+h) + \ldots$$

Si, dans la série obtenue en développant $u_n(x+h)$ suivant les puissances de h, on remplace les coefficients par leurs valeurs absolues et h par h', la somme de la série (à termes positifs) à laquelle on parvient ainsi, sera au plus égale à

$$U_n(x'+h') \leqq U_n(x'+H) \text{ ou } A_n.$$

Dès lors, on voit que la proposition I du n° **349** s'applique à la série qui forme le second membre de l'égalité (2), série dont les termes peuvent être regardés comme des séries entières en h, sous la condition $|h| \leqq H$; on pourra donc ordonner suivant les puissances de h et l'on aura

$$(3) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2\ldots n} f^n(x) + \ldots,$$

en posant

$$(3) \quad \begin{cases} f'(x) = u'_0(x) + u'_1(x) + \ldots + u'_n(x) + \ldots, \\ f''(x) = u''_0(x) + u''_1(x) + \ldots + u''_n(x) + \ldots. \end{cases}$$

Les seconds membres de ces dernières égalités, où $u'_n(x)$, $u''_n(x)$, ... $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ désignent les dérivées première, seconde, ... de la fonction $u_n(x)$, sont des séries absolument convergentes sous la condition $|x| < a$. Les sommes de ces séries sont les dérivées première, seconde, ... de la fonction $f(x)$ définie par l'égalité (1).

On obtient donc la dérivée de cette fonction, en prenant les dérivées, terme à terme, du second membre, comme s'il s'agissait d'une somme finie. La règle relative à la formation de la dérivée d'une série entière en x peut être regardée comme un cas particulier de celle qu'on vient d'établir.

Si, en conservant la même signification aux fonctions $u_n(x)$, en leur imposant les mêmes conditions, et en regardant toujours x comme un point satisfaisant à la condition $|x| < a$, on considère la fonction $\varphi(x)$ définie par l'égalité

$$\varphi(x) = [1 + u_0(x)]\,[1 + u_1(x)] \ldots [1 + u_n(x)] \ldots$$

on reconnaîtra que la fonction de h

$$\varphi(x+h) = [1 + u_0(x+h)]\,[1 + u_1(x+h)] \ldots [1 + u_n(x+h)] \ldots$$

peut être ordonnée suivant les puissances de h, que $\varphi(x)$ est régulière au point x et que si, en ce point, aucun des facteurs du produit infini n'est nul, la dérivée $\varphi'(x)$ de $\varphi(x)$ peut se mettre sous la forme

$$(6)\qquad \varphi(x)\left[\frac{u_0'(x)}{1 + u_0(x)} + \frac{u_1'(x)}{1 + u_1(x)} + \ldots + \frac{u_n'(x)}{1 + u_n(x)} + \ldots\right];$$

si le facteur $1 + u_n(x)$ était nul, la dérivée de $\varphi(x)$ s'obtiendrait en remplaçant dans le produit infini $\varphi(x)$ le facteur $1 + u_n(x)$ par sa dérivée $u_n'(x)$.

Les propositions III et IV du n° **349** fournissent de même des propositions que je me contenterai d'énoncer, le mode de démonstration étant suffisamment éclairci par ce qui précède : le lecteur ne manquera pas de rapprocher ces propositions de celles qui ont été établies, pour les variables réelles, aux n^{os} **212** et **220**.

Conservons aux séries

$$g(y) = b_0 + b_1 y + \ldots + b_n y^n + \ldots$$
$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

la signification du n° **349** (III), ainsi que les conditions imposées à ces séries ; la fonction de x obtenue en regardant, dans $g(y)$, y comme égal à $f(x)$ est régulière pour tous les points x qui satisfont à la condition $|x| < a$ et la dérivée de cette fonction par rapport à x est égal au produit $g'(y)\,f'(x)$.

Conservons à la série p^{uple}

$$\sum_{\alpha_1,\,\alpha_2,\dots,\,\alpha_p} A_{\alpha_1,\,\alpha_2,\,\dots,\,\alpha_p}\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_p^{\alpha_p}$$

la signification du n° **349**, IV et imposons-lui les mêmes conditions : désignons-en la somme par $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$; la fonction de p variables $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est définie pour les valeurs de ces variables qui satisfont aux conditions

$$|x_1| \leqq a_1 \quad , \quad |x_2| \leqq a_2 \dots \quad , \quad |x_p| \leqq a_p ;$$

elle admet des dérivées partielles pour tout système de valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_p$ qui satisfont aux conditions,

$$|x_1| < a_1 \quad , \quad |x_2| < a_2, \dots \quad , \quad |x_p| < a_p ;$$

adoptons pour ces dérivées partielles le même symbolisme que pour les fonctions de variables réelles (1). Regardons maintenant x_r $(r = 1, 2, \dots p)$ comme la somme d'une série entière en x, soumise aux conditions qui ont été énumérées au n° **349**, IV ; alors, $f(x_1, x_2, \dots, x_p)$ devient une fonction composée de x, régulière sous la condition $|x| < a$: sa dérivée est

$$x'_1 f'_{x_1} + x'_2 f'_{x_2} + \dots + x'_p f'_{x_p},$$

en désignant par $x'_1, x'_2, \dots, x'_p$ les dérivées de $x_1, x_2, \dots, x_p$ par rapport à x.

355. — Soit (C) un continuum borné et $\varphi(x)$ une fonction régulière en chaque point de ce continuum.

Par hypothèse, à chaque point x_0 du continuum correspond un nombre positif ε dont on peut affirmer la propriété suivante : sous la condition $|x - x_0| < \varepsilon$, le point x appartient à (C), et la série

$$(1) \qquad \varphi(x_0) + \frac{x - x_0}{1}\varphi'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2}\varphi''(x_0) + \dots$$

(1) Notons que la proposition $f''_{x_1 x_2} = f''_{x_2 x_1}$ résulterait ici de la règle pour prendre la dérivée d'une série entière et de ce que cette proposition est vraie quand la fonction f se réduit à un monome.

converge absolument, sa somme est égale à $\varphi(x)$. Il y a évidemment une infinité de nombres positifs ε qui jouissent de cette propriété, car si ε la possède, il en est de même des nombres positifs plus petits; mais l'ensemble des nombres positifs ε qui jouissent de cette propriété est borné en haut, puisque le nombre ε ne peut dépasser ni la distance du point x_0 à la frontière du continuum, ni le rayon de convergence de la série. Soit $\rho(x_0)$ la borne supérieure de l'ensemble des nombres ε; dire qu'à chaque point x_0 de (C) correspond un nombre $\rho(x_0)$, c'est dire que la fonction $\rho(x)$ est déterminée dans le continuum (C); $\rho(x)$ est un nombre positif qui n'est jamais nul, qui devient d'ailleurs aussi petit que l'on veut, quand x s'approche suffisamment de la frontière de (C).

Soit maintenant (D) un ensemble clos, contenu dans (C); je vais démontrer que la borne inférieure de l'ensemble des valeurs que prend la fonction $\rho(x)$ pour les points x qui appartiennent à l'ensemble clos (D) n'est pas nulle.

Supposons en effet, pour arriver à une contradiction, que cette borne inférieure soit nulle. Alors, à chaque nombre positif α, si petit qu'il soit, doivent correspondre un ou plusieurs points x, appartenant à (D), tels que l'on ait $\rho(x) < \alpha$; soit $E(\alpha)$ l'ensemble de ces points. Si l'on a $\alpha' < \alpha$, l'ensemble $E(\alpha')$ est évidemment contenu dans $E(\alpha)$. Il y a donc un ensemble $E(o)$ (nos **283**, **156**) de points k dont chacun jouit de la propriété suivante : ou le point k appartient à tous les ensembles $E(\alpha)$, ou il est un point d'accumulation pour chacun de ces ensembles. Dans le premier cas, le point k appartient à (D) puisque tous les points de $E(\alpha)$ appartiennent à (D); il en est de même dans le second cas, car tout point d'accumulation de $E(\alpha)$ est un point d'accumulation de (D) et, par conséquent, appartient à cet ensemble (D), qui est clos. L'ensemble $E(o)$ est donc contenu dans (D).

Prenons pour x_0 un point de cet ensemble $E(o)$. Quelque petit que soit le nombre positif α, il devrait y avoir, aussi près qu'on voudra du point x_0, des points x_1 appartenant à (D) tels que l'on eût $\rho(x_1) < \alpha$. Mais cela est impossible : si l'on a en effet $|x_1 - x_0| < \rho(x_0)$, le point x_1 appartient à (C) et le rayon de convergence de la série

$$(2) \qquad \varphi(x_1) + \varphi'(x_1)\frac{x - x_1}{1} + \varphi''(x_1)\frac{(x - x_1)^2}{1.2} + \ldots$$

est au moins égal à $\rho(x_0) - |x_1 - x_0|$; tout point x intérieur au cercle de centre x_1 et de rayon $\rho(x_0) - |x_1 - x_0|$, cercle qui est tangent intérieurement au cercle de centre x_0 et de rayon $\rho(x_0)$ appartient évidemment à (C); d'ailleurs en un tel point x la somme de la série (2) est égale à $\varphi(x)$; on a donc

$$\rho(x_1) \geqq \rho(x_0) - |x_1 - x_0|;$$

il suffit de supposer

$$|x_1 - x_0| < \frac{1}{2}\rho(x_0)$$

pour que l'on ait $\rho(x_1) > \frac{1}{2}\rho(x_0)$; il y a une borne au-dessous de laquelle $\rho(x_1)$ ne peut pas descendre.

356. — Convenons de dire de deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ régulières au point x_0, qu'elles coïncident complètement en ce point quand on a

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0), \; \varphi^{(n)}(x_0) = \psi^{(n)}(x_0), \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Le lemme du précédent numéro a été établi afin de démontrer l'importante proposition que voici :

Si les deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, régulières en tout point du continuum (C) coïncident complètement en un point de (C), elles coïncident complètement en tout point de ce continuum.

Soit, en effet, X un point du continuum autre que x_0. On prendra pour l'ensemble parfait (D) un lien intérieur à (C) et joignant le point x_0 au point x_1; supposons que ce lien soit défini par les formules

$$x = f(t) + ig(t), \quad \alpha_0 \leqq t \leqq \alpha,$$

où $f(t)$, $g(t)$ désignent des fonctions réelles de la variable réelle t.

Conservons à la fonction $\rho(x)$ la même signification que dans le précédent numéro; cette fonction dépend de la fonction $\varphi(x)$; à la fonction $\psi(x)$ correspond une fonction analogue $\rho_1(x)$; les bornes inférieures des deux fonctions $\rho(x)$, $\rho_1(x)$ pour les points x qui appartiennent au lien (D) ne sont pas nulles; soit ε un nombre positif plus petit que ces deux bornes; intercalons entre α_0 et α des nombres croissants $t_1, t_2, \ldots t_n$, assez voisins pour que, si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les points du lien qui correspondent aux nombres intercalaires, la distance entre deux points consécutifs de la suite

$$x_0, x_1, \ldots, x_n, X$$

soit toujours moindre que ε; décrivons des points $x_0, x_1, \ldots x_n$ comme centres, avec le même rayon ε, des cercles (C_0), (C_1), ... (C_n) : chacun des cercles contiendra, à son intérieur, le centre du suivant; le point X est intérieur au dernier.

Partons du point x_0; en vertu de la supposition, les deux séries, entières en $x - x_0$,

$$\varphi(x_0) + \frac{x - x_0}{1}\varphi'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2}\varphi''(x_0) + \ldots,$$

$$\psi(x_0) + \frac{x - x_0}{1}\psi'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2}\psi''(x_0) + \ldots$$

sont identiques terme à terme : à l'intérieur du cercle (C_0), un même développement convient aux deux fonctions, qui coïncident donc complètement en tout point intérieur à (C_0), au point x_1, en particulier. A l'intérieur du cercle (C_1), un même développement

$$\varphi(x_1) + \frac{x - x_1}{1}\varphi'(x_1) + \frac{(x - x_1)^2}{1.2}\varphi''(x_1) + \ldots$$

convient aux deux fonctions, qui coïncident donc complètement en tout point intérieur à (C_1) : elles coïncideront de même à l'intérieur de (C_2), ..., de (C_n) et, finalement, au point X. La proposition énoncée est démontrée.

On peut l'appliquer en particulier à la fonction $\varphi(x)$ et à la somme $\Phi(x)$ de la série

$$\varphi(x_0) + \frac{x - x_0}{1}\varphi'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2}\varphi''(x_0) + \ldots$$

qui coïncident complètement au point x_0.

S'il arrivait que le continuum (C), où l'on sait que la fonction $\varphi(x)$ est régulière, fût intérieur au cercle de convergence de la série qu'on vient d'écrire, si, en particulier, la série était partout convergente, les deux fonctions $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ coïncideraient complètement en tout point de (C). Si le continuum (C') des points intérieurs au cercle de convergence de la série est contenu dans (C), on appliquera le même théorème au continuum (C') : à l'intérieur du cercle de convergence la somme de la série représente toujours la fonction $\varphi(x)$. On démontrera d'ailleurs ultérieurement, par des considérations d'une toute autre nature, que le rayon de convergence de la série ne peut pas être inférieur à la distance du point x_0 à la frontière de (C).

357. — Considérons maintenant deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ respectivement régulières dans les continuums (Φ), (Ψ) supposons que ces deux fonctions coïncident complètement en un point ξ commun aux deux continuums (Φ), (Ψ).

Le point ξ étant commun aux deux continuums, les points voisins du point ξ seront aussi communs à ces deux continuums : l'ensemble des points reliés au point ξ par un lien appartenant à la fois à (Φ) et à (Ψ) constitue un continuum (C) auquel s'applique le théorème du numéro précédent : en tout point de ce continuum les deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, coïncident complètement ainsi que leurs dérivées.

Les deux continuums (Φ), (Ψ) peuvent avoir des continuums communs autres que le continuum (C) ; naturellement, on ne peut affirmer que les deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ coïncident dans ces autres continuums, à moins qu'on ne sache d'ailleurs qu'elles y coïncident complètement en quelque point.

Dans le cas où les continuums (Φ), (Ψ) n'ont pas de points communs en dehors de (C), l'ensemble des points qui appartiennent soit à (Φ), soit à (Ψ) constitue manifestement un continuum (C') et l'on peut, sans contradiction, définir une fonction $\chi(x)$, régulière dans tout le continuum (C'), comme étant égale à $\varphi(x)$ pour tout point de (Φ), à $\psi(x)$ pour tout point de (Ψ). On remarquera en passant que si ξ est un point de la frontière de (Ψ) qui soit intérieur à (Φ), on aura certainement

$$\lim_{x=\xi} \psi(x) = \varphi(\xi);$$

en supposant que x s'approche de ξ sans sortir du continuum (Ψ), supposition nécessaire pour que le premier membre de l'égalité ait un sens.

La proposition précédente s'applique en particulier dans le cas où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des séries entières, l'une en $x - x_0$, l'autre en $x - x_1$, à savoir

$$\varphi(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots,$$
$$\psi(x) = b_0 + b_1(x - x_1) + b_2(x - x_1)^2 + \ldots,$$

lorsqu'il y a un point ξ intérieur à la fois aux cercles de convergence des deux séries, pour lequel les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ coïncident complètement.

Soient alors (C_0), (C_1) les cercles de convergence des séries $\varphi(x)$, $\psi(x)$, cercles dont les centres sont en x_0, x_1 et dont je désignerai les rayons par R_0, R_1 ; on peut prendre pour (Φ), (Ψ) les continuums intérieurs aux deux cercles ; l'hypothèse est alors qu'il y a un point ξ intérieur à la fois aux deux cercles, pour lequel les deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ coïncident complètement.

Les notations précédentes supposent que les deux rayons de convergence sont finis ; si l'un des rayons de convergence est infini, si, en d'autres termes, l'une des séries, $\varphi(x)$ par exemple, est convergente dans tout le plan, on pourra prendre pour (Φ) le continuum intérieur à un cercle de centre x_0 et de rayon arbitrairement grand : il résulte alors de ce qui a été dit un peu plus haut que, en supposant toujours l'existence d'un point ξ où les deux fonctions coïncident complètement, la série $\psi(x)$ est convergente dans tout le plan, comme la série $\varphi(x)$; les deux fonctions coïncident dans tout le plan.

Si le centre x_1 du cercle (C_1) est intérieur au cercle (C_0), les deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$, qui coïncident complètement en tout point intérieur aux deux cercles, coïncident complètement, en particulier, au point x_1 ; on a donc

$$b_0 = \varphi(x_1), \ldots, b_n = \frac{\varphi^{(n)}(x_1)}{1.2\ldots n}, \qquad (n = 1, 2, \ldots) ;$$

et, d'après ce qui a été établi au n° **350**

$$R_1 \geqq R_0 - |x_1 - x_0|.$$

Supposons, en restant dans ce même cas, $R_1 > R_0 - |x_1 - x_0|$; on savait par le n° **350** que les deux fonctions $\psi(x)$, $\varphi(x)$ coïncident complètement à l'intérieur du cercle décrit de x_1 comme centre et tangent intérieurement au cercle (C_0), on sait maintenant que la coïncidence subsiste dans tout le continuum intérieur aux deux cercles. On a d'ailleurs

$$R_1 \leqq R_0 + | x_1 - x_0 |;$$

car si R_1 dépassait le second membre, le point x_0 serait intérieur au cercle (C_1) et, d'après ce qu'on a dit quand on supposait au contraire x_1 intérieur à (C_0), on doit avoir

$$R_0 \geqq R_1 - | x_0 - x_1 |.$$

Ainsi quand il y a un point ξ intérieur à la fois aux deux cercles de convergence (C_0), (C_1) pour lequel les deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ coïncident complètement, les deux cercles (C_0), (C_1) peuvent se couper, l'un d'eux peut être tangent intérieurement à l'autre; mais il ne peut pas arriver qu'un des cercles soit intérieur à l'autre, (sans lui être tangent). Les rayons de convergence R_0, R_1 et la distance des centres $| x_1 - x_0 |$ satisfont aux inégalités.

$$| R_1 - R_0 | \leqq | x_1 - x_0 |, \quad R_1 + R_0 > | x_1 - x_0 |.$$

Supposons la fonction $f(x)$ régulière en tout point du continuum (C); faisons correspondre à chaque point x_0 du continuum le rayon de convergence $R(x_0)$ de la série

$$f(x_0) + \frac{x - x_0}{1} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} f''(x_0) + \ldots;$$

la première des inégalités qu'on vient d'écrire permet de reconnaître immédiatement que la fonction $R(x)$ définie dans tout le continuum, est continue en chaque point de ce continuum.

Si l'on considère un ensemble clos (D) contenu dans (C), la fonction $R(x)$ est uniformément continue dans cet ensemble; elle y atteint son minimum; la borne inférieure de $R(x)$ pour les points x qui appartiennent à (D) ne peut donc être nulle.

358. — Voici maintenant quelques propriétés des fonctions régulières en chaque point d'un continuum, qui résultent immédiatement des propositions qu'on vient d'établir. Dans le présent numéro, $\varphi(x)$ désignera toujours une fonction régulière en chaque point du continuum (C), et x_0 un point de ce continuum.

Si les dérivées de la fonction $\varphi(x)$ à partir de la $(n+1)^{\text{ième}}$ sont toutes nulles au point x_0, cette fonction se réduit au polynome

$$\varphi(x_0) + \frac{x - x_0}{1}\varphi'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2}\varphi''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{1.2\ldots n}\varphi^{(n)}(x_0).$$

Ce polynome, en effet, peut être regardé comme une série entière en $x - x_0$, convergente dans tout le plan et il coïncide complètement avec la fonction $\varphi(x)$, au point x_0.

Si toutes les dérivées à partir de la première, étaient nulles, la fonction $\varphi(x)$ serait une constante; elle serait identiquement nulle si l'on avait en outre $\varphi(x_0) = 0$.

Ecartons le cas où la fonction $\varphi(x)$ serait identiquement nulle et supposons qu'elle s'annule au point x_0; il peut se faire que les dérivées $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ... soient nulles pour $x = x_0$; mais il y a certainement une première dérivée $\varphi^{(n)}(x)$ qui n'est pas nulle en ce point: on peut mettre alors $\varphi(x)$ sous la forme

$$\varphi(x) = (x - x_0)^n \Phi(x),$$

en posant

$$\Phi(x) = \frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{1.2\ldots n} + (x - x_0)\frac{\varphi^{(n+1)}(x_0)}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

$\Phi(x)$ est une fonction régulière en x_0, qui ne s'annule pas pour $x = x_0$; dans ces conditions, on dit que x_0 est une racine de $\varphi(x)$ d'ordre n de multiplicité. En tout point du continuum, autre que x_0, la fonction $\Phi(x)$ pourrait être définie comme étant le quotient de $\varphi(x)$ par $(x - x_0)^n$; en un pareil point elle est régulière puisqu'elle est le quotient de deux fonctions régulières dont la seconde ne s'annule pas; la fonction

$$\Phi(x) = \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^n},$$

à laquelle on attribue, pour $x = x_0$, sa vraie valeur

$$\frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{1.2\ldots n},$$

est donc régulière en chaque point de (C).

Il ne peut pas y avoir un ensemble (E) contenu dans (C), admettant x_0 comme point d'accumulation, tel que $\varphi(x)$ soit nul en tous les points de cet ensemble : si, en effet, il existait un tel ensemble, la série entière en h

$$\varphi(x_0) + \frac{h}{1}\varphi'(x_0) + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(x_0) + \dots,$$

aurait une somme nulle pour une infinité de valeurs de h aussi voisines de zéro qu'on le voudrait ; tous ses coefficients devraient être nuls.

Mais rien, dans la démonstration précédente, ne s'oppose à l'existence d'un ensemble (E), contenu dans (C), pour différents points duquel la fonction $\varphi(x)$ s'annulerait, si tous les points d'accumulation de cet ensemble appartiennent non à (C), mais à sa frontière.

Si (D) est un ensemble clos contenu dans (C), l'équation $\varphi(x) = 0$ ne peut avoir qu'un nombre fini de racines appartenant à l'ensemble (D).

En effet, si l'ensemble des points racines qui appartiennent à (D) était infini, il admettrait un point d'accumulation, qui serait un point d'accumulation de (D), qui appartiendrait donc à (D), puisque (D) est clos, et par conséquent aussi à (C) : la fonction $\varphi(x)$ serait identiquement nulle.

Soit $\psi(x)$ une fonction régulière en tout point de (C), comme $\varphi(x)$.

Si l'on a $\psi^{(p)}(x_0) = \varphi^{(p)}(x_0)$, pour toutes les valeurs de p qui dépassent n, la différence entre les deux fonctions $\psi(x)$, $\varphi(x)$ est un polynome en x, de degré inférieur ou égal à n.

Si l'on avait $\psi(x) = \varphi(x)$ pour une infinité de points x appartenant à un ensemble clos, contenu dans (C), on pourrait affirmer l'identité des deux fonctions $\psi(x)$, $\varphi(x)$, dans tout le continuum (C).

359. — Soit toujours $\varphi(x)$ une fonction régulière en tout point du continuum (C) : je suppose essentiellement que cette fonction ne soit pas identiquement nulle. Soit (D) un domaine simple contenu dans (C). On a vu que les points de (D) pour lesquels $\varphi(x)$ s'annule sont en nombre fini et que la fonction $\varphi(x)$, si elle s'annule pour un point a du continuum pouvait se mettre sous la forme

$$\varphi(x) = (x - a)^\alpha \varphi_1(x),$$

en désignant par $\varphi_1(x)$ une fonction, régulière en tout point du continuum, qui ne s'annule pas pour $x = a$.

Soit maintenant b une autre racine de $\varphi(x)$ appartenant à (D); ce sera aussi une racine de $\varphi_1(x)$; on pourra écrire

$$\varphi_1(x) = (x - b)^{\beta} \varphi_2(x),$$

en désignant par $\varphi_2(x)$ une fonction, régulière en tout point du continuum, qui ne s'annule pas pour $x = b$, non plus que pour $x = a$; on a alors

$$\varphi(x) = (x - a)^{\alpha} (x - b)^{\beta} \varphi_2(x),$$

et l'on reconnaît sur cette égalité que β est l'ordre de multiplicité de la racine b, pour $\varphi(x)$. En continuant ainsi, on arrive à la conclusion suivante :

Soient $a, b, \ldots, l$ les racines de $\varphi(x)$ qui appartiennent au domaine (D) et $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ les ordres de multiplicité de ces racines; on peut mettre $\varphi(x)$ sous la forme

$$\varphi(x) = (x - a)^{\alpha} (x - b)^{\beta} \ldots (x - l)^{\lambda} \Phi(x),$$

en désignant par $\Phi(x)$ une fonction régulière en tout point de (C) et qui ne s'annule pour aucun point de (D).

En raisonnant maintenant comme on a fait au n° **334** on reconnaît que si le point x décrit la frontière (F) du domaine (D), dans le sens direct, l'argument de $\varphi(x)$ s'accroîtra de la quantité $2\pi(\alpha + \beta + \ldots + \lambda)$: inversement, si l'on a un moyen d'évaluer l'accroissement de l'argument de $\varphi(x)$ quand le point x décrit une courbe fermée simple contenue dans (C), on a, par cela même, le nombre de racines de la fonction $\varphi(x)$ contenues à l'intérieur de cette courbe. On peut dire encore que le nombre $\alpha + \beta + \ldots + \lambda$ est l'ordre du point o par rapport au lien fermé décrit par le point $\varphi(x)$ quand le point x décrit la courbe simple (F), dans le sens direct.

Il est à peine utile de remarquer que si A est une constante, la fonction $\varphi(x) - A$ est régulière comme la fonction $\varphi(x)$. Par conséquent, il n'y aura qu'un nombre fini de points de (D) pour lesquels la fonction $\varphi(x)$ peut prendre la valeur A. La variation de l'argument de $\varphi(x) - A$ quand le point x décrit, dans le sens direct, la courbe fermée simple (F) est le produit par 2π du nombre de racines de l'équation $\varphi(x) = A$ appartenant au domaine (D), chacune étant comptée avec son ordre de multiplicité.

360. — J'emploierai le symbole $P(x; a)$ pour désigner une série entière en $x - a$; la lettre P peut d'ailleurs être affectée d'un indice, afin de distinguer des séries qui procèdent suivant les puissances du même binome. Une série $P(x; a)$ semble tout d'abord ne définir une fonction qu'à l'intérieur de son cercle de convergence; mais les propositions établies dans les numéros précédents permettent souvent de continuer la fonction au-delà du cercle de convergence; une telle série est ce que Weierstrass appelle un *élément de fonction analytique*; on verra tout à l'heure comment il permet d'engendrer les autres.

Je désignerai sous le nom de *chaîne de cercles* et de *chaîne* correspondante d'*éléments de fonction*, une suite de cercles

$$(C), (C_1), \dots (C_n)$$

dont chacun, sauf le dernier, contient à son intérieur le centre du cercle suivant, et une suite d'éléments de fonction

$$P(x; a), P(x; a_1), \dots, P(x; a_n),$$

pour lesquels les points $a, a_1, \dots, a_n$ sont les centres respectifs des cercles $(C), (C_1), \dots, (C_n)$, chaque série qui représente un élément de fonction étant convergente à l'intérieur du cercle correspondant et coïncidant complètement au centre de ce cercle avec l'élément de fonction qui précède.

Les cercles peuvent être les cercles de convergence des éléments de fonction qui leur correspondent.

Considérons un lien (L) ayant son origine au point a et son extrémité au point b; je suppose, comme d'habitude, que les points de ce lien soient déterminés au moyen d'un paramètre réel t; je désignerai en général par la lettre ξ, affectée ou non d'indices, le point du lien qui correspond à la valeur t du paramètre, affectée ou non des mêmes indices.

Imaginons qu'on intercale entre α et β les nombres croissants $t_1, t_2 \dots t_{n-1}$, auxquels correspondent les points $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_{n-1}$. Il nous sera commode d'employer les lettres t_0, t_n, ξ_0, ξ_n avec la même signification, respectivement, que les lettres α, β, a, b. Désignons par (l_1), (l_2), ..., (l_n) les liens partiels que l'on obtient en faisant varier t de t_0 ou α à t_1, de t_1 à t_2, ..., de t_{n-1} à t_n ou β. Supposons qu'on puisse constituer deux chaînes correspondantes de cercles et d'éléments de fonction qui jouissent des propriétés suivantes : Les cercles

$$C(a),\ C(\xi_1),\ \ldots,\ C(\xi_{n-1}),\ C(b)$$

ont pour centres respectifs les points ξ_0 ou a, ξ_1, ..., ξ_{n-1}, ξ_n ou b; les n premiers contiennent respectivement à leur intérieur les liens partiels (l_1), (l_2), ..., (l_n) : quant aux éléments de fonction correspondants

$$P(x; a),\ P(x; \xi_1),\ \ldots,\ P(x; \xi_{n-1}),\ P(x; b)$$

le premier est donné et l'élément $P(x; \xi_p)$ est déterminé par la condition de coïncider complètement avec l'élément précédent $P(x; \xi_{p-1})$ au point ξ_p.

Soit maintenant t une valeur du paramètre, appartenant par exemple à l'intervalle (t_{p-1}, t_p) et ξ le point correspondant, qui fait alors partie du lien (l_p). A ce point ξ, ou plutôt au nombre t, faisons correspondre, d'une part, un nombre que je désignerai par $\varphi_t(\xi)$ et, d'autre part, une série entière en $x - \xi$, que je désignerai par $P_t(x; \xi)$, le nombre $\varphi_t(\xi)$ est la valeur que prend en ξ la série $P(x; \xi_{p-1})$; la série $P_t(x; \xi)$ est la série entière en $x - \xi$ qui coïncide complètement en ξ avec la fonction $P(x; \xi_{p-1})$; on a d'ailleurs $\varphi_t(\xi) = P_t(\xi; \xi)$. Si t était égal à t_p, la série $P_{t_p}(x; \xi_p)$ ne serait autre chose que la série qu'on désignait plus haut par $P(x; \xi_p)$ et qui coïncide complètement en ξ_p avec la fonction $P(x; \xi_{p-1})$.

Le lecteur reconnaîtra tout de suite la vérité des propositions suivantes :

Si les nombres t', t'' appartiennent à l'intervalle (α, β) et sont suffisamment voisins, les deux séries

$$P_{t'}(x; \xi'),\ P_{t''}(x; \xi'')$$

coïncident complètement en tous les points du lien partiel que l'on obtient en faisant varier t de t' à t''; pour tous les points de ce lien partiel, leur valeur est égale à celle de la fonction $\varphi_t(\xi)$.

Cette dernière fonction, considérée comme une fonction de t, est continue dans l'intervalle (α, β).

Le rayon de convergence $R_t(\xi)$ de la série $P_t(x; \xi)$ est aussi une fonction continue de t dans le même intervalle et reste supérieur à un nombre positif fixe : cette dernière proposition s'établit en raisonnant comme à la fin du n° **357**.

Il convient de remarquer que les séries $P_t(x; \xi)$, à supposer qu'elles existent, sont déterminées par la fonction $\varphi_t(\xi)$, puisque deux séries entières en $x - \xi$, qui prennent les mêmes valeurs pour les points d'un ensemble infini admettant le point ξ pour point d'accumulation sont identiques terme à terme : les points du lien (L) voisins de ξ constituent un tel ensemble.

En partant du même élément initial $P(x; a)$ et du même lien (L), on aurait pu intercaler entre α et β, au lieu des nombres $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$, d'autres nombres $t'_1, t'_2, \ldots t'_{r-1}$ auxquels auraient correspondu sur le lien les points $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_{r-1}$ puis des séries $P(x; \xi'_1), \ldots$: en procédant de proche en proche, le lecteur se convaincra sans peine qu'on serait parvenu au même résultat final, aux mêmes fonctions $P_t(x; \xi)$, $\varphi_t(\xi)$ que tout à l'heure. Dès lors il se rend compte de ce qu'on doit entendre quand on dit que, en partant du point a avec l'élément de fonction $P(x, a)$ et en suivant le chemin (L), on parvient au point ξ, qui correspond à la valeur t du paramètre, avec l'élément de fonction $P_t(x; \xi)$ et avec la valeur $\varphi_t(\xi) = P_t(\xi; \xi)$.

Si le lien (L) était simple et ouvert, on pourrait simplifier un peu les notations ; un point ξ du lien ne peut alors être fourni que par une seule valeur du paramètre t ; on pourrait alors supprimer l'indice t dans les symboles $\varphi_t(\xi)$, $P_t(x; \xi)$, ... ; mais quand un même point ξ correspond à plusieurs valeurs de t, il est nécessaire de garder, par exemple au moyen de l'indice, la trace de la valeur de t d'où l'on suppose que le point ξ provient, car rien n'implique dans les hypothèses précédentes, qu'aux diverses valeurs de t qui fournissent le même point ξ correspondent le même nombre $\varphi(\xi)$, la même série $P(x; \xi)$. Si, en particulier, le lien est fermé, si le point b est le même que le point a, rien n'oblige à supposer que les séries sont identiques, que l'on a désignées plus haut par $P(x; a)$, $P(x; b)$ et que l'on pourrait désigner plus explicitement par $P_\alpha(x; a)$, $P_\beta(x; b)$, dans le cas surtout où l'on a $b = a$.

361. — Reprenons, en conservant les mêmes notations, la suite de séries

$$\mathrm{P}(x\,;\,a),\quad \mathrm{P}(x\,;\,\xi_1),\quad \mathrm{P}(x\,;\,\xi_2),\;\ldots,\quad \mathrm{P}(x,\,b)\,;$$

il est clair que les conditions qu'on a imposées à ces séries, seront vérifiées d'elles-mêmes pour les séries dérivées

$$\mathrm{P}'(x\,;\,a),\quad \mathrm{P}'(x\,;\,\xi_1),\quad \mathrm{P}'(x\,;\,\xi_2),\;\ldots,\quad \mathrm{P}'(x,\,b),$$

qui ont mêmes cercles de convergence que les séries primitives : si l'on partait du point a avec la série $\mathrm{P}'(x\,;\,a)$ et si on appliquait à cette série le même procédé qu'on a appliqué à la série $\mathrm{P}(x\,;\,a)$, en suivant le chemin (L), on parviendrait au point ξ avec la série $\mathrm{P}'_t(x,\,\xi)$. La même observation s'appliquerait aux dérivées seconde, troisième, ...

Désignons maintenant par

$$\mathfrak{P}(x\,;\,a),\quad \mathfrak{P}(x\,;\,\xi_1),\quad \mathfrak{P}(x\,;\,\xi_2),\;\ldots,\quad \mathfrak{P}(x,\,b)$$

les séries qui ont pour dérivées premières les séries

$$\mathrm{P}(x\,;\,a),\quad \mathrm{P}(x\,;\,\xi_1),\quad \mathrm{P}(x\,;\,\xi_2),\;\ldots,\quad \mathrm{P}(x,\,b)$$

et qui s'annulent respectivement pour $x=a,\ x=\xi_1,\ x=\xi_2,\ \ldots,\ x=b$; ici encore les séries correspondantes ont même cercle de convergence. Il est aisé de voir que les séries avec lesquelles on parvient, en suivant le chemin L, aux points $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ b$, en partant du point a, avec l'élément de fonction $\mathfrak{P}(x\,;\,a)$ sont respectivement

$$\begin{gathered}
\mathfrak{P}(\xi_1\,;\,a)+\mathfrak{P}(x\,;\,\xi_1),\\
\mathfrak{P}(\xi_1\,;\,a)+\mathfrak{P}(\xi_2\,;\,\xi_1)+\mathfrak{P}(x\,;\,\xi_2),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{P}(\xi_1\,;\,a)+\mathfrak{P}(\xi_2\,;\,\xi_1)+\ldots+\mathfrak{P}(x\,;\,\xi_{n-1}),\\
\mathfrak{P}(\xi_1\,;\,a)+\ldots+\mathfrak{P}(b\,;\,\xi_{n-1})+\mathfrak{P}(x\,;\,b).
\end{gathered}$$

La remarque suivante ne sera peut-être pas inutile : supposons que le lien L soit un lien fermé simple, en sorte que le point b coïncide avec le point a, et que la série $\mathrm{P}(x,\,b)$ soit identique à la série $\mathrm{P}(x,\,a)$; la série $\mathfrak{P}(x,\,b)$ sera bien identique à la série $\mathfrak{P}(x,\,a)$; mais la valeur avec laquelle on parvient au point b, c'est-à-dire

$$\mathfrak{P}(\xi_1\,;\,a)+\mathfrak{P}(\xi_2\,;\,\xi_1)+\ldots+\mathfrak{P}(b\,;\,\xi_{n-1})$$

n'est pas, pour cela, identique à la valeur $\mathfrak{L}(a, a) = 0$ avec laquelle on était parti du point a.

362. — Si le lien (L) est intérieur au cercle de convergence $C(a)$ de la série $P(x; a)$, rien n'empêche de procéder comme on l'a expliqué au n° **360** : mais le résultat n'est guère intéressant. l'élément de fonction $P_1(x; \xi)$ qui correspond à chaque point ξ du lien n'est autre que la série entière en $x - \xi$ qui au point ξ coïncide complètement avec la fonction $P(x; a)$; en tout point ξ du lien la fonction $\varphi_1(\xi)$ est égale à $P(\xi; a)$. Dans ces conditions, on a donné une forme nouvelle à la fonction $P(x, a)$, on ne peut pas dire qu'on l'a *prolongée*. Il en est tout autrement quand le lien (L) sort du cercle $C(a)$. On n'oubliera pas dans ce cas que la valeur avec laquelle on arrive en b dépend en général du chemin suivi ; si, en particulier, le point b est intérieur au cercle $C(a)$, on ne revient pas nécessairement en b avec la valeur de la fonction $P(x; a)$ en ce point.

Lorsqu'il existe une fonction $\psi(x)$, régulière dans un continuum (C), que a est un point de ce continuum, que la série $P(x; a)$ est la série entière en $x - a$ qui coïncide complètement en a avec la fonction $\psi(x)$ et que le lien (L) est intérieur au continuum (C), la série $P(x; \xi)$ qui correspond à n'importe quel point ξ du lien coïncide toujours complètement en ξ avec la fonction $\psi(x)$; en particulier, quel que soit le chemin suivi, pourvu que ce chemin soit intérieur au continuum (C), on arrive au point b avec la même valeur et le même élément de fonction $P(x; b)$.

Si on se donne le point a, l'élément de fonction $P(x; a)$, le point b et le lien (L), il n'est pas toujours possible de procéder comme on l'a expliqué, de trouver des nombres intercalaires qui satisfassent aux conditions imposées ; si l'on ne se donne pas le lien (L), et si on se donne a, b et $P(x; a)$, il n'existe pas toujours de lien (L) allant de a à b, pour lequel les opérations décrites soient possibles.

Il y a en effet des séries $P(x; a)$ telles que, quel que soit le point ξ intérieur au cercle de convergence $C(a)$, le rayon de convergence $R(\xi)$ de la série $P(x; \xi)$ qui coïncide complètement avec la fonction $P(x; a)$ au point ξ soit toujours égal à $R(a) - |\xi - a|$; en d'autres termes le cercle de convergence $C(\xi)$ est toujours le cercle, de centre ξ, tangent intérieurement au cercle $C(a)$; de quelque façon qu'on choisisse le point ξ, on reste enfermé dans le cercle $C(a)$; telle est par exemple la série

$$f(x) = 1 + x + x^{1.2} + x^{1.2.3} + \ldots + x^{1.2.3\ldots n} + \ldots$$

signalée par M. Lerch, pour laquelle le rayon de convergence est 1 ; on reconnaît sans peine que, pour tout point du cercle de convergence dont l'argument est commensurable à π, tous les termes de la série finissent par être égaux à 1 : en un pareil point x', la série est divergente en ce sens que la somme des n premiers termes devient aussi grande qu'on le veut pourvu que n soit assez grand ; si l'on s'approche de x', en suivant le rayon, $f(x)$ croîtra indéfiniment en valeur absolue, comme il est bien aisé de s'en assurer ; or cela est incompatible (n° **342**) avec la supposition qu'on puisse enfermer le point x' à l'intérieur du cercle de convergence d'une série $P(x; \xi)$, entière en $x - \xi$, qui coïnciderait complètement au point ξ avec la fonction $f(x)$. Il est impossible de prolonger la fonction $f(x)$ au-delà du cercle de centre o et de rayon 1.

Weierstrass donnait le nom de fonction analytique à l'ensemble de toutes les séries $P(x; \xi)$ entières en $x - \xi$ que l'on peut déduire d'un élément de fonction particulier $P(x; a)$, par le procédé expliqué plus haut, en suivant un chemin allant de a à ξ. Le mot fonction est pris alors dans un sens tout autre que celui qu'on lui a attribué dans le présent livre et c'est dans un sens un peu différent que sera employée l'expression de *fonction analytique*. Il convient toutefois de remarquer que l'ensemble considéré est entièrement déterminé par l'une des séries, ou si l'on veut, par la suite des coefficients de cette série : Deux fonctions analytiques, au sens de Weierstrass, coïncident quand elles ont en commun un élément de fonction.

III. — FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

363. — On a défini, au début du présent chapitre, les fonctions rationnelles d'une variable imaginaire, puis quelques fonctions agébriques simples comme $\sqrt{x}$, $\sqrt{1 - x^2}$ etc... Les propositions générales que l'on a démontrées ensuite sur les séries entières, sur les séries et produits infinis qui peuvent se transformer en séries entières, enfin sur le prolongement d'une fonction, fournissent un moyen naturel d'étendre aux variables imaginaires la définition et les propriétés d'un grand nombre de fonctions d'une variable réelle.

Si l'on sait, par exemple, qu'une fonction $f(x)$ de la variable réelle x est, dans un certain intervalle, développable en une série entière en x, ou qu'elle peut être mise sous forme de l'une de ces séries ou de l'un de ces produits infinis que l'on a considérés au n° **349**, on pourra prendre cette série, ce produit infini comme définition de la fonction de la variable imaginaire x; cette définition sera valable dans un continuum (C) contenant la portion de de l'axe réel qui représente l'intervalle considéré, ou une partie de cet intervalle. Si maintenant on connaît une propriété de la fonction de la variable réelle qui s'exprime par quelque égalité dont les deux membres soient des fonctions régulières en tout point du continuum (C), cette égalité subsistera dans tout le continuum, et la propriété qu'elle exprime sera ainsi étendue. Le présent paragraphe contiendra un grand nombre d'applications de cette méthode.

364. — Considérons, comme premier exemple, la formule

$$(1) \qquad (1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}x^2 + \ldots,$$

qui est établie (n° **188**) pour les valeurs réelles de m et pour les valeurs réelles de x intérieures à l'intervalle $(-1, 1)$.

Dans le présent numéro, je désignerai par $f(x)$ la série qui figure dans le second membre de cette égalité, ou la somme de cette série supposée convergente.

Le rayon de convergence de la série $f(x)$, regardée comme une série entière en x, est 1 : la fonction $f(x)$ a un sens, quelque soit m, si l'on a $|x| < 1$; cette fonction peut être regardée comme une fonction des deux variables x et m; à ce point de vue les remarques faites au début du n° **188** subsistent : si a est un nombre positif plus petit que 1 et M un nombre positif quelconque, la fonction $f(x)$ est continue dans l'ensemble des valeurs de x et de m qui vérifient les conditions

$$|x| \leqq a, \qquad |m| \leqq M.$$

Pour ce qui est de la signification du premier membre $(1+x)^m$ de l'égalité (1), il y a lieu d'examiner successivement le cas où m est entier, fractionnaire, irrationnel, imaginaire.

Supposons d'abord m entier; $(1+x)^m$ a un sens bien net, c'est une fonction rationnelle de x, un polynome de degré m quand m est entier et positif; l'égalité (1) résulte alors des règles qui concernent la multiplication, elle est vraie quel que soit x. Il est aisé de voir qu'elle subsiste quand m est un entier négatif, sous la condition $|x| < 1$.

Si en effet, on multiplie le second membre $f(x)$ par le polynome de degré $-m$

$$(1+x)^{-m} = 1 - \frac{m}{1}x + \frac{m(m+1)}{1.2}x^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}x^3 + \dots$$

et qu'on ordonne par rapport à x, on trouvera 1 comme résultat (n° **346**) puisque, lorsque x est réel, le produit de $(1+x)^m$ par $(1+x)^{-m}$ est égal à 1. La règle pour multiplier deux séries entières en x, ou une série entière en x par un polynome en x, ne dépend pas de la réalité de x : pourvu qu'on ait $|x| < 1$, le second membre de l'égalité (1) multiplié par le polynome $(1+x)^{-m}$ donne 1 comme produit.

L'égalité (1) est donc établie lorsque m est un nombre entier négatif, sous la condition $|x| < 1$.

Examinons maintenant le cas où m est un nombre rationnel non entier; je suppose que m soit égal à la fraction irréductible $\frac{p}{q}$, à dénominateur positif; il est bien aisé de voir que l'on a alors, pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition $|x| < 1$,

$$(2) \qquad [f(x)]^q = (1+x)^p.$$

L'expression $[f(x)]^q$ s'obtient en effet en faisant le produit de q séries égales à $f(x)$, d'après la règle de multiplication des séries, valable sous la condition $|x| < 1$; sous cette condition et si x est réel, la somme de la série entière en x ainsi obtenue doit être égale à $(1+x)^p$ et, par conséquent, à la série (ou au polynome)

$$1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{1.2}x^2 + \dots$$

qui doit donc (n° **346**) être identique terme à terme, à la série produit ; l'égalité (2) est établie sous la condition $|x| < 1$.

Sous cette condition, la fonction $f(x)$, qui a un sens bien précis, fournit donc une solution de l'équation en y

$$(3) \qquad y^q = (1+x)^p ;$$

mais cette dernière équation, quand on se donne x, ne détermine pas complètement y, qui est susceptible de q valeurs, toujours distinctes tant que x n'est pas égal à -1 et qui se déduisent de l'une quelconque d'entre elles, en la multipliant par les q racines de l'unité (n° **325**). Il importe de savoir distinguer laquelle de ces racines est égale à la série $f(x)$.

Soit a un nombre positif fixe plus petit que 1. Dans le domaine défini par l'inégalité $|x| \leqq a$, la valeur absolue de la différence entre deux racines de l'équation (3) reste supérieure à un nombre positif fixe ; elle est, en effet, au moins égale à $2\sqrt[q]{1-a}\,\sin\frac{\pi}{q}$ (n° **325**). D'ailleurs, dans ce domaine, la fonction $f(x)$ est continue ; il y a donc, dans ce domaine, q fonctions continues qui vérifient l'équation (3), et qui restent distinctes entre elles, puisque la différence entre deux d'entre d'elles reste supérieure à un nombre fixe. Celle des solutions de l'équation (3) que l'on a désignée par $f(x)$ jouit de cette propriété de se réduire à la valeur arithmétique de $\sqrt[q]{(1+x)^p}$ quand x est réel et appartient à l'intervalle $(-a, a)$.

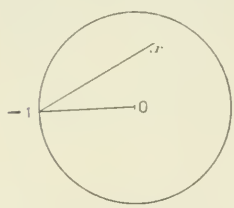

Fig. 38.

D'un autre côté, un procédé pour définir sans ambiguïté $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ consiste à regarder sa valeur absolue comme étant égale à la valeur arithmétique de $\sqrt[q]{|1+x|^p}$ et son argument comme étant égal au produit par $\frac{p}{q}$ de l'argument de $1+x$ (n° **327**) ; dès que l'on a choisi ce dernier argument, la signification de $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ est fixée. Or il suffit de regarder la figure 38 pour constater que, lorsque x est un point intérieur au cercle de centre o et de rayon 1, l'argument de $1+x$, ou l'angle dont le premier côté est la direction positive sur l'axe réel et dont le second côté est la direction qui va du point -1 au point x, peut être supposé compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; il est alors nul quand x est sur l'axe réel; le point x est supposé ne pas atteindre le point -1 où l'argument de $1+x$ serait complètement indéterminé. Dans le domaine $|x| \leqq a$, l'argument ainsi défini est une fonction continue de x, il en est de même de son produit par $\frac{p}{q}$, de la valeur arithmétique de $\sqrt[q]{|1+x|^p}$ et enfin de la fonction $(1+x)^{\frac{p}{q}}$ définie comme ayant son argument égal au produit par $\frac{p}{q}$ de l'argument de $1+x$. Cette fonction $(1+x)^{\frac{p}{q}}$, ainsi définie, a d'ailleurs son argument nul, quand x est réel et appartient à l'intervalle $(-a, a)$; elle est alors réelle et positive, elle coïncide donc avec $f(x)$ dans tout le domaine $|x| \leqq a$. Il en est d'ailleurs ainsi dans tout le continuum défini par l'inégalité $|x| < 1$, puisque le nombre a peut être supposé aussi voisin de 1 qu'on voudra.

Dans le cas où l'on aurait $\frac{p}{q} = \frac{\pm 1}{2}$, la fonction $f(x)$, dont l'argument doit être compris entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$, peut être caractérisée comme étant celle des valeurs $\sqrt{1+x}$ ou de $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ dont la partie réelle est positive; notons en particulier l'égalité

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}x^{2n} + \ldots,$$

valable sous la condition $|x| < 1$, et dans laquelle il est entendu que le premier membre a sa partie réelle positive.

Si m est un nombre irrationnel, la fonction $f(x)$, en supposant toujours $|x| \leqq 1$, peut être regardée comme ayant $|1+x|^m$ pour valeur absolue et un argument égal au produit par m de l'argument de $1+x$ supposé compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. C'est ce qui résulte aisément de la continuité de la fonction $f(x)$ regardée comme fonction de m. L'égalité (1) subsiste donc en adoptant pour $(1+x)^m$ la définition qu'on vient de donner au moyen de la valeur absolue et de l'argument.

Dans le cas où m est imaginaire, l'égalité (1) pourrait servir à définir $(1+x)^m$ lorsque l'on a $|x| < 1$; c'est une autre définition qui sera adoptée ultérieurement ; le lecteur n'aura pas de peine à faire le raccord. Je me borne à observer que, si l'on suppose $|x| < 1$, $f(x)$, regardée comme une fonction de m, peut être développée en une série entière en m, convergente quel que soit m : c'est une conséquence aisée du théorème I du n° **349**.

365. — La série

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

est convergente dans tout le plan, sa somme est ce qu'on a appelé une fonction (transcendante) entière ; lorsque x est réel, cette somme n'est autre chose que e^x ; il est naturel de définir, quelle que soit la variable x, la fonction e^x par l'égalité

$$(1) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n} + \ldots;$$

d'ailleurs le raisonnement du n° **189** permet de reconnaître que la série qui figure au second membre est, quel que soit le nombre x, la limite vers laquelle tend l'expression

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

quand n croît indéfiniment par valeurs naturelles.

La règle de la multiplication des séries s'appliquant aux séries absolument convergentes, il est clair que la fonction e^x jouit de la propriété

$$(2) \qquad e^x \times e^y = e^{x+y},$$

d'où l'on conclut, en particulier ;

$$e^x \times e^{-x} = e^0 = 1.$$

En remplaçant, dans la définition de e^x, x par xi, on trouve

$$(3) \qquad e^{xi} = 1 + \frac{xi}{1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3 i}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \cdots;$$

de la convergence absolue du second membre résulte la convergence absolue, pour toutes les valeurs de x, des séries

$$1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\ldots,$$

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\ldots,$$

qui s'aperçoit d'ailleurs directement : les fonctions entières que ces séries définissent dans tout le plan, sont précisément, lorsque x est réel, les fonctions $\cos x$ et $\sin x$ définies au n° **197** ; ici encore, les seconds membres des égalités

$$(4)\quad \begin{cases} \cos x = 1-\dfrac{x^2}{1.2}+\dfrac{x^4}{1.2.3.4}-\dfrac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\cdots \\ \sin x = \dfrac{x}{1}-\dfrac{x^3}{1.2.3}+\dfrac{x^5}{1.2.3.4.5}-\cdots \end{cases}$$

définissent les premiers membres, quel que soit x ; des fonctions $\cos x$, $\sin x$, la première est paire et la seconde impaire. On a d'ailleurs, en vertu de l'égalité (3), et en changeant x en $-x$ dans cette égalité

$$(5)\qquad e^{xi}=\cos x+i\sin x,\qquad e^{-xi}=\cos x-i\sin x,$$

et, par conséquent,

$$(6)\qquad \cos x=\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2},\qquad \sin x=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}.$$

Si, dans ces formules, on remplace x par $x+y$, puis $e^{(x+y)i}$, $e^{-(x+y)i}$ par

$$e^{xi}\times e^{yi}=(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y),$$
$$e^{-xi}\times e^{-yi}=(\cos x-i\sin x)(\cos y-i\sin y),$$

il vient

$$(7)\quad \begin{cases} \cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y \\ \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y. \end{cases}$$

C'est à Euler que sont dues les formules qui relient la fonction exponentielle aux fonctions trigonométriques.

La fonction $\operatorname{tg} x$ sera définie, pour toutes les valeurs de x qui n'annulent pas $\cos x$ par la formule

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

et les formules (7) conduiront sans peine à la relation

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

On a introduit au n° **195** les notations

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

et l'on a établi quelques relations qui mettent en évidence les analogies des fonctions $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ avec les fonctions $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$; il ne s'agissait alors que de variables réelles, mais rien n'empêche, maintenant que la fonction e^x est définie pour toutes les valeurs de x, d'adopter les précédentes formules pour définir les fonctions $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ quel que soit x; les relations établies au n° **195** subsistent ainsi que les démonstrations; on a d'ailleurs à cause des formules (6)

$$\operatorname{ch} x = \cos ix, \quad \operatorname{sh} x = \frac{1}{i} \sin ix, \quad \operatorname{th} x = \frac{1}{i} \operatorname{tg} ix;$$

et ces relations montrent que l'emploi des notations $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ est inutile; il est toutefois consacré par l'usage et il est commode pour séparer les parties réelles et les parties imaginaires.

Remarquons, à ce sujet, que l'on a, en désignant par a et b des nombres réels quelconques,

$$\begin{aligned} e^{a+bi} &= e^a . e^{bi} = e^a(\cos b + i \sin b), \\ \cos(a + bi) &= \cos a \operatorname{ch} b - i \sin a \operatorname{sh} b, \\ \sin(a + bi) &= \sin a \operatorname{ch} b + i \cos a \operatorname{sh} b. \end{aligned}$$

Les règles pour les dérivées des fonctions e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ résultent immédiatement des n^os^ **350, 354**. Les formules sont les mêmes que lorsque x est réel.

La démonstration qui a été donnée au n° **198** des formules

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

subsiste, quel que soit x ; mais il convient de remarquer que la vérité de ces formules quand x est réel entraîne leur généralité : en effet, $\cos x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, par exemple, sont des fonctions de x partout régulières ; la relation $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, vraie pour toutes les valeurs réelles de x, montre que ces deux fonctions coïncident complètement en un point quelconque x_0 situé sur l'axe réel ; si on les prolonge à partir de ce point (n° **357**), le long d'un chemin quelconque, elles ne cesseront pas de coïncider complètement ; la relation $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ a donc lieu quel que soit x. C'est le mode de raisonnement sur lequel on a appelé l'attention au début du présent paragraphe.

La fonction e^x ne s'annule jamais ; si en effet on a $x = u + iv$, u et v étant réels, on aura

$$e^x = e^u(\cos v + i \sin v)$$

et aucun des facteurs du second membre ne peut être nul.

Il est aisé de construire une infinité de fonctions entières qui jouissent de cette propriété. Si, en effet, $g(x)$ est une fonction entière, il en sera de même (n° **349**) de la somme de la série

$$1 + \frac{g(x)}{1} + \frac{[g(x)]^2}{1.2} + \frac{[g(x)]^3}{1.2.3} + \dots,$$

dont la valeur est $e^{g(x)}$ et cette valeur n'est jamais nulle. Réciproquement il résultera de considérations ultérieures que toute fonction entière qui ne s'annule pour aucune valeur de x peut être mise sous la forme $e^{g(x)}$ en désignant par $g(x)$ une fonction entière.

On étudiera bientôt la résolution d'une équation telle que $e^x = a$, où a est un nombre donné ; de là et des relations entre la fonction exponentielle et les fonctions circulaires résulte immédiatement la résolution d'équations telles que

$$\cos x = a, \qquad \sin x = a, \qquad \operatorname{tg} x = a, \qquad \operatorname{ch} x = a, \qquad \text{etc.}\dots$$

Je veux me borner à remarquer ici que les équations $\cos x = 0$, $\sin x = 0$ n'admettent pas d'autres solutions que les solutions réelles ; le lecteur n'aura aucune peine à tirer ces résultats des formules d'addition ; il les reconnaîtra aussi sur les produits infinis qui représentent $\cos x$ et $\sin x$, produits infinis qui, comme on le verra bientôt, conviennent aussi bien, que x soit réel ou qu'il soit imaginaire.

366. — Les fonctions $\cos x$, $\sin x$ admettent la période 2π ; la fonction e^{ix}, à cause des formules (5) du numéro précédent, admet cette même période ; la fonction e^x admet donc la période $2\pi i$, ce qui résulte d'ailleurs des égalités

$$e^{x+2\pi i} = e^x.e^{2\pi i} = e^x(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^x.$$

$2\pi i$ est d'ailleurs une période *primitive* ; c'est-à-dire qu'elle n'est pas un multiple entier d'une autre période ; en d'autres termes, si n est un nombre naturel, $\frac{2\pi i}{n}$ n'est pas une période pour la fonction e^x ; l'égalité

$$e^{x+\frac{2\pi i}{n}} = e^x,$$

entraînerait en effet l'égalité $e^{\frac{2\pi i}{n}} = 1$, qui n'est pas vraie. Les fonctions $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ admettent évidemment la même période $2\pi i$ que e^x ; πi est une période primitive pour $\operatorname{th} x$.

Supposons que le plan des x soit décomposé en bandes égales par des parallèles à l'axe réel, telles que la distance entre deux parallèles soit égale à 2π, et considérons l'une (B) de ces bandes. On connaîtra la fonction e^x dans tout le plan si on la connaît pour tous les points qui appartiennent à cette bande (B) ; en effet à tout point x du plan correspondra un point x' appartenant à (B), ayant même abscisse que x et tel que la différence des ordonnées soit un multiple de 2π ; le point x' sera unique si le point x n'est pas sur une des parallèles : s'il est sur une de ces parallèles, on peut le prendre sur l'une ou l'autre des deux droites qui forment la frontière de (B) : dans tous les cas, la fonction e^x aura la même valeur aux points x et x'.

Prenons en particulier pour la bande (B) la bande limitée par les deux parallèles (P), (P$_1$) à l'axe réel, situées de part et d'autre de cet axe, à une distance égale à π. Il y a intérêt à connaître la façon dont se correspondent le point x de cette bande et le point $y = e^x$; je regarderai ce dernier point comme l'image du point x.

Posons donc $x = u + iv$, u et v étant deux nombres réels dont le second appartient à l'intervalle $(-\pi, \pi)$, on aura

$$y = e^{u+vi} = e^{u}(\cos v + i \sin v);$$

la valeur absolue de y est e^u ; son argument peut être pris égal à v. Il est commode de regarder les points x, y comme appartenant à des plans distincts que l'on désignera sous le nom de plan des x et de plan des y.

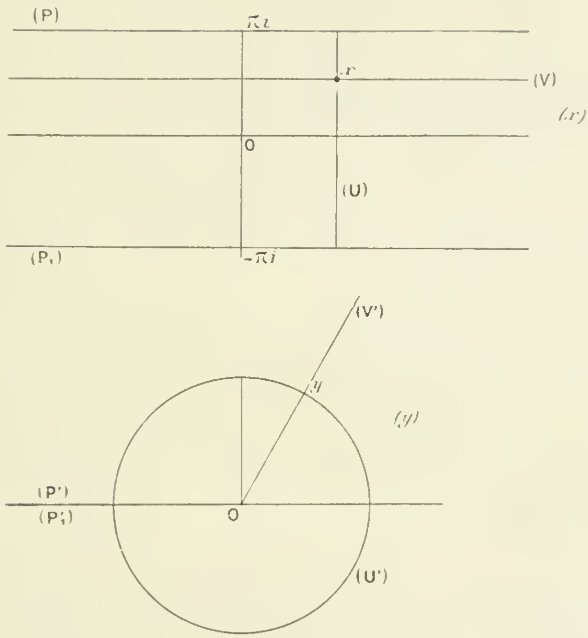

Fig. 39.

Donnons à v une valeur fixe appartenant à l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et supposons que u croisse de $-\infty$ à $+\infty$; en d'autres termes, x décrit une droite (V) parallèle à l'axe réel ; l'argument de y restera fixe, sa valeur absolue croît de 0 à $+\infty$: le point y décrit donc la demi-droite (V') qui part du point 0 et dont l'argument est v : à proprement parler, le point y n'est jamais au point 0, dont on peut dire qu'il est l'image du point à l'infini à gauche sur la droite (V) ; à mesure que u augmente, le point y s'éloigne sur la demi-droite (V').

La demi-droite (V) est confondue avec l'axe positif pour $v = 0$, avec l'axe négatif pour $v = \pi$ ou pour $v = -\pi$; l'image de l'axe réel du plan des x est l'axe positif du plan des y. Les deux parallèles (P), (P_1) ont toutes deux pour image l'axe négatif du plan des y. Quand v croît de $-\pi$ à π, la demi-droite (V), d'abord confondue avec l'axe négatif du plan des y tourne dans le sens direct et vient pour $v = \pi$ se confondre à nouveau avec l'axe négatif. Lorsque u reste fixe et que v croît de $-\pi$ à $+\pi$, quand le point x décrit un segment (U), parallèle à l'axe des ordonnées, allant d'un point de la droite (P_1) à un point de la droite (P), son image décrit un cercle (U') dont le centre est le point o, dont le rayon est e^u ; elle part du point du cercle situé sur l'axe négatif pour y revenir. Les images des deux extrémités de (U) sont confondues.

On voit que l'image de la bande du plan des x recouvre tout le plan des y (sauf le point o). Le demi-plan des y situé au-dessus de l'axe réel est l'image de la demi-bande du plan des x située au-dessus de l'axe réel ; les coefficients de i des nombres correspondants x, y sont de même signe ; deux points x symétriques par rapport à l'axe réel (deux points dont les affixes sont imaginaires conjuguées), ont pour images deux points y symétriques par rapport à l'axe réel. Deux points distincts de la bande ont des images distinctes sauf si ces deux points appartiennent respectivement aux droites (P), (P_1) et sont situés sur une même perpendiculaire à ces deux droites.

On supprimera cette exception en regardant l'axe négatif du plan des y comme double, comme une coupure à deux bords dont le bord supérieur est l'image de la droite (P) et dont le bord inférieur est l'image de la droite (P_1). De cette façon, deux points distincts de la bande du plan des x auront toujours deux images distinctes : les points de la bande voisins de (P) auront des images voisines de l'axe négatif et au-dessus ; ces images seront regardées comme voisines du bord supérieur de la coupure ; les images des points de la bande voisins de (P_1) seront de même regardées comme voisines du bord inférieur de la coupure.

Dans ces conditions, tout point y du plan des y, autre que le point o sera l'image d'un point $x = u + iv$ de la bande et d'un seul. Supposons d'abord que le point y ne soit pas sur la coupure (que y ne soit pas un nombre négatif) ; ce point y sera l'intersection unique d'un cercle (U') et d'une demi droite (V'); le cercle (U') sera l'image d'un segment (U); la demi droite (V') sera l'image d'une droite (V); le segment (U) et la droite (V) se couperont en un point unique x dont y sera l'image; en se reportant à la construction de (U') et de (V') au moyen de (U) et (V), on voit que l'abscisse du point x dont y est l'image est le logarithme naturel de la valeur absolue de y et que son ordonnée est la valeur principale de l'argument de y. Si le nombre y est négatif, l'abscisse de x sera le logarithme naturel de $-y$, son ordonnée sera π ou $-\pi$, suivant que y appartiendra au bord supérieur ou inférieur de la coupure. Le nombre x ainsi défini est ce que l'on appelle la valeur principale du logarithme de y; je la représenterai habituellement par la notation $\lg y$. La fonction $\lg y$ est définie dans tout le plan des y, sauf au point o; elle se confond avec le logarithme naturel de y quand y est positif. Elle est continue en tout point qui n'appartient pas à la coupure. Si l'on considère un point y_0 de la coupure, du bord supérieur, par exemple, on peut dire encore que la fonction $\lg y$ est continue en ce point, si on l'entend dans le sens suivant : à chaque nombre positif ε correspond un nombre positif η tel que l'on ait $|\lg y - \lg y_0| < \varepsilon$, si l'on a $|y - y_0| < \eta$ et si le point y est au-dessus de l'axe réel négatif, ou sur cet axe, mais sur le bord supérieur de la coupure. En deux points confondus en réalité, mais situés l'un sur le bord supérieur, l'autre sur le bord inférieur de la coupure, la différence des deux valeurs de la fonction $\lg y$ est $2\pi i$.

367. — Il ne sera pas inutile d'indiquer, sur ce même exemple simple, un autre mode de raisonnement qui est souvent commode pour la définition des fonctions inverses.

Reprenons l'étude de la correspondance entre les deux plans des x et des y définie par l'équation $y = e^x$ et considérons dans le plan des x le rectangle $ABA'B'$; les deux côtés AB, $A'B'$ sont des parallèles à l'axe réel, à une distance π de cet axe; ils sont des segments des droites qui étaient désignées dans la figure précédente par (P_1), (P_{-1}). Quant aux côtés AA', BB' parallèles à l'axe imaginaire je les suppose très éloignés, à des distances a, b que je me réserve de faire grandir indéfiniment.

Les points A, A' du plan des x ont des images confondues en

A_1, A'_1 dans le plan des y sur l'axe négatif, très près du point o ; la droite AA' a pour image un petit cercle de centre o, passant par les points confondus A_1, A'_1. Les points B, B' du plan des x ont des images confondues en un point très éloigné B_1 ou B'_1 du plan des y, sur l'axe négatif de ce plan ; la droite BB' a pour image le cercle de centre o et de très grand rayon qui passe par le point B_1 ou B'_1 ; les côtés AB, A'B' ont leurs images confondues en A_1B_1, $A'_1B'_1$. La fonction e^x est régulière en tout point qui appartient au rectangle.

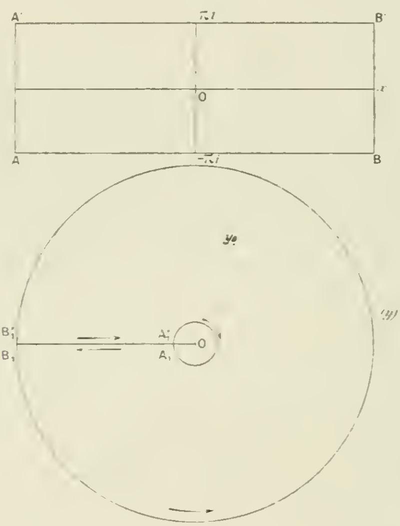

Fig. 40.

Si le point x décrit le rectangle dans le sens direct ABB'A'A, le point $y = e^x$ du plan des y décrit le lien fermé (F) que l'on obtient en partant du point A_1, décrivant la droite A_1B_1, puis le grand cercle dans le sens direct, puis la droite $B'_1A'_1$, puis le petit cercle dans le sens indirect de manière à revenir au point A_1. Ce lien fermé est la frontière du continuum (C) que l'on obtient en supprimant tous les points situés sur le segment A_1B_1 de l'ensemble des points intérieurs au grand cercle et extérieurs au petit.

Lorsque le point x décrit le contour ABB'A'A, que le point e^x du plan des y décrit le lien fermé, comme on vient de l'expliquer, le vecteur qui va du point y_0 au point e^x tourne d'un angle égal à

2π ; en d'autres termes, l'argument de $e^x - y_0$ s'accroît de 2π. Il résulte de là (n° **359**) que l'équation $e^x - y_0 = 0$ admet une racine et une seule à l'intérieur du rectangle. On en conclut en supposant que les côtés AA', BB' s'éloignent indéfiniment, que si y_0 est un nombre quelconque non négatif ou nul, l'équation $e^x = y_0$ admet une racine et une seule représentée, dans le plan des x par un point intérieur à la bande formée par les deux parallèles (P), (P$_1$) ; sans doute, on connaissait déjà ce résultat, qui est la chose essentielle pour la définition de $\lg y_0$; mais il y a intérêt à montrer comment il résulte immédiatement de la seule considération de l'image du rectangle ABB'A'.

368. — On vient de définir la fonction $\lg x$, le logarithme principal de x. Définissons maintenant toutes les valeurs du logarithme de x et la fonction $\log x$ dans sa généralité.

Le nombre z sera, par définition, une valeur du logarithme du nombre x si l'on a $e^z = x$.

Soient r et θ la valeur absolue et l'argument de x, en sorte que l'on ait $x = r(\cos\theta + i\sin\theta)$; cherchons à déterminer deux nombres réels ξ, η tels que l'on ait

$$e^{\xi+\eta i} = x = r(\cos\theta + i\sin\theta);$$

le premier membre est égal à $e^{\xi}(\cos\eta + i\sin\eta)$; sa valeur absolue est égale à e^{ξ}, son argument à η ; pour qu'il y ait égalité avec $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, il faut et il suffit que l'on ait

$$e^{\xi} = r, \qquad \eta = \theta + 2n\pi,$$

n étant un entier quelconque. Pour $x = 0$, le problème n'a pas de solution ; pour $x \neq 0$, il y a une infinité de logarithmes de x, donnés par la formule $\lg r + (\theta + 2n\pi)i$; la partie réelle du logarithme de x est le logarithme naturel de la valeur absolue de x ; le coefficient de i est l'un quelconque des arguments de x ; la valeur principale du logarithme, définie plus haut, répond à l'argument principal de x ; elle est définie si x n'est pas négatif.

Il ne sera pas inutile de faire remarquer en passant que, puisqu'on peut prendre l'entier n aussi grand qu'on veut en valeur absolue, il y a des nombres e^z égaux au nombre donné non nul x et pour lesquels $|z|$ dépasse tel nombre positif que l'on voudra.

On voit combien, en quelque sorte, e^z est indéterminé quand z augmente indéfiniment; on se rappellera toutefois que e^z tend vers o quand la partie réelle de z tend vers $-\infty$.

Les fonctions e^x, $\log x$ étant définies, on peut, lorsque a n'est pas nul, regarder a^b comme égal à la valeur de la fonction e^x pour $x = b \log a$: cette valeur est déterminée quand on a fixé la détermination du logarithme. Ainsi, la fonction $(1 + x)^m$ du n° 364 peut être définie, quel que soit m, par l'égalité

$$(1 + x)^m = e^{m \log (1+x)}.$$

Pour la définition générale de la fonction $\log x$, on pourra procéder comme aux n^{os} **337**, **338** : d'abord on pourra convenir de prendre le coefficient de i toujours égal à l'argument de x; là où l'argument de x est défini, la fonction $\log x$, dont la partie réelle est $\log |x|$, sera alors définie sans ambiguïté. Par exemple sur un lien qui ne passe pas le point o, dans un domaine simple qui ne contient pas ce point, l'argument est défini par continuité, du moment que l'on a choisi sa valeur en un point du lien ou du domaine : il en sera de même de la fonction $\log x$, qui sera une fonction continue de x, pour le lien ou pour le domaine; toute autre fonction continue dans les mêmes ensembles, dont la valeur est toujours l'un des logarithmes du nombre x, s'obtiendra en ajoutant à celle-là un multiple de $2\pi i$.

369. — Lorsque x est réel et moindre que 1 en valeur absolue, on a

$$\log (1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots;$$

le second membre, que je désignerai par $f(x)$, a un sens tant que l'on a $|x| < 1$. Si, en outre, x est réel, on a

$$e^{f(x)} = 1 + \frac{f(x)}{1} + \frac{[f(x)]^2}{1.2} + \ldots = 1 + x;$$

En se reportant au théorème III du n° **349**, on voit tout de suite que les conditions requises pour l'application de ce théorème sont vérifiées, et que l'identité précédente en x est vraie tant que l'on a $|x| < 1$; il en résulte que, sous cette condition, la valeur de $f(x)$ est toujours l'un des logarithmes de $1 + x$; d'ailleurs la fonction $f(x)$ est continue dans le domaine défini par l'inégalité $|x| \leqq a$, où a est un nombre positif plus petit que 1; dans ce domaine, $1+x$ ne s'annule pas; son argument principal, compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, s'annule quand x est réel; la différence $\lg(1+x) - f(x)$ est continue dans le domaine $(x) \leqq a$; elle est un multiple entier de $2\pi i$; c'est donc une constante et cette constante est nulle comme on le voit en supposant x compris entre 0 et 1. La série $f(x)$ n'est donc autre chose que la fonction $\lg(1+x)$, sous la condition $|x| \leqq a$ et, par conséquent, sous la condition $|x| < 1$, puisque a peut être supposé aussi voisin de 1 qu'on voudra.

Supposons que la fonction $\log x$ soit définie, ainsi qu'on l'a expliqué plus haut, comme une fonction continue de x dans un domaine simple (D), qui ne contienne pas le point 0. Soit x_0 un point intérieur au domaine; soit ρ un nombre positif inférieur à la distance du point x_0 à la frontière de (D) et, par conséquent, à $|x_0|$. Supposons que le point $x = x_0 + h$ reste dans le cercle (C) défini par l'inégalité $|h| \leqq \rho$; la fonction $\log x - \log x_0$ sera continue dans ce cercle et s'annule pour $x = x_0$; d'ailleurs sa valeur ne peut différer de la valeur de

$$\lg \frac{x}{x_0} = \lg\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)$$

que d'un multiple de $2\pi i$; mais le second membre est une fonction continue de h tant que l'on a $|h| \leqq \rho$; il s'annule pour $h = 0$; on a donc, sous la condition $|x - x_0| \leqq \rho$,

$$\log x = \log x_0 + \frac{x - x_0}{x_0} - \frac{(x - x_0)^2}{2x_0^2} + \frac{(x - x_0)^3}{3x_0^3} - \ldots;$$

la fonction $\log x$ est régulière en tout point x intérieur au domaine (D) et sa dérivée est $\frac{1}{x}$.

Supposons maintenant que l'on définisse la fonction $\log x$ comme une fonction continue le long d'un lien (T), qui ne passe pas par le point 0, et dont chaque point soit déterminé par un paramètre réel t, appartenant à l'intervalle (t_0, t_1). Le lien peut traverser la coupure, mais je suppose que son origine et son extrémité ne soient pas sur la coupure. Pour l'origine x_0, qui correspond à la valeur t_0 du paramètre, on aura

$$\log x_0 = \lg x_0 + 2n\pi i$$

n étant un certain nombre entier. Si le lien (T) n'a aucun point commun avec la coupure, on aura tout le long du lien,

$$\log x = \lg x + 2n\pi i,$$

le nombre n restant toujours le même.

Si, en particulier le lien (T) est fermé et s'il n'a aucun point commun avec la coupure, on revient au point de départ avec la même détermination. Cette dernière conclusion subsiste si le lien (T) est la frontière d'un domaine simple auquel n'appartient pas le point o.

Supposons maintenant que le point x soit sur la coupure, pour $t = \theta$ mais non lorsque l'on a $t_0 \leqq t < \theta$; pour les valeurs de t

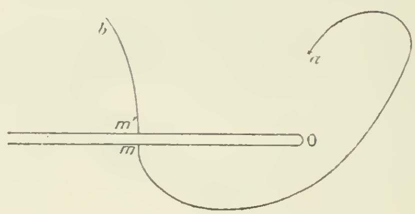

Fig. 41.

qui appartiennent à l'intervalle (t_0, θ), on aura toujours $\log x = \lg x + 2n\pi i$, n étant le même que pour $t = t_0$. Si maintenant le lien traverse la coupure pour $t = \theta$, on aura, pour les valeurs de t un peu plus grandes que θ,

$$\log x = \lg x + 2(n \pm 1)\pi i$$

en prenant, dans le second membre, le signe $+$ ou le signe $-$ suivant que l'on traverse la coupure de bas en haut ou de haut en bas; t continuant à croître, le coefficient de $2\pi i$ restera le même dans le second membre tant qu'on n'aura pas atteint la coupure à nouveau.

En supposant toujours que le point ξ, qui correspond à $t = \theta$ soit sur l'axe réel négatif, si pour les valeurs de t un peu plus grandes que θ le point x restait du même côté de cet axe que pour les valeurs plus petites que θ, on aurait $\log x = \lg x + 2n\pi i$ pour les valeurs un peu plus grandes que θ, comme pour les valeurs plus petites et le point ξ devrait être regardé comme appartenant au bord de la coupure dont sont voisins les points x qui correspondent aux valeurs de t un peu plus grandes ou un peu plus petites que ζ. On peut aussi supposer que le lien se confonde avec ce bord de la coupure dans un intervalle (ζ, ζ') et qu'il quitte ce bord pour $t = \zeta$, soit qu'il traverse la coupure, ou non. Tout cela ne peut offrir aucune difficulté pour le lecteur.

370. — Considérons la fonction

$$\lg\left(\frac{x-b}{x-a}\right)$$

posons

$$\frac{x-b}{x-a} = u, \qquad x = \frac{b-au}{1-u}.$$

Ces formules établissent une correspondance entre les deux variables x, u que l'on peut supposer représentées dans des plans différents. Lorsque u croît de $-\infty$ à 0, lorsque le point u décrit l'axe réel négatif, dans le plan des u, le point correspondant x décrit le vecteur qui va du point a vers le point b. Employons les notations A, B, X pour désigner, dans le plan des x, les points dont les affixes sont a, b, x. C'est le vecteur AB qui, dans ce plan, jouera le rôle de coupure et que l'on regardera comme ayant deux bords, un bord gauche rattaché aux points du plan voisins de AB et à gauche, un bord droit rattaché aux points du plan voisins de AB et à droite. La fonction $\lg\left(\frac{x-b}{x-a}\right)$ n'est définie, quand le point x est sur la coupure, que si l'on dit sur quel bord il se trouve. Le lecteur reconnaîtra sans peine la vérité des affirmations qui suivent :

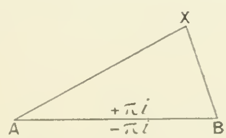

Fig. 42.

Si le point x ou X n'est pas sur la coupure, on a

$$\lg\frac{x-b}{x-a} = \lg\frac{\mathrm{XB}}{\mathrm{XA}} + i\,(\mathrm{XA}, \mathrm{XB}),$$

en désignant par $(\mathrm{XA}, \mathrm{XB})$ l'angle compris entre $-\pi$ et $+\pi$ dont le premier côté est XA et le second XB : cet angle est positif ou négatif suivant que X est à gauche ou à droite de la direction AB.

Si le point X est sur le vecteur AB, entre A et B, on a

$$\lg \frac{x-b}{x-a} = \log \frac{XB}{XA} \pm \pi i,$$

en prenant le signe + ou le signe — suivant que x est sur le bord gauche ou sur le bord droit. Quand le point x s'approche du point a ou du point b, la partie réelle augmente indéfiniment. On dit que la fonction est infinie pour ces points. Elle est réelle quand le point X est sur la droite AB, mais non entre A et B.

En procédant de la même façon pour définir la fonction $\lg \frac{b-x}{x-a}$ on est amené à introduire deux coupures indéfinies BB', AA' sur la droite qui passe par les points AB et que, pour pouvoir parler de la droite et de la gauche, nous regarderons comme ayant la direction qui va de A vers B. La partie réelle de la fonction précédente est toujours $\lg \left|\frac{b-x}{x-a}\right|$; quant au coefficient de i, c'est l'angle (XA, XC),

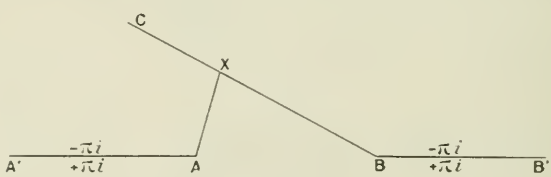

Fig. 43.

compris entre $-\pi$ et π, dont le premier côté est XA et le second côté le prolongement XC de XB; on pourrait prendre d'ailleurs tout aussi bien l'angle opposé par le sommet : cet angle est négatif quand le point X est à gauche de la droite, positif quand il est à droite; sur les bords gauches des coupures la partie imaginaire est $-\pi i$, elle est $+\pi i$ sur les bords droits; la fonction est réelle quant le point x est sur la droite, entre A et B. On a

$$\lg \frac{x-b}{x-a} - \lg \frac{b-x}{x-a} = \pm \pi i,$$

suivant que le point X est à gauche ou à droite de la direction AB.

371. — On trouve une fonction de cette nature en cherchant les nombres y tels que l'on ait

$$\mathrm{tg}\, y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{i(e^{iy} + e^{-iy})} = x;$$

on tire en effet de cette égalité

$$e^{2iy} = \frac{1 + ix}{1 - ix} = \frac{i - x}{i + x};$$

on voit que le problème admet une infinité de solutions pourvu que x ne soit égal ni à i ni à $-i$; $2iy$ doit être l'un des loga-

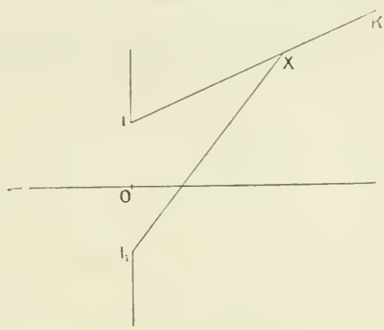

Fig. 44.

rithmes de $\frac{i - x}{i + x}$; toutes les valeurs de y forment une progression arithmétique dont la raison est π. Considérons, en particulier, la solution

$$y = \frac{1}{2i} \lg \frac{i - x}{i + x};$$

Désignons, sur la figure, par X le point dont l'affixe est x, par I_1 et I les points $-i$ et i, par XK la direction opposée à la direction XI. Les coupures vont sur l'axe imaginaire du point I au point à l'infini vers le haut, du point I_1 à l'infini vers le bas; on a en général

$$\frac{1}{2i} \lg \frac{i - x}{i + x} = \frac{1}{2} \text{angle}(XI_1, XK) + \frac{i}{2} \lg \frac{XI_1}{XI},$$

où l'angle (XI_1, XK) est compris entre π et $-\pi$, positif ou négatif suivant que X est à droite ou à gauche de l'axe imaginaire; en d'autres termes, suivant que la partie réelle de x est positive ou négative.

Le coefficient de i est positif ou négatif suivant que le point X est au-dessus ou au-dessous de l'axe réel ; en d'autres termes, suivant que le coefficient de i dans x est positif ou négatif. Quand x est réel, le coefficient de i est nul, la moitié de l'angle (XI, XK) est égal à l'angle (IO, IX) dont la tangente est x ; on peut donc poser alors

$$\text{arc tg}\, x = \frac{1}{2i} \lg \frac{i-x}{i+x},$$

en convenant, comme on a fait au n° **199** de regarder arc tg x comme compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. On peut adopter l'égalité précé-

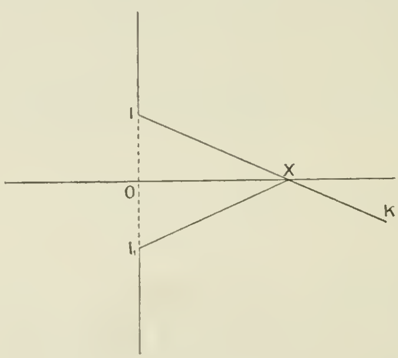

Fig. 45.

dente comme définissant arc tg x pour toutes les valeurs de x autres que i et $-i$. La partie réelle de la fonction arc tg x est alors toujours comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$; elle atteint respectivement ces valeurs quand le point x est sur le bord gauche, ou sur le bord droit, d'une coupure. Quand x est purement imaginaire sans être sur une coupure, c'est-à-dire quand le nombre réel $\frac{x}{i}$ est compris entre -1 et 1, arc tg x est purement imaginaire. La fonction arc tg x est impaire.

Il n'y a aucune difficulté à définir par continuité, sur un lien qui ne passe par aucun des points i et $-i$, ou dans un domaine simple qui ne contient aucun de ces deux points, une fonction continue Arc tg x qui satisfasse toujours à l'équation tg (Arc tg x) $= x$. Le lecteur n'a qu'à se reporter à ce qu'on a dit sur les logarithmes. Supposons le lien défini pour les valeurs de la variable réelle t qui appartiennent à l'intervalle (t_0, t_1), le point x_0 correspondant à la valeur initiale t_0 : le lien peut traverser les coupures mais ne doit passer ni par le point i, ni par le point $-i$; supposons qu'on prenne, pour $t = t_0$

$$\text{Arc tg } x_0 = \text{arc tg } x_0 ;$$

l'égalité entre les deux fonctions Arc tg x, arc tg x subsistera tant qu'on n'a pas une valeur de t à laquelle correspond un point d'une coupure [1] : si pour $t < \vartheta$, on n'a pas atteint une coupure, et si on en traverse une pour $t = \vartheta$, on aura pour les valeurs de t un peu plus grandes que ϑ

$$\text{Arc tg } x = \text{arc tg } x \pm \pi,$$

en prenant le signe + ou le signe — suivant qu'on traverse la coupure en allant du bord droit au bord gauche, ou du bord gauche au bord droit. L'égalité subsiste ensuite tant qu'on n'a pas atteint les coupures, etc.

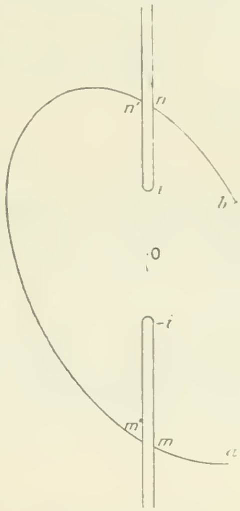

Fig. 46.

372. — Résolvons de même, pour définir la fonction arc sin x, l'équation

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = x,$$

ou

$$e^{2iy} - 2ix\, e^{iy} - 1 = 0 ;$$

si on se donne le nombre x, le nombre iy devra être le logarithme de l'une des racines de l'équation en u

$$u^2 - 2ix\, u - 1 = 0.$$

---

(1) De même si l'on voulait définir la fonction Arc tg x dans un domaine simple qui ne contiendrait aucun point des coupures.

Considérons en particulier la fonction

$$y = \frac{1}{i} \lg (ix + \sqrt{1 - x^2}),$$

en adoptant pour $\sqrt{1 - x^2}$ la même détermination qu'au n° **341** ; celle pour laquelle la partie réelle est positive. Je rappelle qu'on a dû introduire deux coupures sur l'axe réel ; l'une allant de 1 à $+\infty$; l'autre de -1 à $-\infty$. Lorsque x est sur une des coupures.

$$\sqrt{1 - x^2} = \pm i|\sqrt{x^2 - 1}|$$

est imaginaire : les signes placés près des coupures indiquent quel signe on doit prendre suivant qu'on est sur un bord ou sur un autre ; lorsque x est sur l'une des coupures, $ix + \sqrt{1 - x^2}$ est purement imaginaire, ainsi que l'autre racine $ix - \sqrt{1 - x^2}$ de l'équation en u : inversement, l'une ou l'autre de ces deux racines ne peut être purement imaginaire que si x est situé sur l'une ou l'autre de ces deux coupures ; en effet, de l'équation en u on tire

$$x = \frac{1}{2i}\left(u - \frac{1}{u}\right)$$

et l'on voit immédiatement que x est réel et plus grand que 1 en valeur absolue si on suppose u purement imaginaire.

Par conséquent, dans le continuum obtenu en supprimant du plan les points qui appartiennent aux deux coupures, les parties réelles de $ix + \sqrt{1 - x^2}$, $ix - \sqrt{1 - x^2}$ ne s'annulent pas : elles gardent le même signe ; la première est toujours positive, comme on le voit en prenant $x = 0$; la seconde est toujours négative. En supposant que x, n'appartienne à aucune coupure, on peut prendre l'argument de $ix + \sqrt{1 - x^2}$ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, l'argument de $-ix + \sqrt{1 - x^2}$ entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

Si donc x n'appartient pas à l'une des coupures

$$\frac{1}{i} \lg (ix + \sqrt{1 - x^2})$$

aura sa partie réelle comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$; cette dernière condition et l'équation $\sin y = x$ suffisent à définir le nombre y, puisque la partie réelle de $\frac{1}{i}\log(ix-\sqrt{1-x^2})$ n'est jamais comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, quelle que soit soit la détermination adoptée pour le logarithme. D'aileurs, lorsque x est réel, compris entre -1 et 1, la fonction $\frac{1}{i}\lg(ix+\sqrt{1-x^2})$ est la fonction arc sin x

Fig. 47.

du n° **199** : en effet, si on pose $x = \sin\varphi$, φ étant compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi$ est positif et par conséquent égal au nombre positif $\sqrt{1-x^2}$; on a alors

$$ix+\sqrt{1-x^2} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,;$$

par conséquent la valeur absolue du premier membre est 1 et son argument principal est φ : on a bien

$$\frac{1}{i}\lg(ix+\sqrt{1-x^2}) = \varphi.$$

D'après cela, je prendrai la fonction $\frac{1}{i}\lg(ix+\sqrt{1-x^2})$ comme la définition de arc sin x.

D'ailleurs en se reportant aux diverses valeurs du logarithme et en se rappelant que le produit des deux racines de l'équation en u est -1, on voit que toutes les valeurs de y sont données par les formules

$$2n\pi + \text{arc sin}\,x, \quad (2n+1)\pi - \text{arc sin}\,x$$

où n est un entier quelconque.

Le schéma ci-dessous donne la valeur de la fonction arc sin x sur les différents bord des coupures

$$\begin{array}{lcl} -\frac{\pi}{2} - i\lg(-x-\sqrt{x^2-1}) & & \frac{\pi}{2} - i\lg(x-\sqrt{x^2-1}) \\ & (\text{o}) & \\ -\frac{\pi}{2} + i\lg(-x-\sqrt{x^2-1}) & & \frac{\pi}{2} + i\lg(x-\sqrt{x^2-1}) \end{array}$$

En deux points confondus de la coupure de droite, mais appartenant à des bords opposés, la somme des valeurs de la fonction ainsi définie est π ; la somme analogue, pour l'autre coupure, est $-\pi$.

Ici encore, il sera facile de définir par continuité, le long d'un lien ne passant par aucun des points 1 et -1, une fonction Arc sin x vérifiant pour toutes les valeurs de x l'égalité

$$\sin(\text{Arc} \sin x) = x.$$

Si l'on suppose le lien défini pour les valeurs de la variable réelle t qui appartiennent à l'intervalle (t_0, t_1) et si l'on a à l'origine x_0 du lien

$$\text{Arc} \sin x_0 = \text{arc} \sin x_0,$$

l'égalité entre les fonctions Arc sin x et arc sin x subsistera tant qu'on n'aura pas atteint une coupure ; si l'on atteint et si l'on tra-

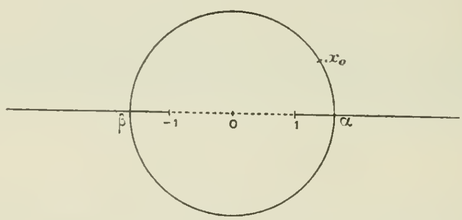

Fig. 48.

verse une première fois, pour $t = \theta$, l'une des coupures, on aura pour les valeurs de t un peu plus grandes que θ

$$\text{Arc} \sin x = \pm \pi - \text{arc} \sin x,$$

suivant que l'on traverse la coupure de droite ou la coupure de gauche ; l'égalité subsistera tant qu'on n'aura pas atteint une coupure, etc.

Supposons, par exemple, que le point x se meuve, dans le sens direct, à partir du point x_0, sur un cercle décrit du point o comme centre avec un rayon plus grand que 1 et traversant les coupures de droite et de gauche aux points α, β ; supposons que le point x_0 soit au-dessus de l'axe réel et que les deux fonctions Arc sin x, arc sin x soient égales en ce point ; elles resteront égales sur l'arc qui va de x_0 à β ; quand on aura dépassé β, on aura

$$\text{Arc} \sin x = -\pi - \text{arc} \sin x,$$

et cela jusqu'à ce qu'on soit en α; quand on aura dépassé α, on aura $\text{Arc}\sin x = 2\pi + \arcsin x$; c'est avec cette valeur, en particulier, qu'on reviendra au point x_0; l'égalité subsistera tant qu'on restera au-dessus de l'arc réel, etc...

Le lecteur n'aurait pas de peine à démontrer, sur les définitions précédentes, que les fonctions arc tg x, arc sin x sont régulières en tout point qui n'appartient pas aux coupures ; mais cela apparaîtra plus tard, d'une autre façon (n^{os} 388, 389, 399).

373. — En posant

$$(1) \qquad f(x) = \prod_{n=1}^{n=\infty} \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}\right],$$

on a établi (n° **263**), pour les valeurs réelles de x, les formules

$$(2) \qquad \frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{Cx} f(x)$$

$$(3) \qquad \sin \pi x = \pi x f(x) f(-x) = \pi x \prod_{(n)}{}' \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}\right]$$

$$(4) \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \qquad \Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Je rappelle que C désigne la constante d'Euler et que l'accent dont est affecté le symbole $\prod\limits_{n}{}'$ veut dire que n doit prendre toutes les valeurs entières, positives ou négatives, à l'exclusion de la valeur 0.

On a montré aussi que, si l'on pose

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} = 1 + u_n(x),$$

si l'on désigne par $U_n(x)$ la majorante naturelle de la fonction

$$u_n(x) = -\frac{1}{1.2}\frac{x^2}{n^2} + \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3}\right)\frac{x^3}{n^3} + \dots,$$

et par A un nombre positif quelconque, la série à termes positifs

$$u_1(A) + u_2(A) + \dots + u_n(A) + \dots$$

est convergente.

Il suit de là que les seconds membres des formules (1), (2), (3) sont des fonctions transcendantes entières en x, et qu'on peut leur appliquer la règle du n° **354** pour prendre la dérivée d'un produit infini.

La formule (2), établie par les valeurs réelles de x, peut être prise comme la définition de la fonction $\Gamma(x)$ pour toutes les valeurs de x, autres que $0, -1, -2, \ldots$. La formule (3) est certainement vraie pour toutes les valeurs de x; car les trois membres peuvent être mis sous forme de séries entières en x, convergentes quel que soit x, et ces séries sont identiques puisque leurs valeurs respectives sont égales lorsque x est réel. Les formules (4) résultent sans peine des formules (2) et (3); elles subsistent donc pour les valeurs imaginaires.

En prenant les dérivées d'après les règles du n° **354** et en posant

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{f(x)},$$

on obtient

$$(5)\qquad \varphi(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n}\right],$$

$$(6)\qquad -\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = C + \varphi(x) = \lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+n} - \log n\right),$$

$$(7)\qquad \pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \varphi(x) - \varphi(-x) = \frac{1}{x} + \sum_{(n)}{}' \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n}\right).$$

Dans la dernière formule l'accent dont est affecté le symbole $\sum\limits_{(n)}{}'$ veut dire que n doit prendre toutes les valeurs entières positives ou négatives, mais non la valeur 0: elle ne diffère que par la forme de la relation

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2},$$

comme on le voit en réunissant les termes qui correspondent à des valeurs symétriques de n.

La convergence des séries qui figurent aux derniers membres des égalités (5), (7) résulte de la façon même dont elles ont été obtenues, mais il ne sera pas inutile de reconnaître, sur les séries elles-mêmes, et la convergence de ces séries et le caractère des fonctions qu'elles définissent.

Je raisonnerai, par exemple, sur le second membre de l'égalité (7).

On a vu (n° **343**) que, des deux fonctions

$$\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n}, \quad \frac{x}{n(n'-x)},$$

où $n' = |n|$, la seconde était la majorante naturelle de la première, en supposant $|x| < n'$. Fixons un nombre positif quelconque A, et un nombre naturel $r > A$; ne considérons que les valeurs de x qui satisfont à la condition $|x| \leqq A$ et, dans le second membre de l'égalité (7), négligeons la fonction rationnelle $S_r(x)$ somme des termes pour lesquels on a $|n| < r$, pour ne nous attacher qu'à la somme $\Sigma_r(x)$ des autres termes. Remplaçons dans $\Sigma_r(x)$ chaque terme par sa majorante naturelle et x par A; on obtiendra la série à termes positifs

$$2\sum_{n=r}^{n=\infty} \frac{A}{n(n-A)},$$

qui est manifestement convergente comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$. Le coefficient 2 provient de ce qu'on a réuni les termes provenant de $\Sigma_r(x)$ qui correspondent à des valeurs symétriques de n. On voit donc que, pour les valeurs considérées de x, la série $\Sigma_r(x)$ satisfait aux conditions du n° **349**; elle est absolument et uniformément convergente; elle est développable en une série entière en x; ce développement est valable pourvu que l'on ait $|x| < r$, puisque le nombre positif A peut être supposé aussi voisin de r qu'on voudra. Ainsi, en particulier, la fonction

$$\pi \cot \pi x - \frac{1}{x}$$

peut être développée en une série entière en x convergente sous la condition $|x| < 1$. La fonction $\Sigma_r(x)$ est régulière pour toutes les valeurs de x qui satisfont à la condition $|x| < r$; ses dérivées s'obtiennent en prenant les dérivées des termes de $\Sigma_r(x)$, etc... La fonction rationnelle $S_n(x)$, qu'il faut ajouter à $\Sigma_r(x)$ pour avoir le second membre de (7), admet pour pôles, les points

$$0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm (r-1);$$

chacun de ces pôles est simple et le résidu correspondant est 1 : en se rappelant que le nombre A peut être pris aussi grand qu'on le veut, on aperçoit immédiatement les propriétés suivantes de la fonction

$$\frac{1}{x} + \sum_n \left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n}\right);$$

elle est partout régulière, sauf aux points dont l'affixe est un nombre entier [1] ; chaque nombre entier est un pôle simple et le résidu correspondant est 1 ; les dérivées de la fonction sont

$$-\sum_n \frac{1}{(x+n)^2}, \quad 2\sum_n \frac{1}{(x+n)^3}, \ldots ;$$

dans ces séries, n doit prendre toutes les valeurs entières, sans exclure 0.

De ce qui précède on déduit en particulier les égalités

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right] = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \tag{8}$$

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \sum_n \frac{1}{(x+n)^2}. \tag{9}$$

On voit combien, en raison même de la manière dont converge la série qui y figure, le second membre de l'égalité (7) est avantageux pour représenter la fonction $\cot \pi x$, combien, en particulier, il est plus avantageux que l'expression

$$\lim_{p=\infty} \sum_{n=-p}^{n=p} \frac{1}{x+n}$$

---

[1] Cette propriété suffit à prouver que l'égalité (7), une fois établie pour les valeurs réelles de x, subsiste pour les valeurs imaginaires, puisque la fonction $\cot \pi x$, quotient de deux séries entières de x, est régulière pour toute valeur de x qui n'annule pas le dénominateur $\sin \pi x$.

(n° **202**). Remarquons, à ce propos, la façon dont se comporte l'expression

$$\sum_{n=-q}^{n=p} \frac{1}{x+n}$$

quand p et q sont des nombres positifs très grands.

On peut écrire

$$\sum_{n=-q}^{n=p} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{n=q}\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{n}\right) + \sum_{n=1}^{n=p}\left(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{n}\right)$$
$$+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{q}\right).$$

Si l'on se donne la valeur de x (non entière), la somme des termes qui forment la première ligne du second membre est très voisine de $\cot \pi x$, pourvu que p et q soient suffisamment grands; quant aux termes qui figurent dans la seconde ligne la somme (n° **194**) diffère très peu de

$$(C+\log p)-(C+\log q) = \log\frac{p}{q};$$

on peut donc écrire, en désignant par ε une quantité qui tend vers 0 quand p et q augmentent indéfiniment,

$$\sum_{n=-q}^{n=p} \frac{1}{x+n} = \pi \cot \pi x + \log\frac{p}{q} + \varepsilon;$$

on peut évidemment faire grandir p et q de manière que le second membre s'approche d'une limite dont la différence avec $\pi \cot \pi x$ soit tel nombre réel que l'on voudra. Lorsque p et q grandissent indéfiniment, le coefficient de i dans le premier membre tend vers une limite, mais non la partie réelle.

En changeant dans les formules (3) et (7) x en ix on trouve

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{ch}\pi x &= \pi x \prod_{n}' \left[\left(1+\frac{ix}{n}\right)e^{-\frac{ix}{n}}\right] \\ &= \pi x \prod_{n=1}^{n=\infty}\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right) \end{aligned}\right.$$

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \pi\frac{\operatorname{ch}\pi x}{\operatorname{sh}\pi x} &= \frac{1}{x} + \sum_{n}' \left(\frac{1}{x-ni} + \frac{1}{ni}\right) \\ &= \frac{1}{x} + \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}. \end{aligned}\right.$$

La dernière formule, en y changeant x en $\frac{x}{2\pi}$, devient, après des transformations faciles,

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{e^x-1} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sum_{n}' \left(\frac{1}{x-2n\pi i} + \frac{1}{2n\pi i}\right) \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{4x}{x^2+n^2\pi^2}. \end{aligned}\right.$$

Puisque le second membre de l'égalité (7) est développable en série entière en x, convergente sous la condition $|x| < 1$, les sommes qui figurent dans les expressions de $\frac{1}{e^x-1}$ sont développables en une série entière en x, convergente sous la condition $\left|\frac{x}{2\pi}\right| < 1$. C'est un résultat qu'on a annoncé et utilisé au n° **265**, où l'on avait écrit

$$\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1}{4.2}x^2 - \frac{B^2}{1.2.3.4}x^4 + \ldots + (-1)^{p+1}\frac{B_p}{1.2\ldots 2}x^{2p} + \ldots;$$

En appliquant au second membre de la formule (12) la règle donnée plus haut pour le développement en série entière en x du second membre de la formule (7), on trouve sans peine

$$B_p = \frac{1.2.3\ldots 2p}{2^{2p-1}\pi^{2p}} S_{2p},$$

en posant

$$S_{2p} = \frac{1}{1^{2p}} + \frac{1}{2^{2p}} + \ldots + \frac{1}{n^{2p}} + \ldots;$$

je rappelle que les nombres B_p (nombres de Bernoulli) sont rationnels et qu'on a donné au n° **265** les valeurs des premiers de ces nombres.

Signalons le développement suivant, bien aisé à déduire de ce qui précède

$$\frac{\operatorname{tg} x}{2x} = \frac{2(2^2-1)}{1.2} B_1 + \frac{2^3(2^4-1)}{1.2.3.4} B_2 x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{2^{2p+1}(2^{2p+2}-1)}{1.2.3\ldots(2p+2)} B_{p+1} x^{2p} + \ldots$$

374. — Les formules étudiées dans le précédent numéro mettent en évidence certaines propriétés des fonctions qui y figurent ; on a vu par exemple avec quelle facilité on reconnaît que la fonction

$$\frac{1}{x} + \sum_n{}' \left[\frac{1}{x+n} - \frac{1}{n}\right]$$

est régulière en tout point autre que les points $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, qu'elle admet tous ces points pour pôles simples, et que les résidus correspondants sont tous égaux à 1. Il est dès lors bien naturel de se poser la question suivante : construire une fonction $F(x)$ qui soit régulière en tout point du plan, sauf en certains pôles, pour chacun desquels on se donne la partie principale : ainsi, si a est un des pôles de la fonction cherchée $F(x)$, on se donne une expression de la forme

$$\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a},$$

où α est un nombre naturel et $A_\alpha, A_{\alpha-1}, \ldots, A_1$ des constantes qui ne sont pas toutes nulles, telle que la différence [1] entre $F(x)$ et l'expression considérée puisse être développée en une série entière

(1) Il est à peine utile de dire que la valeur attribuée à cette différence pour $x = a$ doit être regardée comme une valeur limite.

en $x - a$, convergente pourvu que la valeur absolue de $x - a$ soit suffisamment petite.

On désigne sous le nom de fonction *méromorphe* de x une fonction qui est régulière partout sauf en certains pôles. Un point quelconque du plan est un point où la fonction est régulière ou un pôle [1].

Les fonctions méromorphes sont la généralisation des fonctions rationnelles comme les fonctions entières sont la généralisation des polynomes. Le quotient de deux fonctions entières est une fonction méromophe ; on démontre inversement que toute fonction miromorphe est le quotient de deux fonctions entières.

Le problème posé, dont je me bornerai d'ailleurs à traiter quelques cas particuliers, consiste donc à construire une fonction miromorphe connaissant ses pôles et les parties principales correspondantes.

Supposons d'abord que les pôles soient en nombre fini ; et désignons les par $a_1, a_2, \dots, a_n$; soit $f_i(x)$ la partie principale de la fonction relative au pôle a_i; je rappelle que $f_i(x)$ est un polynome donné en $\frac{1}{x - a_i}$; la somme $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ répond évidemment à la question posée : elle est régulière en tout point qui n'est pas un pôle comme somme de fonctions régulières ; et, pour la même raison, sa différence avec la fonction $f_1(x)$, par exemple, c'est-à-dire $f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x)$, est régulière au point a_1. On reconnaît immédiatement que toute fonction $F(x)$ qui jouit de ces propriétés est de la forme

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + g(x),$$

en désignant par $g(x)$ une fonction régulière en tout point du plan. Toute fonction entière, transcendante ou non, est régulière en tout point du plan ; on verra plus tard que les fonctions entières sont seules à jouir de cette propriété.

---

(1) J'adopte la signification que M. Borel donne au mot *méromorphe*. (Voir, par exemple ses *Leçons sur les fonctions méromorphes*). Quelques auteurs disent d'une fonction qu'elle est méromorphe dans un domaine simple, par exemple, pour dire qu'un point de ce domaine est un point où la fonction est régulière, ou un pôle.

Considérons maintenant le cas où l'ensemble des pôles est infini. Je dis d'abord que cet ensemble ne peut admettre de point d'accumulation ; supposons en effet que b soit un tel point d'accumulation et désignons toujours par $F(x)$ une fonction qui réponde à la question posée : aussi près de b qu'on voudra, il y a des pôles et par conséquent des points où $|F(x)|$ dépasse telle borne que l'on voudra ; $F(x)$ ne peut donc être régulière en b. Le point b ne peut pas non plus être un pôle : s'il était un pôle en effet, à ce pôle correspondrait une partie principale $\varphi(x)$: or la différence $F(x) - \varphi(x)$ qui admet évidemment pour pôles tous les pôles de $F(x)$, sauf b, qui admet donc des pôles aussi voisins de b qu'on le veut, ne peut être régulière en b. Ces conclusions sont incompatibles avec la supposition faite sur la fonction $F(x)$, laquelle doit être régulière en tout point qui n'est pas un pôle, l'ensemble des pôles n'admet pas de points d'accumulation, le nombre des pôles moindres en valeur absolue qu'un nombre positif donné P est fini ; ces pôles peuvent être rangés dans un ordre tel que les valeurs absolues aillent en croissant ou plutôt ne décroissent jamais. En faisant croître P indéfiniment, on voit que l'ensemble des pôles est dénombrable et que ces pôles peuvent être rangés dans un ordre $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tels, que l'on ait

$$|a_{n+1}| \geqq |a_n|, \qquad \lim.\, a_n = \infty.$$

C'est ce que je supposerai dans tout le présent numéro.

Continuons à désigner par $f_n(x)$ la partie principale de la fonction cherchée $F(x)$ qui correspond au pôle a_n.

Il est naturel de considérer la série

$$(1)\qquad f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots ;$$

supposons non seulement qu'elle soit convergente, mais qu'elle satisfasse à la condition suivante : Quel que soit le nombre positif A, si n est un nombre naturel tel que $|a_n|$ et, par conséquent, $|a_{n+1}|, |a_{n+2}|, \ldots$ soient supérieurs à A, la série

$$(2)\qquad f_n(x) + f_{n+1}(x) + \ldots,$$

dont tous les termes sont manifestement développables en séries entières en x, convergentes pour $|x| \leqq A$, satisfait aux conditions du n° **349**.

S'il en est ainsi, la somme $F(x)$ de la série (1) se décompose en deux parties : d'une part, la somme des $n-1$ premiers termes, qui est une fonction rationnelle, d'autre part la somme de la série (2) qui, dans le domaine $|x| \leq A$, est absolument et uniformément convergente et peut être mise sous forme d'une série entière en x uniformément convergente dans ce même domaine. En tout point de ce domaine autre que les points $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ la somme de la série (1) est régulière comme somme de fonctions régulières ; aux environs du pôle a_r ($r < n$), la différence $F(x) - f_r(x)$ sera manifestement régulière. Comme le nombre A peut être pris aussi grand qu'on veut, il est clair que la fonction $F(x)$ satisfait aux conditions imposées ; il en sera de même de toute fonction obtenue en ajoutant à $F(x)$ une fonction entière transcendante ou non ; réciproquement la différence entre une fonction qui satisfait aux conditions imposées et $F(x)$ devant être régulière en tout point est, en vertu d'une proposition énoncée plus haut, une fonction entière, transcendante ou non.

Il est à peine utile de dire que la série (1) est absolument et uniformément convergente dans tout domaine simple qui ne contient aucun des points $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Supposons par exemple qu'on veuille construire une fonction régulière partout sauf aux pôles $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ et telle que sa partie principale pour le pôle n soit $\frac{1}{(x+n)^2}$. Il est aisé de voir que la somme $F(x)$ de la série

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(x+n)^2} + \ldots$$

répond à la question.

Lorsque la série dont les termes sont les parties principales données relatives aux pôles $a_1, a_2, \ldots$, ne jouit pas des propriétés que suppose la démonstration, on substitue à cette série une autre

$$(\varphi) \qquad \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots$$

dont chaque terme $\varphi_n(x)$ se déduit de la partie principale $f_n(x)$ qui correspond au pôle a_n en en retranchant un certain polynome $\psi_n(x)$, choisi de façon que la série (φ) satisfasse aux conditions qu'on supposait tout à l'heure vérifiées par la série (1) ; c'est-à-dire qu'à chaque nombre positif A correspond un nombre naturel n tel que l'on ait $|a_n| > A$ et que la série

$$\varphi_n(x) + \varphi_{n+1}(x) + \ldots$$

satisfasse pour $x \leqq A$ aux conditions du n° **349**.

Qu'il soit toujours possible de déterminer les polynomes $\psi_n(x)$ de façon qu'il en soit ainsi, c'est une proposition [1] comprise dans une suite de théorèmes généraux que l'on doit à M. Mittag-Leffler ; je l'établirai tout à l'heure dans un cas très particulier, mais je veux faire remarquer qu'il est clair, si l'on admet cette proposition, que la série (φ) est absolument et uniformément convergente dans tout domaine simple qui ne contient pas de pôle, que sa somme $\Phi(x)$ satisfait bien aux conditions imposées pour ce qui est de la régularité, des pôles et des parties principales correspondantes, enfin que la dérivée de cette fonction, aux points où elle est régulière, est la somme de la série dont les termes sont les dérivées $\varphi'_1(x)$, $\varphi'_2(x)$, ... des termes de la série (φ). Ce dernier point résulte de ce que Φ est, en conservant les notations précédentes, la somme d'une fonction rationnelle et de la série

$$\varphi_n(x) + \varphi_{n+1}(x) + \ldots$$

qui, pour $x \leqq A$ satisfait aux conditions du n° **349**.

J'arrive maintenant à la démonstration du cas particulier que j'ai en vue.

Je suppose d'abord que o ne soit pas un pôle : cela ne diminue en rien la généralité. Si o, en effet, est un pôle de la fonction cherchée, il suffira, après avoir supprimé ce pôle et après avoir construit la fonction qui admet les autres pôles et les parties principales correspondantes, d'ajouter à cette fonction la partie principale qui correspond au pôle o.

Soient donc a_1, a_2, ..., a_n, ... les pôles donnés, dont aucun n'est nul ; je suppose que ces pôles soient tous simples ; soit, en général, B_n le résidu relatif au pôle a_n ; soient a_n, B'_n les valeurs

---

[1] La démonstration de cette proposition et même d'une proposition un peu plus générale est reproduite p. 128 du Tome I des *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques* de MM. Tannery et Molk.

absolues de a_n, B_n : je suppose enfin que la série à termes positifs

$$\frac{B'_1}{a_1'^{r+1}} + \frac{B'_2}{a_2'^{r+1}} + \ldots + \frac{B'_n}{a_n'^{r+1}} + \ldots,$$

où r désigne un nombre entier positif ou nul, soit convergente. Lorsque l'on se donne les nombres a_n, B_n, il n'est pas toujours possible de trouver un nombre r tel que la convergence ait lieu ; mais le cas où cela est possible est particulièrement intéressant en raison de la simplicité des résultats.

Quoiqu'il en soit, sous le bénéfice de ces suppositions, on prendra pour le polynome $\psi_n(x)$ qu'on doit retrancher de la partie principale $\dfrac{B_n}{x - a_n}$ relative au pôle a_n les r premiers termes du développement de cette partie principale suivant les puissances ascendantes de x, c'est à savoir

$$\psi_n(x) = -\frac{B_n}{a_n} - \frac{B_n x}{a_n^2} - \ldots - \frac{B_n x^{r-1}}{a_n^r};$$

La série cherchée sera

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_n(x) + \ldots,$$

en posant

$$\varphi_n(x) = \frac{B_n}{x - a_n} + \frac{B_n}{a_n} + \frac{B_n x}{a_n^2} + \ldots + \frac{B_n x^{r-1}}{a_n^r} = \frac{B_n x^r}{a_n^r(x - a_n)},$$

et il est bien aisé de voir que cette série jouit des propriétés annoncées. Soit en effet A un nombre positif quelconque ; soit n un nombre naturel tel que a'_n et, par suite, a'_{n+1}, a'_{n+2}, ... soient plus grands que A ; pour $|x| \leqq A$, la série

$$\varphi_n(x) + \varphi_{n+1}(x) + \ldots$$

satisfait aux conditions du n° **349** ; en effet, les fonctions $\varphi_n(x)$, $\varphi_{n+1}(x)$, ... sont développables en séries entières en x, dont les majorantes naturelles sont

$$\frac{B'_n x^r}{a_n'^r(a'_n - x)}, \qquad \frac{B'_{n+1} x^r}{a_{n+1}'^r(a'_{n+1} - x)}, \ldots$$

et la série à termes positifs

$$\frac{B'_n A^r}{a_n'^r(a'_n - A)} + \frac{B'_{n+1} A^r}{a_{n+1}'^r(a'_{n+1} - A)} + \ldots,$$

dont les termes s'obtiennent en remplaçant x par X dans ces majorantes naturelles est convergente comme la série

$$\frac{B'_n}{a_n^{r+1}} + \frac{B'_{n-1}}{a_{n-1}^{r+1}} + \ldots.$$

Supposons, par exemple, qu'on veuille construire une fonction holomorphe, dont les pôles, tous simples, soient les nombres entiers négatifs, nuls ou positifs, le résidu de chaque pôle étant 1 : la partie principale relative au pôle n sera $\frac{1}{x-n}$. On commencera par exclure le pôle 0, sauf à ajouter $\frac{1}{x}$ à la fonction trouvée.

Les pôles rangés de façon que leurs valeurs absolues aillent en croissant sont alors $1, -1, 2, -2, \ldots, n, -n, \ldots$; d'ailleurs la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

est convergente ; on peut donc prendre $r = 1$: la fonction cherchée, après qu'on aura ajouté le terme $\frac{1}{x}$, sera

$$\frac{1}{x} + \sum \left[\frac{1}{x-n} + \frac{1}{n}\right] = \pi \cot \pi x.$$

La fonction ainsi construite et toutes celles qu'on obtient en lui ajoutant une fonction entière en x répondent à la question.

Je me contente de signaler une autre application du même procédé.

Soient ω, ω' deux nombres dont on suppose seulement que le rapport ne soit pas réel. Considérons l'ensemble des points dont l'affixe est de la forme $s = 2p\omega + 2p'\omega'$ en désignant par p, p' des nombres entiers positifs, nuls ou négatifs ; il est aisé de voir qu'à deux systèmes (p, p'), (p_1, p'_1) pour lesquels on n'a pas $p_1 = p$, $p'_1 = p'$ correspondent deux points s, s_1 distincts et que tous les points s forment les nœuds d'un réseau de parallélogrammes égaux qui recouvrent tout le plan. On propose de construire une fonction partout régulière sauf aux points s, qui doivent être des pôles simples, avec un résidu égal à 1.

On établit d'abord que la série à termes positifs

$$\sum_{(s)}' \frac{1}{|s^3|}$$

où s doit prendre toutes les valeurs de la forme $2p\omega + 2p'\omega'$ sauf la valeur o, qui correspond à $p = 0$, $p' = 0$, est convergente, en sorte qu'on peut prendre $r = 2$; finalement on reconnait que la fonction

$$\zeta(x) = \frac{1}{x} + \sum' \left[\frac{1}{x - s} + \frac{1}{s} + \frac{x}{s^2}\right]$$

répond à la question posée.

Dans le cas général, c'est d'ailleurs d'une façon analogue que l'on procède; si $f_n(x)$ est la partie principale prescrite pour le pôle a_n, le polynome $\psi_n(x)$ qu'on en retranche s'obtient encore en prenant les premiers termes du développement de $f_n(x)$ en une série entière en x, développement valable pour $|x| < |a_n|$.

375. — De même qu'on peut construire une fonction holomorphe dont on donne les pôles et les parties principales correspondantes, on peut construire une fonction entière pour laquelle on donne les racines et les degrés de multiplicité de ces racines.

Lorsque ces racines sont en nombre fini, on a tout de suite une solution en formant un polynome qui admette chacune de ces racines avec le degré voulu de multiplicité et qui n'admette point d'autre racine; on peut ensuite multiplier ce polynome par une fonction entière qui ne s'annule pas.

L'ensemble des racines distinctes, s'il est infini, ne peut avoir de point d'accumulation : autrement, en effet, la fonction entière serait identiquement nulle; cet ensemble est donc dénombrable et peut être représenté par une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ pour laquelle on a

$$|a_{n+1}| \geqq |a_n|, \qquad \lim_{n=\infty} a_n = \infty.$$

D'un autre côté l'ordre de multiplicité de chaque racine est un nombre entier déterminé; rien n'empêche de supposer, tout en conservant les deux conditions précédentes, que, dans la suite a_1, $a_2, \ldots, a_n, \ldots$ chaque racine figure autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité. Laissons de côté, s'il y en a, les racines nulles : on peut, toujours en tenir compte, quand on a construit une fonction entière qui admet les autres racines, en multipliant cette fonction par une puissance de x.

Weierstrass a montré qu'on pouvait faire correspondre à chaque racine a_n de la suite précédente un nombre naturel r_n et un polynome

$$\mathrm{P}_n = \frac{x}{a_n} + \frac{x^2}{2a_n^2} + \ldots + \frac{x^{r_n}}{r_n a_n^{r_n}}$$

tels que le produit infini

$$\Pi\left[\left(1 - \frac{x}{a_n}\right)e^{\mathrm{P}_n}\right]$$

fût convergent. Ce produit satisfait même, pour toutes les valeurs de x, aux conditions du n° **349** (1). Si on admet qu'il en soit ainsi, il est clair que ce produit répond à la question posée : c'est une fonction entière admettant pour racines les racines données, chacune avec son degré de multiplicité et n'en admettant pas d'autre. Ce théorème de Weierstrass a été le point de départ d'un grand nombre de recherches, en particulier de celles de M. Mittag-Leffler auxquelles on a fait allusion un peu plus haut : au reste, la construction d'une fonction entière dont on se donne les racines avec leur ordre de multiplicité et la construction d'une fonction méromorphe pour laquelle on se donne les pôles et les résidus correspondants sont deux problèmes connexes; en effet si a est un zéro de la fonction entière cherchée, avec l'ordre de multiplicité α, on tirera de l'égalité

$$f(x) = (x-a)^\alpha\,\varphi(x)$$

la suivante

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)},$$

qui montre que la dérivée logarithmique de la fonction $f(x)$ admet le point a comme pôle simple, et que le résidu correspondant est α. On conclut de là immédiatement que la dérivée logarithmique de

---

(1) Voir, par exemple, les *Éléments de la Théorie des fonctions elliptiques* de MM. Tannery et Molk, t. I, p. 114.

la fonction entière cherchée est une fonction méromorphe dont les pôles sont les racines de la fonction cherchée, chacun de ces pôles étant simple et le résidu correspondant étant le degré de multiplicité de la racine. Si l'on construit une telle fonction méromorphe de la façon qu'on a expliquée antérieurement, les règles d'intégration, qu'on étudiera bientôt, conduisent au produit infini qu'on a décrit un peu plus haut (1).

Pour ce qui est de la démonstration directe du théorème de Weierstrass, je me bornerai à quelques indications sur le cas où toutes les racines données $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sont simples et où il existe un nombre entier positif ou nul r tel que la série à termes positifs

$$\frac{1}{a_1'^{r+1}} + \frac{1}{a_2'^{r+1}} + \ldots + \frac{1}{a_n'^{r+1}} + \ldots,$$

dans laquelle on suppose $a_n' = | a_n |$, est convergente. Tout d'abord si r est nul, il est clair que le produit infini

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right)$$

répond à la question. Supposons maintenant r positif, on prendra pour le polynome P_n correspondant à la racine a_n,

$$P_n = \frac{x}{a_n} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{a_n^2} + \ldots + \frac{1}{r}\frac{x^r}{a_n^r};$$

afin d'établir la convergence du produit infini dont le $n^{\text{ième}}$ facteur est

$$\left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{P_n},$$

il est commode de remarquer que la fonction entière

$$y = (1 - x)\, e^{\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^r}{r}}$$

peut se mettre sous la forme

$$1 - \frac{x^{r+1}}{r+1}\,\theta(x)$$

(1) On peut voir à ce sujet les *Leçons sur les fonctions méromorphes*, de M. Borel, p. 14.

où $\varphi(x)$ est une série entière en x dont les coefficients sont positifs et plus petits que 1. C'est ce que l'on reconnaît sans peine en remarquant que la fonction y vérifie l'équation différentielle

$$y'(1-x)+yx^r=0$$

qui, si l'on pose

$$y=1-\frac{\alpha_1}{1}x-\frac{\alpha_2}{2}x^2-\dots-\frac{\alpha_n}{n}x^n-\dots,$$

fournit, pour la détermination, des coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ les relations

$$0=\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_r, \qquad \alpha_{r+1}=1$$
$$\alpha_{n+1}=\alpha_n-\frac{\alpha_{n-r}}{n-r}, \qquad (n>r);$$

de ces relations on conclut par induction que les coefficients, à partir de α_{r+1}, restent égaux ou vont en diminuant, sont positifs et inférieurs ou égaux à 1. D'après cela, si la valeur absolue x' de x est inférieure à 1, on peut prendre la fonction $\frac{1}{1-x}$ pour majorante de la série $\varphi(x)$. Si donc on désigne par A un nombre positif quelconque, si l'on ne considère que les valeurs de x pour lesquelles on a $x' \leqq A$, si n est un nombre naturel tel que a'_n, et par conséquent a'_m en supposant $m>n$, soit plus grand que A, on pourra écrire

$$\left|\left(1-\frac{x}{a_m}\right)e^{P_m}-1\right|<\frac{x'^{r+1}}{a'^{r}_m(a'_m-x')}<\frac{A^{r+1}}{a'^{r}_m(a'_m-A)}.$$

Laissons de côté les $n-1$ premiers facteurs du produit infini

$$\left[\left(1-\frac{x}{a_1}\right)e^{P_1}\right]\left[\left(1-\frac{x}{a_2}\right)e^{P_2}\right]\dots,$$

qui forment évidemment une fonction entière; pour les valeurs de x considérées, le produit infini formé par les facteurs suivants satisfait aux conditions du n° **349**, à cause de la convergence de la série à termes positifs

$$\frac{A^{r+1}}{a'^{r}_n(a'_n-A)}+\frac{A^{r+1}}{a'^{r}_{n+1}(a'_{n+1}-A)}+\dots.$$

La réintroduction des $n-1$ premiers facteurs ne change rien au caractère du produit infini considéré qui, pour les valeurs de x

satisfaisant à la condition $|x| \leqq A$, est absolument et uniformément convergent et peut être mis sous forme d'une série entière en x; puisque A peut être pris aussi grand qu'on le veut, ce produit infini est bien, comme on l'avait annoncé, une fonction transcendante entière en x. La dérivée logarithmique est la fonction méromorphe

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \left[\frac{1}{a_n - x} + \frac{x}{a_n} + \frac{x^2}{a_n^2} + \ldots + \frac{x^\nu}{a_n^\nu}\right]$$

qui admet pour pôles simples les points $a_1, a_2, \ldots$, avec le résidu 1.

Les produits infinis qui représentent les fonctions $\Gamma(x)$, $\sin \pi x$, ont été construits par la règle qu'on vient d'expliquer, en partant de ce que la série

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

est convergente.

Signalons encore, en reprenant les notations expliquées antérieurement le produit infini

$$\sigma(x) = x \prod{}' \left[\left(1 - \frac{x}{s}\right) e^{\frac{x}{s} + \frac{x^2}{2s^2}}\right],$$

où s doit prendre toutes les valeurs de la forme $2p\omega + 2q\omega'$, sauf la valeur 0, et dont la dérivée logarithmique est la fonction $\zeta(x)$. La fonction transcendante entière $\sigma(x)$, introduite par Weierstrass, tient un rôle capital dans la théorie des fonctions doublement périodiques.

CHAPITRE XII

DÉRIVÉES ET INTÉGRALES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE

I. — DÉRIVÉES

376. — La notion de dérivée d'une fonction d'une variable imaginaire a été présentée de deux points de vue différents ; on a dit (n° **352**) d'une fonction $F(z)$ régulière au point z_0, c'est-à-dire telle que la fonction $F(z_0+h)$ puisse être développée en une série entière en h, convergente pour les valeurs suffisamment petites de $|h|$, qu'elle admettait des dérivées de tous les ordres et l'on a défini ces dérivées par les coefficients de la série. Au n° **353**, on a donné une définition de la dérivée qui a exactement la même forme que la définition de la dérivée pour les fonctions d'une variable réelle. En ce sens, on dit qu'une fonction $F(z)$, définie aux environs du point z_0, admet en ce point le nombre $F'(z_0)$ pour dérivée si à chaque nombre positif α correspond un nombre positif β tel que l'on ait

$$\left|\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - F'(z_0)\right| < \alpha$$

sous la condition $0 < |z-z_0| < \beta$. Il ne peut évidemment en être ainsi que si la fonction $F(z)$ est continue au point z_0.

C'est surtout à ce dernier point de vue que je me placerai désormais : mais le lecteur n'oubliera pas que, lorsqu'on sait qu'une fonction est régulière en un point, on sait qu'elle a en ce point une dérivée et même des dérivées de tous les ordres ; nous connaissons ainsi déjà un grand nombre de fonctions qui admettent des dérivées, et les dérivées de ces fonctions, par exemple les polynomes en z, les fonctions e^z, $\sin z$, $\operatorname{tg} z$, etc.

On montrera comme au chapitre VI que, si deux fonctions admettent des dérivées, il en est de même de leur somme, de leur produit, de leur quotient et l'on généralisera sans aucune peine les règles dudit chapitre pour le calcul de ces dérivées. La règle des fonctions de fonctions se généralise aussi immédiatement que sa démonstration. Je ne m'arrêterai pas sur la règle des fonctions composées, pour laquelle je me bornerai à ce qui a été dit, à un autre point de vue, au n° **354**. Mais je veux dire quelques mots des fonctions inverses

377. — Soient $\varphi(z)$, $\psi(z)$ deux fonctions inverses; soient z_0, Z_0 deux points correspondants, c'est-à-dire deux points pour lesquels on ait à la fois

$$Z_0 = \varphi(z_0), \qquad z_0 = \psi(Z_0);$$

je suppose, sur les deux fonctions $\varphi(z)$, $\psi(Z)$, qu'elles sont définies aux environs des points z_0, Z_0; qu'elles sont continues en ces points; que l'on a, pour les valeurs de Z suffisamment voisines de Z_0,

$$Z = \varphi[\psi(Z)];$$

je suppose enfin que la fonction $\varphi(z)$ admet, pour $z = z_0$, une dérivée $\varphi'(z_0)$, différente de zéro. Sous ces conditions, on peut affirmer que la fonction $\psi(Z)$ admet, pour $Z = Z_0$ une dérivée égale à $\dfrac{1}{\varphi'(z_0)}$.

Considérons en effet le rapport

$$\frac{\psi(Z) - \psi(Z_0)}{Z - Z_0},$$

et posons $z = \psi(Z)$; pourvu que Z soit suffisamment voisin de Z_0, $\psi(Z)$ ou z, puisque la fonction $\psi(Z)$ est continue pour $Z = Z_0$, sera aussi voisin qu'on voudra de $\psi(Z_0) = z_0$; $Z = \varphi[\psi(Z)]$ sera égal à $\varphi(z)$; le précédent rapport pourra donc s'écrire

$$\frac{z - z_0}{\varphi(z) - \varphi(z_0)},$$

qui est aussi voisin qu'on veut de $\frac{1}{\varphi'(z_0)}$ pourvu que z soit suffisamment voisin de z_0 et, par conséquent, pourvu que Z soit suffisamment voisin de Z_0. La proposition énoncée est établie.

On a vu, par exemple, que la fonction $\log Z$ peut être définie, et cela d'une infinité de façons, dans tout domaine simple qui ne contient pas le point o; cette fonction satisfait d'ailleurs à la condition $e^{\log Z} = Z$; elle est l'inverse de la fonction e^z : un point quelconque Z intérieur au domaine considéré et le point $z = \log Z$ peuvent jouer le rôle des points Z_0 et z_0 de la théorie précédente; la dérivée de $\log Z$ est donc

$$\frac{1}{e^z} = \frac{1}{Z}.$$

Connaissant la dérivée de la fonction $\log z$, le théorème des fonctions de fonction permet d'obtenir les dérivées de

$$z^m = e^{m \log z}, \quad \text{arc tg}\, z = \frac{1}{2i} \log \frac{i - z}{i + z},$$

$$\text{arc sin}\, z = \frac{1}{i} \log \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right)$$

qui sont respectivement

$$mz^{m-1}, \qquad \frac{1}{1 + z^2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}};$$

Les deux dernières pourraient d'ailleurs se déduire des dérivées de $\text{tg}\, z$, ou de $\sin z$ et de la règle des fonctions inverses.

La signification que l'on doit donner à la dérivée, lorsqu'il y a quelque ambiguïté, est d'ailleurs liée à la signification de la fonction. La fonction z^m, par exemple, lorsque m n'est pas entier, peut se définir ainsi que $\log z$ au moyen de l'argument de z et, par conséquent, dans un domaine simple ne contenant pas le point o; on devra entendre que la dérivée mz^{m-1} est égale à $\frac{mz^m}{z}$, où z^m a la signification adoptée pour la fonction.

Pour ce qui est de arc sin z, je rappelle d'abord que toute fonction Arc sin z, inverse de $\sin z$, peut être définie comme l'une des déterminations de $\frac{1}{i} \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$; la fonction $\sqrt{1 - z^2}$ doit avoir la même signification que dans la dérivée $\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}$. Les fonctions $\sqrt{1-z^2}$ et arc sin z ont été définies sans ambiguïté dans un plan où l'on avait pratiqué deux coupures allant, le long de l'axe réel, de 1 à $+\infty$ et de -1 à $-\infty$. Dans ce plan, la partie réelle de $\sqrt{1-z^2}$ doit être positive, qu'il s'agisse de l'expression au moyen de laquelle est définie la fonction arc sin z ou de sa dérivée.

378. — Il convient de faire ici, à propos des coupures relatives à la fonction arc sin z, quelques observations qu'il y aurait d'ailleurs lieu de répéter fréquemment dans des circonstances analogues ; elles sont assez simples pour que j'aie cru devoir me dispenser de détails de démonstration, que le lecteur suppléera aisément.

Soit z_0 un point situé sur une coupure, par exemple sur le bord supérieur de la coupure de droite. On est convenu de prendre alors

$$\sqrt{1-z_0^2} = -i\sqrt{z_0^2-1}, \quad \text{arc sin } z_0 = \frac{\pi}{2} - i \lg\left(z_0 - \sqrt{z_0^2-1}\right);$$

en adoptant pour $\sqrt{z_0^2-1}$ la signification arithmétique ; au point z_0, si l'on traverse la coupure, la fonction arc sin z est discontinue ; on n'a donc pas, semble-t-il, à parler de sa dérivée. On peut en parler toutefois et continuer de dire que cette dérivée est égale au nombre

$$\frac{1}{\sqrt{1-z_0^2}} = \frac{i}{\sqrt{z_0^2-1}}.$$

Premièrement, on peut dire que ce nombre est la dérivée, pour $z = z_0$, d'une fonction Arc sin z, définie comme il suit aux environs de z_0, par exemple dans le domaine simple dont la frontière est un cercle décrit de z_0 comme centre avec un rayon moindre que $|z_0 - 1|$; là, elle coïncide avec la fonction arc sin z pour les points z qui sont soit sur le bord supérieur de la coupure, soit au-dessus, elle est continue et l'on a sin (Arc sin z) $= z$.

D'après ce qu'on a dit au n° **372**, cette fonction est égale à π — arc sin z pour les points situés soit sur le bord inférieur de la coupure, soit au-dessous. La dérivée de la fonction Arc sin z ainsi définie est

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \qquad \frac{i}{\sqrt{z^2-1}}, \qquad \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$$

suivant que le point z est au-dessus de la coupure, sur la coupure (quel que soit le bord), ou au-dessous de la coupure : elle est continue dans le domaine considéré ; il est à peine utile de rappeler que $\sqrt{1-z^2}$ a sa partie réelle positive.

Secondement, on peut dire que le nombre

$$\frac{1}{\sqrt{1-z_0^2}} = \frac{i}{\sqrt{z_0^2-1}}$$

est la dérivée pour $z=z_0$ de $\arcsin z$, en ce sens qu'il est la limite pour $z=z_0$ du rapport

$$\frac{\arcsin z - \arcsin z_0}{z-z_0},$$

où z ne prend que des valeurs figurées par des points situés soit sur le bord supérieur de la coupure, soit au-dessus.

On est ainsi amené à étendre la notion de dérivée à une fonction $F(z)$ qui ne serait pas entièrement définie aux environs du point z_0. J'indique dès à présent cette extension qui facilite quelquefois le langage.

379. — Soit (E) un ensemble de points, soit z_0 un point d'accumulation de cet ensemble qui lui appartienne. Supposons que la fonction $F(z)$ soit définie dans l'ensemble (E) ; je ne considèrerai que des points z qui appartiennent à (E) ; je dirai que la fonction $F(z)$ admet une dérivée au point z_0, dans l'ensemble (E), s'il existe un nombre $F'(z_0)$ tel que l'on ait, quelque petit que soit le nombre positif α

$$\left| \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - F'(z_0) \right| < \alpha,$$

pour tous les points z de (E) qui satisfont à la condition

$$0 < |z-z_0| < \beta,$$

où β désigne un nombre positif, convenablement choisi, d'après α.

La fonction $F(z)$ ne peut évidemment avoir de dérivée dans l'ensemble (E) au point d'accumulation z_0, que si elle est continue en ce point.

Si, par exemple, l'ensemble (E) est constitué par un continuum et sa frontière, on saura ce qu'il faut entendre quand on parle d'une fonction $F(z)$ déterminée dans (E) et admettant une dérivée, dans l'ensemble (E), en tout point de cet ensemble. Si z_0 est un point du continuum, la fonction $F(z)$ sera déterminée aux environs de ce point et l'on adoptera, pour la dérivée, la définition ordinaire ; si z_0 est un point de la frontière, on adoptera la définition étendue, qu'on vient d'expliquer. Plus généralement, si tous les points de (E) sont des points d'accumulation, il est permis de parler d'une fonction $F(z)$, déterminée dans (E), ayant une dérivée dans (E), en chaque point de cet ensemble. Cette extension de la notion de dérivée est encore commode quand la fonction que l'on considère est définie, comme la fonction arc sin z, dans un plan où l'on a pratiqué des coupures ; pour reprendre cet exemple, et le point z_0 situé sur le bord supérieur de la coupure, on constituera l'ensemble (E) par les points suffisamment voisins de z_0 et situés soit sur le bord supérieur de la coupure, comme z_0, soit au-dessus de la coupure ; la définition de la dérivée, dans l'ensemble E, de la fonction arc sin z au point z_0 est alors exactement celle qu'on a donnée à la fin du numéro précédent.

380. — Supposons toujours que la fonction $F(z)$, déterminée dans l'ensemble (E), ait, dans cet ensemble, une dérivée $F'(z_0) = g_0 + ih_0$ pour le point d'accumulation $z_0 = x_0 + iy_0$; supposons en outre qu'il y ait un lien, défini par les formules

$$z = \varphi(t) + i\psi(t), \qquad a \leqq t \leqq b,$$

qui soit contenu dans (E) et qui contienne le point z_0 : en particulier, il y a un nombre t_0 appartenant à l'intervalle (a, b) pour lequel on a

$$\varphi(t_0) = x_0, \qquad \psi(t_0) = y_0 ;$$

supposons enfin que les fonctions réelles $\varphi(t)$, $\psi(t)$, déterminées dans l'intervalle (a, b), admettent pour $t = t_0$ des dérivées $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$; si le nombre t_0 se trouvait être égal à l'une des bornes a, b de l'intervalle, le mot *dérivée* devrait être entendu dans le sens de *dérivée à droite* ou de *dérivée à gauche* (n° **205**).

Si l'on regarde z comme étant égal à $\varphi(t) + i\psi(t)$, $F(z)$, en séparant les parties réelle et imaginaire, se mettra sous la forme

$\Phi(t) + i\Psi(t)$, $\Phi(t)$ et $\Psi(t)$ étant des fonctions déterminées dans l'intervalle (a, b). Je vais démontrer que ces fonctions admettent, pour $t = t_0$, des dérivées $\Phi'(t_0)$, $\Psi'(t_0)$, et que ces dérivées s'expriment par les formules

$$\Phi'(t_0) = g_0\varphi'(t_0) - h_0\psi'(t_0),$$
$$\Psi'(t_0) = h_0\varphi'(t_0) + g_0\psi'(t_0);$$

que l'on peut condenser dans la formule unique

$$\Phi'(t_0) + i\Psi'(t_0) = (g_0 + ih_0)[\varphi'(t_0) + i\psi'(t_0)].$$

Ici encore, si t_0 est l'une des bornes a, b de l'intervalle, les dérivées $\Phi'(t_0)$, $\Psi'(t_0)$ seront des dérivées à droite ou à gauche.

Posons en effet

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{\Phi(t) - \Phi(t_0) + i[\Psi(t) - \Psi(t_0)]}{\varphi(t) - \varphi(t_0) + i[\psi(t) - \psi(t_0)]}$$
$$= g_0 + ih_0 + \varepsilon + \varepsilon' i,$$

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} = \varphi'(t_0) + \eta, \qquad \frac{\psi(t) - \psi(t_0)}{t - t_0} = \psi'(t_0) + \eta'.$$

En vertu des hypothèses, à chaque nombre positif α, correspond un nombre positif β, tel que les nombres réels ε, ε', η, η' soient moindres en valeur absolue que α, dès que l'on a $|t - t_0| < \beta$.

On tire de ces égalités

$$\frac{\Phi(t) - \Phi(t_0) + i[\Psi(t) - \Psi(t_0)]}{t - t_0}$$
$$= \{\varphi'(t_0) + \eta + i[\psi'(t_0) + \eta']\}(g_0 + ih_0 + \varepsilon + \varepsilon' i),$$

puis, en séparant les parties réelle et imaginaire,

$$\frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0} = [\varphi'(t_0) + \eta](g_0 + \varepsilon) - [\psi'(t_0) + \eta'](h_0 + \varepsilon'),$$

$$\frac{\Psi(t) - \Psi(t_0)}{t - t_0} = [\varphi'(t_0) + \eta](h_0 + \varepsilon') + [\psi'(t_0) + \eta'](g_0 + \varepsilon).$$

On voit immédiatement, en regardant les seconds membres, qu'à chaque nombre positif α' correspond un nombre positif β' tel que les différences respectives entre ces seconds membres et les expressions

$$\Phi'(t_0) = g_0\varphi'(t_0) - h_0\psi'(t_0),$$
$$\Psi'(t_0) = h_0\varphi'(t_0) + g_0\psi'(t_0)$$

soient moindres en valeur absolue que α' lorsque l'on a $|t - t_0| < \beta'$; cela revient à dire que $\Phi'(t_0)$, $\Psi'(t_0)$ sont les dérivées pour $t = t_0$ des fonctions $\Phi(t)$, $\Psi(t)$.

Supposons que l'ensemble (E), dans lequel on supposera toujours que la fonction $F(z)$ soit déterminée, jouisse de la propriété suivante : Deux points quelconques de (E) peuvent être reliés par un lien contenu tout entier dans (E) ; c'est la condition 2° de la définition d'un continuum. Si cette condition est vérifiée, tout point de l'ensemble sera évidemment un point d'accumulation. Supposons aussi que $F(z)$ ait une dérivée $F'(z)$, dans (E), et conservons pour les lettres et les symboles a, b, t, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ la même signification que plus haut; les fonctions réelles $\Phi(t)$, $\Psi(t)$, déterminées dans l'intervalle (a, b), admettront des dérivées $\Phi'(t)$, $\Psi'(t)$ pour les valeurs de t telles que les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ aient elles-mêmes des dérivées $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, et l'on aura

$$\Phi'(t) = g\varphi'(t) - h\psi'(t),$$
$$\Psi'(t) = h\varphi'(t) + g\psi'(t),$$

en désignant par g, h la partie réelle et le coefficient de i dans $F'(z)$, pour $z = \varphi(t) + i\psi(t)$; ces deux égalités peuvent être réunies dans la formule

$$\Phi'(t) + i\Psi'(t) = F'(z)\,[\varphi'(t) + i\psi'(t)].$$

381. — Supposons enfin que (E) soit un continuum et que la fonction $F(z)$ ait une dérivée $F'(z)$ en chaque point de ce continuum ; le mot dérivée doit ici être pris dans son sens ordinaire, puisque la fonction $F(z)$, par cela même qu'elle est déterminée dans (E), est déterminée aux environs de chaque point $z = x + iy$ de l'ensemble (E) ; il est maintenant inutile de parler de la dérivée dans (E). Posons, en séparant les parties réelles et les parties imaginaires

$$F(z) = X(x, y) + iY(x, y),$$
$$F'(z) = g(x, y) + ih(x, y);$$

les fonctions réelles X, Y, g, h des variables réelles x, y seront définies, et les deux premières seront continues [1], en tout point du continuum; il résulte immédiatement de ce qui précède que les fonctions $X(x, y)$, $Y(x, y)$ admettent des dérivées partielles par rapport à y en chaque point de (E), et que l'on a, en désignant par

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0$$

les valeurs de ces dérivées au point $x = x_0$,

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0 = g(x_0, y_0), \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0 = h(x_0, y_0),$$
$$\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_0 = -h(x_0, y_0), \quad \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)_0 = g(x_0, y_0);$$

Considérons en effet, sur la parallèle à l'axe réel qui passe par le point (x_0, y_0) un segment comprenant ce point et assez petit pour être contenu dans (E); ce segment pourra être regardé comme le lien du numéro précédent, en supposant que les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ soient égales, la première à t, la seconde à la constante y_0 et en prenant pour a, b des nombres qui comprennent x_0 et qui en sont suffisamment voisins; on aura alors $\varphi'(t) = 1$, $\psi'(t) = 0$ et

$$\Phi(t) = X(t, y_0), \qquad \Psi(t) = Y(t, y_0);$$

les dérivées par rapport à t, pour $t = x_0$, des fonctions $\Phi(t)$ ou $X(t, y_0)$, $\Psi(t)$ ou $Y(t, y_0)$ ne sont autre chose, par définition, que les dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_0$$

dont l'existence est ainsi manifeste; les formules du numéro précédent montrent d'ailleurs que ces dérivées sont respectivement

---

(1) On montrera ultérieurement qu'il en est de même des fonctions $g(x, y)$, $h(x, y)$ en vertu des conditions énoncées.

égales à $g(x_0, y_0)$, $h(x_0, y_0)$. La démonstration s'achève en considérant, au lieu de la parallèle à l'axe réel, la parallèle à l'axe imaginaire qui passe par le point (x_0, y_0).

Puisque (x_0, y_0) désigne un point quelconque du continuum (E) on peut dire généralement que si la fonction

$$F(z) = X(x, y) + iY(x, y)$$

admet une dérivée

$$F'(z) = g(x, y) + ih(x, y)$$

dans le continuum, on a en tout point de ce continuum,

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = g(x, y), \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y} = h(x, y)$$

$$F'(z) = \frac{\partial X}{\partial x} + i\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial X}{\partial y} + i\frac{\partial Y}{\partial y}\right).$$

Si la fonction $F'(z)$ est continue au point du continuum $z = x + iy$, les fonctions $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial x}$, $\frac{\partial X}{\partial y}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$ seront continues en ce point, au sens du n° **165**.

382. — Inversement, je vais établir le théorème suivant :

Soient $X(x, y)$, $Y(x, y)$ des fonctions réelles des variables réelles x, y, définies dans tout le continuum (E) et admettant en chaque point de ce continuum des dérivées partielles du premier ordre, continues en chaque point du continuum et satisfaisant aux conditions

$$(1) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x};$$

la fonction $X(x, y) + iY(x, y)$, regardée comme une fonction de $z = x + iy$, admet en chaque point du continuum, une dérivée égale à $g(x, y) + ih(x, y)$ en posant

$$(2) \qquad g(x, y) = \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad h(x, y) = \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{\partial X}{\partial y}.$$

Je raisonnerai sur le point (x_0, y_0) ou z_0, que je suppose appartenir au continuum (E); soit δ un nombre positif tel que tous les points qui sont à une distance réduite de (x_0, y_0) moindre que δ

appartiennent à (E); si α, β sont des nombres réels moindres que δ en valeur absolue, et si θ_1, θ_2 sont des nombres positifs moindres que 1, les points

$$(x_0+\alpha, y_0+\beta), \quad (x_0+\theta_1\alpha, y_0+\theta_1\beta), \quad (x_0+\theta_2\alpha, y_0+\theta_2\beta)$$

appartiendront tous à (E). Afin d'abréger un peu l'écriture, je désignerai par g_1 et h_1, d'une part, par g_2 et h_2, d'autre part, les valeurs des fonctions $g(x, y)$, $h(x, y)$ aux deux derniers des points dont on vient de dire qu'ils appartenaient au continuum; enfin je poserai $g_0 = g(x_0, y_0)$, $h_0 = h(x_0, y_0)$.

Pour établir la proposition que l'on a en vue, il faut montrer que le rapport

$$(3)\qquad \frac{X(x_0+\alpha, y_0+\beta)+iY(x_0+\alpha, y_0+\beta)-X(x_0, y_0)-iY(x_0, y_0)}{\alpha+\beta i}$$

diffère aussi peu qu'on veut, en valeur absolue, du nombre g_0+ih_0, pourvu que α, β soient suffisamment petits en valeur absolue.

Or, avec les notations que l'on a expliquées un peu plus haut, on peut écrire, en vertu de la proposition établie au n° **221**, et en tenant compte des égalités (2),

$$\begin{aligned}
X(x_0+\alpha, y_0+\beta)-X(x_0, y_0) &= \alpha g_1-\beta h_1,\\
Y(x_0+\alpha, y_0+\beta)-Y(x_0, y_0) &= \alpha h_2+\beta g_2\\
&= \alpha h_1+\beta g_1+\alpha(h_2-h_1)+\beta(g_2-g_1).
\end{aligned}$$

Le rapport (3) serait égal à g_1+ih_1 si l'on avait $\theta_1=\theta_2$; il est égal, dans tous les cas, à

$$g_1+ih_1+i\,\frac{\alpha(h_2-h_1)+\beta(g_2-g_1)}{\alpha+\beta i};$$

puisque, en raison de la continuité des fonctions $g(x, y)$, $h(x, y)$, g_1 et h_1, g_2 et h_2 diffèrent aussi peu que l'on veut de g_0 et h_0, pourvu que α, β soient suffisamment petits en valeur absolue, il suffit de montrer que, dans les mêmes conditions, la valeur absolue de l'expression

$$i\,\frac{\alpha(h_2-h_1)+\beta(g_2-g_1)}{\alpha+\beta i}$$

est aussi petite qu'on le veut ; or, c'est ce qui devient évident en posant $\alpha = r\cos\omega$, $\beta = r\sin\omega$, car on a alors

$$\left| i\,\frac{\alpha(h_2 - h_1) + \beta(g_2 - g_1)}{\alpha + \beta i} \right| = |(h_2 - h_1)\cos\omega + (g_2 - g_1)\sin\omega|$$
$$\leqq \sqrt{(g_2 - g_1)^2 + (h_2 - h_1)^2}.$$

En résumé si l'on pose

$$F(z) = X(x, y) + iY(x, y), \qquad f(z) = g(x, y) + ih(x, y),$$

à chaque nombre positif ε faire correspondra un nombe positif η tel que l'on ait

$$\left| \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0) \right| < \varepsilon,$$

sous la condition $|z - z_0| < \eta$. C'est ce qu'on voulait établir.

II. — INTÉGRALES

383. — Désignons par (E) un ensemble qui sera soit un continuum proprement dit, soit un continuum complété par sa frontière. Soit $f(z)$ une fonction de z déterminée et continue en chaque point de (E) ; soient a et b deux points de (E) ; joignons les par un arc de courbe (C) contenu dans (E) et défini par la formule $z = \varphi(t) + i\psi(t)$ où la variable réelle t doit croître de α à β ; $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont des fonctions continues de t dans l'intervalle (α, β) telles que les valeurs de z qui correspondent à $t = \alpha$ et à $t = \beta$ soient a et b. Désignons par $g(t)$ et $h(t)$ la partie réelle et le coefficient de i de $f(z)$ pour $z = \varphi(t) + i\psi(t)$. Je suppose que l'intervalle (α, β) puisse être décomposé en un nombre fini d'intervalles partiels tels que, dans l'un quelconque de ces intervalles partiels, les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ aient des dérivées continues et qui ne changent pas de signe. Le point $[\varphi(t), \psi(t)]$ parcourt la courbe de (C) de a à b ou de b à a suivant que t croît de α à β, ou décroît de α à β. On sait ce qu'on entend quand on dit qu'un point de (C) est entre deux autres points de cette courbe. Convenons, en nous plaçant dans le cas de où t croît de α à β, de dire de deux points de

(C) que l'un précède l'autre s'il correspond à une valeur de t plus petite.

Partageons l'arc de courbe (C), qui va de a à b, en n arcs partiels, limités respectivement aux points a, z_1, z_2, ..., b dont chacun précède l'autre ; il revient au même de dire qu'entre α et β on a intercalé $n - 1$ nombres croissants t_1, t_2, ..., t_{n-1} auxquels correspondent les nombres z_1, z_2, ..., z_{n-1}. Considérons la somme

$$S = (z_1 - a) f(\zeta_1) + (z_2 - z_1) f(\zeta_2) + \ldots + (b - z_{n-1}) f(\zeta_n)$$

où ζ_1, ζ_2, ..., ζ_n sont des points de la courbe (C) respectivement intermédiaires aux points a et z_1, z_1 et z_2, ..., z_{n-1} et b, pouvant d'ailleurs coïncider avec l'un ou l'autre des points entre lesquels ils doivent se trouver : on peut dire aussi que les valeurs τ_1, τ_2, ..., τ_n de la variable t, auxquels correspondent les points ζ_1, ζ_2, ..., ζ_n appartiennent respectivement aux intervalles (α, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_{n-1}, β). Je vais établir la proposition suivante.

Il existe un nombre I tel que la différence I — S soit, en valeur absolue, moindre que tel nombre positif ε qu'on voudra, pourvu que la distance de deux points consécutifs dans la suite a, z_1, z_2, ..., b soit moindre qu'un nombre positif convenablement choisi, d'après ε ou, ce qui revient au même, pourvu que les inter- (α, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_{n-1}, β) soient suffisamment petits. C'est ce qu'on exprime brièvement en disant que S a pour limite I quand, les points intermédiaires devenant infiniment nombreux, les distances respectives entre les points consécutifs tendent vers o.

La somme S peut en effet s'écrire

$$\{\varphi(t_1) - \varphi(\alpha) + i[\psi(t_1) - \psi(\alpha)]\} [g(\tau_1) + ih(\tau_1)] + \ldots$$

La partie réelle est égale à

$$[\varphi(t_1) - \varphi(\alpha)]\, g(\tau_1) - [\psi(t_1) - \psi(\alpha)]\, h(\tau_1) + \ldots;$$

on prévoit qu'elle est, lorsque les intervalles (α, t_1), (t_1, t_2), ..., (t_{n-1}, β) sont suffisamment petits, très voisine de la quantité

$$\int_\alpha^\beta g(t)\, \varphi'(t)\, dt - \int_\alpha^\beta h(t)\, \psi'(t)\, dt;$$

je vais montrer qu'elle s'en approche autant qu'on le veut, pourvu que les intervalles partiels deviennent assez petits. Je raisonnerai pour cela sur la somme

$$\Sigma = [\varphi(t_1) - \varphi(\alpha)]\, g(\tau_1) + [\varphi(t_2) - \varphi(t_1)]\, g(\tau_2) \ldots .$$

Supposons que $\varphi'(t)$ soit continue et ne change pas de signe dans l'intervalle (α, β), en sorte que la fonction $\varphi(t)$ soit, par exemple, constamment croissante dans cet intervalle : l'équation $\varphi(t) = u$, définira alors t comme une fonction continue $\chi(t)$, croissante dans l'intervalle $[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)]$. Désignons par $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ et par $v_1, v_2, \ldots v_n$ les valeurs de u qui correspondent aux valeurs $\alpha, t_1, t_2, \ldots, \beta$ et $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ de la variable t; posons enfin $g[\chi(u)] = \gamma(u)$; on pourra écrire

$$\Sigma = \gamma(v_1)(u_1 - u_0) + \gamma(v_2)(u_2 - u_1) + \ldots + \gamma(v_n)(u_n - u_{n-1});$$

sous cette forme, il est clair que Σ est aussi voisin que l'on veut de

$$\int_{u_0}^{u_n} \gamma(u)\, du = \int_{\alpha}^{\beta} g(t)\, \varphi'(t)\, dt,$$

pourvu que les intervalles (u_0, u_1), $(u_1, u_2), \ldots, (u_{n-1}, u_n)$ ou, ce qui revient au même en raison de la continuité, les intervalles (α, t_1), $(t_1, t_2), \ldots, (t_{n-1}, \beta)$ soient suffisamment petits ; il est à peine utile de dire que l'égalité entre les deux intégrales résulte de la règle relative au changement de variable sous le signe $\int$. Si les conditions relatives à la fonction $\varphi'(t)$ ne sont pas vérifiées pour l'intervalle (α, β), on décomposera cet intervalle en intervalles partiels tels qu'ils soient vérifiés par chacun d'eux. Dès lors, comme le même raisonnement s'appplique évidemment aux autres parties de S, la proposition est démontrée et l'on voit en outre que l'on a

$$\mathrm{I} = \int_{\alpha}^{\beta} [g(t)\, \varphi'(t) - h(t)\, \psi'(t)]\, dt$$
$$+ i \int_{\alpha}^{\beta} [g(t)\, \psi'(t) + h(t)\, \varphi'(t)]\, dt.$$

On emploie, pour représenter la quantité I, les symboles

$$\int_a^b f(z)\, dz, \quad \int_{\mathrm{C}} f(z)\, dz;$$

le second est destiné à rappeler le rôle que joue la courbe (C). La première notation est toute pareille à celle des intégrales définies dans la théorie des fonctions d'une variable réelle ; mais il ne faut pas oublier qu'elle n'a de sens que si l'on a défini la courbe (C) qui relie le point a au point b : on dit que l'intégrale est prise le long de cette courbe de a à b; on la qualifie souvent *d'intégrale curviligne*; la courbe (C), qui va de a à b est le *chemin d'intégration*. Lorsque ce chemin se réduit au vecteur qui va de a à b, l'intégrale est dite *rectiligne*. Les intégrales définies de la théorie des variables réelles peuvent être regardées comme des intégrales rectilignes prises le long d'un vecteur situé sur l'axe réel. A ce même type peuvent être rattachées les expressions telles que

$$\int_\alpha^\beta F(t)\, dt$$

où α, β sont des nombres réels et où

$$F(t) = \Phi(t) + i\Psi(t)$$

en une fonction imaginaire de la variable réelle t et où l'intégrale définie a, par définition, la même signification que

$$\int_\alpha^\beta \Phi(t)\, dt + i \int_\alpha^\beta \Psi(t)\, dt,$$

les intégrales définies ayant le sens de la théorie des fonctions réelles de variables réelles. C'est à ce type qu'appartient l'expression même de I.

Si l'on considère l'intégrale

$$\int_b^a f(z)\, dz$$

prise le long de la même courbe (C), mais parcourue de b à a, c'est-à-dire la limite, sous des conditions que l'on a précisées plus haut, de la somme

$$(z_{n-1} - b) f(\zeta_n) + (z_{n-2} - z_{n-1}) f(\zeta_{n-1}) + \ldots + (a - z_1) f(\zeta_1),$$

qui est égale à $-\Sigma$, en reprenant les notations antérieures, il est clair que l'on aura

$$\int_b^a f(z)\, dz = -\int_a^b f(z)\, dz.$$

Plus généralement, on peut écrire

$$\int_a^b f(z)\,dz + \int_b^c f(z)\,dz + \int_c^a f(z)\,dz = 0,$$

en entendant que a, b, c sont trois points sur une même courbe, correspondant aux valeurs α, β, γ du paramètre t qui définit chaque point de la courbe, et que les trois intégrales correspondent aux valeurs de t qui vont de α à β, de β à γ, de γ à α.

384. — La proposition qui suit est une extension évidente du premier théorème de la moyenne :

Soit, en conservant les notations du précédent numéro, M la plus grande valeur de $|f(z)|$ quand z est un point de la courbe (C) qui va de a à b. On a évidemment

$$S \leqq M(|z_1 - a| + |z_2 - z_1| + \ldots + |b - z_{n-1}|) \leqq M\sigma$$

en désignant par σ la longueur de la courbe (C). On en conclut

$$\left|\int_a^b f(z)\,dz\right| \leqq M\sigma.$$

Cette inégalité subsiste *a fortiori* si M est la borne supérieure de $f(z)$ dans l'ensemble (E), ou un nombre plus grand.

385. — On a souvent à considérer des intégrales $\int g(z)\,dz$ prises le long d'une courbe fermée simple : dans le présent numéro, lorsqu'il sera question d'une pareille intégrale, il devra être entendu que la courbe est parcourue dans le sens direct, et c'est à ce sens de parcours que se rapporte l'intégrale.

Le lecteur est prié de se reporter aux n°s **310** et **313** ; seulement les liens du type (A) que l'on considérait alors devront maintenant être des courbes simples, au sens que l'on a donné à ce mot.

Soit (F) une courbe fermée simple et (C) le continuum intérieur; je suppose la fonction $g(z)$ continue dans le domaine $(C + F)$. Décomposons ce domaine en deux autres $(C_1 + F_1)$, $(C_2 + F_2)$ par une courbe simple qui joint deux points K_0, K_1 de (F) et qui, sauf ces deux points, est intérieure à (C) : (C_1) et (C_2) sont les continuums intérieurs aux courbes (F_1), (F_2); on aura

$$\int_{(F)} g(z)\,dz = \int_{(F_1)} g(z)\,dz + \int_{(F_2)} g(z)\,dz,$$

puisque, lorsqu'on parcourt (F_1) et (F_2) dans le sens direct on se trouve parcourir (F) dans le sens direct et, en outre, la courbe qui joint les deux points K_0 et K_1 deux fois, une fois dans un sens, une fois dans le sens opposé, en sorte que les parties des deux intégrales du second membre qui correspondent à cette courbe se détruisent manifestement.

Plus généralement, en procédant par dichotomie, on peut décomposer le domaine $(C) + (F)$ en m domaines $(c_1) + (f_1)$, $(c_2) + (f_2)$, ..., $(c_m) + (f_m)$, où (c_1), (c_2), ..., (c_m) sont les continuums intérieurs aux courbes simples (f_1), (f_2), ..., (f_m); on a alors

$$\int_{(F)} g(z)\,dz = \int_{(f_1)} g(z)\,dz + \int_{(f_2)} g(z)\,dz + \ldots + \int_{(f_m)} g(z)\,dz.$$

Le lecteur ne peut manquer de reconnaître que ce qu'on a dit au n° **313** de l'ordre d'un point, par rapport à (F), (f_1), ..., (f_m) s'applique maintenant aux intégrales.

La notion d'intégrale prise entre des limites imaginaires et les théorèmes fondamentaux qui s'y rapportent sont dûs à Cauchy. Jusqu'ici, on n'a supposé que la continuité sur la fonction qui figure sous le signe $\int$; c'est en particularisant la nature de cette fonction, en supposant qu'elle a une dérivée, qu'on parviendra aux résultats les plus intéressants.

386. — Reprenons les notations du n° **383**. La valeur de l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\,dz$$

prise le long de la courbe (C) qui joint les deux points a, b, et qui est contenue dans l'ensemble (E), où la fonction $f(z)$ est continue, dépend en général de la courbe (C); on montrera bientôt que, lorsque la fonction $f(z)$ a une dérivée dans l'ensemble (E) et sous d'autres conditions qui seront précisées, cette intégrale ne dépend que des points limites a et b. Pour le moment, je veux me borner à démontrer que, dans le cas où la fonction $f(z)$ est, pour tous les points de (E), la dérivée de la fonction $F(z)$, continue en tout point de (E) comme $f(z)$, on a

$$\int_a^b f(z) = F(b) - F(a).$$

Si l'on pose en effet, comme au n° **380**,

$$F[\varphi(t) + i\psi(t)] = \Phi(t) + i\Psi(t),$$

on voit, en raison de la formule du n° **383**

$$\int_a^b f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta [g(t)\varphi'(t) - h(t)\psi'(t)]\,dt + i\int_\alpha^\beta [g(t)\psi'(t) + h(t)\varphi'(t)]\,dt$$

et des formules, établies au n° **380**,

$$\Phi'(t) = g(t)\,\varphi'(t) - h(t)\,\psi'(t),$$
$$\Psi'(t) = h(t)\,\varphi'(t) + g(t)\,\psi'(t),$$

que l'on a

$$\int_a^b f(z)dz = \int_\alpha^\beta \Phi'(t)dt + i\int_\alpha^\beta \Psi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) + i[\Psi(\beta) - \Psi(\alpha)]$$
$$= F(b) - F(a).$$

Dans ces conditions, l'intégrale ne dépend évidemment que des points a, b ; elle est nulle en particulier si, les points a, b coïncidant, la courbe (C) est fermée.

Réciproquement, si la fonction $f(z)$ est continue en tout point d'un continuum (E) et si, quels que soient les points a, z de ce continuum, l'intégrale curviligne

$$\int_a^z f(z)\,dz$$

ne dépend pas de la courbe (C) qui relie le point a au point b [sans sortir de (E)], cette intégrale définira dans l'ensemble une fonction de z dont la dérivée, en chaque point z du continuum, sera égale à $f(z)$.

Considérons en effet un point z_0 du continuum ; en vertu de la continuité, on peut faire correspondre au nombre positif ε, si petit qu'il soit, un nombre positif η tel, d'une part, que tous les points z qui satisfont à la condition $|z - z_0| < \eta$ appartiennent au continuum et, d'autre part, que l'on ait, sous cette dernière condition,

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Soit maintenant z_1 un point qui satisfait à la condition $|z_1 - z_0| < \eta$; il faut montrer que l'on a

$$\lim_{z_1 = z_0} \frac{\int_a^{z_1} f(z)\,dz - \int_a^{z_0} f(z)\,dz}{z_1 - z_0} = f(z) ;$$

les intégrales curvilignes sont définies au moyen de courbes quelconques situées dans le continuum et reliant le point a aux points z_0 et z_1 ; puisque, par hypothèse, ces intégrales ne dépendent pas de ces courbes, rien n'empêche de supposer que la courbe qui relie a à z_1 est formée, d'une part, de la courbe qui relie a à z_0 et, d'autre part, du vecteur qui va de z_0 à z_1, lequel est entièrement contenu dans le continuum ; le numérateur de la fraction dont il faut obtenir la limite est alors égal à l'intégrale

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz,$$

prise le long du vecteur considéré ; celle-ci peut s'écrire

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z_0)\,dz + \int_{z_0}^{z_1} [f(z) - f(z_0)]\,dz,$$

la première intégrale est égale à $(z_1 - z_0) f(z_0)$; quant à la seconde elle est moindre en valeur absolue que $|z_1 - z_0|\,\varepsilon$; on a donc

$$\left| \frac{\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz}{z_1 - z_0} - f(z_0) \right| < \varepsilon$$

sous la condition $|z_1 - z_0| < \eta$; la proposition énoncée est démontrée.

Le théorème dont on vient d'établir la réciproque, permet d'obtenir sans difficulté la valeur de l'intégrale curviligne

$$\int_a^b f(z)\,dz$$

quand on connaît une fonction primitive $F(z)$ de $f(z)$; mais il ne faut pas oublier que la courbe d'intégration doit appartenir à l'ensemble (E).

387. — Il n'y a aucune difficulté si la fonction $f(z)$ est une fonction entière, transcendante ou non ; il en sera de même de la fonction $F(z)$. Il n'y aura pas non plus de difficulté si la fonction $F(z)$ [et par conséquent la fonction $f(z)$] est une fonction méromorphe ; la courbe qui va de a à b est seulement assujettie à ne passer par aucun des pôles de la fonction $f(z)$, qui sont aussi les pôles de la fonction $F(z)$; ainsi on pourra écrire

$$\int_a^b \frac{dz}{(z_0-z)^2} = \frac{1}{z_0-b} - \frac{1}{z_0-a},$$

$$\int_a^b \frac{dz}{\cos^2 z} = \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a,$$

pourvu que la courbe d'intégration ne passe pas, dans le premier cas, par le point z_0 et, dans le second, par un des points $(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$.

Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_a^b \frac{dz}{z}.$$

Il faut, tout d'abord, que la courbe d'intégration ne passe pas par le point o. Si, maintenant, cette courbe est intérieure à un domaine simple, ne contenant pas le point o, où l'on a défini $\log z$ comme une fonction continue de z, on aura

$$\int_a^b \frac{dz}{z} = \log b - \log a.$$

La partie réelle du second membre est le logarithme naturel du rapport $\left|\frac{b}{a}\right|$; le coefficient de i est l'angle dont le premier côté va du point o au point a, dont le second côté va du point o au point b, angle défini au moyen d'un lien qui va de a à b sans sortir du domaine.

On peut aussi se servir de la définition du logarithme principa de z au moyen de la coupure qui va sur l'axe négatif, de o à $-\infty$. On suppose essentiellement que la courbe d'intégration ne passe pas par le point o ; si, en outre, elle ne traverse pas la coupure, on aura

$$\int_a^b \frac{dz}{z} = \lg b - \lg a.$$

Supposons maintenant que la courbe d'intégration traverse la coupure une seule fois, par exemple de bas en haut, comme dans la figure : désignons par m, m' les deux points, confondus en

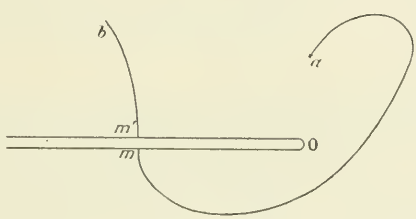

Fig. 41.

réalité, situés l'un sur le bord inférieur, l'autre sur le bord supérieur où la courbe traverse la coupure ; on pourra écrire

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{dz}{z} &= \int_a^m \frac{dz}{z} + \int_{m'}^b \frac{dz}{z} \\ &= \lg m - \lg a + \lg b - \lg m' \\ &= \lg b - \lg a - 2\pi i,\end{aligned}$$

ainsi qu'il résulte des explications données au n° **366** ; si la coupure était traversée une seule fois, de haut en bas, on aurait au contraire

$$\int_a^b \frac{dz}{z} = \lg b - \lg a + 2\pi i ;$$

d'une façon générale, si le chemin d'intégration traverse la coupure n fois de bas en haut et p fois de haut en bas, on aura

$$\int_a^b \frac{dz}{z} = \lg b - \lg a + 2(p-n)\pi i\,;$$

on voit que toutes les valeurs que peut acquérir le premier membre diffèrent entre elles de multiples de $2\pi i$.

En particulier, on aura

$$\int_1^x \frac{dz}{z} = \lg x + 2m\pi i.$$

m étant un nombre entier dont la valeur dépend du nombre de fois que le chemin d'intégration traverse la coupure : m est nul quand le chemin ne traverse pas la coupure.

Considérons encore l'intégrale

$$\int_{(C)} \frac{dz}{z}$$

prise le long d'une courbe fermée simple (C). Cette intégrale sera nulle si le point o est extérieur à la courbe (C) ; elle sera au contraire égale à $2\pi i$ ou à $-2\pi i$ suivant que la courbe (C), regardée comme le contour de la région du plan qui lui est intérieur, est parcourue dans le sens direct ou dans le sens indirect. Ces résultats que le lecteur reconnaîtra sans peine, dans toute leur généralité, en se reportant à ce qu'on a dit sur la définition du logarithme au moyen d'un angle, apparaissent immédiatement, sur la figure, lorsque la courbe (C) ne traverse pas la coupure, ou la traverse une fois, le point o lui étant intérieur.

Le cas d'une intégrale de la forme

$$\int \frac{dz}{z-\alpha}$$

se ramène au précédent par un changement de variable insignifiant ; on n'aura pas de peine à calculer la valeur de cette intégrale le long d'un chemin donné quelconque ne passant pas par le pôle α.

La méthode de décomposition en fractions simples permettra ensuite de calculer la valeur d'une intégrale du type

$$\int_a^b R(z)dz$$

où $R(z)$ est une fonction rationnnelle et où le chemin d'intégration ne passe par aucun des pôles de cette fonction.

388. — Cette méthode s'appliquera en particulier à l'intégrale

$$\int_a^b \frac{dz}{1+z^2};$$

mais on peut aussi se servir de la fonction arc tg z telle qu'on l'a définie (n° **371**) au moyen de deux coupures allant sur l'axe imaginaire, l'une du point i à l'infini vers le haut, l'autre du point $-i$ à l'infini vers le bas. Je rappelle que la partie réelle de cette fonction est toujours comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$.

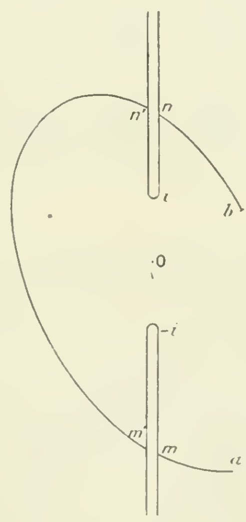

Fig. 46.

Si le chemin d'intégration qui, bien entendu, ne doit jamais passer ni par le point i ni par le point $-i$, ne traverse aucune des coupures, on aura

$$\int_a^b \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tg } b - \text{arc tg } a.$$

Supposons que le chemin d'intégration, par exemple, traverse de droite à gauche, de m vers m', la coupure du bas, puis de gauche à droite, de n' vers n, la coupure du haut ; les points m, m' d'autre part, n' et n de l'autre ne sont distincts que parce qu'ils appartiennent à des bords opposés ; on aura

$$\int_a^b \frac{dz}{1+z^2} = \int_a^m + \int_{m'}^{n'} + \int_n^b$$

$$= \text{arc tg } m - \text{arc tg } a + \text{arc tg } n' - \text{arc tg } m' + \text{arc tg } b - \text{arc tg } n$$

et, d'ailleurs,

$$\text{arc tg } m - \text{arc tg } m' = \pi, \qquad \text{arc tg } n' - \text{arc tg } n = -\pi\,;$$

on a donc finalement

$$\int_a^b \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tg } b - \text{arc tg } a.$$

D'une façon générale, on aura

$$\int_0^x \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tg } x + n\pi,$$

n étant un entier qui représente la différence entre le nombre de fois où les coupures sont traversées de droite à gauche et le nombre de fois où elles sont traversées de gauche à droite. Bien entendu le chemin d'intégration ne doit passer ni par le point i, ni par le point $-i$.

389. — Considérons maintenant l'intégrale

$$\int_a^b \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

où le chemin d'intégration ne doit passer ni par le point 1 ni par le point -1. Cet exemple diffère des précédents en ce que la valeur de la quantité $\sqrt{1-z^2}$ qui figure sous le signe $\int$ a besoin d'être définie pour que l'intégrale ait un sens : on la définit au moyen du chemin d'intégration ; on le fait en attribuant à la fonction $\sqrt{1-z^2}$ une valeur déterminée en un des points du chemin d'intégration, à l'origine a de ce chemin, par exemple, et en lui imposant la condition d'être continue le long du chemin. Pour éviter toute confusion je représenterai par $(\sqrt{1-z^2})$ la détermination du radical ainsi précisée et l'intégrale définie par

$$\int_a^b \frac{dz}{(\sqrt{1-z^2})}.$$

Considérons comme aux nos **341** et **372** les deux coupures qui vont, le long de l'axe réel de 1 à $+\infty$ et de -1 à $-\infty$ et adoptons pour $\sqrt{1-a^2}$ la valeur de la racine carrée pour laquelle la partie réelle est positive, si le point a n'est pas sur une coupure et, si a est sur le bord de l'une des coupures, la valeur précisée d'après les règles du n° **341**. Les fonctions $(\sqrt{1-z^2})$, $\arc \sin z$ ont été définies aux n^{os} **341**, **372** dans tout le plan et sur les bords des coupures, à l'exception, pour la seconde, des points $+1$ et -1; elles sont continues dans le plan coupé, au sens qui a été expliqué; la première est continue et, au point a prend la valeur prescrite pour $\sqrt{1-a^2}$; la dérivée de la seconde est $\dfrac{1}{(\sqrt{1-z^2})}$, où $(\sqrt{1-z^2})$ a la signification que l'on a dite. Si, par conséquent, le chemin d'intégration ne traverse pas de coupure, on a tout le long du chemin d'intégration $(\sqrt{1-z^2}) = \sqrt{1-z^2}$ et, par suite,

$$\int_b^a \frac{dz}{(\sqrt{1-z^2})} = \arc \sin b - \arc \sin a.$$

Supposons maintenant que le chemin d'intégration traverse, par exemple, la coupure de gauche de bas en haut, de m vers m'; les deux points m et m' ne sont distincts que parce qu'ils appartiennent à des bords distincts; le long du chemin d'intégration on a, de a à m,

$$(\sqrt{1-z^2}) = \sqrt{1-z^2},$$

mais de m à b on aura (**341**)

$$(\sqrt{1-z^2}) = -\sqrt{1-z^2};$$

on aura donc

$$\int_a^b \frac{dz}{(\sqrt{1-z^2})} = \int_a^m \frac{dz}{(\sqrt{1-z^2})} + \int_{m'}^b \frac{dz}{(\sqrt{1-z^2})}$$

$$= \int_a^m \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - \int_{m'}^b \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \arc \sin m - \arc \sin a - \arc \sin b + \arc \sin m';$$

mais on a

$$\arc \sin m + \arc \sin m' = -\pi$$

on aura donc finalement

$$\int_a^b \frac{dz}{(\sqrt{1-z^2})} = -\pi - \arc \sin a - \arc \sin b.$$

D'une façon plus générale, si le chemin d'intégration traverse une coupure et une seule, de haut en bas ou de bas en haut, on aura

$$\int_a^b \frac{dz}{(\sqrt{1-z^2})} = \pm \pi - \text{arc sin } a - \text{arc sin } b,$$

en prenant le signe + ou le signe — suivant que la coupure traversée est la coupure de droite ou la coupure de gauche.

Supposons maintenant qu'il y ait deux traversées et deux seulement : si l'on traverse deux fois la même coupure on aura

$$\int_a^b \frac{dz}{(\sqrt{1-z^2})} = \text{arc sin } b - \text{arc sin } a\,;$$

si l'on traverse deux coupures différentes on aura

$$\int_a^b \frac{dz}{(\sqrt{1-z^2})} = \text{arc sin } b - \text{arc sin } a \pm 2\pi,$$

en prenant le signe + ou le signe — suivant que la première coupure traversée est la coupure de droite ou celle de gauche.

Le lecteur n'aura aucune peine à reconnaître quels chemins d'intégration il convient d'adopter pour l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dz}{(\sqrt{1-z^2})},$$

où l'on suppose que $(\sqrt{1-z^2})$ est égal à 1 pour $z = 0$, afin d'obtenir les diverses valeurs comprises dans les formules

$$(2n+1)\pi - \text{arc sin } x, \qquad 2n\pi + \text{arc sin } x,$$

valeurs qui sont les diverses solutions de l'équation en y

$$\sin y = x.$$

390. — Considérons un ensemble parfait (E) ; supposons que les fonctions $f_n(z)$, ($n = 1, 2, 3, \ldots$) soient continues dans cet ensemble, que la série

$$(f) \qquad f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots$$

y soit uniformément convergente et que la courbe (C) définie par les formules

$$z = \varphi(t) + i\psi(t), \qquad \alpha \leqq t \leqq \beta,$$

y soit contenue; je désignerai par $F(z)$ la somme de la série, par $S_n(z)$ la somme de ses n premiers termes et par $R_n(z)$ le reste correspondant.

Les fonctions $f_n(z)$, $F(z)$, $R_n(z)$ deviennent des fonctions de la variable réelle t, continues dans l'intervalle (α, β) quand on y remplace z par $\varphi(t) + i\psi(t)$.

En désignant par a et b les points de la courbe (C) qui correspondent aux valeurs α, β du paramètre, et en supposant toutes les intégrales prises le long de la courbe (C), on a

$$\int_a^b F(z)\,dz = \int_a^b f_1(z)\,dz + \int_a^b f_2(z) + \ldots + \int_a^b f_n(z) + \ldots.$$

Soit en effet ε un nombre positif quelconque; à ce nombre correspond un entier p tel que l'on ait $|R_n(z)| < \varepsilon$, pour tous les points de (E) et, par conséquent pour tous les points de (C), sous la condition $n \geqq p$. On a d'ailleurs

$$\int_a^b F(z)\,dz = \int_a^b S_n(z)\,dz + \int_a^b R_n(z)\,dz,$$

et par conséquent, sous la condition $n \geqq p$,

$$\left| \int_a^b F(z)\,dz - \int_a^b f_1(z)\,dz - \int_a^b f_2(z)\,dz - \ldots - \int_a^b f_n(z)\,dz \right|$$
$$= \left| \int_a^b R_n(z)\,dz \right| \leqq \varepsilon\sigma,$$

en désignant par σ la longueur de la courbe (C). La proposition est démontrée, puisque ε peut être pris aussi petit qu'on le veut.

Un cas qui se présente assez fréquemment est celui où il y a une série convergente à termes positifs ou nuls

$$(\alpha) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

tels que l'on ait, pour toutes les valeurs naturelles de n et pour tous les points de E,

$$|f_n(z)| \leqq \alpha_n,$$

la série (f) est alors absolument et uniformément convergente et son reste est en valeur absolue, moindre que le reste correspondant de la série (α) (nº **183**).

Supposons par exemple que la série entière en z

$$F(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

soit absolument convergente pour $z = A$, A étant un nombre positif qui sera inférieur ou égal au rayon de convergence de la série : il en sera de même de la série

$$\frac{F(z)}{z^{n+1}} = \frac{a_0}{z^{n+1}} + \frac{a_1}{z^n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z^2} + \frac{a_n}{z}$$
$$+ a_{n+1} + a_{n+2} z + \ldots$$

Prenons pour l'ensemble (E) et pour la courbe (C) le cercle de centre o et de rayon A ; on supposera ce cercle décrit dans le sens direct. Le théorème relatif à l'intégration s'applique évidemment, en vertu de la remarque qu'on vient de faire ; les intégrales des différents termes du second membre, prises le long du cercle (C) sont toutes nulles, sauf l'intégrale

$$\int_{(C)} \frac{a_n}{z}\, dz$$

qui est égal à $2\pi i a_n$, comme on l'a vu au nº **385**. On a donc

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(C)} \frac{F(z)}{z^{n+1}}\, dz. \tag{1}$$

Soit M la borne supérieure de la valeur absolue de $F(z)$ pour les points z situés sur le cercle C, ou un nombre plus grand ; la valeur absolue de $\frac{F(z)}{z^{n+1}}$ sera inférieure ou égale à $\frac{M}{A^{n+1}}$, la longueur de cercle est $2\pi A$; on a donc

$$|a_n| \leqq \frac{M}{A^n}. \tag{2}$$

Il convient de rapprocher cette importante inégalité de la proposition, due à Abel, en vertu de laquelle la série F(z) est convergente pour $|z| < A'$ si l'on a, quelque soit n,

$$|a_n| \leqq \frac{M'}{A'^n},$$

en désignant par A' et M' des nombres positifs fixes (n° **342**).

L'inégalité (2) met en évidence la proposition suivante :

Une fonction entière (transcendante ou non) ne peut être bornée dans tout le plan sans se réduire à une constante :

Supposons en effet que la série F(z) soit convergente, quel que soit z : on pourra alors prendre A aussi grand qu'on le veut ; si la somme F(z) de cette série devait rester, quel que fût z, inférieure en valeur absolue à un nombre positif fixe, on pourrait prendre ce nombre pour M et l'inégalité (2) montrerait que $|a_n|$, lorsque n est plus grand que o, peut être supposé aussi petit qu'on veut. Tous les coefficients de la série (f) sont donc nuls, sauf a_0.

391. — Il est bien clair, d'après la définition du n° **383**, qu'une intégrale

$$\int_a^b f(z)\, dz$$

dépend en général du chemin d'intégration ; toutefois on a vu, dès le numéro suivant, que si la fonction $f(z)$ est la dérivée d'une fonction F(z), dans un continuum (E) complété ou non par sa frontière auquel appartient le chemin d'intégration, on a

$$\int_a^b f(z)\, dz = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a),$$

en sorte que le premier membre est indépendant du chemin d'intégration, pourvu que ce chemin reste dans (E). Dans les exemples traités ensuite et qui concernent les intégrales

$$\int \frac{dz}{z}, \int \frac{dz}{1+z^2}, \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

on remarque que l'ensemble (E) peut être constitué par un domaine simple ne contenant pas, suivant les cas, le point o, l'un ou l'autre des points $\pm i$, l'un ou l'autre des points ± 1.

On peut se demander si, une fonction $f(z)$ étant donnée, on peut lui attacher ainsi un ensemble (E) tel que l'intégrale

$$\int_a^b f(z)\, dz$$

ne dépende pas du chemin d'intégration qui relie a à b.

Considérons deux chemins allant de a à b tels que les valeurs correspondantes de l'intégrale soient égales ; il est clair que la valeur de l'intégrale prise le long du premier chemin de a à b, augmentée de la valeur de l'intégrale prise le long du second chemin, parcouru de b à a, donnera un résultat nul ; réciproquement, s'il en est ainsi, les deux intégrales prises de a à b sont égales ; le problème posé revient donc à la détermination d'un ensemble (E) telle que l'intégrale $\int f(z)\, dz$ prise le long d'une courbe fermée appartenant à (E) soit toujours nulle. Un théorème capital, dû à Cauchy, répond à cette question. Il fera l'objet des nos **392**, **393**, **394**.

392. — Soient (D) un domaine simple et (C) la courbe fermée simple qui en est la frontière. Soit $f(z)$ une fonction de z admettant une dérivée $f'(z)$ pour chaque point z de (D). L'intégrale

$$\int_{(C)} f(z)\, dz,$$

qui est prise le long de la courbe (C), est nulle.

Sauf avis contraire, dans le présent numéro et les suivants, je supposerai, sur les intégrales de cette sorte, que les courbes fermées simples auxquelles elles se rapportent sont décrites dans le sens direct.

Soit a un point quelconque de (D) ; la fonction

$$\frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

définie, tant que z est un point de D, différant de a, a pour limite $f'(a)$ quand z s'aproche de a en restant dans (D) ;

Considérons la fonction

$$(1) \qquad \theta(z, a) = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - f'(a);$$

si nous lui attribuons la valeur o pour $z = a$, elle sera définie pour toutes les valeurs de z et de a qui appartiennent à (D); considérée comme une fonction de z, elle est continue dans ce domaine.

On a d'ailleurs

$$f(z) = f(a) + (z - a) f'(a) + \theta(z, a)(z - a)$$

et, par suite,

$$\int_{C} f(z)\,dz = \int_{C} [f(a) + (z - a) f'(a)]\,dz + \int_{(C)} \theta(z, a)(z - a)\,dz;$$

la première intégrale du second membre est évidemment nulle, puisque c'est la différence des valeurs que prend le polynome en z

$$(z - a) f(a) + \frac{(z - a)^2}{2} f'(a),$$

pour deux valeurs égales de z; tout revient donc à l'étude de l'intégrale

$$\int_{C} \theta(z, a)(z - a)\,dz;$$

on pourra profiter, pour cela, de l'indétermination du point a qui est seulement assujetti à faire partie du domaine (D). Observons en passant que la valeur absolue du produit $\theta(z, a)(z - a)$ qui figure sous la signe $\int$ peut être petite en raison de la petitesse en valeur absolue soit du premier facteur, soit du second et que, si tous les points z de (C) sont très voisins de a, en sorte que $z - a$ soit très petit, en valeur absolue, pour tous ces points, il en sera de même de $\theta(z, a)$, puisque la fonction $\theta(z, a)$ est continue pour $z = a$ et que l'on a $\theta(a, a) = 0$.

393. — Pour établir que l'intégrale

$$\int_C f(z)\,dz$$

est nulle, le procédé consiste à décomposer ce domaine (D), dont la courbe (C) est la frontière, en deux ou plusieurs autres domaines simples ; l'intégrale proposée est la somme d'intégrales analogues relatives aux frontières du domaine partiel (n° **384**). Cela permet d'abord de simplifier un peu le problème : Si l'on parvient à une décomposition dans laquelle les intégrales relatives aux contours du domaine partiel soient nulles, on aura évidemment démontré que l'intégrale proposée est nulle.

On a vu au n° **314** comment en introduisant des segments de droites parallèles à l'axe des ordonnées, on pouvait effectuer une série de décompositions qui finissait par aboutir à ces figures que l'on a appelées alors des trapèzes ; je conserverai cette dénomination ; il est bien clair d'après cela que la proposition à démontrer sera effectivement démontrée si on l'établit quand le domaine (D) est un trapèze. Ce trapèze peut être décomposé lui-même en trapèzes soit par des parallèles à l'axe des ordonnées, soit par des parallèles à l'axe des abscisses. Le lecteur ne peut manquer de reconnaître qu'il suffit de démontrer la proposition dans le cas d'un trapèze tel que la figure AA'B'B où les deux côtés AA', BB' sont parallèles à l'axe des ordonnées, où le côté AB est parallèle à l'axe des abscisses, où enfin le côté A'B' est un arc élémentaire (n° **320**) dans lequel l'ordonnée reste constante, ou bien varie toujours dans le même sens quand l'abscisse augmente ; je m'occuperai d'abord du premier cas, dans lequel le domaine (D) est un rectangle (R) dont les côtés sont parallèles aux axes.

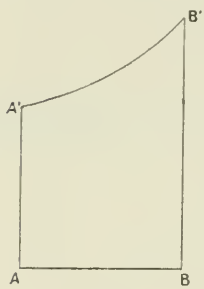

Fig. 49.

Le mode de démonstration va consister à décomposer le rectangle (R) en rectangles plus petits par des parallèles aux axes et de démontrer que la somme des intégrales $\int f(z)\,dz$ effectuée pour le contour de chacun des petits rectangles, somme qui est égale à l'intégrale prise le long du contour de (R), peut être rendue aussi petite qu'on le veut. D'ailleurs aux intégrales $\int f(z)\,dz$, pour chaque rectangle partiel, on substituera (n° 392) une intégrale du type

$$\int \theta(z, a)(z - a)\,dz,$$

où a est un point appartenant au rectangle partiel, choisi afin de rendre très petite l'intégrale considérée.

On va montrer en effet que, si l'on se donne un nombre positif ε arbitrairement petit, on peut décomposer (R) en rectangles partiels de sorte qu'il y ait, pour chacun d'eux, un point a lui appartenant et tel qu'on ait pour chaque point z du contour,

$$|\theta(z, a)| \leqq \varepsilon.$$

Pour abréger le langage, je dirai d'un rectangle (r) dont tous les points appartiennent à (R) qu'il est du type $S(\varepsilon)$ s'il y a un point a appartenant à ce rectangle (r) et tel que l'inégalité précédente soit vérifiée pour tous les points de son contour; s'il n'existe pas de tel point a, je dirai au contraire du rectangle (r) qu'il est du type $T(\varepsilon)$: dans ce dernier cas, quel que soit le point a appartenant au rectangle (r), il y a, sur le contour de ce rectangle, au moins un point z pour lequel on a $|\theta(z, a)| > \varepsilon$.

Si (R) n'est pas lui-même du type $S(\varepsilon)$, décomposons-le en quatre rectangles par des parallèles à ses côtés menés par le centre. — Dans la suite, quand on parlera de la décomposition d'un rectangle en quatre, on supposera la décomposition effectuée de cette même façon. — Cette première décomposition effectuée, si, parmi les rectangles partiels, il y en a qui soient du type $S(\varepsilon)$, on les laissera de côté, pour n'y plus toucher : les autres rectangles partiels sont du type $T(\varepsilon)$; désignons par (R_1) l'ensemble des points qui leur appartiennent et supposons qu'on décompose chacun d'eux en quatre. Si, parmi les nouveaux rectangles partiels, il y en a qui soient du type $S(\varepsilon)$, on les laissera de côté, pour n'y plus toucher; les autres nouveaux rectangles partiels sont du type $T(\varepsilon)$: désignons par (R_2) l'ensemble des points qui leur appartiennent et supposons qu'on décompose chacun d'eux en quatre. Si, parmi les nouveaux rectangles partiels, il y en a qui soient du type $S(\varepsilon)$, on les laissera de côté, pour n'y plus toucher ; les autres nouveaux rectangles partiels sont du type T(ε) ; désignons par R_3 l'ensemble des points qui leur appartiennent, etc...

L'ensemble parfait R_1 est formé par la réunion de rectangles égaux, dont les côtés sont les moitiés des côtés du rectangle R.
... L'ensemble parfait R_n est formé par la réunion de rectangles dont les côtés s'obtiennent en divisant par 2^n les côtés du rectangle R. Chaque point de R_n appartient à l'un de ces petits rectangles.

Mon but est d'établir que les opérations se terminent, qu'au bout d'un nombre fini de décompositions, il ne restera plus que des rectangles du type S(ε), à savoir ces rectangles, en général inégaux, qu'on a laissés de côté à chaque opération ; il faut prouver que leur ensemble finit par recouvrir R tout entier.

Supposons, en effet, pour parvenir à une contradiction, que les opérations ne se terminent pas, qu'il y ait toujours des rectangles du type T(ε), quelque loin que l'on pousse les décompositions. Alors la suite d'ensembles parfaits

$$(R), (R_1), (R_2), \ldots, (R_n), \ldots$$

sera infinie : chacun de ces ensembles est contenu dans ceux qui le précèdent : il y a donc (nᵒˢ **156, 283**) au moins un point k qui appartient à tous ces ensembles. Ce point k, d'après ce qu'on vient de dire, appartient à un rectangle (r), du type T(ε), dont les dimensions peuvent être supposées aussi petites qu'on le veut, en sorte que l'on a pour quelque point z du contour de ce rectangle

$$|\theta(z, k)| > \varepsilon ;$$

mais, en vertu de la continuité de la fonction $\theta(z, k)$ au point k, on peut au nombre ε faire correspondre un nombre positif η tel que l'on ait

$$|\theta(z, k)| = |\theta(z, k) - \theta(k, k)| < \varepsilon$$

pourvu que z appartienne à R et que la distance des deux points z et k soit moindre que η : or il y a évidemment contradiction entre les deux inégalités précédentes si les dimensions du rectangle (r) sont assez petites pour que la distance de deux points quelconques de ce rectangle soit moindre que η.

La proposition est donc démontrée [1].

Supposons donc effectuée la décomposition de (R) en m rectangles du type S(ε), comme on l'a expliqué; tous ces rectangles sont semblables et l'on peut, en désignant par p et q les côtés du rectangle (R), représenter par λp, λq les côtés de l'un quelconque (r) des rectangles partiels; on aura, en choisissant, parmi les points qui appartiennent à (r) le point a de manière que l'on ait

$$|\theta(z, a)| \leqq \varepsilon$$

pour tous les points z du contour de (r), et en supposant que l'intégrale soit prise le long de ce contour

$$\left|\int \theta(z, a)(z-a)\,dz\right| \leqq 2\lambda^2\varepsilon\sqrt{p^2+q^2}\,(p+q),$$

puisque $2\lambda(p+q)$ est la longueur du chemin d'intégration et que la plus grande distance de deux points du rectangle est évidemment $\sqrt{p^2+q^2}$; le second membre de l'inégalité précédente, en posant pour abréger,

$$m = \frac{2(p+q)\sqrt{p^2+q^2}}{pq},$$

est manifestement égal au produit par $m\varepsilon$ de l'aire du rectangle (r): la somme des intégrales

$$\int \theta(z, a)(z-a)\,dz$$

relatives aux différents rectangles partiels qui figurent dans la décomposition sera donc moindre, en valeur absolue, que le produit par $m\varepsilon$ de l'aire pq du rectangle (R): on aura donc finalement

$$\left|\int f(z)\,dz\right| \leqq m\varepsilon pq.$$

---

(1) Il n'est peut-être pas inutile d'observer qu'on aurait pu commencer par décomposer le rectangle (R) en rectangles de dimensions aussi petites qu'on voudrait, puis traiter ceux des rectangles partiels qui sont du type T(ε) comme on a fait le rectangle (R). Par conséquent on peut décomposer le rectangle (R) en un nombre fini de rectangles du type S(ε), et de dimensions aussi petites qu'on le veut.

l'intégrale étant prise maintenant le long du contour du rectangle (R) : comme le second membre peut être supposé aussi petit qu'on le veut, on a finalement

$$\int f(z)\, dz = 0.$$

Il reste à démontrer la proposition quand le domaine (D) est un trapèze tel que ABB'A' dans lequel le côté AB est parallèle à l'axe des abscisses et les côtés AA', BB' parallèles à l'axe des ordonnées, dans lequel enfin A'B' est un arc élémentaire de courbe ; je supposerai que, pour cet arc, l'ordonnée croisse en même temps que l'abscisse. En menant par le point le plus bas A' une parallèle à l'axe des ordonnées jusqu'à la rencontre en β avec le côté BB', on décompose le trapèze en un rectangle AA'βB et une sorte de triangle A'B'β ; l'intégrale prise le long du trapèze est égale à la somme de l'intégrale prise le long du rectangle, qui est nulle, et de l'intégrale prise le long du triangle ; tout revient donc à démontrer que cette dernière intégrale est nulle. Pour cela je ferai subir au triangle une opération que je désignerai sous le nom de réduction à deux triangles : elle consiste à mener d'abord par le milieu C du côté A'B une parallèle CC' à l'axe des ordonnées, jusqu'à la courbe, de manière à décomposer le triangle en un triangle plus petit A'CC' et en un trapèze CβB'C', que l'on décompose, comme on a fait pour le trapèze primitif en un rectangle C$\beta\gamma$C' et un triangle C'γB' : l'intégrale prise le long du triangle A'βB' est égale à la somme des intégrales prises le long des triangles A'CC', C'γB' : c'est la substitution de ces deux triangles au triangle A'βB' que je désigne sous le nom de réduction de ce dernier triangle. On procèdera ensuite comme on a fait pour le rectangle. On dira d'un triangle qu'il est du type S(ε) ou du type T(ε) suivant qu'il existera, ou non, un point a intérieur au triangle ou situé sur l'un de ses côtés tel que l'on ait pour tous les points z du contour du triangle

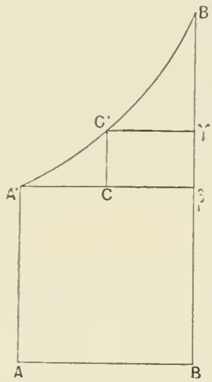

Fig. 50.

$$|\,\theta(z, a)\,| < \varepsilon,$$

et l'on montrera qu'on parvient, au moyen d'un nombre fini de réductions, à une suite de triangles qui sont tous du type $S(\varepsilon)$; pour chacun de ces triangles la distance des points z et a reste inférieure à la distance maximum l de deux points du triangle $A'_1 C B'$; la somme des périmètres des triangles auxquels on aboutit est égale au périmètre L du triangle $A'_1 C B'$; on en conclut que la somme des intégrales

$$\int \theta(z, a)(z-a)\,dz$$

effectuées le long des divers triangles ou, ce qui revient au même, l'intégrale

$$\int f(z)\,dz$$

effectuée le long du trapèze primitif, est inférieure ou égale en valeur absolue à $lL\varepsilon$. Il en résulte qu'elle est nulle. Le théorème de Cauchy est entièrement démontré.

La démonstration précédente, qui est due à M. Goursat, est très intéressante en ce qu'elle ne fait intervenir aucune autre hypothèse relative à la fonction $f(z)$ que l'existence de sa dérivée en tout point du domaine simple (D). Cette hypothèse interviendra donc seule dans les conséquences immédiates du théorème de Cauchy : parmi ces conséquences vont figurer l'existence et la continuité de toutes les dérivées, puis la régularité de la fonction, en tout point *intérieur* au domaine (D) : ces affirmations suffisent à faire prévoir le caractère fondamental du théorème, qui joue vraiment le rôle d'un principe. Avant d'établir ces conséquences, il convient d'exposer une généralisation du théorème, qui est immédiate.

394. — Au lieu d'un domaine simple, considérons un domaine $n+1$ fois connexe que nous continuerons de désigner par (D) : je suppose (n° **312**) qu'il soit l'ensemble des points qui appartiennent à une courbe fermée simple (F), de ceux qui appartiennent à n courbes fermées simples (F′), (F″), …, $[F^{(n)}]$ intérieures à (F), et extérieures deux à deux les unes aux autres, enfin des points extérieurs à ces dernières courbes et intérieurs à (F); désignons par (H) l'ensemble des $n+1$ courbes qui constituent la frontière du domaine ; je rappelle que la frontière (H) est parcourue dans le sens direct quand la courbe (F) est parcourue dans le sens direct et les courbes (F'), (F''), ..., $[F^{(n)}]$ dans le sens indirect.

Soit maintenant $f(z)$ une fonction de la variable z qui admette une dérivée en tout point du domaine (D), l'intégrale

$$\int_{(H)} f(z)\, dz$$

prise le long du contour (H) décrit dans le sens direct, c'est-à-dire la différence entre l'intégrale $\int f(z)\, dz$ prise le long de la courbe (F) décrite dans le sens direct et les sommes des intégrales $\int f(z)\, dz$ prises le long des courbes (F'), (F''), ..., $[F^{(n)}]$ décrites dans le sens direct, est nulle.

Il suffit, pour le voir, de décomposer, comme au n° **312**, le domaine (D) en deux domaines simples au moyen de $n+1$ courbes simples, d'appliquer le théorème précédemment démontré aux contours de ces deux domaines simples et d'ajouter les résultats obtenus ; dans la somme nulle d'intégrales que l'on obtient ainsi, les parties relatives aux $n+1$ courbes simples que l'on a introduites se détruisent et il reste l'intégrale

$$\int_{(H)} f(z)\, dz,$$

qui, par conséquent, est nulle.

395. — Considérons, en conservant les mêmes notations, une fonction $f(z)$ qui admette une dérivée dans le domaine (D), simplement ou plusieurs fois connexe, dont la frontière est (H) ; soit x un point intérieur à ce domaine, on aura

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(H)} \frac{f(z)\, dz}{z - x}, \tag{1}$$

où il est entendu que la frontière (H) doit être décrite dans le sens direct.

Décrivons en effet un cercle (γ) du point x comme centre avec un rayon r assez petit pour que le cercle soit tout entier intérieur à

(D); désignons par D' le domaine obtenu en supprimant de D les points intérieurs à γ : la frontière H' de D' se compose de la frontière H de D et du cercle γ ; il est clair que la fonction $\frac{f(z)}{z-x}$ admet une dérivée

$$\frac{f'(z)(z-x)-f(z)}{(z-x)^2}$$

en tout point de D'; l'intégrale

$$\int_{H'} \frac{f(z)\,dz}{z-x}$$

est donc nulle; cela revient à dire que l'on a

$$(2)\qquad \int_{(\gamma)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \int_{(H)} \frac{f(z)\,dz}{z-x};$$

l'intégrale du premier membre étant relative au cercle (γ) décrit dans le sens direct ; on a d'ailleurs

$$(3)\qquad \int_{(\gamma)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = f(x)\int_{(\gamma)} \frac{dz}{z-x} + \int_{(\gamma)} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\,dz.$$

La première intégrale qui figure dans le second membre est égale à $2\pi i\, f(x)$ (nº **387**) ; quant à la deuxième, sa valeur absolue peut être supposée aussi petite qu'on le voudra, à condition de prendre le rayon r assez petit ; ayant, en effet, d'abord choisi un nombre positif α, on lui fera correspondre un nombre positif α' moindre que la distance du point x à la frontière (H) et tel que l'on ait

$$\left|\frac{f(z)-f(x)}{z-x} - f'(x)\right| < \alpha,$$

sous la condition $|z-x| < \alpha'$, et l'on supposera r inférieur à α' ; on aura alors

$$\left|\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\right| < \alpha + |f'(x)|,$$

et, par suite (nº **384**)

$$\left|\int_{\gamma} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}\,dz\right| < 2\pi r[\alpha + |f'(x)|];$$

or, le second membre peut être supposé aussi petit qu'on le veut ; la seconde intégrale du second membre de l'égalité (3) est donc nulle et l'on a finalement

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-x}\,dz = 2\pi i\, f(x),$$

d'où résulte immédiatement l'égalité (1).

Cette égalité constitue un très puissant instrument de démonstration : on va l'utiliser pour établir d'importants développements en série.

396. — Considérons deux cercles concentriques (c) et (C) dont le centre commun est le point a, dont les rayons sont r et R (R $> r$). Désignons par (D) le domaine, ensemble des points qui appartiennent à l'un ou l'autre des cercles ou qui sont intérieurs au plus grand, extérieurs au plus petit. Soit $f(z)$ une fonction admettant une dérivée en chaque point de ce domaine ; soit enfin x un point intérieur à ce domaine. On aura, par le théorème du numéro précédent,

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \frac{1}{2i\pi}\int_{(c)} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

les deux cercles étant décrits dans le sens direct.

Dans ce qui suit, le point x sera regardé comme fixe. Puisque ce point est intérieur au cercle (C), extérieur au cercle (c), la distance $|z-a|$ du point z au centre a est supérieure ou inférieure à la distance $|x-a|$ suivant que le point z est situé sur le grand cercle ou sur le petit.

On pourra écrire, suivant qu'on est dans un cas ou l'autre,

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{(z-a)-(x-a)} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \cdots,$$

$$\frac{-1}{z-x} = \frac{1}{x-a-(z-a)} = \frac{1}{x-a} + \frac{z-a}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{(z-a)^n}{(x-a)^{n+1}} + \cdots;$$

les séries qui figurent dans les seconds membres, et dont les termes sont des fonctions de z, sont absolument et uniformément convergentes, la première sur le cercle (C), la seconde sur le cercle (c); il en est de même des séries obtenues en multipliant chaque terme par $f(z)$; on peut donc appliquer la règle du n° **390** relative à l'intégration, et écrire, en vertu de la formule (1)

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} 2i\pi f(x) = {}& \int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz + (x-a)\int_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,dz + (x-a)^2\int \frac{f(z)}{(z-a)^3}\,dz + \ldots \\ & + \frac{1}{x-a}\int_c f(z)\,dz + \frac{1}{(x-a)^2}\int_c (z-a) f(z)\,dz + \ldots \end{aligned}\right.$$

Ainsi, sous les conditions énoncées, la fonction $f(x)$ est la somme de deux séries procédant l'une suivant les puissances entières et positives de $x-a$, l'autre suivant les puissances entières et positives de $\dfrac{1}{x-a}$.

397. — Supposons, en conservant les mêmes notations, que la fonction $f(z)$ admette une dérivée en tout point intérieur au cercle (C) ou situé sur ce cercle; la même démonstration, où il n'y a plus lieu de tenir compte du cercle (c), montre que l'on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = {}& \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-a}\,dz + \frac{x-a}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2} + \ldots \\ & + \frac{(x-a)^n}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire que la fonction $f(x)$ est développable en série entière en $x-a$, en d'autres termes qu'elle est régulière au point a; la série est convergente sous la condition $|x-a| < R$.

Au surplus, le développement en série auquel on vient de parvenir peut aussi bien se déduire de la formule (2) du précédent numéro en remarquant que, dans le cas actuel, toutes les intégrales

$$\int_c f(z)\,dz, \qquad \int_c (z-a)\,f(z)\,dz, \qquad \int_{(c)} (z-a)^2 f(z)\,dz, \ \ldots$$

sont nulles.

La fonction $f(x)$ étant régulière au point a admet en ce point des dérivées de tous les ordres, et l'on a

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1} + (x-a)^2\frac{f''(a)}{1\cdot 2} + \ldots;$$

puis, parce qu'une fonction ne peut avoir qu'un développement suivant les puissances de $x - a$,

$$(2)\quad f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C} \frac{f(z)\,dz}{z - a}, \ldots, f^{(n)}(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C} \frac{f(z)\,dz}{(z - a)^{n+1}}.$$

398. — Considérons maintenant une fonction $f(z)$ dont on sait qu'elle admet une dérivée en tout point du continuum (Γ). Si a est un point quelconque du continuum, on pourra prendre pour le cercle (C) n'importe quel cercle de centre a qui soit intérieur au continuum, c'est-à-dire dont le rayon soit moindre que la distance du point a à la frontière : la fonction $f(x)$ est donc régulière en a et le rayon de convergence de la série entière en $x - a$ qui représente cette fonction est au moins égal à la distance du point a à la frontière. La série est convergente dans tout le plan, lorsque le continuum Γ comprend tout le plan. La fonction $f(z)$ est alors entière (transcendante ou non).

Si l'on regarde le second membre de l'égalité (1) du numéro précédent comme un élément de fonction, (n° 360) ; si l'on prolonge cette fonction le long d'un chemin qui soit intérieur à (Γ), on n'obtiendra jamais autre chose que la fonction $f(z)$ elle-même.

La fonction $f(x)$ étant régulière en a, ce nombre a, s'il est une racine de $f(x)$, ne peut être qu'une racine d'un ordre déterminé. Les dérivées de la fonction ne peuvent être toutes nulles en ce point, à moins que la fonction ne se réduise à une constante.

L'ensemble des racines de la fonction $f(x)$ qui appartiennent à (Γ) peut être fini ou infini ; mais s'il est infini, ses points d'accumulation appartiennent à la frontière de (Γ), non à (Γ) ; dans un ensemble clos contenu dans (Γ), il ne peut y avoir qu'un nombre fini de racines de $f(x)$, un nombre fini de pôles de la fonction $\frac{1}{f(x)}$.

En un point a de (Γ) où $f(x)$ ne s'annule pas, la fonction $\frac{1}{f(x)}$ est régulière ; le rayon du cercle de convergence de la série en $x - a$ qui représente cette fonction est au moins égal au plus petit des nombres qui mesurent les distances du point a à la frontière de (Γ) et aux racines de $f(x)$; il est au plus égal à la distance du point a à la racine de $f(x)$ qui est la plus voisine de a, car, pour cette racine, la fonction $\frac{1}{f(x)}$ n'est pas régulière.

Si la fonction $g(x)$ est aussi régulière en tout point de (Γ), les mêmes conclusions s'appliquent évidemment à la fonction $\frac{g(x)}{f(x)}$, lorsqu'il n'y a pas de racines communes à $g(x)$ et à $f(x)$; dans le cas où il y a des racines communes, les modifications à apporter sont évidentes.

399. — Soit (Δ) un domaine simple et (Γ) le continuum intérieur à ce domaine; soit $f(z)$ une fonction admettant une dérivée en tout point de (Δ), et, par conséquent, régulière en tout point de (Γ); l'intégrale

$$\int_a^x f(z)\,dz,$$

où a et x sont des points de (Δ), dont le premier est fixe, et dans laquelle le chemin d'intégration appartient tout entier à (Δ) est une fonction déterminée de x, régulière en tout point de (Γ).

Il faut d'abord montrer que la valeur de l'intégrale ne dépend pas du chemin d'intégration, pourvu que ce chemin, comme on le supposera toujours dans ce qui suit, appartienne à (Δ).

Si l'on considère deux chemins allant de a à x, qui soient des courbes simples et qui n'aient pas de points communs autres que a et x, l'ensemble de ces deux chemins parcourus, l'un de a à x, l'autre de x à a constitue une courbe fermée simple; l'intégrale $\int f(z)\,dz$, prise le long de cette courbe est nulle; il en résulte immédiatement que les deux intégrales prises respectivement le long des deux chemins, de a à x, sont égales.

Si les chemins d'intégration n'ont qu'un nombre fini de points communs, si même ils ont des parties communes, mais en nombre fini, le lecteur ne peut manquer de reconnaître, en décomposant les chemins d'intégration en parties qui vont d'un point commun à un autre, que les intégrales sont encore égales.

Afin de supprimer les difficultés qui subsistent, je supposerai pour définir d'une façon précise la fonction

$$F(x) = \int_a^x f(z)\,dz,$$

que le chemin d'intégration est une ligne brisée simple située tout entière dans (Γ), sauf peut-être les points a et x, s'ils appartenaient à la frontière [1]. Deux pareilles lignes brisées ne peuvent avoir qu'un nombre fini de points communs ou de parties communes, en sorte que les intégrales prises le long de ces deux lignes brisées sont certainement égales et que la fonction $F(x)$ est bien déterminée dans le domaine (Δ) par le caractère particulier que l'on a imposé au chemin d'intégration. Que cette fonction admette une dérivée en tout point de (Δ), c'est ce que l'on voit aisément en raisonnant comme au n° **386** et la proposition établie en ce même numéro montre bien que l'intégrale $\int_a^x f(z)\,dz$ est bien égale à $F(x)$, quel que soit le chemin d'intégration.

Si la fonction $\varphi(z)$ admet une dérivée $\varphi'(z)$ en tout point du domaine (Δ) et ne s'annule en aucun point de ce domaine, on peut évidemment appliquer le théorème qu'on vient d'établir à la fonction

$$f(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)};$$

la fonction

$$\int_a^x \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz$$

sera déterminée en tout point de (Δ) et régulière en tout point de (Γ). Elle est identique à la fonction $\log\dfrac{f(z)}{f(a)}$, supposée nulle au point a et définie ensuite par continuité ou prolongement le long d'une courbe allant de a à z et ne sortant pas de (Δ). Cette fonction $\log\dfrac{f(z)}{f(a)}$ sera régulière en tout point du plan si $f(z)$ est une fonction partout régulière et qui ne s'annule jamais ; elle sera alors une fonction entière $g(z)$; la fonction $f(z)$ sera elle-même de la forme

$$Ce^{g(z)};$$

[1] On supposera, dans ce cas, que ces points peuvent être reliés à n'importe quel point de (Γ) par une ligne brisée. Pour les points de la frontière, en nombre limité, qui ne rempliraient pas cette condition, le théorème, une fois démontré en général, résulte sans peine de la continuité.

telle est donc, en désignant par C une constante et par $g(z)$ une fonction entière, transcendante ou non, la forme de toute fonction entière $f(z)$ qui ne s'annule pour aucune valeur de z.

400. — Revenons à la proposition générale du n° **396** et considérons maintenant une fonction $f(z)$ dont on sache qu'elle a une dérivée en tout point appartenant au cercle (C), sauf peut-être au centre a de ce cercle ; l'égalité (2) du n° **396** subsistera en prenant pour le cercle (c) un cercle de rayon aussi petit qu'on voudra, intérieur au cercle (C) ; les intégrales

$$\int_{(c)} f(z)\,dz, \quad \int_{(c)} f(z)(z-a)\,dz, \ldots$$

sont d'ailleurs indépendantes du rayon r du cercle (c). Considérons en effet les deux cercles (c), (c'), de rayons r, r' et supposons $r > r'$; les fonctions $f(z)$, $f(z)(z-a)$, ... admettent des dérivées en tous points du domaine doublement connexe dont la frontière est formée des deux cercles (c), (c') ; les intégrales

$$\int f(z)\,dz, \quad \int f(z)(z-a)\,dz, \ldots,$$

prises le long de la frontière parcourue dans le sens direct sont donc nulles (n° **394**) ; cela revient à dire qu'une quelconque de ces intégrales garde la même valeur, qu'on la prenne le long du cercle (c), ou du cercle (c'), les deux cercles étant parcourus dans le sens direct.

D'après cela la fonction $f(x)$ est la somme de deux séries ; l'une, que l'on peut représenter par $P(x:a)$, est entière en $x-a$ et convergente sous la condition $|x-a| < R$, l'autre de la forme

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots,$$

est convergente quelque petit que soit $x-a$, en valeur absolue, pourvu qu'il ne soit pas nul ; en d'autres termes la fonction

$$G(z) = A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$$

est une fonction entière en z, transcendante ou non : on a ainsi

$$f(x) = \mathrm{P}(x : a) + \mathrm{G}\left(\frac{1}{x-a}\right);$$

Ces deux séries $\mathrm{P}(x : a)$, $\mathrm{G}\left(\frac{1}{x-a}\right)$ sont uniformément convergentes dans tout ensemble parfait contenu dans le continuum défini par les conditions

$$0 < |x - a| < \mathrm{R}.$$

Dans le cas où la fonction $\mathrm{G}(z)$ est identiquement nulle, la fonction $f(x)$, si on lui attribue la valeur $\mathrm{P}(a : a)$ au point a, est régulière en tout point intérieur au cercle (C), même au point a. Lorsque la fonction $\mathrm{G}(z)$ se réduit à un polynome en z

$$\mathrm{A}_1 z + \mathrm{A}_2 z^2 + \ldots + \mathrm{A}_n z^n,$$

le point a est un *pôle* de multiplicité n de la fonction $f(x)$. Enfin, quand la fonction $\mathrm{G}(z)$ est une fonction transcendante, le point a prend le nom de *point singulier essentiel*.

Ainsi un pôle ou un point singulier essentiel a d'une fonction $f(x)$ est caractérisé par l'existence d'un polynome ou d'une fonction transcendante entière $\mathrm{G}(z)$, s'annulant pour $z = 0$, et telle que la fonction

$$f(x) - \mathrm{G}\left(\frac{1}{x-a}\right)$$

tende vers une limite quand x s'approche de a indéfiniment et soit un fonction régulière au point a quand on lui attribue en ce point sa valeur limite.

Le nombre A_1 coefficient de $\frac{1}{x-a}$ dans $\mathrm{G}\left(\frac{1}{x-a}\right)$ joue un rôle particulièrement important : on lui a donné le nom de résidu relatif au pôle ou au point essentiel a. Son importance apparait tout de suite en observant que la fonction primitive de $f(x)$, dans le continuum défini par les inégalités $0 < |x - a| < \mathrm{R}$, est la somme d'une constante arbitraire, de la série entière en $x - a$, obtenue en intégrant terme à terme $\mathrm{P}(x, a)$, et de la série

$$\mathrm{A}_1 \log(x-a) - \frac{\mathrm{A}_2}{x-a} - \ldots - \frac{\mathrm{A}_n}{(n-1)(x-a)^{n-1}} - \ldots;$$

l'intégration introduit donc un terme transcendant et un seul, $A_1 \log (x-a)$, dont le coefficient est précisément A_1 : ce terme a d'ailleurs besoin d'être défini d'une fonction précise pour que la fonction primitive le soit elle-même : les diverses déterminations de cette fonction diffèrent d'un multiple entier de $2A_1\pi i$. Si le résidu A_1 est nul, la fonction primitive est déterminée dans tout le continuum, dès qu'on se donne sa valeur en un point.

L'intégrale

$$\int f(z)\,dz$$

prise le long d'une courbe fermée simple, située dans le continuum, contenant le point a à son intérieur, et parcourue dans le sens direct est égal à $2A_1\pi i$.

401. — Considérons une fonction $f(x)$ définie dans un continuum (Γ), sauf en un certain nombre fini de points $a_1, a_2, \ldots, a_p$ et régulière en tout point de (Γ), sauf peut-être en ces points.

Si de l'un quelconque de ces points, de a_1, par exemple on décrit un cercle assez petit pour être intérieur à (Γ) et pour laisser en dehors de lui les points $a_2, \ldots, a_p$, le précédent théorème s'appliquera à ce cercle, d'où l'on conclut que le point a_1 est ou un point régulier, (auquel cas il faut attribuer à $f(x)$, pour ce point, sa valeur limite) ou un pôle, ou un point singulier essentiel ; on peut évidemment écarter la première hypothèse. Les points $a_1, a_2, \ldots, a_p$ étant des pôles ou des points singuliers essentiels, il leur correspond respectivement des fonctions entières (polynomes ou fonctions transcendantes), $g_1(z)$, $g_2(z), \ldots$, telles que les différences

$$f(x) - g_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right),\ f(x) - g_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right), \ldots$$

soient respectivement régulières aux points $a_1, a_2, \ldots$; d'ailleurs la fonction $g_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right)$, par exemple, est régulière partout sauf au point a_1 ; on conclut de là bien aisément que la fonction

$$f(x) - g_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right) - g_2\left(\frac{1}{x-a_2}\right) - \cdots - g_p\left(\frac{1}{x-a_p}\right)$$

est régulière en tout point de (Γ) : en d'autres termes la fonction $f(x)$ est de la forme

$$\varphi(x) + g_1\left(\frac{1}{x - a_1}\right) + g_2\left(\frac{1}{x - a_2}\right) + \dots + g_p\left(\frac{1}{x - a_p}\right),$$

en désignant par $\varphi(x)$ une fonction régulière en tout point de (Γ). Réciproquement toute fonction de cette forme est régulière en tout point de (Γ), sauf aux points $a_1, a_2, \dots, a_p$ [1].

Si (Γ) est le continuum intérieur à une courbe fermée simple (F) et si l'on suppose, bien entendu, que la fonction $f(x)$ ait une dérivée en tout point du domaine $(F) + (\Gamma)$, sauf aux points $a_1, a_2, \dots, a_p$, l'intégrale $\int f(x)\,dx$, prise le long de (F), dans le sens direct, est égale au produit par $2\pi i$ de la somme des résidus relatifs aux points $a_1, a_2, \dots, a_p$: cela résulte évidemment de la forme donnée à $f(x)$, de ce que l'intégrale $\int \varphi(x)\,dx$ est nulle et de ce que l'intégrale

$$\int g_1\left(\frac{1}{x - a_1}\right) dx,$$

par exemple, est égale au produit de $2\pi i$ par le coefficient de la première puissance de z dans $g_1(z)$.

402. — On a montré au n° **349** comment, sous certaines conditions, une série de la forme

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

dont les termes sont eux-mêmes des séries entières en x, pouvait se mettre sous forme d'une série entière en x, et l'on a annoncé que cette proposition, ainsi que la proposition analogue relative à un produit infini étaient susceptibles d'être généralisées.

La proposition que j'ai en vue est la suivante.

Soit (Δ) un domaine simple et (Γ) le continuum intérieur ; si les fonctions $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x), \dots$ admettent des dérivées en tout point du domaine (Δ) et si, dans ce domaine, la série

$$(u) \qquad u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

---

[1] Le lecteur rapprochera cette proposition de celles qui font l'objet du n° **374**.

est uniformément convergente, la somme $f(x)$ de cette série est une fonction régulière en tout point de (Γ); ses dérivées successives sont les sommes respectives des séries obtenues en prenant les dérivées première, seconde,... des termes de la série (u).

En désignant par x_0 le point du continuum (Γ) pour lequel on veut prouver la proposition et en posant $x = x_0 + z$, on remplacera le domaine (Δ) et le continuum (Γ) par le domaine (Δ') et le continuum (Γ'); ce continuum contiendra le point $z = 0$, pour lequel on aura à faire la démonstration.

On peut, tout de suite, supposer que le continuum (Γ) contient le point $z = 0$ et que c'est pour ce point qu'on fait la démonstration; les fonctions $u_1(z)$, $u_2(z)$, doivent alors être régulières en ce point; je supposerai qu'on a en général,

$$u_n(z) = u_{0,n} + u_{1,n}z + \ldots + u_{p,n}z^p + \ldots;$$

toutes ces séries, d'après le n° **397**, sont absolument convergentes à l'intérieur et sur la circonférence d'un cercle décrit du point o comme centre, situé tout entier à l'intérieur de (Γ), et d'ailleurs quelconque: dans le même domaine (intérieur et circonférence du cercle), la série

$$u_1(z) + u_2(z) + \ldots + u_n(z) + \ldots,$$

dont la somme est $f(z)$, est uniformément convergente; si l'on désigne maintenant par x un point fixe intérieur au cercle, la série

$$\frac{u_1(z)}{z-x} + \frac{u_2(z)}{z-x} + \ldots + \frac{u_n(z)}{z-x} + \ldots,$$

dont la somme est $\dfrac{f(z)}{z-x}$, est uniformément convergente sur la circonférence du cercle; on a donc (n° **390**), en supposant les intégrales prises le long de cette circonférence,

$$\int \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \int \frac{u_1(z)\,dz}{z-x} + \int \frac{u_2(z)\,dz}{z-x} + \ldots + \int \frac{u_n(z)\,dz}{z-x} + \ldots;$$

la série qui constitue le second membre de cette égalité est égale, terme à terme (n° **395**), à la série

$$2i\pi u_1(x) + 2i\pi u_2(x) + \ldots + 2i\pi u_n(x) + \ldots$$

dont la somme est $2i\pi f(x)$; on a donc finalement

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z-x}\,dz\,;$$

On a, au n° **395**, établi une égalité de même forme en supposant que la fonction $f(z)$ admettait des dérivées en tout point du domaine simple que bornait la courbe le long de laquelle on prenait l'intégrale : l'égalité (1), établie en partant de la définition de la fonction $f(x)$, va nous permettre maintenant, en renversant la démonstration du n° **395**, de prouver que la fonction $f(x)$ est régulière au point o : on a en effet, pour tout point de la circonférence de cercle

$$\frac{f(z)}{z-x} = \frac{f(z)}{z} + x\frac{f(z)}{z^2} + \ldots + x^n\frac{f(z)}{z^{n+1}} + \ldots$$

et le second membre de cette nouvelle égalité est encore une série uniformément convergente sur la circonférence du cercle, où l'on a $|z| > x$; on a donc (n° **390**)

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)\,dz}{z-x} &= \frac{1}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z}\,dz + \frac{x}{2i\pi}\int \frac{f(z)}{z^2}\,dz \\ &+ \ldots + \frac{x^n}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz + \ldots\,; \end{aligned} \right.$$

en supposant toujours que les intégrales soient prises le long de la circonférence du cercle ; mais le premier membre, d'après l'égalité (1), est égal à $f(x)$: on voit ainsi que la fonction $f(x)$ est régulière au point o et, de plus, qu'elle est développable en une série entière en x, convergente à l'intérieur de tout cercle décrit du point o comme centre et intérieur au continuum (Γ). La fonction $f(x)$ est donc bien régulière en tout point de ce continuum. La valeur de sa dérivée $n^{\text{ième}}$ au point o est égale à

$$\frac{1.2\ldots n}{2i\pi}\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

en vertu de l'égalité (2) ou du n° **397**, l'intégrale étant prise le long de la circonférence d'un cercle quelconque, intérieur à (Γ) et décrit du point o comme centre; or sur cette circonférence, la série

$$\frac{u_1(z)}{z^{n+1}} + \frac{u_2(z)}{z^{n+1}} + \ldots + \frac{u_p(z)}{z^{n+1}} + \ldots$$

dont la somme est $\frac{f(z)}{z^{n+1}}$, est uniformément convergente; on a donc (n° **390**)

$$\int \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \int \frac{u_1(z)}{z^{n+1}}\,dz + \int \frac{u_2(z)}{z^{n+1}}\,dz + \ldots + \int \frac{u_p(z)}{z^{n+1}}\,dz + \ldots,$$

les intégrales étant prises le long de la circonférence; on a d'ailleurs (n° **397**)

$$\int \frac{u_p(z)}{z^{n+1}}\,dz = 2\,i\pi u_{n,p}$$

et par suite

$$\frac{1}{2\,i\pi}\int \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = u_{n,1} + u_{n,2} + \ldots + u_{n,p} + \ldots;$$

il est prouvé par là que la série qui figure au second membre est convergente et que sa somme est le coefficient de x^n dans le développement de $f(x)$. Tout ce que l'on avait annoncé est établi.

Le théorème qui précède est dû à Weierstrass; on voit qu'il est beaucoup plus général que la proposition à peu près obvie du du n° **349** [1].

Je ferai maintenant sur le mode de convergence de la série (u), une hypothèse un peu plus restrictive, qui implique d'ailleurs (n° **183**) la convergence absolue et uniforme de cette série dans le domaine (Δ).

En désignant par

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

une série convergente dont tous les termes sont des nombres positifs, je supposerai qu'on ait $|u_n(x)| < a_n$, pour toutes les valeurs

---

[1] La démonstration de Weierstrass, qui est fort intéressante, est reproduite dans l'introduction des Éléments de la Théorie des fonctions elliptiques de MM. Tannery et Molk, t. I, p. 55. Celle qui précède est due à M. Painlevé.

de n, et pour chaque point x du domaine (Δ) [1]. Je suppose toujours que les fonctions $u_n(x)$ admettent des dérivées en chacun de ces points.

Le produit infini

$$[1 + u_1(x)]\,[1 + u_2(x)] \dots [1 + u_n(x)] \dots$$

est alors une fonction de x régulière en tout point de (Γ).

Il suffira, comme tout à l'heure de supposer que le point o soit intérieur à (Γ) et de faire la démonstration pour ce point. Considérons encore un cercle, décrit du point o comme centre et intérieur à (Γ); et désignons par (D) l'ensemble des points qui appartiennent à ce cercle.

A partir d'une valeur suffisamment grande de n, on peut, en désignant par a un nombre positif plus petit que 1, supposer $|u_n(x)| < a$ et cela pour n'importe quel point x du domaine (D) : comme on peut évidemment négliger, dans la démonstration, les premiers facteurs du produit infini, rien n'empêche de supposer que l'égalité précédente ait lieu pour toutes les valeurs de n ; le logarithme principal de chaque facteur est alors déterminé sans ambiguïté pour tout point x de (D). De la convergence *normale* de la série (u) dans le domaine (D), résulte immédiatement la convergence uniforme, dans le même domaine, de la série

$$(3) \quad \lg[1 + u_1(x)] + \lg[1 + u_2(x)] + \dots + \lg[1 + u_n(x)] + \dots$$

qui est donc une fonction régulière de x au point o ; si on désigne par $\varphi(x)$ cette fonction, la fonction $e^{\varphi(x)}$ sera aussi régulière au même point : or elle est manifestement égale au produit infini. On obtient la dérivée de $\varphi(x)$ en prenant les dérivées des termes de la série (3) ; on retrouve ainsi la règle du n° **349** pour obtenir la dérivée logarithmique d'un produit infini.

---

[1] M. Baire, dans ses excellentes *Leçons sur les théories générales de l'Analyse* (Paris, Gauthier-Villars), dit alors que la série (u) *converge normalement* dans le domaine (Δ). Ce mode de convergence, sur lequel Weierstrass a appelé l'attention, mérite assurément un nom, tant il est simple, naturel et fréquent. C'est à l'exemple de M. Baire que je me borne à ce cas, pour ce qui est des produits infinis.

NOTE

SUR QUELQUES APPLICATIONS DE L'INDICE DE KRONECKER

Par M. Jacques HADAMARD

La démonstration, d'après M. Ames, du théorème de M. Jordan sur les courbes fermées sans point double (n^{os} **306, 307**) repose sur la considération de l'ordre d'un point ou, si l'on veut, sur la considération d'une variation d'argument.

La généralisation, dans le cas où le nombre des dimensions dépasse deux, est fournie par l'*indice de Kronecker*. C'est là une notion qui est maintenant classique [1].

Elle a reçu, dans plusieurs travaux contemporains, des applications nouvelles. Je me propose d'exposer ici quelques-unes d'entre elles.

Tous les raisonnements qui vont suivre se mettent aisément sous une forme purement arithmétique, alors même que, pour abréger, ils ne sont pas rédigés immédiatement sous cette forme : ils doivent d'ailleurs satisfaire à cette condition pour être valables dans les hypothèses générales où nous nous plaçons, qui ne font intervenir que la continuité des fonctions employées.

I. — LE THÉORÈME DE M. JORDAN DANS LE PLAN

1. — Je commencerai par revenir un instant sur la démonstration du théorème de M. Jordan dans le cas du plan et je m'effor-

(1) Surtout depuis le *Traité d'Analyse* de M. Picard (T. I, p. 123; T. II, p. 193).

cerai, pour l'une des parties de ce théorème, d'aller un peu plus loin qu'on n'a fait dans l'introduction de la notion d'ordre.

Une ligne plane [1] (C) étant définie par les deux équations

$$(1) \qquad x = x(t), \quad y = y(t)$$

où les seconds membres sont des fonctions continues de t dans l'intervalle (t_0, t_1) ; cette courbe étant *fermée*, c'est-à-dire telle que l'on ait

$$(2) \qquad x(t_0) = x(t_1), \quad y(t_0) = y(t_1) ;$$

et *sans point double*, c'est-à-dire que les équations en t', t''

$$x(t') = x(t''), \quad y(t') = y(t'')$$

n'aient pas d'autre solution, où t' soit différent de t'', que $t' = t_0$, $t'' = t_1$ ou $t' = t_1$, $t'' = t_0$;

le théorème de M. Jordan consiste en ce que :

1° la courbe (C) détermine dans le plan *au moins* deux régions distinctes ;

2° la courbe (C) ne détermine que deux régions distinctes.

Je m'occuperai seulement de la première de ces deux affirmations [2].

2. — Je rappelle que l'*ordre* d'un point P, non situé sur la courbe (C), par rapport à cette courbe se définit au moyen de la variation continue de l'argument du vecteur PM, quand le point M décrit la courbe (C).

Cet ordre est nul quand on peut mener par le point P une demi-droite qui n'a aucun point commun avec (C).

Il est égal à ± 1 quand on peut mener par le point P une demi-droite qui a un point commun avec (C) et un seul, et telle que si on désigne par t' la valeur de t qui correspond à ce point, les points de (C) qui correspondent à des valeurs de t un peu plus petites que t' et les points de (C) qui correspondent à des valeurs de t un

---

(1) C'est ce qu'on a appelé dans le texte un *lien fermé simple* (n° **290**).

(2) Elle a été établie dans le texte sous la condition qu'il existe un vecteur AB que *traverse* la courbe (C) (n° **296**).

peu plus grandes que t' soient de côtés différents par rapport à la demi-droite.

3. — Cela posé, nous allons constater l'existence d'un point dont l'ordre est 0 et celle d'un point dont l'ordre est ± 1.

Soit d'abord $y = y_1$ une parallèle à l'axe des x ayant des points communs avec la courbe. Soit, parmi eux, A (x_1, y_1) celui qui a la plus petite abscisse (1). Si l'on désigne par x'_1 une quantité inférieure à x_1, le point A' (x'_1, y_1) est d'ordre 0, puisque la demi-droite qui part de ce point dans la direction opposée à A'A n'a aucun point commun avec (C).

4. — Soit maintenant ξ une valeur de x comprise, au sens strict (c'est-à-dire égalité exclue) entre x_1 et la valeur maxima de x sur (C), de sorte que la courbe (C) coupe la droite $x = \xi$ en deux points au moins; soient M, N les deux points d'intersection extrêmes, c'est-à-dire qui ont respectivement la plus petite et la plus grande ordonnée (2), ou encore, les plus rapprochés de A; j'entends par là les points pour lesquels les valeurs de t sont les plus voisines inférieurement et supérieurement de celle qui correspond à A (3). Les points M, N divisent (C) en deux arcs. J'appellerai le *premier* d'entre eux, celui qui contient le point A. Dans l'une comme dans l'autre des définitions que je viens d'indiquer pour M et N, ce premier arc ne contient aucun point situé sur le prolongement du segment de droite MN, soit que la courbe entière n'en contienne aucun (1re définition), soit que le premier arc MN n'ait aucun point commun avec la droite $x = \xi$ en dehors de M, N (2me définition).

Menons par A une droite Aa qui coupe la droite $x = \xi$ en un point a situé entre M et N. Cette droite Aa peut rencontrer le premier arc MN en un seul point (le point A) ou en plusieurs; soit B celui de ces points qui a la plus grande abscisse (4).

---

(1) L'ensemble des valeurs de t (si elles sont en nombre infini) qui vérifient l'équation $y(t) = y_1$ est clos; il en est donc de même des valeurs correspondantes de x; ce dernier ensemble contient donc son élément maximum et son élément minimum.

(2) Voir la note précédente.

(3) Ceci comporte une modification évidente si le point qui correspond à $t = t_0$ ou $t = t_1$ est entre A et M ou entre A et N.

(4) Voir la note (1).

Soit B′ un point de la droite Aa ayant une abscisse plus grande que B, tel cependant qu'entre B et B′ il n'y ait pas de point du second arc MN (ce qui est possible [1], sans quoi B serait lui-même un point du second arc, contrairement à l'hypothèse).

Le point B′ est d'ordre ± 1.

Pour le voir, joignons M à N par un chemin composé de deux segments rectilignes MP, NQ empruntés respectivement aux deux prolongements de MN et tels que aP soit égal à aQ, P et Q étant réunis par un demi-cercle de centre a, situé à droite de MN, c'est-à-dire du côté où n'est pas A, et de rayon assez grand pour n'avoir aucun point commun avec le premier arc [2]. Ce nouveau chemin forme avec le premier arc MN une ligne fermée (C_1) et avec le second arc MN une ligne fermée (C_2); convenons de choisir comme sens de parcours sur (C) le sens qui correspond aux t croissants, sur (C_1) et sur (C_2) un sens tel que les parties communes avec (C) soient parcourues dans le même sens qu'elles le sont sur (C). Dans ces conditions, le chemin auxiliaire MPQN est parcouru en sens contraires sur (C_1) et sur (C_2).

On aura alors, en appelant $\Omega_{(C)}(B')$, $\Omega_{(C_1)}(B')$, $\Omega_{(C_2)}(B')$ les ordres de B′ par rapport aux courbes fermées (C), (C_1), (C_2)

$$\Omega_{(C)}(B') = \Omega_{(C_1)}(B') + \Omega_{(C_2)}(B'),$$

puisque les variations d'argument sur MPQN se détruisent. Or $\Omega_{(C_2)}(A)$ étant nul [pour la même raison que $\Omega_{(C)}(A')$], il en est de même de $\Omega_{(C_2)}(B')$ (n° **295**), puisque l'on peut joindre A à B′ par un chemin qui n'ait aucun point commun avec (C_2), à savoir la portion AB du premier arc, suivie du segment de droite BB′.

D'autre part $\Omega_{(C_1)}(B')$ est égal à ± 1, puisque la demi-droite qui part du point B′ et qui va dans la direction des x croissants rencontre (C_2) en un seul point situé sur le demi-cercle, et cela dans les conditions qui ont été précisées plus haut.

Notre conclusion est donc démontrée.

---

(1) Voir encore la note (1) de la page précédente.

(2) Dans le second mode de définition des points M, N, le chemin MPQN peut être remplacé par le segment de droite MN, le point B′ étant entre B et a.

II. — GÉNÉRALITÉS SUR LES VARIÉTÉS ET LES SURFACES

5. — Sans examiner si on peut, par une méthode analogue, démontrer le théorème de M. Jordan dans le cas de plus de deux dimensions, nous allons, maintenant, supposer ce théorème démontré et cela en précisant même l'énoncé d'une manière qui sera indiquée plus loin.

Mais nous avons à définir ce que nous entendrons par surfaces dans l'espace à n dimensions.

Pour cela, nous définirons d'abord le *tétraédroïde* à m dimensions.

Nous appellerons ainsi le lien (c'est-à-dire, conformément à la définition classique de la géométrie élémentaire, l'ensemble) des points ($x_1, \ldots x_m$) de cet espace qui vérifient les inégalités

$$(3)\qquad \begin{cases} x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \ldots\ x_m \geqslant 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m \leqslant 1\,; \end{cases}$$

— ou, par extension, tout ensemble se déduisant du premier par une substitution linéaire, non nécessairement homogène (c'est-à-dire avec l'intervention possible de termes constants), à déterminant non nul.

6. — En remplaçant une, et une seule, des $m + 1$ inégalités (3) (ou s'il y a lieu, de celles qui leur correspondent après substitution) par une égalité, à laquelle on continue à adjoindre les m inégalités restantes sans les modifier, on a une des $m + 1$ *faces* du tétraédroïde. En remplaçant de même deux (et deux seulement) des inégalités en question par des égalités, on a une *arête primaire* (laquelle est, par sa définition, commune à deux faces). On aura de même, en écrivant trois égalités et $m - 2$ inégalités, une *arête secondaire*; etc.

Enfin un point commun à m faces est un sommet. Si on désigne par

$$(4)\qquad \xi_1^{(i)}, \ldots, \xi_m^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots m + 1)$$

les $m+1$ sommets, on aura, pour le tétraédroïde (3),

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi_i^{(i)} = 1, \quad \xi_i^{(j)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j \neq i) \\ \xi_1^{(m+1)} = \xi_2^{(m+1)} = \ldots = \xi_m^{(m+1)} = 0. \end{cases}$$

7. — Un point quelconque d'un tétraédroïde peut être représenté par les formules

$$(6)\qquad x_i = \frac{t_1\xi_i^{(1)} + t_2\xi_i^{(2)} + \ldots + t_{m+1}\xi_i^{(m+1)}}{t_1 + t_2 + \ldots + t_{m+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

où $t_1, t_2, \ldots, t_{m+1}$ sont $m+1$ nombres positifs. C'est ce qu'on voit immédiatement pour le tétraédroïde (3) et qu'on étend aux autres tétraédroïdes en remarquant que la substitution linéaire ne change pas les relations (6).

8. — $m+1$ points quelconques, dont les coordonnées seront données par les formules (4), peuvent d'ailleurs, comme on s'en convainc aisément, être considérés comme les sommets d'un tétraédroïde, pourvu que le déterminant Δ formé en bordant le tableau (4) avec une colonne d'unités soit différent de zéro : ce tétraédroïde pourra être considéré comme représenté par les formules (6), lesquelles s'écrivent encore

$$(6')\qquad \begin{cases} x_i = t_1\xi_i^{(1)} + t_2\xi_i^{(2)} + \ldots + t_{m+1}\xi_i^{(m+1)} \\ t_1 + t_2 + \ldots + t_{m+1} = 1. \end{cases}$$

$t_1, t_2, \ldots, t_{m+1}$ seront dits les *coordonnées barycentriques* (*absolues* dans le cas des équations (6'), *homogènes* dans le cas (6)) du point $(x_1, \ldots, x_m)$ par rapport au tétraédroïde.

m des coordonnées barycentriques absolues peuvent être considérées comme définissant un point. Si on considère, à leur tour, ces m quantités $t_1, \ldots, t_m$ comme des coordonnées cartésiennes, le point qui a ces coordonnées décrit le tétraédroïde (3) quand le point $(x_1, \ldots, x_m)$ décrit le tétraédroïde donné.

Si le déterminant désigné tout à l'heure par Δ est nul, nous dirons que les formules (6) ou (6') définissent un *tétraédroïde dégénéré*.

9. — Plus généralement, les formules

$$(7)\qquad y_i = \frac{t_1\xi_i^{(1)} + \dots + t_{m+1}\xi_i^{(m+1)}}{t_1 + \dots + t_{m+1}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(7')\qquad \left\{\begin{aligned} y_i &= t_1\xi_i^{(1)} + \dots + t_{m+1}\xi_i^{(m+1)}, \\ t_1 &+ \dots + t_{m+1} = 1, \end{aligned}\right.$$

où l'indice i variera, non plus depuis 1 jusqu'à m, mais depuis 1 jusqu'à $n > m$, définiront ($t_1, \dots, t_{m+1}$ étant des variables positives) un *tétraédroïde à m dimensions dans l'espace à n dimensions*, pourvu que les déterminants déduits du tableau rectangulaire

$$\| \xi_1^{(i)}, \dots, \xi_n^{(i)}, 1 \| \qquad (i = 1, \dots, m+1)$$

ne soient pas tous nuls [1]. Dans le cas contraire, on aura encore affaire à un tétraédroïde *dégénéré*.

Le tétraédroïde (non dégénéré) (7) pourra encore être regardé comme défini par $n - m$ équations du premier degré (obtenues en éliminant les t entre les équations (7) ou (7')) et $m + 1$ inégalités.

Une face du tétraédroïde à m dimensions est, en ce sens, un tétraédroïde à $m - 1$ dimensions : la face opposée au $i^{\text{ème}}$ sommet du tétraédroïde (4) est représentée, en effet, par les formules (6) (ou (6')) où l'on fait $t_i = 0$.

Une arête primaire d'un tétraédroïde à m dimensions est, de même, un tétraédroïde à $m - 2$ dimensions ; etc.

10. — Le tétraédroïde (3) peut être décomposé par les plans

$$x_i = \frac{k}{p} \qquad (i = 1, 2, \dots, m\,;\ k = 1, 2, \dots, p)$$

en parties convexes et celles-ci peuvent être, à leur tour, décomposées en tétraédroïdes [2] inférieurs dans toutes leurs dimensions

---

(1) On peut aussi dire qu'un tel tétraédroïde se déduira du tétraédroïde à m dimensions (3) en prenant pour les n variables y des fonctions linéaires des m variables x (m au moins de ces fonctions étant indépendantes).

(2) Un *polyèdre convexe de l'espace à m dimensions* est l'ensemble des points de cet espace qui vérifient un nombre quelconque d'inégalités du premier degré

$$a_1^{(h)}x_1 + a_2^{(h)}x_2 + \dots + a_m^{(h)}x_m + b^{(h)} > 0 \qquad (h = 1, 2, \dots)$$

ces inégalités étant susceptibles d'être vérifiées simultanément au sens strict (c'est-à-dire égalité exclue) et telles que $|x_1|$, $|x_2|$, ..., $|x_m|$ soient, grâce à $\frac{1}{p}$, — par conséquent, aussi petits qu'on veut en tous sens : cette dernière propriété s'étend donc (par substitution linéaire) à un tétraédroïde quelconque.

11. — Cela posé, soient $u_1, \ldots, u_m$ m paramètres tels que le point qu'ils définissent et que nous appellerons *point paramétrique*, décrive un tétraédroïde à m dimensions. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des fonctions continues, en nombre $n \geqslant m$ de $u_1, \ldots, u_m$. Nous dirons que le point $(x_1, \ldots, x_n)$ (qui sera le point *proprement dit*) décrit un *élément m* fois étendu dans l'espace E_n à n dimensions.

Soit ε_1 un tel élément, correspondant à un tétraédroïde T_1 décrit par le point paramétrique $(u_1, \ldots, u_m)$. Soit ε_2 un élément analogue, correspondant à un second tétraédroïde T_2. Supposons que, par l'intermédiaire d'une face f_1 de T_1 et d'une face f_2 de T_2, ces deux éléments soient liés de la manière suivante :

Les sommets de f_1 (ou ceux de f_2) ayant été permutés au besoin d'une manière convenable, tout point paramétrique de f_1 donne la même position du point $(x_1, \ldots, x_n)$ que le point de f_2 qui (moyennant la permutation dont on vient de parler) a les mêmes coordonnées barycentriques [1].

à elles, forcément limités. Une *face* du polyèdre sera encore obtenue en remplaçant l'une de ces inégalités par l'égalité correspondante, pourvu que les inégalités restantes puissent encore, dans ces conditions, être vérifiées simultanément au sens strict.

La démonstration du théorème : *tout polyèdre convexe de l'espace à m dimensions est décomposable en tétraédroïdes* est aisément arithmétisable. On prendra un point intérieur $O(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ qu'on joindra à chaque point $(x_1, \ldots, x_m)$ de la frontière S du polyèdre par un segment de droite $\left(x'_i = \frac{\alpha_i + tx_i}{1+t}\right)$, $0 \leqslant t \leqslant +\infty$.

Lorsque $(x_1, \ldots, x_m)$ décrira une face, le point x'_i décrira une « pyramide à m dimensions » ; et toutes ces pyramides, extérieures les unes aux autres, formeront par leur ensemble le polyèdre donné (grâce à ce fait que S est coupé en un point et un seul par une demi-droite quelconque issue de O).

Le théorème étant supposé démontré pour toute valeur de m inférieure à celle qu'on considère, on pourra décomposer chaque face en tétraédroïdes à $m - 1$ dimensions : la pyramide correspondante sera, du même coup, décomposée en parties qui seront des tétraédroïdes (les coordonnées x'_i pouvant s'exprimer alors aisément sous la forme (6)).

[1] Plus généralement, on pourrait admettre entre les points de f_1 et de f_2 une correspondance parfaite et continue *quelconque*, les points paramétriques qui fournissent le même point x étant ceux qui se correspondent dans ces nouvelles conditions. On démontre que ce cas un peu plus général peut se ramener à celui qui est traité dans le texte.

Convenons, s'il en est ainsi, de regarder ces deux points paramétriques pris l'un sur f_1 l'autre sur f_2, et que nous appellerons *points accouplés*, comme identiques l'un à l'autre (quoique leurs coordonnées u soient, en général, différentes). Les faces f_1, f_2 seront, par conséquent, elles-mêmes regardées comme n'en constituant qu'une. Les éléments ε_1, ε_2 seront alors dits *contigus* suivant la face *commune* unique qui correspond (dans l'espace E_n) à f_1 et à f_2.

Un troisième élément ε_3 pourra être contigu à ε_2 suivant une face correspondant à une face f'_2 de T_2 : nous supposerons celle-ci différente de f_2 (le cas contraire étant écarté dans tout ce qui va suivre). L'arête primaire commune à f_2, f'_2 donnera une arête commune à ε_1, ε_2, ε_3, dont les points seront les mêmes lorsqu'on les déduira de l'un ou de l'autre des éléments considérés.

Plusieurs éléments peuvent de même avoir en commun une arête d'ordre supérieur (ou un sommet unique). Mais il faut remarquer qu'un nombre quelconque d'éléments peuvent encore avoir en commun une même arête primaire.

12. — Considérons maintenant un nombre fini quelconque d'éléments m fois étendus de l'espace à n dimensions ayant entre eux des relations de contiguïté telles que nous venons de les définir, mais de manière cependant qu'une face quelconque de l'un d'entre eux ne lui soit commune qu'avec (au plus) un seul autre. Nous aurons ainsi une *variété* (finie) m fois étendue dans l'espace à n dimensions [1].

Deux points paramétriques accouplés de la face commune à deux éléments contigus ou, plus généralement, deux ou plusieurs points paramétriques accouplés d'une arête (d'ordre quelconque) commune à deux ou plusieurs éléments (ou, encore, un sommet commun à deux ou plusieurs éléments) seront, conformément à ce qui précède, considérés comme ne donnant qu'un point unique $(x_1, \ldots, x_n)$ de notre variété. En toute autre circonstance où un même point $(x_1, \ldots, x_n)$ de l'espace à n dimensions se trouvera

---

[1] Les *variétés* ainsi définies sont celles que nous considérerons dans ce qui va suivre. La question de savoir si on peut donner à ce même mot des définitions plus générales est, bien entendu, entièrement réservée. Elle ne sera pas abordée ici.

plus d'une fois dans notre variété (soit qu'il corresponde à deux points paramétriques différents d'un même élément, ou à deux points paramétriques non accouplés d'éléments différents [1]) ce point sera dit *double* ou *multiple*, suivant qu'il figurera deux fois ou $m > 2$ fois [2].

13. — Une même variété peut d'ailleurs d'une infinité de manières se représenter sous la forme qui vient d'être indiquée. Nous ne considèrerons pas, en effet, deux variétés V et V′ de l'espèce précédente comme distinctes s'il existe entre les points paramétriques qui engendrent V et ceux qui engendrent V′ une correspondance parfaite et continue telle que tout point paramétrique de V donne le même point $(x_1, \ldots, x_n)$ que son correspondant de V′. La continuité et la perfection dont nous venons de parler ne sont supposées avoir lieu que moyennant la convention faite précédemment de considérer comme identiques les points accouplés [3], la décomposition de V′ en éléments n'étant d'ailleurs nullement supposée correspondre à celle de V et le nombre même de ces éléments pouvant être différent.

---

(1) Nous excluons en nous exprimant ainsi le cas où un élément serait contigu à lui-même (deux de ses faces étant accouplées l'une à l'autre). Si ce cas se présentait (ce qui n'est nullement impossible), on modifierait aisément notre rédaction de manière à en tenir compte. Mais on peut aussi l'écarter par une subdivision convenable (voir ci-dessous) de l'élément considéré, ainsi qu'on s'en assure sans difficulté.

(2) On pourrait avoir $m = \infty$.

(3) Autrement dit, la continuité signifie ici que :

1° A un point paramétrique d'un élément ε et d'un seul de V′ correspond à un point appartenant à un élément ε (et à un seul) de V, les valeurs des u relatives à l'un de ces points sont fonctions continues de celles qui sont relatives à l'autre ;

2° Si un point paramétrique P appartenant à un seul élément ε de V correspond à un point P′ commun à plusieurs éléments $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_p$ de V′, et si on considère un second point Q de ε tel que son correspondant Q′ appartienne à ε'_1, par exemple (tout en pouvant être commun à ε'_1 et à un ou plusieurs des autres éléments $\varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_p$), les valeurs des u qui correspondent à Q′ *dans* ε'_1 sont fonctions continues de celles qui correspondent à Q ;

3° On a des énoncés analogues pour le cas où un point commun à plusieurs éléments de V correspondrait à un point pris dans un seul élément de V′, et pour le cas tout à fait général où un point commun à plusieurs éléments $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$ de V correspondrait à un point commun à plusieurs éléments $\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_{p'}$ de V′.

Si les deux variétés sont sans points multiples, il suffira pour cela que chaque point de V soit aussi un point de V′ et inversement.

En particulier, nous ne changeons pas une variété en subdivisant un ou plusieurs des tétraédroïdes qui correspondent à ses divers éléments en tétraédroïdes partiels, ainsi qu'il a été expliqué plus haut (n° **10**).

14. — Ajoutons qu'on peut avoir à considérer deux variétés V et V′ *m* fois étendues entre les points paramétriques desquelles existe une correspondance de l'espèce mentionnée dans ce numéro, mais sans que les valeurs des x soient les mêmes aux points correspondants, ni même que l'entier n soit le même pour V et pour V′. Deux variétés de cette espèce sont dites *homéomorphes* et l'étude des propriétés qui leur sont communes constitue l'*Analysis situs*.

15. — Aux changements de représentation paramétrique dont nous venons d'indiquer la possibilité se rattache une hypothèse supplémentaire que l'on fait en général — et que nous ferons dans ce qui va suivre — sur les variétés V envisagées.

Quel que soit P pris sur V, on admet que, parmi les diverses décompositions de V en éléments que l'on peut effectuer conformément à la conception précédente, il en existe au moins une dans laquelle P n'appartient qu'à un seul élément.

Cette hypothèse est distincte des précédentes : certaines variétés admissibles sans elles sont exclues par son intervention [1].

---

[1] C'est, par exemple, ce qui arrive pour le volume du cône ayant pour base une couronne circulaire. Un tel volume est décomposable en parties ayant chacune une correspondance parfaite et continue avec un tétraèdre; mais le sommet du cône doit être commun à deux au moins de ces parties.

Soit encore le tore représenté par les équations

$$x = \cos\psi\,(r + a\cos\varphi),\quad y = \sin\psi\,(r + a\cos\varphi),\quad z = a\sin\varphi,$$

où φ et ψ sont considérés (mod. 2π). Déduisons-en la variété trois fois étendue de l'espace à quatre dimensions

$$x_1 = t\cos\psi\,(r + a\cos\varphi),\quad x_2 = t\sin\psi\,(r + a\cos\varphi),\quad x_3 = ta\sin\varphi,\quad x_4 = t\cos\varphi,$$

t variant de zéro à 1. Cette variété est également décomposable en éléments, mais le point $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ appartient forcément à plusieurs d'entre eux.

16. — La variété V sera d'*un seul tenant*, si on peut passer d'un élément quelconque à un autre également quelconque par une chaîne d'éléments dont chacun est contigu au précédent suivant une face.

Elle est *fermée* si toute face est commune à deux éléments. Dans le cas contraire, l'ensemble des faces n'appartenant chacune qu'à un seul élément constitue la *frontière* S de V.

Cette frontière, qui est une variété $m - 1$ fois étendue peut n'être pas d'un seul tenant ; mais elle est nécessairement *fermée*, comme on s'en assure aisément (¹).

17. — Dans tout ce qui précède, l'ordre dans lequel étaient rangées les coordonnées du point paramétrique dans chaque élément, — ou, ce qui revient au même, l'ordre dans lequel étaient rangés les sommets du tétraédroïde correspondant — restait indifférent.

Convenons maintenant de faire intervenir cet ordre, mais seulement dans la mesure suivante :

Nous partagerons les $(m + 1)!$ permutations auxquelles on arrive en rangeant de toutes les manières possibles les $(m + 1)$ sommets du tétraédroïde en deux classes suivant la méthode employée dans la théorie des déterminants, autrement dit, en mettant dans la même classe toutes celles qui sont telles que le passage des unes aux autres soit une permutation alternée.

Nous ne choisirons pas entre les permutations d'une même classe ; mais nous choisirons entre les deux classes et ce choix sera ce que nous appellerons *orienter* le tétraédroïde.

Nous ne diminuerons d'ailleurs pas la généralité en supposant que la classe choisie est la première (c'est-à-dire comprend l'ordre naturel) et c'est ce que nous admettrons dorénavant.

A une orientation déterminée du tétraédroïde T, correspond évidemment une orientation déterminée pour chaque face, qui sera dite en *résulter* : on l'obtient en rangeant les m sommets de

---

(¹) Les éléments f de S étant des faces de V, les faces a de S sont des arêtes primaires de V. Si l'une de celles-ci n'appartient qu'à un seul élément de V, les deux faces qui comprennent a font partie de S et sont contiguës. Si elle est commune à une série d'éléments contigus les uns aux autres (et dont le dernier n'est pas contigu au premier, du moment que a est frontière), les deux faces extérieures des éléments extrêmes font partie de S et sont contiguës suivant a.

cette face dans un ordre tel que, en les faisant précéder du sommet opposé, on ait, entre les $m+1$ sommets de T, une permutation de la première classe. Nous dirons que cette orientation est celle qui *résulte*, pour la face considérée, de celle du tétraèdre.

Deux éléments d'une variété V étant contigus suivant une face, nous dirons que les orientations de ces deux éléments *concordent* si (au sens qui vient d'être expliqué) elles n'entraînent pas la même orientation pour la face commune.

18. — Après avoir orienté d'une manière arbitraire un des éléments de V, choisissons les orientations des éléments contigus à celui-là de manière à ce qu'elles concordent avec la première, puis opérons de même pour les éléments contigus à ceux dont l'orientation vient d'être déterminée ; et ainsi de suite. Si V est d'un seul tenant, nous arriverons à orienter ainsi chaque élément de V.

Comme il existe, en général, plusieurs moyens de passer d'un élément à un autre par l'intermédiaire d'éléments contigus, il se pourra que des orientations obtenues diffèrent suivant le mode de passage adopté. Dans ce cas, V est dite *unilatère*. Si, au contraire, on ne rencontre jamais une telle contradiction, la variété est dite *bilatère*.

Nous supposons dorénavant notre variété V bilatère et orientée de manière à ce que les orientations de tous les éléments concordent. Ceci n'est possible que de deux manières différentes (si V est d'un seul tenant).

19. — Nous appellerons enfin *volume* dans l'espace à n dimensions une variété n fois étendue de cet espace, supposée sans point double.

Nous appellerons *surface* dans l'espace à n dimensions, une variété $n-1$ fois étendue de cet espace.

20. — La notion de l'intégrale multiple, ainsi que sa réduction à des intégrales simples et les changements de variables que l'on peut effectuer sur elle, peuvent également s'exposer sous forme entièrement arithmétique. Je supposerai ces propriétés établies [1].

---

[1] Leur démonstration pourrait présenter quelque difficulté pour les domaines les plus généraux. Mais, dans ce qui va suivre, le domaine d'intégration sera toujours soit un tétraédroïde, soit le volume compris entre deux

On peut, dès lors, en déduire la formule de Green. Je me contenterai également, pour plus de rapidité, d'énoncer cette formule qu'il est aisé de démontrer en suivant la voie classique.

Soient, dans l'espace à m dimensions lieu du point $(x_1, \dots x_m)$, un volume V limité par une surface frontière S et, dans ce volume, m fonctions $\psi_1, \dots \psi_m$ de $x_1, x_1, \dots x_m$, fonctions continues et admettant des dérivées du premier ordre intégrables. Sur un élément de S, la position d'un point sera définie par $m - 1$ coordonnées $v_1, v_2, \dots v_{m-1}$, par exemple $m - 1$ des coordonnées barycentriques du point paramétrique par rapport au tétraédroïde qu'il décrit. Nous supposerons ces coordonnées rangées dans un ordre tel que le déterminant

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v_1} & \dots & \dfrac{\partial x_m}{\partial v_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v_{m-1}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial v_{m-1}} & \dots & \dfrac{\partial x_m}{\partial v_{m-1}} \end{vmatrix}$$

soit positif toutes les fois que la direction $(\alpha_1, \dots \alpha_m)$ est dirigée (au point considéré) vers l'intérieur de V. Alors on aura

$$(9)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \underbrace{\int \cdots \int}_{m} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \psi_m}{\partial x_m} \right) dx_1 \dots dx_m \\ & = - \underbrace{\int \cdots \int}_{m-1} \begin{vmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_m \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v_1} & & \dfrac{\partial x_m}{\partial v_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v_{m-1}} & \dots & \dfrac{\partial x_m}{\partial v_{m-1}} \end{vmatrix} dv_1 \dots dv_{m-1}. \end{aligned} \right.$$

Dans cette formule, l'intégrale m^{uple} du premier membre est étendue au volume V ; l'intégrale $(m - 1)^{uple}$ du second mem-

---

tétraédroïdes dont l'un est intérieur à l'autre (volume qui peut d'ailleurs être lui-même décomposé en tétraédroïdes).

La formule du changement de variables n'aura, dans ces conditions, à être établie que pour les changements de variables linéaires.

bre est étendue à tous les éléments de S, les v étant, dans chacun d'eux, des coordonnées rangées d'après la règle qui vient d'être expliquée.

21. — Dans le cas où V est un tétraédroïde de sommets

$$x_1^{(k)} \dots x_m^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \dots, m+1)$$

la règle en question peut se formuler de la manière suivante :

Convenons de dire que l'orientation du tétraédroïde V est *conforme à celle du système de coordonnées* $x_1, \dots x_m$ si le déterminant Δ considéré plus haut, savoir

$$(10) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_m^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_m^{(2)} & 1 \\ . & . & . & . \\ x_1^{(m+1)} & \dots & x_m^{(m+1)} & 1 \end{vmatrix}$$

est positif.

Supposons cette condition vérifiée.

Alors, sur chaque face de V, les coordonnées v supposées fonctions linéaires de x (par exemple, $m - 1$ des coordonnées barycentriques absolues) devront être, pour obéir à la règle dont il s'agit, rangées dans un ordre tel que leur orientation soit conforme à celle qui, pour la face en question, résulte (n° **17**) de celle de V lui-même. Par exemple, sur la face opposée au sommet d'indice 1, on devra avoir

$$(10') \qquad \begin{vmatrix} v_1^{(2)} & v_{m-1}^{(2)} & 1 \\ v_1^{(3)} & v_{m-1}^{(3)} & 1 \\ . & . & . \\ v_1^{(m+1)} & v_{m-1}^{(m+1)} & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

$v_1^{(k)}, \dots, v_{m-1}^{(k)}$ étant les valeurs des v au sommet d'indice k.

22. — Un cas particulier de ce que nous venons de dire est le suivant : Si une parallèle à l'axe des x_1 (c'est-à-dire une droite dont les équations sont $x_2 = C^{te} \dots, x_m = C^{te}$) rencontre une face F d'un tétraédroïde T de manière à ce que x_1 soit croissant lorsqu'on passe de l'extérieur à l'intérieur de T en traversant cette face, l'orientation de celle-ci, telle qu'elle résulte de celle de T, est conforme ou non à celle du système de coordonnées $x_2, \ldots x_m$ suivant que l'orientation de T lui-même est conforme ou non à celle du système de coordonnées $x_1, x_2, \ldots x_m$.

L'inverse a lieu si x_1 est croissant lorsqu'on passe de l'intérieur à l'extérieur.

C'est ce que l'on obtient, la face F étant opposée au sommet d'indice 1 (comme on peut le supposer moyennant une permutation de première classe entre les sommets), en faisant $v_1 = x_2$, $v_2 = x_3, \ldots v_{m-1} = x_m$ dans le déterminant (10') ; $\alpha_1 = \pm 1$, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$ dans le déterminant (8).

III. ORDRE D'UN POINT PAR RAPPORT A UNE SURFACE

23. — Ces préliminaires posés, nous pouvons définir *l'ordre* d'un point par rapport à une surface *fermée* S de l'espace E_n à n dimensions.

Soit une telle surface définie comme il a été indiqué dans ce qui précède (présentant d'ailleurs ou non des points doubles). Supposons provisoirement que, dans chaque élément, les coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ de l'espace E_n admettent, par rapport aux paramètres $u_1, \ldots u_{n-1}$, des dérivées partielles du premier ordre continues. Dans le passage d'un élément à un autre contigu, les x ne seront, au contraire, assujettis qu'à être continus : ceci, d'ailleurs, entraîne visiblement l'existence et la continuité des dérivées (premières) des x par rapport aux paramètres v (n° **20**) sur la face commune à ces deux éléments.

Considérons alors l'intégrale

$$(11)\qquad I = -\underbrace{\int \cdots \int}_{n-1} \frac{1}{r^n} \begin{vmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} du_1 \ldots du_{n-1}$$

étendue à toute la surface S et dans laquelle r désigne la quantité positive

$$r = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}$$

pendant que $u_1, \ldots u_{n-1}$ sont, dans chaque élément, les coordonnées du point paramétrique, rangées (n° **21**) conformément à l'orientation de l'élément [1].

Cette intégrale a un sens du moment que l'origine des coordonnées dans E_n n'appartient pas à S. On constate immédiatement qu'elle ne change pas de valeur :

a) lorsqu'on multiplie $x_1, \ldots x_n$ par une même quantité positive λ *constante ou variable avec les u* (pourvu quelle soit continue et dérivable dans les mêmes conditions que les x eux-mêmes) ;

b) lorsqu'on effectue sur les x n'importe qu'elle substitution orthogonale à coefficients constants et à déterminant égal à $+1$.

Soient, de plus, S et S′ deux surfaces fermées, ayant un certain nombre d'éléments communs. Supposons-les bilatères et orientées de manière que l'orientation de chacun des éléments communs en question soit, dans S, *inverse* de ce qu'elle est dans S′. Alors, si on forme une nouvelle surface (évidemment fermée et bilatère comme les premières) en supprimant ces éléments communs et réunissant les éléments restants — surface que nous nommerons la *résultante* de S et de S′ — l'intégrale (11) prise sur cette résultante sera la somme des intégrales relatives aux surfaces composantes S et S′. Ceci est une conséquence évidente de la forme de cette intégrale.

24. — La propriété fondamentale de l'intégrale (11), lorsqu'on l'étend à une surface fermée, est la suivante :

On a

$$I = \omega \cdot K_n \tag{12}$$

où K_n est une constante numérique, dépendant de n seul [2], et ω un entier (positif, nul ou négatif).

Pour l'établir, nous supposerons la démonstration faite pour toute valeur de n inférieure à celle que l'on considère.

Nous poserons ensuite

$$r_0 = +\sqrt{x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

---

(1) C'est-à-dire à celle du tétraédroïde qui lui donne naissance.

(2) K_n n'est autre que la surface de la sphère dans l'espace à n dimensions.

et nous désignerons par θ l'angle défini par les deux équations concordantes

$$\cos\theta = \frac{x_1}{r}, \qquad \sin\theta = \frac{r_0}{r},$$

cet angle étant supposé compris entre o et π (ce qui est possible, puisque son sinus est positif). La différentielle de θ est liée à celles des x par la relation

$$-\sin\theta\, d\theta = \frac{r_0^2 dx_1 - x_1(x_2 dx_2 + \ldots + x_n dx_n)}{r^3}$$

ce qui permet de mettre la quantité sous le signe $\int\cdots\int$ dans I sous la forme

$$(13) \qquad -\frac{\sin^{n-2}\theta}{r_0^{n-1}} \begin{vmatrix} 0 & x_2 & & x_n \\ \frac{\partial\theta}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_1} \\ \frac{\partial\theta}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_2} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial\theta}{\partial u_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial u_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_{n-1}} \end{vmatrix} = -\frac{\sin^{n-2}\theta}{r_0^{n-1}} \sum x_i \frac{\partial\theta}{\partial u_k} \mathrm{A}_{i,k}$$

où, par exemple,

$$(13') \qquad \mathrm{A}_{21} = -\frac{\mathrm{D}(x_3, \ldots x_n)}{\mathrm{D}(u_2, \ldots u_{n-1})}.$$

Soit alors $\mathrm{F}(\theta) + h$ (h étant une constante arbitraire) la primitive de $\sin^{n-2}\theta$, autrement dit soit

$$\mathrm{F}'(\theta) = \sin^{n-2}\theta;$$

la quantité (13) pourra s'écrire

$$(14) \qquad -\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial u_1} + \frac{\partial\psi_2}{\partial u_2} + \ldots + \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial u_{n-1}}\right);$$

avec

$$\psi_k = [\mathrm{F}(\theta) + h]\left(\frac{x_2}{r_0^{n-1}} \mathrm{A}_{2,k} + \frac{x_3}{r_0^{n-1}} \mathrm{A}_{3,k} + \ldots + \frac{x_n}{r_0^{n-1}} \mathrm{A}_{n,k}\right).$$

L'ensemble des termes de (14) qui ne figurent pas dans (13), savoir

$$\sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial u_k}\left(\frac{x_i}{r_0^{n-1}} \mathrm{A}_{ik}\right)$$

est, en effet, nul (l'indice i variant de 2 à n; k, de 1 à $n-1$).

C'est ce qui résulte de l'identité, facile à vérifier [1] pour $n-1$ fonctions (dérivables) quelconques $X_2, X_3, \ldots X_n$ de $x_2, \ldots x_n$,

$$\frac{\partial}{\partial u_1}(A_{2,1}X_2 + A_{3,1}X_3 + \ldots + A_{n,1}X_n) + \frac{\partial}{\partial u_2}(A_{2,2}X_2 + A_{3,2}X_3 \ldots)$$
$$+ \ldots + \frac{\partial}{\partial u_{n-1}}(A_{2,n-1}X_2 + \ldots)$$
$$= \left(\frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \frac{\partial X_3}{\partial x_3} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)\frac{D(x_2, \ldots, x_n)}{D(u_1, \ldots, u_{n-1})},$$

en y faisant $X_i = \frac{x_i}{r_0^{n-1}}$ et observant que l'on a

$$(15) \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_2}{r_0^{n-1}}\right) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{x_n}{r_0^{n-1}}\right) = 0.$$

La forme (14) donnée à l'élément d'intégration permet de lui appliquer la formule de Green, tant que les fonctions ψ seront continues : nous aurons sous cette réserve, et en transformant le résultat par le théorème connu sur la multiplication des déterminants,

$$(16) \quad I = -\Sigma \underbrace{\int \cdots \int}_{n-2} \frac{F(\theta)+h}{r_0^{n-1}} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ \frac{\partial x_2}{\partial v_1} & \frac{\partial x_3}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial v_1} \\ . & . & . & . \\ \frac{\partial x_2}{\partial v_{n-2}} & \frac{\partial x_3}{\partial v_{n-2}} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial v_{n-2}} \end{vmatrix} dv_1 dv_2 \ldots dv_{n-2}$$

La sommation Σ est ici relative à toutes les faces de tous les éléments de S. Les coordonnées v doivent être, sur chacune de ces faces, formées et rangées comme il a été expliqué aux n^os **20**, **21**, l'orientation de chaque face résultant de celle de l'élément auquel elle est empruntée.

Puisque la surface S est fermée, chaque face figure ainsi deux fois et (d'après les hypothèses et les conventions précédentes) avec des orientations inverses dans les deux cas.

Donc les deux termes relatifs à cette face, dans l'expression (16), doivent *se détruire*, si du moins le nombre h a la même valeur de part et d'autre.

---

(1) Cette identité, où les $A_{i,k}$ sont les quantités définies par (13), (13'), est bien connue pour le cas de $X_2, \ldots, X_n$ constants : elle intervient dans la théorie du *multiplicateur* (voir Jordan, Goursat, etc., *Traités d'Analyse*).

25. — Mais tout ceci est surbordonné à la légitimité de la formule (16). Celle-ci n'est établie, quant à présent, que si r_0 ne devient jamais nul, c'est-à-dire si la droite

$$x_2 = \dots = x_n = 0 \tag{17}$$

ne coupe pas S.

Dans ce cas, en faisant $h = 0$ dans tous les éléments, on voit que I est *nul*.

Plus généralement, *l'intégrale* (11) *est nulle si l'on peut mener par l'origine une droite quelconque* D *qui n'ait aucun point commun avec* S.

Car, moyennant une transformation orthogonale qui ne change pas I, nous pourrons ramener D à être *l'axe des* x_1, c'est-à-dire à être représentée par les équations (17).

25 *bis*. — Abandonnant ce premier cas, nous allons néanmoins commencer par faire certaines hypothèses particulières.

Nous supposerons d'abord qu'aucune droite issue de l'origine ne coupe un même élément de S en des points situés de part et d'autre de l'origine. Cette première hypothèse ne diminue pas la généralité : il suffit, pour la vérifier, de rendre, par subdivision, s'il y a lieu, les éléments assez petits pour que la distance de deux points d'un même élément soit toujours inférieure au double de la distance minima de l'origine à S, ce qui est possible en vertu de la continuité des x.

Nous supposerons ensuite l'existence d'une droite D dont l'intersection avec la surface satisfait aux conditions suivantes :

D ne rencontre aucune face.

Tout élément rencontré par D est tel que les x y soient des fonctions linéaires (en général non homogènes) des u. Il n'est d'ailleurs rencontré par D qu'en un point unique [1].

Un tel élément est évidemment lui-même (et non plus seulement dans sa représentation paramétrique) un tétraédroïde, lequel pourra toutefois être dégénéré.

Les conditions que nous venons d'énumérer sont, en particu-

---

[1] Ces suppositions n'ont rien d'essentiel. Elles ont seulement pour but d'éviter certaines complications du cas général.

lier, vérifiables si, dans *tout* élément de S, les x sont linéaires par rapport aux u, auquel cas S est dite une surface *polyédrale* fermée [1].

On peut même assujettir D à être aussi voisine qu'on le veut d'une droite arbitrairement donnée D_0 passant par l'origine.

26. — Nous admettrons, comme tout à l'heure, que D n'est autre que l'axe des x_1, lieu des points où r_0 est nul. Sur cette droite, ϑ sera égal à zéro ou à π, suivant le signe de x_1.

D'après cela, les éléments S pourront être divisés en trois catégories :

1° Ceux sur lesquels ϑ ne devient égal ni à o ni à π. La valeur correspondante de h sera prise égale à zéro ;

2° Ceux où l'on aura (une fois et une seule) $\vartheta = 0$ (de sorte qu'on ne pourra pas avoir $\vartheta = \pi$). Nous prendrons alors $h = -F(0)$;

3° Ceux où l'on aura (une fois et une seule) $\vartheta = \pi$. Nous prendrons alors $h = -F(\pi)$.

Moyennant ce choix de h, la formule (16) est valable même si S contient des éléments de deuxième ou troisième catégorie, bien qu'alors les fonctions ψ cessent d'être continues.

Pour le démontrer, supposons, par exemple, que tous les éléments soient de première catégorie, sauf un seul ε_1 qui sera de deuxième ; ε_1 contiendra donc un point P_1 tel que

$$x_2 = \ldots = x_n = 0, \quad x_1 > 0.$$

Soit $(u_1^0, \ldots, u_{n-1}^0)$ le point paramétrique auquel correspond P_1, lequel est intérieur au tétraédroïde T_1 qui donne naissance à ε_1. La formule de Green sera assurément applicable si, de T_1, on retranche l'intérieur d'un tétraédroïde τ_1 contenant également à

---

(1) Si les x sont linéaires par rapport aux u, le fait que D rencontre une face ou celui qu'elle a plus d'un point commun (et, par conséquent, une infinité de points communs) avec un élément, s'exprime par une équation linéaire non identique (ou quelquefois plusieurs équations) de la forme

$$A_1\xi_1 + \ldots + A_n\xi_n = 0,$$

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ étant les coordonnées d'un point quelconque de la droite et les A des constantes non toutes nulles.

On peut toujours choisir les ξ (même au voisinage de quantités données) de manière à ne vérifier aucune des relations ainsi écrites.

son intérieur le point paramétrique $(u''_1, \ldots)$. On pourra donc écrire la formule (16) si l'on admet :

1° que l'intégrale I n'est pas étendue à toute la surface S, mais seulement à la surface (ouverte) S' qu'on déduit de S en en supprimant la partie de ε_1 qui correspond à τ_1 ;

2° que, dans l'intégrale $n - 2^{\text{uple}}$ du second membre, on doit rajouter des termes correspondant à la frontière de τ_1 (chacun de ces termes ne figurant qu'une fois, contrairement à ceux qui correspondent aux faces de S).

Soit i l'ensemble des termes en question, je vais démontrer que i tend vers zéro lorsque le tétraédroïde τ_1 tend vers zéro dans toutes ses dimensions sans cesser de renfermer le point P_1.

Remarquons, en effet, qu'une demi-droite quelconque issue du point paramétrique $(u''_1, \ldots)$ coupe en un point unique la frontière de chacun des tétraédroïdes T_1 et τ_1. Dans l'espace E_n, ces points donneront des points de ε_1 en ligne droite avec P_1 et qui, puisque les $n - 1$ dernières coordonnées de P_1 sont nulles, se déduiront l'une de l'autre en multipliant chacune des coordonnées en question par un même facteur positif. Il en résulte, d'après ce qui a été vu plus haut, que, si l'on fait abstraction du facteur $[F(\zeta) + h]$, les éléments d'intégrales correspondants sur la frontière de T_1 et sur celles de τ_1 seront identiques : car (le facteur $[F(\zeta) + h]$ toujours mis à part) l'intégrale du second membre est de même forme que I avec le simple changement de n en $n - 1$.

Or, l'intégrale relative à la frontière de T_1 a un sens même lorsque l'on remplace chacun de ses éléments par sa valeur absolue. Soit I_0 la valeur obtenue dans ces conditions. On aura

$$|i| < I_0\alpha$$

α désignant le maximum de $|F(\zeta) + h|$, c'est-à-dire de $|F(\zeta) - F(0)|$, sur la frontière de τ_1. Or, ce maximum tend vers zéro avec les dimensions de τ_1 puisque θ est égal à 0 en P_1.

Donc, moyennant le choix indiqué de h, la formule (16) reste valable dans ces conditions ; et ce résultat s'établirait de même dans le cas d'un nombre quelconque d'éléments de 2^e^ ou de 3^e^ catégorie. Il suffirait de faire dans chacun d'eux la construction que nous venons de faire dans ε_1.

27. — Nous avons vu, d'autre part, que les termes en h subsistent seuls, tous les autres se détruisant sur la surface fermée S.

Donc, il vient :

$$I = J_1 F(o) + J_2 F(\pi), \tag{18}$$

J_1 et J_2 désignant respectivement les intégrales

$$\underbrace{\int \cdots \int}_{n-2} \frac{1}{r_0^{n-1}} \begin{vmatrix} x_2 & x_3 & \ldots & x_n \\ \frac{\partial x_2}{\partial v_1} & \frac{\partial x_3}{\partial v_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial v_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x_2}{\partial v_{n-2}} & \frac{\partial x_3}{\partial v_{n-2}} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial v_{n-2}} \end{vmatrix} dv_1\, dv_2 \ldots dv_{n-2} \tag{11'}$$

étendues, l'une, à l'ensemble des frontières des éléments de 2ᵉ catégorie et l'autre, à l'ensemble des frontières des éléments de 3ᵉ catégorie. On a d'ailleurs

$$J_1 + J_2 = o,$$

comme on le voit en remarquant que le second membre de (18) doit être indépendant de la constante additive qui reste arbitraire dans F. On peut donc écrire

$$I = -J_1[F(\pi) - F(o)] = -J_1 \int_0^\pi \sin^{n-2}\theta\, d\theta.$$

Or, comme nous l'avons déjà remarqué, l'intégrale (11') est de même forme que I avec changement de n en $n-1$; et cette intégrale est étendue à un système de surfaces fermées de l'espace E_{n-1}, à savoir, celles qu'on obtient en *projetant* [1] sur E_{n-1} les frontières des éléments de 2ᵉ catégorie de S et qui ne sont d'ailleurs autres que les frontières de tétraédroïdes à $n-2$ dimensions. En vertu de nos hypothèses, il en résulte

$$J_1 = K_{n-1} \Sigma \omega,$$

les ω étant des entiers, qui correspondent respectivement aux diverses surfaces fermées dont il vient d'être question.

---

(1) « Projeter sur l'espace E_{n-1} une figure de l'espace E_n » signifie simplement, en langage analytique, faire abstraction de l'une des coordonnées (ici x_1).

Ceci donne bien pour I une valeur de la forme (12) : il suffit de définir K_n par la relation

$$K_n = K_{n-1} \int_0^{\pi} \sin^{n-2} \theta d\theta.$$

Une fois les nombres K_n définis par cette relation de récurrence (avec $K_1 = 2$), notre conclusion est démontrée par ce qui précède, car, pour $n = 2$, l'expression (11) se réduit à

$$-\int \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \left(x_2 \frac{\partial x_1}{\partial u} - x_1 \frac{\partial x_2}{\partial u} \right) du = \int d \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x_2}{x_1} \right)$$

c'est-à-dire à la *variation d'argument* précédemment considérée ; elle vérifie, par conséquent, notre proposition.

28. — L'entier ω qui figure dans la formule (12) s'appellera l'*ordre* de l'origine par rapport à S.

L'ordre d'un point quelconque $(a_1, \ldots, a_n)$ (non situé sur S) s'obtiendra en remplaçant dans la formule (11) $x_1, \ldots, x_n$ par $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$.

Cet ordre est nul, en vertu des considérations précédentes si, par le point envisagé, on peut mener au moins une *demi-droite* (et non plus même une droite entière) qui ne rencontre pas S.

Si S est la frontière d'un tétraédroïde auquel l'origine est intérieure, la demi-droite définie par l'équation $\theta = \pi$ coupe S en un point et en un seul. L'ordre de l'origine est alors $+1$ ou -1, suivant que le déterminant (10) est positif ou négatif.

C'est ce que l'on vérifie sans difficulté dans le cas de $n = 2$ (où S est la frontière d'un triangle). Il est aisé de passer de là, par récurrence (en appliquant ce qui a été dit au n° **22**), aux autres valeurs de n, puisque, comme nous l'avons vu, J_1 est toujours formé d'ordres relatifs à des tétraédroïdes (ici, à un seul tétraédroïde) à $n - 1$ dimensions.

De plus, on déduit évidemment de là une expression de l'ordre relatif à une surface polyédrale fermée quelconque : on a

$$\omega = N_1 - N_2 \tag{19}$$

$N_1 + N_2$ étant le nombre total des points où une demi-droite D' issue du point $(a_1, \ldots, a_n)$ coupe S et l'un quelconque de ces points étant compté dans N_1 ou dans N_2 suivant que les n sommets de l'élément qui contient ce point, une fois rangés dans l'ordre qui résulte de l'orientation de cet élément et précédés d'un sommet situé à l'origine, donnent ou non un tétraédroïde d'orientation conforme à celle du système de coordonnées.

29. — Si les x sont simplement dérivables par rapport aux u dans chaque élément, sans vérifier les hypothèses particulières que nous venons de faire, la valeur de l'intégrale I est encore de la forme (12).

Ce fait n'étant pas, comme on va le voir, entièrement indispensable à ce qui va suivre, nous en résumerons simplement la démonstration en disant que toute portion T de S voisine [1] de D peut être remplacée par une autre T' peu différente de la première et telle que, dans tout élément de T' rencontré par D, les x soient des fonctions linéaires [2] des u. L'intégrale I prise sur la surface ainsi modifiée S' a la même valeur que sur S : l'ensemble de T et de T' forme, en effet, une surface fermée σ telle que S puisse être considérée comme la résultante de S' et de la surface ou des surfaces σ ; et l'intégrale relative à σ est nulle parce que σ est sans point commun avec n'importe quelle droite D' ayant pour une de ses équations $x_1 = 0$.

S' satisfait aux conditions moyennant lesquelles la relation (12)

---

(1) Pour préciser, on fera entrer dans T tout élément ε ayant un point commun avec D et tout élément ε' contigu à un élément ε.

(2) Remplaçons chaque élément ε ou ε' par le tétraédroïde e ou e' qui a les mêmes sommets : autrement dit, remplaçons les coordonnées x d'un tel élément par les quantités x' définies par les formules (20) (voir plus loin, n° 30) : nous obtenons une nouvelle surface ouverte T'_1. D'autre part, joignons chaque point de la frontière de T (laquelle est constituée par des faces F empruntées aux éléments ε') au point correspondant de la frontière de T'_1 : les segments de droite ainsi tracés forment une nouvelle portion de surface T'_2. T' sera l'ensemble de T'_1 et de T'_2.

Si la subdivision des éléments a été poussée assez loin, x_1 ne s'annulera ni sur T ni sur T'. De plus, soit ρ le minimum de r_0 sur la frontière de T. Si (après avoir formé T, mais avant d'en déduire T') on a subdivisé les éléments ε' de manière que, dans chaque face F de cette frontière, la distance de deux points quelconques soit inférieure à ρ, la partie T'_2 sera sans point commun avec D.

Quant à la condition que D ne rencontre pas les faces, elle se réalise, comme nous l'avons vu, en donnant au besoin un déplacement très petit à D.

avait été démontrée tout à l'heure. Cette relation est donc aussi vraie pour S.

30. — Mais il n'est pas nécessaire d'insister sur cette évaluation de l'ordre dans le cas des coordonnées dérivables. Nous pouvons, en effet, passer directement du cas qui a fait l'objet du n° **25** *bis* au cas tout à fait général où les x sont des fonctions continues quelconques des paramètres.

Il nous suffira, pour cela, de remplacer encore ces fonctions $x_1, \ldots, x_n$ par d'autres $x'_1, \ldots, x'_n$ qui en soient voisines et qui, dans chacun des éléments (après une subdivision convenable de ceux-ci), soient des fonctions linéaires des u.

Pour former ces x', nous supposerons les éléments rendus, par subdivision, assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'écart de chacune des fonctions continues x soit plus petit qu'un certain nombre η.

Ceci fait, nous remplacerons chaque élément par le tétraédroïde (dégénéré ou non) qui a les mêmes sommets : autrement dit, désignant par

$$x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

les coordonnées des n sommets d'un élément, nous prendrons, pour un point quelconque de cet élément,

$$(20) \quad x'_i = t_1 x_i^{(1)} + t_2 x_i^{(2)} + \ldots + t_n x_i^{(n)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

en appelant $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les coordonnées barycentriques (absolues) du point paramétrique correspondant par rapport au tétraédroïde qu'il décrit.

Il est clair (en vertu de la relation $t_1 + \ldots + t_n = 1$) que x'_i est compris entre la plus petite et la plus grande des quantités $x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)}$.

Il en résulte évidemment que la différence $x_i - x'_i$ est, dans tout l'élément considéré, inférieure en valeur absolue à 2η.

Nous substituerons, pour le calcul de l'ordre, les x'_i aux x_i, ce qui nous ramènera au cas précédemment traité : autrement dit, nous substituerons à S un *polyèdre d'approximation*, et nous définirons l'ordre par rapport à S comme étant l'ordre par rapport à ce polyèdre [1].

Pour légitimer cette définition, nous allons faire voir que *la valeur de ω est la même de quelque manière que soient choisies les fonctions x' ainsi substituées aux x*, pourvu que η soit assez petit.

D'une manière précise, il suffira que η soit inférieur à la plus petite distance réduite (voir le n° **271** du texte) du point $(a_1, \ldots, a_n)$ à S.

Considérons en effet un second polyèdre d'approximation, autrement dit un second système de fonctions $x''_1, x''_2, \ldots, x''_n$ voisines des x, formées d'une manière analogue aux x'. Supposons que les différences $x''_i - x_i$ soient également toutes inférieures en valeurs absolues à 2η.

Ce second polyèdre d'approximation sera déduit d'une décomposition des éléments de S différente de celle qui a fourni le premier. Soient par exemple $\tau'_1, \ldots$ les tétraédroïdes en lesquels a été décomposé T_1 dans le premier cas ; $\tau''_1, \ldots$ ceux en lesquels il a été décomposé dans le second cas. On pourra trouver une troisième décomposition en tétraédroïdes τ''' qui soit une subdivision de l'une comme de l'autre des deux premières [2].

Dans chaque tétraédroïde τ''', les x'_i comme les x''_i sont des fonctions linéaires des u ; et il en sera par conséquent de même de chacune des quantités

$$\xi_i = \frac{x'_i + \mu x''_i}{1 + \mu}$$

où μ est un paramètre positif quelconque.

Le lieu du point $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ est une nouvelle surface polyédrale fermée Σ, laquelle dépend du paramètre μ.

Moyennant l'hypothèse faite sur η, il n'arrivera pour aucune des valeurs positives de μ que Σ passe par le point $(a_1, \ldots, a_n)$.

---

(1) Dans l'espace ordinaire, par exemple, on remplacera S par un polyèdre inscrit à faces suffisamment petites.

(2) Si les deux tétraédroïdes τ'_1, τ''_1, par exemple, ont une région commune (c'est-à-dire s'ils ont en commun des points non frontières), cette région est un polyèdre convexe (cf. page 443, note 2) que l'on pourra décomposer en tétraédroïdes ; et on opèrera de même pour chaque tétraédroïde τ' combiné avec chaque tétraédroïde τ''.

En effet, ξ_i est (pour $\mu > 0$) compris entre x'_i et x''_i, par conséquent entre $x_i - 2\eta$ et $x_i + 2\eta$. Or par hypothèse, en chaque point de S, l'une au moins des quantités $|x_i - a_i|$ est supérieure à 2η.

Dès lors, l'ordre de notre point par rapport à Σ est défini pour toute valeur positive de μ, et (ainsi que cela se voit sur l'expression (11)) varie continûment avec μ.

Comme cet ordre est par essence un nombre entier, il reste nécessairement constant : il a donc la même valeur pour $\mu = 0$ et pour $\mu = \infty$, c'est-à-dire pour les deux surfaces polyédrales envisagées.

Il résulte également de là que le résultat obtenu aurait été le même pour une autre surface fermée dont les points correspondent à ceux de la première de manière que la distance réduite de deux points correspondants soit constamment inférieure à η' (η' désignant n'importe quelle quantité comprise entre 0 et η, limites exclues).

On voit donc que l'ordre ω est *continu d'ordre zéro* par rapport aux expressions des x en fonction des u : c'est-à-dire qu'il est très peu altéré (et même ne l'est pas du tout) si on altère les x de quantités partout très petites.

L'expression (11) ne mettait en évidence que la continuité d'ordre *un* : autrement dit, il paraissait nécessaire, pour affirmer que ω était très peu altéré de s'assurer que non seulement les fonctions x, mais leurs dérivées par rapport aux u, n'avaient subi que des variations très petites.

C'est grâce à cette continuité d'ordre 0 que nous avons pu définir ω par le moyen d'une surface polyédrale d'approximation [1].

31. — ω ne serait pas non plus changé si nous employions pour S un autre mode de représentation paramétrique, puisque sa définition par la formule (19) appliquée à une surface polyédrale voisine de S ne dépend pas de cette représentation.

En un mot, ω est bien une quantité complètement déterminée

---

(1) L'aire d'une surface courbe dans l'espace ordinaire est continue d'ordre 1 seulement par rapport à la forme de la surface. Aussi ne peut-on pas la définir par un polyèdre d'approximation sans précautions spéciales.

quand on donne la surface S et le point $(a_1, \dots a_n)$ non situé sur cette surface.

Il reste constant tant que le point en question varie continûment sans traverser la surface.

D'une manière générale, on s'assurera aisément qu'il possède, même lorsque les x sont simplement continus, les propriétés que nous avons constatées dans le cas où ils sont dérivables, et que nous aurons à invoquer dans la suite.

31 *bis*. — Ajoutons que la combinaison de la formule (19) avec les résultats du n° **30** permet d'évaluer l'ordre dans les cas les plus simples.

Cet ordre est évidemment égal à ± 1 lorsque S est un polyèdre convexe et $(a_1, \dots a_n)$ un point intérieur (puisqu'alors l'un des nombres N_1, N_2 de la formule (19) est égal à 1 et l'autre à zéro).

Il est de même égal à ± 1 pour la *sphère* à n dimensions de centre $(a_1, a_2, \dots a_n)$, comme on le voit en remplaçant une portion de celle-ci par une portion de plan.

IV. L'INDICE DE KRONECKER

32. — De la définition de l'ordre d'un point par rapport à une surface fermée, on passe à celle de l'indice d'un système de fonctions sur cette surface.

Soit encore la surface S lieu du point $(x_1, \dots x_n)$ dans l'espace à n dimensions. Soient d'autre part $f_1, f_2, \dots f_n$ un système de n fonctions continues de $x_1, \dots x_n$ lesquelles quant à présent n'ont besoin d'être définies que sur S.

L'*indice* du système de fonctions $f_1, \dots f_n$ sur S est par définition l'ordre de l'origine des coordonnées par rapport à la surface qu'engendre le point dont les coordonnées sont $f_1, \dots f_n$.

Cette définition suppose, d'après ce qui précède, que $f_1, \dots f_n$ ne s'annulent simultanément en aucun point de S.

$f_1, f_2, \dots f_n$ peuvent être regardés comme les composantes d'un vecteur et, en indiquant leurs valeurs en chaque point de S, on définit une *distribution vectorielle* continue attachée à cette surface.

Une telle distribution a un indice déterminé sur la surface fermée du moment que le vecteur n'est nul en aucun point de cette surface.

33. — La propriété fondamentale de l'indice ainsi défini est relative au cas où S est la frontière d'un volume V dans l'espace à n dimensions.

Supposons cette fois les fonctions $f_1, \ldots f_n$ définies et continues dans tout ce volume et non plus seulement sur S.

Supposons enfin que les équations

$$(21) \qquad f_1 = 0, \ldots f_n = 0$$

n'aient aucune solution commune à l'intérieur de V.

S'il en est ainsi, l'*indice du système de fonctions considéré sur* S *est nul.*

Pour le voir, commençons par remarquer que si, en un point quelconque de V, nous appelons F la plus grande des n valeurs absolues $|f_1|, |f_2|, \ldots |f_n|$, cette quantité F est elle-même une fonction continue, laquelle ne s'annule jamais et admet par suite un minimum positif g.

Subdivisons alors les éléments de V de telle manière que dans chacun d'eux l'oscillation de chacune des fonctions f soit inférieure à g' ($g' < g$). Soient alors ε l'un de ces éléments, s sa frontière. A chaque point de cette dernière on peut faire correspondre un nouveau point ayant pour coordonnées $f_1, \ldots f_n$: soit σ la surface fermée décrite par ce second point. On peut toujours faire partir de l'origine des coordonnées une demi-droite qui ne rencontre pas σ. Car si, en un point déterminé de ε, f_1 par exemple est la plus grande en valeur absolue des n fonctions, et qu'elle soit positive, ce qui entraîne $f_1 > g$, la fonction f_1 sera (puisque $g' < g$) également positive en tout point de ε ou de s : de sorte que la demi-droite $f_2 = \ldots = f_n = 0$, $f_1 < 0$ possède la propriété annoncée.

Il résulte de là que l'indice du système $f_1, \ldots f_n$ est nul sur s comme cela a lieu sur la frontière de chaque élément de V et que S peut être considérée comme la résultante (n° **23**) de toutes ces frontières, le théorème est démontré.

34. — Au contraire, l'indice n'est plus nécessairement nul si les équations (21) ont des solutions communes à l'intérieur de V.

Par contre, en les supposant pour fixer les idées en nombre fini et en désignant par $P_1, \ldots P_p$ les points correspondants de V, l'indice relatif à S est la somme algébrique d'indices partiels, dont chacun est caractéristique de l'un des points solutions.

Si, en effet, on décompose V en éléments, de manière que P_1 par exemple soit à l'intérieur (et non sur la frontière) d'un élément ε_1 qui ne contient aucun des autres points P, et que, de même, ceux-ci soient strictement intérieurs à $p - 1$ autres éléments distincts $\varepsilon_2, \ldots \varepsilon_p$, l'indice relatif à S sera la somme des indices relatifs aux frontières $s_1, s_2, \ldots s_p$ de $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_p$ (tous les autres éléments donnant d'après ce qui précède des indices nuls). Il est d'ailleurs évident d'après cela que l'indice relatif à s_1, par exemple, est indépendant de la forme et des dimensions de l'élément ε_1 sous la seule condition que celui-ci contienne à son intérieur le point solution P_1 et aucun des autres (en particulier si petit que soit ε_1). Cet indice dépend donc uniquement du point P_1 et de la manière dont les fonctions f se comportent au voisinage de ce point.

Si les f ont des dérivées en P_1, et que leur déterminant fonctionnel y soit différent de o, on peut montrer [1] que l'indice partiel est égal à $+1$ ou à -1, suivant le signe de ce déterminant fonctionnel.

Mais nous retiendrons surtout la conclusion suivante : *ω désignant l'indice du système $f_1, \ldots f_n$ sur S, l'inégalité $\omega \lessgtr 0$ entraîne l'existence d'une solution commune aux équations* (21) *dans* V.

35. — Le calcul de l'indice d'un système de fonctions sur une surface est souvent facilité d'une manière remarquable par le théorème suivant :

Théorème de Poincaré-Bohl. — Soient, sur une même surface fermée S, deux systèmes de n fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$: $g_1, g_2, \ldots, g_n$, tels que les éléments d'un même système ne s'annulent simultanément en aucun point de S.

Si ces deux systèmes n'ont pas le même indice, il existe sur S *au moins un point tel que l'on ait*

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \ldots = \frac{f_n}{g_n} < 0; \tag{22}$$

---

[1] Voir Picard, *Traité d'analyse*, tome II.

et, si leurs indices ne sont pas entre eux dans le rapport $(-1)^n$, *il existe sur* S *au moins un point tel que l'on ait*

$$(22') \qquad \frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \ldots = \frac{f_n}{g_n} > 0.$$

Ce théorème a été établi en 1886 par M. Poincaré [1] et obtenu à nouveau d'une manière indépendante par M. Bohl [2] en 1904.

Pour le démontrer, il suffit de considérer les deux systèmes auxiliaires

$$(23) \qquad \frac{f_1 + \mu g_1}{1 + \mu}, \quad \frac{f_2 + \mu g_2}{1 + \mu}, \quad \ldots, \quad \frac{f_n + \mu g_n}{1 + \mu}$$

et

$$(23') \qquad \frac{f_1 - \mu g_1}{1 + \mu}, \quad \frac{f_2 - \mu g_2}{1 + \mu}, \quad \ldots, \quad \frac{f_n - \mu g_n}{1 + \mu}$$

où μ est un paramètre positif.

Si le système de relations (22) n'est vérifié en aucun point de S, le système de fonctions (23) a un indice pour toute valeur positive de μ et, d'après un raisonnement déjà présenté antérieurement, cet indice est constant quel que soit μ. En faisant successivement $\mu = 0, +\infty$, on voit que $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ a même indice que $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$.

Si, d'autre part, les relations (22') ne sont vérifiées simultanément en aucun point de S, c'est l'indice du système (23') qui restera constant pour toute valeur de μ, de sorte que $f_1, f_2, \ldots, f_n$, donneront le même indice que $-g_1, -g_2, \ldots, -g_n$. Il en résulte (comme on le voit à l'inspection de la formule (11)), que les indices de $f_1, f_2, \ldots, f_n$ et de $g_1, g_2, \ldots, g_n$, sont entre eux dans le rapport $(-1)^n$.

Le théorème est donc démontré.

---

(1) Poincaré. — *Journ. de Math.*, « Sur les courbes définies par les équations différentielles », 4e série, t. II, p. 177 (1886).

(2) Bohl. — *Journ. für Math.*, t. 127, 1904. — Les énoncés donnés par les deux auteurs cités diffèrent entre eux et de celui du texte en ce qu'ils particularisent (chacun d'une manière différente) le choix des fonctions g. Mais leurs raisonnements (qui sont d'ailleurs également différents) s'étendent d'eux-mêmes au cas où ces fonctions sont prises arbitrairement. La démonstration que nous donnons ici est celle de M. Poincaré.

Si les deux indices considérés ne sont pas égaux en valeur absolue, il résulte des relations (22), (22′) que la quantité

$$f_1 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_n g_n$$

ne peut pas être de signe constant sur S.

V. APPLICATIONS

36. *Théorème de Schoenflies.* — La démonstration donnée précédemment du théorème de M. Jordan (voir nos 306 et 307 du texte et commencement de la présente note), nous apprend, non seulement qu'une courbe fermée sans point double divise le plan en une région extérieure et une région intérieure, mais aussi que l'ordre d'un point par rapport à la courbe est égal à 0 dans la première de ces régions, et à ± 1 dans la seconde.

Ceci suffit, comme on va le voir, pour démontrer un important théorème de M. Schoenflies, qui s'énonce ainsi :

Soient

$$X = f(x, y), \qquad Y = g(x, y) \tag{24}$$

deux fonctions de x et de y, bien définies et continues à l'intérieur et sur la circonférence du cercle

$$x^2 + y^2 \leqslant 1. \tag{25}$$

Supposons que les égalités

$$f(x, y) = f(x', y'), \qquad g(x, y) = g(x', y')$$

ne puissent être vérifiées simultanément dans le cercle en question sans que l'on ait $x = x'$, $y = y'$.

Soit C la courbe décrite par le point (X, Y) lorsque (x, y) décrit la circonférence du cercle.

Alors *les équations* (24) *où* X, Y *seront considérés comme donnés, auront une solution* (évidemment unique d'après l'hypothèse) *toutes les fois que le point* (X, Y) *sera pris à l'intérieur de* C.

Ce théorème résulte immédiatement des propriétés de l'ordre et de l'indice établies dans ce qui précède.

En effet un point (X, Y) intérieur à C est caractérisé par ce fait que son ordre par rapport à C est égal à ± 1.

Ceci revient à dire que l'indice du système $(f(x, y) - X, g(x, y) - Y)$ a cette même valeur et est par conséquent différent de o.

Donc les équations (24) ont à l'intérieur du cercle (25), une solution commune. C. Q. F. D.

37. — Je vais maintenant me servir, comme je l'avais annoncé, du théorème de Jordan dans l'espace à plus de deux dimensions. Je vais même supposer ce théorème démontré avec un complément qu'il est naturel de lui donner d'après les considérations qui précèdent. J'admettrai non seulement qu'une surface fermée sans point double divise toujours l'espace à n dimensions en une région extérieure et une région intérieure, mais encore que l'ordre de tout point intérieur est égal à ± 1.

Dans ces conditions, *le théorème de Schoenflies est démontré pour un nombre quelconque de variables.*

Autrement dit, soit

$$(24') \qquad \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = X_1, \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) = X_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = X_n \end{cases}$$

un système de relations définissant les quantités X comme fonctions continues des x dans un certain volume v de l'espace à n dimensions : volume que je supposerai, pour simplifier (quoique cette hypothèse ne soit pas essentielle), limité par une surface d'un seul tenant.

Supposons que, dans le volume en question, on ne puisse pas avoir simultanément

$$(26) \qquad f_i(x_1, \ldots, x_n) = f_i(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

si l'on n'a pas $x_1 = x'_1,\ x_2 = x'_2,\ \ldots,\ x_n = x'_n$.

Soit alors S la surface (nécessairement fermée et sans point double) que décrit le point X lorsque le point x décrit la frontière s de v. *Les équations (24') auront une solution toutes les fois que le point X sera à l'intérieur de S.*

La démonstration donnée pour le cas de deux variables subsiste en effet sans modification une fois admises les propositions ci-dessus indiquées.

On peut même remarquer qu'elle suppose seulement, pour démontrer l'existence d'une solution au moins, l'impossibilité des relations (26) entre deux points distincts de la *frontière* S.

On voit par ce que nous venons de dire que le théorème de M. Schoenflies n'est pas distinct au fond de celui de M. Jordan.

38. — La portée de ce théorème est d'ailleurs très grande : elle apparaîtra si on le compare aux résultats classiques de la théorie des équations du premier degré.

Considérons un système d'équations linéaires dans lequel le nombre des inconnues est égal à celui des équations.

Quoiqu'un tel système admette en général une solution et une seule, il peut arriver qu'il soit impossible ou bien indéterminé.

Mais la condition pour que le système admette une solution, quelles que soient les valeurs attribuées aux seconds membres, n'est pas distincte de celle qui exprime qu'il ne peut en avoir plus d'une.

Le théorème de M. Schoenflies nous apprend que cette dernière condition entraîne encore la première, du moins dans une portion convenablement choisie de l'espace, lorsqu'au lieu d'équations linéaires on envisage des équations tout à fait générales de la forme (24').

39. — La remarque suivante découle immédiatement du théorème de Schoenflies.

Supposons qu'entre deux volumes V, V' de l'espace à n dimensions (limités chacun par une surface d'un seul tenant) existe une correspondance parfaite et continue. Je dis que s'il en est ainsi, *aux points intérieurs à* V *correspondront des points intérieurs à* V' *et aux points frontières de* V, *des points frontières de* V'.

Supposons en effet que le point P, intérieur à V, corresponde à un point P', situé sur la frontière S' de V'. De son côté, s'il en est ainsi, la frontière S de V correspondra à une surface S' fermée et sans point double (à laquelle P n'appartiendra pas. D'après le théorème de M. Jordan, S' délimite un volume V', tout entier intérieur à V, et auquel par conséquent P′ est extérieur [1], de sorte que les points P, intérieurs à S, ne correspondraient à aucun point P′ intérieur à S′.

Il y a donc contradiction avec le théorème de Schoenflies, et notre conclusion est démontrée.

40. — Les considérations précédentes permettent également de démontrer, pour le volume de la sphère, à un nombre quelconque de dimensions, le *théorème de Brouwer*.

Le volume de la sphère à n dimensions ayant pour centre l'origine et pour rayon l'unité, est l'ensemble V des points qui vérifient l'inégalité

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leqslant A. \tag{27}$$

Le théorème que nous allons démontrer est le suivant :

Toute transformation parfaite et continue du volume V en lui-même laisse au moins un point invariant, soit à l'intérieur, soit sur la frontière.

Soient en effet, $x_1, x_2, \dots, x_n$; $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ les coordonnées de deux points correspondants. Considérons les n fonctions.

$$x'_1 - x_1,\ x'_2 - x_2,\ \dots,\ x'_n - x_n \tag{28}$$

en supposant d'abord que le point $(x_1, \dots, x_n)$ décrit la frontière de la sphère.

Si ces n fonctions s'annulent simultanément, le théorème est démontré. Sinon, le système de fonctions que nous venons d'écrire a même indice que le système $(x_1, \dots, x_n)$ car on a constamment [2]

$$x_1(x_1 - x'_1) + x_2(x_2 - x'_2) + \dots + x_n(x_n - x'_n) > 0.$$

---

(1) Le fait qu'un point P′ de S′ est nécessairement extérieur à toute surface S intérieure à V′ résulte de ce qu'on peut joindre P′ à l'infini par un chemin continu n'ayant avec V′ ou S′ d'autre point commun que P′ (ce qui, à son tour, doit être considéré comme faisant partie du théorème de Jordan).

(2) Cette inégalité est, en vertu de l'identité bien connue de Lagrange, une conséquence des équations

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = x_1'^2 + \dots + x_n'^2 = 1.$$

Comme ce dernier indice (c'est-à-dire l'ordre du centre par rapport à la surface de notre sphère) est différent de o, il existe forcément un point intérieur où les fonctions (28) sont simultanément nulles.

C. Q. F. D.

41. — Notons encore que la considération de l'indice permet de généraliser à une transformation biunivoque et continue quelconque une notion classique relative au *sens* des aires.

Lorsque dans les équations (24') les f ont des dérivées, on sait que la transformation conserve le sens des aires si son déterminant fonctionnel est positif et le change si ce déterminant est négatif.

En nous bornant aux équations (24), soit dans le plan du point (x, y) une courbe fermée sans point double c limitant une aire s, les points intérieurs à s auront par rapport à c un ordre égal à $+1$ ou à -1.

A c correspond (si comme nous le supposons la correspondance définie par les équations (24) est parfaite et continue) une courbe fermée sans point double C limitant une aire S. Les points intérieurs à celle-ci auront, par rapport à C, l'ordre ± 1.

On peut dire qu'une courbe telle que c ou C est décrite dans le sens *direct* si l'ordre des points intérieurs par rapport à cette courbe est $+1$, et dans le sens *rétrograde* si cet ordre est égal à -1.

Or, la tranformation (24) peut conserver ou changer, suivant les cas, le sens ainsi défini. Mais cela ne dépend que de la transformation elle-même (du moment qu'elle est supposée parfaite) et non du choix de la courbe fermée particulière c.

Il suffit pour le voir de déformer cette dernière d'une manière continue.

Du cas du plan, on passe aisément à celui d'une surface bilatère orientée comme il a été expliqué plus haut.

42. — Je signalerai sommairement une autre série d'applications des mêmes principes [1].

---

(1) Voir, à ce sujet, les Mémoires de M. Poincaré sur les courbes définies par les équations différentielles, *Journ. de Math.*, 3e série, t. VII, VIII; 4e s. t. I; ceux de M. Dyck dans les *Berichte der Gesellsch. der Wiss. zu Leipzig*, t. 37 (1885), p. 314; t. 38 (1886), p. 53 et plusieurs récents travaux, de M. Brouwer, insérés dans les Procès-verbaux de l'Académie royale des Sciences d'Amsterdam.

Considérons une variété V, fermée et m fois étendue de l'espace à n dimensions ($n > m$); cette variété sera supposée admettre en chacun de ses points un *plan tangent* déterminé, variant continûment avec la position du point.

Le cas le plus simple, et que nous aurons surtout en vue pour fixer les idées, est celui de la surface d'une sphère dans l'espace ordinaire.

Imaginons, sur V, une *distribution vectorielle tangente* : c'est-à-dire faisons correspondre à chaque point de V un vecteur tangent à V en ce point. Les composantes de ce vecteur seront supposées varier continûment, mais n'admettront pas nécessairement de dérivées partielles par rapport aux coordonnées de son origine.

Il interviendra d'ailleurs, surtout par sa direction : il est essentiel de remarquer que celle-ci sera indéterminée quand le vecteur sera nul et alors seulement.

Les paramètres directeurs pourront être considérés comme proportionnels à un système de différentielles $dx_1, \ldots dx_n$ des x, lesquelles correspondront (dans chaque élément) à des différentielles déterminées $du_1 \ldots du_m$ des paramètres u (en supposant, comme cela est légitime d'après l'hypothèse faite sur V, que les x soient dérivables par rapport aux u.

Ces différentielles du_1, du_m, ou encore d'autres quantités (finies) $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ qui leur soient proportionnelles avec un facteur de proportionnalité *positif*, pourront être regardées, à leur tour, comme définissant une direction de vecteur dans l'espace lieu du point paramétrique. Cette direction du vecteur ne sera indéterminée que si la première l'est. Nous admettrons que cela n'a lieu qu'en un nombre fini de points, et nous supposerons la décomposition de V en éléments faite de manière que ces points ne soient sur aucune face.

Dans ces conditions, sur la frontière de chaque élément, le système $(\lambda_1, \ldots \lambda_m)$ correspondant admettra un indice déterminé. *Considérons la somme σ de tous ces indices.*

On démontre [1] qu'elle ne dépend ni de la représentation paramétrique adoptée pour V, ni du choix de la distribution tangente.

Lorsque le nombre m est impair, la somme en question est

([1]) Voir les travaux cités ci-dessus.

nulle; car, d'après ce que nous venons de voir, elle ne devrait pas changer par le changement de signes simultanés de tous les z, lequel la multiplie, comme nous l'avons vu, par $(-1)^m$.

Il en est autrement pour les valeurs paires de m. L'entier τ est alors une des quantités qui caractérisent V au point de vue de de l'*analysis situs* : il a la même valeur pour deux variétés homeomorphes quelconques, même situées dans des espaces dont les nombres de dimensions diffèrent.

Pour avoir une valeur de τ différente de 0, il suffit de prendre pour V la surface d'une sphère dans l'espace à trois (ou plus généralement à $2p+1$) dimensions. Pour la sphère dans l'espace ordinaire, on peut, par exemple, prendre pour direction tangente celle de la tangente au méridien supposé parcouru vers un pôle déterminé. Une telle distribution est indéterminée aux deux pôles; dans le tétraédroïde (ici dans le triangle) entourant l'un d'eux, on peut prendre pour paramètres les coordonnées rectilignes du point projeté sur l'équateur et on trouve ainsi pour la somme des indices

$$\tau = 2. \tag{29}$$

43. — Du fait que l'entier τ est différent de zéro résulte immédiatement une conséquence bien remarquable.

Il est impossible de faire correspondre à chaque point de V une direction tangente à V en ce point, sans que cette direction soit indéterminée en un point au moins de V.

Car alors l'indice relatif à chaque élément serait nul comme nous l'avons démontré au n° 33.

Une telle impossibilité aura lieu par conséquent sur la surface de la sphère dans l'espace ordinaire.

44. — On peut déduire de là le *théorème de Brouwer* sur cette surface. Ce théorème est d'ailleurs, dans ce cas, limité aux transformations qui conservent le sens d'orientation (n° 41). Il s'énonce donc ainsi :

Toute transformation parfaite et continue de la surface d'une sphère, si elle conserve les sens d'orientation, laisse invariant un point au moins.

Pour le démontrer [1], soient M un point quelconque de la surface; M' son homologue; A, un point fixe. Nous prendrons pour direction tangente en M la tangente au cercle MM'A; plus exactement, à celui des deux arcs, déterminés sur ce cercle par les points A et M, qui contient le point M'. Une telle direction ne devient indéterminée que dans les trois cas suivants :

Si M coïncide avec A;
Si M' coïncide avec A;
Si M coïncide avec M'.

Chacune des deux premières circonstances est réalisée une fois et une seule. Considérons d'abord un élément de sphère entourant le point A. Si l'homologue A' du point A coïncide avec A, le théorème est démontré. Sinon le cercle AMM' sera (pour M voisin de A) très voisin du cercle AMA'. D'où résulte qu'il ne sera à aucun moment très petit. Comme AM est au contraire un petit arc, il fera en M un angle très petit avec le grand cercle AM. Les tangentes à ces deux arcs auront, dans ces conditions, même rotation totale lorsque M tournera autour de A. Il résulte de là que l'indice de la direction variable dont il s'agit le long de l'élément qui contient A est égal à + 1.

Si au contraire c'est le point M' qui coïncide avec A, le point M vient en un point B, distinct de A (sans quoi le théorème serait démontré).

Lorsque M tourne autour de B, M' tourne autour de A, et cela dans le même sens, en vertu de l'hypothèse faite sur notre transformation. Le cercle AM'M est d'ailleurs très voisin du cercle AM'B. Or la tangente en B ou en M à ce dernier a un sens de rotation inverse de celui de la tangente en A (ces deux droites étant symétriques l'une de l'autre par rapport au plan perpendiculaire au milieu de AB), c'est-à-dire inverse de celui de la rotation de M' autour de B.

Donc l'indice, le long d'un petit élément entourant le point B, est égal à — 1, et donne avec le premier une somme nulle.

Comme, au contraire, la somme totale est différente de 0, la

---

[1] Méthode de démonstration communiquée par M. Brouwer.

troisième hypothèse doit être, elle aussi, vérifiée en un point au moins de la surface.

C. Q. F. D.

Quant aux transformations qui changent l'orientation, elles peuvent ne point admettre de point invariant : tel est le cas de celle qui substitue à chaque point de la surface le point diamétralement opposé.

TABLE DES MATIÈRES DU TOME II

CHAPITRE VII

INTÉGRALES DÉFINIES

CHAPITRE VIII

SUR QUELQUES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE

CHAPITRE IX

LANGAGE GÉOMÉTRIQUE

CHAPITRE X

NOMBRES IMAGINAIRES

CHAPITRE XI

FONCTIONS DE VARIABLES IMAGINAIRES

CHAPITRE XII

DÉRIVÉES ET INTÉGRALES DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE IMAGINAIRE

NOTE DE M. J. HADAMARD

SUR QUELQUES APPLICATIONS DE L'INDICE DE KRONECKER

FIN

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie Bussière

ce problème est ramené au cas d'un extremum libre et la solution en est appliquée à diverses questions classiques.

D'ailleurs, la question est un cas particulier du problème, dit de Lagrange, dans lequel il s'agit d'annuler la variation première d'une intégrale, qui dépend de fonctions inconnues assujetties, ainsi que leurs premières dérivées, à vérifier des équations données, avec conditions aux limites quelconques. Ce problème conduit lui-même à un autre, dit *problème de Mayer*, que l'auteur traite en détail et qui donne lieu aux mêmes extensions successives que le problème fondamental : forme paramétrique, formule aux limites, limites variables, variations unilatérales, solutions discontinues; le chapitre se termine par une application au mouvement d'un mobile pesant avec résistance passive, et par d'autres applications analytiques aux équations aux dérivées partielles. Le problème de Mayer amène enfin au problème général du *Calcul fonctionnel*, dont l'auteur résume les principes, d'après les travaux récents ; il les applique au calcul de la variation infinitésimale des fonctions de Green et de Neumann, que l'on rencontre en Physique mathématique.

Le livre III traite des *conditions de l'extremum libre*. Après avoir trouvé une extrémale annulant la variation première de l'intégrale, il s'agit de rechercher si elle fournit effectivement un extremum ; l'invariance du signe de la variation seconde est, à cet égard, une condition nécessaire : l'auteur étudie ce signe suivant les méthodes de Jacobi-Legendre, généralisées par Clebsch pour le cas de plusieurs inconnues ; puis il expose les méthodes de Weierstrass et de MM. Darboux et Kneser, qui donnent des conditions suffisantes de l'extremum, par l'expression exacte de l'accroissement de l'intégrale quand on passe d'une extrémale à une extrémale voisine. Le chapitre suivant examine si les conditions que l'on vient de reconnaître suffisantes sont nécessaires ; il se termine par des exemples géométriques et mécaniques ; puis on passe au cas des limites variables, et, ensuite, à l'examen des variations unilatérales et des solutions discontinues, et, enfin, à l'étude des intégrales renfermant des dérivées d'ordre supérieur au premier. On revient alors aux méthodes anciennes pour les compléter de manière à obtenir des conditions suffisantes de minimum. Enfin, le dernier chapitre est consacré à un important théorème de M. Osgood ; il renferme l'exemple intéressant du mouvement dans l'air du solide de moindre résistance. Le volume se termine par une note complémentaire sur les fonctions implicites.

Le magistral ouvrage, dont nous venons d'analyser succintement le premier volume, renouvelle complètement un sujet intéressant et difficile ; il est aussi remarquable par la précision, la rigueur et l'élégance de la méthode que par l'originalité des aperçus et la richesse de l'information ; on y retrouve toutes les qualités de l'éminent professeur et du savant géomètre qui en est l'auteur.

M. Lelieuvre,

Professeur au Lycée et à l'École des Sciences de Rouen.

Extrait de la *Revue générale des Sciences*, du 30 avril 1910.

SAINT-AMAND, CHER. — IMPRIMERIE BUSSIÈRE