4229

LEHRBUCH

DER

DETERMINANTEN-THEORIE

FÜR STUDIRENDE

VON

DR. SIEGMUND GÜNTHER,

K. BAYR. GYMNASIALPROFESSOR, MITGLIED D. LEOP.-KAROL. AKADEMIE D. NATURFORSCHER U. (C.) D. K. BÖHM. GESELLSCH. D. WISSENSCHAFTEN.

ZWEITE
DURCHAUS UMGEARBEITETE VERMEHRTE UND DURCH EINE AUFGABEN-SAMMLUNG BEREICHERTE AUFLAGE.

ERLANGEN 1877.
VERLAG VON EDUARD BESOLD.

Druck von E. Th. Jacob in Erlangen.

Dem Andenken

Otto Hesse's

und

Herrn Professor Dr. Moritz Cantor

in dankbarer Erinnerung

an die

Heidelberger Studienzeit

gewidmet

vom

Verfasser.

Vorwort zur ersten Auflage.

Indem der Unterzeichnete ein neues Lehrbuch der Determinanten-Theorie der Oeffentlichkeit übergiebt, glaubt er Zweck und Stellung desselben zu ähnlichen Büchern scharf hervorheben zu müssen. Wir besitzen zur Zeit in Deutschland fast ausschliesslich solche Darstellungen dieses Wissenszweiges, welche das Bedürfniss des ersten Anfängers im Auge haben; hierher gehören ausser der an sich gewiss unübertrefflichen, für Lehrzwecke aber nach allgemeinem Urtheile nicht entsprechenden Schrift von Hesse und der nur für die erste Einleitung berechneten von Reidt besonders die Lehrbücher von Dölp und Hattendorff, von denen letztres mit Recht sich weitrer Verbreitung erfreut. Auf der andren Seite steht ausser dem in manchem antiquirten Erstling Brioschi's vor Allem das meisterhaft angelegte Handbuch von Baltzer, für dessen Bedeutung gewiss hinlänglich die vierte Auflage spricht. Dasselbe ist jedoch eben ein Handbuch und muss als solches eine knappere Haltung annehmen, als es bei Lehrbüchern erlaubt resp. geboten ist. Auch wird Jeder zugeben müssen, dass trotz der ungemeinen Eleganz dieser Darstellungsweise oder besser gesagt, gerade wegen derselben, ein erstes Studium des Werkes mit Schwierigkeiten zu kämpfen hat. Der Verfasser steht, wie diess auch seinerzeit eine Recension im 1. Bande der Zeitschr. f. Math. u. Phys. Brioschi gegenüber richtig bemerkt hat, auf streng combinatorischem Boden, setzt also dabei eine Vorbildung voraus, wie sie den Studirenden, wenigstens in einem grossen Theile unsres Vaterlandes, nicht zu Theil wurde und werden wird.

Dem gegenüber ward hier beabsichtigt, einen Mittelweg einzuschlagen. Das Lehrbuch soll auf der einen Seite selbst dem Studenten des ersten Semesters gerecht werden, und zwar ward als Norm der mitzubringenden Kenntnisse, wenigstens für die ersten Kapitel, die bayrische Maturitäts-Prüfung angenommen, wozu nur noch der so leicht zu erwerbende Begriff des partiellen Differentialquotienten hinzuzutreten hätte. In Verfolgung dieses Grundgedankes musste die Behandlung des Stoffes möglichst einfach sich gestalten und musste man von den an sich ungleich eleganteren Methoden der Combinationslehre völlig absehen; ebenso verstand es sich von selbst, dass die vorgetragenen Lehren sich durchweg an practische Beispiele anlehnten. Später, etwa vom 5. Kapitel ab, konnte die Darstellung an Kürze gewinnen, indem verschiedene für den Anfang unumgänglich nothwendige Mittelglieder wegfallen durften. Auch musste, wenn andernfalls eine vollständige Uebersicht der Determinantenlehre im Plane lag, späterhin ein grösseres Mass allgemein mathematischer Vorkenntnisse vorausgesetzt werden, so besonders bei den Funktionaldeterminanten; indess wurde auch hier auf geeignete das richtige Verständniss erfahrungsmässig befördernde Beispiele noch stets Bedacht genommen. Mit Rücksicht auf die vorstehend erörterten Grundgedanken berührt sich unsere Schrift sehr nahe mit einer ähnlichen von Studnička, welche jedoch trotz mehrfacher Vorzüge sich ausserhalb ihres engeren Vaterlandes nur wenig Eingang verschafft zu haben scheint.

Neues zu bringen kann nicht eigentlich Aufgabe eines Buches sein, wie des vorliegenden. Andrerseits versteht es sich von selbst, dass jede gründliche Durcharbeitung eines Gegenstandes auch manche bisher noch nicht berührte Seite desselben wird erkennen lassen. So dürften besonders S. 20—23, S. 46—47, S. 87—88, S. 96—103 einige auch dem Sachkenner neue Bemerkungen darbieten. Insbesondre sei es erlaubt, auf den darin enthaltnen rein elementaren Beweis für das Cayley'sche Theorem hinzuweisen; eine kurze Notiz hierüber befindet sich bereits im Tageblatt der Breslauer Naturforscherversammlung. Die Kapitel 1, 4 und 6 finden sich überhaupt als solche noch in keinem bisher erschienenen Lehrbuche dieser Disciplin; für das erste war es im Ganzen und Grossen nur erforderlich, die zahllosen von Baltzer aufgefundenen Notizen zusammenzustellen. Die von der gewöhnlichen etwas abweichende Behandlung der cubischen Determinanten ist S. 118 zu motiviren versucht worden.

Dass in der Hauptsache nur deutsche Originalarbeiten citirt wurden, wird Billigung finden, indem so am leichtesten der Zweck, den Studirenden zur selbstständigen Quellen-Lecture hinzuleiten, erreicht werden möchte.

Habeas tua fata libelle.

München, im November 1874.

Dr. S. Günther.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Es gereicht dem Verf. zur grössten Befriedigung, bereits in einer relativ so kurzen Frist der ersten Auflage dieses Buches die zweite nachfolgen lassen zu können. Selbstverständlich sind die Grundsätze, nach welchen jene erste gearbeitet war, unverändert beibehalten worden, da sie, wie der Erfolg zeigte, im Allgemeinen den Bedürfnissen und Wünschen unserer angehenden Mathematiker entsprachen. Um so mehr aber musste im Einzelnen die kritische Feile angelegt werden, und die zahlreichen Besprechungen seines Buches, deren ihm circa zwölf in verschiedenen Sprachen bekannt geworden sind, haben ihm dafür reichlich Anhaltspunkte geboten.

An erster Stelle sei daher über die vorgenommenen Modifikationen Bericht erstattet. Es ward einer Recensions-Forderung gemäss das Kapitel über cubische Determinanten an das Ende des Ganzen verlegt. Dagegen konnte sich der Unterzeichnete nicht entschliessen, den Wunsch eines verehrten wissenschaftlichen Freundes zu erfüllen und dem historischen Eingangskapitel ein Gleiches widerfahren zu lassen. Er verhehlt es sich nicht, dass der Studirende mit dem Verständniss jener Skizze nicht gleich beim ersten Male völlig fertig werden wird, allein er kann darin keinen Uebelstand erblicken, da vielmehr die etwa angetroffenen Schwierigkeiten ihm zum Sporn dienen werden, um mit desto mehr Energie in die anfänglichen Mysterien des Determinantenbegriffes sich hineinzuarbeiten. — Der Ausstellung des Referenten aus Ohrtmann's Jahrbuch, welcher eine ausführlichere Behandlung der homogenen Gleichungen und der orthogonalen Substitutionen wünschte, ward nach-zukommen versucht, hingegen schien es nicht erforderlich, geometrische Anwendungen in beträchtlich grösserem Masse aufzunehmen. Denn ein Lehrbuch der Determinantentheorie soll und kann niemals ein Lehrbuch der analytischen Geometrie ersetzen, und wird diess dennoch zu leisten versucht, so gelangt man zu solch' unerfreulicher Verquickung verschiedener Dinge, wie sie das sonst lobenswürdige neueste Werk von Dostor wenig vortheilhaft charakterisirt. Immerhin ward das kurze der Geometrie gewidmete Kapitel soweit umgearbeitet, um dem Studenten eine Perspektive auf das so unendlich ausgedehnte Feld der geometrischen Determinantenlehre zu eröffnen — und mehr soll ein Buch wie dieses eben principiell nicht anstreben. Ein Leitfaden, der auf die ersten zwei bis vier Semester berechnet ist, kann ebensowenig so fundamentale Disciplinen, wie Funktionaldeterminanten und Transformation, zu einem auch nur einstweiligen Abschluss bringen: seine Bestimmung ist lediglich die, anzuregen und für spätere Studien die Grundlage zu liefern. Daher die wie es scheint nicht allenthalben richtig gewürdigte Zurückhaltung, welche sich der Verf. bei den letzten Kapiteln damals nicht minder als jetzt auferlegte.

Drei Paragraphen wurden, wie das Inhaltsverzeichniss beider Ausgaben lehrt, gänzlich verändert, indem die darin behandelten Materien mit dem sonst durchweg vorausgesetzten Durchschnittsmass der Vorbildung nicht zu harmoniren schienen. In Kap. II. ward aus systematischen Gründen §. 5 mit 6 vertauscht, dem geschichtlichen und dem von den Kettenbrüchen handelnden Kapitel musste jeweils ein weiterer Paragraph zugesetzt werden, um seitdem erworbene Ergebnisse passend unterzubringen. — Die höchst zahlreichen Verbesserungen und Erweiterungen, welche die zweite Auflage erfahren, lassen sich hier im Einzelnen nicht registriren; der Leser wird sie schon selber finden und hoffentlich auch dem Verf. das Zugeständniss machen, dass kaum irgend eine Seite des Buches die revidirende Hand vermissen lasse *).

Die beiden Anhänge werden, so hoffen wir, den früheren Freunden des Werkchens nicht unwillkommen sein. Während der erste den Bedürfnissen des Anfängers dadurch entgegenkommen will, dass er ihm

---

*) Die Bemerkung in der Randnote S. 112 ist, was hier zur Verhütung von Missverständnissen bemerkt sein möge, dahin zu verstehen, dass bei Gleichungen — nicht auch bei Ausdrücken schlechtweg — der Coëfficient des höchsten Gliedes als durch Division stets weggeschafft vorausgesetzt wird.

eine gründliche Uebung im so zu sagen mechanischen Determinantenrechnen, diesem A und O jedes Fortschrittes, erleichtert, verfolgt er dabei auch noch eine zweite wichtige Tendenz. Es sollen dadurch dem Lernenden Ausblicke in jene Partieen der Wissenschaft geschafft werden, von welchen der Text programmgemäss nichts berichten konnte; es sollen durchaus nicht lauter Probleme vorliegen, die sich im ersten Ansturm bewältigen lassen, vielmehr soll durch sie das Studium auf die Originale hingelenkt werden. Aus diesem Grunde sind die Quellen mit aller nur möglichster Sorgfalt angeführt worden. — Was den zweiten (literargeschichtlichen) Anhang anlangt, so geht seine Existenz-Berechtigung wohl direkt aus dieser seiner Existenz hervor.

Sowohl für das Buch selbst als auch für die beiden Zugaben hielt die Beschaffung der literarischen Hülfsmittel theilweise ausserordentlich schwer. Um so dankbarer erkennt der Autor die liebenswürdige Unterstützung an, welche er bei seinem Unternehmen allseitig gefunden hat, so bei den HH. Studnička in Prag, Mansion in Gent, Hoüel in Bordeaux, Bierens de Haan in Leyden, Zolotareff in St. Petersburg, ganz besonders aber bei den HH. Taylor und Glaisher in Cambridge, welche ihm durch umfängliche Auszüge die Uebersicht über die ausgebreitete literarische Produktion Grossbritanniens so beträchtlich erleichterten. Nicht minder fühlen wir uns Herrn Dr. Magener in Posen für die freundliche Ueberlassung des vollständigen Heftes verbunden, welches derselbe über ein bei Jacobi gehörtes Determinanten-Colleg sich angelegt hat, und welches wir sowohl für die präcisere Fassung einzelner Grundbegriffe als auch für die Verbreitung mancher wenig bekannten Notiz (z. B. S. 104) verwerthen konnten.

Einige neuere Erscheinnngen des Büchermarktes wurden dem Verf. bei seiner Entfernung von den Centralstätten der Wissenschaft leider viel zu spät bekannt, um noch Verwendung finden zu können, so Fiedler's so wesentlich vervollkommnete Neubearbeitung der Salmon'schen „Transformationen“, die neue Auflage des Werkes von Dölp, Mertens' Abhandlung über die symmetralen Determinanten, u. a. m. Allein so weit immer für ihn die Möglichkeit reichte, hofft der Verf. das Buch soweit gefördert zu haben, dass es — stets natürlich mit Rücksicht auf den spezifisch-pädagogischen Zweck — den neuesten von der Disciplin der Determinantentheorie erreichten Standpunkt vertritt. —

Den Bemühungen der verehrten Verlagshandlung ist es gelungen, den Druck so zu gestalten, dass des sehr bedeutenden Stoffzuwachses ungeachtet der äussere Umfang nicht nur nicht vermehrt zu werden brauchte, sondern sogar um ein Geringes reducirt werden konnte. Nicht minder ward auf äusserste Correktheit soviel möglich Bedacht genommen, und der Verf. darf sich der Erwartung hingeben, dass es ihm und seinem wackeren Beistand, Herrn Mathematiklehrer Bein in Erlangen, gelungen sei, dem angestrebten Ideal vollkommener Fehlerfreiheit diessmal wenigstens ziemlich nahe gekommen zu sein.

Habeas iterum tua fata libelle.

Ansbach, im Juni 1877.

Dr. S. Günther.

Inhalt.

Kapitel I. Historische Skizze der Entwickelung des Determinantencalculs.

§. 1. Erste Anfänge. §. 2. Leibnitz. §. 3. Cramer. §. 4. Euler's Kettenbruch-Algorithmen. §. 5. Bézout. §. 6. Vandermonde; Bezeichnung durch dreifache Indices. §. 7. Laplace. §. 8. Lagrange. §. 9. Die deutschen Combinatoriker; Rothe. §. 10. Gauss. §. 11. Cauchy und Binet; das Multiplikationstheorem. §. 12. Reiss; Grassmann; Neueste Zeit.

Kapitel II. Allgemeine Eigenschaften der Determinanten.

§. 1. Begriff der Determinanten. §. 2. Gleichberechtigung der ersten und zweiten Indices. §. 3. Combinatorischer Hülfssatz. §. 4. Vertauschung zweier Reihen. §. 5. Allgemeine Vorzeichenregel bei Reihenvertauschungen. §. 6. Vorbereitung für die Unterdeterminanten. §. 7. Multiplikation einer Determinante mit einer Zahl. §. 8. Zerfällung einer Determinante in Summen. §. 9. Satz von Studnička. §. 10. Zerlegung einer Determinante nach Elementen einer Reihe. §. 11. Anwendung auf ein Schachproblem. §. 12. Erste Unterdeterminanten. §. 13. Höhere Unterdeterminanten. §. 14. Fortsetzung. §. 15. Fortsetzung. §. 16. Entwickelung einer Determinante mit dem allgemeinen Diagonalelement ($a_{i,i} + x$) in eine nach Potenzen von x fortgehende Reihe. §. 17. Jacobi's Satz über allgemeine Zerfällung einer Determinante. §. 18. Theorem von Laplace. §. 19. Anwendung auf ein Beispiel. §. 20. Multiplikation zweier Determinanten. §. 23. Differential einer Determinante. §. 24. Fortsetzung. §. 25. Begriff der Matrix.

Kapitel III. Determinanten von besonderer Form.

§. 1. Das Differenzenprodukt. §. 2. Erweiterung dieser Lehre. §. 3. Die Determinanten adjungirter Systeme. Hauptsatz von denselben. §. 4. Unterdeterminanten. §. 5. Beispiel hiezu. Recursionsbeweis. §. 6. Symmetrische Determinanten. §. 7. Beispiel hiezu. §. 8. Orthosymmetrische Determinanten. §. 9. Sätze über dieselben. §. 10. Orthosymmetrische Determinanten aus Binomialcoëfficienten. §. 11. Doppelt-orthosymmetrische Determinanten. §. 12. Symmetrale Determinanten mit leerer Diagonale. §. 13. Halbdeterminanten. Spezieller Fall von solchen. §. 14. Symmetrale Determinanten mit voller Diagonale.

Kap. IV. Die Eliminationsprobleme.

§. 1. Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen. §. 2. Spezielle Fälle. §. 3. Bedingung für die Coëxistenz homogener Gleichungen. Auflösung überbestimmter Gleichungen. §. 4. Hankel's Untersuchungen über complexe Zahlen. Anwendungen auf die Zahlentheorie. §. 5. Independente Bestimmung der Bernoulli'schen Zahlen. Lineare totale Differentialgleichungen. §. 6. Fürstenau's

Verfahren zur Auflösung höherer Gleichungen. §. 7. Recurrirende Reihen. §. 8. Satz von Albert Girard. §. 9. Discriminanten. §. 10. Sylvester's dialytische Eliminationsmethode. §. 11. Anwendungen. §. 12. Fortsetzung. §. 13. Cayley's abkürzendes Verfahren. §. 14. Auflösung eines Systems von n Gleichungen, von denen (n — 1) linear, eine quadratisch. Erweiterung dieser Methode.

Kapitel V. Kettenbruchdeterminanten.

§. 1. Historisches; Hülfssatz. §. 2. Darstellung von Zähler und Nenner eines Kettenbruches in Determinanten-Form. §. 3. Bestimmung der Gliederzahl von Zähler und Nenner. §. 4. Fundamentalsatz von den Kettenbrüchen. §. 5. Beweise verschiedener Kettenbruchsätze vermittelst Determinanten. §. 6. Eingliedrig-periodische Kettenbrüche. §. 7. Verwandlung von Determinantenquotienten in Kettenbrüche. §. 8. Verwandlung von Kettenbrüchen in Reihen. §. 9. Fortsetzung. §. 10. Independente Ausdrücke für aufsteigende Kettenbrüche. §. 11. Höhere Kettenbrüche.

Kap. VI. Geometrische Anwendungen.

§. 1. Determinante für den Dreiecksinhalt. §. 2. Herleitung dieses Ausdrucks nach Moebius. §. 3. Determinante für den Tetraëderinhalt. §. 4. Diverse Anwendungen auf die Curvenlehre. §. 5. Durchschnitt eines Kegelschnittes mit einer Geraden.

Kapitel VII. Funktionaldeterminanten.

§. 1. Begriff der Funktionaldeterminante bei entwickelt gegebenen Funktionen. §. 2. Fortsetzung. §. 3. Verwickelte Funktionen. §. 4. Transformation bestimmter Integrale. §. 5. Ableitung des Gauss'schen Krümmungsmasses nach Baltzer. §. 6. Das Krümmungsmass n facher Räume. §. 7. Hesse'sche Determinante. §. 8. Dieselbe für homogene Funktionen. §. 9. Dieselbe als Inflexionsdeterminante. §. 10. Fortsetzung.

Kapitel VIII. Lineare Substitutionen.

§. 1. Die linearen Transformationen im Allgemeinen. §. 2. Orthogonale Substitutionen. §. 3. In- und Covarianten. §. 4. Beispiele hiezu. §. 5. Weierstrass' Theorie der bilinearen Formen. §. 6. Anwendung auf die Lehre von den Linien-Complexen.

Kapitel IX. Cubische Determinanten.

§. 1. Begriff der cubischen Determinante. §. 2. Berechnungsmethode der einzelnen Glieder. §. 3. Vertauschung von Determinanten-Ebenen. §. 4. Cubische Unterdeterminanten. §. 5. Zerfällung in Summen. §. 6. Analogon des Theorems von Laplace. §. 7. Allgemeines über Determinanten von höherem Rang.

Anhang I. Aufgabensammlung.

Anhang II. Literaturverzeichniss.

Kapitel I.

Historische Skizze der Entwickelung des Determinantencalculs.

§. 1. Die Erfindung der Buchstabenrechnung durch Vieta hatte die natürliche Folge, dass die Berechnung und Umformung verwickelter algebraischer Ausdrücke eine Lieblingsbeschäftigung der bedeutenderen Mathematiker jener Zeit wurde. Vornämlich trat diess Streben hervor in den Anwendungen, welche man von der jungen Wissenschaft auf geometrische Gegenstände zu machen liebte. Es sei hier nur beispielsweise erinnert an die schönen Untersuchungen über das Kreisviereck, welche Praetorius [1]) und Albert Girard [2]) anstellten, oder auch an den mühsamen Calcul, durch welchen Joachim Jungius [3]) den Radius der einem Tetraëder umschriebenen Kugel zu bestimmen wusste, wenn dessen 6 Kanten gegeben waren. Bemühungen dieser und ähnlicher Art mussten natürlich an der ungeheuren Complicirtheit der Ausdrücke häufig scheitern, deren weitere Behandlung der Gang der Rechnung erforderte. Insbesondere aber musste diess eintreten, wenn durch die Aufgabe die explicite Darstellung einer unbekannten Grösse geboten war, welche durch ein System linearer Gleichungen mit anderen Unbekannten verknüpft erschien.

Diese Möglichkeit machte sich insbesondere auch dem ersten Algebraisten seiner Zeit, Leibnitz, so fühlbar, dass er sich auf eine Abhülfe zu denken genöthigt sah. Sein Scharfblick erkannte bald, dass hier nur durch Einführung einer an sich willkürlichen symbolischen Bezeichnung geholfen werden könne, an der sich gewisse algebraische Operationen leicht vollziehen liessen. Wir dürfen uns über diese Idee nicht wundern, wenn wir nur im Auge behalten, dass das Hauptverdienst des Mannes, mit dem wir es hier zu thun haben, in der richtigen und zweckmässigen Einführung solcher Bezeichnungsweisen lag, welche wir heutzutage Algorithmen zu nennen pflegen. So hat derselbe auch allein die Differentialrechnung geschaffen, indem keiner seiner Vorgänger und Zeitgenossen seine Gedanken in dieser Weise zur Realisirung zu bringen wusste — eine historische Thatsache, welche auch besonders der Darstellung in einem neueren Werke [4]) gegenüber nicht scharf genug hervorgehoben werden kann. So hat Leibnitz ja auch, wenn in diesem Punkt Grassmann [5]) seine Conceptionen richtig erfasst hat, an einen für geometrische Zwecke brauchbaren Algorithmus gedacht, von dessen Verwendbarkeit die „Ausdehnungslehre“ des letzteren wohl genügend Zeugniss ablegt. Und der nämliche schöpferische Geist, welcher in den genannten Disciplinen reformirend auftrat, macht sich auch betreffs des uns hier vorzüglich interessirenden Punktes geltend.

§. 2. Die Buchstabenrechnung war gegen Ende des 16. Jahrhunderts ein Gegenstand des Stolzes für alle Mathematiker geworden, welche auf die Allgemeingültigkeit ihrer Resultate Werth legten. Man wird desshalb das Erstaunen eines De l'Hopital nur begreiflich finden können, als Leibnitz [6]) ihm mittheilte, dass er sich in neuerer Zeit wieder mehrfach der Zahlen statt der Buchstaben bediene, und, indem er diese ersteren doch wie Buchstabengrössen behandle, manch' Neues und Interessantes gefunden habe. Es ist natürlich, dass der französische Gelehrte aus dieser kurzen Notiz nicht viel zu machen wusste und in seinem Antwortschreiben [7]) einige Bedenken äusserte. Hiedurch sah sich denn Leibnitz genöthigt, nochmals auf diesen Gegenstand zurückzukommen und De l'Hopital sein neues Princip genauer auseinanderzusetzen.

Er benützt hiezu ein Beispiel. Gegeben sind die drei Gleichungen $10 + 11x + 12y = 0$, $20 + 21x + 22y = 0$, $30 + 31x + 32y = 0$, und zwar sollen die hier auftretenden Zahlformen nicht etwa Zahlen des dekadischen Systemes sein, sondern es soll vielmehr die erste Ziffer jedes solchen Gebildes den Platz der Gleichung und die zweite den Platz in der Gleichung bezeichnen — „le premier me marque de quelle equation il est, la seconde me marque à quelle lettre il appartient" [8]) —, mit andren Worten, wir haben hier das erste Beispiel der uns jetzt so geläufigen Bezeichnungsweise mit doppelten Indices vor uns.

Die drei obigen Gleichungen werden nun ganz so einem Eliminationsprocesse unterworfen, als ob die darin vorkommenden Symbole wirkliche Zahlen wären, so dass man sofort auf folgende beide Gleichungen geführt wird:

$$10.22 - 12.20 + 11.22\,x - 12.21\,x = 0,$$
$$10.32 - 12.30 + 11.32\,x - 12.31\,x = 0,$$

und diese unterscheiden sich nur dadurch von einander, dass für jeden einzelnen Ausdruck der ersten Gleichung die dritte Ziffer um Eins niedriger ist als in dem entsprechenden der zweiten. Indem nun ferner Leibnitz durch ein analoges Verfahren aus dem letzteren Systeme x wegschafft, gelangt er zu einer Schlussrelation, welche er streng consequent so schreiben müsste:

$$10.21.32 - 10.22.31 + 11.22.30 - 11.20.32 + 12.20.31 - 12.21.30 = 0,$$

welche er aber, wiederum geleitet durch sein Bestreben zu vereinfachen, in dieser Weise darstellt:

$$\begin{matrix} 1_0 \,.\, 2_1 \,.\, 3_2 \\ 1_1 \,.\, 2_2 \,.\, 3_0 \\ 1_2 \,.\, 2_0 \,.\, 3_1 \end{matrix} = \begin{matrix} 1_0 \,.\, 2_2 \,.\, 3_1 \\ 1_1 \,.\, 2_0 \,.\, 3_2 \\ 1_2 \,.\, 2_1 \,.\, 3_0 \end{matrix},$$

Interessant ist auch Leibnitz' Bemerkung, dass diese Finalgleichung durch ihre allenthalben hervortretende „Harmonie" ihre Richtigkeit von selbst darthue, und dass diese Harmonie bei Anwendung von Buchstaben bei weitem nicht so deutlich hervortrete, zumal bei einer grösseren Anzahl von Gleichungen. In Verfolgung dieses Gegenstandes, bemerkt er weiter, habe er folgendes für jedes beliebige System „einfacher", d. h. linearer Gleichungen geltende Gesetz gefunden [9]): „Datis aequationibus quotcunque sufficientibus ad tollendas quantitates, quae simplicem gradum non egrediuntur, pro aequatione prodeunte, primo sumendae sunt omnes combinationes possibiles, quas ingreditur una tantum coefficiens uniuscujusque aequationis; secundo, eae combinationes opposita habent signa, si in eodem aequationis prodeuntis latere ponantur, quae habent tot coefficientes communes, quot sunt unitates in numero quantitatum tollendarum unitate minuto; cetera habent eadem signa."

In diesem Theoreme ist allerdings bereits mit ziemlicher Klarheit das eigentliche Wesen der Determinanten dargelegt, besonders auch die fundamentale Bestimmung, dass als erster resp. zweiter Index eines beliebigen Gliedes die nämliche Zahl nie mehr als einmal auftreten dürfe. — Leibnitz geht sogar noch weiter und deutet die Verwendbarkeit seines neuen combinatorischen Symboles auch für das allgemeinere Eliminationsproblem an, ohne jedoch über einige allgemeinere Bemerkungen hinauszugehen. Ein spezieller Name für die neue Erfindung findet sich noch nicht; dieselbe wird vielmehr unter der generalisirenden Bezeichnung „charactéristiques" mit begriffen.

De l'Hopital erkennt in seinem Antwortschreiben [10]) die Vorzüglichkeit der neuen Idee in unbestimmten Ausdrücken an, ohne jedoch tiefer in die Sache sich einzulassen; für ihn musste dieselbe, auch nach den Erklärungen seines Correspondenten, etwas sehr Fremdartiges behalten. Leibnitz erwähnt des Gegenstandes, da wohl seine historischen Untersuchungen wie seine zahlreichen literarischen Streitigkeiten seine Aufmerksamkeit grossentheils absorbirten, auch nur mehr vorübergehend. Einmal [11]) erklärt er noch, er halte seine Erfindung für eine der schönsten in der Analysis, gewiss ein prophetischer und durch die Errungenschaften der Folgezeit glänzend gerechtfertigter Ausspruch. Die Ersetzung der Buchstaben durch Zahlen kommt allerdings noch öfter vor, so in einem späteren Briefe [12]) an De l'Hopital und — worauf erst Studnička aufmerksam machte [13]) — in einer Streitschrift [14]) gegen Fatio de Duiller; allein der eigentliche Determinantencalcul hat mit diesen Spätlingen nichts mehr zu thun. — Wenn in der genannten Monographie Studnička's das Schlussresultat des Leibnitz gewidmeten Paragraphen dahin lautet, derselbe sei allerdings der erste Erfinder der Determinanten, aber nur in beschränktem Sinne, so werden wir mit Rücksicht auf die soeben zu Ende geführte Analyse dem unbedingt beipflichten müssen.

Die Geschichtschreiber der Mathematik, wenn sie überhaupt, wie Bossut [15]), den Gegenstand berühren, scheinen von der oben erörterten Stelle nichts zu wissen; dieselbe ward nach Baltzer's Angabe vielmehr erst von Lejeune-Dirichlet [16]) wahrgenommen und in ihrer hohen geschichtlichen Bedeutung erkannt.

§. 3. Die zweite und in ihren Folgen bei weitem wichtigere Erfindung der Determinanten verdanken wir Gabriel Cramer, dessen berühmtes Werk [17]) ja überhaupt so manchen interessanten Wink enthält, den erst die Neuzeit richtig auszunützen verstand. Es sei in dieser Beziehung nur erinnert an jene dem Newton'schen Parallelogramm nachgebildete Regel zur Discussion der merkwürdigen Curvenpunkte und der in einem solchen Punkte zusammenlaufenden Aeste, welche von Puiseux wieder reproducirt und von Anderen auf die glücklichste Weise mit der Theorie der mehrblättrigen Riemann'schen Flächen in Verbindung gesetzt wurde.

Bei Behandlung der Aufgabe *), durch $\left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{3}{2} v\right)$ willkürlich

---

*) Speziell bei diesem Probleme erkannte Cramer einen eigenthümlich schwie-

gegebene Punkte eine Curve der $v$ten Ordnung zu legen, kommt es selbstverständlich auf die Auflösung eines Systemes von ebensovielen linearen Gleichungen an, und Cramer[20]) zeigt nun, dass diese Operation schon bei einem durch fünf Bestimmungsstücke gegebenen Kegelschnitte eine höchst mühselige und zeitraubende ist. Diese Operation zweckmässig zu vereinfachen ist Cramer's in einer Note[21]) näher charakterisirte Absicht.

Er bildet demnach ein System linearer Gleichungen, und zwar ist hiebei auf den einen entschiedenen Fortschritt in der Bezeichnungskunst involvirenden Umstand aufmerksam zu machen, dass die Coëfficienten dieser Gleichungen bezüglich durch x^1, y^2, z^3 . . . dargestellt werden, und ausdrücklich vor einer Verwechselung dieser Symbole mit wirklichen Potenzen gewarnt wird. Durch einfachen Inductionsschluss, gestützt auf die wirklich ausgerechneten Werthe der in drei linearen Gleichungen vorkommenden Unbekannten, erhebt sich hierauf Cramer zu einer allgemeinen Lösungsmethode, welche er folgendermassen schildert.

Der allen n Unbekannten gemeinsame Nenner hat ebensoviele Glieder, als oft sich n Elemente permutiren lassen. Um jedes einzelne Glied zu erhalten, schreibe man die unbekannten Grössen, stets in der nämlichen Reihenfolge, nacheinander hin und setze ihnen die n ersten Ziffern, in jeder denkbaren Weise geordnet, als Exponenten (beziehungsweise Indices) bei. Die Hälfte der so erhaltenen Glieder ist positiv, die andere negativ; um sich über das einem bestimmten Gliede zukommende Vorzeichen zu vergewissern, zähle man die in demselben auftretenden Inversionen ab; einer geraden Anzahl kommt das Vorzeichen Plus, einer ungeraden Minus zu. Eine solche Inversion („dérangement") tritt aber dann ein, wenn ein im dekadischen Zahlensysteme höher stehender Index seine Stelle links von einem niedrigeren einnimmt. So kommt den Gliedern $z^1y^2v^3$, $z^3y^1x^2$, welche resp. 0 und 2 Inversionen enthalten, das positive Zeichen zu. Um aus dem Nenner den Zähler für irgend eine Unbekannte zu finden, hat man nur deren Coëfficienten successive durch die bekannten Grössen zu ersetzen.

Cramer macht auch auf einige Ausnahmsfälle aufmerksam, welchen seine Methode unterliegt. So kann der Nenner beispielsweise Null werden; verschwinden dann auch die einzelnen Zähler, so nimmt jede Unbekannte den Werth $\frac{0}{0}$ an, und das Problem ist unbestimmt, d. h. die den Gleichungen entsprechenden Werthe müssen durch eine anderweite — für Cramer wohl noch transscendente — Betrachtung ausgemittelt werden. Behaupten dagegen in jenem Falle die Zähler endliche Werthe, so ist eine eigentliche Lösung nicht mehr möglich, vielmehr werden die Werthe für

---

rigen Satz der höheren Curventheorie, welcher unter dem Titel „Cramer'sches Paradoxon" auch späteren Geometern, wie Lamé und Plücker, zu denken gab; man vergleiche die kurze aber inhaltsreiche Darstellung, welche Clebsch[18]) von der geschichtlichen Entwickelung jenes Cyklus von Theoremen gegeben hat. — Betreffs der nicht minder bemerkenswerthen Cramer'schen Regel, welche bei genauerem Besehen nahezu zwei Drittel des ganzen Werkes erfüllt, ist auf eine ausführliche Studie vom Verf. dieses zu verweisen[19]). Auch für noch gar manche späterhin zu hoher Entfaltung gediehene Lehre dürften die Keime in Cramer's „Introduction" zu suchen sein, z. B. für den allgemeinen Polaren-Begriff.

die Unbekannten unendlich gross, wie diess Cramer [22]) in einem Beispiele ausführlich erläutert.

Wir sehen hier die Lehre von den Determinanten bereits auf einem verhältnissmässig ziemlich hohen Standpunkt; insbesondere muss auf den eleganten Modus hingewiesen werden, durch welchen Cramer die Vorzeichen bestimmt, und der auch späteren Geometern, vornämlich aus der combinatorischen Schule, Stoff zu interessanten Untersuchungen dargeboten hat. Dagegen betrachtet Cramer seine Erfindung offenbar mehr nur in dem Sinne eines angenehmen Erleichterungsmittels algebraischer Rechnungen und erkennt derselben nicht die principielle Bedeutung zu, welche Leibnitz' (s. o. §. 2) ihr unterlegte und die ihr auch wirklich innewohnt. Freilich ist auf der anderen Seite auch wieder zu bemerken, dass Cramer an die so unendlich wichtige symbolische Darstellung seiner Aggregate gar nicht gedacht zu haben scheint.

§. 4. Der grosse Mathematiker des siebzehnten Jahrhunderts, Leonhard Euler, scheint von diesen Bemühungen seines Zeitgenossen und Landsmannes Cramer keine Kenntniss gehabt und überhaupt das neue Verfahren vollständig ignorirt zu haben, obwohl in seine späteren Lebensjahre die Arbeiten Bézout's fallen, welcher, wie wir bald näher sehen werden, von demselben einen so wichtigen Gebrauch zu machen verstand. Gleichwohl konnte auch er den Zeitumständen, welche gebieterisch die Einführung und Aufnahme dieses analytischen Instrumentes erforderten, so wenig sich entziehen, dass er selbst einen neuen Algorithmus in's Leben rief, der eigentlich nur ein versteckter Determinantencalcul ist. Um nämlich den Unbequemlichkeiten zu entgehen, welche die Rechnung mit den in entwickelter Gestalt so wenig übersichtlichen Näherungswerthen von Kettenbrüchen mit sich brachte, drückte er den Werth des Kettenbruches

$$a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \ldots + \frac{1}{m}$$

folgendergestalt durch ein Symbol aus:

$$\frac{(a, b, c, d \ldots m)}{(b, c, d \ldots m)}.$$

Mit der blossen Einführung dieser neuen Bezeichnungsart wäre natürlich an sich wenig gewonnen gewesen; Euler that jedoch auch den erforderlichen Schritt, um die an sich gleichgültige Form zu beleben, und stellte [23]) eine Reihe von Regeln auf, um mit diesen Symbolen wirklich operiren d. h. rechnen zu können. Diese Regeln sind nun genau die nämlichen, mittelst deren wir gegenwärtig eine Determinante nach den Elementen einer bestimmten Reihe in erste Unterdeterminanten zerlegen. Besonders instructiv ist in dieser Hinsicht der Beweis, welchen Euler [24]) für den Fundamentalsatz der Kettenbruchlehre

$$-(P_{n-1} Q_n - P_n Q_{n-1}) = P_{n-2} Q_{n-1} - P_{n-1} Q_{n-2}$$

giebt, unter P_ν und Q_ν bezüglich den Zähler und Nenner des νten Näherungswerthes eines Kettenbruches von der obigen Form verstanden. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&(a, b, c \ldots p, q)\,(b, c \ldots p, q, r) - (b, c \ldots p, q)\,(a, b, c \ldots p, q, r) \\
&= (a, b, c \ldots p, q)\, r\, (b, c \ldots p, q) + (a, b, c \ldots p, q)\,(b, c \ldots p) \\
&- (b, c \ldots p, q)\, r\, (a, b, c \ldots p, q) - (b, c \ldots p, q)\,(a, b, c \ldots p) \\
&= [(a, b, c \ldots p, q)\,(b, c \ldots p) - (a, b, c \ldots p)\,(b, c \ldots p, q)],
\end{aligned}$$

und hiemit ist der Satz bewiesen. Dass der Beweis dieses Lehrsatzes durch wirkliche (Kettenbruch-) Determinanten sich ganz analog gestaltet, ist an einem anderen Orte gezeigt worden [25], und wir dürfen mit Rücksicht hierauf wohl behaupten, dass Euler, obwohl er die eigentliche Determinantenrechnung nicht kannte, trotzdem gewissermassen instinktiv die Nothwendigkeit eines solchen Hülfsmittels richtig erfasste. Auch hat er sich seines neuen Algorithmus bei verschiedenen Problemen der Zahlentheorie mit Vortheil bedient. So besonders in seiner Untersuchung [26] „de resolutione formulae $p = \sqrt{lqq + 1}$ in numeris integris“, wo, wenn $\sqrt{z} = v + \cfrac{1}{a + \ldots}$ gesetzt wird,

$$(v, a, b, c \ldots)^2 = z(a, b, c \ldots)^2 \pm \mu$$

eine besonders wichtige Relation darstellt [27]. Unter einem gleichen Gesichtspunkt haben auch einige der bedeutendsten neueren Mathematiker, wie Gauss [28] und Dirichlet [29], ihn wieder aufgenommen; jedoch tritt, besonders bei ersterem, der Charakter eines Algorithmus gegen den einer bequemen Bezeichnungsweise zurück.

Erkennt man, wie das die historische Entwickelung zwingend fordert, die Determinantenrechnung als Ausfluss der sogenannten combinatorischen Analysis an, so wird man sich mit dem Ausspruche Hindenburg's einverstanden erklären müssen, dass das eigentliche Bildungsgesetz der Kettenbruchsymbole (resp. Determinanten) in Euler's „wirklich combinatorischer Auflösung“ bereits implicite enthalten sei [30].

§. 5. Auch in einem anderen Probleme, welches Euler mit Vorliebe behandelte, hätte sich der Nutzen der Determinanten sehr augenfällig herausgestellt, wenn er denselben in seiner Wichtigkeit erfasst gehabt hätte, nämlich in dem allgemeinen Eliminationsprobleme. Euler hat dasselbe allerdings mit Geschick und Glück behandelt, und während sein erstes Verfahren *) die Resultante aus zwei algebraischen Gleichungen noch in unentwickelter Form durch symmetrische Wurzelfunktionen lieferte [31], erkannte er in einer späteren Abhandlung [32] vollkommen richtig den intimen Zusammenhang dieser Aufgabe mit der Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen. Allein seine Methode liess doch noch Vieles zu wünschen übrig; so lieferte sie z. B. nicht a priori den Grad der durch die Elimination resultirenden Gleichung und duldete keine Ausdehnung auf den Fall von mehr als zwei Gleichungen. Zudem waren die vorzunehmenden Rechnungen von der Art, dass sie nach Bézout's Aeusserung selbst „le calculateur le plus intrépide“ entmuthigen mussten. Um diesen Mängeln abzuhelfen, griff nun der eben genannte Mathematiker auf den genialen Gedanken Cramer's zurück und stellte sich die Aufgabe, den ganzen weitläufigen Eliminationsprocess ausschliesslich durch Gleichungen vom ersten Grade zu bewältigen.

---

*) Den unmittelbaren Anlass zur Erörterung dieser Frage bot für Euler das in der vorigen Randnote namhaft gemachte Cramer'sche Paradoxon oder, wie er sich ausdrückt, „une contradiction apparente dans la théorie des lignes courbes.“ Die Bestimmung der Anzahl von gemeinschaftlichen (Durchschnitts-) Punkten zweier algebraischen Curven führt selbstverständlich zu Eliminationen.

Zu diesem Ende stellt er [33]) zunächst einen Hülfssatz auf, welcher seiner naturgemässen Stellung nach eigentlich ein Corollar der oben (§. 2) skizzirten Cramer'schen Auflösungsmethode sein würde, hier aber einen selbstständigen Platz einnimmt. Sind nämlich n Gleichungen mit n Unbekannten gegeben, so jedoch, dass an Stelle der bekannten Grössen durchweg Nullen getreten sind, so muss nothwendig eine Bedingungsgleichung zwischen den Coëfficienten bestehen, indem ja eigentlich n Gleichungen mit den $(n-1)$ Unbekannten $\frac{x_1}{x_p}, \frac{x_2}{x_p} \ldots \frac{x_{p-1}}{x_p}, \frac{x_{p+1}}{x_p} \ldots \frac{x_n}{x_p}$ $(p \leqq n)$ gegeben sind.

Die Formulirung nun, welche Bézout der erforderlichen Bedingung ertheilt, ist, wenn wir unsere moderne Ausdrucksweise dabei anwenden, diese: Man bilde die Determinante der n^2 Coëfficienten und setze dieselbe gleich Null. — Zur Bildung der Determinanten, deren symbolische Ausdrucksform ihm freilich noch abgeht, giebt er eine Regel, welche zur wirklichen Auswerthung einer solchen Form auch jetzt noch ganz praktisch sich erweisen wird, und die wir daher an einem Beispiele etwas ausführlicher darstellen wollen:

Es mögen gegeben sein die drei Gleichungen:

$$ax + by + cz = 0,\ a'x + b'y + c'z = 0,\ a''x + b''y + c''z = 0,$$

und es sei bekannt, dass die Bedingung für deren Coëxistenz durch nachstehende Relation zwischen den Coëfficienten

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'' = 0$$

ausgedrückt sei. Um dann die analoge Bedingung für die vier simultanen Gleichungen

$$ax + by + cy + dt = 0,\ a'x + b'y + c'z + d't = 0,\ a''x + b''y + c''z + d''t = 0,\ a'''x + b'''y + c'''z + d'''t = 0$$

zu erhalten, sehe man zunächst von den Indices ab, setze jedem der obigen sechs Glieder ein d als vierten Faktor bei, lasse diess d, während die drei anderen Elemente ihre lexicographische Anordnung beibehalten, jeden möglichen Platz einnehmen, und ertheile den so entstandenen Produkten abwechselnd das positive und negative Vorzeichen. So erhält man für's Erste die Identität

$$\begin{aligned} &abcd - abdc + adbc - dabc - acbd + acdb - adcb + dacb \\ &+ cabd - cadb + cdab - dcab - bacd + badc - bdac + dbac \\ &+ bcad - bcda + bdca - dcba - cbad + cbda - cdba + dcba = 0. \end{aligned}$$

Um nun jedes einzelne Glied mit den nöthigen Indices zu versehen, giebt Bézout [34]) folgende Anweisung: „Alors conservez les lettres qui occupent la première place; donnez à celles qui occupent la seconde, la même marque qu'elles ont dans la seconde équation; à celles qui occupent la troisième, la même marque qu'elles ont dans la troisième équation, et ainsi de suite, égalez enfin le tout à zero et vous aurez l'équation de condition cherchée."

Verhalten wir uns dieser Vorschrift gemäss, so nimmt unsere Bedingungsgleichung schliesslich folgende Form an:

$$\begin{aligned} &ab'c''d''' - ab'd''c''' + ad'b''c''' - da'b''c''' - ac'b''d''' + ac'd''b''' \\ &- ad'c''b''' + da'c''b''' + ca'b''d''' - ca'd''b''' + cd'a''b''' - dc'a''b''' \\ &- ba'c''d''' + ba'd''c''' - bd'a''c''' + db'a''c''' + bc'a''d''' - bc'd''a''' \\ &+ bd'c''a''' - dc'b''a''' - cb'a''d''' + cb'd''a''' - cd'b''a''' + dc'b''a''' = 0. \end{aligned}$$

Die hier durchgeführte Bestimmungsweise ist, wie man sieht, die nämliche, welche wir heutzutage als Zerlegung einer Determinante in Unterdeterminanten zu bezeichnen pflegen, und zugleich die bequemste, um auf recurrentem Wege zur Kenntniss der entwickelten Glieder einer Determinante zu gelangen. Jedoch ist auch der Weg zu einer independenten Auffindung derselben darin bereits angedeutet; denn um zu der obigen ersten Eliminationsgleichung zu gelangen, wird schon darauf hingewiesen, dass bei einer Vertauschung einer ungeraden Anzahl von Buchstaben des Anfangsgliedes abc das negative, im anderen Falle das positive Zeichen erfordert werde [35]. Auch lässt diese Methode sofort erkennen, aus wie viel Gliedern eine entwickelte Determinante besteht.

Indem dann Bézout an seine eigentliche Aufgabe geht, betrachtet er ein System von n Gleichungen beliebigen Grades, welche nach absteigenden Potenzen einer beliebigen Unbekannten geordnet sind. Das allgemeine Problem lässt sich reduciren auf das speciellere, aus zwei Gleichungen die gemeinschaftliche Unbekannte wegzuschaffen oder, was dasselbe ist, die von den Coëfficienten zu erfüllende Bedingung anzugeben, wenn beiden Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel zukommen soll. Der im Folgenden massgebende Grundgedanke Bézout's ist nun der, jede der beiden Gleichungen solange mit x zu multipliciren, bis ein System vom Grade $(p + q)$ vorliegt, unter p und q die Grade der beiden ursprünglich vorliegenden Gleichungen verstanden. Nunmehr betrachtet er die einzelnen Potenzen der unbekannten Grösse als neue Unbekannte und sucht die Bedingung dafür, dass diese sämmtlich linearen Gleichungen zusammen bestehen. Dem bewiesenen Lemma zufolge wird aber diese gefunden, wenn man die Coëfficienten dieser Gleichungen zu einer $(p + q)$ reihigen Determinante zusammenstellt und diese mit Null identificirt. Allerdings muss zugestanden werden, dass Bézout auch über dieses Resultat noch hinausgieng und zeigte, wie man durch geeignete Operationen den Grad der Resultante — denselben als gerade vorausgesetzt — auf die Hälfte herabdrücken könne [36]. Da wir jedoch über diesen Gegenstand ohnehin im vierten Kapitel uns ausführlicher verbreiten müssen und derselbe keine principielle Bedeutung besitzt, so können und müssen wir uns von einem weiteren Eingehen auf die späteren Abschnitte der Bézout'schen Abhandlung an dieser Stelle dispensiren.

Recapituliren wir also die Verdienste, welche sich Bézout um die Ausbildung des Determinantencalculs erworben hat, so sind deren zwei zu verzeichnen: Die Angabe einer bequemen Regel zur Bildung derartiger Ausdrücke und die Erweiterung des Cramer'schen Verfahrens auf verwickeltere Eliminationen. An ein Rechnen mit Determinanten war dagegen noch nicht zu denken, so lange es noch an einer concisen symbolischen Bezeichnung fehlte.

§. 6. Gehen wir jetzt zu den Männern über, welche diese Bezeichnung und damit auch die Determinantenrechnung in's Leben riefen. Auf diese Erfindung und Einführung passender Algorithmen kann von Seite des Historikers gar nicht genug Gewicht gelegt werden; was vor dieser Epoche geschaffen ward, steht, und sei es noch so sehr der Ausfluss einer genialen Idee, gleichwohl als unvermittelter sinnreicher Einfall isolirt da, ja es kann vorkommen, dass andere Erfinder auf die nämlichen Formen gerathen, ohne die Identität beider zu erkennen. Einen solchen Fall haben wir oben (§. 4) bei L. Euler kennen gelernt, und ganz kürzlich erst [37]) hat Hankel daran erinnert, dass Daniel Bernoulli, indem er die algebraischen Gleichungen durch recurrirende Reihen aufzulösen suchte *), die hiebei auftretenden Coëfficienten durch analytische Gebilde darstellte, welche sich bei genauerem Zusehen als sogenannte orthosymmetrische Determinanten erwiesen.

Den ersten Schritt, zu einer selbstständigen Bezeichnungsweise that Vandermonde in einem Aufsatze [39]), der erst im Jahre 1772 im Drucke erschien, während schon im vorhergehenden Jahre der Pariser Akademie darüber Bericht erstattet worden war. Derselbe legt consequent die Idee zu Grunde, zwei verschiedene Grössen nicht mehr, wie dies bisher die Algebra that, durch verschiedene Buchstaben, sondern vielmehr durch Beifügung doppelter Indices zu unterscheiden — eine Idee, welche, wie wir oben (§. 2) sahen, bereits von Leibnitz sich herschreibt. Dass er dabei den Träger der Indices gänzlich unterdrückt und einen allgemeinen Term nicht wie wir durch $a_{i,k} \equiv a^i_k$, sondern blos durch $i_k \equiv ik$ charakterisirt, bleibt in der Hauptsache gleichgültig.

Hierauf trifft Vandermonde folgende Festsetzung. Es soll sein [40])

$$\frac{\alpha\,|\,\beta}{a\,|\,b} = \frac{\alpha\;\beta}{a\,.\,b} - \frac{\alpha\;\beta}{b\,.\,a} = 11\,.\,22 - 12\,.\,21,$$

und im unmittelbaren Anschluss daran wird gelehrt, wie man eine Determinante vom $n$ten Grade durch Zerlegung in Minoren auf solche des $(n-1)$ten zurückführen könne. Es sei beispielsweise die Reduction einer Determinante fünften Grades in Vandermonde's Zeichensprache (le symbole $\frac{\;|\;|\;|\;}{\;|\;|\;|\;}$ sert ici de caractéristique) hier durchgeführt [41]).

Man hat:

$$\frac{\alpha\,|\,\beta\,|\,\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon}{a\,|\,b\,|\,c\,|\,d\,|\,e} = \frac{\alpha\,\beta\,|\,\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon}{a.b\,|\,c\,|\,d\,|\,e} + \frac{\alpha\,\beta\,|\,\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon}{b.c\,|\,d\,|\,e\,|\,a} + \frac{\alpha\,\beta\,|\,\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon}{c.d\,|\,e\,|\,a\,|\,b}$$
$$+ \frac{\alpha\,\beta\,|\,\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon}{d.e\,|\,a\,|\,b\,|\,c} + \frac{\alpha\,\beta\,|\,\gamma\,|\,\delta\,|\,\varepsilon}{e.a\,|\,b\,|\,c\,|\,d}$$

oder in unseren Zeichen:

$$\Sigma \pm 11\;22\;33\;44\;55 = 55\;\Sigma \pm 11\;22\;33\;44 - 45\;\Sigma \pm 11\;22\;33\;54$$
$$+ 35\;\Sigma \pm 11\;22\;43\;54 - 25\;\Sigma \pm 11\;32\;43\;54 + 15\;\Sigma \pm 21\;32\;43\;54.$$

Wie man sieht, ist hier der Ausgangspunkt für die ganze Behandlungsweise ein wesentlich anderer, als bei den bisher besprochenen Autoren, denn während bei diesen ausnahmslos der Entwickelungsgang die Discussion gewisser analytischer Formen fordert, für welche sich alsdann bestimmte Gesetze formuliren lassen, stellt Vandermonde umgekehrt diese Formen als das primär Gegebene, als willkürliche Symbole hin und definirt dieselben erst näher durch eine fundamentale Beziehung, welche jedes solches Symbol von höherem Grade mit anderen von geringerem verbindet.

---

*) Genauere Aufschlüsse über diese viel zu wenig gekannte Methode des originellen Bernoulli und über deren Zusammenhang mit neueren Verfahrungsweisen sind unlängst von Nägelsbach [38]) gegeben worden.

Erst dann wird gezeigt, warum diese Symbole und gerade nur diese einzuführen waren. Die systematische Behandlung unserer Disciplin hat aus diesem Vorgehen Vandermonde's wesentlichen Vortheil gezogen, umsomehr, als durch dasselbe die Fixirung gewisser Fundamentalsätze der Determinantenlehre geradezu geboten erscheinen muss.

Man kann nämlich, so wird jetzt hervorgehoben, aus jedem Symbole die einzelnen Glieder auch dadurch erhalten, dass man das Hauptglied 11 22 33 . . . nn bildet, die ersten Indices stehen lässt und die zweiten willkürlich permutirt. Dann bedarf es aber noch einer Anordnung betreffs des Vorzeichens jedes einzelnen Gliedes, und die hiezu dienende Regel darf natürlich nicht mehr willkürlich gegeben werden, indem dieselbe sonst mit der früher gegebenen Definition der Determinanten in Widerspruch stehen könnte. Es tritt demnach an Vandermonde die Nothwendigkeit heran, die oben (§. 3) angeführte Regel Cramer's als directen Ausfluss jener Definition darzuthun; zu diesem Zwecke müssen die beiden Identitäten

$$\frac{1|2|3|\ldots m\,|m+1|\ldots|n}{1|2|3|\ldots m\,|m+1|\ldots|n} = \frac{1|\;2\;|\;3\;|\ldots|n-m+1|n-m+2|\ldots|\;n}{m|m+1|m+2|\ldots|\;n\;|\;1\;|\ldots|n-1}$$

und

$$\frac{1|2|3|\ldots|m|m+1|\ldots|n}{1|2|3|\ldots|m|m+1|\ldots|n} = \frac{1\,|\,2\,|\,3\,|\ldots|\;m-1\;|\;m\;|\;m+1\;|\ldots|\;n}{1\,|\,2\,|\,3\,|\ldots|\;m-1\;|m+1|\;1\;|\ldots|\;n}$$

erhärtet werden. In unserer Terminologie würde diess heissen: Das Vertauschen zweier horizontaler oder verticaler Reihen involvirt einen Zeichenwechsel der Determinante. Der Beweis dieses wichtigen Theoremes wird nicht allgemein geführt, dasselbe vielmehr nur durch die sogenannte unvollständige Induction plausibel zu machen gesucht. Als Zusatz findet sich dann auch die Thatsache, dass jede Determinante mit gleichen Reihen identisch verschwindet.

Nach diesen Vorbereitungen wird die Bestimmung einer beliebigen Unbekannten aus einem Systeme linearer Gleichungen ganz in der uns noch heute geläufigen Art und Weise durchgeführt; z. B. aus den beiden Gleichungen

$$1^1\xi_1 + 2^1\xi_2 + 3^1 = 0,\; 1^2\xi_1 + 2^2\xi_2 + 3^2 = 0$$

folgen für die beiden Unbekannten die Werthe:

$$\xi_1 = \frac{1\,|\,2}{2\,|\,3} : \frac{1\,|\,2}{1\,|\,2},\; \xi_2 = \frac{1\,|\,2}{3\,|\,1} : \frac{1\,|\,2}{1\,|\,2}.$$

Als ein wenn auch geringfügig scheinender so doch in seinen Wirkungen erheblicher Fortschritt in der Bezeichnung muss auch die Neuerung hervorgehoben werden, der zufolge die verschiedenen Unbekannten nicht mehr durch die Schlussbuchstaben des Alphabetes, sondern durch Indices an x und y charakterisirt werden. Jetzt erst war es möglich, die allgemeinen Formeln zur Auflösung eines Systemes von n linearen Gleichungen explicite hinzustellen, wie diess denn auch von Vandermonde[42]) geleistet worden ist.

Die Anwendungen, welche derselbe von seiner Ausdrucksweise weiterhin auf andere Eliminationsaufgaben macht, interessiren uns hier weniger, insoferne darin zur eigentlichen Determinantentheorie Gehöriges nur in geringem Masse dargeboten wird. Nur eine höchst wichtige Bemerkung wird in §. 7 im Zusammenhange mit anderen Sätzen registrirt werden; auf eine zweite werden wir im Anfang des dritten Kapitels zurückkommen. Wie Vandermonde[43]) angiebt, hat De Gua dieselben Probleme in einer der seinigen ähnlichen Manier behandelt und ist zu analogen Resultaten gelangt; jedoch scheint dieser gewandte Algebraiker seine Untersuchungen nicht dem Drucke übergeben zu haben. —

Studnička[44]) glaubt Vandermonde's Studien in Anbetracht dessen, dass er die Determinanten mehr nur als Abbreviaturen ansah, „keine hohe Bedeutung beimessen zu können". Wir finden dieses Urtheil denn doch zu hart und glauben, dass gerade die formale Bedeutung des neuen Calculs jenem Mathematiker klar vor Augen stand *).

§. 7. Ziemlich zur nämlichen Zeit wie Vandermonde nahm auch Laplace die Lehre von den Determinanten in Angriff. Die Beweggründe, welche ihn hiebei leiteten, waren rein praktischer Natur; als es sich bei einem Probleme aus der Theorie der Differentialgleichungen um Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen handelt, erinnert er sich der Cramer'schen Methode, bemerkt, dass dieselbe noch eines allgemeinen Beweises entbehre [46]), und liefert so, indem er diesen zu leisten sich vornimmt, einen elementaren Abriss der Determinantenlehre.

Um zur Bildung der Glieder einer Determinante zu gelangen, wird zuerst der Begriff der Inversion, oder, wie Laplace sich ausdrückt, der Variation, entwickelt. Die Elemente werden nicht durch doppelte Indices, sondern durch Buchstaben mit einem angehängten Index unterschieden; behaupten dann letztere bei allen Permutationen die Ordnung des decadischen Systemes, so tritt eine solche Variation ein, wenn die alphabetische Reihenfolge der Buchstaben unterbrochen ist.

Nunmehr geht Laplace dazu über, die Fundamentalwahrheiten bezüglich des Vertauschens zweier Reihen in der Determinante zu erweisen. Da vorläufig noch jede symbolische Bezeichnungsweise und speziell die uns so natürlich erscheinende durch ein quadratisches Schema fehlte, so konnten die betreffenden Sätze nicht in der Formulirung vorgetragen wer-

*) Auf Vandermonde's Stellung zur Formenlehre dürfte Nachstehendes ein helleres Licht zu werfen geeignet sein. Italienische Gelehrte haben in allerneuester Zeit als Erweiterung der gewöhnlichen sogenannte cubische Determinanten gebildet und sind dabei, anscheinend von einem völlig neuen Gedanken geleitet, von Zahlen mit dreifachem Index ausgegangen. Das hat aber bereits Vandermonde[45]) angeregt, als er sich anschickte, das sogenannte Rösselsprungproblem auf den Raum auszudehnen. Er bildet zu diesem Behufe 64 Glieder, welche bei geeigneter Anordnung die Elemente einer cubischen Determinante vom Grade $\sqrt[3]{64} = 4$ repräsentiren würden. Sein Schema ist dieses:

$4^3{}_1$	$4^3{}_3$	$3^1{}_2$	$1^1{}_1$	$1^2{}_3$	$1^4{}_2$	$2^4{}_4$	$3^2{}_4$
$4^3{}_4$	$3^3{}_2$	$3^1{}_3$	$1^1{}_4$	$1^2{}_2$	$1^4{}_3$	$2^4{}_1$	$3^2{}_1$
$4^2{}_1$	$3^2{}_3$	$3^4{}_2$	$1^4{}_1$	$1^3{}_3$	$3^4{}_4$	$1^1{}_2$	$3^3{}_4$
$1^3{}_1$	$2^3{}_3$	$2^1{}_2$	$4^1{}_1$	$4^2{}_3$	$2^1{}_1$	$4^4{}_2$	$2^2{}_4$
$4^2{}_4$	$3^2{}_2$	$3^4{}_3$	$1^4{}_4$	$1^3{}_2$	$3^4{}_1$	$1^1{}_3$	$3^3{}_1$
$1^3{}_4$	$2^3{}_2$	$1^1{}_3$	$4^1{}_4$	$4^2{}_2$	$2^1{}_4$	$4^4{}_3$	$2^2{}_1$
$1^2{}_1$	$2^2{}_3$	$2^4{}_2$	$4^4{}_1$	$4^3{}_3$	$3^1{}_4$	$4^1{}_2$	$2^3{}_4$
$1^2{}_4$	$2^2{}_2$	$2^4{}_3$	$4^4{}_4$	$4^3{}_2$	$3^1{}_1$	$4^1{}_3$	$2^3{}_1$.

Zur besseren Uebersicht wird auch die perspectivische Zeichnung des entsprechenden Würfels beigegeben; vgl. auch das letzte Kapitel dieses Buches.

den, welche wir ihnen zu geben gewohnt sind. Welch' grosser Fortschritt in dieser unserer Symbolik liegt, erhellt recht deutlich, wenn wir die so wenig übersichtliche Fassung dieser Theoreme bei Laplace vergleichen. Er sagt nämlich [47]: „Si au lieu de combiner d'abord la lettre a avec la lettre b, ensuite ces deux-ci avec la lettre c, et ainsi de suite; c'est-à-dire, si au lieu de combiner les lettres a, b, c, d, e, etc. dans l'ordre a, b, c, d, e, etc. on les eût combinées dans l'ordre a, c, b, d, e, etc. ou a, d, b, c, e, etc. ou a, e, b, c, d, etc. ou etc. je dis qu'on aurait toujours eu la même quantité à la différence des signes près.“

Bis hieher hatte es sich stets nur um die einzelnen Entwickelungsglieder einer Determinante gehandelt; nunmehr kommt es aber auf die Untersuchung dieser letzteren selbst an, und somit machte sich auch die Nothwendigkeit fühlbar, eine selbstständige Benennung für die neuen Gebilde zu wählen. Laplace gebraucht den Terminus „résultante“, und indem er nun in einer solchen zwei Reihen vertauscht, in der neu entstandenen abermals u. s. f., erhält er eine erste, zweite, dritte Resultante, die er bezüglich durch R, R', R'' . . . bezeichnet und von denen er die Sätze

$$R' = -R, \; R'' = -R' = R, \; R''' = -R'' = R' = -R \; \ldots$$

beweist. Auch auf den daraus entspringenden Zusatz, dass eine Resultante mit gleichen Reihen sich annullirt, wird hingewiesen. Bei den nun folgenden Ueberlegungen kann man nur lebhaft bedauern, dass Laplace die symbolische Bezeichnung Vandermonde's (§. 6) nicht gekannt oder doch wenigstens nicht sich zu eigen gemacht hat, indem durch deren Annahme seine Entwickelungen an Durchsichtigkeit und damit auch an Verbreitung sicherlich gewonnen haben würden.

Bei der Behandlung eines linearen Systemes setzt Laplace die bekannten Glieder zunächst gleich Null voraus, reproducirt die Bézout'sche Bedingungsgleichung und zeigt dann [48]), dass die so erhaltene Determinante den gemeinschaftlichen Nenner des im allgemeinen Falle für jede einzelne Unbekannte resultirenden Bruches abgebe, und wie sich aus dem Nenner der Zähler jeweils finden lasse. Freilich lässt der Mangel einer passenden Bezeichnung Laplace nicht zur Aufstellung der allgemeinen Lösung gelangen, wie diess doch bereits Vandermonde in seinem ein Jahr früher der Academie vorgelegten Mémoire gelungen war. Endlich wird auch die Anzahl der Entwickelungsglieder bestimmt, und zwar erscheint es hiebei eigenthümlich, dass Laplace seinen früher gewählten Ausdruck „Variation“ ignorirt und statt desselben das allerdings auch sonst von den Franzosen meistens gebrauchte Wort „dérangement“ adoptirt.

Besassen die bisherigen Untersuchungen Laplace's ersichtlich einen ganz elementaren Charakter und erhoben sie sich in keiner Weise über die Leistungen seiner Vorgänger, so verhält es sich ganz anders mit jenem Material, welches er auf der letzten Seite seiner Abhandlung, leider in sehr aphoristischer Form, zusammengedrängt hat. Er behandelt hier nämlich die Frage, ob und wie eine Determinante sich als ein Aggregat darstellen lasse, dessen einzelne Glieder Produkte aus beliebigen Unterdeterminanten der ursprünglichen Determinante sind. Dabei konnte er sich höchstens auf eine gelegentliche Bemerkung Vandermonde's stützen, welcher beiläufig eine Determinante des sechsten Grades in eine Summe aus Produkten zwei- und vierreihiger Determinanten zerfällt und so den Satz

$$\begin{aligned}\frac{\alpha|\beta|\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|b|c|d|e|f} = {} & \frac{\alpha|\beta}{a|b}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{c|d|e|f} - \frac{\alpha|\beta}{a|c}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{b|d|e|f} + \frac{\alpha|\beta}{a|d}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{b|c|e|f} + \frac{\alpha|\beta}{b|c}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|d|e|f} \\ & - \frac{\alpha|\beta}{b|d}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|c|e|f} + \frac{\alpha|\beta}{b|e}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|c|d|f} + \frac{\alpha|\beta}{c|d}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|b|e|f} - \frac{\alpha|\beta}{c|e}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|b|d|f} + \frac{\alpha|\beta}{c|f}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|b|d|e} \\ & + \frac{\alpha|\beta}{d|e}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|b|c|f} - \frac{\alpha|\beta}{d|f}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|b|c|e} + \frac{\alpha|\beta}{e|f}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|b|c|d} - \frac{\alpha|\beta}{a|e}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{b|c|d|f} \\ & + \frac{\alpha|\beta}{a|f}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{b|c|d|e} - \frac{\alpha|\beta}{b|f}\cdot\frac{\gamma|\delta|\varepsilon|\zeta}{a|c|d|e}\end{aligned}$$

gefunden hatte. Allein diese Zerlegung hatte bei Vandermonde ausgesprochen nur eine rein praktische Bedeutung für die wirkliche Auswerthung von Determinanten, und die Art und Weise seiner Herleitung bestand sicher nur in einem geregelten Tatonniren; damit stimmt auch, wenn er [49]) sagt: „La loi des permutations et des signes est assez manifeste dans ces exemples, pour qu'on en puisse conclure des développemens pareils pour le cas de huit ou dix lettres, etc. du même alphabet."

Die hier angeregten Fragen sucht nun Laplace unter einem allgemeineren Gesichtspunkt zu behandeln, obwohl auch hier der Mangel einer systematischen Bezeichnung *) hindernd in den Weg tritt und dazu nöthigt, auf allgemeingültige Betrachtungen zu verzichten und sich mit Exemplificationen zu begnügen.

Ein solches Beispiel ist folgendes. Für fünf lineare homogene Gleichungen mit fünf Unbekannten soll die Bedingungsgleichung des Zusammenbestehens angegeben werden. „Combinez les termes + abcd — abcd. + etc. relatifs à quatre équation avec la lettre e, en observant 1. de n' admettre que les termes dans lesquels d précède e; 2. de changer de signe lorsque e change de place, et vous aurez

$$+ \text{abcde} - \text{abdce} + \text{abdec} + \text{etc.}$$

donnez l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, etc. et vous aurez

$$+ a^1b^2c^3d^4e^5 - a^1b^2d^3c^4e^5 + a^1b^2d^3e^4c^5 + \text{etc.}$$

ensuite, au lieu de $+ a^1b^2c^3d^4e^5$, écrivez $+ (a^1b^2c^3)(d^4e^5)$; au lieu de $- a^1b^2d^3c^4e^5$, écrivez $- (a^1b^2c^4)(d^3e^5)$, et ainsi de suite etc." [51]). Aehnliche Regeln werden für Determinanten vom sechsten und siebenten Grade gegeben, und zum Schlusse heisst es: „On décomposeroit de la même manière l'équation R en termes composés de facteurs de 4, de 5, etc. dimensions."

Wir müssen hier eine Bemerkung anknüpfen. Man übersieht sofort, dass aus den von Laplace mitgetheilten Zerlegungsformeln sich ein wich-

---

*) Studnička weist mit vollem Rechte darauf hin, dass dieselbe ganz mit derjenigen identisch ist, von welcher später (§. 11) Binet umfassenden Gebrauch gemacht hat und auf die auch wir uns noch in all' den Fällen beziehen, in welchen die quadratische Darstellung nicht geradezu erforderlich erscheint. „Bequem" möchten wir sie jedoch nicht mit ihm [50]) nennen, denn gerade in den Zerlegungssätzen findet das Symbol $\Sigma \pm a_1b_2c_3 \ldots$ doch nur auf Kosten der Allgemeinheit und Uebersichtlichkeit eine umfassendere Anwendung.

tiger Schluss ziehen lässt. Die Aggregate von Produkten aus Determinanten νten und $(n - \nu)$ten Grades ($\nu \geqq 1 \leqq n - 1$), in welche eine $n$reihige Determinante zerfällt, reduciren sich auf ihr Anfangsglied, wenn in dem quadratischen Schema der Elemente ein Rechteck, dessen Eckpunkt in eine der Diagonalreihen fällt, durch Nullen ausgefüllt ist. Dieser Schluss ist naheliegend, allein Laplace hat ihn nicht selbst gemacht, und ob wir deshalb, wenn wir dieses Corollarium ebenfalls als Laplace'schen Determinantensatz aufführen, diess mit voller geschichtlicher Berechtigung thun, dürfte hiernach zu bezweifeln sein — obwohl wir selbst uns im Folgenden der Kürze halber so verhalten haben. Die uns geläufige Formulirung jenes Theoremes ist vielmehr eines der vielen Verdienste Jacobi's [52]).

§. 8. Indem wir von Laplace zu Lagrange übergehen, dessen uns hier interessirende Arbeiten abermals um ein Jahr später fallen, bemerken wir einen beträchtlichen Unterschied in den Ausgangspunkten beider Gelehrten. Während Ersterer im unmittelbaren Anschluss an seine Vorläufer in den Determinanten ein treffliches Hülfsmittel für die Theorie und Praxis der Gleichungen sah und auf möglichste Ausbildung dieses Hülfsmittels hinarbeitete, gelangte Lagrange sozusagen unbewusst zum Determinantenbegriff und erkannte mehrere wichtige Wahrheiten dieser Disciplin am speziellen Falle, ohne doch deren Zusammenhang mit den Gebilden Cramer's hervortreten zu sehen. Es ist ein unverkennbares Zeichen dafür, wie dringend die Erfindung der Determinanten durch den damaligen Stand der Wissenschaft erheischt wurde, dass von den verschiedensten Seiten her auf das Zustandekommen dieser Erfindung direct oder indirect hingestrebt werden musste.

Lagrange betrachtet den Ausdruck

$$\triangle = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - xz'y'' - yx'z'' - zy'x'',$$

welcher offenbar mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

identisch ist, sowie auch die folgenden Ausdrücke

$$\xi = y'z'' - z'y'',\ \eta = z'x'' - x'z'',\ \zeta = x'y'' - x''y',\ \xi' = zy'' - yz'',$$
$$\eta' = xz'' - zx'',\ \zeta' = yx'' - xy'',\ \xi'' = yz' - zy',\ \eta'' = zx' - xz',$$
$$\zeta'' = xy' - yx',$$

welche ersichtlich alle aus der Determinante $\triangle$ überhaupt zu entnehmenden Unterdeterminanten zweiten Grades darstellen.

Alsdann beweist er [53]) nachstehende Identitäten:

$$x\xi + x'\xi' + x''\xi'' = \triangle,\ x\eta + x'\eta' + x''\eta'' = 0,\ x\zeta + x'\zeta' + x''\zeta'' = 0;$$
$$y\xi + y'\xi' + y''\xi'' = 0,\ y\eta + y'\eta' + y''\eta'' = \triangle,\ y\zeta + y'\zeta' + y''\zeta'' = 0;$$
$$z\xi + z'\xi' + z''\xi'' = 0,\ z\eta + z'\eta' + z''\eta'' = 0,\ z\zeta + z'\zeta' + z''\zeta'' = \triangle.$$

Da nun die oben angeführten Determinanten Minoren von $\triangle$ sind, so ist in jenen Relationen eine allerdings nur am Einzelbeispiel erkannte Anticipation des Theoremes enthalten, dass der Ausdruck

$$a_{i,1}\frac{d\triangle}{da_{k,1}} + a_{i,2}\frac{d\triangle}{da_{k,2}} + \ldots + a_{i,n}\frac{d\triangle}{da_{k,n}}$$

den Werth $\triangle$ oder 0 hat, je nachdem $i = k$ oder $\gtrless k$ ist, unter $\triangle$ eine Determinante n ten Grades mit dem allgemeinen Elemente $a_{i,k}$ verstanden.

Auch noch andere wichtige Determinantensätze finden sich in diesem Aufsatze für den Fall $n = 3$ abgeleitet. So beweist Lagrange [54]) durch einfache algebraische Umformungen, dass

$$\Sigma \pm \xi\eta'\zeta'' = \xi\eta'\zeta'' + \eta\zeta'\xi'' + \zeta\xi'\eta'' - \xi\zeta'\eta'' - \eta\xi'\zeta'' - \zeta\eta'\xi''$$
$$= [\Sigma \pm xy'z'']^2;$$

diess würde aber jetzt so auszusprechen sein: Die adjungirte Determinante einer Determinante vom dritten Grade ist das Quadrat dieser letzteren *). — Wir sehen, dass Lagrange den Gebietstheil, auf welchen ihn sein geometrischer Zweck ausschliesslich verwies, so vollkommen wie nur irgend möglich beherrschte. Allein eine Ahnung von der principiellen Bedeutung seiner Leistung scheint ihm nicht vorgeschwebt zu haben. Studnička, der die Prioritätsfragen besonders eingehend untersucht, begründet diese seine mit der unsrigen durchweg harmonirende Ansicht hauptsächlich auch durch den allerdings bemerkenswerthen Umstand [58]), dass ein mit der Determinantentheorie selbst keineswegs vertrauter Mathematiker, Moth, die eigenartige Natur der Lagrange'schen Entwickelungen spontan erfasst und auf dieselben eine neue Systematik der sphärischen Trigonometrie gegründet hat [59]).

Von besonderem Interesse ist es jedenfalls auch, dass Lagrange bereits zwei einfache Determinanten mit einander zu multipliciren verstand oder, besser gesagt, eine Methode anwandte, welche unserem heutigen Multiplikationsverfahren analog ist. Die quadratische Form zweier Veränderlichen

$$py^2 + 2qyz + rz^2$$

wird durch die Substitutionen

$$y = Ms + Nx, \; z = ms + nx$$

in die neue Form

$$Ps^2 + 2Qsx + Rx^2$$

umgewandelt, wobei

$$P = pM^2 + 2qMm + rm^2, \; Q = pMN + q(Mn + Nm) + rmn,$$
$$R = pN^2 + 2qNn + rn^2$$

zu setzen ist [60]). Soll dann die Identität

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p & q \\ q & r \end{vmatrix} \cdot \left(\begin{vmatrix} M & m \\ N & n \end{vmatrix}\right)^2$$

nachgewiesen werden, so hat man den Multiplikationssatz zweimal hinter einander anzuwenden und erhält so successive den rechtsstehenden Ausdruck gleich

---

*) In der nun schon vielfach citirten Schrift Studnička's wird — soviel uns bekannt zum erstenmale — auf das Vorkommen dieser Beziehung in einer, allerdings dem nämlichen Jahrgang entstammenden Arbeit Lagrange's aufmerksam gemacht [55]). Alldort [56]) findet sich auch ein Spezialfall des Multiplikationssatzes. Nicht minder behandelt Lagrange um dieselbe Zeit die Aufgabe, in einem doppelten und dreifachen Integrale zwei resp. drei neue Veränderliche zu substituiren, in einer dem gedanklichen Inhalt nach ganz mit der unsrigen übereinstimmenden Weise [57]). Wir aber erledigen (Kap. VI. §. 3) diese Aufgabe durch Einführung einer sogenannten Funktionaldeterminante.

$$\begin{vmatrix} pM + qm & qM + rm \\ pN + qn & qN + rn \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M & m \\ N & n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} pM^2 + 2qMm + rm^2 & pMN + q(Mn + Nm) + rmn \\ pMN + q(Mn + Nm) + rmn & pN^2 + 2qNn + rn^2 \end{vmatrix},$$

und diesen Werth nimmt auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ Q & R \end{vmatrix}$$

an, sobald man die entsprechenden Werthe in ihr substituirt. — Kundige erkennen in dieser Umsetzung eine Anwendung desjenigen Satzes, welcher die Grundlage der gegenwärtig so wichtig gewordenen „Algebra linearer Transformationen" bildet, dass nämlich bei Anwendung einer solchen die ursprüngliche Form von der transformirten nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante verschieden sei (vgl. Kap. VII. §1).

Es versteht sich wohl von selbst, dass nur der Gedankengang Lagrange's, keineswegs aber seine Darstellungsweise, mit unseren Nachweisungen übereinstimmen; er beschränkt sich auf die üblichen freilich stets mit besonderer Genialität durchschalteten Hülfsmittel der Buchstabenrechnung. Alles in Allem nimmt Lagrange in der Geschichte des Determinantencalculs eine höchst eigenartige Stellung ein, insoferne er dessen Grundsätze, ohne damit etwas Besonderes leisten zu wollen, kannte und auf's Beste anzuwenden verstand.

§. 9. Man war bisher gewohnt, der Schule combinatorischer Analytiker, welche gegen das Ende des achtzehnten Jahrhunderts von Leipzig ausgieng, eine für die Gesammtentwickelung der Mathematik nur wenig bedeutsame wo nicht nachtheilige Rolle zuzuweisen, und es scheint sich auch zur Zeit noch Niemand die Frage vorgelegt zu haben, wie denn diese Männer sich gegen die Erfindungen ihrer grossen Zeitgenossen in Frankreich, also insbesondere auch gegen die Determinanten, verhalten haben. Allein dem unpartheiischen Blicke hätte es nicht entgehen sollen, dass im Grunde diese letzteren Gebilde doch eigentlich nur combinatorische Symbole sind und principiell von den mancherlei den deutschen Combinatorikern eigenthümlichen Formen — Involutionen, combinatorische Integrale etc. — in keiner Weise sich unterscheiden. Praktisch freilich hat die den Franzosen eigene Eleganz und Formgewandtheit ihrer Erfindung einen raschen Vorsprung vor jenen der Deutschen verliehen, so dass sie bald zu einem der mächtigsten Instrumente der modernen Analysis sich auszubilden vermochte, während jenen höchstens eine historische Bedeutung zukommt. Das Folgende wird zeigen, dass unsere Landsleute die Determinanten gar wohl kannten und deren innigen Zusammenhang mit ihren eigenen Bestrebungen richtig zu würdigen im Stande waren.

In erster Linie ist hier Hindenburg selbst, der Begründer und Altmeister jener Richtung, zu nennen. Die Aufforderung, diesem Gegenstande seine Theilnahme zuzuwenden, trat an ihn heran, als er zu dem Erstlingswerke [61]) seines Schülers und Freundes Rüdiger die Vorrede zu schreiben unternahm. In jener Schrift war nämlich die schon oben (§. 3) als Anregerin einer Besserung namhaft gemachte Aufgabe, durch fünf willkürliche Punkte einen Kegelschnitt zu legen, mit all' der Weitläufigkeit behandelt, welche nun einmal der usuelle Mechanismus der Coordinatengeometrie mit sich brachte. Da drückt denn Hindenburg [62]) sein Verwundern darüber aus, dass selbst so tüchtige Mathematiker, wie Maclaurin, Claeraltus (Clairaut) und Segner die Elimination immer noch in der alten schwerfälligen Weise betrieben und von den enormen Verbesserungen, welche dieses Thema durch die Arbeiten*) des grossen Bézout („celeberrimus Bezoldus") erfahren habe, keine Notiz zu nehmen schienen. Mit diesen Leistungen scheint Hindenburg sehr vertraut gewesen zu sein; er rühmt zumal die hohe Allgemeinheit seiner Methoden, die Leichtigkeit, mit welcher sich der Grad der Eliminationsgleichung eruiren lasse, die totale Abwesenheit überflüssiger Hülfsgrössen. Er sehe von allgemeineren Fällen ab und begnüge sich mit der Lösung nachstehendes „Problema. Propositis Aequationibus simplicibus indeterminatis numero n, quarum sint

Incognitae	u,	x,	y,	z,	etc. singularum totidem,
cum Coëfficientibus	a,	b,	c,	d,	etc. in 1 ma aequatione,
„ „	a′,	b′,	c′,	d′,	etc. in 2 da „
„ „	a″,	b″,	c″,	d″,	etc. in 3 tia „
„ „	a‴,	b‴,	c‴,	d‴,	etc. in 4 ta „

et sic porro, pro reliquis et Incognitis et Coëfficientibus omnibus reliquarum aequationum omnium, respective: quaeruntur valores, per Coëfficientes simplices expressi, vel Incognitarum omnium simul, vel singularum successive, sic tamen, ut termini inutiles excludantur" [64]).

Man sieht, dass diese Aufgabe in einer Allgemeinheit gestellt ist, welche selbst uns, die wir doch an Generalisationen vielleicht nur zu sehr gewöhnt sind, für jene Epoche befremdlich erscheinen muss. Denn alle linearen Systeme von der Form

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & \alpha_1, \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & \alpha_n \end{array}$$

umfasst die Vorlage, wenn sie sich auch in einer sehr bescheidenen Weise introducirt. Das Lösungsverfahren muthet uns für's Erste allerdings etwas eigenthümlich an. Hat man zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten aufzulösen, so macht man nach Hindenburg dieselben zuerst homogen und hat dann [65]):

$$ax + by + ct = 0, \quad a'x + b'y + c't = 0.$$

Indem man für x, y, t resp. yt, — xt, xy einsetzt, folgt als „prima linea"

$$ayt - bxt + cxy.$$

„Ex hac prima linea, denuo permutatis successive x cum a′ et y cum b′ et t cum c′, et observatis simul signorum mutationibus ex praescripto, fit linea secunda et ultima

$$ab't - ac'y + bc'x - a'bt + a'cy - b'cx."$$

---

*) Hindenburg hat hier das algebraische Hauptwerk Bézout's im Auge [63]). Der Grund, weshalb wir uns bei obiger Analyse des §. 5 nicht an dieses sondern an eine einzelne Abhandlung hielten, liegt darin, dass letztere das eigentliche Hauptwerk repräsentirt, dessen Resultate, nur vielfach erweitert und exemplificirt, in jene umfassendere Darstellung herübergenommen wurden.

Sehr anschaulich ist, wie man sieht, diese Beschreibung nicht, indess bemerkt man, dass der Verfasser soviel „Linien“ bildet, als Gleichungen vorhanden sind, und aus der letzten dieser Linien folgt dann die betreffende Unbekannte gleich ihrem Faktor, dividirt durch denjenigen der Hülfsgrösse t. Diese Methode verräth eine deutliche Verwandtschaft mit der Determinantenbildung, wie besonders auch die Anwendung auf den Fall homogener Gleichungen lehrt [66]); indessen kommt Hindenburg späterhin auch noch ganz ausdrücklich auf die Cramer'sche Methode zurück. Er drückt dabei die expliciten Werthe der Unbekannten in einer an Vandermonde's Symbolik erinnernden dabei aber doch wieder seinen eigenen Neuerungen entsprechenden Weise aus [67]). Am leichtesten können wir uns einen Einblick in diese Darstellungsweise verschaffen, wenn wir zwei aus nachstehendem Systeme

$$\begin{array}{l} A^1 = Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + W^1 \omega + \ldots, \\ A^2 = Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + W^2 \omega + \ldots \\ \vdots \end{array}$$

berechnete Unbekannte, etwa z und ω, neben einander stellen. Es ist nämlich nach Hindenburg

$$z = \frac{\overset{A,\ Y,\ X,\ W,\ U,\ T,\ \ldots}{\text{Permut}\ (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\ \ldots)}}{\underset{Z,\ Y,\ X,\ W,\ U,\ T\ \ldots}{\text{Permut}\ (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\ \ldots)}},$$

$$\omega = \frac{\overset{Z,\ Y,\ X,\ A,\ U,\ T\ \ldots}{\text{Permut}\ (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\ \ldots)}}{\underset{Z,\ Y,\ X,\ W,\ U,\ T}{\text{Permut}\ (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\ \ldots)}}.$$

Um diese Symbole gegebenen Falles praktisch verwerthen zu können, bedarf es einer eingehenden Unterweisung, und dabei findet dann auch eine Erörterung der Cramer'schen Zeichenregel eine Stelle [68]). Die einzelnen Indexcomplexionen werden aus dem Hauptgliede 1 2 3 . . . n durch successive Vertauschung je zweier Elemente gebildet. Zum Schlusse endlich stellt Hindenburg eine Vergleichung zwischen dieser Cramer-Bézout'schen und seiner eigenen vorhin discutirten Idee an und kommt dabei auf die principielle Analogie beider, nur gebe die letztere Mittel an die Hand, an Stelle der von ihm angegebenen Zwischen-Operationen eine einzige definitive zu setzen. „Patet enim“, sagt er [69]), „per ejusmodi schemata, uti ego exhibui, lineam sic dictam ultimam statim sisti posse rite ordinatam a praecedentibus lineis independenter.“

Aus dem Gesagten dürfte hervorgehen, dass Hindenburg den Gegenstand genau kannte, ohne jedoch das Bedürfniss zu einer Erweiterung der ihm bisher gezogenen Grenzen zu empfinden. Allein was er selbst in dieser Hinsicht vermissen lassen mag, das haben redlich zwei seiner unmittelbarsten Schüler einzubringen gewusst. Wir sprechen zuerst von H. A. Rothe, dem Erfinder der combinatorischen Integrale, der den Determinanten eine selbstständige an Resultaten reiche Abhandlung [70]) gewidmet hat.

Die von ihm angewandte Bezeichnungsweise ist darin von der unserigen verschieden, dass er als Träger der Indices die Zahlen des decadischen

Systemes selbst verwendet und jeder derselben einen „Stellenexponenten" beisetzt, dessen Wesen am Besten ein Beispiel erläutert.

Hat man die Complexion

$$6\ 4\ 3\ 9\ 8\ 10\ 1\ 7\ 2\ 5$$

und sucht man für jedes einzelne Element den Stellenzeiger, so wird abgezählt, wie viele unter den rechts von einer beliebigen Zahl q stehenden Zahlen tiefer in der Zahlenreihe stehen, als q selbst. Ist deren Anzahl p, so hat die Zahl q den Stellenexponenten (p + 1) zu erhalten. Hiernach würde die obige Complexion folgendermassen durch Indices zu charakterisiren sein:

$$6_6\ 4_4\ 3_3\ 9_6\ 8_5\ 10_5\ 1_1\ 7_3\ 2_1\ 5_1.$$

Der Nutzen dieser Bezeichnung wird sofort klar bei Einführung des willkürlichen Satzes [71]): „Jede Permutation der Elemente 1, 2, 3 . . . r, werde mit dem Zeichen + versehen, wenn entweder gar keine, oder eine gerade Menge gerader Zahlen, unter ihren Stellenexponenten vorkommt; mit dem Zeichen — hingegen, wenn die Menge der geraden Zahlen unter den Stellenexponenten ungerade ist." Mit Hülfe dieser Festsetzungen wird dann ein sehr ausführlicher Beweis für Cramer's Zeichenregel erbracht [72]), welche das Vorzeichen von der Anzahl der in den Stellenexponenten vorhandenen Inversionen abhängig macht. Eigenthümlich ist hier auch [73]) die Formulirung des Begriffes „verwandter" Complexionen von der Beschaffenheit, dass wenn bei der einen das Element m an n ter Stelle, dafür bei der anderen das Element n an m ter Stelle steht. Für dieses reciproke Verhalten werden hübsche graphische Versinnlichungen angegeben und dabei wird auch des Faktums gedacht, dass und wann eine Complexion mit sich selbst verwandt sein kann [74]).

Durch diese Vorbereitungen sieht sich dann Rothe [75]) in den Stand gesetzt, das Problem der Auflösung eines Systemes linearer Gleichungen in Angriff zu nehmen. Das aufzulösende System erhält folgende Gestalt *):

$$\begin{array}{l} s^1 = 11x^1 + 12x^2 + 13x^3 + \ldots + 1m\,x^m + \ldots + 1rx^r, \\ s^2 = 21x^1 + 22x^2 + 23x^3 + \ldots + 2m\,x^m + \ldots + 2rx^r, \\ \vdots \\ s^r = r1x^1 + r2x^2 + r3x^3 + \ldots + rm\,x^m + \ldots + rrx^r. \end{array}$$

Der gemeinschaftliche Nenner der hier vorkommenden unbekannten Grössen wird angegeben, natürlich jedoch nur als ausgerechnete, nicht als symbolisch geschriebene Determinante. In den darauf folgenden Betrachtungen weist Rothe [76]) nach, dass man die Entwickelungsglieder ebensogut erhalten könne, wenn man die ersten Indices unverändert lasse und die zweiten permutire, als wenn man bei ungeänderten zweiten alle möglichen Permutationen der ersten bilde. Zu diesem Nachweise verhilft

*) Es ist hier im Anschlusse an die erste Auflage dieses Werkes zu betonen, dass die dort bei Gelegenheit des Eliminationsproblemes angewandte Indexbezeichnung dem Originale nicht entspricht. Diesmal haben wir uns getreuer an dasselbe gehalten. Jene ganz exceptionelle Darstellung durch Indices hat eine rein propädeutische Bedeutung, lediglich zur leichteren Begründung des Inversionensatzes; in den Anwendungen musste selbstverständlich die volle Allgemeinheit wieder hergestellt werden.

unserem Autor auf's Einfachste der neue Begriff der verwandten Permutationen, und wir sehen so, dass ein Fundamentalsatz der Determinantentheorie, für welchen bis in die neueste Zeit (Kap. II. §. 2) eine völlig genügende Begründung vermisst ward, bereits bei den deutschen Combinatorikern eine recht befriedigende Behandlung erfahren hat.

An dieser Stelle treten auch zuerst die Unterdeterminanten auf, indem[77] $\frac{d\triangle}{dpq} = \mathfrak{f}pq$ gesetzt wird. Nachdem auch noch zwei weitere wichtige Theoreme, nämlich die folgenden:

$1n\mathfrak{f}1n + 2n\mathfrak{f}2n + \ldots + rn\mathfrak{f}rn = \triangle, \quad 1n\mathfrak{f}1m + 2n\mathfrak{f}2m + \ldots + rn\mathfrak{f}rm = 0$

abgeleitet worden sind, kann das obige lineare System seine endgültige Auflösung erhalten. Während nämlich bis jetzt blos der gemeinschaftliche Nenner der die Unbekannten darstellenden Brüche angebbar erschien, kann man jetzt folgendes Verfahren einschlagen. Man zerlegt die Determinante des Nenners, wenn x^m gefunden werden soll, nach den Elementen der m ten Verticalreihe in Minoren, so dass

$$N = 1m\mathfrak{f}1m + 2m\mathfrak{f}2m + \ldots + rm\mathfrak{f}rm$$

wird, und setzt dann $im = s^i$. Das Schlussresultat wird sein:

$$x^m = \frac{s^1\mathfrak{f}1m + s^2\mathfrak{f}2m + \ldots + s^n\mathfrak{f}nm + \ldots + s^r\mathfrak{f}rm}{1m\mathfrak{f}1m + 2m\mathfrak{f}2m + \ldots + nm\mathfrak{f}nm + \ldots + rm\mathfrak{f}rm}.$$

Der in der hier skizzirten Weise hergeleitete Lehrsatz wird dann noch durch eine Reihe anderer Betrachtungen verificirt, wobei natürlich auf die Lehre von den ersten Unterdeterminanten vielfach Bezug genommen werden muss.

Auch in einer Abhandlung von Hauber finden sich Anklänge an die Determinantentheorie. Der Verfasser beschäftigt sich mit der Aufgabe, aus einer algebraischen Gleichung die darin vorkommenden Unbekannten wegzuschaffen; er löst dieselbe auf verschiedene Weisen und geräth schliesslich auch auf eine Methode, welche auf dem dritten Anhang des Werkes von Cramer beruht. Aus diesem Anhange — welcher eben die Determinanten enthält — habe er für seinen Zweck ein independentes Verfahren gezogen[78]; „ich habe ferner", fährt er fort, der Cramer'schen Regel im angeführten Anhang, „pour supputer le produit de deux facteurs-seconds quelconques" eine Vervollständigung gegeben, deren sie bedurfte, und habe Gebrauch davon gemacht, um das Fermatische Problem der Wegschaffung der Irrationalitäten aus einer Gleichung wie $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} \pm \sqrt{c} \pm \sqrt{d} \pm \sqrt{e} \pm \sqrt{f} = 0$ aufzulösen." — In einer darauf folgenden zweiten Abhandlung[79]), giebt er an, sich nach jenen Regeln gerichtet zu haben. — Jedenfalls müssen diese Bemühungen Hauber's als eine theilweise Anticipation jener Betrachtungen gelten, welche wir in Kap. IV. jenes Problem endgültig lösen sehen werden.

§. 10. Ganz unabhängig von den Tendenzen der Hindenburg'schen Schule *), sowie auch unabhängig vom Eliminationsproblem (im gewöhn-

---

*) Es muss als eine offene Frage hingestellt werden, ob nicht Gauss aus dem Unterrichte J. F. Pfaff's eine grössere Bekanntschaft und Vertrautheit mit den combinatorisch-analytischen Operationen mit fortnahm, als er selbst nachher zuzugeben geneigt war. Jedenfalls scheint[80]) der Einfluss Pfaff's gewöhnlich unterschätzt zu werden.

lichen Sinne) entstand der Determinantenlehre in Gauss eine in ihrer Art neue schöpferische Kraft. Allein gleich im Anfang dieses Paragraphen wollen und müssen wir Verwahrung dagegen einlegen, als rechneten wir den Genannten zu einem der Begründer *) der betreffenden Theorie. Wo Gauss sich mit Determinanten zu beschäftigen hat, bilden dieselben nur ein Mittel zum Zwecke, welches nach jedesmaligem Gebrauche nicht weiter in Erörterung zu kommen braucht.

Die Gründe, welche ihn veranlassen, sich überhaupt mit solchen Gebilden zu beschäftigen, waren wesentlich zahlentheoretischer Natur. Es stellte sich heraus, dass bei Untersuchung der sogenannten quadratischen Formen gewisse Aggregate von Wichtigkeit sind, welche sich als Spezialfälle der von Bézout, Vandermonde und Laplace in Erwägung gezogenen Resultanten betrachten lassen. Dem Umstande, dass Gauss [84]) diese charakteristischen Ausdrücke als „Determinanten der quadratischen Formen" bezeichnete, verdankt auch die allgemeinere Benennung „Determinante" ihr Dasein **). Was also bei Gauss mit diesem Namen belegt wird, ist durchaus nicht der allgemeinste Fall, sondern lediglich das, was wir „Discriminante" (Kap. IV. §. 9) nennen; für die quadratische Form $(ax^2 + 2bxy + cy^2)$ z. B. ist die Gauss'sche Determinante gleich

$$\begin{vmatrix} b & a \\ c & b \end{vmatrix}.$$

Auch der Ausdruck „adjungirtes System", dessen Determinante Cauchy (vgl. den nächsten Paragraphen) zu besonderer Geltung brachte, rührt von Gauss [85]) her. Schliesslich ist zu erwähnen, dass Gauss den Multiplikationssatz in einem speziellen Falle kannte und zur Anwendung brachte. Und zwar ist dabei bemerkenswerth, dass er diess nicht nur, wie bereits Lagrange (§. 8) bei zweireihigen [86]), sondern auch bei dreireihigen [87]) that, als es sich nämlich darum handelte, lineare Substitutionen bei ternären quadratischen Formen durchzuführen.

All' diese Leistungen sind unbestreitbar und ebensowenig lässt sich ihr intimer Zusammenhang mit den Zielen unserer jetzigen Determinantentheorie leugnen. Und doch halten wir unsere oben aufgestellte Behauptung aufrecht. Das eigentliche Lebenselement dieser Disciplin ist der auf's

---

*) In seiner interessanten und wohlwollenden Recension der ersten Auflage dieses Werkes machte es uns Friedlein [81]) einigermassen zum Vorwurf, dass wir bei Gauss nicht länger verweilten. Als Pendant hiezu mag eine anonyme Besprechung der Reidt'schen „Vorschule" gelten; dort wird gar die ganze Determinantentheorie als ausschliessliches Gauss'sches Geistesprodukt hingestellt [82]). Aus unserer Darstellung wird sich ergeben, wie der eigentliche Sachverhalt angethan ist. Aber gleich an diesem Platze sei an den hierauf bezüglichen Ausspruch Studnička's erinnert. Nachdem derselbe von Lagrange gesprochen, dessen Arbeiten man nicht hinlänglich gewürdigt habe, wendet er sich zu Gauss und beginnt mit den Worten [83]): „Ein in entgegengesetzter Richtung differentes Loos traf die diesbezüglichen Arbeiten des Heros der deutschen Mathematiker, des tiefsinnigen Gauss; er wurde und wird noch hie und da für den Vater der Determinantentheorie angesehen, obwohl seine Verdienste um dieselbe nicht an die eines Lagrange hinanreichen." Begründung siehe oben.

**) Gauss hat übrigens nie die feminine Endung des Wortes gebraucht, ähnlich dem Lateinischen und Französischen, welch' letzteres diese Formen ja ebenfalls unter dem Titel „le déterminant" kennt.

Höchste ausgebildete Formalismus, und gerade um diesen hat sich Gauss niemals besonders gekümmert. Ja es wird nicht schwierig sein, den im Vorigen discutirten Stellen eine grosse Anzahl anderer gegenüberzustellen, welche die Gleichgültigkeit des Verfassers gegen die formale Taktik des Determinantencalculs erkennen lassen. Hieher gehört das Krümmungsmass (Kap. VII. §. 5), die Regel zur Inhaltsbestimmung ebener Vielecke, die Methode zur Auflösung von n linearen Congruenzen mit (n + 1) Unbekannten[88]), welch' letzterer eine lediglich durch strikte Anwendung der Determinanten zu beseitigende Unvollkommenheit anhaftet (Kap. IV. §. 4). Vor Allem anderen glauben wir auf einen gewissen Passus in den posthumen Schriften verweisen zu müssen. Bei Gelegenheit der bekannten Untersuchung über das arithmetisch-geometrische Mittel handelt es sich[89]) um die Berechnung gewisser Constanten aus einem Systeme von Gleichungen des ersten Grades. Der Kunstgriff, der zu diesem Behufe angewandt wird, ist wie immer im hohen Grade elegant, jedoch so versteckt, dass sich nicht leicht ein Einblick in seine Entstehung gewinnen lassen wird; soviel jedoch ist evident, dass derselbe mit der hier doch gewiss besonders naheliegenden Determinanten-Methode nicht das Geringste gemein hat.

§. 11. Es war nun noch ein Schritt zu thun, um die elementare Lehre von den Determinanten zum Abschlusse zu bringen, dieser Schritt musste ein vorwiegend methodischer sein, und ihn gethan zu haben ist das grosse Verdienst Cauchy's. Sein Ausgangspunkt war die Theorie der symmetrischen Funktionen, deren Studium Ruffini auf seinen berühmten Beweis von der Unmöglichkeit einer allgemeinen Auflösung der Gleichungen geführt hatte. Den symmetrischen Funktionen stellten sich als gleichberechtigt die alternirenden an die Seite, welche bei Vertauschung der Variablen lediglich das Zeichen ändern, und zu diesen gehören in gewissem Sinne auch die Determinanten.

Cauchy, der sich bereits früher einmal eingehend mit der für die Cramer'sche Zeichenregel wichtigen Permutationslehre*) beschäftigt hatte[90]), schliesst sich in der Bezeichnung an Gauss an, dessen Untersuchungen ihm überhaupt den ersten Anstoss zu eigenen Forschungen über diesen Gegenstand gegeben zu haben scheinen. Nachdem er nämlich von der Erfindung dieser speziellen „fonction symétrique alternée" gesprochen, fährt er[91]) fort: „M. Gauss s'en est servi avec avantage dans ses Re-

---

*) Die höchst originelle an Rothe's „verwandte" Permutationen anklingende Deduction dieser Zeichenregel beruht auf Folgendem. Hat man die Elementenreihe

a b c d e f . . .,

so setze man jedem Elemente einen Stellenzeiger bei und untersuche, wie oftmal eine Folge dieser Indices mit der darüber stehenden Zahlenfolge eine cyklische Umkehrung liefert. Ist diese Anzahl g für m Elemente, so entspricht einer geraden Differenz (m — g) das positive, einer ungeraden das negative Vorzeichen. So z. B. liefert das Arrangement

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 & 5 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

vier cyklische Zusammenstellungen, nämlich

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix};$$

es ist also m = 7, g = 4, die Differenz = 3, und da diess eine ungerade Zahl, so bekommt die Complexion 3 2 6 5 4 1 7 das Minuszeichen.

cherches analytiques, pour découvrir les propriétés générales des formes du second degré, c'est-à-dire, des polynomes du second degré à deux ou à plusieurs variables; et il a désigné ces mêmes fonctions sous le nom de déterminans. Je conserverai cette dénomination qui fournit un moyen facile d'énoncer les résultats; j'observerai seulement, qu'on donne aussi quelquefois aux fonctions d'ont il s'agit le nom de résultantes à deux ou à plusieurs lettres. Ainsi les deux expressions suivantes, déterminant et résultante, devront être regardées comme synonymes."

Als Basis der ganzen Theorie dient Cauchy das sogenannte Differenzenprodukt, auf welches wir im Eingang des dritten Kapitels zu reden kommen werden. Dasselbe, gewöhnlich in der Form

$$(a_2 - a_1)(a_3 - a_1)\ldots(a_3 - a_2)(a_4 - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1})$$

gegeben, ist bis auf einen Factor gleich der symmetrisch-alternirenden Function $S(\pm a^1{}_1\, a^2{}_2 \ldots a^n_n)$; betrachtet man die Exponenten als Zeiger, so ist jetzt $S(\pm a^1{}_1\, a^2{}_2)$ nicht mehr gleich $a_1 a_2(a_2 - a_1)$, sondern es ist daraus $(S \pm a_{1,1}\, a_{2,2}) = a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}$ geworden. Damit ist denn der Determinantenbegriff in vollster Allgemeinheit begründet.

Cauchy ist der Erste, welcher die durch doppelte Indices unterschiedenen Elemente in Form des für uns vom Begriffe kaum mehr trennbaren quadratischen Schema's anordnet. Damit sind denn auch sofort die Unterbegriffe „suite horizontale" und „suite verticale" gegeben; die Elemente $a_{i,k}$ und $a_{k,i}$ sind „conjugés", die Elemente der ersten Diagonalreihe „termes principaux", das aus denselben gebildete Product „produit principal" [92]). Die Regel zur Vorzeichenbestimmung für die einzelnen Entwickelungsglieder wird nach Cramer gegeben, und daran auch der Satz [93]) geknüpft, dass zwischen zwei Determinanten Gleichheit besteht, wenn die Zeilen der einen mit den Colonnen der anderen der Reihe nach identisch sind.

Im Anschluss daran folgt die Zerlegung einer Determinante in Unterdeterminanten des nächst niederen Grades, und zwar wird der hiezu dienende wichtige Satz in folgender übersichtlicher Gestalt gegeben:

$$\Sigma[\pm a_{n,n}\, \Sigma(\pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n-1,n-1})] = a_{n,n}\, b_{n,n} + a_{n-1,n}\, b_{n-1,n} + \ldots + a_{2,n}\, b_{2,n} + a_{1,n}\, b_{1,n},$$

wo ganz allgemein

$$b_{i,n} = \pm \Sigma \pm (a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{i+1,i}\, a_{i+2,i+1} \ldots a_{n,n-1})$$

zu setzen ist. Die Einführung dieser neuen Funktionen b, deren Anzahl für jeden Werth von i bei constantem zweiten Index ersichtlich ebensogross ist, als der Grad n der ursprünglichen Determinante (deren es also im Ganzen n^2 giebt), veranlasst dann dazu, dieselben wieder zu einer Determinante $\Sigma \pm b_{1,1}\, b_{2,2} \ldots b_{n,n}$ zusammenzustellen. Diese als „déterminant adjoint" bezeichnete Determinante hat dann zur ursprünglichen eine höchst wichtige Relation, welche Cauchy [94]) herleitet. Zum Beweise bedarf er eines gewissen bereits mehrfach erwähnten Theoremes über die Unterdeterminanten, welche er durch nachstehende Verbindung von Identitäten ausdrückt [95]):

$$\begin{array}{llll} D_n = \Sigma^n(a_{1,1}\, b_{1,1}), & 0 = \Sigma^n(a_{1,1}\, b_{1,2}), & \ldots & 0 = \Sigma^n(a_{1,1}\, b_{1,n}), \\ 0 = \Sigma^n(a_{1,2}\, b_{1,1}), & D_n = \Sigma^n(a_{1,2}\, b_{1,2}), & \ldots & 0 = \Sigma^n(a_{1,2}\, b_{1,n}), \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 = \Sigma^n(a_{1,n}\, b_{1,1}), & 0 = \Sigma^n(a_{1,n}\, b_{1,2}), & \ldots & D_n = \Sigma^n(a_{1,n}\, b_{1,n}). \end{array}$$

Von hier wendet sich unser Verfasser zum Eliminationsproblem und reproducirt zunächst die Cramer-Laplace'sche Auflösungsmethode eines Systemes linearer Gleichungen.

Im zweiten Abschnitte seiner Arbeit betrachtet Cauchy ein System „d'équations symétriques", nämlich dieses:

$$\begin{array}{l} \alpha_{1,1}a_{1,1} + \ldots + \alpha_{1,n}a_{1,n} = m_{1,1};\ \alpha_{2,1}a_{1,1} + \ldots + \alpha_{2,n}a_{1,n} = m_{1,2}; \\ \qquad \ldots\ \alpha_{n,1}a_{1,1} + \ldots + \alpha_{n,n}a_{1,n} = m_{1,n}; \\ \alpha_{1,1}a_{2,1} + \ldots + \alpha_{1,n}a_{2,n} = m_{2,1};\ \alpha_{2,1}a_{2,1} + \ldots + \alpha_{2,n}a_{2,n} = m_{2,2}; \\ \qquad \ldots\ \alpha_{n,1}a_{2,1} + \ldots + \alpha_{n,n}a_{2,n} = m_{2,n}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1,1}a_{n,1} + \ldots + \alpha_{1,n}a_{n,n} = m_{n,1};\ \alpha_{2,1}a_{n,1} + \ldots + \alpha_{2,n}a_{n,n} = m_{n,2}; \\ \qquad \ldots\ \alpha_{n,1}a_{n,1} + \ldots + \alpha_{n,n}a_{n,n} = m_{n,n}. \end{array}$$

Aus dem Complex der in diess System eingegangenen Grössen werden die drei Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \equiv D_n; \quad \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \ldots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \ldots & \alpha_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \ldots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix} \equiv \delta_n;$$

$$\begin{vmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \ldots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \ldots & m_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n,1} & m_{n,2} & \ldots & m_{n,n} \end{vmatrix} \equiv M_n$$

gebildet, und von diesen beweist Cauchy [96]), dass

$$M_n = D_n\, \delta_n$$

sei. Hiemit ist denn also das mit Recht berühmte Multiplikationsgesetz der Determinanten gefunden, mit dessen Aufstellung der letzte Schlussstein in das Lehrgebäude unserer Disciplin eingefügt erscheint. — Mit Hülfe dieser Fundamentalwahrheit lässt sich denn auch dem vorhin angeführten Satze bezüglich des Verhaltens einer Determinante zu ihrer adjungirten eine weit allgemeinere Fassung geben: „étant donné un terme quelconque $a_{\mu,\nu}$ du système $(a_{1,n})$, pour obtenir le terme corréspondant du système adjoint du second ordre $(c_{1,n})$, il suffira de multiplier le terme donné par la $(n-2)^{me}$ puissance du déterminant du premier système." Die Quelle dieses Satzes ist in Kap. III. §. 4 angegeben.

Auch in den nun folgenden Abtheilungen bewegt sich Cauchy auf einem Boden, der vor ihm so gut wie gar nicht bebaut worden war.

Setzt man den Numerus Combinationum ohne Wiederholungen aus n Elementen zur p ten Classe $(p = 1, 2, 3 \ldots n-2, n-1)$, d. h. den Ausdruck $\binom{n}{p}, = P$, so kann man, wenn

$$\overset{(p)}{[a_{1,p}]} \equiv \Sigma \pm \overset{(p)}{a_{1,1}}\ \overset{(p)}{a_{2,2}} \ldots \overset{(p)}{a_{p,p}},$$

$$\overset{(p)}{a_{i,i}} = \Sigma \pm a_{i,i}\ a_{i+1,\, i+1} \ldots a_{p,p}$$

gesetzt wird, die Reihe

$$\overset{(1)}{\left[a_{1,\binom{n}{1}}\right]},\ \overset{(2)}{\left[a_{1,\binom{n}{2}}\right]} \cdots \overset{(n-2)}{\left[a_{1,\binom{n}{n-2}}\right]},\ \overset{(n-1)}{\left[a_{1,\binom{n}{n-1}}\right]}$$

successive sich folgender Determinanten herstellen. Die Anzahl dieser „systèmes derivés“ wird (n — 1) sein. Als Verallgemeinerung der oben angeführten Sätze über Unterdeterminanten wird dann [97]) folgendes Gleichungssystem bewiesen:

$$\overset{(p)}{[a_{1,p}]} = \overset{(p)}{a_{1,1}}\overset{(p-n)}{a_{p,p}} + \ldots + \overset{(p)}{a_{p,1}}\overset{(n-p)}{a_{1,p}} \ldots 0 = \overset{(p)}{a_{1,1}}\overset{(n-p)}{a_{p,1}} + \ldots + \overset{(p)}{a_{p,1}}\overset{(n-p)}{a_{1,1}}\ ;$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$0 = \overset{(p)}{a_{1,p}}\overset{(n-p)}{a_{p,p}} + \ldots + \overset{(p)}{a_{p,p}}\overset{(n-p)}{a_{1,p}} \ldots \overset{(p)}{[a_{1,p}]} = \overset{(p)}{a_{1,p}}\overset{(n-p)}{a_{p,1}} + \ldots + \overset{(p)}{a_{p,p}}\overset{(n-p)}{a_{1,1}}\ .$$

Hieraus fliessen die allgemeinen Zerlegungsregeln einer Determinante in Aggregate aus Minoren-Produkten. Der vierte Abschnitt geht in den hier signalisirten Verallgemeinerungen noch weiter und ist, an sich von hoher Bedeutung, für den elementaren Aufbau der Determinantentheorie von geringerem Interesse. —

Uebrigens gebührt Cauchy der Ruhm der erstmaligen Formulirung des Multiplikationstheoremes nicht unbedingt; zu gleicher Zeit ward dasselbe auch von Binet [98]) gefunden, von dessen Bemühungen Ersterer selbst Folgendes berichtet [99]): „M. Binet, dont je me félicite d'être l'ami, avait été conduit aux mêmes résultats par des recherches différentes. De retour à Paris, j'étais occupé de poursuivre mon travail, lorsque j'allai le voir. Il me montra son théorème, qui était semblable au mien. Seulement il désignait sous le nom de résultante ce que j'avais appelé déterminant.“ Ein schönes Zeugniss für die gegenseitige Unparteilichkeit der beiden gleichstrebenden Forscher bietet die gleichlautende Erzählung Binet's: „Ayant eu dernièrement occasion de parler à M. Cauchy, ingénieur des ponts et chaussées, du théorème général que j'ai énoncé ci-dessus, il me dit être parvenu dans des recherches analogues à celles de M. Gauss, à des théorèmes d'analyse qui devaient avoir rapport aux miens. Je m'en suis assuré, en jetant les yeux sur les formules; mais j'ignore si elles ont la même généralité que les miennes: nous y sommes arrivés, je crois, par de vois très-différentes.“

Binet's Studie hatte nicht die ausgesprochene analytische Tendenz, wie diejenige seines Freundes und Nebenbuhlers und so trat sie ihres inneren Werthes ungeachtet gegen jene in den Schatten.

§. 12. In der ersten Auflage glaubten wir mit Cauchy unsere geschichtliche Einleitung abbrechen zu dürfen. Der Umstand jedoch, dass dessen Resultate durchaus nicht so rasch allgemeinen Eingang sich verschafften, als man wohl erwarten möchte, der Umstand ferner, dass selbst zwischen ihm und Jacobi eine an originalen Schöpfungen nicht durchaus arme Periode liegt, hat uns bewogen, eine kurze Fortsetzung anzureihen und die Geschichte der Determinantenlehre — wenn auch freilich nur in ganz groben Umrissen — bis auf die neueste Zeit fortzuführen.

Wissenschaftliche Neuerungen fanden in den ersten Jahrzehnten unseres Säculums durchaus noch nicht die rasche Verbreitung, welche unsere mit Zeitschriften und Repertorien fast überreich gesegnete Epoche als naturgemäss betrachtet. So ging es denn auch mit den Determinanten durchaus nicht so rasch vorwärts, als man auf die geniale Arbeit Cauchy's hin hätte erwarten dürfen. Männer wie Plücker und Möbius behalfen sich, so nahe ihnen auch bei der Tendenz ihrer Arbeiten der Recurs auf jene liegen mochte, noch ohne dieses Hülfsmittel; das treffliche ganz in Lagrange'scher Manier gearbeitete Mémoire Feuerbach's über Tetraëdrometrie [100]), das eigentlich nur ein Exercitium in der Determinantenlehre darstellt, verhält sich den Mechanismen dieser Theorie gegenüber durchaus ablehnend, und der daraus entspringende Nachtheil wird nur durch die vollendete analytische Geschicklichkeit des Autors paralysirt. Wohl aber hat ein anderer deutscher Mathematiker, dessen sämmtliche Leistungen ein originelles und den Modeproblemen abgewandtes Gepräge tragen *), Michael Reiss, nur kurze Zeit nach Cauchy-Binet diese Theorie selbstständig aufgenommen und entschieden gefördert.

Reiss legt eine sogar weit allgemeinere Definition zu Grunde, wenn er auch freilich de facto hauptsächlich die wirklichen Determinanten berücksichtigt. Hat man nämlich r Gruppen von je n Elementen

$$a^\alpha a^\beta a^\gamma \ldots \alpha^\varrho;\ b^\alpha b^\beta b^\gamma \ldots b^\varrho \ldots r^\alpha r^\beta r^\gamma \ldots r^\varrho,$$

so kann man [101]) aus beliebigen derselben eine Function ω bilden und nun „une certaine quantité de fonctions semblables“ herstellen, indem man entweder die symbolischen „Exponenten“ oder aber deren Basen oder endlich beide zusammen ändert. An sich ist der Charakter dieser Funktionen ein ganz willkürlicher; ein praktisches Interesse gewinnt die Sache erst, wenn man $n = r$ setzt und als Funktionen eben diejenigen wählt, welche wir eben mit Cauchy Determinanten nennen. Die Bezeichnung ist noch unvollkommen; es ist [102])

$$(a\ b\ c,\ \overline{1\ 2\ 3}) = a^1b^2c^3 - a^1b^3c^2 - a^2b^1c^3 + a^3b^1c^2 - a^3b^2c^1 + a^2b^3c^1.$$

Der zweite Absatz stellt in einer für uns etwas fremdartigen Formulirung die Zeichenregel fest [102]), im dritten folgen vier „théorèmes fondamentaux“, deren erstes die Zerlegung in Unterdeterminanten ausspricht, das zweite vermittelst der symbolischen Form

$$(a\ b\ c \ldots r,\ \alpha\ \beta\ \gamma \ldots \varrho) = (a\ b\ c \ldots r,\ \overline{\alpha\ \beta\ \gamma \ldots \varrho})$$

die Aequivalenz der ersten und zweiten Indices (in unserem Sinne) darthut. Der Beweis wird durch Induction geführt. Im dritten Satze wird eine der Laplace'schen entsprechende Zerlegung in zweigliedrige Produkte von Unterdeterminanten gelehrt und daraus ein Corollar hergeleitet, welchem wir freilich einen ganz anderen Platz anzuweisen gewohnt sind, das nämlich, dass eine mit zwei gleichen Reihen behaftete Determinante identisch verschwindet, in Zeichen:

$$(a\ b\ c \ldots m \ldots m \ldots r,\ \overline{\alpha\beta\gamma \ldots \varrho}) = 0.$$

Der Beweis ist interessant; man soll einfach in jener obigen Zerlegung als ersten Faktor stets eine aus den gleichen Reihen gebildete

---

*) Reiss war, wo nicht der einzige, so doch entschieden der weitaus bedeutendste Combinatoriker unter den neueren deutschen Mathematikern. Besonders berühmt sind seine Untersuchungen über Spiel-Wahrscheinlichkeit.

zweireihige Determinante ansetzen, deren Nullwerden unmittelbar einleuchtet.

Gewiss wird man dieser Art, die Sache zu betrachten, die Berechtigung nicht versagen können, mag sie uns auch als ein ὕστερον πρότερον erscheinen.

Die nunmehr folgenden Untersuchungen beschreiten ein durchaus neues Gebiet, insoferne sie die Keime zu einem Rechnen mit unvollständigen Determinanten in sich bergen. Ausgehend von der Identität [103])

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,2n} \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,2n} \end{vmatrix} \equiv 0$$

stellt der Autor fest, wie viele und welche aus einer solchen Matrix herausgenommene Determinantenprodukte die algebraische Summe Null ergeben. Ein solches Beispiel [104]) sei in des Originales eigenartiger Terminologie hier reproducirt: „Soient les échelles $\begin{pmatrix} a & b & a & b \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; on trouvera

$$0 = (ab,\overline{\alpha\beta})\,(ab,\overline{\gamma\delta}) - (ab,\overline{\alpha\gamma})\,(ab,\overline{\beta\delta}) + (ab,\overline{\alpha\delta})\,(ab,\overline{\beta\gamma}).\text{“}$$

Bei uns würde diese Wahrheit so zu fassen sein: Der Matrix

$$\begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{Vmatrix}$$

lässt sich die Identität

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

entnehmen.

Am Schlusse seines Artikels spricht sich Reiss dahin aus, dass seine Entwickelungen nicht durchaus neu, sondern zum Theile bereits in Lagrange's tetraëdrometrischen Untersuchungen enthalten seien. Von Cauchy scheint er demnach nichts zu wissen, und überhaupt dürfte seine ganze Behandlungsweise, welche den fertigen Begriff an die Spitze stellt und vom Eliminationsproblem durchaus absieht, hinlänglich die Unabhängigkeit des Verfassers von jedwedem Vorbilde documentiren. Ob die Absicht, diesem ersten Essai bald einen zweiten nachfolgen zu lassen, realisirt worden, ist uns unbekannt; ein gerade zehn Jahre später erschienener Artikel über Coordinatenverwandelung [105]) ist ohne alle Beziehung zu dem früheren gehalten, so nützlich sich dessen Symbolik gerade in diesem concreten Falle ohne Zweifel erwiesen hätte. Jedenfalls aber kann man eine erst 1867 erschienene Schrift des Verfassers [106]) als Fortbildung jener rudimentären Ideen gelten lassen, welche zu dem Feinsten aber auch Schwierigsten gehört, was über die Theorie der Determinanten (besonders der adjungirten) jemals geschrieben worden ist *).

---

*) In dem nämlichen Bande der Quetelet'schen Zeitschrift, welche Reiss'

Reiss' Stellung bringt es mit sich, dass wir ihn nicht auf die grosse Heerstrasse, auf welcher die Wissenschaft fortschritt, sondern auf einen Seitenpfad versetzen mussten. Ganz ähnlich verhält es sich mit einem anderen deutschen Mathematiker, welcher zu einer Zeit, wo sich Jacobi's Gestirn bereits erhoben hatte, die Lehre von den Determinanten in einer den üblichen Anschauungen noch weit fremdartigeren Weise, als es bei Reiss der Fall gewesen, zu einem geschlossenen Ganzen ausbildete. Dieser Mann ist Hermann Grassmann.

Unter dem verschiedenen neuen Stoff, mit welchem dieser tiefsinnige Gelehrte die Wissenschaft bereicherte, nimmt die Formulirung der verschiedenen Multiplikations-Gattungen eine besonders hervorragende Stellung ein. Bei der sogenannten „äusseren" Multiplikation werden aus zwei Gebilden e_1 und e_2 der nullten Stufe (Punktgrössen) neue Gebilde durch die Gleichungen

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \; b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$$

hergeleitet. Das äussere Produkt ab dieser zwei Grössen des ersten Grades hat dann den Werth $\alpha_1\beta_2\,(e_1e_2) + \alpha_2\beta_1\,(e_2e_1)$ [108]) und nimmt verschiedene Werthe an, je nachdem a und b vielfache Punkte oder Strecken bedeuten.

Den hierauf basirenden Auflösungsmodus eines Systemes

$$\begin{array}{ccc} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & \alpha_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & \alpha_n \end{array}$$

führen wir hier nach Schlegel's vereinfachender Darstellung [109]) vor. Diese Gleichungen werden succesive mit $e_1, e_2 \ldots e_n$ multiplicirt und ergeben dann durch Addition, wenn $S a_{i,p}\, e_i = \mathfrak{a}_p$, $S \alpha_i\, e_i = \mathfrak{b}$ gesetzt wird,

$$\mathfrak{a}_1 x_1 + \mathfrak{a}_2 x_2 + \ldots + \mathfrak{a}_n x_n = \mathfrak{b}.$$

Diese Gleichung wird nun mit $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_{p-1}\,\mathfrak{a}_{p+1} \ldots \mathfrak{a}_{n-1}\,\mathfrak{a}_n)$ *) multiplicirt; dann bleibt links lediglich x_p stehen, und man erhält

$$x_p = \frac{(\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{p-1}\,\mathfrak{a}_{p+1} \ldots \mathfrak{a}_n)}{(\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{p-1}\,\mathfrak{a}_p\,\mathfrak{a}_{p+1} \ldots \mathfrak{a}_n)}.$$

---

ersten Aufsatz brachte, befindet sich eine kleine Note von Meyer [107]), welche, an sich von keiner grossen Bedeutung, desshalb einiges Interesse bietet, weil sie die in §. 9 erläuterte erste Methode Hindenburg's — ohne natürlich von dieser selbst Kenntniss zu haben — auf den Fall der Elimination aus zwei algebraischen Gleichungen $\varphi_x = 0$, $\psi_x = 0$ auszudehnen sucht.

*) Um diese Darstellungsart zu übersehen, diene zur Nachricht, dass die Ausdehnungslehre, wenn n Grössen $x_1 \ldots x_n$ aus n Einheiten $e_1 \ldots e_n$ durch das lineare System

$$\begin{array}{ccc} x_1 & = & a_{1,1}\,e_1 + \ldots + a_{1,n}\,e_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_n & = & a_{n,1}\,e_1 + \ldots + a_{n,n}\,e_n \end{array}$$

hergeleitet erscheinen, das äussere Produkt der $x(x_1x_2 \ldots x_n)$ von vornherein mit der Determinante $\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ identificirt [110]).

Wie sich bei Zugrundelegung dieser Anschauungsweise der Multiplikationssatz der Determinanten ausnimmt, kann bei Hankel [111]) nachgesehen werden. —

Als Grassmann die Arena betrat, war bereits Jacobi's fundamentale Abhandlung von den Determinanten erschienen. In rascher Folge erschienen mehrere andere Arbeiten, welche die Anregungen der ersteren auszuführen, die Lehren derselben zu vertiefen bestimmt waren. Auf dieselben in dieser historischen Einleitung näher einzugehen, würden wir für verfehlt halten, da wir ja — besonders im nächstfolgenden und im siebenten Kapitel — geradezu unaufhörlich an dieselben werden erinnert werden. Zu gleicher Zeit fast begann Hesse der geometrischen Seite der Determinantentheorie seine Aufmerksamkeit zuzuwenden und besonders die Krümmungsprobleme als unmittelbarste Emanation jener in ihr wahres Licht zu stellen.

Auch Hesse's Thätigkeit kann noch kaum als der Geschichte angehörig bezeichnet werden; wir verweisen auf Nöther's [112]) Nekrolog und bemerken nur im Allgemeinen, dass des grossen Geometers Meisterschaft in der Durchdringung und Durchgeistigung des algebraischen Formalismus lag. Die Indexbezeichnung hat erst unter seinen Händen die Kraft entwickelt, welche ihr innewohnt; wäre doch ohne sie jene in neuerer Zeit so beliebt gewordene Uebertragung geometrischer Sätze auf sogenannte höhere Mannigfaltigkeiten eine einfache Unmöglichkeit.

Mit Hesse schliesse unsere Uebersicht. Nur bezüglich der didaktische Seite möge noch bemerkt werden, dass der erste Versuch, Cauchy's Erfindungen dem grösseren Publikum mundgerecht zu machen, von Grunert [113]) ausgegangen ist. Später bildete Jacobi's oben genannte Abhandlung für lange Zeit die einzige Quelle des Lernbegierigen, bis dann endlich 1843 in England, 1854 in Italien, 1857 in Deutschland eigentlich systematische Bearbeitungen der neuen Disciplin an's Licht zu treten begannen. Eine möglichst sorgfältige Ueberschau über die in neuester Zeit grossartig angeschwollene Determinanten-Literatur ist diesem Buche als Anhang beigegeben worden. —

Was die Geschichte unseres Gegenstandes anlangt, so ist hervorzuheben, dass Terquem [114]) die Urgeschichte der Determinanten in einem anregend geschriebenen Artikel behandelt hat. Wer sich aber einen kurzen und doch ausreichenden Ueberblick über die Hauptmomente dieses hochwichtigen Stückes mathematischer Entwickelungsgeschichte verschaffen will, der greife zu einem vor Kurzem erschienenen Schriftchen von Studnička [115]), das jedoch mit der vielfach von uns zu Rathe gezogenen umfassenden Monographie desselben Autors nicht verwechselt werden darf.

1) Praetorius, Problema, quod jubet ex quatuor lineis rectis datis quadrilaterum fieri, quod sit in circulo, aliquot modis explicatum, Norimbergae 1598. — 2) Albert Girard, Tables des Sinus, Tangentes et Secantes, A la Haye 1626. Kap, 9. — 3) Kummer in: Guhrauer, Joachim Jungius und sein Zeitalter, Leipzig 1850, S. 297. — 4) Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik, Berlin 1872. S. 216. — 5) Grassmann, Geometrische Analyse, geknüpft an die von Leibnitz erfundene geometrische Charakteristik, Leipzig 1847. — 6) Leibnitz's Werke, ed. Gerhardt, 2. Band, Halle 1864. S. 229. — 7) Ibid S. 234. — 8) Ibid. S. 239. — 9) Ibid. S. 240. — 10) Ibid. S. 241. — 11) Ibid. S. 245. — 12) Ibid. S. 261. — 13) Studnička, Augustin Cauchy als

formaler Begründer der Determinantentheorie, Prag 1876. S. 12. — 14) G. W. Leibnitii Responsio ad D. N. Fatii Duillerii Imputationes, Acta Erud. Lips. 1700. S. 201 ff. — 15) Bossut, Versuch einer allgemeinen Geschichte der Mathematik, deutsch v. Reimer, 2. Band, Hamburg 1804. S. 273. — 16) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1875. S. IV. — 17) Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, A Genève 1750. — 18) Clebsch, Zum Gedächtniss an Julius Plücker, Göttingen 1872. S. 17. — 19) Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Leipzig 1876. S. 136 ff. — 20) Cramer, S. 59. — 21) Ibid. S. 653 ff. — 22) Ibid. S. 658. — 23) Euler, Specimen Algorithmi singularis, Novi Comment. Acad. Petrop. Tom. IX. S. 53. — 24) Ibid. S. 57. — 25) Günther, Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form, Erlangen 1873. S. 57. — 26) Euler, De usu novi Algorithmi in problemate Pelliano solvendo, Novi Comm. Tom. XI. S. 28. ff. — 27) Ibid. S. 46 ff. — 28) Gauss, Disquisitiones arithmeticae, Lipsiae 1801. S. 17. — 29) Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, ed. Dedekind. Braunschweig 1863. S. 49. — 30) Hindenburg, Höchstwichtiger Einfluss der Combinationslehre auf die Analysis; Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen, 1. Theil, Leipzig 1796. S. 276. — 31) Euler, Demonstration sur le nombre de points, où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper, Mém. de l'acad. de Berlin 1748. S. 234 ff. — 32) Id. Nouvelle Méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations, Ibid. 1764. S. 91 ff. — 33) Bézout, Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces équations, Mém. de l'acad. royale de Paris 1764. S. 292. — 34) Ibid. S. 292. — 35) Ibid. S. 294. — 36) Ibid. S. 317 ff. — 37) Hankel, Zarncke's literarisches Centralblatt, Jahrg. 1868. S. 35. — 38) Nägelsbach, Studien zu Fürstenau's neuer Methode der Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coëfficienten, Archiv d. Math. u. Phys. 59. Theil. S. 148. — 39) Vandermonde, Mémoire sur l'élimination, Mém. de l'acad. de Paris 1772, II. partie. S. 516 ff. — 40) Ibid. S. 517. — 41) Ibid. S. 525. — 42) Ibid. S. 532. — 43) Ibid. S. 299. — 44) Studnička, S. 19. — 45) Vandermonde, Remarques sur les problèmes de situation, Mém. de l'acad. de Paris 1771. S. 573. — 46) Laplace, Recherches sur le calcul intégral et sur le système du monde, Ibid. 1772, II. partie. S. 294. — 47) Ibid. S. 296. — 48) Ibid. S. 298. — 49) Vandermonde (Sur l'élimination), S. 525. — 50) Studnička, S. 16. — 51) Laplace, S. 304. — 52) Jacobi, De formatione et proprietatibus determinantium, Journal f. d. reine u. angew. Math. 26. Band. S. 290. — 53) Lagrange, Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires, Nouv. mém. de l'acad. de Berlin 1773. S. 151. — 54) Ibid. S. 153. — 55) Studnička, S. 19 ff. — 56) Lagrange, Nouvelle solution du problème du mouvement de rotation d'un corps de figure quelconque qui n'est animé par aucune force accélératrice, Nouv. mém. de l'acad. de Berlin 1773. S. 85. — 57) Id. Sur l'attraction des Sphéroides élliptiques, Ibid. S. 121 ff. — 58) Studnička, S. 22. — 59) Moth, Die Lagrange'schen Relationen und ihre Anwendungen zu einer neuen Entwickelung aller Gleichungen der sphärischen Trigonometrie, Prag 1829. — 60) Lagrange, Recherches d'arithmétique, Nouv. mém. de l'acad. de Berlin 1773. S. 285. — 61) Hindenburg, Vorrede zu: Rüdigeri Specimen analyticum de lineis curvis secundi ordinis, Lipsiae 1784. — 62) Ibid. S. XV. — 63) Bézout, Théorie générale des Équations Algébriques, Paris 1783. — 64) Hindenburg, S. XVII. — 65) Ibid. S. XIX. — 66) Ibid. S. XXVII. — 67) Ibid. S. XXXVIII. ff. — 68) Ibid. S. XLI. ff. — 69) Ibid. S. XLV. — 70) Rothe, Ueber Permutationen, in Beziehung auf die Stellen der Elemente. Anwendung der daraus abgeleiteten Sätze auf das Eliminationsproblem; Sammlung combin.-anal. Abhandl. 2. Theil, Leipzig 1800. S. 263 ff. — 71) Ibid. S. 266. — 72) Ibid. S. 273 ff. — 73) Ibid. S. 278 ff. — 74) Ibid. S. 281. — 75) Ibid. S. 282 ff. — 76) Ibid. S. 285. — 77) Ibid. S. 289. — 78) Hauber, Auflösung des Elevationsproblems für Gleichungen, ibid. S. 246. — 79) Id. Auflösung einer andern, die Wegschaffung der Irrationalitäten aus Gleichungen, betreffenden Aufgabe, ibid. S. 249 ff. — 80) Archiv d. Math. u. Phys. 13. Theil, Liter. Ber. S. 702. — 81) Friedlein, Blätter f. d. bayr. Gymnasial- u. Realschulwesen, 11. Band. S. 186. — 82) Pädagog. Archiv (v. Krumme), Jahrg. 1875. — 83) Studnička, S. 25. — 84) Gauss, Disquis. arithmet. S. 301 ff. — 85) Ibid. S. 427. — 86) Ibid. S. 170. — 87) Ibid. S. 304. — 88) Ibid. S. 27. — 89) Carl Friedrich Gauss' Werke, 3. Band, Göttingen 1866. S. 367 ff. — 90) Cauchy, Mémoire sur le nombre des Valeurs qu'une Fonction peut acquérir, lorsqu'on y permute de toutes les manières possibles les quantités qu'elle renferme, Journ. de l'école polytechn. Cahier 17. S. 1 ff. — 91) Cauchy, Mémoire sur les fonctions qui ne peuvent obtenir que deux valeurs égales et de signes contraires par suite des transpositions apérées entre les variables qu'elles renferment, Ibid. S. 51. — 92) Ibid. S. 54. — 93) Ibid. S. 59. — 94) Ibid. S. 64. — 95) Ibid. S. 67. — 96) Ibid. S. 78. — 97) Ibid. S. 101. — 98) Binet, Mémoire sur un système de formules analytiques, et leur application à des considérations géométriques, ibid. Cahier 16. S. 280 ff. — 99) Cauchy, S. 111. — 100) Feuerbach, Grundriss zu analytischen Untersuchungen der dreiseitigen Pyramide, Nürnberg 1827. — 101) Reiss, Mémoire sur les fonctions semblables de plusieurs groupes d'un certain nombre de fonctions ou élémens, Corresp. mathém. et phys. Tome V. S. 201. — 102) Ibid. S. 203 ff. — 103) Ibid. S. 209. — 104) Ibid. S. 213. — 105) Id. Mémoire sur les neuf angles que forment réciproquement deux systèmes d'axes rectangulaires, ibid. Tome XI. S. 119 ff. — 106) Id. Beiträge zur Theorie der Determinanten, Leipzig 1867. — 107) Meyer, Sur l'élimination d'une inconnue entre deux équations, Corresp. math. et phys. Tome V. S. 100 ff. — 108) Schlegel, System der Raumlehre, 1. Theil, Leipzig 1872. S. 15 ff. — 109) Id. System der Raumlehre, 2. Theil, Leipzig 1875. S. 138. — 110) Ibid. S. 122. — 111) Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1867. S. 121 ff. — 112) Nöther, Otto Hesse, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 20. Jahrg. Lit.-hist. Abtheil. S. 77 ff. — 113) Grunert, Math. Wörterbuch, Suppl. 2. Abtheil. Leipzig 1836. S. 51 ff. — 114) Terquem, Origine premier des déterminants, Nouv. ann. de mathém. Bull. de Bibl. Tome XIX. S. 27 ff. — 115) Studnička, Ueber die Entwickelung des Determinantenbegriffs, Prag 1876.

Kapitel II.

Allgemeine Eigenschaften der Determinanten.

§. 1. Definition. Es sei eine Reihe von Elementen gegeben, deren Reihenfolge in einer bestimmten Weise festgesetzt ist, so dass von niedrigeren und höheren Elementen in jener ersten Reihenfolge gesprochen werden kann. Hat man es mit Zahlen zu thun, so gilt als massgebend das dekadische System, handelt es sich um Buchstaben, die alphabetische Anordnung. Aus jener ersten Verbindung oder Complexion der Elemente werde auf irgend eine Art eine zweite gebildet; alsdann definiren wir, indem wir ein Fortschreitungsgesetz von links nach rechts stipuliren:

Steht in der abgeleiteten Complexion ein höheres Element links von einem niedrigeren, so sagt man, beide Elemente bilden eine Inversion (Dérangement).

Man erkennt sofort, dass nur bei einer einzigen Anordnung der Elemente gar keine Inversion vorhanden ist; wir wollen jene Complexion die normale nennen.

Bei fünf Elementen sind z. B. bezüglich

1 2 3 4 5, h i k l m

die einzigen normalen Complexionen.

Zählt man sämmtliche in einer vorgelegten Complexion auftretende Inversionen ab, so erhält man entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl; hiernach unterscheidet man paare und unpaare Complexionen. So ist also die normale Complexion eine paare, weil sie 0 Inversionen aufweist. Die Complexion 5 3 9 8 1 2 hat 10 Inversionen, nämlich 53, 51, 52, 31, 32, 98, 91, 92, 81, 82, ist also paar, wogegen die Complexion b e a g m c, in welcher die 5 Inversionen ba, ea, ec, gc, mc vorkommen, als unpaar zu bezeichnen ist.

Hat man nun ein System von n^2 durch doppelte Indices charakterisirten Elementen

$$\begin{array}{cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \; . \; . \; . & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \; . \; . \; . & a_{2,n} \\ . \; . & . \; . & . \; . & . \; . \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} \; . \; . \; . & a_{n,n}, \end{array}$$

und bildet aus denselben sämmtliche irgend zulässige Produkte zu n Faktoren, ohne dass in einem solchen Produkte mehr als Ein einer bestimmten Horizontal- oder Vertikalreihe angehöriges Element vorkäme, versieht man ferner nach einer sofort näher anzugebenden Regel diese Produkte zum Theil mit dem positiven, zum Theil mit dem negativen Vorzeichen und vereinigt sämmtliche so erhaltene Ausdrücke zu einer algebraischen Summe, so ist diese letztere die Determinante des obigen Systemes von n^2 Elementen. Um das Vorzeichen eines einzelnen Gliedes zu erhalten, ordne man dessen Faktoren so, dass die ersten Indices in der Ordnung der natürlichen Zahlen auf einander folgen, und untersuche dann, wie viele Inversionen die Reihe der zweiten Indices darbietet. Ist deren Anzahl gerade, resp. Null, so ist das Zeichen positiv zu nehmen, im entgegengesetzten Falle negativ.

Eine Determinante von n^2 Elementen hat den Grad (französisch l'ordre) n; aus einem unmittelbar einleuchtenden Grunde wird sie aber auch häufig als n reihig bezeichnet.

Bezüglich der älteren Bezeichnungen einer Determinante ist das erste Kapitel nachzusehen. Handelt es sich blos um Charakterisirung des betreffenden Ausdruckes, so schreibt man auch in neuester Zeit die Determinante vielfach in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix} \equiv \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n};$$

will man aber mit Determinanten operiren, so hält man sich an die von Cauchy (Kap. I. §. 11) eingeführte und von Hesse wieder aufgenommene Schreibweise

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Die beiden Elementreihen

$$\begin{matrix} a_{1,1} & a_{2,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{n-1,\,n-1} & a_{n,n}, \\ a_{1,n} & a_{2,\,n-1} & a_{3,\,n-2} & \ldots & a_{n-1,\,2} & a_{n,\,1} \end{matrix}$$

mögen als erste und zweite Diagonalreihe aufgeführt werden *); ein aus den Elementen der ersteren gebildetes Produkt, dessen zweite Indices sonach die Normalcomplexion repräsentiren, heisst Anfangsglied der Determinante. Alle Elemente, welche in ihrem ersten Index übereinstimmen, gehören derselben Horizontalreihe oder Zeile, alle diejenigen, welche den nämlichen zweiten Index besitzen, gehören derselben Vertikalreihe oder Colonne an.

Als Beispiele für die wirliche Ausrechnung von Determinanten mögen folgende dienen:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{1,2}\, a_{2,1}.$$

Die Determinante vierten Grades

*) Die hier gegebene Unterscheidung der beiden Diagonalen rührt von dem französischen Mathematiker Sauveur her [1]), welcher sich bei seinen Untersuchungen über die sogenannten magischen Quadrate erstmalig dieser Terminologie bediente. Bezüglich der anderen Kunstwörter siehe die Nachweisungen des ersten Kapitels.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$

ergiebt, zunächst noch ohne Vorzeichen, nachstehende Glieder:

$a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ a_{4,4},\ a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,4}\ a_{4,3},\ a_{1,1}\ a_{2,3}\ a_{3,2}\ a_{4,4},\ a_{1,1}\ a_{2,3}\ a_{3,4}\ a_{4,2},$

$a_{1,1}\ a_{2,4}\ a_{3,2}\ a_{4,3},\ a_{1,1}\ a_{2,4}\ a_{3,3}\ a_{4,2},\ a_{1,2}\ a_{2,1}\ a_{3,3}\ a_{4,4},\ a_{1,2}\ a_{2,1}\ a_{3,4}\ a_{4,3},$

$a_{1,2}\ a_{2,3}\ a_{3,1}\ a_{4,4},\ a_{1,2}\ a_{2,3}\ a_{3,4}\ a_{4,1},\ a_{1,2}\ a_{2,4}\ a_{3,1}\ a_{4,3},\ a_{1,2}\ a_{2,4}\ a_{3,3}\ a_{4,1},$

$a_{1,3}\ a_{2,1}\ a_{3,2}\ a_{4,4},\ a_{1,3}\ a_{2,1}\ a_{3,4}\ a_{4,2},\ a_{1,3}\ a_{2,2}\ a_{3,1}\ a_{4,4},\ a_{1,3}\ a_{2,2}\ a_{3,4}\ a_{4,1},$

$a_{1,3}\ a_{2,4}\ a_{3,1}\ a_{4,2},\ a_{1,3}\ a_{2,4}\ a_{3,2}\ a_{4,1},\ a_{1,4}\ a_{2,1}\ a_{3,2}\ a_{4,3},\ a_{1,4}\ a_{2,1}\ a_{3,3}\ a_{4,2},$

$a_{1,4}\ a_{2,2}\ a_{3,1}\ a_{4,3},\ a_{1,4}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ a_{4,1},\ a_{1,4}\ a_{2,3}\ a_{3,1}\ a_{4,2},\ a_{1,4}\ a_{2,3}\ a_{3,2}\ a_{4,1}.$

Sämmtliche Complexionen sind hier bereits in den ersten Indices normal, so dass man nur an den zweiten die Abzählung noch vorzunehmen braucht. So erhalten wir, indem wir die Anzahl der Inversionen mit einer Ziffer bezeichnen, für die einzelnen Complexionen folgende Werthe: 1—0, 2—1, 3—1, 4—2, 5—2, 6—3, 7—1, 8—2, 9—2, 10—3, 11—3, 12—4, 13—2, 14—3, 15—3, 16—4, 17—4, 18—5, 19—3, 20—4, 21—4, 22—5, 23—5, 24—6.

Es erhalten demnach von den oben hingeschriebenen Gliedern das 1., 4., 5., 8., 9., 12., 13., 16., 17., 20., 21., 24. das positive, hingegen das 2., 3., 6., 7., 10., 11., 14., 15., 18., 19., 22., 23. das negative Zeichen.

Sind die in der Determinante vorkommenden Elemente nicht durch doppelte Indices unterschieden, sondern durch Buchstaben und angehängte Indices, so hat man in jedem Einzelprodukte die Faktoren alphabetisch zu ordnen und hiernächst auf die Indices die nämliche Regel anzuwenden. So ergiebt die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

folgende Glieder: $a_1b_2c_3$, $a_1b_3c_2$, $a_2b_1c_3$, $a_2b_3c_1$, $a_3b_1c_2$, $a_3b_2c_1$. Nehmen wir hier an den Indices die erforderliche Abzählung vor, so hat 1 2 3 — 0, 1 3 2 — 1, 2 1 3 — 1, 2 3 1 — 2, 3 1 2 — 2 und 3 2 1 — 3 Inversionen; unsere Determinante ist also gleich dem Aggregate

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1.$$

Wie viel Entwickelungsglieder eine ausgerechnete Determinante besitzt, bestimmt sich leicht folgendermassen. Bleibt die Reihenfolge der ersten Indices die gleiche, so kann man soviele Glieder durch Umsetzung der zweiten Indices herstellen, als der Numerus Permutationum von n durchaus verschiedenen Elementen angiebt. Diese Zahl ist aber bekanntlich $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n$, und so gross ist auch die Gliederzahl einer n reihigen Determinante.

Durch genauere Betrachtung der bisher durchgeführten Beispiele überzeugt man sich induktorisch, dass je $\frac{n!}{2}$ Gliedern ein bestimmtes Vorzeichen zukommt *); indess kann man den Beweis hiefür auch allgemeiner führen.

*) Dieses interessanten Faktums, welches doch keineswegs direkt aus der ge-

Es sei die Thatsache erhärtet für ein beliebiges n; die Entwickelungsglieder seien angeschrieben. Setzt man jedem an letzter Stelle die Zahl $(n+1)$ bei, so kann keine Inversion eintreten; setzt man die Zahl $(n+1)$ zwischen die letzte und vorletzte Stelle, so tritt für jede Einzelcomplexion der ersten Serie eine neue Inversion hinzu, ein Gleiches gilt für die so eben gebildete Serie, wenn $(n+1)$ noch um einen Platz weiter nach links geschoben wird, u. s. f. Die Anzahl der in einer Serie vereinigten Glieder ist gerade, nämlich gleich n!, paare und unpaare Complexionen kommen in gleicher Anzahl in jeder derselben vor, und so giebt es denn im Ganzen

$$\frac{n!}{2}(n+1) = \frac{(n+1)!}{2} \text{ paare und unpaare}$$

Complexionen. Nun gilt der Satz für $n = 2$, also auch für $n = 3, 4 \ldots$.

Beispiel. Nachstehend sind für $(n + 1 = 4)$ Elemente die 4 Serien von je $n! = 6$ Elementen wirklich gebildet; die links neben jeder Complexion stehende Zahl giebt die Anzahl der Inversionen an.

0.	1 2 3 4	1.	1 2 4 3	2.	1 4 2 3	3.	4 1 2 3
1.	1 3 2 4	2.	1 3 4 2	3.	1 4 3 2	4.	4 1 3 2
1.	2 1 3 4	2.	2 1 4 3	3.	2 4 1 3	4.	4 2 1 3
2.	2 3 1 4	3.	2 3 4 1	4.	2 4 3 1	5.	4 2 3 1
2.	3 1 2 4	3.	3 1 4 2	4.	3 4 1 2	5.	4 3 1 2
3.	3 2 1 4	4.	3 2 4 1	5.	3 4 2 1	6.	4 3 2 1

12 Gliedern kommt sonach das +, 12 Gliedern das — Zeichen zu.

Auf diese letzteren Betrachtungen werden wir in §. 12 nochmals von einer ganz anderen Seite her geführt werden.

§. 2. Wir haben im Vorigen vorausgesetzt, dass die ersten Indices stets eine dem Zahlensystem entsprechend geordnete Reihe bildeten, während die zweiten permutirt wurden; wir können jedoch mit Baltzer [4]) auch sagen:

Die Glieder einer Determinante können aus dem Anfangsgliede auch dadurch abgeleitet werden, dass man die ersten Indices permutirt, während die zweiten ihre (normale) Anordnung beibehalten.

Den Beweis dieses Fundamentalsatzes können wir nach Becker [5]) in dieser Weise führen: Es ist bloß zu zeigen, dass die Zahl der Inversionen in der nunmehr von den ersten Indices gebildeten Complexion ebenso gross ist, wie bei der ersten Anordnung diejenige in der Complexion der zweiten Indices, und hiezu genügt wiederum der Nachweis, dass diese beiden Complexionen entweder beide paare oder beide unpaare Permutationen der normalen Complexion $1\ 2\ 3 \ldots n$ sind. Werden nun zwei Faktoren von $a_{1,k_1}\ a_{2,k_2} \ldots a_{n,k_n}$ vertauscht, so vertauscht man hiedurch zwei zweite und zwei erste Indices; ist zuletzt die Reihe $k_1 k_2 \ldots k_n$ der zweiten Indices in $1\ 2 \ldots n$ übergegangen, so hat sich die Reihe der ersten In-

---

wöhnlichen und auch von uns adoptirten Definition der Determinante hervorgeht, gedenken die allerwenigsten Darstellungen; ein eigentlicher Beweis für dasselbe dürfte nur bei Baltzer [2]) wenigstens angedeutet sein. Diekmann zieht den Satz mit in die Begriffsbestimmung hinein [3]), was von Seite der systematischen Anordnung kaum gebilligt werden kann, indem dadurch die Frage nach der möglichen Anzahl paarer und unpaarer Complexionen präjudicirt wird.

dices in eine ganz neue Complexion umgesetzt, welche aber natürlich der nämlichen Kategorie angehört. Da nun durch blosse Faktorenvertauschung aus einem Gliede der durch Permutation der zweiten Indices erhaltenen Determinante das ihm gleiche in jener Determinante geworden ist, welche man durch Permutation der ersten Indices gewann, so ist für je zwei solche Glieder die Gleichheit der Zeichen, damit aber auch die Identität der beiden Determinanten-Entwickelungen dargethan.

Hieraus folgt demnach der Satz:

Der Werth einer Determinante bleibt ungeändert, wenn man alle Colonnen zu entsprechenden Zeilen macht, und umgekehrt; es ist

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{n,1} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ a_{1,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

§. 3. Hülfssatz. Vertauscht man in einer (Buchstaben oder Zahlen enthaltenden) Complexion zwei Elemente mit einander, so ändert sich die Anzahl der Inversionen um eine ungerade Zahl.

Gesetzt, wir hätten die Complexion

$$a\ b\ P\ m\ n\ p\ Q\ r\ s\ t \dots,$$

und vertauschten in derselben P mit Q. Für die Gruppen ab und rst wird offenbar durch diese Vertauschung die Anzahl der vorhandenen Inversionen nicht geändert; wohl aber für die zwischenliegende Gruppe mnp. Hat nun diese Gruppe q Glieder, von denen $\alpha < P$ *) und $\beta > Q$ sind, und ist auch $P < Q$, so hat die Theilcomplexion PmnpQ $(\alpha + \beta)$ Inversionen. Da ferner α Glieder $< P$, $\beta > Q$, so sind $(q - \alpha) > P$ und $(q - \beta) < Q$.

Somit hat unser Ausdruck ... QmnpP ...

$$q - \alpha + q - \beta + 1 = 2q - (\alpha + \beta) + 1$$

Inversionen, indem ja Q mit P selbst eine solche bildet. Bezeichnen γ und δ bezüglich die Anzahl der Inversionen innerhalb der Gruppen

$$\dots ab \text{ und } rst \dots,$$

so sind jetzt im Ganzen $(\gamma + \delta - (\alpha + \beta) + 2q + 1)$ vorhanden; vorher gab es $(\gamma + \delta + \alpha + \beta)$, so dass durch die angegebene Operation die Anzahl der Inversionen sich um

$$2q - 2(\alpha + \beta) + 1,$$

also in der That um eine ungerade Zahl, verändert hat.

Vertauscht man z. B. in der Complexion 3 5 1 2 8 6 4 7 den Term 5 mit 8, so erhält man 3 8 1 2 5 6 4 7. Die ursprüngliche Complexion weist 9, die abgeleitete 10 Inversionen auf, die Differenz ist 1.

Aehnlich dem hier vorgetragenen ist der von Mollweide [6]) für

---

*) Diese Schreibweise ist, wie man sieht, übertragen. Das Symbol $r > 5$ bedeutet nur, dass in der Normalcomplexion r seinen Platz rechts von 5 hat, und gleichermassen wird $5 < r$ zu setzen sein. Hat man es mit Zahlwerthen zu thun, so drückt die symbolische Schreibweise natürlich auch das faktisch bestehende Grössenverhältniss aus. Gleiche Elemente können selbstverständlich niemals auftreten.

dieses ursprünglich von Cramer (Kap. I. §. 3) herrührende Theorem gegebene Beweis.

§. 4. Halten wir den Begriff paarer und unpaarer Complexionen fest, wie er in §. 1 definirt ward, so können wir im Anschluss an das vorstehend bewiesene Lemma behaupten:

Je nachdem eine Complexion aus der normalen durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Indexvertauschungen hervorgegangen ist, ist sie paar oder unpaar.

Hievon machen wir sofort eine folgenreiche Anwendung. Wir vertauschen im Anfangsgliede einer Determinante $\triangle$ von irgend zwei darin vorkommenden Elementen die ersten Indices, während wir die zweiten ungeändert lassen, so dass etwa $a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{p,p} \ldots a_{s,s} \ldots a_{n,n}$ in die neue Form $a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{s,p} \ldots a_{p,s} \ldots a_{n,n}$ übergeht, und denken uns dann den zweiten Ausdruck als erste Diagonalreihe einer neuen Determinante $\triangle'$, deren erstes Glied demnach mit dem Minuszeichen versehen ist. Alle übrigen Glieder von $\triangle$ kommen nun auch in $\triangle'$, nur mit dem entgegengesetzten Zeichen, vor; denn während sie aus dem Anfangsgliede von $\triangle$ bezüglich durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Indexvertauschungen hervorgegangen waren, wurden sie aus dem Anfangsgliede von $\triangle'$ resp. durch eine ungerade oder gerade Anzahl von Umsetzungen gebildet. Es ist demgemäss $\triangle = -\triangle'$.

Die oben angegebene Vertauschung zweier ersten Indices der Diagonalreihe ist aber offenbar identisch mit der Vertauschung zweier Zeilen; hätten wir statt der ersten Indices die zweiten genommen, so würden an die Stelle der Zeilen die Colonnen treten, so dass also ganz allgemein der Satz gewonnen ist:

Werden zwei Zeilen oder Colonnen mit einander vertauscht, so bleibt der absolute Werth der Determinante derselbe, nur das Vorzeichen ändert sich; ist $\triangle$ der ursprüngliche, $\triangle'$ jener Werth der Determinante, welchen sie nach p solchen Parallelverschiebungen angenommen hat, so ist $\triangle = (-1)^p\, \triangle'$.

Man hat also

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_4 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_4 & b_3 \\ c_2 & c_1 & c_4 & c_3 \\ d_2 & d_1 & d_4 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Unmittelbar aus diesem Satze ergiebt sich auch der folgende:

Sind in einer Determinante zwei Zeilen oder Colonnen einander bezüglich gleich, so ist die Determinante identisch gleich Null.

Denn ist diess für die Determinante $\triangle$ der Fall, so ist nach dem Vorigen sofort

$$\triangle = -\triangle,\ \triangle = 0.$$

So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ m & n & p \end{vmatrix} = anp - anp - bmp + bmp + cmn - cmn = 0.$$

§. 5. Es ist stets

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,n} & a_{1,n-1} & \dots & a_{1,2} & a_{1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,n} & a_{n,n-1} & \dots & a_{n,2} & a_{n,1} \end{vmatrix}.$$

Um zu dieser Wahrheit zu gelangen, untersuchen wir, wie der Werth einer Determinante durch successive Vertauschung zweier Reihen sich ändert. Indem wir der Kürze halber die zweite der oben (§. 1) angeführten Bezeichnungsweisen wählen, erhalten wir

$$\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\, a_{4,4} \dots a_{n,n} = (-1)^1\, \Sigma \pm a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,3}\, a_{4,4} \dots a_{n,n}$$
$$= (-1)^2\, \Sigma \pm a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,1}\, a_{4,4} \dots a_{n,n} \dots$$

Lassen wir nun, indem wir etwa $\Sigma \pm a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,4}\, a_{4,1} \dots a_{n,n}$ als $(n-1)$te Umformung der ursprünglichen Determinante ansehen, $a_{4,1}$ stehen und versetzen zwei andere Terme, so bekommen wir

$$\Sigma \pm a_{1,2}\, a_{2,3}\, a_{3,4}\, a_{4,1} \dots a_{n,n} = (-1)^{n-2}\, \Sigma \pm a_{1,3}\, a_{2,4}\, a_{3,2}\, a_{4,1} \dots a_{n,n}$$
$$= (-1)^{n-3}\, \Sigma \pm a_{1,4}\, a_{2,3}\, a_{3,2}\, a_{4,1} \dots a_{n,n} \dots$$

Allgemein ist dann offenbar

$$\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\, a_{4,4} \dots a_{n,n}$$
$$= (-1)^{n-1+n-2+\dots+2+1} \cdot \Sigma \pm a_{1,n}\, a_{2,n-1}\, a_{3,n-2}\, a_{4,n-3} \dots a_{n,1}.$$

Der Exponent von (-1) stellt sich uns als arithmetische Progression dar; summiren wir dieselbe, so folgt

$$\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\, a_{4,4} \dots a_{n,n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, \Sigma \pm a_{1,n}\, a_{2,n-1}\, a_{3,n-2}\, a_{4,n-3} \dots a_{n,1}.$$

Wir haben bis jetzt nur die Colonnen vertauscht; natürlich können wir dasselbe mit den Zeilen thun und haben dann

$$\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\, a_{4,4} \dots a_{n,n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\, \Sigma \pm a_{n,1}\, a_{n-1,2}\, a_{n-2,3}\, a_{n-3,4} \dots a_{1,n}.$$

Indem wir schliesslich beide Vertauschungen gleichzeitig vornehmen, ergiebt sich

$$\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\, a_{4,4} \dots a_{n,n} = (-1)^{\frac{2n(n-1)}{2}}\, \Sigma \pm a_{n,n}\, a_{n-1,n-1}\, a_{n-2,n-2}\, a_{n-3,n-3} \dots a_{1,1},$$

oder, da $n(n-1)$ unter allen Umständen gerade sein muss,

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{n,n} & \dots & a_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n} & \dots & a_{1,1} \end{vmatrix},$$

ein Satz, welcher besonders für die Lehre von den Kettenbrüchen von grosser Wichtigkeit ist.

§. 6. Da von jeder Zeile und Colonne nur je ein Element in einem Gliede der ausgerechneten Determinante vorkommen darf, so tritt für eine Determinante $n$ten Grades das Element $a_{i,k}$ offenbar $(n-1)$ mal als Faktor bei der Ausrechnung auf. Denken wir uns also sämmtliche Elemente, welche mit $a_{i,k}$ in der nämlichen Zeile und Colonne stehen, durch Nullen ersetzt, so verschwinden sämmtliche Entwickelungsglieder mit Ausnahme jener Summe von $(n-1)$ Summanden, deren jeder $a_{i,k}$ zum Faktor hat. Ziehen wir diesen heraus, so sind die ersten Indices der übrig gebliebenen Complexionen noch immer in der normalen Anordnung geblieben, während für die zweiten Indices alle denkbaren Permutationen stattfinden;

das Aggregat lässt sich somit als Determinante vom $(n - 1)$ten Grade schreiben, und wir haben den Lehrsatz:

Verschwinden in einer Zeile oder Colonne sämmtliche Elemente bis auf eines, so reducirt sich die Determinante auf ein Produkt aus jenem Element in eine Determinante vom nächstniederen Grade.

Die übrig bleibende Determinante lässt sich, abgesehen vom Vorzeichen, sehr leicht bestimmen, indem man einfach die übrigen $(n - 1)^2$ Elemente in Form eines quadratischen Schema's anordnet. Um das Vorzeichen zu finden, hat man nur zu untersuchen, welches Vorzeichen das Anfangsglied der neuen Determinante, multiplicirt mit jenem Faktor, bei Ausrechnung der ursprünglichen erhalten haben würde. So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ 0 & 0 & 0 & a_{3,4} & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{vmatrix} = -a_{3,4} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,5} \end{vmatrix},$$

denn das Glied $a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,4}\, a_{4,3}\, a_{5,5}$ enthält in der Complexion seiner zweiten Indices eine Inversion $(4 - 3)$. Ein bequemeres Mittel zur Vorzeichenbestimmung werden wir sehr bald kennen lernen.

Als Zusatz zu dem so eben diskutirten Satze möge noch folgender angemerkt werden:

In einer Determinante $n$ten Grades seien für $p(<n)$ Diagonalelemente alle auf einer Seite der nämlichen Reihe (Zeile oder Colonne) befindlichen Elemente durch Nullen ersetzt; alsdann reducirt sich die Determinante auf das Produkt jener p Diagonalelemente multiplicirt mit einer $(n - p)$reihigen Determinante. Verschwinden speziell alle auf einer Seite einer Diagonalreihe stehenden Elemente, so ist die Determinante gleich dem betreffenden Diagonalgliede. Mit dem Vorzeichen ist es wie oben zu halten.

Beispiele.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{1,7} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} & a_{2,7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3,5} & 0 & a_{3,7} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} & 0 & a_{4,7} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} & 0 & a_{5,7} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & 0 & a_{6,7} \\ a_{7,1} & a_{7,2} & a_{7,3} & a_{7,4} & a_{7,5} & 0 & a_{7,7} \end{vmatrix} = -a_{1,7}a_{2,6}a_{3,5} \begin{vmatrix} a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} \\ a_{7,1} & a_{7,2} & a_{7,3} & a_{7,4} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & m & n & p \\ 0 & b & q & r \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = abcd.$$

Von diesem Umstand kann man Gebrauch machen, wenn es sich darum handelt, einer Determinante ohne Aenderung ihres Werthes einen höheren Grad zu ertheilen.

So sind z. B. die um drei Grade verschiedenen Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & 0 \\ 0 & \beta_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & 0 \\ 0 & \beta_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 \\ 0 & \beta_4 & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & 0 \\ \gamma_6 & \gamma_5 & \gamma_4 & \gamma_3 & \gamma_2 & \gamma_1 & 1 \end{vmatrix}$$

einander gleich, und zwar sind dabei die Grössen α, β, γ natürlich ganz willkürlich gewählt worden. Allgemein würde diess so auszusprechen sein:

Will man eine Determinante bei unverändertem Werthe auf einen um q Einheiten höheren Grad erheben, so setze man in der Verlängerung der Diagonalreihe q Einser an und fülle den so entstandenen Gnomon auf der einen Seite durch Nullen, auf der anderen durch beliebige Grössen aus. Handelt es sich um die zweite Diagonalreihe, so ist noch auf das Vorzeichen Bedacht zu nehmen.

Man nennt eine solche Operation gewöhnlich das **Rändern** *) der Determinante.

Principiell ebenso möglich jedoch weniger einfach ausführbar ist die Herabsetzung einer Determinante auf einen niedrigeren Grad; einen Weg zur Lösung einer sehr allgemeinen dahin zielenden Aufgabe hat unlängst Baltzer [7]) angegeben, jedoch werden dazu tiefere erst aus dem dritten Kapitel zu erlangende Kenntnisse vorausgesetzt.

§. 7. In jedem Gliede einer entwickelten Determinante kommt von jeder Zeile bezüglich Colonne nur ein einziges Element vor; denken wir uns demnach sämmtliche Elemente ein und derselben Reihe mit der gleichen beliebigen Zahl multiplicirt, so können wir dieselbe als gemeinschaftlichen Faktor heraussetzen. Diess liefert den Lehrsatz:

Multiplicirt man in der Determinante $\triangle$ alle Elemente einer Zeile oder Colonne mit demseben Faktor a, so ist das Resultat gleich $a\triangle$.

So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & aa_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & ab_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & ac_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & ad_3 & d_4 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^{2m-2}} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a^m b_1 & a^m b_2 & a^m b_3 & a^m b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ a^{m-1} d_1 & a^{m-1} d_2 & a^{m-1} d_3 & a^{m-1} d_4 \end{vmatrix}.$$

§. 8. Wir wollen annehmen, sämmtliche Elemente einer Reihe der Determinante $\triangle$ seien algebraische Summen von je q Summanden, so zwar, dass die Anordnung der Vorzeichen für sämmtliche Elemente die gleiche ist; sollte diess nicht schon an sich der Fall sein, so erreicht man es, indem man für $-$ a und $+$ a resp. $+ (-a)$ und $- (-a)$ schreibt. Entwickeln wir hierauf die n reihige Determinante, so stellt sich jedes einzelne Glied als ein Produkt aus $(n-1)$ einfachen Faktoren in eine Summe von q Gliedern dar, und zwar ist dieser Faktor für je $(n-1)!$ Glieder der gleiche. Multiplicirt man mit dem in eine Klammer geschlossenen zusammengesetzten Faktor aus, so kann man das resultirende Aggregat offenbar wieder in Form von q Determinanten des n ten Grades anschreiben. Dieses Faktum lässt sich folgendermassen als Theorem geben:

Ist jedes Element einer Reihe eine algebraische Summe aus q Summanden, so kann man die Determinante in eine Summe von q Determinanten des gleichen Grades zerfällen,

---

*) Der Begriff desRänderns erleidet in der neueren Algebra allerdings einige nicht unbeträchtliche Modificationen, von welchem im sechsten Kapitel gelegentlich die Rede sein wird; vorläufig jedoch wird sich ein Bedürfniss zur Erweiterung der gegebenen Definition nicht fühlbar machen.

die in allen Theilen mit der früheren übereinstimmen und nur an Stelle der zusammengesetzten Reihe je einen der q Summanden enthalten.

So ist z. B.

$$\begin{vmatrix}\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1\\ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2\\ \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\alpha_1 & \delta_1 & \varepsilon_1\\ \alpha_2 & \delta_2 & \varepsilon_2\\ \alpha_2 & \delta_3 & \varepsilon_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\beta_1 & \delta_1 & \varepsilon_1\\ \beta_2 & \delta_2 & \varepsilon_2\\ \beta_3 & \delta_3 & \varepsilon_3\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1\\ \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2\\ \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}x_1-x_2 & y_1+y_2 & z_1-z_2 & u_1+u_2\\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3\\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4\\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1 & u_1\\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3\\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4\\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}-x_2 & y_2 & -z_2 & u_2\\ x_3 & y_3 & z_3 & u_3\\ x_4 & y_4 & z_4 & u_4\\ x_5 & y_5 & z_5 & u_5\end{vmatrix}.$$

Die wiederholte Anwendung des hier beschriebenen Verfahrens lässt uns den weiteren Satz erkennen:

Ist die r_a te, r_b te ... r_t te Zeile oder Colonne einer Determinante bezüglich aus s_1, s_2 ... s_l Summanden zusammengesetzt, so kann dieselbe als eine Summe von $s_1 \,.\, s_2 \ldots s_l$ Determinanten dargestellt werden, deren jede dann kein zusammengesetztes Element mehr enthält.

Man findet auf diese Weise

$$\begin{vmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2\\ c_1+c_2 & d_1-d_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_2 & b_1\\ c_2 & d_1\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_1 & b_2\\ c_1 & -d_2\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & -d_2\end{vmatrix}.$$

Die hier vorgetragenen Sätze, welche man in ihrer Gesammtheit das Additionstheorem der Determinanten zu nennen pflegt, sind von hoher praktischer Wichtigkeit, zumal, wenn man noch das unmittelbar daraus hervorgehende Corollar hinzunimmt:

Eine Determinante bleibt unverändert, wenn man zu einer Reihe beliebig viele Reihen der nämlichen Kategorie hinzuaddirt, nachdem man dieselben vorher mit beliebigen Zahlen multiplicirt hat.

Denn betrachten wir die Determinante

$$\begin{vmatrix}a_{1,1} \ldots a_{1,k} \pm q_1 a_{1,l} \pm q_2 a_{1,m} + \ldots a_{1,l} \ldots a_{1,m} \ldots a_{1,n}\\ a_{2,1} \ldots a_{2,k} \pm q_1 a_{2,l} \pm q_2 a_{2,m} + \ldots a_{2,l} \ldots a_{2,m} \ldots a_{2,n}\\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\ a_{n,1} \ldots a_{n,k} \pm q_1 a_{n,l} \pm q_2 a_{n,m} + \ldots a_{n,l} \ldots a_{n,m} \ldots a_{n,n}\end{vmatrix},$$

so ist dieselbe, dem eben Bewiesenen gemäss, und mit Rücksicht auf §. 7, gleich folgender Summe:

$$\begin{vmatrix}a_{1,1} \ldots a_{1,k} \ldots a_{1,l} \ldots a_{1,m} \ldots a_{1,n}\\ a_{2,1} \ldots a_{2,k} \ldots a_{2,l} \ldots a_{2,m} \ldots a_{2,n}\\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\ a_{n,1} \ldots a_{n,k} \ldots a_{n,l} \ldots a_{n,m} \ldots a_{n,n}\end{vmatrix} \pm q_1 \begin{vmatrix}a_{1,1} \ldots a_{1,l} \ldots a_{1,l} \ldots a_{1,m} \ldots a_{1,n}\\ a_{2,1} \ldots a_{2,l} \ldots a_{2,l} \ldots a_{2,m} \ldots a_{2,n}\\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\ a_{n,1} \ldots a_{n,l} \ldots a_{n,l} \ldots a_{n,m} \ldots a_{n,n}\end{vmatrix}$$

$$\pm q_2 \begin{vmatrix}a_{1,1} \ldots a_{1,m} \ldots a_{1,l} \ldots a_{1,m} \ldots a_{1,n}\\ a_{2,1} \ldots a_{2,m} \ldots a_{2,l} \ldots a_{2,m} \ldots a_{2,n}\\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\ a_{n,1} \ldots a_{n,m} \ldots a_{n,l} \ldots a_{n,m} \ldots a_{n,n}\end{vmatrix} \pm \ldots$$

Da nun jede dieser Determinanten mit Ausnahme der ersten zwei gleiche Reihen enthält, so verschwinden dieselben nach §. 4 sämmtlich identisch, und es bleibt nur die Determinante $\Sigma' \pm a_{1,1} \ldots a_{k,k} \ldots a_{l,l} \ldots a_{m,m} \ldots a_{n,n}$ übrig.

Diese Beziehung erleichtert häufig die numerische Auswerthung einer Determinante mit numerisch gegebenen Elementen, ohne dass diess ganze Zahlen zu sein brauchten.

Es soll etwa der Werth der Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 4 \\ 2 & 21 & 11 \\ 3 & 6\frac{1}{5} & 2 \end{vmatrix}$$

berechnet werden. Dann multipliciren wir für's Erste die erste Colonne mit $\frac{1}{3}$, die zweite mit $\frac{1}{2}$ und ziehen die letztere von der ersteren ab; diess giebt

$$6.\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 4 \\ -\frac{59}{6} & \frac{21}{2} & 11 \\ -\frac{21}{10} & \frac{31}{10} & 2 \end{vmatrix}.$$

Indem wir die dritte Colonne von der mit 24 multiplicirten zweiten abziehen, folgt

$$\frac{1}{4}.\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ -\frac{59}{6} & 241 & 11 \\ -\frac{21}{10} & \frac{362}{5} & 2 \end{vmatrix}.$$

Schliesslich addiren wir die mit $\frac{59}{6}$ multiplicirte zweite Colonne zu der mit 241 multiplicirten ersten; das Resultat ist

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{241}\cdot\frac{6}{59}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & \frac{59.241}{6} & 11 \\ \frac{6175}{30} & \frac{21358}{30} & 2 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante reducirt sich nach §. 6 auf ihr zweites Diagonalglied, so dass der Endwerth gleich

$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{241}\cdot\frac{6}{59}\cdot 4\,.\,\frac{59\,.\,241}{6}\cdot\frac{6175}{30} = -\,205\frac{5}{6}$$

wird. — Für eine Determinante von so geringem Grade giebt es allerdings, wie wir demnächst sehen werden, kürzere Ausrechnungsmethoden; indess tritt der Nutzen der so eben erörterten in Spezialfällen um so eklatanter hervor.

§. 9. Im Anschluss hieran möge noch auf einen Satz hingewiesen werden, dessen Bedeutung für die Elemente der Determinantentheorie erst kürzlich von Studnička [8]) hervorgehoben wurde. Derselbe lautet:

Eine Determinante verschwindet identisch, wenn das

Verhältniss der Differenzen gleichgestellter Elemente von zwei Paaren ihrer Zeilen oder Colonnen constant ist.

Es sei also in der Determinante $\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{i,i} \ldots a_{l,l} \ldots a_{p,p} \ldots a_{q,q} \ldots a_{n,n}$ der Quotient

$$\frac{a_{k,i} - a_{k,l}}{a_{k,p} - a_{k,q}} = C \,.\; (k \geqq 1, \leqq n).$$

Dann ist mit Rücksicht auf den vorhergehenden Paragraphen sofort die obige Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,i} - a_{1,l} & \ldots & a_{1,l} & \ldots & a_{1,p} - a_{1,q} & \ldots & a_{1,q} & \ldots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k,1} & \ldots & a_{k,i} - a_{k,l} & \ldots & a_{k,l} & \ldots & a_{k,p} - a_{k,q} & \ldots & a_{k,q} & \ldots & a_{k,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,i} - a_{n,l} & \ldots & a_{n,l} & \ldots & a_{n,p} - a_{n,q} & \ldots & a_{n,q} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

und hieraus der getroffenen Festsetzung gemäss,

$$\triangle = \frac{1}{C} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,i} - a_{1,l} & \ldots & a_{1,l} & \ldots & a_{1,i} - a_{1,l} & \ldots & a_{1,q} & \ldots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k,1} & \ldots & a_{k,i} - a_{k,l} & \ldots & a_{k,l} & \ldots & a_{k,i} - a_{k,l} & \ldots & a_{k,q} & \ldots & a_{k,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,i} - a_{n,l} & \ldots & a_{n,l} & \ldots & a_{n,i} - a_{n,l} & \ldots & a_{n,q} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

In dieser Determinante sind zwei Colonnen gleich, sie wird also nach §. 4 identisch gleich Null.

So annullirt sich beispielsweise die Determinante

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 4 & 2 \\ 19 & 11 & 8 & 4 \\ 13 & 9 & 5 & 3 \\ 20 & 14 & 21 & 18 \end{vmatrix},$$

weil $\frac{8-4}{4-2} = \frac{19-11}{8-4} = \frac{13-9}{5-3} = \frac{20-14}{21-18} = 2$ ist.

§. 10. Wir haben in §. 1 eine independente zur wirklichen Auswerthung einer Determinante dienende Methode kennen gelernt, welche zwar sicher, jedoch bei Determinanten höherer Grade nur mühsam, zum Ziele führt, insoferne sie sich auf die Abzählung der Index-Inversionen stützt. Diese Methode wird jedoch völlig unpraktikabel, sobald die Elemente der vorgelegten Determinante nicht mehr durch Indices von einander unterschieden, sondern auf irgend eine andere Weise bezeichnet sind. Es muss demnach auf ein anderes Verfahren zur Entwickelung einer Determinante gedacht werden, und ein solches bietet sich uns ganz naturgemäss dar, sobald wir die Resultate des §. 5 zu Grunde legen. Dieses Verfahren ist im Gegensatze zu jenem ein recurrirendes und bietet, wie dies ja fast stets der Fall, für die Praxis jenem allgemeineren gegenüber nicht unbeträchtliche Vortheile.

Wir sahen, dass jede Determinante gleich gesetzt werden kann einem Produkte aus einem beliebigen Elemente in eine Determinante des nächst niederen Grades, woferne nämlich alle mit jenem Elemente in der nämlichen Reihe befindlichen Elemente durch Nullen ersetzt waren. Für eine Determinante vom nten Grade ergiebt dann die nmalige successive Anwendung jenes Satzes sofort den folgenden:

Die Entwickelungsglieder einer Determinante werden gefunden, wenn man sämmtliche Elemente einer Zeile oder Colonne je mit einer nach den Regeln des §. 6 gebildeten Determinante vom nächst niederen Grade multiplicirt und jede solche Determinante in entsprechender Weise weiter behandelt. Man sagt dann, die ursprüngliche Determinante sei nach den Elementen der qten Zeile oder Colonne zerlegt.

Zur Vorzeichenbestimmung gelangen wir auf folgende einfache Weise. Es ist klar, dass zwei aufeinanderfolgende Elemente der nämlichen Reihe bei dieser Zerlegung nicht das nämliche Vorzeichen erhalten können, denn wenn wir die Anfangsglieder betrachten, so hat bei festbleibenden ersten oder zweiten Indices in den zweiten bezüglich ersten nur eine einzige Inversion stattgefunden, das Zeichen musste also wechseln. Daraus fliesst aber unmittelbar Folgendes:

Um bei der angegebenen Zerlegung das Vorzeichen von $a_{i,k}$ zu erhalten, untersuche man, ob $(i + k)$ eine gerade oder ungerade Zahl ist; im ersten Falle hat man $a_{i,k}$ positiv, im zweiten negativ zu nehmen. Selbstverständlich ist dabei die Determinante in ihrer Normalform $\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ vorausgesetzt; sollte diess gegebenen Falles nicht zutreffen, so ist die betreffende Determinante einer Vergleichsdeterminante $\Sigma \pm a_{I,I} \ldots a_{N,N}$ gegenüberzustellen *).

Diese einfache bisher anscheinend nicht scharf genug hervorgehobene Regel ist es, deren wir oben (§. 6) bereits Erwähnung thaten.

Zerlegen wir auf diese Weise die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der zweiten Colonne, so erhalten wir, da $(1 + 2)$ ebenso wie $(3 + 2)$ ungerade ist,

$$\Delta = - a_{1,2} \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + a_{2,2} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} - a_{3,2} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix}.$$

Diese zweireihigen Determinanten sollen nun resp. nach den Elementen der ersten Colonne, zweiten und ersten Zeile weiter zerlegt werden, und zu diesem Ende vergleichen wir jede mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{I,I} & a_{I,II} \\ a_{II,I} & a_{II,II} \end{vmatrix}.$$

Statt $a_{2,1}$ steht dann $a_{I,I}$, statt $a_{3,1}$ steht $a_{II,I}$, statt $a_{1,1}$ ebenfalls $a_{I,I}$, und da $(I + I)$ gerade, $(II + I)$ ungerade ist, so erhalten $a_{2,1}$ und $a_{1,1}$ das $+$, hingegen $a_{3,1}$ das $-$ Zeichen, und man findet so

$$\Delta = - a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{3,3} + a_{1,2}\, a_{3,1}\, a_{2,3} - a_{2,2}\, a_{3,1}\, a_{1,3} + a_{2,2}\, a_{3,3}\, a_{1,1} - a_{3,2}\, a_{1,1}\, a_{2,3} + a_{3,2}\, a_{1,3}\, a_{2,1}.$$

---

*) An einem sehr speziellen Falle wurde diese Regel von Schüler[9]) bemerkt und deren Verwendbarkeit hervorgehoben. Allgemein ward dieselbe wohl zuerst in diesem Buche ausgesprochen, und alsdann in einer eigens diesem Gegenstande gewidmeten Note[10]) darauf hingewiesen, wie leicht eine blosse Abzählung über das Zeichen entscheidet. Die Sache ist zu einfach, als dass es nöthig wäre, mehr über die sofort in die Augen springende praktische Vorschrift zu sagen; sehr gefällig ist u. a. die von H. Müller[11]) ihr ertheilte Form.

§. 11. In diesem Paragraphen soll ein anderes instruktives Rechnungsbeispiel gelehrt werden, für welches auch die Bezeichnung durch doppelte Indices nicht in Anwendung kommt, während allerdings auch eine Berücksichtigung der Vorzeichen nicht erforderlich ist. Bedeutende Mathematiker, wie u. a. auch Gauss[12]), haben sich mit der Aufgabe beschäftigt, auf einem gegebenen Schachbrett von 64 Feldern 8 Damen (Königinnen) so zu postiren, dass keine die andere anzugreifen im Stande ist; es handelt sich darum, nach bestimmten Regeln alle möglichen Lösungen der Aufgabe anzugeben, ohne eine derselben wegzulassen. Dieses Problem lässt sich nun mit Hülfe der Determinanten höchst einfach lösen, und es bietet diese Behandlungsweise noch den grossen Vortheil, ohne Weiteres für jedes beliebige Schachbrett von n^2 Feldern verwendbar zu sein.

Bekanntlich setzt sich die Wirkungsweise einer Dame aus derjenigen des Läufers und Thurmes zusammen. Um nun alle denkbaren Stellungen zu finden, welche n Thürme, ohne sich gegenseitig zu stören, auf dem Brette einnehmen können, müssen wir n Plätze heraussuchen, von denen keine zwei in der nämlichen Horizontal- oder Vertikalreihe liegen, d. h. denken wir uns das Brett als das quadratische Schema einer Determinante vom nten Grade und entwickeln dieselbe, so stellt jedes einzelne Glied dieser Entwickelung eine solche mögliche Position dar, und es kommt nur noch darauf an, aus diesen Gliedern alle diejenigen auszusondern, bei welchen auch keine Läufer-Einwirkung mehr stattfinden kann. Zu diesem Zwecke bilden wir folgende n reihige Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_0 & c_1 & e_2 & g_3 & \cdots & \\ b_1 & a_2 & c_3 & e_4 & \cdots & \\ d_2 & b_3 & a_4 & c_5 & \cdots & \\ f_3 & d_4 & b_5 & a_6 & \cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & c_{2n-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & b_{2n-3} & a_{2n-2} \end{vmatrix},$$

deren Bildungsgesetz sofort klar ist, rechnen dieselbe aus und schliessen endlich sämmtliche Glieder aus, welche entweder zwei gleiche Buchstaben oder zwei gleiche Indices besitzen. Die übrig bleibenden Glieder sind dann als die möglichen Lösungen der Aufgabe zu betrachten, und es ist sofort ersichtlich, dass deren Anzahl hiemit wirklich erschöpft ist.

Wir wollen das Problem, der Kürze halber, nur für ein Schachbrett von 16 Feldern auflösen. Zerlegen wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & c_1 & e_2 & g_3 \\ b_1 & a_2 & c_3 & e_4 \\ d_2 & b_3 & a_4 & c_5 \\ f_3 & d_4 & b_5 & a_6 \end{vmatrix}$$

nach den Elementen der zweiten Horizontalreihe, so erhalten wir, indem wir die hier natürlich gleichgültigen Vorzeichen weglassen, folgendes Resultat:

$$b_1 \begin{vmatrix} c_1 & e_2 & g_3 \\ b_3 & a_4 & c_5 \\ d_4 & b_5 & a_6 \end{vmatrix}, \quad a_2 \begin{vmatrix} a_0 & e_2 & g_3 \\ d_2 & a_4 & c_5 \\ f_3 & b_5 & a_6 \end{vmatrix}, \quad c_3 \begin{vmatrix} a_0 & c_1 & g_3 \\ d_2 & b_3 & c_5 \\ f_3 & d_4 & a_6 \end{vmatrix}, \quad e_4 \begin{vmatrix} a_0 & c_1 & e_2 \\ d_2 & b_3 & a_4 \\ f_3 & d_4 & b_5 \end{vmatrix}.$$

Die erste und zweite dieser vier Determinanten wollen wir nun nach den Elementen der dritten Zeile, die dritte und vierte dagegen nach den Elementen der dritten und zweiten Colonne zerlegen; diess giebt

$$b_1d_4\begin{vmatrix} e_2 & g_3 \\ a_4 & c_5 \end{vmatrix},\ b_1b_5\begin{vmatrix} c_1 & g_3 \\ b_3 & c_5 \end{vmatrix},\ b_1a_6\begin{vmatrix} c_1 & e_2 \\ b_3 & a_4 \end{vmatrix},\ a_2f_3\begin{vmatrix} e_2 & g_3 \\ a_4 & c_5 \end{vmatrix},\ a_2b_5\begin{vmatrix} a_0 & g_3 \\ d_2 & c_5 \end{vmatrix},\ a_2a_6\begin{vmatrix} a_0 & e_2 \\ d_2 & a_4 \end{vmatrix},$$

$$c_3g_3\begin{vmatrix} d_2 & b_3 \\ f_3 & d_4 \end{vmatrix},\ c_3c_5\begin{vmatrix} a_0 & c_1 \\ f_3 & d_4 \end{vmatrix},\ c_3a_6\begin{vmatrix} a_0 & c_1 \\ d_2 & b_3 \end{vmatrix},\ e_4c_1\begin{vmatrix} d_2 & a_4 \\ f_3 & b_5 \end{vmatrix},\ e_4b_3\begin{vmatrix} a_0 & e_2 \\ f_3 & b_5 \end{vmatrix},\ e_4d_4\begin{vmatrix} a_0 & e_2 \\ d_2 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Die abermalige Entwickelung dieser zweireihigen Determinanten liefert endlich folgende Glieder:

$b_1d_4e_2c_5$, $(b_1d_4g_3a_4)$, $(b_1b_5c_1c_5)$, $(b_1b_5g_3b_3)$, $(b_1a_6c_1a_4)$, $(b_1a_6e_2b_3)$, $(a_2f_3e_2c_5)$, $(a_2f_3g_3a_4)$, $(a_2b_5a_0c_5)$, $(a_2b_5g_3d_2)$, $(a_2a_6a_0a_4)$, $(a_2a_6e_2d_2)$, $(c_3g_3d_2d_4)$, $(c_3g_3b_3f_3)$, $(c_3c_5a_0d_4)$, $(c_3c_5c_1f_3)$, $(c_3a_6a_0b_3)$, $(c_3a_6c_1d_2)$, $e_4c_1d_2b_5$, $(e_4c_1a_4f_3)$, $(e_4b_3a_0b_5)$, $(e_4b_3e_2f_3)$, $(e_4d_4a_0a_4)$, $(e_4d_4e_2d_2)$.

Schliessen wir, wie hier geschehen, alle diejenigen Glieder in Klammern ein, welche zwei Buchstaben oder zwei Indices gleich haben, so bleiben blos die beiden Glieder $b_1d_2e_4c_5$, $e_4c_1d_2b_5$ von Klammern frei, und diess sind somit, wie man auch direkt verificiren kann, die beiden einzigen Lösungen, deren das Problem in diesem Falle fähig ist.

Es könnte scheinen, als erfordere sonach die allgemeine Lösung die jeweilige Berechnung von n! Gliedern, unter denen alsdann die Ausscheidung vorzunehmen wäre. Strenge genommen verhält es sich allerdings so, indess hat Glaisher unlängst gezeigt [13]), wie man durch einen einfachen Kunstgriff die Berechnungsarbeit auf ein Minimum reduciren und ohne grosse Mühe selbst für das gewöhnliche Schachbrett von 64 Feldern die Anzahl (92) der möglichen Fälle eruiren könne.

§. 12. Indem wir eine Determinante des nten Grades nach den Elementen einer bestimmten Reihe zerlegten, zerfiel dieselbe in eine algebraische Summe von n Determinanten des (n — 1)ten Grades, deren jede eines der betreffenden Elemente zum Faktor hatte. Jede solche Determinante, welche demnach aus der ursprünglichen durch das Herausheben von $(n - 1)^2$ Elementen entstand, nennen wir eine erste Unterdeterminante oder partiale Determinante (Minor determinant) jener ersteren.

Wie man die einem gegebenen Elemente entsprechende erste Determinante findet, haben wir bereits gesehen. Dieses Verfahren kann jedoch nach Jacobi [14]) auch aus einem anderen Gesichtspunkte aufgefasst werden *). Die Determinante $\triangle$ ist in Bezug auf jedes einzelne ihrer Elemente offenbar eine lineare Funktion, d. h. enthält jedes Element nur in der ersten Potenz, so dass wir also, unter p die erste Unterdeterminante von $\triangle$ nach dem Elemente $a_{i,k}$ verstanden, die Gleichung

$$\triangle = pa_{i,k} + q$$

schreiben können. Der Ausdruck q ist von $a_{i,k}$, diess als veränderlich gedacht, gänzlich unabhängig; differentiiren wir also unsere Gleichung beiderseitig nach $a_{i,k}$, so folgt, da $a'_{i,k} = 1$ ist, nach bekannten Regeln

$$p = \frac{d\triangle}{da_{i,k}},$$

---

*) Die nächsten Zeilen halten sich getreu an Jacobi's Universitätsvorlesungen über höhere Algebra, indem dieselben vor dergedruckten Abhandlung hier wie auch sonst den Vorzug grösserer Ausführlichkeit und Anschaulichkeit besitzen.

unter dem Differentialquotienten natürlich einen partiellen verstanden. So ist z. B., mit gehöriger Berücksichtigung des Vorzeichens,

$$\frac{d\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right)}{db_2} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \frac{d\left(\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}\right)}{da_{2,3}} = - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix},$$

indem (§. 10) bei b_2 oder $a_{II,II}$ die Indexsumme gerade, bei $a_{2,3}$ hingegen ungerade ist.

Würden wir, was ohne Verletzung der exakten Begründung möglich gewesen wäre, den so eben entwickelten Satz von der Zerlegung in Unterdeterminanten an die Spitze gestellt haben, so würden sich uns mehrere frühere Wahrheiten, welche wir damals auf rein combinatorischem Wege gewannen, in einer wesentlich verschiedenen Form dargestellt haben. So würde z. B. der in §. 2 bewiesene Lehrsatz durch unmittelbare Induktion aus der Identität

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{vmatrix}$$

hervorgegangen sein, und auch die in §. 1 berechnete Anzahl der Entwickelungsglieder tritt hier sofort zu Tage, indem die $(n + 1)$reihige Determinante entschieden die $(n + 1)$fache Anzahl von denen der $n$reihigen, d. h. $1 . 2 . 3 \ldots n (n + 1)$ solche Glieder besitzt.

Als unmittelbare Folge aus dem Bisherigen ist noch ein Satz von Wichtigkeit, dessen erster Theil bereits bekannt ist; er lautet:

Die algebraischen Summen *)

$$a_{i,1}\frac{d\triangle}{da_{k,1}} + a_{i,2}\frac{d\triangle}{da_{k,2}} + \ldots + a_{i,n}\frac{d\triangle}{da_{k,n}}; \quad a_{1,i}\frac{d\triangle}{da_{1,k}} + a_{2,i}\frac{d\triangle}{da_{2,k}} + \ldots + a_{n,i}\frac{d\triangle}{da_{n,k}}$$

haben den Werth $\triangle$ oder 0, je nachdem $k = i$ ist oder nicht.

Letztere Thatsache erhellt am Natürlichsten, wenn wir mit Mansion so schliessen [15]: In einer $n$reihigen Determinante sei die $i$te Zeile oder Colonne gleich der $k$ten; zerlegen wir dieselbe nach den Elementen einer solchen Reihe, so bekommen wir die obigen Entwickelungen, während wir doch andererseits wissen, dass jene Determinante nach §. 3 identisch verschwindet.

So ist für $\triangle = \Sigma \pm a_1b_2c_3$,

$$b_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = b_1b_2b_3 - b_1b_3c_2 - b_1b_2c_3 + b_2b_3c_1 + b_1b_3c_2 - b_2b_3c_1 = 0.$$

§. 13. Jede Unterdeterminante des nächst niederen Grades können wir wiederum in erste Unterdeterminanten zerlegen, und so fort. Man erkennt sofort, dass alle Elemente, aus welchen sich eine derartige Determinante zusammensetzt, bereits als vollständiges quadratisches Schema in der

---

*) Das Vorzeichen haftet, wie für den Anfänger bemerkt sein möge, nicht am Elemente, sondern an der Unterdeterminante, so dass also in der allgemeinen Formel ausschliesslich Pluszeichen vorkommen dürfen. Es ist diess allerdings eine conventionelle aber von der weitaus überwiegenden Mehrzahl der Fachschriftsteller adoptirte Festsetzung.

ursprünglichen Determinante vorhanden waren, und es erhebt sich naturgemäss die Frage nach dem wechselseitigen Zusammenhange beider.

Um zu den ersten Unterdeterminanten zu gelangen, mussten wir uns die Frage vorlegen, welches der Coëfficient des Elementes $a_{i,k}$ in der Determinanten-Entwickelung sei. Es liegt nun nahe, diese Frage dahin zu verallgemeinern, dass man die Angabe desjenigen Ausdruckes fordert, welcher bei dieser Entwickelung mit dem willkürlich gebildeten Produkte $a_{p,q}\ a_{r,s}\ a_{t,u}\ a_{v,\omega} \ldots$ multiplicirt erscheint. Es ist klar, dass in jenem Ausdrucke kein Element vorkommen darf, welches bezüglich der $p$ten, $r$ten, $t$ten, $v$ten ... Zeile und der $q$ten, $s$ten, $u$ten, ωten ... Colonne angehört. Es bleiben sonach nur die nicht in jenen Reihen befindlichen Elemente zurück, deren Anzahl uns folgende Ueberlegung kennen lehrt. Ursprünglich mögen n^2 Elemente vorhanden gewesen sein; durch Ausschluss der $p$ten und $q$ten Reihe gehen hievon $(n + n - 1 = 2n - 1)$ weitere Elemente ab.

Die nämliche Anzahl würde auch bei Ausschluss der $r$ten und $s$ten Reihe von dieser Zahl wegzunehmen sein, wenn nicht zwei Elemente bereits im Vorigen mitberücksichtigt worden wären, so dass also in Wirklichkeit der Abgang nur $(2n - 3)$ Elemente beträgt. Durch mehrfache Wiederholung dieser Abzählung finden wir sonach, dass, wenn das vorgelegte Produkt h Faktoren enthielt, allgemein noch

$$n^2 - (2n-1) - (2n-3) - \ldots - (2n-2h+1) = n^2 - 2hn + 1 + 3 + 5 + \ldots + 2h - 1$$

Elemente vorhanden sind. Die Summe der ungeraden Zahlen ist nun bekanntlich stets ein vollständiges Quadrat, so dass also die Anzahl der übrig bleibenden Glieder

$$n^2 - 2hn + h^2 = (n-h)^2$$

beträgt. Diese $(n-h)^2$ Elemente erscheinen nun in Gestalt eines Aggregates von $(n-h)!$ Gliedern, jedes Glied zu $(n-h)$ Faktoren in allen möglichen Versetzungen, so dass man dafür sofort wieder eine Determinante schreiben kann. Wir erhalten so den Satz:

Greift man aus einer Determinante vom $n$ten Grade h Elemente heraus, deren gleichartige Indices durchaus verschieden sind, vereinigt dieselben zu einem Produkte und fragt nach dem anderen Faktor dieses Produktes in der entwickelten Determinante, so hat man nur alle Elemente, welche mit keinem der genannten resp. einen ersten oder zweiten Index gemein haben, zu einer Determinante des $(n-h)$ten Grades zusammenzustellen. Diess ist — abgesehen vom Vorzeichen — der gesuchte Faktor.

Man pflegt eine solche Determinante die $h$te Unterdeterminante oder Partialdeterminante der ursprünglichen zu nennen.

Suchen wir z. B. den Faktor des Elementenproduktes $a_{2,4}\ a_{3,2}\ a_{5,7}\ a_{6,3}$ in der Entwickelung der Determinante $\Sigma \pm a_{1,1}\ a_{2,2}\ a_{3,3}\ a_{4,4}\ a_{5,5}\ a_{6,6}\ a_{7,7}$, so ist derselbe gleich der vierten Unterdeterminante dritten Grades

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{4,1} & a_{4,5} & a_{4,6} \\ a_{7,1} & a_{7,5} & a_{7,6} \end{vmatrix}.$$

§. 14. Es leuchtet nun auch ein, dass die $r$te Unterdeterminante der s ten Unterdeterminante einer Determinante vom n ten Grade die $(r+s)$te Unterdeterminante der letzteren, also selbst vom Grade $(n-r-s)$ ist. Hieraus folgt jedoch ein allgemeiner Ausdruck für jede beliebige Unterdeterminante. Behalten wir die Bezeichnungsweise des vorigen Paragraphs bei, so wird nach §. 12 der Faktor von $a_{p,q}$ in der Determinanten-Entwickelung, d. h. die nach diesem Elemente genommene erste Unterdeterminante, durch den partiellen Differentialquotienten $\frac{d\triangle}{da_{p,q}}$ dargestellt. Hienach ist der Faktor des Produktes $a_{p,q}\ a_{r,s}$ gleich dem zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2\triangle}{da_{p,q}da_{r,s}}$, und ganz allgemein der Faktor des Produktes $a_{p1,q1}\ a_{p2,q2}\ \ldots\ a_{pm,qm}$ oder die m te Unterdeterminante gleich

$$\frac{d^m\triangle}{da_{p1,q1}\ da_{p2,q2}\ \ldots\ da_{pm,qm}}.$$

Jede $(n-1)$te Unterdeterminante einer n reihigen Determinante ist einzelnes Element derselben.

Bei den bisherigen Bestimmungen haben wir das Zeichen unberücksichtigt gelassen. Um diess zu finden, multiplicire man das Produkt mit dem Diagonalgliede der Unterdeterminante und sehe zu, ob das so entstandene Glied in der ursprünglichen Determinanten-Entwickelung mit dem positiven oder negativen Vorzeichen versehen wäre. Im obigen Falle bekommen wir so, wenn die ersten Indices geordnet werden, das Glied

$$a_{1,1}\ a_{2,4}\ a_{3,2}\ a_{4,5}\ a_{5,7}\ a_{6,3}\ a_{7,6}$$

und dieses bietet in der Complexion seiner zweiten Indices 5 Inversionen (42, 43, 53, 73, 76); das Vorzeichen ist also Minus.

§. 15. Im Anschlusse an die hier durchgeführten Betrachtungen können wir uns die Frage vorlegen, wie viele Glieder einer entwickelten Determinante $\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ m bestimmte Terme einer Reihe von Elementen enthalten, deren Verbindungslinie einer der beiden Diagonalreihen parallel läuft. Um hierüber Klarheit zu erhalten, brauchen wir nur an Stelle der Verbindungslinie die Diagonale selbst zu setzen. Dann lässt sich als Gegenstand unserer nächsten Untersuchung auch dieser bezeichnen:

Man will wissen, in wie viel Entwickelungsgliedern der Determinante $\triangle$ sämmtliche Diagonalelemente der m reihigen Unterdeterminante vorkommen, welche der gegebenen condiagonal sind.

Die hiezu erforderlichen Formeln wurden in vollkommener Correktheit zuerst fast gleichzeitig von Weyrauch [16]) und Monro [17]) gegeben; dass in der ursprünglich von Baltzer gelieferten Darstellung ein kleines Versehen vorkomme, hat Weihrauch [18]) nachgewiesen. Später hat dann Baltzer [19]) selbst eine neue strenge Ableitung der in Rede stehenden Relation bekannt gemacht.

Wir berechnen zunächst die Anzahl der Glieder, welche überhaupt Diagonalelemente enthalten. Den Coëfficienten $a_{1,1}$ enthalten nach §. 14 und 15 offenbar $(n-1)!$ Glieder, d. h. alle Glieder von $\frac{d\triangle}{da_{1,1}}$. Das Element $a_{2,2}$ kommt an und für sich ebenfalls in $(n-1)!$ Gliedern vor, von denen jedoch $(n-2)!$ bereits in der vorigen Anzahl enthalten sind. Beide Elemente, resp. eines von beiden, kommen somit in $(2(n-1)!-(n-2)!)$

Gliedern vor, die drei Elemente $a_{1,1}$, $a_{2,2}$, $a_{3,3}$ analog in $(3(n-1)!-3(n-2)!+(n-3)!)$ Gliedern u. s. f. Um also die gewünschte Anzahl zu erhalten, muss nachstehende Summe gebildet werden:

$$F = \begin{cases} \quad (n-1)! \\ +(n-1)! - (n-2)! \\ +(n-1)! - \binom{2}{1}(n-2)! + (n-3)! \\ \quad \vdots \\ +(n-1)! - \binom{n-1}{1}(n-2)! + - \ldots + (-1)^{n-2}\binom{n-1}{n-2}1! \\ \qquad + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}0! \end{cases}$$

Erinnert man sich des auf induktorischem Wege übrigens leicht erhältlichen Satzes aus der Theorie der Binomialcoëfficienten, wonach die Identität

$$\binom{p}{p}+\binom{p+1}{p}+\binom{p+2}{p}+\ldots+\binom{n}{p}=\frac{(n+1)\,n\,(n-1)\ldots(n-p+1)}{(p+1)!}$$

besteht, so kann man obige Summe leicht bilden und findet

$$F = n!\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right).$$

Die Anzahl der Glieder, welche gar kein diagonales Element enthalten, findet man, indem man F von n! abzieht; sie ist also

$$F' = n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-+\ldots+\frac{(-1)^{n}}{n!}\right).$$

Der Ausdruck F enthält nun auch die Anzahl derjenigen Glieder, welche m ($<$ n) bestimmte Diagonalelemente in sich aufnehmen. Nach §. 13 ist der Coëfficient des Produktes $a_{1,1}\,a_{2,2}\ldots a_{m,m}$ eine Unterdeterminante $(n-m)$ten Grades. Von den Gliedern dieser letzteren kann keines einen jener Faktoren enthalten; wir finden also die Anzahl der der gewünschten Bedingung genügenden Glieder, wenn wir oben in F' die Faktorielle n! durch $(n-m)!$ ersetzen. So kommt

$$f' = (n-m)!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-+\ldots+\frac{(-1)^{n-m}}{(n-m)!}\right).$$

§. 16. Die Lehre von den verschiedenen Unterdeterminanten einer Determinante findet eine wichtige Anwendung, wenn es sich darum handelt, den Ausdruck

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+x & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}+x & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+x & \ldots & a_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n}+x \end{vmatrix}$$

in eine nach aufsteigenden Potenzen von x geordnete endliche Reihe zu entwickeln.

Um den zu diesem Zwecke einzuschlagenden Weg sogleich klar zu übersehen, knüpfen wir an ein spezielles Beispiel an und entwickeln die oben abgegrenzte Unterdeterminante $\triangle$ des dritten Grades. Indem wir unausgesetzt die Vorschriften des §. 8 zur Anwendung bringen, erhalten wir zunächst mit Rücksicht auf §. 5,

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2}+x & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_{2,2}+x & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3}+x \end{vmatrix},$$

hierauf

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}+x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3}+x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3}+x \end{vmatrix} + x^2(a_{3,3}+x),$$

und schliesslich

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \left(\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{3,1} & a_{3,3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \right) x$$
$$+ (a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3})x^2 + x^3.$$

Der hier angewandte Zerlegungsmodus lässt sich nun aber auch auf den allgemeinen Fall übertragen; indem nach §. 5 die obige Determinante vom nten Grade in ein Aggregat von 2^n Gliedern zerfallen würde. Wir erhalten so den durch den Schluss von n auf $(n+1)$ leicht zu verificirenden Satz:

Die Determinante $\triangle$ lässt sich nach aufsteigenden Potenzen von x in eine Reihe entwickeln, so zwar, dass der Coëfficient von x^n die Einheit und derjenige von x^0 die Determinante $\triangle' = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ ist. Den Coëfficienten von x^q findet man, wenn man alle mit der Determinante $\triangle'$ condiagonalen qten Unterdeterminanten derselben summirt.

Einen eleganten combinatorischen Beweis dieses Theorems hat Baltzer geliefert.

Eine naturgemässe Folge der bisherigen Betrachtungen ist es wohl, wenn wir ganz allgemein nach den Bedingungen der Zerlegung für eine durchweg aus binomischen Elementen gebildete Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \ldots & a_{1,n}+b_{1,n} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \ldots & a_{2,n}+b_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}+b_{n,1} & a_{n,2}+b_{n,2} & \ldots & a_{n,n}+b_{n,n} \end{vmatrix}.$$

fragen. Verfahren wir ebenso wie im vorigen Falle, so erkennen wir, dass, um dem Gesetze der Homogeneität treu zu bleiben, alle Determinanten von folgender Form vorkommen müssen:

$$\pm \begin{vmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} & \ldots & a_{1,i_m} & b_{1,k_1} & b_{1,k_2} & \ldots & b_{1,k_{n-m}} \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} & \ldots & a_{2,i_m} & b_{2,k_1} & b_{2,k_2} & \ldots & b_{2,k_{n-m}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,i_1} & a_{n,i_2} & \ldots & a_{n,i_m} & b_{n,k_1} & b_{n,k_2} & \ldots & b_{n,k_{n-m}} \end{vmatrix},$$

wo $i_1, i_2 \ldots k_1, k_2$ alle möglichen innerhalb des Intervalles $0, 1, 2 \ldots n$ vorkommenden ganzen Zahlen bedeuten; wäre nur eine einzige Colonne von a und b bezüglich mit dem zweiten Index 0 vorhanden, so würde diess andeuten, dass die betreffende Determinante ausschliesslich Elemente a oder b enthält. Diesem Faktum fehlt indess noch die übersichtliche Einkleidung, und wir ändern deshalb unsere Forderung dergestalt um, dass wir jeden einzelnen Summanden als Produkt zweier Determinanten verlangen, deren erste und zweite resp. aus Elementen der ersten und zweiten Kategorie zusammengesetzt sind. Gehen wir wieder vom speziellen Beispiele des dritten Grades aus und berücksichtigen, dass jedem Determinantenfaktor vom pten Grade ein solcher vom (n — p)ten entsprechen muss, wenn jedes einzelne Glied n Faktoren aufweisen soll, so stellt sich uns bald die Wahrheit folgender Thatsache heraus:

Bezeichnen wir die beiden Determinanten $\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ und $\Sigma \pm b_{1,1} \ldots b_{n,n}$ resp. mit $\triangle'$ und $\triangle''$, sowie die Summe aller vorhandenen pten Unterdeterminanten des (n — p)ten Grades von $\triangle'$ und $\triangle''$ resp. mit $S^{(n-p)}\,\triangle'$ und $S^{(n-p)}\,\triangle''$, so gilt die Identität

$$\triangle = \triangle' + S^{(1)}\,\triangle'' \,.\, S^{(n-1)}\,\triangle' + \ldots S^{(n-1)}\,\triangle'' \,.\, S^{(1)}\,\triangle' + \triangle'',$$

die einzelnen Unterdeterminanten durchweg mit dem ihnen zukommenden Zeichen genommen. Das allgemeine Glied der Reihe ist $S^{(p)}\,\triangle' \,.\, S^{(n-p)}\,\triangle''$.

Wir sind somit durch einfachen Analogieschluss zu einem häufig anwendbaren Satze gelangt, welchen Albeggiani[20]) zuerst durch combinatorische Mittel abgeleitet zu haben scheint; dass sich der obige Lehrsatz als einfaches Corollar dieses letzteren darstellt für $b_{i,k} = 0$, $b_{i,i} = x$, leuchtet von selbst ein. In einer später erschienenen Abhandlung hat der vorgenannte Italiener die entsprechende Untersuchung auch für Determinanten von polynomialer Elementform durchführen gelehrt[21]).

§. 17. Die Art und Weise, wie wir soeben eine nreihige Determinante der Form $\Sigma \pm a_{1,1} + b_{1,1} \ldots a_{n,n} + b_{n,n}$ durch eine Summe aus Determinanten-Produkten darstellten, legt uns einen weiteren Untersuchungsgegenstand nahe. Es ist nämlich von grossem Interesse zu wissen, ob und wie eine in der Normalform gegebene Determinante $\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ sich als Aggregat von Produkten aus Unterdeterminanten darstellen lasse. Dass eine solche Zerlegung überhaupt möglich ist, erkennen wir beispielsweise aus folgendem Spezialfalle. Fassen wir von den 24 Gliedern, in welche die Determinante $\triangle = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\, a_{4,4}$ entwickelt werden kann, je 4 zusammen, so lässt sich $\triangle$ auch in folgender Form schreiben.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{3,3} & a_{3,4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{3,1} & a_{3,2} \\ a_{4,1} & a_{4,2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,3} & a_{2,4} \end{vmatrix} .$$

Diess ist aber eine sechsgliedrige algebraische Summe, deren Summanden Produkte aus zweiten Unterdeterminanten von $\triangle$ sind.

Aus §. 7 des ersten Kapitels ist bekannt, dass Laplace als der erste derartige Fragen mit Bewusstsein der principiellen Bedeutung behandelt hat. Er beschränkte sich, wie diess für seinen Standpunkt auch nicht anders sein konnte, auf den Fall zweigliedriger Determinanten-Produkte, und diesen Fall, in welchem alle complicirteren übrigens enthalten sind, wollen auch wir zuerst vornehmen. Da die Anordnung gänzlich in unserem Belieben liegt, so setzen wir ein für allemal fest, dass der erste Determinantenfaktor jedes einzelnen Produktes vom Grade m (< n), der zweite also vom Grade (n — m) sein soll, und dass in den ersten ausschliesslich

Elemente der ersten m, in den zweiten ausschliesslich Elemente der letzten (n — m) Colonnen aus der Determinante $\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ eingehen sollen. Sollte die zu lösende Aufgabe dieser Festsetzung einmal anscheinend zuwiderlaufen, so würde man durch Transposition der Colonnen und nachherige Vergleichung mit einer Hülfsdeterminante $\Sigma \pm a_{I,I} \ldots a_{N,N}$ gleichwohl leicht die geforderten Bedingungen herzustellen im Stande sein.

Um dann mit Einem Schlage sämmtliche Produkte zu erhalten, verfahre man so:

Man bilde aus den Zahlen 1 bis n sämmtliche Combinationen ohne Wiederholung zur mten Classe und schreibe jeder einzelnen die nicht in ihr enthaltenen Ziffern in der normalen Anordnung bei. Sind dann

$$i_1, i_2 \ldots i_m \text{ und } k_1, k_2 \ldots k_{n-m}$$

zwei solche Complexionen, so ist jedes Produkt von folgender Form

$$\Sigma \pm a_{i_1,1}\, a_{i_2,2} \ldots a_{i_m,m} \;.\; \Sigma \pm a_{k_1,m+1}\, a_{k_2,m+2} \ldots a_{k_{n-m},n}$$

eines der verlangten. Die Gesammtanzahl ist also

$$\binom{n}{m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2.3\ldots m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Soll z. B. die Determinante $\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} a_{4,4} a_{5,5} a_{6,6} a_{7,7}$ in ein solches Aggregat verwandelt werden, so zwar, dass jeder erste Faktor eine Determinante des vierten, jeder zweite eine solche des dritten ist, so erhalten wir nachstehende 35 Glieder:

$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} a_{4,4} . \Sigma \pm a_{5,5} a_{6,6} a_{7,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} a_{5,4} . \Sigma \pm a_{4,5} a_{6,6} a_{7,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} a_{6,4} . \Sigma \pm a_{4,5} a_{5,6} a_{7,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{4,5} a_{5,6} a_{6,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{4,3} a_{5,4} . \Sigma \pm a_{3,5} a_{6,6} a_{7,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{4,3} a_{6,4} . \Sigma \pm a_{3,5} a_{5,6} a_{7,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{3,2} a_{4,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{2,5} a_{5,6} a_{6,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{3,2} a_{5,3} a_{6,4} . \Sigma \pm a_{2,5} a_{4,6} a_{7,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{3,2} a_{5,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{2,5} a_{4,6} a_{6,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{3,2} a_{6,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{2,5} a_{4,6} a_{5,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{4,2} a_{5,3} a_{6,4} . \Sigma \pm a_{2,5} a_{3,6} a_{7,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{4,2} a_{5,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{2,5} a_{3,6} a_{6,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{4,2} a_{6,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{2,5} a_{3,6} a_{5,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{5,2} a_{6,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{2,5} a_{3,6} a_{4,7}$,
$\Sigma \pm a_{2,1} a_{3,2} a_{4,3} a_{5,4} . \Sigma \pm a_{1,5} a_{6,6} a_{7,7}$,
$\Sigma \pm a_{2,1} a_{3,2} a_{4,3} a_{6,4} . \Sigma \pm a_{1,5} a_{5,6} a_{7,7}$,
$\Sigma \pm a_{2,1} a_{3,2} a_{4,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{1,5} a_{5,6} a_{6,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{4,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{3,5} a_{5,6} a_{6,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{5,3} a_{6,4} . \Sigma \pm a_{3,5} a_{4,6} a_{7,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{5,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{3,5} a_{4,6} a_{6,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} a_{6,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{3,5} a_{4,6} a_{5,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{3,2} a_{4,3} a_{5,4} . \Sigma \pm a_{2,5} a_{6,6} a_{7,7}$,
$\Sigma \pm a_{1,1} a_{3,2} a_{4,3} a_{6,4} . \Sigma \pm a_{2,5} a_{5,6} a_{7,7}$,
$\Sigma \pm a_{2,1} a_{3,2} a_{5,3} a_{6,4} . \Sigma \pm a_{1,5} a_{4,6} a_{7,7}$,
$\Sigma \pm a_{2,1} a_{3,2} a_{5,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{1,5} a_{4,6} a_{6,7}$,
$\Sigma \pm a_{2,1} a_{3,2} a_{6,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{1,5} a_{4,6} a_{5,7}$,
$\Sigma \pm a_{2,1} a_{4,2} a_{5,3} a_{6,4} . \Sigma \pm a_{1,5} a_{3,6} a_{7,7}$,
$\Sigma \pm a_{2,1} a_{4,2} a_{5,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{1,5} a_{3,6} a_{6,7}$,
$\Sigma \pm a_{2,1} a_{4,2} a_{6,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{1,5} a_{3,6} a_{5,7}$,
$\Sigma \pm a_{2,1} a_{5,2} a_{6,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{1,5} a_{3,6} a_{4,7}$,
$\Sigma \pm a_{3,1} a_{4,2} a_{5,3} a_{6,4} . \Sigma \pm a_{1,5} a_{2,6} a_{7,7}$,
$\Sigma \pm a_{3,1} a_{4,2} a_{5,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{1,5} a_{2,6} a_{6,7}$,
$\Sigma \pm a_{3,1} a_{4,2} a_{6,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{1,5} a_{2,6} a_{5,7}$,
$\Sigma \pm a_{3,1} a_{5,2} a_{6,3} a_{7,4} . \Sigma \pm a_{1,5} a_{2,6} a_{4,7}$,

$$\Sigma \pm a_{4,1} a_{5,2} a_{6,3} a_{7,4} \;.\; \Sigma \pm a_{1,5} a_{2,6} a_{3,7}.$$

Was die vorläufig noch ausser Acht gelassenen Vorzeichen betrifft, so lassen sich dieselben recurrirend durch Indices-Abzählung leicht gewinnen. Nehmen wir z. B. das letzte Glied unserer Entwickelung, so haben wir, da die zweiten Indices bereits in der normalen Anordnung sich befinden, nach §. 2 nur die Complexion der ersten Indices

$$4\ 5\ 6\ 7\ 1\ 2\ 3$$

auf die darin vorkommenden Inversionen zu untersuchen. Man hat deren hier 12 (41, 42, 43, 51, 52, 53, 61, 62, 63, 71, 72, 73); jenes Glied ist also mit dem positiven Vorzeichen in Rechnung zu bringen. — Man kann übrigens auch eine independente Regel für diesen Zweck aufstellen; es ist diess in einer eigenen Abhandlung [22]) geleistet worden, auf welche hier einfach verwiesen werden möge.

Gehen wir nun weiter und verlangen die Zerfällung einer vorgelegten Determinante *) in ein Aggregat von Gliedern, deren jedes als Produkt von mehr als zwei Faktoren sich darstellt, so können wir ersichtlich diese allgemeinere Aufgabe auf die vorstehend gelöste zurückführen. Um jedoch gleich den allgemeinsten Fall zu erledigen, schliessen wir mit Jacobi [24]) folgendermassen **):

Es seien die Gradzahlen der k Determinanten, als deren Produkt jedes einzelne Glied der Zerlegung aufzufassen ist, bezüglich $k'_1, k'_2 \ldots k'_k$, so dass also

$$k'_1 + k'_2 + \ldots + k'_k = n$$

wäre. Alsdann dürfen je im ersten Faktor jedes Gliedes ausschliesslich Elemente der ersten k'_1 Vertikalreihen vorkommen, im zweiten ausschliesslich von der k'_1 ten bis zur k'_2 ten, u. s. f. Bilden wir dann k Klassen, so dass die Zahlen $1, 2, 3 \ldots k'_1$ die erste, $k'_1 + 1$, $k'_1 + 2 \ldots k'_2$ die zweite $\ldots k'_{k-1} + 1$, $k'_{k-1} + 2 \ldots k'_k$ die k'te Klasse einnehmen, so können wir offenbar innerhalb jener einzelnen Klasse beziehungsweise $k'_1!$, $k'_2! \ldots k'_k!$ Permutationen der darin befindlichen Elemente herstellen. Jede derartige Permutation werde als Complexion der ersten Indices angeschrieben, während die zweiten Indices in ihrer normalen Folge beharren. Hat man so innerhalb jeder einzelnen Klasse alle Glieder gebildet, so gilt jedes derselben als Diagonalglied einer in das Produkt als Faktor eingehenden Determinante, und wir müssen sonach die Summe aller auf diese Weise erhältlichen Produkte bilden. Je nachdem die dem Diagonalgliede angehörige Permutation der ersten Indices paar oder unpaar ist, hat jene Determinante das positive oder negative Zeichen zu erhalten.

Das so eben durch Raisonnement gewonnene Ergebniss liesse sich nun auch in Gestalt einer Summenformel einkleiden. Wir erhalten so, indem wir das von Jacobi blos einmal verwendete Summenzeichen S je k mal schreiben, den symbolischen Ausdruck

*) Zur klarereren Einsicht in dieses Zerlegungsproblem, welches, solange man vom Vorzeichen absieht, offenbar auch als eine geometrisch-combinatorische Aufgabe sich einkleiden liesse, wäre die Verwendung eines einfachen Lehrmittels, bestehend aus einem quadratischen Kästchen von n^2 Damenbrettsteinen, sehr zweckmässig, wie wir diess bereits bei einer anderen Gelegenheit [23]) angedeutet haben. Es ist gewiss charakterisch, dass Jacobi einzig und allein bei dieser Aufgabe die ihm sonst allein geläufige Schreibweise des Summenzeichens theilweise aufgegeben und — wenigstens in seinen Vorlesungen — auch auf das quadratische Schema als Hülfsmittel der räumlichen Versinnlichung zurückgegriffen hat.

**) In der ersten Auflage dieses Werkes ward die betreffende Entwickelung im direkten Anschluss an Jacobi's Fundamentalschrift gegeben, die zwar sehr concis, allein nicht eben sehr durchsichtig ist; hier ward wiederum die Darstellung des Collegienheftes zu Grunde gelegt.

$$S \pm \Sigma \pm a_{i_1',1}\, a_{i_2',2} \ldots a_{i'_{k_1},k_1'}\; S \pm \Sigma \pm a_{i''_1,k'_1+1}\, a_{i''_2,k'_1+2} \ldots a_{i''_{k_2},k'_2}$$
$$\ldots S \pm \Sigma \pm a^{(k)}_{i_{1},\,k'_{k-1}+1}\, a^{(k)}_{i_{2},\,k'_{k-1}+2} \ldots a^{(k)}_{i_{k},\,n}\,.$$

Die Richtigkeit dieses Ausdruckes und der Zusammenhang seiner einzelnen Bestandtheile dürften nach den vorausgegangenen Darlegungen wohl unmittelbar in die Augen springen.

Die Anzahl der überhaupt möglichen Determinanten-Produkte ist

$$\frac{n!}{k'_1!\, k'_2!\, k'_3! \ldots k'_{k-1}!\, (n - k'_1 - \ldots - k'_{k-1})!},$$

wo man sich also unter k_1, k_2 ... alle beliebigen der oben normirten Bedingungsgleichung genügenden ganzen positiven Zahlen vorstellen kann.

§. 18. Aus unserer allgemeinen Formel vermögen wir einen bemerkenswerthen Schluss zu ziehen. Wenn wir eine Determinante $n$ten Grades von der Eigenschaft vor uns haben, dass die $m(n-m)$ Elemente, welche m Reihen der einen mit $(n-m)$ Reihen der anderen Kategorie gemein haben, durch Nullen ersetzt sind, so können wir es durch passende Reihenverschiebung dahin bringen, dass die linke untere Ecke des quadratischen Schema's in ein Rechteck von $m(n-m)$ Nullen sich verwandelt. Die so umgeformte Determinante zerlegen wir nun nach den Anweisungen des §. 17 in ein Aggregat von Produkten aus $(n-m)$ten und $m$ten Unterdeterminanten, indem wir uns strikte an den oben erörterten Modus der Zerlegung halten. So ergiebt sich

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m-1} & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m-1} & a_{2,m} & a_{2,m+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,m-1} & a_{m,m} & a_{m,m+1} & \ldots & a_{m,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{m+1,m+1} & \ldots & a_{m+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a_{n,m+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,m} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} & \ldots & a_{m+1,n} \\ a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} & \ldots & a_{m+2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,m+1} & a_{n,m+2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} + S,$$

wo S die anderen Glieder der Summe vorstellt. Nun ist ersichtlich, dass der eine Faktor all' der Produkte, aus welchen sich S zusammensetzt, zum Mindesten eine aus lauter Nullen bestehende Zeile aufweist, und jede solche Determinante verschwindet nach §. 4 selbst identisch, so dass also auch S den Werth Null haben muss.

Wir erhalten so den bereits im 1. Kapitel (§. 7) erwähnten Zusatz des obigen uneigentlicherweise nach Laplace benannten Satzes:

Wenn alle diejenigen Elemente einer Determinante verschwinden, welche m Colonnen mit $(n-m)$ Zeilen gemein haben, so reducirt sich jene auf das Produkt einer $(n-m)$ten und einer $m$ten Unterdeterminante.

Hieraus folgt dann aber auch sofort weiter, dass eine Determinante stets identisch verschwindet, wenn diejenigen Elemente, welche n Colonnen und $(n - m + q)$ Zeilen $(q \geqq 1)$ angehören, sich annulliren, d. h. es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,m} & a_{1,m+1} & \dots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m-1,1} & \dots & a_{m-1,m} & a_{m-1,m+1} & \dots & a_{m-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{m,m+1} & \dots & a_{m,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,m+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Was das Zeichen anlangt, so ist klar, dass, um die Null-Elemente an den ihnen angewiesenen Platz zu bringen, das Vertauschen je zweier Reihen eine gerade oder ungerade Anzahl von Malen angedauert haben muss; im ersten Falle würde also $+$, im zweiten $-$ zu nehmen sein.

Dieser wichtige Lehrsatz möge an einer Reihe von Beispielen veranschaulicht werden. Es ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & M & N \\ a_2 & b_2 & c_2 & P & Q \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & a_4 & b_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & a_5 & b_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - M & b_1 - N & c_1 & M & N \\ a_2 - P & b_2 - Q & c_2 & P & Q \\ 0 & 0 & c_3 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_4 & a_4 & b_4 \\ 0 & 0 & c_5 & a_5 & b_5 \end{vmatrix},$$

und diese Determinante zerlegt sich sofort in das Produkt

$$\begin{vmatrix} a_1 - M & b_1 - N \\ a_2 - P & b_2 - Q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_3 & a_3 & b_3 \\ c_4 & a_4 & b_4 \\ c_5 & a_5 & b_5 \end{vmatrix},$$

denn es waren in ihr die 6 Elemente, welche 3 Zeilen und 2 Colonnen gemeinsam waren, durch Nullen ersetzt. Wäre auch noch $c_3 = c_4 = c_5 = 0$, so hätten 3 Colonnen mit 3 Zeilen 9 Elemente gemein, es müsste, wie auch aus dem Resultate der Transformation erhellt, die Determinante verschwinden.

In ähnlicher Weise ist

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ c_1 & 0 & 0 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_2 & d_3 & d_4 & d_1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \\ 0 & 0 & b_4 & b_1 \\ 0 & 0 & c_4 & c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_2 & d_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_4 & b_1 \\ c_4 & c_1 \end{vmatrix}.$$

Natürlich lässt sich auch bei ein und derselben Determinante das nämliche Verfahren oft mehrmals nach einander anwenden *). So constatirt man leicht das Bestehen folgender Identität:

$$\left|\begin{array}{cc|ccc|ccc|cc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} & a_{1,6} & a_{1,7} & a_{1,8} & a_{1,9} & a_{1,10} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} & a_{2,6} & a_{2,7} & a_{2,8} & a_{2,9} & a_{2,10} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{3,6} & a_{3,7} & a_{3,8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{4,6} & a_{4,7} & a_{4,8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{5,6} & a_{5,7} & a_{5,8} & 0 & 0 \\ \hline a_{6,1} & a_{6,2} & a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} & a_{6,6} & a_{6,7} & a_{6,8} & 0 & 0 \\ a_{7,1} & a_{7,2} & a_{7,3} & a_{7,4} & a_{7,5} & a_{7,6} & a_{7,7} & a_{7,8} & 0 & 0 \\ a_{8,1} & a_{8,2} & a_{8,3} & a_{8,4} & a_{8,5} & a_{8,6} & a_{8,7} & a_{8,8} & 0 & 0 \\ \hline a_{9,1} & a_{9,2} & 0 & 0 & 0 & a_{9,6} & a_{9,7} & a_{9,8} & 0 & 0 \\ a_{10,1} & a_{10,2} & 0 & 0 & 0 & a_{10,6} & a_{10,7} & a_{10,8} & 0 & 0 \end{array}\right| = -\left[\begin{vmatrix} a_{1,9} & a_{1,10} \\ a_{2,9} & a_{2,10} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{3,6} & a_{3,7} & a_{3,8} \\ a_{4,6} & a_{4,7} & a_{4,8} \\ a_{5,6} & a_{5,7} & a_{5,8} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{6,3} & a_{6,4} & a_{6,5} \\ a_{7,3} & a_{7,4} & a_{7,5} \\ a_{8,3} & a_{8,4} & a_{8,5} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{9,1} & a_{9,2} \\ a_{10,1} & a_{10,2} \end{vmatrix} \right].$$

---

*) Im speziellen Falle, wenn nämlich $m = 1$ ist, geht der Zusatz des La-

§. 19. Da dieser Gegenstand besonders im praktischen Determinanten-Rechnen immer wiederkehrt, so wollen wir noch etwas länger bei demselben verweilen und eine instruktive Anwendung davon machen, welche auch durch die vielfach sich bietenden Umformungen von Interesse ist; sämmtliche in den früheren Paragraphen dieses Kapitels aufgestellte Sätze treten uns dabei entgegen. Es soll die Transformation

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ p_1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & p_2 & x & -1 \\ 0 & 0 & p_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+p_1 & p_2 \\ p_1 & x+p_2+p_3 \end{vmatrix}$$

begründet werden. Man vertausche zunächst nach §. 4 die zweite Zeile mit der dritten und hierauf die dritte Colonne mit der zweiten; wir erhalten so

$$\triangle = (-1)^2 \begin{vmatrix} x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & p_2 & -1 \\ p_1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Nach §. 8 addiren wir jetzt beziehungsweise die dritte und vierte Zeile zur zweiten und ersten; hierauf addiren wir zur zweiten Colonne die dritte und multipliciren letztere mit p_1, wodurch nach §. 7 der Faktor $\frac{1}{p_1}$ vor die Determinante tritt. Das Resultat dieser successiven Aenderungen ist

$$\triangle = \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x+p_3 & p_2 & 0 \\ p_1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{p_1} \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x+p_2+p_3 & p_1p_2 & 0 \\ p_1 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & p_3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Jetzt werde die vierte Colonne mit p_3 multiplicirt, und resp. die dritte und vierte Colonne von der ersten und zweiten abgezogen. Das Resultat wird sein

$$\triangle = \frac{1}{p_1p_3} \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 & 0 & 0 \\ -p_1p_2 & x+p_2+p_3 & p_1p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{vmatrix}.$$

Nunmehr tritt der Laplace'sche Determinantensatz in Kraft und wir finden

$$\triangle = \frac{1}{p_1p_3} \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 \\ -p_1p_2 & x+p_2+p_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_3 \end{vmatrix} = \frac{p_1\ p_3}{p_1\ p_3} \begin{vmatrix} x+p_1 & -1 \\ -p_1p_2 & x+p_2+p_3 \end{vmatrix},$$

wie es ursprünglich verlangt wurde.

§. 20. Wir gehen nunmehr zu einem anderen Gegenstande über. Oben (§. 8) haben wir gesehen, dass zwei Determinanten dann ohne weiteres zu einander addirt oder von einander subtrahirt werden können, wenn

---

place'schen Theoremes in die Elementarwahrheit des §. 6 über. Andererseits könnte man auch die Zerlegungssätze zuerst begründen und aus ihnen für $m = 2$ das Faktum ableiten, dass eine Determinante mit zwei gleichen Reihen Null wird, wie dieser Weg von M. Reiss (Kap. I. §. 12) in der That eingeschlagen worden ist.

sie in ihren Zeilen resp. Colonnen bis auf Eine übereinstimmen; wir fragen uns nun, ob auch für die Multiplikation zweier Determinanten besondere Bedingungen bestehen, oder ob dieselbe unter allen Umständen möglich ist. Multipliciren wir die beiden Determinanten des zweiten Grades

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(c_1 d_2 - c_2 d_1)$$

mit einander, so bekommen wir das Produkt

$$a_1 b_2 c_1 d_2 - a_2 b_1 c_1 d_2 - a_1 b_2 c_2 d_1 + a_2 b_1 c_2 d_1,$$

und dieses kann gleich wieder, wie bereits Gauss (Kap. I. §. 10) bemerkte, auf die Form der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 c_1 + a_2 d_1 & a_1 c_2 + a_2 d_2 \\ b_1 c_1 + b_2 d_1 & b_1 c_2 + b_2 d_2 \end{vmatrix}$$

gebracht werden.

Schliessen wir von diesem Beispiele aus auf dem Wege der Induktion weiter, so gelangen wir zu dem bereits von Cauchy (Kap. I. §. 11) gefundenen Multiplikationstheorem der Determinanten; es lautet:

Das Produkt zweier Determinanten des nten Grades $\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ und $\Sigma \pm b_{1,1} \ldots b_{n,n}$ ist wieder eine Determinante desselben Grades $\Sigma \pm c_{1,1} \ldots c_{n,n}$ und zwar ist allgemein

$$c_{i,k} = a_{i,1} b_{k,1} + a_{i,2} b_{k,2} + \ldots + a_{i,n-1} b_{k,n-1} + a_{i,n} b_{k,n}.$$

Zum Beweise dieses Satzes legen wir die fertige Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} b_{1,1} + a_{1,2} b_{1,2} + \ldots + a_{1,n} b_{1,n} & \ldots & a_{1,1} b_{n,1} + a_{1,2} b_{n,2} + \ldots + a_{1,n} b_{n,n} \\ a_{2,1} b_{1,1} + a_{2,2} b_{1,2} + \ldots + a_{2,n} b_{1,n} & \ldots & a_{2,1} b_{n,1} + a_{2,2} b_{n,2} + \ldots + a_{2,n} b_{n,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} b_{1,1} + a_{n,2} b_{1,2} + \ldots + a_{n,n} b_{1,n} & \ldots & a_{n,1} b_{n,1} + a_{n,2} b_{n,2} + \ldots + a_{n,n} b_{n,n} \end{vmatrix}$$

zu Grunde, die wir, wenn $\triangle$ und $\triangle'$ die ausschliesslich aus den a und b gebildeten Determinanten sind, durch $\triangle''$ bezeichnen wollen. Durch unausgesetzte Anwendung des §. 8 zerlegen wir $\triangle''$ in eine Summe von n^n Einzeldeterminanten, deren Elemente alsdann sämmtlich Monome sind. Man erkennt nun, da sämmtliche untereinanderstehende Summanden je eines Elementes von $\triangle''$ mit gemeinschaftlichen Faktoren behaftet sind, dass ein solcher Faktor auch jeder einzelnen Colonne der neu gebildeten Determinante verbleiben wird, und setzen wir dieselben sämmtlich vor die Determinanten, so erscheinen dieselben ohne Ausnahme multiplicirt mit einem Produkte von n Faktoren. Es zeigt aber der blosse Anblick von $\triangle''$, dass die Determinante $\triangle' = \Sigma \pm b_{1,1} \ldots b_{n,n}$ gerade n! mal erscheinen wird, immer multiplicirt mit einem n gliedrigen Produkte, dessen einzelne Faktoren Elemente der Determinante $\triangle$ sind, und zwar ersichtlich immer solche Elemente, welche in den Indices durchaus verschieden sind. Fassen wir sonach all' diese mit $\triangle'$ verbundenen Produkte zusammen, so ist zunächst

$$\triangle'' = \triangle \cdot \triangle' + S,$$

wo S wiederum eine Summe von $(n^n - n)$ Determinanten darstellt.

Nun geht aber weiterhin aus unserer Zerlegung hervor, dass jede einzelne dieser Determinanten, sobald wir nur den allen Elementen einer Reihe gemeinschaftlichen Faktor entfernt haben, zwei gleiche Reihen hat und somit nach §. 4 sich annullirt. Demnach ist $S = 0$ und $\triangle'' = \triangle . \triangle'$.

Dieser Beweis ist eine Verallgemeinerung des Salmon'schen [25]).

§. 21. Die Wichtigkeit des Gegenstandes gestattet es wohl, die bei dem hier skizzirten Beweise eintretenden Vorgänge an einem speziellen Falle noch genauer darzulegen.

Es sei gegeben die Determinante

$$\underset{(3)}{\Delta''} = \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{1,2}+a_{1,3}b_{1,3} & a_{1,1}b_{2,1}+a_{1,2}b_{2,2}+a_{1,3}b_{2,3} & a_{1,1}b_{3,1}+a_{1,2}b_{3,2}+a_{1,3}b_{3,3} \\ a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{1,2}+a_{2,3}b_{1,3} & a_{2,1}b_{2,1}+a_{2,2}b_{2,2}+a_{2,3}b_{2,3} & a_{2,1}b_{3,1}+a_{2,2}b_{3,2}+a_{2,3}b_{3,3} \\ a_{3,1}b_{1,1}+a_{3,2}b_{1,2}+a_{3,3}b_{1,3} & a_{3,1}b_{2,1}+a_{3,2}b_{2,2}+a_{3,3}b_{2,3} & a_{3,1}b_{3,1}+a_{3,2}b_{3,2}+a_{3,3}b_{3,3} \end{vmatrix}.$$

Durch unsere Zerlegung erhalten wir dann nachstehendes Aggregat von ($3^3 = 27$) Determinanten, welche wir als von den gemeinschaftlichen Faktoren bereits befreit hinstellen wollen. Es ist, wenn diessmal nach den Zeilen zerfällt wird,

$$\underset{(3)}{\Delta''} = a_{1,1}\,b_{1,1}\,a_{2,1}\,b_{2,1}\,a_{3,1}\,b_{3,1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,1}\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,1} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,1} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,1} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{1,1}a_{2,2}a_{3,1}\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,2} \end{vmatrix} + a_{1,1}a_{2,1}a_{3,2}\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,1} & b_{3,2} \end{vmatrix} + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,2}\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,3} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,3} & b_{2,2} \\ b_{3,1} & b_{3,3} & b_{3,2} \end{vmatrix} + a_{1,1}a_{2,1}a_{3,3}\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,1} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,1} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,1} & b_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{1,1}a_{2,3}a_{3,3}\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,3} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,3} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,3} & b_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,1}\begin{vmatrix} b_{1,2} & b_{1,1} & b_{1,1} \\ b_{2,2} & b_{2,1} & b_{2,1} \\ b_{3,2} & b_{3,1} & b_{3,1} \end{vmatrix} + a_{1,2}a_{2,1}a_{3,2}\begin{vmatrix} b_{1,2} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,2} & b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,2} & b_{3,1} & b_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}\begin{vmatrix} b_{1,2} & b_{1,1} & b_{1,3} \\ b_{2,2} & b_{2,1} & b_{2,3} \\ b_{3,2} & b_{3,1} & b_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2}a_{2,2}a_{3,1}\begin{vmatrix} b_{1,2} & b_{1,2} & b_{1,1} \\ b_{2,2} & b_{2,2} & b_{2,1} \\ b_{3,2} & b_{3,2} & b_{3,1} \end{vmatrix} + a_{1,2}a_{2,2}a_{3,2}\begin{vmatrix} b_{1,2} & b_{1,2} & b_{1,2} \\ b_{2,2} & b_{2,2} & b_{2,2} \\ b_{3,2} & b_{3,2} & b_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{1,2}a_{2,2}a_{3,3}\begin{vmatrix} b_{1,2} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,2} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,2} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}\begin{vmatrix} b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,1} \\ b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,1} \\ b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,1} \end{vmatrix} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2}\begin{vmatrix} b_{1,3} & b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,3} & b_{2,1} & b_{2,2} \\ b_{3,3} & b_{3,1} & b_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{1,3}a_{2,1}a_{3,3}\begin{vmatrix} b_{1,3} & b_{1,1} & b_{1,3} \\ b_{2,3} & b_{2,1} & b_{2,3} \\ b_{3,3} & b_{3,1} & b_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}\begin{vmatrix} b_{1,3} & b_{1,2} & b_{1,1} \\ b_{2,3} & b_{2,2} & b_{2,1} \\ b_{3,3} & b_{3,2} & b_{3,1} \end{vmatrix} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,2}\begin{vmatrix} b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,2} \\ b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,2} \\ b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{1,2}a_{2,3}a_{3,3}\begin{vmatrix} b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,3} \\ b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,3} \\ b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,1}\begin{vmatrix} b_{1,3} & b_{1,1} & b_{1,1} \\ b_{2,3} & b_{2,1} & b_{2,1} \\ b_{3,3} & b_{3,1} & b_{3,1} \end{vmatrix} + a_{1,3}a_{2,2}a_{3,2}\begin{vmatrix} b_{1,3} & b_{1,2} & b_{1,2} \\ b_{2,3} & b_{2,2} & b_{2,2} \\ b_{3,3} & b_{3,2} & b_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{1,3}a_{2,2}a_{3,3}\begin{vmatrix} b_{1,3} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,3} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,3} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix} + a_{1,3}a_{2,3}a_{3,1}\begin{vmatrix} b_{1,3} & b_{1,3} & b_{1,1} \\ b_{2,3} & b_{2,3} & b_{2,1} \\ b_{3,3} & b_{3,3} & b_{3,1} \end{vmatrix} + a_{1,3}a_{2,3}a_{3,2}\begin{vmatrix} b_{1,3} & b_{1,3} & b_{1,2} \\ b_{2,3} & b_{2,3} & b_{2,2} \\ b_{3,3} & b_{3,3} & b_{3,2} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{1,3}b_{1,3}\,a_{2,3}b_{2,3}\,a_{3,3}b_{3,3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Von den hier auftretenden Determinanten verschwindet nun die 1te, 2te, 3te, 4te, 5te, 7te, 9te, 10te, 11te, 13te, 14te, 15te, 18te, 20te, 21te, 22te, 23te, 24te, 25te, 26te und 27te, und es bleibt nur — im Hinblick auf §. 4 und 5 — übrig der Ausdruck

$$\underset{(3)}{\Delta''} = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix} \begin{array}{l} (a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} \\ \qquad + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}), \end{array}$$

und, durch Zusammenfassung des Aggregates,

$$\underset{(3)}{\Delta''} = \underset{(3)}{\Delta'} \,.\, \underset{(3)}{\Delta}.$$

§. 22. Indem wir den hier besprochenen Satz successive mehrmals zur Anwendung bringen, erkennen wir sofort die Wahrheit der Thatsache:

Das Produkt beliebig vieler Determinanten desselben Grades ist wieder eine Determinante von gleichem Grade.

So ist z. B.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} a_{1,2} \\ a_{2,1} a_{2,2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} b_{1,1} b_{1,2} \\ b_{2,1} b_{2,2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} c_{1,1} c_{1,2} \\ c_{2,1} c_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{1,2} & a_{1,1}b_{2,1} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{1,2} & a_{2,1}b_{2,1} + a_{2,2}b_{2,2} \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} c_{1,1} c_{1,2} \\ c_{2,1} c_{2,2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}b_{1,1}c_{1,1} + a_{1,2}b_{1,2}c_{1,1} + a_{1,1}b_{2,1}c_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2}c_{1,2} & a_{1,1}b_{1,1}c_{2,1} + a_{1,2}b_{1,2}c_{2,1} + a_{1,1}b_{2,1}c_{2,2} + a_{1,2}b_{2,2}c_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1}c_{1,1} + a_{2,2}b_{1,2}c_{1,1} + a_{2,1}b_{2,1}c_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2}c_{1,2} & a_{2,1}b_{1,1}c_{2,1} + a_{2,2}b_{1,2}c_{2,1} + a_{2,1}b_{2,1}c_{2,2} + a_{2,2}b_{2,2}c_{2,2} \end{vmatrix}.$$

Sind die zu multiplicirenden Determinanten nicht sämmtlich von gleichem Grade, so behält der obige Satz gleichwohl seine Gültigkeit, indem nichts im Wege steht, eine Determinante vom $(n - q)$ten Grade nach den Regeln des §. 6 auf den $n$ten zu erheben. Alsdann können wir unseren Lehrsatz in einer auf Jacobi [26]) zurückzuführenden Weise so formuliren:

Das Produkt von beliebig vielen Determinanten verschiedener Grade ist wieder eine Determinante, deren Grad mit dem höchsten unter den gegebenen Graden übereinstimmt, und deren Elemente linear aus denen der Faktoren zusammengesetzt sind.

So wird man etwa das Produkt

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} M & N \\ P & Q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} M & N & 0 & 0 & 0 \\ P & Q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

setzen, um als Resultat die fünfreihige Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1M + a_2N & a_1P + a_2Q & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1M + b_2N & b_1P + b_2Q & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1M + c_2N & c_1P + c_2Q & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_1M + d_2N & d_1P + d_2Q & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_1M + e_2N & e_1P + e_2Q & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix}$$

zu erhalten.

Ehe wir das Multiplikationstheorem und seine Consequenzen verlassen, sei noch eines interessanten Zusammenhanges desselben mit dem Laplace'schen Determinantensatz gedacht. Dort nämlich entstand durch Multiplikation zweier $n$reihigen Determinanten eine Determinante vom $2n$ten Grade, und man kann nun die Frage aufwerfen, ob nicht durch geeignete Operationen diese Determinante auf einen halb so hohen Grad herabgedrückt werden könne. Dass diess in der That möglich, hat — nach Baltzer's

Angabe [27]) — Gordan gezeigt. Wir werden sein Verfahren an einem speziellen Beispiel hier wiedergeben, indem wir nur den umgekehrten Weg einschlagen und heuristisch zu Werke gehen. Es ist*) nach §. 18

$$\Sigma \pm a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} \cdot \Sigma \pm b_{1,1}b_{2,2}b_{3,3} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ -b_{1,1} & -b_{2,1} & -b_{3,1} & 1 & 0 & 0 \\ -b_{1,2} & -b_{2,2} & -b_{3,2} & 0 & 1 & 0 \\ -b_{1,3} & -b_{2,3} & -b_{3,3} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \triangle.$$

Man multiplicire jetzt die vierte, fünfte und sechste Colonne bezüglich zuerst mit $b_{1,1}$, $b_{2,1}$, $b_{3,1}$, alsdann mit $b_{1,2}$, $b_{2,2}$, $b_{3,2}$ und zum Schluss mit $b_{1,3}$, $b_{2,3}$, $b_{3,3}$ und addire die so umgeformten resp. zur ersten, zweiten und dritten. Diess liefert uns

$$\triangle = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{1,2} + a_{1,3}b_{1,3} & a_{1,1}b_{2,1} + a_{1,2}b_{2,2} + a_{1,3}b_{2,3} & a_{1,1}b_{3,1} + a_{1,2}b_{3,2} + a_{1,3}b_{3,3} & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{1,2} + a_{2,3}b_{1,3} & a_{2,1}b_{2,1} + a_{2,2}b_{2,2} + a_{2,3}b_{2,3} & a_{2,1}b_{3,1} + a_{2,2}b_{3,2} + a_{2,3}b_{3,3} & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1}b_{1,1} + a_{3,2}b_{1,2} + a_{3,3}b_{1,3} & a_{3,1}b_{2,1} + a_{3,2}b_{2,2} + a_{3,2}b_{2,3} & a_{3,1}b_{3,1} + a_{3,2}b_{3,2} + a_{3,3}b_{3,3} & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|,$$

und diese Determinante sechsten Grades reducirt sich ersichtlich auf die durch das eingezeichnete Kreuz ausgeschiedene Determinante des dritten.

§. 23. Wir haben in den bisherigen Paragraphen dieses Kapitels eine Reihe verschiedener Operationen mit den Determinanten vornehmen gelernt und haben uns, um mit den allgemeinen Eigenschaften dieser Gebilde zum Abschlusse zu kommen, nur noch darüber Klarheit zu verschaffen, was man unter dem Differential einer Determinante zu verstehen habe. Da die dem Elemente $a_{i,k}$ zugehörige erste Unterdeterminante von $\triangle = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ nach §. 12 gleich $\frac{d\triangle}{da_{i,k}}$ ist, so erhalten wir nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung für das totale Differential die Relation:

$$d\triangle = \left\{\begin{array}{l} \frac{d\triangle}{da_{1,1}} da_{1,1} + \frac{d\triangle}{da_{1,2}} da_{1,2} + \ldots + \frac{d\triangle}{da_{1,n}} da_{1,n} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{d\triangle}{da_{n,1}} da_{n,1} + \frac{d\triangle}{da_{n,2}} da_{n,2} + \ldots + \frac{d\triangle}{da_{n,n}} da_{n,n}. \end{array}\right.$$

---

*) Dass auch für willkürliche n die angedeutete Verwendung des Minuszeichens in den ersten n Colonnen ein richtiges Ergebniss zur Folge hat, lässt sich leicht übersehen. Ist $n = 2m - 1$, so hat das zweite Diagonalglied

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 4m - 3 = (2m - 1)(4m - 3)$$

Inversionen. Diese Zahl ist ungerade, und zieht man aus jenen Colonnen das Minuszeichen heraus, so tritt vor die Determinante der Faktor (-1); das Produkt ist also positiv. Ist hingegen $n = 2m$, so kann man die Minuszeichen als nicht vorhanden ansehen; es muss somit auch, wenn das Resultat richtig bleiben soll, die Inversionen-Anzahl des zweiten Diagonalgliedes gerade sein. Es ist aber diese Anzahl gleich

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 4m - 1 = 2m(4m - 1),$$

so dass also auch hier die Voraussetzung zutrifft.

Schreiben wir den rechtsstehenden Ausdruck in Form einer Doppelsumme, so ergiebt sich

$$\mathop{S}_{i=1}^{i=n}\mathop{S}_{k=1}^{k=n}\frac{d\triangle}{da_{i,k}}\,da_{i,k}.$$

Soll nach dieser Formel das Differential der Determinante

$$\triangle=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & 0 & 0 & a_5\\ 0 & b_1 & b_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c_1 & c_2 & 0\\ d_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & e_1 & 0 & 0 & e_5\end{vmatrix}$$

berechnet werden, so folgt, wenn man nur die resultirenden Unterdeterminanten entsprechend vereinfacht,

$$d\triangle = b_2c_2d_1e_5\,(da_2) + b_2c_2d_1e_1\,(da_5) + d_1(a_2c_2e_5 - a_5c_2e_1)\,(db_2) + d_1(a_2b_2e_5 - a_5b_2e_1)(dc_2) + b_2(a_2c_2e_5 - a_5c_2e_1)(dd_1) + a_5b_2c_2d_1(de_1) + a_2b_2c_2d_1\,(de_5).$$

§. 24. Die oben aufgeworfene Frage wäre somit gelöst; wir hatten jedoch stillschweigend die Voraussetzung gemacht, dass alle hier auftretenden Elemente vollkommen unabhängig von einander seien. Diese Voraussetzung wollen wir nunmehr fallen lassen. Da der ganz allgemeine Fall einer Determinante, deren Elemente sämmtlich Funktionen von beliebig vielen Variabelen sind, für die Praxis noch wenig Bedeutung gewonnen hat, so begnügen wir uns damit, die einzelnen Elemente als von einer und derselben veränderlichen Grösse x abhängig anzunehmen und die Ableitung der Determinante

$$\triangle=\begin{vmatrix}f_x^{1,1} & \cdots & f_x^{1,n}\\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\\ f_x^{n,1} & \cdots & f_x^{n,n}\end{vmatrix}$$

nach x zu bestimmen.

Es ist dann sofort klar, dass die im vorigen Paragraphen entwickelte Formel, da sämmtliche Elemente für jeden bestimmten Werth von x sich als Constante darstellen, auch jetzt noch gültig ist. Wir bekommen so unmittelbar

$$\frac{d\triangle}{dx}=\mathop{S}_{i=1}^{i=n}\mathop{S}_{k=1}^{k=n}\frac{d\triangle}{df_x^{i,k}}\cdot\frac{df_x^{i,k}}{dx}.$$

In der Theorie der Kettenbrüche treten Determinanten von nachstehender Form:

$$\triangle=\begin{vmatrix}1 & \varrho_1 x & 0 & 0\\ 1 & 1 & \varrho_2 x & 0\\ 0 & 1 & 1 & \varrho_3 x\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\varrho_1\varrho_2\varrho_3\begin{vmatrix}\frac{1}{\varrho_1} & x & 0 & 0\\ \frac{1}{\varrho_2} & \frac{1}{\varrho_2} & x & 0\\ 0 & \frac{1}{\varrho_3} & \frac{1}{\varrho_3} & x\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

auf[28]). Diese Umformung erleichtert das Geschäft des Differentiirens, indem bei der zweiten Form der Determinante $\triangle$ der totale Differentialquotient $\frac{df_x^{i,k}}{dx}$ nur die beiden Werthe 0 und 1 anzunehmen vermag. Demgemäss hat man

$$\frac{d\triangle}{dx} = -\varrho_1\varrho_2\varrho_3 \left[\begin{vmatrix} \frac{1}{\varrho_2} & x & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho_3} & x \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{\varrho_1} & x & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho_3} & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{\varrho_1} & x & 0 \\ \frac{1}{\varrho_2} & \frac{1}{\varrho_2} & x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right].$$

§. 25. Ehe wir diess Kapitel schliessen, müssen wir noch auf eine gewisse abgekürzte Bezeichnungsweise aufmerksam machen, welche in der Determinantentheorie und besonders auch in der sogenannten neueren Algebra vielfach mit Nutzen angewendet wird.

Gesetzt, es sei uns bekannt, die Determinante $\triangle = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ verschwinde nicht allein selbst identisch, sondern es sei das auch der Fall für sämmtliche nach den Elementen ihrer dritten Zeile genommenen ersten Unterdeterminanten, so müssten wir eigentlich diese Gesammtheit von Thatsachen durch gleichzeitiges Anschreiben der 4 Identitäten

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

ausdrücken. Um die hieraus entspringenden Inconvenienzen zu vermeiden, haben neuere — insbesondere englische und italienische — Mathematiker eine besondere neue Bezeichnung eingeführt; sie schreiben nämlich

$$\triangle = \begin{Vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{Vmatrix} = 0$$

und nennen diess Symbol eine **Matrix**. Wenn wir diesen Begriff ganz allgemein fassen, gelangen wir zu folgender Definition:

Unter der Matrix oder unvollständigen Determinante

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{Vmatrix} \quad (m < n)$$

verstehen wir die Gesammtheit aller derjenigen $(n - m)$ten Unterdeterminanten $m$ten Grades, welche aus der $n$reihigen Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

gebildet werden können, ohne dass ein erster Index $q > m$ zugelassen würde.

So bedeutet also

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{matrix}\right\|$$

die 10 Unterdeterminanten zweiten Grades

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_5 \\ b_2 & b_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_5 \\ b_3 & b_5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ b_4 & b_5 \end{vmatrix},$$

welche aus der fünfreihigen Determinante $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4 e_5$ durch Weglassung der drei letzten Horizontalreihen zu bilden sind.

Es leuchtet nun auch ein, dass an der Matrix gewisse Operationen, so z. B. das Multipliciren, sich in ganz ähnlicher Weise vollziehen lassen, wie bei den wirklichen Determinanten. Dass überhaupt mannigfache Theoreme an jenes Symbol sich knüpfen lassen, erhellt u. a. aus nachstehender Behauptung:

Die aus n Zeilen und $(n+1)$ Colonnen bestehende Matrix

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} & a_{n,n+1} \end{matrix}\right\|$$

liefert allgemein die Determinanten-Entwickelung

$$0 = a_{k,1} \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k,2} & a_{k,3} & \dots & a_{k,n} & a_{k,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,2} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n} & a_{n,n+1} \end{vmatrix} - + \dots + (-1)^n a_{k,n+1} \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,n-1} & a_{k,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

unter k jede positive ganze Zahl $\geqq 1$, $\leqq n$ verstanden.

Dass diess sich wirklich so verhält, folgt leicht aus dem in §. 12 zuletzt bewiesenen Lehrsatze.

Wenn man ganz allgemein zu Werke gehen wollte, könnte man allenfalls sogar die Lehre von den unvollständigen Determinanten gänzlich an die Spitze stellen, indem offenbar die gewöhnliche Determinantentheorie darin als Unterfall enthalten ist; man braucht nur in der oben aufgestellten Definition die beiden Zahlen m und n mit einander zu identificiren.

Eine derartige universelle Theorie der unvollständigen Determinanten ist von Trudi [29]) gegeben worden.

1) Günther, Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften, Leipzig 1876. S. 243. — 2) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1875. S. 6. — 3) Diekmann, Einleitung in die Lehre von den Determinanten und ihrer Anwendung auf dem Gebiete der niederen Mathematik, Essen 1876. S. 1. — 4) Baltzer, S. 7. — 5) Becker, Ueber einen Fundamentalsatz der Determinantentheorie, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 16. Jahrg. S. 530 ff. — 6) Mollweide, Demonstratio eliminationis Cramerianae, Lipsiae 1811. — 7) Baltzer, Mathematische Bemerkungen, Leipziger Berichte 1873. S. 533. — 8) Studnička,

Determinantensatz, Prager Berichte 1873. S. 342. — 9) Schüler, Arithmetik und Algebra in philosophischer Begründung, Leipzig 1873. S. 98. — 10) Günther, Didaktische Bemerkungen zur Determinantentheorie, Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 6. Jahrg. S. 138 ff. — 11) Müller, Kurze und schulgemässe Behandlung der Determinanten, Metz 1876. S. 2. — 12) Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher, herausgegeben von Peters, 6. Bd., Altona 1865. S. 106. — 13) Glaisher, On the problem of the eight queens, Philosoph. Magaz. 1874. December. — 14) Jacobi, De formatione et proprietatibus Determinantium, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 22. Band. S. 293. — 15) Mansion, Éléments de la théorie des déterminants d'après Baltzer et Salmon, Mons 1875. S. 20. — 16) Weyrauch, Zur Theorie der Determinanten, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 74. Band. S. 273 ff. — 17) Monro, Baltzer on the number of terms in a determinant with a vanishing diagonal, Messenger of Mathematics 1872. S. 38 ff. — 18) Weihrauch, Zur Determinantenlehre, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 19. Jahrg. S. 420. — 19) Baltzer, Math. Bemerk. S. 534 ff. — 20) Albeggiani, Sviluppo di un determinante ad elementi binomi, Giornale di Matematiche, Vol. X. S. 279 ff. — 21) Id. Sviluppo di un determinante ad elementi polinomi, ibid. Vol. XIII. S. 1 ff. — 22) Günther, Das allgemeine Zerlegungsproblem der Determinanten, Archiv d. Math. u. Phys. 59 Theil. S. 130 ff. — 23) Id. Die mathematischen Lehrmittel der Mittelschule, Zeitschr. f. d. Realschulwesen, 1. Band, S. 43. — 24) Jacobi, S. 299. — 25) Salmon, Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen, deutsch von Fiedler. Leipzig 1863. S. 68. — 26) Jacobi, S. 312. — 27) Baltzer, Determ. S. 54 ff. — 28) Günther, Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrücken in independenter Form, Erlangen 1873. S. 88. — 29) Trudi, Teoria dei determinanti e loro Applicazioni, Napoli 1862.

Kapitel III.

Determinanten von besonderer Form.

Differenzenprodukt, adjungirte Determinanten, symmetrische und symmetrale Determinanten *).

§. 1. Es seien n willkürliche Terme $a_1, a_2 \ldots a_n$ gegeben und deren sämmtliche Differenzen in dem Sinne gebildet, dass immer der höhere Index dem Minuenden angehört. Es wird deren im Ganzen

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n}{2}(n+1)$$

geben. Das Produkt dieser Differenzen, also der Ausdruck

$$\begin{aligned} P = (a_2-a_1)\,(a_3-a_1)\ldots(a_{n-1}-a_1)\,(a_n-a_1) &\times \\ (a_3-a_2)\ldots(a_{n-1}-a_2)\,(a_n-a_2) &\times \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (a_{n-1}-a_{n-2})\,(a_n-a_{n-2}) &\times \\ (a_n-a_{n-1}) &, \end{aligned}$$

hat nun die bemerkenswerthe Eigenschaft, der Determinante nten Grades

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1^0 & a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1} \\ a_2^0 & a_2^1 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^0 & a_n^1 & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

gleich zu sein, wie diess zuerst für den speziellen Fall $n = 3$ von Vandermonde[1]), allgemein dagegen von Cauchy[2]) bewiesen wurde.

Wir führen den Beweis, indem wir von der Determinante $\triangle$ ausgehen. Es ist klar, dass $\triangle$ nur eine algebraische rationale ganze Funktion der darin vorkommenden n Grössen sein kann, und zwar wird dieselbe, da jedes Glied der ausgerechneten Determinante je eine Potenz vom Grade 0 bis $(n - 1)$ enthält, vom Grade $\frac{n}{2}(n-1)$ sein. Denkt man sich allgemein die kte Zeile von der iten $(k < i)$ subtrahirt, so erkennt

---

*) An sich würden auch die sogenannten Kettenbruchdeterminanten ihres charakteristischen Baues halber hier mit aufzuzählen sein. Weil dieselben jedoch eine ganze Disciplin der algebraischen Analysis unter einer neuen Form darzustellen gestatten, haben wir deren Theorie einem selbstständigen Kapitel (dem fünften) überwiesen.

man, dass die jetzige i te Zeile ausschliesslich Binome der Form $(a_i^a - a_k^a)$ enthält, d. h. nach §. 7 ist $\triangle$ durch $(a_i - a_k)$ ohne Rest theilbar. Da i und k alle Werthe zwischen 0 und n annehmen können, so muss nothwendig

$$\triangle = \lambda P$$

sein, unter λ einen constanten von den a unabhängigen und für alle Grade gleichen Faktor verstanden. Nun ist aber

$$\begin{vmatrix} a_1^0 & a_1^1 \\ a_2^0 & a_2^1 \end{vmatrix} = \lambda(a_2 - a_1) = a_2 - a_1 ,$$

d. h. $\lambda = 1$, womit dieser Satz bewiesen ist.

Ganz ähnlich lässt sich zeigen, dass

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ . & . & . & . & . & . \\ a_n^1 & a_n^2 & a_n^3 & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n P$$

ist [3]). δ ist jetzt eine Funktion des Grades $\frac{n}{2}(n+1)$. Nimmt man nun an, es sei etwa $a_i = a_k$, so werden zwei Zeilen gleich und δ verschwindet, es muss also durch $(a_i - a_k)$ theilbar sein. Vorläufig haben wir somit

$$\delta = MP,$$

wo M gleich $f(a_1, a_2 \dots a_n)$ vom Grade $\left(\frac{n}{2}(n+1) - \frac{n}{2}(n-1) = n\right)$ sein wird.

Diese Bedingung ist ersichtlich nur dann zu erfüllen, wenn man $M = \prod_{h=1}^{h=n} a_h$ setzt.

Die hier gegebene Deduktion ist die einfachste und zugleich kürzeste, welche sich denken lässt, verstattet aber keinen so unmittelbaren Einblick in das Wesen der Sache, wie jenes Beweisverfahren, welches wir jetzt noch am speziellen Beispiel darstellen wollen. In der Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

subtrahiren wir die vierte Zeile von der dritten, die dritte von der zweiten, die zweite von der ersten und bekommen

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_2^2 - a_1^2 & a_2^3 - a_1^3 \\ a_3 - a_2 & a_3^2 - a_2^2 & a_3^3 - a_2^3 \\ a_4 - a_3 & a_4^2 - a_3^2 & a_4^3 - a_3^3 \end{vmatrix} = \prod_{h=2}^{h=4}(a_h - a_{h-1}) \begin{vmatrix} 1 & a_2 + a_1 & a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2 \\ 1 & a_3 + a_2 & a_3^2 + a_3 a_2 + a_2^2 \\ 1 & a_4 + a_3 & a_4^2 + a_4 a_3 + a_3^2 \end{vmatrix}.$$

Ein analoges Verfahren liefert mit Berücksichtigung von §. 6

$$\triangle = \prod_{h=2}^{h=4}(a_h - a_{h-1}) \begin{vmatrix} a_3 - a_1 & a_3^2 + a_3 a_2 - a_1^2 - a_2 a_1 \\ a_4 - a_2 & a_4^2 + a_4 a_3 - a_2^2 - a_3 a_2 \end{vmatrix};$$

jetzt lässt sich resp. $(a_3 - a_1)$ und $(a_4 - a_2)$ vor die Determinante setzen, so dass

$$\triangle = (a_2-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_3)(a_3-a_1)(a_4-a_2)\begin{vmatrix}1 & a_3+a_2+a_1\\ 1 & a_4+a_3+a_2\end{vmatrix}$$

wird, und, indem man schliesslich die erste Horizontalreihe von der zweiten abzieht, findet sich als Endresultat

$$\triangle = (a_2-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_3)(a_3-a_1)(a_4-a_2)(a_4-a_1),$$

wie behauptet war.

§. 2. Indem wir den Buchstaben P in seiner bisherigen Bedeutung beibehalten, können wir weiter folgenden Satz aufstellen, welcher als Verallgemeinerung des vorigen aufgefasst werden kann:

Der Determinanten-Quotient

$$\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} & a_1^q\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} & a_2^q\\ . & . & . & . & . & .\\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2} & a_n^q\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} & a_1^{n-1}\\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} & a_2^{n-1}\\ . & . & . & . & . & .\\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2} & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

ist stets eine ganze Zahl, woferne das Gleiche für die a gilt.

Da der Divisor dem Differenzenprodukt P gleich ist, so brauchen wir uns blos zu überzeugen, ob jeder Faktor dieses letzteren in der Determinante $\triangle$ des Dividenden ohne Rest enthalten ist.

Subtrahiren wir wie vorhin die kte von der iten Zeile, unter k und i willkürliche ganze Zahlen $\geqq 1$, $\leqq n$ verstanden, so wird

$$\triangle = \begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} & a_1^q\\ . & . & . & . & . & .\\ 0 & a_i - a_k & a_i^2 - a_k^2 & \ldots & a_i^{n-2} - a_k^{n-2} & a_i^q - a_k^q\\ . & . & . & . & . & .\\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2} & a_n^q\end{vmatrix},$$

und man erkennt sofort, dass sämmtliche Elemente der iten Zeile die Grösse $(a_i - a_k)$ als gemeinschaftlichen Faktor enthalten. Daraus folgt dann aber weiter, dass jede der $\frac{n}{2}(n+1)$ Differenzen, aus deren Produkt P besteht, in $\triangle$ ohne Rest aufgeht, und diess war zu beweisen.

Es soll nun diese Division auch wirklich ausgeführt werden, wobei dann freilich die soeben bewiesene Eigenschaft des Quotienten zurücktritt. Zerlegt man das ursprüngliche $\triangle$ nach den Elementen der letzten Colonne in erste Unterdeterminanten, so ergiebt sich zunächst

$$\triangle = a_1^q \frac{d\triangle}{da_1^q} + \ldots + a_s^q \frac{d\triangle}{da_s^q} + \ldots + a_n^q \frac{d\triangle}{da_n^q}.$$

Jeder der hier auftretenden Minoren hat nun aber dieselbe Form wie P; wir können also auf jeden einzelnen die Resultate des vorigen Paragraphen anwenden und finden

$$\frac{d\triangle}{da_s^q} = \pm \begin{vmatrix}1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2}\\ . & . & . & . & .\\ 1 & a_{s-1} & a_{s-1}^2 & \ldots & a_{s-1}^{n-2}\\ 1 & a_{s+1} & a_{s+1}^2 & \ldots & a_{s+1}^{n-2}\\ . & . & . & . & .\\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2}\end{vmatrix} = \begin{array}{r}(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_{s-1}-a_1)(a_{s+1}-a_1)\\ \ldots(a_n-a_1) \times (a_3-a_2)(a_4-a_2)\\ \ldots(a_{s-1}-a_2)(a_{s+1}-a_2)\ldots(a_n-a_2) \times\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (a_n-a_{n-1}).\end{array}$$

Denken wir uns diesen Werth oben eingesetzt und hierauf mit P dividirt, so stellt sich uns der Quotient dar als eine algebraische Summe aus n Summanden, deren allgemeines Glied gleich

$$\frac{(-1)^{n+s-2}\, a_s^q}{(a_s-a_1).(a_s-a_2)\ldots(a_s-a_{s-1})\,(a_{s+1}-a_s)\ldots(a_{n-1}-a_s)\,(a_n-a_s)}$$

ist. Führen wir diesen Ausdruck ein, so nimmt der ganzzahlige Quotient die scheinbare Bruchform an, wobei $(-1)^{n+s-2}$ entsprechend vereinfacht ist:

$$\mathop{S}_{s=2}^{s=n}\frac{(-1)^{n+s}\, a_s^q}{(a_s-a_1)\ldots(a_s-a_{s-1})\,(a_{s+1}-a_s)\ldots(a_n-a_s)}.$$

Diese Summe, für welche Nägelsbach[4]) das Symbol $\overset{q}{(a_1 \ldots a_n)}$ in Vorschlag gebracht hat, scheint hier in übersichtlicherer Form dargestellt zu sein als bei Baltzer[5]), welcher dafür das Bestehen der Relation

$$\overset{q}{(a_1 \ldots a_n)} = \mathop{S}_{s=1}^{s=n}\frac{a_s^q}{f'a_s}\ \left(f_x = \mathop{\Pi}_{s=1}^{s=n}(x-a_s)\right)$$

nachgewiesen hat.

So wäre z. B.

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 16\\ 1 & 3 & 81\\ 1 & 5 & 625\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\\ 1 & 5 & 25\end{vmatrix} = \frac{16}{(5-2)(3-2)} - \frac{81}{(5-3)(3-2)} + \frac{625}{(5-3)(5-2)} = \frac{414}{6} = 69.$$

Die Funktion $\overset{q}{(a_1 \ldots a_n)}$ könnte auch durch die Funktionalgleichung

$$\overset{q+1}{(a_1 \ldots a_n)} = \overset{q}{(a_1 \ldots a_{n-1})} + a_n \overset{q^*}{(a_1 \ldots a_n)}$$

definirt werden, deren Richtigkeit sofort aus der obigen Summenformel hervorgeht. Denn betrachtet man blos die allgemeinen Glieder, so ist ersichtlich

$$\frac{(-1)^{n+s}\, a_s^{q+1}}{(a_s-a_1)\ldots(a_s-a_{s-1})\,(a_{s+1}-a_s)\ldots(a_{n-1}-a_s)\,(a_n-a_s)}$$

$$= \frac{(-1)^{n+s-1}\, a_s^{q-1}\,[a_s(a_n-a_s) - a_n a_s]}{(a_s-a_1)\ldots(a_s-a_{s-1})\,(a_{s+1}-a_s)\ldots(a_{n-1}-a_s)\,(a_n-a_s)}$$

$$= \frac{(-1)^{n+s-1}\, a_s^q}{(a_s-a_1)\ldots(a_s-a_{s-1})\,(a_{s+1}-a_s)\ldots(a_{n-1}-a_s)}$$

$$+ a_n \frac{(-1)^{n+s}\, a_s^q}{(a_s-a_1)\ldots(a_s-a_{s-1})\,(a_{s+1}-a_s)\ldots(a_{n-1}-a_s)\,(a_n-a_s)}.$$

Vermittelst dieser Relation hat Nägelsbach (s. o.) die ganz allgemeine Determinante

$$\Sigma \pm a_1^{m_1}\, a_2^{m_2}\, a_3^{m_3} \ldots a_n^{m_n}$$

in eleganter Weise umformen gelehrt.

§. 3. Unter den Determinanten von spezieller Form sind weiterhin besonders wichtig die adjungirten Determinanten, welche folgendermassen definirt werden.

Es sei $\triangle = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}$ eine beliebige Determinante, aus welcher die folgende

$$\triangle' = \begin{vmatrix} \frac{d\triangle}{da_{1,1}} & \ldots & \frac{d\triangle}{da_{1,n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\triangle}{da_{n,1}} & \ldots & \frac{d\triangle}{da_{n,n}} \end{vmatrix}$$

gebildet wird. Dann sagt man, die Determinante $\triangle'$ sei der Determinante $\triangle$ adjungirt.

Dieser Ausdruck rührt ursprünglich von Gauss her, in seiner jetzigen Bedeutung aber von Cauchy (Kap. I. §. 10 und 11).

Multipliciren wir $\triangle$ mit $\triangle'$, so erhalten wir nach Kap. II. §. 20, indem wir uns sämmtliche Summen zwischen den Grenzen 1 und n genommen denken,

$$\triangle\triangle' = \begin{vmatrix} S\frac{d\triangle}{da_{1,k}}\,a_{1,k} & S\frac{d\triangle}{da_{1,k}}\,a_{2,k} & S\frac{d\triangle}{da_{1,k}}\,a_{3,k} & \ldots & S\frac{d\triangle}{da_{1,k}}\,a_{n,k} \\ S\frac{d\triangle}{da_{2,k}}\,a_{1,k} & S\frac{d\triangle}{da_{2,k}}\,a_{2,k} & S\frac{d\triangle}{da_{2,k}}\,a_{3,k} & \ldots & S\frac{d\triangle}{da_{2,k}}\,a_{k,n} \\ S\frac{d\triangle}{da_{3,k}}\,a_{1,k} & S\frac{d\triangle}{da_{3,k}}\,a_{2,k} & S\frac{d\triangle}{da_{3,k}}\,a_{3,k} & \ldots & S\frac{d\triangle}{da_{3,k}}\,a_{n,k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S\frac{d\triangle}{da_{n,k}}\,a_{1,k} & S\frac{d\triangle}{da_{n,k}}\,a_{2,k} & S\frac{d\triangle}{da_{n,k}}\,a_{3,k} & \ldots & S\frac{d\triangle}{da_{n,k}}\,a_{n,k} \end{vmatrix}.$$

Jedes Element der ersten Diagonalreihe hat nun die Gestalt

$$a_{i,1}\frac{d\triangle}{da_{i,1}} + a_{i,2}\frac{d\triangle}{da_{i,2}} + \ldots + a_{i,n}\frac{d\triangle}{da_{i,n}},$$

und jedes solches Glied stellt nach Kap. II. §. 13 die Determinante $\triangle$ selbst dar. Jedes beliebige andere Element ist dagegen von der Form

$$a_{i,1}\frac{d\triangle}{da_{h,1}} + a_{i,2}\frac{d\triangle}{da_{h,2}} + \ldots + a_{i,n}\frac{d\triangle}{da_{h,n}} = 0,$$

wie ebenfalls an jener Stelle bemerkt wurde. Es reducirt sich also (Kap II. §. 5) die Determinante auf ihr Anfangsglied, und man hat

$$\triangle\triangle' = \triangle^n.$$

Diess liefert den wichtigen Lehrsatz:

Die adjungirte Determinante einer Determinante vom nten Grade ist die (n — 1)te Potenz dieser letzteren.

So haben wir z. B.

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{2,2} & -a_{2,1} \\ -a_{1,2} & a_{1,1} \end{vmatrix} = \triangle' = \triangle^{2-1}.$$

Bilden wir die adjungirte Determinante von

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ c & d & 0 \\ o & e & f \end{vmatrix} = adf + bce,$$

so ist dieselbe

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} d & 0 \\ e & f \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} c & o \\ 0 & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c & d \\ 0 & e \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & b \\ e & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ o & f \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & e \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & b \\ d & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} a & b \\ c & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

$$= ad(adf^2 + bcef) + bc(adef + bce^2) - bd(acef - acef)$$
$$= a^2d^2f^2 + 2abcdef + b^2c^2e^2 = \Delta^2 = \Delta^{3-1}.$$

§. 4. An den so eben bewiesenen Satz reiht sich naturgemäss ein anderer allgemeinerer an, dessen Beweis — ebenso wie der des vorigen — von Borchardt [6]) herrührt; wir gestalten dessen äussere Form nach dem Muster um, welches unlängst von Hoza [7]) aufgestellt und durch Anschaulichkeit ausgezeichnet ist. Es sei wiederum

$$\Delta = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}, \quad \Delta' = \Sigma \pm \frac{d\Delta}{da_{1,1}} \ldots \frac{d\Delta}{da_{n,n}};$$

von letzterer Determinante bilden wir durch Aushebung von r willkürlichen Zeilen und Colonnen die (n — r)te Unterdeterminante rter Ordnung

$$\Delta'_r = \begin{vmatrix} \frac{d\Delta}{da_{p_1,q_1}} & \frac{d\Delta}{da_{p_1,q_2}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p_1,q_r}} \\ \frac{d\Delta}{da_{p_2,q_1}} & \frac{d\Delta}{da_{p_2,q_2}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p_2,q_r}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\Delta}{da_{p_r,q_1}} & \frac{d\Delta}{da_{p_r,q_2}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p_r,q_r}} \end{vmatrix}$$

und führen dieselbe mit Hülfe des Laplace'schen Satzes (Kap. II. §. 18) in nachstehende Form über:

$$\Delta'_r = \begin{vmatrix} \frac{d\Delta}{da_{p_1,q_1}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p_1,q_r}} & \frac{d\Delta}{da_{p_1,1}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p_1,q_1-1}} & \frac{d\Delta}{da_{p_1,q_1+1}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p_1,q_2-1}} & \frac{d\Delta}{da_{p_1,q_2+1}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p_1,n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\Delta}{da_{p_r,q_1}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p_r,q_r}} & \frac{d\Delta}{da_{p_r,1}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p_r,q_1-1}} & \frac{d\Delta}{da_{p_r,q_1+1}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p_r,q_2-1}} & \frac{d\Delta}{da_{p_r,q_2+1}} & \cdots & \frac{d\Delta}{da_{p_r,n}} \\ 0 & & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix}_{(n-r)}$$

Andererseits kann man auch durch einfache Reihenvertauschung der letzterhaltenen n reihigen Determinante die folgende vom gleichen Grade gegenüberstellen:

$$\pm\triangle=\begin{vmatrix} a_{p_1,q_1} & \ldots & a_{p_1,q_r} & a_{p_1,1} & \ldots & a_{p_1,q_1-1} & a_{p_1,q_1+1} & \ldots & a_{p_1,q_2-1} & a_{p_1,q_2+1} & \ldots & a_{p_1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p_r,q_1} & \ldots & a_{p_r,q_r} & a_{p_r,1} & \ldots & a_{p_r,q_1-1} & a_{p_r,q_1+1} & \ldots & a_{p_r,q_2-1} & a_{p_r,q_2+1} & \ldots & a_{p_r,n} \\ a_{1,q_1} & \ldots & a_{1,q_r} & a_{1,1} & \ldots & a_{1,q_1-1} & a_{1,q_1+1} & \ldots & a_{1,q_2-1} & a_{1,q_2+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,q_1} & \ldots & a_{n,q_r} & a_{n,1} & \ldots & a_{n,q_1-1} & a_{n,q_1+1} & \ldots & a_{n,q_2-1} & a_{n,q_2+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir diese beiden Determinanten $n$ten Grades mit einander und halten uns dabei die Resultate von Kap. II. §. 13 stets gegenwärtig, so erhalten wir

$$\pm\triangle\triangle'_r=\left|\begin{array}{ccccc|cccccccccc} \triangle & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{p_1,1} & \ldots & a_{p_1,q_1-1} & a_{p_1,q_1+1} & \ldots & a_{p_1,q_2-1} & a_{p_1,q_2+1} & \ldots & a_{p_1,n} \\ 0 & \triangle & 0 & \ldots & 0 & a_{p_2,1} & \ldots & a_{p_2,q_1-1} & a_{p_2,q_1+1} & \ldots & a_{p_2,q_2-1} & a_{p_2,q_2+1} & \ldots & a_{p_2,n} \\ 0 & 0 & \triangle & \ldots & 0 & a_{p_3,1} & \ldots & a_{p_3,q_1-1} & a_{p_3,q_1+1} & \ldots & a_{p_3,q_2-1} & a_{p_3,q_2+1} & \ldots & a_{p_3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \triangle & a_{p_r,1} & \ldots & a_{p_r,q_1-1} & a_{p_r,q_1+1} & \ldots & a_{p_r,q_2-1} & a_{p_r,q_2+1} & \ldots & a_{p_r,n} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1,1} & \ldots & a_{1,q_1-1} & a_{1,q_1+1} & \ldots & a_{1,q_2-1} & a_{1,q_2+1} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{2,1} & \ldots & a_{2,q_1-1} & a_{2,q_1+1} & \ldots & a_{2,q_2-1} & a_{2,q_2+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{p_1-1,1} & \ldots & a_{p_1-1,q_1-1} & a_{p_1-1,q_1+1} & \ldots & a_{p_1-1,q_2-1} & a_{p_1-1,q_2+1} & \ldots & a_{p_1-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{p_1+1,1} & \ldots & a_{p_1+1,q_1-1} & a_{p_1+1,q_1+1} & \ldots & a_{p_1+1,q_2-1} & a_{p_1+1,q_2+1} & \ldots & a_{p_1+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{p_2-1,1} & \ldots & a_{p_2-1,q_1-1} & a_{p_2-1,q_1+1} & \ldots & a_{p_2-1,q_2-1} & a_{p_2-1,q_2+1} & \ldots & a_{p_2-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{p_2+1,1} & \ldots & a_{p_2+1,q_1-1} & a_{p_2+1,q_1+1} & \ldots & a_{p_2+1,q_2-1} & a_{p_2+1,q_2+1} & \ldots & a_{p_2+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n,1} & \ldots & a_{n,q_1-1} & a_{n,q_1+1} & \ldots & a_{n,q_2-1} & a_{n,q_2+1} & \ldots & a_{n,n} \end{array}\right|;$$

und zerfällen wir diese neue Determinante nach dem Laplace'schen Theorem, so bleibt uns bei geeigneter Berücksichtigung des Vorzeichens der Unterdeterminante $\triangle_{n-r}$

$$\triangle\triangle'_r = \triangle^r\triangle_{n-r}, \quad \triangle'_r = \triangle^{r-1}\triangle_{n-r}.$$

In Worten lautet dieser Satz:

Jede $r$te Unterdeterminante N einer adjungirten Determinante ist gleich der $(r-1)$ten Potenz der ursprünglichen, multiplirt mit derjenigen Unterdeterminante der letzteren, welche bei der Entwickelung dem Coëfficienten von N entspricht.

§. 5. Es möge diess an der Determinante $\triangle = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3}\, a_{4,4}$ verdeutlicht werden. Von der Unterdeterminante $\triangle'_2 = \Sigma \pm \frac{d\triangle}{da_{1,1}} \frac{d\triangle}{da_{3,3}}$ ausgehend bilden wir das Produkt

$$\begin{vmatrix} \frac{d\triangle}{da_{1,1}} & \frac{d\triangle}{da_{1,3}} & \frac{d\triangle}{da_{1,2}} & \frac{d\triangle}{da_{1,4}} \\ \frac{d\triangle}{da_{3,1}} & \frac{d\triangle}{da_{3,3}} & \frac{d\triangle}{da_{3,2}} & \frac{d\triangle}{da_{3,4}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} & a_{1,2} & a_{1,4} \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,2} & a_{3,4} \\ a_{2,1} & a_{2,3} & a_{2,2} & a_{2,4} \\ a_{4,1} & a_{4,3} & a_{4,2} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{S}\frac{d\triangle}{da_{1,k}}\, a_{1,k} & \mathrm{S}\frac{d\triangle}{da_{1,k}}\, a_{3,k} & \mathrm{S}\frac{d\triangle}{da_{1,k}}\, a_{2,k} & \mathrm{S}\frac{d\triangle}{da^{1,k}}\, a_{4,k} \\ \mathrm{S}\frac{d\triangle}{da_{3,k}}\, a_{1,k} & \mathrm{S}\frac{d\triangle}{da_{3,k}}\, a_{3,k} & \mathrm{S}\frac{d\triangle}{da_{3,k}}\, a_{2,k} & \mathrm{S}\frac{d\triangle}{da_{3,k}}\, a_{4,k} \\ a_{1,2} & a_{3,2} & a_{2,2} & a_{4,2} \\ a_{1,4} & a_{3,4} & a_{2,4} & a_{4,4} \end{vmatrix},$$

wobei wir uns wieder die Summen von 1 bis 4 ausgedehnt denken müssen. Da nun nach Kap. II. §. 13

$$\mathrm{S}\frac{d\triangle}{da_{m,k}}\, a_{m,k} = \triangle,\quad \mathrm{S}\frac{d\triangle}{da_{m,k}}\, a_{n,k} = 0$$

ist, so erhalten wir zum Schluss

$$\triangle'_2\triangle = \triangle^{4-2} \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{4,2} \\ a_{2,4} & a_{4,4} \end{vmatrix}$$

in der geforderten Weise.

Die bislang in der Lehre von den adjungirten Determinanten vorgeführten Beweise beruhen sämmtlich auf einem an sich höchst eleganten Kunstgriffe, der jedoch auf den ersten Blick etwas Befremdendes haben mag. Wir reproduciren deshalb hier noch weiter das Verfahren von Studnička *), welches einzig und allein durch direkte Zerlegung der Determinanten zum gleichen Ziele gelangen lehrt [8]). Nur werden wir die am speziellen Falle fortschreitende Darstellung entsprechend verallgemeinern.

Es ist, wie wir wissen,

$$\triangle = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n} = a_{1,k}\frac{d\triangle}{da_{1,k}} + \ldots + a_{i,k}\frac{d\triangle}{da_{i,k}} + \ldots + a_{n,k}\frac{d\triangle}{da_{n,k}}.$$

Diese Gleichung lässt sich auch so umschreiben:

$$\triangle^{n-1} = a_{1,k}\frac{d\triangle}{da_{1,k}}\,\triangle^{n-2} + \ldots + a_{i,k}\frac{d\triangle}{da_{i,k}}\,\triangle^{n-2} + \ldots + a_{n,k}\frac{d\triangle}{da_{n,k}}\,\triangle^{n-2}.$$

Nehmen wir jetzt den oben ausgesprochenen Satz als bereits bewiesen an, so gelangen wir zu nachstehender Identität:

$$a_{i,k}\,\triangle^{n-2} = \Sigma \pm \frac{d\triangle}{da_{1,1}} \ldots \frac{d\triangle}{da_{k,k+1}}\,\frac{d\triangle}{da_{k+1,k+2}} \ldots \frac{d\triangle}{da_{i-1,i}}\,\frac{d\triangle}{da_{i+1,i+1}} \ldots \frac{d\triangle}{da_{n,n}}.$$

Denkt man sich die entsprechende Relation für $a_{i,k}$, $a_{p,q}$, $a_{p,k}$, $a_{i,q}$ gebildet und auf der rechten Seite durchaus nach ersten Unterdeterminanten entwickelt, so kann man offenbar setzen:

---

*) In einem Referate des Berliner „Jahrb. f. d. Fortschr. d. Mathem." war jenes Verfahren ein induktorisches genannt worden. Diese Bezeichnung trifft jedoch nicht völlig das Wesen der Sache, vielmehr ist die Grundidee folgende: Gelangt man von einer hypothetischen Annahme durch richtige Schlüsse zu einer bereits bekannten Thatsache, so ist jene Annahme verificirt. Das ist aber nicht eigentlich Induktion, sondern Analyse im Sinne der Elementargeometrie.

$$a_{i,k}\,\triangle^{n-2} = \frac{d\triangle}{da_{p,q}} \,.\, \Sigma \pm \frac{d\triangle}{da_{1,1}}\,\frac{d\triangle}{da_{2,2}} \ldots + \text{etc.}$$

$$a_{p,q}\,\triangle^{n-2} = \frac{d\triangle}{da_{i,k}} \,.\, \Sigma \pm \frac{d\triangle}{da_{1,1}}\,\frac{d\triangle}{da_{2,2}} \ldots + \text{etc.}$$

$$a_{p,k}\,\triangle^{n-2} = \frac{d\triangle}{da_{i,q}} \,.\, \Sigma \pm \frac{d\triangle}{da_{1,1}}\,\frac{d\triangle}{da_{2,2}} \ldots + \text{etc.}$$

$$a_{i,q}\,\triangle^{n-2} = \frac{d\triangle}{da_{p,k}} \,.\, \Sigma \pm \frac{d\triangle}{da_{1,1}}\,\frac{d\triangle}{da_{2,2}} \ldots + \text{etc.}$$

Zieht man jetzt von dem Produkte der beiden ersten Gleichungen dasjenige der beiden letzten ab, so bleibt

$$\begin{vmatrix} a_{i,k} & a_{p,k} \\ a_{i,q} & a_{p,q} \end{vmatrix} \triangle^{2n-4} = \begin{vmatrix} \frac{d\triangle}{da_{i,k}} & \frac{d\triangle}{da_{p,k}} \\ \frac{d\triangle}{da_{i,q}} & \frac{d\triangle}{da_{p,q}} \end{vmatrix} \cdot \left[\Sigma \pm \frac{d\triangle}{da_{1,1}}\,\frac{d\triangle}{da_{2,2}} \ldots\right]^2 + \text{etc.}$$

Zerlegt man andererseits die adjungirte Determinante $\triangle^{n-1}$ nach Kap. II. §. 17 in Aggregate von Unterdeterminanten des 2ten und $(n - 2)$ten Grades, so ist

$$\triangle^{n-1} = \begin{vmatrix} \frac{d\triangle}{da_{i,k}} & \frac{d\triangle}{da_{p,k}} \\ \frac{d\triangle}{da_{i,q}} & \frac{d\triangle}{da_{p,q}} \end{vmatrix} \,.\, \Sigma \pm \frac{d\triangle}{da_{1,1}}\,\frac{d\triangle}{da_{2,2}} \ldots + \text{etc.},$$

und da, nach Voraussetzung,

$$\begin{vmatrix} a_{i,k} & a_{p,k} \\ a_{i,q} & a_{p,q} \end{vmatrix} \triangle^{2n-4} = \begin{vmatrix} \frac{d\triangle}{da_{i,k}} & \frac{d\triangle}{da_{p,k}} \\ \frac{d\triangle}{da_{i,q}} & \frac{d\triangle}{da_{p,k}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i,k} & a_{p,k} \\ a_{i,q} & a_{p,q} \end{vmatrix} \triangle^{n-3} \,.\, \Sigma \pm \frac{d\triangle}{da_{1,1}}\,\frac{d\triangle}{da_{2,2}} \ldots + \text{etc.}$$

ist, so folgt durch unmittelbare Comparation

$$\begin{vmatrix} a_{i,k} & a_{p,k} \\ a_{i,q} & a_{p,q} \end{vmatrix} \triangle^{n-3} = \Sigma \pm \frac{d\triangle}{da_{1,1}}\,\frac{d\triangle}{da_{2,2}} \ldots,$$

wobei aus der rechtsstehenden Determinante alle mit $\frac{d\triangle}{da_{i,k}}$ und $\frac{d\triangle}{da_{p,q}}$ in gleicher Reihe stehenden Elemente auszuscheiden sind.

Fahren wir in gleicher Weise fort zu zerlegen, so gelangen wir endlich zu der bereits bekannten Relation

$$\triangle^0\, \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{k,k+1}\, a_{k+1,k+2} \ldots a_{i-1,i}\, a_{i+1,i+1} \ldots a_{n,n} = \frac{d\triangle}{da_{i,k}},$$

und damit rechtfertigt sich auch die obige Voraussetzung.

Uebersichtlicher gestaltet sich bei **Studnička** die Sache [9]), weil er in seiner Determinante $\triangle = \Sigma \pm A_1\, B_2 \ldots K_{n-1}\, L_n$ sich ausschliesslich an die erste Horizontalreihe hält.

Er findet:

$$\triangle^{n-1} = \Sigma \pm \frac{d\triangle}{dA_1}\,\frac{d\triangle}{dB_2}\,\frac{d\triangle}{dC_3}\,\frac{d\triangle}{dD_4}\cdots\frac{d\triangle}{dK_{n-1}}\,\frac{d\triangle}{dL_n},$$

$$\triangle^{n-2}\,A_1 = \Sigma \pm \frac{d\triangle}{dB_2}\,\frac{d\triangle}{dC_3}\,\frac{d\triangle}{dD_4}\cdots\frac{d\triangle}{dK_{n-1}}\,\frac{d\triangle}{dL_n},$$

$$\triangle^{n-3}\,\Sigma \pm A_1\,B_2 = \Sigma \pm \frac{d\triangle}{dC_3}\,\frac{d\triangle}{dD_4}\cdots\frac{d\triangle}{dK_{n-1}}\,\frac{d\triangle}{dL_n},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\triangle^{1}\,\Sigma \pm A_1\,B_2\,C_3\ldots J_{n-2} = \Sigma \pm \frac{d\triangle}{dK_{n-1}}\,\frac{d\triangle}{dL_n},$$

$$\triangle^{0}\,\Sigma \pm A_1\,B_2\,C_3\ldots J_{n-2}\,K_{n-1} = \frac{d\triangle}{dL_n}.$$

§. 6. Wir gehen nunmehr zu einer anderen besonderen Klasse von Determinanten über, zu denjenigen nämlich, welche man symmetrisch nennt. Die Definition einer solchen Determinante ist bei Zugrundelegung unserer Bezeichnungsweise durch die Relation $a_{k,i} = a_{i,k}$ gegeben, so dass also natürlich die Diagonalelemente $a_{m,m}$ willkürlich bleiben. Dehnen wir diese Festsetzung auch auf die andere Diagonale aus, so können wir als geometrisches Kennzeichen der Symmetrie folgendes angeben: Eine Determinante ist dann symmetrisch, wenn jedem beliebigen Elemente ein anderes ihm gleiches in der Weise zugeordnet werden kann, dass ihre Verbindungslinie von einer der beiden Diagonalen senkrecht halbirt wird. So sind etwa

$$\begin{vmatrix} a & f & k & n & p \\ f & b & g & l & q \\ k & g & c & h & m \\ n & l & h & d & i \\ p & q & m & i & e \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} d_1 & c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 & b_1 \\ b_3 & a_3 & b_2 & c_1 \\ a_4 & b_3 & c_2 & d_1 \end{vmatrix}$$

symmetrisch. Man erkennt sofort, dass jede einer symmetrischen Determinante condiagonale Unterdeterminante (Kap. II. §. 16) selbst wieder eine solche ist.

Eine symmetrische Determinante muss stets entstehen, wenn man eine willkürliche Determinante in's Quadrat erhebt. So ist z. B. nach der Multiplikationsregel

$$\left(\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\right)^2 = \begin{vmatrix} a_1^2+b_1^2+c_1^2 & a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 \\ a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 & a_2^2+b_2^2+c_2^2 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 \\ a_1a_3+b_1b_3+c_1c_3 & a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3 & a_3^2+b_3^2+c_3^2 \end{vmatrix}.$$

Diese Thatsache lässt sich leicht ganz allgemein feststellen; denn setzen wir die durch Multiplikation einer Determinante $\triangle = \Sigma \pm a_{1,1}\ldots a_{n,n}$ mit sich selbst entstehende neue Determinante $\triangle' = \Sigma \pm b_{1,1}\ldots b_{n,n}$, so ist ersichtlich

$$b_{i,k} = a_{i,1}\,a_{k,1} + a_{i,2}\,a_{k,2} + \ldots + a_{i,n}\,a_{k,n},$$
$$b_{k,i} = a_{k,1}\,a_{i,1} + a_{k,2}\,a_{i,2} + \ldots + a_{k,n}\,a_{i,n},$$

also $b_{i,k} = b_{k,i}$, d. h. die Determinante $\triangle'$ ist symmetrisch.

Wir können aus diesem Faktum noch einen weiteren nicht unwichtigen Schluss ziehen, wenn wir auf einige von Seeliger[10]) über Potenzen von Determinanten bewiesene Sätze zurückgreifen. Der genannte Mathematiker hat die pte Potenz einer Determinante $\triangle = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ in Form einer gleichreihigen Determinante $\Sigma \pm A_{1,1} \ldots A_{n,n}$ dargestellt; es ist nämlich ihm zufolge

$$A_{i,k} = \sum_{s_1=1}^{s_1=n} \sum_{s_2=1}^{s_2=n} \ldots \sum_{s_{p-3}=1}^{s_{p-3}=n} \sum_{s_{p-2}=1}^{s_{p-2}=n} a_{k,s_{p-2}}\, a_{i,s_1}\, a_{s_{p-2},s_{p-3}}\, a_{s_{p-3},s_{p-4}} \ldots a_{s_3,s_2}\, a_{s_2,s_1}$$

Der Beweis hiefür lässt sich leicht durch Induktion erbringen, denn setzt man $\triangle^{p+1} = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n} \,.\, \Sigma \pm A_{1,1} \ldots A_{n,n} = \Sigma \pm B_{1,1} \ldots B_{n,n}$, so ist

$$B_{i,k} = \sum_{s_{p-1}=1}^{s_{p-1}=n} A_{i,s_{p-1}}\, a_{k,s_{p-1}},$$

und setzt man für $A_{i,s_{p-1}}$ seinen Werth ein, so folgt

$$B_{i,k} = \sum_{s_1=n}^{s_1=n} \sum_{s_2=1}^{s_2=n} \ldots \sum_{s_{p-2}=1}^{s_{p-2}=n} \sum_{s_{p-1}=1}^{s_{p-1}=n} a_{k,s_{p-1}}\, a_{i,s_1}\, a_{s_{p-1},s_{p-2}}\, a_{s_{p-2},s_{p-3}} \ldots a_{s_3,s_2}\, a_{s_2,s_1}.$$

Der nämliche Werth geht aber aus unserer hypothetischen Annahme $B_{i,k}$ hervor *). — Treten wir mit den soeben erworbenen Kenntnissen an unsere symmetrische Determinante heran, so können wir allgemein s_v mit s_{p-v} vertauschen und finden so

$$A_{i,k} = \sum^{(p-1)} a_{k,s_1}\, a_{i,s_{p-1}}\, a_{s_2,s_1} \ldots a_{s_{p-2},s_{p-1}} = \sum^{(p-1)} a_{k,s_1}\, a_{i,s_{p-1}}\, a_{s_2,s_1} \ldots a_{s_{p-1},s_{p-2}} = A_{i,k},$$

d. h. in Worten:

J e d e P o t e n z e i n e r s y m m e t r i s c h e n D e t e r m i n a n t e i s t w i e d e r e i n e s o l c h e.

Nun ist, wie wir sahen, das Quadrat jeder willkürlichen Determinante symmetrisch, also gilt der Satz:

J e d e g e r a d e P o t e n z e i n e r b e l i e b i g e n D e t e r m i n a n t e i s t e i n e s y m m e t r i s c h e D e t e r m i n a n t e.

Symmetrische Determinanten lassen immer eine einfachere Darstellung in geschlossener Form zu, als gewöhnliche, insoferne nämlich bei der Entwickelung verschiedene Glieder sich in Eines zusammenziehen lassen.

---

*) Als Beispiel möge die Berechnung von $\triangle^3 = (\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2})^3$ dienen. Es ist

$$A_{1,1} = \sum_{s_1=1}^{s_1=2} \sum_{s_2=1}^{s_2=2} a_{1,s_2}\, a_{1,s_1}\, a_{s_2,s_1} = a^3_{1,1} + a_{1,1}\, a_{1,2}\, a_{2,1} + a_{1,1}\, a^2_{1,2} + a^2_{1,2}\, a_{2,2},$$

$$A_{1,2} = \sum_{s_1=1}^{s_1=2} \sum_{s_2=1}^{s_2=2} a_{2,s_2}\, a_{1,s_1}\, a_{s_2,s_1} = a^2_{1,1}\, a_{2,1} + a_{1,1}\, a_{2,1}\, a_{2,2} + a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{2,2} + a_{1,2}\, a^2_{2,2},$$

$$A_{2,1} = \sum_{s_1=1}^{s_1=2} \sum_{s_2=1}^{s_2=2} a_{1,s_2}\, a_{2,s_1}\, a_{s_2,s_1} = a^2_{1,1}\, a_{2,1} + a_{1,2}\, a^2_{2,1} + a_{1,1}\, a_{1,2}\, a_{2,2} + a_{1,2}\, a^2_{2,2},$$

$$A_{2,2} = \sum_{s_1=1}^{s_1=2} \sum_{s_2=1}^{s_2=2} a_{2,s_2}\, a_{2,s_1}\, a_{s_2,s_1} = a_{1,1}\, a^2_{2,1} + a_{1,2}\, a_{2,1}\, a_{2,2} + a^2_{2,1}\, a_{2,2} + a^3_{2,2}.$$

Diese Resultate lassen sich durch direktes Ausrechnen leicht verificiren.

Beispiel 1.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} = adf - ae^2 - c^2d - b^2f + 2bce.$$

Beispiel 2.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2.$$

§. 7. Es liegt nahe, zu der Symmetrie einer Determinante noch irgend welche andere von deren Elementen zu erfüllende Bedingungen hinzutreten zu lassen und zu untersuchen, welche Relationen sich daraus ergeben. Einige solche Fälle sollen jetzt untersucht werden.

Es werde zunächst angenommen, die Summen aller Elemente ein und derselben Reihe verschwänden identisch. Dann ist für's Erste ersichtlich, dass der Werth der Determinante selbst Null sein muss, indem durch gehörige Zusammenfassung aller Elemente der nämlichen Reihe diese selbst durch lauter Nullen ersetzt werden kann. Dann aber können wir noch Folgendes aussagen [11]):

Bestehen für die Elemente einer Determinante die beiden Relationen $a_{i,k} = a_{k,i}$ und $\underset{q=1}{\overset{q=n}{S}} a_{i,q} = 0$, so sind sämmtliche erste Unterdeterminanten derselben dem absoluten Werthe nach einander gleich.

Betrachten wir zwei willkürlich ausgewählte dieser Unterdeterminanten, etwa $\frac{d\triangle}{da_{p,q}}$ und $\frac{d\triangle}{da_{r,s}}$, so erhellt aus dem Begriffe einer symmetrischen Determinante sofort, dass sämmtliche Zeilen der einen mit sämmtlichen Colonnen der anderen übereinstimmen müssen, jene einzige ausgenommen, in welcher sich das dem Entwickelungs-Coëfficienten der Unterdeterminante gleiche Element befindet. Addirt man also zu den Elementen jener Zeile alle übrigen entsprechenden, so reduciren sich diese Summen nach der zweiten aufgestellten Bedingung der Reihe nach auf die Elemente jener Colonne, d. h. die beiden Determinanten sind ihrem Werthe nach einander gleich.

Es sei z. B. in der Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & f & k & n & q \\ f & b & g & l & p \\ k & g & c & h & m \\ n & l & h & d & i \\ q & p & m & i & e \end{vmatrix}$$

$$a + f + k + n + q = f + b + g + l + p = k + g + c + h + m$$
$$= n + l + h + d + i = q + p + m + i + e = 0.$$

Dann ist etwa

$$-\begin{vmatrix} f & k & n & q \\ g & c & h & m \\ l & h & d & i \\ p & m & i & e \end{vmatrix} = \frac{d\triangle}{df}, \begin{vmatrix} a & k & n & q \\ f & g & l & p \\ k & c & h & m \\ q & m & i & e \end{vmatrix} = \frac{d\triangle}{dl},$$

und man erkennt, dass die erste, zweite und vierte Colonne der ersten Determinante bezüglich mit der zweiten, dritten und vierten Zeile der zweiten identisch sind. Behandelt man die erste Zeile der letzteren in der angedeuteten Weise, so bekommt man

$$\frac{d\triangle}{dl} = \begin{vmatrix} -n & -h & -d & -i \\ f & g & l & p \\ k & c & h & m \\ q & m & i & e \end{vmatrix},$$

und nun stimmt auch die dritte Colonne der ersten mit der ersten Zeile der zweiten Unterdeterminante überein, indem (— 1) als Faktor vortritt.

§. 8. Zu einer interessanten Unterabtheilung der symmetrischen Determinanten gelangen wir durch folgende Definition Hankel's[12]):

Eine symmetrische Determinante wird orthosymmetrisch (auch persymmetrisch) genannt, wenn die Relationen

$$a_{i,k} = a_{i \pm q,\, k \pm q} \text{ oder } a_{i,k} = a_{i+q,\, k \mp q}$$

bestehen.

So sind beispielsweise

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_4 & e_5 \\ f_6 & a_1 & b_2 & c_3 & d_4 \\ g_7 & f_6 & a_1 & b_2 & c_3 \\ h_8 & g_7 & f_6 & a_1 & b_2 \\ i_9 & h_8 & g_7 & f_6 & a_1 \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} c & 0 & b & 0 & a \\ 0 & b & 0 & a & d \\ b & 0 & a & d & 0 \\ 0 & a & d & 0 & e \\ a & d & 0 & e & f \end{vmatrix}$$

orthosymmetrische Determinanten des fünften Grades.

Diese Klasse von Determinanten besitzt nun, wie Hankel[13]) gezeigt hat, eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft, welche in nachstehendem Theorem ausgesprochen ist:

Die orthosymmetrische Determinante nten Grades der (2n — 1) Grössen $a_0, a_1, a_2 \ldots a_{2n-2}$ ist gleich der orthosymmetrischen Determinante der ersten Differenzen aus den (2n — 1) ersten Differenzreihen der Terme a.

Bedienen wir uns der aus der Lehre von den arithmetischen Reihen bekannten Terminologie

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_0 & & a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & \ldots \\ & \triangle_1 & & \triangle_{1,1} & & \triangle_{1,2} & & \triangle_{1,3} & & \triangle_{1,4} & & & \ldots \\ & & \triangle_2 & & \triangle_{2,1} & & \triangle_{2,2} & & \triangle_{2,3} & & & & \ldots \\ & & & \triangle_3 & & \triangle_{3,1} & & \triangle_{3,2} & & & & & \ldots \\ & & & & \triangle_4 & & \triangle_{4,1} & & & & & & \ldots \\ & & & & & \triangle_5 & & & & & & & \ldots \end{array}$$

und subtrahiren wir in der Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots & a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-2} \end{vmatrix}$$

von jeder kten Colonne die (k — 1)te, so ist zunächst

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \Delta_{1,1} & \ldots & \Delta_{1,n-2} \\ a_1 & \Delta_{1,1} & \Delta_{1,2} & \ldots & \Delta_{1,n-3} \\ a_2 & \Delta_{1,2} & \Delta_{1,3} & \ldots & \Delta_{1,n-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & \Delta_{1,n-1} & \Delta_{1,n} & \ldots & \Delta_{1,2n-3} \end{vmatrix},$$

und, wenn man entsprechend fortfährt,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \Delta_2 & \ldots & \Delta_{n-1} \\ a_1 & \Delta_{1,1} & \Delta_{2,1} & \ldots & \Delta_{n-1,1} \\ a_2 & \Delta_{1,2} & \Delta_{2,2} & \ldots & \Delta_{n-1,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & \Delta_{1,n-1} & \Delta_{2,n-1} & \ldots & \Delta_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Die nämliche Anzahl von Operationen in entsprechender Weise auch für die Zeilen durchgeführt liefert, wie behauptet, die orthosymmetrische Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_0 & \Delta_1 & \Delta_2 & \ldots & \Delta_{n-1} \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 & \ldots & \Delta_n \\ \Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 & \ldots & \Delta_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta_{n-1} & \Delta_n & \Delta_{n+1} & \ldots & \Delta_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

So hat man z. B. die Identität

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 12 \\ 4 & 7 & 12 & 19 \\ 7 & 12 & 19 & 30 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{vmatrix},$$

weil sich bei der ersten Determinante die Differenzreihen

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 && 2 && 4 && 7 && 12 && 19 && 30 \\ & 1 && 2 && 3 && 5 && 7 && 11 & \\ && 1 && 1 && 2 && 2 && 4 && \\ &&& 0 && 1 && 0 && 2 &&& \\ &&&& 1 && -1 && 2 &&&& \\ &&&&& -2 && 3 &&&&& \\ &&&&&& 5 &&&&&& \end{array}$$

ergeben.

§. 9. Der Nutzen dieses Theoremes ist ein sehr mannigfaltiger. Sind die Elemente einer orthosymmetrischen Determinante theilweise Glieder einer arithmetischen Progression, so verschwinden von einer bestimmten Stelle ab sämmtliche Differenzen, und man erhält die Determinante bedeutend vereinfacht. Nehmen wir an, es seien (2n — 1) Terme in aufsteigender Ordnung gegeben, zwischen denen eine arithmetische Progression nter Ordnung besteht, so werden offenbar nach der Transformation (n — 1) der Diagonalreihe parallele Elementen-Serien in Folge des Hankel'schen Lehrsatzes durch Nullen ersetzt sein, und wir können so diesem letzteren das folgende bereits von Baltzer[14]) angedeutete Corollar anreihen:

Eine orthosymmetrische Determinante nten Grades verschwindet identisch, wenn ihre Glieder ein und derselben arithmetischen Reihe von einer Ordnungszahl $\leqq$ n — 1 angehören; sie reducirt sich auf eine nte Potenz, wenn diese ihre Ordnungszahl $=$ n ist.

So hat man beispielsweise

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 8 & 27 & 64 \\ 8 & 27 & 64 & 125 \\ 27 & 64 & 125 & 216 \\ 64 & 125 & 216 & 343 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 11 & 6 \\ 7 & 11 & 6 & 0 \\ 11 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6^4.$$

Ferner erkennt man an der orthosymmetrischen Determinante noch eine andere Eigenschaft [15]). Wir wollen nämlich annehmen, jedes Element mit niedrigerem Index gehe in jedem einzelnen mit höherem Index ohne Rest auf, es sei also allgemein

$$a_k = \alpha_0\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_{k-1}\ \alpha_k.$$

Führen wir diese Substitutionen durch, so zeigt sich, dass allgemein die Elemente der qten Zeile das Produkt $\alpha_0\ \alpha_1 \ldots \alpha_{q-1}$ als gemeinschaftlichen Faktor besitzen; ziehen wir denselben überall heraus, so bleibt uns

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \ldots a_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1} & a_n & a_{n+1} & \ldots a_{2n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{i=n-1} \alpha_i^{n-i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1 \times \alpha_2 \ldots & \alpha_1 \times \alpha_2 \times \alpha_3 & \ldots \alpha_{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2 \times \alpha_3 \ldots & \alpha_2 \times \alpha_3 \times \alpha_4 & \ldots \alpha_n \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3 \times \alpha_4 \ldots & \alpha_3 \times \alpha_4 \times \alpha_5 & \ldots \alpha_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n \times \alpha_{n+1} \ldots & \alpha_n \times \alpha_{n+1} \times \alpha_{n+2} \ldots & \alpha_{2n-2} \end{vmatrix}.$$

Hieraus resultirt u. a. auch eine Thatsache, auf welche noch nicht aufmerksam gemacht worden zu sein scheint, und die wir so aussprechen können:

Eine orthosymmetrische Determinante verschwindet identisch, wenn ihre Elemente in geometrischer Progression stehen.

So wäre dem Obigen zufolge

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 & 16 \\ 4 & 8 & 16 & 32 \\ 8 & 16 & 32 & 64 \\ 16 & 32 & 64 & 128 \end{vmatrix} = 2^7 \cdot 2^5 \cdot 2^3 \cdot 2^1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

und diese Determinante muss den Werth Null haben, weil ihre sämmtlichen Zeilen und Colonnen einander bezüglich gleich sind.

§. 10. Es möge hier auch noch auf eine andere interessante Kategorie von orthosymmetrischen Determinanten hingewiesen werden, welche der schwedische Mathematiker v. Zeipel [16]) aufgefunden hat. Wir betrachten die Determinante $(r+1)$ten Grades

$$\triangle = \begin{vmatrix} \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \binom{m}{p+2} & \ldots & \binom{m}{p+r} \\ \binom{m+1}{p} & \binom{m+1}{p+1} & \binom{m+1}{p+2} & \ldots & \binom{m+1}{p+r} \\ \binom{m+2}{p} & \binom{m+2}{p+1} & \binom{m+2}{p+2} & \ldots & \binom{m+2}{p+r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m+r}{p} & \binom{m+r}{p+1} & \binom{m+r}{p+2} & \ldots & \binom{m+r}{p+r} \end{vmatrix},$$

indem wir uns in bekannter Weise den Binomialcoëfficienten

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-p+1)}{p!} = \binom{m}{p}$$

gesetzt denken. Durch Herausziehung gemeinschaftlicher Faktoren ergiebt sich uns hieraus

$$\triangle = \frac{m(m+1)\ldots(m+r)}{p(p+1)\ldots(p+r)} \begin{vmatrix} \binom{m-1}{p-1} & \binom{m-1}{p} & \binom{m-1}{p+1} & \ldots & \binom{m-1}{p+r-1} \\ \binom{m}{p-1} & \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \ldots & \binom{m}{p+r-1} \\ \binom{m+1}{p-1} & \binom{m+1}{p} & \binom{m+1}{p+1} & \ldots & \binom{m+1}{p+r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m+r-1}{p-1} & \binom{m+r-1}{p} & \binom{m+r-1}{p+1} & \ldots & \binom{m+r-1}{p+r-1} \end{vmatrix}.$$

Setzen wir $\triangle = V_{m,p}$, so ist die so eben erhaltene neue Determinante der Analogie gemäss $= V_{m-1,p-1}$, und es besteht die Gleichung

$$V_{m,p} = \frac{m(m+1)\ldots(m+r)}{p(p+1)\ldots(p+r)} V_{m-1,p-1} = \frac{\binom{m+r}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1}} V_{m-1,p-1}.$$

Auf diese Weise können wir weiter folgendes System binomischer recurrirender Gleichungen bilden:

$$V_{m-1,p-1} = \frac{\binom{m+r-1}{r+1}}{\binom{p+r-1}{r+1}} V_{m-2,p-2} \ldots V_{m-p+1,1} = \frac{\binom{m+r-p+1}{r+1}}{\binom{r+1}{r+1}} V_{m-p,0}.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen sämmtlich, so ist

$$V_{m,p} = \frac{\binom{m+r}{r+1}\binom{m+r-1}{r+1}\binom{m+r-2}{r+1}\ldots\binom{m+r-p+1}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1}\binom{p+r-1}{r+1}\binom{p+r-2}{r+1}\ldots\binom{r+1}{r+1}} V_{m-p,0},$$

so dass also nur die Bestimmung dieses letzteren Termes noch übrig bleibt. Nun ist aber

$$V_{m-p,0} = \begin{vmatrix} \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \ldots & \binom{m}{r} \\ \binom{m+1}{0} & \binom{m+1}{1} & \binom{m+1}{2} & \ldots & \binom{m+1}{r} \\ \binom{m+2}{0} & \binom{m+2}{1} & \binom{m+2}{2} & \ldots & \binom{m+2}{r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m+r}{0} & \binom{m+r}{1} & \binom{m+r}{2} & \ldots & \binom{m+r}{r} \end{vmatrix}.$$

Subtrahirt man hier jede Zeile von der unter ihr stehenden und erinnert sich der bekannten Formel

$$\binom{m+k}{q} - \binom{m+k-1}{q} = \binom{m+k-1}{q-1},$$

so ersieht man, dass sämmtliche Elemente der ersten Diagonalreihe die Gestalt $\binom{m+k}{0} = 1$ annehmen, während alle rechts von dieser Reihe stehenden Elemente verschwinden. Es ist also

$$V_{m-p,\,0} = 1^{r+1} = 1.$$

Sehen wir nun zu, wie eine orthosymmetrische Determinante, deren Elemente aufeinanderfolgende Binomialcoëfficienten sind, sich in geschlossener Form darstellen lässt. Wir gehen zur Determinante $V_{m,p}$ zurück und ziehen von jeder Zeile die zunächst über ihr stehende ab, indem wir von oben nach unten fortschreiten. Um uns über das hiebei zu erwartende Resultat zu vergewissern, haben wir nur die beiden Elemente

$$\binom{m+r-q-1}{p+s-1} \text{ und } \binom{m+r-q}{p+s}$$

in's Auge zu fassen. Senkrecht über dem zweiten wird sich befinden

$$\binom{m+r-q-1}{p+s},$$

und die Subtraktion liefert

$$\binom{m+r-q}{p+s} - \binom{m+r-q-1}{p+s} = \binom{m+r-q-1}{p+s-1}.$$

Macht man es also so zuerst für die untersten r, dann für die untersten (r — 1) Zeilen u. s. f., so müssen, da q und s willkürliche ganze Zahlen sind, zuletzt je zwei Elemente, deren Verbindungslinie der ersten Diagonalreihe parallel ist, einander gleich werden, mit anderen Worten:

Es ist die orthosymmetrische (r + 1) reihige Determinante

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \binom{m}{p+2} & \cdots & \binom{m}{p+r} \\ \binom{m}{p-1} & \binom{m}{p} & \binom{m}{p+1} & \cdots & \binom{m}{p+r-1} \\ \binom{m}{p-2} & \binom{m}{p-1} & \binom{m}{p} & \cdots & \binom{m}{p+r-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{m}{p+r} & \binom{m}{p+r-1} & \binom{m}{p+r-2} & \cdots & \binom{m}{p} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\binom{m+r}{r+1}\binom{m+r-1}{r+1}\cdots\binom{m+r-p+1}{r+1}}{\binom{p+r}{r+1}\binom{p+r-1}{r+1}\cdots\binom{r+1}{r+1}}.$$

Wird $p = 1$, so geht der Ausdruck rechts in den Binomialcoëfficienten

$\binom{m+r}{r+1}$ über, so dass man denselben also in Form der orthosymmetrischen Determinante

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \binom{m}{3} & \cdots & \binom{m}{r+1} \\ \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \binom{m}{2} & \cdots & \binom{m}{r} \\ 0 & \binom{m}{0} & \binom{m}{1} & \cdots & \binom{m}{r-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \binom{m}{1} \end{vmatrix}$$

dargestellt erhält.

§. 11. Im Anschlusse an die bisherigen Betrachtungen möge noch eine spezielle Form der orthosymmetrischen Determinante untersucht werden, deren Zurückführung auf geschlossene Ausdrücke sich besonders einfach gestaltet. Es ist diess die folgende:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-5} & a_{n-4} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix},$$

welche, einer Angabe von Zehfuss[17]) zufolge, bereits von Bessel bemerkt wurde. Das Charakteristische an derselben ist, dass in jeder Zeile und Colonne die nämlichen Elemente in verschiedener Reihenfolge vorkommen; sie tritt[18]) mehrfach bei zahlentheoretischen Untersuchungen auf.

Die Auswerthung dieser Determinante *), welche wir als doppelt-orthosymmetrische bezeichnen wollen, hat Stern[20]) in folgender höchst einfacher Weise bewerkstelligt.

---

*) Für den speziellen Fall $n = 3$ gewinnt die obige Determinante in der Form

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{vmatrix}$$

eine interessante geometrische Bedeutung, auf welche besonders Diekmann[19]) hingewiesen hat. Sie steht nämlich in innigster Beziehung zu der von Clebsch so genannten cyklischen Projektivität; dieselbe ist dann gegeben, wenn für die vier Doppelverhältnisse p_1, p_2, p_3, p_4 je zweier von vier Punkten zu zwei bestimmten anderen die Relationen

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_2}{p_3} = \frac{p_3}{p_4} = \frac{p_4}{p_1}$$

existiren.

Man bildet (Kap. II. §. 14) die bekannten Gleichungen

$$a_0 \frac{d\Delta}{da_0} + a_1 \frac{d\Delta}{da_1} + \ldots + a_{n-1} \frac{d\Delta}{da_{n-1}} = \Delta,$$

$$a_0 \frac{d\Delta}{da_1} + a_1 \frac{d\Delta}{da_2} + \ldots + a_{n-1} \frac{d\Delta}{da_0} = 0,$$

$$\vdots$$

$$a_0 \frac{d\Delta}{da_{n-1}} + a_1 \frac{d\Delta}{da_0} + \ldots + a_{n-1} \frac{d\Delta}{da_{n-2}} = 0$$

und findet durch deren Addition

$$(a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}) \left(\frac{d\Delta}{da_0} + \frac{d\Delta}{da_1} + \ldots + \frac{d\Delta}{da_{n-1}}\right) = \Delta.$$

Dem linksstehenden Ausdrucke kann man aber, wenn α irgend eine Wurzel der positiven Einheit bezeichnet, auch diesen substituiren:

$$(a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}) \left(\frac{d\Delta}{da_0} + \frac{d\Delta}{da_1}\alpha^{n-1} + \ldots + \frac{d\Delta}{da_{n-1}}\alpha\right),$$

denn die Ausrechnung zeigt, dass der Coëfficient von α^{k-1} für $k \gtrless 1$ verschwindet und für $k = 1$ den obigen Ausdruck wiedergiebt. Es muss also das Aggregat $(a_0 + a_1\alpha + a_{n-1}\alpha^{n-1})$ in Δ als Faktor enthalten sein, und da an Stelle von α jede Potenz dieser Grösse treten darf, so muss Δ dem Produkte

$$\lambda(a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1})(a_0 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha^4 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{2(n-1)}) \ldots (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$$

gleich sein, unter λ einen noch zu bestimmenden Faktor verstanden. Der Spezialfall

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} = a_0^2 - a_1^2 = (a_0 - a_1)(a_0 + a_1)$$

liefert sofort $\lambda = 1$.

Analysiren wir so die Determinante

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 & y \\ y & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & x \end{vmatrix},$$

so finden wir dieselbe gleich dem fünfgliedrigen Produkte

$$(x + y) \cdot \left[x + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right) y\right] \cdot$$

$$\left[x + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} - \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right) y\right] \cdot$$

$$\left[x + \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right) y\right] \cdot$$

$$\left[x + \left(-\frac{\sqrt{5}-1}{4} - \sqrt{-1}\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right) y\right]$$

$$= x^5 + y^5,$$

wie schon der Anblick der Determinante lehrt.

Nicht uninteressant ist die Multiplikation zweier doppelt-orthosymmetrischen Determinanten. Setzt man nämlich

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_n & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_1 & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \dots & \alpha_n & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \dots & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_{n-1} & A_n \\ A_2 & A_3 & A_4 & \dots & A_n & A_1 \\ A_3 & A_4 & A_5 & \dots & A_1 & A_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n & A_1 & A_2 & \dots & A_{n-2} & A_{n-1} \end{vmatrix},$$

so ist nach Souillart[21]), wie eine einfache Rechnung lehrt,

$$A_i = \mathop{S}_{k=1}^{k=n} a_k \, \alpha_{k+i-1},$$

wobei natürlich statt $(n + p)$ wieder p zu setzen ist. Zudem erhält die Determinante $\Sigma \pm A_{1,1} \dots A_{n,n}$ das positive oder negative Vorzeichen, je nachdem die Gradzahl n von der Form $\begin{cases} 4p+1 \\ 4p+2 \end{cases}$ oder von der Form $\begin{cases} 4p+3 \\ 4p \end{cases}$ sein sollte.

§. 12. Bei den symmetrischen Determinanten, mit welchen wir uns in den letzten fünf Paragraphen ausschliesslich beschäftigten, war $a_{i,k} = a_{k,i}$; wir können nun aber ohne Zweifel auch Determinanten, wie beispielsweise die nachstehende

$$\begin{vmatrix} m & -b & -f & -k & -t \\ b & n & -c & -g & -l \\ f & c & p & -d & -h \\ k & g & d & r & -e \\ t & l & h & e & s \end{vmatrix}$$

bilden, für welche $a_{i,k} = - a_{k,i}$ ist; die Diagonalglieder werden durch diese Bestimmung nicht beeinflusst.

Eine Determinante dieser Art nannten die französischen und englischen Mathematiker, welche zuerst solche Formen in Betracht zogen, „déterminant gauche symétrique," die Italiener „determinante gobbo." In Deutschland ist hier und da wohl der Name überschlagene oder schiefe Determinanten in Gebrauch *); wir jedoch werden uns im Folgenden der anscheinend von Natani[23]) herrührenden Terminologie anschliessen und stellen als Definition auf:

Sind je zwei symmetrisch liegende Elemente einer Determinante entgegengesetzt gleich, so nennen wir eine solche Determinante eine symmetrale. Enthält die mass-

---

*) Schlegel[22]) bedient sich des nicht concinnen Ausdruckes: Congruente Determinante.

gebende Diagonalreihe willkürliche Grössen, so sagt man, die Determinante habe eine volle, enthält sie ausschliesslich Nullen, sie habe eine leere Diagonale.

Von letzteren Gebilden gilt zunächst folgender in den Lehrbüchern nicht enthaltene Satz:

Ersetzt man durch geeignete Operationen zwei symmetrisch gelegene Elemente einer symmetralen Determinante durch Nullen, so verliert hierdurch dieselbe ihren Charakter nicht, wohl aber tritt ein quadratischer Faktor vor dieselbe.

Diess brauchen wir nur an einem Beispiele zu zeigen, indem der allgemeine Fall sich ganz analog erledigt. Es sei gegeben

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & -a_{1,4} \\ a_{1,2} & 0 & -a_{2,3} & -a_{2,4} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & 0 & -a_{3,4} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & 0 \end{vmatrix},$$

und die beiden Elemente $a_{2,3}$, $-a_{2,3}$ sollen zum Verschwinden gebracht werden. Zu diesem Zwecke multiplicirt man die zweite Zeile mit $a_{1,3}$ und zieht von ihr die mit $a_{2,3}$ multiplicirte erste ab; ebenso verfährt man bezüglich mit der ersten und zweiten Colonne und findet so

$$\triangle = \frac{1}{a^2_{1,3}} \begin{vmatrix} 0 & -a_{1,2}a_{1,3} & -a_{1,3} & -a_{1,4} \\ a_{1,2}a_{1,3} & 0 & 0 & -a_{2,4}a_{1,3}+a_{1,4}a_{2,3} \\ a_{1,3} & 0 & 0 & -a_{3,4} \\ a_{1,4} & a_{2,4}a_{1,3}-a_{1,4}a_{2,3} & a_{3,4} & 0 \end{vmatrix}.$$

Hiemit ist der Satz bewiesen. In unmittelbarster Anknüpfung an denselben beweisen wir jetzt folgendes höchst wichtige Theorem *):

Jede symmetrale Determinante geraden Grades mit leerer Diagonale ist ein vollständiges Quadrat.

Sei gegeben folgende Determinante 2nten Grades

---

*) Den Beweis dieses Lehrsatzes hat K. Abel in der (in magyarischer Sprache redigirten) Zeitschrift für die ungarischen Mittelschulen angefochten. Insoweit diese Einwände gegen den letzten Absatz der ersten Auflage gerichtet sind, welcher für $\triangle$ einen independenten aus naheliegenden Gründen jedoch unrichtigen Werth ergab, ist ihre Berechtigung unzweifelhaft; das Princip des Beweises wird aber hiedurch in keiner Weise erschüttert. Auch die Gründe Abel's, soweit uns dieselben klar geworden sind, vermögen diess durchaus nicht.

$$\Delta = \begin{vmatrix}
0 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & \dots & -a_{1,n-1} & -a_{1,n} & -a_{1,n+1} & \dots & -a_{1,2n-2} & -a_{1,2n-1} & -a_{1,2n} \\
a_{1,2} & 0 & -a_{2,3} & \dots & -a_{2,n-1} & -a_{2,n} & -a_{2,n+1} & \dots & -a_{2,2n-2} & -a_{2,2n-1} & -a_{2,2n} \\
a_{1,3} & a_{2,3} & 0 & \dots & -a_{3,n-1} & -a_{3,n} & -a_{3,n+1} & \dots & -a_{3,2n-2} & -a_{3,2n-1} & -a_{3,2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & a_{3,n-1} & \dots & 0 & -a_{n-1,n} & -a_{n-1,n+1} & \dots & -a_{n-1,2n-2} & -a_{n-1,2n-1} & -a_{n-1,2n} \\
a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & \dots & a_{n-1,n} & 0 & -a_{n,n+1} & \dots & -a_{n,2n-2} & -a_{n,2n-1} & -a_{n,2n} \\
a_{1,n+1} & a_{2,n+1} & a_{3,n+1} & \dots & a_{n-1,n+1} & a_{n,n+1} & 0 & \dots & -a_{n+1,2n-2} & -a_{n+1,2n-1} & -a_{n+1,2n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{1,2n-2} & a_{2,2n-2} & a_{3,2n-2} & \dots & a_{n-1,2n-2} & a_{n,2n-2} & a_{n+1,2n-2} & \dots & 0 & -a_{2n-2,2n-1} & -a_{2n-2,2n} \\
a_{1,2n-1} & a_{2,2n-1} & a_{3,2n-1} & \dots & a_{n-1,2n-1} & a_{n,2n-1} & a_{n+1,2n-1} & \dots & a_{2n-2,2n-1} & 0 & -a_{2n-1,2n} \\
a_{1,2n} & a_{2,2n} & a_{3,2n} & \dots & a_{n-1,2n} & a_{n,2n} & a_{n+1,2n} & \dots & a_{2n-2,2n} & a_{2n-1,2n} & 0
\end{vmatrix}$$

Man lasse jetzt in dieser Determinante die beiden Elemente $\pm a_{1,n+1}$ verschwinden, indem man beziehungsweise die erste und zweite Zeile und

Colonne nach vorhergegangener Multiplikation addirt und subtrahirt. Setzt man an Stelle der zweiten Zeile und Colonne die dritte, später die vierte u. s. f., während die erste stets in gleichem Sinne verwendet wird, so kann man es offenbar dahin bringen, dass die Elemente

$$\pm\ a_{2,n+1},\ \pm\ a_{3,n+1}\ \ldots\ \pm\ a_{n-1,n+1},\ \pm\ a_{n,n+1}$$

sämmtlich durch Nullen ersetzt werden, während vor die Determinante nur der Faktor k_1^2 heraustritt. Verfahren wir in gleicher Weise mit sämmtlichen Elementen, welche den zweiten Index $(n + 2)$ besitzen, so jedoch, dass jetzt an Stelle der ersten Zeile und Colonne resp. die zweite tritt, so annullirt sich nachstehende Doppelserie von Elementen:

$$\pm\ a_{3,n+2},\ \pm\ a_{4,n+2}\ \ldots\ \pm\ a_{n,n+2},\ \pm\ a_{n+1,n+2}.$$

Der Weg, auf welchem weiter vorgegangen werden muss, liegt jetzt vor Augen; nachdem man n derartige Operationen vollzogen, sind schliesslich auch die Elemente

$$\pm\ a_{n+1,2n},\ \pm\ a_{n+2,2n}\ \ldots\ \pm\ a_{2n-2,2n},\ \pm\ a_{2n-1,2n}$$

verschwunden. Bezeichnet man mit k_i^2 den der iten Operation entsprechenden quadratischen Faktor und allgemein durch $A_{i,k}$ das, was in Folge der vorgenommenen Transformation aus $a_{i,k}$ geworden ist, so bleibt uns noch

$$\triangle = \prod_{i=1}^{i=n} k_i^2 \left| \begin{array}{cccccc|ccccc}
0 & -A_{1,2} & -A_{1,3} & \dots & -A_{1,n-1} & -A_{1,n} & -A_{1,n+1} & \dots & -A_{1,2n-2} & -A_{1,2n-1} & -A_{1,2n} \\
A_{1,2} & 0 & -A_{2,3} & \dots & -A_{2,n-1} & -A_{2,n} & 0 & \dots & -A_{2,2n-2} & -A_{2,2n-1} & -A_{2,2n} \\
A_{1,3} & A_{2,3} & 0 & \dots & -A_{3,n-1} & -A_{3,n} & 0 & \dots & -A_{3,2n-2} & -A_{3,2n-1} & -A_{3,2n} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
A_{1,n-1} & A_{2,n-1} & A_{3,n-1} & \dots & 0 & -A_{n-1,n} & 0 & \dots & 0 & -A_{n-1,2n-1} & -A_{n-1,2n} \\
A_{1,n} & A_{2,n} & A_{3,n} & \dots & A_{n-1,n} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -A_{n,2n} \\
\hline
A_{1,n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
A_{1,2n-2} & A_{2,2n-2} & A_{3,2n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
A_{1,2n-1} & A_{2,2n-1} & A_{3,2n-1} & \dots & A_{n-1,2n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
A_{1,2n} & A_{2,2n} & A_{3,2n} & \dots & A_{n-1,2n} & A_{n,2n} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0
\end{array} \right| .$$

Auf diese letztere Determinante lässt sich sofort der Laplace'sche Determinantensatz anwenden, und nehmen wir die Zerlegung nach Massgabe des eingezeichneten Kreuzes vor, so restirt *)

$$\triangle = (-1)^p \prod_{i=1}^{i=n} k_i^2 \left| \begin{array}{ccccc}
-A_{1,n+1} & -A_{1,n+2} & \dots & -A_{1,2n-1} & -A_{1,2n} \\
0 & -A_{2,n+2} & \dots & -A_{2,2n-1} & -A_{2,2n} \\
. & . & . & . & . \\
0 & 0 & \dots & -A_{n-1,2n-1} & -A_{n-1,2n} \\
0 & 0 & \dots & 0 & -A_{n,2n}
\end{array} \right| \left| \begin{array}{ccccc}
A_{1,n+1} & A_{1,n+2} & \dots & A_{1,2n-1} & A_{1,2n} \\
0 & A_{2,n+2} & \dots & A_{2,2n-1} & A_{2,2n} \\
. & . & . & . & . \\
0 & 0 & \dots & A_{n-1,2n-1} & A_{n-1,2n} \\
0 & 0 & \dots & 0 & A_{n,2n}
\end{array} \right| .$$

*) Der Faktor $(-1)^p$ ist erforderlich, um anzudeuten, dass die obige Determinante durch eine gerade oder ungerade Anzahl von Reihenvertauschungen auf jene Form gebracht werden kann, welche oben (Kap. II. §. 18) bei der Auseinandersetzung des Laplace'schen Theorems als die normale betrachtet ward. Welchen Werth p hat, ist hier gleichgültig.

Zieht man aus der ersteren n reihigen Determinante alle Minuszeichen heraus und berücksichtigt Kap. II. §. 6, so ergiebt sich als Schlussresultat

$$\triangle = (-1)^{p+n}(k_1 k_2 \ldots k_{n-1} k_n A_{1,n+1} A_{2,n+2} \ldots A_{n-1,2n-1} A_{n,2n})^2,$$

also ist $\triangle$ ein vollständiges Quadrat.

Behandelt man in dieser Weise die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & -a & -d & -f \\ a & 0 & -b & -e \\ d & b & 0 & -c \\ f & e & c & 0 \end{vmatrix},$$

so ist zunächst

$$\triangle = \frac{1}{d^2} \begin{vmatrix} 0 & -ad & -d & -f \\ ad & 0 & 0 & -de+bf \\ d & 0 & 0 & -c \\ f & de-bf & c & 0 \end{vmatrix},$$

und weiterhin

$$\triangle = \frac{1}{d^2(de-bf)^2} \begin{vmatrix} 0 & -ad & -d(de-bf)-acd & -f \\ ad & 0 & 0 & -de+bf \\ d(de-bf)+acd & 0 & 0 & 0 \\ f & de-bf & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

woraus sich schliesslich

$$\triangle = \frac{[d(de-bf) - acd]^2 (de-bf)^2}{d^2(de-bf)^2} = (de - bf - ac)^2$$

ergiebt.

Nehmen wir nunmehr an, die Determinante sei von einem ungeraden, etwa vom $(2n + 1)$ten Grade. Transformiren wir dieselbe auf die nämliche Weise, so können wir es offenbar dahin bringen, dass $n(n + 1)$ ein Rechteck bildende Elemente verschwinden. Nach Kap. II. §. 18 erhellt also:

Jede symmetrale Determinante ungeraden Grades mit leerer Diagonale hat den Werth Null.

Diess lässt sich auch auf anderem Wege leicht zeigen, denn indem man eine derartige Determinante $(2n + 1)$ten Grades mit (-1) multiplicirt, erhält man

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & -a_{1,2} & \ldots & -a_{1,2n} & -a_{1,2n+1} \\ a_{1,2} & 0 & \ldots & -a_{2,2n} & -a_{2,2n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,2n} & a_{2,2n} & \ldots & 0 & -a_{2n,2n+1} \\ a_{1,2n+1} & a_{2,2n+1} & \ldots & a_{2n,2n+1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & a_{1,2} & \ldots & a_{1,2n} & a_{1,2n+1} \\ -a_{1,2} & 0 & \ldots & a_{2,2n} & a_{2,2n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{1,2n} & -a_{2,2n} & \ldots & 0 & a_{2n,2n+1} \\ -a_{1,2n+1} & -a_{2,2n+1} & \ldots & -a_{2n,2n+1} & 0 \end{vmatrix} = -\triangle;$$

$\triangle$ muss also identisch verschwinden.

§. 13. Der Ausdruck, dessen Quadrat eine symmetrale Determinante $r$ten Grades ist, ward von Jacobi[24]) unter der Bezeichnung $(1, 2, 3 \ldots r-1, r)$ in die Wissenschaft eingeführt und von Cayley, wegen seiner Verwendung bei dem mit Pfaff's Namen belegten Integrationsproblem, „the Pfaffian" (scil. fonction) genannt. Der obige Satz ward bei dieser nämlichen Gelegenheit von Cayley[25]) gefunden und bewiesen; in einfacherer und kürzerer Weise durch Borchardt[26]). Zwei andere Beweise rühren von Scheibner[27]) und Veltmann[28]) her, und zwar bieten diese letzteren Beweise den Vortheil, aus sich heraus eine Darstellung jener Pfaff'schen Funktion — Scheibner (a. a. O.) nennt sie Halbdeterminante — herleiten zu lassen. Auch der von uns gelieferte Beweis würde eine solche independente Darstellung ermöglichen, indess kann hier auf diesen weiter abliegenden Gegenstand nicht näher eingegangen werden. Nur an einem einfachen bisher wohl nicht beachteten Spezialfalle möge die — in diesem Falle sofort independent sich gestaltende — Bestimmung einer solchen Halbdeterminante durchgeführt werden.

Die zu untersuchende Determinante sei so gebildet, dass ihre Elemente gegen beide Diagonalen symmetrisch liegen, wie diess bei

$$\Delta = \left|\begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & -\alpha & -\beta & \ldots & -\delta & -\varepsilon & -\zeta & -\eta & \ldots & -\pi & -\varrho & -\sigma \\
\alpha & 0 & -\gamma & \ldots & -\vartheta & -\iota & -\varkappa & -\lambda & \ldots & -\tau & -\upsilon & -\varrho \\
\beta & \gamma & 0 & \ldots & -\mu & -\nu & -\xi & -\varsigma & \ldots & -\chi & -\tau & -\pi \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\delta & \vartheta & \mu & \ldots & 0 & -x & -z & -u & \ldots & -\varsigma & -\lambda & -\eta \\
\varepsilon & \iota & \nu & \ldots & x & 0 & -y & -z & \ldots & -\xi & -\varkappa & -\zeta \\
\hline
\zeta & \varkappa & \xi & \ldots & z & y & 0 & -x & \ldots & -\nu & -\iota & -\varepsilon \\
\eta & \lambda & \varsigma & \ldots & u & z & x & 0 & \ldots & -\mu & -\vartheta & -\delta \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\pi & \tau & \chi & \ldots & \varsigma & \xi & \nu & \mu & \ldots & 0 & -\gamma & -\beta \\
\varrho & \upsilon & \tau & \ldots & \lambda & \varkappa & \iota & \vartheta & \ldots & \gamma & 0 & -\alpha \\
\sigma & \varrho & \pi & \ldots & \eta & \zeta & \varepsilon & \delta & \ldots & \beta & \alpha & 0
\end{array}\right|$$

zutrifft. Die eingeklammerte Unterdeterminante ist vom $n$ten, die Determinante selbst vom $2n$ten Grade. Addirt man jetzt zur $q$ten die $(n-q+1)$te Zeile und ebenso zur $q$ten die $(n-q+1)$te Colonne, wobei die ganze Zahl $q \geqq 1 \leqq n$ zu nehmen ist, so findet man

$$\Delta = \left|\begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \varepsilon-\zeta & \delta-\eta & \ldots & \beta-\pi & \alpha-\varrho & -\sigma \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \iota-\varkappa & \vartheta-\lambda & \ldots & \gamma-\tau & -\upsilon & -\alpha-\varrho \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \nu-\xi & \mu-\varsigma & \ldots & -\chi & -\gamma-\tau & -\beta-\pi \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & x-z & -u & \ldots & -\mu-\varsigma & -\vartheta-\lambda & -\eta-\sigma \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & -y & -x-z & \ldots & -\nu-\xi & -\iota-\varkappa & -\varepsilon-\zeta \\
\hline
\zeta-\varepsilon & \varkappa-\iota & \xi-\nu & \ldots & z-x & y & 0 & -x & \ldots & -\nu & -\iota & -\varepsilon \\
\eta-\delta & \lambda-\vartheta & \varsigma-\mu & \ldots & u & x+z & -y & 0 & \ldots & -\mu & -\vartheta & -\delta \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\pi-\beta & \tau-\gamma & \chi & \ldots & \mu+\varsigma & \nu+\xi & \nu & \mu & \ldots & 0 & -\gamma & -\beta \\
\varrho-\alpha & \upsilon & \gamma+\tau & \ldots & \vartheta+\lambda & \iota+\varkappa & \iota & \vartheta & \ldots & \gamma & 0 & -\alpha \\
\sigma & \alpha+\varrho & \beta+\pi & \ldots & \eta+\sigma & \varepsilon+\zeta & \varepsilon & \delta & \ldots & \beta & \alpha & 0
\end{array}\right|.$$

Die Zerlegung ergiebt *)

*) Strenge genommen müsste noch eine genaue Discussion des Vorzeichens beigefügt werden. Da dieselbe jedoch nach den Angaben von Kap. II. §. 5 nicht die mindesten Schwierigkeiten bietet, und da es hier einzig und allein auf den Nachweis des quadratischen Charakters für die symmetralen Determinanten ankommt, so ward das doppelte Vorzeichen für diesen Zweck als ausreichend angesehen.

$$\triangle = \pm \left[\begin{vmatrix} \varepsilon-\zeta & \delta-\eta & \dots & \beta-\pi & \alpha-\varrho & -\sigma \\ \iota-\varkappa & \vartheta-\lambda & \dots & \gamma-\tau & -\upsilon & -\alpha-\varrho \\ \nu-\xi & \mu-\varsigma & \dots & \chi & -\gamma-\tau & -\beta-\pi \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x-z & -u & \dots & -\mu-\varsigma & -\vartheta-\lambda & -\eta-\delta \\ -y & -x-z & \dots & -\nu-\xi & -\iota-\varkappa & -\varepsilon-\zeta \end{vmatrix}\right]^2.$$

Gehen wir nunmehr zu den symmetralen Determinanten mit voller Diagonale über.

§. 14. Gegeben sei eine symmetrale Determinante, mit der Bestimmung, dass das allgemeine Diagonal-Element einer willkürlichen Grösse z gleich sei. Alsdann können wir auf einen früher (Kap. II. §. 19) bewiesenen Satz zurückgreifen, vermittelst dessen wir die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+z & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}+z & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n}+z \end{vmatrix}$$

in eine nach aufsteigenden Potenzen von z fortlaufende Reihe entwickelten. In unserem Falle ist jetzt $a_{i,i} = 0$, $a_{i,k} = -a_{k,i}$, und hierdurch treten gewisse Vereinfachungen ein. Den Coëfficienten des Gliedes z^q erhielten wir dadurch, dass wir das Aggregat all' derjenigen q ten Unterdeterminanten des $(n-q)$ten Grades bildeten, welche der ursprünglichen Determinante condiagonal waren. Diese Unterdeterminanten sind nun aber hier sämmtlich symmetrale Determinanten mit leerer Diagonale; sie verschwinden, wenn $(n-q)$ ungerade ist, und sie ergeben vollständige Quadrate, wenn $(n-q)$ gerade ist. Diess zusammengenommen, können wir folgenden Satz formuliren:

Eine symmetrale Determinante mit voller Diagonale lässt sich als eine nach geraden oder ungeraden Potenzen des Diagonal-Elementes fortlaufende Reihe darstellen, je nachdem der Grad der Determinante eine gerade oder ungerade Zahl ist, und zwar ist der Coëfficient eines jeden Gliedes eine Summe von Quadraten.

Soll z. B. die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} z & -a & -b & -c \\ a & z & -d & -e \\ b & d & z & -f \\ c & e & f & z \end{vmatrix}$$

ausgewerthet werden, so erhält man

$$\triangle = \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -d & -e \\ b & d & 0 & -f \\ c & e & f & 0 \end{vmatrix} + z\left[\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -d \\ b & d & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -b & -c \\ b & 0 & -f \\ c & f & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -a & -c \\ a & 0 & -e \\ c & e & 0 \end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + \begin{vmatrix} 0 & -d & -e \\ d & 0 & -f \\ e & f & 0 \end{vmatrix}\right] + z^2\left[\begin{vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -e \\ e & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{vmatrix}\right]$$

$$+ z^3(0+0+0) + z^4 = (af - be + cd)^2 + (a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)z^2 + z^4.$$

Andererseits wäre

$$\begin{vmatrix} z & -a & -b \\ a & z & -c \\ b & c & z \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2)\, z + z^3.$$

1) Vandermonde, Mém. de l'acad. de Paris 1771. S. 369. — 2) Cauchy, Considérations générales sur les fonctions symétriques alternées, Journ. de l'école polytechn. Tome X. S. 48. — 3) Anon. Solution d'une question, Nouv. Annal. de Mathém. Tome IX. S. 181 ff. — 4) Nägelsbach, Ueber eine Klasse symmetrischer Funktionen, Zweibrücken 1871. S. 2. — 5) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1875. S. 86. — 6) Borchardt, in Baltzer, Theorie etc. S. 58. — 7) Hoza, Ueber Unterdeterminanten einer adjungirten Determinante, Archiv d. Math. u. Phys. 59. Theil. S. 401 ff. — 8) Studnička, Nový důkaz poučky o poměrech mezy původními a přidruženými determinanty a subdeterminanty, Časopis pro pěstování Mathematiky a Fysiky, 1. Jahrg. S. 6 ff. — 9) Ibid. S. 9. — 10) Seeliger, Bemerkungen über symmetrische Determinanten und Anwendung dieser auf eine Aufgabe der analytischen Geometrie, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 20. Jahrg. S. 467 ff. — 11) Baltzer, S. 23. — 12) Hankel, Ueber eine besondere Klasse der symmetrischen Determinanten, Göttingen 1861. S. 4. — 13) Ibid. S. 5. — 14) Baltzer, S. 25. — 15) Hankel, S. 4. — 16) v. Zeipel, Om Determinanter, hvars elementer äro Binomialkoëfficienter, Lunds Universitets Ars-Skrift för ar 1865. S. 10 ff. — 17) Zehfuss. Anwendungen einer besonderen Determinante, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 7. Jahrg. S. 439. — 18) Schütz, Ueber funktionale Congruenzen, Frankfurt 1867. S. 9. — 19) Diekmann, Einleitung in die Lehre von den Determinanten, Essen 1876. S. 62 ff. — 20) Stern, Einige Bemerkungen über eine Determinante, Journ. f. d. reine u. angew. Mathem.. 73. Band. S. 374. — 21) Souillart, Sur une décomposition des carrés, Nouv. Annal. de Mathém. Tome IX. S. 320 ff. — 22) Schlegel, System der Raumlehre, 2. Theil, Leipzig 1875. S. 134. — 23) Natani, Mathematisches Wörterbuch, 6. Band, Berlin 1867. S. 618. — 24) Jacobi, Ueber die Pfaff'sche Methode, eine gewöhnliche lineäre Differentialgleichung zwischen 2n Variabeln durch ein System von n Gleichungen zu integriren, Journ. f. d. reine u. angew. Mathem., 2. Band. S. 354. — 25) Cayley, Sur les déterminants gauches, ibid. 38. Band. S. 95. — 26) Borchardt, in Baltzer (Ausgabe von 1870), S. 57. — 27) Scheibner, Ueber Halbdeterminanten, Leipziger Berichte, 11. Band. S. 151 ff. — 28) Veltmann, Beiträge zur Theorie der Determinanten, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 16. Jahrg. S. 516 ff.

Kapitel IV.

Die Eliminationsprobleme.

§. 1. Wie sich bereits aus der historischen Entwickelung des Determinanten-Calculs ergiebt, finden diese Gebilde eine besonders wichtige Anwendung bei dem Problem, aus einem gegebenen Systeme von linearen Gleichungen mit n Unbekannten diese letzteren zu berechnen.

Es sei gegeben folgendes System:

$$\begin{array}{l}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,q}x_q + \ldots + a_{1,n}x_n = A_1, \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,q}x_q + \ldots + a_{2,n}x_n = A_2, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \ldots + a_{q,q}x_q + \ldots + a_{q,n}x_n = A_q, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,q}x_q + \ldots + a_{n,n}x_n = A_n.
\end{array}$$

Da hier jede Grösse n mal vorkommt, so giebt es im Ganzen n^2 Coëfficienten dieser Gleichungen, welche wir zu einer n reihigen Determinante $\triangle = \Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{q,q} \ldots a_{n,n}$ zusammenstellen können; dieselbe nennen wir mit Jacobi [1]) die Determinante des Systemes. Diese gilt es nun weiter umzuformen.

Wir multipliciren die q te Colonne mit x_q und erhalten

$$\triangle x_q = \begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,q}x_q & \ldots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,q}x_q & \ldots & a_{2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{q,1} & a_{q,2} & \ldots & a_{q,q}x_q & \ldots & a_{q,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,q}x_q & \ldots & a_{n,n}
\end{vmatrix}.$$

Nun kann man bekanntlich (Kap. II. §. 8) zu jeder Colonne einer Determinante, ohne ihren Werth zu ändern, die mit beliebigen Grössen multiplicirten übrigen Colonnen hinzuaddiren; multipliciren wir also die erste Colonne mit x_1, die zweite mit x_2 u. s. w., und addiren dieselben sämmtlich zur q ten Colonne, so folgt

$$\triangle x_q = \begin{vmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,q}x_q + \ldots + a_{1,n}x_n & \ldots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,q}x_q + \ldots + a_{2,n}x_n & \ldots & a_{2,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{q,1} & a_{q,2} & \ldots & a_{q,1}x_1 + \ldots + a_{q,q}x_q + \ldots + a_{q,n}x_n & \ldots & a_{q,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,q}x_q + \ldots + a_{n,n}x_n & \ldots & a_{n,n}
\end{vmatrix}.$$

Setzen wir jetzt für jedes Element der $q$ten Colonne den aus dem obigen Gleichungssysteme zu entnehmenden Werth und dividiren mit $\triangle$, so findet sich

$$x_q = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & A_1 & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & A_2 & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & A_q & \dots & a_{q,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & A_n & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,q} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,q} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q,q} & \dots & a_{q,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,q} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Diess liefert folgenden Lehrsatz:

Sämmtlichen Unbekannte, welche durch ein System von n linearen Gleichungen unter sich verknüpft sind, lassen sich in Form von Brüchen darstellen, denen die Determinante des Systemes als gemeinschaftlicher Nenner zukommt. Um für die Unbekannte x_q den Zähler zu finden, ersetze man in dieser Determinante die $q$te Colonne durch die Reihe der rechts des Gleichheitszeichens stehenden Grössen.

Diess ist die nämliche Auflösungsmethode, welche Leibnitz (Kap. II. §. 2) erdacht und Cramer (ibid. §. 3) spontan wiedererfunden hat.

Beispiel. Gegeben sind im Raume drei Punkte mit den Coordinaten x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3; es soll die Gleichung derjenigen Ebene gefunden werden, welche durch diese drei Punkte hindurchgeht. Die Gleichung einer willkürlichen Ebene ist bekanntlich

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 1;$$

demnach hat man für die drei unbekannten Grössen α, β, γ folgende drei Bedingungsgleichungen:

$$\alpha x_1 + \beta y_1 + \gamma z_1 = \alpha x_2 + \beta y_2 + \gamma z_2 = \alpha x_3 + \beta y_3 + \gamma z_3 = 1.$$

Berechnet man hieraus die Unbekannten, so erhält man als Gleichung der gesuchten Ebene:

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} x_1 & 1 & z_1 \\ x_2 & 1 & z_2 \\ x_3 & 1 & z_3 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

§. 2. Wir haben im Vorstehenden vorausgesetzt, dass weder die Grössen A, noch auch die einzelnen Nenner verschwinden, d. h. es darf bei den bisherigen Betrachtungen die Determinante des Systemes nicht identisch gleich Null sein. Sollte letzteres geschehen können, während die einzelnen A endliche Grössen vorstellen, so könnte dem Systeme ersichtlich nur durch unendlich grosse Werthe der Unbekannten Genüge geleistet werden. Verschwinden andererseits sowohl die Bruchzähler, als auch die Determinante $\triangle$ des gemeinsamen Nenners, so sind zwei völlig getrennte Fälle zu verzeichnen, deren Betrachtung auch gesondert durchzuführen ist *).

I. Ist die eine der vorgelegten Gleichungen — natürlich gilt diess auch für deren mehrere — eine Consequenz

*) Zuerst in dieser Form in einer Notiz didaktischen Inhaltes über Determinanten gegeben [2]).

der übrigen, so stellt sich jede Unbekannte in der Form $\frac{0}{0}$ dar.

Da jede Gleichung linear sein muss, so kann die betreffende Gleichung nur dadurch aus den übrigen hervorgegangen sein, dass gewisse derselben algebraisch summirt wurden, nachdem sie etwa noch vorher mit constanten Faktoren multiplicirt waren. Alsdann aber werden durch Heraussetzung jener Faktoren zwei — oder mehrere — Reihen in den Determinanten sowohl des Zählers als auch des gemeinschaftlichen Nenners einander gleich, d. h. beide Determinanten verschwinden.

Bei den Gleichungen

$$7x + 2y = 11,\ 14x + 4y = 22$$

wäre z. B.

$$x = \begin{vmatrix} 11 & 2 \\ 22 & 4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 14 & 4 \end{vmatrix} = \frac{0}{0},\quad y = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 14 & 22 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 14 & 4 \end{vmatrix} = \frac{0}{0}.$$

II. Wird allgemein A_q gleich Null, während $\triangle$ vorläufig noch ganz unbestimmt bleibt, so lässt sich durch eine besondere Betrachtung zeigen, dass auch $\triangle$ identisch verschwinden muss.

Ist nämlich $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$, so genügen dem Systeme anscheinend nur folgende Werthe: $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. In der That ist aber dann auch das System nicht mehr bestimmt, sondern mehr als bestimmt. Dividirt man jede der n Gleichungen durch eine beliebige Unbekannte, etwa durch x_n, so erhält man n Gleichungen mit den $(n-1)$ Unbekannten $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n} \ldots \frac{x_{n-1}}{x_n}$. Sondert man also aus den gegebenen n Gleichungen durch Weglassung irgend einer willkürlichen derselben ein System von $(n-1)$ Gleichungen aus und behandelt diess nach den gegebenen Vorschriften, so kann man die Werthe jener Verhältnisse sämmtlich berechnen.

Sind z. B. die drei Gleichungen

$$a_1x + b_1y + c_1z = a_2x + b_2y + c_2z = a_3x + b_3y + c_3z = 0$$

gegeben, so findet man, indem vorläufig über $\triangle = \Sigma \pm a_1b_2c_3$ gar nichts vorausgesetzt wird,

$$\frac{x}{z} = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} -c_2 & b_2 \\ -c_3 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}},$$

und entsprechende Werthe für $\frac{y}{z}$.

Wir sind so jedoch auf das Paradoxon gekommen, dass die Grössen $\frac{y}{z}$ und $\frac{x}{z}$ je drei verschiedene Werthe gleichzeitig haben sollen, während doch die Grössen a, b, c vollkommen willkürlich angenommen wurden. Diess ist offenbar nicht möglich; es muss vielmehr noch eine Bedingungsgleichung zwischen diesen Zahlenwerthen bestehen. Untersuchen wir den vorliegenden Fall, so zeigt sich, dass die bisher als ganz willkürlich angesehene Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

sein muss, woferne die für $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ errechneten Werthe mit einander übereinstimmen sollen.

§. 3. Im Anschlusse hieran beweisen wir folgenden Satz:

Verschwindet für ein — alsdann homogen zu nennendes — System dessen Determinante $\triangle = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ identisch, während alle ersten Unterdeterminanten nicht verschwinden, so bestehen die Proportionen

$$x_1 : x_2 : \ldots : x_n = \frac{d\triangle}{da_{k,1}} : \frac{d\triangle}{da_{k,2}} : \ldots \frac{d\triangle}{da_{k,n}} \quad (k \geqq 1, \leqq n).$$

Der Beweis dieses Satzes ist einfach. Denn man hat, denselben als richtig vorausgesetzt, $x_q = M \frac{d\triangle}{da_{k,q}}$, wo M ein constanter Faktor; es ist ferner nach Kap. II. §. 13 allgemein die Summe

$$a_{q,1} \frac{d\triangle}{da_{k,1}} + a_{q,2} \frac{d\triangle}{da_{k,2}} + \ldots + a_{q,n} \frac{d\triangle}{da_{k,n}}$$

unter allen Umständen gleich Null, indem ja auch $\triangle$ selbst diesen Werth besitzt. Substituirt man für die einzelnen Differentialquotienten ihre Werthe und multiplicirt durchweg mit M, so folgt

$$a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \ldots + a_{q,n}x_n = 0.$$

Da diess eine richtige Identität ist, so gilt das Gleiche für die Voraussetzung, von welcher wir ausgegangen waren.

Dem Obigen können wir jedoch noch eine andere für die gesammte Analysis äusserst wichtige Seite abgewinnen, indem wir folgenden Schluss ziehen. Damit die aus dem überbestimmten (homogenen) Systeme

$$u_1 \equiv a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \;.\;.\; u_n \equiv a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,n}x_n = 0$$

berechneten Verhältnisse zweier Unbekannten stets den nämlichen Werth erhalten, man möge sie daraus berechnen, wie man wolle, ist es nothwendig, dass diese Gleichungen eine gewisse Bedingung erfüllen. Man kann dann sagen:

Damit die einzelnen Glieder eines Systemes $u_1 = 0 \ldots u_n = 0$ mit einander verträglich seien, ist es nothwendig, aber auch genügend, dass die Determinante

$$\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$$

des Systemes identisch verschwinde.

Ehe wir Unterfälle dieser wichtigen Relation in's Auge fassen, möge noch davon gesprochen werden, wie man durch Einführung geeigneter Hülfsgrössen die Verhältnisswerthe der einzelnen Unbekannten in einer mehr symmetrischen Form erhalten kann. Bei einer Diskussion der Frage nach dem Criterium des Ausartens eines Kegelschnittes in ein Linienpaar hat Hesse [3]) für die Verhältnisswerthe dreier Grössen **x, y, z** die Beziehungen

$$x : y : z = \frac{d\triangle}{da_{0,0}} : \frac{d\triangle}{da_{1,0}} : \frac{d\triangle}{da_{2,0}} = \frac{d\triangle}{da_{0,1}} : \frac{d\triangle}{da_{1,1}} : \frac{d\triangle}{da_{2,1}}$$
$$= \frac{d\triangle}{da_{0,2}} : \frac{d\triangle}{da_{1,2}} : \frac{d\triangle}{da_{2,2}} \quad (\Sigma \pm a_{0,0}\, a_{1,1}\, a_{2,2} = 0)$$

gefunden und dann beziehentlich jene drei Terme in der Form

$$x = \mathop{S}_{i=0}^{i=2} \frac{d\triangle}{da_{0,i}}\, k_i\,,\quad y = \mathop{S}_{i=0}^{i=2} \frac{d\triangle}{da_{1,i}}\, k_i\,,\quad z = \mathop{S}_{i=0}^{i=2} \frac{d\triangle}{da_{2,i}}\, k_i$$

dargestellt, unter k_0, k_1, k_2 willkürliche Grössen verstanden. Dass diese Darstellungsweise nur eine einfache Verallgemeinerung unserer obigen ist, erhellt leicht, sobald man je zwei der Grössen k mit Null identificirt.

Von einem universelleren Standpunkte aus behandelt W. F. Schüler*) die von Hesse angeregte und als einer umfassenden Generalisirung fähig bezeichnete Frage. Es sei wieder

$$\begin{matrix} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,k}x_k + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,k}x_k + \ldots + a_{n,n}x_n = 0 \end{matrix}\,,\quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Um nun die Verhältnisse $\frac{x_1}{x_l} \ldots \frac{x_n}{x_l}$ zu berechnen, gehen wir aus von der Determinante

$$A_l = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,l-1} & k_{1,l} & a_{1,l+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,l-1} & k_{n,l} & a_{n,l+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix};$$

alsdann ist für ein constantes l und ein zwischen 1, 2 ... n variirendes m, wenn wieder $\triangle$ seine obige Bedeutung hat,

$$\frac{dA_l}{dk_{m,l}} = \frac{d\triangle}{da_{m,l}}.$$

Nunmehr wird jede unserer Gleichungen resp. mit den partiellen Differentialquotienten von $A_1 \ldots A_l \ldots A_n$ multiplicirt und hierauf deren Summe gebildet. Versteht man unter ϱ einen Proportionalitätsfaktor, so ist

$$\varrho x_m = a_{1,l}\frac{dA_l}{da_{1,m}} + a_{2,l}\frac{dA_l}{da_{2,m}} + \ldots + a_{n,l}\frac{dA_l}{da_{n,m}},$$
$$\varrho x_l = -\,k_{1,l}\frac{dA_l}{dk_{1,l}} - k_{2,l}\frac{dA_l}{dk_{2,l}} - \ldots - k_{n,l}\frac{dA_l}{dk_{n,l}}.$$

Hiemit sind dann die allgemeinsten Lösungen des Systemes gegeben **).

---

*) Wir geben anbei mit Erlaubniss des Verfassers einen Auszug aus einer vom 15. November 1874 datirten bislang ungedruckten Abhandlung desselben, welche den Gegenstand sehr allgemein auffasst.

**) Im Uebrigen darf nicht unbemerkt bleiben, dass bereits Clebsch[4]) auf ein ganz entsprechendes Auflösungsverfahren gekommen ist. Aus den vier Gleichungen

Wie man sich erinnern wird, galt bei den bisherigen Ueberlegungen durchaus die Annahme, die ersten Unterdeterminanten (n — 1) ten Grades besässen sämmtlich einen von Null verschiedenen Werth. Natürlich muss diess nicht nothwendig sich so verhalten, vielmehr kann auch der Fall eintreten, dass sämmtliche erste, zweite . . . (n — m — 1) te Unterdeterminanten, deren Grad also bezüglich n — 1, n — 2 . . . m + 1 wäre, gleichzeitig identisch verschwänden; nennen wir das gewöhnliche homogene System ein einfach überbestimmtes, so würden wir es in diesem Falle mit einem Systeme zu thun haben, welchem nach Analogie der Name (n — m) fach überbestimmtes beizulegen wäre. Alsdann lässt sich, wie Kronecker[5]) gezeigt hat, nicht mehr die allgemeine Proportion $x_1 : x_2 : \ldots : x_n$, sondern nur das Bruchstück $x_1 : x_2 : \ldots : x_m : 1$ $(m < n)$ durch Funktionen der übrig gebliebenen Unbekannten $x_{m+1}, x_{m+2} \ldots x_n$ darstellen. —

Die hohe Bedeutung der vorstehend betrachteten Behandlung eines Systemes linearer Gleichungen soll nun an verschiedenen Beispielen nachgewiesen werden.

§. 4. Vermittelst der Leibnitz-Cramer'schen Methode hat Hankel[6]) eine Lösung der von Gauss[7]) angeregten Frage gegeben: „Warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Grössen liefern können."

Hankel denkt sich eine Reihe complexer Einheiten $\iota_1, \iota_2 \ldots \iota_n$, welche, mit gewöhnlichen Zahlen a verbunden, eine complexe Zahl höherer Ordnung $\alpha = a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + \ldots + a_n\iota_n$ ergeben. Die verschiedenen Systeme höherer complexer Zahlen, welche sämmtlich in dieser Form enthalten sind, unterscheiden sich nun dadurch von einander, dass über das Produkt zweier solcher Einheiten $\iota_m\iota_p$ ganz willkürlich verfügt werden kann. Man darf also auch die Annahme machen, dass das Produkt zweier solcher Einheiten wieder einer Einheit selbst gleich sei; gelingt es dann, unter dieser Voraussetzung zu zeigen, dass die complexen Zahlen selbst wieder zu gewöhnlichen Zahlen werden, so ist damit offenbar eine völlig genügende Antwort auf Gauss' offene Frage gegeben.

Es sei also allgemein

$$\mathop{S}_{i=1}^{i=4} u_{k,i}\, y_i = 0 \quad (k = 1, 2, 3, 4),$$

wobei

$$\triangle = \begin{vmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & u_{1,4} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & u_{2,4} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} & u_{3,4} \\ u_{4,1} & u_{4,2} & u_{4,3} & u_{4,4} \end{vmatrix} = 0, \; U_{r,s} = \frac{d\triangle}{du_{r,s}},$$

leitet er unter Beiziehung der vier Hülfsgrössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ die vier neuen Gleichungen

$$\mathop{S}_{i=1}^{i=4} U_{k,i}\, \alpha_i = y_k \quad (k = 1, 2, 3, 4)$$

her, die sich dann unmittelbar geometrisch interpretiren lassen.

$$
\begin{aligned}
\iota_1\iota_2 &= a_{1,2} + a'_{1,2}\iota_1 + a''_{1,2}\iota_2 + \dots + a^{(n)}_{1,2}\iota_n\,,\\
\iota_1\iota_3 &= a_{1,3} + a'_{1,3}\iota_1 + a''_{1,3}\iota_2 + \dots + a^{(n)}_{1,3}\iota_n\,,\\
&\vdots\\
\iota_1\iota_n &= a_{1,n} + a'_{1,n}\iota_1 + a''_{1,n}\iota_2 + \dots + a^{(n)}_{1,n}\iota_n\,.
\end{aligned}
$$

Diesem Systeme lässt sich auch folgende Form ertheilen:

$$
\begin{aligned}
-a_{1,2} - a'_{1,2}\iota_1 &= (a''_{1,2}-\iota_1)\iota_2 + a'''_{1,2}\iota_3 + \dots + a^{(n)}_{1,2}\iota_n\,,\\
-a_{1,3} - a'_{1,3}\iota_1 &= a''_{1,3}\iota_2 + (a'''_{1,3}-\iota_1)\iota_3 + \dots + a^{(n)}_{1,3}\iota_n\,,\\
&\vdots\\
-a_{1,n} - a'_{1,n}\iota_1 &= a''_{1,n}\iota_n + a'''_{1,n}\iota_n + \dots + (a^{(n)}_{1,n} - \iota_1)\iota_n\,.
\end{aligned}
$$

Wird hieraus eine beliebige Einheit, etwa ι_q, berechnet, so ist

$$
\iota_q = \frac{\begin{vmatrix}
a''_{1,2}-\iota_1 & a'''_{1,2} & a^{(IV)}_{1,2} & \dots & -a_{1,2}-a'_{1,2}\iota_1 & \dots & a^{(n)}_{1,2}\\
a''_{1,3} & a'''_{1,3}-\iota_1 & a^{(IV)}_{1,3} & \dots & -a_{1,3}-a'_{1,3}\iota_1 & \dots & a^{(n)}_{1,3}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
a''_{1,n} & a'''_{1,n} & a^{(IV)}_{1,n} & \dots & -a_{1,n}-a'_{1,n}\iota_1 & \dots & a^{(n)}_{1,n}-\iota_1
\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}
a''_{1,2}-\iota_1 & a'''_{1,2} & a^{(IV)}_{1,2} & \dots & a^{(q)}_{1,2} & \dots & a^{(n)}_{1,2}\\
a''_{1,3} & a'''_{1,3}-\iota_1 & a^{(IV)}_{1,3} & \dots & a^{(q)}_{1,3} & \dots & a^{(n)}_{1,3}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
a''_{1,n} & a'''_{1,n} & a^{(IV)}_{1,n} & \dots & a^{(q)}_{1,n} & \dots & a^{(n)}_{1,n}-\iota_1
\end{vmatrix}}.
$$

Diese beiden Determinanten sind vom $(n - 1)$ten Grade, und da jedes Element der ersten Diagonalreihe ι_1 linear enthält, so erkennt man ohne wirkliche Ausrechnung sofort, dass jede sich als eine Funktion vom $(n - 1)$ten Grade für ι_1 darstellen lässt. Setzt man für $\iota_2 \dots \iota_n$ diese Werthe in der Bestimmungsgleichung $\iota_1\iota_1 = a'_{1,1} + a'_{1,1}\iota_1 + \dots + a^{(n)}_{1,n}\iota_n$ ein, so erhält man ersichtlich zur Bestimmung von n eine Gleichung vom $(n+1)$ten Grade:

$$\iota_1^{n+1} + b_1\iota_1^{n} + \dots b_n\iota_1 + b_{n+1} = 0.$$

Bezeichnet man die $(n + 1)$ Wurzeln dieser Gleichung durch

$$c_1,\ c_2 \dots c_{n+1},$$

so hat man nach dem Fundamentalsatz der Algebra:

$$(\iota_1 - c_1)(\iota_1 - c_2)\dots(\iota_1 - c_{n+1}) = 0.$$

Da nun sämmtliche c gewöhnliche complexe Zahlen sind, so kann ι_1 nur dann eine wirklich neue complexe Zahl sein, wenn diess Produkt verschwinden würde, ohne dass einer der Faktoren gleich Null würde und diess verstösst eben gegen die Gesetze der allgemeinen Arithmetik.

Ein entsprechendes Verfahren wie bei linearen Gleichungen lässt sich auch bei gewissen linearen Congruenzen anwenden. Hat man das von Gauss [8]) zuerst ausführlich untersuchte System

$$\left.\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n \equiv \alpha_1 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,n}x_n \equiv \alpha_n \end{array}\right\} \text{(mod. m)},$$

so bilde man die Determinante des Systemes $\Delta = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ und deren sämmtliche erste Unterdeterminanten. Ist dann für ein zwischen 1 und n schwankendes k

$$\delta_k = \text{ggd}^{*)} \left\{\frac{d\Delta}{da_{1,k}}, \frac{d\Delta}{da_{2,k}} \ldots \frac{d\Delta}{da_{n,k}}\right\},$$

so ist ganz allgemein

$$\frac{\Delta}{\delta_k}\, x_k \equiv \frac{1}{\delta_k}\left(\alpha_1 \frac{d\Delta}{da_{1,k}} + \ldots + \alpha_n \frac{d\Delta}{da_{n,k}}\right).$$

Dieses von Studnička angegebene Verfahren [9]) ist auch für die praktische Ausrechnung sehr bequem. Es sei z. B. für den nämlichen Modul 7 folgendes System von zwei Congruenzen gegeben:

$$2x + 6y \equiv 1,\ 8x + 10y \equiv 4.$$

Hier ist $\Delta = 2 \cdot 10 - 6 \cdot 8 = -28$, $\frac{d\Delta}{da_{1,1}} = 10$, $\frac{d\Delta}{da_{1,2}} = -8$, $\frac{d\Delta}{da_{2,1}} = -6$, $\frac{d\Delta}{da_{2,2}} = 2$.

Hier ist also $\text{ggd}\left\{\frac{d\Delta}{da_{1,1}}, \frac{d\Delta}{da_{2,1}}\right\} = \text{ggd}\left\{\frac{d\Delta}{da_{1,2}}, \frac{d\Delta}{da_{2,2}}\right\} = 2$ und es ist somit unser obiges System auf das folgende einfachste zurückgeführt:

$$-\frac{28}{2}x \equiv \frac{1}{2}(1 \cdot 10 - 4 \cdot 6) \text{ (mod 7)},\quad -\frac{28}{2}y \equiv \frac{1}{2}(-1.8+4.2) \text{ (mod 7)}.$$

Sind zwei Unterdeterminanten ein und derselben Kategorie als relative Primzahlen erkannt, so kann die Rechnung sofort aufhören, denn δ_k ist alsdann $= 1$. Diess erleichtert natürlich den Calcul **) beträchtlich.

§. 5. Einen besonderen Vortheil bieten die Determinanten zur Darstellung independenter Ausdrücke da, wo andere Hülfsmittel versagen. Bekanntlich existirt die Formel

$$\underset{i=1}{\overset{i=n}{S}} i^m = \frac{n^{m-1}}{m+1} + \frac{n^m}{2} + \frac{1}{2}\binom{m}{1} B_1 n^{m-1} - \frac{1}{4}\binom{m}{3} B_3 n^{m-3}$$
$$+ \frac{1}{6}\binom{m}{5} B_5 n^{m-5} - + \ldots,$$

---

*) Bedeutet den gemeinschaftlichen grössten Theiler.

**) Historisch ist zu dieser Methode zu bemerken, dass sie — den interessanten Aufschlüssen Matthiessen's [10]) zufolge — in ihren Grundzügen bereits den Chinesen als Regel Ta-yen („die grosse Verallgemeinerung") bekannt war. Nur mussten gewisse Zahlen, welche Studnička's Verfahren uns methodisch finden lehrt, alldort durch Tatonnement aufgesucht werden, und in der Beseitigung des Probirens liegt eben dessen hoher Vorzug gegen die chinesische und auch noch gegen die Lösungsart von Gauss.

wo unter $B_1, B_3 \ldots$ die sogenannten Bernoulli'schen Zahlen zu verstehen sind.

Obschon v. Staudt[11]) für die Nenner dieser in Bruchform auftretenden Grössen ein einfaches Bildungsgesetz fand, so wollte es doch lange nicht gelingen, eine auch die Zähler umfassende independente Formel für dieselben auszumitteln; unlängst nun hat Nägelsbach[12]) diese Frage vermittelst der Determinanten zu einem einfachen Abschlusse gebracht.

Derselbe beweist zunächst nachstehende Identität:

$$2h + \underset{q=1}{\overset{q=h}{S}} (-1)^q (2h+1)\, 2^{2q}\, B_{2q-1} = 0,$$

wo h alle Werthe der natürlichen Zahlenreihe anzunehmen vermag. Ertheilt man ihm dieselben wirklich, so erhält man folgendes System von h linearen Gleichungen:

$$\binom{3}{2} 2^1 B_1 = 1,$$

$$\binom{5}{2} 2^1 B_1 - \binom{5}{4} 2^3 B_3 = 2,$$

$$\binom{7}{2} 2^1 B_1 - \binom{7}{4} 2^3 B_3 + \binom{7}{6} 2^5 B_5 = 3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{2h-1}{2} 2^1 B_1 - \binom{2h-1}{4} 2^3 B_3 + \binom{2h-1}{6} 2^5 B_5 - \ldots$$
$$\pm \binom{2h-1}{2h-2} 2^{2h-3} B_{2h-3} = h-1$$

$$\binom{2h+1}{2} 2^1 B_1 - \binom{2h+1}{4} 2^3 B_3 + \binom{2h+1}{6} 2^5 B_5 - \ldots$$
$$\pm \binom{2h+1}{2h-2} 2^{2h-3} B_{2h-3} \mp \binom{2h+1}{2h} 2^{2h-1} B_{2h-1} = h.$$

Betrachtet man in diesem Systeme die einzelnen Bernoulli'schen Zahlen als unbekannte Grössen, so kann man irgend eine daraus berechnen, etwa B_{2h-1}. Dabei bemerkt man, dass in jeder pten Colonne beider Determinanten die Grösse 2^{2p-1} als gemeinschaftlicher Faktor herausgesetzt und damit gehoben werden kann. Nicht minder leuchtet ein, dass nach Kap. II. §. 6 die im Nenner stehende Determinante sich auf ihr erstes Diagonalglied reducirt, und zwar wird dasselbe für ein positives h negativ, anderenfalls positiv sein. Berücksichtigt man diess Alles und setzt noch für $\binom{p}{p-1}$ den gleichgeltenden Werth p, so erhält man als Schlussresultat die folgende elegante Formel Nägelsbach's[13]):

$$B_{2h-1} = \frac{(-1)^{h-1}. \begin{vmatrix} \binom{3}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \binom{5}{2} & \binom{5}{4} & 0 & \dots & 0 & 2 \\ \binom{7}{2} & \binom{7}{4} & \binom{7}{6} & \dots & 0 & 3 \\ . & . & . & . & . & . \\ \binom{2h-1}{2} & \binom{2h-1}{4} & \binom{2h-1}{6} & \dots & \binom{2h-1}{2h-2} & h-1 \\ \binom{2h+1}{2} & \binom{2h+1}{4} & \binom{2h+1}{6} & \dots & \binom{2h+1}{2h} & h \end{vmatrix}}{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \dots (2h+1)\, 2^{2h-1}}.$$

Diese Darstellung lässt sich, wie ihr Autor gezeigt hat, dann noch auf das Mannigfaltigste variiren*). —

Ein weiteres interessantes Beispiel für die grosse Verwendbarkeit einer independenten Determinanten-Darstellung bietet die Lehre von den totalen linearen Differentialgleichungen. Hier gilt nämlich der Satz:

Jede derartige Differentialgleichung, in welcher ausser den verschiedenen Ableitungen der abhängig veränderlichen Grösse y nach x ausschliesslich Funktionen dieses x vorkommen, lässt sich, sobald man eine partikuläre Lösung kennt, auf eine Gleichung von nächst niederer Ordnung bringen.

Unter den vielen von Mansion für dieses Theorem gelieferten Beweisen heben wir den der Zeit nach letzten hervor [14]) und setzen ihn am speziellen Falle auseinander, wie das auch der Urheber desselben ursprünglich gethan hatte **).

Es sei also — unter den A lediglich Funktionen von x verstanden — gegeben die Gleichung dritter Ordnung

$$y''' + A_1 y'' + A_2 y' + A_3 y = 0.$$

Ist z eine partikuläre Lösung, so gilt auch

$$z''' + A_1 z'' + A_2 z' + A_3 z = 0.$$

Setzt man nun $u = y' - \frac{z'}{z}\, y$, $v = uz$, so erhält man durch successives Differentiiren nachstehende Gleichungen:

$$v = zy' - z'y,\; v' = zy'' + z'y' - z'y' - z''y,$$
$$v'' = zy''' + 2z'y'' + z''y' - z'y'' - 2z''y' - z'''y.$$

Diese drei Gleichungen müssen mit der obigen Differentialgleichung

---

*) Einer freundlichen Privatmittheilung des Herrn Édouard Lucas in Paris entnehmen wir die Thatsache, dass man noch auf verschiedene andere Weisen zu geschlossenen Ausdrücken für die Zahlen Jacob Bernoulli's gelangen kann. Mehr darüber findet sich im didaktischen Anhang.

**) Uebrigens lässt sich auch, wie an einem anderen Orte [15]) (in des Verf. mathem. Repertorium) dargethan worden, der ganz allgemeine Beweis sehr leicht erbringen.

zusammen bestehen; die Bedingung, dass diess wirklich geschehe, liegt nach §. 3 dieses Kapitels in der Existenz der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 & A_3y \\ 0 & 0 & z & -z'y-v \\ 0 & z & 0 & -z''y-v' \\ z & z' & -z'' & -z'''y-v'' \end{vmatrix} = 0.$$

In dieser Determinante nehmen wir nun einige Veränderungen vor; wir multipliciren die vierte Colonne mit $\frac{z}{y}$, die dritte mit z', die zweite mit z'', die erste mit z''' und addiren dieselben alsdann zur vierten; so ergiebt sich mit Berücksichtigung der partikulären Integralgleichung:

$$\begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 & A_3z+A_2z'+A_1z''+z''' \\ 0 & 0 & z & -z'z-\frac{vz}{y}+z'z \\ 0 & z & 0 & -z''z-\frac{v'z}{y}+z''z \\ z & z' & -z'' & -z'''z-\frac{v''z}{y}+z'''z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & A_1 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & z & -v \\ 0 & z & 0 & -v' \\ z & z' & -z'' & -v'' \end{vmatrix} = 0.$$

Die resultirende Differentialgleichung

$$v''z + v'(z' - A_1z) + v(z'' + A_2z) = 0,$$

ist also, wie man sieht, für die neu eingeführte Veränderliche v nur noch von der zweiten Ordnung, was zu beweisen war. —

Ehe wir von dieser Leibnitz-Cramer'schen Methode der Auflösung simultaner (gleichzeitiger) Gleichungen des ersten Grades Abschied nehmen, um ihr allerdings bald wieder unter anderen Verhältnissen zu begegnen, sei noch ein Wort über deren Bedeutung für das praktische Rechnen hinzugefügt. Es wird sich nämlich fragen, ob sich für den Fall eines sehr grossen n die Determinantenrechnung in gleicher Weise empfiehlt, ob also durch dieselbe den Bedürfnissen der hier hauptsächlich in's Spiel kommenden Wahrscheinlichkeitsrechnung gedient werde. In seinen schon mehrfach von uns angezogenen Vorlesungen hat sich Jacobi über den Gegenstand ausführlich verbreitet, ohne dass bisher im Drucke darauf aufmerksam gemacht worden wäre.

Bedenkt man, dass jede n reihige Determinante des Zählers und Nenners gleichmässig n! Entwickelungsglieder giebt, so kann man die Berechnungsarbeit für eine Unbekannte etwa der Zahl 2n! proportional setzen. Verfährt man andererseits in Gemässheit des von der Methode der kleinsten Quadrate vorgezeichneten Principes, wobei durch successive Elimination aus einem gegebenen Systeme auf ein solches von um eine Einheit geringerem Grade zurückgegangen wird, so hat man etwa, um von n zu (n—1) Gleichungen zu gelangen, die erste Gleichung successive mit n Coëfficienten zu multipliciren und sodann dieselbe von den übrigen (n—1) Gleichungen zu subtrahiren, also im Ganzen n(n—1) Operationen zu verrichten. Ebenso würde der zweite Akt (n — 1) (n — 2) Operationen erfordern, und man bekäme deren im Ganzen

$$1.2 + 2.3 + \ldots + (n-2)(n-1) + (n-1)n$$
$$= 2\left(1 + 3 + 6 + \ldots + \frac{(n-1)n}{2}\right) = \frac{n^3-n}{3}.$$

Die aufzuwendende Mühe wäre sonach ungefähr dem Cubus der Gradzahl proportional, und da der betreffende Ausdruck bei wachsendem n sehr bald hinter 2n! zurückbleibt, so ist immerhin für die Anwendung jenes recurrente Verfahren dem Bilden und Auswerthen der Determinanten vorzuziehen.

Indess ist auch jetzt noch die Berechnungsarbeit eine horrende. Jacobi erwähnt selbst, dass bei geodätischen Untersuchungen n auf 86 steige; Bessel's Gradmessung erfordert die Bestimmung von 70, Seidel's photometrische Versuchsreihe eine solche von 72 Unbekannten. Um solchen Anforderungen Genüge zu leisten, hat der letztgenannte Mathematiker ein approximatives weit schneller zum Ziele führendes Verfahren vorgeschlagen [16]), dem er dann noch später eine speziell für astronomische Zwecke dienliche Fassung gegeben hat [17]). Dasselbe ist jedoch nur dann mit völliger Sicherheit als ein convergentes zu betrachten, wenn jede der Determinante des Systemes condiagonale Unterdeterminante (Kap. II. §. 14) einen positiven Werth besitzt.

§. 6. Mit Hülfe der Determinanten hat Fürstenau [18]) eine sehr bemerkenswerthe Methode zur Auflösung höherer algebraischer Gleichungen eruirt, welche vor anderen Verfahrungsweisen den grossen Vorzug hat, stets und ohne alle Vorbereitungen eine völlig bestimmte Wurzel zu liefern und mit gleicher Leichtigkeit auf literale, wie auf numerische Gleichungen sich anwenden zu lassen. Wir werden diese Methode hier nach der wesentlich vereinfachenden Ableitung Baltzer's [19]) darstellen.

Gegeben sei eine algebraische Gleichung vom n ten Grade

$$0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

deren Wurzeln sämmtlich reell sein sollen; auch enthalte dieselbe keine mehrfachen Wurzeln. Indem wir diese Gleichung successive mit $x, x^2, x^3 \ldots$ multipliciren, erhalten wir folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
-a_0 &= a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \\
0 &= a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^n + a_n x^{n+1}, \\
0 &= \phantom{a_0 x + {}} a_0 x^2 + \ldots + a_{n-2} x^n + a_{n-1} x^{n+1} + a_n x^{n+2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sämmtliche Gleichungen sind in Bezug auf die einzelnen Potenzen von x linear; man kann also diese Potenzen als unbekannte Grössen auffassen und $(p - 1)$ aufeinanderfolgende, z. B. $x^{k+1}, x^{k+2} \ldots x^{k+p-1}$ eliminiren.

Wir bilden die (orthosymmetrische) Determinante p ten Grades

$$\triangle = \begin{vmatrix}
a_k & a_{k+1} & a_{k+2} & \ldots & a_{k+p-2} & a_{k+p-1} \\
a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & \ldots & a_{k+p-3} & a_{k+p-2} \\
a_{k-2} & a_{k-1} & a_k & \ldots & a_{k+p-4} & a_{k+p-3} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{k-p+1} & a_{k-p+2} & a_{k-p+3} & \ldots & a_{k-1} & a_k
\end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man dann diejenigen Gleichungen, in welchen die zu eliminirenden Potenzen von x vorkommen, der Reihe nach mit den nach den Elementen der ersten Vertikalreihe genommenen ersten Unterdeterminanten von $\triangle$ und setzt

$$\varphi_x^k = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k)\frac{d\triangle}{da_k} + (a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_{k-1} x^k)\frac{d\triangle}{da_{k-1}}$$
$$+ \ldots + a_0 x^k \frac{d\triangle}{da_{k-p+1}},$$

so ergiebt die Addition der betreffenden Gleichungen

$$0 = \varphi_x^k + b_1 x^{k+p} + b_2 x^{k+p+1} + \ldots b_{n-k} x^{n+p-1}.$$

Der Werth von φ_x^k lässt sich nun folgendermassen als Determinante schreiben:

$$\begin{vmatrix} a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k & a_{k+1} & a_{k+2} & \ldots & a_{k+p-1} \\ a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_{k-1} x^k & a_k & a_{k+1} & \ldots & a_{k+p-2} \\ a_0 x^2 + a_1 x^3 + \ldots + a_{k-2} x^k & a_{k-1} & a_k & \ldots & a_{k+p-3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 x^k & a_{k-p+2} & a_{k-p+3} & \ldots & a_k \end{vmatrix},$$

und diese Determinante lässt sich sofort in folgende Summe von $(k + 1)$ Summanden zerfällen:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_{k+1} & a_{k+2} & \ldots \\ 0 & a_k & a_{k+1} & \ldots \\ 0 & a_{k-1} & a_k & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} a_1 & a_{k+1} & a_{k+2} & \ldots \\ a_0 & a_k & a_{k+1} & \ldots \\ 0 & a_{k-1} & a_k & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \ldots + x^k \begin{vmatrix} a_k & a_{k+1} & a_{k+2} & \ldots \\ a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & \ldots \\ a_{k-2} & a_{k-1} & a_k & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Es seien nun $x_{k+1}, x_{k+2} \ldots x_{n-k}$ Wurzeln der aufzulösenden Gleichung.

Dann besteht nach dem Obigen folgendes System von $(n - (k - 1))$ Gleichungen

$$0 = \varphi_{x_i}^k + \mathop{S}_{r=1}^{r=n-k} b_r x_i^{k+p+r-1} \quad (i = k + 1, k + 2 \ldots n),$$

linear für die Grössen b, welche Funktionen der übrigen Potenzen von x sind. Nimmt man noch die obige Gleichung

$$0 = \varphi_x^k + \mathop{S}_{r=1}^{r=n-k} b_r x^{k+p+r-1}$$

hinzu, so hat man ein System, welches nach §. 3 nur dann bestehen kann, wenn seine Determinante sich annullirt; dividiren wir in dieser jede Zeile durch ihr zweites Element, so ergiebt sich uns folgende Gleichung:

$$\triangle' = \begin{vmatrix} \frac{1}{x^{k+p}} \varphi_x^k & 1 & x & \ldots & x^{n-k-1} \\ \frac{1}{x_{k+1}^{k+p}} \varphi_{x_{k+1}}^k & 1 & x_{k+1} & \ldots & x_{k+1}^{n-k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{x_n^{k+p}} \cdot \varphi_{x_n}^k & 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-k-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Sind $c_k, c_{k+1} \ldots c_n$ die nach den Elementen der ersten Colonne genommenen ersten Unterdeterminanten von $\triangle'$, so liefert eine Zerlegung die neue Gleichung

$$0 = c_k \varphi_x^k + c_{k+1}\left(\frac{x}{x_{k+1}}\right)^{k+p} \varphi_{x_{k+1}}^k + \ldots + c_n \left(\frac{x}{x_n}\right)^{k+p} \varphi_{x_n}^k,$$

wo in den Grössen c natürlich kein p mehr vorkommt. Nehmen wir nun an, der höhere Index einer Wurzel deute auch deren absolutes Grössersein an. Lässt man p über jede Grösse hinauswachsen, so verschwindet jeder Bruch von der Form $\left(\frac{x}{x_q}\right)^{k+p}$, und es bleibt nur übrig $\varphi_x^k = 0$.

So hat man also für das Produkt der k ersten Wurzeln folgenden Werth gefunden:

$$x_1 x_2 \ldots x_k = (-1)^k a_0 \begin{vmatrix} a_{k2} & a_{k+1} & a_{k+2} & \ldots \\ a_{k-1} & a_{k3} & a_{k+1} & \ldots \\ a_{k-2} & a_{k-1} & a_{k4} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{k1} & a_{k+1} & a_{k+2} & \ldots \\ a_{k-1} & a_{k2} & a_{k+1} & \ldots \\ a_{k-2} & a_{k-1} & a_{k3} & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Die den Diagonalelementen angehängten Zahlen dienen lediglich dazu, festzustellen, dass die Determinante des Zählers, wenn die Berechnung irgendwo abbricht, einen um eine Einheit niedrigeren Grad bekommen muss, als die des Nenners.

Von besonderem Interesse ist es, die absolut kleinste Wurzel, welche bei unserer Bezeichnung also gleich x_1 wäre, kennen zu lernen. Dieselbe würde sich auch ohne die oben durchgeführte Betrachtung unmittelbar in dieser Form gefunden haben:

$$-a_0 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \ldots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Mit besonderer Leichtigkeit liefert das hier skizzirte Verfahren die näherungsweise Auflösung solcher reciproker Gleichungen, deren Coëfficienten aufeinanderfolgende Binomialcoëfficienten sind. Hat man z. B. die Gleichung

$$0 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$$

zu behandeln, so ist nach Fürstenau die kleinste Wurzel, wenn man etwa bei Determinanten vom fünften und sechsten Grade stehen bleibt, gleich

$$-\begin{vmatrix} \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & 0 \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} \\ 0 & 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & 0 & 0 \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & 0 \\ 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \\ 0 & 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \binom{4}{0} & \binom{4}{1} \end{vmatrix},$$

und diesem Quotienten können wir nach Kap. III. §. 9 den folgenden substituiren:

$$-\binom{4+4}{5} : \binom{4+5}{6} = -\frac{56}{84} = -\frac{2}{3}.$$

Dieser Werth, oben eingesetzt, ergiebt für das rechtsstehende Polynom den von Null verhältnissmässig nur wenig abweichenden Werth 0, 012 . . .

Die Annahmen über die Realität sämmtlicher Wurzeln, sowie auch über das Nicht-Vorhandensein von Doppelwurzeln etc. sind nicht absolut nothwendig; Fürstenau hat [20]) den Nachweis geführt, dass auch hiefür seine Methode sich adaptiren lasse *).

§. 7. In naher Beziehung zu den Deduktionen des vorigen Paragraphen steht die allgemeine Lösung der Aufgabe: Eine bei einem beliebigen Gliede abbrechende recurrirende Reihe fortzusetzen, ohne deren „Scale" zur Verfügung zu haben, sowie vor Allem auch die Umkehrung dieser Aufgabe. Bekanntlich heisst eine Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + \ldots a_{n-r} x^{n-r} + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

dann recurrirend von der $r$ten Ordnung, wenn die Coëfficienten a_n, $a_{n-1} \ldots a_{n-r}$ durch eine durchaus lineare Gleichung verknüpft sind, welche eben die Relationsscale genannt wird. Jede solche Reihe ist demnach durch $2r$ Folgeglieder bestimmt und kennt man alle Coëfficienten bis zum $2r$ten exclusive, so lässt sich dieser leicht berechnen. Denn nach den Bedingungen der Recurrenz besteht folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{array}{l} a_r + \alpha_1 a_{r-1} + \alpha_2 a_{r-2} + \ldots + \alpha_r a_0 = 0 \\ \vdots \\ a_{2r} + \alpha_1 a_{2r-1} + \alpha_2 a_{2r-2} + \ldots + \alpha_r a_r = 0; \end{array}$$

die Bedingung für die Coëxistenz dieser Gleichungen ist

$$\begin{vmatrix} a_r & a_{r-1} & \ldots & a_0 \\ a_{r+1} & a_r & \ldots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2r} & a_{2r-1} & \ldots & a_r \end{vmatrix} = 0.$$

Hieraus berechnet sich a_{2r} linear; ist a_{2r+1} gesucht, so hat man blos sämmtliche Indices um eine Einheit zu erhöhen.

Ist z. B. die Reihe zweiter Ordnung

$$1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + \ldots$$

um zwei Glieder fortzusetzen, so berechnen wir a_4 und a_5 bezüglich aus den beiden Gleichungen

---

*) Obwohl sich, wie neuerdings Nägelsbach [21]) dargethan hat, sehr wohl zeigen lässt, dass der wahre Wurzelwerth stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden Näherungswerthen liege, so genügt diess doch nicht zur endgültigen Feststellung der Convergenz, denn es wäre ja an sich denkbar, dass beide Kategorieen von Näherungsbrüchen in entgegengesetztem Sinne divergirten. Diese Lücke ist bedauerlich, denn bestünde sie nicht, so besässe man durch Fürstenau's Methode einen direkten rein algebraischen Beweis für den Fundamentalsatz der Algebra, dass jeder algebraischen Gleichung $n$ten Grades n sie befriedigende Werthe zukommen — einen Beweis, der einen elementaren Charakter trüge und den bisher unvermeidlichen Rekurs auf Continuitätsbetrachtungen u. dgl. überflüssig machte.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 3 \\ a_4 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 7 & 4 & 3 \\ a_4 & 7 & 4 \\ a_5 & a_4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

und finden $a_4 = 11$, $a_5 = 18$, so dass also die erweiterte Reihe

$$1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + 11x^4 + 18x^5 + \ldots$$

erhalten worden ist.

Eine recurrirende Reihe entsteht immer durch Division zweier ganzer Funktionen, so zwar, dass die Funktion im Nenner einen um 1 höheren Grad besitzt, als die im Zähler. Ist nun im Gegensatze zu dem eben diskutirten Probleme eine vollständige recurrirende Reihe gegeben, so kann man sich die Aufgabe stellen, zu derselben die erzeugende Bruchfunktion zu finden. Für diese Aufgabe, welche in neuerer Zeit Dietrich[22]) eingehend behandelt hat, wurde bereits früher eine elegante allerdings aber nur partielle Lösung von Lieblein[23]) gegeben, welche wir hier reproduciren, resp. weiter ausführen wollen.

Die Reihe sei

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_r x^r,$$

die erzeugende Funktion

$$\frac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_{r-1} x^{r-1}}{1 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_{r-1} x^{r-1} + \alpha_r x^r},$$

indem wir ja den ganzen Bruch als mit dem ersten Gliede des Nenners dividirt voraussetzen können. Gehen wir nun wieder auf das oben aufgestellte System linearer Gleichungen zurück, so finden wir in bekannter Weise nach einigen einfachen Reihenvertauschungen

$$\alpha_r = \begin{vmatrix} -a_r & a_1 & \ldots & a_{r-1} \\ -a_{r+1} & a_2 & \ldots & a_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{2r-1} & a_r & \ldots & a_{2r-2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{r-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r-1} & a_r & \ldots & a_{2r-2} \end{vmatrix} {}^{*)}.$$

Hieraus sind also die Constanten des Nenners vollständig bekannt.

Zur Berechnung des Zählers brauchen wir nur den Nenner mit der Reihe zu multipliciren, das Produkt dem Zähler gleich zu setzen und weiter nach dem Gesetze der unbestimmten Coëfficienten zu verfahren.

Dann erhalten wir folgende Gleichungen:

$$A_0 = \alpha_0,\ A_1 = a_1 + \alpha_1 a_0,\ A_2 = a_2 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_0 \ldots$$
$$A_{r-1} = a_{r-1} + \alpha_1 a_{r-2} + \ldots + \alpha_{r-1} a_0,$$

so dass also mit Rücksicht auf das zuletzt gefundene Resultat jeder Coëfficient A_q als eine Summe von zweigliedrigen Produkten erscheint, deren einer Faktor je ein a, der andere ein Determinantenquotient der angegebenen Art sein wird.

---

*) Diese Formel leidet bei Lieblein (a. a. O.) an einem Schreibfehler, welcher, als dem ersten Augenschein keineswegs auffällig, auch in die erste Auflage dieses Buches (S. 136) übergegangen, hier aber verbessert ist. Die betreffenden Determinanten sind nämlich bei genauerem Zusehen gar keine solchen, indem die Horizontalreihen r. die Colonnen (r + 1) Elemente enthalten. Allerdings ergäben hier auch unvollständige Determinanten einen guten Sinn, diess müsste aber äusserlich angedeutet werden durch die zwei Striche der Matrix.

Wie heisst z. B. die erzeugende Funktion der recurrirenden Reihe zweiter Ordnung

$$1 + 4x - 13x^2 + 6x^3 + \dots ?$$

Hier ist die Funktion des Zählers linear, diejenige des Nenners quadratisch, und zur Bestimmung der zwei Grössen α_1 und α_2 dienen die Gleichungen ($a_1 = 4$, $a_2 = -13$, $a_3 = 6$):

$$\alpha_2 + 4\alpha_1 = 13 \qquad 4\alpha_2 - 13\alpha_1 = -6.$$

Diess liefert

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 13 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -13 \end{vmatrix}} = \frac{-58}{-29} = 2, \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 4 \\ -6 & -13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 13 \end{vmatrix}} = \frac{-145}{-29} = 5.$$

Für den Zähler ist allein A_1 durch die Relation $A_1 = 4 + 2 \cdot 1$ zu bestimmen, so dass sich als erzeugende Bruchfunktion die folgende ergiebt:

$$\frac{1 + 6x}{1 + 2x + 5x^2}.$$

Auf die Analogie, welche zwischen dieser Gattung von Problemen und den im vorigen Paragraphen betrachteten obwaltet, hat zuerst Hankel (Kap. I. §. 6) hingewiesen.

§. 8. Von grosser Wichtigkeit für die Theorie der Gleichungen sind diejenigen Determinanten, durch welche man die Summen gleicher Wurzelpotenzen independent durch die Coëfficienten der betreffenden algebraischen Gleichung auszudrücken im Stande ist. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ die n Wurzeln der Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

und setzt man mit Fiedler[24]) $\underset{i=1}{\overset{i=n}{S}} \alpha_i^t = s_t$, so erhält man nach Albert Girard[25]) zur Berechnung dieser Summen folgendes System von recurrenten Gleichungen:

$$\begin{aligned} & a_1 + a_0 s_1 = 0, \\ & 2a_2 + a_1 s_1 + a_0 s_2 = 0 \\ & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ & t a_t + a_{t-1} s_1 + a_{t-2} s_2 + \dots + a_1 s_{t-1} + a_0 s_t = 0. \end{aligned}$$

Berechnet man hieraus s_t und bemerkt, dass die Determinante des Systemes sich auf das Produkt a_0^t ihrer Diagonalelemente reducirt, so findet man

$$s_t = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^t \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ 4a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t a_t & a_{t-1} & a_{t-2} & a_{t-3} & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Das obige System linearer Gleichungen gestattet noch eine zweite nicht weniger wichtige Verwendung, indem man nämlich nicht mehr die s, sondern jetzt die a als die unbekannten Grössen ansieht. Durch analoge Behandlung erhält man

$$a_t = \frac{(-a_0)^t}{t!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & \dots & 0 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{t-1} & s_{t-2} & s_{t-3} & s_{t-4} & \dots & t-1 \\ s_t & s_{t-1} & s_{t-2} & s_{t-3} & \dots & s_1 \end{vmatrix}.$$

Für $t = 4$ ist z. B.

$$a_4 = \frac{a_0}{4!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 \\ s_4 & s_3 & s_2 & s_1 \end{vmatrix} = \frac{a_0}{4!}(s_1^4 - 6s_1^2 s_2 + 8s_1 s_3 + 3s_2^2 - 6s_4).$$

§. 9. Obwohl strenge genommen nicht eigentlich zur Classe der Eliminationsprobleme gehörig reihen wir doch hier die folgende für die Theorie der Gleichungen wichtige Betrachtung an. Wir behalten in diesem Paragraphen die Bezeichnungsweise des vorigen bei, indem wir nur der Einfachheit halber $a_0 = 1$ setzen. Alsdann möge ausser den n Wurzeln $\alpha_1 \dots \alpha_n$ unserer Gleichung vom nten Grade noch eine Reihe von n Grössen $\alpha'_1, \alpha'_2 \dots \alpha'_n$ vorhanden sein, und wir betrachten die Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha'_1-\alpha_1} & \frac{1}{\alpha'_2-\alpha_1} & \dots & \frac{1}{\alpha'_n-\alpha_1} \\ \frac{1}{\alpha'_1-\alpha_2} & \frac{1}{\alpha'_2-\alpha_2} & \dots & \frac{1}{\alpha'_n-\alpha_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\alpha'_1-\alpha_n} & \frac{1}{\alpha'_2-\alpha_n} & \dots & \frac{1}{\alpha'_n-\alpha_n} \end{vmatrix},$$

welche wir mit

$$\prod_{i=1}^{i=n}\prod_{j=1}^{j=n}(\alpha'_i - \alpha_j) = \begin{cases} (\alpha'_1-\alpha_1)(\alpha'_1-\alpha_2)\dots(\alpha'_1-\alpha_n)\times \\ (\alpha'_2-\alpha_1)(\alpha'_2-\alpha_2)\dots(\alpha'_2-\alpha_n)\times \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ (\alpha'_n-\alpha_1)(\alpha'_n-\alpha_2)\dots(\alpha'_n-\alpha_n) \end{cases}$$

multipliciren. Dadurch entsteht eine Determinante, deren Elemente ausnahmslos ganze rationale Funktionen der gegebenen Grössen vom nten Grade sind. Bezeichnet man das Produkt sämmtlicher aus den Grössen α und α' für sich allein zu bildenden Differenzen durch P und P', so lässt sich leicht einsehen, dass der Ausdruck

$$\triangle \,.\, \prod_{i=1}^{i=n}\prod_{j=1}^{j=n}(\alpha'_i - \alpha_j) : PP'$$

weder von einem α noch von einem α' abhängig ist *). Setzen wir also

---

*) Wird nämlich etwa $\alpha_k = \alpha_l$, so verschwindet ersichtlich die jetzt zwei

interimistisch $\alpha'_i = \alpha_i$, so wird $PP' = P^2$, und da sich offenbar die Determinante $\triangle$ auf ihr zweites Diagonalglied reducirt, so ist jetzt

$$\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{P^2} = 1 : \begin{cases} (\alpha_1-\alpha_2)\ (\alpha_1-\alpha_3)\ \ldots\ (\alpha_1-\alpha_n) \\ (\alpha_2-\alpha_1)\ (\alpha_2-\alpha_3)\ \ldots\ (\alpha_2-\alpha_n) \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ (\alpha_n-\alpha_1)\ (\alpha_n-\alpha_2)\ \ldots\ (\alpha_n-\alpha_{n-1}) \end{cases}:$$

Da nun jener Quotient auch für ein von P verschiedenes P′ seinen Werth als Potenz von (-1) beibehält, folgt

$$\frac{P\ .\ P'}{\prod\limits_{i=1}^{j=n}\prod\limits_{j=1}^{j=n}(\alpha'_i-\alpha_j)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha'_1-\alpha_1} & \frac{1}{\alpha'_2-\alpha_1} & \ldots & \frac{1}{\alpha'_n-\alpha_1} \\ \frac{1}{\alpha'_1-\alpha_2} & \frac{1}{\alpha'_2-\alpha_2} & \ldots & \frac{1}{\alpha'_n-\alpha_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{\alpha'_1-\alpha_n} & \frac{1}{\alpha'_2-\alpha_n} & \ldots & \frac{1}{\alpha'_n-\alpha_n} \end{vmatrix}.$$

Anhangsweise möge noch über den vorhin eingeführten Ausdruck P^2, welcher das Quadrat aller überhaupt möglichen Wurzeldifferenzen einer Gleichung darstellt, Einiges bemerkt werden. Man nennt diesen Ausdruck die Discriminante der Gleichung *). Dieselbe kann noch in einer anderen Form dargestellt werden. Es ist nämlich nach Kap. III. §. 1 *II* gleich

$$\begin{matrix} \pm\ (\alpha_1-\alpha_2)\ (\alpha_1-\alpha_3)\ \ldots\ (\alpha_1-\alpha_n) \times \\ (\alpha_2-\alpha_3)\ \ldots\ (\alpha_2-\alpha_n) \times \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ (\alpha_{n-1}-\alpha_n) \end{matrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 & \ldots & \alpha_3^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

und da das obige Doppelprodukt P^2 das Produkt *II* zweimal, nur mit verändertem Vorzeichen der Differenzen in sich enthält, so ist, wenn wir jene Determinante mit δ bezeichnen,

---

gleiche Reihen enthaltende Determinante $\triangle$, und ein Gleiches gilt für $\alpha'_k = \alpha'_l$, d. h. $\triangle$ ist sowohl durch $(\alpha_k - \alpha_l)$ als auch durch $(\alpha'_k - \alpha'_l)$ ohne Rest theilbar.

*) Eigentlich versteht man unter der Discriminante einer Gleichung jede Funktion ihrer Wurzeln, welche für den Fall der Gleichheit zweier Wurzeln selbst verschwindet, und insoferne könnte jede beliebige Potenz von P so bezeichnet werden. Jedoch ist der hier gebrauchte Werth conventionell zu dieser Bezeichnung erhoben worden, wenn noch speziell die höchste Potenz von x den Coëfficienten 1 hat. Die quadratische Gleichung $x^2 + bx + c = 0$ liefert so

$$P^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2-4c}}{2} - \frac{b}{2} + \frac{\sqrt{b^2-4c}}{2} + \frac{b}{2}\right)^2 = b^2 - 4c,$$

und diese zweireihige Determinante $\begin{vmatrix} b & 2\sqrt{c} \\ 2\sqrt{c} & b \end{vmatrix}$ wird denn auch gewöhnlich als Discriminante bezeichnet.

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \Pi^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \delta^2,$$
$$P^2 = \delta^2,\ P = \pm\,\delta.$$

Wir gewinnen so einen Satz, welchen Fiedler mit folgenden Worten ausdrückt [26]):

Die Discriminante einer Gleichung kann nach dem Multiplikationsgesetze der Determinanten leicht aus dem Produkt aller Wurzeldifferenzen abgeleitet werden.

Einen einfachen Beweis der obigen Relation hat auch Weihrauch [27]) angegeben.

§. 10. Mit dem Namen des Eliminationsproblemes im engeren Sinne bezeichnet man gewöhnlich die Aufgabe, aus zwei gegebenen algebraischen Gleichungen mit Einer Unbekannten diese letztere wegzuschaffen. Es handelt sich hier also um Angabe derjenigen Relation zwischen den Coëfficienten beider Gleichungen, welche sich ergeben würde, wenn man die unbekannte Grösse aus der einen Gleichung bestimmte und ihren Werth in der anderen substituirte. Mit Euler [28]), welcher diess Problem zuerst eingehender betrachtete, können wir dasselbe auch noch folgendermassen formuliren: Es soll die Bedingung dafür aufgesucht werden, dass den beiden gegebenen Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel zukomme.

Eine Lösung dieser Aufgabe wurde, wie wir (Kap. I. §. 2) sahen, bereits von Leibnitz angedeutet. Später beschäftigte sich Bézout (Kap. I. §. 5) längere Zeit hindurch mit demselben; das Hauptaugenmerk richtete er bei seinen Arbeiten auf die Bestimmung des Grades der bei der Elimination resultirenden Gleichung. Er erreichte seinen Zweck, wenn auch nicht in der wünschenswerthen Allgemeinheit; vollständig wurde auch dieser letzteren Forderung die Regel Minding's [29]) gerecht, zu deren Herleitung sich ihr Erfinder jedoch noch nicht des eigentlichen Determinantencalculs bediente.

Die Auflösung unserer Aufgabe vollzieht sich am einfachsten vermittelst der von Sylvester [30]) vorgeschlagenen und von ihm als dialytische bezeichneten Methode, welche von den Determinanten Gebrauch macht.

Gegeben seien die beiden Gleichungen

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$
$$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0.$$

Man multiplicire die erste Gleichung successive mit $x^n, x^{n-1} \ldots x^3, x^2, x^1$, die zweite ebenso mit $x^m, x^{m-1} \ldots x^3, x^2, x^1$; alsdann erhält man ein System von $(m + n)$ Gleichungen in folgender Gestalt:

$$\begin{aligned}
&a_m x^{m+n} + a_{m-1} x^{m+n-1} + \ldots + a_2 x^{n+2} + a_1 x^{n+1} + a_0 x^n = 0,\\
&\qquad a_m x^{m+n-1} + \ldots + a_3 x^{n+2} + a_2 x^{n+1} + a_1 x^n + a_0 x^{n-1} = 0\\
&\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&\qquad\qquad a_m x^{m+1} + \ldots + a_2 x^3 + a_1 x^2 + a_0 x = 0;\\
&A_n x^{m+n} + A_{n-1} x^{m+n-1} + \ldots + A_2 x^{m+2} + A_1 x^{m+1} + A_0 x^m = 0,\\
&\qquad A_n x^{m+n-1} + \ldots + A_3 x^{m+2} + A_2 x^{m+1} + A_1 x^m + A_0 x = 0\\
&\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\\
&\qquad\qquad A_n x^{n+1} + \ldots + A_2 x^3 + A_1 x^2 + A_0 x = 0.
\end{aligned}$$

Betrachtet man sämmtliche Potenzen von x — ganz ebenso wie diess bei der Fürstenau'schen Methode (vergl. §. 6) erfordert wird — als Unbekannte, so ist in Bezug auf diese das System ein lineares. Damit also die gegebenen $(m + n)$ Gleichungen zusammenbestehen können, muss eine Bedingungsgleichung existiren, und diess ist nach §. 3 des Kapitels die folgende:

$$\begin{vmatrix} a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \dots \\ 0 & a_m & a_{m-1} & a_{m-2} & \dots \\ 0 & 0 & a_m & a_{m-1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n & A_{n-1} & A_{n-2} & A_{n-3} & \dots \\ 0 & A_n & A_{n-1} & A_{n-2} & \dots \\ 0 & 0 & A_n & A_{n-1} & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0.$$

In dieser Gleichung kommt die Grösse x nicht mehr vor; sie ist somit das Resultat der Elimination. Dass sich auf diese Weise der Grad der Eliminationsgleichung leicht bestimmen lässt, leuchtet ohne Weiteres ein.

Beispiel 1. Hat man aus den beiden Gleichungen

$$ax^5 + bx^4 + cx^2 + d = 0, \quad fx^2 + gx + h = 0$$

die Unbekannte x zu eliminiren, so erhält man nach Sylvester folgende $5 + 2 = 7$ Gleichungen:

$$\begin{aligned} ax^7 + bx^6 + 0x^5 + cx^4 + 0x^3 + dx^2 &= 0, \\ ax^6 + bx^5 + 0x^4 + cx^3 + 0x^2 + dx &= 0, \\ fx^7 + gx^6 + hx^5 &= 0, \\ fx^6 + gx^5 + hx^4 &= 0, \\ fx^5 + gx^4 + hx^3 &= 0, \\ fx^4 + gx^3 + hx^2 &= 0, \\ fx^3 + gx^2 + hx &= 0. \end{aligned}$$

Aus diesen sieben Gleichungen folgt durch Elimination

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & c & 0 & d & 0 \\ 0 & a & b & 0 & c & 0 & d \\ f & g & h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & g & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f & g & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & g & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f & g & h \end{vmatrix} = 0.$$

Beispiel 2. Sind in einer Ebene zwei Kegelschnitte gegeben, und zieht man an jeden derselben Tangenten, so kann man aus denselben projektivische Systeme bilden; es besitzen nämlich zwei Systeme diese Eigenschaft dann, wenn auf einer geraden Linie eine zu beiden Systemen projektivische Punktreihe gefunden werden kann. Sind die Gleichungen der Kegelschnitte in Liniencoordinaten gegeben, so sind die Gleichungen zweier solcher Tangentensysteme folgende:

$$A + B\lambda + C\lambda^2 = 0, \quad A' + B'\lambda + C'\lambda^2 = 0, \text{*)}$$

*) Tritt nämlich der Kegelschnitt als Tangentengebilde auf, so werden die durch die Gleichungen

wie Hesse[32]) dargethan hat. Je zwei aufeinander bezogene Gerade dieser Systeme bestimmen durch ihren Durchschnittspunkt eine gewisse Curve; man will wissen, von welcher Ordnung dieselbe ist. Die Gleichung der krummen Linie findet sich aus den obigen beiden durch Elimination des Parameters λ. Wendet man Sylvester's Verfahren an, vertauscht im Resultat erste und zweite, dritte und vierte Zeile, sowie auch erste und vierte, zweite und dritte Colonne, so folgt

$$\begin{vmatrix} C & B & A & 0 \\ 0 & C & B & A \\ C' & B' & A' & 0 \\ 0 & C' & B' & A' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & C & 0 \\ 0 & A & B & C \\ A' & B' & C' & 0 \\ 0 & A' & B' & C' \end{vmatrix} = 0.$$

Ein Blick auf das Diagonalglied lässt erkennen, dass die durch diese Gleichung repräsentirte Curve von der vierten Ordnung ist.

§. 11. Eine sehr wichtige Anwendung gestattet das skizzirte Verfahren auf die Bestimmung des Kennzeichens zu machen, welches für die mehrfachen Wurzeln einer Gleichung besteht. Ist z. B.

$$f_x \equiv (x - a)^2 \psi_x, \quad f'_x = (x - a)\,(2\psi_x + (x - a)\psi'_x),$$

so erkennt man, dass für den Fall einer Doppelwurzel das Gleichungspolynom und sein erster Differentialquotient einen gemeinschaftlichen Faktor besitzen müssen. Daraus fliesst sofort die Regel:

Verschwindet der nach dem dialytischen Verfahren gebildete Eliminations-Ausdruck zwischen einer Gleichung und ihrer ersten Ableitung, so besitzt erstere zwei gleiche Wurzeln.

Ist z. B.

$$f_x \equiv x^3 - 11x^2 + 32x - 28 = 0, \quad f'_x \equiv 3x^2 - 22x + 32 = 0,$$

so liefert die Elimination die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & -11 & 32 & -28 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & 32 & -28 \\ 3 & -22 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -22 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -22 & 32 \end{vmatrix},$$

welche bei'm Ausrechnen sich annullirt. Die Gleichung besässe sonach eine Doppelwurzel, und in der That ist

$$f_x = (x - 2)\,(x - 2)\,(x - 7).$$

Natürlich verschwindet in solchem Falle auch die Discriminante (§. 9).

Durch einen analogen Gedankengang lassen sich auch die Bedingungen

---

$$A + 2\lambda B + \lambda^2 C = 0, \quad A' + 2\mu B' + \mu^2 C' = 0$$

charakterisirten Gebilde dadurch einander projektivisch zugeordnet, dass man zwischen ihren Parametern eine beiderseits lineare Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$ setzt. Ueber diese Gleichung kann nun weiter so verfügt werden, dass sie in die nachstehende $\lambda = \mu$ übergeht, so dass dann also die Gleichungen der Tangentengebilde die oben dafür angegebene Form annehmen. Bei dieser Art der Interpretation ergiebt sich dann die resultirende krumme Linie in ihrer Eigenschaft als Ordnungscurve. Untersuchungen über diese letztere und ihr Seitenstück hat Bretschneider[31]) angestellt; aus der Einleitung der betreffenden Schrift stammen auch die vorstehend mitgetheilten Erläuterungen des Hesse'schen Verfahrens.

für die Coëxistenz von mehr als zwei Gleichungen mit Einer Unbekannten aufstellen. Wir verweisen jedoch betreffs dieser Untersuchung auf eine derselben ausschliessend gewidmete Arbeit Björling's [33]).

§. 12. Es ist von selbst klar, dass die bisher diskutirte Eliminationsmethode auch dazu gebraucht werden kann, aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten die eine wegzuschaffen, d. h. eine Gleichung herzustellen, in welcher nur noch eine einzige unbekannte Grösse vorkommt. Man betrachtet eben einfach die nicht zu eliminirende Unbekannte vorläufig als bekannt, bildet die Resultante und hat dann eine Gleichung, in welcher ausser den Coëfficienten beider Gleichungen nur noch jene eine Unbekannte vorkommt *).

Hat man z. B. aus den Gleichungen

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0, \quad \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 = 0$$

die Unbekannte x zu eliminiren, so findet man nach §. 10 sofort

$$\begin{vmatrix} a & by & cy^2 & dy^3 & 0 \\ 0 & a & by & cy^2 & dy^3 \\ \alpha & \beta y & \gamma y^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta y & \gamma y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta y & \gamma y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Man erkennt sofort, dass die Elimination eine Gleichung sechsten Grades für y ergiebt.

---

*) Hie und da lässt sich dieser methodische Prozess durch einen anderen ersetzen, der vermittelst eines Kunstgriffes die Endgleichung rasch und in praktisch brauchbarerer Form liefert. Diekmann hat eine Menge solcher hübscher Aperçus mitgetheilt, von welchen wir eines hier ausheben wollen [34]). Wir transformiren die vorgelegten Gleichungen

$$x^2 + 2\alpha xy + by^2 = m, \quad x^2 + 2\gamma xy + dy^2 = n$$

in die Gestalt:

$$x(x + \alpha y) + y(\alpha x + by) = m, \quad x(x + \gamma y) + y(\gamma x + dy) = n;$$

dann werde x und y nach den Regeln von §. 1 berechnet. Diess giebt

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & \alpha x + by \\ n & \gamma x + dy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x + \alpha y & \alpha x + by \\ x + \gamma y & \gamma x + dy \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} x + \alpha y & m \\ x + \gamma y & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x + \alpha y & \alpha x + by \\ x + \gamma y & \gamma x + dy \end{vmatrix}},$$

und setzen wir wie sonst die Determinante des Nenners $= \triangle$, so ist

$$1) \quad x(\triangle + n\alpha - m\gamma) - y(bn - md) = 0,$$
$$2) \quad x(m - n) - y(\triangle - n\alpha + m\gamma) = 0.$$

Kreuzweise Multiplikation lässt aus diesen beiden Gleichungen die folgende hervorgehen:

$$\triangle^2 - (n\alpha - m\gamma)^2 - (bn - md)(m - n) = 0,$$
$$\triangle = \pm \sqrt{(n\alpha - m\gamma)^2 + (bn - md)(m - n)}.$$

Durch Subtraktion der beiden ursprünglichen Gleichungen ergiebt sich x als lineare Funktion von y und y^2; setzt man für x aus 2) seinen Werth $\frac{y(\triangle - n\alpha + m\gamma)}{m - n}$ und darin den Werth von $\triangle$ ein, so resultirt für x eine rein quadratische Gleichung, während das gewöhnliche Eliminationsverfahren eine reducirbare Gleichung vom vierten Grade ergeben haben würde.

Diess Verfahren bleibt auch dann noch anwendbar, wenn es darauf ankommt, aus n Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten (n — 1) der letzteren wegzuschaffen, so dass zuletzt nur Eine Gleichung mit Einer Unbekannten restirt. Ein Beispiel wird den Weg klar machen, welchen man hier einzuschlagen hat. Gegeben seien folgende drei Gleichungen

$$ax^2y + bxz + d = 0\,,\quad yz - ex = 0\,,\quad cxy + fx + g = 0.$$

Eliminirt man zunächst x aus der ersten und zweiten und dann aus der ersten und dritten, so bekommt man

$$\begin{vmatrix} ay & bz & d \\ -e & yz & 0 \\ 0 & -e & yz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ay & bz & d \\ cy+f & g & 0 \\ 0 & cy+f & g \end{vmatrix} = 0,$$

$$ay^2z^2 + beyz^2 + de^2 = ag^2y + c^2dy^2 + 2cdfy - bcgyz - bgfz + df^2 = 0.$$

Würde aus diesen beiden Gleichungen y eliminirt, so bekäme man eine vierreihige, bei z nur eine dreireihige Eliminations-Determinante; letztere wird vorzuziehen sein, und es bleibt uns sonach nur noch folgende Gleichung für y:

$$\begin{vmatrix} ay^2+bey & 0 & de^2 \\ -bg(cy+f) & c^2dy^2+(ag^2+2cdf)y+df^2 & 0 \\ 0 & -bg(cy+f) & c^2dy^2+(ag^2+2cdf)y+df^2 \end{vmatrix} = 0,$$

welche für y bicubisch ist.

§. 13. In diesem Paragraphen sollen noch zwei interessante Anwendungen der Sylvester'schen Eliminationsmethode gelehrt werden. Aus dem Vorstehenden lässt sich nämlich auch leicht ein Verfahren ableiten, die in einer Gleichung vorkommenden Irrationalitäten fortzuschaffen und so ein altberühmtes bereits von Fermat[35]) angeregtes und seitdem von den verschiedensten Mathematikern mit mehr oder weniger Glück behandeltes Problem ganz allgemein zu lösen. Hat man nämlich die Gleichung

$$a_1 \sqrt[m_1]{f^{(1)}_{x_0}} + a_2 \sqrt[m_2]{f^{(2)}_{x_0}} + a_3 \sqrt[m_3]{f^{(3)}_{x_0}} + \ldots + a_n \sqrt[m_n]{f^{(n)}_{x_0}} = A$$

rational zu machen, wo $m_1, m_2 \ldots m_n$ willkürliche ganze positive Zahlen, $f^{(1)}_{x_0}, f^{(2)}_{x_0} \ldots f^{(n)}_{x_0}$ rationale und ganze Funktionen einer unbekannten Grösse x_0 sein mögen, so wird man $f^{(1)}_{x_0} = x_1^{m_1}$, $f^{(2)}_{x_0} = x_2^{m_2} \ldots f^{(n)}_{x_0} = x_n^{m_n}$ setzen. So erhält man ein System rationaler Gleichungen, zu welchen noch die lineare Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = A$$

hinzutritt. Aus diesen (n + 1) Gleichungen eliminirt man nun die n Unbekannten $x_1, x_2 \ldots x_n$ und behält dann Eine Gleichung übrig, in welcher blos x_0, und zwar rational, vorkommt.

Beispiel. Sei gegeben die Gleichung

$$\sqrt{Ax_0 + a} + \sqrt{Bx_0 + b} + c = 0.$$

Wir setzen den ersten Radikanden $= x_1^2$, den zweiten $= x_2^2$ und haben dann folgende drei Gleichungen:

1) $x_1 + x_2 + c = 0$, 2) $x_1^2 - Ax_0 = a$, 3) $x_2^2 - Bx_0 = b$.

Die Elimination aus Gleichung 1) und 3) ergiebt zunächst

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -Bx_0-b \\ 1 & x_1+c & 0 \\ 0 & 1 & x_1+c \end{vmatrix} = x_1^2 + 2cx_1 + c^2 - Bx_0 - b = 0,$$

und diess, mit Gleichung 2) zusammengefasst, schliesslich

$$\begin{vmatrix} 1 & 2c & c^2-Bx_0-b & 0 \\ 0 & 1 & 2c & c^2-Bx_0-b \\ 1 & 0 & -A-a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -A-a \end{vmatrix} = 0.$$

Eine weitere Verwendung führt Schlömilch[36]) an. Sollen in der Gleichung

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots a_{n-1}x + a_n = 0$$

die complexen Wurzeln berechnet werden, so setze man $x = u + iv$, unter i die imaginäre Einheit verstanden. Fasst man, nachdem dieser Werth oben substituirt ist, entsprechend zusammen, so geht unsere Gleichung in folgende über: $f_{(u,\,v)} + i\varphi_{(u,\,v)} = 0$, wo f und φ ganze rationale Funktionen von u und v vorstellen. Einem bekannten Satze über complexe Grössen zufolge ist dann $\varphi_{(u,\,v)} = f_{(u,\,v)} = 0$; aus diesen beiden Gleichungen kann man je einmal u und v eliminiren, so dass man zu zwei neuen Gleichungen

$$\psi_u = \chi_v = 0$$

gelangt, welche ausschliesslich reelle Wurzelwerthe enthalten.

Beispiel. Liegt die Gleichung

$$x^2 - 6x + 13 = 0$$

vor, so erhält man durch die angedeutete Substitution zunächst

$$u^2 - v^2 - 6u = -13, \quad 2uv - 6v = 0,$$

und weiter ist nach dem vorigen Paragraph

$$\psi_u \equiv \begin{vmatrix} -1 & 0 & u^2-6u+13 \\ 2u-6 & 0 & 0 \\ 0 & 2u-6 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \chi_v \equiv \begin{vmatrix} 1 & -6 & -v^2+13 \\ 2v & -6v & 0 \\ 0 & 2v & -6v \end{vmatrix} = 0.$$

Rechnet man beide Determinanten aus, so wird

$$\psi_u = M(2u - 6) = 0, \quad \chi_v = N(v^2 - 4) = 0.$$

Diess ergiebt $u = 3$, $v = \pm 2$ und in der That sind

$$x_1 = 3 + 2i, \quad x_2 = 3 - 2i$$

die beiden Wurzeln. Damit ist auch ein neues Verfahren der Auflösung quadratischer (und höherer) Gleichungen gegeben.

§. 14. Die einzige Art und Weise, auf welche wir bis jetzt das Eliminationsresultat zwischen zwei algebraischen Gleichungen vom m ten und n ten Grade anzugeben im Stande sind, ist die, dass wir dafür eine der Null gleiche Determinante vom $(m + n)$ten Grade aufstellen. Es hat jedoch Cayley[37]) in Verfolgung einer bereits von Bézout (Kap. I. §. 5) ausgesprochenen Idee gezeigt, dass auch eine Determinante von niedrigerem Grade den nämlichen Dienst leisten könne, welcher dazu noch die Eigenschaft zukomme, eine symmetrische zu sein. Fiedler[38]) hat diese Methode an zwei Gleichungen des fünften Grades erläutert, und sein Beispiel, aus dem sich sofort das allgemeine Verfahren abnehmen lässt, wollen wir hier reproduciren.

Wir setzen mit Sylvester[39]) die Determinante

$$a_p a'_q - a_q a'_p = (a_p a'_q).$$

Sind nun die beiden Gleichungen

$$a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0,$$
$$a'_0 x^5 + a'_1 x^4 + a'_2 x^3 + a'_3 x^2 + a'_4 x + a'_5 = 0$$

gegeben, aus denen x eliminirt werden soll, so multiplicirt man die erste Gleichung mit a'_0, die zweite mit a_0 und findet durch Subtraktion letzterer von ersterer

$$(a_0' a_1 - a_0 a'_1)x^4 + (a'_0 a_2 - a_0 a'_2)x^3 + (a'_0 a_3 - a_0 a'_3)x^2 + (a'_0 a_4 - a_0 a'_4)x + (a'_0 a_5 - a_0 a'_5) = 0,$$

oder in Sylvester's abgekürzter Schreibweise

$$(a_0 a'_1)x^4 + (a_0 a'_2)x^3 + (a_0 a'_3)x^2 + (a_0 a'_4)x + (a_0 a'_5) = 0.$$

Multiplicirt man ebenso die erste Gleichung mit $a'_0 x + a'_1$, die zweite mit $(a_0 x + a_1)$, so ergiebt die nämliche Subtraktion wie oben

$$(a_0 a'_2)x^4 + [(a_0 a'_3) + (a_1 a'_2)]x^3 + [(a_0 a'_4) + (a_1 a'_3)]x^2 + [(a_0 a'_5) + (a_1 a'_4)]x + (a_1 a'_5) = 0.$$

Multiplicirt man ferner die beiden Gleichungen noch successive mit folgenden Ausdrücken:

$$a'_0 x^2 + a'_1 x + a'_2;\; a_0 x^2 + a_1 x + a_2,$$
$$a'_0 x^3 + a'_1 x^2 + a'_2 x + a'_3;\; a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3,$$
$$a'_0 x^4 + a'_1 x^3 + a'_2 x^2 + a'_3 x + a'_4;\; a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4,$$

und bildet die Differenz, so gelangt man zu diesen drei weiteren Gleichungen:

$$(a_0 a'_3)x^4 + [(a_0 a'_4) + (a_1 a'_3)]x^3 + [(a_0 a'_5) + (a_1 a'_4) + (a_2 a'_3)]x^2 + [(a_1 a'_5) + (a_2 a'_4)]x + (a_2 a'_5) = 0,$$
$$(a_0 a'_4)x^4 + [(a_0 a'_5) + (a_1 a'_4)]x^3 + [(a_1 a'_5) + (a_2 a'_4)]x^2 + [(a_2 a'_5) + (a_3 a'_4)]x + (a_3 a'_5) = 0,$$
$$(a_0 a'_5)x^4 + (a_1 a'_5)x^3 + (a_2 a'_5)x^2 + (a_3 a'_5)x + (a_4 a'_5) = 0.$$

Wir haben auf diese Weise fünf Gleichungen erhalten, welche die Terme x^4, x^3, x^2, x^1, x^0 linear in sich enthalten; die Elimination derselben giebt nach §. 12 die Gleichung

$$\begin{vmatrix} (a_0 a'_1) & (a_0 a'_2) & (a_0 a'_3) & (a^0 a'_4) & (a_0 a'_5) \\ (a_0 a'_2) & (a_0 a'_3)+(a_1 a'_2) & (a_0 a'_4)+(a_1 a'_3) & (a_0 a'_5)+(a_1 a'_4) & (a_1 a'_5) \\ (a_0 a'_3) & (a_0 a'_4)+(a_1 a'_3) & (a_0 a'_5)+(a_1 a'_4)+(a_2 a'_3) & (a_1 a'_5)+(a_2 a'_4) & (a_2 a'_5) \\ (a_0 a'_4) & (a_0 a'_5)+(a_1 a'_4) & (a_1 a'_5)+(a_2 a'_4) & (a_2 a'_5)+(a_3 a'_4) & (a_3 a'_5) \\ (a_0 a'_5) & (a_1 a'_5) & (a_2 a'_5) & (a_3 a'_5) & (a_4 a'_5) \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante hat den fünften Grad, während Sylvester's Methode eine vom doppelt so hohen oder zehnten Grade geliefert haben würde.

Hiemit ist dann der wichtige Satz gewonnen:

Die Resultante zweier algebraischen Gleichungen vom mten Grade ist eine Determinante desselben Grades, deren Elemente Summen zweireihiger Determinanten sind.

Aus dem im Vorstehenden dargelegten Entstehungsgesetz der Resultante abstrahiren wir uns auch sofort das Bildungsgesetz ihrer Elemente, wobei uns die Symmetrie den Vortheil gewährt, statt m^2 deren bloss

$$m + m - 1 + m - 2 + \ldots + 3 + 2 + 1 = \frac{m}{2}(m + 1)$$

berechnen zu müssen. Sind z. B. die beiden Gleichungen siebenten Grades

$$0x^7 + 1x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7 = 0,$$
$$0'x^7 + 1'x^6 + 2'x^5 + 3'x^4 + 4'x^3 + 5'x^2 + 6'x + 7' = 0$$

zur Elimination von x gegeben, wobei wir die Träger der Indices unterdrückt und bloss letztere selbst angeschrieben haben, so können wir, da Ausdrücke von der Form $(qq' - qq')$ nicht vorkommen können, statt (p, q') sofort einfacher (p, q) setzen. Dann ergiebt uns der einfache Induktionsschluss, dass die Diagonalreihe der Resultante nach Sylvester-Cayley folgende sein wird:

$$(0\ 1),\ (0\ 3) + (1\ 2),\ (0\ 5) + (1\ 4) + (2\ 3),\ (0\ 7) + (1\ 6) + (2\ 5) + (3\ 4),$$
$$(2\ 7) + (3\ 6) + (4\ 5),\ (4\ 7) + (5\ 6),\ (6\ 7).$$

Die mit der Diagonalreihe parallel laufenden Elementen-Serien aber sind folgende:

$$(0\ 2),\ (0\ 4) + (1\ 3),\ (0\ 6) + (1\ 5) + (2\ 4),\ (1\ 7) + (2\ 6) + (3\ 5),$$
$$(3\ 7) + (4\ 6),\ (5\ 7);$$
$$(0\ 3),\ (0\ 5 + 1\ 4),\ (0\ 7) + (1\ 6) + (2\ 5),\ (2\ 7) + (3\ 6),\ (4\ 7);$$
$$(0\ 4),\ (0\ 6 + 1\ 5),\ (1\ 7) + (2\ 6),\ (3\ 7);$$
$$(0\ 5),\ (0\ 7) + (1\ 6),\ (2\ 7);$$
$$(0\ 6),\ (1\ 7);$$
$$(0\ 7).$$

Hiemit ist die resultirende Determinante selbst vollständig gegeben; das angewandte Bildungsverfahren lässt sich leicht allgemein verificiren.

§. 14. Zum Schlusse dieses Kapitels möge noch gezeigt werden, dass der Gebrauch der Determinanten zur Behandlung der Systeme von Gleichungen nicht auf den Fall beschränkt ist, wo letztere entweder wirklich linear sind oder doch als linear angesehen werden können. Wir wollen die Resultante von n Gleichungen mit n Unbekannten zu bilden suchen, deren jede homogen und zwar die eine quadratisch ist, während die übrigen vom ersten Grade sein sollen. Anstatt der dieses Problem in einem noch allgemeineren Sinne behandelnden Diskussion von Baur [40]) folgen wir hier der übersichtlichen Darstellung von Versluys [41]).

Das System sei folgendes:

$$F \equiv a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_n x_n^2 + 2b_1x_1x_2 + 2b_2x_1x_3$$
$$+ \ldots + 2b_{\binom{n}{2}}x_{n-1}x_n = 0,$$

$$\begin{array}{ccccccccc} A_{1,1}x_1 & + & A_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & A_{1,n}x_n & = & 0, \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & & & \cdot \\ A_{n-1,1}x_1 & + & A_{n-1,2}x_2 & + & \ldots & + & A_{n-1,n}x_n & = & 0. \end{array}$$

Differentiiren wir die Gleichung $F = 0$ partiell nach sämmtlichen in ihr vorkommenden Variablen, so erhalten wir n Gleichungen:

$$\frac{1}{2}\frac{dF}{dx_1} \equiv a_1x_1 + b_1x_2 + b_2x_3 + \dots + b_{n-1}x_n = \lambda_1 A_{1,1} + \dots + \lambda_n A_{1,n},$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$
$$\frac{1}{2}\frac{dF}{dx_n} \equiv b_{n-1}x_1 + b_{2n-2}x_2 + b_{3n-3}x_3 + \dots + a_nx_n = \lambda_1 A_{n-1,1} + \dots + \lambda_n A_{n-1,n}.$$

Da das System von $(n - 1)$ linearen Gleichungen die Verhältnisse der einzelnen Unbekannten zu berechnen gestattet, so dürfen die Grössen $\lambda_1 \dots \lambda_n$ als bekannt angenommen werden, und es gestatten also diese n Gleichungen die Bestimmung sämmtlicher Grössen. Wir jedoch betrachten in den uns zu Gebote stehenden $(2n - 1)$ Gleichungen sowohl die x als auch die λ als Unbekannte, so dass es deren mithin im Ganzen $2n$ giebt. Dann ist nach §. 3 die Bedingungsgleichung der Coëxistenz folgende:

$$\begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,n} \\
b_1 & a_2 & b_n & \dots & b_{2n-1} & A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & A_{2,n} \\
b_2 & b_n & a_3 & \dots & b_{3n-3} & A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & \dots & A_{3,n} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
b_{n-1} & b_{2n-1} & b_{3n-3} & \dots & a_n & A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & A_{n-1,3} & \dots & A_{n-1,n} \\
A_{1,1} & A_{2,1} & A_{3,1} & \dots & A_{n-1,1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
A_{1,2} & A_{2,2} & A_{3,2} & \dots & A_{n-1,2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
A_{1,3} & A_{2,3} & A_{3,3} & \dots & A_{n-1,3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_{1,n} & A_{2,n} & A_{3,n} & \dots & A_{n-1,n} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{vmatrix} = 0.$$

Eine bemerkenswerthe geometrische Anwendung dieses Resultates werden wir im nächsten Kapitel kennen lernen.

Ganz neuerlich ist Gundelfinger [42]) noch um einen Schritt weiter gegangen und hat auch für ein aus zwei quadratischen und (n—2) linearen Gleichungen zusammengesetztes n gliedriges Gleichungssystem elegante Auflösungsformeln gegeben. Dieselben gipfeln in einer der vorigen ähnlich gebildeten Resultante, wo nur in der nach sämmtlichen Diagonal-Nullen genommenen Unterdeterminante $n$ten Grades bezüglich b_i durch $(b_i - \lambda c_i)$ ersetzt ist, wenn c beziehungsweise die Coëfficienten der zweiten vorliegenden quadratischen Gleichung sind.

1) Jacobi, De formatione et proprietatibus determantium, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 22. Band, S. 302. — 2) Günther, Didaktische Bemerkungen zur Determinantentheorie, Zeitschr. f. Mathem. u. naturw. Unterricht, 6. Jahrg. S. 143 ff. — 3) Hesse, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 21. Jahrg. S. 17. — 4) Clebsch, Ueber eine Transformation der homogenen Funktionen dritter Ordnung mit vier Veränderlichen, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 58. Band, S. 110. — 5) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1870. S. 67. — 6) Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1867. S. 106 ff. — 7) Gauss, Werke ed. Schering, 2. Band, Göttingen 1870. S. 178. — 8) Id. Disquisitiones arithmeticae, Lipsiae 1801. S. 27. — 9) Studnička, Auflösung eines Systemes von linearen Congruenzen, Prager Berichte vom 7. Mai 1875. — 10) Matthiessen, Vergleichung der indischen Cuttuca und der chinesischen Ta-yen-Regel, Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterricht, 7. Jahrg. S. 78 ff. — 11) v. Staudt, De numeris Bernoullianis, Erlangen 1845. S. 14. — 12) Nägelsbach, Zur independenten Darstellung der Bernoulli'-

schen Zahlen, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 19. Jahrg. S. 227 ff. — 13) Ibid. S. 229.— 14) Mansion, Démonstration de la propriété fondamentale des équations differentielles linéaires, Archiv d. Math. u. Phys. 58. Theil, S. 99. — 15) Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, 7. Jahrg. S. 405.— 16) Seidel, Ueber ein Verfahren, die Gleichungen, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate führt, sowie lineare Gleichungen überhaupt, durch successive Annäherung aufzulösen, Abhandl. d. Münch. Akademie 1874. — 17) Id. Ueber die Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe solcher Unbekannten, zwischen denen Bedingungsgleichungen bestehen, Astron. Nachr. LXXXIV. S. 193 ff. — 18) Fürstenau, Darstellung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coëfficienten, Marburg 1860. — 19) Baltzer, Recension hiezu, Zeitschr. f. Math. u. Phys. Literaturz. 6. Jahrg. S. 9 ff. — 20) Fürstenau, Neue Methode zur Darstellung und Berechnung imaginärer Wurzeln der Gleichungen, Marburg 1867. — 21) Nägelsbach, Studien zu Fürstenau's neuer Methode der Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coëfficienten, Arch. d. Mathem. u. Phys. 59. Theil S. 147 ff. — 22) Dietrich, Ueber den Zusammenhang gewisser Determinanten mit Bruchfunktionen, Journ. f. d. reine u. angew. Mathem. 69. Band, S. 190 ff. — 23) Lieblein, Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis, Prag 1867. S. 147 ff. — 24) Fiedler, Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen, Leipzig 1862. S. 44. — 25) Arneth, Geschichte der reinen Mathematik, Stuttgart 1852. S. 238. — 26) Fiedler, S. 78. — 27) Weihrauch, Zur Determinantenlehre, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 19. Jahrg. S. 359. — 28) L. Euler, Introductio in analysin infinitorum, Tom. II., Lausannae 1748. Cap. 19. — 29) Minding, Entwickelung eines symmetrischen Ausdrucks für den Grad einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 31. Band, S. 1 ff. — 30) Sylvester, Philosophical Magazine 1840. N. 101. — 31) Bretschneider, Ueber Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten, Stuttgart 1875. — 32) Hesse, Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 11. Jahrg. S. 416. — 33) Björling, Sur les relations qui doivent exister entre les coëfficients d'un polynome F(x), pour qu'il contienne un facteur de la forme $(x^n - a^n)$, Archiv d. Math. u. Phys. 55. Theil. S. 434 ff. — 34) Diekmann, Einleitung in die Lehre von den Determinanten, Essen 1876. S. 28. — 35) Egen, Handbuch der allgemeinen Arithmetik, 2. Theil, Berlin 1849. S. 48. — 36) Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis, Jena 1868. S. 421. — 37) Cayley, Philosophical Transactions, CXLVII. — 38) Fiedler, S. 110. — 39) Sylvester, Philosophical Transactions, CXLIII. — 40) Baur, Auflösung eines Systems von Gleichungen, worunter eine quadratisch, die anderen linear, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 14. Jahrg. S. 129 ff. — 41) Versluys, Applications des déterminants à l'algèbre et à la géométrie analytique, Archiv d. Math. u. Phys. 53. Theil. S. 138 ff. — 42) Gundelfinger, Auflösung eines Systems von Gleichungen, worunter zwei quadratisch und die übrigen linear, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 18. Jahrg. S. 543 ff.

Kapitel V.

Kettenbruchdeterminanten.

§. 1. Als eine der wichtigsten Anwendungen der Determinantentheorie auf andere analytische Gegenstände hat sich in neuester Zeit die Darstellung eines Kettenbruches als Quotient zweier Determinanten herausgestellt. Die Möglichkeit einer solchen Darstellung scheint zuerst von Ramus [1]) bemerkt worden zu sein; auch Spottiswoode [2]) und Heine [3]) wurden im Verlaufe anderweitiger Untersuchungen auf dieselbe geführt, ohne dass aus diesen gelegentlichen Hinweisungen der Wissenschaft ein eigentlicher Vortheil erwachsen wäre. Ganz neuerlich hob Thiele [4]) wieder den Nutzen einer solchen Darstellungsweise hervor, während bald darauf G. Bauer [5]) bei gewissen analytischen und Casorati [6]) bei physikalischen Problemen dieselbe mit bestem Erfolge anwandten. Eine systematische Behandlung dieses Wissenszweiges ward unabhängig von Thiele [7]) und dem Verf. dieses [8]) geliefert.

Um zu der hier angedeuteten Darstellung zu gelangen, bedürfen wir nur des Satzes, dass man, um einen Kettenbruch

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}} \equiv b_1 : (a_1 + b_2 : (a_2 + \ldots + b_n : (a_n$$

mit einer Zahl M zu multipliciren, lediglich den ersten Theilzähler b_1 mit dieser Zahl zu multipliciren brauche. Diess ist aber sofort einleuchtend; denn setzt man in bekannter Weise den Kettenbruch $= \frac{p_1}{q_1}$, so ist

$$\frac{p_1}{q_1} = \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{p_2}{q_2}}$$

und weiterhin

$$M\frac{p_1}{q_1} = M\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{p_2}{q_2}} = \cfrac{Mb_1}{a_1 + \cfrac{p_2}{q_2}} = Mb_1 : (a_2 + b_2 : (a_2 + \ldots + b_n : (a_n,$$

und diess war zu beweisen.

§. 2. Es sei nun folgendes System trinomischer recurrirender Gleichungen gegeben:

$$\begin{array}{lllll} a_1x_1 - x_2 & & & = b_1, \\ b_2x_1 + a_2x_2 - x_3 & & & = 0, \\ & b_3x_2 + a_3x_3 - x_4 & & = 0, \\ & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot \\ & \cdot & & \cdot \\ & b_n x_{n-1} + a_n x_n & & = 0, \; (x_{n+1} = 0). \end{array}$$

Aus einem solchen Systeme lässt sich, wie Euler [9]) nachgewiesen hat, das Verhältniss zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Unbekannter sofort in Gestalt eines Kettenbruches darstellen; sieht man momentan den Term b_1 als Unbekannte an, so ergiebt sich in Anwendung auf den vorliegenden Fall

$$\frac{x_1}{b_1} = 1 : (a_1 + b_2 : (a_2 + \ldots + b_n : (a_n,$$

oder, indem man mit b_1 wegmultiplicirt,

$$x_1 = b_1 : (a_1 + b_2 : (a_2 + \ldots + b_n : (a_n.$$

Berechnet man hingegen x_1 aus dem obigen Systeme nach den Regeln des vorigen Kapitels, so findet man

$$x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n & a_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n & a_n \end{vmatrix} = \frac{P_n}{Q_n},$$

und es ist somit folgender Satz dargethan [10]):

Der nte Näherungswerth jedes Kettenbruches kann dargestellt werden als Quotient zweier Determinanten, die auf beiden Seiten der ersten Diagonalreihe je eine derselben parallele Serie von Elementen enthalten. Die Determinante im Zähler erhält man, wenn man die des Nenners nach dem ersten Theilnenner partiell differentiirt und diese Unterdeterminante mit dem ersten Theilzähler multiplicirt.

Mit Zuziehung der obigen Bezeichnungsweise für den nten Näherungszähler und Näherungsnenner erhält man nach Kap. II. §. 12

$$b_1 : (a_1 + \ldots + b_n : (a_n = \frac{b_1 \dfrac{dQ_n}{da_1}}{Q_n} = b_1 \frac{d(\log Q_n)}{da_1}.$$

§. 3. Die eben festgestellte Darstellungsweise der Kettenbrüche wollen wir sofort dazu anwenden, die Anzahl der Glieder zu bestimmen, aus welchen bei der gewöhnlichen recurrenten Berechnung die Aggregate P_n und Q_n sich zusammensetzen. Da P_n offenbar ebensoviele Glieder haben muss, wie Q_{n-1}, so brauchen wir nur die Näherungsnenner in's Auge zu fassen.

Ist s_t die Summe der tten Wurzelpotenzen der Gleichung

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

so besteht nach Kap. V. §. 8 folgende Relation:

$$s_t = \left(-\frac{1}{a_0}\right)^t \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 2a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ 3a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ta_t & a_{t-1} & a_{t-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

Macht man hievon eine Anwendung auf die quadratische Gleichung $x^2 + ax = b$, deren Wurzeln

$$x_1 = -\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right) \text{ und } x_2 = -\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)$$

sind, so erhält man zur Bestimmung des Quotienten $\frac{s_{t-1}}{s_t}$ die Gleichung

$$\frac{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1} + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1}}{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t} + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t}}$$

$$= \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 2b & a & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}_{(t-1)} : \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 2b & a & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}_{(t)}.$$

Bezeichnen wir nun in gewohnter Weise mit P_t und Q_t Nenner und Zähler des $t$ten Näherungswerthes vom Kettenbruch $b : (a + b : (a + \dots$, so ist nach §. 2

$$Q_t = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}_{(t)}, \quad bQ_{t-1} = P_t = b \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b & a & -1 & \dots & 0 \\ 0 & b & a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}_{(t-1)}.$$

Gehen wir jetzt zu dem obigen Bruche zurück und zerlegen jede der beiden darin auftretenden Determinanten dadurch nach Kap. II. §. 8 in eine Summe, dass wir $2b = b + b$ setzen, so findet sich leicht, dass

$$\frac{s_{t-1}}{s_t} = \frac{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1} + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1}}{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t} + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t}}$$

$$= \frac{Q_{t-1} + bQ_{t-3}}{Q_t + bQ_{t-2}}$$

ist. Durch Zerlegung der Determinante Q_t in Unterdeterminanten, vorgenommen nach den Elementen der letzten Zeile, lässt sich zeigen, dass

$$Q_t = aQ_{t-1} + bQ_{t-2}, \quad bQ_{t-3} = Q_{t-1} - aQ_{t-2}$$

sein muss. Durch Einsetzung der beiden linksstehenden Werthe in dem obigen Bruchausdrucke folgt

$$\frac{Q_{t-2}}{Q_{t-1}} = \frac{2 - a\,\frac{s_{t-1}}{s_t}}{a + 2b\,\frac{s_{t-1}}{s_t}},$$

oder da der Quotient $\frac{s_{t-1}}{s_t}$ bekannt ist

$$\frac{Q_{t-2}}{Q_{t-1}} = \frac{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1} \cdot \left(a + 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - a\right) + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1} \cdot \left(a - 2\sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - 2\right)}{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1} \cdot \left(\frac{a^2}{2} + a\sqrt{\frac{a^2}{4} + b} + 2b\right) + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1} \cdot \left(\frac{a^2}{2} - a\sqrt{\frac{a^2}{4} + b} + 2b\right)}.$$

Hieraus erhält man durch eine einfache algebraische Transformation folgendes anscheinend von Stern[11]) zuerst in dieser Allgemeinheit angegebene Resultat:

$$\frac{Q_{t-2}}{Q_{t-1}} = \frac{1}{b}\,\frac{P_{t-1}}{Q_{t-1}} = \frac{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t-1}}{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t}}.$$

Ganz analog findet man natürlich den independenten Werth für den Kettenbruch $b : (a - b : (a - \ldots - b : (a_{(t)}$, indem nur oben $(+b)$ mit $(-b)$ vertauscht wird.

Die hier entwickelte Formel kann nun zur Lösung des von uns oben angeregten Problemes dienen. Aus unserer drei Näherungsnenner verknüpfenden Relation geht sofort hervor, dass wenn φ_k die Gliederanzahl für den kten Nenner ist, dann $\varphi_k = \varphi_{k-1} + \varphi_{k-2}$ sein muss.

Wir haben demnach folgendes System trinomischer recurrirender Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\varphi_t &= \varphi_{t-1} + \varphi_{t-2}, \\
\varphi_{t-1} &= \varphi_{t-2} + \varphi_{t-3}, \\
&\;\;\vdots \\
\varphi_4 &= \varphi_3 + \varphi_2, \\
\varphi_3 &= \varphi_2 + \varphi_1,
\end{aligned}$$

und behandeln wir dasselbe so, wie das allgemeinere in §. 2, so fliesst

daraus für $\frac{\varphi_{t-1}}{\varphi_t}$ der Kettenbruch $1:(1+1:(1+\ldots+1:(1_{(t)}$.
Da φ_{t-1} und φ_t prim gegen einander sind, so ist

$$\varphi_t = \begin{vmatrix} 1 & -1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 1 & 1 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & -1 \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

oder mit Berücksichtigung der vorigen Schlussformel,

$$\varphi_t = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{t+1}}{\sqrt{5}}.$$

Dass diess wirklich eine ganze Zahl ist, lehrt die Anwendung des binomischen Lehrsatzes.

§. 4. Als den Fundamentalsatz der Lehre von den Kettenbrüchen bezeichnet man gewöhnlich denjenigen, welcher die Relation

$$D = P_n Q_{n-1} - P_{n-1} Q_n = \pm\, b_1 b_2 \ldots b_{n-1} b_n$$

ausspricht. Den Beweis dieses Satzes können wir mit Hülfe der Determinanten in folgender Weise führen.

Wir haben

$$D = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & a_n \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & . & . & . & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & b_n & a_n \end{vmatrix}.$$

Bilden wir diese Produkte nach Kap. II. §. 20, so erhalten wir D gleich

$$\begin{vmatrix} a_1b_3 & b_1b_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2^2+1 & a_2b_3-a_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -b_1 & a_2b_3-a_3 & a_3^2+b_3^2+1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2}^2+b_{n-2}^2+1 & a_{n-2}b_{n-1}-a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2}b_{n-1}-a_{n-1} & a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -b_n & a_{n-1}b_n-a_n & a_n \end{vmatrix}$$

$$- \begin{vmatrix} a_1b_1 & b_1b_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2^2+1 & a_2b_3-a_3 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & a_2b_3-a_3 & a_3^2+b_3^2+1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2}^2+b_{n-2}^2+1 & a_{n-2}b_{n-1}-a_{n-1} & -b_n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-2}b_{n-1}-a_{n-1} & a_{n-1}^2+b_{n-1}^2+1 & a_{n-1}b_n-a_n \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

Diese beiden Determinanten sind offenbar in allen Stücken identisch, nur dass bezüglich die letzten Zeilen und Colonnen mit einander vertauscht sind; nennen wir also die erste derselben $\triangle$, die zweite $\triangle'$, so ist ersichtlich $\frac{d\triangle}{da_n} = \frac{d\triangle'}{da_n}$.

Indem wir $\triangle$ nach den Elementen der letzten Colonne, hingegen $\triangle'$ nach den Elementen der letzten Zeile in Unterdeterminanten zerlegen und wirklich subtrahiren, heben sich die ersten Glieder der Zerlegung gegenseitig auf und man findet D gleich

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & b_1b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2^2+1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a^2_{n-3}+b^2_{n-3}+1 & a_{n-3}b_{n-2}-a_{n-2} & -b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-3}b_{n-2}-a_{n-2} & a^2_{n-2}+b^2_{n-2}+1 & a_{n-2}b_{n-1}-a_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -b_n & a_{n-1}b_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} a_1b_1 & b_1b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & a_2^2+1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a^2_{n-3}+b^2_{n-3}+1 & a_{n-3}b_{n-2}-a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-3}b_{n-2}-a_{n-2} & a^2_{n-2}+b^2_{n-2}+1 & -b_n \\ 0 & 0 & \dots & -b_{n-1} & a_{n-2}b_{n-1}-a_{n-1} & a_{n-1}b_n-a_n \end{vmatrix},$$

oder, wenn wir unsere Bezeichnungsweise entsprechend ausdehnen, es ist $D = \triangle'' - \triangle'''$. Diese beiden Determinanten befolgen ein analoges Bildungsgesetz, wie die beiden obigen, $\triangle$ und $\triangle'$, und es ist wiederum

$$\frac{d\triangle''}{d(a_{n-1}b_n - a_n)} = \frac{d\triangle'''}{d(a_{n-1}b_n - a_n)}.$$

Zerlegt man also wiederum im nämlichen Sinne in Unterdeterminanten und bildet die Differenz, so bleibt eine Determinante des $(n-2)$ten Grades zurück, vor die der Faktor b_n getreten ist, und führt man in analoger Weise noch $(n-4)$ Zerlegungen aus, so wird als Resultat die Determinante zweiten Grades

$$\begin{vmatrix} a_1b_1 & b_1b_2 \\ -b_3 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^2\, b_1b_2b_3$$

erscheinen, multiplicirt mit dem Faktor $(-1)^{n-3}\, b_4\, b_5\, b_6 \dots b_{n-1}\, b_n$, und es ist demnach die gesuchte Differenz gleich

$$D = (-1)^{n-1}\, b_1b_2 \dots b_{n-1}\, b_n$$

wie oben behauptet wurde.

Eleganter und kürzer, wenn auch vielleicht minder naheliegend, ist folgender von Herrn Prof. Studnička dem Verf. mitgetheilter Beweis: Für eine beliebige Determinante $\Sigma \pm a_{1,1} \dots a_{n,n}$ ist, wie die direkte Ausrechnung lehrt,

$$\triangle = \frac{\frac{d\triangle}{da_{1,1}} \cdot \frac{d\triangle}{da_{n,n}} - \frac{d\triangle}{da_{1,n}} \cdot \frac{d\triangle}{da_{n,1}}}{\Sigma \pm a_{2,2} \dots a_{n-1,\,n-1}}.$$

Setzt man hierin $\triangle$ gleich der Kettenbruchdeterminante Q_n, so folgt

$$Q_n = \frac{Q_{n-1} \cdot \frac{1}{b_1} \cdot P_n - (-1)^{n-1} \, b_2 \, b_3 \ldots b_n}{\frac{1}{b_1} \cdot P_{n-1}}$$

oder auch

$$Q_n \, P_{n-1} - Q_{n-1} \, P_n = (-1)^n \, b_1 \, b_2 \ldots b_{n-1} \, b_n .$$

§. 5. In diesem Paragraphen möge eine Reihe von Anwendungen der Determinantendarstellung mitgetheilt werden, welche deren Vorzüge besonders in's Licht zu setzen geeignet scheinen.

a) Bekanntlich gilt der Satz, dass man, ohne den Werth eines Kettenbruches zu ändern, zwei beliebige Theilnenner und den zwischenliegenden Theilzähler mit der nämlichen Zahl M ($\gtreqless 0$) multipliciren dürfe. Denn es ist offenbar [12])

$$b_1 : (a_1 + \ldots + b_{r-1} : (a_{r-1} + b_r : (a_r + \ldots + b_n : (a_n =$$

$$\frac{M \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{r-1} & a_{r-1} & b_r & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n & a_n \end{vmatrix}}{M \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{r-1} & a_{r-1} & b_r & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n & a_n \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & Mb_{r-1} & Ma_{r-1} & Mb_r & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n & a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & Mb_{r-1} & Ma_{r-1} & Mb_r & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n & a_n \end{vmatrix}},$$

und schreibt man den letzten Determinantenquotienten wieder als Kettenbruch, so ist es dieser:

$$b_1 : (a_1 + \ldots + Mb_{r-1} : (Ma_{r-1} + Mb_r : (a_r + \ldots + b_n : (a_n .$$

b) Gesetzt, man wolle den Werth des Kettenbruches

$$K = b_1 : (a_1 + \ldots + b_{r-1} : (a_{r-1} + 0 : (a_r + \ldots + b_n : (a_n$$

bestimmen, dessen r ter Theilzähler durch Null ersetzt sind, so schreibt man denselben in Determinantenform. Es ist K gleich

$$\begin{vmatrix} b_1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_2 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & b_{r-1} & a_{r-1} & -1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & a_r & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & a_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & -1 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ b_2 & a_2 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & b_{r-1} & a_{r-1} & -1 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & a_r & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & a_n \end{vmatrix},$$

und wendet man auf jede dieser beiden Determinanten das Laplace'sche Theorem an, so ergiebt sich, woferne nur die oben beiderseitig abgegrenzte Unterdeterminante $(n - r)$ ten Grades $\gtrless 0$ ist, der Kettenbruch K gleich

$$\begin{vmatrix} b_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & a_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{r-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & -1 & . & . & 0 \\ b_2 & a_2 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{r-1} \end{vmatrix} = b_1 : (a_1 + \ldots + b_{r-1} : (a_{r-1}.$$

c) Bei dioptrischen Untersuchungen bedarf man des Lemma's, dass die Kettenbrüche

$M : (a_1 + M : a_2 + \ldots + M : (a_n$ und $M : (a_n + M : a_{n-1} + \ldots + M : (a_1$

gleiche Nenner N' und N'' ergeben [13]). Nun ist

$$N' = \begin{vmatrix} a_1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ M & a_2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & M & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & M & a_n \end{vmatrix}, \quad N'' = \begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ M & a_{n-1} & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & M & a_{n-2} & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & M & a_1 \end{vmatrix}$$

Dass aber diese beiden Determinanten einander gleich sind, folgt sofort aus Kap. II. §. 2.

d) Der independente Ausdruck für den Kettenbruch

$$b_1 : (a_1 - b_2 : (a_2 - \ldots - b_n : (a_n$$

ist der folgende:

$$\frac{P_n}{Q_n} = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ b_2 & a_2 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$$

Diess würde sich natürlich leicht durch das Vorhergehende beweisen lassen, indessen kann man sich auch unmittelbar davon überzeugen. Für jeden solchen Kettenbruch gelten bekanntlich die Recursionsformeln:

$$P_n = a_n P_{n-1} - b_n P_{n-2}, \quad Q_n = a_n Q_{n-1} - b_n Q_{n-2}.$$

Ist nun beziehentlich Q_{n-1}, Q_{n-2} und $\triangle$ eine der folgenden drei Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & .\,. & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & .\,. & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & .\,. & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & .\,. & b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 & .\,. & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & .\,. & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & .\,. & a_{n-3} & 1 \\ 0 & 0 & .\,. & b_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & 1 & .\,. & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & .\,. & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & .\,. & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & .\,. & b_n & a_n \end{vmatrix},$$

so finden wir durch Zerlegung derselben $\triangle$ gleich

$$a_n \begin{vmatrix} a_1 & 1 & .\,. & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & .\,. & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & .\,. & a_{n-2} & 1 \\ 0 & 0 & .\,. & b_{n-1} & a_{n-1} \end{vmatrix} - b_n \begin{vmatrix} a_1 & 1 & .\,. & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & .\,. & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & .\,. & a_{n-3} & 1 \\ 0 & 0 & .\,. & b_{n-2} & a_{n-2} \end{vmatrix} = a_n Q_{n-1} - b_n Q_{n-2}.$$

Es ist also $\triangle = Q_n$, d. h. gilt der Satz für $(n-2)$ und $(n-1)$, so besteht er auch für n zu Recht; entsprechend gestaltet sich der Beweis für den Zähler.

e) Für den $t$ten Näherungswerth des einfach periodischen Kettenbruches $b : (a + b : (a + \ldots$ fanden wir oben (§. 3) den Ausdruck

$$b\,\frac{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^t - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^t}{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t+1} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{t+1}}.$$

Gesetzt nun, es wäre $b = -1$, $a = 2$, so würde dieser Ausdruck die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen; wir wären also nicht im Stande, den Werth des Kettenbruches

$$-1 : (2 - 1 : (2 - \ldots - 1 : (2_{(t)}$$

ohne Weiteres anzugeben. Hier zeigt uns nun die independente Darstellungsweise einen einfachen Ausweg.

In Kap. III. §. 10 leiteten wir die Formel

$$\begin{vmatrix} \binom{m}{1} & \binom{m}{0} & 0 & . & . & . & 0 \\ \binom{m}{2} & \binom{m}{1} & \binom{m}{0} & . & . & . & 0 \\ \binom{m}{3} & \binom{m}{2} & \binom{m}{1} & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \binom{m}{r+1} & \binom{m}{r} & \binom{m}{r-1} & . & . & . & \binom{m}{1} \end{vmatrix} = \binom{m+r}{r+1}$$

ab. Da nun $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1$, $\binom{2}{2+p} = 0$ ist, so können wir unseren Kettenbruch auch so schreiben:

$$-\begin{vmatrix} 2 & \binom{2}{0} & \dots & 0 \\ \binom{2}{2} & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 2_{(t-1)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & \binom{2}{0} & \dots & 0 \\ \binom{2}{2} & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 2_{(t)} \end{vmatrix} = -\frac{\binom{t}{t-1}}{\binom{t+1}{t}} = -\frac{t}{t+1}.$$

§. 6. Betrachten wir den Ausdruck genauer, welchen wir oben mit K bezeichneten, und lassen wir darin t unendlich gross werden. Dass dieser Grenzübergang ein endliches Resultat liefern muss, geht sofort aus der Ueberlegung hervor, dass der jenem Ausdruck gleiche periodische Kettenbruch b : (a + b : (a + . . ., ins Unendliche fortgesetzt, den für die Kettenbrüche bestehenden Convergenzregeln zufolge einen endlichen Werth annimmt. Man findet

$$\lim_{t=\infty} K = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - \frac{a}{2}.$$

Dieses Resultat kann man auch erhalten, indem man aus der quadratischen Gleichung $x^2 - ax = b$ die kleinere Wurzel

$$x' = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

berechnet. Durch Anwendung der Fürstenau'schen Methode findet man hingegen *) x' gleich

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -b & a & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -b & a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{(\infty-1)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -b & a & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -b & a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{(\infty)} \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man jede Colonne des Zählers und Nenners mit (— 1), so folgt durch Gleichsetzung der beiden für x' gefundenen Ausdrücke

$$\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} = -b : (a + b : (a + b : (a + \dots$$

Der hier entwickelte einfach periodische Kettenbruch kann ersichtlich zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln verwandt werden. Am einfachsten gestaltet sich dieses Verfahren, wenn wir unter dem Wurzelzeichen statt einer Summe eine Differenz annehmen und einen bis jetzt anscheinend nicht bekannten Satz zu Grunde legen, dessen Herleitung durch Determinanten eine besonders bequeme ist.

Dem Obigen zufolge ist, wenn b mit (— c) vertauscht wird,

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} - c} = \frac{a}{2} - c : (a - c : (a - \dots$$

---

*) Die Bedeutung der den Termen a angehängten symbolischen Indices ist wohl an sich evident.

Ist dann wieder bezüglich Q_k und P_k der $k$te Näherungsnenner und Näherungszähler dieses Kettenbruches, so ist nach §. 2

$$Q_{2n} = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \sqrt{c} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{c} & a & \sqrt{c} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{c} & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & \sqrt{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{c} & a & \sqrt{c} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{c} & a \end{vmatrix},$$

indem ja $\sqrt{c}\sqrt{c}$ den Werth c wiedergiebt.

Diese orthosymmetrische Determinante behandeln wir nun in der Weise weiter, dass wir zur ersten Zeile die letzte, zur zweiten die vorletzte und allgemein zur $q$ten die $(2n - q + 1)$te addiren, wobei q nicht $> n$ sein darf. Dann ist

$$Q_{2n} = \begin{vmatrix} a & \sqrt{c} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{c} & a \\ \sqrt{c} & a & \sqrt{c} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{c} & a & \sqrt{c} \\ 0 & \sqrt{c} & a & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & \sqrt{c} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & \sqrt{c} & \sqrt{c} & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{c} & a_{(n)}+\sqrt{c} & a+\sqrt{c} & \sqrt{c} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{c} & a & \sqrt{c} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \sqrt{c} & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & \sqrt{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sqrt{c} & a & \sqrt{c} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \sqrt{c} & a_{(2n)} \end{vmatrix}.$$

Nunmehr subtrahiren wir von jeder $q$ten die $(2n - q + 1)$te Colonne; alsdann verschwinden n^2 Elemente, und es ist nach Laplace's Satz Q_{2n} gleich folgendem Produkte:

$$-\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & -\sqrt{c} & \sqrt{c}-a \\ 0 & 0 & \dots & -a & -\sqrt{c} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\sqrt{c} & -a & \dots & 0 & 0 \\ -a & -\sqrt{c} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \sqrt{c} & a \\ 0 & 0 & \dots & a & \sqrt{c} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sqrt{c} & a & \dots & 0 & 0 \\ a+\sqrt{c} & \sqrt{c} & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Zieht man noch Kap. II. §. 8 in Betracht und zerlegt bezüglich nach der letzten und ersten Colonne beide Faktoren in Unterdeterminanten, so folgt zum Schluss Q_{2n} gleich

$$\left[(a-\sqrt{c}) \begin{vmatrix} a & \sqrt{c} & \dots & 0 \\ \sqrt{c} & a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)} \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & \sqrt{c} & \dots & 0 \\ \sqrt{c} & a & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-2)} \end{vmatrix} \right] \times$$

$$\left[(a+\sqrt{c})\begin{vmatrix} a & \sqrt{c} & . & . & 0 \\ \sqrt{c} & a & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{(n-1)} \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & \sqrt{c} & . & . & 0 \\ \sqrt{c} & a & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & a_{(n-2)} \end{vmatrix}\right],$$

und durch Ausrechnung

$$Q_{2n} = (aQ_{n-1} - cQ_{n-2})^2 - cQ^2_{n-1}.$$

Berücksichtigt man das Bildungsgesetz unseres Kettenbruches, so folgt hieraus

$$Q_{2n} = Q^2_n - cQ^2_{n-1}.$$

Da $P_{2n} = cQ_{2n-1}$ ist, so kann auch P_{2n} als orthosymmetrische Determinante dargestellt werden; dieselbe ist zwar von ungeradem Grade, lässt sich nach Zehfuss [14]) jedoch in ganz analoger Weise in ein Produkt zweier Determinanten vom $n$ten und $(n - 1)$ten Grade zerlegen, und es ergiebt sich

$$P_{2n} = c(aQ^2_{n-1} - 2cQ_{n-1}Q_n).$$

Kennt man von einem solchen Kettenbruche den Näherungswerth $\frac{P_n}{Q_n} = \frac{cQ_{n-1}}{Q_n}$, so kennt man durch diese Relationen auch den Näherungsbruch

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \frac{c(aQ^2_{n-1} - 2cQ_{n-1}Q_n)}{Q^2_n - cQ^2_{n-1}},$$

so dass also, wenn nur n hinlänglich gross angenommen wird, die Berechnung der Quadratwurzel mit erheblicher Genauigkeit erfolgen kann.

§. 7. Man kann sich nun noch die Frage vorlegen, wie der Quotient zweier Determinanten beschaffen sein muss, um unmittelbar seine Ueberführung in einen Kettenbruch zu gestatten. Zu diesem Zwecke beweisen wir folgenden Lehrsatz [15]):

Soll der Quotient zweier Determinanten

$$\frac{M}{N} = \frac{M}{\Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}}$$

ohne Weiteres in einen Kettenbruch sich umwandeln lassen, so ist die nothwendige aber auch genügende Bedingung hiefür das Bestehen einer der folgenden vier Relationen:

$$M = \frac{dN}{da_{1,1}},\quad M = \frac{dN}{da_{1,n}},\quad M = \frac{dN}{da_{n,1}},\quad M = \frac{dN}{da_{n,n}}.$$

Wir brauchen natürlich nur einen, etwa den ersten dieser Theilsätze, zu beweisen.

Wir geben dem Zähler nachstehende Form:

$$M = \begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,n} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Multipliciren wir nun die letzte Colonne mit $a_{1,n-1}$, die vorletzte mit a_n sowohl in M als in N, so ersetzt sich durch Subtraktion der vorletzten Colonne von der letzten das Element $a_{n,n}$ durch eine Null. Ganz ebenso können wir aber auch alle folgenden Elemente

$$a_{2,n} \ldots a_{n-2,n};\ a_{1,n-1} \ldots a_{n-3,n-1} \ldots a_{1,4}\ a_{2,4};\ a_{1,3}$$

durch Nullen ersetzen und erhalten dann den Quotienten $\frac{M}{N}$ in dieser Gestalt:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_{1,2} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & P_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & Q_1 & P_2 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a_{4,2} & R_1 & Q_2 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n-1,2} & T_1 & U_2 & \cdot & \cdot & Q_{n-3} & P_{n-2} \\ 0 & a_{n,2} & V_1 & T_2 & \cdot & \cdot & R_{n-3} & Q_{n-2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & P_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & Q_1 & P_2 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & R_1 & Q_2 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & T_1 & U_2 & \cdot & \cdot & Q_{n-3} & P_{n-2} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & V_1 & T_2 & \cdot & \cdot & R_{n-3} & Q_{n-2} \end{vmatrix},$$

indem alle bei der Multiplikation vor die Determinanten heraustretenden Faktoren sich im Zähler und Nenner wegheben. Hierauf schreiben wir den Zähler folgendermassen:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & P_1 & \cdot & \cdot & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & Q_1 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & V_1 & \cdot & \cdot & Q_{n-2} \end{vmatrix},$$

und verfahren zur linken Seite der ersten Diagonalreihe ganz ebenso, wie wir es vorher zu ihrer rechten thaten. Hierdurch erhalten wir $\frac{M}{N}$ gleich

$$\begin{vmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \alpha_{n-1} & \beta_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \gamma_{n-1} & \alpha_n \end{vmatrix},$$

und da, wie man sofort einsieht,

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \gamma_1 & \alpha_2 & -\beta_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \gamma_2 & \alpha_3 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \alpha_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \beta_1\gamma_1 & \alpha_2 & -1 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \beta_2\gamma_2 & \alpha_3 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \alpha_n \end{vmatrix},$$

so ist unser Quotient $\frac{M}{N}$ gleich dem Kettenbruche

$$\alpha_0 : (\alpha_1 - \beta_1\gamma_1 : (\alpha_2 - \beta_2\gamma_2 : (\alpha_3 - \ldots - \beta_{n-1}\,\gamma_{n-1} : (\alpha_n\,.$$

So ist beispielsweise

$$\frac{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1c_2-b_2c_1 \\ a_3 & b_3 & b_1c_3-b_3c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1c_2-b_2c_1 \\ a_3 & b_3 & b_1c_3-b_3c_1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} b_3 & 0 & 0 \\ a_2b_3-a_3b_2 & b_2 & b_1c_2-b_2c_1 \\ 0 & b_3 & b_1c_3-b_3c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1b_3-a_3b_1 & b_1 & 0 \\ a_2b_3-a_3b_2 & b_2 & b_1c_2-b_2c_1 \\ 0 & b_3 & b_1c_3-b_3c_1 \end{vmatrix}}.$$

$$= \frac{b_3}{a_1b_3-a_3b_1} - \frac{b_1(a_2b_3-a_3b_2)}{b_2} - \frac{b_3(b_1c_2-b_2c_1)}{b_1c_3-b_3c_1}.$$

§. 8. Seit Euler's Zeit, und besonders durch seine umfassenden Forschungen in diesem Gebiete angeregt, haben sich die Analytiker mit Vorliebe den Problemen zugewandt, welche den Zusammenhang zwischen den Kettenbrüchen und den anderen Gebilden der Analysis, Produkten und Reihen, darzulegen bestimmt sind. Als Schlusssteine der hierauf gerichteten Bemühungen dürfen wir die eleganten Transformationsformeln betrachten, durch welche Heine[16]) und Hankel[17]) gewisse Kettenbrüche in Reihen verwandelten, welche nach positiven und negativen Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. Obschon die Kunstgriffe, durch welche in beiden Fällen die betreffende Umwandlung erreicht wurde, scheinbar von einander verschieden sind, so stammt doch die Ableitung beider Verfahrungsweisen aus einer gemeinsamen Quelle. Eine Behandlung der umgekehrten Aufgaben hat nun Nachreiner[18]) vermittelst der Determinanten in eleganter Weise gegeben, ohne jedoch, wie es wenigstens scheint, die Analogie seiner Methode mit denen der genannten Mathematiker zu bemerken.

Wir nehmen zuerst den zweiten Theil der Aufgabe vor und verwandeln den unendlichen (jedoch selbstverständlich als convergent vorausgesetzten) Kettenbruch

$$b_1 : (x + a_0 - b_2 : (x + a_1 - b_3 : (x + a_2 - \ldots$$

in eine Reihe von der Form

$$\frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x^3} + \ldots$$

Behält Q_n seine ursprüngliche Bedeutung bei, so besteht die Relation

$$Q_n = \begin{vmatrix} x+a_0 & \sqrt{b_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \sqrt{b_1} & x+a_1 & \sqrt{b_2} & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{b_2} & x+a_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x+a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Eine derartige Determinante können wir nach Kap. II. §. 16 in eine endliche nach aufsteigenden Potenzen von x geordnete Reihe umsetzen, und zwar erhalten wir, wenn wir mit Q'_n das bezeichnen, was aus Q_n für $x = 0$ wird,

$$Q_n = Q'_n + x \mathop{S}_{k=1}^{k=n} \frac{dQ'_n}{da_k} + x^2 \mathop{S}_{k=1}^{k=n} \mathop{S}_{l=1}^{l=n} \frac{d^2Q'_n}{da_k\, da_l} + \ldots + x^n.$$

Es ist aber

$$\frac{dQ'_n}{da_k} = \begin{vmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{b_{k-1}} & a_{k-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_{k+1} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix} = Q'_{0,k-1} \cdot Q'_{k+1,n},$$

und mit Anwendung des Laplace'schen Satzes,*)

$$\frac{d^2Q'^n}{da_k\, da_l} = Q'_{0,k-1} \cdot Q'_{k+1,l-1} \cdot Q'_{l+1,n}$$

$$\frac{d^3Q'_n}{da_k\, da_l\, da_m} = Q'_{0,k-1} \cdot Q'_{k+1,l-1} \cdot Q'_{l+1,m-1} \cdot Q'_{m+1,n}$$

$$\frac{d^4Q'_n}{da_k\, da_l\, da_m\, da_r} = Q'_{0,k-1} \cdot Q'_{k+1,l-1} \cdot Q'_{l+1,m-1} \cdot Q'_{m+1,r-1} \cdot Q'_{r+1,n}.$$

Das Fortschreitungsgesetz dieser Ausdrücke liegt am Tage, und dividirt man, wenn P_n und P'_n für den Zähler eine analoge Bedeutung besitzen, P_n durch Q_n, so ist das Resultat folgendes:

$$v_n = \frac{P'_n + x \overset{k=n}{\underset{k=1}{S}} P'_{1,k-1} P'_{k+1,n} + x^2 \overset{k=n}{\underset{k=1}{S}} \overset{l=n}{\underset{l=1}{S}} P'_{1,k-1} P'_{k+1,l-1} P'_{l+1,n} + \dots + x^{n-1}}{Q'_n + x \overset{k=n}{\underset{k=1}{S}} Q'_{0,k-1} Q'_{k+1,n} + x^2 \overset{k=n}{\underset{k=1}{S}} \overset{l=n}{\underset{l=1}{S}} Q'_{0,k-1} Q'_{k+1,l-1} Q'_{l+1,n} + \dots + x^n}.$$

Es ist somit ein Kettenbruch von n Theilbrüchen als Quotient zweier ganzen Polynome vom bezüglich n ten und $(n + 1)$ten Grade dargestellt, und die weiteren Operationen sind aus der Theorie der recurrirenden Reihen bekannt.

Bezeichnen wir allgemein durch $c_{q,n}$ den Coëfficienten von x^q bei der im Nenner stehenden Reihe, so liefert das im Vorstehenden erörterte Bildungsgesetz dieser Grössen c folgende Gleichung:

$$c_{0,n} A_0 + c_{1,n} A_1 + \dots + c_{n,n} A_n = 0;$$

diese Gleichung bleibt offenbar auch bestehen, wenn jeder Index um eine

*) Denn ebenso wie die erste Determinante durch Zerlegung in ein Produkt aus zwei Determinanten zerfällt, so werden mit Rücksicht auf Kap. II. §. 17 bei jeder $p$ten Unterdeterminante $(n + 1 - p)$ten Grades im Ganzen $(p + 1)$ derartige Determinantenprodukte auftreten müssen. Dabei ward stets unter $Q'_{p,q}$ diejenige der Determinante Q'_n condiagonale Unterdeterminante verstanden, welcher das Diagonalglied

$$a_p \dots a_q$$

zukommt.

Einheit erhöht wird; es treten also zur vorigen noch folgende $(n - 1)$ Gleichungen hinzu:

$$
\begin{array}{l}
c_{0,n} A_1 + c_{1,n} A_2 + \dots + c_{n,n} A_{n+1} = 0, \\
\vdots \\
c_{0,n} A_{n-1} + c_{1,n} A_n + \dots + c_{n,n} A_{2n-1} = 0.
\end{array}
$$

In diesen Gleichungen sind die c bekannte, die A unbekannte Grössen. Gesetzt nun, es seien die Terme $A_0, A_1 \dots A_{n-3}, A_{n-2}$ bekannt, so kann man aus dem Systeme die noch übrigen $(2n - 1 - n + 1 = n)$ Grössen nach Kap. V. §. 1 berechnen, und zwar hat, wie man sich sofort überzeugt, die alsdann im Nenner auftretende Determinante die für die praktische Berechnung höchst bequeme Eigenschaft, sich auf ihr Diagonalglied zu reduciren.

Hankel (s. o.) hat, wie gesagt, die umgekehrte Aufgabe diskutirt; für ihn waren also die Grössen A bekannt, die c unbekannt. Er entnimmt dem obigen Systeme, welches also jetzt homogen ist, den Werth

$$
\omega_n \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_{n-1} \\ A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n & A_{n+1} & \dots & A_{2n-1} \end{vmatrix},
$$

und zeigt, dass je zwei aufeinanderfolgende ω durch die Relation

$$
\begin{vmatrix} A_0 & A_1 & \dots & A_n \\ A_1 & A_2 & \dots & A_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n-1} & A_n & \dots & A_{2n} \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega_n \, \omega_{n+1}}
$$

an einander geknüpft sind.

Die hier durchgeführten Behandlungen der Transformationsaufgabe und ihrer Converse haben also das mit einander gemein, dass bei einer jeden gewisse recurrente Berechnungen der independenten Bestimmung der übrigen Grössen voraufgehen müssen. Das erstemal muss wenigstens A_0 und A_1, das zweitemal ω_1 bekannt sein.

§. 9. Im Anschluss an das Obige möge noch gezeigt werden, wie man nach Nachreiner [19]) den Kettenbruch

$$1 - a_1 x : (1 - a_2 x : (1 - \dots - a_n x : (1$$

in eine nach aufsteigenden Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandeln kann.

Man hat $\frac{P_n}{Q_n}$ gleich

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x \\ 0 & 0 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & x & \dots & 0 & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}};$$

der zweite Ausdruck geht aus dem ersten dadurch hervor, dass man sämmtliche Colonnen im Zähler und Nenner solange mit einander vertauscht, bis die erste zur letzten geworden ist.

Um auch hier den in Kap. II. §. 16 aufgestellten Satz in Anwendung bringen zu können, braucht man nur dem Zähler folgende Form zu geben:

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix},$$

und dem Nenner eine entsprechende; dann ist, wenn P'_n für $x = 0$ aus P_n wird,

$$P_n = P'_n + x \sum_{k=1}^{k=n} \frac{dP'_n}{dx_k} + x^2 \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{l=1}^{l=n} \frac{d^2P'_n}{dx_k\, dx_l} + \dots$$

Drückt man den Coëfficienten von $x_\bullet$ wieder in Determinantenform aus, so ist derselbe

$$-\begin{vmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & a_k & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 1 & . & . & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & a_n & 1 \end{vmatrix} = -a_k,$$

wie aus Kap. II. §. 6 hervorgeht. In gleicher Weise erhält man für die weiteren Potenzen von x als Coëfficienten die Werthe $a_k a_l$, $- a_k a_l a_m$ etc. Die Substitution dieser Werthe ergiebt, von den Grenzen vorläufig noch abgesehen,

$$P_n = 1 - x \sum a_k + x^2 \sum\sum a_k a_l - \dots$$

Ist nun $k < l < m \dots$, so erhellt aus der Entwickelung der einzelnen Differentialquotienten, dass die Grenzen der obigen Summenausdrücke nicht mehr allenthalben gleich 1 und n sein können; man hat vielmehr

$$P_n = 1 - x \mathop{S}_{k=1}^{k=n} a_k + x^2 \mathop{S}_{k=1}^{k=n-2} \mathop{S}_{l=k+2}^{l=n} a_k a_l - x^3 \mathop{S}_{k=1}^{k=n-4} \mathop{S}_{l=k+2}^{l=n-2} \mathop{S}_{m=l+2}^{m=n} a_k a_l a_m + - \ldots,$$

$$Q_n = 1 - x \mathop{S}_{k=2}^{k=n} a_k + x^2 \mathop{S}_{k=2}^{k=n-2} \mathop{S}_{l=k+2}^{l=n} a_k a_l - x^3 \mathop{S}_{k=2}^{k=n-4} \mathop{S}_{l=k+2}^{l=n-2} \mathop{S}_{m=l+2}^{m=n} a_k a_l a_m + - \ldots$$

Dividirt man P_n durch Q_n, so erhält man den obigen Kettenbruch als rationale gebrochene Funktion xon x dargestellt, deren Verwandlung in eine Reihe nach Kap. V. §. 7 sofort erfolgen kann.

Auch hier wollen wir kurz der Problem-Umkehrung gedenken. Die Aufgabe, bei der Entwickelung

$$\frac{1 + A_1x + A_2x^2 + \ldots}{1 + B_1x + B_2x^2 + \ldots} = 1 + x : (a_1 + x : (a_2 + x : (a_3 + \ldots$$

die unbekannten Theilnenner a zu bestimmen, hatte Stern[20]) als vorläufig noch ungelöst bezeichnet; Muir[21]) gab dafür eine elegante Lösung mit Hülfe der Determinanten. Durch eine einfache Anwendung des Princips der unbestimmten Coëfficienten findet er ganz allgemein, es sei

$$a_{2n-1} = \frac{M^2}{NP},$$

unter M und N resp. die Determinanten

$$\begin{vmatrix}
1 & B_1 & B_2 & \ldots & B_{n-1} & B_n & \ldots & B_{2n-4} & B_{2n-3} \\
0 & 1 & B_1 & \ldots & B_{n-2} & B_{n-1} & \ldots & B_{2n-5} & B_{2n-4} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & B_1 & \ldots & B_{n-2} & B_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & \ldots & C_1 & C_2 & \ldots & C_{n-1} & C_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & C_1 & C_2 & \ldots & C_{n-1} & C_n & \ldots & C_{2n-4} & C_{2n-3} \\
C_1 & C_2 & C_3 & \ldots & C_n & C_{n+1} & \ldots & C_{2n-3} & C_{2n-2}
\end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix}
1 & B_1 & B_2 & \ldots & B_n & B_{n+1} & \ldots & B_{2n-3} & B_{2n-2} \\
0 & 1 & B_1 & \ldots & B_{n-1} & B_n & \ldots & B_{2n-4} & B_{2n-3} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & B_1 & \ldots & B_{n-1} & B_n \\
0 & 0 & 0 & \ldots & C_1 & C_2 & \ldots & C_{n-1} & C_n \\
0 & 0 & 0 & \ldots & C_2 & C_3 & \ldots & C_n & C_{n+1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & C_1 & C_2 & \ldots & C_n & C_{n+1} & \ldots & C_{2n-3} & C_{2n-2} \\
C_1 & C_2 & C_3 & \ldots & C_{n+1} & C_{n+2} & \ldots & C_{2n-2} & C_{2n-1}
\end{vmatrix},$$

und unter P die aus letzterer Determinante abgegrenzte Unterdeterminante (2n — 3)ten Grades verstanden. Für a_{2n} lässt sich hieraus der entsprechende Ausdruck leicht durch Analogie bilden; sein Vorzeichen ist Minus. C_i ist gleich $A_i - B_i$.

§. 10. Zum Schlusse dieses Kapitels möge noch die Betrachtung einer gewissen analytischen Form folgen, welche den Kettenbrüchen sehr nahe verwandt ist; wir meinen die sogenannten aufsteigenden Kettenbrüche. Obschon bereits von dem Araber Al-Kalsadî[22]) entdeckt und auch dem grössten Mathematiker des Mittelalters, Leonardo Fibonacci[23]), nicht unbekannt, blieben dieselben gleichwohl bis in die neueste Zeit hinein unbeachtet; erst ganz neuerlich begannen ziemlich gleichzeitig Druckenmüller[24]), Heis[25]), Kunze[26]) und zuletzt Lemkes[27]) sich mit ihnen zu beschäftigen. Es erhellt sofort, dass der Nenner des aufsteigenden Kettenbruches

$$\frac{M}{N} = \cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \dots + \cfrac{b_n}{a_n}}{a_2}}{a_1}$$

den Werth $N = a_1 a_2 \dots a_n$ erhält; im Folgenden soll nun auch[28]) der Zähler in independenter Form gegeben werden. Wir beweisen zu dem Ende folgenden Satz:

Der Zähler M des genannten aufsteigenden Kettenbruches ist gleich der Determinante

$$P_n = \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -1 \\ b_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}.$$

Den Beweis führen wir durch Induktion. Zerlegen wir die Determinante P_n nach den Elementen der letzten Zeile in erste Unterdeterminanten, so folgt P_n gleich

$$a_n \begin{vmatrix} b_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & -1 & \dots & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} \pm (-b_n)^{n-1} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & -1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}_{(n-1)}.$$

Die erste Determinante ist offenbar $= P_{n-1}$, die zweite hat den Werth $(-1)^{n-1}$ (Kap. II. §. 5), so dass demnach die Relation

$$P_n = a_n P_{n-1} + (-1)^{n-1+n-1} b_n = a_n P_{n-1} + b_n$$

gewonnen ist. Diess ist nun aber das Bildungsgesetz der Näherungszähler eines aufsteigenden Kettenbruches, und da für $n = 2$ die Wahrheit des aufgestellten Satzes bereits vorliegt, so gilt derselbe für jedes beliebige n.

Ist z. B. allgemein $(q \gtreqless 1 \lesseqgtr n)$ $a_q = 1$, so muss offenbar $P_n = b_1 + \dots + b_n$ sein. Diess zeigt auch sofort eine Determinantenbetrachtung; denn addiren wir in der obigen Determinante für P_n in diesem Falle sämmtliche Zahlen zur ersten, so nimmt dieselbe folgende Form an;

$$\begin{vmatrix} b_1 + \ldots + b_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_2 & 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 \\ b_n & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

und dass diese Determinante sich auf das erste Element der ersten Zeile reduciren muss, ist sofort evident.

Eine allgemeinere Theorie der aufsteigenden Kettenbrüche ist an anderer Stelle [29]) zu geben versucht worden; dort ward auch gezeigt, wie man auf diese Formen eine einfache Reihen-Entwickelung der Kettenbrüche basiren kann [30]).

§. 11. Jacobi [31]) hat sich die Frage vorgelegt, zu welchen analytischen Gebilden man gelangen würde, wenn man statt des Systemes dreigliedriger recurrirender Gleichungen, durch welches wir oben (§. 2) den gewöhnlichen Kettenbruch bedingt erkannten, ein viergliedriges betrachtete. Er nannte die resultirenden Gebilde **kettenbruchähnliche Algorithmen**, indem er darauf verzichtete, einen Zusammenhang mit den älteren Formen der algebraischen Analysis ausfindig zu machen. Diesen letzteren hat nun **Fürstenau** [32]) aufgedeckt. Sind x und y zwei völlig willkürliche reelle Grössen und setzt man

$$y = a_0 + \frac{x_1}{y_1}, \quad y_1 = a_1 + \frac{x_2}{y_2}, \quad y_2 = a_2 + \frac{x_3}{y_3} \ldots,$$

$$x = b_0 + \frac{1}{y_1}, \quad x_1 = b_1 + \frac{1}{y_2}, \quad x_2 = b_2 + \frac{1}{y_3} \ldots,$$

unter a und b immer bezüglich die grössten in y und x enthaltenen ganzen Zahlen verstanden, so folgt durch successive Substitution

$$y = a_0 + \cfrac{b_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{b_3 + \cfrac{1 + \ldots}{a_4 + \ldots}}{a_3 + \cfrac{b_4 + \ldots}{a_4 + \ldots}}}}{a_1 + \cfrac{b_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{b_4 + \ldots}{a_4 + \ldots}}}{a_2 + \cfrac{b_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}{a_3 + \cfrac{b_4 + \ldots}{a_4 + \ldots}}}}, \quad x = b_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{b_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{b_4 + \ldots}{a_4 + \ldots}}}{a_2 + \cfrac{b_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}{a_3 + \cfrac{b_4 + \ldots}{a_4 + \ldots}}}}.$$

Bezeichnet man die durch den jeweiligen Vertikalstrich nach links hin abgeschnittenen Ausdrücke resp. als ersten, zweiten . . . Näherungsbruch von y und x, so erhellt sofort, dass die entsprechenden Nenner gleich sein müssen, und bezeichnen wir mit Y_p, X_p, N_p immer für den pten Näherungsbruch Zähler und Nenner, so gilt für alle drei die Recursionsgleichung

$$(Y, X, N)_{p+1} = a_{p+1}\,(Y, X, N)_p + b_{p+1}\,(Y, X, N)_{p-1} + (Y, X, N)_{p-2}.$$

Wir sind hier somit auf diejenige Gleichungsform gekommen, welche Jacobi zum Ausgangspunkt genommen hatte. Lösen wir in bekannter Weise diese Gleichungen auf, so resultirt folgendes Theorem:

Versteht man unter Y_p, X_p, N_p beziehungsweise nachstehende drei Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_1 & 1 & 0 & .. & 0 \\ -1 & a_1 & b_2 & 1 & .. & 0 \\ 0 & -1 & a_2 & b_3 & .. & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_3 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & a_p \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_0 & 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ -1 & a_1 & b_2 & 1 & .. & 0 \\ 0 & -1 & a_2 & b_3 & .. & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_3 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & a_p \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & 1 & 0 & .. & 0 \\ -1 & a_2 & b_3 & 1 & .. & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & b_4 & .. & 0 \\ 0 & 0 & -1 & a_4 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & .. & a_p \end{vmatrix},$$

so lassen sich die beiden Quotienten $\frac{Y_p}{N_p}$ und $\frac{X_p}{N_p}$ als Kettenbrüche darstellen, deren einzelne Theilzähler und Theilnenner sich selbst wieder als Kettenbrüche offenbaren.

Dabei entspricht dem oben in §. 4 behandelten Fundamentalsatz der gewöhnlichen Kettenbrüche der folgende [33]:

$$\begin{vmatrix} Y_{p+1} & Y_p & Y_{p-1} \\ X_{p+1} & X_p & X_{p-1} \\ N_{p+1} & N_p & N_{p-1} \end{vmatrix} = 1.$$

Nennt man die vulgären Kettenbrüche solche der ersten Ordnung, so würde die Ordnungszahl der hier diskutirten Formen die zweite sein. Die Entwickelungsgebilde eines Systemes $(n + 2)$ gliedriger Recursionsgleichungen können folgerichtig Kettenbrüche nter Ordnung heissen. Anhangsweise möge übrigens bemerkt werden, dass die Converse der von Fürstenau angeregten Frage bis jetzt noch nicht in entsprechender Weise behandelt oder gar erledigt worden ist. Aus diesem Grunde behalten die Untersuchungen von Bachmann [34] ihren selbstständigen hohen Werth, und eine hierauf bezügliche Bemerkung des Verf. [35] ist demgemäss zu rektificiren.

1) Ramus, Determinanternes Anvendelse til at bestemme Loven for de convergerende Bröker, Det Kong. Danske Videnskab. Selsk., naturv. og math. Afhandl. Kjoebenhavn 1855. S. 106 ff. — 2) Spottiswoode, Elementary Theorems relating to Determinants, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 51. Band, S. 374. — 3) Heine, Einige Eigenschaften der Lamé'schen Funktionen, ibid. 56. Band, S. 97. — 4) Thiele, Bemarkning om Kjaedebroker, Tidsskrift for Mathematik, udgivet a C. Tychsen, V. S. 144 ff. — 5) G. Bauer, Von einem Kettenbruche Euler's und einem Theorem von Wallis, München 1872. — 6) Casorati, Le proprieta cardinali degli stromenti ottici anche non centrati, Milano 1872. S. 73. — 8) Günther, Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form, Erlangen 1873. — 9) Ibid. S. 11. — 10) Ibid. S. 32. — 11) Stern, Theorie der Kettenbrüche u. ihre Anwendung. Journ. f. d. reine u. angew. Math. 10. Band, S. 7. — 12) Ibid. S. 16. — 13) Ibid. S. 83. — 14) Zehfuss, Zwei Sätze über Determinanten, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 7. Jahrg. S. 438. — 15) Günther, Beiträge zur Theorie der Kettenbrüche, Archiv d. Math. u. Phys. 54. Theil, S. 397. — 16) Heine,

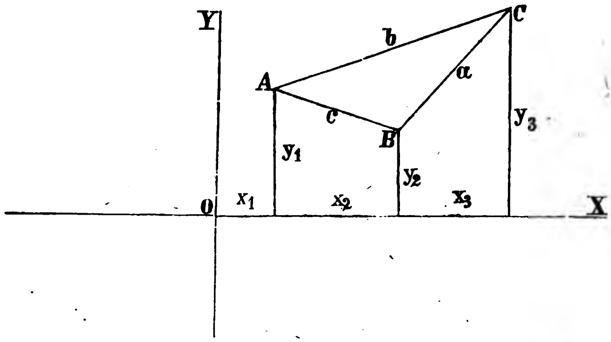
Ueber eine gewisse Reihe von allgemeiner Form, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 34. Band, S. 294. — 17) Hankel, Ueber die Transformation von Reihen in Kettenbrüche, Leipziger Berichte 1862. S. 17 ff. — 18) Nachreiner, Beziehungen zwischen Determinanten und Kettenbrüchen, München 1872. S. 19. — 19) Ibid. S. 20 ff. — 20) Stern, S. 257. — 21) Muir, New general formulae for the transformation of infinite series into continued fractions, Transactions of the royal society of Edinburgh, Vol. XXVII. S. 469. — 22) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874. S. 254. — 23) Günther. Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche, Weissenburg 1872. S. 2. — 24) Druckenmüller, Theorie der Kettenreihen, Trier 1856. — 25) Heis, Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, Köln und Wien 1864. S. 318 ff. — 26) A. Kunze, Die aufsteigenden Kettenbrüche, Weimar 1857. — 27) Lemkes, Theoria fractionum continuarum ascendentium, Monasterii 1870. — 28) Günther, Darstellung etc. S. 41 ff. — 29) Id. Theorie der aufsteigenden Kettenbrüche, Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. 21. Jahrg. S. 178 ff. — 30) Ibid. S. 188 ff. — 31) Jacobi, Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 69. Band, S. 1 ff. — 32) Fürstenau, Ueber Kettenbrüche höherer Ordnung, Wiesbaden 1874. — 33) Ibid. S. 5. — 34) Bachmann, Zur Theorie der Jacobi'schen Kettenbruchalgorithmen, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 75. Band, S. 61 ff. — 35) Günther, Recension zu Fürstenau, Archiv d. Math. u. Phys. Literar. Ber. CCXXVII.

Kapitel VI.

Geometrische Anwendungen.

§. 1. Gegeben sei ein Dreieck ABC (Fig. 1) mit den drei Seiten $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Die Coordinaten der Eckpunkte, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, seien bezüglich x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; es soll der Inhalt des Dreiecks einmal durch die Coordinaten seiner Ecken, dann aber auch als Funktion der drei Seiten dargestellt werden.

Fig. 1.



Bezeichnet F den Dreiecksinhalt, so ist der Figur zufolge

$$F = \text{Trp. } AC - \text{Trp. } AB - \text{Trp. } BC,$$

also nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie

$$\begin{aligned} 2F &= (y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) - (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) \\ &= y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1). \end{aligned}$$

Dieses Aggregat lässt sich sofort als dreireihige Determinante schreiben; man hat

$$2F = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

und hiemit ist bereits der erste Zweck erreicht. Für schiefwinklige Coordinaten mit dem Axenwinkel α findet sich ebenso

$$2F = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \sin\alpha.$$

Wären bei Zugrundelegung eines solchen Systemes nicht die cartesischen, sondern die Polarcoordinaten für jeden Eckpunkt in der Form $r_1, \varphi_1;\ r_2, \varphi_2;\ r_3, \varphi_3$ gegeben, so könnte man mit Vortheil allgemeine goniometrische Funktionen im Sinne Unverzagt's[1]) und Biehringer's[2]) einführen. Im Anschluss an die Bezeichnungsweise des Letzteren würde die obige Formel so geschrieben werden müssen:

$$2F = \begin{vmatrix} 1 & r_1 \overset{\alpha}{\cos}\varphi_1 & r_1 \overset{\alpha}{\sin}\varphi_1 \\ 1 & r_2 \overset{\alpha}{\cos}\varphi_2 & r_2 \overset{\alpha}{\sin}\varphi_2 \\ 1 & r_3 \overset{\alpha}{\cos}\varphi_3 & r_3 \overset{\alpha}{\sin}\varphi_3 \end{vmatrix} \overset{\frac{\pi}{2}}{\sin}\alpha.$$

Um auch die zweite Formel herzuleiten, erheben wir unsere Determinante nach Kap. II. §. 6 auf den vierten Grad und bilden das Produkt

$$-4F^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Die Ausführung der Multiplikation liefert

$$-4F^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1^2+y_1^2 & x_1x_2+y_1y_2 & x_1x_3+y_1y_3 \\ 1 & x_1x_2+y_1y_2 & x_2^2+y_2^2 & x_2x_3+y_2y_3 \\ 1 & x_1x_3+y_1y_3 & x_2x_3+y_2y_3 & x_3^2+y_3^2 \end{vmatrix}.$$

Nunmehr multipliciren wir die drei letzten Colonnen mit (-2) und dividiren durch eben diese Zahl die erste Zeile; diess giebt

$$-16F^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2(x_1^2+y_1^2) & -2(x_1x_2+y_1y_2) & -2(x_1x_3+y_1y_3) \\ 1 & -2(x_1x_2+y_1y_2) & -2(x_2^2+y_2^2) & -2(x_2x_3+y_2y_3) \\ 1 & -2(x_1x_3+y_1y_3) & -2(x_2x_3+y_2y_3) & -2(x_3^2+y_3^2) \end{vmatrix}.$$

Da diese Determinante, wie auch aus Kap. III. §. 6 hervorgeht, eine symmetrische ist, so können wir darin nicht blos Zeilen zu Zeilen und Colonnen zu Colonnen, sondern auch Zeilen zu Colonnen und umgekehrt Colonnen zu Zeilen addiren. Wir addiren also zur zweiten Zeile und Colonne die mit $(x_1^2 + y_1^2)$ multiplicirte erste Zeile, hierauf zur dritten Zeile und Colonne die mit $(x_2^2 + y_2^2)$ multiplicirte erste Zeile und schliesslich zur vierten Zeile und Colonne die mit $(x_3^2 + y_3^2)$ multiplicirte erste Zeile, so folgt

$$-16F^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 & (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2 \\ 1 & (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 & 0 & (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2 \\ 1 & (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2 & (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Aus der Figur lässt sich folgern, dass

$$(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = c^2,\quad (x_1-x_3)^2 + (y_1-y_3)^2 = b^2,$$
$$(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2 = a^2$$

ist. Führt man diese Werthe ein und multiplicirt nachher jede der vier Colonnen mit abc, so ergiebt sich $-16F^2$ gleich

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^4b^4c^4} \begin{vmatrix} 0 & abc & abc & abc \\ abc & 0 & abc^3 & ab^3c \\ abc & abc^3 & 0 & a^3bc \\ abc & ab^3c & a^3bc & 0 \end{vmatrix}.$$

Jetzt dividire man die zweite, dritte und vierte Colonne und hierauf immer die entsprechende Zeile mit bc, ac, ab; dann tritt der Faktor $a^4b^4c^4$ vor die Determinante, und man hat

$$-16F^2 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Aus diesem Ausdrucke aber folgt durch Reihenvertauschung unmittelbar der folgende:

$$-F^2 = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix} = \frac{1}{16}\triangle.$$

Die hier gewählte Ableitung dieser Relation rührt von einer Vorlesung des verstorbenen Erlanger Professors H. Pfaff her (Wintersemester 1869/70); eine andere gleichfalls sehr elegante hat kürzlich Ritsert [3]) gegeben.

§. 2. Im Anschlusse daran möge noch gezeigt werden, wie nach Baltzer's [4]) und Hankel's [5]) Angaben Möbius die Struktur dieser Determinante als nothwendig dargethan hat. Er entnimmt der Determinantenlehre einzig als Hülfsatz die Thatsache, dass $\triangle$ durch die vier Ausdrücke

$$a+b+c,\quad a+b-c,\quad a-b+c,\quad -a+b+c$$

ohne Rest theilbar ist; dass diess sich wirklich so verhalte, erhellt sofort aus Kap. II. § 8, indem $\triangle$ gleich jeder der nachstehenden vier Determinanten

$$\begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 0 \\ b+a+c & a & 0 & c \\ c+a+b & 0 & a & b \\ c+b+a & c & b & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a+b-c & b & c & 0 \\ b+a-c & a & 0 & c \\ c-a-b & 0 & a & b \\ c-b-a & c & b & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a-b+c & b & c & 0 \\ b-a-c & a & 0 & c \\ c+a-b & 0 & a & b \\ -c+b-a & c & b & a \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a+b+c & b & c & 0 \\ -b+a-c & a & 0 & c \\ -c+a-b & 0 & a & b \\ c+b-a & c & b & a \end{vmatrix},$$

und von diesen vier Determinanten sieht man sofort, dass die erste Colonne einer jeden, und damit auch die Determinante selbst, einen der genannten vier Ausdrücke als Theiler enthält.

Möbius' Raisonnement ist nun weiter folgendes. F^2 muss eine symmetrische und homogene Funktion der Seitenquadrate a^2, b^2, c^2 und zwar für dieselben vom zweiten, im Ganzen also vom vierten Grade sein. Wenn die drei Punkte A, B, C irgendwie in ein und dieselbe Gerade zu liegen kommen, d. h. wenn einer der vier Fälle

$$a+b+c = a+b-c = a-b+c = -a+b+c = 0$$

eintritt, so muss F^2 zur Determinante

$$\triangle = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{vmatrix}$$

ein von a, b, c unabhängiges Verhältniss haben, d. h. es ist

$$-F^2 = \mu^2 \triangle.$$

Durch Betrachtung eines speziellen Falles, z. B. des gleichseitigen Dreiecks lässt sich dann auch μ^2 bestimmen. Für $a = b = c$ folgt aus unserer Formel $\triangle = -3a^4$. Andererseits folgt durch direkte geometrische Betrachtung $F^2 = \frac{3a^4}{16}$; es besteht also die Gleichung *)

$$-\mu^2(-3a^4) = \frac{3a^4}{16}; \ \mu^2 = \tfrac{1}{16},$$

also wiederum auf ganz anderem Wege findet sich

$$-F^2 = \frac{1}{16} \triangle.$$

Die Berechnung des einem Dreieck umschriebenen Kreises vollzieht sich nach Mansion [6]) folgendermassen. Wir denken uns den Ursprung des Coordinatensystems mit dem Kreiscentrum zusammenfallend; alsdann können wir, unter R jenen Radius verstanden, einer in der obigen Entwickelung vorkommenden Formel folgende Gestalt ertheilen:

$$\begin{vmatrix} 1 & R^2 & R^2 & R^2 \\ 0 & 0 & c^2 & b^2 \\ 0 & c^2 & 0 & a^2 \\ 0 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{32} F^2R^2.$$

Es stellt sich also R^2 als der mit einem constanten Faktor multiplicirte Quotient zweier Determinante vom resp. dritten und vierten Grade dar.

§. 3. Eine ähnliche Formel, wie wir sie in §. 1 für den Flächeninhalt eines durch die Coordinaten seiner Eckpunkte bestimmten Dreiecks fanden, lässt sich auch für den cubischen Inhalt eines Tetraëders angeben. Diese Formel ward bereits von Lagrange (s. o. Kap. I. §. 8), wenn auch freilich noch ohne die symbolische Bezeichnung der Determinanten, hergeleitet; in sehr einfacher Weise kann diese Herleitung nach folgender von Baltzer [7]) entwickelten Methode bewerkstelligt werden.

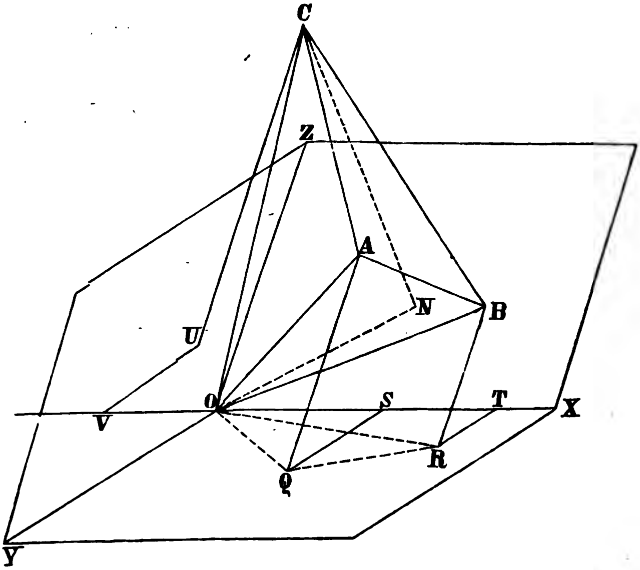
Es sei ABCO (Fig. 2) das gegebene Tetraëder; durch seinen einen Eckpunkt O sei ein willkürliches schiefwinkliges Coordinatensystem XYZO gelegt, für die drei Punkte A, B, C sei resp. $AQ = z_1$, $QS = y_1$, $SO = x_1$; $BR = z_2$, $RT = y_2$, $TO = x_2$; $CU = z_3$, $UV = y_3$, $VO = x_3$. Fällt man hierauf von C aus auf die Ebene OAB ein Loth $CN = h$ und bezeichnet den Tetraëderinhalt mit J, so ist zunächst

$$3J = h \,.\, \triangle\, OAB.$$

Die fünf Geraden CU, UV, VO, ON, NC bilden nun ein geschlossenes windschiefes Polygon; projicirt man dessen Seiten sämmtlich orthogonal

*) In der ersten Auflage hatte sich an dieser Stelle ein Rechnungsfehler eingeschlichen, der jedoch natürlich das richtige Princip nicht beeinträchtigen konnte.

Fig. 2.



auf CN, so ist nach einem Lehrsatze, dessen Beweis etwa bei Duhamel nachgesehen werden mag (Einleitung z. anal. Mechanik),

$$h = x_3 \cos(h, x) + y_3 \cos(h, y) + z_3 \cos(h, z),$$

indem wir in bekannter Weise den von den beiden Geraden p und q eingeschlossenen Winkel mit (p, q) bezeichnen.

Zieht man die geraden Linien OR, RQ, QO und bezeichnet den Flächeninhalt des so entstandenen Dreiecks RQO mit Δ_x, denkt sich ferner auf den drei Coordinatenebenen bezüglich die Lothe x', y', z' errichtet und legt senkrecht auf z' eine Ebene durch das über OQR errichtete schiefwinklige Prisma, so schneidet dieselbe jenes in einem Dreieck, welches sowohl als Projektion von ABO, wie auch von RQO aufgefasst werden kann. Demnach hat sein Inhalt die Werthe

$$\Delta \cos(h, x) = \Delta_x \cos(x, x').$$

Entsprechend ist, wenn Δ_y und Δ_z eine entsprechende Bedeutung haben,

$$\Delta \cos(h, y) = \Delta_y \cos(y, y'); \; \Delta \cos(h, z) = \Delta_z \cos(z, z').$$

Denkt man sich nun aus den drei Seiten OA = a, OB = b, OC = c ein Parallelepipedum construirt, so findet man, je nachdem man von einer bestimmten Ebene als Basis ausgeht,

$$abc \sin(y, z) \cos(x, x') = abc \sin(x, z) \cos(y, y')$$
$$= abc \sin(x, y) \cos(x, x').$$

Bezeichnen wir den gemeinsamen Faktor von abc durch μ, so ist dem Obigen zufolge

$$\Delta \cos(h, x) = \frac{\Delta_x \mu}{\sin(y, z)},$$

und, wenn man §. 1 herbeizieht,

$$2 \triangle \cos (h, x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} . \mu .$$

Da $2 \triangle \cos (h, y)$ und $2 \triangle \cos (h, z)$ sich ebenso durch eine zweireihige Determinante darstellen lassen, so folgt durch Substitution aus dem eingangs hingestellten Lehrsatze

$$2h \triangle = \mu \left(x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right).$$

Da aber $h\triangle = 3J$ ist, so folgt, indem man das erhaltene Aggregat zu einer Determinante vom dritten Grade zusammmenfasst,

$$6J = \mu \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} .$$

Liegt ein Eckpunkt der dreiseitigen Pyramide nicht im Ursprung des Systemes, sondern kommen ihm die Coordinaten x_0, y_0, z_0 zu, so ist

$$6J = \mu \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} .$$

Die für das Dreikant OABC charakteristische Grösse μ wurde von v. Staudt[8]) als Eckensinus in die Raumgeometrie eingeführt und durch das Symbol sin (xyz) bezeichnet. Für den gewöhnlichen Sinus eines von zwei Geraden x und y gebildeten Winkels gilt bekanntlich die Relation

$$\sin^2 (x, y) = 1 - \cos^2 (x, y) = \begin{vmatrix} 1 & \cos (x, y) \\ \cos (x, y) & 1 \end{vmatrix} ,$$

und hieraus lässt sich nach Analogie auch auf das Bestehen der folgenden schliessen [9]):

$$\sin^2 (x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & \cos (x, y) & \cos (x, z) \\ \cos (x, y) & 1 & \cos (y, z) \\ \cos (x, z) & \cos (y, z) & 1 \end{vmatrix} .$$

In der That aber geht aus dem, was oben über die Bedeutung des Eckensinus bemerkt ist, unmittelbar die Richtigkeit der Gleichung hervor:

$$\sin^2 (x, y, z) = \sin^2(x, y) \sin^2 (y, z) - (\cos (z, x) - \cos (x, y) \cos (y, z))^2,$$

und hier lässt sich die rechte Seite sofort in Form jener symmetrischen Determinante dritten Grades schreiben.

Nicht uninteressant ist es, die Inhaltsformel des Tetraëders für den Fall zu adaptiren, wo die Coordinaten der Ecken nicht direkt vorliegen, sondern lediglich die Gleichungen der vier Begrenzungs-Ebenen:

$$a_i x + b_i y + c_i z + d_i = 0 \ (i = 1, 2, 3, 4).$$

Berechnet man aus ihnen die Coordinaten der Durchschnittspunkte, so wird

$$x_i = \frac{A_i}{D_i}, \quad y_i = \frac{B_i}{D_i}, \quad z_i = \frac{C_i}{D_i} (i = 1, 2, 3, 4),$$

wo denn die 16 Grössen A_i, B_i, C_i, D_i die sechzehn möglichen ersten Unterdeterminanten von $\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4$ darstellen. Setzen wir dieselben in der obigen Formel ein, so wird

$$6J = \frac{\mu \Sigma \pm A_1 B_2 C_3 D_4}{D_1 D_2 D_3 D_4},$$

und da die hier im Zähler erscheinende Determinante nach Kap. III. §. 3 der erstgenannten adjungirt ist, so folgt zum Schluss nach gleichem Paragraph

$$6J = \frac{\mu (\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4)^3}{D_1 D_2 D_3 D_4}.$$

Diese durch Einfachheit sich auszeichnende Entwickelung rührt von Studnička [10]) her.

§. 4. In diesem Abschnitt sollen einige bemerkenswerthe Anwendungen der Determinantenlehre auf analytische Geometrie vorgetragen werden. Als einer der wichtigsten Sätze der Curvenlehre gilt der, dass die sogenannten Kegelschnitte sowohl als Punkt- wie als Tangentengebilde eine Gleichung vom zweiten Grade ergeben, d. h. dass sowohl ihre Ordnungszahl als auch ihre Classenzahl 2 ist. Den Beweis für diese Fundamentaleigenschaft führen wir nach Heger [11]) *). Die Gleichung der Curve sei in homogenen Punkt- und Liniencoordinaten resp. diese:

$$f \equiv a_{1,1} x_1^2 + 2a_{1,2} x_1 x_2 + 2a_{1,3} x_1 x_3 + a_{2,2} x_2^2 + 2a_{2,3} x_2 x_3 + a_{3,3} x_3^2 = 0,$$
$$\varphi \equiv \alpha_{1,1} u_1^2 + 2\alpha_{1,2} u_1 u_2 + 2a_{1,3} u_1 u_3 + \alpha_{2,2} u_2^2 + 2\alpha_{2,3} u_2 u_3 + \alpha_{3,3} u_3^2 = 0.$$

Steht eine Tangente um r vom sogenannten „Fixpunkt" des Systemes ab und versteht man unter A einen unbestimmten Coëfficienten, unter h_1, h_2, h_3 die Höhen des Fundamentaldreiecks, so gelten zunächst nach den für das Tangentenziehen bestehenden Gesetzen die Gleichungen:

$$1)\ f'_1 - Ar \frac{u_1}{h_1} = 0, \quad 2)\ f'_2 - Ar \frac{u_2}{h_2} = 0, \quad 3)\ f'_3 - Ar \frac{u_3}{h_3} = 0;$$

$$\text{I.)}\ \varphi'_1 - A \frac{x_1}{h_1} = 0, \quad 2)\ \varphi'_2 - A \frac{x_2}{h_2} = 0, \quad \text{II.)}\ \varphi'_3 - A \frac{x_3}{h_3} = 0.$$

Hiezu tritt dann noch das erstemal die Gleichung des Tangentialpunktes, das anderemal diejenige der Berührungslinie selbst, nämlich:

$$4)\ \frac{u_1}{h_1} x'_1 + \frac{u_2}{h_2} x'_2 + \frac{u_3}{h_3} x'_3 = 0; \quad \text{IV.)}\ \frac{rx_1}{h_1} u'_1 + \frac{rx_2}{h_2} u'_2 + \frac{rx_3}{h_3} u'_3 = 0.$$

Damit die vier bezüglich durch deutsche und römische Ziffern charakterisirten linearen Gleichungen coëxistiren können, muss je eine Bedingungsgleichung bestehen; nach Kap. IV. §. 3 hat man resp. $(a_{i,k} = a_{k,i})$

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \frac{u_3}{h_3} \\ \frac{u_1}{h_1} & \frac{u_2}{h_2} & \frac{u_3}{h_3} & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \frac{x_1}{h_1} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \frac{x_2}{h_2} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \frac{x_3}{h_3} \\ \frac{x_1}{h_1} & \frac{x_2}{h_2} & \frac{x_3}{h_3} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

*) Die Heger'schen Dreieckscoordinaten unterscheiden sich von sonst üblichen Systemen dadurch, dass der Quotient der Streckenverhältnisse stets der gleiche ist.

Der blosse Anblick dieser Determinanten lehrt, dass jede von ihnen für u und x vom zweiten Grade ist, und damit ist der Beweis für unsere Behauptung erbracht.

Die abgegrenzte dreireihige Determinante heisst Discriminante des Kegelschnittes; verschwindet sie identisch, so zerfällt der Kegelschnitt in zwei gerade Linien. Mit Rücksicht auf diese Terminologie kann man sagen:

Die Gleichungen einer Curve zweiter Ordnung kann man aus der Discriminante dadurch erhalten, dass man diese letztere mit den durch die Höhen des Fundamentaldreieckes dividirten Coordinaten rändert*). —

Es möge ferner noch an das sogenannte Hauptaxenproblem für eine Fläche zweiter Ordnung erinnert werden. Legt man die Gleichung einer solchen in der Form

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2lyz + 2mxz + 2nxy + d = 0$$

zu Grunde, so hat man der Fläche bereits einen Mittelpunkt beigelegt; es muss drei (auf einander senkrecht stehende) Hauptaxen geben, und es muss (wie u. a. in der mit trefflichen geschichtlichen Bemerkungen ausgestatteten Darstellung Hesse's [12]) nachgesehen werden möge) die cubische Gleichung

$$\begin{vmatrix} a-k & n & m \\ n & b-k & l \\ m & l & c-k \end{vmatrix} = 0$$

drei reelle Wurzeln besitzen. Der Nachweis dieser Eigenschaft ward nun von Kummer [13]), Hesse [14]) und Henrici [15]), in besonderer Einfachheit aber von G. Bauer [16]), dadurch erbracht, dass die Discriminante dieser Gleichung (Kap. IV. §. 9) als eine Summe von vollständigen Quadraten dargestellt wurde. So sehr sich aber die zuletzt erwähnte in die erste Auflage dieses Werkes aufgenommene Methode in vielen Beziehungen empfiehlt, so möchte doch für ein Elementarbuch die kurze rein analytische Demonstration Mansion's [17]) vorzuziehen sein.

Derselbe bildet das Produkt P . Q gleich

$$\begin{vmatrix} a-k & n & m \\ n & b-k & l \\ m & l & c-k \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a+k & n & m \\ n & b+k & l \\ m & l & c+k \end{vmatrix} \equiv \lambda^6 - L\lambda^4 + M\lambda^2 - N = 0,$$

wo L, M, N, wie die direkte Ausrechnung zeigt, positive Grössen sind.

Denkt man sich die für λ^2 cubische Gleichung aufgelöst, so lässt sich die Descartes'sche Regel anwenden, welche besagt [18]): Eine Gleichung besitzt höchstens soviele negative Wurzeln als Zeichenfolgen. In unserer Gleichung kann folglich, da sie ausschliesslich Zeichenwechsel aufweist, kein Wurzelwerth negativ sein. Demnach aber, weil die Wurzeln positiv sind, kann jede der beiden ursprünglichen Gleichungen keine rein imaginären Wurzeln haben. Gesetzt also, die allenfalls vorhandenen complexen Wurzeln trügen die Gestalt $(r + s\sqrt{-1})$, so substituiren wir für a, b, c bezüglich (a — r), (b — r), (c — r); dann haben wir zwei Gleichungen

*) Diess ist ein Beispiel für den erweiterten Gebrauch des Begriffes „Ränderung einer Determinante," auf welchen als in der modernen analytischen Geometrie üblich bereits früher (Kap. II. §. 6) hingewiesen ward.

genau wie die obigen, und es würde sonach für sie das Gleiche gelten. Daraus folgt:

Die cubischen Gleichungen $P = Q = 0$ besitzen ausschliesslich reelle Wurzeln.

Die auf analoge Weise wie P und Q gebildeten Gleichungen besitzen stets eine geometrisch bedeutsame Discriminante; verschwindet dieselbe identisch bei $P = 0$, so hat man es [19]) mit einer Rotationsfläche zu thun, verschwindet sie bei der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda & a_{1,2} & \cdots & a_{1,5} & a_{1,6} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\lambda & \cdots & a_{2,5} & a_{2,6} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{5,1} & a_{5,2} & \cdots & a_{5,5}-\lambda & a_{5,6} \\ a_{6,1} & a_{6,2} & \cdots & a_{6,5} & a_{6,6}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

so besitzt der bezügliche Complex zweiten Grades (Kap. VIII. §. 6) nach Voss [20]) eine doppelt zählende Gerade.

§. 5. Eine weitere interessante Anwendung auf die Geometrie der Kegelschnitte soll den Schluss dieses Kapitels bilden. Es soll bestimmt werden, ob die Durchschnittspunkte einer Geraden und eines durch 5 Punkte festgelegten Kegelschnittes reell oder imaginär seien. Wir nehmen homogene Punktcoordinaten an, so dass also die Coordinaten der gegebenen Punkte folgende sind:

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\ \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3;\ \alpha_4,\ \beta_4,\ \gamma_4;\ \alpha_5,\ \beta_5,\ \gamma_5.$$

Die Gleichungen von Kegelschnitt und Gerade seien:

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2fx_2x_3 + 2gx_3x_1 + 2hx_1x_2 = 0,$$
$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$$

Dann müssen folgende fünf lineare Gleichungen bestehen:

$$a\alpha_i^2 + b\beta_i^2 + c\gamma_i^2 + 2f\beta_i\gamma_i + 2g\gamma_i\alpha_i + 2h\alpha_i\beta_i = 0\ (i = 1, 2, 3, 4, 5);$$

hiezu kommt noch die die Schnittpunkte von Curve und gerader Linie bestimmende Gleichung

$$\begin{vmatrix} a & h & g & A \\ h & b & f & B \\ g & f & c & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Resultante dieser fünf linearen mit der einen quadratischen Gleichung ist nach Kap. V. §. 14 durch die Determinante M gleich

$$\begin{vmatrix} 0 & C_1^2 & B_1^2 & -2B_1C_1 & 0 & 0 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_5^2 \\ C_1^2 & 0 & A_1^2 & 0 & -2C_1A_1 & 0 & \beta_1^2 & \cdots & \beta_5^2 \\ B_1^2 & A_1^2 & 0 & 0 & 0 & -2A_1B_1 & \gamma_1^2 & \cdots & \gamma_5^2 \\ -2B_1C_1 & 0 & 0 & -2A_1^2 & 2A_1B_1 & 2C_1A_1 & 2\beta_1\gamma_1 & \cdots & 2\beta_5\gamma_5 \\ 0 & -2C_1A_1 & 0 & 2A_1B_1 & -2B_1^2 & 2B_1C_1 & 2\gamma_1\alpha_1 & \cdots & 2\gamma_5\alpha_5 \\ 0 & 0 & -2A_1B_1 & 2C_1A_1 & 2B_1C_1 & -2C_1^2 & 2\alpha_1\beta_1 & \cdots & 2\alpha_5\beta_5 \\ \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 & 2\beta_1\gamma_1 & 2\gamma_1\alpha_1 & 2\alpha_1\beta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_5^2 & \beta_5^2 & \gamma_5^2 & 2\beta_5\gamma_5 & 2\gamma_5\alpha_5 & 2\alpha_5\beta_5 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

gegeben. Ist $M = 0$, so ist jene Gerade eine Tangente des Kegelschnittes; ist M positiv, so sind die Durchschnittspunkte imaginär, im entgegengesetzten Falle dagegen reell [21]).

1) Unverzagt, Theorie der goniometrischen und der longimetrischen Quaternionen, Wiesbaden 1876. S. 1 ff. — 2) Biehringer, Ueber schiefe trigonometrische Funktionen und ihre Anwendung, Nördlingen 1877. — 3) Ritsert, Herleitung der Determinante für den Dreiecksinhalt, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 17. Jahrg. S. 518 ff. — 4) Baltzer, Historische Bemerkungen, Leipziger Berichte, 1865. S. 5. — 5) Hankel, Ueber die Vieldeutigkeit der Quadratur und Rektifikation algebraischer Curven, Leipzig 1864. S. 11. — 6) Mansion, Éléments de la théorie des déterminants d'après Baltzer et Salmon, Mons 1875. S. 31. — 7) Baltzer, Ueber den Ausdruck des Tetraëders durch die Coordinaten der Eckpunkte, Leipziger Berichte, 1870. S. 97 ff. — 8) v. Staudt, Ueber die Inhalte der Polyëder und Polygone, Journ. f. d. reine u. angew. Mathem. 24. Band, S. 252 ff. — 9) Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1875. S. 199. — 10) Studnička, Úvod do analytické geometrie v prostoru, V Praze 1874. S. 34 ff. — 11) Heger, Elemente der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten, Braunschweig 1872. S. 40 ff. — 12) Hesse-Gundelfinger, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung, Leipzig 1876. S. 259 ff. — 13) Kummer, Bemerkungen über die cubische Gleichung, durch welche die Hauptaxen der Flächen zweiten Grades bestimmt werden, Journ. f. d. reine u. angew. Mathem., 26. Band, S. 268 ff. — 14) Hesse, Zerlegung der Bedingung für die Gleichheit der Hauptaxen eines auf einer Oberfläche zweiter Ordnung liegenden Kegelschnittes in eine Summe von Quadraten, ibid. 60. Band, S. 305 ff. — 15) Henrici, Bemerkung hiezu, ibid. 64. Band, S. 187 ff. — 16) G. Bauer, Von der Zerlegung der Discriminante der cubischen Gleichung, welche die Hauptaxen einer Fläche zweiter Ordnung bestimmt, in eine Summe von Quadraten, ibid. 71. Band, S. 40 ff. — 17) Mansion, S. 31. — 18) Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis, Jena 1868. S. 370. — 19) Hesse, Raumgeometrie, S. 257. — 20) Voss, Ueber Complexe und Congruenzen, Mathem. Annalen, 7. Band, S. 160. — 21) Versluys, Applications des déterminants à l'algèbre et à la géometrie, Archiv d. Math. u. Phys. 53. Theil, S. 141.

Kapitel VII.

Funktionaldeterminanten.

§. 1. Es seien gegeben n homogene Gleichungen

$$f^1(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0 \ldots f^n(x_1, x_2 \ldots x_n) = 0;$$

wir bilden aus denselben die n^2 möglichen Differentialquotienten und stellen dieselben zu einer Determinante n ten Grades

$$f_x = \begin{vmatrix} \frac{df^1}{dx_1} & \frac{df^2}{dx_1} & \ldots & \frac{df^n}{dx_1} \\ \frac{df^1}{dx_2} & \frac{df^2}{dx_2} & \ldots & \frac{df^n}{dx_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{df^1}{dx_n} & \frac{df^2}{dx_n} & \ldots & \frac{df^n}{dx_n} \end{vmatrix}$$

zusammen, welche von Jacobi [1]) unter dem Namen Funktionaldeterminante in die Wissenschaft eingeführt wurde. Eine kürzere Bezeichnung für dieselbe ist folgende:

$$f_x = \Sigma \pm f_{1,1}\, f_{2,2} \ldots f_{n,n}.$$

Sind die obigen n Gleichungen nicht vollkommen unabhängig, sondern hängen sie durch eine Gleichung $\varphi(f^1, f^2 \ldots f^n) = 0$ unter sich zusammen, so liefert diese Gleichung, partiell nach sämmtlichen darin vorkommenden Unbekannten differentiirt, folgende Gleichungen:

$$\frac{d\varphi}{df^1} \cdot \frac{df^1}{dx_i} + \frac{d\varphi}{df^2} \cdot \frac{df^2}{dx_i} + \ldots + \frac{d\varphi}{df^n} \cdot \frac{df^n}{dx_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \ldots n).$$

Diese Gleichungen sind ihrer Entstehung nach mit einander verträglich, es muss also die Determinante ihres Systemes nach Kap. IV. §. 3 identisch verschwinden. Diess giebt den Satz [2]):

Sind die Funktionen $f^1, f^2 \ldots f^n$ durch irgend eine Relation verbunden, so verschwindet die Funktionaldeterminante des Systemes, und umgekehrt kann man aus dem Verschwinden dieser Determinante auf das Vorhandensein einer solchen Relation schliessen.

Es geht aus dem Vorhergehenden auch zugleich hervor, dass und wie die Funktionaldeterminante nicht bloss in diesem speziellen sondern auch im allgemeinen Falle als Eliminations-Resultat aufzufassen ist. Denn bestimmt man aus dem durch Differentiirung der obigen Gleichungen entstandenen Systeme

$$df^i = f_{i,1}dx_1 + f_{i,2}dx_2 + \ldots + f_{i,n}dx_n \; (i = 1, 2, 3 \ldots n)$$

etwa dx_k, so ist

$$dx_k = \begin{vmatrix} f_{1,1} & \ldots & f_{1,k-1} & df^1 & f_{1,k+1} & \ldots & f_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n,1} & \ldots & f_{n,k-1} & df^n & f_{n,k+1} & \ldots & f_{n,n} \end{vmatrix} : f_x .$$

§. 2. Bisher waren die Funktionen f einfach aus n unabhängig veränderlichen Grössen zusammengesetzt; wir gehen nun einen Schritt weiter und setzen

$$f^1 = \varphi^1(y_1, y_2 \ldots y_n) \ldots f^n = \varphi^n(y_1, y_2 \ldots y_n),$$
$$y_1 = \psi^1(x_1, x_2 \ldots x_n) \ldots y_n = \psi^n(x_1, x_2 \ldots x_n).$$

Differentiirt man beide Systeme von Gleichungen, so erhält man die Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} df^i &= \frac{d\varphi^i}{dy_1}dy_1 + \frac{d\varphi^i}{dy_2}dy_2 + \ldots + \frac{d\varphi^i}{dy_n}dy_n , \\ dy_i &= \frac{d\psi^i}{dx_1}dx_1 + \frac{d\psi^i}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{d\psi^i}{dx_n}dx_n . \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, 3 \ldots n).$$

Aus diesem Systeme von 2n Gleichungen folgt, wenn man den Zusammenhang zwischen f und ψ berücksichtigt, durch Anwendung des Multiplikationsgesetzes zuerst

$$\Sigma \pm \frac{d\psi^1}{dx_1} \ldots \frac{d\psi^n}{dx_n} = \Sigma \pm \frac{d\varphi^1}{dy_1} \ldots \frac{d\varphi^n}{dy_n} \cdot \Sigma \pm \frac{dy_1}{dx_1} \ldots \frac{dy_n}{dx_n}$$

und weiterhin ein Jacobi'scher Lehrsatz [3]):

$$\Sigma \pm \frac{df^1}{dx_1} \ldots \frac{df^n}{dx_n} = \Sigma \pm \frac{df^1}{dy_1} \ldots \frac{df^n}{dy_n} \cdot \Sigma \pm \frac{dy_1}{dx_1} \ldots \frac{dy_n}{dx_n} .$$

§. 3. Während im Vorstehenden y in x und f in y explicite ausgedrückt war, möge jetzt folgende Beziehung stattfinden. Es sei

$$\varphi^1\left(\begin{matrix} f^1 & \ldots & f^n \\ [x_1 \ldots x_n] & & [x_1 \ldots x_n] \end{matrix}\right) = 0 \; \ldots \; \varphi^n\left(\begin{matrix} f^1 & \ldots & f^n \\ [x_1 \ldots x_n] & & [x_1 \ldots x_n] \end{matrix}\right) = 0.$$

Hier ergiebt die Ableitung dieser Gleichungen nach sämmtlichen f folgende Identitäten:

$$\frac{d\varphi^i}{df^1} \cdot \frac{df^1}{dx_i} + \ldots + \frac{d\varphi^i}{df^n} \cdot \frac{df^n}{dx_i} = - \frac{d\varphi^i}{dx_i} \; (i = 1, 2, 3 \ldots n).$$

Setzt man nun

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi^1}{df^1} & \ldots & \frac{d\varphi^1}{df^n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\varphi^n}{df^1} & \ldots & \frac{d\varphi^n}{df^n} \end{vmatrix} = \varphi_f , \quad \begin{vmatrix} \frac{d\varphi^1}{dx_1} & \ldots & \frac{d\varphi^1}{dx_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\varphi^n}{dx_1} & \ldots & \frac{d\varphi^n}{dx_n} \end{vmatrix} = \varphi_x ,$$

so hat man wiederum dem Multiplikationsgesetz zufolge

$$\varphi_f \cdot f_x = (-1)^n \varphi_x .$$

Es steht jedoch ersichtlich auch nichts im Wege, umgekehrt die x als Funktionen der f zu betrachten; dann können wir die eben erhaltene Gleichung so schreiben:

$$\varphi_x : x_f = (-1)^n \varphi_f .$$

Multiplicirt man diese beiden Gleichungen mit einander, so folgt

$$f_x \cdot x_f = (-1)^{2n} = 1.$$

Beispiel. Es sei $\varphi^1 = af^1 + cf^2$, $\varphi^2 = b(f^1)^2 - df^2$, wobei

$$f^1 = x_1 + x_2, \; f^2 = x_1 x_2$$

genommen ist. Dann hat man

$$\varphi_f \cdot f_x = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi^1}{df^1} & \frac{d\varphi^1}{df^2} \\ \frac{d\varphi^2}{df^1} & \frac{d\varphi^2}{df^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{df^1}{dx_1} & \frac{df^1}{dx_2} \\ \frac{df^2}{dx_1} & \frac{df^2}{dx_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ 2bx_1 + 2bx_2 & -d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix}$$

$$= -adx_1 + adx_2 - 2bcx_1^2 + 2bcx_2^2.$$

Der nämliche Werth ergiebt sich aber, wenn man

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi^1}{dx_1} & \frac{d\varphi^1}{dx_2} \\ \frac{d\varphi^2}{dx_1} & \frac{d\varphi^2}{dx_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + cx_2 & a + cx_1 \\ 2bx_1 + (2b - d)x_2 & 2bx_2 + (2b - d)x_1 \end{vmatrix}$$

berechnet.

Drückt man vermittelst der obigen Gleichungen f^1 und f_2 durch x_1 und x_2 aus, so findet sich

$$x_1 = \tfrac{1}{2}\left(f^1 + \sqrt{(f^1)^2 - 4f^2}\right) \quad , \qquad x_2 = \tfrac{1}{2}\left(f^1 - \sqrt{(f^1)^2 - 4f^2}\right),$$

also

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{df^1} & \frac{dx_1}{df^2} \\ \frac{dx_2}{df^1} & \frac{dx_2}{df^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{f^1}{\sqrt{(f^1)^2 - 4f^2}}\right) & \frac{-1}{\sqrt{(f^1)^2 - 4f^2}} \\ \frac{1}{2}\left(1 + \frac{f^1}{\sqrt{(f^1)^2 - 4f^2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{(f^1)^2 - 4f^2}} \end{vmatrix},$$

und diese letztere Determinante hat den Werth

$$\frac{1}{\sqrt{(f^1)^2 - 4f^2}} = \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{(-1)^2}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix}},$$

in Uebereinstimmung mit dem oben gewonnenen Satze.

§. 4. Von besonderer Wichtigkeit erweist sich die Lehre von den Funktionaldeterminanten bei gewissen Problemen der Integralrechnung sowie der höheren Geometrie.

Es sei gegeben das nfache Integral

$$J = \int^{(n)} \Phi_{(x_1 \ldots x_n)} \, dx_1 \ldots dx_n ,$$

und es werde gefordert, anstatt der Veränderlichen $x_1 \ldots x_n$ eine neue Serie variabler Grössen einzuführen, welche mit den früheren durch n Gleichungen

$$x_i = f^i_{(u_1 \ldots u_n)} \quad (i = 1, 2, 3 \ldots n)$$

verknüpft sind. Die betreffende bereits von Jacobi [4]) hergeleitete Transformationsformel entwickeln wir hier nach der Darstellung von Baehr [5]).

Durch Elimination der $(n - 1)$ Variabelen $u_2, u_3 \ldots u_n$ findet man

$$x_1 = F^1_{(u_1, x_2, x_3 \ldots x_n)}.$$

Ebenso ergiebt sich, wenn man u_2 an die Stelle von x_2 treten lässt,

$$x_2 = F^2_{(u_1, u_2, x_3 \ldots x_n)}.$$

So wird das Integral schliesslich folgende Form annehmen:

$$J = \int du_1 \int du_2 \ldots \int du_{n-1} \int \Phi_{(F^1 \ldots F^{n-1}, f^n)} \frac{dF^1}{du_1} \ldots \frac{dF^{n-1}}{du_{n-1}} \frac{df^n}{du_n} du_n.$$

Die Integrationsgrenzen bestimmen sich aus dem Früheren durch die n Gleichungen $x_i = F^i$. Differentiirt man hierauf die Gleichung

$$x_p = f^p_{(u_1 \ldots u_n)} = F^p_{(u_1 \ldots u_p\, x_{p+1} \ldots x_n)}$$

successive nach $x_{p+1}, x_{p+2} \ldots x_n$, so erhält man folgendes System von $(n - p + 1)$ Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_p}{du_p} &= \frac{dF^p}{du_p} + \frac{dF^p}{dx_{p+1}} \cdot \frac{dx_{p+1}}{du_p} + \ldots + \frac{dF^p}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{du_p}, \\
\frac{dx_p}{du_{p+1}} &= \frac{dF^p}{dx_{p+1}} \cdot \frac{dx_{p+1}}{du_{p+1}} + \ldots + \frac{dF^p}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{du_{p+1}}, \\
&\;\;\vdots \\
\frac{dx_p}{du_n} &= \frac{dF^p}{dx_{p+1}} \cdot \frac{dx_{p+1}}{du_n} + \ldots + \frac{dF^p}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{du_n}.
\end{aligned}$$

Die Bedingung für das gemeinsame Bestehen dieser Gleichungen ist nach Kap. IV. §. 3 folgende:

$$\begin{vmatrix}
\frac{dx_p}{du_p} - \frac{dF^p}{du_p} & \frac{dx_{p+1}}{du_p} & \frac{dx_{p+2}}{du_p} & \ldots & \frac{dx_n}{du_p} \\
\frac{dx_p}{du_{p+1}} & \frac{dx_{p+1}}{du_{p+1}} & \frac{dx_{p+2}}{du_{p+1}} & \ldots & \frac{dx_n}{du_{p+1}} \\
\frac{dx_p}{du_{p+2}} & \frac{dx_{p+1}}{du_{p+2}} & \frac{dx_{p+2}}{du_{p+2}} & \ldots & \frac{dx_n}{du_{p+2}} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\frac{dx_p}{du_n} & \frac{dx_{p+1}}{du_n} & \frac{dx_{p+2}}{du_n} & \ldots & \frac{dx_n}{du_n}
\end{vmatrix} = 0.$$

Zerlegt man diese Determinante nach Kap. II. §. 8 in eine Differenz, so resultirt

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_p}{du_p} \cdots \frac{dx_n}{du_p} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{dx_p}{du_n} \cdots \frac{dx_n}{du_n} \end{vmatrix} - \frac{dF^p}{du_p} \begin{vmatrix} \frac{dx_{p+1}}{du_{p+1}} \cdots \frac{dx_n}{du_{p+1}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \frac{dx_{p+1}}{du_n} \cdots \frac{dx_n}{du_n} \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man, um die darin vorkommenden Elemente bestimmt unterscheiden zu können, die beiden hier vorkommenden Funktionaldeterminanten bezüglich durch

$$D(x_p,\ x_{p+1} \ldots x_n);\quad D(x_{p+1},\ x_{p+2} \ldots x_n),$$

so ist der letzten Gleichung zufolge

$$\frac{dF^p}{du_p} = \frac{D(x_p,\ x_{p+1} \ldots x_n)}{D(x_{p+1},\ x_{p+2} \ldots x_n)}.$$

Setzt man hier für p sämmtliche ganzzahlige Werthe zwischen 0 und $(n - 1)$ ein, so erhält man durch deren Multiplikation, indem blos der erste Zähler und der letzte Nenner sich nicht fortheben,

$$\frac{dF^1}{du_1} \cdot \frac{dF^2}{du_2} \cdots \frac{dF^{n-1}}{du_{n-1}} = \frac{D(x_1,\ x_2 \ldots x_n)}{D(x_n)},$$

oder da $D(x_n) = \frac{df^n}{du_n} = \frac{dx_n}{du_n}$ ist,

$$\frac{dF^1}{du_1} \cdot \frac{dF^2}{du_2} \cdots \frac{dF^{n-1}}{du_{n-1}} \cdot \frac{df^n}{du_n} = D(x_1,\ x_2 \ldots x_n).$$

Durch Substitution dieses Werthes für das in der obigen Integralformel vorkommende Produkt ergiebt sich zum Schlusse:

$$J = \int^{(n)} \Phi_{(f^1,\ f^2 \ldots f^n)} \begin{vmatrix} \frac{dx_1}{du_1} & \frac{dx_1}{du_2} & \cdots & \frac{dx_1}{du_n} \\ \frac{dx_2}{du_1} & \frac{dx_2}{du_2} & \cdots & \frac{dx_2}{du_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dx_n}{du_1} & \frac{dx_n}{du_2} & \cdots & \frac{dx_n}{du_n} \end{vmatrix} du_n\, du_{n-1} \ldots du_2 du_1.$$

Ganz analog gestaltet sich die Behandlung, wenn die x nicht explicite in den u ausgedrückt, sondern mit ihnen durch Gleichungen verknüpft sind.

Beispiel 1. In einer Kugel, bezogen auf ein durch den Mittelpunkt gelegtes rechtwinkliges Coordinatensystem, ändert sich die Dichtigkeit so, dass sie in concentrischen Schichten gleich bleibt; für jeden Punkt im Inneren ist dieselbe proportional seiner Entfernung vom Mittelpunkt. Auf den drei Axen x, y, z nimmt man bezüglich drei feste Strecken a, b, c und construirt daraus ein Parallelepiped, dessen Masse bestimmt werden soll.

Ist M diese Masse, ϱ ein Proportionalitätsfaktor, so erhält man offenbar

$$M = \varrho \int_0^a \int_0^b \int_0^c \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz\, dy\, dx.$$

Zur Auswerthung dieses dreifachen Integrales wird man sich mit

Vortheil polarer Coordinaten bedienen, und es sei unsere Aufgabe, dieselben einzuführen.

Zunächst ist, wenn

$$z = u_1 \sin u_2, \; y = u_1 \cos u_2 \sin u_3, \; x = u_1 \cos u_2 \cos u_3$$

gesetzt wird,

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = u_1$$

Ferner hat man

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{du_1} & \frac{dx}{du_2} & \frac{dx}{du_3} \\ \frac{dy}{du_1} & \frac{dy}{du_2} & \frac{dy}{du_3} \\ \frac{dz}{du_1} & \frac{dz}{du_2} & \frac{dz}{du_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u_2 \cos u_3 & -u_1 \sin u_2 \cos u_3 & -u_1 \cos u_2 \sin u_3 \\ \cos u_2 \sin u_3 & -u_1 \sin u_2 \sin u_3 & u_1 \cos u_2 \cos u_3 \\ \sin u_2 & u_1 \cos u_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Diese letztere Determinante lässt sich auf eine sehr einfache Form bringen. Wir setzen u_1^2 und $\cos u_2$ als Faktoren vor die Determinante, multipliciren hierauf die erste Colonne mit $\cos u_2$, die zweite mit $\sin u_2$ und subtrahiren letztere von ersterer; dann wird die Funktionaldeterminante

$$\frac{u_1^2 \cos u_2}{\sin u_2 \cos u_2} \begin{vmatrix} \cos^2 u_2 \cos u_3 & -\cos u_3 & -\sin u_3 \\ \cos^2 u_2 \sin u_3 & \sin u_3 & \cos u_3 \\ \sin u_2 \cos u_2 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

und hieraus folgt nach Kap. II. §. 6 sofort wiederum

$$u_1^2 \cos u_2 \, (-\cos^2 u_3 - \sin^2 u_3) = - u_1^2 \cos u_2.$$

Es ist demnach unser obiges Integral jetzt folgendes geworden:

$$M = \varrho \int_0^{a_1} \int_0^{\varphi(u_1)} \int_0^{\chi(u_1, u_2)} (-u_1^3 \cos u_3) \, du_3 \, du_2 \, du_1 \, .$$

Die Funktionen φ und χ sind den Transformationsgleichungen zu entnehmen; a_1 ist gleich $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Beispiel 2. Bei seinen Untersuchungen über die Bewegung des Aethers in Krystallen hat C. Neumann[6]) der wirklichen Zusammensetzung dieser imponderablen Flüssigkeit eine absolut gleichförmige als fingirt gegenübergestellt. Betrachtet man einen Punkt innerhalb der auf einen bestimmten Punkt bezüglichen Wirkungssphäre des Aethers und bezeichnet mit a, b, c die relativen Coordinaten jenes willkürlichen Punktes in Bezug auf den Mittelpunkt der Kugel, denkt sich ferner die Coordinaten eines Punktes im Normalzustand mit x, y, z und im fingirten Zustand mit

$$x + \xi(x, y, z), \; y + \eta(x, y, z), \; z + \zeta(x, y, z)$$

bezeichnet, so sei

$$\alpha = (1 - \mu)a - \mu_1 b - \mu_2 c, \; \beta = (1 - \nu)\, b - \nu_1 c - \nu_2 a,$$
$$\gamma = (1 - \pi)\, c - \pi_1 a - \pi_2 b,$$

unter $-\mu$, μ_1, $-\mu_2$; $-\nu$, $-\nu_1$, $-\nu_2$; $-\pi$, $-\pi_1$, $-\pi_2$ resp. die partiellen Ableitungen der ξ, η, ζ nach x, y, z, unter α, β, γ resp. die Werthe[7])

$$a + \xi(x+a,\ y+b,\ z+c) - \xi(x,\ y,\ z),$$
$$b + \eta(x+a,\ y+b,\ z+c) - \eta(x,\ y,\ z),$$
$$c + \zeta(x+a,\ y+b,\ z+c) - \zeta(x,\ y,\ z)$$

verstanden. Denkt man sich dann um M herum eine sehr kleine geschlossene Fläche construirt, deren Inhalt je nach dem verschiedenen Zustande des Aethers durch S und Σ ausgedrückt sein möge, so kann man die darin enthaltene Aethermasse M beziehungsweise durch

$$\int\int\int q\, da\, db\, dc = \int\int\int \vartheta\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

darstellen, wenn q und ϑ resp. die Dichtigkeiten des Aethers bedeuten.

Soll q berechnet werden, so dient hiezu die Gleichung unseres Paragraphen:

$$M = \int\int\int \begin{vmatrix} \frac{d\alpha}{da} & \frac{d\alpha}{db} & \frac{d\alpha}{dc} \\ \frac{d\beta}{da} & \frac{d\beta}{db} & \frac{d\beta}{dc} \\ \frac{d\gamma}{da} & \frac{d\gamma}{db} & \frac{d\gamma}{dc} \end{vmatrix} \vartheta\, da\, db\, dc.$$

Vergleicht man die beiden dreifachen Integrale mit einander, so ergiebt sich

$$q = \vartheta \begin{vmatrix} 1-\mu & -\mu_1 & -\mu_2 \\ -\nu_2 & 1-\nu & -\nu_1 \\ -\pi_1 & -\pi_2 & 1-\pi \end{vmatrix},$$

oder, wenn man diese Determinante ausrechnet und blos die linearen Glieder berücksichtigt [8]),

$$q = \vartheta(1 - \mu - \nu - \pi),$$

ein Resultat, aus welchem dann (a. a. O.) interessante physikalische Congruenzen gezogen werden *).

§. 5. Eine wichtige Rolle spielen die Determinanten, welche wir bisher theoretisch betrachtet haben, in der Lehre von der Flächenkrümmung. Soll die Krümmung einer ebenen Curve bestimmt werden, so vergleicht man bekanntlich das Curvenstück in der Nähe des betreffenden Punktes mit dem zu demselben gehörigen Krümmungskreise. Da es eine Krümmungskugel für eine Fläche in diesem Sinne nicht giebt, so hat Gauss [10]) folgendes Auskunftsmittel ersonnen.

Um den Ursprung des (als rechtwinklig vorausgesetzten) Coordinatensystemes construirt man mit der Längeneinheit als Radius eine Kugel. Soll im Punkte x, y, z die Krümmung der Fläche angegeben werden, so denke man sich diesen Punkt als Eckpunkt eines unendlich kleinen Dreiecks $\triangle$ der Fläche, dessen beide andere Ecken durch die Coordinaten

$$x + dx,\quad y + dy,\quad z + dz;\quad x + \delta x,\quad y + \delta y,\quad z + \delta z$$

bestimmt sein mögen. Ferner ziehe man durch den Anfangspunkt eine

*) Ein ausführliches und complicirteres dabei auch in allen Details vollständig durchgerechnetes Beispiel für diese Transformationsart ist von Hoppe [9]) gegeben worden.

Gerade parallel zu der im Punkte x, y, z auf der Fläche errichteten Normalen; dieselbe schneidet die Einheitskugel in einem Punkte ξ, η, ζ, der mit den beiden Punkten

$$\xi + d\xi,\ \eta + d\eta,\ \zeta + d\zeta;\quad \xi + \delta\xi,\ \eta + \delta\eta,\ \zeta + \delta\zeta$$

ein unendlich kleines sphärisches Dreieck $\triangle'$ bestimmt. Der Bruch $k = \frac{\triangle'}{\triangle}$ bezeichnet nun Gauss (s. o.) als Krümmungsmass der Fläche im Punkte x, y, z; um denselben analytisch auszudrücken, hat Baltzer [11]) das im Folgenden geschilderte elegante Verfahren angegeben.

Projicirt man die beiden Dreiecke $\triangle$ und $\triangle'$ orthogonal auf die xy Ebene und bezeichnet mit φ und φ' die Winkel, welche die in den Punkten x, y, z und ξ, η, ζ bezüglich an Fläche und Kugel gelegten Berührungsebenen mit jener Axen-Ebene bilden, so ist nach einem bekannten Satze, unter $\triangle_1$ und $\triangle'_1$ die Flächeninhalte der Projektionen verstanden,

$$\triangle'_1 = \triangle' \cos\varphi',\quad \triangle_1 = \triangle \cos\varphi.$$

Nun sind aber der Construktion gemäss die Winkel φ und φ' einander gleich; es ist somit das Krümmungsmass

$$k = \frac{\triangle'_1}{\triangle_1}.$$

Nach Kap. VI. §. 1 hat man

$$\triangle_1 = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} dx & \delta x \\ dy & \delta y \end{vmatrix},\quad \triangle'_1 = \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix} d\xi & \delta\xi \\ d\eta & \delta\eta \end{vmatrix},$$

sodass k den Werth

$$\begin{vmatrix} d\xi & \delta\xi \\ d\eta & \delta\eta \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} dx & \delta x \\ dy & \delta y \end{vmatrix}.$$

annimmt. Da ferner ξ und η Funktionen von x und y sind, so ist

$$d\xi = \frac{d\xi}{dx}\,dx + \frac{d\xi}{dy}\,dy,\quad d\eta = \frac{d\eta}{dx}\,dx + \frac{d\eta}{dy}\,dy.$$

Bringt man jetzt §. 2 zur Anwendung, so fliesst hieraus die Relation

$$\begin{vmatrix} d\xi & \delta\xi \\ d\eta & \delta\eta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d\xi}{dx} & \frac{d\xi}{dy} \\ \frac{d\eta}{dx} & \frac{d\eta}{dy} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} dx & \delta x \\ dy & \delta y \end{vmatrix},$$

so dass mithin k als die Funktionaldeterminante

$$\frac{d\xi}{dx}\cdot\frac{d\eta}{dy} - \frac{d\xi}{dy}\cdot\frac{d\eta}{dx}$$

gefunden ist.

Setzt man nach Euler's Vorgang, wenn $z = f_{(x,y)}$ die Flächengleichung ist,

$$\frac{dz}{dx} = p,\quad \frac{dz}{dy} = q,\quad \frac{d^2z}{dx^2} = r,\quad \frac{d^2z}{dxdy} = s,\quad \frac{d^2z}{dy^2} = t,$$

so lässt sich leicht zeigen, dass

$$\xi = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad \eta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}},\quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

ist. Nach §. 2 kann man

$$\begin{vmatrix} \frac{d\xi}{dx} & \frac{d\xi}{dy} \\ \frac{d\eta}{dy} & \frac{d\eta}{dx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{d\xi}{dp} & \frac{d\xi}{dq} \\ \frac{d\eta}{dp} & \frac{d\eta}{dq} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{dp}{dx} & \frac{dp}{dy} \\ \frac{dq}{dx} & \frac{dq}{dy} \end{vmatrix}$$

setzen. Die zweite Determinante rechts des Gleichheitszeichens ist gleich

$$\frac{d^2z}{dx^2} \cdot \frac{d^2z}{dy^2} - \frac{d^2z}{dx\,dy} \cdot \frac{d^2z}{dy\,dx} = rt - s^2,$$

so dass k auch durch den Bruch

$$\frac{rt - s^2}{(p^2 + q^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

ausgedrückt wird [12]).

Die Differentialgleichung aller in eine Ebene ausbreitbaren Flächen ist bekanntlich $rt - s^2 = 0$ [13]); es ergiebt sich also aus dem Gesagten, dass den abwickelbaren Flächen ausnahmslos das Krümmungsmass Null zukommt.

Ist k nicht gleich Null, sondern eine constante positive Grösse, so ist die dazugehörige Oberfläche natürlich die Kugel; einem für alle Flächenpunkte gleichbleibenden negativen k entspricht Beltrami's [14]) pseudosphärische Fläche, auf welche sich eine der sogenannten nichteuclidischen vollkommen äquivalente Geometrie begründen lässt.

§. 6. Wir haben soeben gesehen, wie sich k bei Zugrundelegung der zweiten partiellen Differentialquotienten der abhängigen Variablen darstellen lässt; Gauss (s. o.) hat dasselbe auch bezüglich durch die drei Grössen A, B, C; E, F, G darstellen gelehrt, wo

$$A = \begin{vmatrix} \frac{dy}{dp} & \frac{dy}{dq} \\ \frac{dz}{dp} & \frac{dz}{dq} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{dz}{dp} & \frac{dz}{dq} \\ \frac{dx}{dp} & \frac{dx}{dq} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dp} & \frac{dx}{dq} \\ \frac{dy}{dp} & \frac{dy}{dq} \end{vmatrix},$$

$$E = \left(\frac{dx}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dp}\right)^2, \quad F = \frac{dx}{dp} \cdot \frac{dx}{dq} + \frac{dy}{dp} \cdot \frac{dy}{dq} + \frac{dz}{dp} \cdot \frac{dz}{dq},$$

$$G = \left(\frac{dy}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dq}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dq}\right)^2$$

gesetzt ist. Die letztere Formel hat ein besonderes Interesse, weil sie einem vollständigen Quadrate gleich ist, und zwar deshalb, weil nach v. Escherich [15]) die Grösse k einer symmetralen Determinante sechsten Grades mit leerer Diagonale gleichgesetzt werden kann (Kap. III. §. 12). Der andere Ausdruck geht einfach aus dem oben aufgestellten hervor; es findet sich

$$(A^2 + B^2 + C^2)^2 k = \begin{vmatrix} A & B & C \\ \frac{dA}{dp} & \frac{dB}{dp} & \frac{dC}{dp} \\ \frac{dA}{dq} & \frac{dB}{dq} & \frac{dC}{dq} \end{vmatrix}.$$

In neuester Zeit betrachtet es die Mathematik als eine ihrer Hauptaufgaben, geometrische Probleme zu verallgemeinern oder, wie man sich gewöhnlich ausdrückt, auf eine Mannigfaltigkeit von $(n + 1)$ Dimensionen *) auszudehnen. Wir wollen nun zusehen, wie der im vorigen Paragraphen aufgestellte Begriff des Krümmungsmasses sich für eine solche Mannigfaltigkeit, die man wohl auch als Riemann'schen Raum [16]) bezeichnet, analytisch fixiren lässt. Wir geben jedoch hier **) nur die bemerkenswerthesten Resultate im Anschluss an die die Hauptpunkte der Frage übersichtlich zusammenstellende Abhandlung von Beez [17]).

Je nachdem die Flächenmannigfaltigkeit vom n ten Grade durch eine der beiden Gleichungen

$$x_0 = f_{(x_1,\, x_2\, \ldots\, x_n)}\,;\quad F_{(x_0,\, x_1,\, x_2\, \ldots\, x_n)} = 0$$

charakterisirt ist, erhält man für das „Krümmungsmass" K die Relationen

$$K = \frac{(-1)^n}{s^{n+2}} \begin{vmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & \ldots & f_{1,n} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & \ldots & f_{2,n} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & \ldots & f_{3,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n,1} & f_{n,2} & f_{n,3} & \ldots & f_{n,n} \end{vmatrix},\quad K = -\frac{1}{S^{n+2}} \begin{vmatrix} 0 & F_0 & F_1 & \ldots & F_n \\ F_0 & F_{0,0} & F_{0,1} & \ldots & F_{0,n} \\ F_1 & F_{1,0} & F_{1,1} & \ldots & F_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{n,0} & F_{n,1} & \ldots & F_{n,n} \end{vmatrix},$$

wo resp.

$$s^2 = 1 + f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2\,,\ \frac{df}{dx_i} = f_i\,,\ \frac{d^2f}{dx_i dx_k} = f_{i,k},$$

$$S^2 = F_0^2 + F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2,\ \frac{dF}{dx_i} = F_i,\ \frac{d^2F}{dx_i dx_k} = F_{i,k}$$

sein soll.

§. 7. Wir sind durch die letzten Betrachtungen auf symmetrische Funktionaldeterminanten geführt worden; jetzt wollen wir uns dieser Untersuchung eingehender zuwenden. Mit Beibehaltung der bisherigen Bezeichnungsweise finden wir sofort $f_{i,k} = f_{k,i}$, d. h. Die Funktionaldeterminante wird symmetrisch (Kap. III. §. 6).

Wir bezeichnen nach dem Vorgang englischer Mathematiker, insbesondere Sylvester's, jede solche Determinante als Hesse'sche Determinante (the Hessian). Dieselbe ist einerseits die Determinante der zweiten Differentialquotienten, andererseits die Funktionaldeterminante der ersten Differentialquotienten.

Von dieser neuen Form lässt sich zunächst folgende wichtige Eigenschaft angeben:

Transformirt man die gegebene Funktion $f_{(x_1,\, x_2\, \ldots\, x_n)}$ durch die linearen Substitutionen

$$x_i = a_{i,1}\, y_1 + a_{i,2}\, y_2 + \ldots + a_{i,n}\, y_n \quad (i = 1, 2, 3 \ldots n)$$

---

*) Hier erscheint also das dem Punkt unseres euclidischen (ebenen) Raumes entsprechende Element durch $(n + 1)$ unter sich vollkommen unabhängige Grössen (Coordinaten) bestimmt. Eine Bedingungsgleichung scheidet das Analogon unserer Fläche aus.

**) Im Gegensatze zur ersten Auflage. Die daselbst gegebene eingehende Diskussion erschien bei reiflicherer Erwägung als für ein Elementarbuch zu weitgehend.

in die Form $f_{(y_1, y_2 \dots y_n)}$, so wird, unter $H(f_x)$ und $H(f_y)$ die Hesse'schen Determinanten der ursprünglichen und der transformirten Form verstanden,

$$H(f_y) = H(f_x)\,(\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{n,n})^2.$$

Wir wollen diese letztere Determinante mit $\triangle$ bezeichnen. Nun ist nach Sätzen der Differentialrechnung

$$\frac{d^2f}{dy_i dy_k} = \frac{d^2f}{dy_i dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dy_k} + \frac{d^2f}{dy_i dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dy_k} + \dots + \frac{d^2f}{dy_i dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dy_k}.$$

Die Transformationsgleichungen liefern die Relation

$$\frac{dx_h}{dy_m} = \frac{d\triangle}{da_{h,m}};$$

diess oben eingesetzt giebt

$$\frac{d^2f}{dy_i dy_k} = \frac{d^2f}{dy_i dx_1} \cdot \frac{d\triangle}{da_{1,k}} + \frac{d^2f}{dy_i dx_2} \cdot \frac{d\triangle}{da_{2,k}} + \dots + \frac{d^2f}{dy_i dx_n} \cdot \frac{d\triangle}{da_{n,k}}.$$

Nach dem Multiplikationssatze folgt hieraus

$$1)\ H(f_y) = \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dy_1 dx_1} & \frac{d^2f}{dy_1 dx_2} & \dots & \frac{d^2f}{dy_1 dx_n} \\ \frac{d^2f}{dy_2 dx_1} & \frac{d^2f}{dy_2 dx_2} & \dots & \frac{d^2f}{dy_2 dx_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^2f}{dy_n dx_1} & \frac{d^2f}{dy_n dx_2} & \dots & \frac{d^2f}{dy_n dx_n} \end{vmatrix} \cdot \triangle = \triangle' \cdot \triangle.$$

Es gilt aber auch die Gleichung

$$\frac{df}{dy_i} = \frac{df}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dy_i} + \frac{df}{dx_2} \cdot \frac{dx_2}{dy_i} + \dots + \frac{df}{dx_n} \cdot \frac{dx_n}{dy_i},$$

oder, mit Rücksicht auf die oben für $\frac{dx_h}{dy_m}$ gefundene Relation,

$$\frac{df}{dy_i} = \frac{df}{dx_1} \cdot \frac{d\triangle}{da_{1,i}} + \frac{df}{dx_2} \cdot \frac{d\triangle}{da_{2,i}} + \dots + \frac{df}{dx_n} \cdot \frac{d\triangle}{da_{n,i}}.$$

Wird diese Gleichung nochmals partiell nach x_k differentiirt, so ergiebt sie diese:

$$\frac{d^2f}{dy_i dy_k} = \frac{d^2f}{dx_1 dx_k} \cdot \frac{d\triangle}{da_{1,i}} + \frac{d^2f}{dx_2 dx_k} \cdot \frac{d\triangle}{da_{2,i}} + \dots + \frac{d^2f}{dx_n dx_k} \cdot \frac{d\triangle}{da_{n,i}}.$$

Stellt man also jetzt auch alle zweiten Differentialquotienten zu einer Determinante zusammen und bedient sich des Multiplikationssatzes, so erhält man

$$2)\ \triangle' = \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dx_1^2} & \frac{d^2f}{dx_1 dx_2} & \dots & \frac{d^2f}{dx_1 dx_n} \\ \frac{d^2f}{dx_2 dx_1} & \frac{d^2f}{dx_2^2} & \dots & \frac{d^2f}{dx_2 dx_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^2f}{dx_n dx_1} & \frac{d^2f}{dx_n dx_2} & \dots & \frac{d^2f}{dx_n^2} \end{vmatrix} \cdot \triangle = H(f_x).\ \triangle.$$

Die Multiplikation der Gleichungen 1) und 2) führt schliesslich zu dem in der Behauptung aufgestellten Satze [18]:

$$H(f_y) = H(f_x) \cdot \triangle^2.$$

§. 8. Von besonderem Interesse wird die Diskussion der Hesse'schen Determinante dann, wenn die Funktion f eine homogene ist. Bezeichnen wir die vorkommenden Grössen wie bisher und nehmen an, die Funktion sei vom mten Grade, so lehrt uns der berühmte von Euler [19]) gefundene Lehrsatz, dass

$$mf = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots f_n x_n$$

ist. Setzen wir für f nacheinander die Werthe $f_1, f_2 \ldots f_n$ ein, so gelangen wir zu folgendem Systeme von Gleichungen:

$$(m-1)\, f_i = f_{i,1}\, x_1 + f_{i,2}\, x_2 + \ldots + f_{i,n}\, x_n \quad (i = 1, 2, 3 \ldots n).$$

Die Determinante dieses Systemes ist identisch mit der Hesse'schen Determinante der Funktion $f_{(x_1,\, x_2 \ldots x_n)}$.

Nehmen wir zu diesem Systeme noch die erste Euler'sche Gleichung hinzu und bringen Alles auf Null, so restirt uns ein System von $(n + 1)$ homogenen Gleichungen; damit dasselbe ein mögliches sei, muss nach Kap. IV. §. 3

$$R = \begin{vmatrix} mf & f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ (m-1)f_1 & f_{1,1} & f_{1,2} & \ldots & f_{1,n} \\ (m-1)f_2 & f_{2,1} & f_{2,2} & \ldots & f_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (m-1)f_n & f_{n,1} & f_{n,2} & \ldots & f_{n,n} \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} \frac{m}{m-1} f & f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1 & f_{1,1} & f_{1,2} & \ldots & f_{1,n} \\ f_2 & f_{2,1} & f_{2,2} & \ldots & f_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & f_{n,1} & f_{n,2} & \ldots & f_{n,n} \end{vmatrix} = 0$$

sein. Durch Zerlegung dieser letzten Determinante erhalten wir

$$\begin{vmatrix} \frac{m}{m-1} & f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ 0 & f_{1,1} & f_{1,2} & \ldots & f_{1,n} \\ 0 & f_{2,1} & f_{2,2} & \ldots & f_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & f_{n,1} & f_{n,2} & \ldots & f_{n,n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1 & f_{1,1} & f_{1,2} & \ldots & f_{1,n} \\ f_2 & f_{2,1} & f_{2,2} & \ldots & f_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_n & f_{n,1} & f_{n,2} & \ldots & f_{n,n} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{m}{m-1}\, f\, H(f_x) + \mathop{S}_{i=1}^{i=n} \mathop{S}_{k=1}^{k=n} f_i\, f_k \frac{dH(f_x)}{df_{i,k}} = 0.$$

Bildet man zu der verschwindenden Determinante R nach Kap. III. §. 3 die adjungirte Determinante, so ist dieselbe gleich R^{m-1}, also ebenfalls gleich Null. Diese sei ϱ; ist dann noch $\frac{dR}{df_{i,k}} = F_{i,k}$, $\frac{dR}{df_q} = F_q$, so besteht die Gleichung

$$\varrho = \begin{vmatrix} H(f_x) & F_1 & F_2 & \ldots & F_n \\ F_1 & F_{1,1} & F_{1,2} & \ldots & F_{1,n} \\ F_2 & F_{2,1} & F_{2,2} & \ldots & F_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ F_n & F_{n,1} & F_{n,2} & \ldots & F_{n,n} \end{vmatrix} = 0.$$

Da die einer symmetrischen Determinante adjungirte Determinante diesen Charakter der Symmetrie beibehalten muss, so ist $F_{i,k} = F_{k,i}$.

Nach Kap. IV. §. 3 verhalten sich ferner bei einem Systeme homogener Gleichungen die Unbekannten wie die ersten Unterdeterminanten der Determinante des Systemes, d. h. es besteht die Proportion:

$$-(m-1) : x_1 : x_2 : \ldots : x_n = \frac{dR}{df_i} : \frac{dR}{df_{i,1}} : \frac{dR}{df_{i,2}} : \ldots : \frac{dR}{df_{i,n}},$$

und mit Rücksicht auf unsere Bezeichnungsweise

$$\begin{aligned} -(m-1) : x_1 : x_2 : \ldots : x_n &= H\,^{*)} : F_{i,1} : F_{i,2} : \ldots : F_{i,n} \\ &= H : F_1 : F_2 : \ldots : F_n. \end{aligned}$$

So ist denn also

$$F_i = -\frac{x_i}{m-1} H, \quad F_{i,k} = \frac{x_i\, x_k}{(m-1)^2} H.$$

Die letzterhaltene Gleichung erlangt besondere Bedeutung durch den glücklichen Gebrauch, welchen in der Lehre von den algebraischen Curven und Oberflächen Hesse [20]) von ihr gemacht hat.

§. 9. Es sei nämlich $f_{(x,\,y)} \equiv f_{(x_1,\,x_2,\,x_3)} = 0$ die Gleichung einer beliebigen algebraischen Curve beziehungsweise in rechtwinkligen und homogenen Coordinaten. Das Krümmungsmass ist in diesem Falle identisch mit dem reciproken Werthe des Krümmungshalbmessers r, welcher nach bekannten Sätzen der Curvenlehre den Werth

$$\frac{\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2f}{dx^2}\left(\frac{df}{dy}\right)^2 - 2\,\frac{d^2f}{dx\,dy}\,\frac{df}{dx}\,\frac{df}{dy} + \frac{d^2f}{dy^2}\left(\frac{df}{dx}\right)^2}$$

besitzt. Schreibt man den Nenner in Form einer dreireihigen Determinante, so erhält man nach einer in die Augen fallenden Umformung und nachdem 0 durch m $f_{(x,\,y)}$ ersetzt ist — diese Funktion von m ten Grade angenommen —

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{(m-1)\left[\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} \frac{d^2f}{dx^2} & \frac{d^2f}{dx\,dy} & (m-1)\,\frac{df}{dx} \\ \frac{d^2f}{dy\,dx} & \frac{d^2f}{dy^2} & (m-1)\,\frac{df}{dy} \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & mf \end{vmatrix};$$

geht man zu homogenen Coordinaten über, so resultirt **)

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{(m-1)^2\,(f_1^2 + f_2^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{vmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} \end{vmatrix},$$

*) H kürzer statt $H(f_x)$.

**) Man bemerkt, dass sich dieser Ausdruck auch aus der oben (§. 6) reproducirten (Kronecker'schen) Formel für das Krümmungsmass einer n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit als spezieller Fall hätte herleiten lassen.

oder mit Rücksicht auf §. 8

$$\frac{1}{r} = \frac{H}{(m-1)^2}.$$

Um von der homogenen auf die cartes'sche Form überzugehen, hat man nur nach vollzogener Differentiation $x_3 = 1$ zu setzen.

Nehmen wir nun an, es sei die Krümmung in einem Wende-(Inflexions)-punkt zu untersuchen. In einem solchen Falle hat bekanntlich die Tangente nicht mehr blos zwei sondern drei Nachbarpunkte mit der Curve gemein; der Krümmungskreis degenerirt in eine Gerade, und es wird $r = \infty$, $H = 0$. Jedes Element der Hesse'schen Determinante ist nun homogen vom Grade $(m-2)$; der ganzen Determinante kommt daher der Grad $3(m-2)$ zu, und wir erhalten folgendes wichtige Resultat:

Die sämmtlichen Wendepunkte einer Curve vom mten Grade liegen auf einer Curve vom $(3m-6)$ten Grade, der sogenannten Inflexionscurve, deren Gleichung man findet, indem man die Hesse'sche Determinante der ursprünglichen Curve gleich Null setzt. Die Anzahl der vorhandenen Wendepunkte ist $3m(m-2)$.

Anlässlich dieser ihrer geometrischen Bedeutung bezeichnet man die Hesse'sche Determinante wohl auch als Inflexionsdeterminante.

Beispiel 1. Ein jeder Kegelschnitt hat die Gleichung

$$mx^2 + ny^2 + pxy + qx + ry + s = 0.$$

Setzt man hier $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, so bekommt man die homogene Form

$$mx_1^2 + nx_2^2 + px_1x_2 + qx_1x_3 + rx_2x_3 + sx_3^2 = 0,$$

und die Hesse'sche Curve hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 2m & p & q \\ p & 2n & r \\ q & r & 2s \end{vmatrix} = 0.$$

Da hier auf der linken Seite weder x noch y auftritt, so ist im Allgemeinen ein Wendepunkt nicht vorhanden; nur wenn die — offenbar mit der Discriminante (Kap. IV. §. 4) des Kegelschnittes identische — Determinante identisch sich annullirt, giebt es unendlich viele Wendepunkte. Es ist eben dann die Curve in zwei Gerade zerfallen.

Beispiel 2. Der folgende instruktive Fall rührt von Bammert her [21]). Die Curve sei in unseren beiden Systemen bezüglich

$$x^3 - 3ax^2 + c^2y = 0 \quad ; \quad x_1^3 - 3ax_1^2x_3 + c^2x_2x_3^2 = 0.$$

Dann ist die Hesse'sche Determinante

$$\begin{vmatrix} 6(x_1 - ax_3) & 0 & -6ax_1 \\ 0 & 0 & 4c^2x_3 \\ -6ax_1 & 4c^2x_3 & 4c^2x_2 \end{vmatrix}.$$

Setzt man dieselbe gleich Null und nimmt wiederum $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, so ergiebt sich nachstehende Gleichung der Inflexionscurve:

$$96\, c^4\, (x - a) = 0.$$

Der einzige vorhandene Wendepunkt liegt sonach auf einer der Ordinatenaxe parallelen Geraden; um seine Ordinate zu finden, muss man die Inflexionscurve mit der gegebenen Curve zum Durchschnitt bringen, d. h. in der Gleichung der letzteren $x = a$ setzen. Diess liefert $y = \frac{2a^3}{c^2}$.

Beispiel 3. Ein drittes Beispiel sei nach Dölp[22]) folgendes. Gegeben die Curve

$$x^3 + y^3 + 6axy + 1 = 0;\ x^3 + y^3 + 6axyz + z^3 = 0.$$

Man findet als Gleichung der Hesse'schen Curve

$$6^3 \begin{vmatrix} x & az & ay \\ az & y & ax \\ ay & ax & z \end{vmatrix} = xyz\,(1 + 2a^3) - a^2(x^3 + y^3 + z^3) = 0.$$

Diese Gleichung wird offenbar befriedigt, wenn $x = y = z = 0$ ist, d. h. es liegt ein Wendepunkt im Unendlichen. Um die beiden anderen zu eruiren, setze man $z = 1$ und subtrahire die so transformirte Gleichung von der ursprünglichen; es bleibt eine Gleichung von der Form $0 = Mxy$; also sind zwei Wendepunkte durch die Coordinaten

$$x = 0,\ y = -1;\quad x = -1,\ y = 0$$

gegeben. Construirt man sonach die durch die Gleichung $y + x + 1 = 0$ repräsentirte Gerade, so liegen auf ihr die drei Wendepunkte, nämlich zwei in ihren Durchschnitten mit den Axen, der dritte in der Unendlichkeit.

Dieses letztere Resultat lässt sich dahin erweitern, dass allgemein die drei reellen Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung ein und derselben Geraden angehören; die übrigen $(9 - 3 = 6)$ Wendepunkte, welche nach Obigem stets vorhanden sein müssen, sind imaginär[23]). *)

§. 10. Gehen wir nun zu den Flächen über, so finden wir mit Rücksicht auf die beiden Fundamentalformeln in §. 6 ebenso, dass bezüglich für die beiden Gleichungsformen

$$f_{(x,\,y,\,z)} = 0\ ;\quad f_{(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4)} = 0$$

das Krümmungsmass durch die beiden Ausdrücke

$$K = \mu \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} \\ f_2 & f_{2,1} & f_{2,3} & f_{2,3} \\ f_3 & f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} \end{vmatrix} \quad \text{und } K = \nu \begin{vmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & f_{1,3} & f_{1,4} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & f_{2,3} & f_{2,4} \\ f_{3,1} & f_{3,2} & f_{3,3} & f_{3,4} \\ f_{4,1} & f_{4,2} & f_{4,3} & f_{4,4} \end{vmatrix}$$

gegeben ist. Um die durch das Verschwinden dieser Determinanten bedingten geometrischen Bedingungen klar zu übersehen, möge an Folgendes erinnert werden.

In unmittelbarer Nähe eines Punktes kann jede Fläche als mit einer Fläche zweiten Grades zusammenfallend angesehen werden. Um die Krümmungsverhältnisse in einem willkürlichen Punkte zu studiren, betrachtet man mit Dupin[24]) eine der Tangentialebene jenes Punktes pa-

---

*) Damit stimmt auch Beispiel 2. Hier sind nur zwei Wendepunkte, welche im Allgemeinen getrennte Lagen im Endlichen einnehmen, in einen doppelt zählenden unendlich entfernten Punkt zusammengefallen.

rallele unendlich wenig von ihr abstehende Ebene. Dieselbe schneidet die zu Hülfe genommene Quadrifläche und damit auch die Fläche selbst im Allgemeinen in einem Kegelschnitte, der Indicatrix, und je nachdem dieser Schnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, hat man nach Dupin einen elliptischen, parabolischen oder hyperbolischen Flächenpunkt. Eine Ausnahme tritt dann ein, wenn eine Fläche durch ihre Tangentialebene nicht in einem einzelnen Punkte, sondern längs einer Curve berührt wird, denn dann ist die Indicatrix selbst nicht von verschwindend kleinen Dimensionen. Diess trifft z. B. bei einem körperlichen Kreisring oder Torus zu, wenn die Berührungsebene senkrecht zur Rotationsaxe steht; hier ist die Indicatrix stets ein Kreis von angebbarem Halbmesser.

Ein ausschliesslich hyperbolischer und ein ausschliesslich elliptisch gekrümmter Theil der Fläche werden durch eine (continuirliche) Linie parabolischer Punkte geschieden. In diesen Punkten ist also die Fläche krümmungslos, das Mass K ihrer Krümmung ist Null, und wir können also mit Salmon [25]) sagen:

Die Punkte der Krümmung Null einer algebraischen Fläche mter Ordnung, d. h. die parabolischen Punkte derselben, liegen auf einer durch das Verschwinden der Hesse'schen Determinante charakterisirten Fläche von der Ordnungszahl $4(m-2)$.

Diese Fläche führt den Namen: Hesse'sche Fläche. Versteht man ferner unter h den Grad jener homogenen Funktionen, aus denen als Elementen die jener ersten adjungirte Determinante sich zusammensetzt, so gilt:

Durch das Verschwinden der der Hesse'schen adjungirten Determinante sind $3h(h-2)$ Rückkehr — oder Cuspidalpunkte bedingt, welche auf einer Curve der hten Classe liegen — diess sind Punkte, in welchen das Mass der Krümmung einen unendlich grossen Werth annimmt.

Beispiel. Es steht nach unserer Definition des Wortes „parabolischer Punkt" zu erwarten, dass jede developpable Fläche ausschliesslich solche Punkte aufweise. Das soll auch analytisch erhärtet werden. Bezeichnet man die ersten und zweiten Differentialquotienten von z nach x und y in der in §. 5 normirten (Euler'schen) Weise, so kann man, um von diesen Ausdrücken zu den Differentialquotienten der impliciten Form überzugehen, nach Salmon (s. o.) folgendes leicht verificirbare System von Gleichungen benützen:

$$f_1 + pf_3 = 0, \quad f_2 + qf_3 = 0,$$
$$f_{1,1} + 2f_{1,3}\,p + f_{3,3}p^2 = -r\,f_3, \quad f_{2,2} + 2f_{2,3}\,q + f_{3,3}\,q^2 = -tf_3,$$
$$f_{1,2} + pf_{2,3} + qf_{1,3} + pqf_{3,3} = -sf_3.$$

Für eine developpable Fläche ist $p = q = 0$; man hat also

$$f_3 = 1,\ f_1 = f_2 = 0,\ f_{1,1} = -rf_3,\ f_{1,2} = f_{2,1} = -sf_3,\ f_{2,2} = -tf_3,$$
$$f_{1,3} = f_{3,1} = f_{2,3} = f_{3,2} = f_{3,3} = 0,$$

und man erhält somit die Gleichung der Hesse'schen Fläche in nachstehender Form:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & f_3 \\ 0 & -rf_3 & -sf_3 & 0 \\ 0 & -sf_3 & -tf_3 & 0 \\ f_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = rt - s^2 = 0.$$

Die Hesse'sche Determinante hat also denselben Werth wie die linke Seite der auf Null gebrachten Flächengleichung, oder anders ausgedrückt:

Jeder Punkt einer abwickelbaren Fläche ist ein parabolischer.

1) Jacobi, De determinantibus functionalibus, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 22. Band, S. 319 ff. — 2) Ibid. S. 328. — 3) Ibid. S. 341. — 4) Jacobi, De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematibus de transformatione et determinatione integralium mutabilium, ibid. 12. Band, S. 38 ff. — 5) Baehr, Note sur le changement des variables dans les intégrales multiples, Archiv d. Math. u. Phys. 56. Theil, S. 354 ff. — 6) C. Neumann, Ueber die Aetherbewegung in Krystallen, Mathem. Annalen, 1. Band, S. 343. — 7) Ibid. S. 344. — 8) Ibid. S. 349. — 9) Hoppe, Inhalt des Sechsflachs zwischen orthogonalen Flächen zweiten Grades und seiner Seiten, Archiv d. Math. u. Phys. 56. Theil, S. 354 ff. — 10) Gauss, Disquisitiones generales circa superficies curvas, Comment. recent. Gottingn. Tom. VI. — 11) Baltzer, Ableitung der Gauss'schen Formeln für die Flächenkrümmung, Leipziger Berichte 1866, S. 1 ff. — 12) Id. Determinanten, Leipzig 1875. S. 141. — 13) Joachimsthal-Liersemann, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und Linien doppelter Krümmung, Leipzig 1872. S. 113. — 14) Beltrami, Saggio di interpretazione della Geometria Non-Euclidea, Napoli 1868. — 15) v. Escherich, Ableitung des allgemeinen Ausdruckes für das Krümmungsmass der Flächen, Archiv d. Math. u. Phys. 57. Theil, S. 395 ff. — 16) Riemann, Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Ges. Werke ed. Weber, Leipzig 1876. S. 257 ff. — 17) Beez, Ueber das Krümmungsmass von Mannigfaltigkeiten höherer Ordnung, Mathem. Annalen, 7. Band, S. 387 ff. — 18) Salmon, Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen, deutsch v. Fiedler, Leipzig 1863. S. 100. — 19) L. Euler, Mechanica, sive motus scientia analytice exposita, Petropoli 1736, tom. II. §. 106. — 20) Hesse, Ueber die Wendepunkte der Curven dritter Ordnung, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 28. Band, S. 103 ff. Id. Ueber Curven dritter Classe und dritter Ordnung, ibid. 38. Band, S. 242 ff. — 21) Bammert, Ueber Inflexionscurven, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 10. Jahrg. S. 165. — 22) Dölp, Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung, Giessen 1874. S. 181. — 23) Durège, Die ebenen Curven dritter Ordnung, Leipzig 1871. S. 192. — 24) Dupin, Développements de Géométrie, Paris 1842. S. 48.

Kapitel VIII.

Lineare Substitutionen.

§. 1. Wir haben im vorigen Paragraphen (§. 7) die interessante Thatsache registrirt, dass eine gewisse Funktion, die Hesse'sche Determinante, einer linearen Transformation ihrer Variabelen unterworfen wurde und sich hiebei nur um einen Faktor — das Quadrat der Substitutionsdeterminante — änderte. Es liegt nun nahe, alle die Funktionen, welche bei Vornahme linearer Substitutionen ein ähnliches Verhalten zeigen, unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte zu betrachten. In der That hat diess Bestreben bereits zur Gründung eines neuen Wissenszweiges, der sogenannten modernen Algebra oder Invariantentheorie, geführt, in welcher die linearen Transformationen eine eingehende Behandlung erfahren; die Bedeutung dieser Umformung hat sich dann in neuester Zeit durch die von Riemann [1]) gemachte und von Clebsch [2]) weiter ausgeführte Entdeckung wesentlich gesteigert, dass eine gewisse für jede algebraische Curve und Fläche charakteristische Zahl *) sich nicht ändert,

---

*) Riemann war bei einer allgemein-funktionentheoretischen Untersuchung darauf gekommen, dass für jede Curve nter Ordnung die Zahl

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d$$

— unter d die Gesammtzahl möglicher Doppelpunkte verstanden —, eine constante sei. Speziell bezeichnet hat er diese Zahl nicht, diess that erst Cayley [3]), welcher ihr den Namen „deficiency" beilegte, weil sie die Zahl der am zulässigen Maximum $(1 + 2 + 3 + \ldots + n - 2)$ mangelnden Doppelpunkte ausdrückt. Seitdem Clebsch sich eingehend mit dieser Constante beschäftigte und deren Bedeutung auch für die Transformation von Oberflächen nachwies, führt sie den von ihm vorgeschlagenen Namen Geschlecht der Curve, und man theilt jetzt die Curven allgemein nach ihrem Geschlechte in Gruppen. Die Curven vom Geschlechte Null (unicursale Curven) haben die Eigenthümlichkeit, dass ihre Coordinaten als rationale Funktionen eines willkürlichen Parameters t sich darstellen lassen; zu ihnen gehören die Kegelschnitte, aber auch gewisse Formen der Curven dritter und vierter Ordnung.

Im Uebrigen ist zu bemerken, dass die Geschlechtszahl nicht allein bei linearen Substitutionen invariabel ist, sondern auch ganz allgemein bei sogenannten eindeutigen. Betreffs dieser inhaltsreichen Transformationsart sei auf die ebenso populär wie strenge gehaltene Skizze von Mansion [4]) hingewiesen, aus der hier einiges angeführt werden möge. Jede rationale (birationale) oder eindeutige Transformation hat die charakteristische Eigenschaft: Die (rechtwinkligen) Coordinaten eines Punktes der ersten Figur lassen sich als rationale Funktionen des einer zweiten Figur angehörigen homowenn man das betreffende Gebilde in einer Weise umgestaltet, deren analytischer Ausdruck eben eine lineare Substitution ist.

Als Fundamentalsatz dieser Disciplin kann folgender aufgefasst werden: Es seien die Funktionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ jede von n Variabelen $x_1, x_2 \ldots x_n$ abhängig. Wir setzen dann

$$x_i = a_{i,1} y_1 + a_{i,2} y_2 + \ldots + a_{i,n} y_n \quad (i = 1, 2, 3 \ldots n),$$

und bezeichnen den Ausdruck $\triangle = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$ als Determinante oder Modulus der linearen Substitution. Dass $\triangle$ von Null verschieden ist, so lange $x_1 \ldots x_n$ unabhängige Grössen sind, ergiebt sich aus Kap. V. §. 2. Nun können wir sagen:

Sind die Funktionen f linear aus den Veränderlichen x zusammengesetzt, und führen wir anstatt letzterer die durch das obige System charakterisirten Grössen y ein, so ist die Determinante des Systemes der transformirten Funktionen gleich dem Produkte aus der Determinante des Systemes der gegebenen Funktionen in den Modulus der linearen Substitution.

Während ursprünglich die Gleichungen

$$f_i = b_{i,1} x_1 + \ldots b_{i,n} x_n \quad (i = 1, 2, 3 \ldots n)$$

bestanden, ist nun bezüglich

$$f_i = c_{i,1} y_1 + \ldots + c_{i,n} y_n \quad (i = 1, 2, 3 \ldots n)$$

geworden. Um $c_{i,k}$ zu finden, muss man $x_1, x_2 \ldots x_n$ der Reihe nach mit $b_{i,1}, b_{i,2} \ldots b_{i,n}$ multipliciren, diese Produkte addiren und in der so erhaltenen Summe den Coëfficienten von y_k aufsuchen. Das heisst eben, es ist

$$c_{i,k} = b_{i,1} a_{1,k} + b_{i,2} a_{2,k} + \ldots + b_{i,n} a_{n,k};$$

also ist dem Multiplikationssatze gemäss

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & \ldots & c_{1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n,1} & \ldots & c_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{1,1} & \ldots & b_{1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{n,1} & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{n,1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{1,n} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

---

logen Punktes darstellen, und umgekehrt. Versteht man also unter F und f rationale Funktionen und bedeuten resp. X, Y; x, y die cartesischen Coordinaten eines bestimmten Punktes in beiden Figuren, so muss

$$X = F_1(x, y),\ Y = F_2(x, y);\ x = f_1(X, Y),\ y = f_2(X, Y)$$

sein; man ersieht also, dass die Funktionen nicht ganz willkürlich gewählt werden dürfen.

Hiernach wäre das Gebiet der eindeutigen — auch wohl Cremona'schen — Transformationen ein äusserst ausgedehntes, geradezu unübersehbares. Glücklicherweise lässt es sich aber sehr wesentlich beschränken durch den von Noether[5]) herrührenden Lehrsatz: Jede eindeutige Transformation kann in eine Reihe linearer und quadratischer Transformationen aufgelöst werden. Zudem ist die geometrische Bedeutung dieser elementarsten Transformationsgruppen eine besonders wichtige: erstere ist nur der allgemein-analytische Ausdruck der Projektion aus einem Punkte (perspektivische Umformung), letztere dagegen deckt sich mit jener altberühmter Transformation von Desargues, deren geometrische Eigenschaften von Chasles[6]) zuerst aufgedeckt und neuerlich auf's Eingehendste von Saltel studirt worden sind.

und das war zu beweisen. Dieser Beweis ist der Hauptsache nach auf Joachimsthal [7]) zurückzuführen.

Beispiel. Es seien gegeben drei Ebenen im Raume mit den Gleichungen

$$f_i = a_i x + b_i y + c_i z \ (i = 1, 2, 3).$$

Dreht man das Coordinatensystem um den Anfangspunkt und bezeichnet mit x', y', z' die neuen Coordinaten, so wird

$$x = \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z',\ y = \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z',$$
$$z = \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z';$$

die drei Ebenen nehmen nunmehr folgende Gestalt an:

$$f_i = A_i x' + B_i y' + C_i z' \ (i = 1, 2, 3),$$

und man erhält die auch geometrisch erweisbare Relation:

$$\Sigma \pm A_1 B_2 C_3 = \Sigma \pm a_1 b_2 c_3 \, . \, \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3.$$

§. 2. Unter den linearen Substitutionen besonders wichtig sind die orthogonalen, mit welchen sich bereits Euler [8]) und Cauchy [9]) beschäftigten; der Name rührt her von Cayley. Man kann zur Entwickelung der Eigenschaften dieser Substitution von einer Grundgleichung ausgehen, man kann jedoch auch den umgekehrten Weg einschlagen, wie wir hier nach dem Vorgange von Veltmann [10]) thun.

Setzen wir $b_{i,k} = - b_{k,i}$, $b_{1,1} = b_{2,2} = \ldots = b_{n,n}$, so nehmen wir die orthogonale Substitution durch folgendes System linearer Gleichungen ausgedrückt an:

$$b_{i,1} x_1 + \ldots b_{i,n} x_n = b_{1,i} y_1 + \ldots + b_{n,i} y_n \quad (i = 1, 2, 3 \ldots n).$$

Löst man dieses System einmal nach den x, das anderemal nach den y auf, so erhält man Determinanten von der Beschaffenheit, dass die Zeilen der einen die Colonnen der anderen sind, dass also nach Kap. II. §. 2 zwischen beiden Gleichheit besteht.

Indem jede solche Determinante $= \triangle$ und $\beta_{i,k} = \dfrac{d\triangle}{db_{i,k}}$ gesetzt wird, erhält man die den beiden vorigen adjungirten Determinanten

$$\Sigma \pm \beta_{1,1} \ldots \beta_{n,n} \text{ und } \Sigma \pm \beta_{1,1} \ldots \beta_{n,n}.$$

welche natürlich aus gleichem Grunde wiederum gleich sind. Die oben angedeuteten Auflösungen des Systemes nach den x und y ergeben

$$y_i = c_{i,1} x_1 + \ldots + c_{i,n} x_n;\ x_k = g_{k,1} x_1 + \ldots + g_{k,n} x_n \ (i = k = 1, 2, 3 \ldots n);$$

demnach ist also

$$c_{i,k} = \frac{\beta_{i,1}\, b_{1,k} + \beta_{i,2}\, b_{2,k} + \ldots + \beta_{i,n}\, b_{n,k}}{\triangle}.$$

Addirt man zu dieser Gleichung die weitere

$$s = \beta_{i,1}\, b_{k,1} + \beta_{i,2}\, b_{k,2} + \ldots + \beta_{i,n}\, b_{k,n},$$

so erhält man, da ja $b_{i,k} = - b_{k,i}$, $b_{i,i} = b_{k,k}$ ist,

$$c_{i,k} \triangle + s = 2\beta_{i,k}\, b_{k,k}.$$

Der Ausdruck s hat nach Kap. II. §. 12 entweder den Werth $\triangle$ oder Null; es wird also

$$c_{i,k} = - c_{k,i} = \frac{2\beta_{i,k}\, b_{k,k}}{\triangle},\ c_{i,i} = \frac{2\beta_{i,i}\, b_{i,i} - \triangle}{\triangle}.$$

Die Grösse $g_{i,k}$ lässt sich mit Zuhülfenahme der Grösse

$$s' = \beta_{1,k}\, b_{1,i} + \beta_{2,k}\, b_{2,i} + \ldots + \beta_{n,k}\, b_{n,i}$$

ganz ebenso bestimmen; es findet sich

$$g_{k,i} = -\, g_{i,k} = \frac{2\beta_{i,k}\, b_{i,i}}{\triangle},\ g_{i,i} = \frac{2 b_{i,i}\, b_{i,i} - \triangle}{\triangle}.$$

Es ist also auch $g_{k,i} = -\, g_{i,k} = c_{i,k} = -\, c_{k,i}$, und dem obigen Systeme kann folgendes Doppelsystem substituirt werden

$$y_i = \mathop{S}_{r=1}^{r=n} c_{i,r} x_r,\quad x_i = \mathop{S}_{r=1}^{r=n} c_{r,i} y_r \quad (i = 1, 2, 3 \ldots n)$$

Aus diesen beiden Systemen lassen sich mit Berücksichtigung der für die Grössen c gefundenen Relationen zwei Sätze herleiten, aus denen eben die Rechtmässigkeit des die Transformation unterscheidenden Beinamens hervorgeht; es sind diese:

Für die Variabelen und Constanten einer orthogonalen Transformation gelten stets folgende Wahrheiten. Es ist

$$\text{I.}\quad c^2_{1,i} + c^2_{2,i} + \ldots + c^2_{n,i} = 1;$$

$$\text{II.}\quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x^2_n = y_1^2 + y^2 + \ldots + y^2_n.$$

Um I. zu finden, quadrire man jede Gleichung des zweiten Systemes und addire dieselben hierauf sämmtlich. Da dann allgemein $c_{l,m}\, c_{p,q} = -\, c_{m,l}\, c_{q,p}$ ist, so müssen sich bei der Addition alle doppelten Produkte wegheben, und man erhält

$$x_1^2 + \ldots + x^2_n = x_1^2 (c^2_{1,1} + \ldots + c^2_{1,n}) + \ldots + x^2_n (c^2_{n,1} + \ldots + c^2_{n,n}).$$

Diese Gleichung kann aber offenbar nur dann bestehen, wenn allgemein

$$c^2_{i,1} + c^2_{i,2} + \ldots + c^2_{i,n} = 1 \quad (i = 1, 2, 3 \ldots n)$$

ist; setzt man hier allerorts statt $c_{i,k}$ den gleichen Werth $-\, c_{k,i}$, so ergiebt sich unmittelbar Gleichung I. — Und ebenso liefert die analoge Behandlung des zweiten Systemes die Gleichung II.

Es soll nun noch der Werth der für eine orthogonale Transformation charakteristischen Substitutionsdeterminante bestimmt werden. Es ist dem Obigen zufolge

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \ldots & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \ldots & c_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{b_{1,1}}{\triangle} & \frac{b_{1,2}}{\triangle} & \ldots & \frac{b_{1,n}}{\triangle} \\ \frac{b_{2,1}}{\triangle} & \frac{b_{2,2}}{\triangle} & \ldots & \frac{b_{2,n}}{\triangle} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{b_{n,1}}{\triangle} & \frac{b_{n,2}}{\triangle} & \ldots & \frac{b_{n,n}}{\triangle} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{1,1} & \beta_{2,1} & \ldots & \beta_{n,1} \\ \beta_{1,2} & \beta_{2,2} & \ldots & \beta_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \beta_{1,n} & \beta_{2,n} & \ldots & \beta_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Setzt man im ersten Determinanten-Faktor des Produktes den jeder Colonne (Zeile) gemeinsamen Faktor heraus, so wird

$$\Sigma \pm c_{1,1} \ldots c_{n,n} = \frac{1}{\triangle^n} \cdot \Sigma \pm b_{1,1} \ldots b_{n,n}\, \Sigma \pm \cdot \beta_{1,1} \ldots \beta_{n,n}.$$

Der erste Faktor hat nun den Werth $\triangle$, der zweite, wenn man sich der Bedeutung des Symboles β erinnert und Kap. III. §. 3 berücksichtigt, den Werth $\triangle^{n-1}$; es ist also

$$\begin{vmatrix} c_{1,1} & \ldots & c_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1} & \ldots & c_{n,n} \end{vmatrix} = \frac{\triangle \cdot \triangle^{n-1}}{\triangle^n} = 1.$$

Diess giebt zu dem bereits Gefundenen noch folgendes Corollar:

Die Determinante (Modulus) einer orthogonalen Substitution hat stets den Werth 1. *)

Nach Sylvester[11]) wird eine solche Determinante unimodular genannt **).

Im Anschluss an die vorstehend behandelte Frage erhebt sich die weitere, wie eine Substitution beschaffen sein müsse, welche eine gegebene Funktion wieder in sich selbst überführt. Für den Spezialfall einer quadratischen Form ist dieses Problem von Rosanes[14]) vollständig gelöst worden. Sein Verfahren bietet u. a. den Vortheil, den oben entwickelten Fundamentalsatz der orthogonalen Substitutionen direkt ohne Rechnung hervortreten zu lassen[15]).

§. 3. Wir wollen nunmehr blos eine einzige Funktion $f_{(x_1, x_2 \ldots x_n}$ von n Veränderlichen in's Auge fassen und dieselbe durch eine lineare

---

*) Ganz strenge wahr ist diess allerdings nicht; eine orthogonale Substitution existirt auch dann noch, wenn $\Sigma \pm c_{1,1} \ldots c_{n,n} = -1$ ist; man kann somit eigentlich mit Jacobi nur behaupten, dass das Quadrat des Modulus stets der positiven Einheit gleich sein müsse.

**) Es muss hier nothwendig die Frage aufgeworfen werden, ob und wie sich wohl unimodulare Determinanten bilden lassen. Solange die Elemente absolut willkürlich gewählt werden dürfen, hat diess natürlich nicht die geringste Schwierigkeit; sollen dieselben aber ausschliesslich ganze Zahlen sein, so bedarf es ebenso natürlich bestimmter Vorschriften. Man besitzt deren zwei, die eine von Hermite[12]), die andere von Weihrauch[13]); bei dieser letzteren kommt es auf Nachstehendes an. Soll die erste Colonne — hierin liegt eine neue Complicirung — durch die Terme $A_1, A_2 \ldots A_n$ gebildet werden, so löse man vorerst nach Euler's Manier die diophantische Gleichung

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = 1.$$

Nach jener Methode ist, wenn $\overset{i=n}{\underset{i=1}{S}} A_i \mu_i = 1$ angenommen wird, allgemein

$$x_k = \mu_k + \overset{i=n-1}{\underset{i=1}{S}} a_{k,i}\, t_i \ (k = 1, 2, 3 \ldots n).$$

Setzt man dann weiter

$$\triangle = \begin{vmatrix} \mu_1 & a_{1,1} & \ldots & a_{1,n-1} \\ \mu_2 & a_{2,1} & \ldots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_n & a_{n,1} & \ldots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}, \ \triangle' = \triangle^{n-1} = \begin{vmatrix} \frac{d\triangle}{d\mu_1} & \frac{d\triangle}{da_{1,1}} & \ldots & \frac{d\triangle}{da_{1,n-1}} \\ \frac{d\triangle}{d\mu_2} & \frac{d\triangle}{da_{2,1}} & \ldots & \frac{d\triangle}{da_{2,n-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d\triangle}{d\mu_n} & \frac{d\triangle}{da_{n,1}} & \ldots & \frac{d\triangle}{da_{n,n-1}} \end{vmatrix},$$

so ist jetzt $\frac{d\triangle}{d\mu_i} = A_i$ und $\triangle' = 1$, also eine unimodulare Determinante.

Substitution in eine Funktion $\varphi(y_1, y_2 \ldots y_n)$ verwandeln. Bildet man nach Kap. VIII. § 7 die Hesse'schen Determinanten der ursprünglichen wie der umgeänderten Funktion, so ist, wie ebendort bewiesen ward,

$$H(f_y) = H(f_x) \triangle^2.$$

Während also bei den in §. 1 untersuchten Transformationen die erste Potenz des Modulus als Faktor zur Determinante der Coëfficienten hinzutrat, haben wir hier das Quadrat jener Determinante als Faktor erhalten. Indem Cayley diess Verhalten gewisser Funktionen allgemein studirte, gelangte er dazu, mit dem Namen der Hyperdeterminanten solche Funktionen zu bezeichnen, welche, von irgendwelchen linearen Transformationen betroffen, sich nur um eine Potenz der Substitutionsdeterminante von ihrem ursprünglichen Werthe unterscheiden [16]. Die Definition Cayley's hat man in späterer Zeit bestimmter gefasst und besonders den wenig bezeichnenden Namen Hyperdeterminanten durch eine andere Terminologie ersetzt, welche auch den verschiedenen Formen jener Gesammtbezeichnung Rechnung trägt. Wir geben diese Definition, wie sie sich in neuester Zeit herausgebildet hat, mit den Worten von Clebsch [17]:

In der Formentheorie untersucht man solche ganze rationale Verbindungen der Coëfficienten und der Veränderlichen, welche bis auf eine Potenz des Modulus denselben Werth annehmen, gleichviel, ob man sie für die ursprüngliche oder für die transformirte Funktion bildet. Enthält eine solche Verbindung nur die Coëfficienten, so nennt man sie Invariante; enthält sie auch die Veränderlichen, so wird sie Covariante genannt.

Wie wichtig diese neue Formen- oder Invariantentheorie besonders für die geometrische Forschung ist, erhellt u. a. schon daraus, dass sie als speziellen Fall all' diejenigen Ausdrücke in sich begreift, welche durch eine Coordinatenvertauschung in keiner Weise beeinflusst werden. Dieser hohen Bedeutung ungeachtet müssen wir uns an diesem Orte damit begnügen, an einigen Beispielen die eben aufgestellte Definition zu illustriren und so ihren Zusammenhang mit der Determinantenlehre klarzustellen.

§. 4. Die Funktion

$$a_0 x_1^2 + 2a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$$

hat [18] die Invariante $(a_0 a_2 - a_1^2)$, welche wir (nach Kap. V. §. 9) auch als ihre Discriminante bezeichnen dürfen. Setzt man nämlich

$$\begin{aligned} x_1 &= b_{1,1} y_1 + b_{1,2} y_2, \\ x_2 &= b_{2,1} y_1 + b_{2,2} y_2, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{vmatrix} = r,$$

so erhält man jetzt die obige Funktion in folgender Form:

$$a_0' y_1^2 + 2a_1' y_1 y_2 + a_2' y_2^2.$$

Wird aber jetzt die Discriminante $(a_0' a_2' - a_1'^2)$ hergestellt, so ist dieselbe gleich

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \cdot \left[\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{vmatrix} \right]^2 = (a_0 a_2 - a_1^2) r^2.$$

Nennen wir somit jeden aus n Veränderlichen ganz und rational zusammengesetzten Ausdruck eine Form, so haben wir gefunden:

Die Discriminante einer binären quadratischen Form ist eine Invariante.

Auch für Covarianten besitzen wir ein naheliegendes Beispiel. Schreiben wir in der vorhin erwähnten Gleichung

$$H(f_y) = H(f_x)\,\triangle^2$$

$H(f_y)$ und $H(f_x)$ wirklich hin, so zeigt sich, dass in letzterer Determinante die einzelnen Elemente Funktionen der Variabelen x sind. Daraus folgt aber:

Für jede beliebige Funktion ist die Hesse'sche Determinante eine Covariante *).

Ursprünglich zu Abkürzungszwecken ausgebildet, hat sich in neuester Zeit eine symbolische Rechnung mit Formen und Determinanten ein bedeutendes Gewicht in der Algebra errungen. Die Grundzüge dieses Calculs sind von Aronhold [23]) skizzirt worden. Eine rationale ganze Funktion nten Grades von ebensoviel Veränderlichen wird durch

$$a_x^n = b_x^n = c_x^n = \ldots,$$

die n! fache Funktionaldeterminante $\Sigma \pm f_{1,1}\, f_{2,2} \ldots f_{n,n}$ durch

$$\alpha_x^n = \beta_x^n = \gamma_x^n = \ldots$$

bezeichnet, und es bestehen Regeln, um ein durch die symbolischen Verknüpfungsgesetze auf kürzestem Wege erzieltes Resultat sofort wieder in die übliche Darstellungsweise umzusetzen. Da jedoch in der äusseren Form die von verschiedenen Mathematikern eingeführten Bezeichnungen etc. nur sehr wenig übereinstimmen **), so hat Schlegel [25]) den gewiss passenden Vorschlag gemacht und einlässlich begründet, die völlig consequente Graphik der Grassmann'schen „Ausdehnungslehre" durchgehends zu Grunde zu legen.

Historisch möge über die Ziele und bisherigen Erfolge der Invariantentheorie noch Folgendes bemerkt werden. Man musste sich die Frage vor-

---

*) In Kürze seien hier noch einige gebräuchliche Kunstwörter der Invariantenlehre erklärt. Ist die Potenz des Modulus eine gerade Zahl, so heisst die Invariante eine directe, im anderen Falle eine windschiefe. Diese Termini rühren von Hermite her [19]). Andererseits führt jener Exponent nach Fiedler [20]) auch den Namen Gewicht der Invariante, weil ihm die Summe sämmtlicher in einem beliebigen Gliede der Invariante vorkommender Indices gleich ist.

Sind statt einer einzigen Funktion deren mehrere gegeben, so kann man simultane In- und Covarianten bilden. Hat man z. B. die beiden binären quadratischen Formen

$$f = a_0x_1^2 + 2a_1x_1x_2 + a_2x_2^2,$$
$$\varphi = b_0x_1^2 + 2b_1x_1x_2 + b_2x_2^2,$$

so ist, wenn r eine der bisherigen analoge Bedeutung hat,

$$\begin{vmatrix} a'_0y_1 + a'_1y_2 & b'_0y_1 + b'_1y_2 \\ a'_1y_1 + a'_2y_2 & b'_1y_1 + b'_2y_2 \end{vmatrix} = r \cdot \begin{vmatrix} a_0x_1 + a_1x_2 & b_0x_1 + b_1x_2 \\ a_1x_1 + a_2x_2 & b_1x_1 + b_2x_2 \end{vmatrix};$$

diese letztere Determinante ist also eine simultane Covariante [21]) der beiden Formen.

Soll man zwei Formensysteme wechselseitig in einander überführen können, so müssen entsprechende Covarianten identisch sich annulliren und die absoluten Invarianten (für $r = 1$) sich ebenso beziehungsweise gleich sein [22]).

**) In sehr charakteristischer Weise haben bei einer gewissen Gelegenheit Clebsch und Gordan [24]) selbst durch Nebeneinanderstellung der von drei verschiedenen Autoren für die nämliche Sache gewählten Symbole gezeigt, wie schwierig die Ueberschau in diesem Gebiete noch immer ist.

legen, ob es eine abgeschlossene Anzahl von Ausdrücken gäbe, denen invariante Eigenschaften zukommen, oder ob diess nicht der Fall sei. Während Cayley [26]) zuerst der Ansicht gehuldigt hatte, dass diese Anzahl eine unbegränzte sei, regten sich später Zweifel hiegegen, und zwar suchte man die Frage zunächst für binäre Formen (mit zwei Variablen) zu entscheiden. Es gelang Gordan [27]), den Nachweis exakt zu erbringen, dass es für diese Formen ein endliches System von Invarianten und Covarianten giebt, so zwar, dass sich jede andere In- oder Covariante aus einer bestimmten Anzahl distinkter Formen rational und ganz zusammensetzen lässt. Diese Thatsache hat dann auch Cayley [28]) neuerdings als richtig anerkannt.

§. 5. In diesem Paragraphen soll noch ein spezieller Fall von linearer Transformation behandelt werden, welcher sich für die höhere Geometrie von hervorragender Wichtigkeit erwiesen hat.

Unter einer bilinearen Form versteht man einen Ausdruck, welcher aus 2n Veränderlichen $x_1, x_2 \ldots x_n$; $y_1, y_2 \ldots y_n$ linear zusammengesetzt ist; symbolisch wird ein solcher Ausdruck durch eine Doppelsumme dargestellt werden müssen. Gegeben seien zwei solche bilineare Formen

$$P = \mathop{S}_{i=1}^{i=n} \mathop{S}_{k=1}^{k=n} A_{i,k}\, x_i y_k\,,\quad Q = \mathop{S}_{i=1}^{i=n} \mathop{S}_{k=1}^{k=n} B_{i,k}\, x_i y_k\,;$$

bildet man dann, unter p und q beliebige Zahlen verstanden, die durch (P, Q) zu bezeichnende Determinante des Systemes (Pp + Qq), d. h.

$$(P, Q) = \Sigma \pm pA_{1,1} + qB_{1,1},\ pA_{2,2} + qB_{2,2} \ldots pA_{n,n} + qB_{n,n},$$

so ist diese Determinante ersichtlich eine homogene ganze Funktion nten Grades von p und q, kann also in ein Produkt von n Faktoren zerlegt werden, deren jeder homogen und linear aus p und q sich zusammensetzt.

Ueber diesen Zerlegungs-Akt hat nun Weierstrass [29]) eine Reihe eleganter Betrachtungen angestellt, deren erster für die Geometrie besonders bedeutsamer Theil hier wiedergegeben werden soll.

Denken wir uns die obige Determinante als Produkt geschrieben, so werden die einzelnen Faktoren im Allgemeinen von der Form $(ap + bq)^{l}$ sein *), so dass also die $(l + 1)$te Potenz von $(ap + bq)$ in (P, Q) nicht mehr ohne Rest aufgehen würde. Bildet man aus (P, Q) sämmtliche kte Unterdeterminanten, so sind diess ganze homogene Funktionen $(n - k)$ten Grades für p und q. Gewisse Potenzen von $(ap + bq)$ werden auch in diesen Unterdeterminanten ohne Rest enthalten sein; jedoch wird der Exponent der höchsten Potenz, bei welcher dieses Aufgehen gerade noch stattfindet, nicht mehr l, sondern irgend eine kleinere Zahl $l^{(k)}$ sein.

Zerlegt man eine beliebige $(k - 1)$te Unterdeterminante von (P, Q) nach den Elementen einer ebenfalls beliebigen Reihe in Minoren, so stellt sich jene — abgesehen vom Zeichen — dar als ein Aggregat von Gliedern aus zwei Faktoren, deren einer ein Element von (P, Q), der andere eine Unterdeterminante $(n - k)$ten Grades ist; es muss also jede in einer Unterdeterminante von letzterem Grade aufgehende Zahl auch in jeder

*) Dabei ist es als selbstverständlich vorausgesetzt, die Coëfficienten seien nicht durchweg gleich Null.

Determinante von höherem als $(n - k)$tem Grade ohne Rest enthalten sein. Dem Vorhergesagten ist also zu entnehmen, dass, wenn $\mathfrak{l}^{(0)} = \mathfrak{l}$, $\mathfrak{l}^{(1)} = \mathfrak{l}'$ etc., die Reihe $\mathfrak{l}, \mathfrak{l}', \mathfrak{l}'', \mathfrak{l}''', \mathfrak{l}^{(IV)} \ldots \mathfrak{l}^{(k)} \ldots \mathfrak{l}^{(r-1)}$ eine stetig abnehmende ist und dass, wenn irgend ein Glied derselben den Werth Null annimmt, diess auch das Verschwinden aller übrigen nachfolgenden zur nothwendigen Folge hat. Wird also

$$e = \mathfrak{l} - \mathfrak{l}',\ e' = \mathfrak{l}' - \mathfrak{l}'' \ldots e^{(r-1)} = \mathfrak{l}^{(r-1)}$$

gesetzt, so sind sämmtliche e positive Zahlen, und es ist

$$(ap + bq)^{\mathfrak{l}} = (ap + bq)^{e}\,(ap + bq)^{e'} \ldots (ap + bq)^{e^{(r-1)}}.$$

Im Ganzen giebt es r Faktoren von $(ap + bq)^{\mathfrak{l}}$; jeder solche Faktor wird von W e i e r s t r a s s [30]) ein E l e m e n t a r t h e i l e r d e r D e t e r m i n a n t e (P, Q) genannnt. Zunächst gilt dann also der Satz:

D i e D e t e r m i n a n t e (P, Q) i s t g l e i c h d e m P r o d u k t e i h r e r s ä m m t l i c h e n E l e m e n t a r t h e i l e r i n e i n e v o n p u n d q u n a b h ä n g i g e G r ö s s e.

Hierauf aber stützt sich dann der Beweis eines anderen wichtigen Lehrsatzes, welcher von seinem Erfinder folgendermassen formulirt wird[31]):

E s w e r d e d u r c h d i e S u b s t i t u t i o n e n

$$x_1 = \mathop{S}_{i=1}^{i=n} h_{1,i}u_i \ldots x_n = \mathop{S}_{i=1}^{i=n} h_{n,i}u_i\ ;\ y_1 = \mathop{S}_{i=1}^{i=n} k_{1,i}v_i \ldots y_n = \mathop{S}_{i=1}^{i=n} k_{n,i}v_i,$$

w o $u_1 \ldots u_n$ u n d $v_1 \ldots v_n$ n e u e V e r ä n d e r l i c h e b e d e u t e n, $h_{1,1} \ldots h_{n,n}$; $k_{1,1} \ldots k_{n,n}$ a b e r C o n s t a n t e n, w e l c h e k e i n e r a n d e r e n B e s c h r ä n k u n g u n t e r w o r f e n s i n d, a l s d a s s d i e D e t e r m i n a n t e n

$$H = \Sigma \pm h_{1,1} \ldots h_{n,n},\ K = \Sigma \pm k_{1,1} \ldots k_{n,n}$$

n i c h t g l e i c h N u l l s e i n d ü r f e n, d i e F o r m

$$P_{(x_1 \ldots x_n;\ y_1 \ldots y_n)} \text{ in eine andere } P'_{(u_1 \ldots u_n;\ v_1 \ldots v_n)}$$

u n d z u g l e i c h

$$Q_{(x_1 \ldots x_n;\ y_1 \ldots y_n)} \text{ in } Q'_{(u_1 \ldots u_n;\ v_1, \ldots v_n)}$$

v e r w a n d e l t, s o s t i m m e n d i e D e t e r m i n a n t e n d e r b e i d e n F o r m e n i n i h r e n E l e m e n t a r t h e i l e r n ü b e r e i n.

Ist

$$P' = \mathop{S}_{i=1}^{i=n}\mathop{S}_{k=1}^{k=n} A'_{i,k}\, u_i v_k,\ Q' = \mathop{S}_{i=1}^{i=n}\mathop{S}_{k=1}^{k=n} B'_{i,k}\, u_i v_k,$$

so ist

$$(P', Q') = \Sigma \pm pA'_{1,1} + qB'_{1,1},\ pA'_{2,2} + qB'_{2,2} \ldots pA'_{n,n} + qB'_{n,n}.$$

Nach dem Bildungsgesetze dieser Determinante ist dieselbe aber gleich dem Produkte dieser drei folgenden:

$$\begin{vmatrix} pA_{1,1}+qB_{1,1} & \ldots & pA_{1,n}+qB_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ pA_{n,1}+qB_{n,1} & \ldots & pA_{n,n}+qB_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} h_{1,1} & \ldots & h_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{1,n} & \ldots & h_{n,n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k_{1,1} & \ldots & k_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n,1} & \ldots & k_{n,n} \end{vmatrix},$$

d. h. es ist

$$(P', Q') = HK(P, Q).$$

Jeder Theiler von (P, Q) geht demnach auch in (P′, Q′) ohne Rest auf. Bildet man also eine beliebige Unterdeterminante $(n-k)$ten Grades von (P', Q'), so lässt sich dieselbe der eben bewiesenen Gleichung zufolge darstellen als eine algebraische Summe aus drei Faktoren, welche bezüglich gleichgradige Unterdeterminanten von H, K und (P, Q) sind, und deshalb ist auch jeder Theiler einer Unterdeterminante von (P, Q) zugleich ein Theiler der Unterdeterminante eben so hohen Grades von (P', Q'). Da nun aber P' in P und Q' in Q übergeht, sobald man die oben stehenden Transformationsgleichungen nach u und v auflöst und bezüglich für diese u und v lineare Funktionen der x und y substituirt, so muss umgekehrt auch jeder Theiler einer **k**ten Unterdeterminante von (P', Q') auch in einer jeden **k**ten Unterdeterminante von (P, Q) ohne Rest aufgehen.

Es kann demnach auch keine höhere Potenz von $(ap + bq)$ als $(ap + bq)^{\mathfrak{l}}$ in (P', Q') enthalten sein; ebenso ist $(ap + bq)^{\mathfrak{l}^{(k)}}$ die höchste in allen **k**ten Unterdeterminanten $(n - k)$ten Grades restlos enthaltene Potenz jenes linearen Ausdruckes. Die r Faktoren, in die die $\mathfrak{l}$te Potenz desselben sich zerfällen liess, nämlich

$$(ap + bq)^{\mathfrak{l}-\mathfrak{l}'},\ (ap + bq)^{\mathfrak{l}'-\mathfrak{l}''} \ldots (ap + bq)^{(r-1)}$$

sind also auch die Faktoren des entsprechenden Theilers von (P', Q'), oder, wie wir diess Verhalten im Anschluss an die obige Definition auch charakterisiren können:

Die Elementartheiler der beiden Determinanten (P, Q) und (P', Q') sind einander successive gleich.

Der hier bewiesene Satz gestattet die Umkehrung, für welche Weierstrass [32]) ebenfalls den Beweis gegeben hat *).

§. 6. Wie schon bemerkt, ist die im Vorstehenden entwickelte Theorie von Wichtigkeit für die Raumlehre geworden. Betrachtet man mit Plücker [35]) die gerade Linie als Raum-Element und giebt durch

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 \text{ und } z_1 : z_2 : z_3 : z_4$$

zwei Punkte in homogenen Coordinaten an, so kann man für die durch diese zwei Punkte gelegten Gerade folgende 6 Relationen

$$p_{1,2} = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix},\ p_{1,3} = \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix},\ p_{1,4} = \begin{vmatrix} y_1 & y_4 \\ z_1 & z_4 \end{vmatrix},\ p_{3,4} = \begin{vmatrix} y_3 & y_4 \\ z_3 & z_4 \end{vmatrix},$$

$$p_{4,2} = \begin{vmatrix} y_4 & y_2 \\ z_4 & z_2 \end{vmatrix},\ p_{2,3} = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

aufstellen. Diese Determinanten vom zweiten Grade bezeichnet Plücker (s. o.) als Coordinaten der geraden Linie; zwischen denselben besteht noch die Relation

$$P \equiv p_{1,2}\, p_{3,4} + p_{1,3}\, p_{4,2} + p_{1,4}\, p_{2,3} = 0.$$

---

*) Wer über die geometrischen Consequenzen der Weierstrass'schen Theorie Ausführlicheres zu erfahren wünscht, als der nächstfolgende Paragraph zu bieten vermag, vergleiche die Anhänge, welche Gundelfinger [33]) seiner Neubearbeitung von Hesse's Raumgeometrie beigefügt hat. Der von Weierstrass programmgemäss ausgeschlossene Fall verschwindender Substitutionsdeterminanten hat eingehende Behandlung und geometrische Deutung bei Kronecker [34]) gefunden.

Nehmen wir jetzt weiter an, es bestände zwischen den einzelnen Coordinaten eine Gleichung

$$\Phi_{(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6)} = 0.$$

Dadurch wird gewissermassen aus der ursprünglichen Mannigfaltigkeit von 6 (5) Dimensionen *) eine solche von 5 (4) ausgeschieden; eine solche Mannigfaltigkeit von 4 fach unendlich vielen Geraden bezeichnet Plücker (s. o.) als Linien-Complex, zwei Complexe bestimmen eine Linien-Congruenz, drei eine Regelfläche. Je nachdem die Funktion Φ vom ersten, zweiten etc. Grade ist, wird der zugehörige Complex ein linearer, quadratischer genannt. Das Problem, diese letzteren Complexe allgemein analytisch zu diskutiren, hat zuerst F. Klein[36]) aufgenommen und gelöst, indem er zeigte, dass es als spezieller Fall in jenen früheren Untersuchungen von Weierstrass über bilineare Formen enthalten sei.

Werden für die Variablen p neue Veränderliche $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ eingeführt, so möge P in P′ und Φ in Φ' übergehen; es ist dann für $a_{i,k} = a_{k,i}$, $b_{i,k} = b_{k,i}$

$$P' = \mathop{S}_{i=1}^{i=6} \mathop{S}_{k=1}^{k=6} a_{i,k} x_i x_k\,, \quad \Phi' = \mathop{S}_{i=1}^{i=6} \mathop{S}_{k=1}^{k=6} b_{i,k} x_i x_k\,.$$

Bildet man die Determinante des Systemes $(\Phi' + \lambda P')$, so ist dieselbe

$$(P', \Phi') = \begin{vmatrix} b_{1,1}+\lambda a_{1,1} & b_{1,2}+\lambda a_{1,2} & b_{1,3}+\lambda a_{1,3} & b_{1,4}+\lambda a_{1,4} & b_{1,5}+\lambda a_{1,5} & b_{1,6}+\lambda a_{1,6} \\ b_{2,1}+\lambda a_{2,1} & b_{2,2}+\lambda a_{2,2} & b_{2,3}+\lambda a_{2,3} & b_{2,4}+\lambda a_{2,4} & b_{2,5}+\lambda a_{2,5} & b_{2,6}+\lambda a_{2,6} \\ b_{3,1}+\lambda a_{3,1} & b_{3,2}+\lambda a_{3,2} & b_{3,3}+\lambda a_{3,3} & b_{3,4}+\lambda a_{3,4} & b_{3,5}+\lambda a_{3,5} & b_{3,6}+\lambda a_{3,6} \\ b_{4,1}+\lambda a_{4,1} & b_{4,2}+\lambda a_{4,2} & b_{4,3}+\lambda a_{4,3} & b_{4,4}+\lambda a_{4,4} & b_{4,5}+\lambda a_{4,5} & b_{4,6}+\lambda a_{4,6} \\ b_{5,1}+\lambda a_{5,1} & b_{5,2}+\lambda a_{5,2} & b_{5,3}+\lambda a_{5,3} & b_{5,4}+\lambda a_{5,4} & b_{5,5}+\lambda a_{5,5} & b_{5,6}+\lambda a_{5,6} \\ b_{6,1}+\lambda a_{6,1} & b_{6,2}+\lambda a_{6,2} & b_{6,3}+\lambda a_{6,3} & b_{6,4}+\lambda a_{6,4} & b_{6,5}+\lambda a_{6,5} & b_{6,6}+\lambda a_{6,6} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante bleibt bei beliebigen linearen Transformationen der Variablen für jeden Complex dieselbe; sie ist also, da sie die veränderlichen Grössen selbst nicht enthält, eine Invariante für denselben.

Da (P', Φ') offenbar eine ganze rationale Funktion sechsten Grades von λ ist, so kann man

$$(P', \Phi') = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n} (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \ldots (\lambda - \lambda_i)^{\nu_i}$$

setzen, wo — unter der Voraussetzung, dass $S\nu_i = 6 - \lambda_i$ eine ν_i mal vorkommende Wurzel der Gleichung $(P', \Phi') = 0$ bedeutet.

Nehmen wir nun an, es sei der Faktor $(\lambda - \lambda_i)$ der Determinante (P', Φ') in allen ersten Unterdeterminanten derselben ν'_i mal, in allen zweiten ν''_i mal etc., überhaupt in allen kten $\nu_i^{(k)}$ mal enthalten, so ist nach §. 5, wenn wir

$$e_i = \nu_i - \nu'_i\,,\ e'_i = \nu'_i - \nu''_i \ldots e_i^{(k)} = \nu_i^{(k)} - \nu_i^{(k+1)} \ldots$$

setzen, jedes dieser e grösser als das nach ihm kommende; man hat dann

---

*) Da eine Coordinate eine Funktion der fünf übrigen ist.

$$(\lambda - \lambda_i)^{\nu_i} = (\lambda - \lambda_i)^{e_i} (\lambda - \lambda_i)^{e'_i} \dots (\lambda - \lambda_i)^{e_i^{(k)}} \dots$$

in seine Elementartheiler (s. den vorhergehenden Paragraph) zerlegt.

Nun wissen wir aber Folgendes: Soll ein bilineares Formenpaar P, Φ in ein anderes P', Φ' linear transformirbar sein, so müssen dieselben in ihren Elementartheilern übereinstimmen. Diese Formenpaare, gleich Null gesetzt, liefern also den nämlichen Complex, wenn in den Determinanten beider die Vertheilung der Wurzeln und Elementartheiler die gleiche ist; vertheilen wir also — für ein quadratisches Φ — in der Determinante (P' Φ') die Wurzeln und Elementartheiler auf jede mögliche Weise, so erhalten wir nacheinander alle überhaupt denkbaren quadratischen Complexe.

Gestützt auf diese Thatsachen hat Ad. Weiler [37]), dessen Darstellung wir bis hierher hauptsächlich gefolgt sind, seine Eintheilung und Beschreibung sämmtlicher Complexe vom zweiten Grade durchgeführt und hiebei gefunden, dass es deren im Ganzen 58 wesentlich verschiedene gäbe [38]).

1) Riemann, Theorie der Abel'schen Funktionen, Ges. Werke, ed. Weber, Leipzig 1876. S. 112 ff. — 2) Clebsch, Ueber die Anwendung der Abel'schen Funktionen in der Geometrie, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 63. Band, S. 21. — 3) R. F. A. Clebsch, Versuch einer Darlegung und Würdigung seiner wissenschaftlichen Leistungen, Mathem. Annalen, 7. Band, S. 21. — 4) Mansion, Sur la théorie des transformations birationelles planes en général, Nouv. Corresp. mathém., Tome I. S. 54 ff. — 5) Noether, Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen, Leipzig 1870. S. 7. — 6) Chasles, Geschichte der Geometrie, deutsch von Sohncke, Halle 1839. S. 71 ff. — 7) Joachimsthal, Sur quelques applications des déterminants à la géometrie, Journ. f. d. reine u. angew. Mathem. 40. Band, S. 21. — 8) Euler, Novi Comment. Petrop. Tom. XV. S. 75 ff. — 9) Cauchy, Exercices de Mathématiques et de Physique mathématique, Paris 1830, IV. S. 140 ff. — 10) Veltmann, Beiträge zur Theorie der Determinanten, Zeitschr. f. Mathem. u. Phys. 16. Jahrg. S. 523 ff. — 11) Sylvester, On the principles of the calculus of forms, Quaterly Journal t. VII. S. 52 ff. — 12) Hermite, Sur une question relative à la théorie des nombres, Journal de Matém. Tome XIV. S. 21 ff. — 13) Weihrauch, Zur Construktion einer unimodularen Determinante, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 21. Jahrg. S. 34 ff. — 14) Rosanes, Ueber die Transformation einer quadratischen Form in sich selbst, Journ. f. d. reine u. angew. Mathem. 80. Band. S. 52 ff. — 15) Ibid. S. 71. — 16) Cayley, Mémoire sur les hyperdéterminants, ibid. 30. Band. S. 1 ff. — 17) Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, Leipzig 1872. S. 3. — 18) Ibid. S. 3. — 19) Hermite, Sur l'invariant du 18e ordre des formes du cinquième degré et sur le rôle qu'il joue dans la résolution de l'équation du cinquième degré, Journ. f. d. reine u. angew. Mathem. 59. Band, S. 304 ff. — 20) Fiedler, Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen, Leipzig 1862. S. 174. — 21) Clebsch, S. 4. — 22) Gram, Sur quelques théorèmes fondamentaux de l'algèbre moderne, Mathem. Annalen, 7. Band, S. 239. — 23) Aronhold, Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie, Journ. f. d. reine u. angew. Mathem. 62. Band, S. 281 ff. — 24) Clebsch-Gordan, Ueber cubische ternäre Formen, Mathem. Annalen, 6. Band, S. 439. — 25) Schlegel, System der Raumlehre, 2. Theil, Leipzig 1875. S. 102 ff. — 26) Cayley, Upon quantics, Transactions of London, CXLVI. S. 101 ff. — 27) Gordan, Beweis, dass jede Covariante und Invariante einer binären Form eine ganze Funktion mit numerischen Coëfficienten einer endlichen Anzahl solcher Formen ist, Journ. f. d. reine u. angew. Mathem. 69. Band, S. 323. — 28) Cayley, A ninth memoir on quantics, Trans. of London, CLXI.

S. 17 ff. — 29) Weierstrass, Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, Berliner Berichte 1868. S. 310 ff. — 30) Ibid. S. 311. — 31) Ibid. S. 312. — 32) Ibid. S. 314 ff. — 33) Hesse, Vorlesungen über die analytische Geometrie des Raumes, revidirt und mit Zusätzen versehen von Gundelfinger, Leipzig 1876. S. 498 ff. S. 281. — 34) Kronecker, Ueber Schaaren von quadratischen Formen, Berliner Berichte 1874. S. 59 ff. S. 149 ff. S. 206 ff.— 35) Plücker, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, Leipzig 1869. — 36) F. Klein, Ueber die Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen Liniencoordinaten auf eine kanonische Form, Bonn 1868. – 37) Ad. Weiler, Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweiten Grades, Mathem. Annalen, 7. Band, S. 145 ff. — 38) Ibid. S. 150.

Kapitel IX.

Cubische Determinanten.

§. 1. Wir sahen oben (Kap. I. §. 6), dass der französische Mathematiker Vandermonde zuerst sich genöthigt sah, die verschiedenen Elemente eines Systemes von Termen durch drei denselben angehängte Indices zu unterscheiden. Abgesehen von jenem ersten isolirten Auftreten dieser Bezeichnungsweise finden wir bis in die neueste Zeit hinein nirgends etwas Analoges; erst Somoff [1]) ist im Verlaufe einer auf ganz andere Ziele gerichteten Untersuchung zu der Anwendung des dreifachen Index und den damit in engster Beziehung stehenden cubischen Determinanten hingeführt worden, und Dahlander hat der Erste deren Eigenschaften studirt *) (s. §. 3). Zuletzt haben besonders italienische Gelehrte, de Gasparis [2]), Armenante [3]) und Padova [4]), diesen analytischen Gebilden ihre Aufmerksamkeit zugewendet und eine Reihe von Eigenschaften für dieselben gefunden, welche denen der gewöhnlichen Determinanten vollkommen entsprechen. In Deutschland hat sich zumal Zehfuss [5]) mit diesem Gegenstande beschäftigt und ihn in Beziehung zu den Theoremen der neuen Algebra gesetzt.

§. 2. Sind n^3 Elemente gegeben, so können wir dieselben in Gestalt eines Würfels anordnen, und zwar muss dann jedes einzelne Element durch drei Indices charakterisirt werden, welche gewissermassen seine Coordinaten in Bezug auf ein mit drei aneinanderstossenden Würfelkanten zusammenfallendes rechtwinkliges System ausdrücken. Das nachstehende Schema, in welchem 216 Elemente in der angegebenen Weise zusammengestellt sind, wird diess erläutern:

---

*) Ihrer allgemeinen Auffassung und präcisen Beweise halber ist auch die ganz kürzlich als Separatabdruck aus Battaglini's „Giornale" erschienene kleine Schrift hervorzuheben: Garbieri, Determinanti formati di elementi con un numero qualunque d'indici, Roma 1876.

$$\begin{array}{cccccc}
a_{1,1,1} & a_{1,1,2} & a_{1,1,3} & a_{1,1,4} & a_{1,1,5} & a_{1,1,6} \\
a_{1,2,1} & a_{1,2,2} & a_{1,2,3} & a_{1,2,4} & a_{1,2,5} & a_{1,2,6} \\
a_{1,3,1} & a_{1,3,2} & a_{1,3,3} & a_{1,3,4} & a_{1,3,5} & a_{1,3,6} \\
a_{1,4,1} & a_{1,4,2} & a_{1,4,3} & a_{1,4,4} & a_{1,4,5} & a_{1,4,6} \\
a_{1,5,1} & a_{1,5,2} & a_{1,5,3} & a_{1,5,4} & a_{1,5,5} & a_{1,5,6} \\
a_{1,6,1} & a_{1,6,2} & a_{1,6,3} & a_{1,6,4} & a_{1,6,5} & a_{1,6,6}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
a_{2,1,1} & a_{2,1,2} & a_{2,1,3} & a_{2,1,4} & a_{2,1,5} & a_{2,1,6} \\
a_{2,2,1} & a_{2,2,2} & a_{2,2,3} & a_{2,2,4} & a_{2,2,5} & a_{2,2,6} \\
a_{2,3,1} & a_{2,3,2} & a_{2,3,3} & a_{2,3,4} & a_{2,3,5} & a_{2,3,6} \\
a_{2,4,1} & a_{2,4,2} & a_{2,4,3} & a_{2,4,4} & a_{2,4,5} & a_{2,4,6} \\
a_{2,5,1} & a_{2,5,2} & a_{2,5,3} & a_{2,5,4} & a_{2,5,5} & a_{2,5,6} \\
a_{2,6,1} & a_{2,6,2} & a_{2,6,3} & a_{2,6,4} & a_{2,6,5} & a_{2,6,6}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
a_{3,1,1} & a_{3,1,2} & a_{3,1,3} & a_{3,1,4} & a_{3,1,5} & a_{3,1,6} \\
a_{3,2,1} & a_{3,2,2} & a_{3,2,3} & a_{3,2,4} & a_{3,2,5} & a_{3,2,6} \\
a_{3,3,1} & a_{3,3,2} & a_{3,3,3} & a_{3,3,4} & a_{3,3,5} & a_{3,3,6} \\
a_{3,4,1} & a_{3,4,2} & a_{3,4,3} & a_{3,4,4} & a_{3,4,5} & a_{3,4,6} \\
a_{3,5,1} & a_{3,5,2} & a_{3,5,3} & a_{3,5,4} & a_{3,5,5} & a_{3,5,6} \\
a_{3,6,1} & a_{3,6,2} & a_{3,6,3} & a_{3,6,4} & a_{3,6,5} & a_{3,6,6}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
a_{4,1,1} & a_{4,1,2} & a_{4,1,3} & a_{4,1,4} & a_{4,1,5} & a_{4,1,6} \\
a_{4,2,1} & a_{4,2,2} & a_{4,2,3} & a_{4,2,4} & a_{4,2,5} & a_{4,2,6} \\
a_{4,3,1} & a_{4,3,2} & a_{4,3,3} & a_{4,3,4} & a_{4,3,5} & a_{4,3,6} \\
a_{4,4,1} & a_{4,4,2} & a_{4,4,3} & a_{4,4,4} & a_{4,4,5} & a_{4,4,6} \\
a_{4,5,1} & a_{4,5,2} & a_{4,5,3} & a_{4,5,4} & a_{4,5,5} & a_{4,5,6} \\
a_{4,6,1} & a_{4,6,2} & a_{4,6,3} & a_{4,6,4} & a_{4,6,5} & a_{4,6,6}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
a_{5,1,1} & a_{5,1,2} & a_{5,1,3} & a_{5,1,4} & a_{5,1,5} & a_{5,1,6} \\
a_{5,2,1} & a_{5,2,2} & a_{5,2,3} & a_{5,2,4} & a_{5,2,5} & a_{5,2,6} \\
a_{5,3,1} & a_{5,3,2} & a_{5,3,3} & a_{5,3,4} & a_{5,3,5} & a_{5,3,6} \\
a_{5,4,1} & a_{5,4,2} & a_{5,4,3} & a_{5,4,4} & a_{5,4,5} & a_{5,4,6} \\
a_{5,5,1} & a_{5,5,2} & a_{5,5,3} & a_{5,5,4} & a_{5,5,5} & a_{5,5,6} \\
a_{5,6,1} & a_{5,6,2} & a_{5,6,3} & a_{5,6,4} & a_{5,6,5} & a_{5,6,6}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
a_{6,1,1} & a_{6,1,2} & a_{6,1,3} & a_{6,1,4} & a_{6,1,5} & a_{6,1,6} \\
a_{6,2,1} & a_{6,2,2} & a_{6,2,3} & a_{6,2,4} & a_{6,2,5} & a_{6,2,6} \\
a_{6,3,1} & a_{6,3,2} & a_{6,3,3} & a_{6,3,4} & a_{6,3,5} & a_{6,3,6} \\
a_{6,4,1} & a_{6,4,2} & a_{6,4,3} & a_{6,4,4} & a_{6,4,5} & a_{6,4,6} \\
a_{6,5,1} & a_{6,5,2} & a_{6,5,3} & a_{6,5,4} & a_{6,5,5} & a_{6,5,6} \\
a_{6,6,1} & a_{6,6,2} & a_{6,6,3} & a_{6,6,4} & a_{6,6,5} & a_{6,6,6}
\end{array}$$

In jedem solchen Cubus von n^3 Elementen unterscheidet man ersichtlich n Horizontal- und $2n$ Vertikalebenen. Geleitet durch die Analogie können wir dann Folgendes festsetzen:

Bildet man aus den gegebenen n^3 Elementen sämmtliche Produkte zu n Faktoren, welche das System zulässt, ohne dass in einem dieser Produkte mehr als ein einziges der nämlichen Horizontal- oder Vertikalebene angehöriges Element vorkommt, und versieht diese Produkte nach einem bestimmten Gesetze zum Theil mit dem positiven zum Theil mit dem negativen Vorzeichen, so nennt man die algebraische **Summe all' dieser Produkte die cubische Determinante des Systemes.**

Während bei einer quadratischen Determinante von zwei Diagonalreihen gesprochen werden konnte, giebt es deren hier im Ganzen vier. Wir halten aber an dem Gebrauche fest, die Reihe der Elemente $a_{1,1,1}$, $a_{2,2,2}$ . . . $a_{n,n,n}$ als erste Diagonalreihe zu bezeichnen.

Die Zeichenregel für die einzelnen Glieder könnte an sich willkürlich gewählt werden; um aber die Analogie oder, besser gesagt, das Hankel'sche Prinzip der Permanenz formaler Gesetze [6]) nicht zu verletzen, stellen wir dieselbe durch folgende Betrachtung fest, welche zugleich das Bildungsgesetz und die Anzahl der bei der Entwickelung sich ergebenden Glieder erkennen lässt.

Man schreibe zunächst das Anfangsglied $a_{1,1,1}$, $a_{2,2,2}$ . . . $a_{n,n,n}$ hin und bilde sämmtliche Permutationen aus den Nummern 1, 2 . . . n, deren es n! giebt. Hierauf ersetze man die Serie der dritten Indices der Reihe nach durch sämmtliche andere Complexionen, welche man bei'm Permutiren erhalten hat, während die beiden ersten Indices überall unverändert bleiben. Jedem einzelnen Gliede ertheile man das positive oder negative Zeichen, je nachdem die Complexion seiner dritten Indices eine gerade oder ungerade Anzahl von Inversionen aufweist. Nachdem so die ersten n! Glieder gebildet sind, bilde man ein neues Glied dadurch, dass man, während zweite und dritte Indices ihre Plätze behaupten, an Stelle der bisher constant gebliebenen Complexion der ersten Indices die zweite Complexion aus der Reihe der obigen n! Permutationen einsetzt. Indem man dieses Glied, welchem selbstverständlich gegenüber dem zunächst vorhergehenden das entgegengesetzte Zeichen zukommt, in analoger Weise weiter behandelt, gelangt man zu weiteren Entwickelungsgliedern und kann so lange derart fortschreiten, bis sämmtliche Glieder dargestellt sind.

Aus diesen Angaben abstrahiren wir Folgendes:

Die Entwickelung einer cubischen Determinante vom nten Grade liefert

$$\underbrace{n! + n! + \ldots + n!}_{(n!)} = (n!)^2$$

Glieder. Ein Glied erhält das positive Vorzeichen, wenn die Anzahlen der Inversionen, durch welche die beiden Complexionen der ersten und dritten Indices aus der Anfangscomplexion 1 2 . . . n hervorgegangen sind, zusammenaddirt eine gerade Zahl ergeben, das negative, wenn diese Summe ungerade ist.

Man erkennt hieraus auch sofort, dass die eine Hälfte der Glieder mit dem positiven, das andere mit dem negativen Vorzeichen versehen sein müsse (vgl. Kap. II. §. 1).

Entwickeln wir so die cubische Determinante dritten Grades

$$\triangle = \left\{ \begin{array}{lllll} 111 & 112 & 113 & & \\ & 121 & 122 & 123 & \\ & & 131 & 132 & 133 \\ 211 & 212 & 213 & & \\ & 221 & 222 & 223 & \\ & & 231 & 232 & 233 \\ 311 & 312 & 313 & & \\ & 321 & 322 & 323 & \\ & & 331 & 332 & 333 \end{array} \right. ,$$

so erhalten wir im Ganzen $(1 \,.\, 2 \,.\, 3)^2 = 36$ Glieder, nämlich die folgenden:

$$\begin{array}{llll} 111\;222\;333, & 111\;322\;233, & 211\;122\;333, & 211\;322\;133, \\ 111\;223\;332, & 111\;323\;232, & 211\;123\;332, & 211\;323\;132, \\ 112\;221\;333, & 112\;321\;233, & 212\;121\;333, & 212\;321\;133, \\ 112\;223\;331, & 112\;323\;231, & 212\;123\;331, & 212\;323\;131, \\ 113\;221\;332, & 113\;321\;232, & 213\;121\;332, & 213\;321\;132, \\ 113\;222\;331, & 113\;322\;231, & 213\;122\;331, & 213\;322\;131, \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 311\;122\;233, & 311\;222\;133, \\ 311\;123\;232, & 311\;223\;132, \\ 312\;121\;233, & 312\;221\;133, \\ 312\;123\;231, & 312\;223\;131, \\ 313\;121\;232, & 313\;221\;132, \\ 313\;122\;231, & 313\;222\;131. \end{array}$$

Will man das Vorzeichen irgend eines Gliedes, z. B. das von 213 321 132 bestimmen, so betrachtet man die beiden Complexionen 231 und 312. Erstere weist gegen die Anfangscomplexion 3, letztere 4 Inversionen auf; $3 + 4 = 7$ ist eine ungerade Zahl, und das Glied erhält das Minuszeichen.

§. 3. Ebenso wie wir bei den quadratischen Determinanten horizontale und vertikale Reihen unterscheiden, giebt es bei den cubischen Horizontalebenen und zwei Gattungen von Vertikalebenen. Diejenigen Ebenen, welche bei der von uns befolgten Anordnung der Papierebene parallel verlaufen, wollen wir *Vertikalebenen der ersten Art*, die hierauf senkrechten *Vertikalebenen der zweiten Art* nennen.

Denken wir uns nunmehr, es seien zwei Horizontalebenen mit einander vertauscht worden; hierdurch haben die beiden letzten Indices keine Aenderung erlitten. Entwickeln wir also die Determinante vor und nach der Vertauschung, so ist klar, dass die einzelnen Glieder in beiden Entwickelungen dem absoluten Werthe nach einander bezüglich gleich sein müssen; die Umtauschung des ersten Index aber hat, den oben getroffenen Bestimmungen gemäss, für das betreffende Glied einen Zeichenwechsel bewirkt. Nimmt man die gleiche Operation vor mit zwei Vertikalebenen der zweiten Art, so bezieht sich die Umtauschung auf den dritten Index, und der Effekt ist der nämliche. Handelt es sich dagegen um die Versetzung zweier Vertikalebenen erster Art, so bleibt erster und dritter Index ungeändert und die Vertauschung bezieht sich lediglich auf den zweiten, welcher als invariabel, wie wir sahen, für die Bestimmung des Vorzeichens gleichgültig ist. Hieraus ergeben sich folgende Sätze:

Eine cubische Determinante ändert ihr Zeichen, wenn zwei Horizontalebenen oder zwei Vertikalebenen der zweiten Art mit einander vertauscht werden.

Eine cubische Determinante bleibt ungeändert, wenn zwei Vertikalebenen der ersten Art mit einander vertauscht werden.

Es ist also z. B. die obige Determinante $\triangle$ gleich

$$-\left\{\begin{array}{lll} 211 & 212 & 213 \\ 221 & 222 & 223 \\ 231 & 232 & 233 \\ \\ 111 & 112 & 113 \\ 121 & 122 & 123 \\ 131 & 132 & 133 \\ \\ 311 & 312 & 313 \\ 321 & 322 & 323 \\ 331 & 332 & 333 \end{array}\right. = -\left\{\begin{array}{lll} 113 & 112 & 111 \\ 123 & 122 & 121 \\ 133 & 132 & 131 \\ \\ 213 & 212 & 211 \\ 223 & 222 & 221 \\ 233 & 232 & 231 \\ \\ 313 & 312 & 311 \\ 323 & 322 & 321 \\ 333 & 332 & 331 \end{array}\right. = +\left\{\begin{array}{lll} 111 & 112 & 113 \\ 131 & 132 & 133 \\ 121 & 122 & 123 \\ \\ 211 & 212 & 213 \\ 231 & 232 & 233 \\ 221 & 222 & 223 \\ \\ 311 & 312 & 313 \\ 331 & 332 & 333 \\ 321 & 322 & 323 \end{array}\right. .$$

Als Zusatz tritt zu dem Obigen noch Folgendes hinzu:

Eine cubische Determinante verschwindet identisch, wenn zwei Horizontalebenen oder zwei Vertikalebenen der zweiten Art einander in allen Stücken gleich sind.

Ferner übersieht man auch sofort die Wahrheit des Satzes:

Um eine cubische Determinante mit einer Zahl zu multipliciren, hat man sämmtliche Elemente einer und derselben Determinanten-Ebene mit ihr zu multipliciren.

Die oben von uns gelieferte Bestimmung für die Anzahl der Entwickelungsglieder lässt auch nachstehende anscheinend von Dahlander[7]) herrührende Fassung zu:

Eine cubische Determinante nten Grades kann als Summe von n! gewöhnlichen Determinanten desselben Grades dargestellt werden.

So wäre also etwa

$$\left\{\begin{array}{ll} 111 & 112 \\ 121 & 122 \\ \\ 211 & 212 \\ 221 & 222 \end{array}\right. = \begin{vmatrix} 111 & 122 \\ 211 & 222 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 121 & 221 \\ 112 & 212 \end{vmatrix} .$$

§. 4. Fasst man alle diejenigen Entwickelungsglieder zusammen, welche das Element $a_{g,h,k}$ als gemeinschaftlichen Faktor, haben, und setzt man denselben vor eine Klammer, so bleibt in dieser ein Aggregat von $((n-1)!)^2$ Gliedern zurück, und in jedem einzelnen Gliede sind ausschliesslich solche Elemente vertreten, welche mit $a_{g,h,k}$ in keiner Horizontal- oder Vertikalebene zusammen vorkommen. Es sind diess im Ganzen $(n-1)^3$ Elemente, welche sich sofort wieder zu einer cubischen Determinante vom $(n-1)$ten Grade combiniren lassen. In ganz analoger Weise, wie bei den quadratischen Determinanten (vgl. Kap. II. §. 5), erhält man den Coëfficienten $\triangle'$ dieses Elementes, wenn $\triangle$ die ursprüngliche Determinante ist, durch die Gleichung $\triangle' = \dfrac{d\triangle}{da_{g,h,k}}$ und bezeichnet die Determinante $\triangle'$ als die erste Unterdeterminante von $\triangle$, genommen nach dem Elemente $a_{g,h,k}$.

Diess liefert uns eine zwar recurrente aber für die Praxis gleichwohl bei Weitem bequemere Regel zur wirklichen Ausrechnung einer cubischen

Determinante, als diess die oben erwähnte independente war. Ebenso, wie wir eine quadratische Determinante früher nach den Elementen einer bestimmten Reihe in Unterdeterminanten zerlegten, nehmen wir jetzt diese Zerlegung nach den Elementen einer bestimmten Ebene vor, und zwar beschränken wir uns hier auf Horizontalebenen, indem natürlich für jede andere Ebene das Verfahren sich analog gestaltet. Um den Coëfficienten jedes Elementes einer solchen Ebene zu bilden, legt man durch das Element als Anfangspunkt ein mit den Würfelkanten der Richtung nach übereinstimmendes rechtwinkliges System und ordnet alle diejenigen Elemente in eine Determinante ein, welche auf keiner der drei Axen-Ebenen dieses Systemes liegen. Zur Bestimmung des Vorzeichens brauchen wir blos zu berücksichtigen, dass jedes Element von der Form $a_{q,1,1}$ gegen $a_{q,1,2}$ und $a_{q,2,1}$ das entgegengesetzte Zeichen erhalten muss. Hieraus ziehen wir folgende Vorschrift:

Soll eine cubische Determinante nach den Elementen der qten Horizontalebene in Unterdeterminanten zerlegt werden, so untersuche man zuerst, ob die Zahl $(q + 1 + 1)$ gerade oder ungerade ist. Im ersteren Falle erhält jedes Glied der Zerlegung das positive oder negative Zeichen, je nachdem die Indexsumme $(g + h + k)$ des Elementes $a_{g,h,k}$ gerade oder ungerade ist, im anderen Falle verhält es sich umgekehrt.

Soll beispielsweise die obige Determinante dritten Grades nach den Elementen der ersten Horizontalebene in Unterdeterminanten zerlegt werden, so bildet man zuerst $1 + 1 + 1 = 3$. Dann erhält also etwa $113 = 5$ das positive, $132 = 6$ das negative Vorzeichen, weil eben der zweite der normirten Fälle eingetreten ist, und das Resultat der Zerfällung ist:

$$111\left\{\begin{matrix}222 & 223 & \\ & 232 & 233 \\ 322 & 323 & \\ & 332 & 333\end{matrix}\right. -112\left\{\begin{matrix}221 & 223 & \\ & 231 & 233 \\ 321 & 323 & \\ & 331 & 333\end{matrix}\right. +113\left\{\begin{matrix}221 & 222 & \\ & 231 & 232 \\ 321 & 322 & \\ & 331 & 332\end{matrix}\right.$$

$$-123\left\{\begin{matrix}211 & 212 & \\ & 231 & 232 \\ 311 & 312 & \\ & 331 & 332\end{matrix}\right. +122\left\{\begin{matrix}211 & 213 & \\ & 231 & 233 \\ 311 & 313 & \\ & 331 & 333\end{matrix}\right. -121\left\{\begin{matrix}212 & 213 & \\ & 232 & 233 \\ 312 & 313 & \\ & 332 & 333\end{matrix}\right. ;$$

$$+131\left\{\begin{matrix}212 & 213 & \\ & 222 & 223 \\ 312 & 313 & \\ & 322 & 323\end{matrix}\right. -132\left\{\begin{matrix}211 & 213 & \\ & 221 & 223 \\ 311 & 313 & \\ & 321 & 323\end{matrix}\right. +133\left\{\begin{matrix}211 & 212 & \\ & 221 & 222 \\ 311 & 312 & \\ & 321 & 322\end{matrix}\right.$$

hingegen würde man bei der nach den Elementen der zweiten Horizontalreihe zerlegten Determinante*) $\Sigma \pm 111, 222$ finden:

$$\begin{matrix}111 & 112 & \\ & 121 & 122 \\ 211 & 212 & \\ & 221 & 222\end{matrix} = 211 \,.\, 122 - 212 \,.\, 121 + 222 \,.\, 111 - 221 \,.\, 112,$$

indem hier die Indexsumme $2 + 1 + 1 = 4$ eine gerade Zahl ist.

Nun können wir auch die früher gelernten Regeln zur Bildung höhe-

*) Man erkennt die unmittelbare Uebertragbarkeit des Summensymbols auf cubische und späterhin auch auf noch höhere Determinanten.

rer Unterdeterminanten auf cubische Determinanten ausdehnen; die den Coëfficienten $\triangle_q$ des Produktes $a_{b_1,\,c_1,\,d_1}\, a_{b_2,\,c_2,\,d_2} \ldots a_{b_q\, c_q\, d_q}$ bestimmende Relation wird sein

$$\triangle_q = \frac{d^q \triangle}{da_{b_1,\,c_1,\,d_1}\; da_{b_2,\,c_2,\,d_2} \ldots da_{b_q,\,c_q,\,d_q}}.$$

§. 5. Die Entwickelung einer cubischen Determinante zeigt auch, dass, wenn sämmtliche Elemente ein und derselben Ebene aus gleichvielen Summanden zusammengesetzt sind, die Determinante sich in eine Summe zerlegen lässt, deren einzelne Glieder wieder cubische Determinaten sind.

So ist ganz allgemein

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{1,1,1}\; a_{1,1,2} \ldots a_{1,1,q} + b^{(1)}_{1,1} + \ldots + b^{(q)}_{1,1} \ldots a_{1,1,n} \\
\quad a_{1,2,1}\; a_{1,2,2} \ldots a_{1,2,q} + b^{(1)}_{1,2} + \ldots + b^{(q)}_{1,2} \ldots a_{1,2,n} \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{1,n,1}\; a_{1,n,2} \ldots a_{1,n,q} + b^{(1)}_{1,n} + \ldots + b^{(q)}_{1,n} \ldots a_{1,n,n} \\
a_{2,1,1}\; a_{2,1,2} \ldots a_{2,1,q} + b^{(1)}_{2,1} + \ldots + b^{(q)}_{2,1} \ldots a_{2,1,n} \\
\quad a_{2,2,1}\; a_{2,2,2} \ldots a_{2,2,q} + b^{(1)}_{2,2} + \ldots + b^{(q)}_{2,2} \ldots a_{2,2,n} \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{2,n,1}\; a_{2,n,2} \ldots a_{2,n,q} + b^{(1)}_{2,n} + \ldots + b^{(q)}_{2,n} \ldots a_{2,n,n} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n,1,1}\; a_{n,1,2} \ldots a_{n,1,q} + b^{(1)}_{n,1} + \ldots + b^{(q)}_{n,1} \ldots a_{n,1,n} \\
\quad a_{n,2,1}\; a_{n,2,2} \ldots a_{n,2,q} + b^{(1)}_{n,2} + \ldots + b^{(q)}_{n,2} \ldots a_{n,2,n} \\
\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{n,n,1}\; a_{n,n,2} \ldots a_{n,n,q} + b^{(1)}_{n,n} + \ldots + b^{(q)}_{nn}, \ldots a_{n,n,n}
\end{array}\right\}
= \left\{\begin{array}{l}
a_{1,1,1} \ldots a_{1,1,q} \ldots a_{1,1,n} \\
\quad a_{1,2,1} \ldots a_{1,2,q} \ldots a_{1,2,n} \\
\quad \cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{1,n,1} \ldots a_{1,n,q} \ldots a_{1,n,n} \\
a_{2,1,1} \ldots a_{2,1,q} \ldots a_{2,1,n} \\
\quad a_{2,2,1} \ldots a_{2,2,q} \ldots a_{2,2,n} \\
\quad \cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{2,n,1} \ldots a_{2,n,q} \ldots a_{2,n,n} \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots \\
a_{n,1,1} \ldots a_{n,1,q} \ldots a_{n,1,n} \\
\quad a_{n,2,1} \ldots a_{n,2,q} \ldots a_{n,2,n} \\
\quad \cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{n,n,1} \ldots a_{n,n,q} \ldots a_{n,n,n}
\end{array}\right\}$$

$$+\left\{\begin{array}{l}
a_{1,1,1} \ldots b^{(1)}_{1,1} \ldots a_{1,1,n} \\
\quad a_{1,2,1} \ldots b^{(1)}_{1,2} \ldots a_{1,2,n} \\
\quad \cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{1,n,1} \ldots b^{(1)}_{1,n} \ldots a_{1,n,n} \\
a_{2,1,1} \ldots b^{(1)}_{2,1} \ldots a_{2,1,n} \\
\quad a_{2,2,1} \ldots b^{(1)}_{2,2} \ldots a_{2,2,n} \\
\quad \cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{2,n,1} \ldots b^{(1)}_{2,n} \ldots a_{2,n,n} \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots \\
a_{n,1,1} \ldots b^{(1)}_{n,1} \ldots a_{n,1,n} \\
\quad a_{n,2,1} \ldots b^{(1)}_{n,2} \ldots a_{n,2,n} \\
\quad \cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{n,n,1} \ldots b^{(1)}_{n,n} \ldots a_{n,n,n}
\end{array}\right\}
+ \ldots +
\left\{\begin{array}{l}
a_{1,1,1} \ldots b^{(q)}_{1,1} \ldots a_{1,1,n} \\
\quad a_{1,2,1} \ldots b^{(q)}_{1,2} \ldots a_{1,2,n} \\
\quad \cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{1,n,1} \ldots b^{(q)}_{1,n} \ldots a_{1,n,n} \\
a_{2,1,1} \ldots b^{(q)}_{2,1} \ldots a_{2,1,n} \\
\quad a_{2,2,1} \ldots b^{(q)}_{2,2} \ldots a_{2,2,n} \\
\quad \cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{2,n,1} \ldots b^{(q)}_{2,n} \ldots a_{2,n,n} \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots \\
a_{n,1,1} \ldots b^{(q)}_{n,1} \ldots a_{n,1,n} \\
\quad a_{n,2,1} \ldots b^{(q)}_{n,2} \ldots a_{n,2,n} \\
\quad \cdots\cdots\cdots \\
\qquad a_{n,n,1} \ldots b^{(q)}_{n,n} \ldots a_{n,n,n}
\end{array}\right\};$$

denn entwickelt man die erste Determinante, so ist klar, dass jedes Glied der Entwickelung eine Summe von der Form $(a_{k,l,m} + Sb_{k,l})$ als Faktor enthalten muss; rechnet man also aus, so ergeben sich $(q + 1)$ Aggregate von je $(n!)^2$ Gliedern, deren jedes bezüglich mit einer der $(q + 1)$ obigen Determinanten identisch ist. Sollte jeder der Terme von gleichem oberen Index (i) noch mit ein und demselben Faktor behaftet sein, so würde sich derselbe bezüglich vor die 2te, 3te . . . $(q + 1)$te Determinante heraussetzen lassen.

§. 6. Im Anschlusse an die oben (§. 4) durchgeführte Zerlegung einer cubischen Determinante möge noch der spezielle Fall in's Auge gefasst werden, dass in dem Würfel-Schema zwei mit einer Ecke in die Hauptdiagonale fallende rechtwinklige Parallelepipeda ausschliesslich durch Nullen ausgefüllt erscheinen. Gegeben sei die Determinante vierten Grades

$$\triangle = \left\{\begin{array}{llll}
a_{1,1,1} & a_{1,1,2} & a_{1,1,3} & a_{1,1,4} \\
a_{1,2,1} & a_{1,2,2} & a_{1,2,3} & a_{1,2,4} \\
a_{1,3,1} & a_{1,3,2} & a_{1,3,3} & a_{1,3,4} \\
a_{1,4,1} & a_{1,4,2} & a_{1,4,3} & a_{1,4,4} \\
a_{2,1,1} & a_{2,1,2} & a_{2,1,3} & a_{2,1,4} \\
a_{2,2,1} & a_{2,2,2} & a_{2,2,3} & a_{2,2,4} \\
a_{2,3,1} & a_{2,3,2} & a_{2,3,3} & a_{2,3,4} \\
a_{2,4,1} & a_{2,4,2} & a_{2,4,3} & a_{2,4,4} \\
a_{3,1,1} & a_{3,1,2} & 0 & 0 \\
a_{3,2,1} & a_{3,2,2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_{3,3,3} & a_{3,3,4} \\
0 & 0 & a_{3,4,3} & a_{3,4,4} \\
a_{4,1,1} & a_{4,1,2} & 0 & 0 \\
a_{4,2,1} & a_{4,2,2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & a_{4,3,3} & a_{4,3,4} \\
0 & 0 & a_{4,4,3} & a_{4,4,4}
\end{array}\right. ,$$

und es sei gefordert, diese Determinante in Unterdeterminanten zu zerlegen, und zwar nach den Elementen der vierten Horizontalebene. Man findet $\triangle$ gleich

$$a_{4,4,4}\, a_{3,3,3} \left\{\begin{array}{ll} a_{1,1,1} & a_{1,1,2} \\ a_{1,2,1} & a_{1,2,2} \\ a_{2,1,1} & a_{2,1,2} \\ a_{2,2,1} & a_{2,2,2} \end{array}\right. - a_{4,4,3}\, a_{3,3,4} \left\{\begin{array}{ll} a_{1,1,1} & a_{1,1,2} \\ a_{1,2,1} & a_{1,2,2} \\ a_{2,1,1} & a_{2,1,2} \\ a_{2,2,1} & a_{2,2,2} \end{array}\right. + a_{4,3,3}\, a_{3,4,4} \left\{\begin{array}{ll} a_{1,1,1} & a_{1,1,2} \\ a_{1,2,1} & a_{1,2,2} \\ a_{2,1,1} & a_{2,1,2} \\ a_{2,2,1} & a_{2,2,2} \end{array}\right.$$

$$- a_{4,3,4}\, a_{3,4,3} \left\{\begin{array}{ll} a_{1,1,1} & a_{1,1,2} \\ a_{1,2,1} & a_{1,2,2} \\ a_{2,1,1} & a_{2,1,2} \\ a_{2,2,1} & a_{2,2,2} \end{array}\right. + a_{4,2,2}\, a_{3,1,1} \left\{\begin{array}{ll} a_{1,3,3} & a_{1,3,4} \\ a_{1,4,3} & a_{1,4,4} \\ a_{2,3,3} & a_{2,3,4} \\ a_{2,4,3} & a_{2,4,4} \end{array}\right. - a_{4,1,2}\, a_{3,2,1} \left\{\begin{array}{ll} a_{1,3,3} & a_{1,3,4} \\ a_{1,4,3} & a_{1,4,4} \\ a_{2,3,3} & a_{2,3,4} \\ a_{2,4,3} & a_{2,4,4} \end{array}\right.$$

$$+ a_{4,1,1}\, a_{3,2,2} \left\{\begin{array}{ll} a_{1,3,3} & a_{1,3,4} \\ a_{1,4,3} & a_{1,4,4} \\ a_{2,3,3} & a_{2,3,4} \\ a_{2,4,3} & a_{2,4,4} \end{array}\right. - a_{4,2,1}\, a_{3,1,2} \left\{\begin{array}{ll} a_{1,3,3} & a_{1,3,4} \\ a_{1,4,3} & a_{1,4,4} \\ a_{2,3,3} & a_{2,3,4} \\ a_{2,4,3} & a_{2,4,4} \end{array}\right. ,$$

und dieses Aggregat kann man offenbar auch so schreiben:

$$\left\{\begin{matrix} a_{1,1,1} & a_{1,1,2} \\ a_{1,2,1} & a_{1,2,2} \\ a_{2,1,1} & a_{2,1,2} \\ a_{2,2,1} & a_{2,2,2} \end{matrix}\right. \cdot \left\{\begin{matrix} a_{3,3,3} & a_{3,3,4} \\ a_{3,4,3} & a_{3,4,4} \\ a_{4,3,3} & a_{4,3,4} \\ a_{4,4,3} & a_{4,4,4} \end{matrix}\right. + \left\{\begin{matrix} a_{1,3,3} & a_{1,3,4} \\ a_{1,4,3} & a_{1,4,4} \\ a_{2,3,3} & a_{2,3,4} \\ a_{2,4,3} & a_{2,4,4} \end{matrix}\right. \cdot \left\{\begin{matrix} a_{3,1,1} & a_{3,1,2} \\ a_{3,2,1} & a_{3,2,2} \\ a_{4,1,1} & a_{4,1,2} \\ a_{4,2,1} & a_{4,2,2} \end{matrix}\right. .$$

Diess Resultat lässt sich verallgemeinern zu folgendem dem in Kap. II. §. 18 behandelten Corollar des Laplace'schen Theoremes entsprechenden Satze:

Sind in einer cubischen Determinante des 2nten Grades die $2n^3$ Elemente, welche n Vertikalebenen mit n Horizontalebenen, und welche die anderen n Vertikalebenen derselben Art mit den nämlichen n Horizontalebenen gemein haben, durch Nullen ersetzt, so reducirt sich die Determinante auf eine Summe aus zwei Summanden, deren jeder aus zwei Determinanten des nten Grades als Faktoren zusammengesetzt ist. Selbsverständlich existirt ein analoger Lehrsatz auch für Determinanten ungeraden Grades.

Dieselbe Wahrheit würde sich auch haben finden lassen dadurch, dass man die cubische Determinante ganz allgemein in Aggregate aus Unterdeterminanten beliebiger Grade zerfällt hätte. Armenante*) hat diese Aufgabe in sehr allgemeinem Sinne gelöst [8].

§. 7. Es steht nichts im Wege, in der nämlichen Weise, wie wir hier Determinanten mit drei Indices gebildet haben, auch solche mit vier, und überhaupt mit beliebig vielen Indices zu bilden; jedoch müssen wir dann auf die geometrische Darstellung verzichten. In der oben angeführten Schrift von Zehfuss sind einige Fundamentalsätze von solchen Determinanten entwickelt.

Die Anzahl der jedem Elemente angehängten Indices bestimmt den Rang der Determinante; derselbe ist also für die quadratischen (vulgären) Determinanten $= 2$, für die cubischen $= 3$. Um die Glieder einer solchen Determinante von ntem Range und qtem Grade zu erhalten, geht man vom Anfangsgliede $a_{1,1,1} \ldots {}_{1_n}\, a_{2,2,2} \ldots {}_{2_n} \ldots a_{q,q,q} \ldots {}_{q_n}$ aus und bestimmt nun willkürlich eine Serie $1_m\, 2_m \ldots q_m$ der Indices, welche bei den nachfolgenden Vertauschungen fest zu bleiben hat.

Alsdann setzt man resp. für die 1te, 2te ... (m—1)te, (m+1)te ... nte Serie alle Complexionen successive ein, welche aus der normalen Anfangscomplexion durch Permutation hervorgehen können. Die Anzahl aller Entwickelungsglieder, welche die Determinante ergiebt, ist dann offenbar $(q\,!)^{n-1}$. Die Zeichenregel formulirt Zehfuss [9]) in dieser Weise: „Liefert die erste veränderliche Serie der Indices für sich m', die zweite m'', die dritte m''' Inversionen, so ist das Vorzeichen eines Gliedes der höheren Determinante + oder —, je nachdem die Gesammtzahl $(m' + m'' + m''' + \ldots)$ seiner Inversionen gerade oder ungerade ist," — eine Vorschrift, welche mit der oben (§. 2) für den Spezialfall der cubischen Determinanten gegebenen ersichtlich übereinstimmt. Mansion [10]) hat die sehr richtige Bemerkung gemacht, dass der für zwei Indices unmittelbar einleuchtende

*) Die Formel Armenante's im Original ist offenbar verdruckt, aber leicht zu verbessern. Für $\alpha = n$ wäre ihm zufolge die Gliederanzahl nicht 1, wie sie doch muss.

Satz: „Jede paare oder unpaare Permutation behält diese Eigenschaft, wenn man zwei Elemente ihre Plätze wechseln lässt“ auch für den ganz allgemeinen Fall beliebig vieler Indices sein Analogon behalte und somit „la théorie des déterminants à un nombre quelconque de dimensions“ zu begründen dienlich sei.

Die für quadratische und cubische Determinanten geltenden Sätze über das Vertauschen der Reihen bezüglich Ebenen lassen sich folgendermassen [11]) in erweiterter Fassung geben: „Jede Determinante höheren Ranges wechselt ihr Zeichen, wenn zwei derselben veränderlichen Serie angehörige Indices durchweg vertauscht werden. Wenn dagegen zwei der festen Serie angehörige Indices untereinander vertauscht werden, so wechselt die Determinante ihr Zeichen oder nicht, je nachdem sie geraden oder ungeraden Ranges ist.“ Aus diesem Grunde ist es vortheilhaft, bei ungeradem Rang immer den mittleren Index fest zu lassen.

Auch die für die praktische Auswerthung so nützliche Zerlegung in Unterdeterminanten lässt sich leicht in verallgemeinerte Formen bringen. Nennt man alle diejenigen Elemente, welche den nämlichen variablen Index als ersten aufweisen, in übertragener Bedeutung einer Horizontalebene (von mehr als zwei Dimensionen) angehörig, so kann man Folgendes aussagen:

Jedes Element einer Horizontalebene erhält als Faktor (adjungirte Unterdeterminante) eine Determinante vom nächst niederen Grade, gebildet aus allen Elementen, welche keinen Index mit den seinigen bezüglich gleich haben; das Produkt ist positiv oder negativ, je nachdem das Anfangselement $a_{p,1,1\ldots1}$ der Ebene eine gerade oder ungerade, hingegen das betreffende Element eine ungerade oder gerade Indexsumme besitzt.

1) Somoff, Mémoire sur les accélérations de divers ordres, Mémoir. de l'acad. de St. Pétersbourg, Tome VIII. S. 53. — 2) De Gasparis, Sopra due teoremi dei determinanti a tre indice, ed un altra maniera di formazione de gli elementi di un determinante ad m indice, Rendiconti dell' accad. di Napoli, Tomo VIII. S. 118 ff. — 3) Armenante, Sui determinanti cubici, Giornale di matematiche, VI. S. 175 ff. — 4) Padova, Sui determinanti cubici, Ibid. VI. S. 182 ff. — 5) Zehfuss, Ueber eine Erweiterung des Begriffs der Determinanten, Frankfurt 1868. — 6) Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1868. S. 10 ff. — 7) Dahlander, Om en klass funktioner, hvilka ega flera egenskaper analoga med determinanternes, Öfvers. af K. Vet.-Akad. Förh. 1863. S. 300. — 8) Armenante, S. 180. — 9) Zehfuss, S. 3. — 10) Mansion, Éléments de la théorie des déterminants d'après Baltzer et Salmon, Mons 1875. S. 10. — 11) Zehfuss, S. 4.

Anhang I.

Aufgabensammlung.

1) Schreibt man in der durch nachstehendes Schema angedeuteten Weise einer dreireihigen Determinante die beiden ersten Colonnen rechts bei:

$$\left|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

und multiplicirt so über's Kreuz, dass den ersten drei Produkten das negative, den anderen das positive Zeichen zukommt, so erhält man die ausgerechnete Determinante.

(Von Sarrus angegeben; Finck, Éléments d'algèbre, Strasbourg 1846. S. 95.)

2) Zu zeigen, dass das zweite Diagonalglied positiv oder negativ wird, je nachdem die Determinante den Grad $\left.\begin{matrix} 2(2n+1) \\ 2(2n+1)+1 \end{matrix}\right\}$ oder aber den Grad $\left.\begin{matrix} 4n \\ 4n+1 \end{matrix}\right\}$ hat.

3) Zu zeigen, dass

$$\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^3.$$

(Mansion, Introduction à la théorie des déterminants, Gand-Mons 1876. S. 3.)

4) Betrachtet man ein nach der ersten Regel des Byzantiners Moschopulos construirtes magisches Quadrat von $(4n)^2$ Zellen als Determinante, so verschwindet dieselbe identisch.

(Mittheilung von Hrn. Studnička in Prag; Günther, Verm. Unters. zur Gesch. d. mathem. Wissenschaften, Leipzig 1876. S. 209 ff.)

5) Zu zeigen, dass für beliebige a, b, c, d die Identität besteht

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

(**Mansion**, Éléments de la theorie des déterminants, Mons - Bruxelles - Gand 1875. S. 14.)

6) Haben in der Determinante fünften Grades $\Sigma \pm a_1\, b_2\, c_3\, d_4\, e_5$ die Elemente b_2, c_2, e_2; b_4, c_4, e_4; b_5, c_5, e_5 einen gemeinschaftlichen Faktor, so gehört derselbe auch der Determinante selbst an. Wie lautet das hierin liegende Theorem allgemein?

(**Muir**, Extension of a law of determinants, Messenger of the Mathematics, 1872. S. 60 ff.)

7) Zu zeigen, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

den Werth 1 oder Null besitzt, je nach ihrem Grade.

(**Mansion**, S. 19.)

8) Ist für eine Determinante $\triangle = \Sigma \pm a_{1,1} \dots a_{n,n}$ allgemein

$$a_{i,i} = a_{1,i} = M \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

und ist zugleich jedes links der ersten Diagonale gelegene Element $\triangle = -M$, so ist unter allen Umständen

$$2\triangle = (2M)^{n-1}.$$

(**Dostor**, Propriété des déterminants, Archiv d. Math. u. Phys. 56. Theil, S. 239.)

9) Zu zeigen, dass die Determinante aus Binomialcoëfficienten

$$\begin{vmatrix} \binom{c+m-1}{0} & \binom{c+m}{1} & \binom{c+m+1}{2} & \dots & \binom{c+2m-1}{m} \\ \binom{c+m}{0} & \binom{c+m+1}{1} & \binom{c+m+2}{2} & \dots & \binom{c+2m}{m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{c+2m-1}{0} & \binom{c+2m}{1} & \binom{c+2m+1}{2} & \dots & \binom{c+3m-1}{m} \end{vmatrix}$$

den Werth 1 hat.

(**Baltzer**, Theorie und Anwendung der Determinanten, Leipzig 1875. S. 22.)

10) Wie lässt sich die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}$$

durch die Sinus der halben Winkeldifferenzen darstellen?

(**Mellberg**, Teorin för Determinant-kalkylen, Helsingfors 1876. S. 75.)

11) Versteht man unter $\triangle^n$ das bekannte Symbol der Differenzenrechnung, so lässt sich die Identität

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots u_0 \\ 1 & 1!h & 0 & 0 & \dots u_1 \\ 1 & 2h & 2!h^2 & 0 & \dots u_2 \\ 1 & 3h & 3.2h^2 & 3!h^3 & \dots u_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & nh & n(n-1)h^2 & n(n-1)(n-2)h^3 & \dots u_n \end{vmatrix} = \Delta^n u_0 \prod_{i=1}^{i=n} i!\, h^i$$

nachweisen.

(Janni, Lezioni di algebra complementare, Napoli 1876. S. 23.)

12) Zu zeigen, dass nachstehende Gleichung richtig ist:

$$\begin{vmatrix} a & a+d & \dots & a+(n-1)d \\ a+d & a+2d & \dots & a \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a+(n-1)d & a & \dots & a+(n-2)d \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}} (nd)^{n-1}\left(a + \frac{(n-1)d}{2}\right).$$

(Cremona, Solution de la question 465, Nouv. Annal. I. Sér. tome 19. S. 153.)

13) Ist eine beliebige erste Unterdeterminante einer Determinante gleich Null, so verschwindet auch identisch die entsprechende Unterdeterminante der adjungirten.

14) Warum ist

$$\Sigma \pm a_1b_2c_3d_4 = \frac{\Sigma \pm a_1b_2c_3 \,.\, \Sigma \pm b_2c_3d_4 - \Sigma \pm b_1c_2d_3 \,.\, \Sigma\, a_2b_3c_4}{\Sigma \pm b_2c_3},$$

und wie lässt sich ein analoger Satz für drei- und fünfreihige Determinanten aussprechen?

(Mittheilung von Herrn Prof. Studnička.)

15) Mit Hülfe des Hauptsatzes von den adjungirten Determinanten soll die Identität

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2)^2 - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 \\ = (a_1b_2)^2 + (b_1c_2)^2 + (c_1a_2)^2$$

bewiesen werden.

16) Desgleichen, dass

$$\begin{vmatrix} a & ar & ar^2 & \dots & ar^{n-1} \\ ar & ar^2 & ar^3 & \dots & a \\ ar^2 & ar^3 & ar^4 & \dots & ar \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ ar^{n-1} & a & ar & \dots & ar^{n-2} \end{vmatrix} = \pm\, a^n (r^n - 1)^{n-1};$$

in welchen Fällen steht das positive, in welchen das negative Zeichen?

(Baehr, Solution de la question 432, Nouv. Ann. t. 19. S. 174.)

17) Setzt man, das Summenzeichen in seiner bekannten Bedeutung genommen,

$$f_{(x)} = x^n + S\alpha_1 x^{n-1} + S\alpha_1\alpha_2 x^{n-2} + \dots,$$

so soll

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & -1 & -1 & \dots \\ -1 & \alpha_2 & -1 & \dots \\ -1 & -1 & \alpha_3 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = f_{(1)} - f'_{(1)}$$

sein. Wie lässt sich dieser Satz verallgemeinern?

(Smet-Jamar, Question 694. Ibid. Sér. II. tome 3. S. 395.)

18) Wie lässt sich das Produkt zweier unvollständiger Determinanten deuten? Z. B. das folgende:

$$\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{matrix}\right\| .$$

19) Verschwindet eine Determinante zweiten Grades identisch, so ist jede Potenz derselben eine symmetrische Determinante.

(Seeliger, Bemerkungen über symmetrische Determinanten und Anwendung dieser auf eine Aufgabe der anal. Geometrie, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 20. Jahrg. S. 469.)

20) Es soll die Identität

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_1 & x_4 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_2 \\ x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \end{vmatrix} = (x_1+x_2-x_3-x_4)\,(x_1+x_3-x_2-x_4)\,(x_1+x_4-x_2-x_3)\,(x_2+x_3-x_1-x_4)$$

bewiesen und womöglich verallgemeinert werden.

(Diekmann, Einleitung in die Theorie von den Determinanten, Essen 1876, S. 72.)

21) Es soll die Identität

$$\begin{vmatrix} a_1 & m_2 & \cdot & \cdot & \cdot & m_n \\ m_1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot & m_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_1 & m_2 & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \end{vmatrix} = \mathop{\Pi}_{i=1}^{i=n}(a_i-m_i) - \mathop{S}_{p=1}^{p=n} m_p \frac{d\Pi}{dm_p}$$

erhärtet werden.

(Sardi, Un teorema sui determinanti, Battaglini's Giornale, Tomo VI. S. 357 ff.)

22) Sind $a_1, a_2 \ldots a_n$ beliebige Grössen und setzt man $A_i = S - a_i$, so gilt

$$\begin{vmatrix} -A_1+x & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1 & -A_2+x & \ldots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1 & a_2 & \ldots & -A_n+x \end{vmatrix} = x(x-S)^{n-1}.$$

(F. Lucas, Sur une formule d'analyse, Comptes Rend. de l'acad. 1870. S. 1167.)

23) Wie lässt sich der Fundamentalsatz von den doppelt-orthosymmetrischen Determinanten für den Fall der Determinante

$$\begin{vmatrix} a & a^r & a^{r^2} & \ldots & a^{r^{n-2}} \\ a^r & a^{r^2} & a^{r^3} & \ldots & a \\ a^{r^2} & a^{r^3} & a^{r^4} & \ldots & a^r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^{r^{n-2}} & a & a^r & \ldots & a^{r^{n-3}} \end{vmatrix}$$

erweitern, wo r eine Primitivwurzel der Primzahl n, α eine nte Einheitswurzel ist?

(Stern, Einige Bemerkungen über eine Determinante, Journ. f. die reine u. angew. Mathem. 73. Band. S. 376 ff.)

24) Setzt man jedes Glied einer Colonne einer Determinante aus zwei Summanden zusammen, deren jeder ein bestimmtes Multiplum einer figurirten Zahl (p — 1)ter und pter Ordnung ist, so ist diese Determinante kten Grades

$$\Sigma \pm a,\ 2a + d,\ 6a + 4d,\ 19a + 15d \ldots = a^k.$$

(Caldarea, Nota su talune proprietà dei determinanti, in ispecie di quelli a matrici composte con la serie dei numeri figurati, Battaglini's Giornale, Tomo IX. 232.)

25) Für $S = x + y + z + u$, besteht die Relation

$$\begin{vmatrix} (S-u)^2 & x^2 & y^2 & z^2 \\ u^2 & (S-x)^2 & y^2 & z^2 \\ u^2 & x^2 & (S-y^2) & z^2 \\ u^2 & x^2 & y^2 & (S-z)^2 \end{vmatrix} = 2S^5\, xyzu\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{u} + \frac{1}{S}\right).$$

(Wolstenholme, Educational Times, XV. S. 40.)

26) Wie lässt sich die nreihige Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1} & \ldots & a_1^{n-h+1} & a_1^{n-h-1} & \ldots & a_1^1 & a_1^0 \\ a_2^n & a_2^{n-1} & \ldots & a_2^{n-h+1} & a_2^{n-h-1} & \ldots & a_2^1 & a_2^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^n & a_n^{n-1} & \ldots & a_n^{n-h+1} & a_n^{n-h-1} & \ldots & a_n^1 & a_n^0 \end{vmatrix}$$

auf das gewöhnliche Differenzenprodukt zurückführen?

(Fiore, Dimostrazione d'una trasformazione de determinanti, Battaglini's Giornale, Tomo X. S. 170.)

27) Zu beweisen, dass wenn $(a_1 \overset{p}{\ldots} a_n)$ die in Kap. III. §. 2 signalisirte Bedeutung hat, das Differenzenprodukt aus den n Grössen $a_1 \ldots a_n$ gleich nachstehendem Quotienten ist:

$$\begin{vmatrix} a_1^m & a_1^p & \ldots & a_1^r \\ a_2^m & a_2^p & \ldots & a_2^r \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n^m & a_n^p & \ldots & a_n^r \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} (a_1 \overset{m}{\ldots} a_n) & (a_1 \overset{p}{\ldots} a_n) & \ldots & (a_1 \overset{r}{\ldots} a_n) \\ (a_1 \overset{m-1}{\ldots} a_n) & (a_1 \overset{p-1}{\ldots} a_n) & \ldots & (a_1 \overset{r-1}{\ldots} a_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (a_1 \overset{m-n+1}{\ldots} a_n) & (a_1 \overset{p-n+1}{\ldots} a_n) & \ldots & (a_1 \overset{r-n+1}{\ldots} a_n) \end{vmatrix}.$$

(Naegelsbach, Studien zu Fürstenau's neuer Methode der Darstellung und Berechnung der Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coëfficienten, Archiv. d. Math. u. Phys. 59. Theil, S. 149.)

28) Bestehen zwischen den 16 Grössen a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Gleichungen

$$a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 - d_1a_2 = a_1d_3 + b_1c_3 - c_1b_3 - d_1a_3$$
$$= a_2d_4 + b_2c_4 - c_2b_4 - d_2a_4 = a_3d_4 + b_3c_4 - c_3b_4 + d_3a_4 = 0,$$
$$a_1d_4 + b_1c_4 - c_1b_4 - d_1a_4 = a_2d_3 + b_2c_3 - c_2b_3 + d_2a_3 = k,$$

so soll

$$\Sigma \pm a_1 b_2 c_3 d_4 = k^2$$

sein.

(Hermite, Théorie de la transformation des fonctions Abéliennes, Paris 1855. S. 3.)

29) Zu zeigen, dass für $s^2_{i,k} = (a_i - \alpha_k)^2 + (b_i - \beta_k)^2 + \dots$ das Produkt $(-2)^{m-1}\ \Sigma \pm 1\ a_2\, b_3 \dots l_m \,.\ \Sigma \pm 1\ \alpha_2\, \beta_3 \dots \lambda_m$ auf die Form der mit Einheiten geränderten eine Null an der Spitze tragenden Determinante $\Sigma \pm s^2_{1,1}\ s^2_{2,2} \dots$ gebracht werden kann.

(Gundelfinger, Ueber einen Satz aus der Determinantentheorie, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 18. Jahrg. S. 314.)

30) Sind $X_0, X_1 \dots X_n$ beliebige Grössen, ebenso $t_1, t_2 \dots t_n$, und ist $A_i(t) = \mathop{S}\limits_{k=0}^{k=n} \alpha_{i,k}\, t^k$, versteht man ferner unter D die Determinante $\Sigma \pm X_0\ A_1(t_1)\ A_2(t_2) \dots A_n(t_n)$ und unter $\triangle$ das Differenzenprodukt der t, so lässt sich behaupten, es sei

$$(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} \cdot \frac{D}{\triangle} = \begin{vmatrix} 0 & X_0 & X_1 & \dots & X_n \\ 1 & \alpha_{0,n} & \alpha_{1,n} & \dots & \alpha_{n,n} \\ -C_1 & \alpha_{0,n-1} & \alpha_{1,n-1} & \dots & \alpha_{n,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (-1)^n C_n & \alpha_{0,0} & \alpha_{1,0} & \dots & \alpha_{n,0} \end{vmatrix},$$

wo C_i die Summe aller Combinationen ohne Wiederholungen der n Elemente zur Klasse i bedeutet, jede Complexion als Produkt aufgefasst.

(E. Schröder, Ueber v. Staudt's Rechnung mit Würfen und verwandte Processe, mathem. Annalen, 10. Band. S. 298.)

31) Entwickelt man den Ausdruck

$$e^{\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}}\,(1 - x)^{-\frac{1}{2}}$$

in eine nach steigenden Potenzen von x fortlaufende Reihe, und hat das Glied x^n dieser Reihe den Faktor N_n, so ist $n!\ N_n$ gleich der Gliederanzahl einer ausgerechneten symmetrischen Determinante.

(Cayley, On the number of distinct terms in a symmetrical or partially symmetrical determinant, Monthly Notices of the Astronomical Society XXXIV. S. 303 ff.)

32) Dieser independenten Bestimmung steht folgende recurrente zur Seite:

$$N_k - N_{k-1} - (k-1)^2\, N_{k-2} + \tfrac{1}{2}\,(k-1)\,(k-2)\,(N_{k-3} + (k-3)\,N_{k-4}) = 0.$$

(Cayley-Roberts, Solution of a question, Educat. Times XXI. S. 81 ff.)

33) In einer allgemeinen Determinante $\Sigma \pm a_{1,1} \dots a_{n,n}$ sind h Elemente $a_{i_1,k_1}, a_{i_2,k_2} \dots a_{i_h\, k_h}$ durch Nullen ersetzt; wie viele Entwickelungsglieder bleiben dann noch übrig?

34) Versteht man in gewohnter Weise unter ggd $\{a, b\}$ das grösste gemeinschaftliche Mass von a und b, unter $\varphi(i)$ nach Gauss die Anzahl aller Primzahlen $< i$, die in dieser Zahl ohne Rest enthalten sind, so ist

$$\begin{vmatrix} \text{ggd}\{1, 1\} & \text{ggd}\{1, 2\} & \dots & \text{ggd}\{1, n\} \\ \text{ggd}\{2, 1\} & \text{ggd}\{2, 2\} & \dots & \text{ggd}\{2, n\} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \text{ggd}\{n, 1\} & \text{ggd}\{n, 2\} & \dots & \text{ggd}\{n, n\} \end{vmatrix} = \varphi(1)\,\varphi(2)\dots\varphi(n).$$

(Satz von Prof. Smith in London; Mittheilung von Hrn. Glaisher in Cambridge.)

35) Welche Werthe für die Unbekannten liefert nachstehendes System linearer Gleichungen

$$a_{1,i}\,x_1 + a_{2,i}\,x_2 + \dots + a_{k,i}\,x_k + \dots + a_{n,i}\,x_n = a_{k,i}\ (i = 1, 2 \dots n)?$$

36) Aus den drei Gleichungen

$$\varrho x = a_1 + \lambda b_1 + \lambda^2 c_1;\ \varrho y = a_2 + \lambda b_2 + \lambda^2 c_2;\ \varrho z = a_3 + \lambda b_3 + \lambda^2 c_3$$

sind die Grössen ϱ und λ zu eliminiren.

(Mittheilung von Hrn. Schüler in München.)

37) Hat man drei lineare Gleichungen der Form

$$a_i x + b_i y + c_i z = d_i\ (i = 1, 2, 3),$$

und ist jede dieser Gleichungen mit den beiden anderen, für sich genommen, unverträglich, so müssen sämmtliche zweireihigen Unterdeterminanten von $\Sigma \pm a_1\, b_2\, c_3$ identisch verschwinden, und zudem müssen diese Ungleichungen zu Recht bestehen:

$$\begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \gtrless 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} \gtrless 0, \quad \begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

(Versluys, Discussion complète d'un système d'équations linéaires, Archiv d. Math. u. Phys. 52. Theil. S. 267.)

38) Wird in bekannter Weise

$$\sec x = 1 + \frac{E_1}{2!}x^2 + \frac{E_2}{4!}x^4 + \dots$$

gesetzt, so bestimmen sich die hier auftretenden Secantencoëfficienten oder Euler'schen Zahlen durch die Relation

$$E_n = (2n)! \begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots 0 \\ \frac{1}{6!} & \frac{1}{4!} & \frac{1}{2!} & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-2)!} & \frac{1}{(2n-4)!} & \dots \frac{1}{2!} \end{vmatrix}$$

(Glaisher, Expressions for Laplace's Coëfficients, Bernoullian and Eulerian Numbers etc., as determinants, Messenger of Mathematics, Separat, London 1876. S. 4.)

39) Bezeichnet B_n ebenso die nte Bernoulli'sche Zahl, für die bereits Kap. III. §. 5 eine Darstellung brachte, so ist

$$B_n = (-1)^{n+1}\,(2n)!\begin{vmatrix} \frac{1}{2!} & 1 & 0 & \dots 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots 0 \\ \frac{1}{4!} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{(2n+1)!} & \frac{1}{(2n)!} & \frac{1}{(2n-1)!} & \dots \frac{1}{2!} \end{vmatrix}.$$

Es muss also diese Determinante für ein gerades n identisch sich annulliren; warum?

(Ibid. S. 4.)

40) Die Bernoulli'schen Zahlen lassen auch noch eine andere independente Form zu; hat C_i^k den bekannten Sinn der Combinatorik, so ist auch

$$n!\,B_{n-1} = (-1)^{n-1}\begin{vmatrix} C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & C_n^{n-4} & \dots & C_n^1 & 1 \\ C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & C_{n-1}^{n-4} & \dots & C_{n-1}^1 & 1 \\ 0 & C_{n-2}^{n-3} & C_{n-2}^{n-4} & \dots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_2^1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(E. Lucas, Théorie nouvelle des nombres de Bernoulli et d'Euler, Annali di Matematica, Ser. II. Tomo VIII. S. 61.)

41) Sind φ_x und ψ_x willkürliche Funktionen von x und wird — symbolisch — die Summe $(y\varphi'_x + y'\varphi_x)^n = \psi_x^{(n)}$ gesetzt, so ist

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\psi_x}{\varphi_x}\right) = \frac{(-1)^n}{(\varphi_x)^{n+1}}\begin{vmatrix} \psi_x & \varphi_x & 0 & 0 & \dots 0 \\ \psi'_x & \varphi'_x & \varphi_x & 0 & \dots 0 \\ \psi''_x & \varphi''_x & 2\varphi'_x & \varphi_x & \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_x^{(n+1)} & \varphi_x^{(n+1)} & \binom{n}{1}\varphi_x^{(n)} & \binom{n}{2}\varphi_x^{(n-1)} & \dots \varphi_x \end{vmatrix}.$$

(Hammond, Proceedings of the London Mathematical Society, t. VI. S. 69.)

42) Behält das Symbol [i k] die aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannte Bedeutung bei, so lassen sich die von Encke eingeführten „Hülfsgrössen" [i k . l] durch Determinanten jener ersteren Symbole darstellen; es ist z. B.

$$[aa]\,[bb.1]\,[cc.2]\,[ed.3] = \begin{vmatrix} [aa] & [ab] & [ac] & [ad] \\ [ba] & [bb] & [bc] & [bd] \\ [ca] & [cb] & [cc] & [cd] \\ [ea] & [eb] & [ec] & [ed] \end{vmatrix}.$$

(Glaisher, On the solution of the equations in the method of least squares, Monthly Notices of the Astronomical Society, 1874. S. 319; auch van Geer, Over het gebruik von determinanten by de Methode der kleinsten

Quadrate, Nieuw Archief voor Wiskunde (red. v. Bierens de Haan) T. I. S. 129 ff.)

43) Es sei

$$z_i = a_{i,1}\, y_1 + a_{i,2}\, y_2 + \ldots + \alpha_{i,n}\, y_n \ (i = 1, 2 \ldots n);$$

ebenso seien die Grössen y'_i und z'_i unter sich verbunden, und dabei unter denselben Verhältnissen

$$y'_i = a_{i,1}\, y_1 + \ldots + a_{i,n}\, y_n; \quad z'_i = b_{i,1}\, z_1 + \ldots + b_{i,n}\, z_n.$$

Setzt man dann bei nicht verschwindenden Substitutionsdeterminanten

$$P = \begin{vmatrix} a_{1,1}-\omega & \ldots & a_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n} & \ldots & a_{n,n}-\omega \end{vmatrix}, \quad P' = \begin{vmatrix} b_{1,1}-\omega & \ldots & b_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1,n} & \ldots & b_{n,n}-\omega \end{vmatrix},$$

so haben P und P′ entsprechend gleiche Coëfficienten von ω.

(Hamburger, Bemerkung über die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coëfficienten, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 76. Band, S. 115.)

44) Sind

$$a_0 x^m + \ldots + a_m = 0 \quad , \quad b_0 x^n + \ldots + b_n = 0$$

zwei algebraische Gleichungen, und wird

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_k & b_k \end{vmatrix} = A_{i,k}; \ \alpha_{p,q} = A_{p+q-1,0} + A_{p+q-2,1} + \ldots + A_{q,p-1}$$

gesetzt, so ist das Eliminationsresultat folgendes:

$$\Sigma \pm \alpha_{1,1}\, \alpha_{2,2} \ldots \alpha_{n,n} = 0.$$

(Painvin, Note sur la méthode d'élimination de Bézout, Nouv. Annal. Sér. II. Tome 13. S. 282.)

45) Für einen „reciproken" Kettenbruch

$$\frac{P_m}{Q_m} = a + (1 : b + (1 : c + \ldots + (1 : c + (1 : b + (1 : a$$

ist die Fundamentaleigenschaft — $\frac{Q^2_m - 1}{P_m}$ eine ganze Zahl — zu erweisen.

(Günther, Darstellung der Näherungswerthe von Kettenbrüchen in independenter Form, Erlangen 1873. S. 63.)

46) Die Identität der beiden Kettenbrüche

$$\frac{1}{x} : 1 + \left(\frac{p_1}{x} : 1 + \left(\frac{p_2}{x} : 1 + \ldots + \left(\frac{p_{2n-2}}{x} : 1 + \left(\frac{p_{2n-1}}{x} : 1\right.\right.\right.\right.$$

und

$$1 : (x + p_1 : (1 + p_2 : (x + p_3 : (1 + \ldots + (p_{2n-1} : 1$$

ist durch direkte Determinantenrechnung nachzuweisen.

(Ibid. S. 69 ff.)

47) Die Hauptsätze der Lehre von den sogenannten Lamé'schen Reihen (einfachster Fall: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...) sind ein unmittelbarer Ausfluss der Lehre von den Kettenbruchdeterminanten.

(E. Lucas, Sur la théorie des nombres premiers, Turin 1876.)

48) Versteht man bei einem Kettenbruch-Algorithmus unter α und β bezüglich die unendlichen Kettenbrüche

$$\frac{b_{p+1} + \ldots}{a_{p+1} + \ldots} \text{ und } \frac{1}{a_{p+1} + \ldots},$$

so wird behauptet, es sei — betreffs der Bezeichnung vgl. Kap. VI. §. 11 —

$$\begin{vmatrix} Y_{p+1} + \alpha Y_p + \beta Y_{p-1} & Y_p & Y_{p-1} \\ X_{p+1} + \alpha X_p + \beta X_{p-1} & X_p & X_{p-1} \\ N_{p+1} + \alpha N_p + \beta N_{p-1} & N_p & N_{p-1} \end{vmatrix} = 1.$$

(Fürstenau, Ueber Kettenbrüche höherer Ordnung, Wiesbaden 1874. S. 11.)

49) Man soll das System von 2n Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i\beta_{i-1}\ \beta_{i+1} &= A_i \\ \alpha_i\beta_{i-1} + \beta_i &= B_i \end{aligned}\right\} i = 1, 2 \ldots n, \quad n + k = k$$

auflösen und die resultirenden Determinanten diskutiren.

(Günther, Neue Methode der direkten Summation periodischer Kettenbrüche, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 22. Jahrg. S. 34.)

50) Es soll mit Hülfe der aufsteigenden Kettenbrüche der Beweis für die Identität

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}x & -x & 0 \ldots 0 & 0 \\ \frac{a_{n-2}}{a_n}x & 1 & -x \ldots 0 & 0 \\ \frac{a_{n-3}}{a_n}x & 0 & 1 \ldots 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_0}{a_n}x & 0 & 0 \ldots 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a_0x^n + \ldots + a_n}{a_n}$$

geführt werden.

(Günther, Ueber aufsteigende Kettenbrüche, Zeitschr. für Math. u. Phys. 21. Jahrg. S. 187.)

51) Hat die Gleichung $x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n = 0$ die n Wurzeln $x_1 \ldots x_n$, so ist, unter $\triangle$ die Discriminante jener Gleichung verstanden, die Funktionaldeterminante

$$\Sigma \pm \frac{db_1}{dx_1}\frac{db_2}{dx_2}\cdots\frac{db_n}{dx_n} = \sqrt{\triangle}.$$

(Dale-Symes, Solution of a question, Educat. Times IX. S. 69).

52) Existiren für eine Funktion $u \equiv f_{(x_1, x_2, x_3)} = 0$ die drei Gleichungen

$$\frac{du}{dp_i} = a_{i,1}\frac{du}{dx_1} + a_{i,2}\frac{du}{dx_2} + a_{i,3}\frac{du}{dx_3}\ (i = 1, 2, 3),$$

so folgen daraus die weiteren:

$$\frac{du}{dx_i} = a_{1,i}\frac{du}{dp_1} + a_{2,i}\frac{du}{dp_2} + a_{3,i}\frac{du}{dp_3}\ (i = 1, 2, 3).$$

(Allé, Ein Beitrag zur Theorie der Funktionen von drei Veränderlichen, Wien 1875. S. 2 ff.)

53) u_1, u_2, u_3 seien Funktionen von x_1, x_2, x_3; $\triangle$ sei die Funktionaldeterminante; es lässt sich darthun, dass

$$S\frac{d}{du_i}\left[\frac{d\triangle}{d\dfrac{dx_k}{du_i}}\right] = 0\,(i,\ k = 1,\ 2,\ 3).$$

(C. Neumann, Zur Theorie der Funktionaldeterminanten, mathem. Annalen, I. Band. S. 209.)

54) Es seien f und φ zwei ganze Funktionen von n Veränderlichen; ist dann f durch φ^m ohne Rest dividirbar, so ist die Hesse'sche Determinante von f ein Vielfaches der $n(m-1)$ten Potenz der zu φ gehörigen Hesse'schen Determinante.

(Casorati, Sui determinanti di funzioni, Memorie del Istituto Lombardo, Vol. XIII. S. 183.)

55) Sind $y_1 \ldots y_\lambda$ Funktionen von λ und ist

$$D(y_1\, y_2 \ldots y_\lambda) = \Sigma \pm y_1\, y'_2\, y''_3 \ldots y_\lambda^{(\lambda-1)},$$

sowie

$$z_k = (-1)^{k+\lambda}\,\frac{D(y_1\, y_2 \ldots y_{k-1}\, y_{k+1} \ldots y_\lambda)}{D(y_1\, y_2 \ldots y_\lambda)},$$

so ist andererseits auch

$$y_k = (-1)^{k-1}\,\frac{D(z_1\, z_2 \ldots z_{k-1}\, z_{k+1} \ldots z_\lambda)}{D(z_1\, z_2 \ldots z_\lambda)}.$$

(Frobenius, Ueber die Determinante mehrerer Funktionen einer Variablen, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 78. Band. S. 249.)

56) Für die ternär-quadratische Funktion

$$fx^2 + gy^2 + hz^2 + 2lyz + 2mzx + 2nxy$$

ist die (symmetrische) Determinante

$$\begin{vmatrix} f & n & m \\ n & g & l \\ m & l & h \end{vmatrix}$$

eine Invariante.

57) Verschwindet die Invariante einer cubischen Gleichung, so hat jene drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind.

(Diekmann, etc. S. 53.)

58) Die cubische Gleichung $px^3 - 3px - 2q = 0$ besitzt als quadratische Covariante den Ausdruck $\triangle = px^2 + 2qx + p^2$; führt man in erstere Gleichung die Wurzeln $\triangle = 0$ ein, so zerfällt jene in die Differenz zweier Cuben.

(Diekmann, etc. S. 60.)

59) Eine binäre Form wird meistens in der Weise angeschrieben: $(a,\ b,\ c \ldots k)\ (x,\ y)^n$. Es besteht hier die Identität der den nachstehenden Formen

$(ax+by,\ bx+cy,\ cx+dy \ldots kx+ly)\ (x,\ y)^n,\ (a,\ b,\ c \ldots k,\ l)\ (x, y)^{n+1}$ zugehörigen Covarianten.

(Cayley, A „Smith's Prize paper", Messenger of the Mathematics, t. V, S. 53 ff.)

60) Jede Invariante zweier simultaner binärer Formen vom zweiten Grade ist eine ganze rationale Funktion von drei Fundamentalinvarianten.

(Bessell, Ueber die Invarianten der einfachsten Systeme simultaner binärer Formen, mathem. Annalen, 1. Band. S. 176.)

61) Sind f_1 und f_2 bekannte Covarianten der binären Form $u_{(x,y)} = 0$, so ist auch die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_2}{dx} \\ \frac{df_1}{dy} & \frac{df_2}{dy} \end{vmatrix}$$

eine Covariante von u.

(Fiedler, Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen, Leipzig 1862. S. 158.)

62) Aus der Transformationstheorie der bilinearen Formen fliesst auch nachstehendes Theorem: Ist $A = \Sigma \pm a_{1,1} \ldots a_{n,n}$, $B = \Sigma \pm b_{1,1} \ldots b_{n,n}$ und weiter $\alpha_{i,k} = \frac{dA}{da_{i,k}}$, $\beta_{i,k} = \frac{dB}{db_{i,k}}$, so besteht die Identität:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+b_{1,1}x & a_{1,2}+b_{1,2}x & \ldots & a_{1,n}+b_{1,n}x \\ a_{2,1}+b_{2,1}x & a_{2,2}+b_{2,2}x & \ldots & a_{2,n}+b_{2,n}x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}+b_{n,1}x & a_{n,2}+b_{n,2}x & \ldots & a_{n,n}+b_{n,n}x \end{vmatrix}$$

$$= A \, . \, B \, . \begin{vmatrix} \frac{\alpha_{1,1}}{A}x + \frac{\beta_{1,1}}{B} & \frac{\alpha_{1,2}}{A}x + \frac{\beta_{1,2}}{B} & \ldots & \frac{\alpha_{1,n}}{A}x + \frac{\beta_{1,n}}{B} \\ \frac{\alpha_{2,1}}{A}x + \frac{\beta_{2,1}}{B} & \frac{\alpha_{2,2}}{A}x + \frac{\beta_{2,2}}{B} & \ldots & \frac{\alpha_{2,n}}{A}x + \frac{\beta_{2,n}}{B} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\alpha_{n,1}}{A}x + \frac{\beta_{n,1}}{B} & \frac{\alpha_{n,2}}{A}x + \frac{\beta_{n,2}}{B} & \ldots & \frac{\alpha_{n,n}}{A}x + \frac{\beta_{n,n}}{B} \end{vmatrix}.$$

(Siacci, Teorema sui determinanti ed alcune sue applicazioni, Torino 1872. S. 5.)

63) Es sei $F_{(x,y)} = \mathop{S}_{i=1}^{i=n} \mathop{S}_{k=1}^{k=n} a_{i,k}\, x^i y^k$ eine birationale Funktion von x und y. Setzt man, unter den α und β willkürliche Grössen verstanden,

$$\varphi_x = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_m)$$

und

$$\psi_x = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m = (x - \beta_1) \ldots (x - \beta_m),$$

bezeichnet ferner mit $\triangle(\alpha_1 \ldots \alpha_m)$ und $\triangle(\beta_1 \ldots \beta_m)$ die Differenzenprodukte einmal sämmtlicher α, dann sämmtlicher β, so lässt sich behaupten: Es ist für

$$F_{(x,y)} = S\, f_x^n y^n, \quad f_x^n = a_{0,r} + a_{1,r}x + \ldots + a_{n,r}x^n$$

$$\Sigma \pm F_{(\alpha_1, \beta_1)} F_{(\alpha_2, \beta_2)} \ldots F_{(\alpha_n, \beta_n)}$$

$$= (-1)^{m+n+1} \triangle(\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m) \triangle(\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_m) \times$$

$$\begin{vmatrix}
a_{0,0} & a_{1,0} & \dots & a_{m,0} & a_{m+1,0} & \dots & a_{n,0} & b_0 & 0 & \dots & 0 \\
a_{0,1} & a_{1,1} & \dots & a_{m,1} & a_{m+1,1} & \dots & a_{n,1} & b_1 & b_0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{0,m} & a_{1,m} & \dots & a_{m,m} & a_{m+1,m} & \dots & a_{n,m} & b_m & b_{m-1} & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{0,n} & a_{1,n} & \dots & a_{m,n} & a_{m+1,n} & \dots & a_{n,n} & 0 & 0 & \dots & b_m \\
a_0 & a_1 & \dots & a_m & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_m & 0 & 0 & \dots & 0
\end{vmatrix}$$

(Mittheilung von Hrn. Garbieri in Reggio-Emilia aus einer der Accademia dei Lincei vorgelegten Concurs-Arbeit.)

64) Es soll das Multiplikationsgesetz für zwei cubische Determinanten vom gleichen Grade formulirt und bewiesen werden.

65) Zu zeigen, dass beim Multipliciren einer gewöhnlichen Determinante $\Sigma \pm A_{1,1}\, A_{2,2} \dots A_{n,n}$ mit einer cubischen Determinante $\Sigma \pm a_{1,1,1}\, a_{2,2,2} \dots a_{n,n,n}$ wieder eine cubische Determinante nten Grades herauskommt, und zwar die nachstehende:

$$\Sigma \pm a_{1,1,1} A_{1,1} + a_{1,1,2} A_{1,2} + \dots + a_{1,1,n} A_{1,n} \dots a_{n,n,1} A_{n,1} + a_{n,n,2} A_{n,2} + \dots + a_{n,n,n} A_{n,n}.$$

(Armenante, Sui determinante cubici, Battaglini's Giornale, Tomo VI. S. 181.)

66) Die von Aronhold zuerst aufgestellte Fundamentalinvariante dreier ternärer quadratischer Formen ist eine cubische Determinante des dritten Grades.

(Zehfuss, Ueber eine Erweiterung des Begriffes der Determinanten, Frankfurt 1868. S. 6; Aronhold, Ueber eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie, Journal f. d. reine u. angew. Math. 52. Band, S. 281 ff.)

Anhang II.

Literaturverzeichniss. *)

Deutschland - Oesterreich. Baltzer, Theorie und Anwendung der Determinanten**), Leipzig 1857. II. Aufl. 1865. III. Aufl. 1870. IV. Aufl. 1875. — v. Zelewski, Ein Beitrag zur Theorie der Determinanten, Breslau 1870. — Unterhuber, Einleitung in die Theorie der Determinanten, Leoben 1870. — Studnička, Einleitung in die Theorie der Determinanten, Prag 1871. — Hattendorff, Einleitung in die Lehre von den Determinanten, Hannover 1872. — Hesse, Die Determinanten elementar behandelt, Leipzig 1872. — Dölp, die Determinanten nebst Anwendung auf die Lösung algebraischer und analytisch - geometrischer Aufgaben, Darmstadt 1874. — Reidt, Vorschule der Theorie der Determinanten, Leipzig 1874. — Diekmann, Einleitung in die Lehre von den Determinanten und ihrer Anwendung auf dem Gebiete der niederen Mathematik, Essen 1876. (Vgl. auch „Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr.“ 6. Jahrg. 1. 2. 3. Heft.)

Böhmen. Studnička, O determinantech, V Praze 1870. — Pokorny, Determinanty a vyšší rovnice, V Praze 1870.

Italien. Brioschi, La teorica dei determinanti ***), Pavia 1854. — Trudi, Teoria dei determinanti e loro applicazioni, Napoli 1862. — Fontebasso, I primi elementi della teoria dei determinanti e loro applicazioni all' algebra ed alla geometria, Treviso 1873. — Garbieri, I determinanti con nomerose applicazioni, parte prima, Bologna 1874. — Janni, Lezioni di algebra complementare, Napoli 1876.

Frankreich - Belgien. Houël, Notions élémentaires sur les déterminants, Paris - Bordeaux 1871 (autographirt). — Anonym, Exposé des principes élémentaires de la théorie des déterminants à l'usage des élèves de mathématiques spéciales, Nouv. Annal. II. Sér. Tome 7. S. 403 ff. — Mansion, Éléments de la théorie des déterminants d'après Baltzer et

---

*) Dieses Verzeichniss, welches auf Vollständigkeit selbstredend keinen Anspruch erhebt, die bemerkenswertheren literarischen Erscheinungen aber doch so ziemlich vollständig bieten dürfte, enthält blos solche Schriften und Zeitschrift-Artikel, welche sich ausschliesslich mit der allgemeinen elementaren Lehre von den Determinanten befassen; Werke, wie Salmon, Serret etc. sind also an sich ausgeschlossen.

**) In's Französische übersetzt von Houël, Paris 1861.

***) In's Deutsche übersetzt von Schellbach, Berlin 1857; in's Französische übersetzt von Combescure, Paris 1856.

Salmon, Mons et Bruxelles 1875. — Mansion, Introduction à la théorie des déterminants, Gand et Mons 1876. (Vgl. auch die belgische Zeitschrift „Revue d'instruction publique“ 1875.) — Dostor, Éléments de la théorie des déterminants avec application à l'algèbre, la trigonometrie et la géométrie dans le plan et dans l'espace, Paris 1877.

England. Cayley, On the theory of determinants, Transactions of the Cambridge philos. Society, t. VIII. S. 75 ff.*) — Spottiswoode, Elementary Theorems relating to Determinants, Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 51. Band. S. 209 ff. — Newman, On determinants, better called eliminants, Philosoph. Magaz. t. XIV. S. 390 ff. — Tait, On Determinants, A chapter of elementary Algebra, The Oxford, Cambridge and Dublin Messenger of Mathematics, t. I. S. 25 ff. — Wright, Traits relating to the modern higher mathematics; Tract Nr. I. Determinants, London 1874 **).

Holland. Meylink, Over de Determinanten, Leiden 1865. — Van Wageningen, De Determinanten elementair behandeld door Dr. O. Hesse, Haag 1871. (Bearbeitung, nicht eigentlich Uebersetzung.)

Schweden. Mellberg, Teorin för Determinant-kalkylen, Helsingfors 1876. — Falk, Lärobok i Determinant-teorin första grundar, Uppsala 1876.

Russland. ***) Sperling, Theorie der Determinanten und deren Anwendungen, St. Petersburg 1858. — Davidov, Determinantentheorie, Moskau 1868. — Jarochenko, Theorie der Determinanten und ihre Anwendungen, Odessa 1871.

Polen. Trzaska, Przypisek krótkie wiadomósci o wyznac znikaeh, Paris 1870.

Anm. Ein ganz neuerlich in Christiania erschienenes Buch von Guldberg ist uns noch völlig unbekannt geblieben.

---

*) Vermuthlich die erste systematische Bearbeitung unseres Faches nach Jacobi's grundlegender Abhandlung.

**) Diess ist ein amerikanisches Buch, Herr W. J. Wright ist Professor der Mathematik zu Chambersburg in Pennsylvanien. — Abgesehen von ihm scheint die Fachliteratur der neuen Welt nur Eine annähernd hierher zu ziehende literarische Leistung aufzuweisen zu haben: Stockwell, On the resolution of symmetrical equations with indeterminate coefficients, Gould's Astronomical Journal, t. VI. S. 145 ff.

***) Da die russischen Typen wenig bekannt sind, wurden die Titel gleich in's Deutsche übertragen.

Berichtigungen.

S. 11. Z. 18. v. u. l. zu. — S. 25. Z. 7 v. o. statt $(p - n)$ l. $(n - p)$. — S. 46. Z. 4 v. u. l. $da_{i,k}$. — S. 67. Z. 11, 12, 13, 14 v. u. statt d, c, b, a l. a_4, a_3, a_2, a_1. — S. 74. Z. 14 v. u. statt $a_{p,k}$ l. $a_{p,q}$. — S. 76. Z. 6, 10, 12, 17 v. o., Z. 2, 3, 4, 5 v. u. statt Σ l. S; Z. 11 v. o. l. $A_{i,s_{p-1}}$. — S. 92. Z. 3 v. o. statt χ l. $-\chi$. — S. 129. Z. 1 v. o. l. Q_n. — S. 152 statt λ l. k. — S. 172. Z. 20 v. u. statt „möglicher“ l. „in diesem Spezialfall vorhandener“.