UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 00184282 2

QA
33
H37

UNIVERSITY
OF
TORONTO
LIBRARY

LEIBNIZ' BEDEUTUNG

IN DER

GESCHICHTE DER MATHEMATIK

REDE

ZUR

FEIER DES GEBURTSTAGES SR. MAJESTÄT DES KÖNIGS

GEHALTEN IN DER

AULA DES POLYTECHNIKUMS ZU DRESDEN

VON

DR. AXEL HARNACK

O. PROFESSOR DER MATHEMATIK, O. MITGLIED DER K. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

1335-04
15/7/14

DRESDEN

v. ZAHN & JAENSCH

1887

QA
33
H37

Vorwort.

Einen Vortrag, welcher einem besonderen Zwecke diente, als selbstständige kleine Schrift erscheinen zu lassen, das bedarf einer Rechtfertigung oder wenigstens des Versuches einer solchen. Aber den wissenschaftlichen Reden, welche an den Hochschulen bei festlichen Gelegenheiten regelmässig gehalten werden, kommt schliesslich in ihrer Gesammtheit eine historische Bedeutung zu. Sie geben in jahrelanger Aufeinanderfolge ein Bild von den oft auch wechselnden Zielen und Auffassungsweisen der wissenschaftlichen Arbeit, von den Aufgaben des Lehrberufes innerhalb des staatlichen Lebens. Für die einzelne Hochschule aber werden sie von selbst zu einer eigenartig geschriebenen Geschichte ihrer inneren und äusseren Entwickelung.

Denn die Beziehungen zur Gegenwart sind in solchen Reden mehr oder minder deutlich stets vorhanden, und diese würden ihre Aufgabe verfehlen, wenn sie dieselben absichtlich vermeiden wollten. Dass ich bei der vorliegenden direkt einige der Fragen berührt habe, von deren richtiger Lösung das Gedeihen der technischen Schulen und der höheren Schulen überhaupt abhängt, darin liegt für mich ein zweiter Grund, das gesprochene Wort durch die Schrift zu fixiren. Möge dieselbe trotz der kurzen Form der Bemerkungen erkennen lassen, dass ich mich bemüht habe, ein Urtheil „*sine ira et cum studio*“ zu gewinnen.

Dresden, im Juni 1887.

Ax. H.

Aber über diese besonderen Beziehungen zum Staate hinaus weist uns die heutige Feier auf den Zusammenhang, in welchem unsere Arbeit — auch die abstracteste und scheinbar entlegenste — mit der Entwickelung unseres gesammten öffentlichen Lebens steht. Für die technischen Hochschulen zwar ist es in gewissem Sinn kaum nothwendig, diesen Zusammenhang erst noch besonders zu betonen. Es sind gerade 50 Jahre, dass die erste grössere Eisenbahn in Deutschland, ein Theil der Strecke Leipzig-Dresden, dem öffentlichen Betrieb übergeben wurde, und derselbe, verhältnissmässig so kurze Zeitraum, in welchem sich der Verkehr zwischen allen continentalen und überseeischen Ländern neu gestaltete, umfasst zugleich die Geschichte unserer Schulen. Ursprünglich kleine Gewerbschulen, wie das praktische Bedürfniss sie forderte, erhoben sie sich rasch zu ihrer gegenwärtigen Grösse, als Industrie und Handel geradezu eine neue Weltcultur schufen. Man hat ihnen diese Art der Entwickelung, diese Abhängigkeit von den praktischen Bedürfnissen des Tages zum Vorwurf gemacht; und wer wollte es leugnen, dass dieselbe manche Gefahren birgt, dass in der systematischen Gliederung unseres Lehrstoffes noch vieles unfertig ist. Und doch wäre es im höchsten Grade kurzsichtig, wollte man hieraus den Schluss ziehen, dass die Technik in ihrem wissenschaftlichen Ausbau gehemmt wird, dass die Schulung, welche sie dem Geiste verleiht, eine einseitige, bloss auf den äusseren Nutzen gerichtete sei. Denn nicht Handel und Industrie haben die Technik geschaffen, sie sind vielmehr durch dieselbe zu ihrer mächtigen Ausdehnung gediehen, durch welche sie fördernd auch auf rein theoretische Untersuchungen zurückwirken. Die technischen Wissenschaften selbst aber sind aus der mathematisch-physikalischen und aus der chemischen Naturforschung hervorgegangen.

So erkennen wir auch, wenn wir tiefer auf die Entwickelung der Wissenschaften eingehen, dass die eigentlichen Keime unserer Schulen viel weiter zurück liegen, in jenem grossen mathematischen Zeitalter, in welchem Galilei und Huyghens, Newton und Leibniz die Grundlagen der jetzigen

Mathematik und Naturforschung schufen, in jenem Zeitalter, welches für unsere Cultur auf dem Gebiete der Erkenntniss ebenso bedeutend geblieben ist, wie das 18. Jahrhundert auf dem Gebiete des politischen und socialen Lebens. Deutschland verdankt diese Erneuerung des wissenschaftlichen Geistes seinem grossen Sohne Leibniz. Nach den schwersten Zeiten, welche das Deutsche Reich jemals erfahren hat, während es schien, als müsste durch das Elend des eben beendigten Krieges alles geistige Leben für lange ertödtet sein, erstand der Mann, so eigenartig, so viel umfassend, so weit hinaus über seine zeitgenössischen Landsleute, dass überall ein Aufschwung deutschen Lebens mit ihm beginnt und wir heute noch unter den Wirkungen seiner Persönlichkeit stehen. Es erscheint mir darum der Aufgabe unserer Feier entsprechend, wenn ich versuche, Ihnen, hochgeehrte Herren, wenigstens nach der Richtung, welche mit meiner Berufswissenschaft zusammenfällt, in Bezug auf die Mathematik, den Entwickelungsgang und die nachhaltige Bedeutung von Leibniz zu schildern. Dürfen wir uns dabei doch überdies daran erfreuen, dass er der Geburt nach unserem engeren Heimatlande angehört.

Leibniz war 26 Jahre alt, als er im Frühling 1672 in Paris eintraf; erst bei dem Aufenthalt daselbst gelangte er zu zusammenhängender mathematischer Arbeit. Mit Philosophie, Jurisprudenz und Politik, aber auch mit abstracten Fragen aus der Theorie der Bewegung hatte er sich bis dahin vorzugsweise beschäftigt; denn wiewohl sein Interesse für die Mathematik frühzeitig erwacht war, er fand während seines Studiums keine weitere Anregung. Der Vortrag der Commentare, mit denen die Elemente des Euklid auf der Universität Leipzig mehr verdunkelt als erläutert wurden, förderte ihn wenig; und nur die Vorlesungen des originellen Erhard Weigel in Jena, bei welchem er während eines Semesters die Anfangsgründe der Arithmetik, der Analysis und Combinationslehre hörte, boten ihm einigen Gewinn.

Ueberhaupt waren die mathematischen Wissenschaften in Deutschland gerade damals auf den Universitäten in entschiedenem Rückgang begriffen. Zweihundert Jahre zuvor war von Georg von Peuerbach (1423—1461) in Wien das Studium der Arithmetik nach den Compendien der Araber eingeführt worden, und während eines Jahrhunderts wurde dasselbe mit nachhaltigem Erfolg betrieben. Johannes Regiomontanus (1436—1476), der grosse Nürnberger Gelehrte, und Michael Stifel (1487—1567), der ehemalige Augustinermönch und Freund Luthers, stehen am Anfang und am Ausgang dieser Epoche, in welcher die allgemeine Arithmetik, d. h. die Buchstabenrechnung mit ganzen und gebrochenen Exponenten, die Lehre von den Proportionen und Progressionen, von den Binomialzahlen, den Combinationen, und von den Gleichungen zweiten Grades ausgebildet wurde. Als aber in Italien die algebraische Lösung der cubischen und biquadratischen Gleichung gefunden war, blieben die deutschen Leistungen hinter denen der italienischen und französischen Zeitgenossen zurück. Die deutschen Rechenbücher veralteten und es zeigte sich jener Hang zu Spielereien mit Zahlgebilden, mit mystischen, arithmetischen und geometrischen Figuren und deren Anwendungen, welcher auch die mathematische Erstlingsschrift von Leibniz, seine Dissertation „De arte combinatoria“ gegenwärtig unlesbar macht, ja der selbst in den tiefsinnigen Werken Kepplers eine merkwürdige Rolle spielt.

Indem wir aber Keppler nennen, müssen wir noch der anderen mathematischen Disciplin gedenken, in welcher durch beharrlichen Fleiss dauernde Leistungen hervorgebracht waren. Die Astronomie, welche in Deutschland stetig gepflegt wurde, erforderte die Ausbildung der Trigonometrie, die Berechnung der trigonometrischen Tafeln. Auch hier haben Peuerbach und Regiomontan im Anschluss an die Ausgabe des Ptolemäus Almagest den Grund gelegt, und zuerst Sinustafeln für alle Winkel von Minute zu Minute berechnet. 1596 erschien dann das grosse „Opus Palatinum de triangulis“ von Georg Joachim Rheticus (1514—1576), in welchem die trigonometrischen Functionen von zehn zu zehn Sekunden auf zehn Stellen berechnet waren; es wurde 1613 durch die Tafeln von Bartholomaeus Pitiscus (1561—1613) ergänzt. Gleichzeitig aber hatte in England Lord Napier (1550—1617) die Rechnung mit Logarithmen ausgebildet, und wie dort Henry Briggs (1556—1630), so berechneten in Deutschland mehrere Astronomen, an ihrer Spitze Keppler selbst, mit unermüdlichem Fleiss die Logarithmen der trigonometrischen Functionen, und überlieferten allen kommenden Zeiten die Grundlagen zu den Tafeln, wie wir sie noch heute benutzen.

So gross diese Arbeiten auch waren, es gab in Deutschland nirgendwo eine eigentliche Schule für die mathematischen Wissenschaften, und als Leibniz in Paris mit Männern wie Huyghens, den beiden Arnauds, dem Minister Colbert in Beziehung trat, als er die ausgezeichnetsten Arbeiter in allen mechanischen Künsten und Gewerben besuchte, und die Schriften von Cavalieri und Pascal studierte, da musste er erkennen, wie weit seine Heimat nicht blos in den Wissenschaften, sondern auf allen Gebieten der Künste und Gewerbe im Laufe der letzten Jahrzehnte zurückgeblieben war und bekannte noch später: *„Wenn ich, wie Pascal, meine Jugend in Paris zugebracht hätte, würde ich vielleicht die Wissenschaften früher bereichert haben.“* [1])

Und doch galt er bei seinen deutschen Freunden bereits für ein „Wunder“, und gleich zu Anfang versetzte er auch seine neuen Freunde in Paris und London, wohin er auf einige Monate gegangen war, in Erstaunen. Erstaunlich fürwahr muss uns auch gegenwärtig die Persönlichkeit des jungen Leibniz erscheinen. Stets auf praktische Ziele ausgehend, so dass seine Thätigkeit in Paris mit der Construction einer Rechenmaschine für zwölfstellige Zahlen begann, war seine Denkweise selbst doch eine speculative; im höchsten Sinne mathematisch beanlagt, verband er mit der Leichtigkeit und Schärfe der Erfindung, mit der Fähigkeit die abstractesten Fragen tiefen und weiten Blickes zu umfassen, doch ein unermüdlich thätiges Interesse für das gesammte Leben, das religiöse, nationale und gewerbliche. Erfüllt von der Kenntniss des klassischen Alterthums und der ganzen scholastischen Begriffs-Gelehrsamkeit, hatte er in einsamem Ringen mit sich selbst den Bruch mit der Vergangenheit vollzogen, und sich der mechanischen Naturbetrachtung zugewandt, welche er zuerst durch die Schriften von Descartes kennen gelernt hatte. Nach Paris war er gegangen mit einer politischen Mission des Mainzer Hofes: er hoffte Deutschland zu retten, indem er Ludwig XIV. zu einem Eroberungszug nach Aegypten zu bewegen suchte; — seine Projekte scheiterten, aber als er nach vier Jahren heimkehrte, stand er als Mathematiker ebenbürtig neben Newton; er hatte die Infinitesimalrechnung gefunden.

Diese Entdeckung entsprang aus den neuen geometrischen Problemen, mit denen er die Mathematiker in Frankreich beschäftigt fand. Die analytische Geometrie, welcher Descartes die allgemeinste Form gegeben hatte, war dort vollständig eingebürgert. Ihre umfassende Bedeutung liegt darin, dass sie die Curven durch eine Gleichung zwischen veränderlichen Grössen definirt, und dass sie umgekehrt jede Abhängigkeit zwischen zwei Veränderlichen in dem anschaulichen Bilde einer Curve betrachten lässt. Der Begriff der veränderlichen Grösse ist die Grenzlinie, welche die Mathematik der Alten von der neuen scheidet. Dadurch erschienen die geometrischen Aufgaben in neuer, weit allgemeinerer Form. Man suchte die von den Curven umschlossenen Flächen zu bestimmen und die Curvenlänge zu messen. Die Methode, nach welcher Archimedes die Parabel quadrirt, den cubischen Inhalt von Cylinder- und Rotationsflächen bestimmt hatte, war von Keppler und Cavalieri in allgemeiner Weise formulirt worden. Die „untheilbaren Grössen", als die äussersten Elemente, aus denen sich der Flächeninhalt oder das Volumen zusammensetzt, hatte Letzterer, wenn auch nicht begrifflich correct, so doch als ein richtig leitendes Princip in die Untersuchung eingeführt. Pascal sowohl als auch der Engländer Wallis wandten dasselbe auch bei analytisch definirten Gebilden an, und ein gleiches Princip, das des unmerklichen Wachsthumes, legte auch Fermat seiner Bestimmung der Maxima und Minima zu Grunde. Neben diesen alten Problemen aber entstanden auch wesentlich neue. Im Jahre 1673 veröffentlichte Huyghens, von dem schon Leibniz sagt, dass er dem Galilei und Cartesius nicht nachstehe, sein „Horologium oscillatorium". Ausser der reichsten Fülle mechanischer Principien und Resultate enthielt es zum ersten Mal die Lehre vom Krümmungskreise und der Evolute. Die Mathematiker in England aber schufen unter der Führung Newtons die Theorie der unendlichen Reihen. Die Binomialreihe, welche dieser gefunden hatte, wurde die Grundlage für die Untersuchung über die Berechnung der Wurzeln einer Gleichung, und für die Anwendung der unendlichen Reihen zur Längen- und Flächenbestimmung bei Curven.

Es wurde Leibniz nicht schwer, diese Methoden sich anzueignen und selbstständig zu bearbeiten. *„Zwei Umstände,"* sagte er von sich, *„haben mir ausserordentlich gedient, obwohl sie sonst gefährlich und Vielen schädlich zu sein pflegen: dass ich Autodidakt war, und in einer jeden Wissenschaft kaum, dass ich an sie herangetreten, Neues suchte, da ich oft nicht einmal das Gewöhnliche hinlänglich verstand."*[2])

Ein grosser Erfolg gleich zum Anfang — etwa im Herbst des Jahres 1674 — spornte ihn mächtig an. Das alte Problem der Quadratur des Kreises wurde nicht nur auf geometrischem Wege immer noch gesucht, es war auch arithmetisch nur durch unvollkommene Näherungsmethoden gelöst. Wir wissen gegenwärtig, aber erst seit wenigen Jahren, dank den scharfsinnigen Arbeiten von Hermite und Lindemann, dass die geometrische Auflösung der Aufgabe mit Zirkel und Lineal überhaupt unmöglich ist, den einfachsten Weg der exakten analytischen Lösung aber hat Leibniz gegeben. Da beim Kreise die Ordinaten nicht rational, sondern mittels einer Quadratwurzel von den Abscissen abhängen, suchte er eine Fläche zu construiren, die dem Kreise gleich ist und deren Ordinaten rationale Functionen der Abscissen sind. Die Construction dieser Fläche gewann er auf einem sehr allgemeinen, auch auf alle Kegelschnitte leicht anwendbaren Wege, indem er die Abschnitte, welche die Tangenten auf einer festen Axe bestimmen, die Subtangenten einführte. So setzte er, wie wir jetzt kurz sagen können, an Stelle der Function $\arcsin x$ die Function $\operatorname{arctang} x$; um diese zu berechnen, brauchte er nur an einer geometrischen Progression (der Reihe für $\frac{1}{1+x^2}$) die neue Operation auszuführen, welche er zuerst einfach eine Summation, später aber nach dem Vorschlag von Johann Bernoulli die Integration nannte. Für die numerische Ausführung solcher Rechnung kamen ihm seine früheren Studien über Differenzen-Reihen zu statten, von denen schon seine Schrift über die Combinationslehre Zeugniss giebt.

Die einfache Integralformel

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctang} x$$

ist historisch das Fundament der Integralrechnung, und an dem Dreieck, welches von der Tangente und den Coordinatenaxen gebildet wird, trat dem Entdecker im geometrischen Bilde die Bedeutung entgegen, welche das Verhältniss zwischen der Differenz der Ordinate und der Differenz der Abscissen gewinnt, wenn diese Differenzen unendlich klein, oder wie er es nannte, Differentiale werden. Mit dem Differential- und Integralbegriff war gezeigt, dass die zunächst durch die Anschauung definirte, stetig veränderliche Grösse quantitativ erfasst und beherrscht werden kann. Geometrie und Mechanik waren nun erst völlig zu einer Grössenlehre geworden, die den Begriff der Bewegung nicht auszuschliessen brauchte.

Für die methodische Ausbildung dieser Rechnung mit stetig veränderlichen Grössen, auch für die zutreffenden, seitdem nie wieder aufgegebenen Bezeichnungen, die Leibniz einführte, war es von besonderem Vortheil, dass ihm die Probleme der Integralrechnung im Vordergrund standen. Bei einer algebraisch definirten Curve Eigenschaften der Tangenten zu entwickeln, das hatten auch Cartesius und seine Schüler vermocht. Aber von Aufgaben der umgekehrten Art, aus den Eigenschaften der Tangenten oder Subtangenten die zugehörige Curve zu bestimmen, hatte jener öffentlich bekannt, dass weder er sie allgemein zu lösen vermöge, noch dass die berühmtesten Mathematiker von Paris und Toulouse, denen er sie vorgelegt habe, dazu im Stande seien.

An der Leichtigkeit, mit welcher er alsbald Aufgaben dieser Art erledigte, erkannte Leibniz die Tragweite seiner Methode. So wurde ihm, wie er erzählt,[3]) von Claudius Perraltus, dem gelehrten Arzte und Polyhistor in Paris, die noch von keinem Mathematiker gelöste Aufgabe gestellt: Welche Bahn beschreibt ein schwerer Punkt auf einer Horizontalebene, wenn er in dieser Ebene mittels eines Seiles von gegebener Länge gezogen wird, so zwar, dass das freie Ende des Seiles längs einer Geraden geführt wird, die mit der anfänglichen Richtung des Seiles einen spitzen Winkel bildet? Da hier die Länge der Tangente zwischen dem Berührungspunkt und dem Schnittpunkt auf der Leitlinie constant bleibt, so ergab sich die Lösung mittels einer Integration. Die Gleichung der Curve, der sogenannten Tractrix, wurde mit ihren Eigenschaften entwickelt, und sogleich umspannte Leibniz' weiter Blick alle möglichen Verallgemeinerungen der Aufgabe. Zu jeder beliebigen Leitcurve kann eine Tractrix gefunden werden, und umgekehrt lässt sich jede Curve als Tractrix einer anderen betrachten.

Im vollen Besitz seiner Methode befand sich Leibniz seit dem Jahre 1676; er hat die Lösung verschiedener Aufgaben, ohne ausführliche Erörterung der Rechnung selbst, in seinen Briefen nach England vom Sommer dieses Jahres an ausgesprochen, als Antwort auf die reichhaltigen Mittheilungen, welche ihm von dort aus über Newtons und Jacob Gregorys Entdeckungen auf dem Gebiete der unendlichen Reihen gemacht wurden. Doch konnte er freilich Newton damit nichts wesentlich neues sagen: seit zehn Jahren bereits hatte dieser gewaltige Geist die „*Fluxionsmethode*", wenigstens in ihren Grundlagen für sich ausgebildet und theilweise schärfer als Leibniz bewiesen; sie war dem Wesen nach mit der Leibnizschen Rechnung identisch. Beide Entdecker hielten noch mehrere Jahre mit ausführlichen Mittheilungen zurück. Erst im Laufe der späteren Arbeiten stellte sich heraus, dass Leibniz allgemeiner und darum leichter operiren konnte, dass seine Bezeichnungsweise sowohl für die geometrischen, wie für die analytischen Aufgaben eine einheitlichere und bequemere

Handhabe bot. Hat Leibniz einen reicheren Schatz allgemeiner Lehrsätze der Integralrechnung geliefert, so hat doch Newton die grossartigste Anwendung derselben, die Theorie der Planetenbewegung, damit geschaffen. Es lag in der Verschiedenheit der Naturen begründet, dass jener, weit mehr Mathematiker als Naturforscher, sein Genüge daran fand, die Möglichkeit der Lösung eines Problemes auf Grund allgemeiner Methoden zu erkennen, während Newton's durchdringender Geist nicht ruhte, bis er das einzelne physikalische oder astronomische Phänomen zur genauesten mathematischen Darstellung gebracht hatte.

Seit seiner Anstellung am Hofe zu Hannover als Bibliothekar und Hofrath hat Leibniz zu anhaltenden mathematischen Studien niemals mehr Zeit gefunden. Denn er war im wahren Sinne des Wortes ein Berather seines Herzogs Johann Friedrich und dessen Nachfolger, zumal der edelen Churfürstin Sophie. Die gesammte Staatswirthschaft und Wohlfahrt des Landes, der Bergbau des Harzes und das Münzwesen, die politischen Sonderinteressen seines Hofes nahmen ihn in Anspruch; und immer in der umfassenden Weise, dass er dadurch zu allgemeinen Untersuchungen über Geologie, zu Schriften über die Principien des Natur- und Völkerrechtes, zu lange fortgesetzten Bemühungen um die Vereinigung der getrennten Kirchen veranlasst wurde. Eine ausführliche Geschichte des deutschen Kaiserthumes bis auf Heinrich II. und eine Specialgeschichte des Hauses Braunschweig, basirt auf einer selbstständigen Ermittelung und Herausgabe der Quellen, hatte er zu schreiben begonnen, sie gab ihm Veranlassung zu einer längeren Reise durch Italien bis nach Rom und zog sich durch all die letzten Jahrzehnte seines Lebens. Um ihretwillen besonders musste er, wie er einem Freunde (1695) schreibt:[4]) *alle mathematischen und philosophischen Arbeiten wie verstohlen ausführen; „denn Sie wissen, an den Höfen sucht und erwartet man ganz andere Dinge. Soviel habe ich jedoch durch die Gnade des Fürsten erlangt, dass ich nach Ermessen mich der Privat-Processe enthalten kann.“*

Aber die verstohlen gethane Arbeit führt zu den fruchtbarsten Ergebnissen. Denn wenn er auch in seiner Infinitesimalmethode das mächtigste Hülfsmittel besass, die Grösse seines mathematischen Genius zeigte sich überdies in der staunenswerthen Raschheit, mit welcher er, unabhängig von äusseren Verhältnissen, arbeiten konnte, sobald irgend eine Frage ihn erfasste.

In einer Stunde hatte er in Paris die Lösung der Aufgabe gefunden, welche von Descartes Jahre hindurch gesucht war, und ebenso rasch erledigte er das von Viviani gestellte, sogenannte Florentiner Problem: „Aus einer Halbkugel vier congruente Oeffnungen auszuschneiden, so dass die nachbleibende Fläche gleich einem gegebenen Quadrat wird.“ Im Wagen zwischen Wolfenbüttel und Hannover construirte er die Linie des schnellsten Falles — die Brachistochrone — sofort, nachdem er die Aufgabe von Johann Bernoulli erhalten hatte. Heimkehrend von der Audienz bei Peter dem Grossen in Torgau entwickelte er die Methode der Differentiation nach einem Parameter unter dem Integral, durch welche ganz neue Classen von Aufgaben lösbar wurden. Er selbst empfand mehr die Kehrseite dieser genialen Anlage, wenn er einem Freunde schrieb:[5]) *„Mir gehet es wie dem Tigerthier, von dem man sagt, was es nicht im ersten, andern oder dritten Sprung erreiche, das lasse es laufen.“*

Den grössten Erfolg mit der Anwendung der neuen Rechnungsweise errang Leibniz durch die Bestimmung der Kettenlinie. Diese Curve, welche ein frei herabhängendes, an beiden Enden aufgehängtes, homogenes Seil durch sein eignes Gewicht bildet, zu finden, war eine Aufgabe, die seit Galilei ungelöst vorlag. Denn dass die Angabe von Galilei, die Curve sei eine Parabel, falsch war, hatte man erkannt. Jacob Bernoulli, der ältere von den beiden Brüdern, die nächst Leibniz und Newton die Schöpfer der Integralrechnung genannt werden können, hatte im Jahre 1690 in einer Abhandlung an Leibniz die Frage gerichtet, ob sein Calcul die Ermittelung dieser Curve zu leisten vermöge, und dieser fand alsbald jenen einfachen, aus Exponentialfunctionen zusammengesetzten Ausdruck. Ohne sein Resultat mitzutheilen, stellte er nun selbst das Problem öffentlich, und noch vor Ablauf der festgesetzten Zeit liefen zwei Lösungen ein. Die eine derselben stammte von dem jüngeren Bernoulli, der sich inzwischen gemeinsam mit seinem Bruder vollständig in die Integralrechnung eingearbeitet hatte. Die andere gab zwar nicht die explicite Gleichung, aber sie bestimmte unzweideutig die Curve durch ihre Eigenschaften, ihre Tangenten, ihre Krümmungskreise, ihre Evolute und ihre Fläche. Diese Lösung war ohne directe Anwendung der Integralrechnung gefunden, sie kam von Huyghens. Seit seinem 15. Jahre hatte sich dieser mit der Aufgabe beschäftigt, jetzt angeregt durch Leibniz' Ausschreiben hatte er in seinem 61. Lebensjahre die Lösung gefunden. Zugleich aber erkannte er, welch mächtiges Hülfsmittel für die Mechanik die neue Analysis, der er bis dahin kein rechtes Vertrauen schenken wollte, sein müsse. Während der letzten 5 Jahre seines Lebens hat er noch mit Eifer dieselbe sich angeeignet trotz aller Schwierigkeiten, welche die Schriften von Leibniz, der nie eine systematisch vollständige Darstellung gegeben hat, zumal bei den Definitionen der höheren Differentiale, enthielten.

Was aber Leibniz zu seinen Entdeckungen verhalf, war keineswegs blos die neue Rechnungsart mit stetig veränderlichen Grössen; als ebenso bedeutend muss der Schritt bezeichnet werden, den er that, indem er die sogenannten elementaren transscendenten Functionen in die Analysis und Geometrie einführte. Er war sich der Tragweite dieses Fortschrittes wohl bewusst. Wiederholentlich betont er, dass er die Schranke niedergerissen habe, welche Cartesius zwischen den „geometrischen" und „mechanischen", d. h. nach Leibniz' Bezeichnung zwischen den algebraischen und transscendenten Curven errichtet hatte, eine Schranke, die auch schon durch die grossen Leistungen Pascals bei den Cycloiden überwunden war. Es ist das Verdienst von Leibniz und seiner unmittelbaren Schüler Bernoulli, dass wir mit der Exponentialfunction und dem Logarithmus, den trigonometrischen und cyclometrischen Functionen so geläufig operiren können. Für alles, was innerhalb der algebraischen und elementartransscendenten Functionen liegt, hat er, soweit es ohne complexe Zahlen geschehen kann, die Grundlagen ausgebildet. Es ist, kurz gesagt, die Theorie der mit diesen Functionen lösbaren Quadraturen und Differentialgleichungen und ihre Anwendung auf die ebene Geometrie; seine eigenen Untersuchungen gehen bis an die Grenzen dieses Gebietes, bis zur Reduction und Reihenentwickelung für irrationale Integrale höheren Geschlechts.

Nach Leibniz hat die Analysis zwei wesentliche Erweiterungen erfahren, die sich freilich nicht mehr so plötzlich und glänzend vollzogen, sondern auf dem Wege allmäliger Entwickelung: zuerst die Einführung der partiellen Differentialgleichungen, und damit die Ausbildung der Geometrie des Raumes und der analytischen Mechanik; sodann die Einführung der complexen Zahlen und damit die Umgestaltung der algebraischen und functionen-theoretischen Probleme.

Für rein geometrische Methoden hatte er weniger Anlage. Nur die Grundlagen der Euklidischen Geometrie unterzog er um ihres logischen Inhaltes willen einer öfteren Prüfung. Zu neuen geometrischen Studien ist er nicht gekommen, wiewohl ihm in Paris die Hinterlassenschaft Pascals übergeben war, und seine Gedanken über eine Geometrie und Analysis der Lagenbeziehungen, im Gegensatze zu der bei Euklid vorwiegenden Grössenlehre, sind Bruchstücke geblieben. Gering geschätzt hat er diese Keime der jetzigen synthetischen Geometrie indessen nicht. „*Man kann in Conicis noch viel ungethanes thun,*“ schreibt er in einem Briefe[6]). „*Hätte ich selbst zwanzig Köpfe, oder vielmehr dreissig Freunde, so wollte ich einen, der sich auf dergleichen hauptsächlich legen wollte, bitten, die universalia conica zu tractiren, wie Desargues und Pascal angefangen.*“

Er empfand in Deutschland den Mangel an jüngeren Kräften, auf die er Hoffnung für die Zukunft setzen konnte. Ein Verhältniss aber, das zu Johann Bernoulli, hat ihm eine ungetrübte Befriedigung und die lebendigste Anregung gewährt. Joh. Bernoulli, 21 Jahre jünger als Leibniz, war diesem seinen Leistungen nach nicht unbekannt, als er sich im December 1693 an ihn wandte, um seine Fürsprache bei dem Herzog von Wolfenbüttel zu erbitten. Von da an hat die Correspondenz zwischen beiden ununterbrochen bis zu Leibniz' Tode 23 Jahre hindurch gedauert; sie ist in 238 Briefen (in der neuen Ausgabe von Gerhard sind es 275) noch von Bernoulli selbst veröffentlicht worden. Der Briefwechsel zwischen diesen Männern, die sich im Leben nie gesehen haben, gewährt den reichsten Einblick in das wissenschaftliche und persönliche Geistesleben beider. Bernoulli, der bald darauf zum Professor in Groningen ernannt wurde, wo er 10 Jahre bis zu seiner Rückkehr nach Basel weilte, übertrifft Leibniz in der exacten Durchführung jeder Aufgabe, mit der er sich beschäftigt, sowie an Präcision der Fragestellung bei mechanischen Problemen; aber an Reichthum der Ideen, an Erfindungskraft der Methoden bleibt dieser doch ihm überlegen. Und dabei tritt das Wohlwollen, mit welchem Leibniz jegliche Persönlichkeit, jegliche Leistung beurtheilte, in diesen Briefen aufs schönste zu Tage. Versöhnend suchte er in dem heftig entbrannten Streite zwischen den beiden Brüdern Bernoulli zu wirken, und niemals wohl hat Leibniz ein ungerechtes und gehässiges Wort über einen Menschen geschrieben und gesprochen. Seine Urtheile über Newton sind lange noch, nachdem sich der Prioritätsstreit mit den Engländern erhoben hatte, anerkennend, bis ihn zuletzt die Erbitterung über jene maasslosen, seinen Ruf zerstörenden Angriffe übermannte.

Bei alledem war Leibniz eine unpersönliche Natur; intimere Beziehungen hat er nie aus eigenem Bedürfniss gepflegt und sein Leben ist bei aller Mannigfaltigkeit persönlichen Wirkens ein einsames gewesen. Was ihn an die Menschen fesselte, war immer nur die unermüdliche Theilnahme und Mitarbeit für das Gemeinwohl der Menschheit. Dieses Interesse überwog in ihm so sehr, dass seine Weltbetrachtung trotz mancher persönlicher Misserfolge bis zuletzt eine ungetrübt optimistische blieb, dass er sich neidlos jedes Verdienstes freute, und nur Worte der Anerkennung hatte, wenn der Same, den er gestreut, von andern zur Reife gebracht und geerntet wurde, obgleich er auf äussere persönliche Auszeichnung oft allzu grossen Werth legte.

Es erscheint darum besonders tragisch, dass nicht nur der Streit um die Entdeckung der Infinitesimalrechnung ihm die letzten Jahre seines Lebens verdüsterte; er musste auch seinen Hauptsatz auf dem Gebiete der mechanischen Principien unausgesetzt gegen Angriffe vertheidigen.

Wir hatten schon Gelegenheit zu bemerken, dass in Leibniz' speculativ-mathematischer Denkweise die Anlage zur exacten Naturforschung, zur scharfen experimentellen Erfassung des einzelnen Phänomenes zurücktrat. Seine Leistungen lassen sich mit denen von Huyghens und Newton auf diesem Gebiete nicht messen. Die Trennung zwischen ihm und Newton rührte im tiefsten Grunde davon her, dass er für den Kern der Newton'schen Attractionslehre kein rechtes Verständniss hatte und ihre Bedeutung darum nicht voll zu würdigen wusste. In bewusster, aber mathematisch so unübertrefflich exacter Beschränkung hatte dieser sein weltumfassendes Gesetz aufgestellt über die Beschleunigung bewegter Massen in gegenseitiger Wechselwirkung, und seine Wahrheit an den Bewegungen des Planetensystemes nachgewiesen. Leibniz vermisste eine deductive Begründung dieses Gesetzes: *„Was aus dem Wesen der Dinge nicht entwickelbar ist,“* schrieb er noch in einem seiner letzten Briefe,[7] *„ist entweder ein Wunder oder absurd.“*

Seine Ideenlehre liess ihn verkennen, dass die deductive Begriffsentwickelung ihre Grenzen hat, dass schliesslich bestimmte Thatsachen der Erscheinungswelt die Anfänge aller unserer Theorien bilden. Zog sich doch durch sein ganzes Leben der Plan eines einfachen Alphabetes der Begriffe, mit dessen Hülfe alle Erfindungen auf rein logischem Wege zu leisten seien. Eine traumhafte, unmögliche Idee, ein unüberwundener Rest seiner scholastischen Logik! Denn nur aus der stets erneuten, unmittelbaren Beobachtung der Natur sind alle wahrhaften Fortschritte gewonnen worden, nicht aber aus der logischen Combination und Deduction einer bestimmten Anzahl fertiger Begriffe.

Gewiss ist es statthaft auch für die Newton'sche Attraction weitere begründende Thatsachen zu suchen; die Frage nach der Ursache des gleichen Drehsinnes aller Planetenbewegungen und anderes mehr giebt dazu Anlass; und Newton selbst hat die Fernewirkung nicht als Erklärung, sondern als Postulat hingestellt. Aber Leibniz begann von vornherein mit den complicirtesten Vorstellungen über Ursachen hierzu, ohne sich über Beschleunigung, über Centripetalkraft, und tangentialen Bewegungsantrieb genugsam Rechenschaft gegeben zu haben.

Nur in der Beurtheilung des Kräftemaasses leitete ihn ein praktischer, den Leistungen der Maschinen zugewandter Blick richtig. Er führte die lebendige Kraft ein, die Grösse, welche der Arbeitsleistung äquivalent ist. Als einem Schüler von Huyghens steht ihm die Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile oder Erzeugung von Arbeit aus nichts vollkommen fest. Auf diesem Standpunkt behauptet er, dass die Summe der lebendigen Kraft erhalten bleibe; und besass so eine gewisse Vorahnung des Satzes von der Erhaltung der Energie, soweit dies ohne den Potentialbegriff, ohne experimentelle Forschung über elastische und unelastische Körper, und ohne das mechanische Wärmeäquivalent möglich war.

Trotz dieser verhältnissmässig kleinen Leistungen auf dem Gebiete physikalisch-mechanischer Forschung war sein Streben im letzten Ziele doch ihrem Fortschritte geweiht. *„Ich wünsche,“* schrieb er im September 1691 an Huyghens, *„wir könnten noch in diesem Jahrhundert die Analysis der Zahlen und Curven zur Vollendung bringen, wenigstens in der Hauptsache, sodass wir die Menschheit von dieser Sorge befreien, damit von Stund' an die ganze Schärfe des menschlichen Geistes sich der Physik zuwende.“* Denn dass diese nur mit Hülfe seiner Entdeckungen vorwärts schreiten werde, sah er voraus. *„Die Zeit wird kommen, wo selbst das Feuer sich dem Joche beugen wird, dem die übrigen Elemente schon unterworfen sind, und die Maschinen werden der Rechnung unterliegen, gleich wie Zahlen.“* [8])

So rasch wie er es hoffte haben sich die Fortschritte in der experimentellen und mathematischen Forschung nicht vollzogen; aber als er einsam in Hannover 1716 starb, trat sein Jahrhundert mit stetig wachsendem Erfolg die Erbschaft an, welche er hinterlassen, und die unzerstörbar in ihrem Werthe bestehen muss, solange es eine Cultur der Menschheit geben wird.

Der Strom geistigen Lebens, der von ihm für Deutschland ausging, floss zuerst mehr breit als tief. Aber in allen Schulen, den mittleren sowohl wie den höheren, ist sein Einfluss bemerklich. Auf den deutschen Hochschulen fand die Infinitesimalrechnung alsbald ihre Vertreter, in den mittleren vertiefte und erweiterte sich der mathematische Unterricht, zum Theil mit viel zu weit gehenden Anwendungen auf technische Handfertigkeiten und Künste. Damals entstanden die neuen Realschulen, welche freilich zuerst bedenkliche Vermischungen des Gymnasialunterrichtes mit gewerblichen Fachschulen darboten. Denn es erhob sich jene wohlberechtigte Forderung einer zugleich mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildung, die gegenwärtig noch zu einer Trennung unserer Mittelschulen geführt hat.

Vielleicht wird dieser Zwiespalt sich mit der Zeit wenn auch nicht völlig lösen, so doch mildern. Irre ich nicht, so muss sich eine Einigung über das Maass der in der Mathematik und Naturwissenschaft zu stellenden Anforderungen erzielen lassen. Denn wenn von der einen Seite zugestanden wird, dass eine gründliche Vorbildung in diesen Wissenschaften für unsere jetzige Jugendbildung und zwar für jeden höheren Beruf unerlässlich ist, so wird man andererseits zugeben müssen, dass detaillirte Kenntnisse auf dem Gebiete der Naturerscheinungen sich nicht frühzeitig anlernen lassen, dass daher in der Chemie sowohl wie in der Physik jede Steigerung der Anforderungen, die über die Grundlagen hinausgeht, von Uebel sein würde. Dann wird nicht mehr der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht in Gegensatz zu dem der klassischen Sprachen gestellt werden können — der Bildungswerth zwischen diesen verschieden gearteten Fächern lässt sich überhaupt nicht abwägen, — sondern es wird die Frage die leichter discutirbare Form gewinnen: ob die alten oder die neueren Sprachen vorzugsweise das historische und sprachliche Bildungselement im Jugendunterricht sein sollen.

Man hat Leibniz verantwortlich gemacht für die theilweise Verflachung, in welche die Schulen durch die Betonung des reinen Nützlichkeitsprincipes geriethen, und man kann auch mit einigem Recht dazu seine pädagogischen Gelegenheitsschriften anführen, in denen er diesen Standpunkt mit nackten Worten vertritt. Gewiss, auch er war nicht frei von manchen Modethorheiten seiner Zeit, in welcher zumal das höfische Wesen zu einem Unwesen wurde; aber allen seinen Plänen lag doch stets ein tieferes ethisches Princip zu Grunde. Aus der politischen und commerciellen Niederlage hoffte er Deutschland zu heben, durch eine Erziehung nicht der unteren Schichten, sondern der höheren Kreise, vor allem der Fürsten. Seine pädagogischen Schriften haben dies Ziel vor Augen und wollen von diesem zunächst politischen Gesichtspunkt aus betrachtet sein. Der Mann, der in seinen eigensten Arbeiten die abstractesten Fragen der Mathematik behandelte, der sich durch drei Jahrzehnte in die ältesten Quellen der vaterländischen Geschichte vertiefte, erkannte, dass in Deutschland eine engere Verbindung von Leben und Wissenschaft hergestellt werden müsse, und verkündete dies, wie es leicht geschieht, in einer Form, durch welche die wissenschaftliche Arbeit selbst herabgewürdigt schien. Wir finden sein Urtheil mehr als einseitig, wenn er die philologische Gelehrsamkeit verwirft, „von deren Folianten kaum der hundertste Theil etwas für das Leben brauchbares enthält,“[9]) dagegen die allergenaueste Kenntniss der Mathematik und Mechanik und der ganzen praktischen Physik fordert; aber heilsam musste auch solch eine Forderung dazumal sein, als die ganze gelehrte Jugendbildung vorwiegend eine grammatikalische war. Die neuen Realschulen, mochten sie auch zuerst theilweise missglücken, führten doch allmälig zu einer nothwendigen Reform der Gymnasien, und die Francke'sche Schule in Halle hat in ihrer Schulordnung von 1721 bei aller Uebertreibung des Lehrplanes in den mechanischen und physikalischen Fächern zum ersten Mal den Werth des mathematischen Unterrichtes richtig präcisirt.[10]) Wir lächeln heute über Leibniz' Denkschrift zur Errichtung der Berliner Akademie, welche den

Zweck haben solle, „theoriam cum praxi zu vereinigen und nicht allein die Künste und Wissenschaften, sondern auch Land und Leute, Feldbau und Manufacturen und Commercium und mit einem Wort die Nahrungsmittel zu verbessern“[11]) und doch war dieses ein weit vorgreifender Plan zu einer Zeit, in welcher es auf den Universitäten kaum eine andere Naturwissenschaft als die ersten Anfänge der Medicin und Aristotelische Classificationen der Naturreiche gab, ein Plan, der jetzt, wenn auch indirect, durch die ganze wissenschaftliche Naturforschung gefördert wird.

Das grosse Gebiet der mechanischen und chemischen Wissenschaften in ihrer unmittelbareren Beziehung zur Technik hat sich im Laufe der letzten Jahrzehnte seine eigenen Bildungsstätten, die technischen Hochschulen, geschaffen.

Gegründet auf ein genaues mathematisch-naturwissenschaftliches Studium, sich anschliessend an eine feste, historische und sprachliche Ausbildung sind sie hervorgegangen aus einer Verbindung der Wissenschaft mit dem praktischen Leben, wie er sie anstrebte, als eine Repräsentation des Geistes, der durch Leibniz in Deutschland gezeugt worden ist.

Was er als einzelne Persönlichkeit darstellte, wir vermögen es jetzt nur durch ganze Collegien zum Ausdruck zu bringen. Nur in der festen Einigung eines solchen aber, wobei jeder mit seiner Arbeit sich nicht von der Gesammtheit loslöst, sondern innerhalb derselben steht, liegt allein die Gewähr für erspriessliche Leistungen. Die Verantwortung für dieselben wird darum auch nicht nur von jedem einzelnen getragen, sie muss ein Anliegen und ein Recht der gesammten Körperschaft sein, und dieser zu einer unabweislichen Pflicht gemacht werden.

Für die neu begonnene Arbeit dieses Semesters aber lassen Sie uns, meine Herren Commilitonen, noch des Wahlspruches von Leibniz gedenken: *Am Leben verliert, wer die Stunde verdirbt! Pars vitae, quoties perditur hora, perit.* Wohl mag die Betrachtung der Leistungen eines Mannes wie dieses einen Jeden verzagen lassen. Aber die Grösse des Genius offenbart sich, wenn wir tiefer blicken, in der Beharrlichkeit des geistigen Strebens. Dies ist ein Ziel, nach welchem sich ringen lässt. Entscheidend für Ihre ganze Zukunft wird es sein, wieviel Sie von solcher Beharrlichkeit sich während Ihrer Studienjahre erworben haben.

Nur in dem festen Zusammenwirken von Lehrern und Schülern kann unsere Hochschule die Aufgaben erfüllen, welche ihr in dem geistigen Leben unseres Staates zugewiesen sind. Unser Streben für das Gedeihen dieser Arbeit, unsere Wünsche für die Wohlfahrt des Landes unter dem glorreichen Scepter unseres Königs, des thatkräftigen Beschirmers und Förderers der Schulen, legen wir hinein in den freudigen Ruf:

„Seine Majestät König Albert lebe hoch!“

Anmerkungen.

[1]) Guhrauer, *Gottfried Wilhelm Freiherr v. Leibnitz.* Eine Biographie. Breslau 1846. Bd. 1. pag. 26.

[2]) Guhrauer, a. a. O. Bd. 1. pag. 20.

[3]) ‚*Supplementum geometriae dimensoriae*' etc. (Act. Erudit. Lips. ann. 1693.) *L.'s mathemat. Schriften*, herausgegeben von Gerhardt. 2. Abth. Bd. 1.

[4]) Brief an Placcius. Guhrauer, a. a. O. Bd. 2. pag. 116. Desgleichen schreibt er in einem Briefe (Juli 1697) an Joh. Bernoulli: „Mirari non debes si profundiora Tua non nisi perfunctorie attingere nunc possum, cui tot alia sunt meditanda, legenda, scribenda, agenda; in Aula, in officio, cum amicis, cum exteris, coram et per litteras [quarum ultra 300 quotannis scribo], imo et per dissertationes, veluti de Juribus Principum, de Historia Brunswicensi, de aliis Historico-Politicis, de controversiis religionis, in quibus saepe etiam scriptis exerceor. His adde inspectionem Bibliothecae Guelfebytanae, Augustae, et nostrae Electoralis, volutationem qualemcunquē novorum librorum et Relationum alicujus momenti, ne sim hospes in re Publica et Litteraria; curam publicandi scriptores historicos ineditos ex veteribus membranis [quales nunc sub prelo sunt], ubi opus recensione diligenti; prosecutionem Codicis Juris Gentium Diplomatici, cujus volumen jam edidi, tum multa quae quotidie veniunt in mentem, non in Mathesi tantum sed et Physica, et Philosophia profundiore et Historia et Jure, aliisque, quae paucis verbis in schedis consignare soleo, ne pereant. Adde etiam cogitata de Elementis Juris Naturae constituendis longe aliter, quam vulgo opinantur, de quo subinde meditor; jam enim promisi publice ante multos annos; sed ita ago, ut rem conferam cum Legibus Romanis et usu Fori: sed inprimis molior novam Analysin multo recepta sublimiorem, pro omni ratiocinatione humana; Chemica etiam, Technica, Mechanica, in quae subinde operarios alo. Ita judicare potes an liceat mihi saepe in profundioribus geometricis versari. Ac proinde non debes, vel indignari, vel verbis durioribus impatientiam animi ostendere, quoties non statim omnia videor dicere ad mentem Tuam."

[5]) An den Freiherrn v. Bodenhausen. Gerhardt, a. a. O. 2. Abth. Bd. 3. pag. 378.

[6]) Desgleichen. Gerhardt, ebenda. pag. 370.

[7]) An Joh. Bernoulli, Juni 1716.

[8]) ‚*Dissertatio exoterica de statu praesenti et incrementis novissimis deque usu geometriae.*' Nach einem Manuscript veröffentlicht von Gerhardt, 2. Abth. Bd. 3. pag. 316. „Geometria plerisque videtur scientia figurarum tantum, de Lineis, de Triangulis, de Circulis, de Solidis, de Cylindro, Cono, Sphaera. Docti vero ita judicant, unam eandemque esse scientiam illam, quae per omne rerum genus diffusa accuratas et in longum protractas ratiocinationes exercet . . . . Unde constat Veteres cum Apollonium geometrae nomine velut praecipuo honestassent, omnibus doctrinae solidioris laudibus a se cumulatum credidisse: et hodieque si quem hoc nomine homines in his studiis versati appellent, ab ingenio illo mathematico laudare quod per longinqua et difficilia non tentandi arte aut divinandi felicitate, sed quodam animi vigore sibi viam facit . . . . Illi prae caeteris apti ad indagationem veritatis, pariter et inventa vitae utilia in lucem producenda, qui combinatorio ingenio studium acre Geometriae et profundae meditationis aut etiam si materia postulet experiundi patientiam junxere . . . . Sane non est dubium, elateres et sonos et ipsam musicen geometricis legibus subjici, et artem projiciendi perfici posse, et tempus venturum quo ignis ipse jugum subibit, quod caetera elementa jam patiuntur. Multa restant dicenda de motu liquidorum, quae geometram expectant, sed et in solidis detrimenta, quae machinae a frictione patiuntur, aliaque quae vulgo experientiae committuntur, aestimationem ferunt, quae ubi absoluta erunt, perfectum de machinarum vi judicium in nostra potestate erit: nunc enim illud saltem possumus, ne nimium promittamus, tunc licebit machinas calculo subjicere ad instar numerorum, ubi primum experimenta quaedam fundamentalia diligenter capta erunt . . . . Duplex est geometriae utilitas, nam una ad augendas vitae commoditates pertinet, altera in ipsa mentis perfectione consistit. Illam geometrae omnibus communicant, hanc servant sibi, ut scilicet sid aliquod illis pretium operae, etiamsi nemo gratiam haberet."

[9]) Paulsen, *Geschichte des gelehrten Unterrichts.* Leipzig, 1885. pag. 336.

[10]) Mitgetheilt bei Heym: ‚*Zur Geschichte des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtes an Gymnasien, insbesondere an der Thomasschule in Leipzig.*' Programm der Thomasschule 1872/73.

[11]) Guhrauer, a. a. O. Bd. 2. pag. 193.

Druck von Pöschel & Trepte in Leipzig.

PDC 3663-30

UNIVERSITY OF TORONTO
LIBRARY

PLEASE LEAVE THIS CARD
IN BOOK POCKET

PASC
LOCATION