JORNAL DE SCIENCIAS

MATHEMATICAS, PHYSICAS E NATURAES

PUBLICADO SOB OS AUSPICIOS

DA

ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS DE LISBOA

SEGUNDA SÉRIE

Tom. V — Julho, 1897 — Num. XVII

LISBOA

TYPOGRAPHIA DA ACADEMIA

1897

INDEX

DESCOBERTA E PRIMEIRAS PROPRIEDADES GEOMETRICAS DE UMA ESPIRAL BINOMIA DO PRIMEIRO GRAU

(Memoria apresentada á Academia Real das Sciencias de Lisboa)

POR

ANTONIO CABREIRA

Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa
da Academia das Sciencias, Inscripções e Bellas Lettras de Toulouse
da Academia das Sciencias, Artes e Bellas Lettras de Dijon
do Instituto de Coimbra
da Sociedade Mathematica de França
e da Sociedade Physico-Mathematica de Kazan

---

1. *Equação.* Suppondo $\varphi(\alpha) = \alpha^m - \alpha^n$, na equação geral da espiral (*), fica $\varphi(r) = r^m - r^n$, d'onde

$$r^m - r^n = (\alpha^m - \alpha^n)\frac{\theta}{\pi}.$$

Considerando $m = 1$ e $n = 0$, resulta

$$r = (\alpha - r_0)\frac{\theta}{\pi} + r_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

em virtude de r_0, valor inicial do vector, ser egual á unidade.

Esta equação não pertence ao typo das equações das espiraes parabolica, hyperbolica e logarithmica e, por isso, representa uma espiral nova, que designaremos por *binomia do primeiro grau.*

2. *Differença circular* é a differença entre a caracteristica geometrica e o valor inicial do vector. Represental-a-hemos por Δ. Conforme

---

(*) Vidè a nossa memoria *Sobre a geometria da espiral.*

este valor é positivo, nullo ou negativo, assim temos

$$\alpha > r_0; \quad \alpha = r_0; \quad \alpha < r_0.$$

Discutindo a formula (1) para aquellas tres hypotheses, concluimos que, no primeiro caso, o vector augmenta na razão directa do angulo polar e a curva é centrifuga; no segundo, o vector é constante e a curva reduz-se a um circulo; no terceiro, o vector diminue na razão inversa do angulo polar e a curva é centripeta.

3. *Cada valor rectangular é egual á differença entre o producto da caracteristica geometrica pela metade do indice do valor e o producto do valor inicial do vector pela metade do mesmo indice, diminuida de uma unidade.*

Attribuindo a θ os valores $\frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi, \ldots, \frac{p}{2}\pi, \ldots$, a expressão (1) transforma-se, successivamente, em

$$r_1 = \frac{\alpha + r_0}{2}, \; r_2 = \alpha, \; r_3 = \frac{3\alpha - r_0}{2}, \; \ldots, \; r_p = \frac{p}{2}\alpha - \left(\frac{p}{2} - 1\right) r_0, \; \ldots \quad (2)$$

4. *Os valores rectangulares constituem uma progressão arithmetica, cuja razão é metade da differença circular.*

$$r_p - r_{p-1} = \frac{p}{2}\alpha - \left(\frac{p}{2} - 1\right) r_0 - \frac{p-1}{2}\alpha + \left(\frac{p-1}{2} - 1\right) r_0 = \frac{\Delta}{2} \ldots \quad (3)$$

5. *A somma de dois valores rectangulares é egual ao dobro de outro valor rectangular cujo indice representa a semi-somma dos indices das parcellas.*

Effectivamente,

$$r_p + r_q = \frac{(p+q)\alpha - (p+q-4) r_0}{2} = 2 r_{\frac{p+q}{2}} \ldots\ldots \quad (4)$$

6. *A subnormal é constante em todos os pontos,* porque

$$S_n = \frac{dr}{d\theta} = \frac{\Delta}{\pi} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

7. *O quadrado da normal é egual ao producto do quadrado da subnormal pela somma do valor inicial do vector com o quadrado do angulo polar mais o producto do valor inicial do vector pela somma do mesmo valor com o dobro do producto da subnormal pelo angulo polar.*

$$N^2 = \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{\pi}\theta + r_0\right)^2 = S_n^2 (r_0 + \theta^2) + r_0 (r_0 + 2 S_n \theta) \ldots \quad (6)$$

8. *A subtangente, em qualquer ponto, é egual á subtangente, no*

polo, mais o producto do angulo polar pela somma do dobro do valor inicial do vector com o producto d'aquelle angulo pela subnormal.

$$S_t = \frac{r^2}{\frac{\Delta}{\pi}} = \frac{\left(\frac{\Delta}{\pi}\theta\right)^2 + r_0^2 + 2\frac{\Delta}{\pi}\theta r_0}{\frac{\Delta}{\pi}} = (S_n\theta + 2r_0)\theta + S_{t_0} \ldots \quad (7)$$

9. *A area do circulo, cujo raio representa o vector, é egual ao producto da subtangente pela differença circular.*

Da formula anterior tira-se

$$\Delta S_t = \pi r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

10. *A caracteristica geometrica é egual á meia circumferencia rectificada, cujo raio representa a relação transcendente, no ponto quadrator.*

$$\rho = \frac{r}{\theta} = \frac{\Delta}{\pi} + \frac{r_0}{\theta}.$$

Fazendo $\theta = \pi$, vem

$$\pi\rho = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

11. *O producto do angulo polar pela differença entre a relação transcendente e a subnormal é egual ao valor inicial do vector.*

Attendendo á primeira egualdade estabelecida no numero anterior, é

$$\rho - S_n = \frac{r_0}{\theta}$$

ou

$$(\rho - S_n)\theta = r_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

12. *O producto da differença entre o vector e o seu valor inicial pela differença entre a relação transcendente e a subnormal é egual ao producto do valor inicial do vector pela subnormal.*

Comparando as formulas (1) e (10) conclue-se que

$$\frac{r - r_0}{\frac{\Delta}{\pi}} = \frac{r_0}{\rho - S_n};$$

d'onde

$$(r - r_0)(\rho - S_n) = r_0 S_n \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

13. Estudemos agora algumas propriedades da espiral binomia do primeiro grau, em relação ás espiraes parabolica de primeira ordem e hyperbolica, cuja caracteristica geometrica representa a differença circular d'aquella curva.

14. *A subnormal á espiral binomia do primeiro grau é egual á subnormal á espiral parabolica de primeira ordem* porque de $r' = \frac{\Delta}{\pi} \theta$, tira-se

$$\frac{d r'}{d \theta} = S'_n = \frac{\Delta}{\pi} = S_n \dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

15. *A differença entre os quadrados das normaes á espiral binomia do primeiro grau e á espiral parabolica de primeira ordem é egual á differença entre os quadrados dos vectores respectivos das duas curvas.*

Designando por N e N' as normaes consideradas, temos, em virtude da subnormal ser commum,

$$N^2 - N'^2 = r^2 - r'^2 \dots\dots\dots\dots \quad (13)$$

16. *A mesma differença é egual ao producto do valor inicial do vector pela somma do mesmo valor com o dobro do vector da espiral parabolica de primeira ordem.*

$$r^2 - r'^2 = \left(\frac{\Delta}{\pi} \theta + r_0\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi} \theta\right)^2 = r_0 (r_0 + 2 r') \dots . \quad (14)$$

17. *A differença entre a subtangente á espiral binomia do primeiro grau e a subtangente á espiral parabolica de primeira ordem é egual á relação entre a differença dos quadrados das normaes áquellas curvas e a subnormal.*

Subtrahindo $S'_t = \frac{r'^2}{S_n}$ de $S_t = \frac{r^2}{S_n}$, fica, attendendo a (13),

$$S_t - S'_t = \frac{r^2 - r'^2}{S_n} = \frac{N^2 - N'^2}{S_n} \dots\dots\dots \quad (15)$$

18. *A subtangente á espiral parabolica de primeira ordem tende para a subtangente á espiral binomia do primeiro grau, á medida que o angulo polar augmenta.*

Dividindo a segunda das formulas estabelecidas no numero anterior pela primeira, vem

$$\frac{S_t}{S'_t} = 1 + \frac{r_0}{\frac{\Delta}{\pi} \theta} \left(\frac{r_0}{\frac{\Delta}{\pi} \theta} + 2 \right) \dots\dots\dots \quad (16)$$

relação que tende para a unidade, á medida que θ augmenta.

19. *A differença entre os quadrados das tangentes á espiral binomia do primeiro grau e á espiral parabolica de primeira ordem é egual ao producto da differença entre as subtangentes respectivas pela relação*

entre a somma do quadrado da subnormal com o quadrado do valor inicial do vector e a subnormal.

Considerando o valor das tangentes ás referidas curvas, temos, suppondo ainda $r_0 = 1$,

$$T^2 - T'^2 = r^2 - r'^2 + S_t^2 - S'^2_t = r^2\left(1 + \frac{1}{S_n^2}\right) - r'^2\left(1 + \frac{1}{S_n^2}\right) =$$
$$= \frac{r^2 - r'^2}{S_n} \cdot \frac{S_n^2 + r_0^2}{S_n}.$$

Mas, em virtude do numero 17, é

$$S_t - S'_t = \frac{r^2 - r'^2}{S_n};$$

logo

$$T^2 - T'^2 = (S_t - S'_t)\frac{S_n^2 + r_0^2}{S_n} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

20. *A curvatura da espiral binomia do primeiro grau, n'um ponto, é egual á curvatura da espiral parabolica de primeira ordem, no ponto cujo vector representa o vector da primeira curva, n'aquelle ponto.*

Effectivamente, quando fazemos $r' = r$, dá-se a egualdade

$$R = \frac{(r^2 + S_n^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2S_n^2} = \frac{(r'^2 + S_n^2)^{\frac{3}{2}}}{r'^2 + 2S_n^2} = R' \quad\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

21. *A espiral binomia do primeiro grau é assympthotica da espiral parabolica de primeira ordem.*

Dividindo a formula que representa a primeira curva pela que representa a segunda, fica

$$\frac{r}{r'} = 1 + \frac{\pi r_0}{\Delta\theta} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

d'onde se conclue que r' só attingiria r quando θ fosse infinito.

22. *Ha dois vectores communs á espiral binomia do primeiro grau e á espiral hyperbolica.*

Dividindo $r = \frac{\Delta}{\pi}\theta + r_0$ por $r'' = \frac{\Delta\pi}{\theta}$, resulta

$$\frac{r}{r''} = \frac{\theta}{\pi}\left(\frac{\theta}{\pi} + \frac{r_0}{\Delta}\right).$$

Para que haja vectores communs, é necessaria a condição

$$(\Delta\theta + r_0\pi)\theta = \pi^2\Delta,$$

a qual se verifica para

$$\theta = \pi\left(-\frac{r_0}{2\Delta} \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{4\Delta^2}+1}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

23. *O producto do vector da espiral bonomia do primeiro grau pelo vector da espiral hyperbolica tende para o quadrado da differença circular, á medida que o angulo polar augmenta.*

Multiplicando ordenadamente as primeiras duas formulas estabelecidas no numero anterior, vem

$$r\,r'' = \Delta^2 + \frac{\pi r_0 \Delta}{\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

SOBRE A AREA DOS POLYGONOS REGULARES

(Memoria apresentada á Academia Real das Sciencias de Lisboa)

POR

ANTONIO CABREIRA

Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa
da Academia das Sciencias, Inscripções e Bellas Lettras de Toulouse
da Academia das Sciencias, Artes e Bellas Lettras de Dijon
do Instituto de Coimbra
da Sociedade Mathematica de França
e da Sociedade Physico-Mathematica de Kazan

---

1. *A area do hexagono regular inscripto, no circulo, é egual ao dobro da area do triangulo equilatero inscripto.*

Supponhamos que ABC representa o triangulo equilatero inscripto no circulo de raio $\overline{AO}$. Dividindo, ao meio, os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ e $\overset{\frown}{AC}$, obtemos os pontos D, E e F que, ligados aos vertices do triangulo, dão os lados do hexagono regular inscripto, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ e $\overline{AF}$. Ora a area do hexagono é egual á do triangulo dado mais o triplo da area do triangulo ABD, a qual é egual á do triangulo BCE e ainda á do triangulo ACF. Mas o triangulo ABC pode-se considerar composto dos triangulos eguaes ABO, ACO e BCO; e, como $\overline{AD}$ é egual a $\overline{AO}$, por ser o lado do hexagono, e, ainda pela mesma razão, $\overline{BD}$ é egual ao $\overline{BO}$, attendendo, além d'isso, a que $\overline{AB}$ é um lado commum aos triangulos ABD e ABO, conclue-se a egualdade d'estes dois triangulos.

Fazendo identico raciocinio, em relação aos triangulos BCE e BCO, ACF e ACO, fica demonstrado o theorema.

2. *O triplo da area do quadrado inscripto é egual ao dobro do quadrado do lado do triangulo equilatero inscripto.*

Considerando $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ como lados do dodecagono regular, do quadrado e do triangulo equilatero inscriptos, será

$$l_{12}=\overline{AB}=r\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2r^2-r^2\sqrt{3}}=\sqrt{\overline{AD}^2-r\overline{AE}}.$$

Levantemos por B uma perpendicular a $\overline{AB}$ e, com centro em A e raio egual a $\overline{AD}$, descrevamos uma circumferencia, a qual cortará a perpendicular n'um ponto M. N'este triangulo, temos

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{\overline{AD}^2-r\overline{AE}}=\sqrt{l_4^2-rl_3};\ldots \quad (1)$$

portanto

$$\overline{BM}=\sqrt{r\overline{AE}}=\sqrt{rl_3}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Se $\overline{AL}$ fôr o lado octogono regular, inscripto no mesmo circulo, egual raciocinio nos conduzirá a

$$l_8=\overline{AL}=\sqrt{\overline{AN}^2-\overline{LN}^2}=\sqrt{\overline{AD}^2-r\overline{AD}}=\sqrt{l_4^2-rl_4};\ldots \quad (3)$$

d'onde

$$\overline{LN}=\sqrt{r\overline{AD}}=\sqrt{rl_4},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

em que N representa a intersecção da perpendicular levantada por L a $\overline{AL}$ com a circumferencia descripta com o raio $\overline{AD}$.

Levantando á quarta potencia os membros das egualdades (2) e (4) e dividindo-as, ordenadamente, fica

$$\frac{\overline{BM}^4}{\overline{LN}^4}=\frac{\overline{AE}^2}{\overline{AD}^2}=\frac{l_3^2}{a_4};$$

logo

$$3a_4=2l_3^2.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

3. *O dobro da area do dodecagono regular incripto é egual ao triplo da area do quadrado inscripto.*

Introduzindo na formula

$$a_{12}=6\,l_{12}\,a$$

os valores do lado do dodecagono e do apothema, vem

$$a_{12}=3r^2\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

Quadrando, fica

$$a_{12}^2 = 9\,r^4;$$

d'onde

$$\frac{a_{12}}{a_4} = \frac{3}{2}$$

ou

$$2\,a_{12} = 3\,a_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

4. *A area do dodecagono regular inscripto é egual ao quadrado do lado do triangulo equilatero inscripto.*

Comparando as formulas (5) e (6), obtemos

$$3\,a_4 = 2\,l_3^2 = 2\,a_{12};$$

logo

$$a_{12} = l_3^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

5. *O quadrado da area do octogono regular inscripto é egual ao dobro do quadrado da area do quadrado inscripto.*

De

$$a_8 = 2\,r\,r\sqrt{2},$$

conclue-se

$$a_8^2 = 2\,l_4^4 = 2\,a_4^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

6. *O quadrado da area do octogono regular inscripto é egual a oito nonos do quadrado da area do dodecagono inscripto.*

Quadrando (6), resulta

$$a_4^2 = \frac{4}{9}\,a_{12}^2.$$

Comparando com (8), vem

$$a_8^2 = \frac{8}{9}\,a_{12}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

7. *A area do quadrado inscripto é egual á somma das areas dos quadrados eguaes que se podem inscrever de maneira que um d'elles seja concentrico ao circulo e que cada um dos outros quatro tenha dois vertices na circumferencia.*

Effectivamente, dividindo, ordenadamente as formulas

$$a_4 = 2\,r^2 \quad \text{e} \quad x^2 = \frac{2}{5}\,r^2$$

vem

$$a_4 = 5\,x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

8. *A area do hexagono regular inscripto é egual á metade da area do triangulo equilatero circumscripto.*

Sejam $A'B'C'$ e ABC os triangulos equilateros circumscripto e inscripto. Baixemos de B' uma perpendicular a $\overline{A'C'}$; pelo ponto D, assim obtido, tiremos uma parallela a $\overline{BC}$, que encontra $\overline{A'B'}$ em E. O triangulo $A'DE$ é egual ao triangulo inscripto por ser

$$L_3 = 2\,l_3.$$

Logo, em virtude da construcção, é

$$A'B'D = \frac{A_3}{2} = \sqrt{a_3 A_3} = a_6 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

9. *A area do hexagono regular circumscripto é egual a dois terços da area do triangulo equilatero circumscripto.*

Em consequencia das expressões

$$a_6 = \frac{3}{4} A_6 \quad \text{e} \quad A_3 = 2\,a_6,$$

é

$$A_6 = \frac{2}{3} A_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

10. *O lado do hexagono regular circumscripto é egual a dois terços do lado do triangulo equilatero inscripto.*

Sabemos que

$$A_6 - a_6 = \left(\frac{4}{3} - 1\right) a_6 = \frac{a_6}{3}.$$

Esta mesma expressão ha de representar a area do hexagono inscripto n'um circulo de raio $\frac{L_6}{2}$; sendo assim, teremos

$$\frac{a_6}{3} = \frac{3}{2} L_6 \sqrt{\frac{L_6^2}{4} - \frac{L_6^2}{16}} = \frac{3}{8} L_6^2 \sqrt{3};$$

d'onde

$$L_6^2 = \frac{8}{9\sqrt{3}} a_6.$$

Substituindo a_6 pelo seu valor, em funcção de l_3, e extrahindo a raiz quadrada, vem

$$L_6 = \frac{2}{3} l_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

11. *As areas do hexagono regular e do triangulo equilatero circumscriptos estão entre si como o lado d'aquelle polygono está para o lado do triangulo equilatero inscripto.*

Effectivamente, comparando (12) e (13), resulta

$$\frac{A_6}{A_3}=\frac{L_6}{l_3} \qquad (14)$$

12. *A area do hexagono regular inscripto é egual á area do triangulo inscripto, no triangulo equilatero circumscripto ao circulo, e circumscripto ao triangulo equilatero inscripto no circulo.*

Dados dois triangulos semelhantes com os lados homologos parallelos e sendo um interior ao outro, a area de qualquer triangulo, inscripto no primeiro, e circumscripto ao segundo, é meia proporcional entre as suas areas; então, se considerarmos aquelles dois triangulos como equilateros circumscripto e inscripto no circulo, fica demonstrado o que pretendiamos.

13. *A area do triangulo equilatero circumscripto ao circulo é egual á média arithmetica dos productos dos lados do triangulo inscripto, n'aquelle triangulo, e circumscripto ao equilatero inscripto, no circulo, pelas perpendiculares tiradas a esses lados pelos vertices oppostos.*

Sendo l', l'' e l''' e p', p'' e p''' os lados do triangulo inscripto no triangulo equilatero circumscripto ao circulo e circumscripto ao triangulo equilatero inscripto no circulo, temos, em virtude do principio anterior

$$3\,a_6=\frac{l'p'+l''p''+l'''p'''}{2};$$

d'onde, devido ao numero 8,

$$A_3=\frac{l'p'+l''p''+l'''p'''}{3} \qquad (15)$$

14. *A média arithmetica das areas dos quadrados inscripto e circumscripto é egual á area do dodecagono regular inscripto.*

Sommando

$$a_4=2\,r^2 \quad \text{e} \quad A_4=4\,r^2,$$

resulta

$$a_4+A_4=2\cdot 3\,r^2=2\,l_3^2,$$

ou, attendendo a (7),

$$a_{12}=\frac{a_4+A_4}{2} \qquad (16)$$

15. *A area do octogono regular inscripto é meia proporcional entre as areas dos quadrados inscripto e circumscripto.*

Multiplicando as formulas que representam as areas dos quadrados inscripto e circumscripto, fica

$$a_4A_4=8\,r^4=a_8^2, \qquad (17)$$

em virtude do numero 5.

16. *A area do quadrado circumscripto é egual a quatro terços da area do dodecagono regular inscripto.*

Fazendo, em (6)

$$a_4 = \frac{A_4}{2},$$

vem

$$A_4 = \frac{4}{3} a_{12} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (18)$$

17. *A menor diagonal do hexagono regular circumscripto é egual ao lado do quadrado circumscripto.*

Considerando D_6 e d_6 como as menores diagonaes dos hexagonos regulares circumscripto e inscripto, é

$$\frac{A_6}{a_6} = \frac{4}{3} = \frac{D_6^2}{d_6^2}.$$

Mas

$$d_6 = l_3;$$

logo

$$D_6 = 2\,r = L_4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (19)$$

18. *A area do quadrado circumscripto é egual ao triplo do quadrado do lado do hexagono regular circumscripto.*

Attendendo aos valores dos lados do quadrado circumscripto e do triangulo equilatero inscripto, temos

$$\frac{L_4^2}{l_3^2} = \frac{4}{3} = \frac{A_6}{a_6} = \frac{3\,L_6^2}{l_3^2};$$

portanto

$$A_4 = 3\,L_6^2 \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (20)$$

19. *O dobro da area do triangulo equilatero circumscripto é egual ao triplo da area do hexagono regular circumscripto.*

Representando A'_3 a area do triangulo equilatero inscripto no circulo circumscripto ao hexagono regular circumscripto, é

$$\frac{A'_3}{a_3} = \frac{3\,L_6^2}{l_3^2};$$

logo

$$A'_3 = \frac{4}{3} a_3$$

ou

$$A_3 = 3\,A'_3;$$

d'onde, em virtude do numero 1,

$$2\,A_3 = 3\,A_6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

20. *O quadrado da area de qualquer octogono regular é egual ao dobro da potencia de quarta ordem da menor diagonal.*

Suppondo que o octogono dado é circumscripto ao circulo, temos

$$\frac{A_8}{a_8} = \frac{D_8^2}{d_8^2} = \frac{D_8^2}{a_4}.$$

Attendendo a (8), fica

$$A_8^2 = 2\,D_8^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

21. *A area de qualquer dodecagono regular é egual ao triplo do quadrado da menor diagonal.*

Considerando o polygono proposto como circumscripto ao circulo, resulta

$$\frac{A_{12}}{a_{12}} = \frac{D_{12}^2}{r^2}.$$

Em virtude de (7) e substituindo r pelo seu valor, em funcção de l_3, conclue-se

$$A_{12} = 3\,D_{12}^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

22. *O quadrado da area de qualquer hexagono regular é egual a tres quartos da potencia de quarta ordem da menor diagonal.*

Procedendo como nos dois numeros anteriores, vem

$$\frac{A_6}{a_6} = \frac{D_6^2}{l_3^2};$$

d'onde, attendendo ao valor de a_6, em funcção de l_3,

$$A_6^2 = \frac{3}{4}\,D_6^4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

SOBRE ALGUMAS APPLICAÇÕES DOS DETERMINANTES Á GEOMETRIA DO TRIANGULO

POR

JORGE FREDERICO D'AVILLEZ

Visconde do Reguengo

A geometria do triangulo é, segundo a phrase do distincto geometra inglez sr. Davis, o progresso mais notavel feito pelas mathematicas elementares, n'estes ultimos tempos. (*) O grande numero de propriedades metricas e descriptivas interessantes e notaveis descobertas recentemente, ao qual juntámos a nossa modestissima parte, prova a attenção que este ramo da geometria mereceu e merece, principalmente desde 1873, a grande numero de geometras, em quasi todos os paizes.

As relações metricas podem com vantagem ser representadas, em alguns casos elementares, por determinantes, e é da applicação d'estes aos elementos primordiaes do triangulo (lados e angulos), que nos vamos occupar, apresentado diversas egualdades, que nos parecem curiosas, em que figuram em geral os outros elementos, taes como as areas, os raios de alguns circulos notaveis, distancia de pontos, e outras grandezas que se consideram no plano do triangulo.

Em geral, consideraremos um triangulo ABC, cujos lados são $a, b, c, (a > b > c)$, em que R é o raio do circulo circumscripto, r o raio do circulo inscripto, r_a, r_b, r_c os raios dos circumscriptos, p o semiperimetro e S a area.

Usaremos tambem das seguintes abreviaturas: (**)

B. M. E.—*Bulletin de Mathématiques Elementaires,* de Niewenglowski.

(*) Sessão de 20 de janeiro de 1888 da *Association for the Improvement of Geométrical Teaching.*

(**) Adoptadas pela commissão internacional do *Repértoire bibliographique des sciences mathématiques.*

J. E.—*Journal de Mathématiques Elementaires,* de De Longchamps.
J. E. V.—*Journal de Mathématiques Elementaires,* de Vuibert.
N. C. M.—*Nouvelle Correspondance Mathématique,* de Catalan.
P. M.—*Philosophical Magazine.*
N. A.—*Nouvelles Annales de Mathématiques.*

Começaremos por estabelecer pelos determinantes duas relações conhecidas.

1. Projectando sobre cada lado os outro dois, teremos as tres equações homogeneas do primeiro grau

$$\begin{aligned} -a + b\cos C + c\cos B &= 0 \\ a\cos C - b + c\cos A &= 0 \\ a\cos B + b\cos A - c &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Estas equações devendo ser compativeis, deve ser nullo o determinante formado pelos coefficientes das incognitas a, b, c. Teremos pois

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & \cos A \\ \cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo este determinante pela regra de Sarrus, vem

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C - 1 = 0.$$

Esta egualdade dá-nos a relação entre os cosenos dos tres angulos de um triangulo.

Pode obter-se de outra fórma esta relação. Com effeito, como se sabe

$$\cos C + \cos(A + B) = 0$$

e portanto

$$\cos C = \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B - \cos A\cos B$$

ou

$$\cos^2 C = \operatorname{sen}^2 A \operatorname{sen}^2 B + \cos^2 A\cos^2 B - 2\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\cos A\cos B$$

e ainda, como é

$$\operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A \qquad \operatorname{sen}^2 B = 1 - \cos^2 B$$

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 + 2\cos A\cos B\cos(A + B)$$

vem finalmente

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C - 1 = 0 \tag{2}$$

2. Escrevendo as equações homogeneas (1) com a fórma

$$\begin{aligned} a - b\cos C - c\cos B &= 0 \\ b - c\cos A - a\cos C - 0\cos B &= 0 \\ c - b\cos A - 0\cos C - a\cos B &= 0 \end{aligned}$$

e eliminando $-\cos C$ e $-\cos B$, vem o determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b - c\cos A & a & 0 \\ c - b\cos A & 0 & a \end{vmatrix} = 0$$

ou ainda o determinante

$$\begin{vmatrix} a^2 & b & c \\ b - c\cos A & 1 & 0 \\ c - b\cos A & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

do qual se tira

$$a^2 = -\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ b - c\cos A & 1 & 0 \\ c - b\cos A & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

e finalmente

$$a^2 = -\begin{vmatrix} 0 & b & c \\ b & 1 & \cos A \\ c & \cos A & 1 \end{vmatrix} = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \tag{3}$$

que é a relação conhecida entre os tres lados de um triangulo e o angulo opposto a um d'elles.

3. *Se* R *e* r *são os raios dos circulos circumscripto e inscripto é em qualquer triangulo*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos C & \cos B \\ 1 & \cos C & 1 & \cos A \\ 1 & \cos B & \cos A & 1 \end{vmatrix} = -\frac{r^2}{R^2} \tag{4}$$

Subtrahindo a primeira linha de cada uma das outras tres, vem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos C & \cos B \\ 1 & \cos C & 1 & \cos A \\ 1 & \cos B & \cos A & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cos C - 1 & \cos B - 1 \\ 0 & \cos C - 1 & 0 & \cos A - 1 \\ 0 & \cos B - 1 & \cos A - 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \cos C - 1 & \cos B - 1 \\ \cos C - 1 & 0 & \cos A - 1 \\ \cos B - 1 & \cos A - 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Applicando a este determinante a regra de Sarrus, temos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos C & \cos B \\ 1 & \cos C & 1 & \cos A \\ 1 & \cos B & \cos A & 1 \end{vmatrix} = 2(\cos A - 1)(\cos B - 1)(\cos C - 1)$$

$$= -2(1 - \cos A)(1 - \cos B)(1 \cos C) = -16 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{B}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{C}{2}.$$

Da formula (3) tira-se

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

e portanto

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} =$$

$$= \frac{2(p-b)(p-c)}{bc}$$

sendo p o semi-perimetro. Teremos pois

$$\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = \frac{(p-b)(p-c)}{bc}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{B}{2} = \frac{(p-c)(p-a)}{ac}$$

$$\operatorname{sen}^2 \frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)}{ab}$$

e, por conseguinte

$$\operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{B}{2} \operatorname{sen}^2 = \frac{(p-a)^2 (p-b)^2 (p-c)^2}{a^2 b^2 c^2} = \frac{p^2 r^2}{16 R^2 S^2}$$

sendo R, r, S, respectivamente, o raio do circulo circumscripto, o raio do circulo inscripto e a area do triangulo.

Teremos pois

$$16 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{B}{2} \operatorname{sen}^2 \frac{C}{2} = \frac{r^2}{R^2}$$

e finalmente

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos C & 1 & 1 \\ 1 & \cos B & \cos C & \cos B \\ 1 & 1 & 1 & \cos A \\ 1 & 1 & \cos A & 1 \end{vmatrix} = -\frac{r^2}{R^2}$$

4. *N'um triangulo qualquer é*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} B & \operatorname{sen} C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{4 R^2 r} \tag{5}$$

Subtrahindo a primeira columna de cada uma das seguintes teremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} B & \operatorname{sen} C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} B - \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} C - \operatorname{sen} A \\ \cos A & \cos B - \cos A & \cos C - \cos A \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \operatorname{sen} B - \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} C - \operatorname{sen} A \\ \cos B - \cos A & \cos C - \cos A \end{vmatrix}$$

Substituindo os valores conhecidos

$$\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} A = -2 \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}$$

$$\operatorname{sen} C - \operatorname{sen} A = -2 \operatorname{sen} \frac{A-C}{2} \cos \frac{A+C}{2}$$

$$\cos B - \cos A = 2 \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \operatorname{sen} \frac{A+B}{2}$$

$$\cos C - \cos A = 2 \operatorname{sen} \frac{A-C}{2} \operatorname{sen} \frac{A+C}{2}$$

teremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} B & \operatorname{sen} C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2} & -2 \operatorname{sen} \frac{A-C}{2} \cos \frac{A+C}{2} \\ 2 \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} & 2 \operatorname{sen} \frac{A-C}{2} \operatorname{sen} \frac{A+C}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -4 \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-C}{2} \left(\cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A+C}{2} - \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A+C}{2} \right)$$

$$= 4 \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-C}{2} \operatorname{sen} \frac{B-C}{2}.$$

Como se sabe

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

e portanto

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b-c}{\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} C}$$

ou

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2}}{\operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{b-c}{a}$$

e, como

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} = \cos \frac{B+C}{2}$$

vem

$$\operatorname{sen} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a} \cos \frac{A}{2}.$$

Da mesma fórma teremos

$$\operatorname{sen} \frac{A-C}{2} = \frac{a-c}{b} \cos \frac{B}{2}$$

$$\operatorname{sen} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{c} \cos \frac{C}{2}.$$

Teremos pois

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} B & \operatorname{sen} C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = 4 \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{abc} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Da formula (2) tira-se

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

e ainda

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=$$

$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

Temos pois

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

e tambem

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}.$$

Logo

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}=\frac{1}{abc}\sqrt{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{pS}{abc}$$

e portanto

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} B & \operatorname{sen} C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix}=4\frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{a^2b^2c^2}pS=$$

$$=4\frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{a^2b^2c^2}p^2r$$

e como é

$$a^2b^2c^2=16R^2S^2=16R^2r^2p^2$$

vem finalmente

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} B & \operatorname{sen} C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix}=\frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{4R^2r}.$$

5. *Em qualquer triangulo, sendo* l_{1a}, l_{1b}, l_{1c} *as bissectrizes exteriores, é tambem*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} B & \operatorname{sen} C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix}=\frac{1}{R}\cdot\frac{8S^2}{l_{1a}l_{1b}l_{1c}}. \qquad (6)$$

Como se sabe a area de um triangulo é dada em funcção das bissectrizes exteriores, pela formula

$$S = \sqrt{\frac{l_{1a} l_{1b} l_{1c} (b-c)(a-c)(a-b)p}{8abc}}$$

Teremos pois

$$4R^2 r \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} B & \operatorname{sen} C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = \frac{8abc \cdot S^2}{p l_{1a} l_{1b} l_{1c}}$$

d'onde se tira

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} B & \operatorname{sen} C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = \frac{1}{R} \cdot \frac{8S^2}{l_{1a} l_{1b} l_{1c}}.$$

6. *Se representarmos por* S_1 *a area do triangulo formado pelo centro do circulo circumscripto, pelo centro do circulo inscripto e pelo orthocentro do triangulo dado, é tambem*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} B & \operatorname{sen} C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = \frac{2S_1}{R^2} \tag{7}$$

Com effeito, segundo um theorema do sr. P. Sondat, (*) sabe-se que

$$S_1 = \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{8r}$$

tira-se pois immediatamente

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} B & \operatorname{sen} C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = \frac{2S_1}{R^2}.$$

Tambem podemos demonstrar esta egualdade partindo da relação (**)

$$\frac{S_1}{S} = \frac{abc}{l_{1a} l_{1b} l_{1c}}.$$

Com effeito teremos

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{8SS_1}{abc} = \frac{1}{R} \cdot \frac{8S^2}{l_{1a} l_{1b} l_{1c}}$$

(*) *N. A.*, questão 1593.
(**) Apresentámos esta relação no *J. E.*

e ainda

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \operatorname{sen} A & \operatorname{sen} B & \operatorname{sen} C \\ \cos A & \cos B & \cos C \end{vmatrix} = \frac{1}{R}\,\frac{8S^2}{l_{1a}l_{1b}l_{1c}} = \frac{8SS_1}{4R^2S} = \frac{2S_1}{R^2}$$

como pretendiamos demonstrar.

7. *N'um triangulo qualquer é*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2a & a+b \\ 1 & 2a & a & a+c \\ 1 & a+b & a+c & a \end{vmatrix} = -4r(4R+r) \tag{8}$$

Segundo um theorema conhecido temos (*)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2a & a+b \\ 1 & 2a & a & a+c \\ 1 & a+b & a+c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}.$$

Subtrahindo a quarta columna da segunda e terceira, teremos

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2a & a+b \\ 1 & 2a & a & a+c \\ 1 & a+b & a+c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -b & a-b & b \\ 1 & a-c & -c & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -b & a-b \\ 1 & a-c & -c \\ 1 & b & c \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -b & a-b \\ 0 & a+b-c & b-c-a \\ 0 & 2b & b+c-a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a+b-c & c+a-b \\ 2b & a-b-c \end{vmatrix}.$$

Teremos pois

(*) É o theorema de Sylvester, que este illustre geometra publicou em 1852, no *P. M.*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2a & a+b \\ 1 & 2a & a & a+c \\ 1 & a+b & a+c & a \end{vmatrix} = (a+b-c)(a-b-c) - 2b(c+a-b)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - 2(bc + ca + ab).$$

Mas, como se sabe, é

$$pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c)$$

ou

$$pr^2 = -p^3 + p(bc + ca + ab) - abc$$

e, como é

$$abc = 4Rrp$$

vem

$$r^2 = -p^2 + bc + ca + ab - 4Rr$$

ou

$$bc + ca + ab = p^2 + r^2 + 4Rr.$$

Tambem sabemos que

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(bc + ca + ab)$$

e por conseguinte

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr.$$

Teremos pois finalmente

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2a & a+b \\ 1 & 2a & a & a+c \\ 1 & a+b & a+c & a \end{vmatrix} = -4r(4R + r).$$

8. *Os determinantes*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2a & a+b \\ 1 & 2a & a & a+c \\ 1 & a+b & a+c & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & a+b & 2b \\ 1 & a+b & b & b+c \\ 1 & 2b & b+c & b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & c & a+c & b+c \\ 1 & a+c & c & 2c \\ 1 & b+c & 2c & c \end{vmatrix}$$

são eguaes e teem por valor

$$-4r(r_a+r_b+r_c)$$

sendo r_a, r_b, r_c *os raios dos circulos exinscriptos.*

Com effeito os tres determinantes transformam-se pelo theorema de Sylvester no determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ 1 & a & 0 & c \\ 1 & b & c & 0 \end{vmatrix}$$

cujo valor é, segundo o theorema anterior

$$-4r(r+4R)$$

Ora sabe-se que

$$r+4R=r_a+r_b+r_c$$

logo representando por Δ qualquer dos tres determinantes, teremos

$$\Delta=-4r(r_a+r_b+r_c).$$

9. *Se* F *é o ponto de contacto do circulo de Feuerbach com o circulo inscripto e* F' *o ponto em que a tangente em* F *toca a ellipse de area maxima inscripta no triangulo, representando* FF' *por* f *e sendo* S_1 *a area do triangulo formado pelos centros dos circulos circumscripto, inscripto e pelo orthocentro é*

$$\frac{4rS_1}{f}=\Delta+p^2+r^2+4Rr \tag{9}$$

Com effeito, demonstrámos no *J. E.* (*) que

$$S_1=\frac{f}{4r}(p^2-3r^2-12Rr).$$

Ora, já vimos que

$$\Delta=-r(r+4R)=p^2-3r^2-12Rr-(p^2+r^2+4Rr)$$

e, portanto

$$\Delta+p^2+r^2+4Rr=p^2-3r^2-12Rr$$

logo será

$$\frac{4rS_1}{f}=\Delta+p^2+r^2+4Rr.$$

(*) *Sur un theorème de M. Lemoine,* 1897, p. 37.

10. *Se* S *é a area de um triangulo, é*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = -16\,S^2 \tag{10}$$

Subtrahiamos a segunda columna da terceira e da quarta, teremos

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & -a^2 & c^2-a^2 \\ 1 & b^2 & c^2-b^2 & -b^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & a^2 & b^2 \\ 1 & -a^2 & c^2=a^2 \\ 1 & c^2-b^2 & -b^2 \end{vmatrix}.$$

ou, subtrahindo a primeira linha de cada uma das seguintes, é ainda

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & a^2 & b^2 \\ 0 & -a^2 & c^2-a^2-b^2 \\ 0 & c^2-a^2-b^2 & -2\,b^2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2\,a^2 & a^2+b^2-c^2 \\ a^2+b^2-c^2 & 2\,b^2 \end{vmatrix} = (a^2+b^2-c^2)^2 - 4\,a^2 b^2$$

$$=(a^2+b^2-c^2+2\,ab)(a^2+b^2-c^2-2\,ab)=[(a+b)^2-c^2]\,[(a-b)^2-c^2[.$$

Temos pois

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = -(a+b+c)\,(b+c-a)\,(c+a-b)\,(a+b-c).$$

Ora sabe-se que

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2\,p \\ b+c-a &= 2\,(p-a) \\ c+a-b &= 2\,(p-b) \\ a+b-c &= 2\,(p-c). \end{aligned}$$

Por conseguinte

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix} = -16p(p-a)(p-b)(p-c) = -16S^2.$$

11. *N'um triangulo qualquer é*

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = -16S^2.$$

Pode-se demonstrar esta egualdade, que é a expressão classica da area de um triangulo em determinante, partindo de um theorema elementar da theoria dos determinantes, cujo enunciado é o seguinte: Quando em um determinante os elementos do termo principal são zeros, e que os elementos da primeira linha são respectivamente eguaes aos seus elementos conjugados da primeira columna, este determinante pode-se transformar exactamente n'um outro da mesma ordem, no qual, os elementos da diagonal são nullos, e os outros elementos da primeira linha e da primeira columna são eguaes á unidade. (*)

O determinante proposto transforma-se em virtude d'este theorema no determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$$

e como vimos, pelo theorema anterior este determinante é egual a $-16S^2$.

Pode-se demonstrar directamente o theorema proposto.

Com effeito, sommemos as quatro linhas e tiremos $a+b+c=2p$ em factor commum, teremos

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = 2p \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

(*) Dostor — *Élements de la théorie des determinants*, p. 48, n.º 73 e 74.

Sommemos as duas primeiras columnas, e da somma d'ellas subtrahiamos a somma das duas ultimas e tiremos $b+c-a=2(p-a)$ em factor commum; teremos

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = 4p(p-a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & c & b \\ 1 & c & 0 & a \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

N'este ultimo determinante sommemos a segunda linha com cada uma das duas ultimas, teremos

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = 4p(p-a) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & c & b \\ 0 & c & c & a+b \\ 0 & b & a+c & b \end{vmatrix}$$

$$= 4p(p-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & c & a+b \\ b & a+c & b \end{vmatrix}$$

$$= 4p(p-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & a+b-c \\ b & c+a-b & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4p(p-a) \begin{vmatrix} 0 & a+b-c \\ c+a-b & 0 \end{vmatrix} = -16p(p-a)(p-b)(p-c)$$

logo finalmente

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = -16S^2.$$

12. *Demonstrar que em qualquer triangulo é*

$$\begin{vmatrix} c^2+2ab(1+\cos C) & c^2 & c^2 \\ a^2 & a^2+2bc(1+\cos A) & a^2 \\ b^2 & b^2 & b^2+2ac(1+\cos B) \end{vmatrix}$$

$$= 64Rrp^4 \qquad (11)$$

Como se sabe, n'um triangulo qualquer,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$$

ou

$$a^2 + 2\,b\,c\cos A = b^2 + c^2$$

e portanto

$$a^2 + 2\,b\,c\,(1 + \cos A) = (b + c)^2$$

e tambem

$$b^2 + 2\,a\,c\,(1 + \cos B) = (a + c)^2$$

$$c^2 + 2\,a\,b\,(1 + \cos C) = (a + b)^2.$$

O determinante transforma-se pois em

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 &)a+c)^2 \end{vmatrix}.$$

Subtrahindo a ultima columna de cada uma das precedentes teremos

$$\begin{vmatrix} (a+b)^2 - c^2 & 0 & c^2 \\ 0 & (b+c)^2 - a^2 & a^2 \\ b^2 - (c+a)^2 & b^2 - (c+a)^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

ou ainda, subtrahindo a somma das duas primeiras columnas, da terceira e dividindo a terceira linha resultante por -2, transforma-se o determinante em

$$(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & 0 & c^2 \\ 0 & b+c-a & a^2 \\ b-c-a & b-c-a & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

$$= -2\,(a+b+c)^2 \begin{vmatrix} a+b-c & 0 & c^2 \\ 0 & b+c-a & a^2 \\ a & c & -a\,c \end{vmatrix}$$

ou ainda sommando n'este ultimo determinante, a terceira columna com as duas precedentes, multiplicadas respectivamente por c e a,

$$\begin{vmatrix} c^2 + 2\,a\,b\,(1+\cos C) & c^2 & c^2 \\ a^2 & a^2 + 2\,b\,c\,(1+\cos A) & a^2 \\ b^2 & b^2 & b^2 + 2\,a\,c\,(1+\cos B) \end{vmatrix}$$

$$= -8p^2 \cdot \frac{1}{ac} \begin{vmatrix} (a+b)c & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)a & a^2 \\ 0 & 0 & -ac \end{vmatrix}$$

$$= 8p^2 \begin{vmatrix} (a+b)c & c^2 \\ a^2 & (b+c)a \end{vmatrix} = 8\,p^2\,a\,c \begin{vmatrix} a+b & c \\ a & b+c \end{vmatrix}$$

$$= 8\,p^2\,a\,c \begin{vmatrix} a+b+c & c \\ a+b+c & b+c \end{vmatrix} = 8\,p^2\,a\,c\,(a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & c \\ 1 & b+c \end{vmatrix}$$

$$= 16\,p^3\,a\,b\,c$$

e portanto finalmente

$$\begin{vmatrix} c^2 + 2\,a\,b\,(1+\cos C & c^2 & c^2 \\ a^2 & a^2 + 2\,b\,(1+\cos A) & a^2 \\ b^2 & b^2 & b^2 + 2\,a\,c\,(1+\cos B) \end{vmatrix}$$

$$= 6\mathrm{d}\,R\,r\,p^4.$$

13. *N'um triangulo é*

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = -8\,r\,(p^2 + r^2 + 4\,R\,r) \cdot S_1 \qquad (12)$$

Com effeito teremos

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (b\,c + c\,a + a\,b) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$= (p^2 + r^2 + 4Rr) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = -(p^2 + r^2 + 4\,R\,r) \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}.$$

Subtrahindo n'este ultimo determinante a terceira linha, da primeira e segunda, vem

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = -(p^2 + r^2 + 4\,R\,r) \begin{vmatrix} a^2 - c^2 & a - c & 0 \\ b^2 - c^2 & b - c & 0 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(p^2 + r^2 + 4\,R\,r)\,(a-b)\,(a-c)\,(b-c)$$

e como segundo o theorema já citado do sr. P. Sondat é

$$(a-b)(a-c)(b-c)=8\,r\,S_1$$

teremos finalmente

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = -8\,r\,(p^2+r^2+4\,R\,r)\cdot S_1.$$

14. *A condição necessaria e sufficiente para que o centro do circulo inscripto esteja situado sobre a recta d'Euler d'um triangulo é*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (13)$$

No theorema anterior vimos que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c) = 8\,r\,S_1.$$

Se o centro do circulo inscripto estiver sobre a recta d'Euler é $S_1=0$, logo

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Desenvolvendo este determinante pela regra de Sarrus, tinhamos esta condição sob a fórma

$$b\,c^2+c\,a^2+a\,b^2-a^2\,b-b^2\,a-c^2\,a=0$$

ou

$$(a-b)(b-c)(a-c)=0$$

como demonstrámos no *B. E. M.* (*)

15. *Em qualquer triangulo é*

(*) *Solution de la question 133*, 1897, p. 217.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 + 2\,b\,c\cos A \\ 1 & b & b^2 + 2\,a\,c\cos B \\ 1 & c & c^2 + 2\,a\,b\cos C \end{vmatrix} = 8\,r\,S_1 \qquad (14)$$

Com effeito este determinante é egual ao determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b^2 + c^2 \\ 1 & b & c^2 + a^2 \\ 1 & c & a^2 + b^2 \end{vmatrix}.$$

Ora sabe-se que

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b^2 + c^2 \\ 1 & b & c^2 + a^2 \\ 1 & c & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 + b^2 + c^2 \\ 1 & b & a^2 + b^2 + c^2 \\ 1 & c & a^2 + b^2 + c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Mas, segundo um theorema conhecido

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 + b^2 + c^2 \\ 1 & b & a^2 + b^2 + c^2 \\ 1 & c & a^2 + b^2 + c^2 \end{vmatrix} = 0$$

logo

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 + 2\,b\,c\cos A \\ 1 & b & b^2 + 2\,a\,c\cos B \\ 1 & o & b^2 + 2\,a\,b\cos C \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 8\,r\,S_1$$

16. *N'um triangulo é*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b + c & c + a & a + b \\ b\,c & c\,a & a\,b \end{vmatrix} = -8\,r\,S_1 \qquad (15)$$

Com effeito, multipliquemos respectivamente as columnas por a, b e c, teremos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b + c & c + a & a + b \\ b\,c & c\,a & a\,b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a\,(b + c) & b\,(c + a) & c\,(a + b) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando a primeira linha por $a + b + c$ e subtrahindo da segunda vem

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(a-c).$$

Teremos pois

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = -8rS_1.$$

17. *N'um triangulo qualquer é* (*)

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{p-a} & \cos A & 1 \\ \frac{1}{p-b} & \cos B & 1 \\ \frac{1}{p-c} & \cos C & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

Desenvolvendo este determinante pela regra de Sarrus, teremos representando-o por D,

$$D = \frac{\cos B - \cos C}{p-a} + \frac{\cos C - \cos A}{p-b} + \frac{\cos A - \cos B}{p-c}.$$

Já vimos que

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

d'onde se tira

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a}} = \frac{r}{p-a}.$$

Teremos pois

$$p-a = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}} = \frac{r\cos\frac{A}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}.$$

(*) Este theorema é devido ao sabio geometra De Longchamps; foi prosposto no *J. E.*, questão 378 Vidè diversas outras demonstrações pelos srs. Poulain e Youssoufian no mesmo jornal, 1891, pp. 166, 234, 254.

Ora, temos como se sabe

$$\cos B - \cos C = -2 \operatorname{sen} \frac{B+C}{2} \operatorname{sen} \frac{B-C}{2} = -2 \cos \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B-C}{2}$$

e, portanto

$$\frac{\cos B - \cos C}{p-a} = -\frac{2}{r} \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B-C}{2}.$$

Da mesma fórma

$$\frac{\cos C - \cos A}{p-b} = -\frac{2}{r} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C-A}{2}$$

e

$$\frac{\cos A - \cos B}{p-c} = -\frac{2}{r} \operatorname{sen} \frac{C}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}$$

e, por conseguinte

$$D = -\frac{2}{r} \left[\operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B-C}{2} + \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C-A}{2} + \operatorname{sen} \frac{C}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} \right].$$

Como se sabe

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B-C}{2} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{A+C-B}{2} - \cos \frac{A+B-C}{2} \right]$$

$$\operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C-A}{2} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{B+A-C}{2} - \cos \frac{B+C-A}{2} \right]$$

$$\operatorname{sen} \frac{C}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{C+B-A}{2} - \cos \frac{C+A-B}{2} \right]$$

e portanto, sommando ordenadamente, vem

$$\operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B-C}{2} + \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C-A}{2} + \operatorname{sen} \frac{C}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2} = 0$$

e teremos então finalmente

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{p-a} & \cos A & 1 \\ \frac{1}{p-b} & \cos B & 1 \\ \frac{1}{p-c} & \cos C & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Podiamos ainda achar outros determinantes da mesma fórma, pois, segundo algumas formulas elementares da geometria do triangulo, sabe-se que, por exemplo,

$$\frac{1}{p-a}=\frac{d_1^2}{p}\,b\,c=\frac{d_1^2}{p\,b\,c}=\frac{r_a}{p\,r}=\frac{4\,R\,r_a}{a\,b\,c}$$

sendo d a distancia do vertice A ao centro do circulo inscripto e d_1 a distancia do mesmo vertice ao centro do circulo ex-inscripto correspondente.

18. *Em qualquer triangulo é*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b+c & a+b & a+c \\ (a+b+c)(a+b) & (a+b-c)(a+b) & a(a+c) \end{vmatrix}$$
$$=-\frac{r(r_b-r_c)(r_a+r_b)(r_a+r_c)}{p}.$$

Com effeito subtrahindo a primeira columna das duas outras, teremos o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & -c & -b \\ (a+b+c)(a+b) & -2\,c\,(a+b) & -b\,(b+c+2\,a) \end{vmatrix}$$
$$=-b\,c\,(b-c).$$

Ora sabe-se que

$$\frac{1}{r_c}-\frac{1}{r_b}=\frac{p-c}{S}-\frac{p-a}{S}=\frac{b-c}{S}$$

logo

$$b-c=\frac{S\,(r_b-r_c)}{r_b\,r_c}=\frac{p\,r\,(r_b-r_c)}{r_b\,r_c}.$$

Tambem teremos

$$r_a+r_b=\frac{S}{p-a}=\frac{S}{p-b}=\frac{c\,S}{(p-a)(p-b)}$$

e

$$r_c=\frac{S}{p-c}$$

logo

$$\frac{r_c(r_a+r_b)}{p}=\frac{c\,S^2}{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}$$

e, por conseguinte

$$c = \frac{r_c(r_a + r_b)}{p}$$

e do mesmo modo

$$b = \frac{r_b(r_a + r_c)}{p}$$

e vem então

$$-bc(b-c) = -\frac{r(r_b - r_c)(r_a + r_b)(r_a + r_c)}{p}$$

e finalmente

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b+c & a+b & a+c \\ (a+b+c)(a+b) & (a+b-c)(a+b) & a(a+c) \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{r(r_b + r_c)(r_a + r_b)(r_a + r_c)}{p}.$$

19. *Se fôrem* p_a, p_b, p_c *as potencias parciaes* (*) *d'um triangulo qualquer, é*

$$\begin{vmatrix} -1 & -\cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & -\cos A \\ -\cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = \frac{16\, p_a\, p_b\, p_c}{a^2 b^2 c^2} - 2 \ldots\ldots \quad (17)$$

Desenvolvendo pela regra de Sarrus, temos

$$\begin{vmatrix} -1 & -\cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & -\cos A \\ -\cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = -(1 + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C).$$

Segundo a formula (1)

$$1 + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 2 - 2\cos A \cos B \cos C$$

e combinando com a formula (2)

$$1 + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 2 - 2\,\frac{(b^2+c^2-a^2)(a^2+c^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{a^2 b^2 c^2}$$

(*) As potencias parciaes d'um triangulo, são dadas pelas expressões

$$p_a = \frac{b^2+c^2-a^2}{2} \qquad p_b = \frac{a^2+c^2-b^2}{2} \qquad p_c = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$$

Ora sabe-se que (*)

$$p_a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

$$p_b = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$$

$$p_c = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

logo

$$1 + \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 2 - \frac{16\, p_a\, p_b\, p_c}{a^2\, b^2\, c^2}$$

e portanto

$$\begin{vmatrix} -1 & -\cos C & \cos B \\ \cos C & -1 & -\cos A \\ -\cos B & \cos A & -1 \end{vmatrix} = \frac{16\, p_a\, p_b\, p_c}{a^2\, b^2\, c^2} - 2.$$

20. *Demonstrar a egualdade*

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a+b+c} & a+b+c \\ \frac{1}{a\,b\,c} & a\,b\,c \end{vmatrix} = \frac{S}{S_2}\left(4\,R^2 - \frac{1}{r^2}\right).$$

Com effeito, representando por Δ o determinante proposto (**) é

$$\Delta = \frac{a\,b\,c}{a+b+c} - \frac{a+b+c}{a\,b\,c} = \frac{a^2\,b^2\,c^2 - (a+b+c)^2}{a\,b\,c\,(a+b+c)}.$$

Ora

$$a\,b\,c = 4\,R\,S$$

$$a + b + c = 2\,p$$

$$a\,b\,c\,(a + b + c) = 4\,S\,S_2$$

e portanto

$$\Delta = \frac{16\,R^2\,S^2 - 4\,p^2}{4\,S\,S_2} = \frac{4\,R^2\,S^2 - p^2}{S\,S_2}$$

(*) A consideração das potencias do triangulo, deve-se ao distincto geometra hespanhol sr. D. J. Duran-Loriga. Vidè um artigo do sr. Bozal-Obejero no *J. E.*, 1896 *(Sur les triangles equipotentiels)*, e outro artigo nosso no *J. E.*, 1896, p. 225 *(Sur les puissances des triangles)*.

(**) A relação

$$\frac{a\,b\,c}{a+b+c} - \frac{a+b+c}{a\,b\,c} = 2\,R\,r - \frac{1}{2\,R\,r}$$

foi por nós estabelecida no *B. M. E.*, q. 301.

d'onde

$$\Delta = \frac{4R^2p^2r^2 - p^2}{p\,r\,S_2} = \frac{4R^2pr}{S_2} - \frac{p}{rS_2}$$

e por conseguinte, visto ser $S = p\,r$,

$$\Delta = \frac{4R^2S}{S_2} - \frac{S}{r^2S_2}.$$

Teremos pois finalmente

$$\Delta = \frac{S}{S_2}\left(4R^2 - \frac{1}{r^2}\right).$$

21. *N'um triangulo é sempre*

$$3abc - \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} > \frac{8}{9}p^3 \qquad (18)$$

Com effeito, vê-se que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 3abc - (a^3 + b^3 + c^3).$$

Ora sabe-se que, em geral,

$$9(x^3 + y^3 + z^2) > (x + y + z)^3$$

logo, teremos

$$a^3 + b^3 + c^3 > \frac{8}{9}p^3$$

e portanto

$$3abc - \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} > \frac{8}{9}p^3$$

20. *Demonstrar que*

$$4SS_2 = 1 + 2a^2b^2c^2 - \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} 1 & abc & abc & abc \\ 0 & a & abc & abc \\ 0 & abc & b & abc \\ 0 & abc & abc & c \end{vmatrix}$$

sendo S_2 *a area do triangulo formado pelos centros dos circulos ex-inscriptos.*

Representemos por Δ o determinante, teremos

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & abc & abc \\ abc & b & abc \\ abc & abc & b \end{vmatrix} = abc - a^2b^2c^2(a+b+c) + 2a^3b^3c^3.$$

Ora sabe-se (*) que

$$4SS_2 = abc(a+b+c) \qquad (\alpha)$$

e portanto

$$4SS_2 = 1 + 2a^2b^2c^2 - \frac{\Delta}{abc}.$$

Segundo um theorema conhecido (**), se representarmos por S_3 a area do triangulo orthico do triangulo que tem por vertices os pontos de contacto do circulo inscripto a ABC, é

$$S_3 = \frac{16S^5}{a^2b^2c^2(a+b+c)^2} \qquad (\beta)$$

Teremos pois em virtude da formula (17)

$$4SS_2 = 1 + \frac{32S^5}{S_3(a+b+c)^2} - \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{16S^5}{S_3(a+b+c)^2}}}$$

e portanto, simplificando,

$$4SS_2 = 1 + \frac{8S^5}{p^2S_3} - \frac{p\Delta}{2\sqrt{\frac{S^5}{S_3}}}.$$

As formulas (α) e (β) dão immediatamente a relação bastante notavel

$$S_3 \cdot S_2^2 = S^3.$$

Como se sabe (***), é

$$S_2 = S + \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Segundo uma formula celebre de Crelle

(*) Dostor — *Élements da la théorie des determinants*, p. 191.
(**) Hain — *Nouvelle Correspondance Mathématique.*
(***) *Journal de Mathématiques Élementaires,* de Vuibert, t. x, pp. 96, 114, 145.

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}=\operatorname{cotg}\omega$$

sendo ω o angulo a que se deu depois o nome de angulo de Brocard e que satisfaz á condição

$$\operatorname{cotg}\omega=\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C$$

dada por Crelle (*) e que o sr. Brocard achou sem conhecer os resultados de Crelle, por occasião dos seus notaveis estudos sobre o circulo, angulo e pontos que actualmente teem o seu nome. (**)

Podemos, pois, tirar a formula

$$S_3\left(1+\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\omega\right)^2=S$$

que publicámos no jornal Mathésis.

Ainda podiamos demonstrar differentes outras proposições, servindo-nos de outras relações conhecidas entre os elementos d'um triangulo.

Podiamos introduzir nas formulas demonstradas, a noção de potencias (de que fizemos uma applicação), os raios d'outros circulos notaveis, como os de Lemoine, de Tucker, de Longchamps, etc., mas isto alongaria demasiadamente este estudo, levando-nos a formulas complicadas, mas faceis de deduzir das que estabelecemos.

Sendo este estudo elementar não apresentámos formulas ou determinantes em que figurem as coordenadas trilineares, que tantas applicações teem tido, principalmeute nas questões mais elevadas da Geometria Analytica.

Para terminar apresentaremos algumas egualdades, cuja demonstração, que não offerece grande difficuldade, daremos mais tarde em outro artigo:

$$\text{I}\qquad\begin{vmatrix}\frac{1}{a+b+c} & a+b+c\\ \frac{1}{abc} & abc\end{vmatrix}=2Rr-\frac{1}{2Rr};\ (*)$$

(*) *Ueber einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks rücksichtlicht dreier durch die Winkelspitzen gezogenen geraden Linien*, Berlin, 1816.

(**) *Propriétés du triangle — Nouvelle Correspondance Mathématique*, 1877, 1879, 1880.

(***) Esta egualdade foi proposta por nós, debaixo d'outra fórma, no *B. M. E.*, t. II, questão 301, como dissemos na p. 36.

$$\text{II} \qquad \begin{vmatrix} \frac{a}{b} & \frac{b}{c} & \frac{c}{a} \\ c & a & b \\ \frac{b}{a} & \frac{c}{b} & \frac{a}{c} \end{vmatrix} = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{4RS} - 4RS\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right);$$

$$\text{III} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2(p^2 - r^2 - 4Rr);$$

$$\text{IV} \qquad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 1 & \cos C \\ b & \cos C & 1 \end{vmatrix} = \frac{r_c^2}{p^2}(r_a + r_b)^2;$$

$$\text{V} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = -16\, S\, S_1;$$

$$\text{VI} \qquad \begin{vmatrix} 1 & b & a - b \\ 1 & a + b & a + b \\ 1 & a + 2b & \frac{(a+b)(a+2b)}{a} \end{vmatrix} = \frac{2}{p^2} r_a r_b (r_b + r_c)(r_a + r_c);$$

$$\text{VII} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b + c & a + c & a + b \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = 16\, S\, S_1;$$

$$\text{VIII} \qquad \begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = -8r(p^2 + r^2 + 4Rr) \cdot S_1;$$

$$\text{IX} \qquad \begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = 8r(r^2 - 3p^2 + 4Rr) \cdot S_1;$$

$$\text{X} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & b \\ 0 & a & -1 & c \\ 0 & b & c & -1 \end{vmatrix} = -(4r^2 + 16Rr + 4p + 3);$$

$$\text{XI} \quad \begin{vmatrix} 1 & a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 0 & a & a+b+c & a+b+c \\ 0 & a+b+c & b & a+b+c \\ 0 & a+b+c & a+b+c & c \end{vmatrix} = 4p(Rr+2p^2);$$

$$\text{XII} \quad \begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2(p^2 - r^2 - 4Rr);$$

$$\text{XIII} \quad \frac{\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & b & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & b & c^4 \end{vmatrix}} = -\frac{p^2+r^2+4Rr}{r^2-3p^2+4Rr};$$

$$\text{XIV} \quad \frac{\begin{vmatrix} a & b & a^2b^2 \\ b & c & b^2c^2 \\ c & a & c^2a^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & ab \\ b & c & bc \\ c & a & ca \end{vmatrix}} = p^2 + r(r + 4Rr);$$

$$\text{XV} \quad \frac{\begin{vmatrix} a^2 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ b^2 & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \\ c^2 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a^2 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{c^2} \\ b^2 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{a^2} \\ c^2 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b^2} \end{vmatrix}} = 8Rrp^2;$$

$$\text{XVI}\quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & b \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b} & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ \frac{1}{b} & 1 & c \\ \frac{1}{b^2} & \frac{1}{c} & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & c & c^2 \\ \frac{1}{c} & 1 & a \\ \frac{1}{c^2} & \frac{1}{a} & 1 \end{vmatrix} = \frac{4\,S_1^2}{R^2\,p^2}.$$

SOBRE A AREA DOS POLYGONOS SEMI-REGULARES

(Memoria apresentada á Academia Real das Sciencias de Lisboa)

POR

ANTONIO CABREIRA

Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa
da Academia das Sciencias, Inscripções e Bellas Lettras de Toulouse
da Academia das Sciencias, Artes e Bellas Lettras de Dijon
do Instituto de Coimbra
da Sociedade Mathematica de França
e da Sociedade Physico-Mathematica de Kazan

1. Se projectarmos, sobre um plano, os polygonos regulares inscriptos e circumscriptos ao circulo, obteremos outros tantos polygonos semi-regulares inscriptos e circumscriptos a uma ellipse.

2. *Base geometrica* é a projecção do lado do triangulo equilatero inscripto, quando a suppozermos perpendicular ao eixo maior da ellipse.
Designamos esta grandeza por g.

3. *A base geometrica representa o lado do triangulo equilatero inscripto no circulo de raio egual ao semi-eixo menor da ellipse.*
Effectivamente, da proporção

$$\frac{r\sqrt{3}}{r} = \frac{g}{b}$$

deduz-se

$$g = b\sqrt{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

4. *As relações entre as areas dos triangulos, dos quadrilateros, dos hexagonos, dos octogonos e dos dodecagonos semi-regulares inscriptos e circumscriptos são eguaes ás relações entre as areas dos polygonos regulares inscriptos e circumscriptos que lhes correspondem.*

Se tivermos

$$\frac{a_m}{a_n} = p \quad \text{e} \quad \frac{A_m}{A_n} = q,$$

estas relações subsistem, multiplicando nós ambos os termos dos quebrados por $\cos\theta$, em que θ é o angulo que o plano do circulo faz com o plano da ellipse. Logo

$$\frac{s_m}{s_n} = p \quad \text{e} \quad \frac{S_m}{S_n} = q \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

5. *A area do triangulo semi-regular inscripto é egual ao producto do lado menor pela perpendicular baixada do meio do lado maior sobre aquelle.*

Suppondo que a area do triangulo semi-regular inscripto, cujo lado menor é l, representa metade da area do losango circumscripto ao circulo de raio r', vem

$$s_3 = l\,r' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ora o lado menor do triangulo, visto ser tangente ao circulo, é perpendicular ao raio que passa pelo ponto de contacto; logo, obtemos o raio, baixando uma perpendicular do meio do lado maior sobre aquelle.

6. *O lado menor do quadrilatero semi-regular inscripto, quando o lado maior é o do quadrado inscripto, representa o lado do quadrado inscripto no circulo de raio egual ao semi-eixo menor da ellipse.*

Posta a proporção

$$\frac{r\sqrt{3}}{r\sqrt{2}} = \frac{g}{l'_4},$$

vem, attendendo ao valor de g,

$$l'_4 = b\sqrt{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

7. *O raio do circulo inscripto no losango que se obtem, ligando os vertices da ellipse, é egual ás coordenadas do ponto da mesma ellipse, cujo vector faz o angulo de 45° com o eixo maior.*

A area do losango inscripto representa, simultaneamente, o semi-producto dos eixos e o producto do semi-perimetro pelo raio do circulo inscripto; logo

$$ab = \sqrt{a^2 + b^2}\, r';$$

d'onde

$$r' = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

8. *A area do hexagono semi-regular inscripto é egual ao producto da base geometrica pela altura do triangulo equilatero inscripto.*

Imaginando o hexagono semi-regular inscripto composto de dois trapezios eguaes, cuja maior base coincide com o eixo maior da ellipse, será

$$s_6 = \frac{3}{2} a g = g h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

9. *A area do dodecagono semi-regular inscripto é egual ao producto do lado do triangulo equilatero inscripto pela base geometrica.*

Multiplicando ambos os membros da egualdade

$$a_{12} = l_3^2$$

por $\cos\theta$, resulta

$$s_{12} = l_3^2 \cos\theta = l_3 g \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

10. *A area do triangulo semi-regular circumscripto é egual ao producto da area do dodecagono regular inscripto pela tangente do angulo opposto á altura.*

Se P e ω representam, respectivamente, a altura do triangulo semi-regular circumscripto e o angulo que se oppõe, sendo a base a do triangulo equilatero circumscripto, fica

$$S_3 = \frac{L_3 P}{2} = a_{12} \operatorname{tg} \omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

em virtude de ser

$$L_3 = 2 l_3 \qquad \text{e} \qquad P = \frac{L_3}{2} \operatorname{tg} \omega.$$

11. *A area do triangulo semi-regular circumscripto é egual á area do dodecagono regular, quando o angulo opposto á altura é de 45°,* porque, fazendo, em (8), $\omega = \frac{\pi}{4}$, fica

$$S_3 = a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

12. *A area do hexagono semi-regular circumscripto é egual ao producto do eixo maior da ellipse pela base geometrira.*

Considerando o hexagono semi-regular circumscripto constituido por dois trapezios eguaes, cuja maior base é

$$2 L_6 = \frac{4}{3} l_3 = \frac{4}{3} a\sqrt{3},$$

temos

$$S_6 = 2 l_3 \frac{g}{\sqrt{3}} = 2 a g \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

13. *A differença entre as areas dos hexagonos semi-regulares circumscripto e inscripto é egual ao semi-producto do semi-eixo maior da ellipse pela base geometrica.*

Subtrahindo (6) de (10), vem

$$S_6 - s_6 = \frac{ag}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

14. *A area do dodecagono semi-regular circumscripto é egual ao producto do quadrado da base geometrica pela relação entre as areas dos dodecagonos regulares circumscripto e inscripto.*

Multiplicando por $\cos\theta$ a formula

$$A_{12} = 3\,D_{12}^2$$

fica, em virtude da proporção

$$\frac{3\,r^2}{D_{12}^2} = \frac{g^2}{D'^2_{12}},$$

$$S_{12} = 3\,D'^2_{12} = 3\,\frac{D_{12}^2\,g^2}{a_{12}} = \frac{A_{12}}{a_{12}}\,g^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

15. *Dada uma ellipse, calcular as areas dos triangulos, dos quadrilateros, dos hexagonos, dos octogonos e dos dodecagonos semi-regulares inscriptos e circumscriptos.*

Attendendo ás relações que se deduzem do numero 4 e substituindo, nas formulas deduzidas nos numeros seguintes, a base geometrica pelo seu valor, vem, successivamente,

$$s_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$s_4 = 2\,ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

$$s_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$s_8 = \sqrt{2}\,ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$s_{12} = 3\,ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

$$S_3 = 3\sqrt{3}\,ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

$$S_4 = 4\,ab \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

$$S_6 = 2\sqrt{3}\,a\,b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

$$S_8 = \sqrt{32}\,a\,b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$S_{12} = 3\left(\frac{b}{a} D_{12}\right)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

16. *A relação entre as areas de duas ellipses é egual á relação entre as areas dos respectivos triangulos, quadrilateros, hexagonos e octogonos semi-regulares inscriptos e circumscriptos.*

Representando E e E', s'_n e S'_n as areas das duas ellipses e dos referidos polygonos semi-regulares inscriptos e circumscriptos á segunda, cujos semi-eixos designaremos por a' e b', temos, em virtude pas formulas do numero anterior,

$$\frac{s_n}{s'_n} = \frac{S_n}{S'_n} = \frac{a\,b}{a'\,b'} = \frac{E}{E'} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

MANUTENÇÃO MILITAR

ANALYSE CHIMICA E BACTERIOLOGICA[1] DE UMA AGUA PROFUNDA DO TERCIARIO MARINO E LACUSTRE DE LISBOA DESTINADA Á LABORAÇÃO DA NOVA PADARIA MILITAR

Memoria apresentada á Academia Real das Sciencias na sessão de 1.ª classe de 13 de maio de 1897

POR

EMILIO DIAS
Socio correspondente da mesma Academia

ANALYSE CHIMICA

Encontra-se a nova padaria militar na freguezia do Beato, junto á margem norte do rio Tejo, perto de Marvilla, onde em tempos remotos esteve uma communidade de religiosas que o vulgo conhecia, e ainda hoje é lembrada, pelo nome de convento das Grillas.

No recinto da nova padaria foi aberto um furo, ou poço artesiano, por deliberação do ministerio da guerra, que attinge, pela sua profundidade, as camadas inferiores do terciario marino e lacustre da região muito fertil em agua.

Tem oitenta millimetros de diametro, e sessenta e seis metros de profundidade.

A agua jorra livremente d'este furo á temperatura de 17° centigrados, sendo de 19° a temperatura do ambiente.

O seu caudal, por informação que me foi fornecida, eleva-se a 800 metros cubicos em 24 horas.

Tem um interesse scientifico especial a analyse chimica e bacteriologica d'esta agua, não só encarado o destino que se lhe pretende dar, mas por ser a primeira agua profunda do terciario marino e lacustre de Lisboa, analysada bacteriologicamente.

[1] A analyse bacteriologica é devida a Charles Lepierre, membro da Academia das Sciencias, professor de chimica, preparador do Gabinete de mineralogia da Universidade de Coimbra, etc. etc.

Que me conste, relativo a estas aguas, existe apenas um trabalho chimico devido ao dr. Hugo Mastbaume, publicado no n.º 1, sexto anno, do «Boletim da Direcção Geral de Agricultura»; bacteriologicamente porém, sei que o dr. Camara Pestana se propoz fazer uma analyse bacteriologica a todas as aguas de Lisboa, tendo já executado um certo numero d'ellas; mas não foram ainda publicados os seus ultimos trabalhos sobre o assumpto.

Tem pois, por estes factos, um interesse scientifico especial esta analyse, motivo porque julguei de utilidade a sua publicação.

Depois das prodigiosas descobertas de Pasteur, em materia biologica, tornou-se problema muito delicado e de grande responsabilidade, sejam quaes forem as razões que se imponham, a opção de qualquer agua, mesmo para a laboração das padarias onde a operação da cosedura é fallivel como processo esterilisador.

Chimicamente são insignificantes e sobretudo sem importancia relativa, as variantes que experimentam na sua composição as aguas de proveniencia constante; bacteriologicamente, o caso muda de figura, pela facilidade com que qualquer agua pode ser inquinada por causas extranhas, e muito principalmente as aguas do terciario pelo perigo que correm de se misturarem com as aguas superficiaes.

Acontece precisamente que este typo d'aguas nos dá, no caso sujeito, um exemplo muito frisante e não menos importante do facto, porque se refere a aguas artesianas profundas, que são as que melhor se podem captar sem risco de serem inquinadas, visto o isolamento em que se podem manter até quasi á superficie do solo.

Tendo o digno capitão de engenheiros Joaquim Renato Baptista, pedido a analyse chimica e bateriologica, como estudo preliminar das aguas profundas captadas na circumvizinhança da nova padaria, de cuja installação foi encarregado em commissão do governo de Sua Magestade, achei, como adeante se verá pelos resultados analyticos respectivos, que são potaveis e puras essas aguas, chimicamente consideradas, ao passo que Charles Lepierre condemna uma d'ellas por lhe ter encontrado o *bacillo coli.*

As aguas profundas que analysei, como estudo de investigação, foram as aguas dos tres poços artesianos conhecidos pelos nomes que seguem:

Bravo [1].
Sabão.
Macieira.

---

[1] A agua «Bravo» é a que no já designado «Boletim da Direcção Geral de Agricultura», se encontra a fls. 108, sob os n.os 29 e 30, da rua direita do Grillo.

Teem estas aguas[1] os mesmos elementos minerilisadores e em proporções visivelmente semelhantes; a agua *Sabão* ou da *Fabrica do Sabão,* contém o *bacillo coli.*

É evidente o facto, e segundo todas as probabilidades devido a que esta agua se encontra de algum modo misturada com as aguas superficiaes, que são a fonte contaminante principal de muitas aguas hoje condemnadas, que o não eram outr'ora, não devendo empregar-se senão com a maior reserva a usos industriaes.

A agua da nova padaria está captada nas condições que maior garantia offerecem contra a sua contaminação, e o que vem sendo narrado confirma quanto dizem os melhores auctores sobre o cuidado e attenção que se precisa ter na opção de qualquer agua, quer se imponha uma questão economica, quer de providencia ou qualquer outra.

RESULTADOS ANALYTICOS

Primeira parte

N'este trabalho empreguei sem variantes, porque nada occorreu que a isso me obrigasse, quer no exame qualitativo, quer na determinação quantitativa dos diversos elementos dosados, o processo geral de analyse de aguas; abstenho-me por isso, de fazer a descripção circumstanciada das diversas manipulações executadas e modo de operar.

Exame preliminar ou qualitativo

Pelos resultados obtidos pode classificar-se de potavel e pura a agua que jorra do poço artesiano da nova padaria militar.

É incolor, limpida, inodora, e de sabor agravadavel.

Branco, antes, durante e depois de calcinado, o residuo obtido pela evaporação.

Não contém ammoniaco, não contém nitritos, e apenas $0^{gr},001$ de nitratos por litro.

Em resumo, o azote nitrico, nitrozo e ammoniacal pode dizer-se nullo, o que abona, debaixo d'este ponto de vista, a pureza d'esta agua.

Bacteriologicamente, como adeante se verá, tambem Charles Lepierre a classifica de muito pura.

Tem reacção ligeiramente alcalina; o seu residuo fixo não excede o limite estabelecido para as aguas potaveis; mostrou apenas 26° hydrotimetricos francezes o ensaio respectivo.

---

[1] Vidè resultados analyticos a pags. 52 e 53.

A cal é o seu elemeuto minerilisador predominante, o que de resto concorda com as suas congeneres, que todas teem, predominando, o mesmo elemento.

Foram precisamente identicos os resultados que obtive com a agua dos poços *Bravo, Sabão* e *Macieira*.

Segunda parte

Analyse quantitativa da agua da nova padaria militar

Resumo
dos resultados obtidos pela analyse directamente em 1000^{cc} de agua

Residuo secco a 180^{oc} média	0^{gr},4633	
Acido sulphurico	0 ,0265	
Chloro	0 ,0670	0,015 oxygenio correspondente
Acido nitrico	0 ,0005	
Silica	0 ,0226	
Ferro e alumina	0 ,0118	principalmente alumina
Cal	0 ,1530	
Magnesia	0 ,0118	
Potassa	0 ,0069	
Soda	0 ,0637	
Acido carbonico	0 ,1298	carbonatos neutros

Resumo das combinações calculados por 1000^{cc} de agua

Chloreto de sodio	0^{gr},1105		
Sulfato de cal	0 ,0451		
Nitrato de potassa	0 ,0010		
Carbonato de soda	0 ,0870	0^{gr},0123	de bicarbonatos
» potassa	0 ,0094	0 ,0124	»
» cal	0 ,2364	0 ,3384	»
» magnesia	0 ,0248	0 ,0378	»
Ferro e alumina	0 ,0118		
Silica	0 ,0226		
Somma	0^{gr},4703		
Residuo secco a 180^{oc} média	0 ,4633		
Differença	0^{gr},0070		

A differença entre o residuo calculado e o determinado directamente, tem a sua origem na acção da silica sobre os carbonatos durante a evaporação, assim como na perda que o carbonato de magnesia soffre em anhydrido carbonico.

Lisboa 12 de novembro de 1896.

Agua denominada «Bravo»

Elementos obtidos pela analyse directamente em 1000cc

Residuo secco a 180° c = 0gr,4300

Acido sulphurico	0gr,0254
Chloro	0 ,0710
Acido nitrico	0 ,0016
Silica	0 ,0238
Ferro e alumina	0 ,0044
Cal	0 ,1460
Magnesia	0 ,0018
Potassa	0 ,0064
Soda	0 ,0635

Agua «Sabão» ou da «Fabrica de Sabão»

Elementos obtidos pela analyse directamente em 1000cc

Residuo secco a 100c c = 0gr,4814

Acido sulphurico	0gr,0295
Chloro	0 ,0698
Acido nitrico	0 ,0013
Silica	0 ,0244
Ferro e alumina	0 ,0133
Cal	0 ,1612
Magnesia	0 ,0050
Potassa	0 ,0073
Soda	0 ,0712

Agua denominada «Macieira»

Elementos obtidos pela analyse directamente em 1000cc

Residuo secco a 180° c = 0gr,4962

Acido sulphurico	0gr,0357
Chloro	0 ,0796
Acido nitrico	0 ,0018
Silica	0 ,0288
Ferro e alumina	0 ,0140
Cal	0 ,1466
Magnesia	0 ,0168
Potassa	0 ,0105
Soda	0 ,0665

Lisboa 12 de agosto de 1896.

ANALYSE BACTERIOLOGICA DA AGUA DO POÇO ARTESIANO ABERTO NO RECINTO DA NOVA PADARIA MILITAR AO BEATO

Recebi do meu collega Emilio Dias em 22 de outubro de 1896 uma amostra da agua proveniente do poço aberto na nova padaria militar, ao Beato, a fim de se proceder, por indicações do ministerio da guerra, a investigações bacteriologicas sobre as ditas aguas.

As amostras vinham em pequenos balões de vidro, fechados á lampada.

O acondicionamento era excellente. Tinham sido os balões previamente esterilisados.

Foram os balões abertos com pinça esterilisada e o conteúdo distribuido pelos meios de cultura apropriados.

Das investigações a que procedi tratei de determinar:

1.º A quantidade approximada de germens existindo na amostra da agua.

2.º Procurar o *bacillo coli* e o *bacillo typhico.*

1.º—Determinação quantitativa dos germens

O methodo hoje mais em uso para avaliar a quantidade de germens microbianos contidos em um centimetro cubico de agua é o processo das sementeiras em placas de gelatina e gelose.

A agua, diluida com agua esterilisada (diluição $^1/_{10}$ e $^1/_{1000}$) serviu para semeiar gelatina e gelose nutritivas (2 % de peptona) com que confeccionei placas nos crystallisadores de Petri. Foram as placas de gelatina postas n'uma estufa a 22°. As placas de gelose na estufa a 37°.

Passados 8 e 15 dias fiz a contagem das colonias desenvolvidas nas placas e provenientes, segundo todas as probabilidades, dos germesn primitivos. Obtive os seguintes resultados com a agua do Beato:

Colonias microbianas por centimetro cubico [1]

Gelatina a 22°		Gelose a 37°	
8 dias	15 dias	15 dias	19 col.
20 col.	27 col.		

Estes algarismos devem ser considerados como *médias* e com *valor relativo* apenas; com effeito, em absoluto, é impossivel determinar-se com rigor o numero de especies que um centimetro cubico de agua contém, devido a differentes motivos, entre os quaes, a mudança constante na composição microbiana das aguas sob a influencia da temperatura, do tempo decorrido entre as analyses, etc.

Demais nas placas de gelatina e gelose nem todos os germens se desenvolvem, uns por serem *anaerobios verdadeiros,* outros por se desenvolverem muito lentamente; emfim, nas aguas não é raro encontrarem-se bacterias que só se desenvolvem a altas temperaturas (60° e 70°).

Comtudo os resultados supra-indicados permittem classificar as aguas, segundo a tabella de Miquel: [2]

	Bacterias por centimetro cubico
Agua muitissimo pura	0 a 10
» muito pura.................	10 a 100
» pura	100 a 1000
» soffrivel..................	1000 a 10000
» impura.....................	10000 a 100000
» muito impura	100000

Comparando os resultados a que cheguei com o quadro de Miquel deprehende-se que a *Agua do Beato,* sob o ponto de vista da quantidade de germens, pertence á classe das aguas *muito puras.*

As especies que se desenvolveram eram *saprophytas vulgares,* e não encontrei n'ellas especie alguma considerada como pathogenica para o homem.

2.°—Pesquisa do «Bacillo coli» e do «Bacillo typhico»

A agua examinada atravessando terrenos, era preciso verificar se não podia arrastar germens communs nas terras, e que em certas condições se podem tornar pathogeneos.

[1] Excluindo os fungos, muito pouco numerosos, de resto.
[2] *Analyse bactériologique des eaux,* 1891, p. 129.

Foi n'este intuito que procurei o *Bacillus coli communis* e variedades. Para isso recorri a dois processos classicos, o *methodo de Péré* e o *methodo de Elsner*.

A.—Methodo de Péré

Consiste este methodo[1] em misturar a agua a analysar com os varios elementos nutritivos, juntando $^1/_{1000}$ de phenol por impedir em parte o desenvolvimento de especies differentes do *Bacillo coli* e *typhico*.

Como meios nutritivos empregam-se os caldos de carne e de peptona.

Os tubos convenientemente preparados foram collocados na estufa a 35° até turvarem (1.ª passagem no liquido de Péré).

Os caldos do liquido de Péré preparado com a agua do Beato só turvaram passados 4 dias, o que indicava já que a contaminação não devia ser grande.

Em seguida fiz placas de gelatina com os tubos que turvaram, de modo a verificar a existencia de colonias semelhantes ás do *Bacillo coli* e *typhico*.

Não se desenvolveu nenhuma colonia assemelhando-se ás colonias suspeitas.

Podemos pois concluir d'esta parte do nosso trabalho, que a agua examinada está *isenta* do *Bacillo coli* ou *typhico*.

Se tivessem apparecido colonias suspeitas[2] (vide adeante as analyses das aguas «Macieira», «Bravo» e «Sabão» da mesma origem), cada uma d'ellas teria sido semeada nos seguintes meios nutritivos:

1.° Peptona pepsica a 2 % com 5 % de glucose, em presença do carbonato de calcio;

2.° Peptona pepsica a 2 % com 5 % de lactose, em presença do carbonato de calcio;

3.° Gelose nutritiva lactosada ou glucosada, córada com tintura sensivel de tornesol;

4.° Peptona pancreatica a 2 % neutralisada.

Os tres primeiros meios culturaes servem para verificar se a especie isolada faz ou não fermentar os assucares em C^6 ou C^{12}.

O *Bacillo coli* faz fermentar estes assucares, ao passo que o *Bacillo typhico* faz fermentar apenas a glucose.

O meio nutritivo n.° 4 permitte reconhecer a formação de *indol* produzido pelo *coli*, mas não pelo bacillo d'Eberth. Emfim, é indispensavel verificar a existencia de outros caracteres, taes como a presença de celhas vibrateis em maior ou menor numero, a fórma das bacterias, mobilidade, etc.

É o conjunto d'estas operações domoradas que leva a concluir sobre a presença ou ausencia das especies pathogenicas indicadas.

---

[1] *Annales de l'Institut Pasteur*, 1891.

[2] Consideram-se suspeitas as colonias que não liquefazem a gelatina, que são ransparentes, sulcadas, azuladas, etc., e constituidas por bastonnetes.

B.—Methodo de Elsner[1]

Este methodo hoje muito em voga e recentemente introduzido na sciencia, consiste em cultivar as bacterias das aguas n'um meio nutritivo formado por gelose, extracto de batata e 1 % de iodeto de potassio ou outros antisepticos fracos.

Fazendo placas e examinando as colonias que se desenvolveram obtive resultados analogos ao precedente.

Conclusões

Resulta das investigações precedentes que, sob o ponto de vista microbiano, a agua submettida á analyse entra na classe das *aguas puras*, já pelo numero pequeno de germens que encerra, já por não conter especies pathogenicas para o homem.

APPENDICE

Antes de proceder ao exame das aguas do poço artesiano do Beato, tinha recebido, tambem pelo intermedio do meu collega e amigo Emilio Dias, amostras de aguas de tres poços denominados *Bravo, Sabão* e *Macieira,* provenientes de sitios vizinhos, e á analyse das quaes procedi em maio de 1896.

Segui para este trabalho os methodos que acabo de expôr ao descrever a analyse da agua do Beato, e por isso limitar-me-hei a dar o resumo das experiencias e resultados obtidos:

1.º— Quantidade de germens

Colonias microbianas por centimetro cubico

	Gelatina a 20°		Gelose a 37°
Agua «Bravo»	15	20	14
» «Sabão»	2500	3700	1900
» «Macieira»	290	350	310
	8 dias	15 dias	15 dias

---

[1] *Centralblat. für Bakteriol't und Parasitenk.*, XVIII, p. 591.

Segundo a classificação já citada de Miquel, deprehende-se que:

A agua «Bravo» é uma agua *muito pura;*
A agua «Sabão» é uma agua *soffrivel;*
A agua «Macieira» é uma agua *pura.*

2.º — Pesquisas de especies coliformes

Applicando os methodos de Péré e de Elsner, já descriptos, cheguei ás conclusões seguintes:

A agua «Bravo» não contém bacterias coliformes;
A agua «Macieira» não contém bacterias coliformes;
A agua «Sabão» contém *bacillo coli* em pequena quantidade.

Conclusões

Resulta das minhas determinações o seguinte:

As amostras das aguas Bravo *e* Macieira *devem ser consideradas como sendo microbicamente* aguas puras.

A amostra da agua Sabão *está inquinada por* Bacillus coli communis, *de certo proveniente dos terrenos superficiaes que a agua atravessa. Esta agua é suspeita.*

Nota.— Como nota final lembrarei que sendo estas aguas destinadas, segundo me consta, ao fabrico de pão, a indispensavel cosedura tem por fim esterilisar, em geral, por completo a agua incorporada com a farinha ou com os fermentos.

Resulta com effeito de experiencias numerosas, instituidas pelos governos francez e allemão, nas padarias militares, que as aguas ricas em microbios dão em regra *pão aseptico* (no interior é claro) se este pão fôr convenientemente cosido.

Comtudo, para isso é necessario que a temperatura no interior do pão chegue a 103º ou 105º.

Nas padarias militares francezas são estas as temperaturas commummente observadas.[1]

Como se vê basta vigiar bem a cozedura do pão e evitar depois o contagio exterior do pão cozido.

CHARLES LEPIERRE

---

[1] Consultar: *Comptes-rendus de l'Académie de Sciences de Paris; Annales d'Hygiène publique,* etc., d'estes ultimos annos.

CONTRIBUIÇÃO PARA O ESTUDO DAS AGUAS CHLORETADAS DO PAIZ

POR

LUIZ REBELLO DA SILVA

Analyse chimica das aguas chloretadas de Faro

I.— Caracteres physicos

Esta agua foi remettida para o laboratorio chimico por duas vezes. Vinha bem acondicionada em garrafões de vidro.

Não é desagradavel ao paladar, apresenta-se limpida, tem uma reacção muito basica, porque azula o papel vermelho tornesol. Não tem cheiro algum caracteristico. O seu peso especifico era $1001^{gr},843$. Uma outra amostra tinha o peso especifico de $1002^{gr},200$. Esta agua conservada em garrafas brancas deposita grande quantidade de *algas verdes*.

II.— Analyse quanlitativa

Dois litros de agua foram concentrados á seccura, o residuo foi dissolvido com acido chlorhydrico diluido, e depois, pelos processos geraes de analyse, reconheceu-se que continha simplesmente os metaes alcalino-terrosos, e além d'estes, em pequena quantidade, aluminio, ferro e silicio.

Outros dois litros de agua foram evaporados até ficarem reduzidos a 100^{cc}, pouco mais ou menos; o liquido turvo filtrou-se, o residuo foi lavado, por repetidas vezes, com agua fervente. Este liquido foi evaporado quasi á seccura, e o residuo foi tratado com o alcool de 90° fervente. N'este soluto alcoolico foram procurados os brometos e iodetos pelo processo conhecido do sulfureto de carbonio e de nitrito de potassio, e não appareceu a reacção caracteristica do iodo.

Tratando o liquido pela agua de chloro, não se manifestou a côr amarella que denuncia a presença do bromio. Portanto, se estes dois corpos existem na agua é em quantidades pequenissimas.

A parte insoluvel no alcool foi dissolvida em agua quente e dividida em duas partes eguaes; uma serviu para procurar o lithio, que não foi encontrado, e a outra para o boro que tambem não foi reconhecido, nem tão pouco o arsenio.

Não contém ammoniaco, nem nitritos, é muito carregada de nitratos.

III.— Analyse quantitativa

Doseamento do chloro.— O chloro foi doseado em 500^{cc} de agua previamente concentrada, acidulada pelo acido nitrico e tratada por um excesso de soluto de nitrato de prata. Separado o liquido por decantação, filtrado e reunido o precipitado no filtro foi lavado successivamente com agua distillada levemente acidulada e depois com agua pura fervente até não haver reacção acida.

O chlorcto de prata foi secco a 100^{o}, separado do filtro, que foi incinerado á parte em cadinho de porcellana; as cinzas foram tratadas por duas gottas de acido nitrico, novamente calcinadas e tratadas por duas gottas de acido chlorhydrico. Depois juntou-se-lhe o precipitado que foi fundido, arrefecido n'um deseccador e pesado. Em dois doseamentos feitos parallelamente os resultado foram:

1.º	$1^{gr},2565$	de chlorito de prata
2.º	$1\ ,2567$	» »

Média: $2^{gr},5132$ por litro ou $0^{gr},6215$ de chloro.
O methodo volumetrico deu $0^{gr},659$ de chloro.

Residuo secco.— Um litro de agua foi concentrado a seccura, primeiro a banho de areia e por ultimo a *banho-maria.* A agua contida em um matraz seguro por um supporte sobre a capsula de concentração era conduzida a esta por um tubo de vidro cortado em fórma de aparo de penna, de maneira que não deixava conduzir mais liquido para a capsula quando o nivel da agua dentro d'ella subia até tapar a abertura do tubo, operando assim como uma valvula. A capsula de que me servi era de vidro de Jena.

Depois, o liquido muito concentrado e o residuo salino contido na capsula foi mudado para um cadinho de porcellana (de 100^{cc} de capacidade), secco a banho-maria e depois a 180^{o}, arrefecido em um deseccador e pesado. Como este residuo é hygroscopico é preciso fazer as pisagens em cadinho tapado.

O residuo achado foi de $1^{gr},837$.

Doseamento da silica.— Foi doseada em um litro de agua concentrada a seccura, sendo previamente acidulada pelo acido chlorhydrico, depois de secco, o residuo foi tratado por acido chlorhydrico puro, novamente secco a banho-maria e submettido depois, na estufa, á temperatura de 120°. Foi dissolvido em acido chlorhydrico diluido, filtrada a silica, lavada, secca e pesada.

A média de dois doseamentos foi de $0^{gr},0185$ por litro.

Doseamento da alumina e do ferro.— O liquido filtrado depois da separação da silica foi concentrado até ficar reduzido a menos de $^1/_3$ do seu primitivo volume, em seguida foi tratado pelo chloreto de ammonio e pela ammonia em pequeno excesso, submettido á ebullição e depois de arrefecido o liquido foi filtrado para lhe separar a alumina e o ferro, que foram redissolvidos em acido chlorhydrico e novamente precipitados pela ammonia. Os liquidos de filtração e lavagem guardaram se para outros doseamentos.

A alumina e o ferro foram calcinados e pesados no estado de sesquioxydos.

A média de dois doseamentos conduzidos parallelamente foi de $0^{gr},0048$ sendo a alumina $0^{gr},0037$. O ferro, por ser muito pouco, foi doseado colorimenticamente, com uma escala feita com quantidade de ferro conhecida e a mesma quantidade de cyaneto amarello de potassio. Foi encontrado $0^{gr},0008$ por litro.

Acido carbonico.— Foi doseado em 500^{cc} de agua em um frasco de Erlenmeyer, juntando lhe 150^{cc} de uma solução de chloreto de baryo ammoniacal. O frasco ficou hermeticamente tapado com uma rolha de borracha, e no fim de dois dias o liquido foi decantado e o precipitado reunido n'um filtro. Secco o carbonato de baryo e separado do filtro foi introduzido n'um balão ligado a um apparelho apropriado para fixar o acido carbonico, do carbonato decomposto pelo acido sulfurico diluido.

Por ultimo varria o apparelho com uma corrente de ar puro.

A média de dois doseamentos foi $0^{gr},1925$ por litro.

Doseamento da cal.— A cal foi doseada no liquido que restou depois da separação do ferro e da alumina. Precipitou-se pelo oxalato de ammoniaco em presença do chloreto de ammonio. O liquido contendo o oxalato de cal era submettido á ebullição e depois de arrefecido é que se filtrava para lhe separar o precipitado. Depois de lavado por differentes vezes com agua fervente foi redissolvido em acido chlorhydrico diluido e precipitada novamente a cal. Por ultimo, depois de lavado, foi secco e calcinado ao *rubro-sombrio* durante 10 minutos, regado com umas gottas de soluto de carbonato de ammoniaco e novamente calcinado. Foi pesado no estado de carbonato de calcio. Em dois ensaios conduzidos ao mesmo tempo os resultados foram:

1.º.................. $0^{gr},2955$ de carbonato de calcio
2.º.................. $0\ ,2953$ » »

A média foi $0^{gr},2954$ ou $0^{gr},1182$ calcio por litro.

Doseamento do acido sulfurico.—No liquido que restou, depois de separada a cal, o acido sulfurico foi precipitado pelo chloreto de baryo, estando o liquido levemente acidulado com o acido chlorhydrico. Foi submettido rapidamente á ebullição, deixou-se arrefecer e quando o precipitado se reunia no fundo do copo de Bohemia, foi decantado o liquido, lavado o sulfato de baryo primeiro por decantação e depois filtrado. A lavagem com agua fervente continuou-se até que uma gotta do liquido filtrado não désse a reacção do chloro.

O filtro foi calcinado á parte e o precipitado foi calcinado depois ao *rubro-moderado* tendo juntado previamente ás cinzas uma gotta de acido sulfurico. Os resultados obtidos em duas analyses conduzidas parallelamente foram:

1.º..................... $0^{gr},3873$ de sulfato de baryo
2.º..................... $0\ ,3865$ » »

ou a média de $0^{gr},3869$, o que corresponde a $0^{gr},1328$ de acido sulfurico.

Doseamento da magnesia e dos alcalis.—No liquido onde havia separado a *cal* e o *acido sulfurico,* o excesso de baryo foi precipitado com um soluto de carbonato de ammoniaco, a frio, tendo previamente tornado o liquido alcalino com a ammonia. O liquido foi filtrado e o precipitado foi lavado por repetidas vezes com agua pura á temperatura ordinaria. O liquido filtrado foi primeiramente concentrado quasi á seccura a banho de areia depois secco a banho-maria, e por ultimo, submettido na estufa durante 3 horas a 150°. O ammoniaco foi eliminado calcinando este residuo ao *rubro sombrio* em um forno de *maufla.* Depois a magnesia foi transformada em carbonato neutro, juntando ao residuo um excesso de acido oxalico para transformar em quadro-oxalato a quantidade total das bases consideradas como potassa. Calcinado ao rubro-sombrio em cadinho tapado, o acido oxalico produzindo oxydo e acido carbonico produziu a transformação desejada insolubilisando a magnesia.[1] O residuo foi tratado, por differentes vezes, com agua quente até se dissolverem completamente os carbonatos alcalinos. Separado por filtração o carbonato de magnesio, foi dissolvido pelo acido chlorhydrico diluido, e precipitada a magnesia com o phosphato de ammonia tendo tomado o liquido ammoniacal. Por ultimo foi pesada no estado de pyrophosphato de magnesio.

Em dois ensaios conduzidos ao mesmo tempo os resultados foram:

---

[1] Esta operação foi repetida tres vezes.

1.º........... $0^{gr},2473$ de pyrophosphato de magnesio

2.º........... 0 ,2511 » »

A média foi $0^{gr},2492$ o que corresponde a $0^{gr},0538$ de magnesio.

O liquido contendo os alcalis foi concentrado até á seccura primeiro a banho de areia, depois a banho-maria e por ultimo na estufa a 150°. Foram calcinados ao rubro sombrio na *maufla,* dissolvidos em agua quente e filtrados. Este liquido foi novamente concentrado quasi á seccura, transvasado para um cadinho de porcellana tarado, transformados os carbonatos em chloretos, concentrado á seccura, com os cuidados já indicados, e calcinados, na *moufla,* abaixo do *rubro sombrio.*
Em dois doseamentos conduzidos parallelamente os resultados foram:

1.º...... $1^{gr},1423$ de chloretos de sodio e de potassio

2.º...... 1 ,1441 » » »

A média foi $1^{gr},1432$ por litro.

A potassa foi doseada pelo chloreto de platina e pesada a platina metallica. Achou-se $0^{gr},2295$ de platina o que corresponde a $0^{gr},0922$ de potassio.

Combinação provavel das substancias directamente doseadas

Com respeito a este calculo attendemos a que as bases e os acidos se combinam segundo as suas affinidades, tendo em vista a solubilidade dos saes que se fórmam..

Elementos doseados

Chloro	$0^{gr},6215$
Acido sulfurico	0 ,1328
Acido carbonico	0 ,1925
Acido nitrico	0 ,1872
Sodio	0 ,3823
Potassio	0 ,0922
Calcio	0 ,1182
Magnesio	0 ,0538
Alumina	0 ,0037
Acido silicico	0 ,0185
Ferro	0 ,0008
Somma	$1^{gr},8035$

Elementos combinados

Chloreto de sodio	$0^{gr},5010$
» de calcio	0 ,2853
» de magnesio	0 ,1857
Sulfato de potassio	0 ,2053
» de sodio	0 ,0072
» de magnesio	0 ,0050
» de aluminio	0 ,0127
Nitrato de sodio	0 ,2423
» de calcio	0 ,0139
Carbonato de sodio	0 ,2691
» de magnesio	0 ,0119
Bicarbonato de cal	0 ,0432
» de ferro	0 ,0022
Acido silicico	0 ,0185
Somma	$1^{gr},8043$

O residuo d'esta agua secco a 180° foi de $1^{gr},8375$.

A sua densidade foi de $1001^{gr},843$.

O seu residuo sulfatado foi de $2^{gr},0880$.—*N.B.* Faltava $0^{gr},0009$ de CO^2.

Verificação.—Elementos transformados em sulfatos:

Sulfato de calcio	$0^{gr},4022$
» de magnesio	0 ,2690
» de potassio	0 ,2054
» de sodio	1 ,1939
Silica	0 ,0185
Alumina	0 ,0037
Ferro	0 ,0008
Somma	$2^{gr},0935$

A differença é de $0^{gr},0055$ comparada com o residuo obtido directamente $2^{gr},0886$.

Alcalinidade.—É de $0^{gr},0739$ computada em carbonato de soda.

IV.— Doseamentos e observações especiaes

A *oxydabilidadade da agua* expressa em oxygenio (methodo de Kubel) foi de $0^{gr},0027$ por litro.
O *oxygenio encontrado* foi de $0^{gr},0054$ por litro.

Coefficiente de alterabilidade.— O oxygenio encontrado depois de submettida a agua, em frasco azul, durante 48 horas a 33°, foi de $0^{gr},0048$ por litro. Portanto, o seu *coefficiente de alterabilidade* é:

$$c = \frac{6^{mg}}{54^{mg}} = 0 \cdot 11.$$

Como estes numeros se multiplicam por 100 teremos finalmente $c = 11$.

Gazes dissolvidos.— O volume total dos gazes era de 23^{cc} por litro, constituido por azote, oxygenio e acido carbonico.

Algas.— Segundo o biologista allemão Hirt, as aguas puras podem formar depositos verdes.
Esta agua guardada em um balão de vidro hermeticamente fechado apresentou, no fim de algum tempo, um *deposito verde* constituido por algas, que visto ao microscopio com a amplificação de 500 diametros se reconheceu ser principalmente constituido por:

Clamydococus pluvialis (a mais abundante);
Stigeoclonium (abundante);
Diatomeas (algumas).

V.— Conclusão

Como esta agua tem um residuo solido inferior a 3 grammas por litro, e como predomina na sua composição o *sodio* e o *chloro,* e como além d'isso tem uma reacção fortemente *alcalina,* pode ser considerada uma agua *hyposalina-chloretada-sodica.*
Considerada sob o ponto de vista hygienico e de accordo com a analyse, a agua pela ausencia de *ammoniaco,* pela ausencia de *nitritos,* pelo seu *grau de oxydabilidade,* pelo seu *coefficiente de alterabilidade* pode ser admittida como não nociva á saude. Comtudo, contém uma grande quantidado de nitratos o que levaria a regeital-a se fosse uma

agua de bebida usual, attendendo o que geralmente está admittido a este respeito.

Como os nitratos proveem da oxydação das materias organicas, os chimicos consideram suspeitas as aguas que conteem muito acido nitrico, porque podem *ipso facto* estar contaminadas de materias organicas e conterem os microbios que dão origem a terriveis epidemias, como por exemplo o *bacillus typhicus*. Mas, no caso presente, sendo a agua d'um poço, junto ao mar e distante de sitios onde possa haver depositos de materias organicas, não ha motivo para a apreciar desfavoravelmente, sob este ponto de vista, e a experiencia confirma isto, pois que, ha muito que differentes pessoas fazem uso d'ella e não me consta que fossem atacadas de alguma doença por esse motivo. Convem, comtudo notar, que estas aguas de poço são sempre *perigosas*, porque de um momento para o outro podem ser inquinadas de microbios prejudiciaes á saude.

O congresso de Bruxellas, admittiu que as aguas potaveis não devem conter mais do que 2^{mg} de acido nitrico; outros chimicos, porém, conforme affirma M. Zune, consideram como potaveis as aguas contendo 300 a 400^{mg} de nitratos alcalinos ou alcalino-terrosos por litro.

Quando o acido nitrico apparece só, a sua presença indica uma destruição, uma oxydação completa das materias organicas, tornadas d'este modo inoffensivas. É o caso presente, sendo a pureza da agua confirmada pelos outros ensaios.

Quando, porém, o acido nitrico fôr acompanhado de ammoniaco, de nitritos, isto denota a continuidade da pollução e a inefficacia de purificação natural. A agua analysada não contém nenhuma d'estas substancias.

A apreciação de uma agua, sob o ponto de vista da sua percentagem em azote nitrico, exige alguma attenção e não pode ser baseada exclusivamente sobre uma questão de quantidade, visto que esta pode ser muito pequena e levar a regeitar a agua, ou relativamente elevada e não implicar nenhum perigo, mas simplesmente a necessidade de um exame frequente e renovado.

O *coefficiente de alterabilidade* diz-nos que esta agua deve ser bem classificada, visto ter o numero 11 para coefficiente, que é egual ao da agua do Havre, no reservatorio, uma das melhores aguas que abastecem Paris. Os numeros que representam este coefficiente são tanto menores quanto menos activas e numerosas forem as populações de micro-organismos que contiverem.

Esta agua varía de composição, o que acontece frequentemente ás aguas de poço, visto que em duas amostras se encontrou um peso especifico differente.

PREÇO D'ESTE NUM. 500 RÉIS

Acha-se á venda no Deposito de impressos da Academia.

A correspondencia deve ser dirigida, *franca de porte,* á Redacção do JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS, PHYSICAS e NATURAES, na Academia Real das Sciencias de Lisboa, rua do Arco (a Jesus).

JORNAL DE SCIENCIAS

MATHEMATICAS, PHYSICAS E NATURAES

PUBLICADO SOB OS AUSPICIOS

DA

ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS DE LISBOA

SEGUNDA SÉRIE

Tom. V — Dezembro, 1897 — Num. XVIII

LISBOA
TYPOGRAPHIA DA ACADEMIA
1897

INDEX

SUR LA RECHERCHE DES COLORANTS DE LA HOUILLE DANS LES VINS BLANCS COLORÉS OU NON AU CARAMEL

PAR

ALBERTO D'AGUIAR ET WENCESLAU DA SILVA

Chimistes au Laboratoire municipal de Porto

PREMIÈRE PARTIE

La recherche des colorants de la houille et leur distinction du caramel dans les liqueurs et les cognacs a déjà été l'objet des études de quelques chimistes, MM. Rocques, Saglier et Rœser, entre autres. [1]

Tout dernièrement, M. Cruz Magalhães, [2] s'étant rapporté au même sujet, a prétendu démontrer que les méthodes usitées pour la recherche des colorants de la houille dans les vins blancs vieillis peuvent se trouver en défaut, pouvant conduire à une confusion du caramel avec les couleurs jaunes ou jaune orangées de la houille.

Nous demandons la permission de présenter les résultats de nos expériences [3] sur cette question, faites au laboratoire municipal de Porto, d'après les bienveillants conseils de M. le professeur Ferreira da Silva.

Nous rapporterons d'abord avec plus de détail les résultats obtenus par l'emploi de l'alcool amylique sur les vins rendus alcalins par

---

[1] Rocques, *Analyse des alcools et des eaux-de-vie*, p. 62–63.— Saglier, *Analyse des matières alimentaires (Encyclopédie chimique de M. Frémy*, t. 10, p. 271).— Rœser, *Analyse d'un colorant pour eaux-de-vie (Journ. de Ph. et de Ch.*, 5e série, t. 27, p. 185–188; 1893).

[2] *Comptes-rendus de l'Acad. des sciences de Paris*, t. 123, n.º 21; 23 novembre 1896

[3] Le resumé de ce mémoire a été présenté par M. le professeur Armand Gautier à l'Académie des Sciences de Paris, dans les séances du 23 fevrier et 3 mai 1897 dans deux notes, sous le titre: *Sur la recherche des colorants de la houille dans les vins blancs et la différence de ces colorants avec les couleurs du caramel; Sur la recherche du jaune naphtol S et des colorants analogues dans le vins blancs et dans les liquers (Comptes-rendus de l'Académics des Sciences de Paris,* t. CXXIV, pags. 408–410 et 965-966).

l'ammmoniaque, parce que c'est le procédé le plus sensible pour cet ordre de recherches; et ensuite nous résumerons nos autres essais.

Nous avons opéré avec les couleurs suivantes: 1° binitronaphtol; 2° crysoïdine; 3° brun de Bismarck; 4° orangé II; 5° tropéoline; 6° rouge de Biebrich; 7° azoflavine; 8° hélianthine; 9° méthylorange; 10° amido-azobenzol; 11° jaune de naphtol S; 12° caramel.

Ces couleurs ont été dissoutes dans de l'alcool à 20°, dans la proportion de 2 milligrammes pour 20 centimètres cubes de l'alcool; et les solutions additionnées à 400 centimètres cubes de vin blanc *Ermida* fourni par la Compagnie vinicole du Nord de Portugal. Le caramel a été ajouté au vin dans la proportion de 5 centimètres cubes pour 400 centimètres cubes de vin, et a été obtenu avec 500 grammes de sucre pur, chauffé jusqu'à 215° et ensuite dissous dans 800 centimètres cubes d'eau.

Les intensités colorantes obtenues sont rapportées au vin *Ermida,* pris sous l'épaisseur de 12 centimètres; ces intensités sont mentionnées dans le tableau de la première série de nos essais.

I.—Essais par l'alcool amylique sur les vins rendus alcalins par l'ammoniaque

Nous avons fait trois séries d'essais:

Première série.—60 centimètres cubes de chacun des vins ont été alcalinisés par l'ammoniaque et agités avec 30 centimètres cubes d'alcool amylique. On a séparé et filtré l'alcool amylique dont on a noté le ton et l'intensité de la coloration, en prenant comme unité celle de l'alcool amylique du colorant n° 1, pris sous l'épaisseur de 2 centimètres. Environ 5 centimètres cubes des liqueurs amyl-alcooliques ont été réduits au tiers par évaporation en présence de quelques brins de soie. Voici les résultats:

NUMÉROS	COLORANTS ADDITIONNÉS AU VIN	INTENSITÉ COLORANTE DES VINS	COLORATION DE L'ALCOOL AMYLIQUE	INTENSITÉ COLORANTE DE L'ALCOOL AMYLIQUE	COLORATION DES BRINS DE SOIE
1	Binitronaphtol	1,043	Jaune vif	1,000	Jaune
2	Crysoïdine	1,333	—	0,909	Jaunâtre légèrement rose, très faible
3	Brun de Bismarck	1,294	—	0,952	Jaune-rose
4	Orangé II	1,333	Jaune-rouge (saumon)	1,000	Saumon
5	Tropéoline	1,333	—	1,111	—
6	Rouge de Biebrich	1,600	Rouge-jaune	1,428	Rose
7	Azoflavine	1,043	Jaune	0,625	Jaune vif
8	Hélianthine A	1,043	Jaune d'or	1,000	Jaune
9	Méthylorange	1,333	Jaune	1,428	Jaune foncé
10	Amido-azobenzol	1,043	—	0,833	Jaune très faible
11	Jaune de naphtol S	1,043	Presque ineolore	0,166	Jaune faible
12	Caramel	2,666	Jaunâtre faible	0,210	Jaune très peu net
13	Vin naturel (Ermida)	1,000	Presque incolore	0,181	Pas de coloration

Deuxième série.—5 centimètres cubes des liqueurs amylalcooliques ont été évaporés à la siccité dans des petites capsules de porcelaine chauffées au bain-marie; les résidus de l'évaporation ont été traités par l'acide sulfurique concentré et ensuite additionnés d'eau. On a procédé de même pour l'acide chlorhydrique.

Voici les résultats:

NUMÉROS	COLORATION DES RÉSIDUS AMYL-ALCOOLIQUES	ACTION DE L'ACIDE SULFURIQUE		ACTION DE L'ACIDE CHLORHYDRIQUE	
		concentré	étendu	concentré	étendu
1	Jaune légèrem.[t] verdâtre	Jaune brun	Jaune	Décoloration, devénant légèrement rose	Jaune
2	Orange vif	Rouge brun	Rouge et après jaune-rouge	Décoloration légère	—
3	Rouge-orange	Brun verdâtre	Jaune-rouge	Légèrement rouge	—
4	Saumon	Rouge violacé	Jaune-orange	Violet	—
5	Jaune-orange foncé	Violet-rouge	—	Rose-orange	Jaune orangé
6	Rouge-orange	Rouge-sang	Jaune rougeâtre	Rouge	—
7	Jaune vif	Violet pourpre	Jaune	Pourpre	Jaune
8	—	—	—	—	—
9	Rouge sang	Jaune verdâtre	Rouge orangé	Rouge	Rose
10	Jaune	—	Rouge et après jaune-rose	Rouge violaeé	Jaune-rose
11	Jaune faible	Légèrement brun	Jaune faible	Pas de changement	Jaune peu net
12	Jaune brunâtre	Brun noir	Décoloration	Brunâtre	—
13	Jaunâtre faible	Brunâtre	Jaunâtre très faible	Pas de changement	Jaunâtre très faible

Troisième série.—5 centimètres cubes des liqueurs amylalcooliques ont été évaporés au bain-marie à la siccité; et les résidus traités par l'acide sulfurique concentré et ensuite additionés d'un peau d'eau. Les solutions ont été filtrés, alcalinisées par l'ammoniaque et agitées de nouveau avec l'alcool amylique. Nous avons répété sur ces liqueurs amyalcooliques le même traitement.

NUMÉROS	COLORATION DE L'ALCOOL AMYLIQUE	
	après le premier traitement	après le deuxième traitement
1	Jaune très net	Jaune
2	Jaune-orange	—
3	Jaune	Jaune faible
4	Orange	Orange
5	Orange foncé	Orange vif
6	—	—
7	Jaune vif	Jaune d'or
8	Jaune	Jaune
9	Jaune vif	—
10	Jaune	—
11	Jaune faible	Jaune très faible
12	Jaunâtre faible	Pas de coloration
13	Pas de coloration	—

On conclut de ces essais que la coloration de la liqueur amylalcoolique procédant du vin additionné de caramel est très douteuse, malgré le ton plus intense que ce vin présentait en rapport aux échantillons colorés par les dérivés de la houille.

Le jaune de naphtol S serait le seul qui ne céderait couleur suffisante pour permettre l'affirmation d'un colorant de la houille; mais encore dans ce cas le pouvoir de fixation sur la soie nous porterait à rechercher par d'autres moyens le colorant artificiel.

La fixation du caramel sur la soie est très faible, de sorte qu'on peut simplement affirmer que la soie ne reste absolument blanche, comme elle l'était avant l'essai; ce qu'on observe avec plusieurs vins naturels.

Dans les vins colorés artificiellement par les dérivés do la houille, la coloration de la soie est bien plus nette; et dans les rares cas où elle ne pent amener à une conviction (n.° 2 et 10), les autres résultats analytiques permettent de déterminer la nature du colorant.

Le traitement des résidus de l'évaporation des liqueurs amylalcooliques par l'acide sulfurique et par l'acide chlorhydrique, hormis le cas où le colorant est insoluble, caractérisent nettement les couleurs jaunes de la houille. Avec le caramel on obtient, même avec des résidus légèrement colorés, des colorations brun-noir, sans autres changements.

La troisième série d'essais, dont on peut, selon nous, se dispenser dans la pratique, lève tous les doutes, puisque l'alcool amylique n'extrait rien d'appréciable du caramel carbonisé par l'acide sulfurique, de sorte que toute confusion avec les couleurs de la houille est impossible.

En résumé: les couleurs du caramel, par le traitement usuel à l'alcool amylique, donnent toujours des résultats très douteux et parfois négatifs. Les couleurs jaunes de la houille présentent, au contraire, un ensemble de réactions très nettes, dans les conditions ordinaires de leur emploi, pour frauder les vins.

II.—Essais par l'alcool amylique en solution barytique et par l'éther acétique en solution barytique et ammoniacale

Après agitation, l'alcool amylique et l'éther acétique présentaient des colorations semblables à celles qu'on a obtenu avec l'alcool amylique en solution ammoniacale; seulement elles étaient moins intenses ou même douteuses, comme on le voit par le tableau suivant:

Intensités de l'alcool amylique et éther acétique rapportées au même type du premier tableau

NUMÉRO DES VINS	ALCOOL AMYLIQUE		ÉTHER ACÉTIQUE	
	Solution ammoniacale	Solution barytique	Solution ammoniacale	Solution barytique
1	1,000	0.571	0.666	0,142
2	0,909	1,000	0,625	0,500
3	0,952	0.750	0,222	0.250
4	1,000	0,689	0,181	Presque incolore
5	1,111	0,800	0.222	—
6	1,428	0,625	0,142	—
7	0,625	0.500	0,285	0,222
8	1,000	0,571	9,571	0,250
9	1,428	1,000	0,200	0.153
10	0,833	0,423	0,500	0,400
11	0,166	Presque incolore	Incolore	Incolore
12	0,210	0.117	0,100	Presque incolore
13	0,181	Presque incolore	Incolore	Incolore

Les essais de teinture réalisés sur ces liqueurs, aussi bien que les colorations des résidus et leurs changements sous l'action de l'acide sulfurique concentré et étendu, sont suffisamment nets, sortout quand l'alcool amylique et l'éther acétique extraient nettement le dérivé de la houille et principalement quand celui-ci est soluble dans l'éther acétique; celui-ci possédant un moindre pouvoir extractif pour quelques matières du vin, la netteté des réactions est plus grande.

Nous passons donc sous silence ces résultats, semblables à ceux mentionnés aux tableaux précédents, en faisant seulement remarquer que le vin additionné de caramel abandonne à l'éther acétique une coloration beaucoup moins appréciable qu'à l'alcool amylique.

Ces essais ne peuvent non plus conduire à penser à un colorant de la houille dans les vins caramelisés.

III.—Essais par le sous-acétate de plomb, l'acétate de mercure et la potasse (Ch. Girard) et par l'acétate de mercure et la magnésie (Bellier)

Les sous-acétate de plomb, employé dans la proportion de 1 volume pour 2 volumes de vin, a donné des résultats négatifs avec les vins nos 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 13; douteux avec les nos 2, 10 et 12; et net avec le no 9.

L'acétate de mercure et la potasse ont fourni des résultats négatifs avec les nos 2, 3, 10 et 13; douteux avec 4, 5, 11, 12; et positifs avec 1, 6, 7, 8, 9.

Le procédé de Bellier a donné des résultats très nets avec les nos 1, 5, 6, 7, 8, 9, 11; nets avec 4; douteux avec 3, 12; et négatifs avec 2, 10, 13.

On voit donc que le procédé Bellier, sans être décisif, fournit de bonnes indications sur l'existeuce des colorants de la houille et doit être employé avec les méthodes fondées sur l'extraction par les dissolvants mentionnés.

Nous concluons donc que les méthodes actuellement usitées en France, particulièrement celles de MM. Armand Gautier et Ch. Girard, pour la recherche des colorants de la houille, basées surtout dans l'emploi de l'alcool amylique et dans les essais de teinture, ne permettent pas la confusion du caramel avec les couleurs de la houille.

DEUXIÈME PARTIE

Nous avons mentionné jusqu'à présent les différences que dans la recherche d'un colorant artificiel présentent les vins blancs contenant quelque dérivé jaune de la houille et ceux qui ne sont colorés qu'avec le caramel.

Maintenant nous allons exposer les résultats de nos essais sur nos vins colorés avec un mélange de caramel et de colorants jaunes dérivés de la houille.

Nous ferons cependant remarquer qu'en employant le caramel pour colorer un vin il n'y a aucun avantage dans l'addition des couleurs jaunes de la houille, puisque l'intensité colorante de ces dernières est plus faible que celle du caramel. Nous croyons donc que seulement dans des cas très rares on se trouvera en présence d'un vin coloré avec un semblable mélange.

Dans ces essais nous avons employé encore le vin *Ermida,* contenant la même proportion de colorant de la houille, c'est-à-dire 2 mgr. pour 400 cc. du vin et 10 cc. de la solution de caramel. Ces vins présentaient tous une intensité colorante égale á 4,5 fois celle du vin naturel *Ermida* et une coloration jaune rougeâtre, semblale à celle de la solution de caramel, hormis l'échantillon contenant du methylorange, qui présentait un ton rouge plus vif.

Nous avons étouffé à dessein avec le caramel la coloration due aux couleurs de la houille, peu intense du reste, afin d'apprécier, dans des conditions défavorables, le limite de sensibilité de la recherche d'un colorant de la houille en présence du caramel et reconnaître l'influence de ce dernier quand, en présence des résultats analytiques, on a à conclure pour l'existence ou l'absence des dérivés de la houille.

Voici les résultats de nos essais.

I.— Essais avec l'alcool amylique en solution ammoniacale

a)

NUMÉROS	COLORANTS ADDITIONNÉS AU VIN	COLORATION DE L'ALCOOL AMYLIQUE	COLORATION DE LA SOIE
1	Caramel et binitronaphtol.....	Jaune	Jaune vif
2	» et chrysoïdine	Jaune foncé	Jaune foncé
3	» et brun de Bismarck..	Jaune	Jaunâtre faible
4	» et orange II	Saumon faible	Saumon faible
5	» et tropeoline.........	—	—
6	» et rouge de Biebrich..	—	Rose jaunâtre faible
7	» et azoflavine.........	Jaune	Jaune très faible
8	» et hélianthine *a*......	—	Jaune faible
9	» et methylorange	Jaune vif	Jaune
10	» et amidoazobenzol....	Jaune	Jaune foncé
11	» et jaune de naphtol S.	Jaune très pâle	Jaune net
12	....	Jaunâtre très pâle	Jaunâtre très pâle

Afin d'apprécier plus facilement l'ensemble des résultats mentionnés dans le tableau ci-dessus, voici le degré de netteté qu'ils présentaient:

	COLORATION DE L'ALCOOL AMYLIQUE AVEC LES NUMÉROS	COLORATION DE LA SOIE
Très nette	2, 4, 5, 6, 9	1, 2, 4, 5, 6, 9, 10
Nette..........................	1, 7, 8, 10	8, 11
Douteuse	3, 11	»
Presque nulle	12	3, 7, 12

b) Les liqueurs amyalcooliques ont été évaporées à la siccité et les résidus repris par l'acide sulfurique concentré et ensuite additionnés d'un peu d'eau. Nous avons aussi réalisé ce traitement avec l'acide chlorhydrique.

Voici les changements de coloration :

NUMÉROS	COLORATION DES RÉSIDUS AMYLALCOOLIQUES	ACTION DE L'ACIDE SULFURIQUE		ACTION DE L'ACIDE CHLORHYDRIQUE	
		concentré	étendu	concentré	étendu
1	Jaune	Rouge-marron	Jaunâtre	Décoloration légère	Jaune faible
2	Jaune orangé	—	Rose et après jaune	Rouge	Jaune foncè
3	Jaune-marron faible	Marron jaunâtre	Jaune faible	Jaune-rose faible	Jaunâtre
4	Jaune-saumon	Rouge foncé	Jaune rougeâtre	Rouge sang	Orangé
5	Saumon pâle	Violet	Jaune	Rouge-violet	Jaune orangé
6	Jaune rougeâtre	Marron rougeâtre	—	Rougeâtre	Orangé
7	Jaune	Rouge-marron	—	Jaune-marron	Jaune vif
8	—	—	Jaune faible	Rougeâtre	Jaune foncé
9	Rouge	—	Rouge faible et après rose	Rouge	Rose
10	Jaune	—	Rouge et après orangé	Rouge fugace	Jaune
11	Jaunâtre	Marron	Jaunâtre	Jaunâtre	Jaunâtre
12	—	—	—	—	—

	COLORATION DES RÉSIDUS	ACTION DE H^2SO^4	ACTION DE H Cl
Très nette	2, 4, 5, 6, 9	2, 9	2, 4, 5, 9, 10
Nette....................	1, 7, 8, 10	1, 4, 5, 6, 7, 10	1, 6, 7, 8
Douteuse	2, 11, 12	8	3
Presque nulle............	»	3, 12, 12	11, 12

c) 10 cc. de chacune des liqueurs amylalcooliques ont été évaporés à la siccité, traités par l'acide sulfurique concentré et ensuite étendus avec de l'eau et filtrés; ces solution, agitées avec l'alcool amylique, ont coloré celui-ci. Les colorations étaient très nettes avec les n.os 1, 2, 9 et 10; nettes avec 4, 5 et 6; et douteuses avec 3, 7, 8, 11 et 12. Elles étaient propres aux colorants employés et ont été déjà mentionnées.

II.—Essais avec l'éther acétique en solution ammoniacale

NUMÉROS	COLORATION DE L'ÉTHER ACÉTIQUE	COLORATION DE LA SOIE	COLORATION DES RÉSIDUS D'ÉVAPORATION
1	Jaune vif	Jaune	Jaune vif
2	—	Jaune foncè	Orange foncé
3	Jaunâtre faible	Jaune faible	Jaune-marron
4	Saumon faible	Jaune rose	Jaune rougeâtre
5	—	Rose jaunâtre faible	Orange foncé
6	Presque incolore	Rose net	Jaune orangé faible
7	Jaune faible	Jaune net	Jaune vif
8	—	Jaune faible	—
9	—	Jaune	Jaune
10	Presque incolore	Presque incolore	—
11	—	—	Jaune-marron
12	—	—	Marron faible

	COLORATION DE L'ÉTHER ACÉTIQUE	COLORATION DE LA SOIE	COLORATION DES RÉSIDUS D'ÉVAPORATION
Très nette	1. 2	»	1, 2, 4, 5, 8
Nette....................	4, 5, 7, 8, 9	1, 2, 4, 5, 6, 7, 9	7, 9, 10
Douteuse	10	3, 8	3, 6
Presque nulle	3 6, 11, 12	10, 11, 12	11, 12

b) Le traitement des résidus amyalcooliques par l'acide sulfurique concentré et addition d'eau ont fourni des résultats nets avec les n.os 1, 2, 5, 7, 9, 10; douteux avec 3, 4, 6; et négatifs avec 11 et 12.

III.—Essais avec le mélange de magnésie et acétate mercurique

(procédé Bellier)

NUMÉROS	COLORATION DU FILTRATUM	
	avant acidulation	après acidulation
1	Jaune pâle	Jaune
2	—	Jaune très pâle
3	—	—
4	Jaune foncé	Jaune rose
5	—	—
6	Jaune-rose	—
7	Jaune foncé	Jaune
8	Jaune	—
9	—	Rouge
10	Jaune foncé	Jaune
11	Jaune vif	Jaune vif
12	Jaunâtre	Jaunâtre plus faible

	COLORATION DU FILTRATUM	
	avant acidulation	après acidulation
Très nette	»	4, 5, 6, 8, 9, 11
Nette	4, 6, 11	»
Douteuse	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12	1, 2, 3, 7, 10, 12

Les résultats ci-dessus montrent que même dans un vin contenant du caramel et des couleurs jaunes de la houille on peut généralement reconnaître la présence des celles-ci, quoique l'action du caramel puisse en des cas très rares déguiser un peu les dérivés de la houille, de manière à rendre douteuse leur présence.[1] C'est ce qui est arrivé dans nos essais, avec le n^o 3 (brun de Bismarck), qui a toujours fourni des résultats douteux; on peut cependant lever ce doute, en faisant l'extraction du colorant sur un plus grand volume de vin. Nous avons fait un essai sur 150 cc. de vin et nous avons obtenu une coloration très nette dans l'alcool amylique et la soie, et des résultats positifs dans le traitement du résidu amylalcoolique par l'acide sulfurique et l'eau, suivi de l'extraction en solution ammoniacale.

L'action perturbatrice du caramel se fait surtout remarquer dans le changement des résidus sous l'action de l'acide sulfurique concentré, parce que le caramel donne des colorations très foncées qui cachent la coloration due au dérivé de la houille. Il convient alors d'étudier les changement de coloration des résidus, sous l'action de l'acide chlorhydrique concentré, qui fournit, comme nous l'avons déjà vu, des renseignements autrement nets.

Malgré les conditions relativement défavorables où nous nous sommes placés (prédominance de la quantité de caramel sur celle du colorant de la houille et petite portion de vin employé dans les essais), on voit que l'extraction en solution ammoniacale par l'alcool amylique et par l'éther acétique fournit des éléments sûrs pour reconnaître l'existence d'un colorant de la houille.

---

[1] Nous croyons que la présence du caramel n'est pas toujours défavorable, puisque les vins n^{os} 2 et 11 (chrysoïdine et jaune de naphtol S) ont donné des résultats plus nets que dans notre première série d'essais.

IV.—Recherche du jaune de naphtol S et des colorants analogues

Si la confusion des colorants jaunes de la houille et du caramel n'est pas permise, il n'est pas moins vrai que l'extraction par l'alcool amylique ou l'éther acétique ne pourra toujours faire déceler le dérivé de la houille; c'est ce qu'il est arrivé dans nos essais avec le jaune de naphtol S. Ce colorant, de même que le jaune diamant, le jaune brillant S, etc., sont à peine extraits en solution alcaline par les dissolvants (alcoól amylique, éther acétique, éther sulfurique), de manière que leur présence peut ne pas être décelée par ces moyens.

Dans ces conditions voici comme nous procedons:

Une portion du vin est franchement acidulée par l'acide sulfurique et agitée avec l'alcool amylique qui extrait tout le dérivé de la houille et une partie de la matière colorante naturelle du vin, etc.; après decantation et filtration l'alcool amylique est agité avec un excès d'ammoniaque et maintenu en repos jusqu'à ce qu'il reste limpide. La matière colorante naturelle du vin, aussi bien que d'autres matières diverses sont précipitées par l'ammoniaque; mais l'alcool amylique retient en solution le colorant de la houille en quantité suffisante pour sa caractérisation par les essais de teinture sur la soie et par les réactifs.[1] Après décantation, l'alcool amylique est agité avec de l'eau acidulée par l'acide sulfurique et ensuite évaporé en présence de la soie avec quelques gouttes d'ammoniaque. La soie devient nettement coloré; et l'alcool amylique laisse un résidu coloré qui est ensuite soumis à l'action des acides sulfurique et chlorhydrique et de l'ammoniaque, afin d'étudier les changements produits par ces réactifs.

Nous avons fait ces essais sur des vins colorés avec le jaune de naphtol S, jaune brillant S, jaune diamant, curcuma et fernambouc, et sur le vin naturel. Les résultats ont été positifs avec les trois premiers et négatifs avec les trois derniers, malgré la forte coloration de toutes les liqueurs amyalcooliques.[2]

Le procédé Bellier a aussi fourni des résultats très nets sur les trois premiers vins et négatifs sur les derniers.

On voit donc qu'il est encore possible, dans ces conditions, d'affirmer la présence d'un colorant de la houille, en suivant la marche que nous venons d'exposer.

---

[1] De nos essais sur plusieurs colorants jaunes de la houille, nous concluons que l'alcool amylique dissout beaucoup ces colorants en milieu acide; et que l'alcalinisation ultérieure par l'ammoniaque ne les précipite jamais complètement, même quand ils sont insolubles dans celle-ci.

[2] Ces essais ont été encore répétés sur les vins antérieurs et ils ont fourni aussi des resultats positifs. Les résidus de l'évaporation des liqueurs acides amylalcooliques ne présentaient pas des colorations caractéristiques: ils allaient du jaune au rouge foncé, hormis celui provenant du vin caramelisé qui était noir.

*

* *

De toutes nos expériences nous concluons, donc, que les procédés employés jusqu'á présent pour la recherche des colorants de la houille ne permettent pas, quand leurs résultats sont convenablement interprétés, la confusion de ces colorants avec le caramel; tout au plus pourront-ils être insuffisants, en des circonstances exceptionelles, pour qu'on ne puisse affirmer leur présence. Dans ces dernier cas, il y a avantage à faire l'extraction du colorant en milieu acide, d'après notre méthode.

SUR L'ANGLE DE BROCARD ET LES ANGLES DE STEINER D'UN TRIANGLE

PAR

JORGE FREDERICO D'AVILLEZ

Vicomte de Reguengo

On sait que dans un triangle quelconque ABC, R étant le rayon du cercle circonscrit, on a

$$\frac{a}{2R} = \sin A \qquad \frac{b}{2R} = \sin B \qquad \frac{c}{2R} = \sin C$$

a, b, c étant les côtés.

On aura donc

$$a \sin A + b \sin B + c \sin C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}$$

et aussi

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C = R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) =$$
$$= 4R \sin A \sin B \sin C.$$

Or,

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{pr}{2R^2}$$

p étant le demi-perimètre et r le rayon du cercle inscrit, donc

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C = \frac{2pr}{R} = \frac{2S}{R}$$

S étant l'aire du triangle.

Ainsi

$$\frac{a \sin A + b \sin B + c \sin C}{a \cos A + b \cos B + c \cos C} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

L'angle de Brocard du triangle est donné par la formule de Crelle (*)

$$\cot\mathrm{g}\,\omega = \cot\mathrm{g}\,A + \cot\mathrm{g}\,B + \cot\mathrm{g}\,C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$$

donc

$$\cot\mathrm{g}\,\omega = \frac{a\sin A + b\sin B + c\sin C}{a\cos A + b\cos B + c\cos C} \tag{1}$$

On peut déduire une autre expréssion de $\cot\mathrm{g}\,\omega$ de la formule

$$\frac{b-2a\cos C}{a\sin C} + \frac{c-2b\cos A}{b\sin A} + \frac{a-2c\cos B}{c\sin B} = 0$$

donnée par M. G. Delahaye dans le *journal de Vuibert* (question 4081), car, on trouve immédiatement

$$\frac{b}{a\sin C} + \frac{c}{b\sin A} + \frac{a}{c\sin B} = 2\cot\mathrm{g}\,\omega \tag{2}$$

ou encore, en représentant par h_a, h_b, h_c les hauteurs du triangle

$$\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} = 2\cot\mathrm{g}\,\omega \tag{3}$$

relation que nous avons donné dans la notre solution de la question proposée par M. Delahaye.

On sait que

$$\cot\mathrm{g}\,A = \frac{2R\cos A}{a} \qquad \cot\mathrm{g}\,B = \frac{2R\cos B}{b} \qquad \cot\mathrm{g}\,C = \frac{2R\cos C}{c}$$

donc

$$\cot\mathrm{g}\,\omega = 2R\left(\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c}\right) \tag{4}$$

Si l'on appelle h'_a, h'_b, h'_c les coordonnées trilinéaires normales de l'orthocentre du triangle, on a les relations connues

$$h'_a = 2R\cos A \qquad h'_b = 2R\cos B \qquad h'_c = 2R\cos C$$

d'où

$$\cot\mathrm{g}\,\omega = \frac{h'_a}{a} + \frac{h'_b}{b} + \frac{h'_c}{c} \tag{5}$$

(*) Crelle a donné cette formule en 1816, mais M. Brocard l'a rétrouvée en 1879 et c'est lui qui a montré l'importance de l'angle ω dans la géometrie du triangle.

Des formules (3) et (5) on déduit l'identité remarquable

$$\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}=2\left(\frac{h'_a}{a}+\frac{h'_b}{b}+\frac{h'_c}{c}\right) \tag{6}$$

d'où

$$\frac{a^2-2\,h_a\,h'_a}{a h_a}+\frac{b^2-2\,h_b\,h'_b}{b\,h_b}+\frac{c^2-2\,h_c\,h'_c}{c\,h_c}=0.$$

En remarquant que

$$a\,h_a=b\,h_b=c\,h_c=2\,S$$

on obtient la formule connue

$$a^2+b^2+c^2=2\,(h_a h'_a+h_b h'_b+h_c h'_c)$$

d'où l'on trouve deux autres expressions de $\cot g\,\omega$; ou a en effet

$$\cot g\,\omega=\frac{h_a\,h'_a+h_b\,h'_b+h_c\,h'_c}{2\,S} \tag{7}$$

et aussi

$$\cot g\,\omega=\frac{R}{S}\,(h_a\cos A+h_b\cos B+h_c\cos C) \tag{8}$$

Si l'on représente par X, Y, Z les coordonnées trilinéaires normales d'un point quelconque du plan du triangle, on sait, d'après un theorème dû à Gergonne, que

$$\frac{X}{h_a}+\frac{Y}{h_b}+\frac{Z}{h_c}=1$$

donc

$$\frac{a+X}{h_a}+\frac{b+Y}{h_b}+\frac{c+Z}{h_c}=1+2\cot g\,\omega \tag{9}$$

Les angles de Steiner du triangle, sont, comme l'on sait, donnés, en fonction de l'angle de Brocard, par les formules (*)

$$\cot g\,\omega_1=\cot g\,\omega+\sqrt{\cot g^2\omega-3} \qquad \cot g\,\omega_2=\cot g\,\omega-\sqrt{\cot g^2\omega-3}.$$

On peût mettre ces formules sous d'autres formes; si P est la puissance totale du triangle, on sait que

$$P=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

(*) Voir *Mathésis,* p. 223; 1896.

d'où

$$P = 2S \operatorname{cotg} \omega$$

et

$$\operatorname{cotg} \omega = \frac{P}{2S} \tag{10}$$

En substituant ci-dessus on aura

$$\operatorname{cotg} \omega_1 = \frac{1}{2S}\left(P + \sqrt{P^2 - 12S^2}\right) \qquad \operatorname{cotg} \omega_2 = \frac{1}{2S}\left(P - \sqrt{P^2 - 12S^2}\right)$$

d'où

$$\operatorname{cotg} \omega_1 \operatorname{cotg} \omega_2 = 3 \tag{11}$$

Donc, *le produit des cotagentes des angles de Steiner d'un triangle est égal à 3.*

Cette relation conduit à un résultat intéréssant.

On sait que les droites, passant par un des foyers de l'ellipse de Steiner d'un triangle, et comprises entre les sommets et les côtés opposées (céviènnes) sont égales, et si l_1 est leur longueur commune, on a (*)

$$l_1^2 = S \operatorname{cotg} \omega_1$$

et si l_2 est la longueur commune des ceviènnes passant par l'autre foyer, on aura aussi

$$l_2^2 = S \operatorname{cotg} \omega_2.$$

On en tire

$$l_1^2 \cdot l_2^2 = S^2 \operatorname{cotg} \omega_1 \operatorname{cotg} \omega_2$$

d'où, d'après la relation trouvée précédemment

$$l_1^2 \cdot l_2^2 = 3S^2. \tag{12}$$

On peût aussi trouver pour l'angle de Brocard et les angles de Steiner d'autres relations, dépendent seulement de la considération d'aires de triangle.

En effet, si S^1 est l'aire du triangle formé par les centres des cercles exinscrits à ABC, on sait que

$$S^1 = S + \frac{1}{8}(a^2 + b^2 + c^2)$$

d'où, d'après la formule de Crelle,

$$S^1 = S\left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \omega\right).$$

(*) Voir *Mathésis*, p. 223; 1896.

On en tire

$$\cot g\, \omega = \frac{2}{S}(S^1 - S) \tag{13}$$

d'où l'on déduit

$$\left.\begin{aligned} \cot g\, \omega_1 &= \frac{1}{S}\left[2(S^1 - S) + \sqrt{S^2 + 4S^{1^2} - 8SS^1}\right] \\ \cot g\, \omega_2 &= \frac{1}{S}\left[2(S^1 - S) - \sqrt{S^2 + 4S^{1^2} - 8SS^1}\right] \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

SUR QUELQUES DÉCOMPOSITIONS DE CARRÉS EN SOMMES DE CARRÉS ENTIERS

PAR

JORGE FREDERICO D'AVILLEZ

Vicomte de Reguengo

La formule de Catalan

$$(1+a+b+ab+a^2+b^2)^2=(1+a)^2(a+b)^2+(1+b)^2(a+b)^2+$$
$$+(1+a+b-ab)^2$$

et la formule de M. Neuberg

$$(1+a+b+ab+a^2+b^2)^2=a^2(a+b+1)^2+b^2(a+b+1)^2+$$
$$+(a+b+1)^2+(a+b+ab)^2$$

donnent, a et b étant entiers, la décomposition d'un carré en une somme de trois et de quatre carrés entiers.

Si l'on y fait succéssivement

$$\begin{matrix} a=0 & a=0 & a=1 & a=2\ldots\ldots \\ b=0 & b=1 & b=1 & b=1\ldots\ldots \end{matrix}$$

on obtient des decompositions en carrés des nombres

$$1^2 \quad 3^2 \quad 6^2 \quad 11^2 \quad 17^2 \quad 25^2 \quad 34^2 \quad 45^2 \quad 57^2 \quad 71^2 \quad 86^2.$$

La formule de Catalan donne la décomposition des nombres 1^2, 3^2, 6^2, 11^2, 17^2 en une somme de trois carrés; pour le nombre 25^2 qui correspond à $a=2$, $b=3$, on a

$$1+a+b-ab=0$$

donc, on obtient la décomposition en une somme de deux carrés

$$25^2 = 15^2 + 20^2$$

pour les autres termes 34^2, 45^2, ... la racine carré du dernier terme de la formule de Catalan est négative, car

$$ab > 1 + a + b.$$

La formule de M. Neuberg donne la décomposition des nombres considérés sous la forme d'une somme de quatre carrés; pour le nombre 25^2, on a

$$25^2 = 12^2 + 18^2 + 6^2 + 11^2.$$

Ainsi

$$12^2 + 18^2 + 6^2 + 11^2 = 15^2 + 20^2.$$

Si l'on décompose le nombre 11^2, on a, en faisant $a = 2$, $b = 1$,

$$11^2 = 9^2 + 6^2 + 2^2$$

$$11^2 = 8^2 + 4^2 + 4^2 + 5.$$

On obtient donc une décomposition de 25^2 en sept carrés

$$25^2 = 12^2 + 18^2 + 6^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2.$$

En faisant dans la formule de Catalan $a = 1$, $b = 1$, on a

$$6^2 = 4^2 + 4^2 + 2^2$$

et de la formule de Neuberg on tire

$$6^2 = 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2.$$

On a donc aussi une autre décomposition de 25^2 en une somme de dix carrés

$$25^2 = 12^2 + 18^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 8^2 + 4^2 + 4^2 + 5^2.$$

On trouve aussi la décomposition en cinq carrés

$$11^2 = 9^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2$$

ei la décomposition en huit carrés

$$25^2 = 12^2 + 18^2 + 6^2 + 9^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2$$

et en onze carrés

$$25^2 = 12^2 + 18^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 9^2 + 4^2 + 4^2 + 2^2 + 2^2.$$

On pourrait ainsi obtenir d'autres décompositions pour les termes de la suite considérée.

SOBRE ALGUMAS APPLICAÇÕES DO THEOREMA DE TINSEAU

POR

ANTONIO CABREIRA

Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa

---

I

1. Projectando um circulo sobre tres planos rectangulares, entre si, obtemos tres ellipses.

2. *A area do dodecagono regular inscripto, no circulo dado, é egual ao triplo da somma dos quadrados dos semi-eixos menores das ellipses.*

Representando, respectivamente, por a_{12}, s_{12}, s'_{12} e s''_{12} as areas dos dodecagonos regular e semi-regulares inscriptos, temos, pelo theorema de Tinseau,

$$a_{12}^2 = s_{12}^2 + s'^2_{12} + s''^2_{12}.$$

Mas, nas nossas memorias *Sobre a area dos polygonos regulares* e *Sobre a area dos polygonos semi-regulares,* demonstrámos que

$$a_{12} = l_3^2 \quad \text{e} \quad s_{12} = l_3 b \sqrt{3},\ s'_{12} = l_3 b' \sqrt{3},\ \ldots;$$

logo

$$a_{12} = 3(b^2 + b'^2 + b''^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

3. *O quadrado do raio do circulo é egual á somma dos quadrados dos semi-eixos menores das ellipses.*

Substituindo, em (1), a_{12} por $3r^2$, fica

$$r^2 = b^2 + b'^2 + b''^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

4. Consideremos agora o circulo fazendo angulos eguaes com os tres planos.

5. *A area do dodecagono regular inscripto, no circulo dado, é egual ao triplo da area do dodecagono regular inscripto, no circulo, cujo raio representa o semi-eixo menor das ellipses.*

A consideração do n.º 4 importa a egualdade das ellipses. Portanto, fazendo, em (1), $b=b'=b''$, resulta

$$a_{12}=3\cdot 3b^2 \quad \text{ou} \quad a_{12}=3\,a'_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

6. *O quadrado do raio do circulo dado é egual á area do dodecagono regular inscripto, no circulo, cujo raio representa o semi-eixo menor das ellipses.*

Effectivamente, egual raciocinio a respeito da formula (2) nos conduz a

$$r^2=3\,b^2 \quad \text{ou} \quad r^2=a'_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

7. Imaginemos, em seguida, o circulo dado n'uma posição tal que faça angulos eguaes com dois dos planos, ficando perpendicular ao terterceiro.

8. *A area do dodecagono regular inscripto, no circulo dado, é egual ao triplo da area do quadrado inscripto, no circulo, cujo raio representa o semi-eixo menor das ellipses.*

A consideração do numero anterior dá logar a $b=b'$ e $b''=0$; logo

$$a_{12}=3\cdot 2\,b^2 \quad \text{ou} \quad a_{12}=3\,a'_4 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

9. *O quadrado do raio do circulo dado é egual á area do quadrado inscripto, no circulo, cujo raio representa o semi-eixo menor das ellipses.*

Fazendo, em (2), $b=b'$ e $b''=0$, fica

$$r^2=2\,b^2=a'_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

10. *O producto dos semi-eixos de uma ellipse é egual á raiz quadrada da somma dos quadrados dos productos dos semi-eixos das suas projecções, sobre tres planos rectangulares, entre si.*

Effectivamente, do theorema de Tinseau, conclue-se, immediatamente,

$$ab=\sqrt{(a'b')^2+(a''b'')^2+(a'''b''')^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

11. Admittamos a hypothese de a ellipse fazer angulos eguaes com os tres planos.

12. *O producto dos semi-eixos da ellipse dada é egual ao producto do semi-eixo maior das suas projecções pelo lado do triangulo equilatero inscripto, no circulo, cujo raio representa o semi-eixo menor d'essas projecções.*

Fazendo, em (7), $a'b' = a''b'' = a'''b'''$, resulta

$$ab = a'b'\sqrt{3} = a'l'_3 \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (8)$$

13. Supponhamos tambem que a ellipse faz angulos eguaes com dois dos planos e é perpendicular ao terceiro.

14. *O producto dos semi-eixos da ellipse dada é egual ao producto do semi-eixo maior das suas projecções pelo lado do quadrado inscripto, no circulo, cujo raio representa o semi-eixo menor d'essas projecções.*

A condição $a'b' = a''b''$ e $a'''b''' = 0$ dá

$$ab = a'b'\sqrt{2} = a'l'_4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

15. Estabeleçamos que o eixo maior da ellipse dada é parallelo a um dos planos.

16. *A differença entre os quadrados dos semi-eixos menores da ellipse dada e da projecção que tem o mesmo eixo maior é egual á relação entre a somma dos quadrados dos productos dos semi-eixos das outras projecções e o quadrado do semi-eixo maior commum.*

Fazendo, em (7), $a = a'''$, resulta

$$b^2 - b'''^2 = \frac{(a'b')^2 + (a''b'')^2}{a^2} \dots\dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

17. Supponhamos que o eixo maior da ellipse dada é parallelo a dois dos planos.

18. *O quadrado do semi-eixo menor da ellipse dada é egual á somma dos quadrados dos semi-eixos menores das projecções.*

De facto, de (7) deduz-se ainda que

$$b^2 = b'^2 + b''^2, \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (11)$$

fazendo $a''' = 0$ e $a = a' = a''$.

19. Attribuâmos á ellipse uma posição tal que a sua projecção sobre um dos planos seja um circulo de raio egual ao semi-eixo menor.

20. *O producto do semi-eixo menor pelo raio do circulo focal é egual á raiz quadrada da somma dos quadrados dos semi-eixos das duas ellipses, sob que se projecta a ellipse dada.*

Fazendo, em (7), $a'''b''' = b^2$, vem

$$b\sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a'b')^2 + (a''b'')^2}$$

ou

$$bc = \sqrt{(a'b')^2 + (a''b'')^2} \dots\dots\dots\dots \quad (12)$$

21. Supponhamos que o eixo menor da ellipse dada é parallelo a dois dos planos.

22. *O producto do semi-eixo menor pelo raio do circulo focal é egual ao producto dos semi-eixos da ellipse, segundo a qual se projecta a ellipse dada.*

Effectivamente, fazendo, em (12), $a''b''=0$, resulta

$$bc = a'b' \dots\dots\dots\dots \quad (13)$$

23. *A area de uma esphera é egual á somma das areas das espheras cujos raios representam, respectivamente, os semi-eixos menores das projecções de um dos circulos maximos da esphera dada, sobre tres planos perpendiculares, entre si.*

Effectivamente, de (2) conclue-se

$$A = 4\pi(b^2 + b'^2 + b''^2) \dots\dots\dots\dots \quad (14)$$

24. *A area da esphera dada é egual ao quadruplo da raiz quadrada da somma dos quadrados das projecções de um dos seus circulos maximos.*

Representando, respectivamente, A, e, e' e e'' a area da esphera e as projecções de um dos seus circulos maximos, é, pelo theorema de Tinseau,

$$\pi r^2 = \sqrt{e^2 + e'^2 + e''^2},$$

d'onde, multiplicando por 4, ambos os membros d'esta egualdade,

$$A = 4\sqrt{e^2 + e'^2 + e''^2} \dots\dots\dots\dots \quad (15)$$

25. Supponhamos que o circulo maximo, cujas projecções consideramos, faz angulos eguaes com os tres planos.

26. *A area da esphera dada é egual ao triplo da area da esphera cujo raio representa o semi-eixo menor das projecções do circulo maximo.*

Fazendo, em (14), $b=b'=b''$, fica

$$A = 3 \cdot 4\pi b^2 \dots\dots\dots\dots \quad (16)$$

27. *A area da esphera dada é egual ao producto do dobro da circumferencia rectificada do circulo maximo pelo lado do triangulo equi-*

latero inscripto, no circulo, cujo raio representa o semi-eixo menor das projecções do mesmo circulo maximo.

Fazendo $e=e'=e''$, em (15), resulta

$$A=4\pi r b\sqrt{3}=2\,c\,l'_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

28. Supponhamos que o circulo maximo faz angulos eguaes com dois dos planos e é perpendicular ao terceiro.

29. *A area da esphera dada é egual ao dobro da area da esphera cujo raio representa o semi-eixo menor das projecções do circulo maximo.*

De facto, sendo $b=b'$ e $b''=0$, vem

$$A=2\cdot 4\pi b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

30. *A area da esphera dada é egual ao dobro da circumferencia rectificada do circulo maximo pelo lado do quadrado inscripto, no circulo, cujo raio representa o semi-eixo menor das projecções do mesmo circulo maximo.*

De facto, sendo $e=e'$ e $e''=0$, a formula (15) reduz-se a

$$A=4\pi r b\sqrt{2}=2\,c\,l'_4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

31. *O triplo do volume da esphera dada é egual ao producto do raio pela somma das areas das espheras cujos raios representam, respectivamente, os semi-eixos menores das projecções de um dos seus seus circulos maximos.*

Sendo A', A'' e A''' as areas das ultimas tres espheras consideradas, temos, em virtude de (14),

$$3\,V=(A'+A''+A''')\,r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

32. *O volume da esphera dada é egual a $\frac{4}{3}$ da raiz quadrada do producto da somma dos quadrados das projecções de um dos seus circulos maximos pela somma dos quadrados dos respectivos semi-eixos menores.*

De facto, attendendo a (2) e a (15), vem

$$V=\frac{A\,r}{3}=\frac{4}{3}\sqrt{(e^2+e'^2+e''^2)\,(b^2+b'^2+b''^2)} \ldots\ldots \quad (21)$$

33. Supponhamos que o circulo maximo considerado faz angulos eguaes com os tres planos.

34. *O volume da esphera dada é egual ao producto do raio pela*

area de outra esphera, cujo raio representa o semi-eixo menor das projecções do circulo maximo.

Assim se conclue, fazendo em (20), $A' = A'' = A'''$, facto que resulta de ser $b = b' = b''$.

Além d'isso, a formula, (21) subsiste se considerarmos e, e' e e'' como projecções de um circulo maximo que faz angulos eguaes com os tres planos. Mas, n'esta hypothese, é,

$$e = e' = e'' \quad \text{e} \quad b = b' = b''$$

logo

$$V = 4\pi b^2 r = A' r \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (22)$$

35. Admittamos que o circulo maximo faz angulos eguaes com dois dos planos e é perpendicular ao terceiro.

36. *O triplo do volume da esphera dada é egual ao producto do diametro pela area de outra esphera, cujo raio representa o semi-eixo menor das projecções do circulo maximo.*

Com effeito, a condição do n.º 35 transforma as formulas (20) e (21) em

$$3\,V = 4\pi b^2\, 2\, r = 2\, r\, A' \dots\dots\dots\dots\dots \quad (23)$$

II

37. Supponhamos que os semi-eixos menores das projecções de tres circulos, que fazem angulos eguaes com tres planos perpendiculares, entre si, representam tambem os semi-eixos menores das projecções de qualquer outro circulo.

38. *A area do dodecagono regular inscripto, n'este circulo, é egual á somma dos quadrados dos raios d'aquelles tres circulos.*

Sejam r_1, r_2 e r_3 os raios dos tres circulos dados; supponhamos que b, b' e b'' representam, simultaneamente, os semi-eixos menores das projecções d'esses circulos, sobre os tres planos, e os semi-eixos menores das projecções de outro circulo, sobre os mesmos planos.

Attendendo ao valor do coseno do angulo que aquelles tres circulos fazem com os planos, temos

$$b = \frac{r_1}{\sqrt{3}}, \quad b' = \frac{r_2}{\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad b'' = \frac{r_3}{\sqrt{3}}.$$

Elevando ao quadrado e sommando, ordenadamente, resulta, em virtude de (1),

$$3(b^2+b'^2+b''^2)=r_1^2+r_2^2+r_3^2=a_{12} \dots\dots\dots \quad (24)$$

39. *A area do mesmo dodecagono é egual á média arithmetica das areas dos dodecagonos regulares inscriptos, nos tres circulos dados.*

Sendo a'_{12}, a''_{12} e a'''_{12} as areas dos dodecagonos regulares, respectivamente inscriptos, nos tres circulos dados, é, em consequencia de (3),

$$a'_{12}=3\cdot 3b^2,\quad a''_{12}=3\cdot 3b'^2 \quad \text{e} \quad a'''_{12}=3\cdot 3b''^2;$$

d'onde, attendendo a (1),

$$a_{12}=\frac{a'_{12}+a''_{12}+a'''_{12}}{3} \dots\dots\dots \quad (25)$$

40. Supponhamos que os semi-eixos menores das projecções de dois circulos, que fazem angulos eguaes com dois dos planos e são perpendiculares ao terceiro, representam tambem os semi-eixos menores das projecções de qualquer outro circulo, perpendicular ao mesmo plano.

41. *A area do quadrado inscripto, n'este circulo, é egual á somma dos quadrados dos raios d'aquelles tres circulos.*

A condição do n.º 40 importa

$$b=r_1\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad b'=r_2\frac{\sqrt{2}}{2};$$

logo

$$2(b^2+b'^2)=r_1^2+r_2^2;$$

ou, attendendo a (1) e a que $\frac{2}{3}a_{12}=a_4$,

$$a_4=r_1^2+r_2^2 \dots\dots\dots \quad (26)$$

42. *A area do mesmo quadrado é egual á média arithmetica das areas dos quadrados inscriptos, nos circulos dados.*

Introduzindo, em (26), os valores

$$r_1^2=\frac{a'_4}{2} \quad \text{e} \quad r_2^2=\frac{a''_4}{2}$$

vem

$$a_4=\frac{a'_4+a''_4}{2} \dots\dots\dots \quad (27)$$

43. Supponhamos que as projecções de tres ellipses, que fazem

angulos eguaes com tres planos perpendiculares, entre si, representam tambem as projecções de qualquer outra ellipse.

44. *O producto do semi-eixo maior d'esta ellipse pelo lado do triangulo equilatero inscripto, no circulo de raio egual ao seu semi-eixo menor, é egual á raiz quadrada da somma dos quadrados dos productos dos semi-eixos d'aquellas tres ellipses.*

Sejam a_1 e b_1, a_2 e b_2, a_3 e b_3, a e b os semi-eixos das quatro ellipses consideradas e a' e b', a'' e b'', e a''' e b''' os semi-eixos das respectivas projecções.

Da condição do enunciado, resulta

$$a'b'=\frac{a_1 b_1}{\sqrt{3}},\quad a''b''=\frac{a_2 b_2}{\sqrt{3}}\quad \text{e}\quad a'''b'''=\frac{a_3 b_3}{\sqrt{3}};$$

por consequencia

$$3\left[(a'b')^2+(a''b'')^2+(a'''b''')^2\right]=(a_1b_1)^2+(a_2b_2)^2+(a_3b_3)^2,$$

d'onde, em virtude de (7),

$$ab\sqrt{3}=al'_3=\sqrt{(a_1b_1)^2+(a_2b_2)^2+(a_3b_3)^2}\ \ldots\ldots\ (28)$$

45. Admittamos que as projecções de duas ellipses, que fazem angulos eguaes com dois dos planos e são perpendiculares ao terceiro, representam tambem as projecções de qualquer outra ellipse, perpendicular áquelle mesmo plano.

46. *O producto do semi-eixo maior d'esta ellipse pelo lado do quadrado inscripto, no circulo de raio egual ao seu semi-eixo menor, é egual á raiz quadrada da somma dos quadrados dos productos dos semi eixos d'aquellas duas ellipses.*

De

$$a'b'=a_1b_1\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \text{e}\quad a''b''=a_2b_2\frac{\sqrt{2}}{2},$$

conclue-se

$$2\left[(a'b')^2+(a''b'')^2\right]=(a_1b_1)^2+(a_2b_2)^2=2(ab)^2;$$

logo

$$ab\sqrt{2}=al'_4=\sqrt{(a_1b_1)^2+(a_2b_2)^2}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (29)$$

47. Supponhamos que as ellipses, segundo as quaes se projectam duas ellipses, cujos eixos menores fiquem perpendiculares a um dos planos e dispostas de modo que as suas projecções, sobre um dos outros planos, sejam circulos de raio egual aos seus semi-eixos menores, representam tambem as ellipses, segundo as quaes se projecta outra qualquer ellipse, disposta de modo que a sua projecção, sobre um dos planos, seja ainda um circulo de raio egual ao seu semi-eixo menor.

48. *O producto do semi-eixo menor d'esta ellipse pelo raio do circulo focal é egual á raiz quadrada da somma dos quadrados dos productos dos semi-eixos menores das duas ellipses dadas pelos respectivos raios dos circulos focaes.*

Sendo b_1, b_2, c_1 e c_2 os semi-eixos menores e os raios dos circulos focaes das duas ellipses dadas, e suppondo que a' e b', a'' e b'' representam os semi-eixos das suas projecções ellipticas, temos, devido a (13),

$$b_1 c_1 = a' b' \quad \text{e} \quad b_2 c_2 = a'' b''.$$

Introduzindo estes valores, em (12), fica

$$b c = \sqrt{(b_1 c_1)^2 + (b_2 c_2)^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (30)$$

49. Supponhamos que os semi-eixos menores das projecções de tres circulos maximos, sendo um de cada esphera, circulos que fazem angulos eguaes com tres planos perpendiculares, entre si, representam tambem os semi-eixos menores das projecções de um circulo maximo de qualquer outra esphera.

50. *A area d'esta esphera é egual á média arithmetica das areas d'aquellas tres espheras.*

Attendendo a (2), deduz-se de (24)

$$3 \cdot 4 \pi r^2 = 4 \pi \left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right)$$

$$A = \frac{A' + A'' + A'''}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

51. *O triplo da area de uma esphera representa a area de outra esphera de raio egual ao lado do triangulo equilatero inscripto, n'um dos circulos maximos d'aquella esphera,* porque approximando (24) de (31), resulta

$$3 A = 4 \pi \left(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2\right) = 4 \pi a_{12} = 4 \pi l_3^2 \ldots\ldots\ldots \quad (32)$$

Egual conclusão se tira, recorrendo ao seguinte processo:
A condição do n.º 49 permitte que

$$A' = 4 \pi r_1 b \sqrt{3}, \quad A'' = 4 \pi r_2 b' \sqrt{3} \quad \text{e} \quad A''' = 4 \pi r_3 b'' \sqrt{3}.$$

Substituindo b, b' e b'' pelos seus valores, na formula,

$$A = 4 \pi r \sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2}.$$

que é equivalente a (15), obtemos

$$A = \frac{r}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{A'^2}{r_1^2} + \frac{A''^2}{r_2^2} + \frac{A'''^2}{r_3^2}}$$

ou, attendendo a (24)

$$3\frac{A}{l_3} = 4\pi \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = 4\pi l_3$$

d'onde a formula (32).

52. *A area da esphera, cujo raio representa o lado do triangulo equilatero inscripto, n'um circulo maximo da quarta esphera referida, é egual á somma das areas das tres espheras dadas.*

Comparando (31) com (32), resulta

$$A' + A'' + A''' = 4\pi a_{12} = 4\pi l_3^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

53. Tomemos dois circulos maximos, sendo um de cada esphera, circulos que façam angulos eguaes com dois dos planos, ficando perpendiculares ao terceiro, e cujas projecções tenham como semi-eixos menores os das projecções de um circulo maximo de outra qualquer esphera, circulo que seja perpendicular áquelle mesmo plano.

54. *A area d'esta esphera é egual á média arithmetica d'aquellas duas espheras.*

Sabemos que

$$b = r_1 \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{e} \quad b' = r_2 \frac{\sqrt{2}}{2};$$

logo

$$b^2 + b'^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2},$$

portanto

$$A = \frac{A' + A''}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

55. *O dobro da area de uma esphera representa a area de outra esphera de raio egual ao lado do quadrado inscripto, n'um dos circulos maximos d'aquella,* porque comparando (26) com (34), vem

$$2A = 4\pi (r_1^2 + r_2^2) = 4\pi a_4 = 4\pi l_4^2 \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

Este principio tambem se demonstra, desenvolvendo um raciocinio analogo ao exposto, na segunda parte do n.º 51.

56. *A area da esphera cujo raio representa o lado do quadrado inscripto, n'um circulo maximo da terceira esphera considerada, é egual á somma das areas das duas espheras dadas.*

Approximando (34) de (35), deduz-se

$$A' + A'' = 4\pi a_4 = 4\pi l_4^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

57. Admittamos ainda a hypothese de tres circulos maximos, sendo um de cada esphera, fazerem angulos eguaes com os tres planos, realisando-se ainda a condição de os semi-eixos menores das suas projecções representarem, tambem, os semi-eixos menores das projecções de um circulo maximo de qualquer outra esphera.

58. *O producto da somma das areas das tres espheras dadas pelo raio da quarta é egual a nove vezes o volume d'esta esphera.*

De facto, de (31) tira-se

$$9V = (A' + A'' + A''')r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

59. *O volume de um cylindro, que tem como base o circulo de raio egual ao lado do triangulo equilatero inscripto, n'um dos circulos maximos de uma esphera, e como altura o quadruplo do raio, representa nove vezes o volume d'essa esphera.*

Approximando (33) de (37), resulta

$$9V = 4r\pi l_3^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

60. *O volume da quarta esphera referida é egual ao producto do terço do raio pela somma das relações entre os volumes das tres espheras dadas e os respectivos raios.*

A formula (21) pode representar-se tambem por

$$V = \frac{4}{3}\pi r(b^2 + b'^2 + b''^2).$$

Ora

$$V' = 4\pi b^2 r_1, \quad V'' = 4\pi b'^2 r_2 \quad \text{e} \quad V''' = 4\pi b''^2 r_3;$$

logo

$$V = \frac{r}{3}\left(\frac{V'}{r_1} + \frac{V''}{r_2} + \frac{V'''}{r_3}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

61. Supponhamos que os semi-eixos menores das projecções de dois circulos maximos, sendo um de cada esphera, circulos que fazem angulos eguaes com dois dos planos e são perpendiculares ao terceiro, representam tambem os semi-eixos menores das projecções de um circulo maximo de qualquer outra esphera.

62. *O producto da somma das areas das duas espheras dadas pelo raio da terceira é egual a seis vezes o volume d'esta esphera.*

Effectivamente, de (34) conclue-se

$$6V = (A' + A'')r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

63. *O volume de um cylindro que tem como base o circulo de raio egual ao lado do quadrado inscripto, n'um dos circulos maximos de uma esphera, e como altura o quadruplo do raio, representa seis vezes o volume d'essa esphera.*

Relacionando (35) com (40), obtemos

$$6V = \pi l_4^2 4r \qquad (41)$$

64. *O volume da terceira esphera referida é egual ao producto do diametro pela somma das relações entre os volumes das duas espheras e os respectivos raios.*

A formula (21) transforma-se em

$$V = \frac{4}{3}\pi r (b^2 + b'^2).$$

Attendendo a que

$$V' = \frac{4}{3}\pi r_1 2b^2 \quad \text{e} \quad V'' = \frac{4}{3}\pi r_2 2b'^2,$$

deduz-se

$$V = 2r\left(\frac{V'}{r_1} + \frac{V''}{r_2}\right) \qquad (42)$$

SOBRE O INTEGRAL DE UMA EQUAÇÃO NOTAVEL

POR

R. GUIMARÃES

---

1. A equação differencial de um systema de conicas homofocaes é

$$yx\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-y^2-A+B)\frac{dy}{dx}-xy=0 \ldots\ldots. \quad (1)$$

a qual se pode integrar muito facilmente, recorrendo a um artificio de calculo.

Effectivamente, a equação (1) pode tomar successivamente as seguintes fórmas:

$$xy\cdot dy^2+x^2dx\cdot dy-y^2dx\cdot dy-(A-B)dx\cdot dy-xydx^2=0$$

ou

$$x\cdot dy(y\cdot dy+x\cdot dx)-y\cdot dx(y\cdot dy+x\cdot dx)=(A-B)\cdot dx\cdot dy$$

ou ainda

$$\frac{x\cdot dy-y\cdot dx}{\sqrt{A-B}\cdot dy}=\frac{\sqrt{A-B}\cdot dx}{y\cdot dy+x\cdot dx}$$

d'onde

$$\frac{\sqrt{A-B}\cdot dy+x\cdot dy-y\cdot dx}{\sqrt{A-B}\cdot dy-x\cdot dy+y\cdot dx}=\frac{y\cdot dy+x\cdot dx+\sqrt{A-B}\cdot dx}{y\cdot dy+x\cdot dx-\sqrt{A-B}\cdot dx}=$$

$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{A-B}\cdot dy+x\cdot dy-y\cdot dx)^2+(y\cdot dy+x\cdot dx+\sqrt{A-B}\cdot dx)^2}}{\sqrt{(\sqrt{A-B}\cdot dy-x\cdot dy+y\cdot dx)^2+(y\cdot dy+x\cdot dx-\sqrt{A-B}\cdot dx)^2}}$$

ou

$$\frac{(x+\sqrt{A-B})\,dx+y\cdot dy}{(x-\sqrt{A-B})\,dx-y\cdot dy}=\frac{\sqrt{(x+\sqrt{A-B})^2+y^2}}{\sqrt{(x-\sqrt{A-B})^2-y^2}}$$

ou finalmente

$$\frac{2[(x+\sqrt{A-B})\,dx+y\cdot dy]}{\sqrt{(x+\sqrt{A-B})^2+y^2}}\pm\frac{2[(x-\sqrt{A-B})\,dx-y\cdot dy]}{\sqrt{(x-\sqrt{A-B})^2-y^2}}\ldots\quad(2)$$

e por ser o numerador de cada uma d'estas fracções, a differencial do denominador, segue-se que o integral da equação (2) e portanto da equação (1), é

$$\sqrt{(x+\sqrt{A-B})^2+y^2}\pm\sqrt{(x-\sqrt{A-B})^2+y^2}=\text{const}$$

que representa effectivamente um systema de conicas homofocaes.

2. Podemos comtudo dar uma outra fórma a esta equação.

Elevando ao quadrado, depois de passar um dos radicaes para o 2.º membro da equação, e designando por C a constante arbitraria, tem-se

$$\frac{2\sqrt{A-B}}{C}\cdot x-\frac{C}{2}=\pm\sqrt{(x-\sqrt{A-B})^2+y^2}$$

e por uma nova elevação ao quadrado, ter-se-ha

$$y^2+x^2\left(1-\frac{4(A-B)}{C^2}\right)=\frac{C^2}{4}-(A-B)$$

ou

$$\frac{4}{C^2}\cdot x^2+\frac{4}{C^2-4(A-B)}\,y^2=1\;\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(3)$$

Comparando esta equação com a das conicas homofocaes

$$\frac{x^2}{A\pm\lambda}+\frac{y^2}{B\pm\lambda}=1\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(4)$$

onde λ representa um parametro variavel, resulta que a equação (3) tem a mesma fórma que ella, bastando, para passar de uma para a outra, fazer

$$\begin{cases} A\pm\lambda=\dfrac{C^2}{4} \\[2ex] B\pm\lambda=\dfrac{C^2}{4}-(A-B). \end{cases}$$

SEPARAÇÃO DOS METAES RAROS DO GRUPO DO ALUMINIO

POR

ACHILLES MACHADO

A analyse de uma substancia em que entra um grande numero dos metaes raros do grupo do aluminio, apresenta grandes difficuldades, não só porque são bem poucos os reagentes que permittem a separação completa de alguns d'esses metaes, mas tambem porque as reacções de cada um d'elles variam muito, conforme se encontra isolado ou junto com os outros.

Accresce a isto o facto de se tratar de corpos bastantes raros, cujas reacções não estão bem estudadas, conforme o attestam os numerosos erros que, sobre o assumpto, se encontram nos livros de analyse, ainda os mais conceituados, como por exemplo, o *Tratado de Analyse Chimica* de Fresenius. [1]

Tendo tido occasião de nos dedicarmos a um trabalho de analyse das terras raras, julgamos que a indicação do methodo pratico que estudámos e que nos permittiu separar e reconhecer a maior parte dos metaes do grupo do aluminio, pode ser vantajosa áquelles que, de futuro, se occupem d'este genero de analyses que, dia a dia, adquirem maior importancia, depois da applicação que vão tendo as terras raras para a fabricação das mangas de incandescencia pelo gaz.

Ao mesmo tempo corrigiremos bastantes erros que se encontram,

---

[1] Fresenius aconselha, como sendo o methodo de separação mais conveniente, o de Föhr, fundado na propriedade que, segundo este chimico, teem os hydratos de cerio, lanthanio, didymio, thorio, zirconio e yttrio, de serem soluveis no carbonato de ammonio, reprecipitando, pela ebullição da solução, o thorio, o zirconio e o yttrio.

Este methodo parece-nos completamente inexequivel. É certo que o carbonato de ammonio dissolve mais ou menos facilmente os hydratos de todos aquelles metaes, ao contrario do que Fresenius diz relativamente ao lanthanio e didymio, mas todos elles reprecipitam mais ou menos rapidamente pela ebullição da solução. Alguns, como o lanthanio, depois de dissolvidos, reprecipitam lentamente, mesmo sem prévio aquecimento.

como já dissemos, nos tratados de chimica analytica, no que tambem julgamos prestar um serviço que a muitos poderá, porventura, ser util.

No methodo analytico que vamos expôr, supporemos que se trata de uma substancia onde existem, no estado de oxydos, os seguintes metaes do grupo do aluminio:

Aluminio; chromio; glucinio; zirconio; yttrio; thorio; cerio; didymio e lanthanio.

Os oxydos d'estes metaes são insoluveis na agua, mas podem transformar-se facilmente em productos soluveis, pela desaggregação com 6 partes de bisulfato de potassio, levando o aquecimento só até á fusão tranquilla da massa.

A dissolução do producto da desaggregação, depois de reduzido a pó, faz-se facilmente, deitando successivamente, n'uma porção consideravel de agua, pequenas porções da massa a dissolver e agitando constantemente o liquido.

Da solução obtida precipitam-se pela ammonia (em presença do chloreto de ammonio) os hydratos de todos os metaes.

O precipitado, depois de bem lavado por decantação, é posto em digestão, durante algumas horas, com uma solução de potassa, que dissolve o aluminio, o chromio e o glucinio.

A solução alcalina, depois de bastante diluida, é posta em ebullição, durante alguns minutos, n'uma capsula de prata; n'estas condições precipitam o chromio e o glucinio que facilmente se separam, depois de fundir o precipitado com carbonato de sodio e chlorato de potassio.

O liquido filtrado é tratado pelo chloreto de ammonio, para separar o aluminio.

Quanto ao residuo insoluvel na potassa, é, depois de bem lavado, dissolvido no acido chlorhydrico; a solução dos chloretos é, em seguida, evaporada a secco, em banho-maria, para expulsar o excesso de acido. Obtem-se geralmente uma massa, mais ou menos amarellada, muito soluvel na agua.

A solução aquosa dos chloretos (que deve ser muito pouco acida) é tratada por uma solução concentrada de acido oxalico, que precipita o yttrio, thorio, cerio, lanthanio e didymio; o zirconio fica na solução.[1]

No liquido filtrado precipita-se o zirconio pela potassa. Como o oxalato de thorio não é completamente insoluvel no acido oxalico em excesso, convém verificar se o precipitado obtido pela potassa é realmente de hydrato de zirconio.

Esta verificação faz-se facilmente, lavando o precipitado de hydrato e observando que elle é muito soluvel n'uma solução concentrada de acido oxalico.

---

[1] No *Tratado de Analyse Chimica*, de Fresenius, diz-se que o acido oxalico dá com os saes de zirconio um precipitado branco, volumoso, de oxalato, insoluvel no acido oxalico e aponta-se esta reacção como um caracter que permitte distinguir o zirconio do aluminio e glucinio. É evidentemente um erro que se torna indispensavel corrigir, pois os saes de zirconio, mesmo em solução pouco acida, não dão precipitado com o acido oxalico.

Tambem se pode reconhecer o zirconio pela sua acção sobre o papel de curcuma, em presença do acido chlorhydrico.

O precipitado dos oxalatos de yttrio, thorio, cerio, lanthanio e didymio é dissolvido em acido sulfurico; dilue-se a solução e reprecipitam se os hydratos pela ammonia; lava-se o precipitado por decantação e dissolve-se no acido chlorhydrico; evapora-se a solução a secco, em banho-maria, para expulsar o excesso de acido.

A solução aquosa do residuo é tratada por uma solução saturada de sulfato de potassio, juntando alguns crystaes d'este sal, para saturar completamente o liquido, que é levado á ebullição. Precipitam o thorio, cerio, lanthanio e didymio; fica em solução o yttrio; filtra-se e procura se este metal no liquido filtrado, juntando a este um pouco de acido tartrico e ammonia; n'estas condições o yttrio precipita, no fim de algumas horas, ao passo que os outros metaes (thorio, cerio, lanthanio e didymio) não seriam precipitados pela ammonia, em presença do acido tartrico.

O precipitado produzido pelo sulfato de potassio é lavado com uma solução saturada d'este sal e é em seguida dissolvido em acido sulfurico.

Precipita-se pela ammonia esta solução, depois de diluida; lava-se o precipitado, dissolve-se em acido chlorhydrico, evapora-se a secco em banho-maria e dissolve-se em agua o residuo contendo os chloretos de thorio, cerio, lanthanio e didymio.

Esta solução é levada á ebullição com hyposulfito de sodio, prolongando o aquecimento até que deixe de se formar precipitado. N'estas condições precipita a maior parte do thorio. Como a precipitação d'este não é completa, convém precipitar pela ammonia o liquido filtrado, lavar o precipitado, dissolvel-o em um excesso de oxalato de ammonio e deitar a solução em uma porção sufficiente de agua fria. O thorio fica em solução; precipitam o cerio, o lanthanio e o didymio.

O precipitado é dissolvido em acido sulfurico e a solução, depois de diluida, é precipitada pela ammonia.

Lava-se o precipitado, põe-se em suspensão n'uma lixivia fraca de potassa e faz-se passar uma corrente de chloro, até que o liquido tome côr esverdeada. N'estas condições dissolvem-se o lanthanio e o didymio.

O cerio fica insoluvel.

O residuo, depois de lavado, é dissolvido no acido chlorhydrico; a solução de chloreto de cerio é evaporada a secco a banho-maria; o residuo é dissolvido na agua. N'esta solução reconhece-se muito bem o cerio, por qualquer dos seguintes processos:

1.º Em um tubo de ensaio deita-se um pouco de bioxydo de chumbo, sobre o qual se deita uma pequena porção de acido azotico; junta-se depois uma pequena porção da solução de chloreto de cerio e leva-se tudo á ebullição, que se prolonga durante alguns minutos. O liquido toma uma côr amarella.

2.º Oxyda-se, pela addição de um pouco de agua oxygenada, a solução de chloreto de cerio; junta-se em seguida, gotta a gotta, ammonia; o liquido tomará uma côr amarella; juntando um excesso de ammonia, formar-se-hão flocos, de uma côr amarello-avermelhada. Estes flocos, muito leves, reunem-se geralmente á superficie do liquido, formando um annel muito vizivel.

A solução que contém hypochlorito de potassio, didymio e lanthanio, é submettida a uma ebullição prolongada, e é em seguida addicionada de ammonia, para obter a precipitação completa d'estes dois metaes.

O precipitado, depois de lavado, é dissolvido em acido acetico. N'esta solução reconhece-se facilmente a presença do didymio, pelo seu espectro de absorpção, muito caracteristico.

Precipita-se pela ammonia a solução acetica e lava-se muito bem o precipitado.

A uma parte d'este, posta em suspensão n'uma pequena quantidade de agua, juntam-se algumas gottas de uma solução aquosa de iodo; obtem-se uma côr vinhosa, indicando a presença do lanthanio.

Pulvilha-se uma outra parte do precipitado com uma pequena quantidade de iodo em pó; toda a massa branca, gelatinosa, ganhará, pouco a pouco, a côr violacea.

Lisboa, 10 de novembro de 1897.

SOBRE ALGUNS REPTIS ULTIMAMENTE ENVIADOS Á SECÇÃO ZOOLOGICA DO MUSEU DE LISBOA

PAR

J. BETHENCOURT FERREIRA

Das remessas feitas ao Museu de Lisboa por alguns notaveis viajantes exploradores, quaes são os srs. F. Newton, Adolpho Moller e Henrique Barahona, damos noticia succinta, indicando principalmente algumas especies que nos pareceram dignas de menção, por qualquer particularidade que possa trazer á zoologia especial, á geographia zoologica e á philosophia elementos de estudo.

Estes exemplares representam sem duvida mais alguns trophéos commemorativos das campanhas feitas ainda ha pouco por aquelles benemeritos exploradores, a quem a Secção é devedora de varias collecções interessantes, de que mencionamos em seguida as especies mais notaveis, acompanhando-as de algumas observações.

1. **Vipera berus, L. (V. prester, L.)** var. **nigra.**

Fizemos saber pelo modo que nos era possivel, servindo-nos de alguns exemplares de vibora commum existentes no Museu de Lisboa, sobre os quaes publicámos algumas observações em o n.º XI, 2.ª série (1893) do *Jorn. Ac. Sc. de Lisboa,* alguma coisa ácerca das relações da vibora peninsular (*V. Latastei,* Boscá) a mais vulgar em Portugal, com as especies do grupo *Berus-Ammodytes* a que se referiu Tourneville. Já depois da publicação d'essas observações tendentes a demonstrar aquella affinidade em exemplares de localidades, muito diversas e distantes d'aquellas de que eram procedentes os exemplares, cujo estudo levou á creação d'aquelle grupo natural, demos noticia do apparecimento da vibora negra, cuja existencia no paiz se acha confirmada pela descoberta feita pelos srs. Moller e Nobre d'essa cobra no Suajo. Ha pouco mandou-nos o sr. Moller mais um exemplar de vibora negra da mesma localidade, o que nos fornece mais alguns elementos de comparação.

Este exemplar é, quanto a nós, por assim dizer, um documento, da evolução entre o typo *berus* e o typo *ammodytes,* continuando aquella especie, que se julga ancestral das viboras europeas, a fornecer abundantes e frisantes exemplos de modificações quasi insensiveis, pelas quaes tem passado a especie primitiva até produzir um novo typo.

A rostral é tão alta quanto larga, excedendo imperceptivelmente o bordo superior do focinho.

Como na *V. aspis,* da qual este exemplar se approxima na sua conformação geral, as placas supraoculares são mediocres, a região vertical ou frontal é coberta de pequenas escamas irregulares, não imbricadas e sem relevo. As escamas em roda do olho são em numero de 8; ha duas series entre o olho e as labiaes superiores.

O exemplar, que é adulto, conforme as dimensões, é totalmente negro *mate,* sem apparencia de nenhum desenho ou tons menos carregados, mesmo no ventre.

De modo que este exemplar que differe quanto á escamagem cephalica do typo *berus,* de que, nos termos da nomenclatura vigente, deve considerar-se uma variedade, estabelece mais um grau de transição entre aquelle typo e a *V. aspis,* da qual, até aqui, não foi ainda descripta nenhuma variedade negra.

Serra de Suajo (sr. A. Moller).

2. **Vipera superciliaris**, Peters.

D'entre os exemplares com que o sr. capitão Henrique Barahona brindou o nosso Museu destaca-se uma especie africana de vibora que ainda não estava representada n'este estabelecimento.

É a *Vipera superciliaris,* Peters, exemplar novo, o que é facil conhecer pelas suas pequenas dimensões: comprimento total $0^m,282$; cabeça $0^m,015$; corpo $0^m,230$; cauda $0^m,037$. Em tudo conforme com a descripção feita pelo seu auctor e com a estampa apresentada[1], differe este exemplar em apenas uma serie incompleta de escamas entre a orbita e as supra-labiaes, emquanto a fórma typica tem duas series. É para notar que este caracter que muitos herpetologistas dão como distinctivo é dos mais sujeitos a variação e a irregularidades, segundo temos tido occasião de verificar em viboras de differentes procedencias.

É um exemplar juv. em que as supra-oculares são mediocres, as series inferiores de escamas que rodeiam o olho incompletas, em que as temporaes são lisas, assim como as ultimas series longitudinaes dos lados, apresentando, como geralmente nos individuos novos, grande nitidez de desenhos.

Moçambique (sr. capitão H. Barahona).

---

[1] Peters, *Reise. Mossamb.*, III, p. 144, pl. XXI (1882).

3. **Dasypeltis scabra** (L.).

O exemplar mandado pelo sr. H. Barahona pertence pela sua conformação externa e pelos seus desenhos, segundo nos parece, á var. *mossambica*, Peters, á qual julgamos corresponder na descripção de Boulenger[1] a fórma ou var. *B*, pelos seguintes caracteres:

Serie dorsal de largas manchas rhomboidaes pardo-escuro, separadas por espaços claros, alternadamente com manchas lateraes, que por seu termo fórmam uma serie de manchas alongadas de direcção perpendicular ao eixo do corpo, ladeadas estas ultimas ainda por pequenas manchas irregulares e irregularmente dispostas aos lados do ventre.

Apresenta tambem este exemplar uma anomalia que tende a afastal-o da caracteristica da especie, quanto ao numero e disposição das temporaes, que são duas superiores e uma inferior, em logar de 2 + 3, formula commum.

Moçambique (sr. H. Barahona).

4. **Coluber melanurus** (Schl.), var. **timoriensis**, n. var.

Da sua ultima digressão mandou o sr. Newton alguns exemplares de uma cobra, cujos caracteres nos parecem indicar uma sensivel variação entre a *C. melanurus* e a *C. erythrurus* e que descreveremos resumidamente:

Rostral um terço mais larga do que alta; 2 nasaes; uma frenal; 9 labiaes superiores, 11 inferiores; 2 pares de gulares em contacto com 4 labiaes inferiores; uma ou duas sub-oculares e uma placa debaixo da pre-ocular unica; 2 oculares posteriores temporaes 2 + 2 + 3.

Dentes maxillares 23.

Corpo comprimido lateralmente; escamas em 21—23 ordens longitudinaes, sendo as ordens centraes medio-carenadas.

Gastrostegios largos angulosos, em numero de 237 (exemplar maior); Anal simples; sub-caudaes duplas em numero de 96.

Comprimento total: $0^m,50$ a $1^m,60$.

As placas labiaes superiores apresentam sub-divisões anormaes, dando logar, em alguns exemplares, a uma ou duas sub-oculares.

A côr fundamental é por cima um pardo claro, amarellado por partes; inferiormente côr de café com leite, mais ou menos claro.

O ventre é geralmente desprovido de manchas. De um lado e outro, a partir da região temporal vêem-se duas series de manchas negras, reunindo-se ás vezes em facha. Uma facha temporal negra, um pouco flexuosa, descendo pela commissura labial, e, por detraz do olho, uma pequena mancha quadrangular tambem negra. As extremidades dos gastrostegios são, pela menor parte, providos de manchas negras irregulares, nos dois primeiros terços do corpo e sem desenho nas porções restantes do corpo e na cauda.

---

[1] Boulenger, *Cat. An. B. Mus.*, II, p. 355.

Vê-se pela sua conformação geral, pelo numero de escamas, sua disposição, pelas côres e desenhos, que esta fórma se approxima da *C. melanurum* (Schl.) e da *C. erythrurus*, em cuja area geographica foi encontrada e a que se assemelha pelos desenhos, e ainda pela ausencia de saliencias nas escamas lateraes da cauda.

Os exemplares de Timor approximam-se mais da var. *celebensis*, Jan, da qual teem a côr escura fundamental e as manchas em facha na região temporal e dorsal.

Nos individuos mais novos os desenhos negros reticulares ou compostos de oculos, fachas e reticulos são caracteristicos, taes como Boulenger attribue á *C. melanurus*, e que nos parece serem proprios d'estas especies proximas, emquanto os individuos são novos ou adolescentes e que tanto podem, só por si, caracterisar a *C. melanurum* como a *C. erythrurus* juv.

Referimos estes exemplares a uma variedade approximada da *C. melanurum*, por nos parecer que a *C. erythrurus*, da qual tambem possuem caracteres, não é uma especie sufficientemente distincta, por ser determinada á custa dos caracteres mais mudaveis n'este genero.

Entretanto a nossa variedade não pode deixar de marcar a transição entre as especies e variedades que manifestam as tendencias accentuadamente evolutivas d'este grupo de cobras.

5. **Trionyx cartilagineus**, Bodd., var. **newtoni**, n. var.

Entre os reptis enviados de Timor, pelo sr. F. Newton destacamos uma tartaruga, cujo *facies* nos chamou a attenção e que, apesar de recebermos apenas um exemplar de individuo incompletamente adulto, se presta a ser considerado como uma variedade nova, senão como nova especie.

Pela sua conformação, pelas suas calosidades, embora não completamente desenvolvidas, por isso que se trata de um individuo incompletamente adulto, pelas rugas da pelle do dorso, em direcção longitudinal e pela presença de tuberculos aculeares esparsos entre aquellas rugas e ainda pelas manchas oculares do pescoço, sobre fundo côr de azeitona, pareceu-nos poder referil-a á *T. cartilagineus*, Bodd. Um exame mais detido e a investigação bibliographica conduzida no sentido de verificar se estariamos em frente de uma nova especie, conduziu-nos a acceitar como provavel ou admissivel, pelo menos, uma nova variedade. Infelizmente parece terem-se extraviado em viagem alguns exemplares de Timor, entre os quaes alguns d'esta especie, apanhados pelo sr. Newton em lagoas e rios da ilha.

O focinho é muito mais comprido que o diametro da orbita, terminando por uma tromba mais volumosa que nos individuos novos e adolescentes da *T. cartilagineus*; a curvatura da expansão membranosa da carapaça, de um raio mais longo do que n'esta especie, offerece no seu contorno uma oval mais perfeita do que n'aquella; as palmuras são mais desenvolvidas em relação ao tamanho do individuo do que na especie comparada.

A côr fundamental é um verde azeitonado escuro, marmoreado de negro ou acastanhado muito escuro, em manchas irregularmente dispostas por toda a pelle do dorso; 4 ou 5 linhas pretas curtas irradiam da região orbitaria, havendo uma que une os angulos anteriores das orbitas.

Varias manchas pretas irregulares no vertex e no pescoço, cujos lados e regiões inferiores são vermiculados de amarello claro marginado de negro.

As regiões inferiores são do mesmo tom amarello claro notado no pescoço, com largas manchas trigonaes, negras, symetricas no plastron.

As patas são marmoreadas confusamente de verde amarellado e preto na parte superior, e de um amarello sujo manchado de verde e preto esbatido nas faces inferiores.

Á falta de exemplares para comparação, e vista a dessemelhança existente entre os exemplares que possue o Museu de Lisboa, da *T. cartilagineus*, recorremos ás descripções e estampas que nos podiam elucidar sobre a determinação d'esta curiosa tartaruga.

Vimos por este modo que o exemplar de Timor se destaca, pelo menos nas dimensões, nas proporções, nas côres e nos desenhos da especie de referencia, da qual comtudo parece approximar-se pelos caracteres principaes, mas de que differe apparentemente como variedade.

Assim as descripções mais classicas dão como desenho caracteristico n'esta especie uma distribuição de numero indeterminado de pontos ou manchas de côr amarella ou esbranquiçada, sobre fundo verde escuro ou côr de azeitona (Schlegel, Boulenger).

Conforme as indicações de Schlegel, aquelle que mais cuidadosamente descreveu não só esta especie, mas outras congeneres, esta especie tem um habitat bastante vasto e é crivel que ella tenha originado, na sua dispersão entre climas bastante diversos, muitas variedades que serão intermediarias á de Java e á do Japão, encontradas por Siebold.

As linhas negras, mais ou menos distinctas, irradiantes dos olhos, e que segundo Gray são carecteristicas, podem faltar e faltam em outras variedades; na nossa existem, parece que a rubricar a procedencia especifica.

6. **Chalcides Bedriagai** (Boscá), (**Gongylus Bedriagai**, Boscá).

D'esta especie muito rara mandou-nos ha tempo o sr. A. Moller um exemplar muito perfeito que differe do typo creado pelo auctorisado herpetologista hespanhol, D. E. Boscá, na distribuição das côres e desenhos. A côr fundamental é um verde bronze de reflexos irisados, desprovido de manchas ocellares, substituidas aos lados por um desenho irregular, como um fino reticulo formado de pequeninos traços negros.

Serra d'Aire.

7. **Hemidactylus verruculatus**, L.

Desde o começo das nossas investigações sobre a fauna herpetologica portugueza, não nos fôra ainda possivel obter nenhum exemplar d'esta especie que julgamos ter uma dispersão geographica muito limitada no nosso paiz, onde é raro encontral-a n'outra região que não seja na parte sueste do Alemtejo até á provincia do Algarve, onde dizem alguns naturalistas encontrar-se, em Monchique por exemplo.

O exemplar unico que temos presente é de Evora, devido ao favor do sr. dr. prof. M. Paulino d'Oliveira.

NOTICIA SOBRE ALGUMAS ESPECIES DO GENERO «PTEROPUS» PROVENIENTES DA ILHA DE TIMOR

POR

A. F. DE SEABRA

Na sua exploração á ilha de Timor o sr. F. Newton obteve entre outros exemplares interessantes, uma serie de individuos do genero *Pteropus*, muitos d'elles ainda desconhecidos na fauna d'esta região.

As especies de Pteropus trazidas de Timor e citadas por Dobson, Temminck, Gervais e Gibel, são apenas quatro: *Pt. edulis, griseus, Temminckii* e *Macklotii*. Ora, entre os individuos provenientes da exploração do sr. F. Newton n'esta ilha, em maio de 1897 e alguns já existentes no Museu Nacional, notavam-se ainda seis especies bem distinctas das quatro primeiras citadas, as quaes constituem o principal objecto d'este pequeno estudo.

Como aqui se tratava de um problema de geographia zoologica, ao mesmo tempo que da determinação das especies, procurei approximal-as o mais possivel d'aquellas que teem sido descobertas nas terras circumvizinhas á ilha de Timor. Comtudo, algumas vezes a contradicção das descripções feitas nos differentes tratados de que me servi, referindo-se ás especies que habitam as proximidades de Timor, com os caracteres das especies modernamente adquiridas pelo Museu, obrigou-me a ampliar um pouco a distribuição geographica d'outros representantes do genero *Pteropus* considerados até aqui como proprios apenas das ilhas mais afastadas do continente australiano.

Sobre estas especies, conservo alguma reserva até poder com novos exemplares contestar não só a persistencia dos seus caracteres como a sua permanencia na ilha de Timor.

1. **Pteropus griseus**, Geoffr.

Pteropus griseus, Geoffroy, *Ann. du Museum,* xv, p. 94, pl. VI (1810).—*Pt. pallidus,* Temminck, *Monographies des Mamm.*, I, p. 184 (1827).

Um ♂ e uma ♀ ad., Timor (sr. Capello).

N'um e n'outro individuo o pello é abundante, mas curto; d'um amarello claro, côr que predomina tambem sobre a membrana das azas. Alguns pellos, pardo escuro, veem misturar-se obscurecendo um pouco o dorso e ventre, mas o que não se observa n'estes dois exemplares é o caracter citado por Dobson sobre a côr preta da base dos pellos do peito.

No macho, os pellos que formam a colleira caracteristica do genero são um pouco mais arruivados que na femea e as orelhas mais curtas e arredondadas na sua extremidade.

Nas dimensões differem bastante entre si, conservando comtudo uma notavel proporção como se pode vêr no mappa abaixo reproduzido:

Comprimentos	Exemplares do Museu ♂	Exemplares do Museu ♀	Typo de Dobson
Cabeça e corpo......	21cm,0	20cm,0	20cm,0
Orelha.............	2 ,0	2 ,5	2 ,5
Ante-braço.........	11 ,4	11 ,2	11 ,3
2.º dedo...........	30 ,0	22 ,0	24 ,1
5.º dedo...........	15 ,7	14 ,5	15 ,7
Tibia..............	5 ,5	5 ,2	5 ,5

Habita Timor, Banda e parece que Sumatra e Malacca.

2. **Pteropus edulis**, Geoffr.

Pt. edulis, Geoffroy, *Ann. du Mus.*, xv, p. 90 (1810); Temminck, *Monogr. Mamm.*, I, p. 172, II, p. 58.—*Pt. javanicus,* Desmarest.—*Pt. funereus,* Temm., *loc. cit.*, p. 63 v., II (1835).

Um ♂ sm. ad., Timor (Dilli), sr. F. Newton, 1897.

Entre as dimensões do presente exemplar e as da especie typo de Dobson existe uma pequena differença talvez devida á edade.

N'este exemplar as orelhas são grandes, o focinho longo, a membrana inter-femural fechando em angulo na região anal e coberta de pellos asperos e pouco abundantes.

Cabeça pardo-escuro, quasi preta; mais claro sobre a nuca e passando á côr ruivo ferruginoso no pescoço, o qual, pela parte inferior, retoma a côr da cabeça. Peito, ventre e região femural onde o pello se apresenta com uma grande abundancia e aspero, preto avermelhado; o dorso, parte superior das pernas, braço e parte do ante-braço pardo-escuro.

No mappa seguinte pode-se apreciar a differença de dimensões entre o exemplar modernamente adquirido pelo Museu e a especie typo de Dobson:

Comprimentos	Exempl. do Museu	Typo de Dobson
Cabeça e corpo	$28^{cm},5$	$29^{cm},4$
Cabeça	9 ,0	10 ,1
Orelha.....................	4 ,0	4 ,3
Da orelha á extr. do focinho...	3 ,2	3 ,8
Ante-braço	19 ,6	22 ,3
Pollegar...................	6 ,5	10 ,1
3.º dedo	35 ,0	41 ,0
5.º dedo	24 ,0	27 ,9
Tibia......................	9 ,5	10 ,9

O *Pt. edulis* tem sido encontrado nas ilhas: Adaman, Nicobar, Sumatra, Java, Borneo, Filippinas, Samara, Ternate e Timor.

3. **Pteropus poliocephalus**, Temm.

Pt. poliocephalus, Temminck, *Monogr. des Mamm.*, I, p. 179 (1827).

Uma ♀ juv., Timor (Dilly), sr. F. Newton, 1897.

Comquanto a distribuição das côres do pello e a sua qualidade approxime notavelmente este exemplar das femeas do *Pt. Samoensis* e mesmo do *Pt. hypomelanus,* a sua formula dentaria obriga-me a consideral-o na especie *poliocephalus* de Temminck, com o qual de resto, na distribuição das côres do pello existem tambem numerosos pontos de contacto.

Contrariamente ao *Pt. samoensis,* o canino superior e segundo premolar, acham-se bem afastados deixando entre si um primeiro pre-molar, não largo, que preencha o espaço comprehendido entre estes dois dentes, mas extremamente fino, vendo-se apenas com o auxilio de uma lupa, e bem fixo ao maxillar, o que torna pouco provavel a sua queda prematura, como succede entre varias especies d'este genero e como tive n'este momento occasião de observar n'um individuo ♂ novo do *Pt. pseudaphon* no qual este dente, que pode desapparecer nos adultos, parece apenas estar implantado entre os tecidos molles.

No *Pt. hypomelanus,* segundo Dobson, o pre-molar superior não existe.

A fórma como se acham ainda conservados os incisivos e caninos no exemplar em questão e a ausencia dos ultimos molares inferiores veiu certificar-me de que se tratava de um individuo longe de estar adulto.

D'esta falta dos molares, resulta uma formula dentaria $\left(\frac{2}{2}\ \frac{1}{1}\ \frac{2}{2}\ \frac{3}{3}\right)$ que não existe em nenhum dos generos da sub-ordem *Megachiroptera* e por conseguinte, a não ser que com ella se queira constituir um novo genero, só pode ser considerada como disse, pertencente a um individuo ainda novo.

O focinho é curto e conico, orelhas pequenas e triangulares; o pello abundante e lanoso, mesmo o da cabeça; sobre o dorso liso e aruivado, cabeça e nuca cinzento, amarellado em volta das orelhas; garganta pardo-escuro; pescoço extremamente lanoso, d'um pardo aruivado muito claro, mais escuro pela parte inferior, côr que augmenta de intensidade ainda sobre o peito e ventre, onde comtudo se descobrem numerosos pellos d'um branco prateado.

O dorso cinzento mais escuro que a cabeça. Sobre o humero e até meio do ante braço estendem-se alguns pellos cinzentos como os do dorso. Na região anal voltam a ser lanosos e mais claros, estendem-se pela parte superior e inferior da coxa e pela parte superior da perna até perto da articulação do pé.

Quanto ás dimensões, differe sensivelmente das qne são dadas por Dobson e Temminck, o que de resto não me surprehende visto que estas foram tomadas sobre individuos adultos.

Habita a Australia.

4. **Pteropus samoensis**, Peale.

Pt. samoensis, Peale, *United-State Explor. Exped.*, p. 20 (1848).—*Pt. nowavensis,* Gray.—*Pt. vitiensis,* Gray.—*Pt. whitmeri,* Alston.

Um ♂ sm. ad., Timor, sr. F. Newton, 1897.

Conservo sobre esta especie uma certa reserva, devido á sua distribuição geographica até aqui considerada pois segundo Dobson, é propria ás ilhas de Fidgi e Navegadores que se acham bastante afastadas de Timor.

Comtudo a extensão da area habitada por algumas especies d'este genero é por fórma tal consideravel que creio absolutamente na possibilidade da existencia de especies de Fidgi na ilha de Timor.

O presente exemplar concorda com uma descripção de Dobson referindo-se a uma femea nova.

As orelhas pouco longas, conicas, terminando em ponta; membrana inter-femural indicada apenas por uma prega insignificante na região anal.

O pello fino e moderadamente longo; o do dorso liso e assente.

Cabeça pescoço e espaduas variando d'um amarello-palha ao ruivo, mais pronunciada esta côr sobre o pescoço; garganta e faces pardo-escuro intermeado com numerosos pellos brancos e brilhantes.

Ventre pardo-escuro, amarello na região anal; o dorso pardo acinzentado.

Nas dimensões differe apenas alguns millimetros da especie typo de Dobson como se pode apreciar no seguinte quadro:

Comprimentos		Exempl. do Museu	Typo de Dobson
Cabeça e corpo		20cm,0	20cm,0
Cabeça		5 ,8	6 ,2
Orelha		2 ,0	2 ,1
Do olho á extr. do focinho		2 .2	2 ,2
Ante-braço		12 ,2	12 ,5
Pollegar		4 ,2	5 ,0
2.º dedo		8 ,3	9 ,0
3.º dedo	metacarpo	8 ,0	8 ,1
	1.ª phalange	5 ,8	6 ,0
	2.ª phalange	9 ,0	9 ,5
5.º dedo	metacarpo	8 ,5	8 ,5
	1.ª phalange	3 ,6	3 ,7
	2.ª phalange	3 ,5	3 ,5
Tibia		5 ,5	5 ,2

5. **Pteropus Temminckii**, Peters.

Pt. Temminckii, Peters, *M. B. Acad. de Berl.*, 1887, p. 321.— *Pt. griseus*, Temm., *Monogr. Mamm.*, II, p. 81 (1835).

Um ♂, Timor (sr. R. das Dores).

Umas pequenas differenças nas medidas existem entre o presente exemplar e a especie typo de Dobson. Porém a fórma como a proporção d'estes se acha conservada entre os dois individuos faz-me crer que não se trata aqui mais do que d'uma differença individual, quando muito de uma variedade local. No seguinte mappa torna-se evidente o que deixo dito.

Esta especie é bem caracterisada pela côr amarellada do pello e membranas, mais escuro nas faces e garganta; ventre e dorso pardo-claro; orelhas e parte superior do pescoço, branco amarellado.

Focinho curto e conico; narinas proeminentes; primeiro pre-molar superior, ausente.

Comprimentos		Exempl. do Museu	Typo de Dobson
Cabeça e corpo		15cm,0	15cm,0
Orelha		1 ,6	1 ,8
Do olho á extr. do focinho		1 ,7	1 ,8
Ante-braço		9 ,0	9 ,3
Pollegar		3 ,5	3 ,8
2.º dedo		6 ,4	6 ,6
3.º dedo	metacarpo	5 ,8	6 ,25
	1.ª phalange	4 ,2	4 ,75
	2.ª phalange	6 ,5	7 ,0
5.º dedo	metacarpo	6 ,4	6 ,6
	1.ª phalange	2 ,5	2 ,7
	2.ª phalange	2 ,3	2 ,5
Tibia		4 ,0	4 ,0

Habita Amboine, Cerama, Timor e Semao.

6. **Pteropus brunneus**, Dobson.

Um ♂ ad., Timor, sr. F. Newton, 1897.

Sobre a classificação do presente exemplar conservo ainda uma certa reserva devida aos pontos de semelhança communs tambem ao *Pt. tuberculatus* de Peters.

Com effeito, é difficil resolver n'este individuo o verdadeiro sentido das considerações feitas por Dobson sobre a existencia ou permanencia do primeiro molar superior n'um e n'outro individuo.

É a este caracter que ligo aqui uma importancia capital, visto que nas dimensões a relação estabelecida entre as duas especies citadas, *Pt. brunneus* e *tuberculatus*, descriptas por Dobson e o exemplar do Museu são insignificantissimas, e a disposição das côres no pello, caracter que de resto me parece sujeito a uma variabilidade consideravel não só entre os Chiropteros como entre todos os outros animaes, não deixam tambem de concordar mutuamente entre os tres individuos.

N'este exemplar modernamente adquirido pelo museu pareceu-me sempre absoluta a falta do primeiro pre-molar superior.

A difficuldade porém de collocar este individuo entre uma das especies citadas por Dobson, obrigou-me depois de um trabalho aturado em que vi e revi todas as descripções feitas por este auctor, e algumas de Temminck, a dissecar de um dos lados, o maxillar superior no espaço comprehendido entre o canino e o segundo pre-molar e emfim consegui descobrir um primeiro pre-molar completamente invisivel a olho nú e que, mesmo com o auxilio de uma lupa bastante forte, se mostra apenas como um pequeno cone de um millimetro de altura e meio enterrado no maxillar. Será este o pre-molar a que se refere Dobson dizendo na sua especie de *Pt. brunneus* «*first upper premolar very small*» e no *Pt. tuberculatos* «*first upper premolar is not deciduous*». Mas este dente é completamente invisivel n'um maxillar que não esteja dissecado e se nenhuma d'estas phrases pode ser applicada ao individuo em questão talvez que esta seja uma especie nova.

Orelha terminando em ponta nua, o bordo externo levemente cavado na sua extremidade.

Membrana inter-femural imperceptivel na região anal e coberta de pello abundante e lanoso.

Por todo o corpo, o pello pouco longo e lanoso excepto no dorso que é liso e acamado. Ante-braço pouco coberto e só na sua base; as pernas cobertas pouco abundantemente, mas quasi até á articulação do pé.

Pela parte inferior, em volta do corpo sobre a membrana, o pello lanoso como o do ventre, pouco abundante mas longo e levemente annelado. Cabeça d'um cinzento amarellado-claro, mais escuro nas faces e garganta passando para a côr ruivo-dourado sobre o pescoço e mais claro sobre as espaduas. Esta mesma côr mais escura, pela parte inferior do pescoço vem misturar-se com o pardo-avermelhado claro do peito e ventre. O dorso cinzento arruivado claro.

As dimensões dos exemplares que acabo de descrever e das duas especies citadas são as seguintes:

Comprimentos		Exempl. do Museu	*Pt. brunneus*	*Pt. tuberculatus*
Cabeça e corpo		$20^{cm},0$	$20^{cm},0$	$16^{cm},0$
Cabeça		6 ,8	7 ,5	5 ,5
Orelha		2 ,0	2 ,0	2 ,0
Do olho á extr. do focinho		2 ,0	2 ,2	1 .7
Ante-braço		11 ,8	11 ,2	12 ,0
Pollegar		4 ,0	4 ,7	4 ,7
2:º dedo		8 ,2	8 ,5	–
3.º dedo	metacarpo	7 ,6	7 ,7	7 ,0
	1.ª phalange	6 ,0	5 ,8	6 ,2
	2.ª phalange	10 ,0	9 ,5	10 ,0
5.º dedo	metacarpo	8 ,8	8 .5	8 ,7
	1.ª phalange	3 ,5	3 ,6	3 ,7
	2.ª phalange	3 ,4	3 ,7	4 ,0
Tibia		5 ,5	5 ,2	4 ,7

O *Pt. brunneus* habita Percy, proximo da costa oriental da Australia. Do *Pt. tuberculatus* ignora-se ainda a procedencia.

7. **Pteropus pselaphon**, Say.

Pt. pselaphon, Say.. *Zoolog. Journ.*, p. 457.—Temm., *Monogr. des Mamm.*, II, p. 70.—*Pt. ursinus*, Kittlizt.—*Pt. ursinus*, Gray.

Um ♂ juv., Timor, sr. F. Newton, 1897.

Segundo a descripção de Dobson creio poder classificar este individuo como um *Pt. pselaphon* de Say de pouca edade.

Com effeito um dos caracteres notaveis d'esta especie que consiste na existencia de pellos sobre os dedos dos membros posteriores, observa-se no presente exemplar ainda que pouco abundantes.

A membrana inter femural mostra-se ainda com 2 a 3 millimetros na região anal, mas desapparecendo por completo debaixo dos pellos.

Por todo o corpo, o pello é bastante longo e de uma notavel finura. Sobre o dorso é liso e acamado.

O primeiro pre-molar existe, mas pequeno e agudo, prestes a abandonar o maxiliar e parecendo apenas implantado 'nos tecidos molles.

Os ultimos molares acham-se ainda encobertos.

Cabeça cinzento-arruivado escuro; pescoço pela parte superior deixando sobresahir mais a côr ruiva pela parte inferior, cinzento-escuro como o dorso.

Pela parte inferior da membrana, em volta do corpo n'uma largura approximada de 5 a 6 centimetros estende-se uma camada de pello pouco abundante mas lanoso e comprido, acompanhando tambem o ante-braço quasi até á articulação dos dedos.

As dimensões differem como é natural visto que a descripção de Dobson é feita sobre um individuo adulto.

Esta especie é propria de Bonine, posição que torna provavel a sua emigração para Timor.

8. **Pteropus hypomelanus**, Temm.

Pt. hypomelanus, Temminck, *Esquiss. Zoolog. sur la côte de Guinée*, p. 61 (1853).—*Pt. tricolor*, Gray, *Catal. monkeys and Fruiteating Bat.*. p. 108 (1870).

Uma ♀ mt. ad., Timor (Dilly), sr. F. Newton, 1897.

É uma femea notavelmente adulta. A sua dentição acha-se por assim dizer arrazada. Os incisivos inferiores apparecem apenas entre os seus alveolos, os superiores mal conservados e gastos. Os caninos inferiores não fazem maior volume que um pequeno pre-molar quanto á sua altura, mas apresentam a base larga propria d'estes dentes; os superiores pouco mais volume fazem e estão tambem gastos. Os primeiros pre-molares superiores são os dentes mais conservados comquanto muitos gastos tambem.

Quanto aos molares estão completamente gastos e offerecem apenas uma superficie um pouco convexa e bem polida.

As côres do pello condizem bastante com a descripção de Dobson mas mais indecisas. As dimensões differem apenas de alguns millimetros conservando comtudo a proporção.

Quanto á sua distribuição geographica esta especie tem sido por todos os auctores approximada de Timor, pois que a indicam como proveniente de Borneo, Filippinas, Celebes, Ternate, Benda, etc.

9. **Pteropus caniceps**, Gray.

Pt. caniceps, Gray, *Cat. monkeys and Fruit-eating Bats.*, p. 107 (1870).—*Pt. affinis*, Gray, *loc. cit.*, p. 108.

Um ♂ sm. ad., Timor, sr. F. Newton, 1897.

Apenas n'uma differença de alguns millimetros se afasta quanto ás dimensões da especie typo de Dobson. Esta magnifica especie tem sido considerada até aqui como particular a Batchian e Gilolo.

As orelhas curtas e triangulares, focinho curto, cabeça larga; membrana inter-femural invisivel na região anal.

O pello pouco longo mas abundante e lanoso, pardo-escuro na cabeça e garganta, arruivado no pescoço e esbatendo sobre as espaduas.

Peito e ventre pardo-escuro com numerosos pellos d'um amarello doirado e outros brancos. O dorso pardo-acinzentado ou avermelhado-claro. Sobre o braço e ante-braço, pouco abundantes, lisos e acamados como no dorso. Na região anal, lanosos e estendendo-se sobre a perna até perto da articulação do pé.

Nas dimensões principaes as differenças são insignificantes como se pode observar no seguinte mappa:

Comprimentos	Exempl. do Museu	Typo de Dobson
Cabeça e corpo	20cm,0	20cm,0
Orelha..................	2 ,2	2 ,5
Ante-braço	12 ,6	13 ,0
Pollegar................	4 ,8 ?	5 ,5 ?
2.º dedo	8 ,5	8 ,7

10. **Pteropus macklotii,** Temm.

Pt. macklotii, Temminck, *Monogr. des Mamm.*, II, p. 69.—? *Pt. vociferus*, Peal. — *Pt. floresii*, Gray.

Um ♂ ad., Timor (Dilli), sr. F. Newton, 1897.

Devido ás dimensões do ante-braço podia-se talvez collocar este exemplar na variedade α de Dobson ou *Pt. celebensis* de Schlegel, mas attendendo principalmente ao terceiro molar superior, o qual não soffre a alteração distinctiva da variedade de Schlegel, e depois ao facto tambem d'este individuo ser proveniente de Timor e não das Celebes como a referida variedade, leva-me a considerar esta differença como individual.

O mappa abaixo inscripto indica as dimensões do exemplar modernamente adquirido pelo Museu e da especie e variedade citada:

Comprimentos		Exempl. do Museu	Typo de Dobson	Variedade
Cabeça e corpo		20cm,0	22cm,5	20cm,0
Orelha..................		2 ,2	3 ,0	2 ,5
Do olho á extr. do focinho.		2 ,2	2 ,6	2 ,2
Ante braço		12 ,2	13 ,0	12 ,5
Pollegar................		4 ,5	6 ,0	4 ,4
3.º dedo	metacarpo.......	8 ,0	9 ,0	8 ,4
	1.ª phalange.....	5 ,9	6 ,7	6 ,0
	2.ª phalange.....	9 ,4	10 ,2	9 ,7
5.º dedo	metacarpo.......	8 ,6	9 ,2	8 ,5
	1.ª phalange.....	3 ,5	4 ,0	3 ,5
	2.ª phalange.....	3 ,5	4 ,0	3 ,7
Tibia..................		5 ,0	5 ,7	–

JOSÉ D'ANCHIETA

Trouxe-nos o ultimo paquete d'Africa occidental a infausta noticia de que fallecera em Caconda, no sertão de Benguella, o habil naturalista e intrepido explorador a quem se deve, quasi exclusivamente, tudo quanto hoje se conhece da interessante fauna das vastas possessões portuguezas d'Angola e Congo.

Não eram na verdade animadoras as ultimas noticias que directamente receberamos de José d'Anchieta, mas ainda assim não nos faziam presentir tão proximo o fatal desenlace. De Caconda nos escrevia elle em 8 de julho: «Vejo que não posso lograr saude n'este clima, que, posto deva ser considerado como benigno para a maior parte dos europeus, não o é para mim, talvez pelas grandes differenças de temperatura entre dia e noite. Pretender resistir-lhe no estado de pobreza de forças a que tenho chegado, creio ser-me arriscado. Julgo que no meu caso o mais sensato é o mudar-me para clima mais moderado.»

Não logrou porém o nosso amigo realisar o seu intento, de se retirar por algum tempo para Benguella, onde encontrara sempre condições climatericas mais favoraveis; a morte veiu inesperadamente pôr termo aos seus padecimentos. Faltam-nos ainda pormenores ácerca dos seus ultimos momentos; apenas nos consta que Anchieta, por fins de agosto, partira de Caconda a explorar as margens do rio Cusse, que alli adoecera gravemente, e no seu regresso para Caconda fôra, no dia 14 de setembro, encontrado morto dentro da machila que o conduzia. Eis tudo o que sabemos.

Em homenagem á honrada memoria de quem tão relevantes serviços prestou á sciencia e ao paiz, queremos consignar aqui, em breves termos, uma succinta enumeração dos seus valiosissimos trabalhos.

Em quasi todos os numeros d'este jornal, desde o começo da sua publicação, não sómente houve o cuidado de se inscreverem as successivas remessas do nosso naturalista, como tambem se procurou dar uma idéa exacta da sua importancia numerica e do seu valor scientifico.

Em outros escriptos, tambem já publicados, encontrarão os zoologistas, que mais particularmente se interessam por quanto respeita á fauna africana, ampla informação ácerca de algumas das collecções que o Museu de Lisboa deve a José d'Anchieta, collecções que se acham actualmente dispostas em duas vastas salas d'aquelle estabelecimento, recentemente franqueadas ao publico.

Entendemos, porém, que não devemos perder esta occasião de consignar aqui uma rapida apreciação dos trabalhos a que o illustre finado consagrara todos os grandes recursos da sua intelligencia e da sua vontade.

Cumpre recordar que José d'Anchieta, antes de iniciar em 1867, por encargo official do governo portuguez, a exploração zoologica d'Angola, realisara por deliberação propria e a expensas suas, durante alguns mezes dos annos de 1864 e 1865, uma excursão pela região littoral do Congo, desde Cabinda até ao rio Quillo, com o fim de obter exemplares da fauna, então inteiramente desconhecida, d'esta porção do territorio portuguez. Foi-lhe então adversa a sorte: das numerosas e importantes collecções, que o nosso naturalista obtivera, apenas conseguiu trazer ao reino, em 1866, e offerecer ao Museu, uma parte minima; a maior parte e a mais valiosa dos exemplares ficara submersa com a canoa que os conduzia na passagem de um rio caudaloso.

Os exemplares que escaparam ao desastre e fazem actualmente parte das nossas collecções, são principalmente aves e reptis e representam 23 especies das primeiras e 24 dos segundos. Talvez pareçam hoje insignificantes estes algarismos, mas seja-nos licito observar que os resultados d'esta mallograda exploração forneceram as primeiras provas authenticas da existencia d'essas aves e reptis n'aquella parte do littoral africano.

Em agosto de 1866 regressou Anchieta a Angola para dar começo aos seus trabalhos de exploração e fixou a sua residencia em Benguella, d'onde nos fez uma primeira remessa; d'alli visitou, em 1867, Catumbella, Dombe, rio Coroca e Porto Alexandre; em 1868, internou-se no sertão de Mossamedes percorrendo varias localidades nos contrafortes da Serra de Chela, Biballa, Maconjo e Capangombe, subindo depois ao planalto da Huilla, d'onde se dirigiu ainda até Quillengues e Caconda; em 1869, passou a Loanda com o fim de visitar algumas localidades da região que demora ao norte do Quanza, o Dondo, Cazengo e Barra do Dande; em 1870, voltou a Benguella, foi de novo ao rio Coroca e passou á Huilla onde se demorou até fins de 1871; os cinco annos seguintes, de 1872 a 1876, foram consagrados á exploração mais demorada e completa do planalto de Mossamedes, estacionando successivamente nos Gambos, Humbe e rio Cunene; d'esta fronteira meridional dos nossos territorios retrocedeu para Quillengues e Caconda, onde se demorou até fins de 1878; no periodo que decorre de 1879 a 1886, temos a citar a sua fructuosa permanencia em Caconda, precedida de uma curta visita a Novo Redondo; desde essa epocha, com interrupção apenas de alguns mezes em Benguella, no anno de 1888, a exploração de Anchieta alargou-se por todo o sertão de Benguella, percorrendo Quissange, Quindumbo, Cahata, Quibula, Galanga, Hanha e Caconda, onde chegara no principio de 1897, e onde falleceu em setembro do mesmo anno.

As remessas effectuadas de todas essas localidades, constituem uma numerosa e importantissima collecção de representantes da fauna angolense, na maxima parte já estudados, como consta de diversas publicações que sahiram a lume desde 1867.

Para bem se avaliar quanto contribuiu a exploração de José d'Anchieta para os actuaes progressos da zoologia africana, bastará confrontar o que hoje se conhece da fauna d'Angola, graças a essa exploração, com o que anteriormente se conhecia. Por agora limitar-nos-hemos a fazer summariamente esse confronto, com relação aos grupos superiores de vertebrados.

Servindo-nos unicamente para o nosso fim de documentos authenticos, offerece-se-nos apenas mencionar como já conhecidas anteriormente á exploração de Anchieta, as especies de mammiferos que constam de duas pequenas listas publicadas em 1865 nos *Proceedings* da Sociedade Zoologica de Londres. Uma d'essas listas contém a enumeração, pelo dr. Peters, de 11 especies colligidas em Angola pelo dr. Welwitsch, entrando n'esse numero uma que mais tarde o dr. Gray reconheceu ser nova *(Hyrax Welwitschi)*; a outra lista foi publicada por nós, e consta de 5 mammiferos que o nosso compatriota Bayão nos remettera do Duque de Bragança, ao norte do Quanza. [1]

Nas remessas effectuadas por Anchieta, desde 1867, temos já encontrado não menos de 102 especies de mammiferos, das quaes 25 não estavam ainda inscriptas nos catalogos da sciencia.

Era mais avultado, que o dos mammiferos, o numero das aves que se sabia existirem em Angola; mas ainda assim, muitissimo inferior ao das que Anchieta logrou colligir. N'uma excellente publicação do dr. Hartlaub, com a data de 1851, sobre a ornithologia da Africa occidental veem mencionadas 51 especies d'Angola, e este mesmo insigne ornithologista teve occasião de publicar em 1865, nos *Proceedings* da Sociedade Zoologica de Londres, uma relação de 70 especies de aves colligida por J. J. Monteiro no districto de Benguella, sendo consideradas novas umas 7 especies; [2] as nossas collecções ornithologicas, provenientes da exploração de Anchieta, constam de 4:386 exemplares e 560 especies, sendo d'estas novas não menos de 46.

Pouco se sabia tambem quanto a reptis e batrachios, que habitam Angola. Citaremos apenas uma collecção de 21 exem-

---

[1] V. *Proc. Soc. Zool. Lond.*, 1865, pp. 400 e 401.

[2] V. *Proc. Soc. Zool. Lond.*, 1865, pp. 86 e 89.

plares de varias localidades offerecida pelo dr. Welwistch ao Museu Britannico, da qual deram noticia em 1864 e 1865 os dr. Günther e Gray, e 4 especies ineditas, sendo 1 ophidio e 3 batrachios, colligidas por Bayão no Duque de Bragança, e publicadas pelo primeiro d'aquelles distinctos zoologistas.[1]

As especies de reptis e batrachios encontradas por Anchieta nas diversas localidades que visitou perfazem o numero de 170, sendo 46 novas.

Com estes traços geraes procuramos apenas apresentar um esboço da grande obra de Anchieta, nem outra coisa nos consente a profunda magua que n'este momento opprime o nosso espirito.

No desempenho da sua difficil missão consumiu Anchieta mais de 30 annos consecutivos, quasi metade da sua existencia, pois nascera em Setubal aos 9 de outubro de 1832 vindo a fallecer com 66 annos de edade.

Estes brilhantes resultados por elle alcançados foram devidos, não sómente á sua grande e variada cultura intellectual e á rija tempera da sua vontade; mas tambem ás qualidades excepcionaes do seu caracter, que se accommodava melhor á vida do sertão e aos costumes primitivos dos seus habitantes do que ás praticas e exigencias das sociedades civilisadas.

Falleceu José d'Anchieta em Caconda, precisamente na localidade onde mais se comprazera sempre de residir, attrahido principalmente pela riqueza da fauna. Alli o colheu a morte, quando diligenciava, luctando heroicamente contra o mal que lhe minava a existencia, descobrir novos materiaes com que en-

---

[1] V. *Ann. Mag. Nat. Hist.*, 1865, vol. xv, p. 97.—*Proc. Zool. Soc. Lond.*, 1865, pp. 442, e 454.

riquecesse o nosso Museu e fizesse progredir a sciencia de que se constituira dedicado obreiro. De Hanha nos expedira Anchieta as ultimas collecções que recebemos; as que diligenciava mandar de Caconda, que lhe abreviaram talvez a existencia, provavelmente não as receberemos, e quando as recebessemos não nos consentiria a cruel enfermidade de que somos victima, que as examinassemos e estudassemos como era nosso costume e nossa principal e mais dilecta occupação.

Morreu José d'Anchieta. O seu cadaver ficará talvez abandonado e perdido n'esses sertões d'Africa, que elle percorrera animado pelo amor da sciencia e pelo amor da Patria; mas passará á posteridade a memoria dos trabalhos, a que elle consagrou, com rara sollicitude e heroica abnegação, a maior e a melhor parte da sua vida; e o seu nome, vinculado a muitas das suas descobertas, recordará aos vindouros a parte que ao nosso querido naturalista cabe nos grandes progressos realisados pela zoologia africana na segunda metade d'este seculo.

2 de dezembro de 1897.

J. V. Barboza du Bocage

PREÇO D'ESTE NUM. 500 RÉIS

Acha-se á venda no Deposito de impressos da Academia.

A correspondencia deve ser dirigida, *franca de porte*, á Redacção do JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS, PHYSICAS e NATURAES, na Academia Real das Sciencias de Lisboa, rua do Arco (a Jesus).

JORNAL DE SCIENCIAS

MATHEMATICAS, PHYSICAS E NATURAES

PUBLICADO SOB OS AUSPICIOS

DA

ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS DE LISBOA

SEGUNDA SÉRIE

Tom. V — Junho, 1898 — Num. XIX

LISBOA

TYPOGRAPHIA DA ACADEMIA

1898

INDEX

SUR UNE NOUVELLE ESPÈCE DE CYNONYCTERIS D'ANGOLA

PAR

J. V. BARBOZA DU BOCAGE

Cynonycteris Angolensis.

Syn. *Cynonicteris ægyptiaca,* Bocage (non Geoffroy). *Jorn. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, t. I, 1889, p. 15; *Cynonycteris* sp? Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa,* 2.ª serie, t. II, 1892, p. 174, fig. 2.

Taille à peine inférieure à celle de la *C. collaris.* Tête de forme pyramidale, large en arrière, à museau étroit et obtus; les yeux plus rapprochés de l'oreille que de la narine; les oreilles beaucoup plus longues que la distance de la narine à l'œil, ovales, arrondies au bout. Membranes de l'aile et des oreilles noirâtres.

Pelage laineux et abondant, plus court sur la poitrine et l'abdomen; les poils de chaque côté de la tête, de la gorge et de la face intérieure du cou, sensiblement plus longs.

Les membres sont couverts en dessus de poils longs et serrés, les antérieurs jusqu'à un peu plus de la moitié de l'avant-bras, les postérieurs jusqu'à l'articulation du pied; en dessous, les poils couvrent les membres antérieurs jusqu'à la moitié de l'avant-bras, et sur les membres postérieurs arrivent à peine jusqu'au premier tiers de la jambe. Les ailes présentent sur leur face supérieure, de chaque côté de l'avant-bras, une étroite bande de poils et une bande plus large de chaque côté du corps, allant de la moitié de l'humerus à l'extrémité supérieure du tibia, et se prolongeant sur le côté externe de celuici jusqu'au pied. La membrane interfémorale est presque entièrement couverte en dessous de poils aussi longs et aussi fournis que ceux du dos.

La membrane pré-brachiale est garnie en dessous de petits poils laineux clairsemés; des poils de même nature forment au dessous du membre antérieur une bordure, limitée par une ligne courbe, qui finit sur le milieu de l'avant-bras. L'interfémorale, couverte de poils dans sa portion centrale, laisse de chaque côté un espace nu.

Sur le dos et la face supérieure des ailes les poils sont bruns, couleur de tabac; le dessous de la tête est d'une teinte un peu plus claire, mais le museau est plus rembruni. Le cou et la gorge sont d'un brun pâle tirant au grisâtre; la couleur des parties inférieures se rapproche de celle du dos mais prend un ton plus clair, grisâtre, sur le milieu de la poitrine et du ventre.

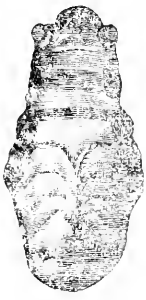


Fig. 1

Plis du palais au nombre de sept, dont trois simples suivis de quatre divisés; les deux derniers dentelés, tous les autres lisses. Les trois plis antérieurs, simples, touchent respectivement par leurs extrémités à la première, à la seconde et à la troisième prémolaire; des quatre plis divisés, les deux premiers sont en rapport avec les deux molaires et les deux derniers les suivent, gardant, entre eux et avec celui qui les précède, à peu près la même distance. Le fond du palais est limité en avant par deux lignes dentelées concentriques assez rapprochées entre elles.[1]

Dimentions:

	♂	♀
Tête et corps	120 mm.	140 mm.
Queue	13 »	13 »
Tête	45 »	48 »
De l'œil à la narine	15 »	15 »
Oreille	23 »	22 »
Avant-bras	80 »	79 »
Pouce	32 »	33 »
3.me doigt, métacarpe	56 »	60 »
» » 1.re phalange	40 »	40 »
» » 2.me »	50 »	53 »
3.me doigt, métacarpe	53 »	56 »
» » 1.re phalange	26 »	26 »
» » 2.me »	28 »	29 »
Tibia	32 »	33 »
Pied	20 »	21 »

[1] L'examen du palais de trois espèces d'Angola, dans nos collections, nous autorise à considérer les différences qu'elles présentent dans la forme et la disposition de ses plis, comme pouvant fournir des caractères différentiels de quelque valeur pour la détermination spécifique des Chiroptères du genre *Cynonycteris*. Le palais du *C. straminea* porte quatre plis simples et trois divisés, dont les deux derniers sont dentelés; et en arrière de ces plis, au fond du palais, se trouvent quatre lignes courbes concentriques également dentelées; chez le *C. collaris* il y a aussi quatre plis simples et trois divisés, mais le fond du palais est limité en avant par une seule ligne dentelée disposée en angle aigu; enfin le palais du *C. angolensis* nous présente trois plis simples et quatre divisés, et plus en arrière deux lignes dentelées. (V. *Jorn. Ac. Sc. de Lisboa*, II ser., t. 2.do p.p. 174 a 177, figs. 1, 2, 3.)

Nous appelons sur ce sujet, qui nous semble assez intéressant, l'attention des zoologistes que seraient à même de pouvoir examiner le palais des autres espèces du genre *Cynonycteris*.

Habitat: *Pungo-Andongo* au nord du Quanza, *Cahata* et *Quibula* dans l'intérieur de Benguella.

La *C. angolensis* est une espèce à ajouter aux trois espèces dont on avait déjà constaté l'existence en Angola: *C. straminea* dont nous possédons des exemplaires recueillis par Anchieta dans plusieurs localités; *C. Collaris* très répandue dans l'Afrique équatoriale et australe et à laquelle nous croyons pouvoir rapporter des individus envoyés par notre regretté naturaliste de *Pungo Andongo* et de *Quidumbo;* enfin, *C. torquata.* Dobson, dont les exemplaires typiques, provenant d'Angola, font partie des collections du Muséum Britannique.

Il est impossible de confondre la nouvelle espèce, avec la *C. straminea* et la *C. collaris.* En effet, même sans tenir compte d'autres caractères différentiels, tels que l'infériorité de la taille, la diverse conformation de certaines parties, et la différente coloration du pelage, la sculpture de son palais nous permet de la séparer, nettement, de ses deux congénères, car, comme nous l'avons déjà observé, le palais de la *C. angolensis* présente trois plis simples et quatre plis divisés, tandis que les deux autres espèces ont quatre plis simples et trois plis divisés.

Quant à la *C. torquata*, la description publiée par Dobson, et sourtout les dimentions sigalées par cet auteur, d'après un individu adulte du Muséum Britannique nous semblaient contraires à toute idée d'assimilation; mais désirant arriver par comparaison directe à un résultat plus positif, nous avons adressé à notre ami Mr. Oldfield Thomas un de nos exemplaires de *Quibula*, avec prière de vouloir bien le comparer aux exemplaires typiques du Muséum Britannique. Or le savant zoologiste du Muséum Britannique, vient de nous informer, que la *Cynonycteris* de *Quibula* ressemble à la *C. torquata* sous le rapport des plis du palais, trois simples et quatre divisés, mais qu'elle en diffère par la supériorité de sa taille, par sa tête plus longue, par ses oreilles presque doubles en longueur, par l'absence d'un collier etc, ce qui nous permet de conclure quil s'agit réellement d'une espèce inédite.

*

* *

Les collections de Lisbonne renferment actuellement des répresentants de douze espèces africaines de la famille *Pteropodidæ*, à savoir:

1. Epomophorus monstrosus, (Allen).

E. monstrosus, Dobson, *Cat. Chir. B. Mus.*, p. 6, pl. I. A pl. II, fig. 1. (le palais); Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisb.*, 2.ᵉ serie, t. IV, p. 4.

Mâle et femelle de l'Ile *Fernão do Pó* (Newton).

2. **Epomophorus macrocephalus,** (Ogilby).

E. macrocephalus, Dobson, *Cat. Chir. B. Mus.,* p. 8, pl. II, fig. 2 (le palais).

Deux femelles en mauvais état; un squelette et un crâne en alcool. *Bolama* (Barahona).

3. **Epomophorus Dobsonii,** Bocage.

E. Dobsonii, Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisb.,* 2.ª serie, t. I, p. 2, fig. 1, (le palais); ibid. p. 14.

Deux mâles de *Quindumbo;* une femelle de *Galanga;* une femelle de *Hanha;* deux crânes en alcool (Anchieta).

Fig. 2

La sculpture du palais de cette espèce diffère considérablement, comme nous l'avons remarqué ailleurs, de ce que l'on observe chez les autres espèces du genre Epomorphus; le dessin du palais fera comprendre mieux que toute description ce qu'il a de bien caractéristique.

4. **Epomophorus gambianus** (Ogilby).

E. gambianus, Dobson, *Cat. Chir. B.Mus.,* p. 10, pl. II, fig. 3.ª; Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisb.,* 2.ᵉ serie, t. I, p. 2, et 14.

Plusieurs individus des deux sexes de diverses localités: rio *Quilo, Pungo-Andongo, Benguella, Ambaca, Caconda, Quissange* et *Quindumbo,* (Anchieta). Deux individus d'*Angola* (Toulson).

5. **Epomophorus guineensis,** n. sp.

E. gambianus? Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisb*, 2.ᵉ serie. t. I, pp. 2 et 3, fig. 2, (le palais).

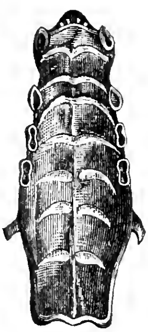


Fig. 3

Un mâle adulte de *Bolama* (Barahona).

Cet individu nous parait distinct de l'*E. Gambianus*, par sa tête sensiblement plus allongée à museau plus étroit et surtout par le nombre et la disposition des plis du palais. Pour s'en assurer il suffit de comparer la figure ci contre à la figure de Dobson qui représente bien exactement les plis du palais de l'*E. gambianus.*

6. **Epomophorus crypturus,** (Peters).

E. crypturus, Peters, *Reise nach Mossambique,* t. I, p. 26, pl. XIII, figs. 1, 6; Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisb.,* 2.ᵉ serie, t. I, p. 4.

Une femelle de *Moçambique* (Costa Soares). Le crâne en alcool.

L'*E. crypturus* ressemble par les plis du palais non pas à l'*E. gambianus*, comme le croyait Dobson, mais à l'*E. macrocephalus*, dont on devrait le considérer peut-être comme une variété à taille plus restreinte.[1]

7. **Epomophorus minor,** Dobson.

E. minor, Dobson, *Proc. Zool. Soc. London, 1879*, p. 715; Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisb.*, 2.e serie, t. I, p. 4.

Un individu de Zanzibar, l'un des types de l'espèce (Dobson).

8. **Epomophorus pusillus,** Peters.

E. pusillus, Peters, *M. B. Akad. Berlin*, 1867, p. 870; *Jorn. Ac. Sc. Lisb.*, t. III, 1870, p. 123; Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisb.* 2.e serie, t. I, p. 15, 1889.

Un individu mâle d'*Angola* (Toulson), le crâne en alcool.

9. **Cynonycteris straminea** (Geoffroy).

C. straminea, Dobson, *Cat. Chir. B. Mus.* 1878, p. 77; Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisb.*, 2.a serie, t. I, 1889, p. 15, ibid. 2.e serie, t. II, p. 174, fig. 1, (le palais).

Trois individus de Rio *Quilo* et *Caconda* (Anchieta).

Un individu d'*Ajudá* (Elvas Mascarenhas);

Trois individus de l'Ile de *S. Thomé* (Newton);

Deux individus de *S. Thomé* (Almada Negreiros).

Tous ces individus présentent sept plis au palais dont les quatre antérieurs sont simples et les trois derniers divisés; derrière ceux-ci il y a au fond du palais quatre lignes dentelées concentriques.

10. **Cynonycteris collaris,** (Illiger).

C. collaris, Dobson, *Cat. Chir. B. Mus.*, 1878, p. 76.
Cynonycteris sp? Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisb*, 2.e serie, t. II, 1891, p. 177, fig. 3, (le palais).

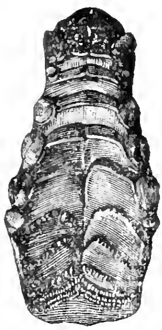


Fig. 4

Un mâle de *Moçambique*, une femelle de *Pungo-Andongo* (Anchieta); et un mâle de *Quindumbo* (Anchieta).

Nous comptons au palais de cette espèce quatre plis simples sui-

[1] V. Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisb.*, 2.e serie, t. I, p. 3.

vis de trois plis divisés, exactement comme chez la *C. straminea*; mais le fond du palais est limité en avant par une seule ligne dentelée au lieu de quatre lignes concentriques.

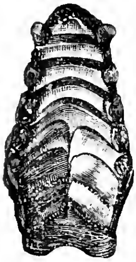


Fig. 5

A juger d'après ce que nous observons chez trois espèces de *Cynonycteris, C. straminea, C. collaris, C. angolensis,* le nombre total des plis serait toujours de sept mais le nombre des plis simples et des plis divisés, ainsi que le nombre des lignes dentelées du fond du palais, présenterait des variations qu'on ne doit pas négliger dans la détermination des espèces. Nous reconnaissons cependant que, pour bien apprécier la valeur de ce caractère différentiel, il faudrait examiner le palais des autres espèces de *Cynonycteris*.

11. **Cynonycteris angolensis**, Bocage.

Cynonycteris sp? Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisb.*, 2.e serie, t. II, 1891, p. 175, fig. 2, (le palais).

Une femelle de *Pungo-Andongo*; et un mâle et quatre femelles de *Quibula* (Anchieta).

12. **Cynonycteris brachycephala**, Bocage.

C. brachycephala, Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisb.,* 2.e serie, t. I, 1889, p. 197.

Une femelle adulte de l'*Ile de S. Thomé* (Fernandes Pires).

Les dimentions de notre individu sont à peu près celles constatées par Dobson chez l'individu adulte de la *C. torquata*.

Tête assez courte, de forme triangulaire, large et bombée en arrière; museau court de plus en plus étroit, légèrement obtus à son extremité. Oreille courte arrondie au bout. Ailes insérées sur les côtés du corps; membrane alaire noirâtre. Pelage brun en dessus, brun cendré, pâle, en dessous; tour des yeux et côtés du museau d'un brun foncé. Une bande de poils serrés de la couleur de ceux du dos recouvre en dessous le bras et la moitié basale de l'avant-bras; les cuisses et les jambes sont également revêtues de poils, à l'exception du tiers inférieur de celles-ci. En dessus la membrane ante-brachiale présente quelques poils épars; et on aperçoit des poils semblables sur la membrane alaire de chaque côté du bras et du tiers supérieur de l'avant-bras. Le bras, la cuisse et une partie de l'avant-bras et de la jambe sont bien garnis de poils.

Le crâne est incomplet en arrière et présente les plis du palais fort effacés; on y aperçoit cependent les vestiges de sept plis, quatre simples et trois divisés, dont on peut se rendre compte par le croquis qui accompagne cette description.

Les incisives supérieures sont disposées en courbe entre les canines; celles-ci sont courtes et fortes sur les deux mâchoires, la pré-molaire et la dernière molaire se font remarquer par leur petitesse.

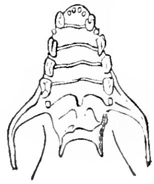


Fig. 6

Dimentions:

Tête et corps	100	mm.
Tête	37	»
Oreille	11	»
Distance de la narine à l'œil	13	»
Avant-bras	62	»
Pollex	26	»
3.me doigt, métacarpe	43	»
» » 1.re phalange	30	»
» » 2.me »	39	»
Jambe	23	»
Pied	15	»

AVES DO ARCHIPELAGO DE CABO VERDE

POR

J. V. BARBOZA DU BOCAGE

A fauna do archipelago de Cabo Verde não é ainda hoje bem conhecida, com quanto seja esta de todas as nossas possessões africanas a que se acha em maior proximidade da metropole.

Nos fins do seculo passado, um dos nossos mais esclarecidos ministros da marinha, Martinho de Mello e Castro, diligenciara obter informações exactas e completas ácerca das riquezas naturaes d'aquelle archipelago, e com este fim enviara para alli o naturalista João da Silva Feijó, que deveria percorrer successivamente as diversas ilhas, colligir os seus productos naturaes e remettel-os para o gabinete de historia natural da Ajuda, onde seriam devidamente estudados. Não foram, porém, por diversas causas, coroadas de feliz exito as patrioticas intenções do grande ministro.

Do exame de documentos que pude consultar, resulta que pelo menos de 1784 a 1789 Feijó fez para o gabinete da Ajuda successivas remessas de productos naturaes de varias ilhas do archipelago, comprehendendo essas remessas um numero assaz limitado de especimens zoologicos e entre estes algumas aves. Da acquisição, porém, d'estes especimens pelo gabinete da Ajuda nenhum proveito resultou para a sciencia pois não sómente se não diligenciou estudal-os e tornal-os conhecidos, mas nem se quer parece ter havido o cuidado de lhes garantir a authenticidade, conservando-lhes etiquetas com indicações precisas da sua procedencia.

É possivel que das aves colligidas por Feijó, algumas fossem levadas para o Museu de Paris, por Geoffroy Saint-Hillaire em 1808; das que por ventura não tiveram esse destino nenhuma se encontrou, na pequena collecção ornithologica do Museu da Academia Real das Sciencias, para onde haviam sido transportadas, em 1836, as collecções remanescentes no gabinete da Ajuda.

As primeiras informações, de caracter verdadeiramente scientifico, ácerca da ornithologia de Cabo Verde devem-se á publicação da viagem do «Beagle», publicação que teve logar de 1839 a 1841. N'esta obra veem mencionadas as aves que Darwin, na sua qualidade de naturalista do «Beagle», colligira em Cabo Verde, e encontram-se as descripções por aquelle celebre zoologista e pelo seu compatriota Gould das que lhes pareceram especies novas.

Pela mesma epocha, ou pouco depois, sahiram á luz em Lisboa dois livros que conteem listas de aves encontradas em Cabo Verde; refiro-me á *Chorographia Cabo-Verdiana* de Chelmicki, publicada em 1841, e aos *Ensaios sobre a statistica das possessões portuguezas do Ultramar,* por Lopes de Lima, que teem a data de 1844. N'estas listas, porém, contentaram-se os auctores em transcrever os nomes vulgares de aves que suppozeram ou lhes affirmaram existirem em Cabo Verde, acompanhando-os raras vezes dos nomes scientificos e estes nem sempre exactos.

Em 1850, Adams, um dos collaboradores da parte ornithologica da *Viagem do Samarang,* mencionou apenas a existencia nas ilhas de Cabo Verde do *Abutre branco (Neophron percnopterus).*

Bolle aproveitou a sua residencia no archipelago de Cabo Verde, em 1851 e 1852, para se entregar a algumas investigações sobre a fauna ornithologica d'aquellas paragens e consignou-as n'um artigo que vem transcripto no *Journal für Ornithologie,* de 1856, pp. 17 a 31. É certo, porém, que pouco ha a aproveitar d'este escripto, por isso que além de ser assaz diminuto o numero de especies de que faz menção, ha entre ellas muitas que Bolle confessa não ter observado, auctorisando-se apenas para as incluir na sua lista em simples conjecturas, ou vagas informações.

Apresentam outro criterio e verdadeiro valor scientifico escriptos mais recentes, a que tive de soccorrer-me; são estes as publicações feitas por Keulman, Dohrn e B. Alexander ácerca da fauna ornithologica de Cabo Verde. Dohrn e Keulman percorreram juntos, 1865, uma parte do archipelago e publicaram, este em 1866, aquelle em 1871, os resultados da exploração scientifica que haviam emprehendido e levado a cabo. Boyd Alexander completa a lista dos exploradores cabo-verdianos; a sua viagem de exploração foi effectuada nos primeiros mezes do anno findo e durante esse periodo visitou quasi todas as ilhas do archipelago, segundo se infere da breve exposição dos resultados da sua viagem, que vieram ultimamente publicados no primeiro numero da *Ibis* d'este anno.

A todas as publicações a que venho de referir-me, e muito especialmente á ultima, tive de recorrer para formular uma lista, quanto possivel exacta, das aves actualmente conhecidas no archipelago de Cabo Verde.

Consta a minha lista de 48 especies, já citadas por Boyd Alexander, numero este que deve considerar-se de certo inferior ao verdadeiro, se se attender a que devem naturalmente visitar o archipelago de Cabo Verde, pelo menos muitas das aves de arribação que em certas epochas do anno frequentam outras ilhas do oceano atlantico, os Açores, a Madeira e as Canarias. Entendi, porém, que devia ter o maior cuidado em excluir d'esta lista todas as especies a favor de cuja existencia em Cabo Verde se não podessem produzir provas irrecusaveis; e assim é que tambem d'ella exclui algumas especies de que existem exemplares no nosso Museu que trazem nas etiquetas a nota *Cabo-Verde* mas desacompanhada de outras indicações mais precisas ácerca do seu habitat e proveniencia.[1]

Bem pode diser-se, na verdade, que a ornithologia de Cabo Verde não está representada nas collecções do nosso Museu Nacional. Com lastima o confesso, na esperança, de que d'entre os habitantes ou visitantes d'este interessante archipelago, alguem me ajude ainda a fazer desapparecer esta lamentavel lacuna.

---

1. **Neophron percnopterus** (L.).

N. percnopterus, Chelmicki, *Chorographia Cabo-Verdiana*, t. II, 1841, p. 368; Lopes de Lima, *Ensaios sobre a statistica das possessões portuguezas no Ultramar*, t, I, 1844, p. 22; Dolle, *Journ. f. Ornith.*, 1866, p. 17; Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa*, t. I, 1867, p. 131; Dohrn, *Journ. f. Ornith.*, 1871, p. 3; B. Alexander, *Ibis*, 1898, p. 144.

Nome vulgar: *Abutre* (Chelm. e L. Lima).

Habitat: Ilhas de S. Thiago, Brava, Ilheo Rombo, S. Nicolau, S. Vicente e Boa-Vista.

2. **Buteo vulgaris** (Leach.).

B. vulgaris, B. Alex., *loc. cit.*, p. 115.

Habit.: S. Thiago e Boa-Vista.

3. **Milvus migrans** (Bodd.).

Falco milvus, Chelm., *loc. cit.*, p. 368; *M. ater*, Bolle, *loc. cit.*, p. 19; *M. regalis*, Keulmans, *Opmerkingen over de Vogels van de Kaap-Verdische Eilanden en van Prins-Eiland* (Extr.)[2], p. 2; Dohrn, *loc. cit.*, p. 3; *M. migrans*, B. Alex., *loc. cit.*, p. 115.

N. vulg.: *Milhafre* (L. Lima).

---

[1] Refiro-me a quatro exemplares provenientes da Collecção ornithologica de El-Rei D. Pedro V de que fiz menção na minha *Lista das aves d'Africa occidental no Museu de Lisboa*, publicada n'este jornal, t. I, 1867, pp. 129 e seguintes. Pertencem esses exemplares ás seguintes especies:

Cecropis melanocrissus (Rupp.).
Coracias cyanogostras (Cuv.).
Prionops plumatus (Shaw.).
Indicator albirostris (Temm.).

[2] N'esta e nas seguintes citações de Keulmans refiro-me a um extracto, com

Habit.: S. Thiago, Brava, Ilheo Rombo, S. Nicolau, S. Vicente, Santo Antão e Boa-Vista.

4. **Cerchneis neglecta** (Schleg.).

Falco tinunculus, Chelm., *loc. cit.*, p. 368; L. de Lima, *loc. cit.*, p. 22; Bolle, *loc. cit.*, p. 19; Keulmans, *loc. cit.*, p. 3; Dohrn, *loc. cit.*, p. 4; *F. neglectus*, B. Alex., *loc. cit.*, p. 115.

N. vulg.: *Francelho* (Chelm. e L. Lima); *Izabelinha* em S. Nicolau (Dohrn).
Habit.: S. Thiago, Brava, S. Nicolau, Ilheo Razo, S. Vicente, Santo Antão e Boa-Vista.

5. **Pandion haliaëtus** (L.).

Falco haliaëtus, Chelm., *loc. cit.* p. 369; *P. haliaëtus*, Keulmans, *loc. cit.*, p. 2; Dohrn, *loc. cit.*, p. 3; B. Alex., *loc. cit.*, p. 115.

N. vulg.: *Manuel Lobo* (em S. Thiago), *Minhoto?* (Chelm. e L. Lima)
Habit.: S. Thiago, S. Nicolau, Ilheo Razo e Santo Antão.

6. **Strix insularis**, Pelz.

Strix flamea, Bolle, *loc. cit.*, p. 19; Keulmans, *loc. cit.*, p. 3; Dohrn, *loc. cit.*, p. 3; *St. insulares*, B. Alex., *loc. cit.*, p. 115.

N. vulg.: *Coruja* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: S. Thiago e S. Nicolau.

7. **Halcyon erythrogaster**, Gould.

H. jagoensis, Darwin, *Voy. Beagle*, t. I, p. 2 (1839); *H. erythrogaster*, Gould, *Voy. Beagle, Birds*, 1841, p. 41; Dohrn, *loc. cit.*, p. 4; B. Alex., *loc. cit.*, p. 116; *H. rufiventris*, Bocage, *loc. cit.*, p. 134; *Dacelo rufiventris*, Keulm., *loc. cit.*, p. 1.

N. vulg.: *Passarinha* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: S. Thiago e Brava.

8. **Cypselus unicolor**, Jard.

C. murarius, Keulm., *loc. cit.*, p. 2; *C. unicolor*, Dohrn, *loc. cit.*, p. 9; B. Alex., *loc. cit.*, p. 116.

N. vulg.: *Guincho* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: S. Thiago, Brava e S. Nicolau..

---

paginação especial, de um artigo que o auctor publicou sobre as aves das ilhas de Cabo Verde e Principe, em obra que infelizmente não possuo (*Nederl. Tijdschr Dierk.*, III, 1866).

9. **Hirundo rustica, L.**

H. apus, Chelm., *loc. cit.*, p. 369; *H. rustica,* B. Alex., *loc. cit.*, p. 118.

N. vulg.: *Andorinha* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: S. Nicolau.

10. **Chelidon urbica** (L.).

Ch. urbica, B. Alex., *loc. cit.*, p. 117.

N. vulg.: *Andorinha.*
Habit.: Brava e S. Nicolau.

11. **Sylvia atricapilla,** C.

S. atricapilla, Keulm., *loc. cit.*, pp. 1, 2 e 5; Dohrn, *loc. cit.*, p. 5; B. Alex., *loc. cit.*, p. 117.

Habit.: S. Thiago, Brava, S. Nicolau, S. Vicente e Santo Antão.

12. **Sylvia atricapilla,** var. **gularis,** B. Alex.

S. atricapilla, sub-sp. *gularis,* B. Alex., *loc. cit.* p. 81.

Habit.: S. Thiago.

Esta variedade, descoberta pelo sr. Boyd Alexander em S. Thiago, differe da fórma typica por ter, tanto o macho como a femea, o mento e a parte superior da garganta d'um pardo-escuro *(umber-brown)* e tambem pelo canto, que é diverso nas notas iniciaes. Diz-nos ainda o sr. Alexander que esta variedade é sedentaria ao passo que a *S. atricapilla* sómente apparece nas ilhas de Cabo Verde em fins de feve reiro.

13. **Sylvia conspiscillata,** Temm.

S. conspicilata, Keulm., *loc. cit.*, pp. 1 e 2; Dohrn, *loc. cit.*, p. 5; B. Alex., *loc. cit.*, p. 115.

Habit.: S. Thiago, Brava, S. Nicolau, S. Vicente, Santo Antão e Boa-Vista.

14. **Calamocichla brevipennis** (Dobson).

Calamodita brevipennis, Keulm., *loc. cit.*, p. 2; *Calamoherpes brevipennis,* Dohrn, *loc. cit.*, p. 4; *Calamocichla brevipennis,* B. Alex., *loc. cit.*, p. 115.

Habit.: S. Thiago, Brava e S. Nicolau.

15. **Corvus ruficollis,** Less.[1]

C. capensis, Bolle, *loc, cit.*, p. 20; *C. corone,* Keulm., *loc. cit.*, p. 2; Dohrn, *loc. cit.*, p. 5; *C. ruficolis,* Bocage, *loc. cit.*, p. 138; *C. umbrinus*, B. Alex., *loc. cit.*, p. 115.

N. vulg.: *Corvo* (Chelm. e L. Lima).

---

[1] Lesson, *Traité d'Ornithologie,* 1831, p. 329.

Habit.: S. Thiago, Brava, S. Nicolau, Ilheo Razo, S. Vicente, Santo Antão e Boa-Vista.

Não nos parece qué possa hoje haver a menor hesitação em se reconhecer no corvo do archipelago de Cavo Verde o *Corvus ruficollis* descripto por Lesson[1] em vista de um exemplar que, segundo refere Pucheran[2], fazia parte das collecções zoologicas de Delalande existentes no Museu de Paris. Já tivemos occasião de expor extensamente, n'este mesmo jornal,[3] as razões que, a nosso vêr, justificam esta nossa opinião, e por isso nos contentaremos agora com esta breve referencia áquelle nosso artigo.

Quanto a ser ou não identico o *C. ruficollis* ao *C. umbrinus*, Sund. tambem nos reportamos ao que dissemos no citado artigo;[4] porém em todo o caso, mesmo que se queira admittir a sua identidade, deverá prevalecer, por mais antiga, a primeira das duas denominações.

16. **Passer hispaniolensis** (Temm.).

P. salicarius, Keulm., *loc. cit.*, p. 2; Dohrn, *loc. cit.*, p. 6; *P. salicicola,* B. Alex., *loc. cit.*, p. 115.

N. vulg.: *Pardal* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: S. Thiago, Brava e S. Nicolau.

17. **Passer jagoensis**, Gould.

P. erythrophrys, Keulm., *loc. cit.*, pp. 1 e 2; *P. jagoensis,* Dohrn, *loc. cit.* p. 6; B. Alex., *loc. cit.*, p. 115.

N. vulg.: *Pardal* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: S. Thiago, Brava, Ilheo Rombo, S. Nicolau, Ilheo Razo, Fogo, S. Vicente, Santo Antão e Boa-Vista.

18. **Estrelda jagoensis**, B. Alex.

E. astrild, Keulm., *loc. cit.*, p. 2; *E. cineria*, Dohrn, *loc. cit.*, p. 7; *E. jagoensis,* B. Alex., *loc. cit.*, p. 85.

Habit.: S. Thiago, Brava, S. Vicente.

Diz-nos o sr. Boyd Alexander que esta especie se assemelha á *E. astrild,* mas é d'ella distincta pelos seguintes caracteres observados no macho adulto: «A côr geral da parte superior do corpo é cinzenta, especialmente na cabeça e pescoço, sem vestigio algum de pardo-arruivado; o mento e garganta d'um branco puro, e com tenues vestigios de fachas mais escuras; na face inferior do corpo nota-se uma côr mais acizentada, com a parte média do peito e o abdomen d'um vermelho roseo desvanecido. A cauda d'um pardo-escuro, muito mais curta do que a da *E. astrild.* Dimensões em polgadas: compr. total 4,1; culmen 0,38; aza 1,9; cauda 1,8; tarso 0,6.»

---

[1] Lesson, *loc. cit.*, p. 329.
[2] Pucheran, *Rev. Mag. de Zool.*, 1853, p. 548.
[3] Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa*, t. v, 1875, p. 113.
[4] Idem, *loc. cit.*, p. 118.

19. **Pyrrhulauda nigriceps**, Gould.

P. crucigera, Keulm., *loc. cit.*, p. 2; *P. leucotis*, Bocage, *loc. cit.*, p. 141; *P. nigriceps*, Dohrn, *loc. cit.* p. 6; B. Alex., *loc. cit.*, p. 116.

Habit.: S. Thiago, Santo Antão e Boa-Vista.

20. **Alemon alaudipes** (Desf.).

Al. alaudipes, B. Alex., *loc. cit*, p. 116.

N. vulg.: *Cotovia?* (Chelm. e Lima).
Habit.: Boa-Vista.

21. **Ammomanes cinctura**, Gould.

Alauda elegans, Keulm., *loc. cit.*, p. 2; *A. cinctura*, Dohrn, *loc. cit.*, p. 5; *Ammomanes cinctura*, B. Alex., *loc. cit*, p. 116.

N. vulg.: *Calhandra?* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: S. Thiago e Boa-Vista.

22. **Spizocorys razae**, B. Alex.

Sp. razae, B. Alex., *loc. cit.*, p. 107, pl. III.

Habit.: Ilheo Razo.

Eis como o sr. B. Alexander descreve esta especie que considera nova:

«♂ ♀. Regiões superiores d'um pardo arruivado-escuro; as pennas da parte superior da cabeça e corpo d'um pardo-escuro com largas margens amarelladas. Na parte superior da cabeça as pennas prolongam-se n'uma crista curta e bem fornida; loruns esbranquiçados e faces da mesma côr com pintas escuras; pennas da região temporal de um pardo esbranquiçado mais escuro no centro; mento, garganta e um semi-collar, que termina nos lados do peito, branco tinto de ruivo com uma malha triangular castanho-escuro na extremidade de cada penna; o resto da parte inferior do corpo branco, mas os flancos pardacentos com as hastes das pennas mais escuras. Pennas das azas e da cauda d'um pardo-escuro marginadas e punctuadas de branco levemente arruivado. Bico preto, esbranquiçado na base. Iris côr de avelã. Tarsos e dedos côr de carne, tintos de pardo; unhas escuras. Dimensões: ♂ compr. total 5,84, culmen 0,65, aza 3,2, cauda 2,05, tarso 0,85. ♀ compr. total 5,34, culmen 0,6, aza 3,0, cauda 1,75, tarso 0,8.»

23. **Columba livia** (Bonn.).

C. livia, Bolle, *loc. cit.*, p. 24; Keulm., *loc. cit.*, p. 2; Dohrn, *loc. cit.*, p. 7; B. Alex., *loc. cit.*, p. 116.

N. vulg.: *Pombo* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: S. Thiago e S. Nicolau.

24. **Numida meleagris**, L.

N. meleagris, Keulm., *loc. cit.*, pp. 1 e 2; Dohrn, *loc. cit.*, p. 7; B. Alex., *loc. cit.*, p. 116; *N. rendali*, Bolle, *loc. cit.*, p. 24.

N. vulg.: *Gallinha do matto* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: S. Thiago, Fogo, S. Nicolau, S. Vicente e Santo Antão.

25. **Coturnix coturnix**, sub-sp. **capensis**, Webb. e Berth.

C. communis, Bocage, *loc. cit.*, p. 145; Keulm., *loc. cit.*, pp. 1 e 2; Dohrn, *loc. cit.*, p. 8; *C. capensis*, B. Alex., *loc. cit.*, p. 116.

N. vulg.: *Codorniz* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: S. Thiago, Brava, S. Nicolau, S. Vicente, Santo Antão e Boa-Vista.

26. **Cursorius gallicus** (Gm.).

C. gallicus, B, Alex., *loc. cit.*, p. 118.

Habit.: S. Thiago e Boa-Vista.

27. **Squatarola helvetica** (Linn.).

Sq. helvetica, B. Alex., *loc. cit.*, p. 118.

Habit.: Boa-Vista.

28. **Ægialites cantiana** (Lath.).

Æ. cantiana, B. Alex., *loc. cit.*. p. 116.

Habit.: S. Thiago, S. Vicente e Boa-Vista.

29. **Strepsilas interpres** (Linn.).

St. interpres, B. Alex., *loc. cit.*, p. 118.

Habit.: Ilheos Rombo e Razo, S. Vicente e Boa-Vista.

30. **Herodias garzetta** (Linn.).

Ardea garzetta, Keulm., *loc. cit.*, pp. 1 e 2; Dohrn, *loc. cit.*, p. 8; B. Alex., *loc. cit.*, p. 117.

N. vulg.: *Garça* (Chelm.).
Habit.: S. Thiago, S. Nicolau, Ilheo Razo, S. Vicente e Boa-Vista.

31. **Ardea purpurea**, Linn.

A. purpurea, B. Alex., *loc. cit.*, p. 118.

N. vulg.: *Garça*.
Habit.: S. Vicente.

32. **Ardea cinerea**, Linn.

A. cinerea, Keulm., *loc. cit.*, pp. 1 e 2; Dohrn, *loc. cit.*, p. 8; B. Alex., *loc. cit.*, p. 118.

N. vulg.: *Garça*.
Habit.: S. Thiago, S. Nicolau, S. Vicente e Santo Antão.

33. **Numenius arquatus**, Linn.

N. arquatus, B. Alex., *loc. cit.*, p. 118.

N. vulg.: *Maçarico real* (Chelm.).
Habit.: S. Thiago, Maio, Sal e Boa-Vista.

34. **Numenius phœopus**, Linn.

N. pœopus, Keulm., *loc. cit.*, pp. 1 e 2; B. Alex., *loc. cit.*, p. 118.

N. vulg.: *Maçarico* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: S. Thiago, S. Nicolau, Santo Antão e Boa-Vista.

35. **Totanus glottis** (Lath.).

T. glottis, B. Alex., *loc. cit.*, p. 118.

Habit.: S. Thiago.

36. **Tringoides hypoleucus** (Linn.).

T. hypoleucus, B. Alex., *loc. cit.*, p. 118.

Habit.: S. Thiago e Brava.

37. **Calidris arenaria** (Linn.).

C. arenaria, B. Alex., *loc. cit.*, p. 118.

Habit.: S. Vicente e Boa-Vista.

38. **Phœnicopterus roseus**, Pall.

Ph. ruber, Chelm., *loc. cit.*, p. 372; L. Lima, *loc. cit.*, p. 22; *Ph. antiquorum*, Keulm., *loc. cit.*, p. 10; Dohrn, *loc. cit.*, p. 8; *Ph. roseus*, B. Alex., *loc. cit.*, p. 117.

N. vulg.: *Flamengo* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: Sal e Boa-Vista.

39. **Marmaronetta angustirostris** (Menetr.).

M. angustirostris, B. Alex., *loc. cit.*, p. 117.

Habit.: Boa-Vista.

40. **Puffinus assimilis**, Gould.

P. obscurus? Bolle, *loc. cit.*, p. 29; *P. assimilis*, B. Alex., *loc. cit.*. p. 117.

N. vulg.: *Cagarra* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: Ilheos Rombo, Razo e Branco.

41. **Puffinus mariae**, B. Alex.

P. mariae, B. Alex., *loc.*, p. 108·

Habit.: Ilha Brava, Ilheo Razo.

N'estes termos se exprime o sr. B. Alexander ácerca d'esta especie que julga inedita.

«Ambos os sexos são muito semelhantes pela plumagem ao *P. Kuhli*, mas a parte superior da cabeça e pescoço são muito mais escuros, d'um cinzento fuliginoso. As dimensões tambem são muito menores, sendo especialmente o bico visivelmente mais curto e mais delgado.

«♂ ad. compr. total 17,4, culmen 1,7, aza 11,8, cauda 4,9 tarso 1,8, dedo médio com a unha 2,3.»

42. **Oceanodroma crystoleucura** (Ridgw).

O. crystoleucura, B. Alex., *loc. cit.*, p. 117.

Habit.: Ilheo Rombo.

Talvez deva referir-se a esta especie, um exemplar em mau estado de conservação, colhido no Ilheo Razo e offerecido ao Museu pelo nosso amigo dr. Hopffer, exemplar que em tempo referi em duvida ao *O. leucoroa.* [1] Não posso infelizmente hoje, privado quasi inteiramente da vista, proceder a novas averiguações a tal respeito.

43. **Pelagodroma marina** (Lath.)

P. marina, B. Alex., *loc. cit.*, p. 117.

Habit.: Ilheo Rombo.

44. **Rissa tridactyla** (Linn.).

R. tridactyla, B. Alex., *loc. cit.*, p. 117.

N. vulg.: *Gaivota* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: Ilha Brava.

45. **Sula fiber**, Linn.

S. fiber, Keulm., *loc. cit.*, pp. 1 e 2; B. Alex., *loc. cit.*, p. 117; *Dysporus sula*, Dohrn, *loc. cit.*, p. 117.

Habit.: S. Thiago, Brava, Ilheo Rombo, S. Nicolau, Ilheo Razo, S. Vicente, Santo Antão e Boa-Vista.

---

[1] Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa*, t. v, 1875, p. 119.

46. **Phalacrocorax lucidus** (Licht).

Pelecanus carbo, Chelm., *loc. cit.*, p. 374; *Ph. lucidus,* B. Alex., *loc. cit.*, p. 117.

N. vulg.: *Corvo marinho* (Chelm.).
Habit.: S. Nicolau, Ilheo Razo e Boa-Vista.

47. **Fregata aquila** (Linn.).

Pelecanus fregata, Chelm., *loc. cit.*, p. 374; L. Lima, *loc. cit.*, p. 22; *Tachypetes aquila,* Bocage, *loc. cit.*, p. 150; Keulm., *loc. cit.*, pp. 1 e 2; *Fr. aquila,* B. Alex., *loc. cit.*, p. 117.

N. vulg.: *Rabo-forcado* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: S. Thiago, S. Nicolau, S. Vicente, Santo Antão e Boa-Vista.

48. **Phaethon æthereus** (Linn.).

Ph. æthereus, Chelm., *loc. cit.*, p. 374; L. Lima, *loc. cit.*, p. 22; Bolle, *loc. cit.*, p. 29; Dohrn, *loc. cit.*, p. 8; B. Alex., *loc. cit.*, p. 117; *Ph. candidus,* Keulm., *loc. cit.*, p. 2.

N. vulg.: *Rabo de junco, Rabi-junco* (Chelm. e L. Lima).
Habit.: S. Thiago, S. Vicente, ilheos Rombo e Razo.

No numero de abril do *Ibis,* que acabo de receber, depara-se-me um segundo artigo do sr. Boyd Alexander, sobre a ornithologia de Cabo Verde, contendo os resultados de ulteriores investigações ácerca das epochas em que algumas aves alli se reproduzem, dos locaes que escolhem para os ninhos, do numero de ovos de que consta cada postura, etc. Diz-nos mais o sr. Boyd Alexander que, n'uma visita que fizera em outubro de 1897 a algumas ilhas do grupo oriental, Sal, Boa Vista e Maio, notara n'essas ilhas, e bem assim em S. Nicolau e Ilheo Branco, a affluencia de muitas aves de arribação, algumas representadas por bastantes individuos, e merecendo-lhe especial menção duas especies novas para a fauna d'aquelle archipelago, a *Saxicola œnanthe,* Lath. e *Eurystomus afer,* Linn.

Eis, pois, mais duas especies a incluir na lista das aves de Cabo Verde.

REPTIS DE TIMÔR NO MUSEU DE LISBOA

POR

J. BETHENCOURT FERREIRA

O conhecimento das faunas insulares continúa sendo de grande interesse para os zoologistas, o que nos leva a publicar juntamente alguns apontamentos que tomámos sobre alguns exemplares de reptis capturados pelo sr. Newton. Comquanto a fauna de Timôr não diversifique consideravelmente da fauna regional a que pertence, julgamos de alguma curiosidade apresentar o resultado da enumeração e do estudo d'estes exemplares, a fim de contribuir pelo nosso lado para o estudo d'esta região longiqua, cujos productos naturaes nos parece não terem sido completamente estudados e que poderão deixar ainda assumpto para trabalhos scientificos.

É apenas uma modesta tentativa o que agora apresentamos, a proposito de dar a lista das especies colhidas pelo explorador portuguez, que ultimamente e em más condições, luctando com a doença e proximo do theatro de guerras com os naturaes, poude ainda assim realisar uma grande collecção, muito curiosa.

Tryonix sinensis, var. **newtoni**, n. var.

No n.º XVIII, 2.ª serie, do *Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes*, tivemos occasião de dar alguns caracteres indicativos de uma tartaruga de Timôr, a qual, na impossibilidade de bem a determinarmos, por isso que tinhamos á nossa disposição um só exemplar, incompletamente adulto, e falta de exemplares de comparação, referimos provisoriamente á *Tr. cartilagineus*, Bodd., de cujo typo nos pareceu approximar-se, pela conformação geral, pela fórma e dimensões da cabeça, da casca e do plastrão e tambem pela localidade de procedencia.

Um exame mais attento, em presença de indagações bibliographicas mais extensas e detidas, permitte-nos hoje assegurar melhor a determinação d'essa fórma que nos tinha posto em duvida.

De facto, a côr muito escura da pelle do dorso e as largas manchas do plastrão, distinguem-n'a á primeira vista da *T. cartilagineus,* com que a principio haviamos comparado o exemplar de Timôr, ultimamente trazido pelo sr. Newton.

Pelas dimensões do focinho, pela predominancia do diametro antero-posterior da casca e pela curvatura semi-circular do bordo posterior do plastrão, além das largas manchas que povoam o dorso e mais notavelmente a pelle das regiões inferiores, a tartaruga de que tratamos deve pertencer á *T. sinensis,* Wiegm, da qual nos parece comtudo diversificar por certos pormenores, constituindo, pelo menos, uma variedade local, para distinguir a qual propomos a designação acima.

As proporções da cabeça e do focinho são effectivamente as da ultima especie referida, mas as placas costaes differem um pouco da descripção dos auctores, por isso que são menos crivadas do que é vulgar n'esta especie e suas congeneres, além de serem mais intimamente unidas ás neuraes. O ultimo par de costaes é muito menos comprido e mais estreito do que os outros pares. As neuraes são estreitas e intimamente suturadas. O focinho é um terço mais comprido do que o diametro da orbita. Embora pareça tratar-se de um exemplar quasi adulto, a ausencia de callosidades no plastrão é completa, contrariamente á descripção que indica callosidades bem desenvolvidas n'esta região no adulto e além d'isso lavores nas peças do plastrão, o que o nosso exemplar não apresenta. As saliencias espinhosas da casca são muito pronunciadas.

A côr fundamental nas regiões superiores é, como tinhamos indicado anteriormente, um verde azeitonado escuro, ardosiado, com manchas negras espalhadas, mas não perfeitamente ao acaso, por isso que se dispõem em curvas concentricas. Á luz directa e no alcool estas manchas desenham-se perfeitamente, e apresentam-se cercadas de um fino reticulo que vae anastomosar-se com o das manchas proximas. As manchas amarelladas sobre fundo escuro existentes no pescoço são profusas e irregulares na região gular e confluem em faxas na parte posterior e inferior do pescoço.

As manchas negras triangulares nas regiões inferiores são largas e bem esboçadas assim como aos lados da cauda e na parte posterior das coxas. A superficie inferior da parte posterior da casca é marmoreada de negro, assim como as superficies inferiores das patas.

Comparando o nosso exemplar com as estampas de Gray, *Cat. of Schield Reptiles,* vê-se que elle se assimelha por um lado á especie *sinensis (T. perocellatus,* Gray), e por outro á *T. cartilagineus (T. cariniferus,* Gray), porquanto, sendo pela face superior identico á *T. sinensis,* pela sua fórma e desenhos, destaca-se muitissimo d'esta fórma pela ausencia das callosidades do plastrão, que se notam em individuos d'esta especie de eguaes dimensões. De modo que temos em presença uma trionyx cuja cabeça côr fundamental e desenhos são caracteristicos da *T. sinensis,* e cuja casca e plastrão pelas suas dimensões e pela ausencia de callosidades, fórma, disposição e concordancia das peças do plastrão se approxima mais da *T. cartilagineus.*

Portanto suppomos ter razão para admittir, ao menos por hypothese, que o exemplar de Timôr seja o representante de uma variedade local, que revela a transição entre as duas especies de confronto e naturalmente affins.

Esperamos ainda outros exemplares e novas informações e documentos para esclarecer este assumpto.

Sobre a distribuição geographica d'esta tartaruga ha a notar que ella differe bastante da attribuida á *T. sinensis,* cujo habitat é a China e o Japão e o exemplar cujos caracteres descrevemos foi encontrado na ilha de Timôr, sem que pelos seus habitos ou pela sua importancia de qualquer ordem, haja indicio do modo como se operasse a sua emigração, sabendo-se que esta especie, pelo menos em Timôr, vive nos rios, lagôas e quando muito nas aguas salobras.

Os caracteres que fazemos notar e a procedencia d'este exemplar manteem no nosso entender, ainda á falta de mais e melhores documentos e sobretudo de mais exemplares, a crença de que se possa referir esta tartaruga a uma nova especie intermediaria á *T. cartilagineus,* cujo habitat é mais proximo do nosso exemplar, e á *T. sinensis,* com a qual tem grande semelhança.

SAURIOS

Crocodilus porosus, (Schud), juv. Batugadé, (Newton).

Dizem que tambem se encontra nas lagôas de Tibár. É muitas vezes arrojado ao mar com as enxurradas. Sobre esta especie existe no paiz uma lenda um tanto curiosa, á qual E. Reclus se refere e que o sr. Newton teve occasião de conhecer.

Outr'ora os principes de Kepang pretendiam ser descendentes d'este crocodilo. Diz a lenda que, quando um novo soberano subia ao throno, os seus subditos precipitavam-se á beira mar para cumprimentar os saurios parentes. O primeiro d'estes que apparecia era o primo do rei e davam-lhe como esposa uma joven bella, adornada e perfumada, que o saurio devorava com grande applauso da multidão.

Varanus timoriensis, (Gray), ad. et juv. Timôr. G. Capello, Rafael das Dôres, Liquiça, Lahane, Fatunaba e Manbara. (Newton).

Esta especie muito abundante serve de alimento para algumas tribus. Vive no solo, em buracos. O maior exemplar visto pelo sr. Newton tinha-se installado na alma de uma peça de artilheria inutilisada da bateria de Dilly. Media cerca de dois palmos (Newton).

Gecko verticillatus, Laur. ♂ ♀ ad. et juv. Timor. (G. Capello, Raphael das Dôres), Manbara, Dilly, Fatunasse. (Newton).

É abundantissimo na ilha em todas as localidades, nas arvores e nas habitações. Tem na lingua indigena o nome vulgar de *Tokè*, denominação onomatopaica que provém do grito que o animal solta a miudo, primeiro com força, depois diminuindo progressivamente. É insectivoro. Defende-se ferozmente.

Hemidactylus frenatus, D. B. ♂ ♀ ad. Fatunaba, Aipello (littoral), habita nas casas, (Newton, Raphael das Dôres).

Draco timorensis, Kutl. ♂ ♀ Dilly.

Ablepharus boutoni, Desjard, var., *peroni*, Coct. Timôr, (Newton), raro.

OPHIDIOS

Liasis fuscus, Petrs. sem. ad.

Os indigenas dão a esta cobra o nome de *cobra madeira*. É vulgar, sobretudo nas proximidades de Dilly e attinge grandes dimensões.

L. Mackloti, D. B. ad. (Newton).

É provavel que lhe seja applicada pelos indigenas a mesma designação.

Lycodon aulicus, L. ad. var. *D*, Boulgr.
Museu Colonial e Rafael das Dôres (1882).

É muito vulgar e encontra-se tambem nas habitações, onde os colonos a temem por julgarem ser uma vibora (?) (Newton).

Coluber melanurus, Schl. var. *timoriensis*, n. var. ad. e adolesc. Deribate e de localidade incerta (Newton).

Com esta designação descrevemos em resumo, no n.º XVIII, da 2.ª serie do *Jornal de Sciencias Mathematicas, Physicas e Naturaes*, uma variedade de cobra, da qual ultimamente podemos estudar mais alguns exemplares, do exame dos quaes fomos levados a concluir a existencia de representantes na ilha, de duas variedades locaes d'esta cobra; uma, que effectivamente se refere na apparencia e nos seus caracteres principaes áquella especie, como typo original, a nosso vêr, das especies que lhe ficam proximas na classificação *(C. radiatus, C. C. erythrurus)*, e outra, que mais se differença d'aquelle typo e que se relaciona provavelmente com a *C. subradiatus,* Schl. que é propria de Timôr.

Distinguimol-as pelas seguintes diagnoses:

Variedade *timoriensis.*

Rostral um terço mais larga do que alta; 9 labiaes superiores, fazendo a 4.ª, 5.ª e 6.ª ou só a 5.ª e a 6.ª parte da orbita; 11 labiaes inferiores, uma ou duas sub-oculares, entre a 3.ª e a 4.ª lab. super.; duas oculares posteriores e a seguinte formula de temporaes 2 + 2 + 3. Escamas do dorso em 21 — 23 ordens, sendo as centraes medio-carenadas. Gastrostegios largos, angulosos, em numero de 237; anal simples, sub-caudaes duplas, sem carenas, em numero de 96.

A côr é geralmente escura, pardacenta suja, ou terrosa, mais carregada no dorso, onde se destacam, na primeira posição, duas faxas de cada lado, estreitas, negras, esbatendo-se no meio do dorso. Duas pequenas faxas flexuosas da região temporal descem pela commissura labial e existe uma mancha quadrangular negra logo atraz do olho. O centro das placas ventraes é mais escuro do que os angulos e as extremidades são egualmente escuras, formando aos lados do ventre uma longa e continua faxa.

Na outra fórma, que suppomos referir-se á *C. subradiatus,* a rostral é muito mais larga do que alta; temporaes 2 + 3; uma sub-ocular; 9 labiaes superiores (5.ª e 6.ª na orbita); escamas no meio do tronco em 23 — 27 ordens, medio-carenadas; ventraes 252, sub-caudaes 98 — 100.

A côr das regiões superiores é mais avermelhada e clara do que na variedade precedentemente descripta. As mesmas faxas aos lados da cabeça, mas muito mais estreitas e pronunciadas, continuadas no dorso por duas ordens lateraes de manchas negras, em reticulo, formado entre os bordos justapostos das escamas, espaçando-se e desapparecendo na ultima porção do corpo. As regiões ventraes são completamente amarellas e desprovidas de manchas.

Da divergencia bem apparente d'estas duas variedades, concluimos nós a existencia de duas especies distinctas de cobra, das quaes uma, a *C. melanurus timoriensis,* nova para a ilha e a outra, *C. subradiatus,* Schl., representada pela variedade ainda mal definida que acabamos de descrever.

Dendrophis pictus, (Boie).

Não é frequente, (Newton).

Cerberus rynchops, (Schnd.).

Nome indigena — *Cacàsse.* — É muito abundante nos logares alagados e com arvoredo *(coilões)* e vulgar em toda a ilha, Bidau (Newton).

Chersydrus granulatus, ad. Dilly.

É rara. O sr. Newton apanhou apenas um exemplar.

Cantoria violacea, Girard, ad. Timôr (Rafael das Dôres, Newton).

É rara. Foram capturados só dois individuos.

Platurus colubrinus, (Schnd.), s. m. ad. Dilly, beira mar (Newton).

Lachesis gramineus, (Shaw.), juv. Aipello, (Newton, por intermedio do alferes Alberto Carlos).

Os colonos dão a esta cobra o nome de *cobra verde*. Esta especie é muito abundante em toda a ilha, principalmente na zona littoral.

NOTICIA SOBRE UMA NOVA ESPECIE DO GENERO «CYNONYCTERIS» E ANNOTAÇÃO DAS ESPECIES D'ESTE GENERO QUE EXISTEM NAS COLLECÇÕES DO MUSEU NACIONAL DE LISBOA

POR

A. F. DE SEABRA

Além das especies de *Pteropus* que ha pouco descrevi n'uma noticia publicada no precedente numero d'este jornal, na sua maior parte provenientes da exploração do sr. F. Newton á ilha de Timor, encontrei duas outras do genero *Cynonycteris,* uma das quaes creio poder considerar como nova especie.

Eis as conclusões que me levam a vêr no presente exemplar um novo typo d'este genero, particular talvez á fauna de Timor.

A idéa emittida pelo illustre director do Museu de Lisboa, de tomar como um dos caracteres proprios á determinação das especies do genero *Cynonycteris,* o numero e a fórma como se acham dispostas as pregas do paladar d'estes animaes, deixa, a meu vêr, de ser um simples caracter secundario como alguns naturalistas estrangeiros parece terem-n'o considerado e passa a ser a base de uma classificação segura, methodica e clara.

Infelizmente algumas especies d'este genero não existem nas collecções do museu; comtudo, além dos dois exemplares de Timor pude reunir na estampa que junto a esta noticia, o desenho do paladar de cinco especies africanas, já estudadas e descriptas pelo professor Barboza du Bocage.

A nova especie timoriense a que me refiro, assemelha-se á primeira vista á *Cynonycteris amplexicaudata* de Peters, porém, esta semelhança é apenas apparente. Pondo logo de parte a desproporção que existe entre as dimensões de um e outro exemplar, observei que na *C. amplexicaudata* a cabeça é longa e estreita, ao passo que na nova especie se apresenta curta e larga. Esse caracter exterior ficou posto em evidencia logo que dissecando o craneo de uma e outra especie pude observar as differenças osteologicas que existem entre os dois individuos, como se pode vêr nas figuras 10 e 11 da estampa I. Quanto ás pregas do paladar, de um e outro individuo, não differem tanto entre si como cada uma d'ellas pode differir das da *C. collaris,* Peters, por exemplo, comtudo seria bem difficil confundil-as.

Além das alterações produzidas pelo alargamento dos maxillares superiores na nova especie, observei que na região inter-orbitaria posterior, a abobada palatina vem a estreitecer rapidamente para a abertura pharyngiana, ao passo que na *C. amplexicaudata*, fórma uma cintura, terminando tão larga como no espaço inter-maxillar; creio por conseguinte não poder confundir estas duas especies.

Duas outras especies são ainda citadas como proprias das regiões austro-indianas: a *C. minor*, Dobson, de Java e a *C. brachiotis,* Dobson, da Nova Irlanda. Nem uma nem outra se acha representada nas collecções do Museu. Estabelecerei pois os termos de comparação apoiando-me sobre as descripções dadas por Dobson no catalogo de Chiropteros do *Britisch Museum.*

Na impossibilidade de me referir ao numero e disposição das pregas do paladar d'estas especies, por isso que Dobson não fez attenção a esse caracter, limitar-me-hei a comparar os caracteres externos e dentares apresentados pelo naturalista britannico. Vejo assim que o exemplar que estou estudando se afasta da *C. minor* pelas suas dimensões e pelo modo de inserção do primeiro pre-molar, que se encontra livre entre o canino e o segundo pre-molar, ao passo que na *C. minor* está opprimido entre estes dois dentes. A *C. amplexicaudata* tem tambem, como o exemplar em estudo, o primeiro pre-molar livre no meio do canino e do segundo pre-molar.

Quanto á *C. brachiotis* podia principiar por dizer que pelo facto de se assemelhar á *C. minor* se afasta da especie timoriense, mas observando melhor a descripção de Dobson, acrescentarei que a nova especie em estudo é representada por um individuo ♂ perfeitamente adulto e por um craneo d'outro, tambem adulto, nos quaes contrariamente á *C. brachiotis,* o primeiro pre-molar superior se acha bem fixo aos maxillares e, comquanto pequeno, não é menor do que os das outras especies do presente genero.

São estas as especies que Dobson cita como provenientes das regiões mais proximas de Timor.

Passarei agora em revista as especies africanas, admittindo assim a maxima expansibilidade da area de distribuição geographica das *Cynonycteris.*

Cynonycteris ægyptiaca, Peters.

Existe na collecção geral do Museu um ♂ da Syria comprado a Verreaux. Destingue-se immediatamente da especie timoriense pelas dimensões, pela fórma da cabeça, pelo comprimento da cauda e finalmente pela côr. O exemplar, achando-se preparado a secco, não permitte a confrontação pelas pregas do paladar.

Cynonycteris collaris, Peters.

Um grande numero de individuos d'esta magnifica especie foram ainda enviados da Africa occidental pelo malogrado naturalista viajante José de Anchieta e cuidadosamente estudados pelo illustre director do Museu de Lisboa. Como se pode vêr na descripção que adeante dou da nova especie de Timor, não existem entre este ultimo e a presente especie, caracteres communs a não ser os genericos (Paladar, est. I, fig. 14).

Cynonycteris angolensis, Bocage.

Especie estudada e descripta pelo professor Barboza du Bocage; é caracterisada por uma colleira de pellos approximadamente da mesma côr dos do dorso e ventre, afastando-se por isso da especie de Timor. (Paladar, est. I, fig. 9).

Cynonycteris torquata, Dobson.

Não existe no Museu nenhum exemplar d'esta especie que segundo a descripção de Dobson se assemelha alguma coisa á *angolensis,* afastando-se por conseguinte da especie em estudo.

Cynonycteris straminea (Geoffroy).

Um verdadeiro gigante do genero; além de um magnifico exemplar preparado a secco (♀ ad. Nubia) comprado a Verreaux, o Museu possue uma serie de individuos modernamente adquiridos e estudados pelo professor Barboza du Bocage. Vêmos nas dimensões, côr do pello e pregas do paladar, quanto esta especie varía da timoriense. (Paladar, est. I, fig. 13).

Cynonycteris dupressa, Peters.

Proprio á fauna de Madagascar, assemelha-se á *straminea.* Esta especie não se acha representada nas collecções do Museu.

Cynonycteris grandidieri, Peters.

Vive em Zanzibar. Além dos caracteres externos a dentição differe por completo da da especie em estudo. (Falta nas collecções do Museu).

Emfim, a *Cynonycteris brachicephala,* descripto e estudada pelo professor Barboza du Bocage, differe nas dimensões, na côr e particularmente na fórma do craneo como se pode vêr na fig. 7, est. 12.

*

* *

Após as presentes considerações, creio poder formar com o individuo de que tenho particularmente tratado n'esta noticia, uma nova especie do genero *Cynonycteris*, a qual dedico ao sabio naturalista e illustre director do Museu de Lisboa, dr. Barboza du Bocage, tentando assim mais uma vez prestar-lhe homenagem ao seu profundo saber e superior criterio.

Cynonycteris Bocagei.

Um ♂, Timor (Dyli), e um craneo da mesma região (sr. F. Newton).

Focinho notavelmente curto, conico; orelhas grandes tendo os bordos parallelos na base, convergentes para a ponta; de um e de outro lado do pescoço, abaixo da orelha e no prolongamento dos maxillares inferiores, dois tufos de pellos rigidos e amarellos recobrindo decerto quaesquer glandulas.

O pello na cabeça e pescoço é fino e pouco abundante; no dorso curto e acamado; no peito e ventre lanoso; em volta do corpo, pela parte inferior da membrana das azas e seguindo o antebraço, pouco annelado e longo; e na membrana inter-femural, pouco abundante excepto na região propriamente caudal. A membrana inter-femural mede apenas 3 a 4 millimetros junto á base da cauda, passando pela parte superior d'esta que mede perto de 2 centimetros. As pernas na região tibial, são pela parte inferior, nuas, pela parte superior revestidas até perto da articulação do pé. O antebraço é revestido apenas na base.

Cabeça e pescoço cinzento claro, um pouco amarellado sobre o peito e ventre, escuro sobre o dorso.

Primeiro pre-molar superior, pequeno e ao meio do espaço comprehendido entre o canino e segundo pre-molar; molares proeminentes; incisivos dispostos com regularidade.

As pregas do paladar (est. I, fig. 11) comquanto semelhantes ás da *C. amplexicaudata* (est. I, fig. 10) como tive já occasião de notar, differem particularmente na disposição das pregas compostas [1] as quaes fórmam um angulo mais obtuso do que na especie que tomei como termo de comparação; a primeira, termina nas duas especies, na parte an-

---

[1] A fim de tornar mais facil e clara a descripção das pregas do paladar nas differentes especies de Chiropteros a que tiver de me referir, passo a dividil-as em tres categorias: as primeiras, que atravessam sem interrupção o paladar, denomino-as *pregas simples;* as segundas em geral convergentes, interrompidas no meio, e mais ou menos denticuladas, *pregas compostas;* emfim, as ultimas não interrompidas e finamente denticuladas, *pregas basilares.*

terior do ultimo molar; a segunda, na *C. Bocagei,* rodeia a parte posterior d'este dente, ao passo que na *C. amplexicaudata,* passa muito além d'esse ponto; a terceira é semelhante nas duas especies. Quanto á basilar fórma talvez um angulo mais agudo na nova especie. O espaço comprehendido entre a ultima prega simples e a basilar é inferior na *C. Bocagei* ao da *C. amplexicaudata.*

Como se vê nas figs. 10 e 11 da est. I, o craneo da *C. Bocagei,* é mais largo e as arcadas zygomaticas sensivelmente mais convergentes do que na outra especie.

No mappa abaixo inscripto podem-se apreciar as dimensões da nova especie e a relação que existe n'estes caracteres entre a especie citada e as duas outras, *amplexicaudata* e *ægyptiaca.*

		C. Bocagei	*C. amplexicaudata*	*C. aegyptiaca*
Cabeça e corpo		$14^{cm},0$	$12^{cm},5$	$12^{cm},0$
Cauda		2 ,0	1 ,75	1 ,5
Cabeça		3 ,6	4 ,12	4 ,0
Do olho á extr. do focinho		1 ,2	1 ,5	1 ,5
Orelha		1 ,7	1 ,87	2 ,0
Ante-braço		8 ,5	8 ,3	8 ,0
Pollegar		2 ,3	2 ,5	3 ,37
2.º dedo		4 ,9	–	–
3.º dedo	metacarpo	5 ,1	5 ,2	5 ,0
	1.ª phalange	3 ,4	3 ,5	3 ,5
	2.ª phalange	4 ,6	4 ,6	4 ,5
5.º dedo	metacarpo	5 ,0	4 .7	4 ,7
	1.ª phalange	2 ,2	2 ,5	2 ,5
	2.ª phalange	1 ,9	2 ,5	2 ,3
Tibia		3 ,8	3 ,7	3 ,0
Pé		1 ,8	2 ,1	2 ,4

As dimensões das duas especies *amplexicaudata* e *ægyptiaca* são extraidas do catalogo de Chiropteros de Dobson.

*

* *

A outra especie adquirida tambem modernamente pelo Museu, é já conhecida e descripta como fazendo parte da fauna de Timor, é a

Cynonycteris amplexicaudata, Peters.

Um ♂ e uma ♀ adultos, Timor (Dyli), sr. F. Newton, 1897.
Estes dois individuos não offerecem nada de particular entre si.

NOTA.—Importancia dos caracteres tirados das pregas do paladar para a determinação das especies do genero «Cynonycteris».

Das observações que tenho feito sobre a fórma e numero das pregas do paladar nas differentes especies do genero *Cynonycteris,* caracter sobre o qual o professor Barboza du Bocage já tinha baseado em parte a classificação de algumas especies d'este genero, posso concluir o seguinte: as pregas do paladar nas especies que fórmam o genero *Cynonycteris,* acham-se assim dispostas—quatro simples, mais ou menos curvas e parallelas entre si; tres compostas, em geral convergentes e denticuladas e de uma até quatro basilares, finamente denticuladas.

Uma excepção se acha aberta com a nova especie, *C. angolensis,* Bocage, e, por informação directa que tenho de Londres, com as duas outras *Torquata* e *Ægyptiaca* em que as pregas simples são em numero de tres, ao passo que as compostas são quatro. É de crer que se na continuação dos estudos feitos sobre este genero da familia *Pteropodidæ* forem encontradas outras especies assim caracterisadas, se tome esta anomalia para a formação de um sub-genero.

Se para a determinação das especies, este caracter pode ser ainda submettido a discussões para a determinação dos generos, é, como espero provar n'uma proxima noticia, de uma precisão indiscutivel.

SOBRE A DETERMINAÇÃO DOS GENEROS DA FAMILIA PTEROPODIDÆ FUNDADA NOS CARACTERES EXTRAHIDOS DA FÓRMA, DISPOSIÇÃO E NUMERO DAS PREGAS DO PALADAR, E LISTA DAS ESPECIES D'ESTA FAMILIA, EXISTENTES NAS COLLECÇÕES DO MUSEU DE LISBOA

POR

A. F. DE SEABRA

Tratando da especie da *Cynonycteris Bocagei,* e seguindo as idéas do illustre director do museu, tive occasião de me referir repetidas vezes á importancia dos caracteres extrahidos da fórma e disposição das pregas do paladar, na determinação generica e especifica do grupo *Pteropi;* em consequencia porém da fórma bastante incompleta como alguns generos do referido grupo se acham ainda representados nas collecções, torna-se-me impossivel n'este momento chegar a quaesquer conclusões geraes e bem fundamentadas, sobre este novo systema da classificação natural dos *Pteropodideos,* que se poderá talvez generalizar por toda a ordem *Chiroptera.*

Comtudo, das ultimas observações, posso concluir que: — no genero *Epomophorus,* a disposição e a fórma das pregas do paladar nas differentes especies, variam com estas de uma fórma tão sensivel (Est. I, figs. 1, 2 e 3), que só por si constituem a base de uma classificação precisa e clara. — Nos *Pteropus,* o paladar (Est. I, figs. 4 a 8) torna-se caracteristico pela regularidade e persistencia do numero das suas pregas, sendo cinco simples, cinco compostas e tres basilares. Em onze paladares differentes que pude observar, só um, que creio ser do *Pt. Temminckii* (Est. I, fig. 5), apresenta duas ordens de pregas basilares em logar de tres.

Devo ainda notar que n'estes paladares, pertencendo a especies differentes, existem em relação ao numero, natureza e situação das pregas, differenças tão sensiveis como as que se observam nos appendices nasaes de certas especies de *Microchiropteros, (Rhinolophideos,* etc.) — Nas *Cynonycteris,* as pregas do paladar (Est. I, fig. 9 a 14) das especies que tenho observado, são apenas em numero de oito a onze sendo, quatro simples, tres compostas e de uma a quatro basilares; ou tres simples, quatro compostas e de uma a quatro basilares.

Entre as especies, existem differenças da mesma natureza das que se observam nos *Pteropus*.— Nos *Cynopterus*, (Est. I, figs. 15 a 17), as pregas simples e compostas, succedem-se parallelas e mais ou menos convergentes, separadas umas das outras, apenas por um pequeno sulco. Em alguns casos as primeiras são troncadas; as compostas, raras vezes são divididas e o seu aspecto torna-se analogo ao de uma serie de pequenos escudos sobrepostos. São separadas das basilares por um grande espaço. As basilares são dispostas geralmente em duas linhas interrompidas e denticuladas; conto, ao todo, treze pregas.

Dos *Cephalotes* não me foi possivel ainda observar nenhum paladar devidamente conservado.

Em resumo poderei formar o seguinte mappa, reunindo como auxiliar a este caracter, as formulas dentares.

ORDEM MEGACHIROPTERA

FAM. PTEROPODIDÆ

Grupo PTEROPI

A.— Disposição e fórma das prégas do paladar, irregular; numero variavel; dentição: $I.\frac{4}{4}\Big|\frac{2}{4}\ C.\frac{1}{1}\ P.\ m.\frac{2}{3}\ M.\frac{1}{2}$ — genero **Epomophorus**. (Est. 1, figs. 1 a 3).

B.— Disposição e fórma das pregas do paladar, regular; numero constante, 13; sendo: 5 simples, 5 compostos e 3 basilares (raras vezes, duas); dentição: $I.\frac{4}{4}\ C.\frac{1}{1}\ P.\ m.\frac{3}{3}\ M.\frac{2}{3}$ — genero **Pteropus**. (Est. I, figs. 4 a 8).

C. Disposição e fórma das pregas do paladar, regular; numero maximo, 11; sendo: 4 simples, 3 compostas, e uma a quatro basilares; ou, 3 simples, 4 compostas e uma a quatro basilares; dentição: $I.\frac{4}{4}\ C.\frac{1}{1}\ P.\ m.\frac{3}{3}\ M.\frac{2}{3}$ —genero **Cynonycteris**. (Est. I, figs. 9 a 14).

D.— Disposição e fórma das pregas do paladar variavel *mas regular:* numerosos, as compostas com o caracter de pregas simples; as basilares dispostas em duas linhas interrompidas e denticuladas; dentição: $I. \frac{4}{4} \Big| \frac{4}{2} C. \frac{1}{1} P. m. \frac{2}{3} M. \frac{2}{2}$ —genero **Cynopterus**. (Est. 1, figs. 15 a 17).

*

* *

Nas collecções do Museu de Lisboa encontram-se actualmente as seguintes especies do grupo *Pteropi*.

1. **Epomophorus monstrosus**, (Allen).

Hypsignathus monstrosus, Allen. *E. monstrosus*, Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 6, pl. II, fig. 1; Bocage, *Jorn Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, t. IV, p. 4 e T. V da 2.ª serie, p. 135; *Spyrocephalus labrosus*, Murray.

Um ♂ e uma ♀ da ilha de *Fernando do Pó*, (Newton).

2. **Epomophorus macrocephalus**, (Ogilby). (Est. I, fig. 2).

Pteropus macrocephalus, Ogilby e Swainson; *Pt. epomophorus*, Bennett; *Ep. whitei*, Bennett; *Ep. macrocephalus*, Tomes, Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 8, pl. II, fig. 2; Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, t. V, p. 136.

Duas femeas em mau estado; um esqueleto e um craneo em alcool; *Bolama*, (Barahona).

3. **Epomophorus Dobsonii**, Bocage.

E. Dobsonii, Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, t. I, p. 2, fig. 1 (paladar); ibid., p. 14, e t. V da 2.ª serie, p. 136, fig. 2 (paladar).

Dois individuos machos de *Quimdumbo;* uma femea de *Galanga;* uma femea de *Hanha* e dois craneos em alcool, (Anchieta).

4. **Epomophorus gambianus**, (Ogilby). (Est. I, fig. 1).

Pt. gambianus, Ogilby; ? *Pt. wahlbergii*, Sundevall; *E. crypturus*, Peters; *E. gambianus*, Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 10, pl. II, fig. 3; Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, t. I, p. 2 e 14; t. V, p. 136.

Um grande numero de individuos dos dois sexos provenientes de *Rio Quilo, Pungo-Andongo. Benguella, Ambaca, Caconda, Quissange* e *Quindumbo,* (Anchieta); dois de *Angola,* (Toulson).

5. **Epomophorus guineensis**, Bocage.

E. gambianus? Bocage, *Jorn. Ac. Se. Lisboa*, 2.ª serie, t. I, p. 2 e 3, fig. 2 (paladar); t. V, p. 136, fig. 3 (paladar).

Um ♂ ad. de *Bolama,* (Barahona).

6. **Epomophorus crypturus**, (Peters).

E. crypturus, Peters, Reis nach Mossambique, t. I, p. 26, pl. XIII, figs. 1 a 6; Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, t. I, p. 4 e t. V, p. 136.

Uma ♀ de *Moçambique* (Costa Soares); craneo em alcool.

7. **Epomophorus minor**, Dobson.

E. minor, Dobson, Proc. Zool. Soc. London, 1879, p. 715; Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, t. I, p. 4 e t. V p. 137.

Um ♂ de *Zanzibar*. (Dobson).

8. **Epomophorus pusillus**, Peters.

E. pusillus, Peters, M. B. Akad. Berlim 1867, p. 870; *Jorn. Ac. Sc. Lisboa*, t. III, 1870, p. 123; Bocage, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, t. I, p. 15 e t. V, p. 137. Dobson, Cat. Chirop. B. Mus., p. 14. *E. schoensis*, Tomes.

Um ♂ de *Galanga* (Toulson); craneo em alcool.

9. **Epomophorus**, n. sp. (Est. I, fig. 3, paladar ampliado).

Uma ♀ de *Galanga*, Angola, (Anchieta).

10. **Pteropus pselaphon**, Say.

Pt. pselaphon, Say; Temminck, Mon. des Mamm. II, p. 70 (1836-1841); Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 26; Seabra, *Jorn. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, n.º XVIII (1897), p. 123; *Pt. ursinus*, Kittlize; *Pselaphon ursinus*, Gray.

Um ♂ jov., *Timor*, Sr. Fr. Newton (1897).

11. **Pteropus vetulus**, Jouan.

Pt. vetulus, Jouan; Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 27; *Pt. ornatus*, Gray.

Uma ♀ da *Nova Caledonia*, Verreaux; iden, Mus. de Paris (1882), uma ♀ var., patria? Hanckor (1883).

12. **Pteropus polyocephalus**, Temm.

Pt. poliocephalus, Temm. Monogr. des Mamm. I, p, 179 (1897); Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 31; Seabra, *Journ. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, n.º XVIII (1897), p. 119.

Uma ♀ jov., *Timor*, (Dilly). Sr. Fr. Newton (1897).

13. **Pteropus samoensis**, Peale. (Est. I, fig. 8, paladar).

Pt. samoensis, Peale; Dobson, Cat. Chir. B. Mus. p. 35; Seabra, *Journ. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, n.º XVIII, p. 120; *Pt. nawaiensis*, Gray; *Pt. vitiensis*, Gray; *Pt. whitmeei*, Alston.

Um ♂ de *Timor*, Sr. Fr. Newton (1897), e um outro off. pelo Museu d'Hamburgo.

14. Pteropus brunneus, Dobson.

Pt. brunneus, Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 37; Seabra, *Journ. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, n.º XVIII (1897), p. 122.

Um ♂ ad. de *Timor*, Sr. Fr. Newton (1897).

15. Pteropus personatus, Temminck.

Pt. personatus, Temminck. Monogr. des Mamm. I, p. 189; Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 38.

Um ♂ de *Ternate*, (1880).

16. Pteropus Temminckii, Peters. (Est. I, fig. 5, paladar).

Pt. Temminckii, Peters; Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 40; Seabra, *Journ. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, n.º XVIII, p. 121 (1897); *Pt. griseus*, Temminck. Monogr. des Mamm. II, p. 81 (1835).

Um ♂ de *Timor*, Sr. Rafael das Dôres.

17. Pteropus griseus, Geoffroy. (Est. I, fig. 4).

Pt. griseus, Geoffroy; Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 44; Seabra, *Journ. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, n.º XVIII (1897), p. 118; *Pt. pallidus*, Temminck, Monogr. des Mamm. I, p. 184.

Um ♂ de *Timor*, Sr. Dr. F. Bernardino de Carvalho; iden. ♂ e ♀, Sr. G. Capello.

18. Pteropus edulis, Geoffroy. (Est. I, fig. 6, paladar).

Pt. edulis, Geoffroy; Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 49; Seabra, *Journ. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, n.º XVIII, p. 118; Temminck. Mon. des Mamm. I, p. 172, II, p. 58; *Pt. javanicus*, Desmarest; *Pt. funereus*, Temminck, *loc. cit.* II, p. 63.

Um ♂ de *Timor*, (Dilly). Sr. Fr. Newton; uma ♀ de *Java*, Dr. Toussaint.

19. Pteropus medius, Temminck.

Pt. medius, Temminck, Mon. des Mamm. I, p. 176 (1827); *Pt. Edwardsii*, Geoffroy; *Pt. leucocephalus*, Hodgson; *Pt. Edwardsi*, Jerdon; *Pt. Kelaartii*, Gray.

Tres individuos machos e quatro femeas, *India Portugueza*, Junta de Saude, 1863 a 1888.

20. **Pteropus hypomelanus**, Temminck.

Pt. hypomelanus, Temminck. Esq. Zool. sur la côte de Guiné, p. 61 (1857); Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 57, Seabra, *Journ. Ac. Sc. Lisboa,* 2.ª serie, n.º XVIII, p. 124; *Pt. tricolor,* Gray.

Uma ♀ ad. de *Timor,* (Dilly). Sr. Fr. Newton. (1857).

21. **Pteropus Gouldii**, Peters. (Est. I, fig. 7).

Pt. gouldii, Peters; Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 60; *Pt. funereus,* Gould.

Dois individuos femeas, da *Australia;* Sr. Muller. Um ♂ off. pelo Museu de Hamburgo.

22. **Pteropus keraudrenii**, Peters.

Pt. keraudrenii, Peters; Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 63; *Pt. mariannus,* Desmares; *Pt. keraudren,* Quoy et Gaimard; *Pt. keraudrenius,* Temminck, Mon. Mamm. I, p. 186 (1827); *Pt. tonganus,* Quoy et Gaimard; *Pt. vanicorensis,* Quoy et Gaimard; *Pt. insolaris,* Hombron; *Pt. dussumierii,* Geofroy; *Pt. geddiei,* Macgillivray; *Pt. flovicalli,* Gray; *Pt. vitiensis,* Gray.

Um ♂ e uma ♀ da *Oceania* (1880). Bruijn.

23. **Pteropus Macklotii**, Temminck.

Pt. macklotii, Temminck. Mon. des Mamm. II, p. 69, p. 35, fig. 5 (cabeça), Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 66. Seabra, *Journ. Ac. Sç. Lisboa,* 2.ª serie, n.º XVIII, p. 125 (1897)? *Pt. vociferus,* Peale; *Pt. floresii,* Gray.

Um ♂ de *Timor,* (Dilly). Sr. Fr. Newton (1897), craneo em alcool.

24. **Pteropus caniceps**, Grag.

Pt. caniceps, Gray; Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 68; Seabra, *Journ, Ac. Sc. Lisboa,* 2.ª serie, n.º XVIII, p. 124; *Pt. affinis,* Gray.

Um ♂ de *Timor,* (Dilly). Sr. Fr. Newton (1897), craneo em alcool.

25. **Cynonycteris amplexicaudata**, Peters. (Est. I, fig. 10).

Cyn. amplexicaudata, Peters; Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 72; Seabra, *Journ. Ac. Sc. Lisboa,* 2.ª serie, n.º XIX, pp. 140, 141 e 144; *Pt. amplexicaudatus.* Geoffroy; Temminck. Monog. des Mamm. I, p. 200 (1827), pl. XIII; *Pt. leschenaultii,* Desmar; *Pt. pyrivorus,* Hodgson; *Pt. seminudus,* Kelaart: *Eleutherura marginata, infumata* e *philippinensis,* Gray; *Cynonycteris infuscata,* Peters.

Um ♂ e uma ♀ ad. de *Timor,* (Dilly). Sr. Fr. Newton (1897), os craneos em alcool.

26. **Gynonycteris Bocagei**, Seabra. (Est. I, fig. 11, paladar e craneo).

Cyn. Bocagei, Seabra (v. p. 140, 143).

Um ♂ de *Timor,* (Dilly). Sr. Fr. Newton (1897); dois craneos em alcool.

27. **Cynonycteris œgyptiaca**, Peters.

Cyn, œgyptiaca, Peters; Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 74; *Pt. œgyptiacus,* Geoffroy; *Pt. geoffroyi*, Temminck, Monogr. des Mamm., I, p. 197, pl. XV; *Eleutherura ægyptiaca,* Gray.

Um ♂ da *Syria*. Verreaux.

28. **Cynonycteris collaris**, Illiger. (Est. I, fig. 14, paladar).

Cyn. collaris, Peters; Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 75; Bocage, *Journ. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, t. II, 1891, p. 177, fig. 3 (paladar) e t. v, 2.ª serie, 1898, p. 137. *Pt. collaris,* Higer; *Pt. leachii*, Smith; *Pt. hottentottus*, Temminck, Monog. des Mamm., II, p. 87; ? *Eleutherura hottenttota,* Gray; *El. unicolor e collaris,* Gray.

Um ♂ de *Moçambique* e uma ♀ de *Pungo-Andongo,* (Anchieta); e um ♂ de *Quindumbo,* (Anchieta).

29. **Cynonycteris straminea**, Geoffroy. (Est. I, fig. 13, paladar).

Cyn. straminea, Peters; Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 77; Bocage, *Journ. Ac. Sc. Lisboa*, 2.ª serie, t. I, 1889, p. 15, ibid., 2.ª serie, t. II, p. 174, fig. 1, (paladar); ibid., 2.ª serie, IV, p. 137. *Pt. stramineus*, Geoffroy; Temminck. Monogr. des Mamm. I, p. 195 (1827), II, p. 84 (1835-1841); *Xantharpyia straminea,* Gray; *Pachysoma straminea,* Tomes; *Pterocyon paleaceus*, Peters; ? *Pt. mollipilosus,* Allen; *Pterocyon stramineus*, Peters.

Tres individuos do *Rio Quilo* e *Caconda* (Anchieta) um individuo de *Ajudá* (Elvas Mascaranhas); tres da *Ilha de S. Thomé* (Newton); dois de *S. Thomé* (Almada Negreiros); uma ♀ da Nubia Verreaux.

30. **Cynonycteris angolensis**, Bocage. (Est. I, fig. 9, paladar).

Cyn. angolensis, Bocage; *Cyn.*, sp.? Bocage; *Journ. Ac. Sc Lisboa,* 2.ª serie, t. II (1891), p. 175, fig. 2 (paladar), ibid., t. v (1898), pp. 133 e 138.

Um individuo de *Pungo-Andongo,* um ♂ e quatro individuos femeas de *Quibula* (Anchieta).

31. **Cynonycteris brachycephalus**, Bocage. (Est. I, fig. 12, craneo).

Cyn. brachycephala, Bocage, *Journ. Ac. Sc. Lisboa,* 2.ª serie, t. I (1889), p. 197, ibid., 2.ª serie, t. V (1898), p. 138.

Uma ♀ ad. da *Ilha de S. Thomé,* (Fer. Pires).

32. **Cynopterus marginatus**, Fr. Cuvier (Est. I, fig. 16, paladar).

Cyn. marginatus, Fr. Cuvier; Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 81; *Pt. marginatus,* Geoffroy; *Pt. Littheœheilus,* Temminch. Monog. des Mamm., I, p. 198; *Pachysoma diardii e duvaucellii,* Is. Geoffroy; Temminck, *loc. cit.*, II, pp. 95 e 96; *Pachy. brevicaudatum,* Is. Geoffroy; Temminck, *loc. cit.*, p. 92. *Pt. pyrivorus,* Hodgson; *Cyn. horsfieldii,* Gray; *Pach. lugoniense,* Peters; *Eleutherura marginata,* Gray.

Uma ♀ de *Sumatra* (1861) e dois machos e uma femea da *India Portugueza* (1884–1888), Junta de Saude.

33. **Cynopterus ecaudatus**, Dobson.

Cyn. ecaudatus, Dobson, Cat. Chir. B. Mus., p. 87; *Pachysoma ecaudatum,* Temminck, Monog. des Mamm., II, p. 94; *Megæra ecaudata,* Temminck, *loc. cit.,* p. 359; *megærops ecaudatus,* Peters.

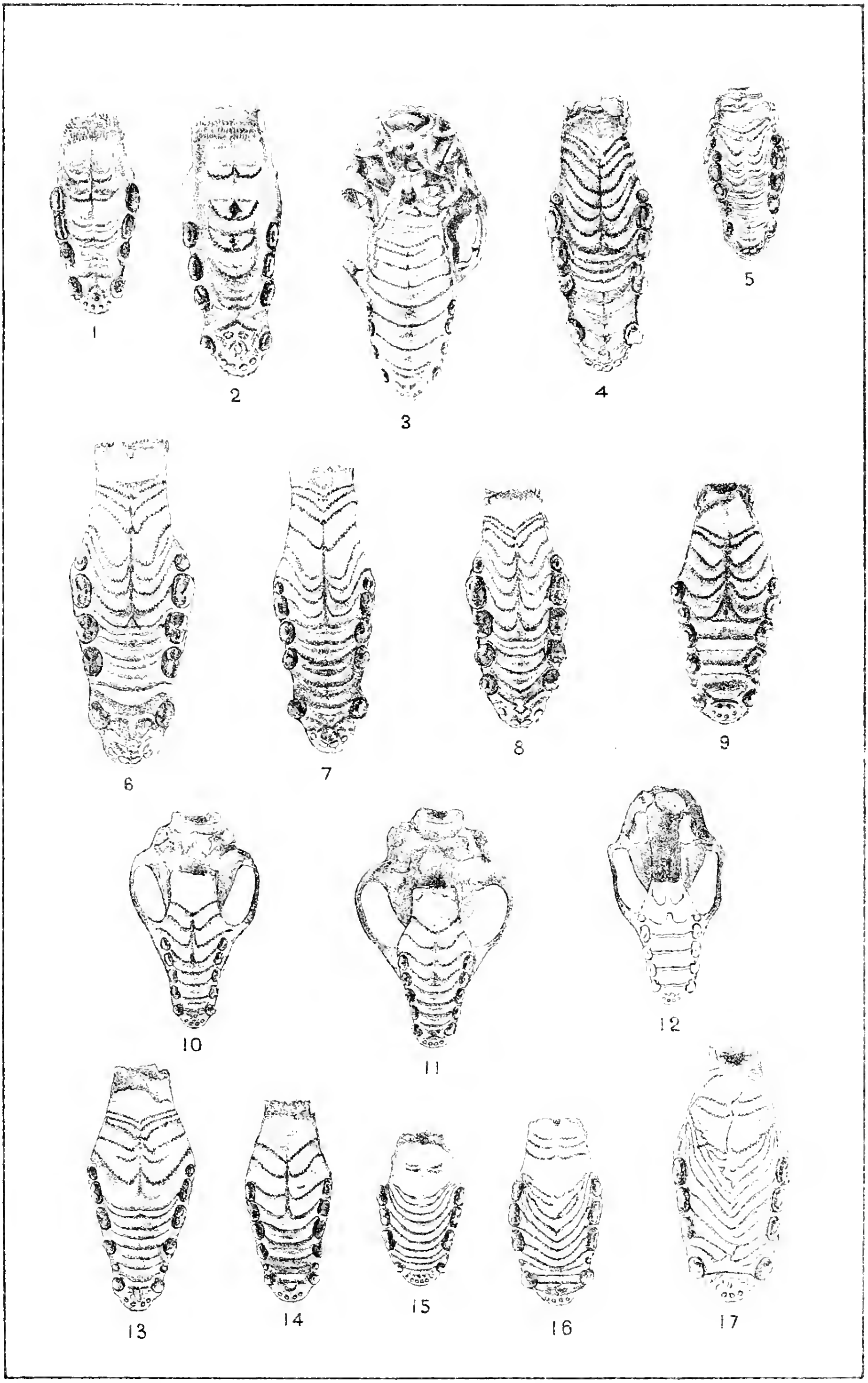
Um ♂ de *Borneo* (1861).

34. **Cynopterus**, sp.? (Est. I, fig. 15, paladar).

Um ♂ *Samaranga* (Olebes) 1879. Winchel.

35. **Cynopterus**, sp.? (Est. I, fig. 17, paladar ampliado).

Um ♂ Nova Goa.



Assumpção, lith

ESTAMPA I

Fig. 1, paladar de um *Epomophorus gambianus,* Ogil. Galanga, (Anchieta).

Fig. 2, paladar de um *Epomophorus macrocephalus*, Ogilby; Bolama (Barahona).

Fig. 3, paladar ampliado de um *Epomophorus*, nova especie, de Galanga, (Anchieta).

Fig. 4, paladar de um *Pteropus griseus,* Geoffroy; Timor, (G. Capello).

Fig. 5, paladar de um *Pteropus Temminckii*, Peters; Timor, (Fr. Newton).

Fig. 6, paladar de um *Pteropus edulis,* Geoffroy; Timor, (Fr. Newton).

Fig. 7, paladar de um *Pteropus Gouldii*, Peters; offerecido pelo Museu de Hamburgo, (Australia?).

Fig. 8, paladar reduzido de um *Pteropus samoensis,* Peale; Timor, (Fr. Newton).

Fig. 9, paladar de uma *Cynonycteris angolensis,* Bocage; Quibula, (Anchieta).

Fig. 10, paladar de uma *Cynonycteris amplexicaudata*, Peters; Timor, (Fr. Newton).

Fig. 11, paladar de uma *Cynonycteris Bocagei,* Seabra; Timor, (Fr. Newton).

Fig. 12, craneo e paladar reconstituido da *Cynonycteris brachycephala,* Bocage; S. Thomé, (Fr. Pires).

Fig. 13, paladar de uma *Cynonycteris straminea*, Geoffroy; Ilha do Principe, (Fr. Newton).

Fig. 14, paladar de uma *Cynonycteris collaris,* Illiger; Pungo Andongo, (Anchieta).

Fig. 15, paladar ampliado de um *Cynopterus*, sp.?; Samaranga «Celebes», (Winekel).

Fig. 16, paladar ampliado de um *Cynopterus marginatus*, India, (Junta de Saude).

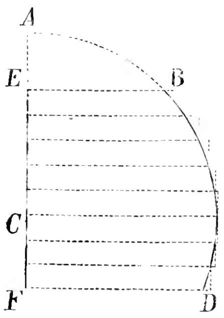
Fig. 17, paladar ampliado de um *Cynopterus*, sp.? Nova Goa.

CALCULO DO VOLUME DE UM SEGMENTO ESPHERICO, INDEPENDENTEMENTE DO CONHECIMENTO DO VOLUME DOS CORPOS ESPHERICOS

POR

R. GUIMARÃES

Seja $BDEF$ um segmento de circulo de altura $EF = h$ e pertencente a um circulo de raio $AC = R$.



Este segmento circular por um movimento de rotação em torno de AC gera um segmento espherico em que $BE = r$ e $DF = r'$ são os raios das duas bases.

Supponhamos EF dividido em m partes eguaes e levantemos pelos pontos de divisão perpendiculares a EF, até encontrarem o arco BD.

Construindo a serie de rectangulos que a figura indica, teremos que os cylindros gerados pela rotação das figuras em torno do eixo AC, tem por limite (admittindo que o numero de partes eguaes em que foi dividido EF augmenta indefinidamente) o volume do segmento espherico.

Ora, designando por h' a altura AE da calote espherica, gerada pelo prolongamento AB do arco BD, quando este gira em torno de EF, e por $v_1, v_2, v_3, \ldots v_m$, os volumes e por $r_1, r_2, r_3, \ldots r_m$, os raios das bases dos cylindros gerados como acabamos de referir, temos para um cylindro qualquer, o correspondente á divisão (p), por exemplo, de EF,

$$r_{(p)} = \left(h' + \frac{h\,(p)}{m}\right)\left[2R - \left(h' + \frac{h\,(p)}{m}\right)\right] \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$= 2Rh' + 2Rh \cdot \frac{(p)}{m} - h'^2 - 2hh' \cdot \frac{(p)}{m} - h^2 \cdot \frac{(p)^2}{m^2}$$

e portanto os volumes dos diversos cylindros são, fazendo successivamente, $p=1, 2, 3, \ldots\ldots$

$$\left\{\begin{array}{l} V_1 = 2\pi R h h' \cdot \frac{1}{m} + 2\pi R h^2 \cdot \frac{1}{m^2} - \pi h h'^2 \cdot \frac{1}{m} - 2\pi h^2 h' \cdot \frac{1}{m^2} \\ \qquad - \pi h^3 \cdot \frac{1^2}{m^3} \\ V_2 = 2\pi R h h' \cdot \frac{1}{m} + 2\pi R h^2 \cdot \frac{2}{m^2} - \pi h h'^2 \cdot \frac{1}{m} - 2\pi h^2 h' \cdot \frac{1}{m^2} \\ \qquad - \pi h^3 \cdot \frac{2^2}{m^3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_m = 2\pi R h h' \cdot \frac{1}{m} + 2\pi R h^2 \cdot \frac{m}{m^2} - \pi h h'^2 \cdot \frac{1}{m} - 2\pi h^2 h' \cdot \frac{m}{m^3} \\ \qquad - \pi h^3 \cdot \frac{m^2}{m^3} \end{array}\right.$$

d'onde

$$\Sigma v = 2\pi R h h' - \pi h h'^2 + (2\pi R h^2 - 2\pi h^2 h') \cdot \frac{1+2+\ldots m}{m^2}$$
$$- \pi h^3 \cdot \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+m^2}{m^3} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

E visto ser o volume V do segmento espherico egual a $\sum_{m=\infty} v$ tudo se reduz a achar o limite das expressões

$$\frac{1+2+3\ldots+m}{m^2} \quad \text{e} \quad \frac{1^2+2^2+\ldots+m^2}{m^3}$$

para $m=\infty$

Para isso, observaremos que

$$\left\{\begin{array}{c} m^3-(m-1)^3 = 3m^2 - 3m + 1 \\ (m-1)^3-(m-2)^3 = 3(m-1)^2 - 3(m-1) + 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2^3 - 1^3 = 3\cdot 2^2 - 3\cdot 2 + 1 \\ 1^3 - 0^3 = 3 \cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 1 \end{array}\right.$$

combinadas por somma, expressões que dão

$$m^3 = 3(1^2+2^2+\ldots+m^2) - 3(1+2+\ldots+m) + m$$

e como

$$1+2+3+\ldots+m = \frac{m(m+1)}{2}$$

resulta

$$1 + 2^2 + \ldots + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

e portanto

$$\lim \frac{1 + 2 + \ldots + m^2}{m^2} = \frac{1}{2} \lim \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\lim \frac{1^2 + 2^2 \ldots + m^2}{m^3} = \frac{1}{6} \lim \left(1 + \frac{1}{m}\right) \left(2 + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{3}$$

Substituindo estes valores na expressão (2), resulta

$$V = \sum_{m=\infty} v = \frac{2\pi h h' - \pi h h'^2}{2} + \frac{2\pi R h^2 + 2\pi R h h'}{2}$$
$$- \frac{\pi h^3 + 2\pi h^2 h' + \pi h h'^2}{2} + \frac{\pi h^3}{6}$$

$$= 2\pi R h h' - \pi h h'^2 + 2\pi R h^2 \cdot \frac{1}{2} - 2\pi h^2 h' \cdot \frac{1}{2} - \pi h^3 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \pi h h' \frac{(2R - h')}{2} + 2\pi R h \frac{h + h'}{2} - \pi h \frac{(h + h')^2}{2} + \frac{\pi h^3}{6}$$

$$= \pi h h' \frac{(2R - h')}{2} + \pi h \frac{(h + h')[2R - (h + h')]}{2} + \frac{\pi h^3}{6} \ldots . \quad (3)$$

Da figura tira-se

$$\overline{BE}^2 = r^2 = h'(2R - h')$$

$$\overline{DF}^2 = r'^2 = (h + h')[2R - (h + h')]$$

que reduzem a formula (3) a

$$V = \frac{\pi r^2 + \pi r'^2}{2} \cdot h + \frac{\pi h^3}{6}$$

expressão que se encontra nos livros de geometria elementar.

METHODOS NOVOS PARA DETERMINAR O LADO E A AREA DE QUALQUER POLYGONO REGULAR

POR

ANTONIO CABREIRA

Socio correspondente da Academia Real das Sciencias de Lisboa

I

1. Em qualquer triangulo isosceles, são isoperimetros todos os parallelogrammos que se obteem, tirando, por um ponto da base, parallelas aos lados eguaes. Suppondo que esse ponto está n'um dos extremos d'aquella grandeza, concluimos que o semi-perimetro dos referidos parallelogrammos representa um dos lados eguaes.

2. Chamamos *parallelogrammos isoperimetros a respeito de uma diagonal* de qualquer polygono regular aos parallelogrammos que se obteem, tirando por um ponto d'essa grandeza, parallelas aos dois lados que, prolongados, fazem um triangulo isosceles com a mesma diagonal.

3. *Formula geral do lado de qualquer polygono regular.*

Dado qualquer polygono regular, tomemos um trapezio isosceles, que denominaremos polygonal, em que os lados parallelos sejam as diagonaes d_n e d_{n-2} e os lados não parallelos dois lados do polygono. Prolongando estes dois lados até se intersectarem, concebemos dois triangulos isosceles semelhantes, que teem, respectivamente, como lados deseguaes x e d_{n-2}, $l_n + x$ e d_n; logo

$$\frac{d_{n-2}}{d_n} = \frac{x}{l_n + x};$$

d'onde

$$x = \frac{l_n d_{n-2}}{d_n - d_{n-2}}.$$

Sendo p o semi-perimetro dos parallelogrammos isoperimetros a respeito de d_n, temos, em consequencia do n.º 1,

$$p = l_n + x = \frac{l_n\, d_n}{d_n - d_{n-2}}$$

ou

$$l_n = \frac{p}{d_n}(d_n - d_{n-2}) \qquad (1)$$

4. *Construcção do lado de qualquer polygono regular.*

Supponhamos que são dados $ABCD$, um dos parallelogrammos isoperimetros a respeito da diagonal de ordem n, que desconhecemos *à priori*, e $\overline{UV}$, diagonal de ordem $n-2$.

Tiremos a bisectriz do angulo $A\hat{B}C$ e do vertice opposto D, baixemos uma perpendicular áquella linha. Prolongando os lados $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, até encontrarem essa perpendicular, obtemos os pontos E e F. Em virtude d'esta construcção, o triangulo é isosceles e portanto $\overline{EF}$ representa a diagonal de ordem n.

Marcando sobre $\overline{EF}$, a partir de E, uma grandeza egual a $\overline{UV}$ e tirando, pelo outro extremo, uma parallela a $\overline{BE}$, determinamos o lado pedido, porque traçamos um trapezio isosceles em que os lados parallelos são as diagonaes de ordem n e $n-2$.

No caso particular de o parallelogrammo dado ser um dos isoperimetros a respeito do diametro do circulo circumscripto a um polygono regular de um numero par de lados, então dispensamos o conhecimento de qualquer outra diagonal. Effectivamente, descrevendo uma circumferencia com centro, no meio de $\overline{EF}$ e raio egual a metade d'esta grandeza, cortamos as linhas $\overline{BE}$ e $\overline{BF}$ em G e H. Ora E e F são extremos dos dois lados ligados pelo diametro $\overline{EF}$; e, como $\overline{BE}$ e $\overline{BF}$ definem as direcções dos mesmos lados, a grandeza d'estes representar-se por $\overline{EG}$ ou $\overline{FH}$.

5. *Formula geral da area de qualquer polygono regular.*

Construâmos a bisectriz do angulo formado pelos apothemas relativos a dois lados do polygono, ligados pela diagonal de ordem n. Prolongando esses lados até intersectarem a bisectriz, obtemos dois triangulos rectangulos eguaes, que teem como cathetos o apothema e a differença entre o semi-perimetro dos parallelogrammos isoperimetros a respeito de d_n e a metade do lado. Tirando pelo ponto em que um dos lados intersecta d_n uma parallela ao apothema e prolongando aquella bisectriz, obtemos o segmento q, catheto de outro triangulo rectangulo que é semelhante d'aquelles e que tem como segundo catheto o semi-perimetro dos parallelogrammos isoperimetros a respeito da mesma diagonal; logo

$$a = \frac{q}{p}\left(p - \frac{l_n}{2}\right) = \frac{q}{2d_n}(d_n + d_{n-2}).$$

Substituindo l_n e a pelos seus valores em

$$a_n = \frac{n}{2} l_n a,$$

formula que representa a area de qualquer polygono regular, fica

$$a_n = \frac{n}{4} \frac{pq}{d_n^2}(d_n^2 - d_{n-2}^2) \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

6. *Construcção do rectangulo equivalente a qualquer polygono regular.*

Imaginemos que $\overline{MN}$ representa a diagonal d_{n-2}. Levantemos por M uma perpendicular a esta recta; com centro em N e raio egual a d_n, descrevâmos uma circumferencia que cortará aquella perpendicular em P. Sendo assim, temos

$$\overline{MP}^2 = d_n^2 - d_{n-2}^2 = d_n^2 \cos^2 M\hat{P}N.$$

Logo a formula deduzida no numero anterior transforma-se em

$$a_n = \frac{n}{4} p \cos M\hat{P}N \cdot q \cos M\hat{P}N \dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Marcando sobre a direcção $\overline{PN}$ um comprimento $\overline{PQ}$ egual a $\frac{np}{4}$ e baixando de Q uma perpendicular a $\overline{PM}$, obtemos a grandeza $\overline{PR}$ que representa $\frac{np \cos M\hat{P}N}{4}$. Procedendo do mesmo modo, relativamente a q, achâmos $\overline{PS}$, que é egual a $q \cos M\hat{P}N$.

Construindo, então, um rectangulo com os lados $\overline{PR}$ e $\overline{PS}$, obtemos uma area equivalente á do polygono dado.

II

7. Consideremos, agora, a altura do trapezio polygonal, grandeza que representaremos por h.

8. *Formula geral do lado de qualquer polygono regular.*

Imaginando um triangulo rectangulo que tem como hypothenusa o lado do polygono e como cathetos a sua projecção sobre d_n e a altura do trapezio polygonal, é

$$l_n = \sqrt{h^2 + \frac{(d_n - d_{n-2})^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4h^2 + (d_n - d_{n-2})^2} \ldots\ldots \quad (4)$$

9. *Construcção do lado de qualquer polygono regular.*

Supponhamos que são dados, em grandeza, d_n, d_{n-2} e h. Marquemos sobre uma recta qualquer uma grandeza $\overline{AB}$ egual a d_n, pelo seu meio, C, levantemos uma perpendicular; marquemos depois, na mesma perpendicular, uma grandeza $\overline{CE}$ egual a h; tiremos por E uma parallela a $\overline{AB}$ e marquemos, sobre esta parallela, um cumprimento $\overline{EF}$ egual a $\frac{d_{n-2}}{2}$. O lado pedido será $\overline{AF}$ porque constitue um dos lados não parallelos do trapezio isosceles, cujas bases são d_n e d_{n-2}.

10. *Formula geral da area de qualquer polygono regular.*

A area de qualquer trapezio polygonal representa-se por

$$\frac{d_n + d_{n-2}}{2} h = mh;$$

d'onde

$$m = \frac{d_n + d_{n-2}}{2},$$

sendo m a recta que divide ao meio os lados não parallelos.

Considerando os triangulos rectangulos semelhantes que teem, respectivamente, como lados homologos, o apothema e o lado do polygono, metade da distancia que une o meio dos lados não parallelos do trapezio e a altura, vem

$$\frac{a}{l_n} = \frac{m}{2h};$$

d'onde

$$a=\frac{d_n+d_{n-2}}{8h}\sqrt{4h^2+(d_n-d_{n-2})^2};$$

logo

$$a_n=\frac{n}{32}\,\frac{d_n+d_{n-2}}{h}\,[4h^2+(d_n-d_{n-2})^2]\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

11. *Construcção do rectangulo equivalente a qualquer polygono regular.*

Marquemos, sobre uma recta, uma grandeza $\overline{AB}$ egual a $2h$; levantemos por B uma perpendicular a $\overline{AB}$ e, sobre ella, marquemos uma grandeza $\overline{BC}$ egual a d_n-d_{n-2}. Em virtude d'esta construcção, será

$$\overline{AC}^2=4h^2+(d_n-d_{n-2})^2\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

Levantemos, em seguida, por A uma perpendicular a $\overline{AC}$ e sobre ella, marquemos uma grandeza $\overline{AD}$ egual a d_n+d_{n-2}.

Marquemos sobre $\overline{AC}$ uma grandeza $\overline{AF}$ egual a h; unamos F com D, e pelo ponto C tiremos uma parallela a $\overline{DF}$ que cortará a linha definida por $\overline{AD}$, em G. Procedendo assim, obtemos dois triangulos rectangulos semelhantes, em que

$$\frac{d_n+d_{n-2}}{h}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AC}}\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Os lados do rectangulo pedido serão $\frac{n}{32}\,\overline{AC}$ e $\overline{AG}$ porque comparando (5) com (6) e (7), resulta

$$a_n=\frac{n}{32}\,\overline{AC}\cdot\overline{AG}\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

III

12. Sejam dados, em grandeza, as diagonaes d_{n-2}, d_{n-1} e d_n.

13. *Formula geral do lado de qualquer polygono regular.*

Sabemos que, n'um trapezio qualquer, a somma dos quadrados das diagonaes é egual á somma dos quadrados dos lados não parallelos mais o dobro do producto das bases. Applicando este principio ao trapezio polygonal, resulta

$$d_{n-1}^2 = l_n^2 + d_n d_{n-2},$$

d'onde

$$l_n = \sqrt{d_{n-1}^2 - d_n d_{n-2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

14. *Construcção do lado de qualquer polygono regular.*

Sobre uma recta qualquer, marquemos uma grandeza, $\overline{AB}$, egual á raiz quadrada de $d_n d_{n-2}$; levantemos por B uma perpendicular e com centro em A e raio egual a d_{n-1} descrevamos uma circumferencia que cortará a perpendicular em C. O lado pedido será $\overline{BC}$, em consequencia de (9).

15. *Formula geral da area de qualquer polygono regular.*

Da consideração dos triangulos rectangulos semelhantes, que teem, respectivamente, como lados homologos, $\frac{m}{2}$ e $\frac{d_n}{2}$, a e q, vem

$$a = \frac{q}{d_n} \frac{d_n + d_{n-2}}{2},$$

por consequencia

$$a_n = \frac{n}{4} \frac{q}{d_n} (d_n + d_{n-2}) \sqrt{d_{n-1}^2 - d_n d_{n-2}} \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

16. *Construcção do rectangulo equivalente a qualquer polygono regular.*

Marquemos, sobre uma recta qualquer, as grandezas $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente eguaes a d_n e d_{n-2}. Levantemos por A uma perpendicular á mesma recta; marquemos uma grandeza $\overline{AD}$ egual a q e tiremos por C uma parallela a $\overline{BD}$, parallela que encontrará aquella perpendicular em E. D'esta construcção resulta

$$\overline{AE} = \frac{q}{d_n} (d_n + d_{n-2}).$$

Logo $\frac{n}{4}\overline{AE}$ e o lado do polygono representam os lados do rectangulo pedido, conforme se conclue, approximando aquella expressão de (10).

IV

17. Attendamos, em seguida, a d, menor diagonal, e a α, angulo definido por dois lados contiguos do polygono.

18. *Formula geral do lado de qualquer polygono regular.*
Tirando a bisectriz de α, temos, em virtude do numero 17,

$$l_n = \frac{d}{2} \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

19. *Construcção do lado de qualquer polygono regular.*
Tiremos por um ponto qualquer, M, da bisectriz de α, cujo vertice designaremos por A, uma perpendicular a esta recta, marquemos n'essa perpendicular uma grandeza $\overline{MN}$ egual a $\frac{d}{2}$ e tiremos por N uma parallela á bisectriz. Sendo P o ponto de encontro da parallela com um dos lados do angulo α, o lado pedido será representado por $\overline{AP}$, em virtude de (11).

20. *Formula geral da area de qualquer polygono regular.*
Considerando o triangulo rectangulo, cujos cathetos são a metade do lado do polygono e o apothema, resulta

$$a = \frac{l_n}{2} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{4} \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{2}};$$

logo

$$a_n = \frac{n}{16} \frac{d^2}{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

21. *Construcção do rectangulo equivalente a qualquer polygono regular.*
Marquemos a partir de A, vertice de α, e sobre a respectiva bisectriz, uma grandeza $\overline{AB}$, egual a $\frac{d}{2}$; pelo ponto B levantemos uma perpendicular á bisectriz, perpendicular que cortará um dos lados de

α, em C; $\frac{n}{4}\overline{AC}$ e o lado do polygono dado definem o rectangulo procurado porque

$$\overline{AC}=\frac{\frac{d}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

valor que transforma (12) em

$$a_n=\frac{n}{4}\overline{AC}\cdot l_n \qquad (13)$$

V

22. Admittamos, por ultimo, que são dadas em grandeza d_n, d_{n-2} e θ, angulo formado pelos apothemas dos dois lados que constituem trapezio polygonal com aquellas diagonaes.

23. *Formula geral do lado de qualquer polygono regular.*

O angulo formado pelo lado do polygono com a diagonal de ordem n é egual á metade do angulo dos apothemas porque os lados são perpendiculares. Sendo assim, temos

$$\frac{d_n-d_{n-2}}{2}=l_n\cos\frac{\theta}{2};$$

d'onde

$$l_n=\frac{\frac{d\;-d_{n-2}}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}} \qquad (14)$$

24. *Construcção do lado de qualquer polygono regular.*

Suponhamos que B representa o vertice de $\frac{\theta}{2}$; marquemos sobre o primeiro lado do angulo uma grandeza $\overline{BA}$, egual a $\frac{d_n-d_{n-2}}{2}$. Sendo C a intersecção da perpendicular levantada por A com o segundo lado do angulo, o lado pedido representar-se-ha por $\overline{BC}$, conforme se deduz de (14).

25. *Formula geral da area de qualquer polygono regular.*

No triangulo rectangulo, cuja hypothenusa é o apothema e o catheto opposto a $\frac{\theta}{2}$ é $\frac{m}{2}$, temos

$$\frac{d_n + d_{n-2}}{4} = a \operatorname{sen} \frac{\theta}{2};$$

portanto

$$a_n = \frac{n}{16} \frac{d_n^2 - d_{n-2}^2}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (15)$$

26. *Construcção do rectangulo equivalente a qualquer polygono regular.*

Marquemos sobre uma recta qualquer uma grandeza $\overline{AB}$ egual a d_{n-2}; levantemos por B uma perpendicular a $\overline{AB}$ e com centro em A e raio egual a d_n descrevamos uma circumferencia que cortará a perpendicular em C. Depois, tiremos por B uma recta que faça com $\overline{BC}$ um angulo egual a $\frac{\theta}{2}$ e por C levantemos uma perpendicular a $\overline{BC}$ que encontrará essa recta em D. Finalmente, marquemos sobre $\overline{BD}$ uma grandeza $\overline{BE}$, egual a $\overline{BC}$, e tiremos por C uma perpendicular a $\overline{BE}$, perpendicular que encontrará o prolongamento de $\overline{AB}$, em F. Em virtude d'este traçado, temos

$$\overline{BC}^2 = d_n^2 - d_{n-2}^2,$$

$$\overline{BC} = \overline{BD} \cos \frac{\theta}{2},$$

$$\overline{BC} = \overline{CF} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}.$$

N'estas condições, os lados do rectangulo pedido são $\frac{n}{16}\overline{BD}$ e $\overline{CF}$, porque introduzindo os valores que acabamos de deduzir, em (15), resulta

$$a_n = \frac{n}{16} \overline{BD} \cdot \overline{CF} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (16)$$

NOTA SOBRE A PRESENÇA DO «LYCAON PICTUS» Temm. NO SERTÃO DE BENGUELLA

POR

J. V. BARBOZA DU BOCAGE

Parece-nos não ser destituido de interesse para os zoologistas, o facto bem averiguado da existencia do *Lycaon Pictus* no sertão de Benguella; com esta descoberta, poz o nosso insigne e mallogrado naturalista, José d'Anchieta, remate á sua ardua e fructuosa exploração.

Um bello exemplar adulto d'esta curiosa especie, typo intermediario ao Cão e á Hyena, foi encontrado no espolio d'aquelle nosso amigo, juntamente com alguns outros animaes, colhidos em Caconda e suas immediações; e graças á intelligente intervenção do administrador do concelho de Caconda, o sr. Antonio de Azevedo Pinho, poude esta pequena collecção ser salva e remettida para Lisboa.

Consta esta collecção de dois mammiferos, *Lycaon Pictus* e *Herpestes Gracilis*, de algumas aves vulgares em Angola, e de varios reptis, que estão sendo examinados pelo naturalista-adjunto do Museu o sr. Bettencourt Ferreira.

DA DISTRIBUIÇÃO GEOGRAPHICA DOS PEIXES E CRUSTACEOS COLHIDOS NAS POSSESSÕES PORTUGUEZAS D'AFRICA OCCIDENTAL E EXISTENTES NO MUSEU NACIONAL DE LISBOA

POR

BALTHAZAR OSORIO

Depois de alguns annos de estudos dedicados á ichthyologia e á carcinologia vamos reunir em quadros os resultados das nossas investigações e provar o que por mais de uma vez dissemos n'este jornal, isto é, que a fauna americana contribue com um não pequeno numero de especies para a fauna d'Africa e mais especialmente para a de algumas ilhas que se avizinham d'esta parte do mundo conhecido dos antigos.

Não são apenas especies maritimas que se encontram em regiões tão afastadas, nas costas da America e da Lybia, e que lhes são communs, mas são as mesmas n'estas vastas regiões do globo algumas das especies de crustaceos terrestres, e algumas das especies de peixes de agua doce que vivem domiciliadas nos dois continentes.

Vejamos consultando as tabellas ou quadros que se seguem se realmente isto é assim. Na dos crustaceos encontramos as seguintes especies:

1. *Leptopodia sagitaria,* Fabr.
2. *Xantho vermiculatus,* Lamk.
3. *Panopeus Herbstii,* Edw.
4. *Chlorodius longimanus,* Edw.
5. *Neptunus diacanthus,* Latr.
6. *Thalamita integra,* Dana, var. *americana,* Miers.
7. *Cardisoma guanhami,* Margraff.
8. *Gecarcinus ruricola,* Latr.
9. *Grapsus pictus,* Latr.
10. *Goniograpsus cruentatus,* Latr.

11. *Goniograpsus plicatus,* Edw.
12. *Calappa galus,* Herbst.
13. *Porcellana speciosa,* Dana.
14. *Atya scabra,* Leach.
15. *Alpheus intrinsecus,* Sp. Bate.
16. *Palemon jamaicensis,* Oliv.
17. » *Olfersi,* Wiegm.
18. *Penaeus canaliculatus,* Olivier.
19. » *brasiliensis,* Latr.
20. » *vetulinus,* Dana.
21. *Lysiosquilla scabricauda,* Lamk.

especies terrestres umas, maritimas outras que foram encontradas na costa occidental d'Africa ou n'alguma ou algumas das ilhas que lhe ficam mais ou menos vizinhas e que são todas provenientes de diversas partes da America, do Mexico, das Antilhas, das ilhas de Sandwich, do Brasil, de diversos pontos, etc., emfim do novo continente onde tinham sido primitivamente encontradas. Algumas d'estas especies apparecem como sendo africanas pela primeira vez nos nossos trabalhos publicados n'este jornal, outras das que citamos e que tambem estudámos e nos tinham sido enviadas das nossas possessões tinham sido citadas por outros naturalistas que nos tinham precedido n'estes estudos, mas, pelo menos assim o julgamos, nunca até agora se tinham formado listas tão consideraveis de especies communs aos dois grandes continentes ou ás costas tão distantes banhadas pelo Oceano Atlantico.

O nosso fim porém ao publicar esta noticia não é apenas exhibir a lista das especies que pertencem a faunas tão afastadas e tão diversas, mas tirar os corollarios que da inspecção dos nossos quadros derivam.

Antes de apresentar a lista dos peixes que são communs aos dois continentes podemos vêr desde já que algumas especies de crustaceos como o *Panopeus Herbstii* se encontra na Africa desde a ilha de Anno Bom e em todas as ilhas do Golfo de Guiné até Angola e o mesmo acontece com o *Neptunus diacanthus,* especie americana que se encontra desde as ilhas de Cabo Verde a Angola, etc.

Podemos portanto dizer, que nas regiões intermedias, onde estas especies não foram colhidas, ou por falta de explorações ou por qualquer outra causa, é licito concluir, que é provavel a sua existencia, e egualmente assim a respeito de outras com que se dão as mesmas circumstancias, isto é teem egual ou proxima distribuição geographica.

Mais se pode tambem avançar, completando assim faunas que estão incompletas, que se uma especie ou especies das classes de que tratamos faltam n'uma determinada região, n'uma das ilhas a que nos referimos, por exemplo, mas existem em ilhas muito proximas é natural concluir tambem que n'ella existe visto que se as especies ou os seus ovos são transportados da America pelas correntes oceanicas, e especialmente pela corrente do Gulf-stream que vae ao longo de toda a costa occidental d'Africa é provavel que não houvesse excepção para uma quando a distribuiu a tantas.

Assim julgamos que será admissivel crêr que o *Leptopodia sagittaria* encontrado nas ilhas de Cabo Verde e na Ilha de S. Thomé se encontre na Ilha do Principe e no Ilheo das Rolas que lhe ficam proximos.

Pois será crivel que o *Cardisoma guanhumi,* Margraff, que vive nos bosques das Antilhas e que se encontra na Africa nas ilhas de Cabo Verde, na ilha do Principe e em Angola se não encontre por exemplo na ilha de S. Thomé que fica proximo da Ilha do Principe? Não será possivel dizer com segurança o mesmo a respeito de especies cuja distribuição geographica como os quadros mostram se faz por um consideravel numero de regiões mas que faltam n'outras que lhe são vizinhas? Crêmos que sim.

Relativamente á distribuição geographica dos peixes factos muito semelhantes aos que se dão com os crustaceos temos a assignalar. Em primeiro logar devemos dizer que como fizemos com os crustaceos attenderemos a duas circumstancias.

Com os crustaceos acontece que ha especies exclusivamente terrestres que se encontram na America e na Africa e especies maritimas ou que vivendo no mar se acommodam todavia a viver nas aguas doces.

De especies vivendo sobre o solo dos dois continentes podem ser exemplo a *Leptopodia sagittaria,* Fabr., o *Cardisoma guanhumi,* Margraff, o *Gecarcinus ruricola,* Latr., etc.

Das especies maritimas americanas vivendo muito naturalmente nos rios que veem lançar-se no Oceano e que se encontram frequentemente nos rios das ilhas africanas, o *Palaemon Olfersi,* Wiegm., o *Palaemon jamaicensis,* Herbst., a *Atya scabra,* Leach., constituem bons exemplos.

Das especies exclusivamente oceanicas vivendo sómente nas costas, a *Calappa gallus,* Herbst., o *Alpheus intrinsecus*, Sp. Bate, podem servir para exemplificar.

Com os peixes acontece alguma coisa de semelhante pois existem, tanto nos lagos das ilhas africanas, assim como n'alguns rios que do continente veem lançar-se no Oceano, especies que pertencem a rios da America.

Egualmente se encontram na costa africana especies que até agora eram apenas conhecidas como pertencentes ás que entram na composição da fauna do Novo Mundo.

A lista das especies de agua doce communs á America e á Africa é a seguinte:

1. *Gobius lanceolatus,* Bl.
2. » *Mendroni,* Swg.
3. » *Bustamantei,* Greeff.
4. » *soporator,* Cuv. et Val.
5. *Sycidium plumieri,* Bl.

6. *Eleotris gyrinus*, Cuv. et Val.
7. » *dormitatrix*, Cuv. et Val.
8. *Mugil brasiliensis*, Agass.

Das especies maritimas e que vivem nas costas dos dois grandes continentes o numero é consideravel mas limitamo-nos a apresentar apenas a lista das que nós estudámos e que foram apontadas como tendo sido encontradas pela primeira vez na costa occidental da Africa e nas das ilhas que lhe ficam proximas.

A lista é a seguinte:

1. *Holocentrum longipinne*, Cuv. et Val.
2. *Serranus capreolus*, Poey.
2. *Rhypticus saponaceus*, Cuv. et Val.
4. *Lobotes auctorum*, Günth.
5. *Ephippus gigas*, Cuv.
6. *Cybium maculatum*, Agass.
7. *Salarias atlanticus*, Cuv. et Val.
8. *Fistularia tabaccaria*, L.
9. *Pomacentrus leucostictus*, Mull. et Trosch.
10. *Glyphidodon chrysurus*, Cuv. et Val.
11. *Saurus myops*, Cuv. et Val.
12. *Monacanthus pardalis*, Rüpp.
13. *Serranus erythrogaster*, Dekay.
14. *Aulostoma coloratum*, Mull. et Trosch.
15. *Hemirhombus aramaca*, Cuv.
16. *Rhomboidichthys lunatus*, L.
17. *Ophichthys triserialis*, Kaup.
18. *Gymnomuraena vittata*, Richards.
19. *Mugil brasiliensis*, Agass.

Da lista dos crustaceos e da lista dos peixes se conclue que é consideravel o numero de especies que vivem em regiões tão afastadas.

Mas o que de mais interessante resulta da inspecção das nossas listas é tudo o que se refere relativamente ás especies terrestres dos crustaceos e aos peixes de agua doce que vivem não só nos rios da Africa e da America, mas até mesmo nos lagos da primeira d'estas partes do mundo e em altitudes que variam entre duzentos e quinhentos metros.

Todos os auctores que escrevem sobre zoologia admittem, tendo em vista a fauna, que as ilhas se classificam em ilhas *oceanicas* e em ilhas *continentaes*.

As primeiras comprehendem as ilhas formadas por um levantamento rapido ou demorado da crosta do globo e as que são formadas á custa do trabalho dos minusculos mas incontaveis trabalhadores, os *coralleiros* e *madreporarios*.

As segundas tendo feito parte integrante dos continentes que lhe ficam proximos, n'outros tempos mais ou menos remotos, estão agora separados d'elles em virtude de phenomenos contrarios aos que deram origem a algumas das primeiras, isto é, um rebaixamento das camadas superficiaes do globo mais ou menos cobertas na actualidade pelas aguas.

A qual dos dois grupos pertencem as ilhas do golfo de Guiné, ás ilhas oceanicas ou ás ilhas continentaes?

Pareceria á primeira vista que uma vez estudada a sua fauna o problema ficaria immediatamente resolvido, mas em todo o caso sempre diremos que a questão nos suggere algumas duvidas que passamos a expôr. Devemos porém dizer desde já que a fauna das differentes ilhas não está ainda completamente estudada e que das differentes especies colhidas restam ainda bastantes por determinar. Certamente esta falta é importante mas não absoluta para tirar ou antever uma conclusão.

Devemos tambem dizer que o que se concluir a respeito de uma ilha se pode concluir sem grande esforço a respeito de todas as outras a que nos referimos. Posto isto entremos no assumpto.

A ilha de S. Thomé é uma ilha continental? Foi parte integrante do grande continente africano? A sua fauna diz-nos que sim. Em primeiro logar as ilhas continentaes teem mammiferos que faltam nas ilhas que tiveram qualquer das outras origens que mencionámos, e na ilha de S. Thomé existem além de diversas especies de morcegos, um mammifero (*Sorex thomensis*, Bocage) particular á ilha, uma donninha e o *Viverra civetta*, Schrb.

Os seus reptis e aves teem um cunho accentuadamente africano quando não são as proprias especies da costa vizinha.

Principalmente pelo valor d'esta primeira parte que acabamos de referir, a ilha de S. Thomé devia ser uma ilha continental.

Mas lembremo-nos do seguinte: que a donninha pode ter sido importada. Temos o exemplo nos Açores, classificados por todos como ilhas oceanicas em que este animal existe devido sem duvida ao transporte operado pelo homem. Bastará saber que os cultivadores de S. Thomé longe de destruir a donninha a defendem, impedindo que seja caçada para que esta crença se arreigue e avigore.

A *Viverra civetta* pode tambem ter sido importada, pois esta especie é domestica no Egypto e na Abyssinia. Os morcegos podem facilmente importar-se embora involuntariamente e fica-nos portanto apenas um mammifero que foi descripto pela primeira vez pelo sr. Barboza du Bocage e que até agora se encontrou apenas na ilha de S. Thomé. Mas é a Africa e principalmente a região vizinha de S. Thomé um continente tão explorado que possamos ter a certeza que o mammifero a que nos referimos pertencerá exclusivamente á ilha que nos referimos? Julgamos que não. Mas seria tambem um mammifero importado? Não podemos negar que é um pouco forçado concluir que assim é. Talvez seja.

Sabemos que nos Açores e outros archipelagos existem bastantes mammiferos evidentemente importados e em cuja importação directa o homem não interveiu.

Mas acceitamos por um momento os factos e em virtude da existencia dos mammiferos a que nos referimos concluamos que a ilha de S. Thomé é uma ilha continental.

Estudada porém a sua geologia conclue-se que differentes phenomenos de origem vulcanica contribuiram para a formação da ilha e para a sua constituição actual. Além d'isto grandes profundidades separam as differentes ilhas do golfo umas das outras e este facto é caracteristico das ilhas devidas a levantamentos da crosta do globo.

Serão então estas ilhas devidamente collocadas entre as ilhas oceanicas? Os factos relativos á sua flora corroboram esta asserção?

A fauna dos seus rios, os seus crustaceos, os seus peixes, proveem na maior parte da America. Este facto ficou devidamente posto em evidencia quando tentámos em diversas notas publicadas n'este jornal da fauna das differentes ilhas de Guiné, e agora n'este escripto quando enumeramos as especies americanas que se encontram na Africa.

Mas não são sómente as especies aquaticas que pertencem em grande quantidade ao Novo Mundo. Algumas especies terrestres vieram tambem de lá. O escorpião encontrado por Greeff pertence ás Antilhas; ás Antilhas pertencem quasi todos os crustaceos terrestres que nas differentes ilhas se encontram.

Estes factos firmarão de uma maneira mais segura a hypothese que apresentamos serem oceanicas as ilhas a que nos temos referido? Evidentemente teem um valor incontestavel.

Como os conciliar, porém, com os que se apresentam em defesa da idéa que as ilhas de que tratamos são *continentaes?*

Ainda a favor d'este modo de vêr não pode juntar-se a circumstancia importante que as differentes ilhas distam relativamente pouco da costa d'Africa, que ficam encravadas n'um golfo que bem pode ter sido formado por um rebaixamento de costa africana, sendo as ilhas actuaes as montanhas d'essa porção de terra submersa?

Como conciliar, porém, estas duas opiniões contradictorias?

Seria admissivel ainda um terceiro modo de vêr, que leva a presumir que um continente de que Platão nos deixou noticia, e que segundo elle existia em frente das columnas de Hercules, continente maior do que a Africa e a Asia juntas e que desappareceu no curto espaço de um dia e de uma noite deixando como testemunhos da sua existencia as suas montanhas mais altas, as ilhas que existem actualmente no Oceano Atlantico?

Deixemos de parte esta tradicção tantas vezes discutida e que os sacerdotes de Saïs guardavam nas suas inscripções.

Confinemos-nos n'um campo mais restricto serem as ilhas do golfo de Guiné ou oceanicas ou continentaes.

Qual das classificações defenderemos? Apezar da existencia de mammiferos inclinamo-nos para classificar as ilhas como ilhas oceanicas em virtude dos pontos apresentados e porque admittimos uma importação possivel dos mammiferos que na ilha de S. Thomé se encontram.

Um outro facto desejamos fazer realçar e com elle fecharemos este escripto. As variações existentes nos peixes de agua doce e que se encontram nos rios da America e das ilhas a que nos referimos, variações apresentadas por nós no nosso artigo *Les poissons d'eau douce des îles du golfe de Guinée*, publicado n'este jornal, são mais um argumento a favor da theoria do transformismo, argumento perfeitamente identico ao que se collige do estudo de outras faunas insulares.

LISTA DOS CRUSTACEOS

	Ilha de Cabo Verde	Bissau	Dahomé	Ilha de Fernão do Pó	Ilha do Principe	Ilha de S. Thomé	Ilheo das Rolas	Ilha de Anno Bom	Ilha de Elobey	Angola	America
1. *Leptopodia sagittaria*, Fabr.	+					+					+
2. *Micropisa violacea*, A. Edw.										+	
3. » *Bocagei*, Osorio										+	
4. *Xantho vermiculatus*, Lamk.										+	+
5. » *rivulosus*, Risso										+	
6. » *floridus*, Leach					+						
7. *Lambrus rugosus*, Stimps	+										
8. *Actea margaritaria*, A. Edw.						+					
9. *Panopeus Herbstii*, Edw.				+	+	+		+	+	+	+
10. *Chlorodius (Leptodius) convexus*, A. Edw.				+		+	+	+	+		
11. » *longimanus*, Edw.						+					
12. *Epixanthus Helleri*, A. Edw.				+		+		+		+	
13. *Pilumnus africanus*, A. Edw.	+							+		+	
14. *Neptunus diacanthus*, Latr.	+			+	+	+				+	+
15. » *marginatus*, A. Edw.		+									
16. » *hastatus*, Linn.						+					
17. » *validus*, Herkl.										+	
18. *Achelous ruber*, Lamk.						+				+	
19. *Thalamita integra*, Dana, var. α, Miers						+					+
20. *Thelphusa Bayoniana*, Capello										+	
21. » » var. α, Capello										+	
22. » *Anchietae*, Capello					+					+	
23. » *perlata*, A. Edw.										+	
24. » *dubia*, Capello						+				+	
25. » *margaritaria*, A. Edw.					+	+					
26. *Cardisoma armatum*, Herkl.	+	+				+				+	
27. » *guanhumi*, Margraff.	+				+					+	
28. *Gecarcinus ruricola*, Latr.				+	+	+	+	+			

	Ilha de Cabo Verde	Bissau	Dahomé	Ilha de Fernão do Pó	Ilha do Principe	Ilha de S. Thomé	Ilheo das Rolas	Ilha de Anno Bom	Ilha de Elobey	Angola	America
29. *Ocypoda ippeus*, Olivier					+	+		+		+	
30. » *Edwardsi*, Osorio			+	+	+						
31. *Gelasimus Tangeri*, Eydoux		+		+	+	+				+	
32. *Sesarma angolensis*, Capello										+	
33. » *africana*, Edw.		+								+	
34. » *violacea*, Herkl.										+	
35. *Grapsus pictus*, Latr.	+					+	+	+		+	+
36. *Goniograpsus cruentatus*, Latr.		+		+	+	+			+	+	+
37. » *plicatus*, Edw.	+										+
38. » *varius*, Latr.	+										
39. *Metopograpsus messor*, Edw.	+				+	+				+	
40. *Plagusia squamosa*, Lamk.	+					+		+		+	
41. *Acanthopus planissimus*, Herbst						+		+			
42. *Calappa granulata*, Linn.										+	
43. » *gallus*, Herbst	+				+	+				+	+
44. » *rubroguttata*, Herkl.						+				+	
45. *Dorippe armata*, Miers						+				+	
46. *Dromia vulgaris*, Edw.					+	+					
47. » *spinirostris*, Miers					+	+					
48. *Remipes scutellatus*, Fabr.	+		+			+	+	+			
49. *Pagurus calidus*, Risso	+										
50. » *striatus*, Latr.					+						
51. *Clibanarius vulgaris*, Dana	+			+	+					+	
52. » *æquabilis*, Dana					+						
53. *Cœnobita rugosus*, Edw				+	+	+	+	+			
54. » *rubescens*, Greeff						+					
55. *Petrochirus cavitarius*, Osorio	+				+					+	
56. *Porcellana speciosa*, Dana				+	+	+			+		+
57. » *Mattosoi*, Osorio										+	
58. » *bella*, Osorio										+	
59. *Megalops mutica*, Desmarest						+					
60. *Scyllarus latus*, Latr.	+	+									
61. *Panulirus regius*, Capello	+					+				+	

	Ilha de Cabo Verde	Bissau	Dahomé	Ilha de Fernão do Pó	Ilha do Principe	Ilha de S. Thomé	Ilheo das Rolas	Ilha de Anno Bom	Ilha de Elobey	Angola	America
62. *Atya scabra*, Leach	+				+	+		+		+	+
63. *Alpheus intrinsecus*, Sp. Bate						+					+
64. » *tuberculosus*, Osorio						+					
65. » *paracrinitus*, Míers						+				+	
66. *Hippolyte* sp.?						+					
67. *Palemon jamaicensis*, Olivier	+			+		+				+	+
68. » *squilla*, Fabr.	+										
69. » *Olfersi*, Wiegm.				+	+	+		+			+
70. *Penaeus caramote*, Risso										+	
71. » *canaliculatus*, Olivier	+	+								+	+
72. » *brasiliensis*, Latr.						+					+
73. » *affinis*, Edw.	+	+									
74. » *velutinus*, Dana						+					
75. *Squilla empusa*, Say		+	+			+				+	
76. » *Haevenii*, Herkl.	+					+				+	
77. *Lysiosquilla scabricauda*, Lamk.						+					
78. *Gonodactylus Folinii*, A. Edw.						+		+			
79. *Armadillo officinalis*, Desm.					+	+					
80. » *nigricans*? Brandt.						+					
81. *Cymothoa Dufresnii*, Leach.						+		+			
82. *Ceratothoa oestroides*, Edw					+					+	
83. *Balanus tintinabulum*, Linn.										+	
84. *Chelonobia testudinaria*, Linn.						+					
85. *Pollicipes polymerus*, Sowerby										+	
86. *Lepas anserifera*, Linn.						+					

LISTA DOS PEIXES MARITIMOS

	Ilha de Cabo Verde	Bissau	Dahomé	Ilha de Fernão do Pó	Ilha do Principe	Ilha de S. Thomé	Ilheo das Rolas	Ilha de Anno Bom	Angola	America
1. *Myripristis viridensis*, Troschel	+				+					
2. » *jacobus*, Cuv. et Val.								+		
3. *Holocentrum longipine*, Cuv. et Val.					+	+		+		
4. » *hastatum*, Cuv. et Val.	+				+	+				
5. *Anthias sacer*, Bl.						+				
6. » *furcifer*, Cuv. et Val.				+	+	+	+	+		
7. *Serranus cabrilla*, Cuv. et Val.						+				
8. » *guttatus*, Bl.									+	
9. » *nigri*, Gunth.				+		+	+			
10. » *gigas*, Brünn.									+	
11. » *taeniops*, Cuv. et Val.	+				+	+	+		+	
12. » *goreensis*, Cuv. et Val.									+	
13. » *erythrogaster*, Deckay.						+				
14. » *aeneus*, Geoffr.						+			+	
15. » *capreolus*, Poey.					+	+	+	+		
16. » *linaetus?* Cuv. et Val.									+	
17. » *armatus*, Osorio						+				
18. *Rhypticus saponaceus*, Cuv. et Val.						+		+		
19. » *arenatus*, Cuv. et Val.								+	+	
20. *Apogon imberbis*, Linn.						+				
21. *Lutjanus Maltzani*, Steind.				+	+	+				
22. » *jocu*, Cuv. et Val.				+	+	+				
23. » *eutactus*, Blkr.						+			+	
24. » *agenes*, Blkr.						+				
25. *Pomatomus telescopium*, Risso						+				
26. *Haemulon macrophthalmum*, Osorio						+	+			
27. *Diagramma cavifrons?* Cuv. et Val.						+				
28. » *octolineatum*, Cuv. et Val.									+	

	Ilha de Cabo Verde	Bissau	Dahomé	Ilha de Fernão do Pó	Ilha do Principe	Ilha de S. Thomé	Ilheo das Rolas	Ilha de Anno Bom	Angola	America
29. *Pristipoma macrophthalmum*, Blkr.									+	
30. » *Rogerii*, Cuv. et Val.									+	
31. » *Perotaei*, Cuv. et Val.						+			+	
32. » *suillum*, Cuv. et Val.						+		+	+	
33. » *bennettii*, Lowe	+				+	+	+		+	
34. *Lobotes auctorum*, Gunth.					+					
35. *Gerres melanopterus*, Blkr.				+	+	+				
36. *Dentex macropthalmus*, Blkr.										
37. » *filosus*, Val.						+			+	
38. *Genyatremus angustifrons*, Trosch.										
39. *Smaris melanurus*, Cuv. et Val.								+	+	
40. *Mullus surmuletus*, Linn.										
41. *Upeneus prayensis*, Cuv. et Val.							+			
42. *Cantharus lineatus*, Montagu.									+	
43. *Box salpa*, Linn.									+	
44. » *vulgaris*, Cuv. et Val.						+			+	
45. *Oblata melanura*, Linn.									+	
46. *Sargus Rondeletii*, Cuv. et Val.									+	
47. » *cervinus*, Lowe									+	
48. » *fasciatus*, Cuv. et Val.	+									
49. *Lethrinus atlanticus*, Cuv. et Val.	+				+	+	+			
50. *Pagrus vulgaris*, Cuv. et Val.						+				
51. » *Ehrenbergi*, Cuv. et Val.							+		+	
52. *Pagellus Bellottii*, Steind.						+			+	
53. » *mormyrus*, Linn.	+								+	
54. *Chrysophrys coeruleosticta*, Cuv. et Val.									+	
55. *Chaetodon striatus*, Linn.						+				
56. » *Hoefleri*, Steind.									+	
57. *Ephippus gigas*, Cuv.					+	+				
58. *Drepane punctata*, Cuv. et Val. var. *africana*, Osorio.							+		+	
59. *Sebastes Kuhlii*, Bowd.						+				
60. *Scorpaena senegalensis*, Steind.						+				
61. » *laevis*, Trosch.	+								+	

	Ilha de Cabo Verde	Bissau	Dahomé	Ilha de Fernão do Pó	Ilha do Principe	Ilha de S. Thomé	Ilheo das Rolas	Ilha de Anno Bom	Angola	America
62. *Dactylopterus volitans*, Linn.	+								+	
63. *Trachinus armatus*, Schlg.									+	
64. » *aranaeus*, Risso									+	
65. » *radiatus*, Cuv. et Val.						+				
66. *Umbrina cirrosa*, L., var. *Canariensis*, Val.									+	
67. *Corvina nigrita*, Cuv.		+								
68. *Pseudotolithus brachygnatus*, Blkr.									+	
69. » *macrognatus*, Blkr									+	
70. *Galeoides polydactylus*, Vahl.						+			+	
71. *Pentanemus quinquarius*, Linn.		+							+	
72. *Sphyraena Bocagei*, Osorio						+	+	+		
73. » *vulgaris*, Cuv. et Val.									+	
74. » *dubia*, Blkr.	+								+	
75. *Trichiurus lepturus*, Linn.									+	
76. *Pelamys sarda*, Cuv. et Val.									+	
77. *Cybium tritor*, Cuv. et Val.					+					
78. » *maculatum?* Agass.						+				
79. *Naucrates ductor*, Cuv. et Val.								+		
80. *Echeneis naucrates*, Linn.					+	+				
81. » *remora*, Linn.	+	+						+		
82. *Nomeus gronovii*, Gm.						+				
83. *Trachurus trachurus*, Linn.						+			+	
84. *Cirrihites atlanticus*, Osorio							+			
85. *Blepharis sutor*, Cuv. et Val.	+									
86. *Caranx crumenophthalmus*, Lacep.	+						+	+		
87. » *punctatus*, Agass.								+		
88. » *jacobaeus*, Cuv. et Val.	+									
89. » *carangus*, Cuv. et Val.				+	+		+			
90. » *alexandrinus*, Geoff.						+			+	
91. *Argyreiosus setipinnis*, Gunth.	+			+	+				+	
92. » *vomer*, Linn.				+						
93. *Micropteryx chrysurus*, Linn.						+			+	
94. *Temnodon saltator*, Bl.						+			+	

	Ilha de Cabo Verde	Bissau	Dahomé	Ilha de Fernão do Pó	Ilha do Principe	Ilha de S. Thomé	Ilheo das Rolas	Ilha de Anno Bom	Angola	America
95. *Lichia amia*, Linn.						+			+	
96. *Lichia glauca*, Linn.	+				+	+	+	+	+	
97. *Trachinotus goreensis*, Cuv. et Val.				+		+				
98. » *myrias*, Cuv. et Val.									+	
99. *Psetus sebae*, Cuv. et Val.			+							
100. *Periophthalmus papilio*, Bl.				+	+	+			+	
101. *Antennarius vulgaris*, Cuv. et Val.						+				
102. » *pardalis*, Cuv. et Val.	+	+								
103. *Blennius galerita*, L.						+				
104. *Salarias atlanticus*, Cuv. et Val.								+		
105. *Clinus nuchipinnis*, Quoy et Gaim.	+			+	+	+		+		
106. *Acanthurus chirurgus*, Bloch.	+					+				
107. *Atherina Boyeri*, Risso	+					+		+		
108. *Mugil brasiliensis*, Agass.	+					+				
109. » *schlegeli*, Forsk.		+								
110. » *chelo*, Cuv.						+				
111. *Eleotris africana*, Steind.									+	
112. *Fistularia tabaccaria*, Linn.	+					+		+	+	
113. *Gerres melanopterus*, Blkr.						+				
114. *Aulostoma coloratum*, Bull. et Trosch.		+				+		+	+	
115. *Pomacentrus leucostictus*, Mull. et Trosch.						+				
116. *Gliphidodon saxatilis*, Linn.	+			+	+	+		+		
117. » *luridus*, Brouss.	+									
118. » *Hoefleri*, Steind.							+			
119. » *chrysurus*, Cuv. et Val.							+	+		
120. *Cossyphus tredecimspinosus*, Gunth.						+				
121. *Labrus yagonensis*, Bowd.	+									
122. *Heliastes marginata*, Casteln.						+				
123. *Novacula cultrata*, Gunth.	+					+	+			
124. *Julis pavo*, Hasselgu.						+		+	+	
125. » *Newtoni*, Osorio						+				
126. *Coris atlantica*, Gunth.						+				
127. » *guineensis*, Blkr.						+	+			

	Ilha de Cabo Verde	Bissau	Dahomé	Ilha de Fernão do Pó	Ilha do Principe	Ilha de S. Thomé	Ilhéo das Rolas	Ilha de Anno Bom	Angola	America
128. *Scarus cretensis*, Aldrov.	+					+	+			
129. » *radians*, Cuv. et Val.								+		
130. » *squalidus*, Poey	+									
131. *Pseudoscarus Hoefleri*, Steind.						+				
132. *Chromis macrocephalus*, Blkr.									+	
133. » *acuticeps*, Steind.										
134. *Hemichromis bimaculatus*, Gill.		+								
135. *Hemirhombus aramaca*, Cuv.					+	+	+			
136. » *guineensis*, Blkr.						+				
137. *Clarias anguillaris*, Linn.			+							
138. *Chrysichthys nigrodigitatus*, Lacep.		+	+							
139. *Arius Capellonis*, Steind.	+								+	
140. *Psetodes erumei*, Bl.		+								
141. *Rhomboidiçthys podas*, Delar						+				
142. » *lunatus*, Linn.							+			
143. *Saurus intermedius*, Spix.						+				
144. » *myops*, Cuv. et Val.						+				
145. *Belone Lovii*, Gunth.						+		+		
146. » *choram*, Forsk.						+				
147. » *raphidoma*, Ranzani						+				
148. *Scopelus benoiti*, Cocco.						+				
149. *Cynoglossus goreensis*, Steind.									+	
150. » *senegalensis*, Kaup.		+								
151. *Arnoglossus aspilus*, Blkr.									+	
152. *Hemirhamphus vittatus*, Valenc.						+			+	
153. » *Schlegeli*, Steind.		+				+			+	
154. *Exocoetus lineatus*, Cuv. et Val.	+					+				
155. » *bahiensis*, Rang.								+		
156. » *obtusirostris*, Gunth.			+							
157. *Clupea maderensis*, Lowe						+		+	+	
158. » *senegalensis*, Benn.						+				
159. *Pellona africana*, Bl.		+							+	
160. *Conger macrops*, Gunth.	+							+		

	Ilha de Cabo Verde	Bissau	Dahomé	Ilha de Fernão do Pó	Ilha do Principe	Ilha de S. Thomé	Ilheo das Rolas	Ilha de Anno Bom	Angola	America
161. *Ophichthys triserialis,* Kaup.	+	+				+				+
162. » *serpens,* Lacep.								+		
163. » *pardalis,* Valenc.	+					+		+		
164. » *havannensis,* Bl.	+									
165. » *(Sphagebranchus) guineensis,* Osorio		+				+				
166. *Myroconger compressus,* Gunth.						+				
167. *Muraena melanotis,* Kaup.	+					+		+	+	
168. » *afra,* Lacep.								+		
169. » *maculipinnis,* Kaup.	+					+				
170. *Poecilophis Peli,* Kaup.									+	
171. *Gymnomuraena vittata,* Richards.							+			
172. *Enchelycore nigricans,* Bonaterre						+				
173. *Hippocampus guttulatus,* Cuv.	+					+			+	
174. *Balistes forcipatus,* Gm.	+					+		+	+	
175 » *capriscus,* Gm.									+	
176. » *buniva,* L.							+			
177. *Monocanthus pardalis,* Rupp.					+			+		
178. » *setifer,* Benn.						+				
179. » *scriptus,* Osbeck.	+									
180. *Ostracion quadricornis,* L.				+	+	+	+		+	
181. *Tetrodon guttifer,* Bennett.		+							+	
182. » *lagocephalus,* Linn.									+	
183. » *laevigatus,* Linn.									+	
184. » *spengleri,* Bloch.						+			+	
185. *Diodon histrix,* Linn.						+				
186. *Chilomycterus antennatus,* Cuv				+						
187. » *geometricus,* Bl.				+						
188. *Poecilia spilargyreia,* Dumer.	+					+			+	
189. *Carcharias (Scoliodon) walbenii,* Blkr.	+					+				
190. » *(Prionodon) glaucus,* Mull. et Heul.						+				
191. *Zygaena tudes,* Val.						+				
192. *Ginglymostoma cirratum,* Gm.	+									
193 *Scyllium canicula,* Linn.			+					+		

	Ilha de Cabo Verde	Bissau	Dahomé	Ilha de Fernão do Pó	Ilha do Principe	Ilha de S. Thomé	Ilheo das Rolas	Ilha de Anno Bom	Angola	America
194. *Acanthias blainvillii*, Risso			+					+		
195. *Pristis pectinatus*, Latham									+	
196. *Rhinobatus Colomnae*, Mull. et Henl.									+	
197. » *undulatus*, Olfers			+					+		
198. » *halavi*, Forsck									+	
199. » *granulatus*, Cuv.	+									
200. *Torpedo hebetans*, Lowe						+				
201. » *narce*, Nardo							+			
202. *Aëtobatis narinari*, Euphras									+	
203. *Raja maderensis*, Lowe			+					+		
204. *Trygon margarita*, Gunth									+	
205. *Taeniura grabatus*, Mull. et Henl	+									

LISTA DOS PEIXES DE AGUA DOCE

	Ilha de Cabo Verde	Bissau	Dahomé	Ilha de Fernão do Pó	Ilha do Principe	Ilha de S. Thomé	Ilheo das Rolas	Ilha de Anno Bom	Angola	America
1. *Gobius lanceolatus*, Bl.		+	+							+
2. » *Mendroni*, Svg.						+		+		+
3. » *Bustamantei*, Greeff.						+				+
4. » *soporator*, Cuv. et Val.						+				+
5. *Sycidium plumieri*, Bl.				+		+		+		+
6. *Eleotris gyrinus*, Cuv. et Val.				+	+	+		+		+
7. » *dormitatrix*, Cuv. et Val.				+						+
8. *Mugil brasiliensis*, Agass.						+				+

PREÇO D'ESTE NUM. 500 RÉIS

Acha-se á venda no Deposito de impressos da Academia.

A correspondencia deve ser dirigida, *franca de porte,* á Redacção do JORNAL DE SCIENCIAS MATHEMATICAS, PHYSICAS e NATURAES, na Academia Real das Sciencias de Lisboa, rua do Arco (a Jesus).