COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS

PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS

SUR

LES FONCTIONS DISCONTINUES

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

René BAIRE,

MAÎTRE DE CONFÉRENCES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER

RÉDIGÉES

PAR

A. DENJOY,

ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

PARIS

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1905

LEÇONS

SUR

LES FONCTIONS DISCONTINUES.

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL.

LEÇONS

SUR

LES FONCTIONS DISCONTINUES

PROFESSÉES AU COLLÈGE DE FRANCE

PAR

René BAIRE,
MAÎTRE DE CONFÉRENCES
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE MONTPELLIER.

RÉDIGÉES

PAR

A. DENJOY,
ELÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

PRÉFACE.

Si l'on jette un coup d'œil sur le début d'un Cours d'Analyse classique, une chose ne manquera pas de frapper l'esprit. Les notions fondamentales sont présentées tout d'abord au moyen d'une définition extrêmement générale; puis, immédiatement après, des restrictions sont apportées à ces définitions, de manière à limiter le champ d'études, et c'est grâce à cette limitation qu'il est possible d'aller de l'avant et de construire les différentes théories qui constituent la science mathématique.

Il est alors légitime de rechercher s'il n'est pas possible, en remontant aux définitions premières, d'en tirer des conséquences intéressantes tout en leur conservant autant que possible leur généralité. On peut ainsi se proposer de constituer, à côté de l'Analyse courante, une autre branche de l'Analyse, qui, bien entendu, suivra de très loin la première, en tant que quantité de résultats acquis, mais qui, en revanche, aura l'avantage de fournir des énoncés plus complets.

A cette partie des Mathématiques se rattachent les travaux, déjà nombreux, faits en ces quarante dernières années, sur les fonctions discontinues, les fonctions sans dérivées, les fonctions pourvues de dérivées de tous ordres, mais non développables en série de Taylor, l'intégration des fonctions les plus générales, la définition générale des courbes fermées dans le plan, etc.

Il est bien remarquable d'ailleurs que l'Analyse courante ne peut pas indéfiniment se passer des considérations qui font l'objet de la branche dont nous parlons. Les singularités de toutes sortes, les discontinuités, par exemple, s'introduisent d'elles-mêmes, qu'on le veuille ou non, dans des questions d'où le chercheur aurait souhaité les écarter.

Cette assertion paraît d'ailleurs confirmée au point de vue historique. Paul du Bois-Reymond déclare, dans la préface de son ouvrage philosophique sur la *Théorie des fonctions,* que c'est « le besoin de voir clair dans les intégrales des équations différentielles du second ordre » qui l'a conduit à faire une étude approfondie de la notion même de fonction. M. Georg Cantor paraît, lui aussi, avoir été amené à ses belles conceptions sur la théorie des ensembles en cherchant à étendre certains résultats relatifs aux séries trigonométriques.

Au point de vue des applications, il peut sembler prématuré de se demander si de telles considérations peuvent avoir quelque importance pratique. Cependant, il est bien permis de remarquer que, dans l'interprétation mathématique des phénomènes naturels, on fait tour à tour, et en quelque sorte suivant les besoins de la cause, appel aux deux notions de continu et de discontinu. S'il est vrai par exemple qu'en Mécanique on suppose en général que les vitesses varient d'une manière continue, dans la théorie des chocs et des percussions, on raisonne comme si ces vitesses subissaient des variations brusques. Il ne s'agit que d'approximations, c'est entendu; mais on voit que le discontinu, tout comme le continu, peut servir dans l'approximation. Certaines théories de Physique, de Chimie, de Minéralogie, ne sont pas sans présenter quelque analogie avec le discontinu mathématique. Dans tous les cas, en dépit du vieil adage heureusement démodé, rien ne permet d'affirmer que « la nature ne fait pas de sauts ». Dans ces conditions, le devoir du mathématicien n'est-il pas de commencer par étudier, *in abstracto,* les rapports de ces deux notions, continu et discontinu, qui, tout en s'opposant l'une à l'autre, sont intimement liées entre elles? C'est peut-être là le meilleur moyen de préparer l'avènement d'une Physique mathématique dans laquelle la part de l'hypothèse serait réduite au minimum.

Le présent ouvrage, que M. Borel a bien voulu m'offrir de publier dans sa *Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions,* contient la matière des leçons que j'ai professées en 1904 au Collège de France (Cours de la fondation Peccot) sur un sujet qui rentre dans l'ordre d'idées que je viens de définir.

Le sujet et le plan du livre peuvent être définis en deux mots. Me proposant de rechercher toutes les fonctions discontinues représentables par des séries de fonctions continues, j'étudie en détail, à mesure qu'elles se présentent, toutes les notions et les théories qui me sont utiles pour donner la solution de ce problème.

Comme, suivant le principe adopté pour les livres déjà parus dans cette collection, je ne suppose connues du lecteur que les notions courantes (en y faisant rentrer les notions de dénombrabilité et de puissance, étudiées à fond dans les *Leçons sur la théorie des fonctions,* de M. Borel), je suis amené à traiter différentes théories relatives aux ensembles de points, en les reprenant au point de départ. J'étudie ainsi successivement les notions d'ensembles fermés, parfaits, non denses, ensembles dérivés de tous les ordres. Il m'a paru avantageux, pour éclaircir ces différentes notions, d'insister plus particulièrement sur le cas des ensembles linéaires, pour lequel il est assez facile de présenter les choses d'une manière en quelque sorte visible.

Il m'est nécessaire d'introduire dans ces études la notion du transfini de M. G. Cantor. Cette notion, encore neuve en Mathématiques, a déjà prêté à des controverses philosophiques, sans doute parce que, présentée d'une certaine manière, elle paraît entourée d'un caractère un peu mystérieux. Rappelons-nous que la même chose est arrivée jadis pour les imaginaires. Je crois fermement que, là comme ailleurs, il est aisé au mathématicien de se placer sur un terrain solide. C'est ce que j'essaie de montrer dans le Chapitre II, qui est entièrement consacré à cette théorie. L'exposition que j'ai adoptée est conforme, dans son plan général, à celle que M. G. Cantor a suivie dans ses dernières publications; mais je l'ai modifiée de manière à n'en conserver que ce qui m'est utile pour les applications que j'ai en vue, et d'autre part j'ai cherché à l'éclaircir au moyen d'exemples concrets.

La publication de ces leçons m'a été considérablement facilitée par le concours que m'a apporté un de mes auditeurs, M. Denjoy, en se chargeant d'en effectuer la rédaction. Je lui en adresse tous mes remercîments.

Paris, le 22 septembre 1904.

LEÇONS

SUR

LES FONCTIONS DISCONTINUES.

CHAPITRE I.

PREMIÈRES RECHERCHES SUR LES FONCTIONS DISCONTINUES.

I. — *Exemples simples.*

1. Un des exemples les plus classiques de fonctions discontinues développables en séries de fonctions continues est fourni par certaines séries trigonométriques. Prenons comme point de départ l'égalité suivante :

$$(1)\qquad \log(1-z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n} + \ldots.$$

dont on établit, dans la théorie des fonctions analytiques, la validité sous la condition que l'on ait : $|z| \leqq 1$ avec $z \neq -1$. Dans ces conditions, le premier membre représente la détermination du logarithme qui, partant de la valeur o, pour $z = 0$, varie d'une façon continue, quand le point figuratif de z se déplace d'une manière continue à l'intérieur du cercle de convergence, et même sur ce cercle en évitant le point $z = -1$.

Posons

$$z = e^{ix},$$

en supposant x réel et compris entre $-\pi$ et $+\pi$ (ces deux valeurs étant exclues). On peut écrire

$$z = \cos x + i \sin x.$$

On a donc

$$z^n = \cos nx + i \sin nx.$$

Le point figuratif de z prend toutes les positions possibles sur le cercle de convergence, sauf la position $z = -1$. On a

$$\log(1 + z) = \sum (-1)^{n+1} \frac{\cos nx + i \sin nx}{n}.$$

D'autre part, on peut écrire

$$1 + z = 2 \cos \frac{x}{2} \left(\cos \frac{x}{2} + i \sin \frac{x}{2} \right).$$

Comme x est compris entre $-\pi$ et $+\pi$, $\cos \frac{x}{2}$ est positif. Donc, $1 + z$ a pour module $2 \cos \frac{x}{2}$, et pour argument $\frac{x}{2} + 2k\pi$. Donc, les différentes déterminations de $\log(1 + z)$ sont comprises dans la formule

$$\log(1 + z) = \log \text{ réel de} \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) + i \left(\frac{x}{2} + 2k\pi \right),$$

k étant un nombre entier.

Cela posé, si nous égalons les coefficients de i dans les deux membres de l'équation (1), nous avons, toujours sous l'hypothèse : $-\pi < x < \pi$,

$$\frac{x}{2} + 2k\pi = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \ldots.$$

En faisant $x = 0$, on reconnaît que $k = 0$. On a donc

$$(2) \qquad \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \ldots,$$

sous la condition

$$-\pi < x < \pi.$$

Achevons l'étude de la fonction représentée par la série qui figure au second membre de (2). Tous les termes du second membre admettent la période 2π. Cette série peut donc être considérée comme connue pour les valeurs de x comprises dans les intervalles

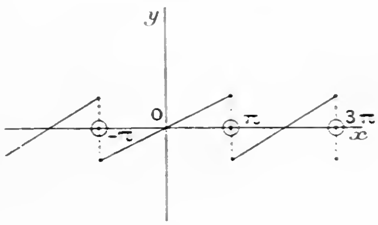
$$\pi < x < 3\pi, \qquad 3\pi < x < 5\pi, \qquad \ldots$$

et

$$-\pi > x > -3\pi, \qquad -3\pi > x > -5\pi, \qquad \ldots$$

Il reste à voir ce qu'est la série pour les valeurs de x égales à π, 3π, 5π, ..., $-\pi$, -3π, ... On reconnaît directement que la série a tous ses termes nuls pour ces valeurs. Nous constatons ainsi que la série $\sum (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$ est convergente quel que soit x, mais représente une fonction $f(x)$ discontinue. Elle serait géométrique-

Fig. 1.



ment représentée par une succession de segments de droites et de points isolés (*fig.* 1).

2. Plaçons-nous maintenant à un point de vue différent. Donnons-nous *a priori* une fonction discontinue $f(x)$, et cherchons à la représenter par une série dont tous les termes soient des fonctions continues de x. Je dis d'abord qu'il revient au même de rechercher une suite de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ telles que, pour chaque valeur x_0 de x, on ait

$$\lim_{n=\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

ce que nous exprimons en disant que la suite $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, a pour limite f. En effet, étant donnée une série à termes continus $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ la somme $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, qui est continue, a pour limite f; et réciproquement s'il existe une suite de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, ayant pour limite f, en posant

$$u_1 = f_1, \quad u_2 = f_2 - f_1, \quad \ldots,$$

on a une série de fonctions continues dont la somme est f.

Comme exemple, nous prendrons la fonction $f(x)$ définie pour $-1 \leqq x \leqq 1$, égale à o pour toute valeur de x sauf pour la valeur o pour laquelle elle est égale à 1. Soit n un nombre entier; nous définirons une fonction continue f_n de la manière suivante :

Pour

$$-1 \leqq x \leqq -\frac{1}{n},$$

et pour

$$\frac{1}{n} \leqq x \leqq 1,$$

on a

$$f_n = 0.$$

Pour $x = 0$, $f_n = 1$. Dans chacun des intervalles $-\frac{1}{n}$ à o, et o à $\frac{1}{n}$, f_n variera *linéairement*, c'est-à-dire que l'on aura

$$f_n(x) = 1 + nx \qquad \left(-\frac{1}{n} \leqq x \leqq 0\right),$$

$$f_n(x) = 1 - nx \qquad \left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{n}\right).$$

La fonction f_n ainsi définie est continue. Je dis que l'on a

$$\lim f_n(x) = f(x),$$

quel que soit x. En effet, distinguons deux cas :

1° Supposons $x = 0$. Dans ce cas, quel que soit n, $f_n = 1$, c'est-à-dire $f_n = f$; 2° Si x est différent de o, il y a un entier p, tel que, pour $n > p$, on a

$$\frac{1}{n} < |x|.$$

A partir de ce moment, on a

$$f_n(x) = 0,$$

et comme $f(x) = 0$, la propriété est encore vraie.

3. Comparons les deux exemples étudiés. On voit que, par le second, l'existence de fonctions discontinues limites de fonctions

continues est mise en évidence d'une façon beaucoup plus directe que par le premier. Il y a lieu d'appeler l'attention à ce propos sur les deux manières différentes dont s'introduit la notion de fonction en mathématiques.

Dans le premier exemple, on partait du procédé habituel qui consiste à définir un petit nombre de fonctions simples représentées par des notations conventionnelles et à considérer les fonctions qui s'obtiennent par combinaisons de ces premières fonctions.

Dans le second exemple, on n'a imposé aucune restriction à la notion de fonction. On s'est attaché seulement à ce que les fonctions que l'on considère soient définies pour chaque valeur de x, le procédé de définition pouvant être choisi d'une manière complètement arbitraire.

D'autre part, l'exemple de la série

$$\sum (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}$$

montre que, même en se plaçant au premier point de vue, il arrive un moment où l'on se trouve nécessairement conduit à introduire des fonctions présentant des singularités. Cela arrive en particulier quand on considère des séries, c'est-à-dire quand on introduit la notion de limite.

4. La méthode employée pour le second exemple peut s'appliquer à une fonction quelconque présentant une seule discontinuité. Soit en effet $f(x)$ une fonction définie pour $a \leqq x \leqq b$, et qui soit continue en tout point de cet intervalle, sauf pour la valeur $x = c$. Considérons un intervalle $(c - \alpha_n, c + \alpha_n)$, α_n étant un nombre positif qui tendra vers o quand n croîtra indéfiniment. Nous définirons f_n comme il suit : f_n sera égale à f pour toute valeur de x prise dans l'intervalle (a, b), en dehors de l'intervalle $(c - \alpha_n, c + \alpha_n)$, et aussi pour $x = c$. Dans chacun des deux intervalles $(c - \alpha_n, c)$ et $(c, c + \alpha_n)$, f_n variera linéairement (c pourrait être l'une des extrémités a ou b, auquel cas on ne considérerait qu'une moitié de l'intervalle $c - \alpha_n$ à $c + \alpha_n$). On reconnaît que la fonction f_n ainsi définie est continue et tend vers f.

II. — *Théorèmes fondamentaux sur les fonctions limites de fonctions continues.*

5. L'étude que nous nous proposons est celle des *fonctions discontinues* qui sont *limites de fonctions continues.*

Nous nous limiterons d'abord aux fonctions discontinues dépendant d'une *seule variable* x, qui prendra toutes les valeurs d'un intervalle *fini* (a, b); nous supposerons de plus ces fonctions *bornées*, c'est-à-dire comprises entre des limites finies.

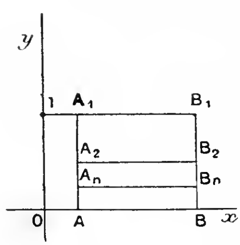
Transformons tout d'abord le problème de la construction d'une suite de fonctions continues tendant vers une fonction discontinue $f(x)$.

Supposons que $f(x)$ soit limite d'une suite de fonctions continues

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad \ldots, \quad f_n(x), \quad \ldots.$$

L'ensemble des valeurs des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$, peut être considéré comme fonction des deux variables x et n ; à la variable n, qui ne peut prendre que des valeurs entières, nous allons substituer une variable continue y. Nous introduisons une fonction $F(x, y)$ que nous assujettissons comme première condition à se réduire pour $y = 0$ à $f(x)$ et pour $y = \frac{1}{n}$ à $f_n(x)$. Représentons géométriquement les valeurs des deux variables x et y (*fig.* 2); x varie

Fig. 2.



entre a et b représentés par les points A et B; y prend toutes les valeurs de 0 à 1. Nous mettons en évidence les droites A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n, ... d'ordonnées $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots.$

Par définition, la fonction $F(x, y)$ doit être égale, sur le segment AB, à $f(x)$, sur le segment $A_n B_n$, à $f_n(x)$.

Je dis que l'on pourra construire la fonction $F(x, y)$ en l'assujettissant en outre à être *continue par rapport à l'ensemble des deux variables* dans tout le rectangle ABA_1B_1, sauf sur AB.

Il nous suffira de prendre la loi suivante. Sur une parallèle quelconque à Oy, $x = x_0$, entre deux valeurs consécutives de y de la forme $\frac{1}{n}$, la fonction variera *linéairement* par rapport à y : on aura donc, pour $\frac{1}{n+1} \leqq y \leqq \frac{1}{n}$,

$$F(x, y) = \alpha y + \beta,$$

α et β étant fonctions de x seul ; ces fonctions sont déterminées par les conditions

$$f_n(x) = \frac{\alpha}{n} + \beta, \qquad f_{n+1}(x) = \frac{\alpha}{n+1} + \beta,$$

d'où résulte, pour $\frac{1}{n+1} \leqq y \leqq \frac{1}{n}$,

$$(1) \qquad F(x, y) = n(n+1)\left[\left(y - \frac{1}{n+1}\right)f_n(x) + \left(\frac{1}{n} - y\right)f_{n+1}(x)\right].$$

F est ainsi définie dans tout le rectangle ABA_1B_1. Je dis que cette fonction satisfait à la condition de continuité. Pour un point dont l'ordonnée n'est pas de la forme $\frac{1}{n}$, l'expression (1) de la fonction montre sa continuité. Pour un point situé sur un segment $A_n B_n$, on voit que $F(x, y)$ revêt de part et d'autre de ce segment deux expressions différentes, toutes deux continues, et prenant toutes les deux sur ce segment les mêmes valeurs ; la fonction F est donc continue par rapport à l'ensemble (x, y) en chaque point du segment, et, par suite, en tout point du rectangle ABA_1B_1, sauf peut-être sur le segment AB.

Enfin, *en tout point* M *de* AB, *la fonction* $F(x, y)$ *est continue par rapport à* y. Il faut montrer que, pour un point variable d'abscisse fixe x_0 et d'ordonnée y, positive et tendant vers zéro, la valeur correspondante de la fonction tend vers $F(x_0, 0) = f(x_0)$.

Soient en effet $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ (*fig.* 3) les points d'abscisse x_0 situés sur les segments $y = \frac{1}{n}$. Notre hypothèse première est que la suite $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ a pour limite f. Autrement dit $F\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ tend vers $f(x_0)$ quand n croît indéfiniment. Or, étant donné un point M′ d'abscisse y' tendant vers zéro d'une façon quelconque, il existe un nombre entier n et un seul, tel que

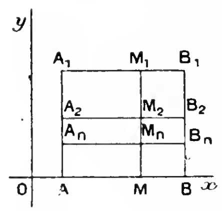
$$\frac{1}{n+1} \leqq y' < \frac{1}{n},$$

et, quand y' tend vers o, n croît indéfiniment.

La fonction variant *linéairement* par rapport à y quand x est fixe, la valeur pour y' est comprise entre les valeurs pour $y = \frac{1}{n+1}$ et $y = \frac{1}{n}$. Comme $F\left(x_0, \frac{1}{n+1}\right)$ et $F\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ tendent vers $f(x_0)$, $F(x_0, y')$ tend aussi vers $f(x_0)$, c'est-à-dire vers $F(x_0, o)$.

Il y a donc continuité en tout point M de AB par rapport à y.

Fig. 3.



Réciproquement, supposons que l'on connaisse une fonction F (x, y) telle que, x variant dans un certain intervalle représenté par AB, et y de o à y_1, la fonction considérée soit partout continue par rapport à (x, y), sauf aux points de Ox, où elle est seulement continue par rapport à y. Je dis que la fonction $f(x) = F(x, o)$, qui peut être une fonction discontinue, est limite de fonctions continues.

Prenons en effet une suite de valeurs $y_1, \ldots, y_n, \ldots$, décroissantes et tendant vers o. Considérons les parallèles à Ox d'ordonnée $y_1, \ldots, y_n, \ldots$ Posons

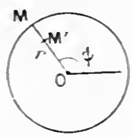
$$F(x, y_n) = f_n(x).$$

D'après nos hypothèses, f_n est continue. De plus, si l'on considère une parallèle à Oy, $x = x_0$, d'après la continuité par rapport à y au point (x_0, o), la suite des nombres $F(x_0, y_1), \ldots, F(x_0, y_n), \ldots$ a pour limite $F(x_0, o)$, c'est-à-dire que $f_1(x_0), \ldots, f_n(x_0), \ldots$ a pour limite $f(x_0)$.

Ceci ayant lieu quel que soit x_0, $f(x)$ est la limite des fonctions continues f_n.

On pourrait généraliser ceci en remplaçant Ox par une courbe. Par exemple, supposons une fonction définie dans un cercle de rayon R et sur son contour (*fig.* 4), cette fonction étant continue pour tout point intérieur, et jouissant sur le contour de la propriété suivante : la valeur de la fonction en un point M′ mobile sur le rayon OM tend vers la valeur en M quand M′ tend vers M

Fig. 4.



(continuité suivant la normale). Prenons, pour coordonnées d'un point, son argument ψ et sa distance r à l'origine. Pour $r < R$, $F(r, \psi)$ est continue par rapport à (r, ψ); pour $r = R$, $F(r, \psi_0)$ est continue par rapport à r. Considérons des cercles concentriques de rayons $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ tendant en croissant vers R. Il est aisé de montrer que la suite des fonctions de ψ : $F(r_n, \psi)$ a pour limite $F(R, \psi)$.

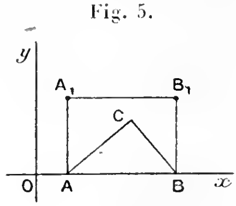
En résumé, la recherche d'une suite de fonctions continues ayant pour limite une fonction $f(x)$ définie sur le segment AB, *est absolument équivalente à celle d'une fonction* $F(x, y)$ *se réduisant à $f(x)$ pour $y = o$, continue par rapport à l'ensemble des deux variables (x, y) dans le rectangle* ABA_1B_1 *sauf sur* AB, *et enfin continue par rapport à y en tout point de* AB.

Appelons problème (A) la recherche d'une telle fonction $F(x, y)$ pour une fonction donnée $f(x)$, et faisons quelques remarques sur ce problème.

Si l'on en connaît une solution F_0, on peut en déduire d'autres. Il suffit d'ajouter à F_0 une fonction $\varphi(x, y)$ continue en tout point du rectangle (y compris les points de AB) par rapport à l'ensemble (x, y) et se réduisant à o sur AB.

Si le problème posé pour la fonction $f(x)$ admet une solution $F(x, y)$, on pourra en donner une autre F_1, telle que F_1 prenne sur le contour du rectangle des valeurs données à l'avance. En effet, je prends un point C intérieur au rectangle (*fig.* 5), je le joins à A et à B par des droites. Dans le triangle ACB, je définis F_1

Fig. 5.

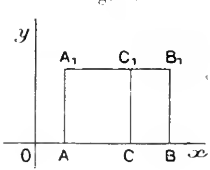


comme identique à F, et je relie les valeurs assignées sur le contour AA_1B_1B aux valeurs données sur ACB par une fonction continue.

Plus généralement, on peut se donner à l'avance les valeurs de F_1 sur une courbe joignant A à B et intérieure au rectangle.

6. *Étant donnée la fonction $f(x)$ définie sur le segment* AB (*fig.* 6), *supposons qu'il existe un point* C *entre* A *et* B, *tel que la fonction $f(x)$ soit, sur chacun des segments* AC *et* CB,

Fig. 6.



limite de fonctions continues; je dis que la fonction, considérée sur le segment entier AB, *est limite de fonctions continues.*

Tout revient à définir F dans les conditions du problème (A).

Je me donne *a priori* les valeurs de F sur CC_1; je peux, d'après les hypothèses, achever la définition de F dans ACA_1C_1 et CBC_1B_1, de manière que les conditions du problème (A) soient remplies dans chacun de ces rectangles; elles sont alors remplies dans le rectangle total.

Le théorème s'étend au cas d'un nombre fini quelconque de segments partiels, c'est-à-dire que :

Étant donnée une fonction $f(x)$ définie sur AB, *si* AB *est décomposé en un nombre fini de segments, sur chacun desquels f est limite de fonctions continues, la propriété est vraie sur le segment total.*

On en déduit, en tenant compte du résultat du n° 4, qu'*une fonction présentant un nombre fini de discontinuités est limite de fonctions continues.*

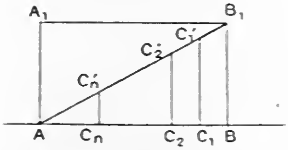
7. Nous allons étendre ce résultat à des fonctions plus compliquées; prenons d'abord l'exemple suivant où la fonction considérée possède une infinité de discontinuités.

Imaginons une fonction définie en tout point du segment (0.1) de la façon suivante : 1° elle est égale partout à 0 sauf aux points $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, 0$: 2° en tous ces derniers points, sa valeur est 1.

Cette fonction peut-elle être représentée comme limite de fonctions continues? Le théorème suivant va nous répondre affirmativement. Observons d'abord que, si C est un point *intérieur* à AB [AB étant le segment $(0, 1)$], le nombre des points de discontinuité situés sur le segment CB est toujours *fini*, et, par suite, sur CB, la fonction est limite de fonctions continues.

Étant donnée une fonction f définie sur un segment AB, (*fig.* 7) *si, quel que soit le point* C *intérieur à* AB, *la fonction,*

Fig. 7.



considérée sur CB, *est limite de fonctions continues, elle est aussi, considérée sur* AB, *limite de fonctions continues.*

En effet, considérons une série de points C_1, C_2, ..., C_n, ..., tendant vers A, chacun d'eux étant à gauche du précédent. Menons AB_1 et marquons les points C'_1, C'_2, ..., C'_n, ..., dont les projections sur AB sont C_1, C_2, ..., C_n, ... Nous allons définir, dans le rectangle ABB_1A_1, une fonction $F(x, y)$ qui remplira les conditions du problème (A) relativement à la fonction $f(x)$. Je me donne d'abord une fonction continue par rapport à (x, y) en tout point du triangle AA_1B_1, et ayant en A la valeur $f(A)$.

Je définis ensuite F dans le trapèze $C_1C'_1BB_1$, F se trouvant déjà définie sur C_1B et sur C'_1B_1 ; cela est possible en vertu de l'hypothèse que f, sur C_1B, est limite de fonctions continues.

Je définis ensuite F dans le trapèze $C_2C'_2C_1C'_1$, F étant définie déjà sur C_2C_1, $C_1C'_1$ et $C'_2C'_1$. Je définis successivement F dans tous les trapèzes analogues, de bases C_1C_2, C_2C_3, ...

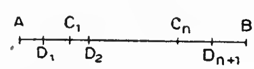
L'opération étant supposée répétée indéfiniment, F se trouve définie en tout point du rectangle AA_1BB_1. De plus, la fonction F est continue en tout point du rectangle, sauf peut-être sur AB. Par rapport à y, elle est continue, en tout point de AB autre que A, d'après la construction, et elle l'est aussi en A, d'après la définition donnée de F dans le triangle AB_1A_1. La fonction F résout donc le problème posé.

8. En combinant les résultats des théorèmes qui viennent d'être établis (n^{os} 6 et 7), on a la proposition suivante :

Théorème I. — *$f(x)$ étant une fonction définie sur le segment* AB, *s'il existe un nombre fini de points tels que, dans une portion quelconque de* AB *ne contenant aucun de ces points, f est limite de fonctions continues, la fonction est aussi limite de fonctions continues sur tout le segment* AB.

En effet, soient C_1, C_2, ..., C_n (*fig.* 8) les points dont il est

Fig. 8.



parlé dans l'énoncé; entre A, C_1, C_2, ..., C_n, B, intercalons des points D_1, D_2, ..., D_{n+1}. AB est décomposé en un nombre *fini* de segments AD_1, D_1C_1, C_1D_2, ..., $D_{n+1}B$. Sur chacun de ces segments, nous sommes dans les conditions du théorème précédent, le rôle du point B de ce théorème étant joué ici par un des points D. Sur chacun de ces segments, f est donc limite de fonctions continues. Comme ils sont en nombre fini, f est, sur AB, limite de fonctions continues.

III. — *Notions sur les ensembles de points et applications.*

9. Pour appliquer ce théorème, nous allons introduire quelques notions sur la théorie des ensembles.

Point limite. — Considérons un ensemble de points P sur un segment de droite AB. On dit que M est un *point limite* de l'ensemble P, si tout segment contenant M à son intérieur contient un point de P autre que M.

Sous une forme plus brève, dans le voisinage de M il y a toujours un point de P autre que M.

Remarquons que si un point M (appartenant ou non à P) est point limite d'un ensemble P, dans tout intervalle comprenant M à son intérieur il y a *une infinité* de points de P. Car, s'il n'y avait qu'un nombre fini de points de P autres que M dans un tel intervalle, l'un de ces points serait plus rapproché de M que les autres : soit δ sa distance à M. Un intervalle contenant M à son intérieur et dont la longueur serait inférieure à δ, ne contiendrait aucun point de P autre que M, et, en vertu de la définition donnée plus haut, M ne serait pas un point limite.

La réciproque est d'ailleurs évidente. La définition donnée équivaut donc à la suivante : un point M est *point limite* de P si, à l'intérieur de tout segment contenant M à son intérieur, il y a une infinité de points de P.

Ensemble dérivé. — Étant donné un ensemble de points de P, on appelle *ensemble dérivé* de P l'ensemble des points limites de P.

Nous le désignerons par P^1.

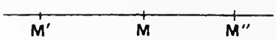
Ensembles fermés. — On dit qu'un ensemble de points est *fermé,* s'il contient tous ses points limites, c'est-à-dire si tout point qui est limite pour l'ensemble en fait partie.

Considérons, par exemple, l'ensemble des points d'abscisses $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ..., $\frac{1}{2^n}$, .. et l'ensemble contenant ces mêmes points et, en plus, le point *zéro*. Ils possèdent tous deux le point *zéro* pour point limite, et celui-là seulement. Donc, le second ensemble est fermé, le premier ne l'est pas.

10. *Étant donné un ensemble quelconque* P, *l'ensemble dérivé* P^1 *est fermé.*

Autrement dit, l'ensemble P^1 contient tous ses points limites.

Fig. 9.

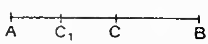


Soit M un point limite pour P^1 (*fig.* 9). Je dis qu'il est limite pour P. En effet, dans tout intervalle M'M'' contenant M à son intérieur, il y a une infinité de points de P^1. Choisissons-en un *intérieur* à M'M''. Ce point étant limite pour P, il existe une infinité de points de P dans l'intervalle M'M''. Donc : M est un point limite de P.

Étant donné un ensemble P, *réparti sur un segment fini* AB, *si l'ensemble* P *contient une infinité de points, cet ensemble a au moins un point limite.*

En effet, soit C le milieu de AB (*fig.* 10); l'une des deux por-

Fig. 10.



tions AC, CB contiendra une infinité de points de P. Ce sera AC par exemple. J'opère sur AC comme sur AB. J'obtiens un nouveau segment, C_1C par exemple, qui contient une infinité de points de P, et de longueur $\frac{AB}{4}$; j'opère sur C_1C de la même manière, et ainsi de suite. J'obtiens ainsi un segment variable, contenant toujours une infinité de points de P, dont l'extrémité gauche ne rétrograde jamais vers A, celle de droite ne se rapproche jamais de B.

Sa longueur tend vers o. Les deux extrémités tendent donc vers une même position limite. D'après la façon dont ce point est défini, ce sera un point limite pour l'ensemble P, car tout segment contenant ce point à son intérieur contient une infinité de points de l'ensemble.

Nous déduisons de ce théorème la conséquence suivante :

Étant donné un ensemble P réparti sur le segment AB, si une portion $\alpha\beta$ du segment ne contient aucun point du dérivé P^1, il n'y a sur cet intervalle $\alpha\beta$ qu'un nombre fini de points de P : car, si $\alpha\beta$ contenait une infinité de points de P, il contiendrait un point limite de P, qui appartiendrait à P^1.

Nous exprimerons le fait qu'il n'y a dans $\alpha\beta$ aucun point de P^1 en disant que, dans $\alpha\beta$, on a

$$P^1 = 0.$$

A l'aide de ces notions, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

Si l'ensemble P *des points de discontinuité de $f(x)$ est tel que son dérivé* P^1 *contient un nombre fini de points, $f(x)$ est limite de fonctions continues.*

En effet, soient $M_1, M_2, \ldots, M_n$, les points de P^1. Appliquons le théorème I : dans tout segment ne contenant aucun des points $M_1, M_2, \ldots, M_n$, nous n'avons qu'un nombre fini de points de P, c'est-à-dire de discontinuités pour f ; dans un tel segment, f est limite de fonctions continues (n° 6). Donc, dans AB, par application du théorème I, f est limite de fonctions continues.

Considérons, par exemple, l'ensemble P composé : 1° des points d'abscisses $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$ qui ont pour point limite o ; 2° des points $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}, \ldots$ qui ont pour point limite $\frac{1}{2}$. On voit que P^1 se compose des points o et $\frac{1}{2}$. D'après le théorème précédent, la fonction partout égale à o, sauf aux points de l'ensemble P, où elle est égale à 1, est limite de fonctions continues.

11. *Ensembles dérivés d'ordre supérieur.* — Supposons que P^1 contienne une infinité de points. P^1 possède alors un ensemble dérivé que nous noterons P^2. Nous dirons que P^2 est le *dérivé d'ordre* 2 de P.

Puisque P^1 est fermé (n° 10), P^2 est contenu dans P^1. Nous noterons ce fait ainsi (¹) :

$$P^1 \geqq P^2.$$

Réalisons des exemples d'ensembles de points possédant un dérivé du second ordre P^2.

Nous allons chercher à former un ensemble où le point $\frac{1}{2}$ appartient à P^2. P^1 devra contenir une infinité de points ayant ce point pour point limite. Ce seront par exemple les points $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}, \ldots$. Il nous faut maintenant placer de nouveaux points ayant pour points limites les points de P^1. Considérons l'intervalle de 1 à $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Nous y plaçons une infinité de points ayant pour point limite le point $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. Ce seront les points

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}, \quad \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{16}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2^n}, \quad \ldots.$$

Pareillement, dans chacun des intervalles en nombre infini de la forme $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}$ à $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}$, nous plaçons un ensemble de points occupant la même situation par rapport à cet intervalle que l'ensemble $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$ par rapport à l'intervalle $(0, 1)$.

Soit P l'ensemble des points ainsi obtenus. On voit que les points $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}, \ldots$ sont points limites pour P. Ils appartiennent donc à P^1. Ces points de P^1 ont un point limite, le point $\frac{1}{2}$. Ce point appartient à P^2. Nous avons ainsi construit un ensemble P dont le dérivé du second ordre contient un point donné à l'avance.

(¹) D'une manière générale, nous indiquerons par $P \geqq Q$ le fait que l'ensemble P contient tous les points de Q, par $P > Q$ le fait que P contient tous les points de Q et, en outre, au moins un point.

Une fonction telle que l'ensemble P des points de discontinuité possède un ensemble dérivé P^2 comprenant un nombre fini de points est limite de fonctions continues.

En effet, soient M_1, M_2, ..., M_n les points dont se compose P^2. Dans toute portion du segment AB qui ne contient aucun des points M_1, M_2, ..., M_n, l'ensemble P^1 contient un nombre fini de points; donc (n° 10), f est, dans cette portion, limite de fonctions continues. Le théorème I montre qu'il en est de même sur le segment total AB.

12. Dès lors, il est très aisé d'obtenir des fonctions discontinues de plus en plus compliquées, en généralisant la notion d'ensemble dérivé. Appelons d'une manière générale *dérivé d'ordre* ν de P, le dérivé de $P^{\nu-1}$, et désignons-le par P^ν; nous définissons ainsi des ensembles désignés par P^1, P^2, ..., P^ν, ...

Montrons que, si l'on sait construire un ensemble de points pour lequel P^ν existe, on peut en construire un pour lequel $P^{\nu+1}$ existe, et contient un point M donné à l'avance.

Je me donne une infinité de points M_1, M_2, ... M_n, ... tendant vers M (*fig.* 11). Plaçons dans chacun des intervalles M_nM_{n+1},

Fig. 11.

un ensemble possédant un dérivé d'ordre ν, et tel que M_n fasse partie de ce dérivé d'ordre ν. L'ensemble de tous les points introduits aura un dérivé d'ordre ν qui contiendra les points M_1, M_2, ..., M_n, ... Ce dernier ensemble ayant un point limite M, l'ensemble primitif aura un dérivé d'ordre $(\nu+1)$ dont M fera partie.

Nous aurons, relativement aux fonctions discontinues, le théorème suivant :

Étant donnée une fonction telle que l'ensemble P de ses points de discontinuité possède un dérivé d'ordre entier comprenant un nombre fini de points, cette fonction est limite de fonctions continues.

Supposons le théorème démontré pour toutes les valeurs entières inférieures ou égales à un certain nombre ν, et démontrons-le pour le nombre $(\nu+1)$.

Soient $M_1, M_2, \ldots, M_n$ les points de $P^{\nu+1}$. Dans tout intervalle ne contenant aucun de ces points, $P^{\nu+1}$ est nul; donc P^ν n'y possède qu'un nombre fini de points. Dans ce segment, la fonction est donc limite de fonctions continues. Par application du théorème I, elle l'est encore dans le segment total.

13. On peut former des ensembles de points pour lesquels *le dérivé d'ordre ν existe quel que soit ν.*

Prenons sur le segment un point M. Je prends une suite de points $M_1, M_2, M_3, \ldots$ (*fig.* 11), tendant vers M. D'une manière générale, plaçons, dans $M_\nu M_{\nu+1}$, un ensemble possédant un dérivé d'ordre ν, et cela, pour toutes les valeurs de ν. Considérons l'ensemble P formé par la réunion de tous ces ensembles. Je dis qu'il possède un dérivé d'ordre ν, quel que soit ν. Car, étant donné ν, pour les points de l'intervalle $M_\nu M_{\nu+1}$, le dérivé d'ordre ν existe, et aussi pour tous les intervalles suivants : $M_{\nu+1}M_{\nu+2}, \ldots$. Donc, P^ν existe. De plus, le point M est contenu dans tous les ensembles P^ν. Il y a lieu, à ce sujet, de donner le théorème général suivant :

Étant donné un ensemble P, *réparti sur un segment fini, et ayant un ensemble dérivé d'ordre ν quel que soit ν, je dis qu'il y a au moins un point de l'intervalle qui appartient à tous les ensembles P^ν.*

Plus généralement, *étant donnés, sur un segment fini, des ensembles fermés en nombre infini* $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$, *satisfaisant aux conditions*

$$P_1 \geqq P_2 \geqq \ldots \geqq P_\nu \geqq \ldots,$$

il existe au moins un point qui appartient à tous les P_ν.

En effet, par hypothèse, le segment AB contient, quel que soit ν, des points de P_ν; on reconnaît que, si l'on divise AB en deux segments AC, CB, la même propriété appartient à l'un au moins de ces segments; en répétant le raisonnement, on forme une suite de segments possédant tous cette propriété, et dont chacun est contenu dans le précédent, et l'on peut faire en sorte que leur longueur tende vers o; dans ces conditions, il y a un point unique qui est commun à tous ces segments; ce point appartient à chacun des ensembles P_ν, qui sont tous fermés.

14. Nous désignerons l'ensemble des points qui appartiennent à P^ν, quel que soit ν, par la notation P^ω, et nous dirons que P^ω est l'*ensemble dérivé de* P *d'ordre* ω.

Pour rappeler que cet ensemble est, par définition, celui de tous les points communs à $P^1, P^2, \ldots, P^\nu, \ldots$, nous écrirons :

$$P^\omega = D(P^1, P^2, \ldots, P^\nu, \ldots)$$

et nous dirons que P^ω est *le plus grand commun diviseur* de $P^1, P^2, \ldots, P^\nu, \ldots$.

Montrons que P^ω est un ensemble *fermé*.

Plus généralement, si P, Q, R, ... sont des ensembles *fermés*, en nombre *fini ou infini*, l'ensemble S des points communs à P, Q, R, ..., s'il existe, est *fermé*. Car, si un point A est limite pour S, il est limite pour chacun des ensembles P, Q, R, ..., donc appartient à tous, donc il appartient à S.

Si une portion de l'intervalle considéré ne contient aucun point de P^ω, *il existe un entier* ν *tel que* P^ν *ne contient dans cette portion qu'un nombre fini de points.*

En effet, si dans l'intervalle $\alpha\beta$ il existait des points appartenant à tous les ensembles $P^1, P^2, \ldots, P^\nu, \ldots$, il y aurait dans cet intervalle au moins un point de P^ω. Donc, l'un au moins des ensembles P^ν ne contient pas de points dans cet intervalle. D'ailleurs, si un ensemble P^ν ne contient pas de points, il en est de même de tous ceux qui le suivent.

Les ensembles $P^1, P^2, \ldots, P^\nu, \ldots$ se rangent donc en deux catégories. Les uns contiennent des points dans l'intervalle $\alpha\beta$, les autres n'en ont pas. Parmi ceux-ci, il y en a un dont l'indice est plus petit que tous les autres (¹). Si cet ensemble n'est pas P^1,

---

(¹) On s'appuie sur ce fait qu'un ensemble A de nombres entiers possède un élément plus petit que tous les autres :

En effet, si 1 fait partie de A, 1 est le plus petit élément de A. Sinon, et si 2 en fait partie, ce sera 2. Si, ni 1, ni 2 n'appartiennent à A, nous essayons 3, et ainsi de suite. Le premier nombre de A atteint sera son plus petit élément.

Je dis qu'on atteindra ce nombre au bout d'un nombre fini d'essais. Car, soit a un entier faisant partie de A, qui par hypothèse en contient. a est une limite supérieure du nombre d'essais à effectuer.

soit $(\nu + 1)$ son indice. On voit que, dans $\alpha\beta$, P^{ν} contient des points, et il en contient un nombre *fini* puisque $P^{\nu+1}$ n'en contient pas.

Nous aurons sur les fonctions discontinues le théorème suivant :

Étant donnée une fonction f définie sur un segment AB, *si l'ensemble* P *des points de discontinuité est tel que* P^{ω} *se compose d'un nombre fini de points, la fonction est limite de fonctions continues.*

En effet, dans tout intervalle ne comprenant aucun des points de P^{ω}, la fonction est limite de fonctions continues, parce qu'il existe un dérivé P^{ν} n'ayant dans cet intervalle qu'un nombre fini de points (nº 12). Donc on se trouve dans les conditions d'application du théorème I.

15. Poursuivons la généralisation de la notion d'ensemble dérivé.

On peut construire des ensembles de points tels que P^{ω} existe et contienne une infinité de points.

Je me donne sur AB une infinité de points $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ (*fig.* 11) tendant vers M. Dans chacun des intervalles $M_n M_{n+1}$, je place un ensemble de points possédant un dérivé d'ordre ω dont fasse partie M_n et ainsi pour toutes les valeurs de n. L'ensemble total aura un dérivé P^{ω} comprenant tous les points M_1, M_2, ..., M_n, ... et possédant par suite un point limite M. P^{ω} a un dérivé. Nous le notons $P^{\omega+1}$ (cette notation étant purement conventionnelle).

Nous pouvons construire des ensembles P, tels que $P^{\omega+1}$ ait un dérivé. Nous le désignerons par $P^{\omega+2}$. D'une façon générale, si l'on a défini $P^{\omega+\nu}$, le dérivé de cet ensemble sera noté $P^{\omega+\nu+1}$. Ces ensembles étant tous fermés, on a

$$P^{\omega} \geqq P^{\omega+1} \geqq P^{\omega+2} \geqq \ldots \geqq P^{\omega+\nu} \geqq \ldots.$$

Si l'ensemble dérivé d'ordre ν de P^{ω}, c'est-à-dire $P^{\omega+\nu}$, existe quel que soit ν, nous avons vu (nº 13) qu'il existe alors sur AB des points appartenant à tous ces ensembles. Ces points forment un ensemble fermé que nous désignerons par $P^{\omega\times 2}$ et nous écrirons :

$$P^{\omega\times 2} = D(P^{\omega+1}, P^{\omega+2}, \ldots P^{\omega+\nu}, \ldots).$$

Pour construire un ensemble où $P^{\omega\times 2}$ existe, je m'appuie sur ce qu'il est possible de placer sur un segment donné un ensemble admettant un dérivé $P^{\omega+h}$.

Je considère alors une infinité de points $M_1, M_2, \ldots, M_h, \ldots$ tendant vers M. Dans l'intervalle $M_h M_{h+1}$ je place un ensemble ayant un dérivé $P^{\omega+h}$, et ainsi pour toutes les valeurs de h. L'ensemble total possède un dérivé $P^{\omega+h}$, quel que soit h. Donc il possède un dérivé $P^{\omega\times 2}$ qui contient M.

Pareillement $P^{\omega\times 2}$ peut avoir un dérivé et même des dérivés successifs; nous convenons de les désigner par les indices

$$\omega\times 2+1,\quad \omega\times 2+2,\quad \ldots,\quad \omega\times 2+\nu,\quad \ldots.$$

Si $P^{\omega\times 2}$ possède une infinité d'ensembles dérivés, on désignera l'ensemble commun à tous ses dérivés par $P^{\omega\times 3}$.

D'une façon générale, nous arrivons à la notion d'ensemble dérivé d'ordre $\omega\times\lambda$, et d'ordre $\omega\times\lambda+\nu$, λ et ν étant des nombres entiers quelconques.

Pour préciser la signification de $P^{\omega\times\lambda+\nu}$, nous dirons :

Si $P^{\omega\times\lambda}$ a été défini, $P^{\omega\times\lambda+1}$ est son dérivé, $P^{\omega\times\lambda+\nu+1}$ est le dérivé de $P^{\omega\times\lambda+\nu}$; $P^{\omega(\lambda+1)}$ est l'ensemble des points communs aux ensembles

$$P^{\omega\times\lambda},\quad P^{\omega\times\lambda+1},\quad \ldots,\quad P^{\omega\times\lambda+\nu},\quad \ldots.$$

L'utilité de ces définitions résulte de ce qu'on peut construire effectivement des ensembles possédant ces dérivés.

A l'aide d'une série de points $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ tendant vers un point M, dans les intervalles desquels on place des ensembles d'une construction déjà connue, et choisis convenablement, on construira :

1° Un ensemble possédant un dérivé $P^{\omega\times\lambda+h+1}$, sachant construire un ensemble possédant un dérivé $P^{\omega\times\lambda+h}$; et, par suite, pour cette même valeur de λ, un ensemble possédant un dérivé $P^{\omega\times\lambda+\nu}$, quel que soit ν;

2° Pour cette valeur de λ, un ensemble possédant un dérivé $P^{\omega(\lambda+1)}$;

3° Un ensemble possédant un dérivé $P^{\omega\times\lambda}$ quel que soit λ.

Les dérivés P^{ω}, $P^{\omega\times 2}$, $\ldots$, $P^{\omega\times\lambda}$, $\ldots$, dont chacun est fermé et contenu dans le précédent, sont tels, d'après le théorème du n° 13, qu'il existe des points communs à tous ces ensembles. L'ensemble des points communs à tous les ensembles P^ω, $P^{\omega\times 2}$, ..., $P^{\omega\times\lambda}$, ..., quel que soit λ, sera noté P^{ω^2} :

$$P^{\omega^2} = D(P^\omega, P^{\omega\times 2}, \ldots, P^{\omega\times\lambda}, \ldots).$$

Remarquons que, par cela même, P^{ω^2} sera l'ensemble des points communs à tous les $P^{\omega\lambda+\nu}$, quels que soient λ et ν, puisque $P^{\omega(\lambda+1)}$ est l'ensemble de tous les points communs à $P^{\omega\lambda}$, $P^{\omega\lambda+1}$, ..., $P^{\omega\lambda+\nu}$, ...

Rien n'empêche que P^{ω^2} contienne une infinité de points, ait un dérivé, une suite de dérivés analogues à la suite définie en partant de l'ensemble P lui-même.

Résumons ainsi la formation successive de tous ces ensembles qui s'échelonnent d'une façon bien déterminée : étant donné l'un d'eux, nous en déduisons le suivant, qui est son dérivé. Par l'application de cette règle, on est conduit à considérer une suite infinie d'ensembles, dont chacun est contenu dans le précédent, et à former l'ensemble de leurs points communs. Il y a donc deux procédés distincts pour l'introduction de nouveaux dérivés.

Il est nécessaire, avant d'aller plus loin, d'approfondir les notions nouvelles auxquelles nous conduit ce double mode de généralisation. Ce sera l'objet du Chapitre suivant.

CHAPITRE II.

LES ENSEMBLES BIEN ORDONNÉS ET LES NOMBRES TRANSFINIS.

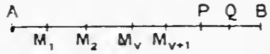
I. — *La notion d'ensemble bien ordonné.*

16. Nous avons introduit, pour rappeler l'échelonnement successif des ensembles définis au n° 15, des notations nouvelles qui ont l'avantage de rappeler d'une façon simple l'ordre relatif des différents ensembles introduits, ce qui serait beaucoup plus difficile avec l'emploi exclusif des nombres entiers positifs.

Les signes introduits constituent les premiers *nombres transfinis* de M. Cantor. Nous allons préciser cette notion de nombre transfini par de nouveaux exemples de cas où elle s'impose.

Considérons des points en nombre infini, $M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots$ (*fig.* 12), disposés sur un segment AB de telle manière que $M_{\nu+1}$

Fig. 12.



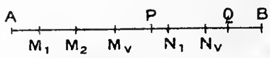
soit toujours à la droite de M_ν. Nous savons qu'en pareil cas, ces points restent en deçà d'un point limite P. Introduisons maintenant un nouveau point Q à la droite de P, considérons l'ensemble des points $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$, P, Q; convenons de dire que, de deux points de cet ensemble, celui qui a l'abscisse inférieure a un rang inférieur à l'autre, et cherchons à désigner les points de cet ensemble par des notations qui indiquent leur ordre relatif.

Le problème est résolu pour les points $M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots$, à l'aide des indices dont ils sont affectés. Pour étendre cette solution aux points P et Q, nous noterons P par M_ω, en convenant qu'un élément d'indice ω a un rang supérieur à un élément d'indice ν, ν étant un entier quelconque. Q sera noté $M_{\omega+1}$, en convenant une fois pour toutes, que $M_{\omega+1}$ a un rang supérieur à M_ω.

Par ce moyen, connaissant les indices de deux points quelconques de l'ensemble, nous connaîtrons l'ordre relatif de ces points.

Considérons maintenant en plus de la suite précédente, une suite de points N_1, N_2, ..., N_ν, ... d'abscisses encore croissantes, situés entre P et Q, et tendant vers Q (*fig.* 13). Supposons que

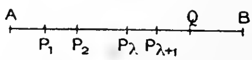
Fig. 13.



nous voulions représenter tous ces points par un système de notations unique, indiquant leur ordre relatif. Il nous suffit de désigner le point N_ν par $M_{\omega+\nu}$, et le point Q qui est à la droite de tous les autres par la notation $M_{\omega\times 2}$.

On peut former des ensembles plus complexes encore. Sur le segment AB, prenons une succession de points P_1, P_2, ..., P_λ, ..., en nombre infini, tendant vers un point Q (*fig.* 14). Dans chaque

Fig. 14.



intervalle P_λ, $P_{\lambda+1}$, plaçons un ensemble de points d'abscisses croissantes tendant vers l'extrémité de droite $P_{\lambda+1}$ de l'intervalle. La notation suivante indiquera clairement l'ordre relatif de deux points quelconques de l'ensemble total.

Les points seront désignés par rangs croissants : entre A et P_1, par M_1, M_2, ..., M_ν, ...; P_1 par M_ω; entre P_1 et P_2, par $M_{\omega+1}$, $M_{\omega+2}$, ..., $M_{\omega+\nu}$, ...; P_2 par $M_{\omega\times 2}$, et ainsi de suite.

P_1, P_2, ..., P_λ, ..., seront désignés par M_ω, $M_{\omega\times 2}$, ..., $M_{\omega\times\lambda}$, ... Le point Q qui est à la droite de tous les points P_λ sera noté M_{ω^2}.

17. Un nouvel exemple sera donné par la considération de *suites d'entiers*.

On appelle ainsi un ensemble d'entiers positifs rangés dans un ordre déterminé

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots$$

Considérons deux suites d'entiers

$$\begin{array}{lllll} a_1, & a_2, & \ldots, & a_n, & \ldots \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_n, & \ldots \end{array}$$

que nous désignerons par S_1 et S_2. Nous conviendrons de dire que la suite S_2 est *plus croissante* que la suite S_1, s'il existe un rang p tel que, dès que $n > p$, on a $b_n > a_n$.

En général, deux suites ne sont pas *comparables*, c'est-à-dire qu'il n'y a pas lieu de dire que l'une est plus croissante que l'autre.

Nous allons montrer qu'*étant donnée une infinité dénombrable* (¹) *de suites, il est possible de construire une nouvelle suite plus croissante que chacune des premières.*

Désignons les suites par les lettres $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ et chacun de leurs éléments par un double indice. Le tableau, indéfini dans deux sens, des éléments des suites, sera le suivant :

$$\begin{array}{llllll}
S_1, & a_{1.1}, & a_{1.2}, & \ldots, & a_{1.p}, & \ldots, \\
S_2, & a_{2.1}, & a_{2.2}, & \ldots, & a_{2.p}, & \ldots, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
S_n, & a_{n.1}, & a_{n.2}, & \ldots, & a_{n.p}, & \ldots. \\
\ldots & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots.
\end{array}$$

Constituons de la façon suivante une nouvelle suite Σ dont nous désignerons les éléments par $b_1, b_2, \ldots, b_p, \ldots$.

b_1 sera l'entier immédiatement supérieur à $a_{1,1}$; b_2 l'entier immédiatement supérieur au plus grand des deux entiers $a_{1.2}$, $a_{2.2}$: b_p au plus grand des p entiers $a_{1.p}, a_{2.p}, \ldots, a_{p.p}$.

La suite Σ est parfaitement définie. Je dis que Σ est plus croissante que l'une quelconque des suites données. Comparons en effet S_n et Σ. A partir du $n^{\text{ième}}$ terme, on a

$$b_{n+p} > a_{n,n+p};$$

ce qui démontre la proposition.

Appliquons le théorème aux suites de plus en plus croissantes :

$$\begin{array}{llllll}
S_1, & 1, & 1, & \ldots, & 1, & \ldots, \\
S_2, & 2, & 2, & \ldots, & 2, & \ldots, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots; \\
S_n, & n, & n, & \ldots, & n, & \ldots. \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots, & \ldots, & \ldots.
\end{array}$$

(¹) En ce qui concerne la notion de dénombrabilité, voir *Leçons sur la Théorie des fonctions,* de E. Borel, pages 8 et suivantes.

Sans appliquer la règle donnée dans la démonstration précédente, nous apercevons immédiatement la suite plus croissante :

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad p, \quad \ldots.$$

Pour rappeler que cette nouvelle suite est plus croissante qu'une quelconque des suites S_n, nous la désignerons par S_ω, considérant en un certain sens ω comme un indice supérieur à tous les entiers positifs.

Pour former une suite plus croissante que S_ω, il suffira d'augmenter d'une unité chaque élément de S_ω. La suite obtenue sera par suite plus croissante que chacune des suites $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$. Ce sera

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad \ldots.$$

Nous la désignerons par $S_{\omega+1}$. Désignons d'une façon générale par $S_{\omega+n}$ la suite

$$n+1, \quad n+2, \quad \ldots, \quad n+p, \quad \ldots.$$

Les suites $S_{\omega+1}, \ldots, S_{\omega+n}, \ldots$ sont de plus en plus croissantes et en nombre infini. Nous pouvons en trouver une plus croissante. Ce sera la suite

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad \ldots.$$

Nous la désignerons par $S_{\omega\times 2}$.

On peut continuer l'application du procédé. On notera $S_{\omega\times 2+1}$, $S_{\omega\times 2+2}, \ldots, S_{\omega\times 2+\nu}, \ldots$ les suites suivantes :

$$\begin{array}{lllll}
3, & 5, & 7, & 9, & \ldots, \\
4, & 6, & 8, & 10, & \ldots, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\
\nu+2, & \nu+4, & \nu+6, & \nu+8, & \ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots.
\end{array}$$

La suite plus croissante

$$3, \quad 6, \quad 9, \quad 12, \quad \ldots$$

sera notée $S_{\omega\times 3}$.

D'une manière générale, désignons par $S_{\omega.\lambda}$ la suite

$$1\times\lambda, \quad 2\times\lambda, \quad 3\times\lambda, \quad \ldots,$$

et par $S_{\omega.\lambda+\nu}$ la suite

$$1\times\lambda+\nu, \quad 2\times\lambda+\nu, \quad \ldots.$$

Considérons enfin les suites S_{ω}, $S_{\omega\times 2}$, ..., $S_{\omega\times\lambda}$:

$$\begin{array}{lllll} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, \\ 2, & 4, & 6, & 8, & \ldots, \\ .., & .. & .., & .. & \ldots. \\ \lambda, & 2\lambda, & 3\lambda, & 4\lambda, & \ldots, \\ .., & \ldots; & \ldots, & \ldots & \ldots. \end{array}$$

On aperçoit immédiatement la suite plus croissante

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad \ldots, \quad \lambda^2, \quad \ldots,$$

que nous noterons S_{ω^2}.

18. Tous les exemples étudiés précédemment, ensembles dérivés, points d'un segment, suites d'entiers, présentent ce caractère commun que l'ordre relatif des éléments qui y figurent est chaque fois parfaitement déterminé.

Pour l'introduction d'un élément nouveau, nous nous sommes placés dans deux sortes de cas. Dans un premier cas, étant donné un ensemble d'éléments dans lequel l'un d'eux a un rang supérieur à tous les autres, nous en ajoutons un nouveau qui a un rang supérieur à ce dernier. Dans le second cas, étant donné un ensemble d'éléments dans lequel aucun d'eux n'a un rang supérieur à tous les autres, nous en ajoutons un, ayant cette propriété.

Nous allons généraliser ces considérations et ces méthodes en nous plaçant à un point de vue tout à fait général. Les éléments des ensembles dont nous nous occuperons dans le présent Chapitre sont des êtres mathématiques absolument quelconques, nombres, points, fonctions, suites, etc. ....

Ensembles ordonnés. — Étant donné un ensemble d'éléments, nous dirons que cet ensemble est *ordonné* si l'on fait une convention qui permet de ranger ces éléments dans un certain ordre, de telle sorte que :

1° Étant donnés deux éléments quelconques de l'ensemble, a et b, l'un a un rang inférieur à l'autre, ce que j'écrirai, si c'est a qui a le rang inférieur :

$$a \prec b \quad \text{ou} \quad b \succ a\,;$$

2° Étant donnés trois éléments a, b, c, les conditions $a \prec b$, $b \prec c$ entraînent $a \prec c$.

Par exemple : l'ensemble de tous les nombres réels positifs, nul et négatifs, constitue un ensemble ordonné si, étant donnés deux nombres a et b, on convient de donner le rang inférieur à celui qui est plus petit que l'autre. Il en est de même pour l'ensemble des nombres rationnels de l'intervalle $(0, 1)$, si l'on adopte la même convention.

Nous pouvons aussi ordonner l'ensemble des nombres rationnels de l'intervalle $(0, 1)$ en rangeant ses éléments en une suite correspondant aux nombres entiers $0, 1, 2, \ldots, \nu, \ldots$, ce que l'on sait être possible. Pour fixer les idées, nous adopterons l'ordre suivant : d'abord 0; 1; puis, toutes les fractions irréductibles, ayant pour dénominateurs successivement $2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ et rangées par ordre de grandeur pour un même dénominateur, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{3}{4}, \quad \ldots.$$

Nous pouvons désigner ces nombres dans l'ordre où nous les rencontrons, par

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots.$$

Convenons maintenant, étant donnés deux nombres rationnels a_i et a_j compris entre 0 et 1, de considérer celui des deux dont l'indice est plus petit comme ayant le rang inférieur. Cette convention une fois faite, l'ensemble est ordonné.

Similitude de deux ensembles. — Nous dirons que deux ensembles *ordonnés* sont *semblables* s'il existe entre leurs éléments une correspondance biunivoque et réciproque telle que l'ordre relatif des éléments correspondants soit conservé. Autrement dit : Soient deux éléments a, b de l'un correspondant aux éléments a', b' de l'autre. La condition $a \prec b$ entraîne $a' \prec b'$ et réciproquement.

La loi qui définit la correspondance est dite une *application* d'un des ensembles sur l'autre.

Deux ensembles semblables à un troisième sont semblables entre eux.

Soient les deux ensembles A, B, semblables à C. Il existe, par hypothèse, deux correspondances, l'une entre les éléments de A et de C, l'autre entre ceux de B et de C, telles que a et b correspondant à c, a' et b' à c', la condition : $c \prec c'$ entraîne séparément $a \prec a'$, et $b \prec b'$, et, réciproquement, l'une quelconque de ces deux conditions entraîne $c \prec c'$. Si donc nous faisons correspondre entre eux les éléments de A et de B qui correspondent à un même élément c de C, $b \prec b'$ entraînera $a \prec a'$, puisque $b \prec b'$ implique $c \prec c'$ qui implique $a \prec a'$. Cette correspondance est donc une *application*.

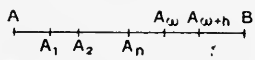
19. *Ensembles bien ordonnés*. — Un ensemble supposé ordonné est dit *bien ordonné* si tout ensemble contenu dans l'ensemble donné (y compris l'ensemble donné lui-même), possède un élément initial, c'est-à-dire un élément de rang inférieur à tous les autres.

Comme exemple d'ensemble ordonné, mais non bien ordonné, on peut citer l'ensemble E des nombres rationnels de l'intervalle $(0, 1)$, si la convention faite est qu'un élément a un rang inférieur à un autre quand sa valeur est plus petite. Cet ensemble est ordonné, mais non bien ordonné. Car, si je considère l'ensemble partiel E', formé par les nombres de E *supérieurs* à $\frac{1}{2}$, ces nombres sont de la forme $\frac{1}{2} + x$, x étant rationnel et positif; or, quel que soit x, le nombre $\frac{1}{2} + \frac{x}{2}$ a un rang inférieur au nombre $\left(\frac{1}{2} + x\right)$ et fait partie de E'; E' n'a donc pas d'élément initial, donc E n'est pas bien ordonné.

Comme exemple d'ensemble bien ordonné, citons : une suite de points $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, placés sur un segment de droite AB, se succédant de façon que tout point soit à la droite du précédent, et avec la convention ordinale que le rang d'un point donné soit supérieur à ceux de tous les points placés à sa gauche. De deux points, celui dont l'indice est le plus petit a le rang inférieur. Je dis que tout ensemble partiel aura un élément initial: car, étant donné un ensemble d'entiers positifs, il y en a un plus petit que tous les autres.

Étendons cet exemple : Soient les points $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots, A_\omega, A_{\omega+1}, \ldots, A_{\omega+h}$, h étant un entier déterminé (*fig.* 15), disposés sur AB de la façon suivante : quel que soit n, A_{n+1} est à la droite de A_n et A_ω à la droite de A_{n+1}. $A_{\omega+i}$ est à la droite de $A_{\omega+i-1}$. Convenons que le rang des points de l'ensemble soit conforme à l'ordre dans lequel on les rencontre sur le segment parcouru de gauche à droite. Je dis que l'ensemble ainsi ordonné est bien ordonné. Soit E′ un ensemble faisant partie de E. Je dis que E′ a un élément initial. Deux cas sont possibles : 1° E′ con-

Fig. 15.



tient des points d'indices entiers. Dans ce cas, celui dont l'indice est le plus petit aura un rang certainement inférieur à tous les points de E′; 2° E′ ne contient pas de points d'indices entiers. Il ne contient donc qu'un nombre fini de points, pris parmi les points A_ω, $A_{\omega+1}$, …, $A_{\omega+h}$. Il a encore un élément initial.

On verra de même que l'ensemble de points défini au n° 16 et qui contient des points désignés par

$$M_1, \quad M_2, \quad \ldots, \quad M_\nu, \quad \ldots, \quad M_\omega, \quad \ldots, \quad M_{\omega.\lambda+\nu}, \quad \ldots, \quad M_{\omega^2}$$

est bien ordonné, en adoptant la même convention d'ordre que pour l'ensemble précédent.

Un autre exemple nous est fourni par les dérivés d'un ensemble de points P. Nous avons défini les ensembles

$$P^1, \quad P^2, \quad \ldots, \quad P^n, \quad \ldots, \quad P^\omega, \quad \ldots, \quad P^{\omega.\lambda+\nu}, \quad \ldots, \quad P^{\omega^2}.$$

Ces ensembles peuvent être considérés comme les éléments d'un ensemble H. Pour définir l'ordre relatif de deux éléments de l'ensemble, nous donnons le rang inférieur à celui qui a été défini avant l'autre. A l'aide de cette convention, H sera bien ordonné.

Enfin, considérons des suites d'entiers de plus en plus croissantes, formées par exemple d'après les procédés employés au n° 17

$$S_1, \quad S_2, \quad \ldots, \quad S_n, \quad \ldots, \quad S_\omega, \quad \ldots, \quad S_{\omega.\lambda+\nu}, \quad \ldots, \quad S_{\omega^2}.$$

Considérons ces suites comme les éléments d'un ensemble H. Cet ensemble sera bien ordonné si, de deux suites, nous considérons comme ayant le rang inférieur celle qui est la moins croissante.

II. — *Comparaison des ensembles bien ordonnés.*

20. La notion d'ensemble bien ordonné étant suffisamment éclaircie par ces exemples, nous allons l'analyser au point de vue de la similitude et de la comparaison des ensembles bien ordonnés.

Si E *est un ensemble bien ordonné, toute partie* E′ *de* E *est un ensemble bien ordonné, si l'on conserve comme ordre relatif de deux éléments de* E′, *celui qu'ils possédaient dans* E.

Car, si E″ est une partie de E′, E″ est une partie de E, et possède par suite un élément initial.

Segment. — Soit a un élément quelconque de E. Nous appellerons *segment de* E *défini par* a l'ensemble A des éléments de E qui ont un rang inférieur à a.

A est un ensemble bien ordonné, si l'on conserve la même loi d'ordre relatif que pour E.

Soient a et a' deux éléments distincts de E; si $a \prec a'$, le segment A déterminé par a est un segment du segment A′ déterminé par a', de sorte que, *étant donnés deux segments différents d'un ensemble bien ordonné, l'un est segment de l'autre.*

Étant donnés deux ensembles semblables, E et F, *les segments respectifs* A *et* B *déterminés par deux éléments correspondants* a *et* b *sont semblables.*

Je vais montrer que l'application en vertu de laquelle E et F sont semblables applique le segment A sur le segment B. En effet, à tout élément a' de A correspond dans F un élément b', qui appartient à B, car la condition $a' \prec a$ entraîne $b' \prec b$. De même, à tout élément de B correspond un élément de A, et cette correspondance entre les éléments de A et ceux de B est *réciproque*. Je dis de plus qu'il y a application. Car, l'inégalité $a' \prec a''$ entre deux éléments de A entraîne l'inégalité $b' \prec b''$ entre les deux éléments correspondants de B. A et B sont donc semblables.

Donc, *si deux ensembles bien ordonnés sont semblables, tout segment de l'un est semblable à un segment de l'autre.*

21. *Un ensemble bien ordonné* E *ne peut être semblable à aucun de ses segments.*

Montrons que l'on aboutit à une contradiction, en admettant comme possible une application de E sur un de ses segments A.

Soit a l'élément de E qui détermine A. L'élément a considéré dans E correspond à un élément de A que je désigne par a_1; a_1, faisant partie de A, a un rang inférieur à a. Désignons par A_1 le segment de A déterminé par a_1. Nous venons de voir que A et A_1 sont semblables. Il y a application de A sur A_1.

Répétons notre raisonnement. L'élément a_1 de A correspond à un élément de A_1, a_2, dont le rang est inférieur à a_1. Soit A_2 le segment déterminé par a_2. A_1 et A_2 sont semblables. Le raisonnement peut se poursuivre indéfiniment. Il serait donc possible de déterminer une suite infinie d'éléments de E : $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, de rangs toujours décroissants et par suite *n'ayant pas d'élément initial,* ce qui est impossible.

Remarquons que, étant donné un ensemble bien ordonné, s'il comprend une infinité d'éléments, il y a toujours dans cet ensemble des parties qui sont semblables à l'ensemble.

Par exemple, prenons l'ensemble des nombres entiers $1, 2, \ldots, n, \ldots$ rangés par ordre de grandeur croissante. L'ensemble des nombres $4, 5, \ldots, n+3, \ldots$ lui est semblable. Il suffit de faire correspondre les nombres n du premier et $n+3$ du second. De même les deux ensembles $1, 2, \ldots, n, \ldots$ et $2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$ sont semblables, et le second est une partie du premier.

22. Du théorème précédent, nous déduirons deux conséquences importantes.

Étant donnés deux ensembles bien ordonnés E, F, *un segment de l'un ne peut être semblable au plus qu'à un segment de l'autre.*

Car, si le segment A de E était semblable à deux segments différents B, B′ de F, B et B′ seraient semblables entre eux, ce qui est impossible, puisque, de ces deux segments, l'un est segment de l'autre.

Deux ensembles bien ordonnés E *et* F, *qui sont semblables,* *ne peuvent être appliqués l'un sur l'autre que d'une seule manière.*

En effet, s'il y avait deux manières différentes d'appliquer E sur F, l'un au moins, a, des éléments de E correspondrait par les deux procédés à deux éléments différents b et b' de F. Mais alors, le segment A de a serait semblable aux deux segments différents B et B' de F, ce qui est impossible.

23. Étant donnés deux ensembles bien ordonnés E et F, nous dirons que les éléments a de E et b de F sont *homologues*, si le segment A de E déterminé par a et le segment B de F déterminé par b sont semblables.

Remarquons qu'il est toujours possible de trouver un couple d'éléments homologues dans E et F dès que chacun de ces ensembles existe effectivement : il suffit de considérer les deux éléments initiaux de ces ensembles.

Dans le cas particulier où E et F sont semblables, nous avons vu qu'il y a une seule application de E sur F. Deux éléments se correspondant dans l'application sont homologues, car on a vu que les segments déterminés par ces éléments sont semblables.

Supposons E et F quelconques :

I. *Un élément a de* E *ne peut avoir plus d'un homologue dans* F. Car, s'il y en avait deux, le segment A serait semblable à deux segments de F, ce qui est impossible (n° 22).

II. *Si les éléments a de* E, *b de* F, *sont homologues, tout élément a' de* E *de rang inférieur à a a un homologue dans* F.

Car les segments A et B sont semblables. Les éléments correspondants dans l'application de A sur B sont homologues, considérés comme appartenant à A et B, et par suite aussi considérés comme appartenant à E et à F.

III. *Si l'élément a de* E *n'a pas d'homologue dans* F, *il en est de même de tout élément* $a' \succ a$.

Car si a' avait un homologue dans F, il en serait de même pour a, d'après II.

IV. *L'ensemble des éléments de* E *qui ont des homologues dans* F, *s'il n'est pas identique à* E, *constitue un segment de* E.

Car, s'il y a des éléments de E qui n'ont pas d'homologues dans F, l'un d'eux a un rang inférieur à tous les autres; soit a. Tout élément $\prec a$ a un homologue dans F, tandis que, d'après III, tout élément $\succ a$ n'en a pas. Donc l'ensemble des éléments de E ayant des homologues dans F est constitué par le segment de E déterminé par a.

V. *Si deux ensembles bien ordonnés* E *et* F *sont tels que tout élément de l'un a un homologue dans l'autre, ils sont semblables.*

Je dis que la loi d'homologie des éléments de E et de F est une application de E sur F. Il suffit de prouver que, étant donnés deux éléments quelconques a et a' de E et leurs homologues b et b' de F, la condition $a \prec a'$ entraîne $b \prec b'$.

Les segments A′ de E déterminé par a' et B′ de F déterminé par b' sont semblables. Donc A, qui est segment de A′, est tel qu'il y a dans B′ un segment B_1 qui lui est semblable. Ce segment appartient à F et il est unique dans F. Or, A est semblable à B, puisque a et b sont homologues. Donc, B est identique à B_1. Donc, B est un segment de B′, donc $b \prec b'$.

Considérons deux ensembles bien ordonnés quelconques. Deux cas sont possibles. Ou bien tout élément de l'un a un homologue dans l'autre : les deux ensembles sont semblables, d'après V. Ou bien il y a au moins un élément de l'un des ensembles qui n'a pas d'homologue dans l'autre. Étudions ce cas.

Supposons que dans E il existe des éléments n'ayant pas d'homologues dans F. D'après IV, l'ensemble des éléments de E qui ont des homologues dans F est un segment A déterminé par un élément a. Je dis que l'ensemble des éléments de F qui ont des homologues dans E (lesquels font nécessairement partie de A) est identique à F; en effet, si cela n'était pas, d'après IV, cet ensemble serait un segment B de F déterminé par un élément b; les ensembles A et B seraient tels que tout élément de l'un aurait un homologue dans l'autre; ils seraient semblables, d'après V; donc a et b seraient homologues, contrairement à ce fait que b n'a pas d'homologue dans E. A et F sont tels que tout élément de l'un a un homologue dans l'autre; donc F est semblable au segment A de E.

En résumé, nous sommes parvenus au théorème fondamental suivant qui est la conclusion de toute cette étude :

THÉORÈME. — *Étant donnés deux ensembles bien ordonnés* E *et* F, *ou bien ils sont semblables, ou bien l'un est semblable à un segment de l'autre.*

III. — *Les ensembles bien ordonnés dénombrables.*

24. Étant donnés deux ensembles bien ordonnés E et F, nous dirons que E est *plus étendu* que F, si F est semblable à un segment de E.

Proposons-nous de former des ensembles bien ordonnés de plus en plus étendus. Nous y parviendrons au moyen des procédés généraux suivants, que nous avons déjà eu l'occasion d'employer dans des cas particuliers.

Premier procédé. — Étant donné un ensemble bien ordonné dans lequel un élément a a un rang supérieur à tous les autres, on forme un ensemble bien ordonné plus étendu, en ajoutant à l'ensemble un élément b qui a un rang supérieur à a.

Le nouvel ensemble est bien ordonné; car toute partie de cet ensemble, si elle ne se réduit pas au seul élément b, contient des éléments du premier ensemble. L'un d'eux possède un rang inférieur aux autres; il conserve sa propriété dans le nouvel ensemble.

Comme exemple d'application de ce procédé, citons la formation d'un ensemble dont les éléments correspondent aux entiers $1, 2, \ldots, \nu, \nu+1$, quand on part d'un ensemble dont les éléments correspondent aux entiers $1, 2, \ldots, \nu$.

De même, partant d'un ensemble d'éléments d'indices

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \nu, \quad \ldots, \quad \omega,$$

nous avons appris à former un ensemble contenant ces éléments, et en plus un élément d'indice $(\omega+1)$.

Deuxième procédé. — Supposons que l'on sache former une infinité d'ensembles bien ordonnés $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ dans les conditions suivantes : A_1 est un segment de A_2, A_2 est un segment de A_3 et, d'une façon générale, A_ν est un segment de $A_{\nu+1}$. Je dis que nous pouvons former un ensemble B qui soit bien ordonné et tel que chacun des ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_\nu, \ldots$ soit segment de B. Procédons de la façon suivante : nous prenons d'abord les éléments de A_1, puis nous plaçons à la suite, et dans leur ordre relatif, les éléments de A_2 qui n'entrent pas dans A_1 ; à la suite, les éléments de A_3 qui n'entrent pas dans A_2, et ainsi indéfiniment. Soit B l'ensemble ainsi formé. Je dis qu'il est bien ordonné si l'on convient que : 1° de deux éléments qui appartiennent à un même ensemble A_ν sans appartenir ni l'un ni l'autre à $A_{\nu-1}$, l'élément de rang inférieur est le même que dans A_ν ; 2° pour deux éléments introduits dans deux opérations différentes de rangs ν et ν', l'ordre des éléments est celui des opérations.

Il faut prouver que toute partie B′ de B a un élément initial. Soit A'_n la partie de B′ comprise dans A_n.

Si A'_1 contient effectivement des éléments, l'un d'eux a un rang inférieur à tous ceux de A'_1 et, par suite, à tous ceux de B′. Si A'_1 ne contient pas d'élément et si A'_2 en contient, l'élément initial de A'_2 répond à la question. Si ni A'_1 ni A'_2 ne contiennent d'éléments, nous raisonnons sur A'_3, et ainsi de suite. En répétant ce raisonnement, on arrive, au bout d'un nombre fini d'opérations, si B′ contient réellement des éléments, à un ensemble A'_h non nul, dont l'élément initial est l'élément initial de B′.

Ainsi B est bien ordonné. Remarquons qu'il ne possède pas d'élément de rang supérieur à tous les autres. Soit, en effet, un élément a. Il a été introduit par l'opération de rang ν. Les éléments de $A_{\nu+1}$ que nous introduisons dans l'opération suivante ont un rang supérieur à celui de a.

Comme exemples, considérons les ensembles dont chacun est segment du suivant, et dont les éléments correspondent :

Ceux de A_1 à	1;			
Ceux de A_2 à	1,	2;		
....	.,	.;		
Ceux de A_ν à	1,	2,	...,	ν,
....	.,	.,	...,	..

L'ensemble dont les éléments correspondent à

$$1,\ 2,\ \ldots,\ \nu,\ \ldots,$$

où ν prend toutes les valeurs entières possibles, est formé par application du second procédé.

Nous avons appris à former des ensembles dont les éléments correspondent : ceux de A_1 à

$$1,\ 2,\ \ldots,\ \nu,\ \ldots;$$

ceux de A_2 à

$$1,\ 2,\ \ldots,\ \nu,\ \ldots.\ \omega,\ \omega+1,\ \ldots,\ \omega+\nu,\ \ldots,$$

et généralement ceux de A_λ, quel que soit λ, à

$$1,\ 2,\ \ldots,\ \nu,\ \ldots,\ \omega.\ \ldots.\ \omega+\nu,\ \ldots,$$
$$\omega(\lambda-1),\ \ldots,\ \omega(\lambda-1)+\nu,\ \ldots.$$

Le second procédé, appliqué à ces ensembles, permet de former un ensemble B dont les éléments correspondent aux expressions

$$1,\ 2,\ \ldots,\ \nu,\ \ldots,\ \omega,\ \ldots,\ \omega\lambda+\nu,\ \ldots,$$

λ et ν recevant toutes les valeurs entières.

Troisième procédé. — Étant donné un ensemble bien ordonné dans lequel aucun élément n'a un rang supérieur à tous les autres, on ajoute un nouvel élément qui a un rang supérieur à ceux de tous les éléments donnés.

Il est évident que, en conservant la relation d'ordre, on a encore un ensemble bien ordonné.

Par exemple, aux éléments composant les deux ensembles formés dans les exemples précédents, d'indices

$$1,\ 2,\ \ldots,\ \nu,\ \ldots$$

et

$$1,\ 2.\ \ldots,\ \nu,\ \ldots,\ \omega,\ \ldots,\ \omega\lambda+\nu,\ \ldots,$$

on ajoute respectivement un élément d'indice ω et un élément d'indice ω^2.

Les trois procédés précédents, appliqués à des ensembles dénombrables, conduisent à des ensembles encore dénombrables.

La proposition est évidente dans le cas du premier et du troisième procédé, puisqu'on n'ajoute qu'un élément à un ensemble dénombrable donné. Pour le deuxième procédé, la proposition résulte du fait que la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable ([1]).

25. Nous allons faire, sur les ensembles bien ordonnés dénombrables, l'étude inverse de la précédente. Nous allons montrer qu'un tel ensemble peut être déduit d'ensembles moins étendus par application des trois procédés indiqués.

Étant donné un ensemble bien ordonné dénombrable E, deux cas différents sont possibles :

1° E possède un élément ayant un rang supérieur à celui de tous les autres. Soit a cet élément, E′ l'ensemble des autres éléments. E se déduit de E′ par le premier ou par le troisième procédé, selon que E′ a ou non un élément de rang supérieur.

2° E ne possède pas un élément de rang supérieur à tous les autres. Nous allons voir qu'on peut obtenir E par application du deuxième procédé.

L'ensemble E étant dénombrable, ses éléments peuvent être rangés en une suite correspondant à celle des nombres entiers

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_\nu, \quad \ldots. \tag{1}$$

D'autre part, puisqu'il n'y a pas d'élément de rang le plus élevé, il existe un élément de rang supérieur à tout élément déterminé.

Partons de l'élément a_1. La suite (1) contient une infinité d'éléments de rang supérieur à a_1. Prenons parmi eux celui qui a, dans (1), le plus petit indice, soit a_{λ_2}. λ_2 est au moins égal à 2, et a_{λ_2} a un rang supérieur à tous les éléments qui le précèdent dans la suite (1).

Dans la suite d'éléments

$$a_{\lambda_2+1}, \quad a_{\lambda_2+2}, \quad \ldots,$$

nous prenons le premier a_{λ_3}, qui ait un rang supérieur à a_{λ_2}. a_{λ_3} a dans E un rang supérieur à tous ceux qui le précèdent dans la suite (1). On peut continuer l'application de la méthode indéfini-

---

([1]) Voir *Leçons sur la théorie des fonctions*, par E. Borel, Chapitre I.

ment. On forme de cette manière une suite

$$(2) \qquad a_1 \prec a_{\lambda_2} \prec a_{\lambda_3} \prec \ldots \prec a_{\lambda_\nu} \prec \ldots$$

chaque élément de la suite (2) ayant un rang supérieur à tous ceux qui le précèdent dans la suite (1); on a de plus

$$\lambda_{\nu+1} > \lambda_\nu \geqq \nu.$$

Je dis qu'étant donné un élément quelconque de E, il y a dans la suite (2) des éléments qui ont un rang supérieur à lui. Car cet élément figure dans (1) à un certain rang; supposons que ce soit l'élément a_ν. Nous avons

$$\lambda_{\nu+1} > \nu.$$

L'élément $a_{\lambda_{\nu+1}}$ a un rang supérieur à tous ceux qui le précèdent dans (1), en particulier à a_ν.

Ainsi, étant donné l'ensemble bien ordonné dénombrable E, dont aucun élément n'a un rang supérieur aux autres, on peut extraire de E une suite d'éléments de rangs toujours croissants, et telle que chaque élément de E a un rang inférieur à un élément de cette suite.

Nous en concluons que E peut être obtenu par application du second procédé de formation en partant d'ensembles moins étendus que lui. Considérons en effet l'ensemble A_1 des éléments de E qui ont un rang inférieur à a_1, l'ensemble A_2 des éléments de rang inférieur à a_{λ_2}, et ainsi de suite. Chacun de ces ensembles est moins étendu que E, puisqu'il en est un segment, et le second procédé, appliqué à ces ensembles, donne l'ensemble E.

En résumé, les trois procédés indiqués suffisent pour nous donner tout ensemble bien ordonné dénombrable en partant d'ensembles dénombrables moins étendus que celui-là.

26. L'analyse précédente nous conduit aux définitions suivantes : Dans un ensemble bien ordonné dénombrable, nous distinguerons deux espèces d'éléments : un élément a est dit de *première espèce* si le segment A, déterminé par a, possède un élément de rang supérieur à tous les autres. Dans le cas contraire, a est dit de *seconde espèce*.

Étant donné un élément a de seconde espèce, il est possible, d'après ce que nous venons de voir, de former une suite d'éléments de A, a_1, a_2, ..., a_ν, ... satisfaisant aux conditions

$$a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_\nu \prec \ldots,$$

et telle que chaque élément de A ait un rang inférieur à certain élément a_ν.

L'ensemble E contient des éléments de rang supérieur à tous les éléments a_ν, et l'un d'eux a un rang inférieur à tous les autres : c'est l'élément a.

Réciproquement, étant donné un ensemble bien ordonné E, supposons que l'on considère une suite d'éléments appartenant à cet ensemble, telle que

$$a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_\nu \prec \ldots,$$

et supposons que E contienne des éléments ayant un rang supérieur à tous les éléments a_ν. Parmi les éléments ayant cette propriété, l'un a un rang inférieur à tous les autres. Soit a cet élément. Étant donné a' qui a un rang inférieur à a, je dis que a' a un rang inférieur à certains a_ν. Sinon il aurait un rang supérieur à tous les a_ν, et, d'après la définition de a, serait soit identique, soit de rang supérieur à a, contrairement à l'hypothèse.

En résumé, nous avons d'une part une suite d'éléments

$$a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_\nu \prec \ldots,$$

d'autre part un élément a, tels que : 1° $a_\nu \prec a$, quel que soit ν; 2° tout élément a' qui a un rang inférieur à a a un rang inférieur à certains a_ν.

Nous exprimerons ce double fait en disant que a est l'*élément limite* de l'élément a_ν, quand ν croît indéfiniment, et que la suite a_1, a_2, ..., a_ν, ... est une *suite fondamentale* définissant l'élément a.

Il y a lieu d'étudier sous quelles conditions deux suites fondamentales définissent le même élément limite. Si ces conditions sont remplies, les deux suites sont dites *équivalentes*.

La condition nécessaire et suffisante pour que deux suites soient équivalentes est que, étant donné un élément quelconque de l'une, il existe dans l'autre un élément ayant un rang plus élevé.

Considérons deux suites fondamentales

$$a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_\nu \prec \ldots,$$
$$b_1 \prec b_2 \prec \ldots \prec b_{\nu'} \prec \ldots.$$

La condition énoncée est nécessaire, car, si elle n'est pas remplie, il existe par exemple un élément $b_{\nu'}$ tel qu'aucun élément a_ν n'a un rang supérieur à $b_{\nu'}$. Il n'y a donc aucun élément a_ν identique à $b_{\nu'}$ (sans quoi nous aurions $a_{\nu+1} \succ b_{\nu'}$) et $b_{\nu'}$ est, par suite, de rang supérieur à tous les a_ν. Donc $b_{\nu'}$ est, soit identique à a, soit de rang supérieur à a. L'élément b, limite de $b_{\nu'}$, possède, *a fortiori*, un rang supérieur à a. Ce serait l'inverse s'il existait un élément a_ν tel qu'aucun $b_{\nu'}$ ne lui soit supérieur en rang.

La condition est suffisante. Car, supposons qu'étant donné un élément a_ν, il existe un élément $b_{\nu'}$ tel que $a_\nu \prec b_{\nu'}$. b a un rang supérieur à $b_{\nu'}$, par suite à tous les a_ν. Il est donc soit identique à a, soit de rang supérieur à a. D'après l'hypothèse réciproque, a est soit identique, soit de rang supérieur à b. Donc a et b sont identiques.

IV. — *Les nombres transfinis.*

27\. La notion fondamentale qui nous a guidés dans l'étude des questions précédentes est celle d'ordre relatif. Nous avons fait abstraction de la nature des éléments des ensembles pour nous attacher seulement à l'ordre relatif des éléments entre eux. Nous allons maintenant introduire des notions et des notations nouvelles qui serviront à fixer le rang propre à chaque élément dans les ensembles bien ordonnés.

La théorie élémentaire des nombres entiers met en lumière deux ordres de faits importants. En premier lieu, si l'on considère un assemblage d'objets et si l'on fait abstraction de leur nature pour ne voir en eux que des unités identiques entre elles, on est amené à la notion de nombre entier. En second lieu, cette notion étant considérée comme acquise, on s'occupe, pour la commodité, de donner des noms et des représentations aux différents nombres entiers ou tout au moins à certains d'entre eux.

De même, pour les ensembles bien ordonnés, on conçoit qu'il peut être utile, pour fixer la notion de rang dans un tel ensemble, d'attacher un terme nouveau à cette notion et de procéder comme si tous les éléments d'un ensemble bien ordonné avaient des rangs déterminés une fois pour toutes. Or, nous avons vu que les nombres entiers étaient insuffisants pour remplir ce but; nous leur adjoindrons de nouveaux signes qui seront les nombres *transfinis*. La notion qui se dégage ainsi de la considération des ensembles bien ordonnés, comme la notion de nombres entiers se dégage de la considération d'un assemblage d'objets, est la notion de *nombre ordinal fini ou transfini*. Nous attribuons aux éléments d'un ensemble bien ordonné des rangs qui seront les nombres ordinaux finis et transfinis. D'après cela, ces nombres ordinaux devront être tels que dans un même ensemble bien ordonné deux éléments différents correspondront à des nombres ordinaux différents, le nombre ordinal α qui correspond à l'élément de rang inférieur étant considéré comme inférieur au nombre ordinal β qui correspond à l'élément de rang supérieur, ce que l'on notera : $\alpha < \beta$. Dans deux ensembles bien ordonnés semblables, deux éléments homologues devront être considérés comme ayant le même rang, c'est-à-dire correspondant au même nombre ordinal. Puisque par définition les nombres ordinaux désignent les rangs des éléments d'un ensemble bien ordonné, ces nombres constituent eux-mêmes un ensemble bien ordonné.

La notion de nombre ordinal transfini une fois acquise, il y aura lieu, dans un but de commodité, de définir une fois pour toutes des signes et des termes destinés à désigner les nombres transfinis, ou du moins certains d'entre eux.

28. Parmi les nombres ordinaux doivent figurer les nombres entiers positifs, puisqu'un ensemble fini d'éléments rangés dans un ordre déterminé est bien ordonné. Suivant les cas, nous ferons commencer la suite des nombres entiers à 0 ou à 1.

Nous dirons que l'ensemble des nombres entiers positifs (avec 0 dans certains cas) forme la classe I des nombres ordinaux. Les nombres ordinaux autres que les entiers positifs et nul sont les nombres *transfinis*.

Occupons-nous des nombres transfinis qui sont nécessaires pour définir les rangs des éléments dans les ensembles bien ordonnés dénombrables. Nous dirons que ces nombres constituent la classe II de nombres ordinaux.

Ainsi le signe ω introduit au Chapitre I est un nombre transfini et appartient à la classe II. C'est d'ailleurs le plus petit des nombres de la classe II, car dans tout ensemble bien ordonné infini pour lequel il existe des éléments autres que ceux qui correspondent aux entiers $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$, celui qui a le rang inférieur correspond au nombre transfini ω.

Interprétons les résultats relatifs aux ensembles bien ordonnés dénombrables, en particulier la distinction des éléments d'un tel ensemble en deux espèces. Un nombre sera de *première espèce* s'il est défini comme étant le nombre immédiatement supérieur à un nombre déjà défini. Nous définirons comme il suit un nombre de *deuxième espèce* : étant donné un système dénombrable A de nombres appartenant aux classes I ou II, ce système ne contenant pas de nombre plus grand que tous les autres, on crée un nombre transfini, qui, par définition, suit immédiatement tous les éléments de A. On sait que dans A il est possible de former une suite de nombres

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_\nu < \ldots, \tag{1}$$

cette suite ayant la propriété que tout élément de A est inférieur à certains éléments de la suite. Le nombre a que l'on introduit et qui est, par définition, le nombre immédiatement supérieur à ceux de la suite (1) sera appelé *nombre limite* de a_ν. Ce nombre appartient à la classe II ; car il est possible de former un ensemble dénombrable et dans lequel les divers éléments correspondent aux éléments de A et à a.

Deux suites de nombres ordinaux telles que (1) ont la même limite, sous la condition que pour tout nombre de l'une des suites il y ait dans l'autre un nombre supérieur. C'est là une conséquence immédiate de la proposition analogue relative aux ensembles (n° 26).

Étant donné un ensemble dénombrable A de nombres appartenant aux classes I et II, il existe des nombres de ces mêmes classes supérieurs à tous ceux de A. Car, ou bien dans A un certain nombre est plus grand que tous les autres ; alors, le nombre qui suit celui-là répond à la question. Ou bien la condition n'est pas remplie et le procédé précédent permet de former un nouveau nombre supérieur à tous ceux de A et qui appartient à la classe II. Cette proposition montre que *l'ensemble des nombres de la classe* II *n'est pas dénombrable.*

29. Indiquons maintenant les conventions à l'aide desquelles on désigne les premiers nombres transfinis ([1]).

Après les nombres $1, 2, \ldots, \nu, \ldots$ qui constituent la classe I, on place ω; par définition, $\omega > \nu$, quel que soit ν, et

$$\omega = \lim_{\nu=\infty} \nu.$$

Après ω, viennent

$$\omega + 1, \quad \omega + 2, \quad \ldots, \quad \omega + \nu, \quad \ldots.$$

La limite de cette suite est $\omega \times 2$ ou $\omega . 2$.

Après $\omega . 2$, on place $\omega \times 2 + 1, \ldots, \omega \times 2 + \nu, \ldots$

$$\lim_{\nu=\infty}(\omega \times 2 + \nu) = \omega \times 3.$$

D'une façon générale,

$$\lim_{\nu=\infty} [\omega(\lambda - 1) + \nu] = \omega \times \lambda.$$

On définit ainsi $\omega \times \lambda + \nu$, où λ et ν prennent toutes les valeurs possibles. Il n'y a aucun nombre de cet ensemble supérieur à tous les autres. Dans cet ensemble, nous pouvons former une suite fondamentale. Ce sera, par exemple, la suite :

$$\omega, \quad \omega \times 2, \quad \omega \times 3, \quad \ldots, \quad \omega \times \lambda, \quad \ldots,$$

où λ prend toutes les valeurs possibles. Nous désignerons par ω^2 la limite de cette suite

$$\lim_{\lambda=\infty} \omega \times \lambda = \omega^2.$$

([1]) Dans la théorie de M. G. Cantor, ces notations résultent de la définition de certaines opérations effectuées sur les nombres ordinaux, telles que : addition, multiplication, etc. Sans méconnaître l'intérêt de cette théorie, comme nous n'aurons pas à en faire usage et que les nombres transfinis n'interviendront dans nos applications que par leurs propriétés d'*ordre relatif*, nous avons adopté un mode d'exposition dans lequel nous ne faisons intervenir que cette notion d'ordre.

Après ω^2 nous plaçons

$$\omega^2+1, \quad \omega^2+2, \quad \ldots, \quad \omega^2+\nu, \quad \ldots$$

et nous posons

$$\lim_{\nu=\infty} (\omega^2+\nu) = \omega^2+\omega.$$

Puis, à $\omega^2+\omega$, nous ajoutons l'unité, etc., et nous posons

$$\lim_{\nu=\infty} (\omega^2+\omega+\nu) = \omega^2+\omega\times 2.$$

Nous définissons en continuant ainsi le nombre $\omega^2+\omega\times\lambda+\nu$, où λ et ν sont des entiers positifs quelconques. La limite de ces nombres, quand λ croît indéfiniment, sera désignée par $\omega^2\times 2$.

Puis, nous considérons des nombres de la forme

$$\omega^2\times 2+\omega\times\lambda+\nu$$

et nous posons

$$\lim_{\lambda=\infty} (\omega^2\times 2+\omega\times\lambda) = \omega^2\times 3.$$

Nous formerons en continuant ainsi des nombres du type

$$\omega^2, \quad \omega^2\times 2, \quad \ldots, \quad \omega^2\times\lambda, \quad \ldots$$

et nous noterons

$$\lim_{\lambda=\infty} \omega^2\times\lambda = \omega^3.$$

On formera des polynomes du troisième degré en ω, comme on en a formé du second, puis des polynomes de degré quelconque μ, soit :

$$A = \omega^\mu\alpha_0+\omega^{\mu-1}\alpha_1+\ldots+\omega\alpha_{\mu-1}+\alpha_\mu,$$

où les α sont des entiers positifs ou nuls (sauf α_0, toujours >0). Pour comparer A à un nombre analogue B :

$$\omega^\nu\beta_0+\omega^{\nu-1}\beta_1+\ldots+\omega\beta_{\nu-1}+\beta_\nu,$$

et décider quel est le plus grand, on procède ainsi : Si $\mu>\nu$, $A>B$; si $\mu=\nu$, et si $\alpha_0>\beta_0$, $A>B$; si $\mu=\nu$, $\alpha_0=\beta_0$, nous comparons les termes suivants comme nous avons comparé les premiers. Si α_1 et β_1 existent, et si $\alpha_1>\beta_1$, $A>B$; etc.

Nous pouvons considérer comme définis les nombres transfinis désignés par des polynomes en ω. Dans l'ensemble de ces nombres, formons la suite fondamentale

$$\omega < \omega^2 < \omega^3 < \ldots < \omega^\lambda < \ldots.$$

Il y a lieu de désigner le nombre transfini immédiatement supérieur à tous ces nombres. Nous poserons

$$\lim \omega^\lambda = \omega^\omega.$$

Avant d'étendre plus loin ces conventions, fixons d'une manière précise celles dont nous nous sommes servis.

Parmi les nombres définis, on a introduit certains nombres ω^γ, γ étant un nombre considéré comme déjà défini. Les nombres qui se succèdent à partir de ω^γ sont définis de la façon suivante :

Après ω^γ, on place des nombres de la forme $\omega^\gamma + \alpha$, où α prend toutes les valeurs inférieures à ω^γ. Dans l'ensemble $\omega^\gamma + \alpha$, il n'y a pas de nombre supérieur à tous les autres. Je désigne par $\omega^\gamma \times 2$ le nombre immédiatement supérieur à tous ceux-là. J'ajoute à la suite tous les nombres $\omega^\gamma \times 2 + \alpha$, où α prend toutes les valeurs $< \omega^\gamma$. En général, ayant défini $\omega^\gamma \times \lambda$, je considère l'ensemble $\omega^\gamma \times \lambda + \alpha$, où α prend toutes les valeurs inférieures à ω^γ. Sa limite sera notée $\omega^\gamma(\lambda + 1)$. Enfin, je considère l'ensemble de tous ces nombres introduits à partir de ω^γ. Par définition, le nombre transfini immédiatement supérieur à tous les nombres $\omega^\gamma \times \lambda + \alpha$ sera le nombre $\omega^\gamma \times \omega$ que nous écrirons $\omega^{\gamma+1}$.

Ainsi, après ω^ω, nous introduirons les nombres $\omega^\omega + \alpha$, α prenant toutes les valeurs inférieures à ω^ω, puis $\omega^\omega \times \lambda + \alpha$, λ prenant toutes les valeurs entières, et enfin $\omega^{\omega+1}$. En recommençant cette même opération sur $\omega^{\omega+1}$, nous introduisons successivement les nombres $\omega^{\omega+2}, \ldots, \omega^{\omega+\nu}, \ldots$, dont les exposants se suivent comme les nombres transfinis eux-mêmes.

Pour achever, si l'on a été conduit à considérer la suite

$$\omega^{\alpha_1} < \omega^{\alpha_2} < \ldots < \omega^{\alpha_\nu} < \ldots,$$

ce qui suppose

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_\nu < \ldots,$$

l'élément limite de cette suite, nombre immédiatement supérieur aux éléments de la suite, sera noté $\omega^{\lim \alpha_\nu}$. Cette définition est légitime, car, si nous avons deux suites

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_\nu,\quad \ldots$$

et

$$\beta_1,\quad \beta_2,\quad \ldots,\quad \beta_{\nu'}\quad \ldots$$

définissant le même nombre, tout nombre ω^{α_ν} est inférieur à un certain nombre $\omega^{\beta_{\nu'}}$, en prenant $\alpha_\nu < \beta_{\nu'}$, et réciproquement; donc les suites ω^{α_ν} et $\omega^{\beta_{\nu'}}$ définissent aussi le même nombre.

C'est ainsi que, après ω^ω, nous considérerons le nombre transfini désigné par ω élevé à une puissance égale à un polynome quelconque en ω, et la limite de ces nombres sera ω^{ω^ω}.

Remarquons que, chaque fois qu'on introduit une convention nouvelle, on ajoute de nouveaux nombres transfinis; mais, chaque fois, nous n'en définissons qu'une infinité dénombrable. On a appris à définir un ensemble où l'on a la suite fondamentale

$$\omega,\quad \omega^\omega,\quad \omega^{\omega^\omega},\quad \ldots,\quad \underbrace{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega}}}}}_{\nu \text{ fois}},\quad \ldots.$$

Si l'on veut désigner le nombre transfini limite de cette suite, on devra introduire un nouveau signe. En résumé, un système de conventions étant établi, on peut l'étendre, mais on ne peut pas donner un système de notations qui désignerait tous les nombres de la classe II. Cela ne nous empêche pas de pouvoir raisonner sur les nombres transfinis eux-mêmes, sans savoir tous les noter.

30. On sait quelle est, en mathématiques, l'importance du procédé de démonstration dit de récurrence, qui permet d'affirmer qu'une proposition est vraie pour un nombre n susceptible de prendre toutes les valeurs entières positives, si l'on démontre : 1° que la proposition est vraie pour les premières valeurs de n; 2° que, si elle est vraie pour tous les entiers qui précèdent un nombre n, elle est encore vraie pour n. Nous allons, en ce qui concerne les nombres des classes I ou II, indiquer un procédé analogue.

Théorème. — *Si, dans l'énoncé d'une proposition, figure un nombre α susceptible de prendre toutes les valeurs des nombres des classes I et II, cette proposition sera démontrée pour toutes ces valeurs, si l'on montre : 1° que la proposition est* *vraie pour les premières valeurs de α (pour $\alpha = 0$ ou pour $\alpha = 1$); 2° que, si la proposition est démontrée pour tous les nombres α' inférieurs à un nombre déterminé α, α étant un nombre quelconque des classes I ou II, elle est encore vraie pour le nombre α.*

En effet, supposons ces deux conditions remplies. Je dis que la proposition est vraie pour tous les nombres α des classes I et II. Car, si la proposition n'est pas vraie pour tous ces nombres, il en est pour lesquels elle n'a pas lieu, et, parmi eux, un plus petit que tous les autres, γ. γ ne peut pas être le premier des nombres ordinaux, d'après 1°. Il y a donc des nombres inférieurs à γ et, pour tous ces nombres, la propriété est vraie. Donc, d'après 2°, elle est vraie pour γ, ce qui contredit l'hypothèse.

Pour démontrer la partie 2° il faudra, dans certaines questions, distinguer deux cas, suivant que α sera de première ou de deuxième espèce ([1]).

31. Donnons quelques notions sur les ensembles bien ordonnés *non dénombrables*. Soit E un tel ensemble. Remarquons d'abord que tout ensemble bien ordonné dénombrable F est semblable à un segment de E, car E, ensemble non dénombrable, ne peut être semblable ni à F, ni à un segment de F. Donc, F est semblable à un segment de E.

Je dis que tout nombre des classes I et II désigne le rang d'un certain élément de E. Car, soit α un tel nombre. L'ensemble des nombres $< \alpha$ constitue un ensemble bien ordonné dénombrable, donc est semblable à un certain segment de E; l'élément de E qui détermine ce segment a donc pour rang α.

Supposons que, parmi les éléments de E, il s'en trouve qui déterminent un segment non dénombrable. Parmi ces éléments, il en existe un de rang inférieur. Soient a cet élément et A son segment. Le segment A est non dénombrable, tandis que si a' est de rang inférieur à a, le segment A' de a' est dénombrable. D'après ce que l'on vient de voir, A a des éléments correspondant à tous les nombres des classes I et II et réciproquement, tout élément de A

([1]) Quand α désigne un nombre ordinal de première espèce, nous conviendrons de noter le nombre précédent par $\alpha - 1$.

correspond à un nombre de l'une de ces classes. On peut donc dire qu'il y a correspondance entre les éléments de A et les nombres des classes I et II.

Par hypothèse, il existe dans E d'autres éléments que ceux de A, en particulier *a*. *a* est un élément dont le rang doit être considéré comme supérieur à tous les nombres des classes I et II, et parmi ceux qui jouissent de cette propriété, c'est celui de rang inférieur. Il convient de désigner ce rang par un signe qui sera, par définition, le premier nombre transfini supérieur à tous ceux de la classe II. Nous le désignerons par Ω; Ω sera dit le premier nombre transfini de la classe III. Pour exprimer qu'un nombre ordinal α appartient aux classes I ou II, nous pourrons dire que l'on a $\alpha < \Omega$.

CHAPITRE III.

LES ENSEMBLES LINÉAIRES.

1. — *Ensembles dérivés d'ordre quelconque.*

32. Appliquons aux ensembles de points les notions acquises au Chapitre II.

On a appris (Chapitre I) à former des ensembles de points P possédant des ensembles dérivés d'ordres :

$$1, \quad 2, \quad \ldots, \quad \nu, \quad \ldots, \quad \omega, \quad \ldots, \quad \omega\lambda+\nu, \quad \ldots, \quad \omega^2.$$

Généralisons la notion d'ensemble dérivé. Étant donné un ensemble de points sur un segment de droite, et α étant un nombre des classes I ou II, nous allons définir l'ensemble dérivé d'ordre α de P, que nous noterons P^α. Pour que la définition s'applique à tous les nombres des classes I ou II, il suffit, d'après le procédé de récurrence généralisé, que la définition soit donnée pour $\alpha = 1$, et qu'étant supposée donnée pour tout nombre α' inférieur à un nombre α, elle soit donnée pour α.

P^1 a été défini. Pour la seconde condition, distinguons deux cas : si α est un nombre de première espèce, c'est-à-dire s'il a un précédent, $\alpha - 1$, P^α sera le dérivé de $P^{\alpha-1}$. Si α est de seconde espèce, il peut être considéré comme la limite d'une suite de nombres $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_\nu < \ldots$. Je suppose la définition donnée pour chacun de ces nombres. Rappelons qu'on a

$$P^{\alpha_1} \geqq P^{\alpha_2} \geqq \ldots \geqq P^{\alpha_\nu} \geqq \ldots.$$

Par définition, P^α est l'ensemble des éléments communs à tous les ensembles P^{α_ν}. Remarquons qu'on peut dire aussi que P^α est l'ensemble des points communs à tous les ensembles $P^{\alpha'}$ pour lesquels $\alpha' < \alpha$.

Les ensembles dérivés sont des ensembles fermés.

La chose est vraie pour P^1. Supposons la proposition vraie pour tous les nombres inférieurs à α et étendons-la à α. Si α est de première espèce, P^α étant le dérivé de $P^{\alpha-1}$ est fermé. Si α est de deuxième espèce, nous savons que l'ensemble des points communs aux ensembles fermés P^{α_1}, P^{α_2}, ..., P^{α_ν}, ... est lui-même fermé (n° 14).

33. Montrons que, α étant un nombre quelconque des classes I ou II, il existe effectivement des ensembles de points possédant des dérivés d'ordre α et, en même temps, des fonctions discontinues pour lesquelles un tel ensemble est l'ensemble des points de discontinuité.

Ces faits ont été démontrés pour $\alpha = 1$. Admettons qu'ils soient vrais pour tous les nombres α' inférieurs à un nombre déterminé α, et étendons les résultats au nombre α. Supposons d'abord α de première espèce. Il existe un nombre $\alpha - 1$ qui précède α. Considérons une suite de points M_1, M_2, ..., M_n, ... tendant vers M (*fig.* 11), chacun étant à la droite du précédent. Dans chacun des intervalles M_1M_2, M_2M_3, ..., M_nM_{n+1}, ..., plaçons un ensemble de points pour lequel existe un dérivé d'ordre $\alpha - 1$, ce qu'on sait faire par hypothèse. Si l'on considère l'ensemble P de tous les points obtenus, il y a, au voisinage du point M, des points de $P^{\alpha-1}$. Donc M est point limite pour $P^{\alpha-1}$. Donc P^α existe et contient M.

Si α est de deuxième espèce, il est limite d'une suite de nombres α_1, α_2, ..., α_ν, ... Prenons une suite de points M_1, M_2, M_n, ... tendant vers M (*fig.* 11). Dans M_1M_2 plaçons un ensemble de points possédant un dérivé P^{α_1}, dans M_2M_3 un ensemble possédant un dérivé P^{α_2}, et ainsi de suite. On constate que, dans le voisinage de M, tous les P^{α_ν} ont des points. M appartient donc à tous les P^{α_ν}. Donc P^α existe et contient M.

Considérons maintenant une fonction égale partout à 0, sauf aux points de l'un ou l'autre des ensembles construits, pour lesquels elle est égale à 1. Cette fonction admet ces points pour points de discontinuité et, par suite, l'ensemble de ses points de discontinuité possède un dérivé d'ordre α.

34. Faisons sur ces ensembles les remarques suivantes : si l'un quelconque des ensembles dérivés contient un nombre fini de

points, l'ensemble suivant est nul. Réciproquement, si l'un des dérivés est nul, je dis qu'il existe un dérivé qui possède un nombre fini de points. En effet, parmi ceux des dérivés de P qui sont nuls, il y en a un dont l'indice est plus petit que tous les autres. Soit α cet indice. Je dis que α ne peut pas être un nombre de seconde espèce. Sinon, α serait limite d'une suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$. Par hypothèse, $P^{\alpha_1}, P^{\alpha_2}, \ldots, P^{\alpha_\nu}, \ldots$ contiennent tous des points. Donc (nº 13), ils ont des points communs. Donc P^α, qui est l'ensemble de ces points, n'est pas nul, contrairement à l'hypothèse. Donc, α est de première espèce et a un précédent, $\alpha - 1$. P^α étant le dérivé de $P^{\alpha-1}$, $P^{\alpha-1}$ contient un nombre fini de points (1).

Étant donnée une fonction f définie sur un segment AB, *si l'ensemble* P *de ses points de discontinuité est tel qu'un de ses ensembles dérivés* P^α *se compose d'un nombre fini de points, f est limite de fonctions continues.*

Le théorème est démontré pour $\alpha = 1$; je le suppose démontré pour tout nombre α' inférieur à α. Je vais montrer qu'il est vrai pour α. Marquons les points $M_1, M_2, \ldots, M_h$ dont se compose P^α.

Nous pouvons appliquer le théorème I. Car, dans tout intervalle de AB ne contenant aucun de ces points, on a $P^\alpha = 0$ et il existe, d'après ce qui précède, un nombre α' inférieur à α, tel que $P^{\alpha'}$ a un nombre fini de points. Donc, dans cet intervalle, f est limite de fonctions continues; il en est de même, d'après le théorème I, pour l'intervalle entier AB, ce qui démontre la proposition.

II. — *Ensembles parfaits non denses.*

35. Nous avons défini, dans ce qui précède, des ensembles de points possédant la propriété suivante : si P est l'un d'eux, les dérivés de P sont nuls à partir d'un certain indice, lequel est un nombre des classes I ou II.

Je dis que toute portion λ du segment AB contient une portion μ sur laquelle n'existe aucun point de l'ensemble. Sinon, il existe-

(1) On suppose essentiellement que l'ensemble dont on part est réparti sur un segment *fini*.

rait une portion λ de AB telle que toute portion μ de λ contînt des points de P. Dans cette hypothèse, tous les points de λ feraient partie du dérivé P^1 et, par suite, aussi de P^2, ..., P^n, ..., P^ω, ... et, d'une manière générale, de tous les dérivés. Il est impossible que l'un de ces dérivés s'annule.

Cette remarque nous conduit à la définition suivante : nous dirons qu'un ensemble de points P est *non dense* dans le segment AB, si toute portion du segment AB contient une portion dans laquelle ne se trouve aucun point de P. D'après ce qui précède, un ensemble de points qui a un dérivé quelconque nul est non dense.

Voici maintenant une autre remarque. Dans les exemples que l'on a construits, aucun des dérivés successifs non nuls de P ne coïncide avec son dérivé, car, si ce fait se produisait pour l'un d'eux, il se répéterait indéfiniment et tous les dérivés suivants coïncideraient avec le premier: donc aucun d'eux ne serait nul.

36. Étant donné un ensemble fermé P, qui n'est pas identique à son dérivé, étudions ceux des points de P qui n'appartiennent pas au dérivé. Soit A un de ces points; A n'est pas limite pour P. Il existe donc un intervalle fini comprenant A à son intérieur et qui ne contient pas de points de P autres que A. Nous dirons que A est un *point isolé* de P. Dans les exemples étudiés précédemment, chacun des dérivés successifs, à partir de P^1, contient des points qui disparaissent dans le suivant. Par suite, P^ω est moins étendu que P^ν, quel que soit ν. Et, d'une façon générale, un ensemble quelconque est moins étendu que tous ceux qui le précèdent.

Mais il existe aussi des ensembles de points coïncidant avec leur dérivé, par exemple l'ensemble des points d'un intervalle AB (extrémités comprises).

On dit qu'un ensemble de points est *parfait*, s'il coïncide avec son dérivé. On voit qu'un ensemble parfait est *fermé*. On dit qu'un ensemble est *dense en lui-même* si chacun de ses points est limite pour l'ensemble. Donc, pour qu'un ensemble soit parfait, il faut et il suffit qu'il soit : 1° fermé; 2° dense en lui-même.

37. Nous allons montrer qu'il existe des *ensembles parfaits*

non denses dans tout intervalle et faire une étude détaillée de ces ensembles.

Soit E l'ensemble des points du segment (0, 1). Pour définir P, je définirai l'ensemble des points de E qui n'appartiennent pas à P, ensemble que je désignerai par E — P. Je divise le segment (0, 1) en trois parties égales par les points $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, et j'exclus les points intérieurs au segment médian (*fig.* 16). Je divise de même

Fig. 16.

chacun des deux segments $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ et $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ en trois parties égales, et j'exclus dans chacun d'eux l'intervalle du milieu. Il reste quatre intervalles non exclus ; j'opère sur chacun d'eux comme j'ai opéré sur le segment (0, 1), et ainsi indéfiniment. Par définition, E — P sera l'ensemble des points *intérieurs* aux intervalles exclus.

Pour étudier la nature des points de P, représentons les abscisses des points de E dans le système de numération de base 3. Dans un tel système, un nombre x, compris entre 0 et 1, est représenté par une série de la forme

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \ldots,$$

chacun des entiers a étant égal à 0, à 1 ou à 2.

Les nombres a_1, a_2, a_3, ... se déterminent successivement de la façon suivante : a_1 est tel que, si l'on pose $x = \frac{a_1 + x_1}{3}$, on a :

$$0 \leqq x_1 \leqq 1.$$

Pour $x = \frac{1}{3}$ ou $x = \frac{2}{3}$, le système (a_1, x_1) peut être choisi de deux manières distinctes. (L'indétermination n'existerait plus si les conditions imposées à x_1 étaient $0 \leqq x_1 < 1$.) Dans tous les cas, x_1 étant obtenu, on procède sur x_1 comme sur x. On choisit a_2 tel que $x_1 = \frac{a_2 + x_2}{3}$ avec $0 \leqq x_2 \leqq 1$, et ainsi de suite. Tant qu'on n'obtient pas une quantité x_i nulle, on n'est pas arrêté dans la suite des opérations.

Les nombres dont le développement est limité (c'est-à-dire pour lesquels les a sont tous nuls à partir d'un certain rang) sont de la forme $\frac{p}{3^h}$ (p entier). Mais ces nombres sont également susceptibles d'un autre développement infini. Car on a

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \ldots$$

et par suite on a, par exemple :

$$\frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^h} = \frac{a_1}{3} + \ldots + \frac{a_{h-1}}{3^{h-1}} + \frac{2}{3^{h+1}} + \frac{2}{3^{h+2}} + \ldots.$$

Un nombre x qui n'est pas de la forme $\frac{p}{3^h}$ est tel que les nombres x_1, x_2, x_3, ... sont tous *intérieurs* à l'intervalle $(0, 1)$. Il n'y a donc jamais d'indétermination en ce qui le concerne. Par suite son développement, qui est infini, est unique.

Dans le procédé de définition de $E - P$, on a exclu d'abord les nombres pour lesquels $a_1 = 1$, avec $0 < x_1 < 1$. A la seconde opération, on a exclu les nombres pour lesquels $a_1 = 0$ ou 2, $a_2 = 1$ avec $0 < x_2 < 1$. A la $n^{\text{ième}}$ opération, on a exclu les nombres pour lesquels aucun des nombres a_1, a_2, ..., a_{n-1}, n'est égal à 1, tandis que $a_n = 1$, avec $0 < x_n < 1$.

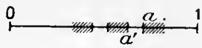
En résumé, les points exclus sont ceux pour lesquels, quelle que soit la représentation dans le système de numération de base 3, il existe au moins un chiffre du développement qui est égal à 1.

Les points de P sont ceux qui ne satisfont pas à cette condition, c'est-à-dire *qui sont représentés par un développement dont tous les chiffres sont égaux à* 0 *ou à* 2. (D'ailleurs, certains points de P peuvent être représentés par un développement où figure le chiffre 1, pourvu qu'il y ait un autre développement où la condition précédente soit remplie).

Étudions les propriétés de P. P contient d'abord l'ensemble e des points extrêmes de tous les intervalles exclus. Car une extrémité d'un intervalle exclu à la $n^{\text{ième}}$ opération est telle que les $(n - 1)$ premiers chiffres sont tous égaux à 0 ou à 2, x_{n-1} étant égal à $\frac{1}{3}$ pour l'extrémité gauche et à $\frac{2}{3}$ pour l'extrémité droite. Dans le premier cas, le développement infini qui ne contient que des 2, et dans le second, le développement fini satisfont à la condition caractéristique des points de P.

Je dis que chacun de ces points est limite d'autres points de e. En effet, considérons un point a (*fig.* 17) qui soit l'extrémité

Fig. 17.



gauche d'un intervalle exclu à la $n^{\text{ième}}$ opération. Il y a, après cette opération, un intervalle dont a est l'extrémité droite, et qui se trouve conservé. Dans l'opération de rang $n+1$, on divise cet intervalle en trois autres et l'on exclut celui du milieu. L'extrémité de droite a' de cet intervalle, qui fait partie de e, se trouve au tiers de l'intervalle précédent. Si l'on recommence l'opération sur $a'a$ et si l'on continue indéfiniment, on obtient des points tendant vers a. a est donc un point limite. Il est limite *d'un seul côté,* du côté opposé à l'intervalle exclu dont il est extrémité.

Il y a une infinité *dénombrable* d'intervalles exclus, puisque, chaque fois, on en exclut un nombre fini. Donc, l'ensemble e est dénombrable.

Je dis qu'il y a dans P d'autres points que ceux de e, à savoir ceux qui sont représentés par un développement infini où chacun des nombres a_i est égal à 0 ou à 2, sans qu'il arrive jamais qu'à partir d'un certain rang ces nombres soient tous égaux entre eux. En effet, le développement d'un tel point est unique et aucun coefficient n'est égal à 1, donc le point ne fait partie ni de $E - P$, ni de e. De plus, quel que soit n, le point en question se trouve, après la $n^{\text{ième}}$ opération, à l'intérieur d'un intervalle conservé.

Pour citer un exemple de pareils points, prenons celui dont l'abscisse possède un développement où les quantités a_i sont alternativement 0 et 2. Elle est égale à

$$\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^4} + \ldots = \frac{1}{4}.$$

Considérons un de ces points, l. Je dis que l est point limite de points de P, et *des deux côtés à la fois*. En effet, au bout de n opérations, la longueur de chaque intervalle conservé est $\frac{1}{3^n}$, et les extrémités de ces intervalles sont des points de P. Or, l est toujours intérieur à l'un de ces intervalles. Donc l est point limite pour P et des deux côtés à la fois.

Enfin, tous les points de P rentrent dans les deux catégories examinées. P est donc *dense en lui-même.*

Je dis que l'ensemble P est *fermé;* il suffit de montrer qu'un point M qui ne fait pas partie de P ne peut pas être limite pour P. En effet, M est *intérieur* à un intervalle exclu. Il n'y a donc pas de points de P au voisinage de M.

En résumé, P est dense en lui-même et fermé. Donc, il est *parfait.*

Je dis que P est *non dense* dans l'intervalle (0, 1). Soit en effet sur cet intervalle un segment $\alpha\beta$ de longueur λ. Au bout de l'opération de rang n, si n est suffisamment grand, la longueur $\frac{1}{3^n}$ des intervalles conservés est inférieure à λ. $\alpha\beta$ contient donc une portion dont tous les points sont exclus.

Examinons la puissance de l'ensemble P. Considérons l'ensemble (l) des points l ou points de seconde espèce de P. Considérons d'autre part l'ensemble R des points qui restent dans l'intervalle (0, 1) lorsqu'on en retranche l'ensemble A des points dont les abscisses sont de la forme $\frac{q}{2^h}$, et écrivons les abscisses des points de R dans le système binaire. Les développements seront de la forme

$$\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2^2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{2^n}+\ldots.$$

où chaque nombre α est égal à 0 ou à 1, les α n'étant pas tous égaux à partir d'un certain rang.

On peut établir une correspondance biunivoque et réciproque entre les points de R et les points l. Il suffit de faire correspondre à $a_i=0$, $\alpha_i=0$ et à $a_i=2$, $\alpha_i=1$. Donc, les deux ensembles ont même puissance. Or, R a été obtenu en supprimant dans le continu E un ensemble A dénombrable. Donc, (l) a la même puissance que E. Or, l'ensemble e des points de première espèce de P est dénombrable. Donc, $P=e+l$ a la puissance du continu [1].

---

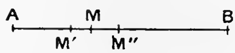
[1] Voir E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions.*

38. Étudions les propriétés générales des ensembles parfaits non denses. Soit P un ensemble parfait non dense dans un segment AB($a \leqq x \leqq b$). Je désigne par E l'ensemble des points d'abscisse x satisfaisant aux conditions

$$a \leqq x \leqq b.$$

Soit M un point de l'ensemble E — P, d'abscisse x_0 (*fig.* 18). P étant parfait, M n'est pas point limite pour P. On pourra

Fig. 18.



donc trouver un intervalle comprenant M à son intérieur et où P n'aura pas de points. Il peut y avoir des points appartenant à P et d'abscisse inférieure à x_0. L'ensemble de ces abscisses a une limite supérieure x'. On a $x' < x_0$. Le point M′ d'abscisse x' est un point de P, puisque c'est un point limite de P. On reconnaît de même l'existence d'un point de P, M″, dont l'abscisse x'' est limite inférieure des abscisses des points de P supérieures à x_0, dans l'hypothèse où il existe de tels points. En résumé, M se trouve intérieur à un certain intervalle M′M″ qui a la double propriété suivante : 1° aucun des points intérieurs au segment M′M″ ne fait partie de P; 2° les points M′ et M″ font partie de P (sauf peut-être dans le cas où l'un de ces points se confond avec A ou avec B).

Désignons par λ les intervalles qui possèdent cette double propriété. Deux intervalles λ distincts ne peuvent ni empiéter l'un sur l'autre, ni même avoir une extrémité commune. En effet, s'ils avaient une partie commune, une extrémité de l'un serait intérieure à l'autre. Ce point, étant intérieur à un intervalle λ, serait distinct de A et de B, et ne ferait pas partie de P; mais cela est contradictoire avec le fait que ce point est extrémité d'un autre intervalle λ. Les deux intervalles n'ont pas d'extrémité commune, car ce point appartiendrait à P et serait isolé, ce qui est impossible, puisque P est parfait.

Il ne peut pas y avoir un nombre fini d'intervalles λ. Sinon, il y aurait, à une unité près, autant d'intervalles dont tous les points feraient partie de P. P ne serait pas un ensemble non dense. Donc, les intervalles λ sont en nombre *infini*.

D'ailleurs leur ensemble est *dénombrable*. En effet, ceux d'entre eux dont la longueur dépasse un nombre positif α sont en nombre fini, puisqu'ils n'empiètent pas l'un sur l'autre. Cela étant, considérons une suite de nombres positifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ tendant vers o. Prenons les intervalles de longueur supérieure à α_1, puis, parmi ceux qui restent, ceux de longueur supérieure à α_2, et ainsi de suite. Chacun des intervalles λ se trouve ainsi obtenu, et nous pouvons les ranger en une suite correspondant aux nombres entiers.

Enfin, toute portion du segment AB doit contenir au moins une portion d'intervalle λ, puisque dans toute portion de AB, doivent exister des points ne faisant pas partie de P. Nous exprimerons ce fait en disant que l'ensemble des intervalles λ est *partout dense* dans AB.

En résumé, si P *est un ensemble parfait non dense sur un segment de droite, il y a sur ce segment une infinité dénombrable d'intervalles constituant un ensemble partout dense dans* AB, *ces intervalles n'ayant deux à deux aucun point commun, et* P *est constitué par les points de* AB *qui ne sont pas intérieurs à ces intervalles.*

39. Réciproquement, supposons que l'on se donne sur AB une infinité dénombrable d'intervalles λ, formant un ensemble partout dense sur AB, et qui n'aient deux à deux aucun point commun. Je dis que l'ensemble P des points tels que chacun n'est intérieur à aucun de ces intervalles est parfait et non dense. Nous faisons la réserve que, si l'un des points A ou B est extrémité d'un intervalle λ, nous le considérons comme intérieur à cet intervalle.

D'abord P est fermé. Car un point qui ne fait pas partie de P est intérieur à un intervalle λ, et par suite n'est pas point limite de P.

Pour montrer que P est parfait, il reste à montrer que P est dense en lui-même, c'est-à-dire qu'un point de P ne peut pas être isolé. En effet, si le point K de P était isolé, il serait intérieur à un intervalle HI ne contenant de P que le point K. Considérons le segment HK. Les points intérieurs à ce segment ne font pas partie de P. K en fait partie. Il existe donc un intervalle λ comprenant les points intérieurs à HK et ayant K pour extrémité. De même, K est l'extrémité d'un autre intervalle λ comprenant les points intérieurs à KI. Les deux intervalles λ considérés ont donc une extrémité commune, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc K n'est pas isolé. Donc P est parfait.

Enfin, P est non dense dans le segment AB, puisque l'ensemble des intervalles λ est partout dense sur AB.

Nous dirons que les intervalles λ, dont la connaissance équivaut à celle de P, sont les *intervalles contigus* à P.

Étudions la nature des points de l'ensemble parfait P. Une première catégorie de points est constituée par les extrémités de chaque intervalle λ. Car un quelconque de ces points n'est intérieur à aucun intervalle λ. Je dis qu'il existe d'autres points de P. Je montrerai pour cela que P n'est pas dénombrable, ce qui prouvera en même temps qu'un ensemble parfait n'est pas dénombrable. Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Étant donné un ensemble parfait P *situé sur un segment de droite* AB, *soit* $\alpha\beta$ *un intervalle de* AB *contenant à son intérieur au moins un point de* P. *Soit, d'autre part,* M *un point déterminé de* P. *Il est possible de trouver un intervalle* $\alpha_1\beta_1$, *de longueur aussi petite que l'on veut, intérieur à* $\alpha\beta$, *contenant à son intérieur un point de* P *et ne contenant pas* M.

En effet, si l'intervalle $\alpha\beta$ contient intérieurement un point de P, il en contient une infinité, puisque ce point est point limite pour P. Il est donc possible de déterminer un point M_1 de P, intérieur à $\alpha\beta$ et différent de M. Un tel point peut être entouré par un intervalle intérieur à $\alpha\beta$ et ne contenant pas M. De plus on peut prendre cet intervalle de longueur aussi petite que l'on veut.

Cela posé, démontrons que l'ensemble parfait P n'est pas dénombrable.

Si P était dénombrable, nous pourrions ranger ses points en une suite $M_1, M_2, \ldots, M_\nu, \ldots$, correspondant à celle des entiers. Prenons un intervalle $\alpha\beta$ comprenant un point de P à son intérieur. Il est possible de trouver à l'intérieur de $\alpha\beta$ un intervalle $\alpha_1\beta_1$ ne contenant pas M_1 et contenant intérieurement des points de P, de même, dans $\alpha_1\beta_1$, un intervalle $\alpha_2\beta_2$ ne contenant pas M_2 et dans les mêmes conditions, et ainsi de suite. On détermine ainsi une infinité d'intervalles dont chacun est intérieur au précédent et contient des points de P, avec la condition que $\alpha_\nu\beta_\nu$ ne contient aucun des points M_1, M_2, ..., M_ν. Ajoutons aux conditions précédentes la condition que $\alpha_\nu\beta_\nu$ tende vers o, en nous astreignant par exemple à ce que $\alpha_\nu\beta_\nu < \frac{\alpha\beta}{2^\nu}$. Dans ces conditions, il y a un point H, limite commune des extrémités des intervalles $\alpha_\nu\beta_\nu$. H est intérieur à tous les intervalles $\alpha_\nu\beta_\nu$, et par suite différent de tous les points M_ν. C'est un point de P puisqu'il en est point limite, car, dans tout intervalle contenant H à son intérieur, on peut trouver un intervalle $\alpha_\nu\beta_\nu$ et à l'intérieur de celui-ci un point de P. Ainsi P contient des points différents de M_1, M_2, ..., M_ν, ..., ce qui contredit l'hypothèse. Donc l'ensemble parfait P n'est pas dénombrable. Il contient donc d'autres points que les extrémités des intervalles λ.

En résumé, *un ensemble parfait ne peut pas être dénombrable; un ensemble dénombrable ne peut pas être parfait.*

Étant donné un ensemble parfait non dense, rangeons les intervalles contigus en une suite λ_1, λ_2, ..., λ_n, ... Si nous enlevons de AB les n premiers intervalles λ, la plus grande longueur des segments conservés après la $n^{\text{ième}}$ opération tend vers o quand n croît indéfiniment. Sinon, elle resterait supérieure à une longueur α, et il existerait dans ce cas sur AB un intervalle de longueur α dans lequel il n'y aurait pas de points exclus. P ne serait pas non dense dans cet intervalle.

On peut se rendre compte d'une autre manière de l'existence des points de seconde espèce (c'est-à-dire autres que les extrémités des intervalles λ). Soient g les extrémités gauches des intervalles λ et d leurs extrémités droites. D'après les hypothèses faites sur les intervalles λ, étant donné un point g, il existe toujours au voisinage de g et à gauche de g, des points g et d, et pareillement, pour un point d donné, il existe à droite d'un tel point, et aussi près de lui qu'on veut, des points g et d.

Ceci posé, à gauche d'un point g_1, prenons un point d_1 (*fig.* 19). A droite de d_1 prenons un point g_2 qui soit à gauche de g_1. Nous pouvons nous assujettir à la condition

$$d_1g_2 < \frac{d_1g_1}{2}.$$

Prenons d_2 à gauche de g_2 tel que

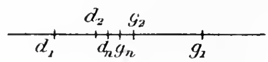
$$d_2g_2 < \frac{d_1g_2}{2},$$

et ainsi de suite. On obtient des points g_1, d_1, g_2, d_2, ..., g_n, d_n, ..., se succédant de gauche à droite dans l'ordre

$$d_1, \quad d_2, \quad \ldots, \quad d_n, \quad \ldots, \quad g_n, \quad \ldots, \quad g_2, \quad g_1.$$

Les intervalles $g_n d_n$, $d_n g_{n+1}$ tendent vers o. Il y a donc un point

Fig. 19.



limite commun aux points d_n et g_n. C'est un point limite pour P. Il fait donc partie de P. *Il est de plus limite des deux côtés à la fois.* Il appartient donc à une espèce différente de celle des points g et d.

40. Pour donner une application de la notion d'ensembles parfaits non denses, revenons aux fonctions discontinues. Nous avons le théorème suivant :

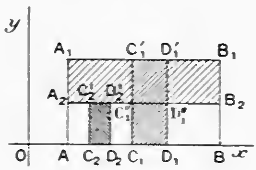
Étant donné un ensemble parfait non dense P, *la fonction f égale à* o *en tous les points de* AB, *sauf aux points de* P *où elle est égale à* 1, *est limite de fonctions continues.*

Tous les points de P sont des points de discontinuité puisque, au voisinage de chaque point de P, existent des points n'appartenant pas à P.

Je puis supposer que les points A et B sont des points de P. Sinon, on remplacerait A et B par les points extrêmes A_1, B_1, de P. Si la fonction est limite de fonctions continues sur A_1B_1, elle le sera sur AB.

Nous allons construire la fonction $F(x, y)$ correspondant à f dans les conditions du nº 5. D'abord, F sera égale à 1 sur toutes les parallèles à Oy menées par les différents points de P, et limitées (*fig.* 20) à la droite $y = 1$, en particulier sur AA_1 et sur BB_1. Cela posé, rangeons les intervalles contigus à P en une suite correspondant aux entiers positifs. Soit C_1D_1 le premier de ces

Fig. 20.



intervalles. Menons les droites $C_1C'_1$ et $D_1D'_1$. Dans le rectangle $C_1D_1D'_1C'_1$, il est possible de construire F en satisfaisant aux conditions du problème A (n° 5). Car, sur C_1D_1, f ne présente que deux discontinuités, l'une en C_1, l'autre en D_1. Je mène ensuite le segment A_2B_2 d'ordonnée $\frac{1}{2}$. J'achève la construction de F dans les deux rectangles $A_2C''_1C'_1A_1$ et $D''_1B_2B_1D'_1$, en donnant partout dans ces rectangles à F la valeur 1. La fonction F, dans toute la région où elle est définie, est continue par rapport à l'ensemble des variables. Poursuivons la définition de F. Je prends le second intervalle contigu C_2D_2, et je construis le rectangle $C_2D_2C'_2D'_2$ dont le côté $C'_2D'_2$ est sur A_2B_2. Les valeurs de F à l'intérieur de ce rectangle peuvent, comme pour le rectangle $C_1D_1C'_1D'_1$, être choisies en satisfaisant aux conditions du problème. Soit A_3B_3 le segment défini par $y = \frac{1}{3}$. Dans les régions situées au-dessus de A_3B_3 et où F n'est pas encore définie, donnons-lui la valeur 1 partout. En poursuivant indéfiniment l'application du procédé, la fonction F se trouve définie en tout point du rectangle et, pour un point donné, elle est définie après un nombre *fini* d'opérations. Elle est donc continue par rapport à l'ensemble (x, y) en chaque point intérieur au rectangle. Quant à la continuité de F aux points de Ox par rapport à y, elle est réalisée pour les points de P, puisque, sur une parallèle à Oy, F est constante. Pour les points n'appartenant pas à P, chacun se trouve intérieur à un intervalle contigu $C_\nu D_\nu$. C'est à la $\nu^{\text{ième}}$ opération que $F(x, y)$ sera définie au voisinage de $C_\nu D_\nu$, et par construction elle sera continue en tout point de ce segment par rapport à y.

Donc f est limite de fonctions continues.

III. — *Étude générale des ensembles fermés.*

41. Revenons à la théorie des ensembles de points que nous allons compléter. Indiquons d'abord quelques résultats relatifs aux ensembles parfaits quelconques, denses ou non denses.

Soit P un ensemble *parfait* réparti sur un segment de droite. On a vu (n° 38) que, sous la seule hypothèse que P est parfait, tout point n'appartenant pas à P est intérieur à un certain intervalle dont les extrémités font partie de P; nous dirons encore que ces intervalles sont les intervalles *contigus* à P; ils n'empiètent pas les uns sur les autres. Il y en a donc ou bien un nombre fini ou une infinité dénombrable.

Désignons maintenant par P un *ensemble linéaire quelconque*. On a défini l'ensemble dérivé d'ordre α, P^α, α étant un nombre des classes I ou II.

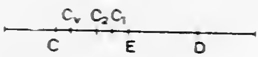
Je dis que *si un intervalle* AB *contient des points de* P^α, *quel que soit* α, *il y a dans cet intervalle des points appartenant à tous les* P^α. En effet, on reconnaît que, si l'on divise AB en deux segments AC, CB, la propriété appartient à l'un au moins de ces segments; en répétant le raisonnement, on forme une suite de segments possédant la même propriété, et dont chacun est contenu dans le précédent, et l'on peut faire en sorte que leur longueur tende vers o; dans ces conditions, il y a un point qui est commun à tous ces segments; ce point est donc limite pour chacun des P^α et appartient par suite à chaque P^α. Il est naturel de désigner les points communs à tous les P^α par P^Ω; nous dirons que P^Ω est le dérivé d'ordre Ω de P.

P^Ω est *fermé*, puisque c'est l'ensemble des points communs à certains ensembles fermés (n° 14).

Dans un intervalle qui ne contient aucun point de P^Ω, les P^α sont nuls pour certains indices. Car, s'il y avait des points de P^α, quel que soit α, dans l'intervalle, il y aurait des points de P^Ω d'après une proposition précédente.

Dans un intervalle CD dont aucun point *intérieur* ne fait partie de P^Ω, il existe un $\alpha < \Omega$ tel qu'aucun point intérieur à CD ne fait partie de P^α. En effet, plaçons entre C et D le point E (*fig.* 21):

Fig. 21.



plaçons entre E et C une suite $C_1, C_2, \ldots, C_\nu, \ldots$, tendant vers C; chacun des intervalles C_1E, C_2C_1, ..., $C_\nu C_{\nu-1}$, ... se trouve dans les conditions précédentes. Pour chacun d'eux existe un nombre α, tel que P^α est nul dans cet intervalle. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ ces nombres. Il existe un nombre des classes I ou II, supérieur à tous ces nombres. En raisonnant de même sur ED, je vois que finalement il existe un nombre α tel que P^α ne possède aucun point à *l'intérieur* du segment total CD.

Je dis que P^Ω ne peut pas contenir de point isolé. Car, supposons qu'un point M de P^Ω soit isolé; on peut trouver un intervalle CD contenant M à son intérieur et ne contenant pas de point de P^Ω autre que M. Il existe un nombre α' tel que $P^{\alpha'}$ ne contient pas de point intérieur à CM, un nombre α'' tel que $P^{\alpha''}$ ne contient pas de point intérieur à MD. Donc le plus grand α des deux nombres est tel que P^α ne contient pas de point intérieur à CD autre que M. Donc M ne fait pas partie de $P^{\alpha+1}$, ni par suite de P^Ω, contrairement à l'hypothèse.

Donc, P^Ω, qui est fermé, est aussi dense en lui-même. P^Ω *est un ensemble parfait.*

P^Ω étant un ensemble parfait, il existe un ensemble d'intervalles contigus tels que tout point ne faisant pas partie de P^Ω est intérieur à un de ces intervalles. A ces intervalles $C_1D_1, \ldots, C_\nu D_\nu, \ldots$ correspondent des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$ tels que d'une façon générale P^{α_ν} n'a pas de point intérieur à $C_\nu D_\nu$. On peut donc trouver un nombre α tel que P^α n'a de point à l'intérieur d'aucun de ces intervalles. P^α ne contient pas de points en dehors de P^Ω. D'ailleurs P^α contient tous les points de P^Ω. Donc il existe des nombres α tels que $P^\alpha = P^\Omega$.

En résumé, étant donné un ensemble P quelconque, ou bien il y a des dérivés P^α nuls, ou bien, si tous les dérivés existent quel que soit α, il existe un ensemble parfait P^Ω tel que les ensembles dérivés sont identiques à P^Ω à partir d'une certaine valeur de α. Dans le cas où il existe des ensembles dérivés nuls, on peut dire que l'ensemble commun à tous les dérivés est nul. Nous dirons que ce cas est caractérisé par $P^\Omega = 0$. Ainsi, dans les deux cas possibles, il existe toujours certains nombres α tels que l'on a $P^\alpha = P^\Omega$. Parmi les nombres α qui remplissent cette condition, il y en a un plus petit que tous les autres. Soit β ce nombre. On a $P^\beta = P^\Omega$, et pour $\alpha < \beta$, $P^\alpha > P^\Omega$. P^β est identique à son dérivé, c'est-à-dire est parfait ou nul, et si α est inférieur à β, P^α contient des points qui n'appartiennent pas à P^β.

42. Soit P un ensemble linéaire *fermé,* que nous désignerons aussi, pour la symétrie des notations, par P^0. Étant donné un point M quelconque de P^0, ou bien ce point appartient à tous les P^α, et alors il appartient à l'ensemble P^Ω, ou bien il ne remplit pas cette condition. Examinons ce second cas. Il existe des nombres α tels que P^α ne contient pas M. Soit γ le plus petit de ces nombres. γ ne peut pas être de deuxième espèce, car, si cela était, M faisant partie de tous les dérivés de rang inférieur à γ, ferait partie de P^γ. Donc, γ est de première espèce et a un précédent δ. M est un point isolé de P^δ, autrement dit est un point de $P^\delta - P^{\delta+1}$. Il est évident que $P^\delta - P^{\delta+1}$, $P^{\delta'} - P^{\delta'+1}$, si $\delta \neq \delta'$, n'ont aucun point commun. En effet supposons $\delta < \delta'$. M, qui est isolé dans P^δ, ne fait pas partie des ensembles qui le suivent, en particulier de $P^{\delta'}$. On peut résumer ces résultats par la formule

$$(1) \qquad P^0 = \Sigma\,(P^\delta - P^{\delta+1}) + P^\Omega \qquad (\delta = 0, 1, \ldots < \Omega),$$

où δ prend toutes les valeurs $< \Omega$, ou seulement, si l'on veut, les valeurs inférieures à β, β étant le nombre déterminé plus haut. Cette formule signifie que tout point de P^0 appartient, soit à P^Ω, soit à un ensemble $P^\delta - P^{\delta+1}$. Remarquons enfin que pour tout nombre δ inférieur à β, $P^\delta - P^{\delta+1}$ existe effectivement. Car, si $P^\delta - P^{\delta+1}$ était nul, on aurait $P^\delta = P^{\delta+1}$. P^δ coïncidant avec son dérivé, coïnciderait avec tous les ensembles qui le suivent, ce qui est impossible, puisque β est le plus petit nombre jouissant de cette propriété, et que δ est inférieur à β.

43. Nous allons faire intervenir dans les considérations précédentes la notion de puissance.

On dit qu'un ensemble Q de points est *isolé* si chacun de ses points est isolé.

C'est le cas de chacun des ensembles $P^{\delta} - P^{\delta+1}$.

Je dis que tout ensemble isolé est dénombrable. En effet, soit M un point de Q supposé isolé, il existe un intervalle auquel M est intérieur et qui ne contient aucun point de Q autre que M. Autrement dit, les distances de M aux autres points de Q ont une limite inférieure *positive* 2μ. J'entoure M d'un intervalle de longueur 2μ dont M soit le milieu, et je procède de même pour tous les points de Q. Deux de ces intervalles n'empiéteront certainement pas l'un sur l'autre, par suite ces intervalles forment un ensemble dénombrable (*cf.* n° 38). Comme à chacun correspond un seul point de Q, l'ensemble Q est dénombrable.

Donc, dans la formule (1), chaque terme de la somme Σ est un ensemble dénombrable. Comme cette somme est étendue à une infinité dénombrable de termes, $\Sigma(P^{\delta} - P^{\delta+1})$ représente un ensemble dénombrable de points. D'ailleurs, si l'ensemble parfait P^{Ω} existe réellement, il n'est pas dénombrable. Donc :

Un ensemble fermé quelconque ou bien est dénombrable, ou bien se compose d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait.

44. On appelle parfois *ensemble réductible* un ensemble pour lequel P^{Ω} est nul. Un ensemble réductible est dénombrable.

Étant donné un ensemble fermé quelconque P, on a vu que tout point ne faisant pas partie de P est intérieur à un intervalle déterminé dont les extrémités seules font partie de P. Nous les appellerons encore *intervalles contigus* à P. Deux de ces intervalles n'empiètent jamais l'un sur l'autre, mais ils peuvent avoir une extrémité commune. Si cette dernière circonstance ne se présente pas, l'ensemble est parfait.

On peut effectivement former des ensembles fermés admettant des ensembles dérivés de tous les ordres, y compris P^{Ω}, et pour lesquels $P^{\beta} > P^{\Omega}$, β étant donné à l'avance.

Prenons un ensemble parfait Q. Dans chaque intervalle contigu, nous plaçons un ensemble fermé réductible ayant un dérivé d'ordre β, ce dérivé contenant des points autres que les points de Q. On a appris à faire cette opération. Soit P l'ensemble total obtenu. P possède un dérivé d'ordre Ω, qui est Q, et le dérivé d'ordre β contient des points autres que ceux de Q.

Il est intéressant de remarquer qu'un ensemble dénombrable peut avoir pour dérivé un ensemble parfait non dense, ou encore un ensemble tel que ceux que l'on vient d'étudier. Par exemple, soit Q un ensemble parfait non dense; l'ensemble formé par les extrémités des intervalles contigus est dénombrable et a pour dérivé l'ensemble Q.

CHAPITRE IV.

LES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

I. — *Définitions générales.*

45. Les études précédentes sur les ensembles de points nous étaient indispensables pour étudier le rôle de la distribution des points de discontinuité dans les propriétés des fonctions. Il est temps d'introduire des notions nouvelles relatives à la continuité et à la discontinuité des fonctions les plus générales, notions qui nous permettront, comme on le verra, d'établir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction discontinue soit limite de fonctions continues.

Nous allons considérer pour le moment des fonctions d'*une seule variable*, et nous les supposerons *limitées*.

Nous supposons la fonction $f(x)$ définie pour toutes les valeurs de x de l'intervalle (a, b), c'est-à-dire qu'à toute valeur de x satisfaisant aux conditions $a \leqq x \leqq b$ correspond une valeur de f.

Soit un intervalle CD pris sur le segment PQ représentatif de la variable x (*fig.* 22). Les valeurs de la fonction aux points de CD

Fig. 22.

forment un ensemble de nombres qui a une limite supérieure $M(f, CD)$, une limite inférieure $m(f, CD)$, enfin une oscillation

$$\omega(f, CD) = M(f, CD) - m(f, CD).$$

Considérons un point A du segment. Entourons A d'un intervalle CD de longueur 2ρ et ayant son milieu en A. Supposons que l'on remplace ρ par un nombre ρ' plus petit. CD est remplacé par un intervalle plus petit. Dans ces conditions, $M(CD)$, que je désigne aussi par M_ρ, ne peut pas augmenter; m_ρ ne peut pas diminuer. On a donc

$$M_\rho \geqq M_{\rho'}, \qquad m_\rho \leqq m_{\rho'}, \qquad \omega_\rho \geqq \omega_{\rho'}.$$

Donnons à ρ une suite de valeurs $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ décroissantes et tendant vers o. On obtient une suite de limites supérieures M donnant lieu aux inégalités

$$M_{\rho_1} \geqq M_{\rho_2} \geqq \ldots \geqq M_{\rho_n} \geqq \ldots.$$

Ces nombres tendent vers une limite (qui est, comme l'on sait, leur limite inférieure) que je désigne par $M(f, A)$ et que j'appelle le *maximum de la fonction f au point* A. Étant donné un intervalle *quelconque* CD comprenant A à son intérieur, on reconnaît que, si n est assez grand, l'intervalle de milieu A et de longueur $2\rho_n$ est contenu dans CD, d'où résulte

$$M(f, CD) \geqq M_{\rho_n} \geqq M(f, A).$$

Ainsi $M(f, A)$ est la limite inférieure des nombres $M(f, CD)$, CD étant un intervalle quelconque contenant M à son intérieur.

Le nombre $M(f, A)$ est caractérisé par la double propriété suivante :

1° Quel que soit le nombre ε positif, on peut déterminer un intervalle CD auquel A est intérieur et en tout point duquel on a

$$f < M(f, A) + \varepsilon;$$

2° Quel que soit le nombre ε positif et quel que soit l'intervalle CD contenant A intérieurement, il existe dans CD un point A' tel que l'on a

$$f(A') > M(f, A) - \varepsilon.$$

On définit de la même façon $m(f, A)$, *minimum de f au point* A. C'est la limite supérieure des nombres $m(f, CD)$, CD étant un intervalle quelconque auquel A est intérieur. On a évidemment

$$m(f, A) \leqq M(f, A).$$

Car m est au plus égal à f qui est lui-même au plus égal à M.

Dans le cas particulier où f est continue au point A, on a

$$\mathrm{M}(f, \mathrm{A}) = m(f, \mathrm{A}) = f(\mathrm{A}).$$

D'une façon générale, posons

$$\omega(f, \mathrm{A}) = \mathrm{M}(f, \mathrm{A}) - m(f, \mathrm{A}).$$

On dira que ω est l'*oscillation de f au point* A. On voit que ω est positive ou nulle. La continuité est caractérisée par $\omega(f, \mathrm{A}) = 0$. Si, en un point A, ω est positif, il y a discontinuité en ce point.

46. *Semi-continuité.* — Un cas moins particulier que la continuité est celui où l'on a seulement

$$f(\mathrm{A}) = \mathrm{M}(f, \mathrm{A}).$$

Dans le cas général, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un intervalle CD tel que, en tout point A′ de cet intervalle, on a

$$f(\mathrm{A}') < \mathrm{M}(f, \mathrm{A}) + \varepsilon.$$

Donc, dans cet intervalle, on a dans le cas actuel

$$f(\mathrm{A}') < f(\mathrm{A}) + \varepsilon.$$

Cette propriété est l'une des deux dont l'ensemble constitue la continuité. Nous dirons que $f(\mathrm{A})$ est *semi-continue supérieurement au point* A.

De même, si l'on a

$$f(\mathrm{A}) = m(f, \mathrm{A}),$$

et par suite, pour toute valeur positive de ε,

$$f(\mathrm{A}') > f(\mathrm{A}) - \varepsilon,$$

dans un intervalle convenablement choisi, la fonction est dite *semi-continue inférieurement au point* A.

Si les deux propriétés ont lieu simultanément, la fonction est continue.

Une fonction sera dite *semi-continue supérieurement* ou *inférieurement* sur un intervalle si elle l'est en tout point de l'intervalle.

Ces définitions étant posées, considérons le maximum $\mathrm{M}(f, \mathrm{A})$

d'une fonction quelconque $f(A)$ définie en chaque point du segment PQ. $M(f, A)$ est une fonction définie en chaque point de PQ. Je désigne cette fonction par $\varphi(A)$.

Je dis que $\varphi(A)$ *est semi-continue supérieurement.*

En effet, soient A un point de PQ (*fig.* 22), ε un nombre positif. Par définition de $M(f, A)$, il est possible de trouver un intervalle CD intérieur à PQ, de milieu A, tel que l'on ait

$$M(f, CD) < M(f, A) + \varepsilon.$$

Si A′ est un point quelconque intérieur à CD, on a, d'après la définition de $M(f, A')$,

$$M(f, A') \leqq M(f, CD).$$

On déduit de là

$$M(f, A') < M(f, A) + \varepsilon$$

ou

$$\varphi(A') < \varphi(A) + \varepsilon.$$

Cette inégalité exprime la propriété de semi-continuité supérieure pour φ.

On montrerait de même que la fonction

$$\psi(A) = m(f, A)$$

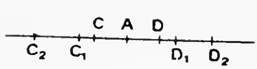
est semi-continue inférieurement.

La somme d'un nombre fini de fonctions semi-continues supérieurement en un point A est semi-continue supérieurement au même point.

Il suffit de vérifier le théorème dans le cas de deux fonctions f_1, f_2.

Par hypothèse, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver des inter-

Fig. 23.



valles C_1D_1, C_2D_2, entourant A (*fig.* 23), et tels que, suivant que le point A′ est dans C_1D_1 ou C_2D_2, on a

$$f_1(A') < f_1(A) + \varepsilon,$$
$$f_2(A') < f_2(A) + \varepsilon.$$

Nous pouvons prendre un intervalle fini CD contenu dans chacun des précédents et contenant A à son intérieur. Pour un point quelconque A' de CD, les inégalités précédentes sont vérifiées. On a donc

$$f_1(A') + f_2(A') < f_1(A) + f_2(A) + 2\varepsilon,$$

ce qui exprime la propriété énoncée.

Remarquons enfin que si f est semi-continue supérieurement, $-f$ est semi-continue inférieurement, car l'inégalité

$$f(A') < f(A) + \varepsilon$$

se transforme en

$$-f(A') > -f(A) - \varepsilon.$$

Ceci montre que les propriétés des fonctions semi-continues supérieurement et inférieurement se correspondent deux à deux.

L'oscillation $\omega(f, A)$ *d'une fonction* f *définie sur un segment* PQ *est une fonction semi-continue supérieurement;* en effet, $\omega(f, A)$ est la somme des fonctions $M(f, A)$ et $-m(f, A)$, semi-continues supérieurement.

Si une fonction f *définie sur* PQ *est semi-continue supérieurement, et si* α *est un nombre quelconque, l'ensemble des points de* PQ *où l'on a*

$$f \geqq \alpha$$

est fermé.

En effet, soit A_0 un point limite d'une suite de points $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, en chacun desquels on a

$$f(A_n) \geqq \alpha.$$

Dans tout intervalle auquel A_0 est intérieur, il existe des points de la suite $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, donc des points où l'on a

$$f \geqq \alpha.$$

Donc, dans un tel intervalle, le maximum de la fonction est supérieur ou égal à α. Il en est donc de même de $M(f, A_0)$. Or f est semi-continue supérieurement. Donc on a

$$M(f, A_0) = f(A_0).$$

Donc aussi

$$f(A_0) \geqq \alpha.$$

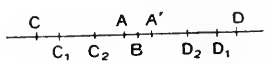
En particulier, étant donnée une fonction f, l'ensemble des points où l'oscillation est supérieure ou égale à un nombre positif α est un ensemble *fermé*.

47. Nous allons établir une distinction entre les diverses fonctions discontinues.

Supposons, comme premier cas, que la fonction f jouisse de la propriété suivante : quel que soit le nombre ε positif, il y a, dans tout intervalle de PQ, un point au moins où l'oscillation est inférieure à ε. Je vais montrer que, dans cette hypothèse, il existe, dans tout intervalle du segment PQ, des points où l'oscillation ω est nulle.

Donnons-nous une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$

Fig. 24.



tendant vers o. Partons d'un intervalle CD (*fig.* 24). Par hypothèse, il y a dans CD au moins un point A où l'on a

$$\omega(f, \mathrm{A}) < \varepsilon_1.$$

Mais ω est semi-continue supérieurement. Je puis donc déterminer un intervalle $\mathrm{C_1 D_1}$, contenant A à son intérieur et tel que, pour tout point A' de cet intervalle, on ait

$$\omega(f, \mathrm{A}') < \omega(f, \mathrm{A}) + \varepsilon_1 < 2\varepsilon_1.$$

Dans $\mathrm{C_1 D_1}$, je peux, par hypothèse, prendre un point $\mathrm{A_1}$ tel que

$$\omega(f, \mathrm{A_1}) < \varepsilon_2.$$

D'après la semi-continuité de ω, je peux, dans cet intervalle, prendre un intervalle $\mathrm{C_2 D_2}$ contenu dans $\mathrm{C_1 D_1}$, tel que, pour tout point A' intérieur à $\mathrm{C_2 D_2}$, on ait

$$\omega(f, \mathrm{A}') < \omega(f, \mathrm{A_1}) + \varepsilon_2 < 2\varepsilon_2.$$

On peut continuer ce raisonnement. On forme une suite d'intervalles $\mathrm{C_1 D_1}, \mathrm{C_2 D_2}, \ldots, \mathrm{C}_n \mathrm{D}_n, \ldots$ contenus chacun dans le précédent et tels que, en tout point A' contenu dans $C_n D_n$, on a

$$\omega(f, A') < 2\varepsilon_n.$$

Chacun des intervalles étant contenu dans le précédent, il y a au moins un point commun à tous. Soit B un tel point. L'oscillation au point B est inférieure à $2\varepsilon_n$, quel que soit n. Donc elle est nulle. On a donc

$$\omega(f, B) = 0,$$

ce qui démontre la proposition.

Ainsi, il y a un ensemble de points, dense dans PQ, tel que, en chacun de ces points, la fonction f est continue. La fonction f est dite *ponctuellement discontinue*. On voit que, pour une telle fonction, *l'oscillation a son minimum nul dans toute portion de* PQ et, par suite aussi, *en tout point de* PQ. Nous savons que l'ensemble des points où l'oscillation d'une fonction est supérieure ou égale à un nombre positif quelconque ε est fermé. Pour une fonction ponctuellement discontinue, d'après la définition d'une telle fonction, cet ensemble est *non dense*. Si la fonction f ne satisfait pas à cette condition, c'est qu'il existe d'une part un intervalle AB, d'autre part un nombre positif α tel que, en tout point de AB, on a

$$\omega \geqq \alpha.$$

Les fonctions de cette nature sont dites *totalement discontinues*.

En résumé, une fonction est *ponctuellement* ou *totalement* discontinue suivant que son oscillation a son minimum partout nul ou non. (Nous faisons rentrer le cas d'une fonction continue dans le cas des fonctions ponctuellement discontinues.)

Citons, comme exemple de fonction totalement discontinue, la fonction qui, dans le segment (0, 1), est égale à *zéro* pour tous les points d'abscisse rationnelle, à *un* pour les points d'abscisse irrationnelle. Soit A un point de ce segment. Dans son voisinage, il y a des points de chaque espèce. Donc

$$M(f, A) = 1, \qquad m(f, A) = 0, \qquad \omega(f, A) = 1.$$

Comme exemples de fonctions ponctuellement discontinues, on peut citer toutes les fonctions étudiées au cours des précédents Chapitres, par exemple les fonctions pour lesquelles l'ensemble des points de discontinuité est réductible. Car, dans tout intervalle, il existe un intervalle ne contenant pas de points de discontinuité.

Comme autre exemple, considérons la fonction définie comme il suit sur le segment $(0, 1)$. Pour $x = 0$, $x = 1$,

$$f = 1.$$

Pour $x = \frac{1}{2}$,

$$f = \frac{1}{2}.$$

Pour $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{4}$,

$$f = \frac{1}{4}.$$

En général, pour les points $x = \frac{p}{2^\nu}$, ν ayant une valeur déterminée et cette fraction n'étant pas réductible, on pose

$$f = \frac{1}{2^\nu}.$$

Pour tous les points dont l'abscisse n'est pas de la forme $\frac{p}{2^\nu}$, posons

$$f = 0.$$

Je dis que cette fonction (qui a des points de discontinuité dans tout intervalle) est ponctuellement discontinue.

Car la fonction est continue en chacun des points dont l'abscisse n'est pas de la forme $\frac{p}{2^\nu}$. En effet, en un tel point A, on a

$$f = 0.$$

Donnons-nous un nombre positif ε. Soit ν un entier positif tel que

$$\frac{1}{2^\nu} < \varepsilon.$$

Nous pouvons prendre un intervalle contenant A et ne contenant aucun des points $\frac{p}{2^h}$, si $h \leqq \nu - 1$; en tout point de cet intervalle, on aura

$$0 \leqq f \leqq \frac{1}{2^\nu} < \varepsilon.$$

On peut ajouter que f est semi-continue supérieurement. La condition est remplie pour le point A considéré, puisque f est continue en A. En un point déterminé A′ d'abscisse $\frac{p}{2^\nu}$, on a

$$f = \frac{1}{2^\nu}.$$

Prenons un intervalle CD contenant A′ de longueur inférieure à $\frac{1}{2^\nu}$. En tout point de cet intervalle, on a

$$f \leqq \frac{1}{2^\nu}.$$

Donc f est semi-continue supérieurement en A′. Elle l'est donc en tout point du segment (0, 1).

48. Nous allons montrer qu'une fonction semi-continue est ponctuellement discontinue. Montrons d'abord que, *étant donnée une fonction f quelconque définie sur* PQ, si l'on désigne par φ la fonction $M(f, A)$, *la fonction $\varphi - f$* qui, en chaque point, est positive ou nulle, *a, en tout point de* PQ (et, par suite aussi dans toute portion de PQ), *son minimum nul.*

En effet, soit A un point de PQ. Soit ε un nombre positif. La fonction φ étant semi-continue supérieurement, on peut déterminer un intervalle CD auquel A est intérieur et tel que, en tout point B de CD, on a

$$\varphi(B) < \varphi(A) + \varepsilon.$$

D'autre part, d'après la définition de $\varphi(A)$, aussi près qu'on veut de A, il est possible de trouver un point B tel que l'on ait

$$f(B) > \varphi(A) - \varepsilon.$$

Il existe donc aussi près que l'on veut de A des points B satisfaisant simultanément aux deux conditions. Retranchons-les membre à membre. Il vient

$$\varphi(B) - f(B) < 2\varepsilon.$$

Comme le point B existe quel que soit ε, cette inégalité signifie que $\varphi - f$ a son minimum nul en A.

On démontrerait le même théorème pour la fonction $f - \psi$, ψ étant la fonction $m(f, A)$.

Ceci posé, démontrons la discontinuité ponctuelle d'une fonction f semi-continue supérieurement. Ici, les deux fonctions f et φ

sont identiques. Donc la fonction ω égale à $\varphi - \psi$ est ici égale à $f - \psi$. D'après le lemme précédent, ω a son minimum nul en tout point. Donc, la fonction f est ponctuellement discontinue.

49. Plaçons-nous au point de vue de la répartition des points de discontinuité. Nous avons vu, comme conséquence de la définition des fonctions ponctuellement discontinues, que, ω étant l'oscillation en chaque point d'une telle fonction, σ un nombre positif quelconque, l'ensemble des points où l'on a $\omega \geqq \sigma$ est non dense, cette propriété pouvant même servir de définition aux fonctions ponctuellement discontinues. Soit G l'ensemble de tous les points de discontinuité de la fonction considérée. On peut le considérer comme engendré de la façon suivante : donnons-nous une suite de nombres positifs $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ tendant vers o. Désignons par G_n l'ensemble des points de PQ où l'on a $\omega \geqq \sigma_n$. Nous définissons ainsi une suite d'ensembles fermés $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ dont chacun est non dense dans PQ. Je dis que l'ensemble G des points de discontinuité est la réunion de tous les ensembles $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$. En effet, tout point de chacun de ces ensembles est un point de discontinuité et, par suite, appartient à G. Inversement, tout point de G appartient à l'un de ces ensembles. Car, étant donné un point A de G, l'oscillation en ce point a une certaine valeur positive ω. Il y a un nombre $\sigma_\nu < \omega$, A fait partie de G_ν.

Nous sommes conduits ainsi à une notion nouvelle sur les ensembles.

Nous dirons qu'un ensemble est *de première catégorie* dans un intervalle PQ, s'il est constitué par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est non dense dans PQ. Les ensembles de points qui ne sont pas de première catégorie sont dits *de deuxième catégorie*.

Donnons quelques propriétés des ensembles de première catégorie.

La réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie est de première catégorie.

Car un ensemble de première catégorie est constitué par une infinité dénombrable d'ensembles non denses. Or, la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables d'éléments est encore un ensemble dénombrable de ces éléments. Donc, la réunion d'un ensemble dénombrable d'ensembles de première catégorie constitue une infinité dénombrable d'ensembles non denses. C'est donc un ensemble de première catégorie.

Je dis que *si* G *est un ensemble de première catégorie sur un segment* PQ, *il y a dans toute portion de* PQ *des points qui n'appartiennent pas à* G.

Car G est formé d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses G_1, G_2, ..., G_n, ... Soit ab un intervalle pris sur PQ. L'ensemble G_1 étant non dense dans PQ, il est possible de déterminer dans ab une portion $a_1 b_1$ ne contenant aucun point de G_1. De même, dans $a_1 b_1$, il est possible de déterminer une portion $a_2 b_2$ ne contenant aucun point de G_2, et ainsi de suite. Nous formons une suite d'intervalles $a_1 b_1$, ..., $a_n b_n$, ... dont chacun est contenu dans le précédent, et tels que $a_n b_n$ ne contient aucun point de G_1, G_2, ... G_n. Il existe un point A appartenant à tous ces intervalles. Ce point n'appartient pas à G, puisqu'il ne peut appartenir à aucun des ensembles G_1, G_2, ..., G_n, ... La proposition est donc démontrée. On voit que l'ensemble E — G des points de PQ qui n'appartiennent pas à G est dense sur toute partie de PQ. On voit en outre que l'ensemble E n'est pas de première catégorie par rapport à lui-même; il est donc de seconde catégorie, ainsi que E — G.

Tout ensemble dénombrable est de première catégorie. C'est, en effet, la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est composé d'un élément, et est par suite non dense.

Proposons-nous de former un ensemble de première catégorie qui ne soit pas dénombrable et qui de plus soit dense dans le segment (o, 1). Nous procéderons de la façon suivante : nous plaçons sur (o, 1) l'ensemble parfait non dense G_1 dont les points ont des abscisses de la forme $\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a_n}{3^n}$, les nombres a_n étant tous égaux à *zéro* ou à *deux*. Nous considérons les intervalles contigus à G_1; dans chacun de ces intervalles contigus, nous plaçons un ensemble ayant par rapport à cet intervalle la position de G_1 par rapport à (o, 1). Désignons par G_2 l'ensemble total, y compris G_1. On reconnaît que G_2

est parfait et non dense. Dans chaque intervalle contigu à G_2, opérons comme dans les intervalles contigus à G_1. Soit G_3 l'ensemble total des points obtenus après cette opération. Nous continuons indéfiniment. Soit G l'ensemble constitué par la réunion de G_1, G_2, ..., G_n, ... L'ensemble G est de première catégorie. Je dis qu'il est dense. Car, pour G_1, la plus grande longueur d'un intervalle contigu est $\frac{1}{3}$, pour G_2, c'est $\frac{1}{3^2}$; pour G_n, c'est $\frac{1}{3^n}$. Cette longueur tend donc vers *zéro*. Donc, pour toute portion de l'intervalle (0, 1), il est possible de trouver n assez grand pour que G_n y possède des points. L'ensemble G est donc dense.

II. — *Condition nécessaire pour qu'une fonction soit limite de fonctions continues.*

50. Nous pouvons maintenant aborder l'étude des conditions que remplissent les fonctions limites de fonctions continues. Dans nos démonstrations nous ferons usage du lemme suivant :

Lemme. — *Étant donnés un ensemble* T *de nombres dont l'oscillation surpasse un nombre positif* 2λ, *et d'autre part un nombre a quelconque, on peut trouver dans* T *un nombre b tel que l'on ait* $|a - b| > \lambda$.

Désignons les limites supérieure et inférieure de T par M (T) et m (T). Par hypothèse, on a

$$M(T) - m(T) - 2\lambda > 0.$$

Écrivons cette inégalité comme il suit :

$$[M(T) - a - \lambda] + [a - m(T) - \lambda] > 0.$$

Les deux nombres entre crochets ont une somme positive, donc l'un au moins est positif, et nous pouvons trouver un nombre positif ε inférieur à ce nombre. Supposons que ce soit le premier, on a

$$M(T) - a - \lambda > \varepsilon.$$

D'après la définition de M (T), il existe dans T un nombre b

tel que

$$b > M(T) - \varepsilon$$

On a donc, par addition,

$$b - a > \lambda.$$

Dans l'hypothèse où l'on a

$$a - m(T) - \lambda > 0,$$

on trouve de même un nombre b de T tel que

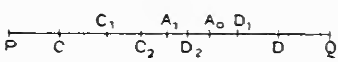
$$a - b > \lambda,$$

ce qui démontre la proposition.

51. Ce lemme étant établi, supposons qu'on ait une suite de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ toutes définies sur un segment PQ, et tendant vers une fonction f. Pour simplifier, nous supposerons f bornée. Je dis que f *est ponctuellement discontinue*. Je vais montrer que l'hypothèse que f serait totalement discontinue conduit à une impossibilité.

En effet, dans cette hypothèse, il existe un segment CD (*fig.* 25)

Fig. 25.



et un nombre positif 2λ, tel qu'en tout point A de CD l'oscillation $\omega(f, A)$ surpasse 2λ. Prenons un nombre positif μ inférieur à λ et posons

$$\lambda = \mu + 4\varepsilon.$$

ε est positif. Prenons un point A_0 arbitraire de CD. La suite $f_1(A_0)$, $f_2(A_0), \ldots, f_\nu(A_0), \ldots$ a pour limite $f(A_0)$. D'après cela, on peut trouver un nombre entier α tel que

$$(1) \qquad |f_\alpha(A_0) - f(A_0)| < \varepsilon.$$

La fonction f_α est continue sur PQ. On peut donc déterminer un intervalle $C_1 D_1$ contenant A_0, contenu dans CD, et tel qu'en tout point A de $C_1 D_1$ on ait

$$(2) \qquad |f_\alpha(A) - f_\alpha(A_0)| < \varepsilon.$$

Dans le segment C_1D_1, l'oscillation de la fonction f surpasse 2λ. En vertu du lemme du n° 50, il existe un point A_1 de C_1D_1 tel que l'on a

$$(3) \qquad |f(A_1)-f(A_0)| > \lambda.$$

La suite $f_1(A_1), f_2(A_1), \ldots, f_\nu(A_1), \ldots$ tend vers $f(A_1)$. On peut donc déterminer un entier β tel que

$$(4) \qquad |f_\beta(A_1)-f(A_1)| < \varepsilon.$$

La fonction f_β est continue; nous pouvons trouver un intervalle C_2D_2 contenant A_1, contenu dans C_1D_1, et tel que l'on ait, en tout point A de C_2D_2,

$$(5) \qquad |f_\beta(A)-f_\beta(A_1)| < \varepsilon.$$

De plus, tout point A de C_2D_2 satisfait à (2).

En combinant par addition d'une part (1) et (2), d'autre part (4) et (5), il vient

$$|f_\alpha(A)-f(A_0)| < 2\varepsilon,$$
$$|f_\beta(A)-f(A_1)| < 2\varepsilon.$$

En rapprochant ces deux inégalités de l'inégalité (3), on a

$$|f_\alpha(A)-f_\beta(A)| > \lambda - 4\varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$(6) \qquad |f_\alpha(A)-f_\beta(A)| > \mu.$$

Cette dernière inégalité est valable pour tout point A de C_2D_2.

D'autre part, nous sommes partis de la suite $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$. Mais tous nos raisonnements sont valables, si l'on part de la suite $f_{p+1}, f_{p+2}, \ldots$, p étant un entier déterminé quelconque, et si, d'autre part, on remplace CD par une portion quelconque de CD. Donc, quel que soit p, on a pu trouver, dans toute portion de CD, une portion C_2D_2 telle que tous les points A de C_2D_2 satisfont à (6), α et β étant certains nombres supérieurs à p, et par suite à

$$(7) \qquad \omega\,[f_{p+1}(A), f_{p+2}(A), \ldots] > \mu,$$

le premier membre désignant l'oscillation de l'ensemble des nombres compris dans le crochet.

Donc, quel que soit p, l'ensemble G_p des points de CD qui ne satisfont pas à la condition (7) est *non dense* dans CD. Donnons à p les valeurs 1, 2, 3, ..., ν, ... La réunion des ensembles G_1, G_2, ..., G_ν, ... constitue un ensemble G de première catégorie dans CD. Il y a des points qui n'appartiennent pas à cet ensemble. Soit A un tel point. A ne fait partie d'aucun des ensembles G_1, G_2, ..., G_ν, ... Donc, il satisfait à l'inégalité (7), quel que soit p. Ceci est en contradiction avec le fait que $f_\nu(A)$ a une limite finie quand ν croît indéfiniment.

Donc, *toute fonction limite de fonctions continues est une fonction ponctuellement discontinue.*

Il est aisé de vérifier que tous les exemples donnés jusqu'ici satisfont à cette condition. Nous pouvons, d'autre part, donner un exemple de fonction qui n'est pas limite de fonctions continues. Ce sera la fonction égale à *zéro* en tout point d'abscisse rationnelle et à *un* en tout point d'abscisse irrationnelle ; car elle est totalement discontinue.

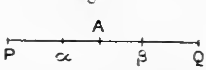
III. — *Extension des résultats au cas d'ensembles parfaits quelconques.*

52. Nous allons donner une extension aux théories qui font l'objet des deux sections précédentes, en étendant les notions définies en partant du continu au cas où l'on prend pour base de raisonnement, au lieu du continu, un ensemble parfait quelconque.

Nous allons voir que le continu emprunte à sa qualité d'ensemble parfait les propriétés essentielles qui nous ont servi dans la plupart des raisonnements précédents.

Considérons une fonction f définie sur un ensemble parfait H

Fig. 26.



réparti sur PQ (*fig.* 26). Soit $\alpha\beta$ un intervalle contenant à son intérieur des points de H.

Les valeurs de f aux points de H qui sont contenus dans $\alpha\beta$ ont une limite supérieure, une limite inférieure et une oscillation. Nous appellerons ces nombres

$$M(f, H, \alpha\beta), \quad m(f, H, \alpha\beta)$$

et

$$\omega(f, H, \alpha\beta) = M - m.$$

Prenons un point A de H. Considérons une suite d'intervalles $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, ..., $\alpha_n\beta_n$, ..., dont chacun contient A et est contenu dans le précédent, la longueur de $\alpha_n\beta_n$ tendant vers zéro quand n croît indéfiniment. Le nombre $M(f, H, \alpha\beta)$ ne va jamais en croissant. Il a donc une limite inférieure qui ne dépend pas de la suite des intervalles choisis. Ce nombre sera appelé le *maximum de f au point* A *relativement à* H. Nous le désignerons par $M(f, H, A)$. De la même manière, on définit le *minimum relativement à* H, $m(f, H, A)$. L'*oscillation* $\omega(f, H, A)$ est la différence de ces deux nombres.

A l'aide de ces définitions, nous pouvons introduire les notions de continuité et de discontinuité aux points de l'ensemble H relativement à cet ensemble. En un point A de H où l'on a $\omega(f, H, A) = 0$, nous dirons que f est *continue en* A *relativement à* H. Si l'on a $\omega(f, H, A) > 0$, f sera dite *discontinue en* A *relativement à* H.

Si $M(f, H, A) = f(A)$, nous dirons que f est *semi-continue supérieurement* relativement à H ; on reconnaît que, dans ce cas, quel que soit le nombre positif ε, il est possible de déterminer un intervalle $\alpha\beta$ auquel A est intérieur et tel que, pour tout point A' de H compris dans $\alpha\beta$, on ait $f(A') < f(A) + \varepsilon$; et réciproquement, si cette condition est remplie, elle entraîne $M = f$.

On définit de même la *semi-continuité inférieure.*

Si l'on considère, pour une fonction quelconque f, la fonction φ égale à $M(f, H, A)$ en chaque point A de H, φ est semi-continue supérieurement sur H.

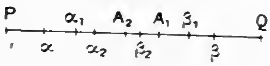
Étant donnée une fonction semi-continue supérieurement sur H, et telle que son minimum par rapport à H soit égal à *zéro* en tout point de H, dans tout intervalle contenant des points de H, elle atteint effectivement la valeur *zéro* en des points de H.

Démontrons cette dernière proposition. Donnons-nous une suite de nombres positifs ε_1, ε_2, ..., ε_n, ..., tendant vers 0. Nous pouvons trouver dans toute portion $\alpha\beta$ de PQ (*fig.* 27) contenant des points de H, un point A_1 intérieur à $\alpha\beta$, tel que

$$f(A_1) < \varepsilon_1.$$

En vertu de la semi-continuité supérieure, nous déterminons un

Fig. 27.



intervalle $\alpha_1\beta_1$ contenant A_1 tel que, en tout point A de H contenu dans $\alpha_1\beta_1$, on a

$$f(A) < f(A_1) + \varepsilon_1 < 2\varepsilon_1.$$

De même, dans $\alpha_1\beta_1$, nous déterminons un point A_2 intérieur tel que

$$f(A_2) < \varepsilon_2$$

et, autour de A_2, un intervalle $\alpha_2\beta_2$ contenu dans $\alpha_1\beta_1$ tel que, pour tout point A de H contenu dans $\alpha_2\beta_2$, on a

$$f(A) < f(A_2) + \varepsilon_2 < 2\varepsilon_2,$$

et ainsi de suite. On obtient des intervalles successifs $\alpha_1\beta_1$, ..., $\alpha_n\beta_n$, ..., tels qu'en tout point A de H contenu dans $\alpha_n\beta_n$, on a $f(A) < 2\varepsilon_n$. Chacun des intervalles étant contenu dans le précédent, il existe au moins un point de H contenu dans tous ces intervalles. En un tel point A l'on a

$$f(A) < 2\varepsilon_n,$$

quel que soit n. Donc, $f(A) = 0$.

53. Parmi les fonctions définies sur un ensemble parfait, nous pouvons faire les distinctions analogues à celles qui ont été faites quand on partait du continu. Il y a lieu de distinguer trois cas :

Premier cas. — La fonction définie est *continue* en tout point de H. C'est le cas où ω est nul en tout point de H.

Par exemple, une fonction définie sur un segment PQ et continue sur ce segment sera continue par rapport à tout ensemble parfait situé sur ce segment.

Pour donner un autre exemple, prenons l'ensemble parfait H constitué par les points dont les abscisses sont de la forme

$$\sum \frac{a_n}{3^n},$$

où a_n est égal à o ou à 2. Donnons à f en tous les points de H une valeur constante, et en dehors de H des valeurs quelconques : f sera continue sur H. Nous aurons encore une fonction continue si nous partageons H en deux ensembles partiels par un intervalle contigu, et si nous donnons à f la valeur o sur l'ensemble de droite, et la valeur 1 sur l'ensemble de gauche.

Deuxième cas. — Il existe pour f des points de discontinuité; mais, dans tout intervalle contenant des points de H, et quel que soit le nombre ε positif, il existe des points de H où l'oscillation de f relative à H est inférieure à ε. L'oscillation d'une fonction étant semi-continue supérieurement, il existe alors, dans tout intervalle contenant des points de H, certains points de H où cette fonction ω est nulle, c'est-à-dire des points de continuité de f par rapport à H. La fonction est dite *ponctuellement discontinue sur* H.

Partons de l'ensemble parfait non dense H de l'exemple précédent. Aux points $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, donnons à f la valeur $\frac{1}{2}$; aux points $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$, donnons à f la valeur $\frac{1}{2^2}$. Aux points de H dont l'abscisse est de la forme $\frac{p}{3^n}$ (p et n étant entiers, et la fraction étant irréductible), posons $f = \frac{1}{2^n}$; enfin, en tous les autres points de l'ensemble H, donnons à f la valeur o. On reconnaît que chacun des points où $f > 0$ est un point de discontinuité, et que dans tout intervalle contenant des points A de H, on peut trouver des points où $\omega(f, A)$ soit inférieure à un nombre ε donné à l'avance. La fonction est donc ponctuellement discontinue.

Troisième cas. — La condition précédente n'est pas remplie. C'est donc qu'il existe un certain intervalle $\alpha\beta$ comprenant des points de H et un nombre positif λ, tels qu'en tout point de H contenu dans $\alpha\beta$, l'oscillation de H surpasse λ. Nous dirons que, dans ce cas, la fonction est *totalement discontinue*.

54. Généralisons les notions relatives aux ensembles. H étant un ensemble parfait, et K étant un ensemble contenu dans H, deux cas sont possibles :

1° Dans tout intervalle contenant intérieurement des points de H, il existe un intervalle de même nature ne contenant aucun point de K. On dit alors que K *est non dense dans* H;

2° Il y a un intervalle λ contenant intérieurement des points de H et tel que tout intervalle de même nature contenu dans λ contient des points de K. Alors K est partout dense dans la portion de H contenue dans l'intervalle λ.

Par exemple, l'ensemble des points de H où l'oscillation relative à H d'une fonction ponctuellement discontinue sur H est supérieure ou égale à $\sigma > 0$, est non dense sur H. Réciproquement, si cette condition a lieu quel que soit $\sigma > 0$, la fonction est ponctuellement discontinue.

Nous sommes conduits à considérer l'ensemble G des points de discontinuité d'une telle fonction. Soit une suite $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$, tendant vers 0. Si G_n est l'ensemble des points de H où l'on a $\omega \geqq \sigma_n$, l'ensemble G est la réunion de tous les ensembles G_n.

Un ensemble contenu dans H est dit de *première catégorie* par rapport à H, s'il est formé par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses dans H.

Je dis que si K est un ensemble de première catégorie par rapport à l'ensemble parfait H, il y a, dans tout intervalle contenant à son intérieur des points de H, des points de H qui n'appartiennent pas à K.

En effet, soit $\alpha\beta$ un intervalle contenant des points de H à son intérieur. Par hypothèse, K est constitué par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$, dont chacun est non dense dans H. On peut trouver dans $\alpha\beta$ une portion $\alpha_1\beta_1$ contenant à son intérieur au moins un point de H, mais aucun point de K_1, dans $\alpha_1\beta_1$, une portion $\alpha_2\beta_2$ contenant à son intérieur au moins un point de H, mais aucun point de K_2, et ainsi de suite. On détermine une suite d'intervalles $\alpha_1\beta_1, \ldots, \alpha_n\beta_n, \ldots$, tels que $\alpha_n\beta_n$ est contenu dans $\alpha_{n-1}\beta_{n-1}$, contient des points de H, mais aucun de K_n. Il existe un point de H intérieur à tous ces intervalles. Ce point n'appartient à aucun ensemble K_n. Il ne fait donc pas partie de K.

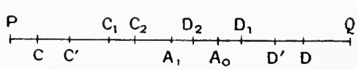
Citons l'exemple suivant d'un ensemble non dense par rapport à un autre. Partons de l'ensemble parfait H, constitué par les points d'abscisses de la forme $\sum \frac{a_n}{3^n}$, où les nombres a sont égaux à 0 ou à 2. Dans chaque intervalle contigu à H, plaçons un ensemble qui soit situé par rapport à cet intervalle comme H l'est par rapport au segment (0, 1). Soit H_1 l'ensemble total, qui est parfait. Je dis que H est non dense dans H_1. En effet, considérons un intervalle contenant à son intérieur des points de H_1. Cet intervalle contient des points de H_1 qui n'appartiennent pas à H, puisqu'il contient des intervalles contigus à H. Or, les points de H_1 n'appartenant pas à H, qui est parfait, ne sont pas limites pour H. Je puis donc entourer un de ces points par un intervalle ne contenant pas de points de H. H est donc non dense dans H_1.

55. Nous allons généraliser le théorème dans lequel nous avons énoncé un caractère nécessaire des fonctions limites de fonctions continues.

Si, sur un ensemble parfait H, *se trouvent définies une suite de fonctions continues f_1, f_2, ..., f_n, ..., tendant vers une fonction f, je dis que f est ponctuellement discontinue sur* H.

En effet, tout revient à démontrer l'impossibilité de l'hypothèse d'après laquelle f serait totalement discontinue sur H. Dans cette hypothèse, il y aurait un certain intervalle CD (*fig.* 28) contenant

Fig. 28.



à son intérieur des points de H, et un nombre positif 2λ tel que, en tout point A de H contenu dans CD, on aurait

$$\omega(f, \mathrm{H}, \mathrm{A}) > 2\lambda.$$

On aurait par suite aussi, pour toute portion C'D' de CD contenant à son intérieur des points de H,

$$\omega(f, \mathrm{H}, \mathrm{C'D'}) > 2\lambda.$$

Prenons un nombre positif μ inférieur à λ et posons

$$\lambda = \mu + 4\varepsilon.$$

Prenons un intervalle arbitraire C′D′ contenant à son intérieur des points de H. Soit A_0 un de ces points. La suite $f_1(A_0)$, $f_2(A_0)$, …, $f_n(A_0)$, … a pour limite $f(A_0)$. On peut donc trouver un nombre α tel que

$$(1) \qquad |f_\alpha(A_0) - f(A_0)| < \varepsilon.$$

La fonction f_α est continue par hypothèse sur l'ensemble parfait H. On peut donc, puisque A_0 est *intérieur* à C′D′, déterminer un intervalle C_1D_1 contenant A_0 à son intérieur et contenu dans C′D′, et tel que, en tout point A de H contenu dans C_1D_1, on ait

$$(2) \qquad |f_\alpha(A) - f_\alpha(A_0)| < \varepsilon.$$

Remplaçons C_1D_1 par un intervalle $C'_1D'_1$ *intérieur* à lui, et contenant A_0 *intérieurement*. Les valeurs de f aux points de H contenus dans $C'_1D'_1$ forment un ensemble dont l'oscillation est supérieure à 2λ. On peut alors, d'après le lemme du n° 50, affirmer l'existence d'un point A_1 de H contenu dans $C'_1D'_1$, tel que l'on a

$$(3) \qquad |f(A_1) - f(A_0)| > \lambda.$$

Comme $f_1(A_1)$, $f_2(A_1)$, …, $f_n(A_1)$, … ont pour limite $f(A)$, je puis déterminer un entier β tel que l'on ait

$$(4) \qquad |f_\beta(A_1) - f(A_1)| < \varepsilon.$$

Puis, en vertu de la continuité de f_β en A_1 qui, étant contenu dans $C'_1D'_1$, est *intérieur* à C_1D_1, je détermine un intervalle C_2D_2 contenant A_1 intérieurement, contenu dans C_1D_1, et tel que pour tout point A de H contenu dans C_2D_2, l'on a

$$(5) \qquad |f_\beta(A) - f_\beta(A_1)| < \varepsilon.$$

On tire de ces inégalités les mêmes conséquences qu'au théorème du n° 51, à savoir que, pour tout point A de H contenu dans C_2D_2, on a

$$\omega[f_1(A),\ f_2(A),\ \ldots,\ f_n(A),\ \ldots] > \mu.$$

D'ailleurs, au lieu de commencer la suite $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ à la fonction f_1, on peut la commencer à la fonction f_{p+1}. De sorte que, quel que soit p, dans toute portion $C'D'$ de CD qui contient à son intérieur des points de H, existe une portion C_2D_2 contenant à son intérieur des points de H, et telle que tout point de H contenu dans cette portion satisfait à l'inégalité

$$(6) \qquad \omega[f_{p+1}(A), f_{p+2}(A), \ldots] > \mu.$$

En d'autres termes, l'ensemble G_n des points de H de l'intervalle CD qui ne satisfont pas à (6) est non dense par rapport à H dans l'intervalle CD. Donnons à p toutes les valeurs entières, 1, 2, ..., ν, ... Soit G l'ensemble formé par la réunion de tous les ensembles G_ν. G est de première catégorie par rapport à H. Il y a donc des points de H qui ne font pas partie de G. Soit A un tel point. A satisfait à l'inégalité (6) quel que soit p, ce qui est contradictoire avec le fait que $f_n(A)$ a une limite finie.

En résumé, *si f est limite de fonctions continues, f est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.*

Citons l'exemple suivant d'une fonction f qui n'est certainement pas limite de fonctions continues. Soit H un ensemble parfait non dense. On donne à f la valeur 0 en tous les points, sauf aux extrémités des intervalles contigus à H, où on lui donne la valeur 1. f est ponctuellement discontinue sur le continu. Mais elle est totalement discontinue sur H. Car, en chaque point de H l'oscillation est égale à 1. La fonction n'est donc pas limite de fonctions continues.

IV. — *Recherche de conditions suffisantes.*

56. Nous sommes conduits à nous demander si les conditions trouvées pour qu'une fonction soit limite de fonctions continues sont suffisantes. La question sera étudiée dans toute sa généralité au Chapitre suivant. Dans le présent Chapitre, nous nous contenterons d'étudier le cas particulier d'une fonction f définie sur un segment qui sera, par exemple, le segment (0, 1), et *qui sera partout égale soit à* 0, *soit à* 1.

Remarquons que, H étant un ensemble parfait quelconque, comme f ne peut avoir que les valeurs 0 ou 1, les nombres M, m, ω relatifs à f et à H ne peuvent en un point avoir d'autres valeurs que 0 ou 1. En particulier, ω étant égal à 1 en tous les points de discontinuité, l'ensemble de ces points est nécessairement fermé. Pour que f soit limite de fonctions continues, il est *nécessaire* que f soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.

Désignons par P_0 le continu, et par P_1 l'ensemble des points de discontinuité de f par rapport à P_0, ensemble essentiellement fermé. L'ensemble P_1, en chaque point duquel l'oscillation est égale à 1, doit être *non dense* dans P_0. Dans chaque intervalle contigu à P_1, la fonction est continue, elle a donc partout la valeur 0 ou partout la valeur 1, sauf peut-être aux extrémités de l'intervalle. L'ensemble fermé P_1 peut avoir des dérivés de tous les ordres correspondant aux nombres des classes I et II. Il possède en ce cas un dérivé P_1^Ω, qui est *parfait*. Sur P_1^Ω, f doit être ponctuellement discontinue, c'est-à-dire que, si l'on désigne par P_2 l'ensemble *des points de discontinuité de f par rapport à* P_1^Ω; P_2, qui est fermé, doit être non dense dans P_1^Ω. P_2 peut avoir un dérivé P_2^Ω. S'il en est ainsi, nous considérerons l'ensemble P_3 des points de discontinuité de f par rapport à P_2^Ω, et ainsi de suite. Ayant défini P_n, si P_n^Ω existe, je désigne par P_{n+1} l'ensemble des points de discontinuité de f par rapport à P_n^Ω. Il est possible que cette opération puisse se prolonger indéfiniment. On aura alors une suite d'ensembles P_0, P_1, ..., P_n, ..., tous fermés, chacun étant contenu dans le précédent. On sait que, dans ces conditions, il existe des points communs à tous ces ensembles. Nous désignons l'ensemble des points communs à tous les ensembles P_n par P_ω. Nous savons que P_ω est fermé. Il peut posséder un dérivé d'ordre Ω. Nous désignons l'ensemble des points de discontinuité de f sur P_ω^Ω par $P_{\omega+1}$.

Définissons d'une façon générale ce que nous désignons par P_α, α étant un nombre quelconque des classes I ou II. Supposons que la définition de P_α soit donnée pour tous les nombres α' qui précèdent un nombre donné α.

Si α est de première espèce, il a un précédent, $\alpha-1$. Par définition, P_α est l'ensemble des points de discontinuité de f par rapport à $P_{\alpha-1}^\Omega$.

Si α est de seconde espèce, P_α est, par définition, l'ensemble des points communs à tous les ensembles $P_{\alpha'}$ pour lesquels on a

$$\alpha' < \alpha.$$

Si, dans les nombres α' inférieurs à α, on prend une suite fondamentale $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$, ayant pour limite α, on peut dire que P_α est l'ensemble des points communs aux ensembles P_{α_1}, P_{α_2}, ..., P_{α_ν}, ...

57. Il y a lieu d'étudier les ensembles ainsi définis. Nous allons voir se poursuivre les analogies que l'on a pu remarquer entre ces ensembles et les dérivés successifs d'un ensemble donné. Nous allons démontrer le théorème général suivant :

Si l'on a sur un segment de droite des ensembles fermés, correspondant aux nombres des classes I *ou* II, *avec la condition que l'inégalité* $\alpha < \alpha'$ *entraîne* $P_\alpha \geqq P_{\alpha'}$, *il existe un certain nombre* β, *à partir duquel les ensembles considérés sont tous identiques, c'est-à-dire que l'on a*

$$P_\beta = P_{\beta+1} = P_{\beta+2} = \ldots.$$

Deux cas seulement sont possibles. Dans un premier cas, certains des ensembles P_α sont nuls. Considérons le plus petit nombre pour lequel cela a lieu, soit β. P_β est nul. Donc, tous les ensembles suivants sont nuls. Donc, dans ce cas,

$$P_\beta = P_{\beta+1} = \ldots = 0.$$

Dans le second cas, quel que soit α, il existe sur le segment considéré des points de P_α. On peut démontrer alors qu'il existe au moins un point faisant partie de tous les P_α. Pour cela, on divise le segment donné en deux parties égales. Comme tous les ensembles P_α possèdent effectivement des points dans l'intervalle total, on en déduit qu'ils possèdent tous des points dans l'un au moins des intervalles partiels. On recommence l'opération sur cet intervalle et l'on continue indéfiniment. On obtient une suite d'intervalles tendant vers un point limite. Ce point est tel qu'il existe dans son voisinage des points de P_α, quel que soit α. Comme chaque P_α est fermé, le point appartient à chaque P_α. Désignons par P_Ω l'ensemble des points qui font partie de tous les P_α. P_Ω est fermé, comme ensemble commun à certains ensembles fermés.

Dans tout intervalle qui ne contient pas de point de P_Ω, il existe un nombre α tel que P_α n'a pas de points dans cet intervalle, sans quoi l'intervalle contiendrait des points de tous les P_α, et par suite de P_Ω.

Considérons maintenant un intervalle CD dont aucun point *intérieur* ne fait partie de P_Ω ; divisons CD en deux intervalles par un point E (*fig.* 21, p. 65), puis divisons CE en une infinité dénombrable d'intervalles juxtaposés tendant vers C. Il est possible de faire correspondre à chacun de ces intervalles un nombre α_i, tel que P_{α_i} soit nul dans cet intervalle. Considérons l'ensemble des nombres α_i. On peut trouver un nombre α' plus grand que tous ceux-là. $P_{\alpha'}$ sera nul à l'intérieur de CE. Il existe de même un ensemble $P_{\alpha''}$ nul à l'intérieur de ED. Soit α le plus grand des deux nombres α' et α''. L'ensemble P_α est nul à l'intérieur de CD.

L'ensemble P_Ω étant fermé, il y a une infinité d'intervalles contigus à P_Ω. Pour chacun de ces intervalles existe, d'après ce qui précède, un nombre α_i tel que P_{α_i} est nul à l'intérieur de cet intervalle. Considérons l'ensemble des nombres α_i. On peut trouver un nombre α supérieur à tous ces nombres. P_α est nul à l'intérieur de tous les intervalles contigus. Il ne contient donc pas d'autres points que ceux de P_Ω. Comme il contient tous les points de P_Ω, il coïncide avec P_Ω.

D'ailleurs tous les ensembles qui suivent P_α coïncident avec P_α et P_Ω. Car ils sont contenus dans P_α et contiennent P_Ω. On a donc

$$P_\alpha = P_{\alpha+1} = \ldots = P_\Omega.$$

Le théorème se trouve ainsi démontré.

Remarquons que, parmi les nombres α tels que $P_\alpha = P_\Omega$, il y en a un plus petit que tous les autres. Soit β ce nombre. On a

$$P_\beta = P_{\beta+1} = \ldots = P_\Omega,$$

avec

$$P_{\beta'} > P_\beta,$$

si

$$\beta' < \beta.$$

Si nous ajoutons aux conditions de l'énoncé, celle-ci, qu'un point isolé d'un ensemble ne peut pas faire partie du suivant, P_Ω, s'il existe, est parfait. Car, si $P_\Omega = P_\beta$ contenait un point isolé A, A ne ferait pas partie de $P_{\beta+1}=P_\Omega$, ce qui est contradictoire. Donc P_Ω est dense en lui-même. Comme il est fermé, il est parfait.

En résumé, dans les deux seuls cas possibles, *les ensembles* P_α *sont identiques entre eux à partir d'une certaine valeur* β *des classes* I *ou* II, *et l'ensemble* P_β *est nul ou parfait.*

58. Reprenons le cas des ensembles particuliers P_α définis au n° 56. Ces ensembles sont fermés et chacun est contenu dans le précédent. Soit β le plus petit nombre tel que l'on ait

$$P_\beta = P_{\beta+1} = \ldots = P_\Omega.$$

Un point isolé de P_α ne fait pas partie de P_α^Ω ni, *a fortiori*, de $P_{\alpha+1}$. L'ensemble P_β est donc parfait ou nul. Je dis que, *dans l'hypothèse où* f *est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait,* P_β *est nul.* En effet, si P_β existait effectivement, comme $P_{\beta+1}=P_\beta$, tout point de $P_{\beta+1}$ serait point de discontinuité relativement à P_β, f serait totalement discontinue sur cet ensemble.

Soit A un point du continu P_0. Puisque $P_\Omega = 0$, A n'appartient pas à tous les ensembles P_α. Donc certains d'entre eux ne contiennent pas A. Parmi ceux-ci, l'un d'eux a un indice plus petit que tous les autres. Soit δ cet indice; δ est au moins égal à 1. δ ne peut pas être de seconde espèce, car, dans cette hypothèse, P_δ serait l'ensemble des points communs à tous les ensembles P_α, pour $\alpha < \delta$; or, tous ces ensembles contiennent A; donc P_δ contiendrait aussi A. Donc δ n'est pas de seconde espèce. Donc δ a un précédent γ. Il existe ainsi un nombre γ (pouvant être égal à 0) tel que P_γ contient A, $P_{\gamma+1}$ ne le contenant pas. Donc A fait partie de $P_\gamma - P_{\gamma+1}$. D'ailleurs, le nombre γ est évidemment bien déterminé pour chaque point A. Par conséquent, nous pouvons écrire

$$P_0 = \Sigma(P_\gamma - P_{\gamma+1}), \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqq \gamma < \beta.$$

Considérons maintenant un ensemble de la forme $P_\gamma - P_{\gamma+1}$, où γ est inférieur à β. $P_{\gamma+1}$ fait partie de P_γ^Ω. On peut écrire

$$P_\gamma - P_{\gamma+1} = (P_\gamma - P_\gamma^\Omega) + (P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}).$$

Nous pouvons décomposer le premier terme $P_\gamma - P_\gamma^\Omega$. P_γ étant fermé, désignons-le par P_γ^0. Nous savons que l'on a (n° 42)

$$P_\gamma^0 - P_\gamma^\Omega = \Sigma(P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}),$$

ν prenant toutes les valeurs inférieures à un certain nombre, ou même, si l'on veut, toutes les valeurs $< \Omega$. Nous avons donc

$$P_\gamma - P_{\gamma+1} = \Sigma(P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}) + (P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}).$$

En résumé, *si l'on considère un point* A *de* P_0, *on reconnaît qu'il existe, ou bien un système de nombres* γ *et* ν *des classes* I *ou* II, *tels que* A *fait partie de* $P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}$, *ou bien un nombre* γ, *tel que* A *fait partie de* $P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}$.

59. Ces notions étant acquises, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

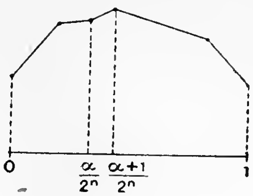
Si une fonction f égale à 0 *ou à* 1 *définie sur un segment de droite est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait, elle est limite de fonctions continues sur ce segment.*

Nous avons jusqu'ici ramené le problème de la construction de fonctions continues ayant pour limite une fonction donnée à la construction d'une fonction $F(x, y)$ définie dans un certain rectangle et sous certaines conditions. Nous allons donner un nouveau procédé pour construire une suite de fonctions continues f_1, f_2, ..., f_n, ... tendant vers une fonction discontinue f. Supposons f définie sur le segment $(0, 1)$. La fonction f_1 sera telle qu'elle variera linéairement dans chacun des intervalles $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$. f_2 variera linéairement dans chacun des intervalles $0, \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$; $\frac{3}{4}, 1$. D'une façon générale, f_n variera linéairement dans chacun des intervalles $\frac{\alpha}{2^n}, \frac{\alpha+1}{2^n}$, pour $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1$. La fonction f_n sera parfaitement définie si l'on connaît sa valeur en chaque point d'abscisse $\frac{\alpha}{2^n}$. Elle sera représentée géométriquement par une ligne brisée de 2^n côtés (*fig.* 29).

Définissons les fonctions f_n dans le cas qui nous occupe.

Tout revient à définir $f_n(\mathrm{H})$, H étant le point d'abscisse $\frac{p}{2^n}$. Pour cela, je considère l'intervalle λ de milieu H et de lon-

Fig. 29.



gueur $\frac{1}{2^{n-1}}$. Considérons les ensembles P_γ et P_γ^ν relatifs à f. Désignons par $Q_{\gamma,\nu}$ l'ensemble qui est la partie de P_γ^ν contenue dans λ, ce que nous exprimons par l'égalité $Q_{\gamma,\nu} = D(P_\gamma^\nu, \lambda)$. Les ensembles $Q_{\gamma,\nu}$ sont fermés, ordonnés entre eux comme les ensembles P_γ^ν correspondants, en ce sens qu'on a

$$Q_{\gamma,\nu} \geqq Q_{\gamma',\nu'} \quad \text{si} \quad \gamma > \gamma',$$
$$Q_{\gamma,\nu} \geqq Q_{\gamma,\nu'} \quad \text{si} \quad \nu > \nu'.$$

Cela posé, considérons tout d'abord les ensembles $Q_{\gamma,0}$, où γ prend toutes les valeurs possibles des classes I ou II. Considérons ceux de ces ensembles qui contiennent effectivement des points. Je dis que, parmi ces ensembles, l'un a un indice supérieur à tous les autres. En effet, à partir d'un certain rang, tous les ensembles P_γ sont nuls. Il est donc certain qu'à partir de ce rang tous les ensembles $Q_{\gamma,0}$ sont nuls. Parmi tous les ensembles $Q_{\gamma,0}$ qui sont nuls, l'un a un premier indice plus petit que tous les autres. Soit δ cet indice. δ ne peut pas être de seconde espèce, car, alors, $Q_{\delta,0}$ serait l'ensemble des points de λ communs à tous les ensembles P_γ^0, pour lesquels $\gamma < \delta$; or, par hypothèse, aucun de ces ensembles n'est nul dans λ, et l'on sait qu'en pareil cas, λ contient des points communs à tous les ensembles P_γ^0; donc $Q_{\delta,0}$ ne serait pas nul. Donc, δ est de première espèce et a un précédent que je désigne par h. *Il y a donc un nombre h caractérisé par ce fait que $Q_{h,0}$ existe et que $Q_{h+1,0}$ est nul.*

Considérons maintenant les ensembles $Q_{h,\nu}$, où ν peut prendre les valeurs des classes I et II et, en outre, la valeur Ω. Il peut arriver que $Q_{h,\Omega}$ existe. S'il n'en est pas ainsi, un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait montre qu'il existe un nombre k plus grand que tous les autres, tel que $Q_{h,k}$ existe.

Ainsi nous démontrons l'existence de deux nombres, h et k, tels que si k est différent de Ω, $Q_{h,k}$ existe, tandis que $Q_{h,k+1}$ n'existe pas, et tels que, si l'on a $k=\Omega$, $Q_{h,\Omega}$ existe et $Q_{h+1,0}$ n'existe pas.

Ceci étant établi, nous prendrons $f_n(\mathrm{H})$ *égal au minimum de f aux points de* $Q_{h,k}$. Vérifions que la suite des fonctions f_1, f_2, ..., f_n, ... ainsi définie, tend vers f, c'est-à-dire, montrons que, quel que soit le point A du segment $(0, 1)$, $f_n(\mathrm{A})$ a pour limite $f(\mathrm{A})$. Nous distinguons deux cas, suivant que A fait partie d'un ensemble $P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}$, ou d'un ensemble $P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}$.

Premier cas. — A fait partie d'un ensemble $P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}$. Cela veut dire que A est un point isolé de l'ensemble P_γ^ν. Autrement dit, on peut déterminer un intervalle μ auquel A est intérieur et ne contenant aucun point de P_γ^ν autre que A. Dès que n est assez grand, les points H d'abscisses $\frac{p}{2^n}$ entre lesquels se trouve compris A sont assez rapprochés de A pour que les intervalles λ correspondant à ces points soient entièrement intérieurs à μ. Quand ces conditions sont remplies, d'après la définition de $Q_{h,k}$, je dis qu'on a $h=\gamma$ et $k=\nu$. En effet, tous les ensembles qui suivent P_γ^ν n'ont aucun point dans un intervalle λ contenant A, puisque P_γ^ν n'y possède que le point A. Ce point A constitue d'ailleurs l'ensemble $Q_{\gamma,\nu}$. Donc, à partir d'une certaine valeur de n, on a, pour les deux points H comprenant A,

$$f_n(\mathrm{H})=f(\mathrm{A}).$$

Donc, comme f_n a en A une valeur comprise entre ses valeurs pour ces deux points H

$$f_n(\mathrm{A})=f(\mathrm{A})$$

et

$$\lim_{n=\infty} f_n(\mathrm{A})=f(\mathrm{A}).$$

Deuxième cas. — Le point A fait partie d'un ensemble $P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}$. P_γ^Ω est un ensemble parfait, et $P_{\gamma+1}$ est l'ensemble de ses points de discontinuité. Donc f est continue en A par rapport à P_γ^Ω. D'ailleurs, comme f est égale à 0 ou à 1, la continuité en A entraîne la constance au voisinage. On peut donc déterminer un intervalle μ contenant A à son intérieur, et tel que, en tout point de P_γ^Ω intérieur à μ, f est égale à $f(A)$. Quand n est assez grand, on reconnaît comme précédemment qu'aux points H d'abscisses $\frac{p}{2^n}$ entre lesquels se trouve compris A correspondent des intervalles λ qui sont tout entiers contenus dans μ. Dans ces conditions, d'après la définition de $Q_{h,k}$, on doit prendre $h=\gamma$, $k=\Omega$; en effet, dans un de ces intervalles, P_γ^Ω possède des points sans que $P_{\gamma+1}$ en possède. On doit donc prendre

$$f_n(H) = m(f, Q_{\gamma,\Omega}) = f(A),$$

en chacun des points H comprenant A. Donc, à partir d'une certaine valeur de n, on a encore

$$f_n(A) = f(A).$$

Donc, la suite $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ a pour limite f.

Il est ainsi démontré que, pour le cas particulier des fonctions égales à 0 ou 1, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle fonction soit limite de fonctions continues est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.*

CHAPITRE V.

LES FONCTIONS DE n VARIABLES.

1. — *Ensembles de points dans l'espace à n dimensions.*

60. Nous allons maintenant reprendre à un point de vue tout à fait général les questions étudiées dans les précédents chapitres, en nous plaçant dans le cas des fonctions de plusieurs variables.

Quand on considère une fonction de n variables, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut dire que l'argument de la fonction est un point de l'espace à n dimensions. Il y a donc lieu tout d'abord d'étendre aux ensembles de points à n dimensions les définitions et les théorèmes qui nous ont servi dans le cas des ensembles linéaires.

Désignons par G_n l'espace à n dimensions. Ce sera, par définition, l'ensemble des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$, chaque variable x_i pouvant prendre toutes les valeurs réelles finies.

Un point A est dit *point limite* pour un ensemble de points P, si toute sphère de centre A contient au moins un point de P différent de A, autrement dit, contient une infinité de points de P. Étant donné un ensemble P, soit P^1 l'ensemble des points limites de P. P^1 est appelé l'*ensemble dérivé* de P. Un ensemble est dit *fermé* s'il contient tous ses points limites. Un ensemble dérivé est fermé. On dit qu'un ensemble est *dense en lui-même* si chacun de ses points est un point limite pour cet ensemble. On dit qu'un ensemble est *parfait* s'il coïncide avec son dérivé, c'est-à-dire, s'il est fermé et dense en lui-même.

Par exemple, dans l'espace G_2, on constate que l'ensemble des points situés à l'intérieur et sur le contour d'un cercle est un ensemble parfait. L'ensemble des points intérieurs au même cercle n'est pas parfait, parce qu'il n'est pas fermé. Mais il est dense en lui-même.

L'ensemble des points d'un segment de droite situé dans l'espace G_2 est parfait.

Citons, toujours dans l'espace G_2, l'exemple suivant d'ensemble parfait. Considérons sur Ox un ensemble parfait non dense H, sur Oy un ensemble parfait non dense K. Par les points de H, menons des parallèles à Oy, par les points de K, menons des parallèles à Ox. L'ensemble des points de rencontre des droites ainsi menées est un ensemble parfait.

Un autre exemple d'ensemble parfait dans l'espace G_2 est celui des segments parallèles à Oy de longueur 1, et ayant leurs origines sur Ox aux points de H.

Comme dans le cas des ensembles linéaires (n° 14), on reconnaît que *l'ensemble commun à des ensembles fermés (en nombre fini ou infini), s'il existe, est fermé.*

Un ensemble à n dimensions, *borné* et contenant une infinité de points, a au moins un point limite. La démonstration se fait comme pour le théorème analogue relatif aux ensembles linéaires (n° 10). La subdivision en segments est remplacée par une subdivision en parallélépipèdes tendant vers un point qui est point limite de l'ensemble.

Si l'on a des ensembles fermés $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$, *tels que :*

$$P_1 \geqq P_2 \geqq \ldots \geqq P_\nu \geqq \ldots$$

et si P_1 *est borné, il y a au moins un point commun à ces ensembles.*

Cette proposition se démontre également en suivant la méthode employée pour la proposition analogue relative aux ensembles linéaires (n° 13), mais remplaçant la subdivision en segments par une subdivision en parallélépipèdes.

Si l'on ne suppose pas les ensembles bornés, la conclusion ne subsiste pas. Par exemple, si P_ν est l'ensemble linéaire des points dont l'abscisse est un des nombres $\nu, \nu+1, \nu+2, \ldots$, on a

$$P_\nu > P_{\nu+1};$$

P_ν est fermé (il n'a pas de points limites), et cependant il n'y a pas de point commun à tous ces ensembles.

61. Nous allons étendre au cas de l'espace à n dimensions le théorème du n° 57 et, pour cela, nous étudierons tout d'abord un nouveau procédé pour définir un ensemble fermé donné.

Soit B un point dont les n coordonnées sont de la forme

$$x_i = \frac{\alpha_i}{2^p},$$

α_i étant un nombre entier. Considérons le cube Δ de côtés parallèles aux axes, ayant pour centre B et pour côté $\frac{1}{2^{p-1}}$. Les points *intérieurs* à ce domaine sont ceux pour lesquels on a

$$\frac{\alpha_i - 1}{2^p} < x_i < \frac{\alpha_i + 1}{2^p}.$$

Les points du domaine sont ceux pour lesquels on a

$$\frac{\alpha_i - 1}{2^p} \leqq x_i \leqq \frac{\alpha_i + 1}{2^p}.$$

Étant donné un point quelconque A et un nombre p, on peut trouver un cube de l'espèce précédente auquel A soit intérieur. (On peut même en général en trouver plusieurs.)

Faisons varier l'entier p en lui donnant toutes les valeurs entières positives. Désignons par (Δ) l'ensemble de tous les domaines ainsi obtenus. Les paramètres de l'élément le plus général de l'ensemble (Δ) sont les entiers $p, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. On en déduit que l'ensemble (Δ) se compose d'une infinité *dénombrable* de domaines.

Indiquons une propriété de ces domaines qui est fondamentale pour la suite. *Soient* A *un point quelconque,* Σ *une sphère de centre* A. *On peut trouver un domaine* Δ *auquel* A *est intérieur et qui est tout entier contenu dans* Σ. Car, quel que soit p, on peut trouver des domaines Δ contenant A intérieurement et, quand p croît indéfiniment, la plus grande dimension de ces domaines tend vers o.

Soit, dans l'espace G_n, un ensemble *fermé* P, absolument quelconque. Considérons les domaines Δ. Nous dirons qu'un domaine Δ est *extérieur* à P s'il ne contient aucun point de P. Nous distinguons ainsi les domaines Δ en domaines extérieurs à P, et domaines contenant au moins un point de P.

Je dis que *la connaissance des domaines extérieurs à* P *est complètement équivalente à celle de* P. D'abord, si P a été défini, on sait par cela même quels sont les domaines Δ extérieurs à P. Il nous suffit de montrer la réciproque. Je vais montrer que, si l'on connaît tous les domaines extérieurs à P, étant donné un point A quelconque, on peut dire si, oui ou non, il appartient à P. En effet, en vertu d'une remarque faite plus haut, nous pouvons trouver une suite de domaines Δ, soit $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p, \ldots$, auxquels A est intérieur, dont le côté tend vers o et dont chacun est contenu dans le précédent. Deux cas seulement sont possibles :

1° Chacun des domaines $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p, \ldots$ contient au moins un point de P. Dans ces conditions, il y a, dans toute sphère de centre A, au moins un point de P; P étant fermé, A fait partie de P.

2° Certains de ces domaines ne contiennent pas de points de P. Remarquons que, si la condition est remplie pour un domaine, elle est remplie pour les suivants. On peut dire que A est intérieur à un domaine fini ne contenant aucun point de P. Donc A ne fait pas partie de P.

Remarquons que ce procédé démontre que la définition d'un ensemble fermé peut se faire par une infinité dénombrable de conditions.

Désignons par $G_n - P$ l'ensemble des points de l'espace G_n qui n'appartiennent pas à P. $G_n - P$ *peut être considéré comme constitué par la réunion de tous les domaines* (Δ) *extérieurs à* P. Car chaque point appartenant à un de ces domaines fait certainement partie de $G_n - P$ et, étant donné un point A qui ne fait pas partie de P, il existe des domaines (Δ) extérieurs à P et contenant ce point.

Si l'on a deux ensembles fermés P et Q, P contenant Q, il est évident que tout domaine extérieur à P est, *a fortiori,* extérieur à Q. De plus, si nous supposons que l'on a $P > Q$ (égalité exclue), il y a certainement des domaines qui sont extérieurs à Q sans être extérieurs à P. Car, sans cela, il y aurait identité entre les domaines extérieurs à P et Q et, par suite, identité entre P et Q.

62. Considérons maintenant des ensembles fermés correspon-

dant aux nombres des classes I et II,

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad \ldots, \quad P_\alpha, \quad \ldots,$$

avec la condition que l'inégalité $\alpha < \alpha'$ entraîne $P_\alpha \geqq P_{\alpha'}$. D'une façon générale, désignons par $\Delta_E(P_\alpha)$ l'ensemble des domaines Δ extérieurs à P_α. Remarquons que $\Delta_E(P_{\alpha+1})$ contient tous les éléments de $\Delta_E(P_\alpha)$. De plus, la condition nécessaire et suffisante pour que $\Delta_E(P_{\alpha+1})$ soit identique à $\Delta_E(P_\alpha)$ est

$$P_{\alpha+1} = P_\alpha.$$

Je désigne par $C(P_\alpha)$ l'ensemble des domaines qui appartiennent à $\Delta_E(P_{\alpha+1})$ sans appartenir à $\Delta_E(P_\alpha)$. Cela posé, considérons la suite

$$C(P_0), \quad C(P_1), \quad \ldots, \quad C(P_\alpha), \quad \ldots.$$

Chacune de ces expressions désigne l'ensemble de certains domaines Δ. Deux quelconques de ces ensembles n'ont aucun élément commun, car un élément de $C(P_\alpha)$ fait partie de $\Delta_E(P_{\alpha+1})$, par suite de $\Delta_E(P_{\alpha+2})$, et généralement de $\Delta_E(P_{\alpha'})$, quel que soit α' supérieur à α; donc il ne fait pas partie de $C(P_{\alpha+1})$, ni d'aucun des ensembles qui suivent $C(P_\alpha)$. Donc deux ensembles $C(P_\alpha)$ différents n'ont aucun élément commun.

Les différents ensembles $C(P_\alpha)$ sont des parties de l'ensemble (Δ), qui contient une infinité *dénombrable* d'éléments, et ils n'ont, deux à deux, aucun élément commun. Donc ceux des ensembles $C(P_\alpha)$ qui ne sont pas nuls forment au plus une infinité dénombrable. D'après la définition des nombres des classes I et II, il y a certainement un nombre β supérieur à tous les nombres α pour lesquels $C(P_\alpha)$ n'est pas nul. $C(P_\beta)$ et tous les ensembles suivants sont donc nuls. Or, si l'on a

$$C(P_\beta) = C(P_{\beta-1}) = \ldots = 0,$$

on a vu que l'on en conclut

$$P_\beta = P_{\beta-1} = \ldots.$$

Désignons par P_Ω l'ensemble commun à tous les P_α. La proposition obtenue peut s'exprimer ainsi :

Il y a certains nombres α des classes I et II tels que l'on a

$$P_\alpha = P_\Omega.$$

63. Nous compléterons ce résultat par les remarques suivantes :

Remarque I. — Supposons que les ensembles donnés $P_0, P_1, \ldots$ satisfassent à la condition suivante : pour tout nombre α de seconde espèce, P_α est l'ensemble commun à tous les ensembles $P_{\alpha'}$ de rang inférieur à α.

Dans ces conditions, considérons un point quelconque A de P_0. Deux cas sont possibles : ou bien A appartient à tous les ensembles P_α et, par suite, à P_Ω; ou bien cette condition n'est pas remplie. Alors certains des ensembles P_α ne contiennent pas A. L'un d'eux a un indice plus petit que tous les autres. Soit δ cet indice. Je dis que δ n'est pas de seconde espèce, car A appartient à tous les ensembles pour lesquels on a $\alpha < \delta$. Donc, si δ était de seconde espèce, A appartiendrait à P_δ. Donc δ est de première espèce et a un précédent γ. A appartient à $P_\gamma - P_{\gamma+1}$. On a donc l'égalité

$$P_0 = \sum (P_\gamma - P_{\gamma+1}) + P_\Omega,$$

γ prenant toutes les valeurs des nombres des classes I et II (ou encore les valeurs $< \beta$, si β est le plus petit nombre tel que $P_\beta = P_\Omega$).

Remarque II. — Si, outre la condition précédente, on a

$$P_\Omega = 0,$$

et si P_0 est borné, le plus petit nombre δ tel que l'on ait

$$P_\delta = P_\Omega = 0$$

ne peut pas être de seconde espèce.

Car alors δ serait limite d'une suite $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ avec $\delta_n < \delta$. Or les ensembles $P_{\delta_1}, P_{\delta_2}, \ldots, P_{\delta_n}, \ldots$ qui sont fermés et bornés et dont aucun n'est nul, ont des points communs. Donc P_δ ne serait pas nul. Donc δ est de première espèce. Il a un précédent γ. En résumé, *il existe un nombre* γ *tel que* P_γ *contient des points,* $P_{\gamma+1}$ *étant nul.*

Remarque III. — Supposons que les ensembles donnés satisfassent à la condition qu'*un point isolé d'un ensemble ne fait pas partie du suivant*. Dans ces conditions, je dis que, *si* P_Ω *n'est pas nul, il est parfait*. En effet, nous savons déjà que P_Ω est fermé, puisqu'il est identique à P_β à partir d'un certain rang. Il suffit de montrer que P_Ω ne contient pas de point isolé. Soit A un point qui serait isolé dans P_Ω : A est isolé dans P_β, donc il ne peut pas faire partie de $P_{\beta+1}$, donc il n'appartient pas à P_Ω. Donc P_Ω est parfait.

64. Les considérations précédentes s'appliquent aux ensembles dérivés d'un ensemble donné P. On définit les ensembles dérivés P^α comme on l'a fait pour les ensembles linéaires. Ces ensembles, à partir de P^1, satisfont aux conditions de l'énoncé du théorème général du n° 62 et aussi aux conditions complémentaires des remarques I et III. Donc les ensembles dérivés sont tous identiques entre eux à partir d'un certain rang. De plus, l'ensemble dérivé d'ordre Ω, s'il existe, est parfait. En supposant P fermé, et posant $P^0 = P$, on a

$$P^0 = \sum (P^\gamma - P^{\gamma+1}) - P^\Omega.$$

D'après la remarque II, on voit que si, dans un domaine borné, P^Ω est nul, il y a un nombre γ tel que P^γ existe dans ce domaine, tandis que $P^{\gamma+1}$ est nul. Le nombre γ est tel que P^γ possède un nombre fini de points dans le domaine considéré.

65. Nous allons donner maintenant quelques définitions relatives aux ensembles parfaits et qui s'appliqueront en particulier au continu.

Soit P un ensemble parfait dans l'espace à n dimensions G_n. Soient A un point de P et Σ une sphère à laquelle A est intérieur. Nous savons qu'il y a dans Σ une infinité de points de P. Nous dirons que l'ensemble des points de P contenus dans Σ est la *portion de* P *déterminée par* Σ.

Nous dirons que Q, ensemble contenu dans P, est *non dense dans* P *si, dans toute portion de* P, *il existe une autre portion de* P *ne contenant aucun point de* Q. Si cette condition n'est pas remplie, il existe une portion Π de P telle que toute portion de Π contient des points de Q, et, par suite, telle que Q' contient tous les points de Π; dans ce cas, Q est partout dense dans Π.

Étant donné un ensemble Q, on dit que Q est de *première catégorie* dans P si Q est formé par la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles *non denses* dans P. Un ensemble qui n'est pas de première catégorie sera dit de *seconde catégorie*.

Je dis que, *si* Q *est de première catégorie dans* P, *il existe des points de* P *n'appartenant pas à* Q. Soient $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots$ les ensembles non denses dans P dont Q est la réunion. Soit Σ une sphère contenant à son intérieur des points de P. On peut déterminer dans Σ une sphère Σ_1 contenant des points de P à son intérieur et ne contenant aucun point de Q_1; dans Σ_1, une sphère Σ_2 contenant intérieurement des points de P et ne contenant aucun point de Q_2. En poursuivant le raisonnement indéfiniment et s'astreignant de plus à ce que les rayons des sphères tendent vers o, on obtient un point limite B contenu dans toutes les sphères Σ_n; B est limite pour P; donc il fait partie de P. De plus, B n'appartient à aucun des ensembles Q_n. Donc B n'appartient pas à Q.

II. — *Conditions nécessaires.*

66. Nous allons étendre au cas de plusieurs variables les définitions données pour les fonctions d'une variable (Chap. IV, section I). Nous considérerons tout de suite des fonctions définies sur des ensembles parfaits quelconques. Nos définitions s'appliqueront en particulier au continu.

Soit une fonction f définie sur l'ensemble parfait P situé dans G_n. Considérons une portion Π de P. f a, aux différents points de Π, des valeurs qui forment un ensemble pour lequel existent une limite supérieure, une limite inférieure et une oscillation que nous désignons par $M(f, \Pi)$, $m(f, \Pi)$, $\omega(f, \Pi)$.

Prenons un point A de P. Entourons A d'une sphère ayant son centre en A. Soit Π la portion de P déterminée par Σ. Quand le rayon de Σ décroît et tend vers o, $M(f, \Pi)$ ne va pas en croissant, $m(f, \Pi)$ ne va pas en décroissant, $\omega(f, \Pi)$ ne va pas en croissant. Donc ces trois quantités ont des limites que nous noterons

$$M(f, P, A), \quad m(f, P, A), \quad \omega(f, P, A).$$

On dira qu'il y a *continuité* au point A si l'on a

$$\omega = 0,$$

et *discontinuité* si l'on a

$$\omega > 0.$$

Si Π est la portion de P déterminée par une sphère quelconque Σ contenant A à son intérieur, on a

$$M(f, P, A) \leqq M(f, \Pi).$$

On dit qu'il y a *semi-continuité supérieure* de f par rapport à P au point A si l'on a en ce point

$$M(f, P, A) = f(A).$$

Dans ce cas, quel que soit le nombre positif ε, on peut trouver une sphère de centre A, et telle que, quel que soit le point A' de P, contenu dans cette sphère, on ait

$$f(A') < f(A) - \varepsilon,$$

et réciproquement, si cette condition est vérifiée, on a

$$M = f,$$

et la fonction est semi-continue supérieurement.

On a une définition et des propriétés analogues pour les fonctions semi-continues inférieurement. Étant donnée une fonction f quelconque définie sur l'ensemble P, la fonction φ définie en chaque point A de P comme étant égale à $M(f, P, A)$, est semi-continue supérieurement; et de même la fonction $\psi = m(f, P, A)$ est semi-continue inférieurement. Il s'ensuit que $\omega = M - m$ est une fonction semi-continue supérieurement.

Étant donnée une fonction semi-continue supérieurement, l'ensemble des points où elle est supérieure ou égale à un nombre α est fermé. En particulier, si l'on considère une fonction f quelconque, l'ensemble des points où l'oscillation de f est supérieure ou égale à $\alpha > 0$ est fermé.

67. Étant donnée une fonction f définie sur un ensemble parfait P, trois cas sont possibles.

1° En tout point de P, on a

$$\omega = 0.$$

La fonction est continue sur P.

2° En certains points on a $\omega > 0$. Il y a des discontinuités. Mais on suppose que, quel que soit le nombre positif σ, l'ensemble des points de P où l'on a

$$\omega(f, \mathrm{P}, \mathrm{A}) \geqq \sigma$$

est *non dense* sur P. Alors, en se donnant des valeurs $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ tendant vers 0, on voit que l'ensemble des points de discontinuité est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles non denses. Donc, cet ensemble est de première catégorie. Il y a donc dans toute portion de P des points qui n'appartiennent pas à cet ensemble et où par suite f est continue.

On dit, dans ce cas, que f est *ponctuellement discontinue* sur P.

3° La fonction f, discontinue sur P, n'est pas ponctuellement discontinue. Il existe donc d'une part un nombre α positif, d'autre part une portion Π de P, telle qu'en chaque point de Π, on a $\omega \geqq \alpha$. Nous dirons que la fonction f est *totalement discontinue* sur P.

68. Je dis que *si l'on a, sur un ensemble parfait* P, *une suite de fonctions continues* $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ *ayant pour limite une fonction* f, f *est ponctuellement discontinue sur* P. (Nous supposons la fonction f bornée.)

Nous employons toujours le même mode de raisonnement. Montrons qu'il est impossible d'admettre que f est totalement discontinue sur P, autrement dit qu'il existe une portion H de P et un nombre positif 2λ, tels que, en tout point de H, l'oscillation de f surpasse 2λ. Dans cette hypothèse, l'oscillation dans toute portion de H est supérieure à 2λ. Je prends un nombre μ positif inférieur à λ. Je pose $\lambda = \mu + 4\varepsilon$.

Donnons-nous un entier p. Partons d'une portion H' quelconque de H. Soit A_0 un point de H intérieur à la sphère Σ qui détermine cette portion. Comme la suite $f_{p+1}(\mathrm{A}_0)$, $f_{p+2}(\mathrm{A}_0)$, ... a pour limite $f(\mathrm{A}_0)$, on peut déterminer un entier α supérieur à p, tel que l'on ait

$$|f_\alpha(\mathrm{A}_0) - f(\mathrm{A}_0)| < \varepsilon.$$

La fonction f_α étant continue sur H, on peut déterminer une sphère Σ_1 de centre A_0, contenue dans Σ, et telle que l'on ait, pour tout point A de la portion H_1 déterminée par Σ_1 dans H,

$$|f_\alpha(A)-f_\alpha(A_0)|<\varepsilon.$$

Remplaçons Σ_1 par une sphère concentrique de rayon plus petit Σ_2. Cette sphère Σ_2 contient intérieurement un point de H, savoir A_0 : soit H_2 la portion de H contenue dans Σ_2. Dans cette portion, par hypothèse, l'oscillation de f surpasse 2λ. Donc, on peut y trouver un point A_1, tel que l'on ait

$$|f(A_1)-f(A_0)|>\lambda.$$

Le point A_1, contenu dans Σ_2, est certainement *intérieur* à Σ_1. On peut trouver, d'abord un nombre β supérieur à p, tel que l'on ait

$$|f_\beta(A_1)-f(A_1)|<\varepsilon,$$

puis, en utilisant la continuité de f_β, une sphère Σ_3 de centre A_1, contenue dans Σ_1, et telle qu'en désignant par H_3 la portion de H déterminée par Σ_3, on ait pour tout point A de H_3 :

$$|f_\beta(A)-f_\beta(A_1)|<\varepsilon.$$

Ces cinq inégalités sont vraies pour un point A quelconque de H_3, puisque H_3 est contenu dans H_1 ; on en déduit que, pour tout point A de H_3, on a

$$|f_\alpha(A)-f_\beta(A)|>\mu,$$

et, par suite,

$$(1)\qquad \omega[f_{p+1}(A), f_{p+2}(A), \ldots]>\mu.$$

De là la conclusion suivante : p étant un entier positif, toute portion H′ de H contient une portion H_3 dont tous les points satisfont à la condition (1). L'ensemble des points de H qui ne satisfont pas à (1) est donc *non dense* dans H. Quand p prend toutes les valeurs possibles, la réunion de tous ces ensembles constitue un *ensemble de première catégorie*. Il existe des points A de H ne faisant pas partie de cet ensemble, et par suite satisfaisant, quel que soit p, à l'inégalité (1), ce qui est contradictoire avec le fait que la suite $f_p(A)$ a une limite finie.

Donc, *f est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.*

III. — *Conditions suffisantes.*

69. Nous allons montrer que cette condition nécessaire est en même temps suffisante. Il convient pour cela d'étudier d'abord quelques questions préliminaires.

Soit f une fonction supposée définie sur un ensemble parfait quelconque P et bornée, c'est-à-dire ayant des limites supérieure et inférieure finies, M et m. Je dis que, si f est limite de fonctions continues, il est possible de trouver une suite de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ définies sur P, tendant vers f *et qui soient toutes comprises entre* M *et* m.

Supposons d'abord que l'on connaisse une suite de fonctions continues $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ tendant vers f, mais ne satisfaisant pas à la condition complémentaire. Voici comment nous définirons la fonction f_i qui remplacera φ_i. En un point où l'on a $m \leqq \varphi_i \leqq M$, je pose $f_i = \varphi_i$. En un point où l'on a $\varphi_i \geqq M$, je pose $f_i = M$; en un point où l'on a $\varphi_i \leqq m$, je pose $\varphi_i = m$.

On voit d'abord que, si φ_i est continue, f_i l'est aussi. Car, pour deux points quelconques A et A′, on a toujours

$$|f_i(A) - f_i(A')| \leqq |\varphi_i(A) - \varphi_i(A')|.$$

Donc, si A′ varie et tend vers A, le second membre tend vers o, par suite aussi le premier.

Vérifions que, quel que soit A, $f_i(A)$ tend vers $f(A)$.

En effet, trois cas sont possibles :

1° Au point A, on a $m < f(A) < M$. Puisque $\varphi_i(A)$ tend vers $f(A)$, à partir d'une certaine valeur de i, on a $m < \varphi_i < M$. Or, à partir de ce moment, on a posé $f_i = \varphi_i$. Donc, dans ce cas, f_i tend vers $f(A)$.

2° Supposons $f(A) = M$. Dans ce cas, à tout nombre positif ε, correspond un indice ν, tel que, si $i > \nu$, on a

$$M - \varepsilon < \varphi_i(A) < M + \varepsilon.$$

On a, par suite, à partir du même indice,

$$M - \varepsilon < f_i(A) \leqq M.$$

Donc, f_i tend vers $M = f(A)$.

3° Si $f(A) = m$, la démonstration est analogue. Donc, dans tous les cas, f_i tend vers f.

70. Ceci posé, occupons-nous de quelques propriétés des séries uniformément convergentes. Soit une série dont les termes u_1, u_2, ..., u_n, ... sont des fonctions définies en tous les points d'un ensemble parfait P. Supposons cette série convergente en tout point de P. *On dit que la série est uniformément convergente sur P si, quel que soit le nombre ε positif, et quel que soit l'entier h, il existe un nombre n, plus grand que h, tel que la valeur absolue du reste*

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

est inférieure à ε, pour tous les points de P [1].

Si nous posons

$$f_\nu = u_1 + u_2 + \dots + u_\nu,$$

et si f est la somme de la série, nous dirons que f_ν *tend uniformément vers* f. On sait que, si les termes u de la série sont des fonctions continues, f est aussi continue. En effet, soit A un point de P, ε un nombre positif donné : il y a un entier n tel que l'on a, pour tous les points de P,

$$|f_n - f| < \varepsilon.$$

Nous pouvons déterminer, à cause de la continuité de f_n, une sphère Σ de centre A telle que, pour tout point A' de P contenu dans Σ, on a

$$|f_n(A') - f_n(A)| < \varepsilon.$$

---

(1) M. Dini, qui a introduit cette définition, un peu plus générale que la définition courante, la distingue de cette dernière et l'appelle *condition de convergence uniforme simple*.

On a d'ailleurs

$$|f_n(A)-f(A)|<\varepsilon,$$
$$|f_n(A')-f(A')|<\varepsilon.$$

D'où l'inégalité

$$|f(A)-f(A')|<3\varepsilon,$$

qui exprime la continuité de f au point A.

71. Nous allons montrer maintenant que, *si les termes u d'une série uniformément convergente sont limites de fonctions continues, il en est de même de la somme f de la série.* Nous ramènerons d'abord le cas général à un cas particulier.

Soit la série uniformément convergente

$$(1) \qquad u_1+u_2+\ldots+u_p+\ldots.$$

Posons

$$f_p=u_1+u_2+\ldots+u_p.$$

Donnons-nous arbitrairement une suite décroissante de nombres positifs formant une série convergente ; soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ ces nombres. D'après nos hypothèses, on peut prendre p_0 tel que l'on ait pour tout point de P : $|f_{p_0}-f|<\alpha_1$, puis on peut prendre $p_1>p_0$, tel que l'on ait $|f_{p_1}-f|<\alpha_2$, et, d'une manière générale, $p_i>p_{i-1}$, tel que l'on ait $|f_{p_i}-f|<\alpha_{i+1}$. Posons

$$U_0=f_{p_0}, \qquad U_1=f_{p_1}-f_{p_0}, \qquad \ldots, \qquad U_i=f_{p_i}-f_{p_{i-1}}, \qquad \ldots.$$

On a

$$|U_i|=|f_{p_i}-f_{p_{i-1}}|\leqq|f_{p_i}-f|+|f_{p_{i-1}}-f|.$$

Donc

$$|U_i|<\alpha_i+\alpha_{i+1}<2\alpha_i.$$

Or, chaque quantité U représente la somme d'un nombre *fini* de termes consécutifs de la série (1), et est par suite limite de fonctions continues, comme on le reconnaît aisément.

Donc, *par un certain groupement de termes consécutifs de la série donnée, on est parvenu à la remplacer par une série* U_0, $U_1, \ldots, U_i, \ldots$ *dont les termes sont, à partir du second, inférieurs en valeur absolue à ceux de la série numérique convergente donnée à l'avance :*

$$2\alpha_1, \quad 2\alpha_2, \quad \ldots, \quad 2\alpha_i, \quad \ldots.$$

72. Pour démontrer que la somme f de la série (1) est limite de fonctions continues, nous pouvons donc supposer que les termes de cette série sont respectivement inférieurs à ceux de la série numérique positive convergente $a_1, a_2, \ldots, a_h, \ldots$. Nous aurons ainsi

$$|u_h| \leqq a_h.$$

Par hypothèse, il existe une suite de fonctions continues $u_{h.1}$, $u_{h.2}, \ldots, u_{h.p}, \ldots$, ayant pour limite u_h et telles que l'on a, quel que soit p,

$$|u_{h.p}| \leqq a_h,$$

et, par suite,

$$|u_h - u_{h.p}| \leqq 2a_h.$$

Posons

$$f_i = u_{1.i} + u_{2.i} + \ldots + u_{i.i}.$$

f_i est une fonction continue. Je dis qu'elle tend vers f. En effet, écrivons

$$f - f_i = (u_1 - u_{1.i}) + (u_2 - u_{2.i}) + \ldots + (u_i - u_{i.i}) + u_{i+1} + u_{i+2} + \ldots.$$

Donnons-nous un nombre positif 2ε. A cause de la convergence de la série des a, nous pouvons prendre un entier q, tel qu'on ait

$$2(a_{q+1} + a_{q+2} + \ldots) < \varepsilon.$$

q étant ainsi déterminé, supposons $i > q$, et séparons l'expression de $f - f_i$ en deux parties, la première étant constituée par les q premiers termes. Posons

$$(u_1 - u_{1.i}) + (u_2 - u_{2.i}) + \ldots + (u_q - u_{q.i}) = \lambda,$$
$$(u_{q+1} - u_{q+1,i}) + \ldots + (u_i - u_{i.i}) + u_{i+1} + u_{i+2} + \ldots = \mu.$$

On a

$$f - f_i = \lambda + \mu.$$

Considérons d'abord μ. Les termes dont se compose μ sont respectivement moindres en valeur absolue que ceux de la série

$$2a_{q+1} + 2a_{q+2} + \ldots + 2a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots < \varepsilon.$$

On a donc

$$|\mu| < \varepsilon.$$

Considérons λ. Pour un point A déterminé de l'ensemble P, quand i croît indéfiniment, λ tend vers 0, car c'est la somme d'un nombre limité de différences qui tendent vers o. On peut donc prendre i assez grand pour avoir $|\lambda| < \varepsilon$.

Donc, étant donné un point A de P, quand i dépasse une certaine valeur, on a

$$|f(A) - f_i(A)| < 2\varepsilon.$$

Cela signifie que $f_i(A)$ a pour limite $f(A)$, et cela quel que soit le point A de P. Donc, la fonction f_i tend vers f, qui est ainsi limite de fonctions continues.

Nous pouvons énoncer le théorème précédent sous la forme suivante :

Si l'on a une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ qui soient limites de fonctions continues et qui tendent uniformément vers une fonction f, la fonction f est aussi limite de fonctions continues.

En effet, si l'on pose

$$u_\nu = f_\nu - f_{\nu-1},$$

f est la somme d'une série uniformément convergente dont les termes sont limites de fonctions continues.

Sous une autre forme, supposons qu'une fonction f possède la propriété suivante : Quel que soit le nombre ε positif, il existe une fonction φ limite de fonctions continues qui diffère de f de moins de ε. Dans ces conditions, je dis que f est limite de fonctions continues. En effet, il suffit de prendre une suite de nombres positifs tendant vers o, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h, \ldots$, et de déterminer pour chaque nombre ε_i de la suite une fonction φ_i limite de fonctions continues et différant de f de moins de ε_i. Ces fonctions tendent uniformément vers f. Donc, f est limite de fonctions continues.

Sous une forme très brève, on peut dire qu'*une fonction qui diffère de moins de ε d'une fonction limite de fonctions continues est elle-même limite de fonctions continues.*

73. Dans les méthodes que nous emploierons plus loin, nous utiliserons des fonctions continues analogues aux fonctions d'une variable étudiées précédemment (n° 59), et qui étaient constituées par la juxtaposition de fonctions linéaires. Supposons d'abord qu'on

s'occupe de fonctions de n variables définies en tous les points de G_n situés à distance finie. p étant un entier positif donné, considérons tous les points de G_n dont les coordonnées sont de la forme $\frac{\alpha}{2^p}$, α étant un entier quelconque. Soit S_p l'ensemble de ces points. Ces points sont les sommets d'un réseau cubique, chaque cube δ du réseau étant l'ensemble des points $\frac{\alpha_i}{2^p} \leq x_i \leq \frac{\alpha_i + 1}{2^p}$. Pour définir la fonction que nous désignerons par f_p, nous nous donnerons d'abord la valeur de cette fonction en tous les points de S_p. Puis, pour achever sa définition en tous les points de G_n, nous l'assujettirons à être, dans chaque cube δ, *linéaire par rapport à chacune des variables*. La fonction sera ainsi bien déterminée.

Prenons pour exemple le cas de trois variables x, y, z. La fonction f_p, dans chaque cube, est de la forme

$$A_1 xyz + A_2 yz + A_3 xz + A_4 xy + A_5 x + A_6 y + A_7 z + A_8.$$

Les huit constantes sont parfaitement déterminées par ce fait que les valeurs de f_p sont données aux huit sommets du cube.

Nous distinguons en plusieurs sortes les points de G_n. Par exemple, toujours dans le cas de $n = 3$, nous distinguons les points de S_p ou sommets des cubes δ, les points situés sur les arêtes sans être les sommets, les points situés sur les faces sans être sur les arêtes, enfin, les points à l'intérieur des cubes.

En un point de S_p, on se donne la valeur de la fonction f_p. En un point A situé sur une arête, la valeur de f est déterminée par ses valeurs aux deux sommets de l'arête. En un point intérieur à une face, elle est déterminée par les valeurs aux quatre sommets de la face. En un point intérieur à un cube, elle est fixée par les valeurs aux huit sommets du cube.

On reconnaît de même, dans le cas général, que la valeur, en un point A de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, est déterminée par les valeurs de f_p en tous les points de S_p dont les n coordonnées $\frac{\alpha_1}{2^p}, \frac{\alpha_2}{2^p}, \ldots, \frac{\alpha_n}{2^p}$ satisfont aux inégalités

$$\left| x_i - \frac{\alpha_i}{2^p} \right| < \frac{1}{2^p}. \tag{1}$$

Remarquons enfin que *la valeur de f_p (A) est comprise entre* *la plus grande et la plus petite des valeurs qui la déterminent.* Nous dirons que les points de S_p satisfaisant à la condition (1) sont les *points associés d'ordre p à* A.

La condition (1) peut s'écrire

$$\frac{\alpha_i - 1}{2^p} < x_i < \frac{\alpha_i + 1}{2^p}.$$

Donc, tout point associé à A est le centre d'un cube Δ auquel A est intérieur (*voir* n° 61).

Tout reviendra à définir la valeur de f_p en chaque point B de S_p. Cette valeur sera définie d'après l'ensemble des valeurs de la fonction donnée f dans le cube Δ de centre B et de côté $\frac{1}{2^{p-1}}$.

Nous attacherons à chaque domaine Δ un certain nombre $\varphi(\Delta)$, puis nous prendrons, en chaque point B de S_p, $f_p(B) = \varphi(\Delta)$, Δ étant le domaine de centre B et de côté $\frac{1}{2^{p-1}}$. Puis, nous compléterons comme il a été dit la définition de f_p en tous les points de l'espace G_n. Je dis que la suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots$ ainsi définie tendra vers f si les nombres $\varphi(\Delta)$ satisfont à la condition suivante :

Condition (a). — *Étant donnés un point quelconque* A *de* G_n *et un nombre positif* ε, *on peut trouver une sphère* Σ *de centre* A, *telle que, pour tout domaine* Δ *contenu dans* Σ *et contenant* A *à son intérieur, on ait*

$$|\varphi(\Delta) - f(A)| < \varepsilon. \tag{a}$$

En effet, dès que p dépasse une certaine valeur q, les domaines Δ contenant A et de côté $\frac{1}{2^{p-1}}$ se trouvent contenus dans Σ. A partir de ce moment, si nous considérons les valeurs de f_p aux points associés d'ordre p à A, ces valeurs sont des nombres $\varphi(\Delta)$ vérifiant la condition énoncée. Or, la valeur de $f_p(A)$ se trouve comprise entre les valeurs de f_p aux points associés d'ordre p à A. Donc, dès que p est supérieur à q, on a

$$|f_p(A) - f(A)| < \varepsilon.$$

Donc on a

$$\lim f_p(A) = f(A).$$

Dans ce qui précède, nous avons supposé que f était définie en tous les points de G_n. Supposons que f soit seulement définie aux points d'un ensemble parfait quelconque P. Il suffira dans ce cas de définir des nombres $\varphi(\Delta)$ relatifs à ceux des domaines Δ qui contiennent des points de P. La fonction f_p sera définie comme précédemment, mais on ne la considérera qu'aux points de l'ensemble parfait P. Si les nombres $\varphi(\Delta)$ satisfont à la condition (a), la fonction f_p tend vers f en tout point de P.

74. Occupons-nous maintenant de la détermination des nombres $\varphi(\Delta)$. Soit f une fonction bornée définie sur un ensemble parfait P de G_n, et ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. Soit σ un nombre positif. Je vais chercher à définir : 1° une fonction F définie sur P et différant de f de moins de σ; 2° des nombres $\varphi(\Delta)$ satisfaisant à la condition (a) relativement à la fonction F.

Pour la symétrie des notations, désignons par P_0 l'ensemble parfait P. Nous allons définir des ensembles P_0, P_1, ..., P_α, ..., α étant un nombre quelconque des classes I ou II, de la manière suivante :

1° Si α est de première espèce et > 0, P_α est l'ensemble des points de $P^\Omega_{\alpha-1}$, où l'on a

$$\omega(f, P^\Omega_{\alpha-1}, A) \geqq \sigma.$$

D'après nos hypothèses, si $P^\Omega_{\alpha-1}$ existe effectivement, P_α est *non dense* par rapport à lui, de sorte que l'on a

$$P_{\alpha-1} > P_\alpha.$$

2° Si α est de deuxième espèce, P_α est l'ensemble des points communs à tous les ensembles $P_{\alpha'}$ d'indice α' inférieur à α.

On voit que les ensembles P_α sont fermés, satisfont aux conditions du n° 62, et en outre aux conditions des remarques I et III. Donc ces ensembles coïncident, à partir d'un certain rang β, avec un ensemble P_Ω, et, d'après la remarque I, on peut écrire

$$P_0 = \Sigma(P_\gamma - P_{\gamma+1}) - P_\Omega,$$

γ prenant toutes les valeurs inférieures à β.

D'après la remarque III, P_Ω est parfait ou nul. Je dis que P_Ω

est nécessairement nul. Car, si P_Ω existait effectivement, l'égalité

$$P_\beta = P_{\beta+1} = \ldots = P_\Omega$$

serait en contradiction avec le fait que l'on a $P_\beta > P_{\beta+1}$.

D'après cela, nous pouvons écrire

$$P_0 = \Sigma(P_\gamma - P_{\gamma+1}).$$

Tout point A de P_0 appartient à un ensemble bien déterminé $P_\gamma - P_{\gamma+1}$. L'ensemble $P_\gamma - P_{\gamma+1}$ peut se décomposer de la façon suivante :

$$P_\gamma - P_{\gamma+1} = (P_\gamma - P_\gamma^\Omega) + (P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1})$$

et l'on a

$$P_\gamma - P_\gamma^\Omega = \Sigma(P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}),$$

ν prenant toutes les valeurs des classes I et II et les termes de la somme étant tous distincts et non nuls, jusqu'à un certain rang, à partir duquel ils sont nuls.

On reconnaît, en résumé, qu'un point A de P_0 fait partie, soit d'un ensemble $P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}$, soit d'un ensemble $P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}$, et cela d'une manière bien déterminée.

Ceci posé, définissons F. En un point A qui fait partie d'un ensemble $P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}$, je pose

$$F(A) = f(A).$$

En un point A qui fait partie d'un ensemble $P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}$, je pose

$$F(A) = m(f, P_\gamma^\Omega, A).$$

Je dis que, dans le second cas, on a certainement

$$|f - F| < \sigma.$$

Car, au point A qui fait partie de P_γ^Ω sans faire partie de $P_{\gamma+1}$, on a

$$\omega(f, P_\gamma^\Omega, A) < \sigma.$$

Or, $\omega = M - m$ avec $m = F$ et $m \leqq f \leqq M$. Donc

$$|f - F| \leqq M - m < \sigma.$$

Ainsi on a, en tout point,

$$|f - F| < \sigma.$$

Définissons maintenant les nombres $\varphi(\Delta)$. Soit Δ un domaine. Désignons par $Q_{\gamma,\nu}$ l'ensemble des points de P_γ^ν contenus dans le domaine Δ, ν pouvant être égal à Ω. Les ensembles Q sont des ensembles fermés ordonnés comme les ensembles P correspondants. Considérons d'abord les ensembles $Q_{\gamma,0}$ où γ prend toutes les valeurs des classes I et II. Ces ensembles satisfont au théorème général du n° 62 et, en outre, aux conditions de la remarque II. Car les ensembles $Q_{\gamma,0}$ sont nuls, quand γ atteint certaines valeurs, puisque P_γ^0 est nul pour $\gamma \geqq \beta$. D'ailleurs, ces ensembles sont bornés. Donc, il existe un nombre h tel que, dans le domaine Δ, $Q_{h,0}$ existe, tandis que $Q_{h+1,0}$ y est nul.

h étant ainsi défini, considérons les ensembles $Q_{h,\nu}$, ν étant variable. Tout d'abord, si $Q_{h,\Omega}$ existe, posons $k=\Omega$. Si $Q_{h,\Omega}$ n'existe pas, les ensembles $Q_{h,\nu}$ se trouvent dans les conditions de la remarque II. Il existe donc alors un nombre k tel que $Q_{h,k}$ existe sans que $Q_{h,k+1}$ existe.

L'ensemble $Q_{h,k}$ étant ainsi défini dans tous les cas, je pose

$$\varphi(\Delta) = m(f,\ Q_{h,k}),$$

et je dis que les nombres $\varphi(\Delta)$ vérifient la condition (a).

Il y a, pour un point A de P, deux cas possibles : 1° A fait partie d'un ensemble $P_\gamma^\nu - P_\gamma^{\nu+1}$. Alors A est un point isolé de P_γ^ν. Prenons une sphère de centre A ne contenant aucun point de P_γ^ν autre que A. Si Δ est un domaine contenant A et contenu dans Σ, on voit que $Q_{\gamma,\nu}$ existe et se compose de A, tandis que $Q_{\gamma,\nu+1}$ n'existe pas. Donc, l'ensemble $Q_{h,k}$ n'est autre que $Q_{\gamma,\nu}$. On a

$$\varphi(\Delta) = f(A) = F(A).$$

La condition (a) est donc vérifiée.

2° A fait partie d'un ensemble $P_\gamma^\Omega - P_{\gamma+1}$. Nous avons posé

$$F(A) = m(f,\ P_\gamma^\Omega,\ A).$$

Si l'on se donne un nombre positif ε, on peut trouver une sphère Σ de centre A telle que, Π étant la portion de P_γ^Ω contenue dans Σ, on ait

$$m(f,\ \Pi) > m(f,\ P_\gamma^\Omega,\ A) - \varepsilon.$$

De plus, A ne faisant pas partie de $P_{\gamma+1}$, et cet ensemble étant fermé, on peut réduire le rayon de la sphère Σ, de façon qu'elle ne contienne aucun point de $P_{\gamma+1}$. Mais alors, si un domaine Δ est contenu dans Σ et contient A, $Q_{\gamma,\Omega}$ existe et contient A, tandis que $Q_{\gamma+1,0}$ n'existe pas. D'après notre définition, on doit prendre $Q_{h,k} = Q_{\gamma,\Omega}$. On posera donc

$$\varphi(\Delta) = m(f, Q_{\gamma,\Omega}).$$

Or, comme $Q_{\gamma,\Omega}$ contient A et est contenu dans Π, $m(f, Q_{\gamma,\Omega})$ est compris entre $m(f, P_\gamma^\Omega, A)$ et $m(f, P_\gamma^\Omega, A) - \varepsilon$, c'est-à-dire entre $F(A)$ et $F(A) - \varepsilon$. On a donc

$$|\varphi(\Delta) - F(A)| < \varepsilon.$$

La condition (a) est encore réalisée.

Donc, F est limite de fonctions continues. Donc, f est aussi limite de fonctions continues, ce qui démontre que la condition obtenue est suffisante.

IV. — *Extension aux fonctions non bornées.*

75. Pour éviter des difficultés d'ordre secondaire, nous avons jusqu'ici fait la restriction que les fonctions que nous considérons sont *bornées*.

Nous allons lever cette restriction, et même considérer des fonctions pouvant recevoir des valeurs infinies, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Nous considérons par définition $+\infty$ comme un nombre *supérieur* à tous les nombres finis, $-\infty$ comme un nombre *inférieur* à tous les nombres finis. Appelons R l'ensemble des nombres réels, R' l'ensemble R augmenté des nombres $+\infty$, $-\infty$.

Une suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ est dite *avoir pour limite* $+\infty$ si, quel que soit le nombre A, les quantités u sont, à partir d'un certain rang, supérieures à A. On a une définition analogue pour une suite tendant vers $-\infty$.

La définition générale de la limite, complétée par la convention précédente, peut s'énoncer ainsi : Une suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ a pour limite un nombre u_0 (les u_n et u_0 appartenant à R'), si, quels que soient les nombres u' et u'' tels que $u' < u_0 < u''$, il existe un entier p tel que, pour $n > p$, l'on a $u' < u_n < u''$ [1].

Étant donnée une fonction définie sur un ensemble parfait quelconque, et ayant en chaque point une valeur déterminée appartenant à l'ensemble R', les notions de limites supérieures et de limites inférieures de la fonction pour toute portion de l'ensemble, et par suite aussi en un de ses points, subsistent. Mais ces nombres peuvent être égaux à $+\infty$ et à $-\infty$. Pour la valeur de l'oscillation, considérée comme égale à la différence entre les limites supérieure et inférieure de la fonction, soit dans un intervalle, soit en un point, nous ferons les conventions suivantes : a étant un nombre fini quelconque, nous poserons :

$$+\infty - a = a - (-\infty) = +\infty - (-\infty) = +\infty,$$
$$-\infty - (+\infty) = (-\infty) - (-\infty) = 0.$$

Si, avec ces conventions, l'on a en un point $\omega = 0$, nous conviendrons de dire que la fonction est continue en ce point. Avec ces conventions, la distinction en fonctions ponctuellement discontinues ou totalement discontinues sur un ensemble parfait a un sens parfaitement déterminé.

Nous voyons qu'une fonction peut prendre en un point l'une des valeurs $+\infty$ ou $-\infty$, et être cependant continue partout. Néanmoins, nous réserverons le terme de fonction continue proprement dite à celles qui restent finies en chaque point et qui, par suite, sont, comme on sait, bornées dans tout ensemble borné.

76. Cherchons à quelle condition une fonction discontinue quelconque peut être limite de fonctions continues finies. Nous allons montrer qu'on peut ramener le cas général à celui des fonctions bornées.

Soit y une variable pouvant prendre toutes les valeurs de R'. Nous lui ferons correspondre une variable z définie comme il

(1) Il est intéressant de remarquer un fait que met en évidence notre définition et qui est, je crois, assez peu connu. La notion de limite ne suppose pas nécessairement donnée la définition des opérations sur les nombres irrationnels, mais seulement la définition de ces nombres en tant que formant avec les nombres rationnels un ensemble ordonné.

suit :

$$\text{Pour} \qquad 0 \leqq y \leqq +\infty, \qquad z = \frac{y}{1+y}.$$

$$\text{Pour} \qquad -\infty \leqq y \leqq 0, \qquad z = \frac{y}{1-y}.$$

Dans le premier cas, z varie d'une façon continue et toujours en croissant de 0 à $+1$. Dans le second cas, toujours en croissant de -1 à 0. Désignons par R'_1 et par R_1 respectivement les deux ensembles

$$-1 \leqq z \leqq 1, \qquad -1 < z < 1.$$

R'_1 correspond à R', R_1 à R.

On voit que la condition $y' < y''$ entraîne $z' < z''$ et réciproquement. Désignons par T la transformation qui remplace y par z et par T^{-1} la transformation inverse de T qui remplace z par y.

Considérons une suite de nombres $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, tendant vers y_0. Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, et z_0 les transformés respectifs des y par T; je dis que l'on a

$$\lim z_n = z_0.$$

Je prends deux nombres z' et z'' satisfaisant à l'inégalité

$$z' < z_0 < z''.$$

Les transformés y' et y'' de z' et z'' par T^{-1} satisfont à

$$y' < y_0 < y''.$$

Puisque y_n tend vers y_0, il existe un entier p tel que, pour $n > p$, on a

$$y' < y_n < y''.$$

On aura donc aussi, pour $n > p$

$$z' < z_n < z''.$$

Ceci exprime que z_n tend vers z_0. La proposition réciproque se démontre de même.

Étant donnée une fonction f définie sur un ensemble parfait quelconque P, je suppose qu'à l'aide de T je transforme la valeur de f en chaque point de P. J'obtiens une certaine fonction φ. Je dirai que φ est la transformée de f par T, ou que f est la transformée de φ par T^{-1}. f est quelconque, φ est bornée et comprise entre -1 et $+1$. Je dis qu'à un point de continuité de f correspond un point de continuité de φ, et réciproquement. En effet, dire, par exemple, que f est continue en A, c'est dire qu'étant donnée une suite arbitraire de points A_1, A_2, ..., A_n, ..., tendant vers A, l'on a toujours

$$\lim f(A_n) = f(A).$$

On en déduit pour les transformés par T

$$\lim \varphi(A_n) = \varphi(A).$$

Soit maintenant une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$, tendant vers une fonction f. Appliquons à toutes ces fonctions la transformation T. Nous les remplaçons par des fonctions nouvelles $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ et φ. Je dis que φ_ν a pour limite φ. Car, en chaque point A, l'égalité

$$\lim f_\nu(A) = f(A)$$

entraîne

$$\lim \varphi_\nu(A) = \varphi(A).$$

On démontre de même la propriété réciproque de la précédente pour les transformées par T^{-1} de fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$, toutes comprises entre -1 et $+1$ et tendant vers une fonction φ.

77. Ceci posé, je dis que, étant donnée une fonction f, elle est ou non limite de fonctions continues, en même temps que sa transformée par T, φ.

En effet : 1° Si $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ sont continues, il en est de même de leurs transformées $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$, et, si les premières tendent vers f, les secondes tendent vers φ. Donc, si f est limite de fonctions continues, φ l'est également.

2° Supposons φ limite de fonctions continues. φ étant compris entre -1 et $+1$, on peut toujours supposer $-1 \leqq \varphi_\nu \leqq 1$. Multiplions respectivement les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ par des constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$, positives, inférieures à 1 et tendant vers 1. Considérons les fonctions $\alpha_1\varphi_1, \alpha_2\varphi_2, \ldots, \alpha_\nu\varphi_\nu, \ldots$. Elles tendent vers φ. De plus, les $\alpha_\nu\varphi_\nu$ satisfont aux conditions

$$-\alpha_\nu \leqq \alpha_\nu\varphi_\nu \leqq \alpha_\nu,$$

de sorte que $\alpha_\nu \varphi_\nu$ est certainement compris entre deux nombres *intérieurs* à l'intervalle $(-1, 1)$. Donc la transformée de $\alpha_\nu \varphi_\nu$ par T^{-1}, que j'appelle f_ν, est une fonction continue finie. Et comme $\alpha_\nu \varphi_\nu$ tend vers φ, f_ν tend vers f.

D'autre part, sur un ensemble parfait quelconque, f et φ ont les mêmes points de continuité. Donc elles sont en même temps ponctuellement ou totalement discontinues. Or, la condition pour que φ soit limite de fonctions continues est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. Il en résulte que cette condition est aussi valable pour f. Nous pouvons donc énoncer le théorème général suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction quelconque finie ou infinie soit limite de fonctions continues, est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.

V. — *Cas particuliers.*

78. Signalons, comme cas particulier, celui des fonctions semi-continues. Il est facile de montrer qu'une fonction semi-continue est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait, en étendant la démonstration du n° 48, donnée pour le cas d'un ensemble linéaire continu. On en conclut qu'une telle fonction est limite de fonctions continues.

Nous pouvons donner de ce fait une démonstration indépendante de la théorie générale. Nous allons choisir directement les nombres $\varphi(\Delta)$ considérés au n° 73. Supposons la fonction considérée semi-continue supérieurement sur l'ensemble parfait P. Nous prendrons alors, dans chaque domaine Δ, $\varphi(\Delta)$ égal au maximum de f dans ce domaine. Je dis que la condition

$$(a) \qquad |\varphi(\Delta) - f(A)| < \varepsilon$$

est vérifiée en chaque point A de P, ε étant un nombre positif donné. En effet, d'après la définition de la semi-continuité supérieure, on peut trouver une sphère Σ de centre A telle que, pour tout point A′ de P intérieur à Σ, l'on ait

$$f(A') < f(A) + \varepsilon.$$

Dès que le domaine Δ contenant A sera contenu dans Σ, le nombre $\varphi(\Delta)$ sera compris entre $f(A)$ et $f(A)+\varepsilon$. On aura donc

$$f(A) < \varphi(\Delta) < f(A) + \varepsilon.$$

79. Voici un autre exemple de fonctions limites de fonctions continues. Considérons une fonction continue d'une variable $F(x)$. Supposons que cette fonction ait une dérivée, ou même seulement une dérivée d'un seul côté, à droite par exemple. Ceci veut dire que le rapport

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

a une limite déterminée, si h tend vers o par valeurs positives. Soit $f(x)$ cette limite. Je dis que $f(x)$ est une fonction limite de fonctions continues. (Nous n'excluons pas le cas où cette limite serait $+\infty$ ou $-\infty$.) Prenons une suite de nombres positifs tendant vers o : $h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots$ Posons

$$\frac{F(x+h_n)-F(x)}{h_n} = f_n(x).$$

$f_n(x)$ est continue et tend vers $f(x)$ quand n croît indéfiniment.

80. On démontre qu'une fonction continue f, considérée dans un domaine borné, peut être approchée d'autant qu'on veut par un polynome. Autrement dit, dans un domaine borné donné, il existe, quel que soit le nombre positif ε, un polynome P tel que l'on a

$$|f - P| < \varepsilon.$$

Ceci posé, je dis que toute fonction limite de fonctions continues peut être considérée comme la limite d'un polynome, ou encore comme la somme d'une série de polynomes, le développement étant de plus valable pour l'espace G_n indéfini. En effet, considérons une suite de domaines $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ dont chacun est contenu dans le suivant, et dont toutes les dimensions croissent indéfiniment. Tout point de G_n finit par être compris dans un de ces domaines. Prenons une suite de nombres positifs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ tendant vers o. Prenons une suite de polynomes $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ tels que d'une façon générale l'on ait

$$|f_i(A) - P_i(A)| < \varepsilon.$$

en tout point du champ c_i. Il est aisé de voir que la suite de polynomes P_1, P_2, .., P_n, ... tend vers f dans tout l'espace G_n. Donc, il y a identité entre les séries de fonctions continues et les séries de polynomes.

81. Dans les études qui précèdent, nous avons étudié une catégorie particulière de fonctions discontinues, qui sont les fonctions limites de fonctions continues. Convenons de dire que les fonctions continues forment la classe 0. Nous dirons que les fonctions limites de fonctions continues forment la classe 1.

Il existe des fonctions qui sont limites de fonctions continues de classe 1, sans appartenir à cette classe. Par exemple, considérons, pour le cas d'une variable, une fonction f égale à 1 en tout point d'abscisse rationnelle, et à 0 en tout point d'abscisse irrationnelle. Elle n'est pas de classe 1. Mais elle est limite de fonctions de classe 1. Considérons, en effet, la fonction f_ν partout égale à 0 sauf aux points d'abscisse rationnelle dont l'abscisse a un dénominateur inférieur ou égal à ν, points où elle sera égale à 1. f_ν a évidemment en chaque point pour limite f. Or, la fonction f_ν n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité; donc elle est limite de fonctions continues. La fonction f peut être considérée comme la limite de fonctions de classe 1 et, par suite, comme la somme d'une série dont chaque terme serait une fonction de classe 1. Donc, enfin, il existe une série double de polynomes $\Sigma_\alpha \Sigma_\beta P_{\alpha\beta}(x)$, convergente pour chaque valeur de x, et qui a la valeur 0 quand x est irrationnel, et la valeur 1 quand x est rationnel.

Nous conviendrons de dire que les fonctions limites de fonctions de classe 1, qui ne font pas partie de cette classe, forment la classe 2. Nous sommes ainsi amenés à la répartition théorique des fonctions en classes. En généralisant la définition précédente, nous aurons les fonctions de classes 3, 4, ..., n, ...

Nous pouvons même, d'une façon générale, définir les fonctions de classe α, α étant un nombre des classes I ou II. Par définition, une fonction f sera considérée comme appartenant à la classe α, si elle est la limite d'une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ dont chacune est limite de fonctions d'une classe marquée d'un nombre inférieur à α, et si f n'appartient pas à l'une de ces classes.

Soit E l'ensemble des fonctions appartenant à toutes les classes marquées par les nombres des classes I et II. Je dis que E *contient toutes ses fonctions limites*, c'est-à-dire que si une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ a pour limite f, et si toutes appartiennent à E, il en est de même de f. En effet, par hypothèse, les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ appartiennent à certaines classes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$. Nous savons qu'il existe un nombre α des classes I ou II, supérieur à tous ces nombres; donc f est de classe α ou de classe inférieure; donc f fait partie de E.

Il est intéressant de se demander s'il existe une propriété qui se conserve à la limite, c'est-à-dire telle que, $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ la possédant, et ayant une limite f, f la possède également. Je me contente d'énoncer la proposition suivante :

Soit une fonction f définie sur un ensemble parfait P. S'il existe une fonction φ définie sur P, de classe 1 et telle que les points où f est différente de φ forment un ensemble de première catégorie dans P, cette propriété se conserve à la limite. On voit qu'elle appartient aux fonctions continues et aux fonctions de classe 1. Elle appartient donc à toutes les fonctions de l'ensemble E (¹).

(¹) Pour la démonstration, voir mon mémoire « *Sur la représentation des fonctions continues* » (pour paraître aux *Acta mathematica*).

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

33602 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

75127-25 Paris. — Imp. Gauthier-Villars et C^ie, 55, quai des Grands-Augustins.