L'ENSEIGNEMENT

MATHÉMATIQUE

Math.
E

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT
PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
CHRONIQUE SCIENTIFIQUE — MÉLANGES — BIBLIOGRAPHIE

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRIGÉE PAR

C.-A. LAISANT
Docteur ès sciences,
ancien Examinateur d'admission à l'École
polytechnique de Paris.

H. FEHR
Docteur ès sciences,
Professeur à l'Université
de Genève.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. BUHL
Docteur ès sciences
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse

Organe officiel de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

SEIZIÈME ANNÉE

1914

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

GENÈVE
GEORG & C^{ie}, ÉDITEURS

1914

GENÈVE

IMPRIMERIE KÜNDIG

L'UTILISATION
DE LA
GÉOMÉTRIE NON-EUCLIDIENNE
DANS LA PHYSIQUE DE LA RELATIVITÉ

Henri Poincaré a montré que l'espace représentatif n'est ni homogène, ni isotrope, ni forcément à trois dimensions ; qu'il peut s'adapter à une foule de géométries différentes, et qu'il est simplement commode de raisonner sur lui comme s'il était un continu mathématique à trois dimensions auquel on applique la métrique d'Euclide. Ce choix de la géométrie euclidienne à trois dimensions, parmi toutes les autres possibles, se légitime par des raisons de simplicité mathématique et d'opportunisme physique. La géométrie d'Euclide est plus simple que la géométrie de Lobatschefski et de Riemann comme un polynôme du premier degré est moins compliqué qu'un polynôme du second : et les solides naturels — en particulier notre corps — avec lesquels nous effectuons nos mesures se comportent, à peu près, dans leurs déplacements comme les substitutions du groupe euclidien. Mais l'expérience ne nous impose pas pour cela notre géométrie : elle nous montre seulement qu'elle est la plus commode.

On pourrait à la rigueur se servir des géométries de Lobatschefski et de Riemann pour construire la mécanique et la physique. L'affirmation même que la géométrie d'Euclide est mathématiquement la plus simple ne se passe pas de commentaires. Le principe de dualité qui est évident dans la géométrie de Riemann et dans la géométrie analytique de Lobatschefski, ne l'est pas dans celle d'Euclide ; la théorie de l'équivalence des figures planes, aisée en géométrie non-euclidienne est compliquée en géométrie ordinaire dès que l'on veut se donner la peine d'être rigoureux. L'assertion de Poincaré ne se défend que par une interprétation particulière — très remarquable d'ailleurs — de la géométrie non-euclidienne. Considérons les coordonnées rectangulaires euclidiennes x, y, z d'un point et les coordonnées correspondantes ξ, η, ζ en géométrie lobatschefskienne : savoir le sinus des rapports des distances de ces trois points aux trois plans coordonnés à la constante lobatschefskienne $2k$. Posons

$$\xi = \frac{2kx}{x^2+y^2+z^2-k^2}, \quad \eta = \frac{2ky}{x^2+y^2+z^2-k^2}, \quad \zeta = \frac{2k}{x^2+y^2+z^2-k^2},$$

ou, en prenant le radical positivement,

$$x = \frac{\xi}{\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{\zeta}, \quad z = \frac{1}{\zeta}\sqrt{(k\zeta+1)^2 - \xi^2 - \eta^2 - 1}$$

on trouvera alors qu'à tout point ξ, η, ζ de l'espace lobatschefskien correspond un point de l'espace euclidien situé au-dessus du plan fondamental $\zeta = 0$; au plan et à la droite du premier espace, une sphère et un cercle coupant orthogonalement le plan fondamental ; à la sphère, au cercle et à l'angle lobatschefskiens, une sphère, un cercle et un angle euclidiens ; à la distance lobatschefskienne de deux points, le logarithme du rapport anharmonique de ces deux points et des intersections du plan fondamental avec un cercle passant par ces deux points et le coupant orthogonalement, etc. La transformation ainsi obtenue des propriétés de l'espace lobatschefskien en propriétés d'un demi-espace euclidien, leur confère une apparence compliquée : à certaines expressions lobatschefskiennes du premier degré, correspondent des expressions euclidiennes du second. En ce sens, ce n'est pas à proprement parler, la géométrie lobatschefskienne mais seulement sa transformée euclidienne qui est moins simple que la géométrie ordinaire.

Il y a plus. On peut se demander si, réellement, les mouvements de nos solides naturels se comportent, à peu près, suivant les substitutions du groupe euclidien, et non, par exemple, suivant celles du groupe de Lobatschefski ? Les raisons d'opportunisme physique invoquées en faveur de la géométrie du savant grec se retourneraient alors au bénéfice de celle du savant russe. C'est précisément la révolution que vient d'opérer, selon M. Vladimir Varicak [1], la substitution de la nouvelle physique de la relativité à l'ancienne.

A première vue, les analogies entre cette physique nouvelle et la géométrie non-euclidienne sont frappantes. Dans l'une comme dans l'autre intervient un certain paramètre, appelé respectivement *courbure spatiale* et *vitesse de la lumière*, tels que l'on est tout naturellement conduit à mesurer le rayon de courbure spatiale par la vitesse de la lumière. Dans l'une comme dans l'autre, ce paramètre est une grandeur finie ; et, pour une valeur infinie

---

[1] Physikalische Zeitschrift **11**, pp. 93, 287, 586, 1910 ; **12**, pp. 169, 1911 — **Sitzungsberichte der k. serbischen Akademie zu Belgrad**, p. 88, 1911 — **Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung**, 1912 — **Wiadomosci matematyczne**, 4, 1913 — **Primjedbe o teoriji relativnosti**, prestampano iz 1908. Kerjige « Rada » **Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti**, 1913.

qu'on lui accorde, on retrouve, respectivement, la géométrie d'Euclide et la mécanique de Newton comme cas limites. A la contraction de Lorentz dans la physique de la relativité correspond la déformation des largeurs dans l'interprétation euclidienne fournie par Poincaré de la géométrie lobatschefskienne, où l'élément linéaire $d\sigma = \frac{ds}{y}$ ne se peut déplacer, en général, sans subir de déformations. Dans la physique de la relativité, la règle du parallélogramme des vitesses cesse d'être valable : il n'y a pas de parallélogramme dans la géométrie de Lobatschefski. Le développement de celle-ci s'est heurté à de nombreuses antinomies apparentes : il en est de même du développement de celle-là avec les paradoxes d'Ehrenfest et de Born.

Ces analogies conduisirent M. Vladimir Varicák à exprimer les équations de la physique d'Einstein à l'aide de la géométrie de Lobatschefski. Il lui apparut bien vite que, non seulement les formules se simplifiaient, mais qu'elles acquéraient une signification géométrique en absolue corrélation avec l'interprétation de la théorie classique au moyen de la géométrie d'Euclide. Cette similitude va si loin qu'il n'y a pas lieu, parfois, de modifier l'énoncé des théorèmes de la théorie classique, à la seule condition de substituer aux figures euclidiennes les figures correspondantes de la géométrie lobatschefskienne, en prenant pour constante spatiale le paramètre $c = 3 \,.\, 10^{10}$ cm. La géométrie de Lobatschefski se présente ainsi comme l'instrument le plus adéquatement approprié au traitement mathématique de la physique de la relativité. Elle revendique pour son compte la précellence attribuée jusqu'à nos jours à celle d'Euclide.

Définition et représentation graphique des vitesses. — La vitesse de la lumière joue dans la physique nouvelle le rôle de la vitesse infinie dans la mécanique ancienne. M. Vladimir Varicák commence par définir la vitesse de manière à représenter celle de la lumière par une grandeur infinie. Comme unité de longueur, il prend $c = 3 \,.\, 10^{10}$ cm, c'est-à-dire le parcours de la lumière en une seconde, et il pose

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th} \frac{U}{c} = \operatorname{th} u \,, \tag{1}$$

à la vitesse v correspond le segment U dont la longueur est mesurée par le nombre u d'après la relation

$$u = \operatorname{th}^{-1} \frac{v}{c} \,. \tag{2}$$

Suivant la manière d'écrire anglaise, (2) représente la fonction inverse de la tangente hyperbolique. Cette définition ne diffère pas considérablement de la conception ordinaire que nous nous faisons des vitesses. Pour représenter des mouvements uniformes on se sert, dans la mécanique classique, de vecteurs proportionnels aux vitesses en question. Dans les limites de notre expérience ordinaire, la formule (2) conduit aux mêmes résultats. C'est seulement pour des vitesses de l'ordre de celle de la lumière, que se révèle une divergence croissante qui tend bien vite à l'infini.

Nous avons posé

$$\frac{U}{c} = u = \frac{v}{c} + \frac{1}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{v}{c}\right)^5 + \dots \tag{3}$$

Prenons maintenant $v = 1$ km. sec., on obtient alors

$$u = \frac{1}{3 \cdot 10^5} + \frac{1}{3^4 \cdot 10^{15}} + \frac{1}{5 \cdot 3^5 \cdot 10^{25}} + \dots$$

Si nous négligeons les termes de la série à droite du premier, nous commettrons une erreur qui n'influera pas sur la dixième décimale. Nous aurons alors un vecteur de 1 km. pour représenter une vitesse de 1 km./sec. Si l'on considère des vitesses, énormes pour la mécanique ordinaire, de 100 km./sec., on aura

$$\frac{U}{c} = \frac{1}{3 \cdot 10^2} + \frac{1}{3 \cdot 3^3 \cdot 10^9} + \frac{1}{5 \cdot 3^5 \cdot 10^{15}} + \dots ,$$

et le segment U ne dépassera 100 km. que d'environ 3 mm. La différence n'est pas encore pratiquement appréciable. A la vitesse de 100,000 km./sec. correspondra un segment de 103,990 km. ce qui constitue, déjà, une différence notable. Mais si nous considérons les vitesses des rayons β qui, d'après la célèbre expérience de Kaufmann, s'élèvent à 216,000 et 279,780 km./sec., les vecteurs qui les représentent seront de 272,400 et 503,400 km. Enfin pour $v = c$ on aura th $u = 1$, d'où $U = \infty$.

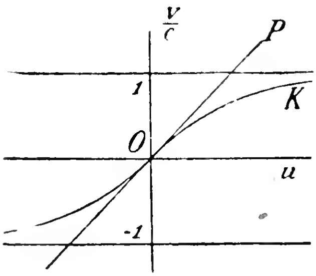


Fig. 1.

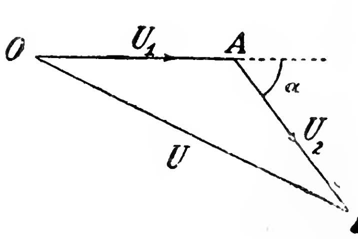


Fig. 2.

On peut représenter ces rapports graphiquement d'une façon fort simple. En prenant u comme abscisse et $\frac{v}{c}$ comme ordonnée,

(2) sera représenté par la courbe K. L'évaluation habituelle correspond à la droite P, c'est-à-dire au premier membre de la série infinie (3). Cette droite est la tangente de K au point d'inflexion O; à mesure qu'on s'éloigne de l'origine la courbe K s'en écarte toujours davantage.

La loi d'addition des vitesses d'Einstein. — L'addition vectorielle des vitesses se retrouve dans la physique de la relativité. Considérons deux vitesses v_1 et v_2 qui comprennent entre elles un angle α. Les segments U_1 et U_2 leur correspondent, que mesurent les nombres u_1 et u_2 suivant la relation

$$(4) \qquad \frac{v_1}{c} = \operatorname{th} u_1 \,, \qquad \frac{v_2}{c} = \operatorname{th} u_2 \,.$$

On porte le segment $OA = U_1$ dans la direction de v_1 à partir du point O, et l'on place sous l'angle α le segment $AB = U_2$. La résultante est exprimée par le vecteur $OB = U$. Le triangle lobatschefskien OAB comprend la relation

$$(5) \qquad \operatorname{ch} u = \operatorname{ch} u_1 \operatorname{ch} u_2 + \operatorname{sh} u_1 \operatorname{sh} u_2 \cos \alpha \,.$$

Si l'on pose

$$(6) \qquad \operatorname{ch} u = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \,, \qquad \operatorname{sh} u = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \,.$$

on obtient

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{v_1}{c}\right)^2}\sqrt{1-\left(\frac{v_2}{c}\right)^2}}{1+\frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}} \,.$$

et, après quelques transformations,

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{\left(\frac{v_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{c}\right)^2 - \left(\frac{v_1 v_2}{c^2}\right)^2 - 1}{\left(1+\frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}\right)^2} + 1$$

$$= \frac{\left(\frac{v_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{c}\right)^2 - \left(\frac{v_1 v_2}{c^2}\right)^2 \cdot (1-\cos^2 \alpha) + \frac{2 v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}}{\left(1+\frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}\right)^2}$$

d'où suit finalement

$$(7) \qquad v = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos \alpha - \left(\frac{v_1 v_2 \sin \alpha}{c^2}\right)^2}}{1+\frac{v_1 v_2 \cos \alpha}{c^2}}$$

C'est la loi d'Einstein pour la composition des vitesses.

Si v_1 et v_2 sont faibles par rapport à la vitesse de la lumière on peut négliger le dernier membre dans le numérateur et le dénominateur de l'expression (7), et on retrouvera la formule ordinaire

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos \alpha} \, . \tag{8}$$

Si l'on accorde au paramètre c une valeur infinie, on retombe dans la géométrie d'Euclide, et la formule (7) se réduit exactement à (9).

Si les vitesses v_1 et v_2 comprennent l'angle $\alpha = 0$, elles ont la même direction, et l'on a, d'après (5), $u = u_1 + u_2$. La vitesse résultante v se déduit de la formule

$$\operatorname{th} u = \frac{\operatorname{th} u_1 + \operatorname{th} u_2}{1 + \operatorname{th} u_1 \operatorname{th} u_2} \, ,$$

ou

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} \, . \tag{9}$$

La résultante est certes arithmétiquement plus petite que la somme des composantes, mais elle est représentée, comme dans la théorie classique, par un segment qui équivaut à la somme des segments représentant les composantes. Si l'on compose deux vitesses égales U_1 dans la même direction, la résultante sera représentée par le segment $2U_2$.

Non commutativité de l'addition vectorielle des vitesses. — Dans la géométrie de Lobatschefski il n'y a pas de parallélogramme. La résultante de deux vitesses ne peut donc être représentée par la diagonale d'un parallélogramme. Il s'ensuit que les composantes ne sont pas commutatives. Pour plus de simplicité, prenons deux vitesses qui forment l'angle $\alpha = \frac{\pi}{2}$. D'après la formule (5) nous avons

$$\operatorname{ch} u = \operatorname{ch} u_1 \operatorname{ch} u_2 \, . \tag{10}$$

d'où l'on tire facilement

$$\operatorname{th}^2 u = \operatorname{th}^2 u_1 + \operatorname{th}^2 u_2 - \operatorname{th}^2 u_1 \operatorname{th}^2 u_2$$

ou

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \left(\frac{v_1 v_2}{c}\right)^2} \, . \tag{11}$$

Dans la figure 3 nous avons

$$OA = u_1 , \qquad AB = u_2 , \qquad OB = u .$$

Dans la géométrie hyperbolique, la somme des angles d'un triangle est toujours plus petite que deux droits. Dans le triangle OAB on a par conséquent

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \frac{\pi}{2} .$$

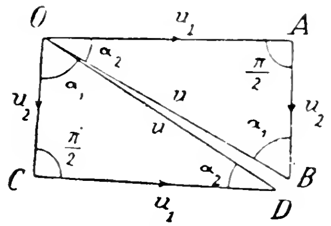


Fig. 3.

Portons le segment u_2 dans la direction OC normalement à OA, et plaçons sous l'angle droit le segment u_1 : nous atteignons le point D, qui est différent de B. Dans l'ancienne mécanique ces deux points coïncident. Si l'on compose les vitesses suivant l'ordre inverse, on obtient une résultante de même grandeur, mais de direction différente. La différence de direction

$$\delta = \sphericalangle \,\mathrm{BOD} = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 + \alpha_2 \tag{12}$$

peut facilement se représenter comme une fonction des composantes.

Si l'on introduit dans la formule

$$\operatorname{cotg} \delta = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2}{1 - \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} \tag{13}$$

la valeur tirée du triangle lobatschefskien OAB

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\operatorname{th} u_1}{\operatorname{th} u_2} , \qquad \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\operatorname{th} u_2}{\operatorname{th} u_1} .$$

on obtient

$$\operatorname{cotg} \delta = \frac{\operatorname{th} u_1 \operatorname{sh} u_1 + \operatorname{th} u_2 \operatorname{sh} u_1}{\operatorname{sh} u_1 \operatorname{sh} u_2 - \operatorname{th} u_1 \operatorname{th} u_2} , \tag{14}$$

ce qui, par suite de (1) et de (6) se transforme en

$$\operatorname{cotg} \delta = \frac{v_1^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2} + v_2^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}{v_1 v_2 \left(\sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}\right)} . \tag{15}$$

Dans la géométrie de Lobatschefski il n'y a pas de figures semblables. Il n'y a pas davantage, dans la théorie de la relativité, de similitude cinématique. Quand on multiplie toutes les composantes par le nombre k, la résultante est k fois plus grande dans l'ancienne mécanique, mais non dans la nouvelle. On doit dessiner toutes les figures avec leur grandeur absolue, et, comme l'unité de longueur est trop grande, on ne peut en donner qu'une représentation schématique et tronquée.

Les coordonnées de Weierstrass. — Convenons maintenant de prendre comme unité de longueur 1 cm., et de mesurer le temps de façon que la vitesse de la lumière soit 1 cm. par unité de temps. Nous désignerons ce temps nouveau par l, et nous considérerons une montre comme un simple instrument de mesure, propre à indiquer combien de fois un même phénomène s'est reproduit, toujours dans les mêmes conditions, depuis un événement déterminé choisi pour origine des temps. Nous exprimerons ainsi l'indication du temps d'une montre déterminée toujours par un seul nombre $l = ct$.

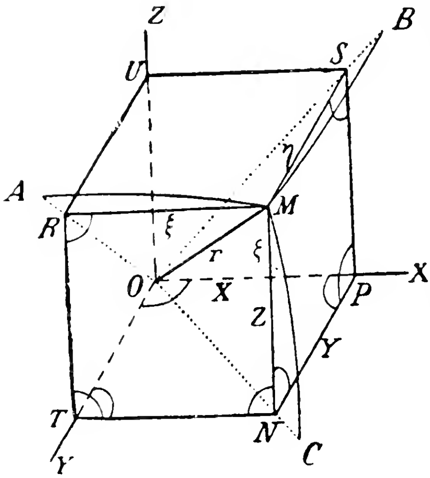


Fig. 4.

Un événement élémentaire sera représenté par un système de quatre valeurs x, y, z, l que nous considérerons comme les coordonnées homogènes de Weierstrass d'un point dans un espace lobatschefskien à trois dimensions.

Par le point M (fig. 4) menons trois arcs d'horicycles normaux aux plans des coordonnées; abaissons du même point trois perpendiculaires ξ, η, ζ sur ces plans, et soient N, R, S les pieds des trois perpendiculaires,

$$X = OP, \qquad Y = PN, \qquad Z = NM$$

seront les coordonnées lobatschefskiennes, et

$$(16) \qquad \begin{aligned} x &= \operatorname{sh}\xi = \operatorname{sh}X \operatorname{ch}Y \operatorname{ch}Z, \\ y &= \operatorname{sh}\eta = \operatorname{sh}Y \operatorname{ch}Z, \\ z &= \operatorname{sh}\zeta = \operatorname{sh}Z, \\ l &= \operatorname{ch}\lambda = \operatorname{ch}X \operatorname{ch}Y \operatorname{ch}Z, \end{aligned}$$

les coordonnées weierstrassiennes, exprimées en fonction des premières, du point M. On trouve alors facilement que les arcs d'horicycles MA, MB et MC sont les x, y, z en question, et que les coordonnées weierstrassiennes de chaque point satisfont à l'équation quadratique

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1 \ . \tag{17}$$

On sait le rôle de cet invariant dans l'interprétation imaginaire à quatre dimensions de Minkowski.

Le groupe de transformations de Lorentz-Einstein. — Le groupe de Newton

$$x' = x - vt \ , \quad y' = y \ , \quad z' = z \ , \quad t' = t \tag{18}$$

exprime une translation le long de la ligne des x dans la géométrie euclidienne. Le groupe de Lorentz-Einstein

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \ , \quad y' = y \ , \quad z' = z \ , \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \tag{19}$$

s'interprète également comme une translation le long de l'axe des x dans la géométrie de Lobatschefski.

Si nous demeurons dans le plan, nous pouvons dire : *le groupe de transformations de Lorentz-Einstein définit un mouvement le long des hypercycles qui ont l'axe des* x *comme ligne médiane.*

L'hypercycle $Y = b$ est le lieu des points qui sont à une distance constante b de la ligne des x. La longueur de son arc compris entre deux points M et M′ est (fig. 5)

$$s = (X - X')\,\text{ch}\, b \ . \tag{20}$$

La translation du segment s le long de l'hypercycle dans le sens négatif est donnée par les équations

$$X' = X - \frac{s}{\text{ch}\, b} \ , \qquad Y' = Y \ ; \tag{21}$$

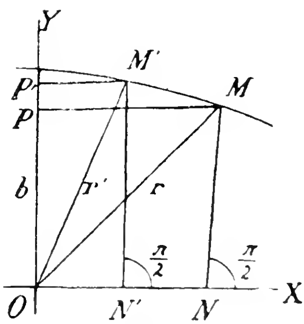


Fig. 5.

pour le passage du point M′ au point M″ on a

$$X'' = X' - \frac{s'}{\text{ch}\, b} \ , \qquad Y'' = Y' \ ,$$

ou

$$X'' = X - \frac{s + s'}{\text{ch}\, b} \ , \qquad Y'' = Y \ ; \tag{22}$$

d'où résulte la propriété qu'ont les translations le long d'un hypercycle de former un groupe.

Soit u la projection XX' de l'arc MM' sur l'axe des x. On a alors

$$X' = X - u \,, \qquad Y' = Y \,, \tag{23}$$

donc

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} X' &= \operatorname{sh} X \operatorname{ch} u - \operatorname{ch} X \operatorname{sh} u \,, \\ \operatorname{sh} Y' &= \operatorname{sh} Y \,. \end{aligned} \tag{24}$$

En multipliant la première équation par $\operatorname{ch} Y' = \operatorname{ch} Y$, on obtient

$$\operatorname{sh} X' \operatorname{ch} Y' = \operatorname{sh} X \operatorname{ch} Y \operatorname{ch} u - \operatorname{ch} X \operatorname{ch} Y \operatorname{sh} u \,, \quad \operatorname{sh} Y' = \operatorname{sh} Y \,. \tag{25}$$

D'après la figure (5) on a de plus

$$\operatorname{ch} OM' = \operatorname{ch} X' \operatorname{ch} Y' \,, \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{ch} r' = \operatorname{ch}(X - u) \operatorname{ch} Y \,, \tag{26}$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{ch} r' = \operatorname{ch} X \operatorname{ch} Y \operatorname{ch} u - \operatorname{sh} X \operatorname{ch} Y \operatorname{sh} u \,. \tag{27}$$

Jusqu'à présent nous avons appliqué les coordonnées lobatschefskiennes. Si nous voulons passer aux coordonnées weierstrassiennes, nous devons nous servir des formules de transformation (16) qui permettent d'écrire les équations (26) et (27) sous la forme

$$x' = x \operatorname{ch} u - l \operatorname{sh} u \,, \qquad y' = y \,, \qquad l' = l \operatorname{ch} u - x \operatorname{sh} u \,. \tag{28}$$

Si l'on pose d'après la formule (6)

$$\operatorname{ch} u = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \,, \qquad \operatorname{sh} u = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \,,$$

et $l = ct$, on obtient aussitôt le groupe de transformations de Lorentz-Einstein sous son aspect habituel (19). Nous voyons ainsi que la transformation de l'espace et du temps entraînée par un mouvement uniforme de vitesse u, est complètement caractérisé par la translation du point M représentant un événement élémentaire.

Dans l'espace, on obtient les hypercycles qui ont l'axe des x pour ligne médiane comme lignes d'intersections de deux hypersphères

$$y - d_2 = 0 \,, \qquad z - d_2 = 0 \,,$$

dont les plans médians sont les plans des coordonnées XY et XZ. Le groupe de transformations de Lorentz-Einstein (28), auquel s'applique l'équation $Z' = Z$, se peut interpréter alors : *comme une translation le long de la ligne d'intersection de ces deux hypersphères*. La trajectoire d'un point d'un corps solide emporté d'un mouvement de translation le long de l'axe des x, est un hypercycle. Les dimensions transversales du corps restent invariables dans ce déplacement.

Si nous prenons le paramètre $c = \infty$, la géométrie de Lobatschefski se changera dans celle d'Euclide ; les horicycles x, y, z deviendront des lignes droites ; les coordonnées de Weierstrass se transformeront dans les coordonnées cartésiennes ordinaires ; les hypercycles se trouveront être des parallèles à l'axe des x ; au groupe de transformations (28) ou (19) se substituera celui de Newton (18).

La forme infinitésimale du groupe de Lorentz-Einstein est

$$\text{(29)} \qquad Uf \equiv - t\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial t} .$$

Une première sorte d'invariants est formée par les hypercycles $Y = b$

$$\text{(30)} \qquad \omega(t, x) = t^2 - x^2 - y^2 \coth^2 b = 0 .$$

Les normales à l'axe des x sont des invariants de seconde sorte

$$\text{(31)} \qquad \omega(t, x) = \frac{t}{x} - \coth u = 0 ,$$

car on a

$$U(\omega) = - 1 + \omega^2 = F(\omega) .$$

Avec les coordonnées rectangulaires lobatschefskiennes l'équation de ces normales est $X = u$.

Temps local. — Si deux observateurs sont animés de vitesses uniformes mais différentes suivant des directions parallèles, chacun d'eux peut prétendre avec le même bon droit qu'il est en repos vis-à-vis de l'autre. Géométriquement parlant, cela veut dire que nous pouvons toujours considérer un point d'un plan comme en repos, moyennant un changement convenable du système de coordonnées. Il suffit pour cela d'abaisser la normale de ce point sur l'axe des x, et de prendre cette normale comme nouvel axe des ordonnées. Mais dans cette transformation le paramètre du temps est modifié.

L'unité de temps de l'observateur en un point déterminé doit être représentée par le cosinus hyperbolique de l'abscisse lobatschefskienne de ce point. Si dans un premier système (fig. 6), l'unité de temps de l'observateur en O ou en M est égale à 1, l'unité de temps de l'observateur en O′ ou M′ sera égale à ch u.

quand on pose $OO' = u$. Il semble alors à l'observateur en repos en O, que la montre qui se meut avec la vitesse u reste avec la sienne dans le rapport ch u : 1. Dans l'évaluation de la durée d'un événement avec la montre mobile, l'observateur en repos doit trouver un nombre plus petit. La relation suivante se vérifie

$$(32) \qquad t' = \frac{t}{\operatorname{ch} u}, \qquad \text{ou} \qquad t' = t\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Mais, dans le second système, l'unité de temps de l'observateur en O′ est égal à « 1 », pendant que l'unité de temps de l'observateur en O est égal à ch u. Les deux systèmes sont entièrement équivalents. On ne saurait donc parler d'une durée en soi. Il n'est pas davantage permis, en conséquence, d'accorder à la simultanéité de deux événements une signification absolue. Tel est bien le résultat des recherches d'Einstein sur la nouvelle notion, purement locale, du temps.

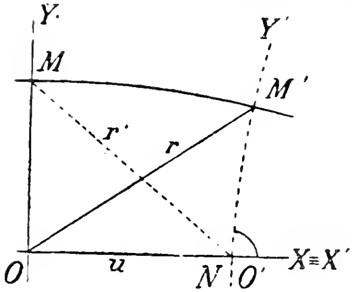


Fig. 6.

Conclusions. — Sans qu'il soit besoin de poursuivre l'exposé beaucoup plus complet de M. Varicak, qui s'étend à divers phénomènes d'optique et à la solution des paradoxes d'Ehrenfest et de Born, les exemples précédents suffisent à montrer comment la géométrie de Lobatschefski se substitue naturellement à celle d'Euclide dans la physique de la relativité. C'est en partant d'elle que M. Emile Borel est parvenu à mettre en lumière des conséquences qui avaient jusqu'alors échappé aux plus sagaces relativistes[1] : les observateurs qu'emporte un système peuvent le tenir pour constamment en translation, tandis qu'il apparaît animé d'un mouvement de rotation à des observateurs extérieurs ; d'où la possibilité de rendre compte des mouvements de rotation qui apparaissent à des observateurs en repos par des hypothèses où les mouvements intrinsèques sont uniquement des mouvements de translation.

A quoi tient cette convenance de la géométrie non-euclidienne à la physique de la relativité ? M. Varicak semble l'interpréter par une anisotropie géométrique de l'espace, qui rendrait compte en particulier, de la contraction de Lorentz. Mais l'espace est un continuum amorphe ; il est dénué par lui-même d'efficace et de forme, et seuls les corps qui y sont plongés, ou le réseau de lignes

[1] C. R., 20 janvier 1913.

et de surfaces qu'on convient d'y tracer, lui en donnent une par métaphore. La géométrie métrique est, non pas l'étude des propriétés de l'espace, mais celle de la structure du groupe des mouvements des corps solides et des groupes dérivés que l'on peut former avec ce groupe fondamental. Alors, à s'en tenir au point de vue purement descriptif d'Einstein, on voit que la notion du corps solide ordinaire disparaît dans la physique de la relativité. Le groupe de transformations de Lorentz-Einstein correspond non à des déplacements euclidiens, mais à des déplacements hyperboliques. Au point de vue explicatif de Lorentz, les corps se contractent dans le sens de leur mouvement et la variation de leur forme est entraînée par l'équilibre entre les actions électromagnétiques des électrons qui les composent et la pression constante et uniforme de l'éther sur eux.

Est-ce à dire que la géométrie de Lobatschefski soit physiquement vraie et celle d'Euclide fausse? La proposition n'a pas de sens. On peut conserver la géométrie ordinaire pour traiter de la physique de la relativité, et c'est ce qu'ont fait Lorentz et Einstein ; on peut aux trois coordonnées d'espace habituelles ajouter une quatrième dimension imaginaire, et c'est ce qu'a fait Minkowski ; on peut enfin se servir, si bon semble, de nouvelles géométries comme celle que MM. Wilson et Lewis [1] se sont accordés à construire. Chacune de ces interprétations a ses avantages particuliers. Celle de M. Varicák, à l'aide de la géométrie de Lobatschefski, sauvegarde le parallélisme entre les énoncés euclidiens de l'ancienne physique et ceux de la nouvelle. Le langage d'univers de Minkowski révèle des analogies insoupçonnées : il y a bien des manières de projeter l'espace à quatre dimensions (x, y, z, t) sur l'espace à trois dimensions x, y, z, et le temps t; des phénomènes ambigus et contradictoires dans un certain mode de projection deviennent simples et harmonieux avec un autre. Enfin, l'interprétation même de Minkowski conduit naturellement à la géométrie de MM. Wilson et Lewis, qui permet de retrouver comme autant de théorèmes, en partie, les invariants physiques dont la présence en mécanique et en électromagnétisme est entraînée par le principe de relativité.

Il y a là une confirmation surprenante, après coup, des thèses philosophiques d'Henri Poincaré sur la commodité géométrique. Les axiomes de la géométrie ne sont pas des vérités nécessaires qui s'imposeraient analytiquement à l'esprit ou synthétiquement *a priori* à l'expérience, mais ce sont des conventions commodes en vertu de certaines particularités de notre corps et de notre

---

[1] Proceedings of the american Academy of Arts and Sciences, nov. 1912. — Cf., à un autre point de vue, l'article de M. Cailler (Genève) sur les équations du principe de Relativité et de la Géométrie ; *Archives des Sciences physiques et naturelles*, t. XXXV, fév. 1913

milieu. Or, précisément, une approximation plus poussée des sciences physiques a conduit récemment certains savants à préférer d'autres géométries à celle d'Euclide, parce qu'elles expriment plus commodément encore — dans certains cas du moins — les phénomènes de notre univers. C'est ainsi qu'une même question de physique mathématique est traitée par les uns et les autres à l'aide des géométries réelles ou imaginaires, à trois ou quatre dimensions, d'Euclide, de Lobatschefski, de Minkowski, de MM. Wilson et Lewis. On ne saurait mieux montrer qu'il n'y a là qu'une question de pure commodité; et, en présence des conceptions nouvelles, le tranquille philosophe géomètre est en droit de conclure : « Nous avions adopté une convention parce qu'elle nous semblait commode et nous disions que rien ne pourrait nous contraindre à l'abandonner. Aujourd'hui certains physiciens veulent adopter une convention nouvelle; ils jugent cette convention nouvelle plus commode, voilà tout; et ceux qui ne sont pas de cet avis peuvent légitimement conserver l'ancienne pour ne pas troubler leurs vieilles habitudes[1] ».

L. Rougier (Lyon).

ÉGALITÉS MULTIPLES[2] DE G. TARRY

Par suite de l'abondance des matières, nous avons dû retarder la publication de cette intéressante Note du regretté G. Tarry. *En nous envoyant le manuscrit, M. Aubry nous écrit : « J'ai l'honneur de vous adresser ci-joint une étude de M. G. Tarry qui me paraît des plus intéressantes et résultant de fragments d'une correspondance active que nous avons depuis quelque temps, fragments que j'ai réunis, coordonnés et présentés aussi clairement que j'ai pu. M. Tarry étant malade se désintéressait de cette étude et j'ai jugé qu'il serait regrettable qu'elle restât inconnue, aussi je lui ai demandé de m'autoriser à en solliciter l'insertion dans l'« Ens. math... » — On sait que M. Tarry mourut le 21 juin 1913.* N. de la Réd.

Définition. — L'égalité de plusieurs quantités est dite n^{uple} quand elle a lieu, en même temps pour les carrés de ces quantités,

[1] H. Poincaré. *Dernières pensées*, p. 54.

[2] Toute cette théorie est due à M. G. Tarry, dont on connaît les beaux travaux, si originaux et si suggestifs, sur la géométrie générale, la géométrie de situation, les carrés magiques, la géométrie modulaire et les imaginaires de Galois. Je n'ai fait que rédiger, sous forme didactique et avec son autorisation, ces curieuses démonstrations, aux résultats à la fois si élémentaires et si généraux, dont il avait bien voulu me faire part. J'y ai en outre ajouté, à titre d'application, le cas particulier des égalités doubles (Note I.) A. Aubry, Dijon.

pour leurs cubes,... pour leurs $n^{\text{èmes}}$ puissances[1]. On indique une telle égalité par la notation

$$a + \ldots \overset{n}{=} \alpha + \ldots$$

On ne s'occupera ici que des égalités *complètes*, c'est-à-dire d'un même nombre de termes dans chaque membre; les termes sont supposés entiers et positifs.

Lemme I. *On ne change pas la nature d'une égalité* n$^{\text{uple}}$ *en multipliant tous ses termes par un même nombre.* On supposera, en conséquence, que tous les termes sont débarrassés de leurs facteurs communs (Frolow).

Lemme II. *La somme, membre à membre, de deux égalités* n$^{\text{uples}}$ *est elle-même une égalité* n$^{\text{uple}}$ (Frolow).

Lemme III. *On a une nouvelle égalité* n$^{\text{uple}}$ *en ajoutant un même nombre positif ou négatif* h *à tous les termes d'une égalité* n$^{\text{uple}}$ (Frolow). Soit en effet

$$a + b + \ldots \overset{n}{=} \alpha + \beta + \ldots .$$

Posons

$$(a + h)^k = a^k + \mathrm{A}a^{k-1} + \mathrm{B}a^{k-2} + \ldots$$

A, B, ... désignant des quantités indépendantes de a; il viendra

$$(a + h)^k + (b + h)^k + \ldots = (\alpha + h)^k + (\beta + h)^k + \ldots$$

d'où

$$(a + h) + (b + h) + \ldots \overset{n}{=} (\alpha + h) + (\beta + h) + \ldots .$$

Lemme IV. *D'une équation* (n — 1)$^{\text{uple}}$, *on peut déduire une équation* n$^{\text{uple}}$ *d'un nombre double de termes*. En effet, de $a + \ldots \overset{n-1}{=} \alpha + \ldots$ on tire, à cause de II et de III, l'égalité

$$\alpha^n + \ldots + (a + h)^n + \ldots = a^n + \ldots + (\alpha + h)^n + \ldots .$$

Théorème I. — *Les* 2^n *premiers entiers fournissent une égalité* (n — 1)$^{\text{uple}}$. On a, en effet,

$$(\alpha) \qquad 1 + 4 \overset{1}{=} 2 + 3$$

d'où, à cause du lemme IV,

$$1 + 4 + (2 + 4) + (3 + 4) \overset{2}{=} 2 + 3 + (1 + 4) + (4 + 4)$$

ou bien

$$1 + 4 + 6 + 7 \overset{2}{=} 2 + 3 + 5 + 8 .$$

[1] Elle est dite aussi *multigrade* ou *aux* n *premiers degrés*.

De même

$$1+4+6+7+(2+8)+(3+8)+(5+8)+(8+8)$$
$$\stackrel{3}{=}2+3+5+8+(1+8)+(4+8)+(6+8)+(7+8)$$

et ainsi de suite.

Corollaire I. Si on ne s'astreint pas à n'avoir que des entiers consécutifs, on peut obtenir des égalités bien plus simples. Ainsi en faisant successivement $h=3, 5, 7, 4, 1, \ldots$ au lieu de 4, 8, 16, ... en partant de α on trouve

$$(\beta) \qquad 1+5+6\stackrel{2}{=}2+3+7$$

$$(\gamma) \qquad 1+5+8+12\stackrel{3}{=}2+3+10+11$$

$$(\delta) \qquad 1+5+9+17+18\stackrel{4}{=}2+3+11+15+19$$

$$(\varepsilon) \qquad 1+6+7+17+18+23\stackrel{5}{=}2+3+11+13+21+22$$

$$(\zeta) \qquad \left\{\begin{matrix}1+4+6+12+14\\+17+18+23+23\end{matrix}\right\}\stackrel{6}{=}\left\{\begin{matrix}2+2+8+11+13\\+18+19+21+24\end{matrix}\right.$$

. . . .

Le choix de la valeur de h se détermine par l'examen des différences des termes de la précédente égalité. Ainsi pour l'égalité quadruple (δ), on a les deux groupes de différences

$$\begin{matrix}4 & 8 & 16 & 17\\ & 4 & 12 & 13\\ & & 8 & 9\\ & & & 1\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}1 & 9 & 13 & 17\\ & 8 & 12 & 16\\ & & 4 & 8\\ & & & 4\end{matrix}$$

La différence 4 étant répétée le plus grand nombre de fois, en prenant $h=4$, on aura, pour l'égalité quintuple (ε) la disparition du plus grand nombre possible de termes.

II. Soit l'identité

$$(a-b)+b\stackrel{1}{=}(a-c)+c$$

traitée de même, elle donne en faisant $h=a-2b$,

$$(2a-3b)+(a-c)+c\stackrel{2}{=}(2a-2b-c)+(a-2b+c)+b\ ;$$

celle-ci, pour $h=a-2c$, donne

$$(3a-3b-2c)+(2a-3c)+(a-2b+c)+b$$
$$\stackrel{3}{=}(3a-2b-3c)+(2a-3b)+(a+b-2c)+c\ .$$

Et ainsi de suite. On pourrait d'ailleurs, en attribuant à h d'autres valeurs, obtenir une infinité d'autres formules particulières.

Théorème II. — *Les* $n = 4(2k+1)$ *premiers entiers peuvent se partager en deux suites formant une égalité double. On suppose* $k > 0$. Disposons les termes comme dans l'exemple ci-dessous

28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

on aura un nombre impair de *quadrilles* de la forme

$$\begin{matrix} A, & B \\ C, & D \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} n-h+1, & n-h \\ h, & h+1 \end{matrix}$$

et tels qu'on aura

$$(A + D) - (B + C) = 2, \qquad (A^2 + D^2) - (B^2 + C^2) = \text{const.}$$

On peut donc écrire :

$$(\alpha) \qquad 23 + 2 + 26 + 4 + 23 + 5 + 21 + 7 \overset{2}{=} 27 + 1 + 25 + 3 + 24 + 6 + 22 + 8 .$$

Or, pour le dernier quadrille, qui est de la forme

$$\begin{matrix} a+3, & a+2 \\ a, & a+1 \end{matrix}$$

on voit aisément que la valeur de $A^2 + B^2 - C^2 + D^2$ est le double de celle de $A^2 + D^2 - B^2 + C^2$. Donc on a :

$$(20^2 + 10^2) - (19^2 + 9^2) + (18^2 + 12^2) - (17^2 + 11^2) = (16^2 + 15^2) - (13^2 + 14^2)$$

et de là

$$(\beta) \qquad 20 + 18 + 14 + 13 + 12 + 10 \overset{2}{=} 19 + 17 + 16 + 15 + 11 + 9$$

ce qui, avec (α), démontre le théorème.

Corollaire. Pour $k = 0$, on n'aurait qu'un quadrille, ce qui ne pourrait conduire à une égalité telle que (α), ni à une autre telle que (β).

Pour $k = 1$, on a une égalité analogue à (β).

Pour $k > 1$, on a une égalité (β) et $k - 1$ égalités (α).

D'ailleurs, pour qu'une égalité entre les n premiers entiers puisse avoir lieu, il faut que n soit non seulement pair, mais encore multiple de 4, car la somme des $2m$ premiers entiers est impaire en même temps que m.

Théorème III. — Supposons, dans le lemme IV, que $a, \ldots \alpha, \ldots$ désignent les $4n$, les $8n$, les $16n, \ldots$ premiers entiers ; en faisant successivement $h = 4n, 8n, 16n, \ldots$ on verra, à cause du lemme V, que les $4(2k+1)$, les $8(2k+1), \ldots$ premiers entiers donnent des égalités respectivement doubles, triples, quadruples, ... Par conséquent, *les* $2^m(2k+1)$ *premiers entiers peuvent se grouper en deux suites formant une égalité* m^uple^.

Note I. — Egalités doubles.

Théorème I. — *Une égalité double doit avoir plus de deux termes dans chaque membre.*

Théorème II. — *On ne saurait avoir* $x + x + x \overset{2}{=} y + z + w$.

Théorème III. — *Les trois termes ne sauraient être à la fois en progression arithmétique ou géométrique dans les deux membres.*

Problème I. Résoudre $x \overset{2}{=} y' + z' + w'$. Changeons y', z' et w' en $x - y$, $y - z$ et z ; la question revient à la résolution de $x \overset{2}{=} (x - y) + (y - z) + z$ ou simplement de $x^2 = (x - y)^2 + (y - z)^2 + z^2$, d'où on tire

$$x = y - z + \frac{z^2}{y} .$$

Posons en conséquence $z = tv$, $y = ut$, u et v étant premiers entre eux ; il viendra

$$x = ut - vt + \frac{v^2 t}{u} \qquad \text{d'où} \qquad t = su$$

et par suite

$$x = (u^2 - v + v^2)s , \qquad y = u^2 s , \qquad z = uvs ;$$

d'où, en négligeant le facteur commun s, la formule

$$(u^2 - uv + v^2) \overset{2}{=} v(v - u) - u(v - u) + uv ,$$

qui donne une infinité de solutions, u et v restant arbitraires.

Cor. L'égalité proposée peut s'écrire $0 + 0 + x \overset{2}{=} y' + z' + w'$, ou, en ajoutant $-x$ à chaque terme, $-x - x \overset{2}{=} (y - x) + (z - x) + (w - x)$, ce qui fournit cette autre relation

$$(uv - u^2 - v^2) + (uv - u^2 - v^2) \overset{2}{=} u^2 + v^2 + (u - v)^2 .$$

Problème II. *Résoudre* $-x + x \stackrel{2}{=} y' + z' - w'$. Écrivons ainsi cette égalité

$$-x + x \stackrel{2}{=} (x - y - z) + (-x - y + z) + (2y)$$

ou $$x^2 + x^2 = (x - y - z)^2 + (-x - y + z)^2 + (2y)^2$$

d'où, en simplifiant et continuant comme au précédent problème,

$$t = sv\,, \qquad y = su\,, \qquad z = sv^2\,, \qquad 2x = 3su^2 + sv^2\,,$$

et, en négligeant le coefficient s,

$$-(3u^2 + v^2) + (3u^2 + v^2) \stackrel{2}{=} (3u^2 - v^2 - 2uv) + (-3u^2 + v^2 - 2uv) + 4uv\,.$$

Cor. I. L'égalité proposée peut encore s'écrire $-x + x \stackrel{2}{=} -y' - z' - w'$: elle a donc toujours au moins deux solutions. Ainsi $-7 + 7 \stackrel{2}{=} -3 - 5 + 8$ peut encore s'écrire $-7 + 7 \stackrel{2}{=} 3 + 5 - 8$, ou bien, en ajoutant 7 partout,

$$7 + 14 \stackrel{2}{=} 2 + 4 + 15 \stackrel{2}{=} -1 + 10 + 12\,.$$

II. Ajoutant x à tous les termes de l'égalité ainsi complétée $0 - x + x \stackrel{2}{=} y' + z' + w'$, on trouve $x + 2x \stackrel{2}{=} y'' + z'' + w''$: on a donc en même temps la solution de cette nouvelle égalité.

Théorème IV. — Posons

$$a^2 + b^2 = (a - fh)^2 + (b + gh)^2 + (fh - gh)^2\,,$$

il viendra

$$(\alpha) \qquad fa - gb = (f^2 + g^2 - fg)h\,.$$

Donc *si* a *et* b *sont liés par la relation* α *on aura*

$$a + b \stackrel{2}{=} (a - fh) + (b + gh) + (fh - bh)\,.$$

Ainsi, les suppositions $f = 2$, $g = 1$; $f = 1$, $g = -1$; $f = 3$, $g = 1$; $f = 3$, $g = 2$; ... donnent ces théorèmes :

si $2a - b = 3h$, on aura : $a + b \stackrel{2}{=} (a - 2h) + (b + h) + h$.

si $a + b = 3h$, on aura : $a + b \stackrel{2}{=} (a - h) + (b - h) + 2h$.

si $3a - b = 7h$, on aura : $a + b \stackrel{2}{=} (a - 3h) + (b + h) + 2h$.

si $3a - 2b = 7h$, on aura : $a + b \stackrel{2}{=} (a - 3h) + (b + 2h) + h$.

. . . .

Problème III. *Formule générale de l'égalité double.* Posons

$$x + y \overset{2}{=} y + t + z + w \ ;$$

on aura

$$x^2 = t^2 + z^2 + w^2 + 2tz + 2tw + 2zw = 2yt + t^2 + z^2 + w^2$$

d'où

$$tz + tw + zw = yt$$

ce qui demande qu'on puisse poser $zw = tu$. Ecrivons en conséquence

$$z = ab \ , \qquad w = cd \ , \qquad t = bd \ , \qquad u = ac \ ,$$

il viendra

$$(\beta) \qquad (ab + bd + cd) + (ab + ac + cd) \overset{2}{=} (ab + ac + bd + cd) + ab + cd \ .$$

Cor. I. On peut tirer de là une infinité d'égalités doubles. Par exemple posons $c = b$ et ajoutons aux six termes — compris le terme zéro — le nombre $hb - ab - bd$; il viendra la formule

$$(h - a - d) + (h + a) + (h + d) \overset{2}{=} (h + a + d) + (h - a) + (h - d)$$

qui se simplifie, tout en restant symétrique en y faisant $d = 2a$.

II. *Résolution de* $A + B \overset{2}{=} x + y + z$. Assimilant à (β), on voit qu'on a à résoudre

$$A^2 + B^2 = (A + ac)^2 + (B - ac - cd)^2 + (cd)^2$$

d'où

$$(\gamma) \qquad c = \frac{Ba - Aa + Bd}{a^2 + d^2 + ad} \ .$$

Ainsi soit $A = 17$, $B = 3$; on voit, après quelques tâtonnements, que c est entier pour $a = 2$, $d = 3$. On trouve en conséquence

$$c = -1 \ , \qquad b = \frac{A - cd}{a + d} = 4$$

et par suite l'égalité double cherchée $3 + 17 \overset{2}{=} -3 + 8 + 15$.

Le problème a autant de solutions qu'il y a de valeurs de a et de d qui rendent entière la valeur du second membre de (γ).

On remarquera que (γ) fournit les théorèmes IV.

III. *Pour que l'équation* $A + B \overset{2}{=} x + y + z$ *soit résoluble, il faut et il suffit que le nombre* $A^2 + B^2 - AB$, *s'il n'est pas divisible par* 3, *ait au moins deux facteurs premiers de la forme* $6h + 1$ [1].

[1] Ce théorème et le suivant m'ont été communiqués sans démonstration par M. G. Tarry.

Si cette équation est résoluble, on doit pouvoir écrire :

$$A = ab + bd + cd\ , \qquad B = ab + ac + cd$$

Or on a dans ce cas :

$$A^2 + B^2 - AB = (a^2 + d^2 + ad)(b^2 + c^2 + bc)\ .$$

Ainsi la condition nécessaire et suffisante est que le nombre $A^2 + B^2 - AB$ puisse se décomposer en deux facteurs de forme $x^2 + y^2 + xy$, expresssion qui ne peut avoir pour facteurs que 3 ou des nombres premiers de forme $6h + 1$.

Si le nombre $A^2 + B^2 - AB = (A + B)^2 - 3AB$ est divisible par 3, il en est de même de $A + B$; or ce cas a été traité plus haut. (Théorème IV.)

IV. *Supposons qu'on puisse écrire* $A^2 + B^2 - AB = X^2 + Y^2 - XY$; *en posant* $x = 2X - Y$, $y = 2Y - X$, *on aura :*

$$(\delta) \qquad A + B \overset{2}{=} \frac{A + B \pm x}{3} + \frac{A + B \pm y}{3} + \frac{A + B \mp x \mp y}{3}\ .$$

En effet, cette relation revient à

$$(\varepsilon) \qquad 3(A^2 + B^2 - AB) = x^2 + y^2 + xy$$

ou bien à

$$A^2 + B^2 - AB = \left(\frac{2x + y}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y + x}{3}\right)^3 - \frac{2x + y}{3}\,\frac{2y + x}{3}\ .$$

(ε) donne $(x - y)^2 + 3xy \equiv 0 \pmod 3$, d'où $x \equiv y$ et $2x + y \equiv 0$. D'ailleurs on a :

$$(A + B)^2 \equiv (X + Y)^2 \equiv (2X - Y)^2 \equiv x^2 \equiv y^2\ .$$

Ainsi si $A + C$ est un non-multiple de 3, il en est de même de x et de y, et on prendra, pour les signes de x et de y, ceux qui donnent pour (δ) des nombres entiers.

V. *L'équation* $x + y = z + A + B$ *est toujours soluble, et elle a même, en général, quatre solutions.* On n'a, pour s'en assurer, qu'à changer dans (β) a et b, 1° en $\pm a$ et $\pm b$, 2° en $\pm b$ et $\pm a$.

Note II. — Carrés panmagiques de module $4n$.

Soit $n = 3$. Considérons, par exemple, l'égalité entre les 12 premiers entiers

$$1 + 11 + 3 + 9 + 8 + 7 = 12 + 2 + 10 + 4 + 5 + 6$$

dont les termes sont assujettis à cette condition que dans le même membre, il n'y ait pas de nombres complémentaires à 13; et formons avec ces nombres la figure ci-dessous

1	1	11	11	3	3	9	9	8	8	7	7
12	12	2	2	10	10	4	4	5	5	6	6

de quadrilles différents disposés horizontalement et tels que les nombres inférieurs soient les compléments à 13 des nombres supérieurs. Répétons identiquement cinq fois cette rangée sous la première : nous aurons évidemment un carré *panmagique* (c'est-à-dire tel qu'il reste magique en le séparant par une verticale ou une horizontale et assemblant autrement le carré, ou encore tel que toutes ses *lignes*[1] soient magiques).

De même, construisons la colonne ci-contre d'une manière analogue à l'aide de l'égalité

$$12 + 36 + 48 + 60 + 108 + 132 = 0 + 24 + 72 + 84 + 96 + 120 ,$$

et répétons la colonne cinq fois côte à côte : on obtiendra un second carré panmagique.

12	120
12	120
36	96
36	96
48	84
48	84
60	72
60	72
108	24
108	24
132	0
132	0

Additionnons, nombre à nombre, les deux carrés, il en résultera un troisième carré panmagique des 144 premiers entiers, dont voici ci-dessous un fragment :

13	121	23	131	...
24	132	14	122	...
37	97	47	107	...
48	108	38	98	...
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

On remarque que, par sa construction, tout carré de quatre nombres de ce dernier est magique, ce qu'on désigne en disant qu'il est à *grille* carrée de 4.

On ne connaissait pas de méthode simple de construction de tels carrés. Quant à ceux de module

[1] On appelle *ligne arithmétique* dans un carré magique, de module n, l'ensemble des n nombres d'une même horizontale, d'une même verticale, d'une même diagonale, ou d'une même *parallèle* à une diagonale, cette parallèle se composant de deux parties aboutissant aux extrémités d'une même verticale : on l'appelle aussi *diagonale brisée*.

$4n + 2$, M. G. Tarry[1] doit bientôt faire voir que ces carrés sont doués de $2n$ lignes magiques et pas davantage.

M. G. Tarry est en outre l'auteur d'une foule de remarques, extensions, méthodes et découvertes sur les carrés magiques, théorie qu'il a poussée jusqu'à ses dernières limites, par ses *constellations*[2] et ses carrés magiques aux n premiers degrés, dont il publiera sous peu la construction.

A. Aubry (Dijon).

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UNE PLANÈTE AUTOUR DU SOLEIL

Les équations différentielles du mouvement d'un point matériel m, assujetti à l'action d'une force centrale newtonienne, sont :

$$(1) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mx}{r^3}\,; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{my}{r^3}$$

$$r^2 = x^2 + y^2\,.$$

J'introduis une nouvelle variable indépendante s par l'équation

$$dt = r\,ds$$

[1] A lire du même savant, sur le même sujet :

N. A., 1899, *Sur les lignes arithmétiques.* — *A. F.*, 1900, *Le prob. des 36 officiers*, solution longtemps cherchée de la célèbre question d'Euler. — *A. F.*, 1903, *Carrés panmagiques de base* 3n, figures longtemps crues impossibles. — *A. F.*, 1904, *Carrés cabalistiques* (panmagiques et aux deux premiers degrés) *eulériens* (ou des 8^2n^2 officiers) *de base* 8n. — *A. F.*, 1905, *Le carré trimagique de* 128 (magique aux trois premiers degrés). — *C. R.*, 1906, *Sur un carré magique*, note présentée par H. Poincaré et annonçant la possibilité de construire des carrés n magiques (magiques aux n premiers degrés). — *Soc. Philom.*, 1907, *La magie arith. dévoilée* — *Soc. math.*, 1911, *Sur la magie arith.*

[2] Sur un carré magique supposé répété à droite et à gauche, au-dessus et au-dessous, on promène un carton percé de fenêtres de la dimension des cases. Il y a des dispositions de ces fenêtres telles que la somme des nombres vus en même temps est constante quelle que soit la position du carton sur le carré magique : une semblable disposition est une *constellation*, qui, par conséquent, constitue la magie la plus générale qui puisse être imaginée, surtout si on étend cette conception aux espaces supérieurs. M. Tarry a calculé qu'un carré magique de module n comporte $(n-1)!$ constellations différentes et $[(n-1)!]^{m-1}$ s'il est généralisé dans l'espace à m dimensions. (Voir G. Arnoux, *Espaces arith.*, p. 75 et seq.

Les intégrales des équations (1) sont :

$$x = [a \cdot \cos(\alpha s) + b \cdot \sin(\alpha s)]^2 - [c \cdot \cos(\alpha s) + d \cdot \sin(\alpha s)]^2 ,$$

$$y = 2[a \cdot \cos(\alpha s) + b \cdot \sin(\alpha s)][c \cdot \cos(\alpha s) + d \cdot \sin(\alpha s)] ,$$

$$r = [a \cdot \cos(\alpha s) + b \cdot \sin(\alpha s)]^2 + [c \cdot \cos(\alpha s) + d \cdot \sin(\alpha s)]^2 ,$$

$$t = \int r \cdot ds .$$

Les cinq constantes a, b, c, d, α doivent satisfaire à la relation

$$m = 2\alpha^2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) .$$

Dans le cas du mouvement hyperbolique, les fonctions trigonométriques doivent être remplacées par les fonctions hyperboliques ; les constantes doivent satisfaire à la relation :

$$m = 2\alpha^2(b^2 + d^2 - a^2 - c^2) .$$

Dans le cas du mouvement parabolique, les intégrales sont :

$$x = (a + bs)^2 - (c + ds)^2 ,$$

$$y = 2(a + bs)(c + ds) ,$$

$$r = (a + bs)^2 + (c + ds)^2 ,$$

$$t = \int rds .$$

et les constantes doivent satisfaire à la relation :

$$m = 2(b^2 + d^2) .$$

Une force répulsive newtonienne ne saurait produire qu'un mouvement hyperbolique.

W. ERMAKOFF (Kief).

SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

On sait quelle est, dans la théorie des ensembles de points, l'importance du théorème, dit Théorème de Cantor-Bendixson : *tout ensemble fermé F se compose d'un ensemble dénombrable D* et *d'un ensemble parfait P*. La première démonstration de ce théorème, due à Bendixson, était basée sur la notion importante, mais délicate et subtile de nombre ordinal transfini, et ce n'est que vingt ans plus tard que W.-H. Young[1] et quelques mois après lui E. Lindelöf[2] ont réussi à l'établir d'une manière plus directe. D'autres démonstrations de ce théorème ont été données depuis; on pourrait les diviser en deux catégories : dans celles de la première on cherche à détacher de l'ensemble donné F la partie parfaite P et on montre que l'ensemble des points non enlevés est dénombrable, dans celles de la seconde, au contraire, on détache de F la partie dénombrable et l'on fait voir que l'ensemble des points non supprimés est parfait.

Cette dernière manière me semble la plus rationnelle, voici pourquoi : les points de D (en supposant, pour simplifier qu'on se borne aux ensembles linéaires) sont répartis sur des segments ne contenant aucun point de P ; il suffit donc, pour enlever les points de D, de les enfermer dans un ensemble d'intervalles convenablement choisis. C'est par le choix de ces intervalles auxiliaires que se distinguent surtout les démonstrations que j'ai en vue.

Le plus simple, à mon avis, est d'envisager, avec F. Bernstein, l'ensemble des intervalles à extrémités rationnelles. Il suffit alors, pour détacher D, d'enlever (au sens étroit) ceux des intervalles de Bernstein qui contiennent des parties dénombrables de F, car l'ensemble enlevé est nécessairement dénombrable, et l'on voit immédiatement que l'ensemble non supprimé est parfait. Dans un

[1] « Sets of Intervals on the Straight Line », 1902. *Proc. Lond. Math. Soc.*, XXXV, pp. 245-268. Le théorème de C. B. découle immédiatement d'une propriété importante des ensembles fermés que W. H. Young établit à la p. 268 de ce travail. D'autres démonstrations du théorème de C. B. ont été exposées par le même auteur dans les *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), I, pp. 230-248 et *Quart. Journ. of Math.*, 35, pp. 102-116 (cf. *The Theory of Sets of Points*, pp. 53-63).

[2] *C. R.*, 137 (1903), pp. 697-700 et *Acta Mathematica*, 29, pp. 183-190.

travail intéressant inséré dans le vol. XII des *Proc. of the sect. of Sciences* de la *Kön Akad. van Wetenschappen*, L.-E.-J. Brouwer s'est servi d'un ensemble d'intervalles présentant une certaine analogie avec celui de Bernstein, mais ce qui rend l'emploi de l'ensemble de Bernstein particulièrement commode, c'est que les intervalles de cet ensemble qui recouvrent un point quelconque de la droite fondamentale n'ont pas de borne inférieure.

Toutes ces considérations s'étendent du reste immédiatement à un espace à un nombre quelconque de dimensions.

Je vais montrer qu'on pourrait leur donner une forme plus intuitive dans le cas d'un ensemble linéaire.

Soit AB l'intervalle fondamental sur lequel est réparti l'ensemble donné F, que je supposerai borné. On sait que l'ensemble F se compose des extrémité A, B et des points de AB qui ne sont pas intérieurs à un ensemble d'intervalles δ répartis sur AB. Les intervalles δ sont dits intervalles contigus à F, mais je les appellerai, avec W.-H. Young, intervalles noirs; je dirai en général, qu'un point est noir, s'il n'appartient pas à F, et qu'il est blanc, s'il fait partie de F.

Soit maintenant M_1 un point quelconque de la droite à gauche de A et M_2 un point quelconque à droite de B ; soient M_3, M_4, ... les milieux des intervalles δ. Pour démontrer le théorème de Cantor-Bendixson, j'envisagerai l'ensemble des intervalles M_iM_j $(i \neq j)$ que j'appellerai *crochets ;* cet ensemble est dénombrable, puisque chacun des crochets est caractérisé par deux indices.

Considérons maintenant les crochets qui contiennent les parties dénombrables de F (crochets de 1[re] espèce). L'ensemble D des points de F intérieurs à ces crochets est dénombrable ; montrons que l'ensemble des points qui restent est parfait. Soit P cet ensemble.

P est fermé, car un point intérieur à un crochet de 1[re] espèce ne saurait être point limite de P.

P est dense en lui-même. Soit en effet P_1 un point de P et d un intervalle quelconque entourant P_1. Si d ne contenait aucun point de P, autre que P_1, l'ensemble des points blancs intérieurs à d serait dénombrable ; d contiendrait donc des points noirs de chaque côté de P_1 et on voit que P_1, contrairement à l'hypothèse, se trouverait à l'intérieur d'un crochet de 1[re] espèce. Donc d contient toujours des points de P, autres que P_1, et l'ensemble P est dense en lui-même.

Cette démonstration peut être rapprochée de celle de W. H. Young, citée plus haut et de celle de Brouwer.

J'ajouterai encore que la considération des crochets peut être utile dans l'étude des problèmes relatifs à la mesure des ensembles fermés.

D. Mirimanoff (Genève).

SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES TRANSCENDANTES PLANES DONT LES ÉQUATIONS SONT A COORDONNÉES SÉPARÉES

Dans des articles récents insérés dans l'*Enseignement mathématique,* j'ai signalé l'intérêt de la classification des courbes transcendantes particulières qui résulte des beaux travaux de CHASLES et de FOURET sur les caractéristiques des systèmes de courbes planes, de CLEBSCH-LINDEMANN sur les connexes algébriques et de M. Gino LORIA sur les courbes panalgébriques. Entre la *Géométrie analytique* qui fut, dans ces derniers temps, développée d'une manière excessive et la *Géométrie supérieure*, une place est certainement due à l'étude de la Géométrie supérieure plane, c'est-à-dire des applications des équations différentielles aux courbes spéciales remarquables transcendantes ou algébriques. Parmi les multiples résultats qui ont été obtenus relativement aux courbes transcendantes, j'ai trouvé trop peu de traces de recherches concernant leurs constructions effectives.

L'Antiquité nous a transmis de belles solutions de divers problèmes de constructions géométriques ; les questions de cette nature n'ont jamais cessé de préoccuper les géomètres et nous possédons actuellement un très grand nombre de constructions géométriques de courbes algébriques point par point, ou tangente par tangente. Mais en ce qui concerne les courbes transcendantes, par suite de l'impossibilité de les construire au moyen de la règle et du compas, des considérations analogues font défaut.

Aussi ai-je cru devoir consacrer quelques recherches à l'étude de la construction effective des courbes transcendantes planes. La question se pose sous la forme suivante :

1° Une courbe transcendante plane est supposée matériellement réalisée ; on en possède un gabarit, par exemple. Quelles sont les courbes transcendantes remarquables qu'il est possible d'en faire dériver en effectuant des constructions élémentaires au moyen de la règle et du compas ?

Connaissant les tangentes et les centres de courbure de la courbe primitive en ses divers points, sera-t-il possible de construire élémentairement les mêmes éléments pour les courbes transformées ?

2° Réciproquement, l'étude d'une courbe transcendante étant imposée, choisir le plus simplement possible une courbe primitive dont on puisse la faire dériver, au sens qui précède.

Le problème ainsi posé est évidemment un cas particulier de la théorie des groupes de courbes se déduisant les unes des autres par des transformations rationnelles : les constructions élémentaires au moyen de la règle et du compas s'expriment en effet par des formules de transformations rationnelles. Inversement, au contraire, une transformation rationnelle ne peut en général être effectuée à l'aide de constructions élémentaires.

Il résulte donc de ce qui précède qu'une construction élémentaire laissera invariant l'ordre minimum de l'équation rationnelle satisfaite par une courbe transcendante particulière. Toutes les courbes qui dérivent ainsi d'une courbe algébrique sont algébriques et, réciproquement, une courbe algébrique ne peut être déduite que de courbes algébriques par des constructions élémentaires ; de même, en opérant sur une courbe panalgébrique particulière, on déduira de celle-ci de nouvelles courbes qui seront nécessairement panalgébriques. L'ensemble des courbes panalgébriques se décompose ainsi en groupes de courbes se rattachant entre elles au moyen de constructions élémentaires.

J'ai déjà signalé un exemple de ce fait dans un article intitulé : *Application d'une transformation de* M. Brocard *à la construction de certaines courbes transcendantes*. Il s'agit de la transformation qui a permis de déduire du cercle le trifolium oblique. Prenant pour courbe transcendante primitive la spirale d'Archimède, en raison de sa grande simplicité et de son importance historique, on constitue une famille de courbes se rattachant à elle au moyen de constructions élémentaires : la spirale hyperbolique, la développante de cercle, la tractrice compliquée de Cotes, le lituus de Cotes, les spirales de Galilée et autres spirales de Fermat, en sont les exemples les plus remarquables. Une autre famille de courbes transcendantes, liées entre elles par des transformations bien simples, est celle qui comprend la *quadratrice de* Dinostrate, les courbes plus générales que celle-ci rencontrées par Chasles, à propos de l'hélicoïde gauche, la cochléoïde de Falkenburg, la *syncochléoïde* et les courbes connexes. J'ai montré que la transformation de M. Brocard, qui n'avait pas jusqu'ici été utilisée dans le domaine des courbes transcendantes, permet de déduire les cochléoïdes de la spirale hyperbolique : les deux familles précédentes, importantes du point de vue historique principalement, forment ainsi une famille unique de courbes quadratrices.

Mais ce qui est encore plus remarquable, c'est que la *cycloïde elle aussi se rattache à cette famille*. Par la transformation de

M. BROCARD, en effet, il est possible de déduire les courbes transcendantes particulières d'équations polaires

$$r = \theta \,.\, \sin \theta \ ,$$

$$r = \theta \,.\, \cos \theta \ ,$$

de la spirale d'Archimède. L'équation de la cycloïde, en coordonnées polaires tangentielles de HESSE, est d'autre part

$$\varpi = \varphi \sin \varphi \ ,$$

$$\varpi = \varphi \cos \varphi \ ,$$

$$\varpi = \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \ \ldots$$

suivant la position du point pris pour pôle. Cette cycloïde est donc l'antipodaire d'une des courbes précédentes, déduites de la spirale d'Archimède. *Il est donc possible de rattacher la construction tangente par tangente de la cycloïde à la spirale d'Archimède supposée donnée point par point.*

Dans l'article cité, on trouvera d'autres exemples d'applications de la transformation de BROCARD aux épis, à la spirale logarithmique... Je terminerai les considérations qui la concernent, en faisant observer que cette transformation peut être remplacée par la transformation définie par les formules

$$\theta_2 = \theta_1 \ , \qquad r_2 = r_1 \sin \theta_1 \ ;$$

celle-ci se rattache à l'*inversion généralisée*, à laquelle sont consacrés les paragraphes 187 et 188 d'un récent ouvrage[1] : il suffit d'appliquer la transformation par inversion généralisée à la spirale d'Archimède et à un cercle passant par le pôle ou à une droite quelconque, pour obtenir la *quadratrice de Dinostrate* ou la courbe podaire de la cycloïde par rapport à un sommet. La construction des tangentes s'effectue immédiatement si l'on suppose connues celles de la spirale d'Archimède.

De même que les courbes panalgébriques, les courbes d'ordre $\omega = 2$ se divisent en groupes : l'une des courbes d'ordre $\omega = 2$ étant réalisée matériellement, on pourra en faire dériver de nouvelles courbes. Il sera aussi intéressant de supposer données les courbes panalgébriques : en opérant sur une courbe d'ordre $\omega = 2$ et sur un certain nombre de courbes panalgébriques, on construira des courbes d'ordre $\omega \geqq 2$. En opérant de même sur une courbe d'ordre $\omega = 3$ et sur des courbes données d'ordres $\omega = 2$, $\omega = 1$, $\omega = 0$, on construira de nouvelles courbes d'ordre $\omega \geqq 3$. Et ainsi

[1] H. BOUASSE et E. TURRIÈRE, Exercices et compléments de mathématiques générales, 1912 (pp. 149-150).

de suite. En opérant enfin sur une courbe hypertranscendante donnée et sur des courbes transcendantes d'ordres ω finis, on formera de nouvelles courbes hypertranscendantes. Ainsi que je l'ai précédemment signalé, la courbe hypergéométrique d'Euler est un exemple de courbe hypertranscendante, d'après un théorème de M. O. Hölder sur la fonction eulérienne de seconde espèce. On pourra, par conséquent, rattacher à cette courbe hypergéométrique de nouvelles courbes hypertranscendantes.

Un cas particulièrement intéressant est celui qui concerne la construction de la développée d'une courbe transcendante. La construction tangentielle de la développée est immédiate ; mais pour construire la développée point par point il faudra connaître non seulement la courbe primitive, mais encore une courbe d'ordre égal ou moindre : *la radiale*, selon la dénomination de Tücker. Une courbe transcendante et sa radiale étant toutes deux connues point par point, on pourra construire la développée de la première point par point : j'ai déjà signalé l'exemple de la clothoïde et de sa développée, qui sont toutes deux d'ordre $\omega = 3$; la radiale de la clothoïde est une courbe panalgébrique : le lituus de Cotes.

Au lieu de se donner *point par point* la radiale de la courbe transcendante, on pourrait se donner *tangente par tangente* la courbe que dans de récents travaux « *Ueber beständig elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch gekrümmte Kurven* » (Mathematische Annalen, 1912, p. 285 et pp. 593-595), M. H. Mohrmann a associée à toute courbe plane sous le nom de « *Minkowskische Krümmungsbild* ». Mais la construction au moyen de la radiale est plus pratique, parce que les images de Minkowski sont généralement bien moins simples que les radiales de Tücker.

Parmi les constructions géométriques opérant sur plusieurs courbes transcendantes, je signalerai d'une manière toute particulière la construction des *courbes transcendantes à coordonnées séparées*. Je dirai qu'une courbe est représentée par une équation à coordonnées séparées, lorsque cette équation sera donnée sous la forme :

$$f(x) = g(y) ,$$

ou lorsqu'elle sera susceptible d'être mise sous cette forme, les deux fonctions $f(x)$, $g(y)$ des deux coordonnées cartésiennes x et y étant *particulièrement simples*. C'est ce qui arrive dans le cas d'un très grand nombre de courbes transcendantes particulières, ainsi que des exemples ultérieurs le mettront en évidence.

Aux paragraphes 211-215 des *Exercices et compléments de mathématiques générales*, M. H. Bouasse et moi avons étudié une transformation géométrique opérant sur trois courbes qui nous a été utile pour effectuer la construction, au moyen de deux paraboles et d'un cercle, des quartiques d'équation

$$(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = a^2 = \text{const}\ ;$$

qui, dans certaines conditions, admettent le nombre maximum de tangentes doubles réelles que fixent pour les quartiques les formules de PLÜCKER. — Cette transformation se définit ainsi : *Étant données trois courbes* (C_1), (C_2), (C_3), *on considère un rectangle variable et mobile, dont les côtés gardent des directions invariables et dont trois sommets décrivent respectivement les trois courbes* (C_1), (C_2), (C_3) *imposées. Le lieu* (C) *du quatrième sommet est la courbe transformée des trois premières qu'il s'agit d'étudier.*

On observera que lorsque (C_1), (C_2), (C_3) sont trois lignes droites, il en est de même de la courbe transformée (C). Si donc les trois premières courbes sont données ponctuellement et tangentiellement à la fois, la courbe (C) pourra être construite point par point et tangente par tangente : la tangente à (C) est, en effet, la transformée des tangentes à (C_1), (C_2) et (C_3). Nous avons d'ailleurs fait connaître la relation qui lie leurs coefficients angulaires. — Un cas de cette transformation mérite un examen particulier : c'est celui pour lequel l'une des courbes est la bissectrice $x = y$ des axes coordonnés (supposés rectangulaires). La relation entre les coefficients angulaires se simplifie encore, de même que celle qui lie les courbures : les constructions des tangentes et des cercles osculateurs deviennent beaucoup plus simples.

Considérons les deux courbes directrices (C_2) et (C_3) et supposons-les représentées par les deux équations :

$$(C_2) \qquad y = f(x)\ ,$$

$$(C_3) \qquad x = g(y)\ ;$$

le déplacement et la variation du rectangle ABCD sont ainsi définis : ses côtés restent parallèles aux axes coordonnés ; le sommet A décrit la droite d'équation $x = y$; les deux sommets B et D voisins de A décrivent respectivement les courbes (C_3) et (C_2) ; le sommet C situé sur la même diagonale que A décrit la courbe (C) ; l'équation de celle-ci est

$$f(x) = g(y)\ .$$

Ce mode de génération des courbes (C) à coordonnées séparées s'applique à un grand nombre de courbes connues. C'est ainsi qu'en partant de deux chaînettes panalgébriques d'équations

$$(c_2) \qquad y = \text{ch}\, 2x + c^2\ ,$$

$$(c_2) \qquad x = \text{ch}\, 2y - c^2\ ,$$

égales entre elles et par conséquent nécessitant un gabarit unique, on construit la courbe $\omega = 2$ d'équation

$$\text{ch } 2y - \text{ch } 2x = 2c^2 ,$$

analogue à une courbe rencontrée par M. Gomes Teixeira dans des recherches sur la théorie du développement des fonctions analytiques en série ordonnée suivant les puissances du sinus de la variable; quant à la courbe de M. Teixeira, courbe dont l'équation est :

$$\text{ch } 2y - \cos 2x = 2c^2$$

il faudra deux gabarits, pour la construire effectivement : l'un d'eux représentera une sinusoïde et l'autre une chaînette ordinaire. Lorsque le paramètre c varie, les trajectoires orthogonales des courbes précédentes et de celles de M. Teixeira sont de nouvelles courbes à coordonnées séparées :

$$\text{tang } x = k \text{ tang } y ; \qquad \text{tang } x = k \text{ th } y ;$$

les courbes (C_2) et (C_3) sont, dans le premier cas, deux tangentoïdes dont l'une est homothétique de l'autre et qui, par conséquent, peuvent être construites à l'aide d'un seul gabarit. Dans le second cas, au contraire, il faudra utiliser deux courbes transcendantes : pour construire, en effet, les trajectoires orthogonales des courbes de M. Teixeira, il sera nécessaire de posséder deux gabarits représentant l'un une tangentoïde ordinaire, et l'autre une tangentoïde hyperbolique. Je citerai encore la courbe d'Euler représentée par l'équation

$$x^y = y^x ;$$

elle n'est pas sous la forme à variables séparées; mais il est possible de la réduire aisément à une telle forme :

$$\frac{\log x}{x} = \frac{\log y}{y} ;$$

il suffira encore d'un seul gabarit pour construire les deux courbes (C_2) et (C_3) correspondantes :

$$y = \frac{\log x}{x} , \qquad x = \frac{\log y}{y} .$$

En prenant pour (C_2) (C_3) deux courbes algébriques, on obtient ainsi pour courbe (C) une courbe qui est nécessairement algébrique. En prenant une courbe algébrique et une courbe transcendante d'ordre ω_0, on est conduit à une courbe de même ordre

ω_0 : c'est le cas de la courbe d'équation (Gino Loria, Spezielle ebene Kurven, II, p. 240)

$$y^2 - 2y \cos x = a ,$$

qui est construite avec une hyperbole et une sinusoïde : elle est panalgébrique. Plus généralement, en opérant sur deux courbes d'ordres ω_2 et ω_3 ($\omega_3 > \omega_2$) la courbe transformée sera d'ordre $\omega_2 + \omega_3$, ou d'un ordre moindre mais supérieur à ω_3.

Mais si les deux ordres sont égaux, la courbe résultante pourra n'être pas d'ordre $\omega_2 = \omega_3$. *Il pourra y avoir un abaissement d'ordre.* Prenons par exemple les deux courbes d'équations

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} , \qquad y = -\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

R désignant un polynome du quatrième degré : ce sont deux courbes panalgébriques : la courbe résultante est algébrique. On pourrait encore citer les courbes :

$$x = m . \log y , \qquad y = n . \log x ,$$

m et n étant deux nombres algébriques dont le rapport est rationnel. Au cas simple où $m = n = 1$, on a les deux logarithmiques directrices considérées dans la même transformation, déjà proposée par M. Brocard dans la question 2798 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, 1904, p. 162.

Je terminerai en donnant quelques exemples de courbes transcendantes qui peuvent ainsi être construites comme courbes à coordonnées séparées : les courbes d'équation

$$\sin x . \sin y = \text{const.} ,$$

et leurs trajectoires orthogonales

$$\frac{\cos x}{\cos y} = \text{const.} ,$$

qui se présentent dans l'étude de la surface minima de Scherk : le dilogarithme d'Euler ; le double-sinus (les deux courbes (C_2) et (C_3) sont alors identiques) ; les lignes de Mercator-Sumner et la chaînette de Coriolis, en particulier...

Émile Turrière (Montpellier).

SUR UN DOUBLE SYSTÈME DE LIGNES D'UNE SURFACE

1. — Le système de lignes que je vais considérer jouit de la propriété d'avoir, en chaque point, la courbure normale égale à la racine carrée de la courbure totale de la surface en ce point, savoir à la moyenne géométrique des courbures principales; ces lignes n'existent donc que dans les régions à points elliptiques où la courbure totale est positive; leur équation différentielle est :

$$\frac{\mathrm{D}du^2 + 2\mathrm{D}'dudv + \mathrm{D}''dv^2}{\mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2} = \sqrt{\frac{\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}}\ ,$$

(E, F, G; D, D′, D″ étant respectivement les coefficients de la première et de la deuxième forme fondamentale), et peut s'écrire :

$$(1) \qquad (\mathrm{D}\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} - \mathrm{E}\sqrt{\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2})\,du^2 + 2(\mathrm{D}'\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} - \mathrm{F}\sqrt{\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2})\,dudv + (\mathrm{D}''\sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2} - \mathrm{G}\sqrt{\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2})\,dv^2 = 0\ .$$

Si l'on prend pour système u, v le système des lignes de courbure $\mathrm{F} = \mathrm{D}' = 0$, notre équation s'écrit

$$(\mathrm{D}\sqrt{\mathrm{EG}} - \mathrm{E}\sqrt{\mathrm{DD}''})\,du^2 + (\mathrm{D}''\sqrt{\mathrm{EG}} - \mathrm{G}\sqrt{\mathrm{DD}''})\,dv^2 = 0\ .$$

Lorsque D et D″ sont positifs, elle donne :

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = \sqrt{\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{GD}''}}\ ;$$

il faut alors prendre le radical donné avec la détermination positive; si D et D″ sont négatifs, nous aurons

$$\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = -\sqrt{\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{GD}''}}$$

et il faut, par conséquent, prendre le radical donné avec la détermination négative.

Ces formules montrent d'abord que par chaque point de la région passent deux lignes de notre système, également inclinées sur chaque ligne de courbure.

2. — Indiquons par L les lignes considérées et observons que

$$\mathrm{tg}\,(\mathrm{L}v) = \sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E}}\sqrt{\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{GD}''}}} = \sqrt[4]{\frac{\mathrm{GD}}{\mathrm{ED}''}} \; ,$$

mais l'équation des lignes caractéristiques[1] c dans notre système étant

$$\mathrm{D}du^2 - \mathrm{D}''dv^2 = 0$$

nous voyons que l'on a :

$$\mathrm{tg}\,(cv) = \sqrt{\frac{\mathrm{GD}}{\mathrm{ED}''}}$$

et, par suite :

$$\mathrm{tg}^2\,(\mathrm{L}v) = \mathrm{tg}\,(cv) \; ,$$

formule qui exprime une relation simple entre les angles que font avec une ligne de courbure les lignes L et c d'un système.

Nous pouvons obtenir une autre relation angulaire en considérant l'angle $(\mathrm{L}v)'$ projection, sur la sphère de Gauss, de l'angle $(\mathrm{L}v)$ d'une ligne L avec la ligne v de courbure.

On a alors, comme on sait, la formule

$$\mathrm{tg}\,(\mathrm{L}v)' = \mathrm{tg}\,(\mathrm{L}v)\sqrt{\frac{\mathrm{E}g}{e\mathrm{G}}} \; .$$

dans laquelle e, g sont les coefficients extrêmes de la troisième forme fondamentale. On trouve :

$$\sqrt{\frac{\mathrm{E}g}{e\mathrm{G}}} = \frac{\mathrm{ED}''}{\mathrm{GD}} \; , \quad \text{donc} \quad \mathrm{tg}\,(\mathrm{L}v)' = \mathrm{tg}\,(\mathrm{L}v)\,\frac{\mathrm{ED}''}{\mathrm{GD}} = \left(\sqrt[4]{\frac{\mathrm{ED}''}{\mathrm{GD}}}\right)^3 = \mathrm{cotg}^3\,(\mathrm{L}v) \; ,$$

et enfin :

$$\mathrm{tg}\,(\mathrm{L}v)' = \mathrm{cotg}\,(cv)\,\mathrm{cotg}\,(\mathrm{L}v) \; .$$

---

[1] Ces lignes correspondent aux directions conjuguées et également inclinées sur les lignes de courbure; elles ont été étudiées par Pucci (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Vol. V (1889), p. 501-507), Reina (Ibid., p. 881-885) et d'autres auteurs. J'ai fait observer que leur équation différentielle peut s'obtenir en égalant à zéro le jacobien entre la deuxième forme fondamentale et le jacobien des deux premières formes. Si, au contraire, on égale à zéro le jacobien entre la première forme fondamentale et le jacobien des deux premières formes, on obtient l'équation des lignes bissectrices des lignes de courbure et que je voudrais appeler *lignes de torsion* parce que leurs directions correspondent aux maximum et minimum de torsion géodésique.

Cette formule montre que la tangente de l'angle projection, sur la sphère de Gauss, d'une ligne L avec une ligne de courbure, est égale au produit des tangentes des angles d'une ligne caractéristique et L d'un système, avec l'autre ligne de courbure.

3. — Démontrons maintenant la proposition suivante :

Les deux lignes L qui passent par chaque point de notre région séparent harmoniquement une ligne caractéristique et une ligne de torsion passant par ce point.

En effet, les coefficients angulaires des tangentes aux deux lignes L, à une ligne caractéristique c et à une ligne de torsion t sont respectivement :

$$-\sqrt[4]{\frac{\mathrm{GD}}{\mathrm{ED}''}}\,, \qquad \sqrt[4]{\frac{\mathrm{GD}}{\mathrm{ED}''}}\,, \qquad \sqrt{\frac{\mathrm{GD}}{\mathrm{ED}''}}\,, \qquad 1$$

et l'on voit alors aisément que le rapport anharmonique de ces quatre directions est -1.

4. — Calculons la *torsion géodésique* en un point d'une ligne L. Prenons encore comme système u, v celui des lignes de courbure et rappelons que la torsion géodésique s'exprime alors par la formule

$$(2)\qquad \frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{(\mathrm{GD}-\mathrm{ED}'')\,du\,dv}{\sqrt{\mathrm{EG}}\,(\mathrm{E}du^2+\mathrm{G}dv^2)}\,.$$

Nous avons donc pour un point de notre ligne, si D et D″ sont positifs,

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = \frac{(\mathrm{GD}-\mathrm{ED}'')\sqrt[4]{\mathrm{EGDD}''}}{\sqrt{\mathrm{EG}}\,(\mathrm{E}\sqrt{\mathrm{GD}''}+\mathrm{G}\sqrt{\mathrm{ED}})} = \frac{(\mathrm{GD}-\mathrm{ED}'')\sqrt[4]{\dfrac{\mathrm{DD}''}{\mathrm{EG}}}}{\sqrt{\mathrm{EG}}\,(\sqrt{\mathrm{GD}}+\sqrt{\mathrm{ED}''})} =$$

$$\frac{\sqrt{\mathrm{GD}}-\sqrt{\mathrm{ED}''}\sqrt[4]{\dfrac{\mathrm{DD}''}{\mathrm{EG}}}}{\sqrt{\mathrm{EG}}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{\mathrm{GD}}-\sqrt{\mathrm{ED}''})^2}{\mathrm{EG}}}\sqrt[4]{\frac{\mathrm{DD}''}{\mathrm{EG}}} =$$

$$\sqrt{2\frac{\mathrm{GD}+\mathrm{ED}''}{2\mathrm{EG}}-2\sqrt{\frac{\mathrm{DD}''}{\mathrm{EG}}}}\cdot\sqrt[4]{\frac{\mathrm{DD}''}{\mathrm{EG}}}\,,$$

et enfin, indiquant par K et H respectivement la courbure totale et moyenne on a, en vertu de formules bien connues :

$$(3)\qquad \frac{1}{\mathrm{T}} = \sqrt{-2\mathrm{H}-2\sqrt{\mathrm{K}}}\,.\sqrt[4]{\mathrm{K}}\,.$$

Si D et D'' sont négatifs, on peut écrire

$$\frac{1}{T} = \frac{(GD - ED'')\sqrt[4]{\dfrac{DD''}{EG}}}{\sqrt{EG}\,\left(\sqrt{-ED''} + \sqrt{-GD}\right)} = \frac{\sqrt{-ED''} - \sqrt{-GD}}{\sqrt{EG}}\sqrt[4]{\frac{DD''}{EG}} =$$

$$\sqrt{\frac{-ED'' - GD - 2\sqrt{EGDD''}}{EG}}\sqrt[4]{\frac{DD''}{EG}},$$

$$(4) \qquad \frac{1}{T} = \sqrt{2H - 2\sqrt{K}}\,\sqrt[4]{K}\,.$$

On peut donc exprimer la torsion géodésique en un point d'une ligne L, à l'aide des courbures moyenne et totale de la surface. Ces formules peuvent être simplifiées par l'introduction des torsions géodésiques des lignes caractéristiques et de torsion passant par le point en considération.

En effet, dans notre système coordonné, les équations différentielles des lignes caractéristiques et de torsion étant respectivement

$$D du^2 - D'' dv^2 = 0 \qquad E du^2 - G dv^2 = 0\,,$$

nous voyons aisément à l'aide de la formule (2) que les torsions géodésiques τ_c, τ_t de ces lignes (de l'un système) sont données par les formules

$$\tau_c = -\frac{\tau_t\sqrt{K}}{H}\,, \qquad \tau_t = \sqrt{H^2 - K}\,.$$

On en déduit :

$$H = \frac{\tau_t^2}{\sqrt{\tau_t^2 - \tau_c^2}}\,, \qquad K = \frac{\tau_t\,\tau_c}{\tau_t^2 - \tau_c^2}\,,$$

et, si l'on substitue dans les formules (3) et (4), on trouve

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\frac{2\tau_t^2\,\tau_c}{\tau_c - \tau_t}}\,,$$

lorsque D et D'' sont positifs, et

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\frac{2\tau_t^2\,\tau_c}{\tau_c + \tau_t}}\,,$$

lorsque D et D'' sont négatifs.

Si donc τ et τ' indiquent les moyennes harmoniques entre τ_c et $-\tau_t$, et τ_c, τ_t, nous aurons

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\tau_t : \tau} \,, \qquad \frac{1}{T} = \sqrt{\tau_t : \tau'} \,.$$

La torsion géodésique d'une ligne L en un point est donc égale à la racine carrée du rapport entre la torsion principale (maximum ou minimum de torsion géodésique) et la moyenne harmonique des deux torsions géodésiques, des lignes caractéristique et de torsion de l'un système passant par le point en considération.

5. — Cherchons maintenant les relations qui lient les coefficients des deux premières formes fondamentales, lorsqu'on prend pour système coordonné (u, v) celui des lignes L. Dans ce cas l'équation (1) doit se réduire à renfermer le seul terme en *dudv*, donc :

$$\left.\begin{aligned} D\sqrt{EG - F^2} - E\sqrt{DD'' - D'^2} = 0 \\ D''\sqrt{EG - F^2} - G\sqrt{DD'' - D'^2} = 0 \end{aligned}\right\}$$

La première donne :

$$D'' = \frac{D^2(EG - F^2) + E^2 D'^2}{E^2 D} \,, \tag{5}$$

et, si l'on substitue dans la seconde, on trouve

$$E^2 D'^2 - F^2 D^2 = 0 \,,$$

d'où l'on déduit pour D les deux valeurs :

$$D = \pm \frac{ED'}{F} \,.$$

Si l'on prend $D = \frac{ED'}{F}$ et l'on substitue dans la formule (5), on trouve

$$D'' = \frac{GD'}{F} \,, \qquad \text{donc :} \qquad \frac{D}{E} = \frac{D'}{F} = \frac{D''}{G} \,.$$

Mais alors[1] la surface serait sphérique ou plane. Il faut donc exclure le cas $D = \frac{ED'}{F}$ et il reste, par conséquent, $D = -\frac{ED'}{F}$; la formule (5) donne alors $D'' = -\frac{GD'}{F}$.

---

[1] V. Bianchi. Lezioni di Geometria differenziale. Vol. I, p. 121 (en note).

On a donc les relations

$$(6) \qquad \frac{D}{E} = -\frac{D'}{F} = \frac{D''}{G} = \lambda \ ,$$

lorsqu'on prend pour système coordonné celui des lignes L.

Il importe de remarquer la forme simple à laquelle se réduisent, dans le nouveau système, les équations des différentes lignes de la surface.

L'équation des lignes de courbure est $Edu^2 - Gdv^2 = 0$,

celle des lignes de torsion : $EFdu^2 + 2EGdudv + FGdv^2 = 0$,

et celle des lignes caractéristiques : $EFdu^2 - 2EGdudv + FGdv^2 = 0$.

L'interprétation géométrique de λ se déduit immédiatement de l'expression de la courbure totale K : on trouve $\lambda^2 = K$, donc λ est la moyenne géométrique des courbures principales.

6. — Cherchons les équations qui vérifient les coordonnées cartésiennes x, y, z d'un point mobile de notre surface, exprimées en fonction des paramètres u, v des deux lignes L.

A cet effet nous observerons que les dérivées secondes des coordonnées s'expriment par les dérivées premières et par les cosinus X, Y, Z de direction positive de la normale à la surface, à l'aide des formules[1] :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + DX \ ,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + D'X \ ,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} + D''X \ ,$$

dans lesquelles les symboles $\begin{Bmatrix} rs \\ t \end{Bmatrix}$ de Christoffel se rapportent à la première forme fondamentale.

Si l'on multiplie la première par F et la seconde par E et on les ajoute, il en résulte, d'après (6) :

$$E\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + F\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \left[\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} E + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} F\right]\frac{\partial x}{\partial u} + \left[\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} E + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} F\right]\frac{\partial x}{\partial v} \ .$$

Si, au contraire, on multiplie la seconde par G et la troisième par F et on les ajoute, on obtient :

$$F\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + G\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} F + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} G\right]\frac{\partial x}{\partial u} + \left[\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} F + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} G\right]\frac{\partial x}{\partial v} \ .$$

[1] V. Bianchi, *l. c.*, p. 116.

Ainsi les coordonnées x, y, z *d'un point mobile d'une surface, exprimées en fonction des paramètres* u, v *de deux lignes* L, *vérifient simultanément deux équations du type :*

$$(7)\quad \begin{cases} a\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} + b\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = \alpha\dfrac{\partial\theta}{\partial u} + \beta\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\,, \\[2ex] b\dfrac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + c\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v} = \alpha'\dfrac{\partial\theta}{\partial u} + \beta'\dfrac{\partial\theta}{\partial v}\,. \end{cases}$$

où a, b, c sont proportionnels aux coefficients de la première forme fondamentale, α, β sont des combinaisons linéaires des deux premiers coefficients avec les symboles de Christoffel $\left\{\begin{matrix} 1r \\ 1 \end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix} 1r \\ 2 \end{matrix}\right\}$ et α', β' sont des combinaisons linéaires des deux derniers coefficients avec les symboles de Christoffel $\left[\left\{\begin{matrix} r2 \\ 1 \end{matrix}\right\}, \left\{\begin{matrix} r2 \\ 2 \end{matrix}\right\}\right]$.

Supposons, au contraire, que les équations (7) constituent un système complètement intégrable et soient $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ trois solutions linéairement indépendantes ; je dis alors que les lignes u, v tracent, sur la surface $x = x(u, v)$ $y = y(u, v)$ $z = z(u, v)$ un système de lignes L.

En effet, écrivons les équations (7) pour $\theta = x, y, z$, puis multiplions-les respectivement par X, Y, Z et ajoutons-les ; nous aurons

$$a\Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} + b\Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \alpha\Sigma X\frac{\partial x}{\partial u} + \beta\Sigma X\frac{\partial x}{\partial v}\,,$$

$$b\Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + c\Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \alpha'\Sigma X\frac{\partial x}{\partial u} + \beta'\Sigma X\frac{\partial x}{\partial v}\,,$$

c'est-à-dire :

$$aD' + bD = 0\,, \qquad bD'' + cD' = 0\,,$$

d'où :

$$D : D' : D'' = a : -b : c\,.$$

Et, comme a, b, c sont, par hypothèse, proportionnels à E, F, G, nous en déduisons : $D : D' : D'' = E : -F : G$ et, par conséquent, les lignes u, v sont des lignes L.

Juin 1913. R. OCCHIPINTI (Palerme).

UNE APPLICATION DE LA MÉTHODE DE FAUSSE POSITION

Lagrange a rencontré, à propos de la construction des cartes géographiques, le problème suivant :

Étant donnés trois points R, R′, R″, trouver deux points A et B tels que les rapports $\frac{RA}{RB}$, $\frac{R'A}{R'B}$, $\frac{R''A}{R''B}$, soient entre eux dans des rapports donnés, les différences des angles ARB, AR′B, AR″B étant également données.

Nous allons d'abord essayer de donner une solution purement géométrique de cette question.

Comme première simplification, nous pouvons remarquer qu'il nous suffit de construire, au lieu de la figure donnée, une figure qui lui soit semblable. Nous pouvons alors considérer AB comme une donnée, et essayer de déterminer les points R, R′ et R″.

Donnons-nous arbitrairement le point R dans le plan : nous pouvons alors construire le triangle RR′R″ de deux manières différentes suivant que nous l'astreignons à l'une ou l'autre des conditions cherchées. En effet, dans le premier cas les rapports $\frac{R'A}{R'B}$ et $\frac{R''A}{R''B}$ deviennent connus puisqu'ils sont dans un rapport connu avec $\frac{RA}{RB}$. Les points R′ et R″ doivent se trouver sur des cercles lieux des points dont les distances à A et B sont dans un rapport connu.

Le problème revient alors à construire un triangle R R′ R″ dont le sommet R est donné, et qui soit semblable à un triangle donné. La solution de ce problème est élémentaire. Appelons $Rr'r''$ le triangle ainsi construit.

Si au contraire nous imposons la seconde condition, les lieux des points R et R′ seront deux cercles passant par A et B, puisque la connaissance de l'angle ARB entraine celle des angles AR′B et AR″B.

Le triangle construit ainsi sera $Rr'_1r''_1$, et il différera généralement de $Rr'r''$. Le problème est justement de choisir le point R de façon que ces deux triangles coïncident. Il suffit évidemment pour cela que r' coïncide avec r'_1, car les triangles semblables $Rr'r''$ et $Rr'_1r''_1$ ayant alors un côté commun Rr', le troisième sommet sera aussi commun.

Sur la perpendiculaire au plan de la figure menée par R portons des longueurs Rm'_1, Rp'_1 égales aux coordonnées rectangulaires du point r'_1. Si l'on fait varier la position du point R dans le plan, les points m'_1 et p'_1 vont décrire deux surfaces (M'_1) et (P'_1).

Portons sur la même droite les longueurs correspondantes Rm', Rp', coordonnées du point r', nous obtiendrons deux surfaces (M') et (P').

Pour que r' coïncide avec r' il faut et il suffit que les points m et m' coïncident, ainsi que p et p'.

Le point m se trouvera donc sur la courbe (Γ) d'intersection des surfaces (M') et (M'_1), et le point p sur la courbe (Δ) d'intersection des surfaces (P') et (P'_1).

Si l'on construit les projections γ et δ de ces courbes sur le plan de la figure, leurs points d'intersection seront des points R et le problème s'achèvera alors sans aucune difficulté.

Comme on le voit, cette méthode nous a seulement permis de ramener le problème à celui de l'intersection de deux surfaces construites point par point. Mais on peut remarquer que, malgré cela, elle est susceptible d'un mode d'approximation qui est exactement celui de la méthode de Newton pour déterminer une racine d'une équation, c'est-à-dire l'intersection d'une droite et d'une courbe.

Voici comment nous procéderons :

Nous nous appuierons sur ce fait qu'une surface peut être remplacée dans un certain intervalle par un plan. Comme pour déterminer un plan il faut 3 points, nous allons nous donner 3 points R_1, R_2, R_3, auxquels vont correspondre les 4 séries de trois points

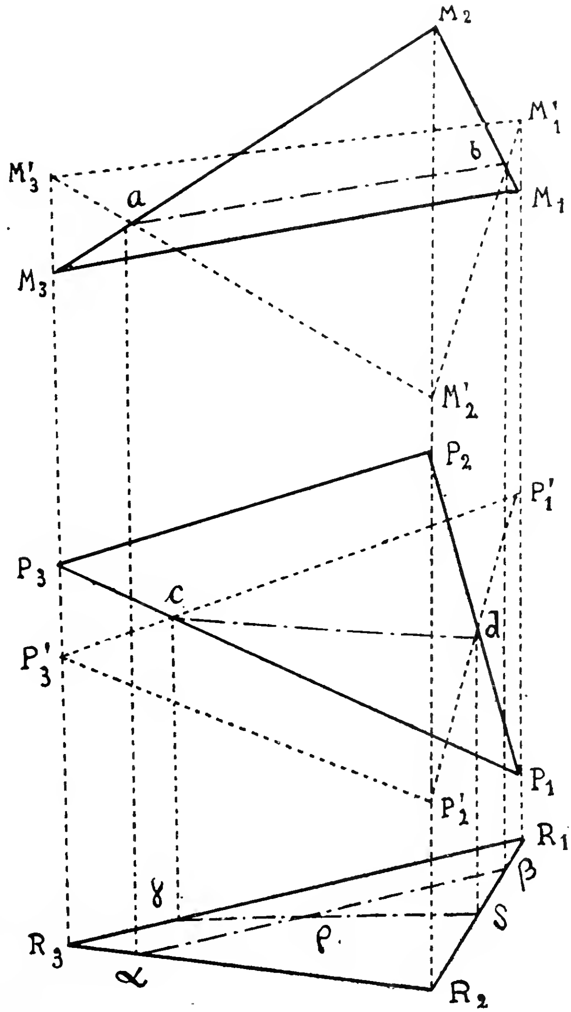
$$\begin{array}{ccc} M_1 & M_2 & M_3 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ M'_1 & M'_2 & M_3 \\ P'_1 & P'_2 & P'_3 \end{array}$$

Déterminons le segment ab d'intersection des triangles $M_1M_2M_3$ et $M'_1M'_2M'_3$, et soient $\alpha\beta$ sa position sur le plan $R_1R_2R_3$.

Déterminons de même le segment cd d'intersection des triangles $P_1P_2P_3$ et $P'_1P'_2P'_3$ et soit $\gamma\delta$ sa position sur le plan $R_1R_2R_3$.

Si les points $R_1R_2R_3$ ont été choisis avec assez d'habileté, les segments $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ aurons un point commun ϱ qui sera plus approché de la solution que les points R_1, R_2, R_3.

C'est à partir de ce point ϱ que nous pourrons partir pour appliquer la méthode de Newton.



Considérons la parallèle aux projetantes menées par ϱ, elle coupe les surfaces (M) et (M') en deux points μ et μ'. Les plans tangents à (M) et (M') en ces points ont pour intersection une droite $\Delta\mu$.

De même les points d'intersection π et π' de la même projetante avec les surfaces (P) et (P') donnent une droite Δ_π.

La parallèle aux projetantes qui s'appuie sur Δ_μ et Δ_π fournit un point ϱ_1, plus approché que ϱ et l'on peut continuer ainsi indéfiniment.

La détermination des plans tangents aux surfaces (M) ou (P) est assez simple. On peut l'obtenir en effet en construisant sur la surface en un point deux tangentes particulières correspondant au déplacement du point R sur le cercle RAB ou sur le cercle lieu des points tels que $\frac{\mathrm{RA}}{\mathrm{RB}}$ soit constant.

L. BALLIF (Angoulême).

SUR LES TRIANGLES HÉRONIENS

Nouvelles formules.

1. — Soient p, q, r les trois côtés et s le demi-périmètre d'un triangle héronien.

Si F représente la surface, on a :

$$\mathrm{F} = \sqrt{s(s-p)(s-q)(s-r)} .$$

F peut s'écrire :

$$\mathrm{F} = (s-q)(s-r)\sqrt{\frac{s(s-p)}{(s-q)(s-r)}} ,$$

ou, comme $s = s - p + s - q + s - r$,

$$\mathrm{F} = (s-q)(s-r)\sqrt{\left[1 + \frac{s-p}{s-q} + \frac{s-r}{s-q}\right]\cdot\frac{s-p}{s-r}}$$

$$= (s-q)(s-r)\sqrt{\frac{s-p}{s-q} + \frac{s-p}{s-r} + \frac{s-p}{s-q}\cdot\frac{s-p}{s-r}} .$$

Posons

$$\frac{s-p}{s-q} = x , \qquad \frac{s-p}{s-r} = x' ,$$

alors on obtient :

$$\mathrm{F} = \frac{(s-p)^2}{xx'}\sqrt{x + x' + xx'} . \qquad (1)$$

Or, puisque F doit être un nombre rationnel, l'expression $x + x' + xx'$ représente un carré parfait. On a

$$x + x' + xx' = y^2 ,$$

où y est un nombre rationnel ; on en tire

$$x' = \frac{y^2 - x}{1 + x} . \qquad (2)$$

Par conséquent (1) devient :

$$F = \frac{(s - p)^2}{x(y^2 - x)}(1 + x)y . \qquad (3)$$

On trouve ensuite pour les côtés du triangle :

$$p = s - q + s - r = (s - p)\left[\frac{s - q}{s - p} + \frac{s - r}{s - p}\right] = (s - p)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x'}\right)$$

ou d'après (2) :

$$p = (s - p)\left[\frac{1}{x} + \frac{1 + x}{y^2 - x}\right] ,$$

c'est-à-dire

$$p = \frac{s - p}{x(y^2 - x)}(x^2 + y^2) ; \qquad (4)$$

$$q = \frac{s - p}{y^2 - x}(1 + y^2) ; \qquad (5)$$

$$r = \frac{s - p}{x}(1 + x) . \qquad (6)$$

Or, nous pouvons remplacer le triangle (p, q, r) par un triangle semblable (a, b, c), où :

$$a = \frac{x(y^2 - x)}{s - p} \cdot p , \qquad b = \frac{x(y^2 - x)}{s - p} \cdot q , \qquad c = \frac{x(y^2 - x)}{s - p} \cdot r .$$

La surface de ce triangle est par conséquent :

$$F' = \left[\frac{x(y^2 - x)}{x - p}\right]^2 . F .$$

On obtient à l'aide de (3), (4), (5) et (6) :

$$a = x^2 + y^2 \qquad (I)$$

$$b = (1 + y^2)x \qquad (II)$$

$$c = (1 + x)(y^2 - x) \qquad (III)$$

et

$$F' = (1 + x)(y^2 - x)xy , \qquad \text{ou} \qquad F' = cxy . \qquad (IV)$$

Dans ces formules x et y sont des nombres positifs rationnels et $y^2 > x$ à cause de III.

Remarque. — On peut démontrer immédiatement que les expressions

$$x^2 + y^2 , \qquad (1 + y^2)x , \qquad (1 + x)(y^2 - x) ,$$

où x, y et $y^2 - x$ sont des nombres positifs, peuvent toujours être les côtés d'un triangle, car les trois différences

$$s - (x^2 + y^2) , \qquad s - (1 + y^2)x , \qquad s - (1 + x)(y^2 - x) ,$$

où

$$s = \frac{1}{2}\{x^2 + y^2 + (1 + y^2)x + (1 + x)(y^2 - x)\} ,$$

sont positives.

En effet, on trouve :

$$s - (x^2 + y^2) = x(y^2 - x) ,$$

$$s - (1 + y^2)x = y^2 - x ,$$

$$s - (1 + x)(y^2 - x) = x(1 + x) .$$

Mais, si ces trois différences sont positives, chacune des quantités I, II, III est plus petite que la somme et plus grande que la différence des deux autres ; par conséquent I, II, III peuvent être considérés comme les trois côtés d'un triangle.

2. — De la formule IV on reconnaît que la hauteur h correspondante à la base c est égale à $2xy$.

La question est maintenant de savoir dans quelles conditions cette hauteur se confond avec le côté a ou b.

1° $h = a$. Alors

$$x^2 + y^2 = 2xy , \qquad \text{c'est-à-dire que} \qquad x = y ,$$

d'où il suit que :

$$a = 2x^2 , \qquad b = x(x^2 + 1) , \qquad c = x(x^2 - 1) ;$$

par conséquent x doit être plus grand que 1.

Quand $x = 2$, on a :

$$a = 8 , \qquad b = 10 , \qquad c = 6$$

triangle rectangle, semblable au plus petit triangle pythagoricien 3, 4, 5.

2° $h = b$. Alors

$$2xy = (1 + y^2)x , \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad y = 1 ;$$

donc, seulement quand $y = 1$, $h = b$.

Ici x est plus petit que 1 puisque $y^2 = 1 > x$. Les côtés du triangle sont alors :

$$a = 1 + x^2 , \qquad b = 2x , \qquad c = 1 - x^2 .$$

Prenons $x = \frac{1}{2}$, nous obtenons :

$$a = \frac{5}{4} , \qquad b = 1 , \qquad c = \frac{3}{4}$$

triangle rectangle, semblable au plus petit triangle pythagoricien.

3. — Nous allons maintenant démontrer la proposition suivante :

Les côtés a et b ne sont égaux entre eux que quand $x = 1$. Si l'on a, au contraire, $x \gtrless 1$, on aura $a \lessgtr b$.

En effet, il suit de la formule III que

$$y^2 > x ,$$

donc :

1) $$y^2(x - 1) > x(x - 1) ,$$

si

$$x - 1 > 0 , \qquad \text{ou} \qquad x > 1 ; \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad xy^2 + x > x^2 + y^2 ;$$

donc :

$$b > a ;$$

2) $$y^2(x - 1) < x(x - 1) , \qquad \text{si} \qquad x < 1 ;$$

ou

$$xy^2 + x < x^2 + y^2 ;$$

donc

$$b < a ;$$

3) quand $x = 1$, il suit de I et II que :

$$a = 1 + y^2 , \qquad b = 1 + y^2 ; \qquad \text{c'est-à-dire que} \qquad a = b .$$

Mais en outre on a, comme il est facile de le reconnaître :

$$c \gtreqless a , \qquad \text{suivant que l'on a} \qquad y^2 \gtreqless 2x + 1 ,$$

et

$$c \gtreqless b , \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad y^2 \gtreqless (2 + x)x .$$

Si donc $a = b$ (et par conséquent $x = 1$), on a :

$$c \gtreqless a = b , \quad \text{selon que } y^2 \text{ est} \gtreqless 3 .$$

D'où il suit que $a = b = c$ n'est pas possible, car alors y serait égal à $\sqrt{3}$, c'est-à-dire à un nombre irrationnel et le triangle (a, b, c) ne serait plus un triangle héronien. D'ailleurs, qu'un triangle dont les trois côtés sont égaux ne peut pas être un triangle héronien, c'est ce qui suit immédiatement de la formule de l'aire : $F = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$; alors F est un nombre irrationnel, lorsque le côté a est rationnel.

4. — On sait que d'un triangle obliquangle héronien on obtient à l'aide de chacune de ses trois hauteurs deux triangles rectangles héroniens aussi et dont la somme ou la différence égalent le triangle donné.

Considérons le côté $c = (1 + x)(y^2 - x)$ comme la base du triangle (a, b, c) ; alors la hauteur $h = 2xy$ peut se trouver en dehors ou à l'intérieur du triangle : dans le premier cas le triangle apparaît comme la différence et dans le second cas comme la somme de deux triangles rectangles héroniens ayant une cathète commune, la hauteur h.

Nous démontrerons maintenant la proposition suivante :

Soit $x > y$, alors la hauteur $h = 2xy$ se trouve à l'extérieur du triangle.

On reconnaît d'abord que pour $x > y$ x doit être plus grand que 1. Car pour $x = 1$ on aurait $x^2 = 1 = x$, et, puisque $x > y$, $x^2 > y^2$ ou encore $x > y^2$, ce qui est inadmissible à cause de la formule III.

Pour $x < 1$ on aurait $x^2 < x$, et, puisque $x > y$, $x^2 > y^2$; par conséquent $x > x^2 > y^2$, c'est-à-dire $x > y^2$, ce qui n'est pas possible. Donc, x doit être plus grand que 1. Mais alors y est aussi plus grand que 1 (puisque $y^2 > x$) ; d'autre part a est plus petit que b (d'après le n° 3), ou

$$x^2 + y^2 < (1 + y^2)x .$$

Or, le triangle (a, b, c) est la différence de deux triangles rectangles ayant respectivement comme côtés

$$b = x(1 + y^2), \qquad h = 2xy, \qquad x(y^2 - 1) ;$$

$$a = x^2 + y^2, \qquad h = 2xy, \qquad x^2 - y^2 ;$$

h étant leur hauteur commune : donc, h se trouve en dehors du triangle, c. q. f. d.

Admettons maintenant que les valeurs de x sont plus petites que celles de y.

Il faut distinguer deux cas :

1) $x < y$, $y > 1$.

Le triangle (a, b, c) peut se diviser en deux triangles rectangles héroniens ayant respectivement comme côtés :

$$b = x(1 + y^2), \qquad h = 2xy, \qquad x(y^2 - 1);$$
$$a = x^2 + y^2, \qquad h = 2xy, \qquad y^2 - x^2,$$

h étant leur hauteur commune : h se trouve compris dans le triangle (a, b, c).

2) $$x < y < 1.$$

On a d'abord $y^2 < y$; d'autre part, puisque $x < y^2$ à cause de la formule III, à plus forte raison x est plus petit que y, donc $x < 1$ et par conséquent $b < a$ (d'après le n° 3).

Or, le triangle (a, b, c) est égal à la différence de deux triangles rectangles ayant comme côtés :

$$a = x^2 + y^2, \qquad h = 2xy, \qquad y^2 - x^2;$$
$$b = x(1 + y^2), \qquad h = 2xy, \qquad x(1 - y^2);$$

h étant leur hauteur commune : h se trouve en dehors du triangle (a, b, c).

Remarque. — Dans le cas ci-dessus, comme dans celui où $x > y$, la hauteur h se trouve en dehors du triangle (a, b, c). Mais pour $x > y$ on a $a < b$, tandis que pour $x < y < 1$ le côté a est plus grand que b.

En résumé :

1) $x > y$; h se trouve en dehors du triangle en même temps que a est plus petit que b ;

2) $x = y$; h se confond avec a ;

3) $x < y$:

α) $y > 1$; h se trouve dans l'intérieur du triangle ;

β) $y = 1$; h se confond avec b ;

γ) $y < 1$; h se trouve en dehors du triangle et a est plus grand que b.

N. Genximatas (Munich).

CHRONIQUE

Conférence internationale de l'Enseignement mathématique.

Paris, 1-4 avril 1914.

Nous avons déjà annoncé, dans le n° du 15 novembre dernier, le programme détaillé de la Conférence internationale que la Commission internationale de l'enseignement mathématique tiendra à Paris du 1 au 4 avril 1914.

La *séance générale d'ouverture* aura lieu à la Sorbonne sous la présidence de M. G. Darboux, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, représentant le Ministre de l'Instruction publique. Elle comprendra une allocution de bienvenue de M. P. Appell, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences de Paris, un discours du président de la Commission, M. F. Klein (Gœttingue), une allocution du représentant du Ministre, puis deux conférences, l'une de M. Emile Borel, *sur l'adaptation de l'enseignement aux progrès de la science*, l'autre de M. Maurice d'Ocagne, *sur le rôle des mathématiques dans les sciences de l'ingénieur.*

Les séances du 2, 3 et 4 avril seront consacrées aux rapports et discussions sur les deux principaux objets mis à l'ordre du jour de la conférence :

A. — *Les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures de l'enseignement moyen.*

B. — *De la place et du rôle des mathématiques dans l'enseignement technique supérieur.*

Sur la demande du Comité central, M. E. Beke, professeur à l'Université de Budapest, a bien voulu se charger du rapport général sur la question A et M. P. Stæckel, professeur à l'Université de Heidelberg, du rapport sur la question B. Leur exposé sera basé sur les documents qui ont été fournis par les principaux pays en réponse aux deux questionnaires[1] arrêtés par le Comité central dans sa réunion tenue à Heidelberg en juillet 1913.

Ces rapports et le compte rendu complet de la Conférence

[1] Reproduits dans les quatre langues des congrès, dans l'*Ens. math.* du 15 septembre 1913.

seront publiés dans l'*Enseignement mathématique*, organe officiel de la Commission.

Rappelons en outre que le programme prévoit une séance commune avec la Société mathématique de France, pour le mercredi soir 1er avril, et une séance avec la Société des ingénieurs civils de France, pour le vendredi soir 3 avril.

La Conférence sera close le samedi soir 4 avril par une réception chez S. A. le prince Bonaparte, membre de l'Institut.

Les membres de la Conférence participeront ensuite, du 6 au 8 avril, à la réunion organisée par la Société française de Philosophie et dont on trouvera ci-après quelques indications.

Admission aux séances. Carte de participant. — La séance générale d'ouverture est publique. — Les séances de travail sont réservées : 1° aux membres de la Commission et des Sous-commissions nationales ; 2° aux personnes munies d'une *carte de participant*. Cette carte peut être obtenue auprès du secrétaire-général par l'intermédiaire des membres de la Commission.

Les *adhésions* sont reçues, dès maintenant jusqu'au 1er mars 1914, auprès du secrétaire-général, M. H. Fehr, 110, Florissant, Genève (Suisse). Les mathématiciens français peuvent aussi s'adresser à M. Ch. Bioche, 56, rue Notre-Dame-des-Champs, Paris, 6e.

Réduction accordée par les chemins de fer français. — Les membres de la Conférence se rendant à Paris bénéficieront d'une réduction de 50 % sur tous les réseaux français. L'aller et le retour devront être effectués suivant le même itinéraire. Des indications précises concernant les formalités à remplir seront fournies aux adhérents dès maintenant en même temps que la carte de participant. Seules les adhésions reçues avant le 1er mars 1914 pourront être prises en considération. H. Fehr.

Congrès de Philosophie mathématique

Paris, 6-8 avril 1914.

La Société française de Philosophie, d'accord avec les Editeurs de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques convie les Mathématiciens réunis à Paris à l'occasion de la Conférence internationale de l'enseignement mathématique à un certain nombre de séances où seront présentés et discutés des rapports sur diverses questions de philosophie mathématique.

Ces séances auront lieu à la Sorbonne les *lundi 6 avril, mardi 7 avril et mercredi 8 avril*. La séance d'ouverture aura lieu le lundi matin 6 avril, sous la présidence de M. Emile Boutroux, de l'Académie française et de l'Institut, président d'honneur de la réunion. Les séances seront consacrées à la lecture de Rapports sur des sujets choisis d'avance. Des séances seront spécialement réservées à des entretiens et des discussions sur les principaux sujets mis à l'ordre du jour.

La réunion débutera par une réception préparatoire qui aura lieu le dimanche 5 avril de 4 h. à 7 h. chez M. Xavier Léon, président de la Société française de Philosophie, 39, rue des Mathurins, Paris.

Au moment où nous rédigeons ces notes, nous n'avons encore sous les yeux que la liste des travaux de collaborateurs français; elle comprend des mémoires ou rapports de MM. J. Hadamard (Paris) sur les principes et le raisonnement mathématique; P. Langevin (Paris) sur la nouvelle conception du temps; L. Couturat (Paris) sur l'abus de l'intuition dans l'enseignement mathématique; L. Brunschvicg (Paris), les mathématiques et l'expérience; H. Dufumier (Poitiers), la logique des classes et la théorie des ensembles; M. Winter (Paris), la notion de temps.

Il nous manque notamment les noms des collaborateurs que MM. Enriquès et Timerding se sont chargés de recruter.

Ces travaux feront l'objet d'un numéro spécial de la *Revue de Métaphysique et de Morale*, dirigée par M. Xavier Léon, Librairie Armand Colin, 103, boul. St-Michel, Paris.

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Allemagne. — La Sous-commission allemande vient de publier deux nouveaux fascicules de ses monographies sur l'enseignement mathématique. L'un, par M. Trost, est consacré à l'enseignement mathématique dans les écoles professionnelles moyennes; l'autre, par MM. Furtwängler et Ruhm, a pour objet la préparation mathématique des géomètres-arpenteurs.

Die mathematischen Fächer an den niederen gewerblichen Lehranstalten in Deutschland, von Dip.-Ing. W. Trost, Berlin, Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, Band IV, Heft 5, VI-150 p.

Die mathematische Ausbildung der Deutschen Landmesser, von Dr Ph. Furtwängler (Wien) und C. Ruhm (Bonn), Abhandlungen, Band IV, Heft 8, VI-50 p.; B. G. Teubner, Leipzig.

Académie des Sciences de Paris.

Prix décernés. — Prix proposés.

La séance annuelle de l'Académie des Sciences de Paris a eu lieu le 15 décembre. Dans son discours d'ouverture, le Président annuel, M. le professeur Félix Guyon a d'abord rappelé la mémoire des académiciens et des membres correspondants disparus dans le courant de l'année. Il signale ensuite les événements scientifiques qui ont particulièrement retenu l'attention de l'Académie cette année et mentionne, en première ligne, les progrès accomplis dans la solution du problème des trois corps, grâce aux remarquables recherches de M. Sundmann[1]. Pour ce qui concerne ce travail, le président s'est exprimé en ces termes :

« L'Académie des Sciences de Paris, dont les membres ont pris, de tout temps, une part si importante à la solution du célèbre problème « des trois corps », est heureuse de signaler des recherches relatives à cette difficile question : un jeune astronome d'Helsingfors, M. Sundmann, les a très heureusement conduites.

« La Commission académique chargée de leur examen a conclu, par l'organe de son rapporteur, M. Emile PICARD, notre très savant confrère, « que le mémoire de M. Sundmann est un travail faisant époque pour les analystes et astronomes mathématiciens ». Il fait remarquer « que ce n'est pas un des moindres étonnements du lecteur, que de voir avec quelle simplicité, en s'appuyant sur des résultats aujourd'hui classiques, que le savant finlandais arrive à la solution d'un problème réputé si difficile ». L'Académie décerne à ce très remarquable travail le prix G. de Pontécoulant : elle a décidé, sur la demande de la Commission, que la valeur en serait doublée. »

M. Van TIEGHEM, Secrétaire perpétuel, a proclamé les lauréats des prix décernés et les bénéficiaires de la Fondation Bonaparte. La séance s'est terminée par la lecture de l'éloge historique que M. Gaston DARBOUX, Secrétaire perpétuel, a consacré à Henri Poincaré.

PRIX DÉCERNÉS.

Nous avons déjà mentionné les prix décernés à MM. Maurice Leblanc, Sundmann, Molk et Cl. Guichard.

Parmi les prix concernant les sciences mathématiques la liste contient en outre les suivants :

Prix Francœur. — Le prix a été décerné à M. A. CLAUDE, membre adjoint du Bureau des Longitudes, pour l'ensemble de ses travaux astronomiques.

Prix Bordin (Sciences mathématiques). — L'Académie avait proposé la question suivante pour sujet du prix Bordin à décerner en 1913 : *Perfectionner en quelque point important la théorie arithmétique des formes non quadratiques.* Aucun mémoire ne lui est parvenu. L'Académie remet au concours la même question pour sujet du prix à décerner en 1917.

Le prix Montyon de mécanique a été décerné à M. SAUVAGE, inspecteur général des Mines, professeur de machines à l'Ecole

---

[1] Voir le rapport de M. E. Picard reproduit in extenso dans les Comptes rendus du 15 décembre 1913 et dans le Bull. des Sciences mathém., octobre 1913.

nationale supérieure des Mines depuis 1888, et au Conservatoire des Arts et Métiers depuis 1902.

Prix Montyon de statistique. — Un prix de mille francs est décerné à M. Albert Quiquet, ancien élève de l'École Normale supérieure, vice-président de l'Institut des Actuaires français, pour l'ensemble des travaux.

Prix Gustave Roux. — Le prix est décerné à M. Montel, chargé de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, pour ses travaux sur la théorie des fonctions analytiques.

Prix Henri de Parville (Ouvrage de Science). — Ce nouveau prix annuel, d'une valeur de deux mille cinq cents francs, destiné à récompenser l'Ouvrage de Science qui en paraîtra le plus digne : Livre de science original ou livre de vulgarisation scientifique, est décerné à M. Jean Perrin, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, pour son Ouvrage sur les atomes.

Prix proposés.

Prix Bordin (3000 francs). — Prix biennal à sujet variable.

1. L'Académie rappelle qu'elle a mis au concours, pour l'année 1915 la question suivante : *Réaliser un progrès notable dans la recherche des courbes à torsion constante ; déterminer s'il est possible celles de ces courbes qui sont algébriques, tout au moins celles qui sont unicursales.*

2. L'Académie avait proposé la question suivante pour sujet du prix Bordin à décerner en 1913 : *Perfectionner en quelque point important la théorie arithmétique des formes non quadratiques.*

Aucun mémoire ne lui étant parvenu, l'Académie remet au concours la même question pour le prix à décerner en 1917.

Grand Prix des Sciences mathématiques. (Prix du budget : 3000 francs. Prix biennal à sujet variable). — L'Académie met au concours, pour l'année 1916, la question suivante : *Appliquer les méthodes d'Henri Poincaré à l'intégration de quelques équations différentielles linéaires, algébriques, choisies parmi les plus simples.* En dehors des mémoires manuscrits, l'Académie se réserve d'examiner les ouvrages imprimés qui auront pu être publiés sur cette question.

Prix Poncelet (2000 francs). — Ce prix annuel, fondé par M^me^ Poncelet, est destiné à récompenser alternativement l'ouvrage le plus utile aux progrès des Sciences mathématiques pures ou appliquées publié dans le cours des dix années qui auront précédé le jugement de l'Académie.

Le prix Poncelet sera décerné en 1916 à un ouvrage sur les Mathématiques pures.

Prix Vaillant (4000 francs). — L'Académie met au concours, pour l'année 1917, la question suivante : *Déterminer et étudier* *toutes les surfaces qui peuvent, de deux manières différentes, être engendrées par le deplacement d'une courbe invariable.*

Les conditions communes à tous les concours sont indiquées dans les *comptes rendus* de l'Académie des Sciences du 15 décembre 1913, p. 1345.

Institut des Actuaires français.

Prix Léon Marie

Ce prix, fondé par Mme Ve Léon Marie, est destiné à récompenser une œuvre importante sur les matières qui intéressent la science actuarielle. Il sera décerné tous les ans par le jury spécial (comprenant les deux membres du bureau et de la commission de contrôle) et proclamé à l'assemblée générale ordinaire de l'année suivante. Il ne sera pas divisé. Son montant est de 500 francs.

Pourront concourir, les ouvrages imprimés en français, parus depuis cinq ans au plus, et déposés avant le 15 septembre de l'année du concours. Ne pourront concourir, les thèses d'agrégation à l'*Institut des Actuaires français.*

Exceptionnellement, pour l'année 1913, le Prix Léon Marie sera proclamé à la séance du mois d'avril 1914, et la date extrême des candidatures est portée au 28 février 1914.

Siège de la Société : 5, rue Las-Cases, Paris.

Prix Lobatschewsky.

La Société physico-mathématique décernera un prix de 500 roubles à l'auteur de la contribution la plus importante à la *Géométrie non-euclidienne* qui aura été publiée au cours des six années qui précèdent le 4 novembre 1915.

Congrès des Mathématiciens allemands, Vienne 1913.

Les mathématiciens allemands (*Deutsche Mathematiker Vereinigung*) se sont réunis à Vienne, du 21 au 25 septembre 1913, à l'occasion de la 85me Réunion des Naturalistes et Médecins allemands. Après le discours de bienvenue de M. le Prof. E. Müller, Recteur de l'Ecole technique supérieure de Vienne, M. le Prof. Roux (Leipzig), président annuel, a ouvert la série des séances consacrées aux communications scientifiques. Au nombre de trente-huit ; celles-ci ont été groupées dans la Section I (Mathematiques) du Congrès. En voici la liste :

1. F. Meyer (Königsberg) : Bericht über neuere, besonders durch Arbeiten von Gordan veranlasste Fortschritte der Invariantentheorie (Referat).
2. E. Müller (Wien) : Eine Weiterbildung der Grassmanschen Ausdehnungslehre im Sinne der Invariantentheorie.
3. G. Kohn (Wien) : Zur Geometrie der Würfe; ein Seitenstück zu projektiven Figuren.
4. F. Hocevar (Graz) : Ueber den Zusammenhang zwischen den irreduktiblen Teilern einer Form und einem linearen System von Nullstellen der Form.
5. R. Weitzenböck (Graz) : Ueber elementargeometrische Invarianten
6. E. Blaschke (Wien) : Aenderungen der Sterbewahrscheinlichkeiten mit der Zeit.
7. L. G. Du Pasquier (Neuenburg) : Eine neue Anwendung der simultanen Differentialgleichungen in der mathematischen Theorie der Lebensversicherung.
8. A. Einstein (Zürich) : Zum Gravitationsproblem.
9. W. v. Dyck (München) : Ueber die Keplermanuskripte der Wiener Hofbibliothek.
10. E. Waelsch (Brünn) : Zu den Minkowskischen Grundgleichungen der Elektrodynamik.
11. R. Mehmke (Stuttgart) : Ueber die zahlenmässige, insbesondere graphische Auflösung von Systemen unendlich vieler Gleichungen ersten Grades mit unendlich vielen Unbekannten.
12. C. Juel (Kopenhagen) : Ueber Elementarflächen.
13. F. Bernstein (Göttingen) : Zur Mengenlehre.
14. H. Liebmann (München) : Die Entwicklung der Lehre von den Berührungstransformationen (Referat).
15. F. Engel (Giessen) : Lies Invariantentheorie der Berührungstransformationen und ihre Verallgemeinerung (Referat).
16. K. Zindler (Innsbruck) : Ueber geschlossene Raumkurven.
17. H. Tietze (Wien) : Ueber eindeutige stetige Abbildung von Flächen auf sich selbst.
18. H. Hahn (Czernowitz) : Ueber stetige Abbildungen.
19. L. v. Schrutka (Brünn) : Zur additiven Zahlentheorie.
20. P. Koebe (Leipzig) : Wesen und Ziele der Kontinuitätsmethode.
21. J. Plemelj (Czernowitz) : Ueber den Verzerrungssatz von P. Koebe.
22. R. König (Leipzig) : Arithmetisch-funktionentheoretische Parallelen.
23. J. Plemelj (Czernowitz) : Ueber die Abhängigkeit der Lösungen linearer Differentialgleichungen von den akzessorischen Parametern.
24. F. Dingeldey (Darmstat) : Ueber ein gewisses Integral und eine einfache Darstellung der Kugelfunktionen.
25. J. Radon (Wien) : Ueber die Abhängigkeit von Kurvenintegralen vom Integrationsweg bei Nebenbedingungen.
26. W. Gross (Wien) : Zur Theorie der unbestimmten Differentialgleichungen.
27. R. Suppantschitsch (Wien) : Ueber die Axiomatik der Methode der kleinsten Quadrate.
28. E. Häntzschel (Berlin) : Bedingungen für die Lösbarkeit eines Fermatschen Problems
29. O. Perron (Tübingen) : Ueber eine eigentümliche Schwierigkeit bei der Integration scheinbar sehr einfacher Differentialgleichungen.

30. E. Nöther (Erlangen) : Ueber rationale Funktionskörper.
31. R. Courant (Göttingen) : Ueber die Existenzbeweise der Riemannschen Funktionentheorie.
32. E. Dintzl (Wien) : Die Entwicklungskoeffizienten der elliptischen Funktionen, insbesondere bei singulären Moduln.
33. F. Nöther (Karlsruhe) : Zur Theorie der Turbulenz.

Séance administrative. — M. Roux rappelle d'abord la mort de deux anciens présidents, Gordan (Erlangen) et Weber (Strasbourg), décédés depuis la dernière réunion. La liste des membres décédés comprend en outre MM. Franz (Breslau), Friesendorf (St-Pétersbourg), Gütsche (Berlin), Hermes (Osnabrück), Konig (Budapest), Pockels (Heidelberg), Prascycki (St-Petersbourg), Saalschütz (Königsberg), Sadow Pittard (Calcutta), Schlick (Hambourg), Schoute (Groningue). — Par contre, la Société a reçu 16 nouveaux membres. Au moment de la réunion, le nombre des membres était de 770.

Encyclopédie. — M. Weber, qui représentait la Société mathématique allemande dans la Commission des Académies patronnant l'Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées (édition allemande), est remplacé par M. Staeckel (Heidelberg).

Oeuvres d'Euler. — M. Rudio rend compte de l'état actuel de la publication des œuvres d'Euler. Il saisit cette occasion pour attirer l'attention de ses collègues sur la Société Léonhard Euler destinée à fournir un appui financier au comité de publication. Sur la proposition de M. Pringsheim, l'assemblée décide d'adhérer à la Société Léonhard Euler et de verser une cotisation annuelle de 500 francs pendant la prochaine période de cinq ans. M. Pringsheim invite en outre ses collègues à se faire inscrire comme membres de la dite Société.

Sous-commission allemande de l'Enseignement mathématique. — M. le Prof. Staeckel donne un aperçu de la marche des travaux destinés à la Commission internationale de l'Enseignement mathématique. La collection des Rapports sur l'Enseignement mathématique en Allemagne comprend 38 fascicules dont 29 sont déjà parus, 5 fascicules sont sous presse : les 4 autres paraîtront dans le courant de l'année 1914. M. Staeckel signale ensuite la Conférence internationale que la Commission tiendra à Paris à l'occasion des vacances de Pâques 1914.

Comité. — La Société a renouvelé partiellement son Comité. Les deux membres sortant de charge au 20 septembre 1913, conformément aux statuts, MM. von Dyck et von Lilienthal ont été remplacés par MM. Finsterwaldern (Munich) et Rudio (Zurich). M. le Prof. Runge (Gœttingue) a été désigné comme président pour la période du 1er octobre 1913 au 30 septembre 1914.

La prochaine réunion aura lieu à *Hanovre* en septembre 1914.

Section de l'enseignement scientifique. On sait que les Congrès des Naturalistes et Médecins allemands ont toujours accordé une large place à l'enseignement scientifique. Tel a encore été le cas à Vienne. La Section de l'enseignement scientifique (section XV) fut présidée par MM. E. Czuber et Höfler.

Parmi les communications inscrites à l'ordre du jour, signalons celles de MM. Grimsehl (Hambourg) et Wetternick, sur les manipulations physiques dans l'enseignement secondaire; A. Höfler (Vienne), Wernicke (Braunschweig), O. Pommer (Vienne), B. Schmid (Zwickau), sur la science et l'initiation philosophique; W. von Dyck (Munich), sur la préparation des candidats à l'enseignement en Bavière; et E. Müller (Vienne), sur la liberté du maître quant au programme et la méthode d'enseignement dans les établissements secondaires.

Société suisse des professeurs de mathématiques.

Réunion de Baden, octobre 1913.

La Société suisse des professeurs de mathématiques a tenu sa réunion annuelle à *Baden*, le 6 octobre 1913, en même temps que la Société suisse des professeurs de Gymnases.

La plupart des participants avaient pris part le dimanche 5, à la séance que la Société des professeurs de Gymnases avait spécialement consacrée à la question de la préparation pédagogique des maîtres de l'enseignement secondaire. La discussion était basée sur les rapports très documentés de MM. v. Wyss et Brandenberger; ce dernier a examiné la question plus particulièrement au point de vue de l'enseignement mathématique.

Dans sa précédente réunion annuelle (Lausanne 1912), la Société avait adopté un plan de travail comprenant un ensemble de rapports sur les tendances actuelles de l'enseignement mathématique dans les écoles primaires et secondaires. Ces rapports se rattachent aux *vœux et propositions de réformes à accomplir dans l'enseignement mathématique* adoptés par la sous-commission suisse de l'enseignement mathématique.

La réunion de Baden, présidée par M. L. Crelier (Bienne), avait pour objet la présentation et la discussion des rapports suivants :

1° Rapports de MM. Scherrer (Küsnacht) et Courbat (Porrentruy) : *Organisation de l'enseignement du calcul et de la géométrie à l'école populaire en vue d'un enseignement rationnel des mathématiques dans les écoles moyennes.*

2° Rapports de MM. Egli et Ludin (Zurich) et Arni (Bienne) : *Quelles sont les connaissances mathématiques nécessaires pour* *suivre l'enseignement de la physique et de la chimie à l'école moyenne ?*

3° Rapports de MM. Grossmann Zurich et Mercier Genève : *Quelles sont les exigences des Universités, et spécialement des Universités techniques, au point de vue de la préparation des candidats ?* M. Mercier. — *Préparation mathématique des candidats à l'Ecole polytechnique fédérale ?* M. Grossmann.

Les principaux points de ces rapports avaient été préalablement discutés dans une séance de commission tenue au printemps à Aarau. Les rapporteurs les rédigèrent ensuite sous forme de thèses dont le texte fut expédié aux membres en même temps que la convocation.

1° Faute de temps, la discussion n'a pu avoir lieu que sur les rapports de MM. Scherrer et Courbat, qui contiennent d'intéressantes considérations d'ordre méthodologique sur la première instruction mathématique fournie par l'école primaire.

2° Les rapports de MM. Arni, directeur du Technicum de Bienne, Ludin et Egli, professeurs à l'Ecole cantonale de Zurich, montrent quelles sont les connaissances mathématiques nécessaires pour suivre l'enseignement de la physique et de la géométrie à l'école moyenne. M. Arni se place au point de vue des écoles techniques moyennes, tandis que ses deux collègues examinent plus particulièrement les exigences de l'enseignement scientifique dans les Gymnases littéraires et techniques. M. Ludin montre les difficultés que présente un enseignement rationnel de la physique lorsque le maître ne peut pas s'appuyer sur les éléments du Calcul des dérivées.

M. Egli présente une série d'exemples de problèmes de mathématiques que l'on rencontre dans l'étude de la chimie.

3° MM. Grossmann et Mercier examinent les exigences des Universités et spécialement des Universités techniques au point de vue de la préparation des candidats. M. le professeur Grossmann se borne aux cas des candidats à l'Ecole Polytechnique fédérale : il met l'assemblée en garde contre le danger qu'il y aurait à trop étendre les matières d'enseignement au détriment d'une étude approfondie des éléments essentiels. M. Mercier parle au contraire en faveur de l'introduction des éléments du calcul différentiel et intégral dans le programme de l'Ecole moyenne.

La discussion des rapports 2 et 3 a été renvoyée à une *séance extraordinaire* qui aura lieu au printemps.

Dans sa *séance administrative*, la Société a décidé d'adhérer comme membre à la Société Léonhard Euler.

Le président annonce ensuite que la Commission internationale de l'enseignement mathématique organise une conférence internationale qui aurait lieu à Paris, pendant les vacances de Pâques 1914. L'ordre du jour comprend l'étude des deux questions suivantes : *a)* Le calcul des dérivées et des fonctions primitives dans les écoles moyennes (Gymnases classiques, Gymnases scientifiques, écoles réales) ; *b)* Les mathématiques dans les écoles d'ingénieurs. M. H. Fehr fournit quelques renseignements complémentaires sur le programme de cette réunion.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. K. Bœhm, professeur à l'Université de Heidelberg, a été nommé professeur de Mathématiques à l'Université de Königsberg.

M. D. Hilbert, professeur à l'Université de Gœttingue, a été nommé membre correspondant de l'Académie des Sciences de Berlin.

M. F. Klein, professeur à l'Université de Gœttingue, a été nommé membre correspondant des Académies de Berlin et Bucarest.

M. O. Perron, professeur extraordinaire à l'Université de Tubingue, a été appelé à l'Université de Heidelberg comme successeur de M. Kœnigsberger.

Angleterre. — *Société royale de Londres.* La Médaille Sylvester a été attribuée à M. J. W. L. Glaisher, pour ses recherches mathématiques.

M. H. A. Lorentz, professeur à l'Université de Leyde, a été nommé docteur honoraire de l'Université de Birmingham.

Autriche-Hongrie. — M. G. Majcen, professeur extraordinaire de Géométrie à l'Université d'Agram, a été nommé professeur ordinaire.

M. A. Prœll, privat-docent à l'Ecole technique supérieure de Danzig, a été nommé professeur ordinaire de Mécanique à l'Ecole technique supérieure allemande de Brünn.

M. Rothe, privat-docent à l'Ecole technique supérieure de Vienne, a été nommé professeur extraordinaire de Mathématiques.

Belgique. — *Académie Royale.* La Classe des Sciences a élu comme membre effectif M. P. Stroobant (Bruxelles), et comme correspondant M. M. Stuyvært (Gand). Elle a couronné un mémoire de M. Stuyvært sur les congruences de cubiques gauches.

L'Université de Gand vient de faire paraître le tome II du *Liber memorialis*, 618 p., in-4°, contenant des notices biographiques sur tous les professeurs ayant enseigné aux Facultés des Sciences et de Médecine depuis la fondation de l'Université. L'ouvrage n'est pas dans le commerce.

Etats-Unis. — M. Bertrand Russell, lecteur au Trinity College, à Cambridge (Angleterre), a été nommé lecteur de Philosophie à l'Université Harvard. Il fera, à partir du mois de mars, un cours sur la théorie de la connaissance et la logique.

France. — M. P. Appell est nommé président de l'Académie des Sciences et de l'Institut de France pour 1914.

M. Paul Levy est nommé examinateur suppléant d'Analyse à l'Ecole Polytechnique de Paris.

M. Gambier, maître de conférences, est nommé professeur de Mathématiques à l'Université de Rennes.

Russie. — *Le bicentenaire de la loi des grands nombres.* Le 1/14 décembre 1913 l'Académie des Sciences de St-Pétersbourg a consacré une séance solennelle au bicentenaire de la publication à Bâle, en 1713, de l'œuvre posthume de Jacques Bernoulli : Ars conjectandi. Des discours furent prononcés par MM. A. Vassilieff, A. Markoff et A. Tschouproff.

Suisse. — MM. Berliner et Henoch ont été admis en qualité de privat-docents pour les Mathématiques à l'Université de Berne.

Nécrologie.

Sir Robert S. Ball, professeur d'astronomie et de géométrie à l'Université de Cambridge, Directeur de l'Observatoire, est décédé le 25 novembre 1913 à l'âge de 73 ans.

M. Ch. S. Dennison, professeur à l'Université de Michigan, est décédé à l'âge de 54 ans.

M. Pockels, professeur à l'Université de Heidelberg, est décédé le 29 août 1913 à l'âge de 60 ans.

M. L. A. Wait, professeur à l'Université Cornell à Ithaca N.-Y., est décédé le 6 septembre 1913 à l'âge de 67 ans.

M. Weinek, professeur d'astronomie à l'Université allemande de Prague, est décédé à l'âge de 65 ans.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Compte rendu des travaux des Sous-commissions nationales.

(16e article)

ILES BRITANNIQUES

N° 29. — Les mathématiques à l'école préparatoire.

Mathematics in the preparatory School[1], by M. E. KITCHENER, Head Master of Golden Parsonage School, Hemel Hempstead. — Il y a une trentaine d'années, une bonne partie des élèves se présentant aux « public schools » avaient reçu leur première instruction à la maison, et il n'existait qu'une dizaine d'élèves préparatoires reconnues. Actuellement, il en existe environ 500 préparant les élèves pour plus de 100 « public Schools », de sorte que la grande majorité des élèves ont suivi ces écoles préparatoires avant leur entrée à la « public school ». Ce passage d'une école dans l'autre constitue pour l'élève un brusque changement en ce qui concerne son éducation, et le rapport que nous résumons ici a pour but d'examiner les effets de ce changement relativement à l'enseignement mathématique. Il peut être divisé en trois parties : 1° Influence des « scholarships » offerts aux élèves de moins de 14 ans; 2° Effets dus aux changements d'écoles ; 3° Recommandations.

Un questionnaire a été envoyé aux grandes « public schools » et un autre aux directeurs de 40 ou 50 des plus importantes écoles préparatoires.

1° Le système des bourses d'entrée (entrance scholarships) dans les « public schools » est regrettable. Tout d'abord le travail de l'école préparatoire peut en souffrir par suite d'une certaine spécialisation en vue d'obtenir une bourse dans tel ou tel domaine. Ensuite, le jeune élève qui se prépare pour une bourse de mathématique (mathematical scholarship) risque toujours de faire travailler sa mémoire au détriment de ses facultés initiatrices. Il faut dire cependant que les questions d'examen ont été considérablement améliorées ces dernières années et qu'elles permettent de se rendre mieux compte qu'autrefois de la capacité de l'élève. Pour les élèves en « classics » des « secondary schools » les examens de passage pour les mathématiques n'entrent pas pratiquement en ligne de compte; ils sont très simples et sont appréciés avec une grande indulgence.

2° Il y a une dizaine d'années, le passage de l'école préparatoire à la « public school » constituait pour les mathématiques une solution de continuité ; actuellement cette absence de continuité est beaucoup moins sensible.

---

[1] 1 fasc. 18 p. ; prix 1 1/2 d. ; Wyman and Sons, Londres.

Cela tient en grande partie à l'institution de la « Common Entrance Examination » pour l'admission dans les « public schools ». Cette institution date de 1904, elle est dirigée par un comité de six membres, dont trois directeurs de « public schools » et trois d'écoles préparatoires. Les questions d'examen qu'elle prépare ont été adoptées actuellement par 52 « public schools » : il en est résulté naturellement une certaine unification des programmes des écoles préparatoires. En outre un plan d'études de mathématiques pour élèves de 9 à 16 ans fut publié grâce à la coopération de la « Head Masters' Conference » et de l' « Association of Preparatory Schools ». Ce plan d'études a été soumis à toutes les « public schools » et à tous les membres de l' « Association of Preparatory Schools ». Malheureusement, beaucoup ne se sont pas donné la peine de l'examiner ; par contre, ceux qui se donnèrent la peine de l'étudier l approuvèrent généralement, à quelques exceptions près, et il fut adopté dans bien des cas.

La question suivante avait été posée aux « public schools » : Trouvez-vous que les élèves sortant des écoles préparatoires présentent une certaine uniformité dans leurs méthodes ? Les réponses à cette question ne sont guère satisfaisantes. Il est intéressant de constater qu'on trouve plus d'uniformité dans la géométrie qu'en arithmétique et en algèbre, et cela malgré les transformations qui se sont introduites dans l'enseignement de la géométrie durant ces dix dernières années.

Le manque d'uniformité dans l'enseignement de l'arithmétique est dû à la grande variété des manuels et au fait que bien des directeurs ne tiennent pas compte des rapports qui leur sont envoyés. En 1907, la « Mathematical Association » publia un rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles préparatoires[1] et en 1911, un deuxième rapport sur l'enseignement de l'algèbre[2]. Si l'on se conformait un peu mieux aux propositions renfermées dans ces rapports, il en résulterait certainement plus d'uniformité dans l'enseignement de l'arithmétique et de l'algèbre.

Les réponses à la question : « Trouvez-vous les élèves sortant des écoles préparatoires mieux équipés en mathématiques qu'il y a une dizaine d'années ? » furent franchement affirmatives dans presque tous les cas. Il faut attribuer ce fait à une plus grande uniformité dans l'enseignement grâce à la « Common Entrance Examination ».

3° Pour lutter contre les inconvénients cités plus haut, on peut recommander : *a)* l'institution d'un plus grand nombre de « scholarships » sur tous sujets, afin d'éviter une spécialisation trop hâtive; *b)* un examen un peu plus sévère des connaissances mathématiques des futurs élèves en classique et langues modernes; *c)* l'adoption du plan d'études publié par le « Curriculum Committee of the Headmasters' Conference » pour élèves de 9 à 16 ans.

En appendice on trouvera un relevé des questions d'examen pour le « Mathematical Scholarship » à « Winchester College » 1909 et le plan d'études de la « Headmasters' Conference » pour ce qui concerne les mathématiques.

J.-P. Dumur (Genève).

[1] Report of the Mathematical Association Committee on the Teaching of Mathematics in Preparatory Schools, 1907, London, G. Bell and Son, 3 d.

[2] Report of the Mathematical Association Committee on the Teaching of Elementary Algebra and Numerical Trigonometry, 1911, London, G. Bell and Son, 3 d

BIBLIOGRAPHIE

R. d'Adhémar. — **Leçons sur les principes de l'analyse.** Tome II : *Fonctions synectiques. Méthodes des majorantes. Equations aux dérivées partielles de premier ordre. Fonctions elliptiques. Fonctions entières.* Avec une note de Serge Bernstein. — 1 vol. in-8° de VIII-300 p., avec 34 figures, 10 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

L'esprit de cet ouvrage a déjà été signalé ici même (t. XIV, 1912, p. 434) lors de la publication du tome I. Il se retrouve identiquement dans le tome II, ce qui ne peut d'ailleurs étonner, quand il s'agit d'un auteur aussi consciencieux que M. d'Adhémar.

Dans l'étude des fonctions synectiques, le point de vue qui prévaut est toujours celui de Cauchy avec les méthodes de majoration qu'employait ce géomètre pour prouver la convergence des séries ou pour limiter simplement ses intégrales définies ; c'est en s'attachant à ce point de vue que l'auteur étudie les développements plus modernes avec les méthodes de majoration qu'ils comportent.

D'ailleurs, il nous montre bien que la méthode des majorantes n'est pas, comme beaucoup l'ont cru et le croient peut-être encore, une méthode accessoire qui sert surtout à prouver la convergencede séri es qu'il est beaucoup plus important d'obtenir au point de vue formel. La méthode des majorantes a un intérêt propre, une élégance et une souplesse qui lui permettent de s'appliquer aux problèmes les plus divers ; c'est ce que nous voyons ici dans des problèmes fonctionnels (qui ont donné lieu dans ces dix dernières années à d'importantes thèses due à MM. Grévy, Léau, Lattès et à nombre d'autres travaux) où l'holomorphie de la solution se déduit très naturellement de la méthode.

On pourrait ensuite faire une remarque d'un esprit à peu près analogue dans la théorie du prolongement analytique où les auteurs, tels que Weierstrass, Méray, Mittag-Leffler, ont encore la place d'honneur, mais où arrive tout à coup Fredholm qui, en résolvant à sa manière certaines équations intégrales, a naturellement prolongé les séries entières qui peuvent aussi satisfaire à de telles équations. En d'autres termes l'idée de prolongement analytique s'est liée à des choses autrefois fort éloignées de la seule considération des séries tayloriennes.

Dans les intégrales analytiques, particulièrement dans les calculs à la Cauchy, M. d'Adhémar a tracé des contours élégants, calculé facilement de nombreux résidus, déterminé les nombres et les polynômes de Bernoulli et finalement présenté la très belle application qui consiste en la résolution, par rapport à F, de l'équation aux différences finies :

$$F(z+1) - F(z) = G(z).$$

C'est surtout avec les équations différentielles qu'apparaît le rôle capital des méthodes de majoration. Pour Cauchy l'existence des intégrales reposait surtout sur le fait de pouvoir les développer en séries entières ; pour M. S. Bernstein, qui a renouvelé la question, tout repose sur l'emploi de séries dont les termes sont de la forme :

$$A_{pq}\, x^p (R - x)^q .$$

Non seulement M. d'Adhémar a montré brièvement ce qu'on pouvait attendre de ces nouvelles séries, mais il a prié M. Bernstein de revenir lui-même sur les traits essentiels de la question, dans une note ajoutée au volume.

Je signale encore deux chapitres fort clairs sur les équations aux dérivées partielles et aux différentielles totales ; pour l'équation aux dérivées partielles de premier ordre, une grande importance est donnée au théorème de Cauchy concernant l'unicité de la solution attachée à une courbe donnée non caractéristique. Plus exactement, il y a là un théorème tout à fait général heureusement et élégamment préparé dans le cas d'une seule équation.

L'esprit sinon encyclopédique, mais, du moins, prompt à rattacher rapidement les uns aux autres différents sujets intéressants, reparaît dans le dernier chapitre consacré aux intégrales de fonctions non uniformes, aux fonctions elliptiques, aux fonctions entières.

Comme pour les fonctions uniformes de Cauchy, l'auteur a fait beaucoup d'ingénieux tracés autour des points critiques et calculé d'abord de nombreuses intégrales définies. Il a fait ensuite l'inversion de l'intégrale elliptique et donné une idée de la méthode générale d'inversion en introduisant la célèbre fonction thêta de Riemann. Il est revenu ensuite au principe de Dirichlet pour rétablir la belle formule de Poisson et démontrer des théorèmes sur le module maximum d'une fonction holomorphe, ce qui le conduit enfin à étudier sommairement l'allure des fonctions entières prises sous forme de produits infinis.

En résumé, pour élever son enseignement jusqu'à de hautes régions de la science, M. d'Adhémar a su prendre quelques chemins particuliers, si l'on veut, mais toujours rapides et précis. Les perspectives plus ou moins engageantes qu'il pouvait voir à droite et à gauche ne l'ont pas détourné du but et cependant il laisse la vue ouverte sur ces perspectives pour tous ceux qui voudront bien le prendre pour guide.

Une indiscrétion nous permet d'annoncer la publication d'un tome III. Souhaitons égoïstement que M. d'Adhémar se résolve à faire ce nouvel effort ; il en épargnerait beaucoup d'autres à ceux qui se retournent de plus en plus difficilement au milieu du fatras des innombrables publications d'aujourd'hui. A. Buhl (Toulouse).

W. M. Baker et A. A. Bourne. — **A Shorter Algebra**. — 1 vol. in-8, VIII-320-LIX p. ; 2 s. 6 d. ; G. Bell and Sons, Londres.

Le manuel « Shorter Algebra » de MM. Baker et Bourne est un résumé de leur Cours d'Algèbre en deux volumes intitulé « Elementary Algebra ». Il est consacré aux premiers éléments d'Algèbre. Les notions usuelles d'Arithmétique étant seules supposées connues, les auteurs en tirent parti pour la première initiation à l'Algèbre. La théorie est réduite au minimum, mais elle est accompagnée d'un grand nombre d'exercices. La notion de coordonnées et de représentation graphique, introduite à la suite des équations du premier degré, est reprise à propos des équations du deuxième degré. Après les progressions arithmétiques, géométriques et harmoniques et les équations de troisième degré (résolution graphique) les auteurs consacrent un dernier chapitre aux rapports et proportions. Chaque notion nouvelle est illustrée par un grand nombre d'exercices et de problèmes ; les réponses sont données en appendice à la fin du volume.

Ce Cours d'Algèbre est considéré comme suffisant à la préparation d'un grand nombre d'examens dont les auteurs font la nomenclature dans la préface, entre autres des examens d'admission dans les universités des Iles Britanniques et des colonies. Au reste, MM. Baker et Bourne reproduisent, sous le titre « Examination Papers », un certain nombre de questions qui ont été proposées à ces divers examens. R. Masson (Genève).

G.-St.-L. Carson. — **Essays on Mathematical Education,** with an introduction by D.-E. Smith. — 1 vol. in-8, 139 p.; Ginn and C°, Londres et Boston.

Ce titre réunit huit conférences et articles de M. Carson à des sociétés mathématiques et à divers périodiques scientifiques. Ces études abordent des questions d'ordre philosophique ou pédagogique relatives à l'éducation mathématique. L'auteur s'adresse plus spécialement au corps enseignant et aux mathématiciens anglais. Mais, ainsi que le constate M. D.-E. Smith (New-York) dans la Préface en en signalant l'utilité pour son pays, les remarques de M. Carson peuvent être considérées comme ayant une portée générale.

La première de ces études est intitulée : *De quelques principes d'éducation mathématique*. L'auteur y traite la question de l'adaptation du choix des axiomes, postulats et démonstrations, à l'âge et à la préparation des élèves.

M. Carson envisage ensuite le rôle de l'*Intuition,* il rend attentif au fait très important, surtout pour la géométrie, que ce terme peut correspondre à des degrés de certitude très divers, dont il faut savoir tenir compte dans l'enseignement. L'éducation mathématique devrait, dans un premier cours basé sur l'intuition, embrasser l'arithmétique, la géométrie et la mécanique ; puis, dans un second cours, reprendre les questions en sens inverse pour chaque branche afin d'arriver finalement à une conception claire des principes à la base de chaque science.

Le troisième article l'*utile et le réel,* établit la différence trop souvent négligée entre le réel, l'utile et le concret et leur signification spéciale au point de vue pédagogique.

Les mathématiques pures ne sont pas une science purement spéculative, mais ont une action directe considérable sur la pensée humaine et le développement social. C'est cette notion que M. Carson développe sous le titre : *De quelques possibilités irréalisées dans l'éducation mathématique*. Il montre dans quelle mesure elle devrait influencer la première éducation mathématique.

Dans *Enseignement de l'arithmétique élémentaire,* M. Carson passe en revue le champ de l'arithmétique élémentaire en cherchant par quels moyens cet enseignement peut réaliser son triple but : utilisation pratique, développement de la compréhension des questions sociales et politiques, et développement de la faculté de pensée personnelle.

La *valeur éducative de la géométrie* renferme des considérations intéressantes établissant l'utilité universelle de la géométrie dans l'éducation, indépendamment de son rôle pratique ; ces remarques sont accompagnées de conseils et indications pédagogiques que l'auteur tire de sa propre expérience professorale.

Enfin les deux dernières études se rapportent à la mécanique ; ce sont *le rôle de la déduction en mécanique élémentaire* et *une comparaison entre la géométrie et la mécanique*. R. Masson (Genève).

A. Chatelet. — **Leçons sur la théorie des nombres**, professées au Collège de France (*Modules. Entiers algébriques. Réduction continuelle*). — 1 vol. gr. in-8° de x-156 p. ; 5 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Les ouvrages ayant trait à l'algèbre ou à l'arithmétique pure n'abondant pas en France, il y a là une première raison d'accueillir favorablement ces nouvelles *Leçons*. Bien que l'auteur renvoie volontiers à Tannery, à MM. Borel et Drach, à M. Cahen, je retrouve surtout dans son livre les élégants et intuitifs procédés de la *Geometrie der Zahlen*, de Minkowski.

Le point de départ est la théorie des substitutions linéaires. Comme une telle substitution est évidemment définie par ses coefficients, lesquels forment un tableau carré, l'étude est ramenée à celle de ces tableaux pour lesquels on peut établir très simplement des règles de calculs analogues (mais plus générales) à celles qui concernent les déterminants. On peut aussi introduire immédiatement le langage géométrique en considérant n nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ comme coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions mais, là encore, une généralité supérieure à celle de la géométrie peut immédiatement apparaître. Ainsi, si la distance de deux points peut être définie à la manière ordinaire, elle peut aussi l'être de manière à ne pas employer toutes les propriétés de la distance géométrique mais seulement certaines essentielles au sujet. On peut, par exemple, concevoir une distance généralisée qui, pour des segments parallèles, est proportionnelle à leur longueur. Pour chaque direction issue de l'origine on a ainsi une unité de longueur particulière ou des segments unitaires dont l'ensemble forme un *volume* limité par une certaine *surface*. Il ne faut évidemment pas perdre de vue le sens spécial de ces mots mais il est ensuite fort curieux de voir le calcul intégral s'y adapter fort bien.

Le mot *module*, qui a en mathématiques un si grand nombre de significations différentes, a ici un sens analogue à celui du mot *groupe*. Les modules sont des ensembles de points invariants pour la soustraction ; les *modules types* sont ceux dont tous les points se déduisent d'un tableau quelconque par multiplication par une ligne d'entiers.

On est alors amené naturellement à étudier les systèmes d'entiers, l'ensemble des multiples d'un nombre, la divisibilité, et comme il est facile d'établir qu'un tableau à termes entiers peut se mettre sous une forme spéciale (où tous les éléments situés d'un même côté de la diagonale sont nuls), on est déjà conduit, par un exemple simple, à ces réductions de tableaux qui jouent un si grand rôle dans les travaux d'Hermite.

L'étude de la divisibilité conduit aussi à la résolution des équations de Diophante. Telle est la première moitié du livre de M. Châtelet ; c'est le nombre entier qui y joue le rôle fondamental et, bien entendu, il n'en pouvait être autrement, mais il me semble utile d'insister sur la chose, car tout le plan de l'ouvrage est déjà dessiné dans cette première moitié. Quand nous abordons les nombres algébriques et leur classification, nous retrouvons l'uniformité de la marche précédente. Ce n'est pas une nouveauté et c'est tout à fait naturel, mais c'est ce que l'auteur a su faire ressortir très heureusement. Il nous construit les nombres d'un *corps* par une arithmétique analogue à celle des multiples d'entiers et montre très nettement, où l'analogie ne subsiste pas forcément, ce qui conduit au nouveau concept d'*idéal*. Le dernier grand problème qu'il aborde, celui de la réduction continuelle des tableaux, nous ramène aux considérations géométriques de Minkowski. M. Châtelet a élégamment redémontré les deux théorèmes fondamentaux dus à cet auteur en laissant la plus grande généralité possible à la notion de distance généralisée.

Trois notes terminent le volume. La première est consacrée à l'application de la théorie des modules aux fonctions périodiques ou aux fonctions quasi-périodiques de M. Esclangon. Une telle application résulte, très en gros, de ce que l'ensemble des périodes d'une fonction périodique forme un module; par suite toutes les constructions de modules, en partant des plus simples et notamment des modules types, permettent des constructions de plus en plus générales pour des systèmes de périodes à existence exacte ou approchée. Il y a là, très nettement, bon nombre d'idées originales.

La seconde note nous donne un exemple numérique de corps algébrique pour le corps $K(\sqrt{82})$. La troisième nous indique comment l'impossibilité de congruences entre idéaux laisse cependant définir les congruences entre nombre d'un corps relativement à un idéal lui appartenant. Voilà, à coup sûr, des aperçus qui sembleront bien vagues à qui n'a jamais pénétré dans la science des nombres; mais tous ceux qui ont entrevu, tant soit peu, son aspect énorme et souvent rébarbatif (surtout chez les auteurs allemands) verront sans doute, dans le livre de M. Châtelet, un enchaînement bref et correct qui laisse transparaître beaucoup de clarté. A. Buhl (Toulouse).

H. Dingler. — **Die Grundlagen der angewandten Geometrie** (Les bases de la géométrie appliquée). — 1 vol. in-8°, 160 p.; Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig.

Cet ouvrage porte également en sous-titre : *Etude des relations entre la théorie et l'expérience dans les sciences exactes*, et il a pour but de résoudre la question séculaire liée au Postulat d'Euclide, savoir : De toutes les géométries logiques, quelles sont celles qui sont applicables à notre espace empirique; ou bien : Notre espace empirique est-t-il euclidien ou non-euclidien ?

L'auteur arrive à cette conclusion : Dans notre espace empirique, la géométrie euclidienne seule est admissible; ou : Notre espace empirique est euclidien.

Ses idées sont développées dans trois chapitres : I. *Le problème*; II. *La théorie de la mathématique appliquée*; III. *Application à la géométrie*.

Par mathématique appliquée, l'auteur n'entend pas, comme on le fait communément, les branches techniques dont les développements théoriques sont basés sur les mathématiques; il réserve son expression à une mathématique expérimentale déduite de la construction et de la mesure, mais dans laquelle on tient un compte précis du coefficient d'exactitude.

Dans le premier chapitre : *Le problème*, il pose la grande question liée à l'axiome des parallèles. Cet axiome est logique, il est indépendant des autres axiomes, donc il ne peut pas en être déduit. En le supprimant ou en le remplaçant par un autre, non moins logique, on arrive à d'autres géométries; mais celles-ci peuvent-elles s'appliquer à notre espace empirique ou physique ? Voilà la question.

M. Dingler établit ensuite une géométrie empirique, dans laquelle il crée des plans, des droites et des points réels, comparables entre eux, en partant du procédé mécanique de construction des surfaces planes. Il étend ensuite ses notions de géométrie empirique au corps rigide, mais celui-ci sera de nouveau défini plus tard comme un *résultant* de la géométrie euclidienne.

Dans la seconde partie : *Théorie de la mathématique appliquée*, l'auteur s'étend sur des considérations philosophiques spéciales relatives aux principes d'identité et d'exactitude appliqués aux méthodes de mesures. Il insiste spécialement sur la règle de Mach : Choisir, parmi les procédés scientifiques conduisant au même but, celui qui est le plus simple. (« Machsches Oekonomieprinzip. »)

La troisième et dernière partie conduit aux conclusions déjà indiquées. D'après l'auteur, la géométrie cesse d'être une science de logique pure, pour devenir une *science expérimentale* ou empirique, comme la physique ou la chimie.

Du fait des prémisses posées dans la seconde partie, le corps rigide doit être euclidien et l'espace auquel il appartient le devient également.

Philosophiquement parlant, la lecture de l'ouvrage est attrayante, les déductions sont fort belles, et si le lecteur ne prend pas la peine de se reporter, à chaque moment, aux bases mêmes de la géométrie, il est tenté de croire que la solution du problème donnée par M. Dingler est définitive.

A notre point de vue, elle ne l'est pas. L'espace empirique ou physique est continu et illimité; mathématiquement parlant, il est absolument assimilable à un espace linéaire à trois dimensions. D'autre part, les trois objets géométriques fondamentaux : le point, la droite et le plan, restent malgré tout des concepts abstraits. La question ne sera résolue que quand on aura démontré que le plan tel que nous le concevons : *l'élément géométrique univoquement déterminé par trois points*, ne peut pas être engendré par deux droites lobatschweskiennes au riemanniennes. L. Crelier (Bienne).

A. Grüttner. — **Die Grundlagen der Geometrographie** (Les bases de la géométrographie). — 1 vol. in-8°, 53 p. ; Quelle & Meyer, Leipzig.

Ce petit ouvrage comporte trois parties qui répondent aux trois questions suivantes : Quelles sont les bases de la géométrographie? Jusqu'où sont-elles développées ? Peut-on les perfectionner ?

Dans la première partie l'auteur étudie : *Le développement de la geométrographie*. Après avoir fait ressortir l'utilité de cette nouvelle doctrine, il en établit l'histoire et expose les divers systèmes de notation actuellement en cours. Nous retrouvons les systèmes Lemoine (L), Bernès (B), Gruttner (G) et Papperitz (P).

La deuxième partie est une : *Critique des systèmes géometrographiques*. Sans entrer dans tous les détails de la comparaison des systèmes, nous dirons simplement que l'auteur fait ressortir la caractéristique du système Grüttner (G), qui est son système. C'est l'introduction d'un coefficient ε, considéré comme unité relative du travail géométrographique. Ce coefficient doit servir à remplacer les nombres de Lemoine $(l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3)$ et $(l_1 + m_1 + m_2)$ donnant, le premier *la simplicité*, et l'autre *l'exactitude* d'une construction géométrographique. D'après l'auteur, on doit pouvoir *mesurer* les difficultés géométrographiques d'un problème, et c'est pour cela qu'il introduit le coefficient ε.

La troisième partie : *Développement raisonné d'un système géométrographique*, est consacrée à tous les arguments militant en faveur du système (G). L'auteur place la pratique du dessinateur à la base de ses considérations ; il montre l'insuffisance de la notation du système (L) dans les questions du compas, du changement d'instruments, de la prolongation des droites, etc. ; puis, se basant sur diverses observations d'ordre psychologique et physique, il introduit la mesure du travail A, qu'il appelle unité absolue de travail géométrographique, par opposition à ε, qu'il désigne sous le nom d'unité de mesure des difficultés géométrographiques. Les valeurs A et ε sont liées par la relation : $\varepsilon = 2{,}5$ A.

Jusqu'à quel point l'empirisme l'emporte-t-il dans les considérations relatives aux valeurs ε et A ? C'est une question à laquelle nous ne voulons pas répondre, mais ces deux nombres nous semblent très cherchés et bien factices. Dans tous les cas, ils n'appartiennent plus au domaine de la mathématique pure. L. Crelier (Bienne).

C. de Jans. — **Les multiplicatrices de Clairaut.** Contribution à la théorie d'une famille de courbes planes. — 1 vol. in-8°, IV, 136 p. ; 5 fr. ; A. Hoste, Gand.

Cette contribution à la théorie d'une famille de courbes planes est une monographie des plus intéressantes dans laquelle l'auteur traite les propriétés générales des courbes de la forme :

$$r = k \sin^m \theta ,$$

connues sous le nom de « Courbes de Clairaut du 1er type », pour en déduire ensuite les cas algébriques ainsi que quelques cas plus particuliers.

La classification de ces courbes donne lieu au tableau suivant :

$$\text{Courbes mono- et bisymétriques}\left\{\begin{array}{l} \text{directes}\left\{\begin{array}{l} 1.\ \text{espèce}\ (-\infty < m < -1) \\ 2.\ \text{espèce}\ (-1 < m < 0) \end{array}\right. \\ \text{inverses}\left\{\begin{array}{l} 1.\ \text{espèce}\ (1 < m < \infty) \\ 2.\ \text{espèce}\ (0 < m < 1) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

M. de Jans donne ensuite une construction simple des tangentes, des normales et des rayons de courbure, puis quelques autres propriétés relatives à toute la famille.

Le IVme chapitre est consacré aux cas algébriques. Nous y trouvons l'étude des singularités, du degré, de la classe et du genre des courbes considérées.

Dans le chapitre VI, l'auteur traite plus spécialement le biovale :

$$r = k \sin^2 \theta .$$

En dehors des propriétés analytiques, il développe encore les conchoïdes de cette courbe et indique une génération cinématique de la courbe et ses conchoïdes.

La courbe de Playfair : $r^2 = k^2 \sin\theta$ est étudiée dans le chapitre VII.

L'ovoïde : $r = k \sin^3 \theta$ fait l'objet d'une étude particulière dans le chapitre VIII.

Notons en passant les applications physiques des courbes de Clairaut à la représentation du champ de force d'un point courbe (chap. V), ainsi que les propriétés physiques du biovale (chap. VI, § 5) ; il peut être considéré comme le lieu des points figuratifs des courants qui exercent la même force magnétique sur l'origine.

En résumé, l'auteur qui, pour justifier sa publication, s'est inspiré des belles paroles de Helmholz : « Chaque travailleur a le devoir moral de communiquer aux autres le résultat de ses recherches », a rendu un excellent service à tous les géomètres s'occupant de courbes spéciales. Les résultats qu'il présente sont réellement très intéressants. L. Crelier (Bienne).

G. Loria. — **Le Scienze esatte nell'antica Grecia.** Seconda edizione totalmente riveduta. — 1 vol. in-16 de xxiv-969 p., relié 9 L. 50 ; Ulrico Hoepli, Milan.

Cet ouvrage donne un tableau de l'œuvre mathématique si importante des anciens Grecs. Il permet à ceux qui étudient l'antiquité classique de compléter leur connaissance de la vie et de la culture grecque et il leur montre comme toutes les bases des théories arithmétiques et géométriques actuelles sont contenues en germe dans les travaux du génial peuple hellène.

Le *Livre Premier* (I geometri Greci precursori di Euclide) expose le premier stade de développement de la Géométrie chez les Grecs ; le *Livre Second* (Il periodo aureo della geometria greca) fait connaître les méthodes et les résultats de la brillante période où vécurent Euclide, Archimède, Apollonius et leurs disciples directs.

Le *Livre Troisième* (Il substrato matematico della filosofia naturale dei Greci) est consacré aux recherches mathématiques des savants antiques qui se proposaient de donner une explication satisfaisante des plus remarquables phénomènes naturels. Le lecteur rencontrera dans ce livre l'astronome Ptolémée et le prince de la géodésie : Héron d'Alexandrie.

Dans le *Livre Quatrième* et dernier (Il periodo argenteo della geometria greca) l'auteur retourne à un monde exclusivement géométrique en exposant les quelques progrès dus aux commentateurs des grands auteurs, puis il termine par un tableau des différents aspects sous lesquels les Grecs envisagèrent la Science des nombres et des résultats auxquels ils surent parvenir dans ce champ particulièrement fertile.

La première édition parut de 1893 à 1902 dans différents volumes des mémoires de l'Académie de Modène et attira aussitôt l'attention des spécialistes ; c'est pour répondre à de nombreuses demandes que l'auteur et l'éditeur se sont décidés à publier cette œuvre en un volume, après l'avoir soumise à une revision rendue indispensable par la découverte récente de documents importants.

Ceux qui cherchent à connaître ce que nous savons de l'histoire des mathématiques grecques consulteront avec intérêt et profit l'ouvrage du prof. G. Loria. La littérature mathématique ne possède pas d'œuvre analogue conçue sur un plan plus vaste. Eug. Chatelain (La Chaux-de-Fonds).

O. Staude. — **Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte.** — 1 vol. in-8°, 242 p. avec 58 fig.; broché, 9 M.; relié, 10 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

En entreprenant cette *étude analytique des cubiques gauches*, M. Staude, professeur à l'Université de Rostock, a fait une œuvre utile dont lui sauront gré tous ceux qui s'intéressent à la Géométrie. Son ouvrage comble une lacune, car il n'existait pas de monographie récente sur ce sujet.

L'auteur s'appuie sur les méthodes de la géométrie analytique en supposant seulement connues les notions fondamentales[1] sur les différents systèmes de coordonnées et quelques théorèmes sur les quadriques.

Dans une première partie il étudie les cubiques gauches à l'aide des coordonnées rectilignes. Il considère d'abord les cubiques obtenues par l'intersection d'un cône et d'un cylindre, tous deux du 2e ordre, et ayant une génératrice commune. Le sommet du cône est pris à l'origine et la génératrice commune coïncide avec l'axe OX. Les équations se simplifient lorsqu'on suppose qu'en outre le plan XOY est tangent au cône. La discussion conduit aux quatre types de cubiques qu'il désigne comme suit : I, l'ellipse cubique ; II, l'hyperbole cubique ; III, la parabole cubique hyperbolique ; IV, la parabole cubique.

Examinant ensuite les cubiques gauches en partant de leurs équations paramétriques, l'auteur montre qu'elles sont identiques avec celles des types obtenus dans le premier chapitre. Puis viennent les plans osculateurs, les cordes, les tangentes, etc. d'une cubique, et les quadriques de révolution passant par la courbe. La première partie se termine par l'étude approfondie des différents types de cubiques.

Dans la seconde partie M. Staude envisage les éléments de la courbe en coordonnées tétraédriques, le tétraèdre de référence étant celui qui est formé par le tétraèdre osculateur. Cette méthode permet d'exposer avec beaucoup de simplicité la génération projective des cubiques.

Comme les précédents ouvrages de M. Staude, celui-ci est rédigé avec une grande clarté d'exposition. Il constitue une importante contribution à la géométrie des cubiques gauches. Les figures, au nombre de 58, sont dessinées avec beaucoup de soin.

H. Fehr.

M. Tikhomandritzki. — **Eléments de la théorie des intégrales abéliennes.** Nouvelle édition revue, corrigée, complétée de notes et en partie refaite entièrement. — 1 vol. gr. in-8°, de xv-286 p., avec une planche ; 14 fr. En vente à la librairie Eggers et Cie, Moïka, 42, Saint-Pétersbourg (Russie).

Le volume de M. Tikhomandritzky est un livre qui, grâce au nom de son auteur, se recommande de lui-même. Sa lecture ne peut être que profitable à tous ceux qui, désireux d'approfondir les propriétés des fonctions algébriques et de leurs intégrales, tiennent à le faire d'après un exposé succinct et condensé. Un grand nombre de déductions sont originales en ce sens qu'elles ne se trouvent que dans des mémoires de l'auteur, publiés en langue russe et, à cause de cela, d'un accès difficile. L'ouvrage ne fait pas davantage double emploi avec les grands traités qui ont paru sur la matière.

[1] On doit précisément à M. Staude deux excellents ouvrages consacrés aux éléments de géométrie analytique intitulés : *Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene* (Leipzig 1905), et *Analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche 2. Ordnung* (Leipzig 1910, B. G. Teubner).

Pour s'en rendre compte, il suffit de lire l'article inséré récemment dans ce journal [1] et dans lequel M. Tikhomandritzky indique lui-même en quoi son volume diffère de tous ceux qui ont été publiés jusqu'ici sur le même sujet.

Voici, d'après la table des matières, le contenu du livre :

Chap. I. Propriétés d'une fonction implicite définie par une équation algébrique irréductible.

II. Sur les fonctions rationnelles de la variable indépendante x et de sa fonction implicite y définie par une équation algébrique irréductible.

III. Réduction des intégrales abéliennes aux intégrales des trois espèces ; les propriétés caractéristiques des intégrales de chaque espèce.

IV. Fonctions primaires. Relations entre les périodes des intégrales.

V. Expression d'une fonction rationnelle de x et y, uniforme sur la surface de Riemann, par les fonctions primaires. Théorème d'Abel.

VI. Le problème de Jacobi. — VII. Les fonctions thêta.

L'ouvrage se termine par une planche relative aux surfaces de Riemann.

L'intérêt que présente le livre de M. Tikhomandritzki est donc considérable. On peut être assuré qu'il sera beaucoup lu et beaucoup étudié. Seule l'imperfection de la langue risquerait de rebuter un peu, si les résultats mis par le savant russe à la portée de tous ne rendaient bien vite le lecteur indulgent. Les fautes grammaticales et de style sont nombreuses, mais il sera facile de les faire disparaître dans une autre édition.

Gustave Dumas (Lausanne).

V. Volterra. — **Leçons sur les fonctions de lignes**, professées à la Sorbonne en 1912, recueillies et rédigées par J. Pérès. — 1 vol. in-8° de VI-230 p. et 7 figures ; 7 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Ce volume fait suite aux *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles* déjà publiés par M. Volterra dans la collection de monographies de M. Borel, et analysées par l'*Enseignement mathématique* (t. XV, 1913, p. 447).

Ce nouvel exposé atteint à une simplicité et à une profondeur telles qu'il en est presque déconcertant. On peut croire que les chapitres scientifiques dont il s'agit ne sont nés que tout récemment, parmi les conceptions de géomètres comme MM. Hadamard, Fredholm ou Volterra lui-même ; peut-être accorderait-on aussi qu'on en trouve différents germes chez un Poincaré. Croire cela serait faire montre d'un esprit peu philosophique et c'est en Archimède que M. Volterra voit le proto-créateur des méthodes infinitésimales, en allant jusqu'à comprendre dans celles-ci tout ce qui se rapporte à l'idée moderne de fonctionnalité et de variation continue. En une vingtaine de pages préliminaires, nous voyons, en effet, comment les développements modernes des méthodes infinitésimales se placent avec une admirable continuité à la suite des méthodes primitives mais déjà infinitésimales du célèbre géomètre de Syracuse.

Les fonctions de lignes n'apparaissent pas seulement d'une manière immédiate sous forme de quantités variables, de par la variation d'une courbe $y = f(x)$; elles se rattachent aussi à de certaines quantités attachées elles-mêmes à des équations différentielles où $f(x)$ peut être un coefficient transformable. On peut leur rattacher encore les substitutions où les coef-

[1] *Sur l'enseignement de la théorie des intégrales abéliennes. Enseignement mathématique*, t. XV, année 1913, p. 384.

ficients varient de manière continue. D'autre part la résolution des équations intégrales correspond à la théorie élémentaire des fonctions implicites. D'une manière tout à fait générale, M. Volterra fait ressortir qu'il n'y a pas de chapitre d'algèbre qui ne donne un chapitre de la nouvelle science quand le nombre des variables passe du fini à l'infini. Et il le fait avec une élégance telle qu'on est tout étonné de retrouver, en effet, le caractère algébrique des raisonnements, mais non le caractère sec et aride qui paraît souvent propre à l'algèbre et détourne de cette science beaucoup d'excellents mathématiciens.

De même, dans ces dernières années, les jeunes géomètres qui devaient absolument se mettre au courant des équations intégrales ont pu hésiter sur le point de vue à adopter. M. Volterra semblait plus général mais, si M. Fredholm était plus particulier, il était peut être plus simple et, par suite, il pouvait sembler plus commode de commencer par ce dernier. Or, en toute impartialité, il me semble bien que tous les avantages sont du côté de M. Volterra ; on passera très facilement de ses équations intégrales à celles de M. Fredholm. L'inverse est possible, mais certainement moins simple.

Je ne puis indiquer ici tous les beaux problèmes que traite le célèbre géomètre italien ; il les emprunte particulièrement aux phénomènes *héréditaires* qui dépendent non d'un seul instant passé mais d'une infinité d'instants formant un passé continu. Ce ne sont point des phénomènes construits pour illustrer une théorie ; leur réalité physique est indéniable et continuellement rappelée. Ils peuvent donner lieu, dans le temps, à des controverses philosophiques analogues à celles soulevées, dans l'espace, par les actions à distances. Le corps qui dépend d'un temps passé est comparable à celui qui dépend d'une région éloignée de l'espace. Ces quelques lignes suffiront à montrer le prodigieux intérêt que l'ouvrage aura certainement pour les géomètres, les physiciens et les philosophes. A. Buhl (Toulouse).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Annali di Matematica. Série III, tome XXI. Alla memoria di Lagrange nel centenario della sua Morte. — E. J. Wilczynski : Ricerche geometriche intorno al problema dei tre corpi. — H. Hahn : Ueber die Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat. — P. Kœbe : Das Uniformisierungstheorem und seine Bedeutung für Funktionentheorie und nichteuklidische Geometrie. — M. W. Stekloff : Sur une formule générale d'analyse et ses diverses applications. — A. R. Forsyth : The range of minimal surfaces providing a minimum area. — S. Pincherle : Sull'operazione aggiunta di Lagrange. — M. C. Carathéodory : Sur les points singuliers du problème du Calcul des Variations dans le plan. — E. E. Levi : Sui criterii sufficienti per il massimo e per il minimo nel Calcolo delle Variazioni. — F. Schur : Ueber die berührenden Strahlennetze einer Strahlenkongruenz. — E. Borel : Sur la théorie des résonateurs et la discontinuité des solutions de certains systèmes différentiels. — C. Stéphanos : Sur une propriété caractéristique des déterminants. — H. Lamb : On Some Cases of Wave-Motion on Deep Water. —

J. Hadamard : La construction de Weierstrass et l'existence de l'extremum dans le problème isopérimétrique. — E. Bortolotti : Espressioni indeterminate. — G. Lauricella : Sopra l'algebra delle funzioni permutabili di 2a specie.

Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von E. Jahnke. — Verlag B. G. Teubner, Leipzig. — Band 21. — E. Hahn : Grundlagen zu einer Theorie der Lorentztransformationen. — E. Landau : Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe. — R. Sturm : Gleichseitige Polardreiecke bei einer Ellipse. — C. Grötzsch : Zu meinem Kriterium für bedingte Konvergenz unendlicher Reihen. — R. Sturm : Minima bei projektiven Gebilden. — R. Sturm : Die Basen, in Bezug auf welche zwei Kreise oder zwei Kugeln zueinander polar sind. — R. Weitzenböck : Ueber eine Erweiterung des Determinantenbegriffes. — K. Schwering : Ganzzahlige Dreiecke mit Winkelbeziehungen. — E. Wætzmann : Neuere Untersuchungen zur Resonanztheorie des Hörens. — H. Kapferer : Beweis des Fermatschen Satzes für die Exponenten 6 und 10. — E. Study : Die Begriffe Links, Rechts, Windungssinn und Drehungssinn. — C. Jordan et R. Fiedler : Courbes Orbiformes. — S. Schicht : Ueber die mittlere Entfernung eines Punktes von einem Punktsysteme und die mittlere Entfernung zweier Punktsysteme voneinander. — F. G. Teixeira : Sur une intégrale définie. — E. Landau : Abschätzung der Koeffizientensumme einer Potenzreihe — R. Mehmke : Ueber die Bestimmung des Inhalts eines durch zwei Projektionen gegebenen Tetraeders und über die entsprechende Aufgabe in höheren Räumen. — W. H. Salmon : On a family of cubic surfaces of the tetrahedron analogous to the Tucker Circles of a Triangle. — L. Klug : Einige Sätze über Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung. — A. Dinnik : Tafeln der Besselschen Funktionen $J_{\pm\frac{1}{4}}$ und $J_{\pm\frac{3}{4}}$. — H. Bohr : Darstellung der gleichmässigen Konvergenzabzisse einer Dirichletschen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ als Funktion der Koeffizienten der Reihe.

2. Livres nouveaux :

Bardey-Lietzmann-Zuhlke. — **Aufgabensammlung** für Arithmetik, Algebra u. Analysis. *Reformausgabe A :* für Gymnasien. II. Teil : Oberstufe. 1 vol. cart. in-8o, 170 p., 21 fig. ; 2 M. 20. — *Reformausgabe B :* für Realanstalten. I. Teil : Unterstufe, 1 vol. cart. 220 p., 33 fig. et 2 planches ; 2 M. ; II. Teil : Oberstufe, 1 vol. 230 p., 23 fig. ; 2 M. 40 : B. G. Teubner, Leipzig.

W. G. Borchardt and A. D. Perrott. — **A first numerical Trigonometry.** — 1 vol. in-8o, xi-159-xxxiv p. ; 2 s. 6 d. ; G. Bell & Sons, Londres.

G. Darboux. — **Leçons sur la théorie générale des surfaces** et les applications géométriques du calcul infinitésimal. — 1re partie : Généralités, Coordonnées curvilignes, Surfaces minima. 2me édition, revue et augmentée. — 1 vol. gr. in-8o, vii-618 p. ; 20 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

A. Denizot. — **Das Foucaultsche Pendel und die Theorie der relativen Bewegung.** — 1 fasc. in-8o, 76 p. ; 3 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Pierre Duhem. — **Le Système du Monde.** Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic. Tome I. — 1 vol. gr. in-8o, 512 p., 18 fr. 50 ; librairie Hermann & fils, Paris.

P. Furtwængler und G. Ruhm. — **Die mathematische Ausbildung der**

deutschen Landmesser (Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, Band IV, Heft 8). — 1 fasc. in-8°, vi-50 p.; 1,60 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

Ch.-Ed. Guillaume. — **Les récents progrès du système métrique.** Rapport présenté à la cinquième Conférence générale des poids et mesures réunie à Paris en octobre 1913. — 1 vol. in-4°, 118 p.; Gauthier-Villars, Paris.

W. Leick. — **Leitfaden der Mathematik** für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. — 1 vol. in-8°, vi-171 p.; 2,60 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Lutz. — **Analytische Geometrie der Ebene.** Elementares Lehrbuch für höhere Lehranstalten. — 1 vol. in-8°; x-301 p.; 6 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

P. Maennchen. — **Geheimnisse der Rechenkünstler.** (Mathematische Bibliothek, N° 13). — 1 vol. in-16, 48 p.; 0,80 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Marchand. — **Sur les théorèmes de Sylvester et la règle de Newton** dans la théorie des équations algébriques à coefficients réels. — (Thèse, Ecole polytechnique, Zurich). — 1 fasc. in-16, 75 p.; Wolfrath et Sperlé, Neuchâtel.

P.-L. Monteil (Lt-Colonel). — **Théorie du point.** Géométrie curviligne II. Courbes dérivées de la circonférence. — 1 vol. in-8°, 124 p., 49 p.; Dunod & Pinat, Paris.

M. Pasch. — **Veränderliche und Funktion.** — 1 vol. in-8°, 186 p.; 6 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

F. Rudio. — **Die Elemente der analytischen Geometrie,** zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. II.: *Die analytische Geometrie des Raumes.* — 5me édition. 1 vol. in-8°, x-194 p.; 3 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

Fort und Schlömilch. — **Lehrbuch der analytischen Geometrie.** — II. *Analytische Geometrie des Raumes.* Siebente Auflage bearbeitet von R. Heger. — 1 vol. in-8°, viii-326 p.; relié 6,80 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

S. Schott. — **Statistik.** (Aus Natur und Geisteswelt, N° 442.) — 1 vol. in-8°, 130 p.; 1,25 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

A. W. Stamper. — **A Textbook on the Teaching of Arithmetic.** — 1 vol. in-8°, 284 p.; 1 doll.; American Book Company, New-York.

H. Vogt. — **Solutions des exercices proposés dans les éléments de mathématiques supérieures.** — 1 vol. in-8°, 277 p.; 6 fr.; Vuibert, Paris.

A. Witting und M. Gebhardt. — **Beispiele zur Geschichte der Mathematik.** Ein mathematisch-historisches Lesebuch. II. Teil. (Mathematische Bibliothek, N° XV). — 1 vol. in-8°, vi-61 p.; 0,80 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

L. Zoretti. — **Leçons de mathématiques générales,** avec une préface de P. Appell. — 1 vol. in-8°, xvi-753 p.; 20 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française dirigée par J. Molk. — *Tome II,* vol. 6: *Calcul des variations.* Compléments; fasc. 1; Calcul des variations; exposé, d'après les articles allemands de A. Kneser, E. Zermelo, et H. Hahn, par M. Lecat. — B. G. Teubner, Leipzig, et Gauthier-Villars, Paris.

Revue semestrielle des publications mathématiques. — Tables des matières contenues dans les cinq volumes xvi-xx (1908-1913), suivies d'une table générale par noms d'auteurs. — 1 vol. in-8°, 172 p.; 6 fr. 50; Delsman en Nolthenius, Amsterdam.

L'INTÉGRALE DE STIELTJES ET SA GÉNÉRALISATION

I. — Primitivement restreint à la classe des fonctions continues, le champ des fonctions intégrables a été successivement étendu de manière à embrasser non seulement toutes les fonctions bornées — c'est-à-dire toutes les fonctions dont les valeurs restent comprises entre deux nombres finis appelés les bornes supérieure et inférieure de la fonction — mais encore une classe étendue de fonctions non bornées. Cette extension a eu comme conséquence un progrès notable des mathématiques.

Or, Stieltjes a généralisé la notion d'intégrale en remplaçant la variable indépendante x par une fonction monotone $g(x)$ non décroissante. Bien qu'il n'ait appliqué sa généralisation de l'intégrale que dans le champ primitif restreint des fonctions continues et qu'il n'ait guère envisagé son extension et son emploi dans le champ des fonctions intégrables au sens de Riemann, les conséquences qu'il en tire ont une importance comparable à celles qui résultent de l'application de la définition ordinaire de l'intégrale d'une fonction continue. Aussi, tout mathématicien versé dans la théorie moderne de l'intégration et qui a éprouvé dans ses recherches la liberté d'action que le vaste champ des fonctions bornées lui permet, ne tarde pas à se demander si dans l'emploi de l'intégrale de Stieltjes il ne peut pas aussi dépasser les limites du champ primitif.

Lebesgue a éprouvé ce désir. En 1909, il publie dans les Comptes Rendus une Note, où il démontre, par un artifice très élégant dépendant d'un changement de variable de nature en quelque sorte géométrique, que la notion de l'intégrale de Stieltjes peut être ramenée à celle de l'intégrale d'une fonction bornée. Il établit, en effet, que si $f(x)$ est une fonction continue et $g(x)$ une fonction monotone non décroissante, on peut par un changement de variable $x=x(y)$, écrire

$$\int f(x)\,dg(x) = \int f(x(y))\,\theta(y)\,dy = \int \varphi(y)\,dy$$

$\theta(y)$ et par suite $\varphi(y)$ étant bornées. Il tire de son raisonnement la conséquence que l'on peut — je cite les derniers mots de sa note — « se permettre le prolongement de l'opération de l'intégration de Stieltjes, supposée connue pour les fonctions continues, à tout le champ des fonctions sommables bornées. On définit en somme l'intégrale de Stieltjes pour f sommable bornée et g à variation bornée, ce qu'il paraît difficile de faire sans changement de variable. » Le raisonnement de Lebesgue est d'une finesse remarquable mais d'une application difficile dans les cas qui surviennent dans la pratique. Il suppose d'ailleurs déjà surmontées les difficultés de la théorie de l'intégration moderne. Remarquons enfin que Lebesgue n'a pas utilisé sa définition de l'intégrale d'une fonction bornée par rapport à une fonction à variation bornée.

Je me propose de donner dans ce qui suit les traits les plus saillants d'une nouvelle théorie de l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée. Cette théorie n'exige ni la connaissance de la théorie des ensembles ni celle des intégrales de Riemann ou de Lebesgue. Je signalerai quelques résultats frappants de cette théorie et quelques applications nouvelles à la théorie des séries de Fourier. Le lecteur pourra trouver les détails de la théorie et les démonstrations dans différents mémoires présentés à la Société royale de Londres et à la London Math. Society [1].

2. — Le rôle que jouent les suites monotones de fonctions

---

[1] « On Integration with Respect to a Function of Bounded Variation ». *Proc. L. M. S.*, Série 2, Vol 13, p. 109.

« On the Usual Convergence of a Class of Trigonometrical Series », *Ibid.*, pp. 13-28.

« On Fourier Series and Functions of Bounded Variation », *Roy. Soc. Proc.*, A. Vol. 88, pp. 561-568.

« On the Condition that a Trigonometrical Series should have a Certain Form », *Ibid.*, pp. 569-574.

est fondamental dans ma théorie de l'intégration. Soit

$$f_1(x) \leqq f_2(x) \leqq \dots \leqq f_n(x) \leqq \dots \longrightarrow f(x)$$

une suite monotone non décroissante, ou

$$f_1(x) \geqq f_2(x) \geqq \dots \geqq f_n(x) \geqq \dots \longrightarrow f(x)$$

une suite monotone non croissante, bornée dans son ensemble, c'est-à-dire telle que pour toute valeur de n et de x,

$$A \leqq f_n(x) \leqq B$$

A et B étant des constantes finies. La fonction limite $f(x)$ de cette suite sera également bornée,

$$A \leqq f(x) \leqq B$$

et son caractère dépendra de celui des fonctions $f_n(x)$. C'est par l'intermédiaire de telles suites monotones que nous répartirons les fonctions bornées en classes jouant un rôle important pour l'intégration.

Supposons, en effet, connue une théorie de l'intégration par rapport à $g(x)$ d'une certaine classe de fonctions. On étendra alors le champ d'intégration au moyen du principe suivant :

On dira qu'une fonction f(x) *possède une intégrale* $\int$f(x)dg(x) *par rapport à une fonction positive non décroissante* g(x), *si elle peut s'exprimer comme limite (finie ou infinie avec signe déterminé) d'une suite monotone de fonctions* f_1, f_2,..., *dont les intégrales par rapport à* g(x) *sont déjà définies, pourvu que la limite des intégrales de toute suite ayant ces propriétés soit la même et ait une valeur finie. Cette limite s'appelle l'intégrale de* f(x) *par rapport à* g(x).

Etudions d'abord de ce point de vue l'intégration ordinaire par rapport à x. La classe la plus simple de fonctions dans une intervalle (a, b) est formée par les fonctions qui sont constantes à l'intérieur (au sens étroit) de chaque intervalle partiel (x_i, x_{i+1}) d'une division de (a, b) en un nombre fini d'intervalles et qui, aux extrémités de ces intervalles partiels ont des valeurs quelconques. L'intégrale d'une fonction *simple*, c'est-à-dire d'une fonction de cette classe, par rapport à la variable indépendante x est naturellement la somme $\sum c_i l_i$ d'un nombre fini de termes relatifs à chacun des intervalles partiels, c_i désignant la valeur constante de la fonction à l'intérieur de l'intervalle (x_i, x_{i+1}) et l_i la longueur $x_{i+1}-x_i$ de cet intervalle.

Désignons pour abréger une fonction semi-continue supérieurement ou inférieurement au sens de Baire par les lettres u ou l, abréviations pour *upper* ou *lower* semi-continuous functions. On établit facilement que toute fonction u est la limite d'une suite non croissante et toute fonction l la limite d'une suite non décroissante de fonctions *simples*. De plus, la limite d'une suite non croissante de fonctions u est encore une fonction u, celle d'une suite non décroissante de fonctions l est encore une fonction l. Par contre, la limite d'une suite non décroissante de fonctions u est en général une fonction appartenant à une nouvelle classe que nous désignerons par lu et la limite d'une suite non croissante de fonctions l une fonction appartenant à une nouvelle classe que nous désignerons par ul. Si nous considérons de même des suites monotones de fonctions lu et ul, nous retrouverons soit ces deux classes soit deux nouvelles classes lul et ulu de fonctions. En continuant ainsi nous obtenons une série illimitée de classes

$$u,\ l,\ ul,\ lu,\ ulu,\ lul,\ ulul,\ lulu,\ \ldots$$

de fonctions. Enfin, la considération de suites monotones de fonctions de classes différentes nous conduira à de nouvelles classes non exprimables par les symboles précédents, etc. Toute fonction bornée représentable analytiquement rentre dans une des classes de fonctions ainsi caractérisées. Le problème de l'intégration sera résolu si, à partir de la définition de l'intégrale des fonctions *simples*, nous pouvons, au moyen du principe général énoncé plus haut, attribuer une intégrale d'abord aux fonctions bornées des classes u, l puis des classes ul, lu, ulu, lul, ... etc. Mais, fait intéressant et capital, grâce à un théorème que nous indiquerons plus loin, nous verrons qu'il n'est pas nécessaire d'étudier séparément au point de vue de l'intégration toutes ces classes de fonctions et qu'il suffit de savoir intégrer les fonctions *ul* et les fonctions *lu* pour pouvoir affirmer l'intégrabilité de toute fonction bornée représentable analytiquement.

3. — La théorie de l'intégration par rapport à une fonction monotone $g(x)$ se développe de la même manière. Considérons d'abord une fonction *simple* $f(x)$ et soit (x_i, x_{i+1}) un des intervalles partiels à l'intérieur duquel la fonction $f(x)$ a une valeur constante $f(x_i + 0) = f(x_{i+1} - 0)$. Nous aurons à tenir compte ici des valeurs de $f(x)$ aux extrémités de l'intervalle (x_i, x_{i+1}) et nous définirons

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dg(x) = f(x_i)[g(x_i+0) - g(x_i)] + f(x_i+0)[g(x_{i+1}-0) - g(x_i+0)] + f(x_{i+1})[g(x_{i+1}+0) - g(x_{i+1})] \cdot$$

Lorsque $g(x)$ est continue aux points x_i, x_{i+1} les termes correspondants à ces points s'annulent. En particulier, si $g(x) = x$, nous retombons sur la définition de l'intégrale ordinaire d'une constante. L'intégrale de la fonction *simple* $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) sera, par définition, la somme des intégrales étendues aux intervalles partiels (x_i, x_{i+1}).

On étendra ensuite aux fonctions bornées de classes *l*, *u*, *lu* et *ul* la notion d'intégration par rapport à $g(x)$. Il suffira pour cela de montrer l'existence et l'unicité de la limite des intégrales de suites monotones bornées ayant une limite donnée, lorsque les termes de la suite et sa limite appartiennent aux classes *l*, *u*, *lu* ou *ul*. On étendra ensuite la notion d'intégrale par rapport à $g(x)$ à toute fonction bornée représentable analytiquement en démontrant le théorème suivant :

Etant donnée une fonction f(x) *bornée et représentable analytiquement, on peut trouver une fonction* lu *qui ne dépasse pas* f(x) *et une fonction* ul *qui n'est pas moindre que* f(x), *ces deux fonctions auxiliaires ayant la même intégrale par rapport à une fonction non décroissante* g(x) *donnée.*

Il résulte de ce théorème que la fonction bornée $f(x)$ a une intégrale par rapport à $g(x)$ et que la valeur de cette intégrale est égale à la valeur commune des intégrales des deux fonctions auxiliaires lu et ul.

Après avoir développé la théorie de l'intégration des fonctions bornées par rapport à une fonction non décroissante $g(x)$, nous pouvons aborder l'intégration des fonctions non bornées. Les mêmes raisonnements sont encore applicables; ils exigent simplement plus de soin et il est nécessaire d'introduire quelquefois l'hypothèse que les limites obtenues sont finies: cette hypothèse était superflue lorsque toutes les suites considérées étaient bornées. On arrive de cette façon à définir la classe des fonctions sommables par rapport à $g(x)$, c'est-à-dire des fonctions bornées ou non possédant une intégrale par rapport à $g(x)$. Cette classe comprend, comme nous l'avons déjà dit, toutes les fonctions bornées exprimables analytiquement; elle comprend encore toutes les fonctions dont le module $|f(x)|$ est lui-même sommable par rapport à $g(x)$.

L'extension à l'intégration par rapport à une fonction $g(x)$ à variation bornée est ensuite immédiat. Si l'on représente $g(x)$ comme différence $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ de deux fonctions positives non décroissantes, on définira

$$\int f(x)\,dg(x) = \int f(x)\,dg_1(x) - \int f(x)\,dg_2(x)$$

en montrant que le second membre est indépendant du mode de décomposition de $g(x)$.

4. — Voici une application de la théorie précédente. Considérons une série de Fourier quelconque

$$(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots \tag{1}$$

J'ai démontré, il y a quelques années, que si

$$A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots \tag{2}$$

est la série de Fourier d'une fonction paire, la série trigonométrique

$$A_1(a_1 \cos x + b_1 \sin x) + A_2(a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots \tag{3}$$

est encore une série de Fourier. La théorie de l'intégrale généralisée de Stieltjes me permet de montrer que ce résultat reste encore vrai, si l'on suppose seulement que la série (2) est la série obtenue par dérivation terme à terme de la série de Fourier

$$A_1 \sin x + \frac{1}{2} A_2 \sin 2x + \dots$$

d'une fonction impaire à variation bornée. J'ai réussi, de plus, à montrer que la sommabilité de la fonction $g(x)$ représentée par (3) est au moins celle de la fonction $f(x)$ représentée par (1). Si, par exemple, $f(x)^2$ ou $f(x) \log x$ est sommable, on peut affirmer que $g(x)^2$ ou $g(x) \log x$ l'est aussi. En particulier, lorsque les séries (1) et (2) sont les séries de Fourier de deux fonctions dont la $p^{\text{ième}}$ et la $q^{\text{ième}}$ puissance respectivement sont sommables, la fonction représentée par (3) a sa $r^{\text{ième}}$ puissance sommable, où $r = \frac{(1+p)(1+q)}{1-pq}$.

On pourrait aussi établir un théorème du même genre en remplaçant la série de Fourier (1) par sa série alliée

$$(a_1 \cos x - b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x - b_2 \sin 2x) + \dots$$

5. — La théorie des séries trigonométriques a fait de grands progrès depuis le commencement du XX^e siècle. La généralisation de la notion d'intégrale a permis à Lebesgue d'étendre la théorie des séries de Fourier et de supprimer nombre de restrictions ennuyeuses. Sans cette généralisation ces progrès n'étaient pas possibles, car Riemann avait conduit les mathématiciens dans un cul-de-sac par sa théorie de l'intégration et la théorie des séries de Fourier risquait à la fin du XIX^e siècle de devenir une collection de curiosités.

Qu'est-ce donc qu'une série de Fourier? La réponse de Lebesgue est formellement la même que celle de Riemann : c'est une série trigonométrique

$$\frac{1}{2} a_0 + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x) + \dots$$

dont les coefficients a_n, b_n peuvent s'exprimer au moyen d'une fonction $f(x)$ par les formules

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\,.$$

Si maintenant nous nous demandons à quelles conditions on reconnaît si une série trigonométrique est une série de Fourier, on peut répondre, quand on prend les intégrales au sens moderne, qu'il est nécessaire et suffisant pour cela que la série intégrée (terme à terme)

$$(a_1 \sin x - b_1 \cos x) + \frac{1}{2}(a_2 \sin 2x - b_2 \cos 2x) + \ldots$$

converge pour tout point x de l'intervalle $-\pi \leq x \leq \pi$ vers une intégrale. On ne pourrait pas donner cette réponse, si l'on prenait les intégrales au sens de Riemann, car la série intégrée d'une série de Fourier au sens de Riemann ne converge pas nécessairement vers une intégrale au sens de Riemann.

Les nouvelles séries trigonométriques, séries dérivées (terme à terme) des séries de Fourier des fonctions à variation bornées, que j'ai introduites dans le rang des séries maniables, ont des propriétés qui les rapprochent beaucoup des séries de Fourier; elles s'obtiennent par les mêmes méthodes en employant l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée au lieu de l'intégration par rapport à x. Ainsi, leurs coefficients s'expriment par des intégrales de Stieltjes

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dF(x)\,. \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,.\,dF(x)\,.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série trigonométrique soit la série dérivée de la série de Fourier d'une fonction à variation bornée est analogue à celle que nous avons indiqué plus haut pour les séries de Fourier : la série intégrée terme à terme doit converger vers une fonction à variation bornée. L'emploi pratique de cette condition est assez restreint. Il n'est pas facile de reconnaître si une série trigonométrique donnée converge vers une fonction à variation bornée ou même vers une intégrale. Aussi, avais-je déjà indiqué pour les séries de Fourier de fonctions $f(x)$, telles que $|f(x)|^{1+p}$ soit sommable, comme condition nécessaire et suffisante que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x)|^{1+p}\, dx$$

soit une fonction bornée de n, $f_n(x)$ désignant la $n^{\text{ième}}$ moyenne de Cesàro

$$f_n(x) = \frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \dots + s_n) \qquad s_n = \sum_{i=1}^{n} (a^i \cos ix + b_i \sin ix) .$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une série trigonométrique soit la série dérivée de la série de Fourier d'une fonction à variation bornée est que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x)|\, dx$$

soit une fonction bornée de n. Cette condition est d'autant plus intéressante qu'elle jette une vive lumière sur la nature des fonctions sommables et qu'elle amène à se demander si pour toute fonction sommable il n'existe pas une fonction d'ordre supérieur, soit une puissance, soit une autre fonction simple qui soit elle-même encore sommable. Envisagé à un autre point de vue, ce résultat nous donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série trigonométrique soit la série de Fourier d'une fonction à variation bornée.

6. — Signalons encore une des nombreuses propriétés communes aux séries de Fourier et aux séries dérivées des séries de Fourier des fonctions à variation bornée.

Une série dont les premières moyennes de Cesàro convergent vers une limite finie et déterminée est dite converger (C1). Si les termes de la série sont des fonctions de x, la convergence peut avoir lieu partout, ou seulement en certains points x. Si les points où la convergence n'a pas lieu sont parsemés dans le continu de manière à pouvoir être tous enfermés dans un nombre fini ou infini d'intervalles dont la somme des longueurs est aussi petite que l'on veut, la série est dite converger (C1) *presque partout*. Or Lebesgue a démontré, il y a environ dix ans, que les séries de Fourier convergent (C1) presque partout. En introduisant les moyennes de Cesàro d'ordre δ, on a généralisé le résultat de Lebesgue et démontré que la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ converge Cδ presque partout vers $f(x)$, lorsque $o < \delta \leq 1$. J'ai démontré d'une manière analogue qu'une série trigonométrique qui est la série dérivée de la série de Fourier d'une fonction à variation bornée F(x) converge aussi (Cδ) presque partout vers $F'(x)$, lorsque $o < \delta \leq 1$.

La méthode de sommation par les moyennes de Cesàro est un cas spécial des méthodes de transformation d'une série en série convergente par multiplication de chaque terme de la série par une constante (facteur de convergence) convenable. Les recherches que j'ai faites sur ce sujet, recherches auxquelles M. G. H. Hardy a ajouté la démonstration élégante d'un point que je n'avais que prévu, m'ont conduit au théorème suivant :

Si $\sum_1^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ *est la série dérivée de la série de Fourier d'une fonction* F(x) *à variation bornée, la série* $\sum_2^\infty \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{\log n}$ *est une série de Fourier convergente presque partout. Sa somme est*

$$C \int_{-\pi}^{\pi} [F(x+t) - F(x-t)]\, dg(t)$$

où C *est une constante et* g(t) *la fonction à variation bornée dont la série de Fourier est* $\sum_2^\infty \frac{\cos nx}{\log n}$.

7. — Je termine en indiquant un exemple de la simplification que peut apporter l'emploi de l'intégrale généralisée

de Stieltjes dans la démonstration de théorèmes déjà connus. Je prendrai pour cela le théorème suivant :

Si $F_n(x) = \int f_n(x)\,dx$ *est une fonction bornée de* n, *qui converge vers une intégrale* $F(x) = \int f(x)\,dx$, *et si* $g(x)$ *est une fonction à variation bornée, on aura*

$$\lim_{n=\infty} \int f_n(x)\,g(x)\,dx = \int f(x)\,g(x)\,dx .$$

En effet, de même que dans la théorie de l'intégration par rapport à x, il est permis dans notre théorie d'intégrer terme à terme une suite bornée. On aura donc

$$\lim_{n=\infty} \int F_n(x)\,dg(x) = \int F(x)\,dg(x) .$$

Or, $F(x)$ et $F_n(x)$ étant des fonctions continues, on peut intégrer par parties, ce qui donne

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \Big[g(x)\,F_n(x)\Big]_a^x - \int_a^x g(x)\,dF_n(x) \right\} = \Big[F(x)\,g(x)\Big]_a^x - \int_a^x g(x)\,dF(x) .$$

Les premiers termes des deux membres de cette relation sont égaux et les seconds sont des intégrales par rapport à des intégrales; par conséquent, comme on le voit facilement, on peut exprimer les seconds termes par des intégrales de Lebesgue, par exemple

$$\int_a^x g(x)\,dF(x) = \int_a^x g(x)\,f(x)\,dx .$$

Par suite, l'égalité des seconds termes des deux membres donne le théorème cherché.

Cette démonstration si brève n'emploie que des théorèmes fondamentaux, bien connus pour l'intégration ordinaire. Tout mathématicien peut donc en suivre le raisonnement : il lui suffit d'accepter ces théorèmes fondamentaux. La première démonstration que j'ai donnée de ce théorème remplit au contraire plusieurs pages : elle est délicate, elle utilise le changement de variable à la façon de Lebesgue et nécessite pour sa compréhension des connaissances étendues et une attention soutenue.

J'espère en avoir assez dit pour convaincre de la simplicité et de l'intérêt de la théorie de l'intégration par rapport à une fonction à variation bornée.

W. H. Young (Genève).

LE BICENTENAIRE DE LA LOI DES GRANDS NOMBRES

Le 1/14 décembre 1914, l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg a consacré une séance solennelle à la célébration du bicentenaire de la publication à Bâle, en 1713, de l'œuvre posthume de Jacques Bernoulli : *Ars conjectandi.* On sait que la quatrième partie de cet ouvrage contient l'énoncé et la démonstration du célèbre théorème de Jacques Bernoulli, le plus simple cas d'un ensemble de théorèmes qui constitue *la loi des grands nombres.*

La séance fut suivie par un nombreux public ; elle comprenait trois discours. Tout d'abord M. le Prof. A. Vassilief parla *des questions de la théorie des probabilités jusqu'au théorème de Bernoulli.* Puis M. Markof, membre de l'Académie, et qui avait pris l'initiative de la séance, examina la *loi des grands nombres considérés comme un ensemble de théorèmes mathématiques.* Enfin M. le Prof. A. Tschouprof montra le rôle de *la loi des grands nombres dans la science contemporaine.*

Nous croyons intéresser les lecteurs de cette Revue en leur donnant un aperçu de ces trois conférences.

I

M. le Prof. *A. Vassilief* a donné un aperçu historique du développement de deux notions fondamentales : de la probabilité mathématique ou *a priori* et de la probabilité *a posteriori* ou empirique. Dans la « Summa de Aritmetica Geometria Proportioni e Proportionalità » de Paciuolo, dans les ouvrages de Tartaglia, de Cardan et de Galilée, on trouve les premiers essais de la résolution des problèmes relatifs aux jeux de hasard. On rencontre chez Cardan même des phrases que l'on peut regarder comme une divination de la loi des grands nombres. Mais c'est dans la célèbre correspondance de Pascal et de Fermat de 1654 et dans l'ouvrage de Huyghens « De ratiociniis in ludo aleae » 1657 que sont données les méthodes systématiques pour la détermination des probabilités *a priori;* c'est là qu'on trouve les premiers exemples des équations aux différences et l'emploi systématique de la théorie des combinaisons. Mais pour ces trois grands mathématiciens les problèmes avaient avant tout un intérêt mathématique ; dans un passage de la lettre adressée en 1654 « Celeberrimæ Academiæ Parisiensi » Pascal se réjouit que la résolution de ces problèmes soumette à la puissance de l'esprit *ce qui n'est pas accessible à l'expérience.* On voit par là que Pascal, en restant dans le domaine des jeux de hasard, était loin de voir la liaison de cette question avec les événements fortuits de la vie humaine ou de la météorologie.

D'un autre côté ce sont les besoins de la vie pratique qui ont amené déjà les jurisconsultes romains à considérer certaines probabilités empiriques. Notamment Ulpianus (le commencement du IIIe siècle a. D.) dans son commentaire sur la lex Faleidia a publié la première table des vies probables pour les différents âges. Les questions de l'assurance maritime contre les avaries — dans les républiques italiennes de Venise et de Gênes, — les assurances de vie et les rentes viagères en Hollande (Jean de Witt, 1671) ont amené à considérer les probabilités empiriques ou *a posteriori.* Déjà en 1666 on trouve dans le « Journal des Savants » une table de mortalité. En Angleterre ce sont les travaux de Graunt, de Petty, de Halley qui, entre 1661 et 1693, élaborent les méthodes relatives à la théorie de la population.

Le grand Leibniz s'est occupé à la fois et des questions relatives aux probabilités empiriques, et de celles qui ont pour but de déterminer pour différents jeux de hasard les probabilités *a priori.* En 1682 il a publié son : « Essay de quelques raisonnements nouveaux sur la vie humaine et sur le nombre des hommes[1]. » D'un autre côté il a attribué toujours une grande importance à l'étude des jeux. Dans ses manuscrits on trouve le calcul des probabilités pour le jeu de quinquenove et des études sur les jeux de la Bassette, de l'Hombre et du Solitaire[2].

En outre Leibniz a été amené aux questions de la théorie des probabilités par ses études sur la logique et par ses travaux de jurisprudence. Il avait le droit de dire dans sa lettre à Jean Ber-

---

[1] Klopp, *Werke von Leibniz,* V, S. 326-337, Hanover, 1866.
[2] Opuscules de Leibniz, édition de Couturat, Paris, 1903, p. 568.

noulli (6 juin 1710) à propos du manuscrit de l'Ars conjectandi : « Ego jam a puero hoc argumentum versavi tunc imprimis cum juri darem operam. » Sa « Scientia generalis » devait comprendre deux parties : la logique du nécessaire et la logique du probable. La première existe déjà : c'est la mathématique. Quant à la logique du probable, elle est à créer et c'est le domaine des sciences juridiques qui en a le plus besoin. « Ut mathematicos in necessariis sic jurisconsultos in contingentibus Logicam hoc est rationis artem prae ceteris mortalibus optime exercuisse (Ad stateram juris de gradibus probationum et probabilitatum. Opuscules, édition Couturat, p. 210. »)

Dans plusieurs de ses ouvrages consacrés à la jurisprudence Leibniz s'approche des questions fondamentales de la théorie des probabilités ; par exemple, dans le mémoire où il traite la question de l'élection du roi de Pologne, il parle de l'addition et de la multiplication des arguments juridiques. Grâce à ces travaux, l'esprit philosophique de Leibniz a compris que les questions des jeux de hasard ne sont qu'un cas spécial d'une doctrine qui doit traiter l'appréciation de tout ce qui n'est pas nécessaire et certain. Cette doctrine il l'appelle : « De incerti aestimatione sive de aestimandis probabilitatibus. » Les idées de Carnéade et de la troisième Académie sur les degrés de probabilité renaissent chez Leibniz comme un siècle et demi plus tard ce probabilisme de Carnéade et de Leibniz renaît dans les ouvrages philosophiques de Cournot. On trouve dans les manuscrits de Leibniz un intéressant mémoire sous le titre : « De incerti aestimatione » 1678 et là nous avons le principe de la probabilité totale énoncé déjà sous sa forme contemporaine[1]. Mais nous ne connaissons pas encore tout ce qui est contenu dans les manuscrits de la bibliothèque de Hanovre et nous devons espérer que M. Dietrich Mahnke, qui étudie si consciencieusement les manuscrits de Leibniz relatifs aux principes philosophiques de la théorie des probabilités[2], nous en donnera bientôt un aperçu complet. Jusque-là on peut seulement affirmer que, avant Jacques Bernoulli, personne n'a compris aussi largement et dans un esprit aussi philosophique les problèmes de la théorie des probabilités que Leibniz. Aussi prenait-il grand intérêt à la publication de l'Ars conjectandi ; et, dès que le livre a paru, dans la même journée du 9 septembre 1713, Jean et Nicolas Bernoulli en avertissent Leibniz[3]. Mais il est clair aussi qu'il a été loin de l'idée pleine de génie du théorème de Jacques Bernoulli. Quand ce dernier dans les lettres de 1703[4] a commu-

---

[1] Opuscules, éd. Couturat, p. 569-571.

[2] *Bibliotheca mathematica*, 1913. Voir aussi son intéressant article : « Leibniz als Gegner der Gelehrteneinseitigkeit. » Stade, 1912, S. 11-13, 77.

[3] GERHARDT, *Leibnizens mathem. Schr.*, III. S. 845. 850. 922. 889.

[4] GERHARDT, S. 77. ff.

niqué à Leibniz l'idée essentielle de son théorème il a rencontré de la part de Leibniz des objections auxquelles Bernoulli répond à la fin du chapitre 4 du livre IV de l'Ars conjectandi. Il faut ajouter cependant que dans la lettre à Bourguet, Leibniz (1714)[1] énonce déjà comme lui appartenant l'idée de la détermination de la probabilité empirique.

Quant à Jacques Bernoulli on peut supposer que c'est son voyage en Hollande de l'an 1681, quand il avait vingt ans, qui avait eu une grande influence sur la direction de ses pensées et de ses travaux. C'est à Amsterdam qu'il a écrit ses premiers ouvrages sur le mouvement des comètes (1682) et sur la pesanteur de l'éther (1683)[2]; le premier de ces ouvrages est dédié à Hudde, éminent mathématicien, qui, un des premiers, s'est occupé de la question des tables de mortalité. C'est là donc que pouvaient prendre naissance ses idées sur la détermination empirique des probabilités ; c'est là qu'il a pu commencer, comme il le dit dans sa lettre à Leibniz du 30 octobre 1703 « cogitare annon forte quod a priori non latet, saltem nobis innotescere possit a posteriori, ex eventu in similibus exemplis multoties observato. » Dans les premières années après son retour à Bâle jusqu'à ce qu'il y reçut, en 1687, la chaire de mathématiques, ses travaux mathématiques, physiques, mécaniques sont mêlés à des travaux dans le domaine de la logique. Ainsi en 1684 il défend *« cent thèses philosophiques »* dont 34 se rapportent à la théorie des syllogismes ; les autres sont des thèses oratoriæ et des thèses miscellaneæ ; plusieurs d'entre elles nous frappent par leur originalité, par exemple « Physica est pars specialis Matheseos », ou « Non in omni triangulo tres anguli sunt duobus rectis æquales », ou « Linea recta rectior posse dari. »

Parmi ces thèses de 1684 nous n'en trouvons aucune qui aurait pu se rattacher aux questions de la théorie des probabilités ; mais, en 1685, Bernoulli publie dans le « Journal des Savants » un problème sur la détermination de la probabilité mathématique fort intéressant au point de vue mathématique[3]. La même année, 1685, il imprime un mémoire intéressant : « Parallelismus ratiocinii logici et algebraici. » Dans la 19^{me} thèse, il y énonce comme le plus grand mérite des mathématiques qu'elles peuvent avec une certitude apodictique discuter les choses éventuelles (illa de rebus maxime fortuitis vel casualibus v. gr. fortitionibus apodictice et certissimo ratiocinio discurrit). Pour confirmer sa thèse, Bernoulli donne deux exemples, et tandis que l'un se rattache au jeu des trois dés et à la probabilité de la somme indiquée des chiffres, c'est-à-dire à la détermination de la probabilité *a priori*,

---

[1] Gerhardt, *Philosoph. Schr. von Leibniz*, III, S. 570.

[2] Jacobi Bernoulli Basileensis opera. Genevæ, 1744.

[3] V. Eneström. *Jacob Bernoulli und die ϑ Reihen* (Biblioth. math., 1910

l'autre (Problema de pactis dotalibus) dépend déjà de la probabilité pour une personne de vivre un certain nombre d'années, c'est-à-dire d'une probabilité empirique. En ayant supposé ici que la probabilité de vivre un certain nombre d'années est la même pour une jeune femme qui se marie et pour son père et son beau-père, Bernoulli une année après (1686 : Theses logicæ de conversione et oppositione enunciationum) résout le même problème dans une autre supposition, notamment qu'il est deux fois plus probable que Caja survivra aux vieillards. Et Bernoulli appuie cette supposition sur la table de mortalité insérée dans le « Journal des Savants » en 1666. Enfin en 1687, dans un mémoire « Solutio tergemini problematis » on trouve entre les thèses prises dans les différentes sciences mathématiques une *Ex arte conjecturandi.* Mais en commençant par 1688 nous ne trouvons déjà rien qui aurait pu nous renseigner sur ses travaux dans le domaine qui a illustré son nom, quoique de temps en temps il ajoute des thèses logiques à ses ouvrages purement mathématiques (p. ex. au mémoire : « De seriebus infinitis » (1692).

Telles sont, comme on le voit, les indications peu suffisantes sur son travail persistant qui, comme dit Bernoulli lui-même dans l'« Ars conjectandi », a duré vingt années *(jam per vicennium pressi)* et qui a abouti à la démonstration du célèbre théorème. « Ars conjectandi » a été publiée en 1713; la loi des grands nombres pouvait maintenant devenir le fondement sûr de la science des événements collectifs (Massenerscheinungen) et un nouveau point de vue pour l'étude de la nature — point de vue statistique — s'ouvrait maintenant pour la science.

Moins de trente années après la publication de l'« Ars conjectandi », deux ouvrages ont été publiés qui avaient appliqué ce point de vue à des événements de grande importance. En 1738, Daniel Bernoulli publiait sa « Hydrodynamica » ; en 1741, un pasteur prussien Süssmilch — son ouvrage : « Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen ». Ce dernier ouvrage a été le précurseur des travaux de Quetelet, de Lexis et de tant d'autres qui ont fondé la statistique sociale. L'ouvrage de Daniel Bernoulli contenait le premier résultat de la théorie cinétique des gaz — la déduction de la loi de Boyle-Mariotte en partant de l'hypothèse du mouvement chaotique des molécules. Krönig, Joule, Clausius ont exploré le chemin ouvert par D. Bernoulli ; les travaux de Boltzmann, de Maxwell, de Lorentz, de Planck ont montré l'importance de cette voie pour toute la physique. Le monde scientifique vit sous l'impression de la théorie des Quanta de M. Planck. On sait quelle était l'opinion de l'inoubliable Poincaré sur les conséquences extrêmes auxquelles cette hypothèse doit fatalement nous conduire. Une conception métaphysique des plus audacieuses — celle des *atomes du temps* — émise par les philosophes arabes de l'école des « Mutakallimun » renaît, basée sur les expériences relatives au rayonnement noir et aux chaleurs spécifiques pour les températures très basses.

Et c'est toujours le « flambeau des mathématiques » qui éclaire la science sociale comme la science physique. Deux siècles qui se sont écoulés depuis la publication de l'« Ars conjectandi » ont de plus en plus confirmé la thèse que son illustre auteur a énoncée en 1685: *Omnes disciplinae Mathesi indigent; Mathesis nulla, sed per se sola sibi sufficit.*

II

M. *A. Markof* a commencé son discours en indiquant que le théorème de Jacques Bernoulli est le premier de l'ensemble des théorèmes qui peut être appelé *la loi des grands nombres*. On ne peut pas déterminer exactement l'année dans laquelle J. Bernoulli a trouvé sa démonstration. Dans ses lettres à Leibniz (3 octobre 1703 et 20 avril 1704)[1] Bernoulli écrit : « Dixi autem in istis me posse demonstrare; viditque demonstrationen jam ante duodecennium Frater et approbavit. » Dans son ouvrage « Ars conjectandi » il éloigne à vingt ans l'époque à laquelle il a démontré ou commencé à démontrer son théorème : « Hoc igitur est illud problema quod evulgandum hoc loco proposui postquam jam per vicennium pressi. » Il est à remarquer que l'éditeur de l'ouvrage posthume, Nicolas Bernoulli, n'a pas apprécié à sa valeur l'importance du célèbre théorème. Au contraire, Jacques Bernoulli lui-même l'a considéré comme le fondement nécessaire pour la recherche des probabilités *a posteriori*. La démonstration de Jacques Bernoulli est tout à fait exacte, quoique liée à une condition restrictive relative aux nombres des épreuves. Comme la formule exacte qui exprime la probabilité que la différence entre le rapport du nombre des arrivées d'un événement quelconque A au nombre total des épreuves et la probabilité de l'événement ne sort pas des limites déterminées et très pénibles à calculer si le nombre des épreuves est grand, on se sert des formules d'approximation. On rencontre le premier exemple d'une telle formule d'approximation dans la lettre de Nicolas Bernoulli à Montmort, 23 juin 1713. Elle se rattache à la question intéressante de la stabilité de la distribution des nouveau-nés par rapport à leur sexe et a attiré l'attention de Moivre qui, aidé par Stirling, a

[1] GERHARDT, *Leibnizens math. Schr.*, III, S. 77, 88.

obtenu comme l'expression approximative de la probabilité l'intégrale que nous appelons l'intégrale de Laplace (Miscellanea analytica, 1730). M. Markof n'entre pas dans l'étude détaillée des expressions approximatives; il se contente d'indiquer que le perfectionnement des méthodes du calcul approximatif a été le sujet des travaux remarquables de Laplace et de Poisson. Le calcul approximatif de la probabilité dans le cas où l'erreur peut être suffisamment évaluée conduit à des théorèmes-limites. Ainsi il donne pour le théorème de Bernoulli la démonstration de Laplace liée à la déduction du second théorème-limite pour le cas le plus simple. Tandis que dans le théorème on prend pour la différence entre le rapport du nombre des arrivées de l'événement A au nombre total des épreuves et la probabilité de l'événement A les limites fixes, dans le second théorème-limite ces limites sont proportionnelles à l'unité divisée par la racine carrée du nombre des épreuves que l'on suppose toujours croître indéfiniment. Le théorème dit que pour un nombre suffisamment grand d'épreuves la probabilité que les limites ne seront pas dépassées s'approche de l'intégrale de Laplace aussi près que l'on veut.

En combinant le second théorème-limite avec le théorème de Bernoulli on parvient à ce que l'on peut appeler le second degré du théorème de Bernoulli. Remplacez chaque épreuve séparée par un ensemble d'épreuves dont le nombre peut croître indéfiniment et considérez une série indéfinie de ces ensembles. Au lieu de l'événement primaire considérez le nouveau qui consiste en ce que les résultats d'un ensemble ne dépassent pas les limites indiquées. Alors le théorème de Bernoulli conduit à son second degré, la probabilité de l'événement primaire étant remplacée par la valeur-limite de la probabilité du nouvel événement, c'est-à-dire par l'intégrale de Laplace. Poisson a employé le calcul approximatif dans un autre but : pour la généralisation du théorème de Bernoulli. Le théorème qu'on appelle maintenant le théorème de Poisson ou la loi des grands nombres diffère du théorème de Bernoulli en ce que dans le premier la probabilité de l'événement ne reste pas constante pour toutes les épreuves mais peut changer d'épreuve à épreuve. On doit alors remplacer dans l'énoncé du théorème de Bernoulli la probabilité constante par la moyenne arithmétique des probabilités. Poisson n'a pas démontré son théorème parce qu'il s'est limité au calcul approximatif sans évaluer d'une façon suffisante l'erreur du calcul.

C'est P. L. Tchebychef qui le premier a donné en 1846 la démonstration du théorème de Poisson dans sa note remarquable « Démonstration élémentaire d'une proposition générale de la théorie des probabilités ». (« Journal de Crelle », vol. 53). Vingt ans après, Tchebychef a donné une autre démonstration du théorème de Poisson. Cette seconde démonstration, basée sur la considération de l'espérance mathématique d'un certain carré[1], est merveilleusement simple et donne un théorème beaucoup plus général que celui de Poisson parce qu'il s'agit dans ce théorème de la somme de plusieurs grandeurs éventuelles. Mais il faut remarquer que les points fondamentaux de la démonstration ont été indiqués en 1853 par un mathématicien francais Bienaymé dans son mémoire : « Considération à l'appui de la découverte de Laplace ». (Comptes Rendus, vol. 37). Le mémoire de Bienaymé a été réimprimé dans le Journal de Liouville et placé justement devant le mémoire de Tchebychef, sans aucune indication cependant sur le lien étroit qui unit les deux mémoires. Depuis, Tchebychef, dans une courte note lue au Congrès de Lyon en 1873 et publiée dans le Journal de Liouville en 1874[2], en indiquant ce lien, a remarqué lui-même que sa seconde démonstration est une application de la nouvelle méthode donnée par Bienaymé dans le mémoire cité. Cette méthode — méthode des moments ou des espérances mathématiques[3] — peut être caractérisée de la façon suivante :

On considère les espérances mathématiques de fonctions diverses d'une certaine quantité et on en déduit les indications relatives aux probabilités de telles ou telles suppositions. Quoique Tchebychef ait attribué lui-même cette méthode à Bienaymé, M. Markoff considère comme plus juste de la nommer méthode de Bienaymé-Tchebychef parce que cette méthode a trouvé sa pleine justification dans les travaux de Tchebychef. C'est Tchebychef qui l'a liée avec certains problèmes sur les maxima et les minima, qui diffèrent des problèmes du calcul des variations en ce que la condition de la continuité de la fonction est remplacée par la condition de l'invariabilité de son signe, vu que les masses et les probabilités ne peuvent pas être négatives. D'un autre côté c'est Tchebychef qui a montré que la méthode des espérances mathématiques mène au premier et au second théorème-limite. Le développement ultérieur de la loi des grands nombres est de notre temps ; il consiste dans une extension du domaine de l'application des théorèmes-limites, par exemple au cas des épreuves et des grandeurs liées ; ici la méthode de Tchebychef s'applique avec le même succès que la méthode de Laplace[4].

A la fin de son discours, M. Markof a rappelé que sur la tombe

---

[1] Recueil mathématique de Moscou 1866. Journal de Liouville 1867. L'article porte le nom *Valeurs moyennes* (v. Œuvres, comp. t. I, p. 687-694).

[2] Œuvres, t. II, p. 183.

[3] M. Markof, dans la troisième édition russe de sa *Théorie des probabilités*, a placé un grand appendice sous le titre : *Démonstration du second théorème-limite du calcul des probabilités par la méthode des moments ;* cet appendice est publié séparément en langue française comme une édition pour le bicentenaire. Un portrait de J. Bernoulli y est ajouté.

[4] Les travaux importants de M. Markof sur ce sujet sont publiés dans l'appendice cité à la troisième édition russe et dans les appendices II et III à la traduction allemande faite par M. Liebmann : *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Leipzig, Teubner, 1912.

de Jacques Bernoulli sont gravés, selon son désir, les paroles « Eadem mutata resurgo ». L'espérance exprimée par ces paroles s'est réalisée : Bernoulli vit et vivra éternellement dans son théoreme.

III

Le discours de M. *Tchouprof*, a eu pour but d'opposer deux méthodes de connaissance : la connaissance astronomique, comme dit E. Dubois-Reymond dans son célèbre discours, et la connaissance statistique. Tandis que la première tend à connaître l'histoire d'une individualité (planète, homme, molécule), l'autre ne s'intéresse pas à l'individuel, mais étudie les collectivités, les valeurs moyennes. La connaissance astronomique est impuissante dans beaucoup des problèmes où le point de vue statistique, fondé sur la loi des grands nombres, nous donne au contraire des résultats remarquables (les questions de l'hérédité liées à la loi de Mendel, les problèmes de la météorologie, l'étude de la structure des systèmes stellaires, etc.). Les progrès merveilleux de l'atomisme dans ces dernières années ont vaincu la prévention des physiciens contre la méthode statistique. Les lois de la nature, lesquelles d'après le point de vue astronomique ne donnaient pas lieu à des exceptions, se réduisent maintenant à des constellations les plus probables des événements ; la violation de ces lois est au plus haut degré improbable, quoique possible. Auparavant les lois de la nature étaient la source du déterminisme et on cherchait l'indéterminisme dans ce qui est individuel ; maintenant au contraire, c'est l'individuel qui est considéré comme déterminé et les lois de la nature qui ne représentent que les moyennes statistiques portent en elles-mêmes une certaine indétermination.

A. VASSILIEF (Saint-Pétersbourg).

SUR L'OPÉRATION « TRANSPORT DE SEGMENTS RECTILIGNES » DANS LES CONSTRUCTIONS DE LA GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

I

Parmi les constructions élémentaires classiques de la géométrie descriptive il y en a un certain nombre qui exigent le « transport de segments de droites » d'une place à l'autre de l'épure; je cite comme exemples de cette espèce de constructions celles ayant pour but la projection P‴ sur le plan de profil d'un point P dont on connaît la représentation (P′, P″) dans la Méthode de Monge (voir fig. 1) ou bien de la trace t_3 sur le même plan d'un plan déterminé par ces traces t_1, t_2 (même figure).

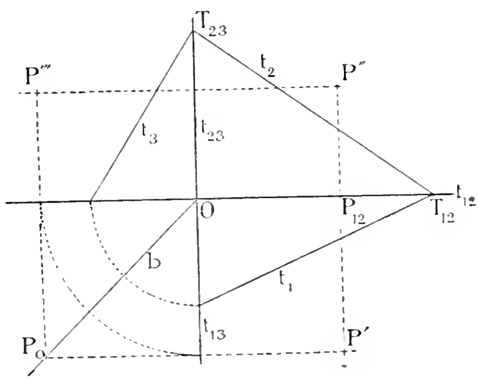


Fig. 1.

Or ces constructions, quelques simples qu'elles soient, offrent des inconvénients assez graves dans leur exécution pratique, *car dans chaque cas il faut savoir dans quel sens le transport doit avoir lieu.*

Pour ce qui a rapport à la première des questions que je viens de citer, la difficulté a été vaincue de la manière la plus heureuse par M. E. Waelsch [1] par un procédé désormais ancien, que je vais exposer.

---

[1] *Ueber eine Aufgabe aus der darstellenden Geometrie* (Monatshefte f. Math. und Phys., T. III, 1892, p. 92-96).

Appellons t_{12} la ligne de terre et t_{13}, t_{23} les intersections du plan de profil avec les plans horizontal et vertical de projection après le rabattement de tous les plans fondamentaux sur l'épure ; appellons encore P_{12} et P_{23} les intersections des droites t_{12} et t_{23} avec les ordonnées $P'P''$ et $P''P'''$; pour distinguer les différentes régions du plan du dessin nous fixerons un sens positif sur la ligne de terre t_{12} et un sur la droite t_{23} en faisant la convention suivante : un observateur étendu sur la droite t_{12} ou t_{23} de manière que le sens pieds-tête coïncide avec le sens positif de cette droite a, à sa droite, la région positive du plan horizontal π_1 ou respectivement du plan vertical π_2. Cela posé, la côte verticale du point arbitraire P est le nombre que mesure le segment $P'P_{12}$ ou bien le segment $P'''P_{23}$, nombre pris avec un signe bien déterminé. Par conséquence (fig. 1), si P_0 est le point où se coupent les parallèles me-

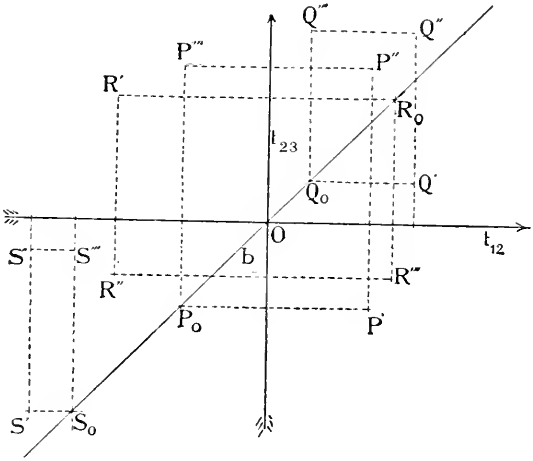


Fig. 2.

nées du point P'_{12} à t_{12} et du point P''' à t_{23} se trouve sur la bissectrice b de l'angle fermé par les directions positives des droites t_{12} et t_{23} : de là, la construction qui suit (fig. 2) : par le point donné P' menons la parallèle à la droite t_{12} et par le point P_0 où elle coupe la bissectrice b, conduisons la parallèle à t_{23} ; cette droite coupera au point cherché P''' la parallèle menée par l'autre point donné P'' à la ligne de terre. Dans la fig. 2 on a répété cette construction sur plusieurs points P, Q, R, S, situés en des différentes régions de l'espace pour montrer qu'on peut l'exécuter « automatiquement » sans qu'il soit nécessaire aucune discussion préalable. Il est bon de remarquer qu'en l'exécutant dans un ordre différent elle donne la première projection d'un point P déterminé sur ses projections sur le plan vertical et sur le plan de profil.

Ce procédé appliqué à deux points arbitraires A, B d'une droite r mène à sa projection sur le plan de profil, car r''' n'est que la droite qui joint A''' et B'''; il convient en général de choisir (fig. 3) comme points auxiliaires les deux traces T_1 et T_2 de la droite r sur les deux premiers plans de projection (voir fig. 3). Ajoutons que sur la droite r on peut considérer un troisième point, c'est sa trace T_3 sur le plan de profil; pour déterminer ce point remarquons que T''_3 est le point où r'' coupe t_{23}; de manière que $T'''_3 = T_3$ n'est que le point auquel r''' est coupée par la perpendiculaire menée du point T''_3 à la droite t_{23}. En reconnaissant T''_3 et T'''_3 il est aisé de trouver T'_3 par la méthode exposée ci-dessus; cette construction offre une vérification car T'_3 doit tomber sur r'. La figure prouve aussi qu'on peut trouver $T'''_3 = T_3$ à l'aide de points T'_3 et T''_3, sans avoir recours à la projection r'''.

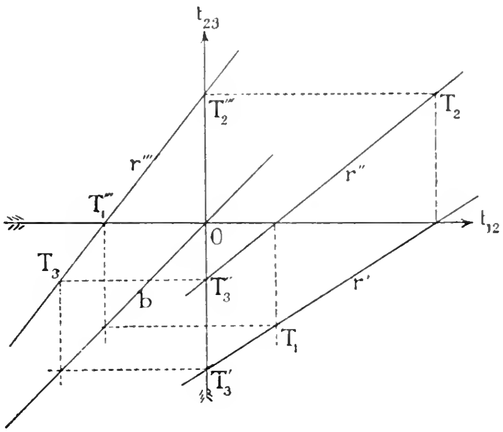


Fig. 3.

De tout cela, on peut tirer une construction tout à fait sûre de la troisième trace t_3 d'un plan donné par ces traces t_1 et t_2 (fig. 4). Remarquons, en effet, que de la même manière que t_1 et t_2 se coupent en un point T_{12} de la ligne de terre t_{12}, t_2 et t_3 iront se rencontrer dans un point T_{23} de la droite t_{23}; de manière que, pour déterminer t_3, on n'a besoin que d'en chercher

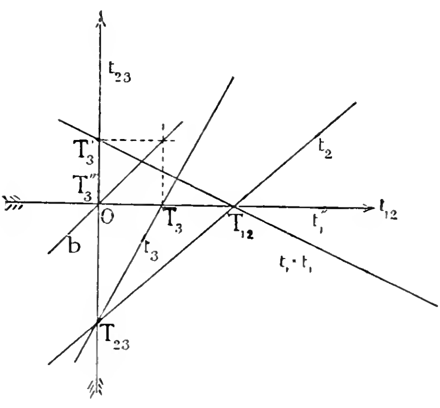


Fig. 4.

directement un point : à cet effet, il suffit de considérer une droite du plan $[t_1 t_2]$ et d'en construire, par le procédé exposé ci-dessus, la troisième trace T_3. Or, comme droite auxiliaire il convient de choisir la droite t_1 : elle coïncide avec sa première projection t'_1, tandis que t''_1 tombe sur la droite t_{12}. T'_3 est le point $t_1 t_{23}$ tandis que T''_3 est le point $O = t_{12} t_{23}$; appliquons aux points T'_3 et T''_3 une construction précédente et nous obtiendrons le point $T'''_3 = T_3$; en le joignant au point T_{23} on aura de suite t_3. La figure prouve que les deux segments rectilignes OT'_3 et OT_3 sont égaux entre eux ; cela suffit pour établir l'accord parfait de notre construction avec une de celles qui sont rappelées par la figure 1.

II

L'opération de transporter un segment se présente encore dans une autre catégorie de questions, c'est-à-dire dans celles relatives au changement des plans de projection dans la méthode de

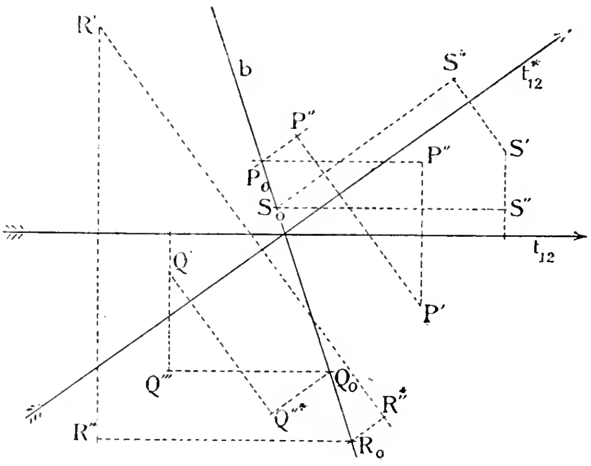


Fig. 5.

Monge. Nous allons nous en occuper à cause de leur considérable importance pratique, en nous bornant, comme c'est permis de le faire, au cas dans lequel on ne change qu'un des plans auxquels on rapporte toutes les figures de l'espace, par exemple, le plan vertical. Dans ce cas, les données de la question sont les deux lignes de terre, l'ancienne t_{12} et la nouvelle t^*_{12} et ce qu'il faut trouver est la nouvelle représentation d'un point, d'une droite ou d'un plan représentés par rapport au système primitif.

Soient d'abord (fig. 5) données les deux projections P' et P'' d'un point P dans le premier système et soit P''^{*} la nouvelle projection verticale du point P ; si P_{12} et P^{*}_{12} sont les intersections des deux lignes de terre avec les ordonnées $P'P''$ et $P'P''^{*}$, les deux segments $P''P_{12}$ et $P''^{*}P^{*}_{12}$ seront égaux entre eux, car ils sont tous les deux mesurés par la côte horizontale du point donné ; par suite, on dit d'ordinaire que pour trouver P'' il suffit de transporter le segment $P''P_{12}$ sur la perpendiculaire $P'P^{*}_{12}$ à partir de son pied *dans un sens déterminé*. Pour éviter la discussion qui est nécessaire pour fixer dans chaque cas *quel est ce sens*, appelons P_0 le point où la parallèle menée de P'' à t_{12} coupe la parallèle menée de P''^{*} à t^{*}_{12} : P_0 tombera évidemment sur la bissectrice b de l'angle formé par la

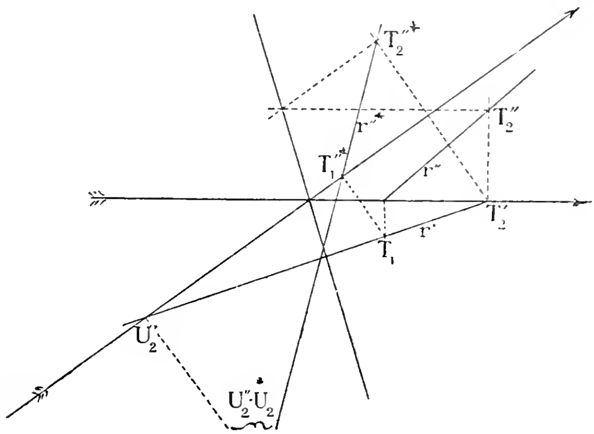


Fig. 6.

direction positive de t_{12} et la direction négative de t^{*}_{12}. Cette bissectrice menée, pour trouver P''^{*} on peut procéder de la manière suivante : Du point P'' on mène la parallèle à t_{12} ; soit P_0 son intersection avec la droite b ; du point P_0 on tire la parallèle à t^{*}_{12} ; le point où elle coupe la perpendiculaire menée de P' à t_{12} est le point cherché P''^{*}. (Dans la fig. 5, nous avons exécuté cette construction sur plusieurs points P, Q, R, S placés en des régions différents de l'espace).

A présent, pour déterminer la nouvelle représentation d'une droite r, il est évidemment suffisant de répéter cette construction sur deux de ses points ; en général, il convient de choisir encore comme points auxiliaires ses deux traces T_1 et T_2, mais il est bon de se rappeler la possibilité d'autres choix pour se tirer d'affaire dans les cas douteux. Dans la fig. 6 on a appliqué la construction que nous venons d'exposer à la détermination de la nouvelle projection verticale r'''^* de la droite dont r' et r'' sont les projections et T_1 et T_2 sont les traces ; nous remarquons sur cette figure que, si du point où r' coupe la nouvelle ligne de terre on mène la perpendiculaire à cette droite, son intersection avec la droite r'''^* donnera la nouvelle trace verticale U_2 de la droite considérée.

Pour épuiser la question, il nous reste à parler des plans (fig. 7). Nous supposerons données les traces t_1 et t_2 d'un plan τ dans le système dont t_{12} est la ligne de terre et nous nous proposons d'en trouver la trace verticale dans le système déterminé par la ligne de terre t^*_{12}. A cet effet nous remarquons d'abord que, tandis que t_1 et t_2 se coupent dans un point T_{12} de l'ancienne ligne de terre,

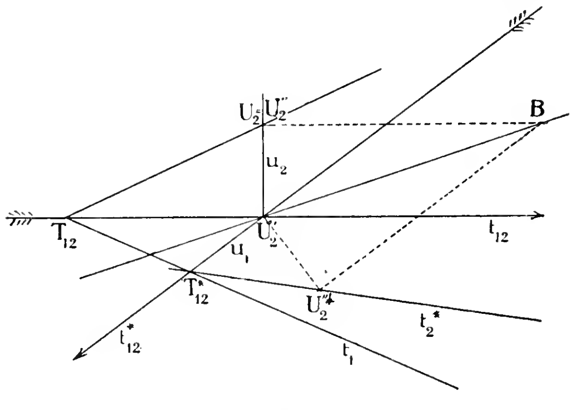


Fig. 7.

t_1 et t^*_2 se couperont dans un point T^*_{12} de la nouvelle ; de manière qu'on a tout de suite un point de la droite cherché, c'est le point $t_1 t^*_{12} = T^*_{12}$. Pour en trouver un autre, je remarque que le nouveau plan vertical, dans l'ancien système, a sa trace horizontale u_1 coïncidente avec la nouvelle ligne de terre t^*_{12}, tandis que sa trace verticale u_2 est la perpendiculaire menée à t_{12} par le point $t_{12} u_1$. D'ailleurs la nouvelle trace verticale du plan τ est l'intersection des deux plans $[t_1, t_2]$ et $[u_1, u_2]$. Cette droite a dans l'ancien système comme traces les points $U_1 = t_1 u_1$ et $U_2 = t_2 u_2$. Or la droite t_2 est l'intersection des plans τ et π_2, tandis que u_2 est l'intersection des plans π_2 et π^*_2, de manière que U_2 est en dernière analyse l'intersection des trois plans τ_1, π_2 et π^*_2 ; comme elle se trouve sur le nouveau plan vertical, elle coïncide avec sa nouvelle projection verticale ; si donc nous déterminons, par le procédé précédent, la nouvelle projection verticale U'''^*_2 du point $U_2 = (U'_2, U''_2)$, par le point résultant ira passer la droite cherchée ; cette droite est donc celle qui joint les deux points T_{12} et U''^{*}_{2} ; le problème est ainsi résolu, sans qu'on ait eu besoin de distinguer les différents cas auxquels donne lieu la situation du plan π par rapport aux plans de projection. Le lecteur remarquera que, si B est le point de la bissectrice b où se coupent les parallèles menées de U''_{2} à t_{12} et de U''^{*}_{2} à t^{*}_{12}, les deux triangles rectangles $U'_{2}U''_{2}B$ et $U'_{2}U''^{*}_{2}B$ sont égaux entre eux ; cette observation suffit pour établir l'accord de la construction que nous avons proposée avec celle qu'on trouve dans les traités.

Les constructions que nous venons d'exposer dans ce paragraphe trouvent des applications très importantes ; car, par exemple, c'est par un changement d'un des plans de projection qu'on résout de la manière la plus simple les problèmes de déterminer les intersections avec un plan d'un polyèdre ou d'une courbe gauche quelconque.

Gènes, 28 décembre 1913. GINO LORIA.

LA LIGNE DE TERRE ET LE SECOND BISSECTEUR

Notes sur certains principes de la géométrie descriptive.

INTRODUCTION.

Il est vraisemblable que la représentation des figures à trois dimensions au moyen des projections remonte à une époque très reculée. Les projections n'étaient pas seulement employées dans les plans topographiques et dans les cartes, mais aussi dans les arts de la construction. La géométrie descriptive ne peut donc être attribuée à Monge comme une création ; il est cependant certain qu'il a rassemblé des documents épars, des tracés en usage dans la pratique ; il les a améliorés, complétés, et en a fait une véritable science, branche de la géométrie.

Le point capital de la doctrine de Monge est l'emploi de deux plans de projection fixes, rectangulaires, dont l'intersection est la ligne de terre. Aussi, dans la représentation du plan — qui est fondamentale — est-il amené immédiatement à considérer les *traces* ou droites d'intersection avec les deux plans de projection. L'importance attribuée aux traces par Monge est telle que les plans ne sont *jamais* donnés autrement dans son ouvrage. Son continuateur, HACHETTE[1], n'abandonne pas cette idée, mais se rend compte qu'un plan peut être défini autrement que par les traces ; aussi le premier problème du *supplément* est-il le suivant : « Construire le plan qui passe par trois points donnés dans l'espace » (c'est-à-dire construire ses traces).

Combien de temps durèrent ces errements ? Je ne saurais le dire avec précision. Un célèbre professeur de géométrie descriptive, KIAES, paraît avoir notablement élargi le cadre trop rigide de Monge, si l'on en croit la préface de son traité (huitième édition, 1888) : « Autrefois un plan était toujours figuré par ses traces sur deux plans de projection, et quand on avait à considérer un plan dans la résolution d'un problème, quelles que fussent les données, on construisait les traces du plan. Quand il arrivait que les traces étaient situées hors des limites de l'épure, on était arrêté et obligé de changer les données. Aujourd'hui on opère sur les plans, quelle que soit la manière dont ils sont donnés, et le plus souvent on arrive au résultat avec moins de constructions que n'en exige la détermination des traces. »

Un point est donc *pratiquement* acquis : les traces sont inutiles. La ligne de terre ne doit donc servir à rien. Il suffit cependant de feuilleter les figures du livre de KIAES pour constater l'emploi fréquent des traces et la présence continuelle de la droite xy.

A la même époque (1882), rompant avec les traditions de Monge, le colonel MANNHEIM publia dans les *Nouvelles annales de mathématiques* une série d'articles réunis ensuite en une brochure sous le titre : Premiers Éléments de la Géométrie descriptive. L'*avertissement* montre nettement à quel mobile obéissait l'auteur : « J'engageais les professeurs à introduire dans les éléments les procédés en usage dans les applications... Ces quelques pages ont simplement pour but d'introduire dans les éléments les procédés employés par les ingénieurs... Actuellement, pour résoudre les problèmes élémentaires, on emploie des solutions qui conduisent à des tracés simples, mais qui ne sont simples que grâce à la préparation des données. Ces tracés d'ailleurs ne servent plus lorsqu'on arrive aux applications. Il me paraît donc important, dès le début, de n'employer que les *solutions mêmes* que l'on retrouvera plus tard. » La méthode préconisée par le colonel Mannheim est donc celle du dessin d'architecture, de machines, des épures d'appareillage et du trait de charpente. On se sert de deux projections sur deux plans rectangulaires *dont les directions sont connues, mais dont les positions sont arbitraires;* ils sont cependant placés, par rapport à l'objet à représenter, de manière telle que les cotes et les éloignements de tous les points soient de même signe — c'est-à-dire que les plans de projection ne cou-

[1] *Géométrie descriptive de Monge.* Nouvelle édition avec un supplément, par M. Hachette, instituteur de l'Ecole Impériale Polytechnique, Paris, 1811, supplément, page 12.

peut jamais l'objet figuré. Moyennant quoi, la distance des deux projections, le plan de l'une ayant été rabattu sur le plan de l'autre, est absolument indifférente. Plus de ligne de terre, plus de traces, comme cela se passe, à vrai dire, dans la pratique ; d'où grande simplification pour les débutants qui n'ont pas besoin d'apprendre les diverses positions des points par rapport aux plans de projection, ne peuvent plus se tromper dans les constructions lorsque les points ne sont pas dans le premier dièdre, et aussi plus grande facilité dans la ponctuation des épures.

Il y avait là, sans nul doute, une idée heureuse, mais il faut constater qu'elle n'a fait fortune ni dans l'enseignement secondaire proprement dit, ni dans les cours préparatoires aux grandes écoles. A vrai dire, on a pris l'habitude de se servir moins souvent de la ligne de terre et de ne plus la tracer lorsqu'elle est inutile, c'est-à-dire de laisser aux plans de projection une certaine mobilité. Dans la partie élémentaire de son ouvrage, M. Javary fait fréquemment remarquer qu'on peut se passer de ligne de terre, sans expliquer d'ailleurs pourquoi.

L'usage des 4 dièdres des plans de projection devait attirer l'attention sur deux situations particulières des points de l'espace. Lorsqu'un point est dans l'un ou l'autre des plans bissecteurs de ces dièdres, sa cote est égale à son éloignement, en valeur absolue ; il en résulte que, sur l'épure, les projections du point sont, ou symétriques par rapport à la ligne de terre (premier bissecteur), ou confondues (second bissecteur). Toute figure du second bissecteur a donc ses projections confondues. Frappé des avantages qui en résultent au point de vue de *l'économie graphique*, si l'on peut ainsi s'exprimer, M. Picquet, alors examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, essaya, par le moyen de certaines questions d'examen [1], de faire pénétrer dans l'enseignement l'usage du second bissecteur comme *plan auxiliaire*, à côté des cinq autres devenus classiques : plans de bout, vertical, horizontal, de front, de profil. Or il se trouve, fait paradoxal à première vue et cependant presque évident, que *le second plan bissecteur est connu sans que l'on figure la ligne de terre sur l'épure, bien qu'il la contienne.* Il n'y a, à ma connaissance, qu'un seul ouvrage classique où soit faite explicitement cette remarque très importante, c'est le *Cours de Géométrie descriptive* de MM. Martin et Pernot (tome I, page 5). Nous entrons ici dans le vif du sujet.

Le Système de Monge modifié.

Tel est le nom que MM. Martin et Pernot ont donné à l'épure faite au moyen de deux plans rectangulaires de projection, l'un

[1] Cf. Lucien Lévy. *Examens et Examinateurs*, Revue du Mois, 1re année (1906), p. 157.

d'eux vertical ayant été rabattu sur l'autre horizontal comme d'habitude, mais sans que la ligne de terre ait été tracée. On connaît seulement les directions des plans de projection, par suite la direction de la ligne de terre, ou, ce qui revient au même, celle des lignes de rappel. Les deux projections d'un point, a et a', sont sur une même ligne de rappel, *à une distance supposée invariable*, ceci est essentiel. Supposons (fig. 1) le point A, projeté en a et a', invariable dans l'espace tandis que les plans de projection se déplacent parallèlement à eux-mêmes ; la somme de sa cote et de son éloignement est constante et égale à aa'. Si donc le plan horizontal H s'abaisse de x pour venir en H_1, le plan vertical V devra se rapporter de la même quantité x pour venir en V_1 ; par suite la ligne de terre O viendra en O_1 ; elle décrira un plan incliné

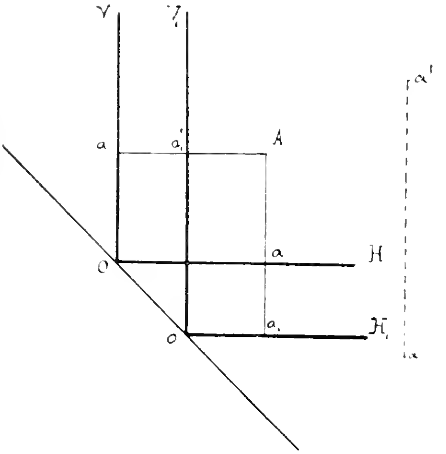


Fig. 1.

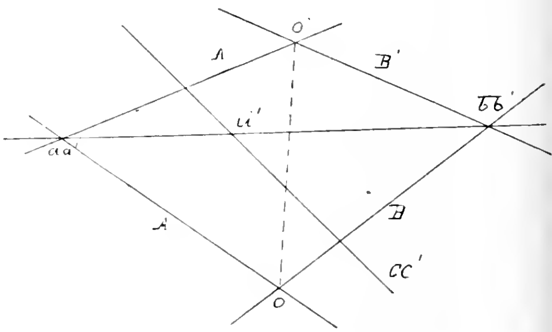


Fig. 2.

de 45 degrés sur H, V, H_1, V_1 : c'est le SECOND BISSECTEUR du dièdre (HV) aussi bien que du dièdre (H_1V_1), IL EST FIXE. On peut encore démontrer l'invariabilité du second bissecteur de la façon suivante, très simple, mais moins claire : quelle que soit la position de la ligne de terre, si la distance aa' est nulle, le point A est dans le second bissecteur et ce plan est donc fixe. Ainsi, dans une figure aussi simple que celle de l'épure du point A, le second bissecteur existe, tout en n'étant représenté par aucune ligne ; et son usage sera commode et économique (au point de vue graphique) dans bien des cas.

Avant d'y insister, remarquons que la différence entre ce système et celui proposé par le colonel Mannheim, où la distance aa' n'intervient pas, est plus apparente que réelle. Dans la pratique

(Mannheim), on fait souvent diverses projections verticales, afférentes à diverses parties, ou morceaux, de la même projection horizontale, afin de pouvoir tracer l'épure sur une aire de dimensions restreintes; on ne tient donc compte que des cotes relatives des points dans chacune de ces projections, et non pas de leurs cotes réelles. Tel est par exemple le cas des épures d'escaliers. Cela n'empêche que dans chacune de ces épures partielles, les distances des deux projections d'un certain groupement de points sont invariables, une fois le tracé commencé, de sorte que l'on revient au cas que nous étudions. Le second bissecteur sera-t-il pratique à employer? J'avoue n'en rien savoir; mais ce qui est certain, c'est que si l'habitude est prise de se passer de ligne de

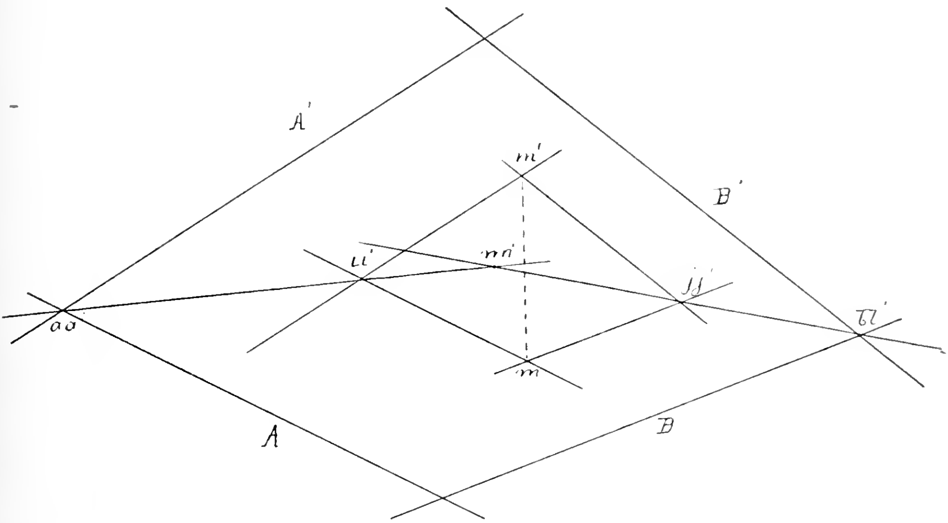


Fig. 3.

terre et des traces, on ne pourra éprouver aucune difficulté dans une épure d'arts industriels. Un excès de connaissances théoriques ne nuit peut-être pas à l'exécution d'un travail concret, en vue duquel l'enseignement ne doit pas être d'ailleurs uniquement dirigé.

De la remarque fondamentale qui précède résultent tout de suite les faits suivants :

1° Une droite étant donnée par ses deux projections AA′ (fig. 2), le point où elle rencontre le second bissecteur est le point aa' où se coupent ses deux projections.

Un plan étant donné par deux droites AA′ et BB′ se coupant en

OO′, sa *trace* sur le second bissecteur est la droite ab, $a'b'$, à projections confondues.

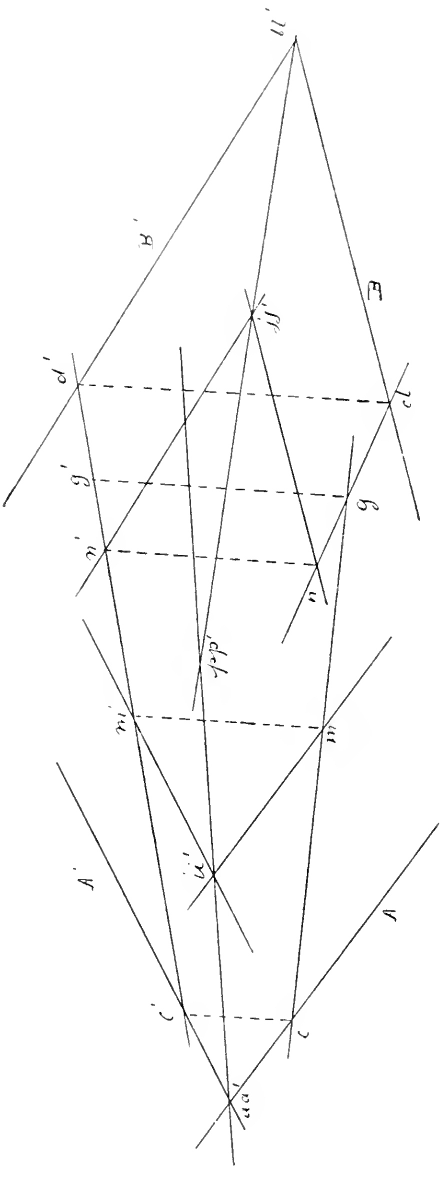


Fig. 4.

Si on donne une droite CC′ du second bissecteur, elle coupe le plan précédent au point ii', intersection de ab avec C.

2° Si un plan est donné par une droite AA′ et un point mm' (fig. 3), sa trace sur le second bissecteur passe par aa'; pour en avoir un second point, on peut mener une seconde droite du plan en joignant mm' à un point quelconque de AA′. Choisissons le point à l'infini de AA′, c'est-à-dire menons par mm' la parallèle mi, $m'i'$ à AA′; nous obtenons le second point cherché ii' en traçant seulement 2 droites; il en eût fallu 3 (ligne de rappel en plus) en prenant sur AA′ un point quelconque.

3° Soient (fig. 3) deux plans contenant respectivement les droites AA′ et BB′ et ayant mm' comme point commun. Pour trouver un second point de l'intersection je mène par mm', dans chacun d'eux, la parallèle à la droite connue; les traces de ces plans sur le bissecteur sont ai et bj, se coupant en nn'. Au total, 6 droites de second construction. En employant l'un des classiques plans auxiliaires (debout, vertical, horizontal, ou de front), il en eût fallu 11.

Remarque. — D'une façon générale, lorsqu'un plan est donné par une droite et un point, il est avantageux d'employer la parallèle menée par le point à la droite comme seconde droite du plan.

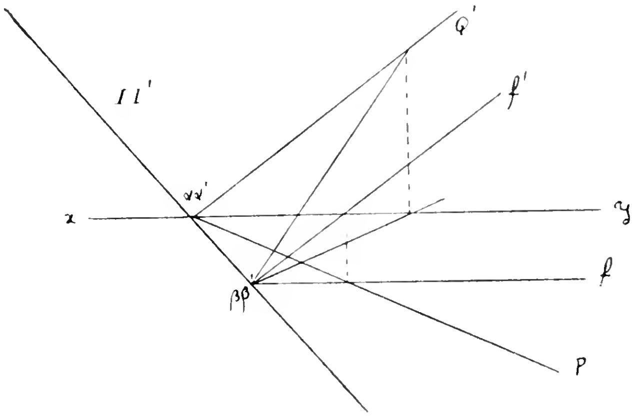


Fig. 5.

Exception si la droite donnée est de profil ou parallèle à la ligne de terre (on peut employer cette expression la ligne de terre n'étant pas figurée, puisque sa direction est connue). Je signalerai plus loin une autre exception très particulière.

4° Si les deux plans (fig. 4) sont donnés chacun par une droite

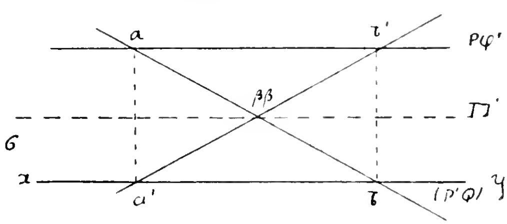


Fig. 6.

et un point, AA′ et *mm′* le premier ; BB′ et *nn′* le second, la même construction s'applique pour trouver un point de l'intersection *pp′* : 6 droites à tracer. Il en faudrait 9 en employant un plan horizontal ou de front, mais 6 seulement avec le plan debout projetant *m′n′* qui donne le point *qq′*, ou le plan vertical projetant

mn. Le second bissecteur n'est, dans ce cas, ni plus ni moins avantageux. Il faudra tracer au moins 3 nouvelles droites pour trouver un second point d'intersection.

Si les plans sont donnés chacun par deux droites parallèles, AA' mi, $m'i'$, et BB' nj, $n'j'$, il ne faudra que deux droites pour obtenir un point pp' de l'intersection en utilisant le second bissecteur; 4 au moins en employant un autre plan (un plan projetant l'une des droites données). On obtiendra un second point de l'intersection en coupant par un tel plan ; 3 droites de construction seulement en utilisant les traces sur le second bissecteur, au lieu de 4 (voir exemple 6).

5° Lorsqu'un plan (fig. 5) est donné par ses traces PQ' (P' et Q étant confondues avec la ligne de terre), le point $\alpha\alpha'$ où elles coupen xy est un point de l'intersection du plan avec le second

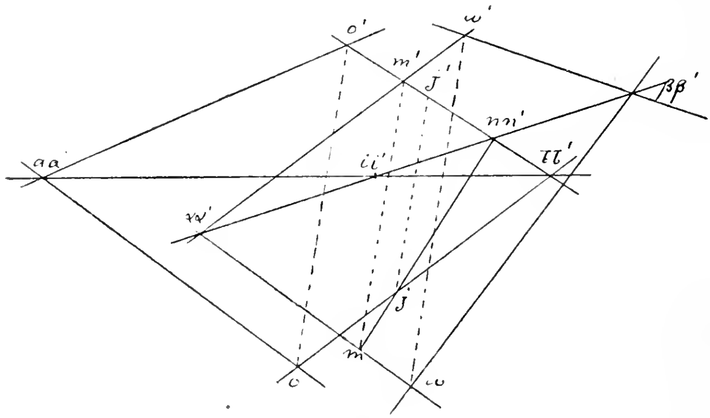


Fig. 7.

bissecteur. Pour en avoir un second, il suffit de tracer dans ce plan une droite quelconque, par exemple la frontale ff' (3 droites); le point $\beta\beta'$ est le point cherché.

Si le plan est parallèle à xy, comme dans la figure 6 où P et Q' sont confondues (plan parallèle au 1^er bissecteur), c'est une droite quelconque ab, $a'b'$ qu'on tracera pour obtenir le point $\beta\beta'$, le point $\alpha\alpha'$ étant à l'infini sur xy. On voit que II' est équidistant de P et xy.

Dans tous les cas, il est donc très facile d'obtenir la trace d'un plan sur le second bissecteur, et il est souvent avantageux de s'en servir. Pour ne pas trop multiplier les exemples, je me bornerai à citer en dernier lieu une élégante construction devenue classique :

6. Trouver l'intersection de deux plans donnés chacun par 2 droites, en ne traçant que 5 lignes de construction (fig. 7).

Soient oa, $o'a'$; ob, $o'b'$ — $\omega\alpha$, $\omega'\alpha'$; $\omega\beta$, $\omega'\beta'$, les droites qui définissent les deux plans. Leurs traces sur le second bissecteur se rencontrent en un point de leur intersection ii'. Coupons maintenant par le plan projetant l'une des droites, $o'b'$, sur le plan vertical, par exemple. Il rencontre la droite $\omega\alpha$, $\omega'\alpha'$ en $m'm$, et la droite $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ en nn' : mn est donc la projection horizontale de l'intersection du plan de bout auxiliaire $o'b'$ avec le second plan ($\alpha\omega\beta$). mn rencontre ob en j, rappelé en j', second point de l'intersection cherchée, qui est ij, $i'j'$. 5 droites seulement ont été tracées. Si le point oo' ou $\omega\omega'$ sont séparément ou simultanément à l'infini, la solution est la même, comme il a déjà été dit (exemple 4).

La représentation canonique du plan.

Toutes les représentations du plan actuellement employées exigent au minimum le tracé de 3 droites sur l'épure. Si on donne le plan par deux droites qui se coupent (à distance finie), la figure

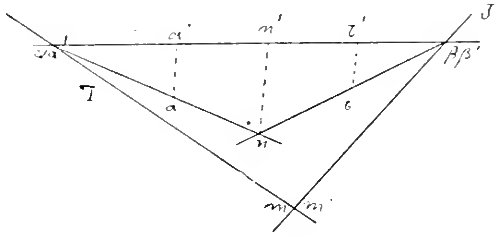


Fig. 8.

formée par les 2 projections se compose de 5 droites ; si les droites du plan sont parallèles, il y en a 4 : si l'on donne les traces, 3 droites suffisent (P, Q', xy). Il n'y a également que 3 droites sur la figure si l'on donne le plan par une droite et un point, ou par 3 points (lignes de rappel).

Monge, qui considérait les deux plans fixes de projection comme indispensables, adoptait la représentation du plan par ses traces de façon systématique. Le paragraphe précédent a essayé de mettre en lumière l'importance du second bissecteur, qui est, lui, FIXE PAR DÉFINITION pour ainsi dire, dans une épure donnée avec ou sans ligne de terre. Son emploi nécessite tout d'abord la recherche des traces sur le second bissecteur des plans de la figure, de même qu'Hachette cherchait pour commencer les traces horizontale et verticale d'un plan donné d'une façon quelconque.

Les problèmes seraient donc simplifiés d'autant, si les plans étaient donnés au moyen de leur trace sur le second bissecteur et d'un autre élément. Et si ce second élément est un point aa', la figure ne présentera que 2 droites (fig. 8 : la *trace* II' ou I pour abréger, et la ligne de rappel aa'. C'est en quelque sorte l'*épure canonique* du plan.

Si l'on a besoin d'une seconde droite du plan, il suffit de joindre aa' à un point quelconque $\alpha\alpha'$ de sa trace. Il n'y a pas avantage, dans ce cas, à mener par (A) la parallèle à I, puisque la ligne de rappel $\alpha\alpha'$ étant supprimée, on n'économise aucune droite (voir remarque du 2^e^ paragraphe).

Lorsque les projections verticales a' de *tous* les points du plan sont sur I, le plan est de bout ; si I est perpendiculaire aux lignes de rappel, il est horizontal.

Si les projections horizontales a de *tous* les points du plan sont sur I, le plan est vertical, — et en particulier de front si I est parallèle à la direction de la ligne de terre.

Si I est parallèle aux lignes de rappel et contient toutes les projections a, a', des points du plan, il est de profil.

Ces plans se reconnaissent donc comme dans la figuration habituelle.

Si I est parallèle à la ligne de terre, sans autre condition, le plan considéré est parallèle à la ligne de terre. Si (fig. 9) les pro-

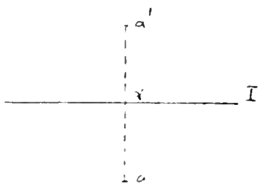


Fig. 9 *a*.

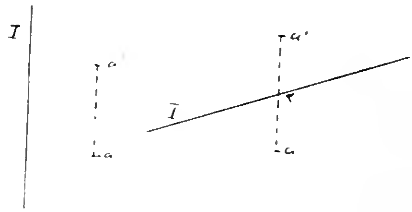


Fig. 9 *b*.

jections de tous les points sont respectivement symétriques par rapport à I, le plan est parallèle au 1^er^ bissecteur (2^e^ paragraphe, exemple 5). Si I est de profil, ou parallèle aux lignes de rappel, sans autre condition, le plan considéré est perpendiculaire au premier bissecteur.

On reconnaîtra sans peine que dans un plan perpendiculaire au second bissecteur, la trace I est un *diamètre* des lignes de rappel, c'est-à-dire divise en deux parties égales la distance aa' des deux projections de tout point du plan. Enfin, les plans parallèles au second bissecteur seront caractérisés par ce fait que I est à l'infini, et que les projections horizontale et verticale de toute droite du plan sont parallèles.

Rien n'est donc plus simple que de distinguer au moyen de l'*épure canonique* les plans remarquables, parallèles ou perpendiculaires aux plans de projection ou aux bissecteurs. Indiquons maintenant quelques exemples des deux problèmes fondamentaux.

Intersection de deux plans. — Si les deux plans (fig. 8) sont

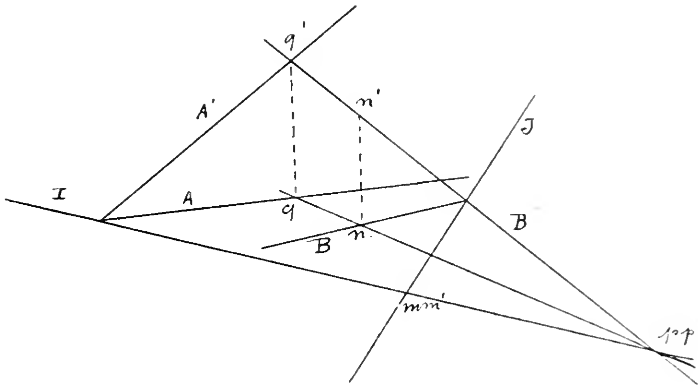


Fig. 10.

donnés par leurs traces I, J, et un point commun nn', l'intersection a pour projection nm, $n'm'$, mm' étant le point d'intersection de I et J.

Si les deux plans sont définis chacun par leurs traces et un

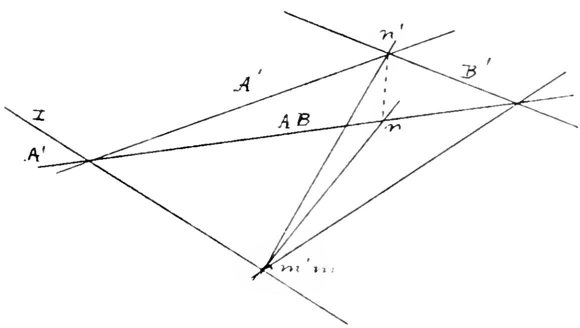


Fig. 11.

point, Iaa', Jbb', en coupant par le plan de bout $a'b'$, on obtient un point de l'intersection nn' au moyen de 4 droites de construction. Si le point mm' d'intersection des traces est en dehors de l'épure, on aura un second point en coupant par le plan vertical ab, ce qui exigera encore le tracé de 4 droites. Au cas où ces droites ne donneraient pas de constructions praticables, en égard aux données, il sera toujours facile de tracer dans les plans de nouvelles droites sur lesquelles on pourra opérer.

Si chaque plan est donné (fig. 10) par une droite et sa trace, IAA', JBB', en coupant par le plan projetant l'une d'elles, le plan de bout B' par exemple, on a dans le premier plan la droite pq, $p'q'$ qui rencontre BB' en nn' ; on obtient ce point d'intersection par 3 droites seulement. Cette intersection est mn, $m'n'$.

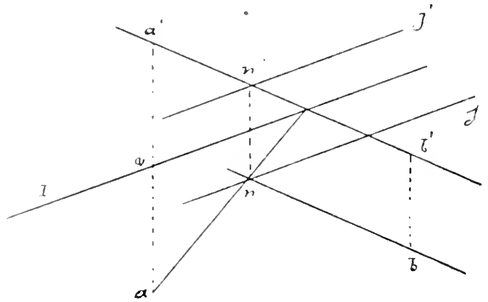


Fig. 12.

Mais si les droites A et B sont dans un même plan de front, vertical, horizontal ou de bout (fig. 11), on aura l'intersection en traçant *une seule* droite de construction, la ligne de rappel $n'n$. Ce cas est comparable au cas classique où les plans sont donnés par leurs traces se rencontrant dans l'épure, et où l'on obtient l'intersection par 2 droites de construction.

Soit (fig. 12) un plan Iaa' perpendiculaire au second bissecteur

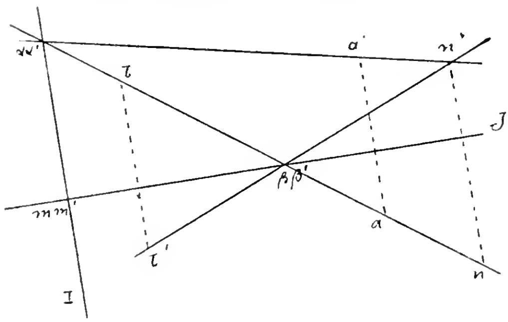


Fig. 13.

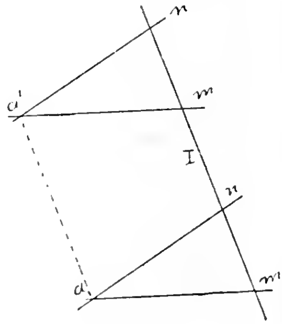


Fig. 14.

($aa = aa'$), et un plan parallèle au second bissecteur passant par bb'. On obtient un point nn' de leur intersection au moyen du plan de bout $a'b'$ par exemple. Le point mm' est à l'infini sur I; l'intersection nj, $n'j'$ des deux plans est donc parallèle à I et ses projections sont équidistantes de I (4 droites de construction).

Soit (fig. 13) un plan perpendiculaire au premier bissecteur Iaa'

et un plan parallèle à la ligne de terre Jbb'. Le plan vertical aq les coupe suivant deux droites dont les projections verticales sont $\alpha'a'$ et $b'\beta'$ se rencontrant en nn' ; d'où l'intersection cherchée mn, $m'n'$ (4 droites).

Soit (fig. 14) un plan de profil I et un plan parallèle au second bissecteur passant par aa' ; $n'n$ est un point de leur intersection, an étant parallèle à $a'n'$; et de même $m'm'$. Il n'y a aucune droite à tracer pour les trouver ; il suffit de porter sur I des longueurs $mm' = nn' = aa'$.

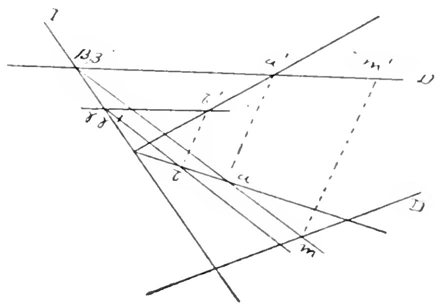


Fig. 15.

Les exemples qui précèdent sont suffisants, je pense, pour montrer que cette manière de figurer le plan n'introduit aucune difficulté nouvelle et conduit à des tracés d'une extrême simplicité et d'une réelle économie graphique.

Intersection d'une droite et d'un plan. — Le plan étant donné (fig. 15) par sa trace et une droite I, $a'\alpha'$, $a\alpha$, et la droite par ses

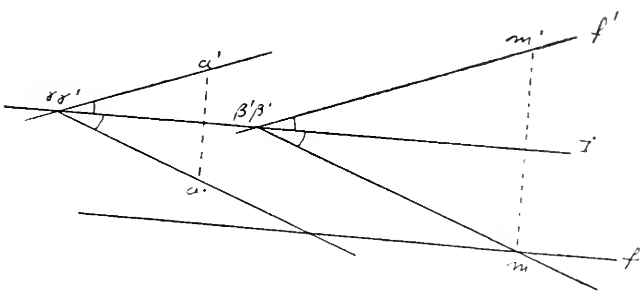


Fig. 16.

projections DD', le plan de bout D' coupe le plan donné suivant la droite $\beta'a'$, βa, rencontrant D en m, d'où m' sur D'. 3 droites de construction.

Si le plan est donné par sa trace I et un point bb', il faut commencer par y tracer une droite pour être ramené au cas précédent : on aura donc 5 droites de construction. Mais il est possible de n'en tracer que 4 en opérant comme suit. Choisissons comme droite du plan la droite $b\gamma$, $b'\gamma'$, dont une projection, verticale par exemple, est parallèle à la projection de même nom D′ de la droite donnée. Le plan de bout D′ coupe I en $\beta\beta'$ et $b\gamma$, $b'\gamma'$ à l'infini ; βm est donc parallèle à $b\gamma$ et coupe DD′ au point cherché mm'.

Soit (fig. 16) Iaa' un plan parallèle au premier bissecteur ($\alpha a = a\alpha'$) et une droite de front ff'. Le plan de bout f' coupe I en $\beta\beta'$ et à l'infini la droite du plan $a\gamma$, $a'\gamma'$ dont la projection verticale $a'\gamma'$ serait parallèle à f'. La parallèle βm à $a\gamma$ (c'est-à-dire la symétrique de $\beta f'$ par rapport à I) rencontre f en m, d'où m' ; mm' est le point d'intersection cherché (2 droites).

Soit encore (fig. 17) un plan Iaa' parallèle à la ligne de terre et une droite de profil pq, $p'q'$ définie par deux points. Nous pou-

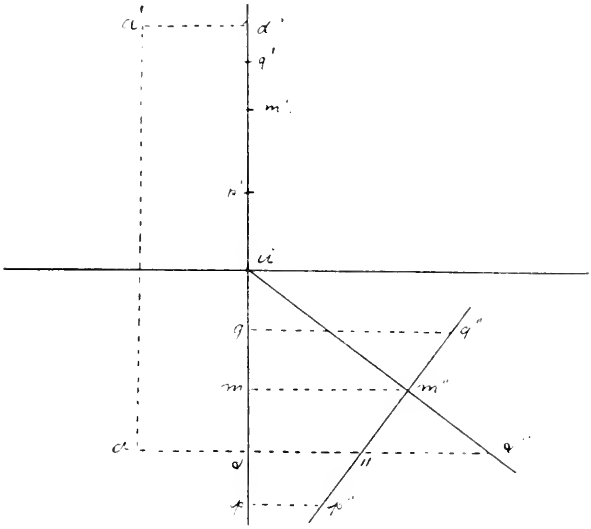


Fig. 17.

vons couper par le plan de profil contenant pq ; il rencontre I en ii'' et la parallèle $a\alpha$, $a'\alpha'$ menée par aa' à I en $\alpha\alpha'$; $i\alpha$, $i'\alpha'$ est l'intersection du plan donné et du plan de profil. Rabattons ce dernier sur le plan horizontal passant par I (ou changeons de plan vertical en prenant pq pour ligne de terre et mesurant les cotes à partir de I) ; sur des parallèles à I, nous portons $\alpha\alpha'' = i'\alpha'$, $pp'' = i'p'$, $qq'' = i'q'$; les rabattements $i\alpha''$ et $p''q''$ se coupent en m'' projeté horizontalement en m et verticalement en m' : $i'm' = mm''$. mm' est le point cherché.

On peut (fig. 18) éviter le rabattement ou changement de place en faisant passer par pq, $p'q'$ un plan quelconque défini par les droites parallèles pr, $p'r'$ et qs, $q's'$: sa trace sur le second bissecteur est rs, $r's'$ qui coupe I en tt'. Le plan de bout $p'r'$, par exemple, coupe la droite $a'p'\alpha'$, $a\alpha$ en b, et I en c, donc le plan donné suivant bc, qui rencontre pr en v. La droite tv coupe enfin

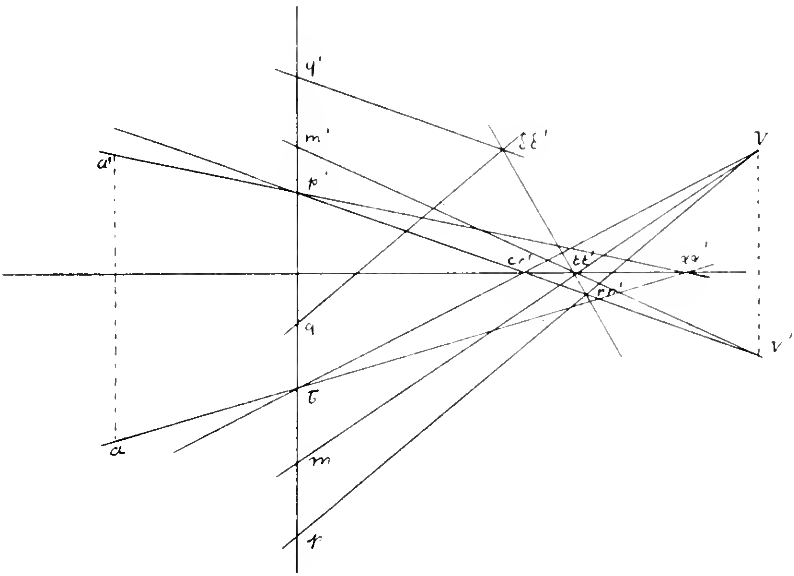


Fig. 18.

pq au point m cherché. v étant rappelé verticalement en v' sur $p'r'$, $t'v'$ rencontre $p'q'$ en m', projection verticale de m.

Je me bornerai à ces exemples déjà trop nombreux pour aborder une remarque qui me paraît intéressante.

Comparaison avec le trait de perspective.

On a pris l'habitude, en France, de représenter les points A de l'espace (fig. 19), en perspective conique, par leurs perspectives a' sur le tableau T (ou plan vertical), et les perspectives a sur le même tableau de leurs projections orthogonales α sur un plan G perpendiculaire à T, dit plan horizontal ou géométral. Le plan T étant celui de l'épure, celle-ci se compose, comme en géométrie descriptive ordinaire, des deux perspectives aa' situées sur une même ligne de rappel. Dans un grand nombre de questions uniquement descriptives, la ligne de terre xy, intersection de G et T, la ligne d'horizon, les points de fuite et de distance sont inutiles; nous ne voulons parler que de ces questions.

Les points A et O étant fixes, si l'on transporte le tableau ou le géométral parallèlement à lui-même, les perspectives a et a' changent, et il en est de même de leur distance relative aa', à moins de lier les amplitudes des deux translations par une relation assez compliquée. Si le point A est dans le géométral, $A\alpha = O$, a et a' sont confondus, et réciproquement. Ainsi, tout point dont les deux perspectives sont confondues est dans le plan horizontal. Il est bien certain que si l'on fait subir au géométral une translation, le point A n'y reste pas, et ses perspectives se séparent. Mais si l'on considère une droite AB projetée en $\alpha\beta$ sur

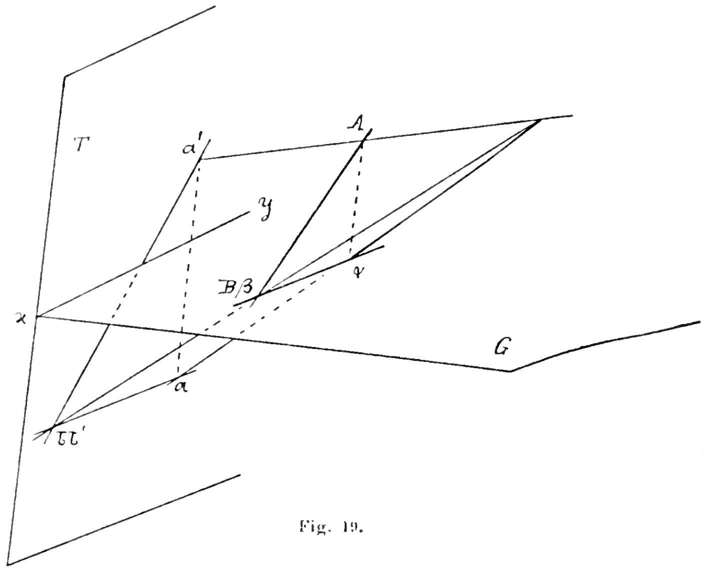


Fig. 19.

le géométral, ses deux perspectives $a'b'$ et ab se rencontrent en bb', perspective de sa trace $B\beta$ sur G. Changeons le géométral; la trace $B\beta$ va changer, mais la perspective de la nouvelle trace jouira de la même propriété. Ainsi donc, si l'on connaît (fig. 2) *les deux perspectives* A′ et A d'une droite (nous parlons ainsi pour abréger), la trace horizontale de cette droite a pour perspective leur intersection *aa′, sans que le géométral et l'œil soient autrement définis.* Si donc un plan est défini en perspective par deux droites AA′ et BB′ concourantes en OO′ (c'est-à-dire dans l'espace concourantes ou parallèles — sauf le cas où elles seraient parallèles entre elles et parallèles au tableau, on obtient sa trace horizontale *ab*, *a'b'* sans aucune construction et sans connaître d'autres éléments.

Tout plan peut alors être défini par la perspective de sa trace horizontale I et les perspectives d'un de ses points *aa'*, aussi bien que par ses traces sur le géométral et sur le tableau, comme on le fait fréquemment; c'est la représentation canonique du plan en perspective. Il est dès lors évident que les tracés précédents s'appliquent en perspective, en prenant la précaution de remplacer le second bissecteur par le géométral, et de considérer comme plans projetants ceux qui passent par le point de vue O. On ne parlera que plus tard des horizontales, réservant les notions de point de fuite et de ligne d'horizon. Au contraire, les frontales, parallèles à T, ne donnent lieu à aucune restriction.

Exemples. — 1° Intersection de deux plans I*aa'* et J*bb'* (fig. 8).

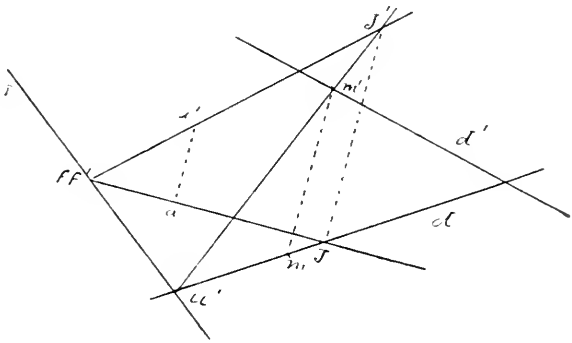


Fig. 20.

En coupant par le plan OAB projetant sur le tableau la droite AB, on obtient dans chacun des plans les droites dont les perspectives des projections sur le géométral sont *aα*, *bβ*, se rencontrant en *n*, d'où *n'*; l'intersection a pour perspectives *mn*, *m'n'*.

2° Intersection de la droite *dd'* et du plan I*aa'* (fig. 20; voir aussi fig. 15). Dans ce plan, je trace une droite, par exemple la frontale *af*, *a'f'*; le plan Oδ projetant la projection δ de la droite D sur le géométral coupe le plan donné suivant *ij*, *i'j'*, rencontrant la droite en *mm'*, point cherché.

Lorsqu'on définira un plan au moyen de sa trace sur le géométral et d'une frontale, comme on vient de le faire, ou de sa trace sur le tableau (ce qui revient à dire que la ligne de terre *xy* est confondue avec la perspective de la projection horizontale de la frontale), définition classique, les élèves qui auront pris l'habitude des tracés précédents n'auront, me semble-t-il, aucun effort à faire pour se mettre au courant des tracés de la perspective (fig. 5):

— une droite du plan IQ' sera ab, $a'b'$;

— une frontale, bf, $b'f'$,

exactement comme en descriptive, I étant censément la trace du plan sur le second bissecteur. J'ajoute que sur une telle figure en perspective, on *voit* véritablement les plans, les droites dans l'espace ; on les voit tout aussi bien en descriptive, malgré la déformation résultant de l'emploi du second bissecteur.

Il faudra ensuite apprendre la représentation des horizontales, l'usage des points de fuite et des points de distance. Mais les élèves ne seront pas déroutés dès le début, comme cela arrive aujourd'hui pour les notions élémentaires de perspective qui figurent aux programmes des Grandes Ecoles, notions qu'ils connaissent d'habitude très mal — ce qui ne répond pas au but que s'était proposé la Commission au moment de cette innovation.

L'emploi du second bissecteur et de la représentation du plan que j'ai signalée me paraît donc être utile parce que :

1° il donne dans un grand nombre de questions des tracés plus simples que ceux habituellement employés, et en tous cas, jamais plus compliqués ;

2° il établit une liaison entre le trait de la géométrie descriptive et le trait de la perspective.

Cependant, je dois dire en terminant que figurer *toujours* les plans à l'aide de leurs traces sur le second bissecteur me semblerait une grosse erreur. Ce serait revenir, sous une autre forme, au cadre étroit de Monge, avec tous les inconvénients de l'exclusivité, quelle qu'elle soit. Ce nouveau mode de représentation doit simplement être employé avec les autres, et au même titre qu'eux, de façon à varier les exercices et à bien faire comprendre les principes tellement simples de la géométrie descriptive.

Ch. HALPHEN (Paris).

UN PROBLÈME SE RÉSOLVANT PAR LA GÉOMÉTRIE A 4 DIMENSIONS

Le présent travail, dont j'ai entrepris la rédaction, est dû à M. Trosset, ingénieur, qu'une paralysie empêche d'écrire depuis plus de 2 ans.

Il s'agit d'un problème qui semble insoluble sans l'emploi du calcul intégral. M. Trosset, grâce à une heureuse incursion dans le domaine de la géométrie à n dimensions, est arrivé à le résoudre par les mêmes méthodes qu'un simple problème d'arithmétique. Il y aurait intérêt à le faire connaître aux lecteurs de l'*Enseignement mathématique*, un tel artifice permettant de traiter par l'algèbre élémentaire tous les problèmes qu'on résolvait jusqu'ici par l'intégration d'une fonction entière.

Berne, le 23 décembre 1913. J. Sauter.

Enoncé du problème.

Un tronc de pyramide à bases rectangulaires a les dimensions suivantes : longueur de la grande base, 12 cm. ; largeur, 8 cm. : distance entre les deux bases, 12 cm. ; longueur de la petite base, 9 cm. ; largeur, 6 cm. La grande base est en or pur, la petite base en argent pur ; entre deux le corps est constitué par un alliage de ces métaux, alliage de composition variable : dans le voisinage d'un point intérieur quelconque, les volumes des parties constituantes, or et argent, sont entre eux comme les distances du point à la petite et à la grande base. On donne la densité de l'or, 19, celle de l'argent, 10, et on demande d'une part le poids de l'or contenu dans ce corps, le poids de l'argent et le poids total, d'autre part la position des centres de gravité de l'or, de l'argent et de l'ensemble.

Pour fixer les idées, on supposera les bases horizontales et on admettra que le sommet de la pyramide idéale complète se projette horizontalement sur les milieux des bases.

Résolution. — Première Méthode.

La fig. 1 représente le corps en perspective. Soit $A_0B_0C_0D_0A_0$ le pourtour de la grande base, $A_aB_aC_aD_aA_a$ le pourtour de la petite. Commençons par décomposer le corps en neuf morceaux, en le coupant suivant quatre plans verticaux passant par les quatre côtés de la petite base ; soient A″, B‴, B″, C‴, C″, D‴, D″, A‴ les points où ces plans coupent le pourtour de la grande base et soient A′, B′, C′, D′ les projections verticales de A_a, B_a, C_a, D_a sur le plan de la grande base.

Considérons d'abord le corps central $A_a B_a C_a D_a A' B' C' D'$; c'est un parallélipipède rectangle. Imaginons que dans chaque couche horizontale *ab* de ce corps on pousse tout l'or du côté de la ligne *a*, comprise dans le plan $A_a D_a A' D'$, et tout l'argent du côté de la ligne *b*, comprise dans le plan $B_a C_a B' C'$: où sera la ligne de dé-

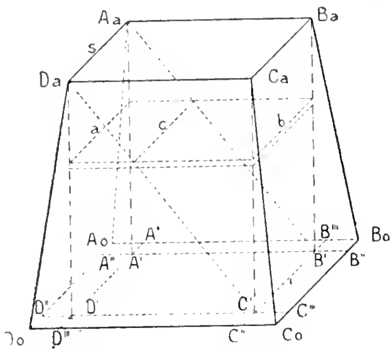


Fig. 1.

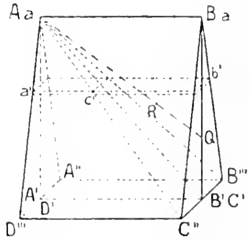


Fig. 2.

marcation *c* entre les deux métaux ? On doit avoir $ac : bc = v_0 : v_a = as : bi$, v_0 et v_a étant les volumes d'or et d'argent de la couche, *s* et *i* les lignes $A_a D_a$ de la base supérieure et B′ C′ de la base inférieure ; par conséquent la ligne *c* ne peut être que l'intersection de la couche avec le plan diagonal *si* du parallélipipède. Nous pouvons donc remplacer le corps central par un prisme à bases triangulaires $A_a A' B' D_a D' C'$ en or pur et un prisme à bases triangulaires $A_a B_a B' D_a C_a C'$ en argent pur ; le volume de chacun de ces prismes est de $\frac{1}{2} \cdot 12 \times 9 \times 6 = 324$ cm³ ; le premier pèse $324 \times 19 = 6156$ gr., le second $324 \times 10 = 3240$ gr. ; le centre de gravité du premier est à $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ cm. au-dessus de la base inférieure, le centre de gravité du second à $\frac{2}{3} \cdot 12 = 8$ cm. au-dessus de cette base.

Passons maintenant aux morceaux $A_a A'' A' B' B''' B_a$ et $D_a D''' D' C' C'' C_a$ du corps total ; ce sont deux prismes à bases triangulaires, que nous réunirons en un seul prisme, également à bases triangulaires, en faisant coïncider A_aB_a avec D_aC_a, tout en laissant $A'A''B'''B'$ et $D'D'''C''C'$ dans le plan primitif de la base d'or du corps total ; la fig. 2 le montre en perspective. Ce que par la pensée nous avions fait pour une couche quelconque *ab* du corps central — pousser tout l'or d'un côté et tout l'argent de l'autre — nous pouvons le répéter pour une couche quelconque *a′b′* du prisme résultant que nous venons de former; ces deux couches sont rectangulaires; pour toutes deux le rapport des distances de la ligne de démarcation or-argent aux plans $A''A_aD'''$, $B'''B_aC''$ sera égal au rapport des distances de la couche aux plans des bases inférieure et supérieure du corps total : la ligne de démarcation c' se trouvera donc dans le plan diagonal $A_aC''B'''$. Au-dessous de ce plan nous aurons une pyramide d'or à base rectangulaire, dont le volume sera de $\frac{1}{3} \cdot 12 \times 9 \times 2 = 72$ cm³, le poids de $72 \times 19 = 1368$ gr., et le centre de gravité à $\frac{1}{4} \cdot 12 = 3$ cm. au-dessus de la grande base du corps total. Au-dessus du plan $A_aC''B'''$ restera un tétraèdre d'argent, que nous envisagerons comme une pyramide de base $C''B_aB'''$ et de sommet A_a : son volume sera de $\frac{1}{3} \cdot 9 \times 2 \times \frac{1}{2} \cdot 12 = 36$ cm³, son poids de $36 \times 10 = 360$ gr. ; le centre de gravité Q de la base $C''B_aB'''$ sera à $\frac{1}{3} \cdot 12 = 4$ cm. au-dessus de $C''B'''$: le centre de gravité R du tétraèdre, étant au quart de la distance de Q à A_a, sera à $4 \times \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} \cdot 12\right) = 6$ cm. au-dessus de la grande base du corps total.

En répétant les mêmes raisonnements pour les deux morceaux suivants $A_aA'''A'D'D''D_a$ et $C_aC'''C'B'B''B_a$, après avoir fait coïncider $A_aA'D'D_a$ avec $B_aB'C'C_a$, nous arriverons à leur substituer une pyramide d'or de base $B''C'''D''A'''$ et de sommet A_a, et une pyramide d'argent de base $D''C_aC'''$ et de sommet A_a. La pyramide d'or aura un volume de $\frac{1}{3} \cdot 12 \times 3 \times 6 = 72$ cm³, un poids de $72 \times 19 = 1368$ gr., et le centre de gravité à une hauteur de 3 cm. : la pyramide d'argent aura un volume de $\frac{1}{3} \cdot 6 \times 3 \times \frac{1}{2} \cdot 12 = 36$ cm³, un poids de $10 \times 36 = 360$ gr., et le centre de gravité à une hauteur de 6 cm.

Il reste encore les 4 pyramides $A_aA'A'''A_0A''$, $B_aB'B'''B_0B''$, $C_aC'C'''C_0C''$, $D_aD'D'''D_0D''$, que nous grouperons par la pensée en une pyramide unique *p* en les faisant glisser sur le plan commun de leurs bases jusqu'à coïncidence de $A'''A'$ avec $D''D'$, de $B'''B'$ avec $A''A'$, de $C'''C'$ avec $B''B'$ et de $D'''D'$ avec $C''C'$. Cette pyramide *p*, dont fig. 3 est une élévation, a sa base en or et son sommet A_a en argent ; sa densité est donc de 10 au sommet et de

19 à la distance de 12 cm. au-dessous du sommet ; quelle sera la densité à la distance de x cm. au-dessous de A_a ? Si un petit fragment f, de forme quelconque, qu'on extrairait de la pyramide p à la distance x au-dessous de A_a, contient v_0 cm³ d'or et v_a cm³ d'argent, on doit avoir, d'après les données du problème, $\frac{v_0}{v_a} = \frac{x}{12-x}$, d'où $\frac{v_0}{v_a+v_0} = \frac{x}{12}$ et $\frac{v_a}{v_a+v_0} = \frac{12-x}{12}$; le fragment pesant $19\,v_0 + 10\,v_a$ gr., sa densité moyenne, et par conséquent la densité de la pyramide p à la distance x au-dessous de A_a, sera $d = \frac{19\,v_0 + 10\,v_a}{v_0 + v_a} = 19\frac{x}{12} + 10\frac{12-x}{12}$ soit $d = 10 + \frac{9}{12}x$. Ce résultat montre que le poids de la pyramide p est égal à la somme des poids de deux

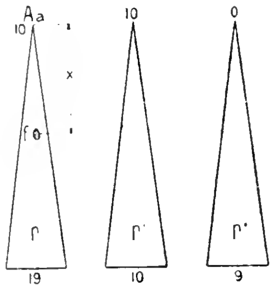


Fig. 3.

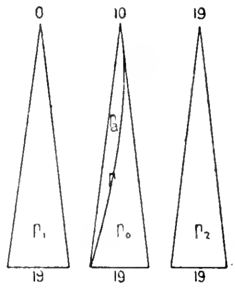


Fig. 4.

pyramides, p', p'', de mêmes dimensions que p, dont l'une, p', a partout la densité 10, tandis que la densité de l'autre, p'', varie suivant la loi $\frac{9}{12}x$ (la densité de p'' sera 0 au sommet et 9 à la base). Le volume de chacune des pyramides p, p', p'' est de $\frac{1}{3} \cdot 12 \times 2 \times 3 = 24$ cm³. Le poids de la pyramide p' est donc de $10 \times 24 = 240$ gr. ; quant au poids de la pyramide p'', nous l'obtiendrons au moyen de l'artifice suivant.

Nous comparons notre pyramide à trois dimensions p'', dont la hauteur mesure 12 cm. et dont une section horizontale quelconque à la distance x au-dessous du sommet a comme longueur $\frac{3}{12}x$ et comme largeur $\frac{2}{12}x$, à une pyramide à 4 dimensions P'', homogène, dont la hauteur mesure aussi 12 cm. et dont une section quelconque menée parallèlement à la base à la distance x au-dessous du sommet a comme longueur $\frac{3}{12}x$, comme largeur $\frac{2}{12}x$ et comme troisième dimension $\frac{9}{12}x$, c'est-à-dire la valeur de la densité de p''. La capacité de la pyramide P″ se calculera comme le produit de la base $3 \times 2 \times 9$ par le quart (à cause des 4 dimensions) de la hauteur : on trouve $3 \times 2 \times 9 \times \frac{12}{4} = 162$ unités.

Or la capacité de la pyramide P″ doit avoir la même valeur que le poids de la pyramide p'', donc cette dernière pèse 162 gr. Ajoutant ce résultat à 240 gr., poids de p', nous obtenons 402 gr., comme poids de la pyramide p.

Pour trouver le volume d'or V_0 et le volume d'argent V_a de p, il faut résoudre le système des deux équations

$$19 V_0 + 10 V_a = 402$$

$$V_0 + V_a = 24,$$

ce qui donne $402 = 19V_0 + 10(24 - V_0) = 9V_0 + 240$, $V_0 = \frac{402 - 240}{9} = 18$, d'où $V_a = 24 - 18 = 6$. Le poids de l'or de p est donc de $19 \times 18 = 342$ gr. ; le poids de l'argent de $10 \times 6 = 60$ gr.

Une nouvelle difficulté surgit, pour la détermination des centres de gravité de l'or et de l'argent que renferme la pyramide p : nous utiliserons le nouvel artifice que voici (voir fig. 4) :

Nous supposons d'abord que, sans déplacer l'or de p, nous ayons extrait tout l'argent de cette pyramide ; le fragment f considéré plus haut contiendra encore v_0 cm³ d'or et présentera des vides mesurant v_a cm³, sa densité moyenne sera $\frac{19 v_0}{v_0 + v_a} = \frac{19x}{12}$; nous comparons cette pyramide p_1, non homogène et pourtant sans argent, à une pyramide à 4 dimensions P_1, homogène, dont la hauteur mesure 12 cm. et dont une section quelconque menée parallèlement à la base à la distance x au-dessous du sommet a comme longueur $\frac{3}{12}x$, comme largeur $\frac{2}{12}x$ et comme troisième dimension $\frac{19x}{12}$, c'est-à-dire la densité moyenne de f. Le centre de gravité de P_1 sera au cinquième de la hauteur (à cause des 4 dimensions) à partir de la base.

Or les calculs que demande la détermination du centre de gravité de P_1 sont identiques à ceux que demande la détermination du centre de gravité de p_1. Ce dernier se trouve donc aussi à $\frac{1}{5} \cdot 12 = 2{,}4$ cm. au-dessus de la base.

Ayant le centre de gravité de l'or de p, nous pouvons passer au centre de gravité de l'argent de p au moyen d'un troisième artifice :

Nous supposons cet argent transformé en or, ce qui n'en déplace pas le centre de gravité. Pour fixer les idées, nous admettrons qu'avant la transformation on ait poussé dans chaque tranche horizontale tout l'argent d'un côté et tout l'or de l'autre, parallèlement au plan de la fig. 4 ; la pyramide p aura été décomposée en deux corps, p_o, p_a, le premier tout en or, le second tout en argent, qui se touchent suivant une surface courbe dont la forme exacte ne nous intéresse pas ; ce transport n'aura pas changé la distance des centres de gravité de l'or et de l'argent à la base de la pyramide p.

Après la transformation du corps p_a en or, la pyramide p deviendra une pyramide homogène p_2, dont le centre de gravité est à $\frac{1}{4} \cdot 12 = 3$ cm. au-dessus de la base et qui mesure 24 cm³, tandis que sa partie p_0 a son centre de gravité à 2,4 cm. et mesure $v_0 = 18$ cm³. Or $3 \times 24 = 72$ et $2{,}4 \times 18 = 43{,}2$; la différence $72 - 43{,}2 = 28{,}8$ doit être égale au produit de $v_a = 6$, volume de la partie p_a, par la distance cherchée du centre de gravité de p_a à la base de p. Cette distance est donc $\frac{28{,}8}{6} = 4{,}8$ cm.

Récapitulons : Nous avons trouvé pour l'or des différentes portions du corps donné les poids et les altitudes de centre de gravité qui suivent (par altitudes nous entendrons la hauteur au-dessus de la base inférieure du corps total) :

corps central :	6156 gr.,	4 cm.,	produit	24624
1er prisme combiné :	1368 gr.,	3 cm.,	produit	4104
2d prisme combiné :	1368 gr.,	3 cm.,	produit	4104
pyramide p :	342 gr.,	2,4 cm.,	produit	820,8
Or total :	9234 gr.,			33652,8

divisant la somme des produits de droite par le poids total de l'or, on trouve comme altitude du centre de gravité de l'or $\frac{33652{,}8}{9234} = 3{,}6444$ cm. : cette altitude et le fait que le centre de gravité doit, pour raison de symétrie, se trouver sur la verticale passant par les centres des bases, déterminent la position même du centre de gravité de l'or. Le problème est résolu pour l'or.

Quant à l'argent des différentes portions, nous avons obtenu comme poids et altitudes des centres de gravité :

corps central :	3240 gr.,	8 cm.,	produit	25920
1er prisme combiné :	360 gr.,	6 cm.,	produit	2160
2d prisme combiné :	360 gr.,	6 cm.,	produit	2160
pyramide p :	60 gr.,	4,8 cm.,	produit	288
Argent total :	4020 gr.,			30528

le centre de gravité de l'argent sera sur la même verticale que celui de l'or, mais à une altitude de $\frac{30528}{4020} = 7,5940$ cm. Le problème est aussi résolu pour l'argent.

Le poids total du corps sera de $9234 + 4020 = 13254$ gr. Son centre de gravité est situé sur la verticale qui joint les centres des bases, à une altitude qu'on obtient en divisant par 13254 la somme $33652,8 + 30528 = 64180,8$; l'altitude est de 4,8424. Le problème est complètement résolu.

Deuxième méthode.

Nous supposons établi que la densité du corps à la distance x au-dessous de sa petite base varie uniformément avec x, selon la formule $d = 10 + \frac{9}{12} x$. Nous avions démontré cette propriété pour la pyramide qui avait été désignée par p ; toutefois la formule est valable dans toute l'étendue du corps total, puisque la composition de l'alliage dépend seulement de x, d'après les données mêmes du problème.

Au lieu de couper le corps en morceaux, essayons de le compléter en prolongeant les arêtes obliques A_0A_a, B_0B_a, C_0C_a, D_0D_a jusqu'à leur point d'intersection z (voir fig. 5) et en supposant que la densité varie encore suivant la loi $d = 10 + \frac{9}{12} x$ au-dessus de la petite base, où x prendra des valeurs négatives. Nous désignerons par c le corps donné, par c' la pyramide additionnelle qui le surmonte, et par $C = c + c'$ le corps ainsi complété.

Pour trouver la hauteur h' de z au-dessus de la petite base, nous utilisons la proportion $\frac{h'}{h+h'} = \frac{C_aD_a}{C_0D_0} = \frac{9}{12}$, que démontre la figure ; h est la hauteur du corps donné, 12 cm. ; nous tirons de cette proportion $\frac{h'}{h} = \frac{9}{12-9} = 3$ soit $h' = 3h = 36$ cm.

Pour trouver la densité en z, il nous faut faire, dans la formule pour d, $x = -36$, et nous trouvons le résultat étrange $d = 10 - \frac{9}{12} 36 = -17$, densité négative.

Mais ceci nous apprend qu'il suffit d'augmenter partout de 17 la densité du corps C pour en faire un corps C_1 assimilable à une pyramide homogène Q_1 à 4 dimensions, comme nous l'avions fait pour la pyramide p''.

Désignant par y la distance d'un point quelconque au sommet z, en aura $y = x + h' = x + 36$ et pour la densité d_1 en un tel point de C_1 $d_1 = 17 + d = 27 + \frac{9}{12}(y - 36) = \frac{9}{12} y$.

La pyramide à 4 dimensions Q_1 sera un corps homogène dont la hauteur mesure $h + h' = 48$ cm. et dont une section quelconque menée parallèlement à la base à la distance y au-dessous du sommet a comme longueur $\frac{A_0 B_0}{h + h'} y = \frac{12}{48} y$, comme largeur $\frac{B_0 C_0}{h + h'} y = \frac{8}{48} y$ et comme troisième dimension $d_1 = \frac{9}{12} y = \frac{36}{48} y$.

Le poids de C_1 sera par conséquent égal au produit de la base

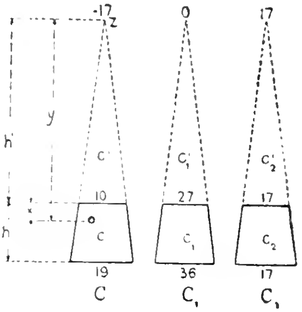


Fig. 5.

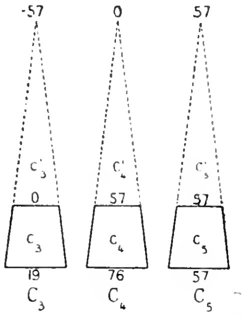


Fig. 6.

$12 \times 8 \times 36$ de Q_1 par 12, quart de la hauteur $h + h'$, donc 41472 gr., et l'altitude G_1 de son centre de gravité 9,6, cinquième partie de $h + h'$.

On passera au poids m'_1 de la partie supérieure c'_1 correspondant à c' de C_1, soit à la capacité de la partie supérieure q'_1 de Q_1 en multipliant M_1 par la quatrième puissance du rapport des dimensions des corps semblables à 4 dimensions, c'est-à-dire par $\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$, ce qui donnera $m'_1 = 13122$ gr. L'altitude g'_1 du centre de gravité de c'_1 sera égale à $h + \frac{h'}{5} = 12 + \frac{36}{5} = 19{,}2$.

Soustrayant 13122 de 41472, on obtient 28350 pour le poids m_1 de la partie inférieure c_1 correspondant à c) de C_1, tandis que l'altitude g_1 du centre de gravité de c_1 sera donnée par relation $M_1 G_1 = m'_1 g'_1 + m_1 g_1$ soit, en remarquant que M_1, m'_1 et m_1 sont entre eux comme les nombres 256, 81 et $256 - 81 = 175$,

$$256 \times 9{,}6 = 81 \times 19{,}2 + 175\, g_1$$
$$\text{d'où } 175\, g_1 = 2457{,}6 - 1555{,}2 = 902{,}4.$$
$$\text{soit } 700\, g_1 = 3609{,}6 \text{ ou } g_1 = \frac{36{,}096}{7} \text{ cm.}$$

Nous introduirons encore un corps homogène C_2 de mêmes dimensions que le corps C, mais ayant partout la densité 17 ; nous y distinguerons encore deux parties, c_2 et c'_2, correspondant à c et c'. Le poids M_2 de C_2 est égal à $17 \times \frac{48}{3} \times 12 \times 8 = 26112$ gr., le poids m'_2 de c'_2 à $\left(\frac{3}{4}\right)^3 26112 = 11016$ gr., le poids m_2 de c_2 à $26112 - 11016 = 15096$ gr. L'altitude G_2 du centre de gravité de C_2 est de $\frac{1}{4} 48 = 12$ cm.; l'altitude g'_2 du centre de gravité de c'_2 est $12 + \frac{1}{4} 36 = 21$ cm.; l'altitude g_2 du centre de gravité de c_2 s'obtient par la relation $M_2 G_2 = m'_2 g'_2 + m_2 g_2$ soit, en remarquant que M_2, m'_2 et m_2 sont entre eux comme les nombres 64, 27 et $64 - 27 = 37$,

$$64 \times 12 = 27 \times 21 + 37\, g_2$$

$$\text{d'où } 37 g_2 = 768 - 567, \text{ soit } g_2 = \frac{201}{37}.$$

Tout est prêt pour la résolution de notre problème en ce qui concerne la masse totale du corps donné c. C'est que le corps c_1 peut être considéré comme la somme des corps c_2 et c; on doit avoir $m_1 = m_2 + m$ et $m_1 g_1 = m_2 g_2 + mg$, m étant le poids de c et g l'altitude de son centre de gravité ; on trouve

$$m = m_1 - m_2 = 28350 - 15096 = 13254 \text{ gr.}$$

$$mg = m_1 g_1 - m_2 g_2 = 28350 \frac{36{,}096}{7} - 15096 \frac{201}{37}$$

$$13254\, g = 4050 \times 36{,}096 - 408 \times 201,$$

$$\text{d'où } g = \frac{146188{,}8 - 82008}{13254} = 4{,}8424.$$

En outre, tout le travail de raisonnement qui a été fait jusqu'ici va nous servir sans autre pour traiter le problème de l'or. Nous supposerons que par un procédé chimique nous ayons pu dissoudre et enlever tout l'argent du corps c; il restera un corps spongieux c_3 (voir fig. 6) de constitution analogue à celle de la pyramide p_1 (utilisée dans la 1re méthode), dont la densité moyenne à l'altitude x répond à la formule $d_3 = \frac{19}{12} x$. Ceci nous conduira à introduire successivement :

Un corps c'_3 de mêmes dimensions que c' et formant avec c_3 une pyramide C_3 dont la densité, répondant encore à la formule précédente, atteint au sommet la valeur négative -57 ;

un corps c_4 de mêmes dimensions que c_1 et dont la densité atteint 57 en haut et 76 en bas, donc des valeurs $\frac{19}{9}$ fois plus fortes que celles de c_1 ; le poids m_4 de ce corps sera donc $\frac{19}{9}\, 28350 =$

59850 gr., tandis que l'altitude g_4 de son centre de gravité reste $\frac{36,096}{7}$ cm.;

un corps homogène c_5 de mêmes dimensions que c_2, mais de densité 57, donc $\frac{57}{17}$ fois plus lourd; son poids m_5 sera par conséquent $\frac{57}{17}$ 15096 = 50616 gr., tandis que l'altitude g_5 de son centre de gravité reste $\frac{201}{37}$ cm.

Nous arriverons ainsi à $m_3 = m_4 - m_5 = 59850 - 50616 = 9234$ gr. comme poids de l'or du corps c, et aux relations suivantes pour l'altitude g_3 de son centre de gravité :

$$m_2 g_3 = m_4 g_4 - m_5 g_5 = 59850 \frac{36,096}{7} - 50616 \frac{201}{37}$$

$$9234 g_3 = 8550 \times 36,096 - 1368 \times 201 = 33652,8 \; ,$$

d'où $g_3 = 3,6444$ cm.

Quant à l'argent du corps c, son poids sera

$$m - m_2 = 13254 - 9234 = 4020 \text{ gr.}$$

et l'altitude de son centre de gravité

$$\frac{mg - m_2 g_2}{m - m_3} \quad \text{soit} \quad \frac{64180,8 - 33652,8}{4020} = 7,5940 \text{ cm.}$$

On voit que cette seconde méthode conduit aux mêmes résultats que la première. Les deux méthodes ayant fait intervenir de deux façons très différentes certaines propriétés de la pyramide générale à n dimensions, il y a tout lieu de croire que ces propriétés, établies par induction, sont vraies.

Complément.

Nous nous proposons ici de démontrer par déduction, mais sans le secours du calcul intégral, les propriétés fondamentales de la pyramide à n dimensions :

« La capacité de la pyramide à n dimensions est égale au produit de la base par la $n^{\text{ième}}$ partie de la hauteur;

« la distance de la base au centre de gravité est égale à la $n + 1^{\text{ième}}$ partie de la hauteur. »

Il est à remarquer que n peut aussi être plus petit que 3. Pour $n = 1$ on obtient un segment de droite dont une extrémité fera « sommet » et dont l'autre fera « base »; la « capacité » se réduit à la longueur ou « hauteur », la base étant remplacée par la puissance zéro d'une longueur, c'est-à-dire par l'unité : le centre de gravité sera le point milieu. Pour $n = 2$ on obtient un triangle, dont la surface est égale au produit de la base par la moitié de la hauteur, tandis que la distance de la base au centre de gravité est le tiers de la hauteur.

Désignons par H la hauteur de la pyramide, par B la base et par V la capacité ; écrivons $V = i\,HB$, i étant un facteur constant. Il s'agit de démontrer que $i = \frac{1}{n}$.

A cet effet supposons qu'on agrandisse très peu la pyramide, simplement en appliquant sur sa base à $n - 1$ dimensions une couche d'épaisseur constante e et de capacité Be.

La pyramide augmentée, de capacité V' et de hauteur $H + e$, doit être semblable à la pyramide donnée, de capacité V et de hauteur H : comme elles sont à n dimensions, on aura donc $\frac{V'}{V} = \left(\frac{H+e}{H}\right)^n = \left(1 + \frac{e}{H}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\frac{e}{H} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{e}{H}\right)^2 \cdots + \left(\frac{e}{H}\right)^n$ en développant d'après la loi du binôme de Newton. $\frac{e}{H}$ étant supposé très petit, nous en négligerons les puissances supérieures et nous poserons simplement

$$V' = V + Vn\,\frac{e}{H}\,, \qquad \text{soit}$$

$$V' - V = Vn\,\frac{e}{H} = iHBn\,\frac{e}{H} = inBe$$

pour l'agrandissement de la pyramide donnée. Or pour que ce résultat soit compatible avec Be, capacité de la couche ajoutée, il faut qu'on ait

$$in = 1 \qquad \text{soit} \qquad i = \frac{1}{n}\,,$$

le premier point qu'il fallait démontrer.

Désignons par jH la distance du centre de gravité de la pyramide donnée à la base B, j étant un facteur constant. Il s'agit de démontrer encore que $j = \frac{1}{n+1}$.

Dans ce but continuons à étudier l'effet de la couche additionnelle d'épaisseur e. Cette épaisseur étant très faible par rapport à H, on peut dire que l'adjonction de la couche doit augmenter de HBe le moment de la pyramide par rapport à son sommet, moment qui avait pour mesure W le produit de V par la distance $(1 - j)$ H.

La pyramide augmentée restant semblable à la pyramide primitive, on aura

$$\frac{W'}{W} = \frac{H'V'}{HV} = \left(\frac{H+e}{H}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{e}{H}\right)^{n+1} = 1 + (n+1)\frac{e}{H} \text{ en négli-}$$

geant les puissances supérieures de $\frac{e}{H}$. On aura donc

$$W' - W = W(n+1)\frac{e}{H} = (1-j)(n+1)Ve = (1-j)\frac{n+1}{n}\,HBe$$

pour l'agrandissement du moment, et ce résultat ne sera compatible avec HBe, moment de la couche$_1$ que si l'on a

$$(1-j)\frac{n+1}{n} = 1 \qquad \text{soit} \quad 1 - j = \frac{n}{n+1} \quad \text{ou } j = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

le second point qu'il fallait démontrer.

J. Sauter et F. Trosset.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Pri la funkcia ekvacio $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

En mia lasta artikolo (*L'Enseignement mathématique*, 15 sept. 1913, p. 390), mi serĉis ĉiujn mezureblajn solvojn de la ekvacio $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Mi, por tio, pruvis ke se iu mezurebla solvo estas nula kiam x estas racionala, ĝi estas ĉie nula.

Sed mi ĵus rimarkis ke tiu lasta teoremo estis jam pruvita en 1907 de Sro Lebesgue (*Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, vol. XLII, 10 marzo 1907) kaj mi deziras atentigi pri tiu antaŭeco. Lia solvo estas cetere malsimila kaj staras sur la nocio « aro el dua katogorio ».

Poitiers, 1 février 1914. M. Fréchet.

CHRONIQUE

Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique.

Plus de cent soixante mathématiciens appartenant aux principaux pays de l'Europe viendront suivre les travaux de la *Conférence Internationale de l'Enseignement mathématique* qui aura lieu à Paris du 1er au 4 avril 1914. Nos lecteurs connaissent le programme comprenant principalement la présentation et la discussion des Rapports de M. Beke, sur l'« Introduction des premières notions du Calcul des dérivées et des fonctions primitives dans l'enseignement secondaire », et de M. Staeckel, sur « l'Enseignement mathématique dans les Ecoles d'ingénieurs ».

Les deux Rapports seront imprimés en temps utile afin de pouvoir être distribués aux participants, au début de la réunion ; ils seront reproduits avec les discours et les conférences de la séance d'ouverture, dans l'*Enseignement mathématique* du mois de mai qui sera entièrement consacré aux travaux de la Conférence.

Allemagne. — La Sous-commission allemande vient de publier deux nouveaux fascicules de ses monographies sur l'enseignement mathématique. Tous deux font partie du tome V consacré aux mathématiques dans les écoles primaires et les écoles normales ; l'un, par MM. H. Dressler et K. Körner concerne les écoles primaires et normales de Saxe, de Thuringe et de Anhalt ; l'autre, par M. W. Lietzmann, a pour objet l'organisation de l'enseignement mathématique dans les écoles primaires et primaires supérieures de Prusse.

Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten in Sachsen, Thüringen und Anhalt, von Prof. H. Dressler (Dresden) und Dr. K. Körner (Wolfenbüttel). Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, Band V, Heft 4, v-132 p.

Die Organisation des mathematischen Unterrichtes in den preussischen Volks- und Mittelschulen, von Dr. W. Lietzmann (Barmen). Abhandlungen, Band V, Heft 6, v-106 p. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Académie royale de Belgique. — Concours de 1915.

La Classe des Sciences met au concours les questions suivantes :

On demande une contribution importante à la géométrie infinitésimale des surfaces courbes. — Prix : 800 fr.

Résumer les travaux sur les systèmes de coniques dans l'espace et faire de nouvelles recherches sur ces systèmes. — Prix : 800 fr.

Les mémoires devront être adressés à M. le Secrétaire perpétuel, au Palais des Académies à Bruxelles, avant le 1er août 1915.

Tricentenaire des logarithmes.

C'est en 1614 que Jean Neper (John Napier) publia à Edimbourg ses tables de logarithmes sous le titre : *Logarithmorum Canonis Mirifici Descriptio.* Ainsi que nous l'avions annoncé [1] la Société Royale d'Edimbourg tient à commémorer cet événement historique en organisant une série de séances qui auront lieu le 24 juillet et les jours suivants et auxquelles elle convie les mathématiciens, les Universités et les Sociétés scientifiques.

Les adhésions et les souscriptions en faveur du volume qui sera publié à la mémoire de Neper doivent être adressées au secrétaire-général M. C. G. Knott, Société Royale d'Edimbourg.

La Société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire et la préparation pédagogique des maîtres secondaires.

Dans sa réunion tenue à *Baden* les 5 et 6 octobre 1913, la Société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire a consacré une séance à la préparation pédagogique des candidats à l'enseignement. La discussion était basée sur les rapports très documentés de MM. v. Wyss et Brandenberger (Zurich) ; ce dernier a examiné la question spécialement au point de vue de l'enseignement mathématique.

L'assemblée a adopté les *vœux suivants destinés aux autorités scolaires.* Le Comité vient de les transmettre aux Départements cantonaux en un mémoire dont voici les principaux extraits :

« La Société suisse des Professeurs de l'enseignement secondaire déclare qu'une préparation pédagogique est nécessaire aux futurs maîtres de l'enseignement secondaire. S'adressant aux Départements de l'Instruction publique des cantons, aux recteurs des Universités, aux directeurs et au personnel enseignant des

[1] *Tricentenaire des logarithmes. J. Burgi et J. Neper.* L'*Ens. math.* du 15 juillet 1913, p. 255.

écoles secondaires de la Suisse, elle formule les desiderata[1] suivants, qu'elle justifie par un bref exposé des motifs.

« Elle demande aux Universités d'introduire dans leurs programmes à l'usage des futurs maîtres de l'enseignement secondaire des cours spéciaux, où on leur enseignera *l'art d'enseigner*. A ces cours théoriques seront joints des exercices pratiques. Ces cours seront obligatoires. Avec une durée de deux semestres, ils consacreront deux heures par semaine à la méthode d'enseigner chaque branche du programme. On y traitera entre autres des bases psychologiques de l'enseignement. La direction de ces cours sera confiée, sauf exception, à des maîtres de l'enseignement secondaire.

« Dans les plans d'études, on recommandera aux candidats à l'enseignement la fréquentation des cours de pédagogie générale et de psychologie. Si les circonstances s'y prêtent, on organisera des cours et des exercices spéciaux pour les maîtres qui se destinent à enseigner dans les gymnases.

« Dans chaque école, le directeur assistera le plus souvent possible aux leçons des jeunes maîtres qui débutent sous sa direction, et les aidera de ses conseils. Les dispositions nécessaires seront prises pour que les maîtres eux-mêmes, les jeunes spécialement, puissent assister de temps à autre aux leçons de leurs collègues, aussi bien dans le collège auquel ils appartiennent que dans les autres. »

Voici, dans l'*exposé des motifs*, le passage concernant les mathématiques :

A cette heure, en Suisse, les Universités de Zurich, de Bâle et de Lausanne ont seules posé les bases d'un enseignement tel que nous le réclamons pour les futurs professeurs de l'ordre secondaire. Nous attirons spécialement l'attention des pédagogues sur le cours inauguré par M. le D^r Brandenberger à l'Ecole industrielle de Zurich.

« Stimulée par l'activité déployée par la Commission internationale de l'enseignement mathématique, la Société suisse des mathématiciens a entrepris en 1910 une enquête dont les résultats ont été constatés à l'assemblée de Zurich en 1912. Il est établi que les maîtres chargés de cet enseignement ont souffert, au début de leur carrière, d'une préparation pédagogique insuffisante ; ils se plaignent de cette lacune qui leur a nui gravement ainsi qu'à leurs élèves. Sur une démarche de la Société suisse des Professeurs de mathématiques, le Conseil de l'Ecole polytechnique a institué pour l'année 1912-1913 un cours nouveau Introduction à l'enseignement des mathématiques, destiné aux élèves

[1] Ces desiderata viennent à l'appui des *Vœux et propositions de réforme* formulés en 1913 par la Sous-commission suisse de l'Enseignement mathématique. Voir les Rapports suisses. Annexe. — N. d. l. R.

de la section mathématique de l'Ecole polytechnique, et l'a confié à M. Brandenberger.

« Pendant l'année écoulée, les membres de ce conseil et les professeurs de la VIIIe division ont pu se convaincre, en assistant aux leçons et aux exercices, de l'utilité de ce cours, qui, de provisoire qu'il était, deviendra dès cette année définitif. Dans le premier semestre, M. Brandenberger a traité de questions relevant de la psychologie, de la logique, de la didactique générale. Dans le second, il a enseigné la manière d'enseigner les mathématiques. Il a mis sa théorie en corrélation étroite avec l'enseignement qu'il donne lui-même à l'école. Comme dans les sciences naturelles la théorie est complétée par des expériences et des excursions, de même la discussion scientifique au cours de M. Brandenberger est partie des observations faites dans les leçons auxquelles assistaient les étudiants, ou dans celles qu'ils donnaient eux-mêmes. Ou bien le sujet était repris, présenté d'une manière plus facile à saisir et complété par des applications.

« Contrairement aux craintes exprimées, ces exercices ne troublèrent pas l'enseignement et n'en compromirent pas le succès. M. Brandenberger attribue cet heureux résultat, entre autres, au fait que la direction du cours a été remise non pas aux mains d'un professeur de l'Université, mais appartenait à un maître secondaire. Il est bien évident que seul le maître de classe est en mesure de donner au débutant les indications nécessaires sur le niveau des élèves. Connaissant ceux-ci, il est aussi plus capable d'apprécier la leçon qui leur est donnée.

« La discussion qui suivit les exposés de MM. de Wyss et Brandenberger a montré que leurs auditeurs admettaient pleinement leurs conclusions, entre autres celle-ci : il faut créer des cours d'introduction dans le genre de ceux que dirige M. Brandenberger. M. de Wyss avait proposé que le cours de psychologie fût reconnu obligatoire pour les étudiants qui se destinent à l'enseignement. Considérant la grande somme de travail qui est exigée de ceux-ci, l'assemblée déclara que ce cours ne serait pas obligatoire, mais que la fréquentation en devait être simplement recommandée. Mais on fut unanime à demander que dans les cours d'introduction les bases psychologiques de chaque enseignement spécial fussent établies.

« Comme le temps que l'étudiant peut consacrer à sa préparation pédagogique avant les examens est forcément limité, il sera d'autant plus nécessaire qu'une fois maître il soit introduit dans la carrière, dirigé, suivi, conseillé au cours de ses leçons par le directeur de l'école dans laquelle il aura débuté. Dans les établissements d'instruction publique où le règlement n'impose pas aux directeur l'obligation d'assister aux leçons, les autorités sont invitées à le décharger pour qu'il puisse consacrer le temps nécessaire à cette branche très importante de son activité. En outre, les maîtres attachés à l'école, les jeunes tout au moins, doivent être astreints à assister aux leçons de leurs collègues dans le même établissement et dans d'autres, autant que faire se pourra. Il est désirable enfin qu'ils voient le travail accompli par leurs élèves dans d'autres branches que les leurs et les résultats auxquels ils parviennent. Ils apprendront ainsi comment on enseigne les autres sciences; ce sera pour eux un stimulant et le meilleur moyen d'éviter la routine. »

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Angleterre. — M. H. F. Baker a été nommé professeur d'astronomie et de géométrie à l'Université de Cambridge en remplacement de Sir Robert Ball, décédé.

M. H. Lamb, professeur à l'Université de Manchester, a été nommé membre honoraire de la Société Royale d'Edimbourg.

Autriche. — M. H. Tietze a été nommé professeur de Mathématiques à l'Ecole technique supérieure allemande de Brünn.

Etats-Unis. — M. F. A. Carpentier est nommé professeur extraordinaire de Mathématiques à l'Université de Washington.

M. G. E. Hale, directeur de l'Observatoire solaire du Mount Wilson, a été nommé membre honoraire de la Société Royale d'Edimbourg.

M. S. E. Rose a été nommé professeur ordinaire de Mathématiques à l'Université de l'Etat d'Ohio.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Compte rendu des travaux des Sous-commissions nationales.

(17e article)

ALLEMAGNE

Psychologie et enseignement mathématique.

Psychologie und mathematischer Unterricht[1], von Dr. D. Katz, Privatdozent a. d. Universität Göttingen. — Cette étude fort suggestive du Dr. Katz mérite d'être signalée tout particulièrement aux professeurs des différents degrés de l'enseignement mathématique. Jusqu'ici la psychologie expéri-

[1] Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland, Band III, Heft 8. — 1 fasc. de 120 p. et 12 fig., 3 M. 20; B. G. Teubner, Leipzig.

mentale ne s'est encore guère occupée que de l'enseignement élémentaire. L'auteur se borne donc surtout à ce dernier. Il n'aborde pas des questions telles que la fantaisie et l'imagination qui jouent un rôle important dans l'enseignement secondaire et supérieur. Mais en examinant ce volume, les professeurs des écoles moyennes seront précisément amenés à étudier à leur point de vue des questions analogues à celles que l'auteur développe pour l'enseignement élémentaire.

Dans l'Introduction l'auteur s'élève avec raison contre le logigisme pédagogique dans l'enseignement mathématique. Son exposé est divisé en trois parties. Dans la première, qui est la plus importante, il étudie *la psychologie mathématique et l'enseignement mathématique* en montrant d'abord comment se développent chez l'enfant la représentation du nombre et la conception de l'espace. Puis viennent, la méthode de travail des mathématiciens, d'après l'enquête publiée par M. Fehr avec la collaboration de MM. Claparède et Flournoy ; la psychologie des grands calculateurs ; l'enseignement chez les enfants arriérés ; la mesure de la fatigue ; etc.

La seconde partie est une contribution à la psychologie du Dessin technique et artistique, tandis que la troisième et dernière partie de l'ouvrage traite de la psychologie et de la pédagogie dans la préparation des candidats à l'enseignement. C. Brandenberger (Zurich).

ILES BRITANNIQUES

N° 30. — Les mathématiques dans les écoles secondaires municipales.

Course in Mathematics for Municipal Secondary Schools [1], by M. L. M. Jones, Head Master at the Central Secondary School, Suffolk Street, Birmingham. — Dans ce rapport l'auteur expose le programme de mathématiques d'une des écoles secondaires municipales dont il existe un assez grand nombre en Angleterre. Celle dont il est question ici a environ 300 élèves de 11 à 17 ans. L'enseignement doit y présenter avant tout un caractère utilitaire, on devrait insister spécialement sur les points suivants : exactitude dans les calculs ordinaires ; usage des logarithmes, de la règle à calcul, etc. ; résolution des équations linéaires à une et plusieurs inconnues, et des équations du second degré ; connaissance des propriétés des principales figures géométriques, triangles, parallélogrammes, cercles et également, jusqu'à un certain point, des sections coniques ; résolution des triangles ; arpentage ; équilibre des forces ; dynamique élémentaire ; énergie et ses transformations ; mouvement harmonique simple et ses relations au mouvement circulaire ; connaissance suffisante du calcul infinitésimal pour permettre la différenciation des fonctions simples, le calcul de quelques intégrales se rencontrant en physique, en chimie ou dans les travaux de l'ingénieur, et la détermination de maxima et minima, d'aires, de volumes, de centres de gravité et de moments d'inertie ; représentations graphiques. La notion de fonction spécialement est de première importance. On devrait éviter tout travail présentant un caractère purement artificiel, et rechercher plutôt la simplicité que la complication.

L'arithmétique et l'algèbre sont traitées simultanément. On débutera de

[1] 1 fasc. 15 p. ; prix 1 1/2 d. ; Wyman and Sons, Londres.

préférence par les fractions décimales, car les élèves ne connaissent pas suffisamment ce sujet avant leur entrée à l'école. On continuera par les opérations abrégées, puis on abordera les proportions et pourcentages. L'enseignement des proportions est difficile, c'est pourquoi on le néglige souvent dans les écoles ; on préfère généralement la méthode de réduction à l'unité. L'étude des proportions cependant présente un intérêt particulier, car elle introduit la notion de rapport qui conduit elle-même à la notion de fonction. L'usage des lettres se fera tout d'abord à propos de problèmes conduisant à de simples équations, et comme un moyen de simplifier le langage : puis, l'utilité des opérations algébriques se fera sentir, on évitera toutefois les exemples compliqués. Enfin le champ de la première année se terminera par la résolution des systèmes d'équations, en traitant aussi la question graphiquement. Les logarithmes pourront être introduits à la fin de la première année ou au commencement de la seconde. Le travail de seconde année consistera pour l'arithmétique en problèmes sur les intérêts, escomptes et opérations financières diverses, et pour l'algèbre en problèmes variés conduisant à la résolution d'équations ou de systèmes d'équations. On s'occupera aussi des équations du second degré, en les résolvant tout d'abord par le moyen de la décomposition en facteurs, et des éléments de trigonométrie. Les années suivantes, on traitera les équations simultanées du second degré, les puissances et racines, les progressions arithmétiques et géométriques. On pourra aussi consacrer quelques heures aux permutations et combinaisons, au binôme et aux symboles e^x et $\log e^x$. En trigonométrie, après la résolution des triangles rectangles, on passera aux triangles quelconques à l'aide des formules $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. Quoique ces formules suffisent pour les applications, il sera avantageux d'en introduire d'autres plus commodes pour les calculs logarithmiques. Ajoutons encore les formules d'addition, les relations entre les fonctions de A et 2A ou $\frac{A}{2}$ et l'expression de l'aire d'un triangle et des rayons des cercles inscrits et circonscrits. On évitera par contre les équations trigonométriques compliquées et en général toute manipulation trigonométrique présentant un caractère plus ou moins artificiel. Il faut recommander enfin les opérations pratiques sur le terrain, arpentage, relevés de plans, etc.

En géométrie, le travail sera tout d'abord en grande partie expérimental, puis on établira les preuves géométriques des propriétés trouvées expérimentalement. Pendant cette première période, on se servira surtout de deux méthodes : vérification expérimentale de déductions géométriques et démonstrations géométriques de généralisations expérimentales. La première année suffira pour traiter de cette manière la plus grande partie du livre I d'Euclide. Durant la seconde année les méthodes déductives seront plus fréquemment utilisées, le plan d'études s'étendra jusqu'au livre III d'Euclide y compris. Les années suivantes, les procédés employés seront encore plus purement déductifs. Les livres IV et V pourront être considérablement raccourcis. On s'occupera aussi des propriétés de quelques autres figures, par exemple de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole. Les applications graphiques seront nombreuses ; en outre un certain temps sera consacré au dessin géométrique mécanique. Les représentations graphiques présenteront un intérêt spécial comme illustrant la notion de fonction et pouvant servir de base au calcul infinitésimal. On étudiera surtout les lignes $y = mx + c$, $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = a + bx + cx^2$, $y = ax^n$, cette dernière conduisant à la courbe logarithmique. On aura soin d'illustrer cette étude par des applications pratiques tirées de la physique.

Le calcul infinitésimal pourrait s'introduire de bonne heure. Certains maîtres préfèrent pousser tout d'abord l'étude de l'algèbre et de la trigonométrie jusqu'à un certain point. Cependant, le procédé graphique constitue bien la plus simple méthode d'introduction du calcul différentiel et intégral. On calculera ensuite les dérivées et intégrales ordinaires en les appliquant à l'étude des courbes, maxima et minima, etc. Plus tard, on considérera l'intégrale comme une somme, ce qui permettra la détermination d'aires, volumes, moments d'inertie, centres de gravité, etc.

Aux yeux de quelques-uns ce plan d'études peut paraître un peu considérable, mais on ne doit pas perdre de vue la grande économie de temps qui résulte de la suppression de chapitres inutiles.

N° 31. — Examens pour l'obtention de bourses de mathématiques (Scholarships) à Oxford et Cambridge.

Examinations for Mathematical Scholarships at Oxford and Cambridge [1], by Mr. A. E. Jolliffe, Fellow and Mathematical Lecturer, Corpus Christi College, Oxford, and Mr. G. H. Hardy, Fellow and Mathematical Lecturer, Trinity College, Cambridge.

I. *Oxford.* — Ici les examens pour « Scholarships » en mathématiques sont dirigés par trois groupes de Collèges : 1. Balliol, Queen's, Corpus, St. John's ; 2. University, Merton, Exeter, New College, Hertford ; 3. Magdalen, Brasenose, Christ Church, Worcester.

Parmi les candidats, il s'en trouve parfois d'une force exceptionnelle, mais, d'une façon générale, la moyenne est inférieure à celle de Cambridge.

Jusqu'à ces dernières années, le type d'examens était à peu près le même partout. Ils portaient respectivement sur l'algèbre, la trigonométrie, la géométrie pure, la géométrie analytique et la mécanique (ou calcul différentiel et mécanique). Les questions consistaient généralement en une partie théorique et un problème qui s'y rattachait. Ce système d'examens cependant se transforma considérablement lors de la publication des recommandations de la « Mathematical Association ». Ces recommandations cependant ne sont pas à l'abri de toute critique, elles semblent oublier que l'objet de ces examens de « Scholarship » ne consiste pas à examiner les connaissances d'élèves parvenus à un certain niveau, mais bien à découvrir les candidats possédant des capacités naturelles spéciales. En fait de transformations, on supprima certaines questions de probabilité et de la théorie des nombres ainsi que les démonstrations concernant les développements en séries. Des questions de géométrie moderne, de projection et de dualité apparaissent parfois mais sans qu'on en exige un développement systématique. Les groupes 2 et 3 ont adopté le calcul intégral, mais pas le groupe 1. L'arrangement des questions d'examen a été aussi modifié. D'une façon générale l'auteur voudrait y voir figurer des questions d'une plus grande valeur

[1] 1 fasc. 22 p., prix : 2 d. ; Wyman and Sons, Londres.

éducative. En consultant ces examens, on a l'impression que les maîtres ne cherchent pas à enseigner les mathématiques à leurs élèves, mais qu'ils se contentent de les préparer pour les « scholarships ». Le travail s'en ressent naturellement et les élèves s'occupent trop de formules et pas assez de principes. La préparation de l'algèbre, de la géométrie élémentaire et de la trigonométrie est assez bonne, mais la géométrie analytique, le calcul infinitésimal et la mécanique laissent beaucoup à désirer. En géométrie analytique spécialement, le travail est souvent déplorable. Il faut en chercher la cause dans l'emploi immodéré du papier quadrillé et dans la prédominance des applications métriques et des exemples purement numériques. Dans le calcul différentiel également, les candidats montrent peu d'esprit d'initiative ; en dehors de la routine des formules, ils sont généralement perdus. En ce qui concerne la mécanique, de grands progrès ont été réalisés ces dernières années et l'enseignement en est excellent dans certaines écoles. Bien des candidats cependant ne saisissent pas la portée du sujet et ne savent en appliquer les principes à l'étude des phénomènes réels.

En somme, on peut constater certains défauts d'un ordre général dans l'enseignement des mathématiques : absence d'ordre logique et de clarté, ignorance presque complète de certaines considérations importantes, telles que les dimensions et la symétrie. On laisse parfois de côté des notions de première importance et l'on s'occupe par contre de détails insignifiants ; on envisage le sujet d'une façon trop étroite sans se préoccuper des principes généraux et sans tenir compte des développements qu'il acquerra par la suite.

L'auteur s'élève ensuite contre l'incapacité de la plupart des maîtres des classes inférieures et moyennes des écoles secondaires et contre la grande abondance des mauvais manuels qui se placent avant tout au point de vue des examens et évitent soigneusement de s'en écarter. Les auteurs devraient s'efforcer d'être rigoureux dans leurs discussions et de fournir quelques indications sur les développements ultérieurs du sujet sans cependant cesser d'être à la portée des élèves ; ils ne devraient être ni trop exclusivement pratiques ni trop sévèrement théoriques. Il ne faut pas non plus laisser complètement de côté le point de vue amusant, sans cela l'enseignement risque de devenir trop monotone ; il faut chercher par tous les moyens à intéresser les élèves et à encourager leur esprit d'initiative.

II. *Cambridge*. — Comme on l'a déjà fait remarquer, le niveau des candidats aux examens de « Scholarships » est notablement plus élevé à Cambridge qu'à Oxford. Les « public schools » envoient généralement leurs meilleurs élèves à Cambridge, mais une proportion toujours plus considérable de candidats proviennent d'autres écoles ou d'universités provinciales. Ces derniers ont en général une meilleure préparation.

Relativement aux « Scholarship Examinations », on distingue deux groupes de collèges à Cambridge : Trinity et Pembroke. A la connaissance de l'auteur, il n'y a pas une différence importante entre ces deux sortes d'examens. A Trinity on y a adjoint depuis quelques années une partie théorique dans laquelle le candidat doit exposer quelques sujets sous forme d'essai. A Pembroke il en était de même autrefois, mais actuellement cette partie est supprimée. A part l'essai, l'examen comprend trois parties. Les mathématiques pures concernent plutôt les candidats en sciences et les ingénieurs. Cette partie comprend passablement de calcul intégral, branche généralement mal enseignée à cause principalement des vieilles traditions d'Oxford et de Cambridge qui accordent une absurde priorité au calcul différentiel. Le deuxième examen comprend des problèmes de mathématiques pures du type plus ou moins traditionnel. Le troisième est un examen de mathématiques appliquées.

Ce système d'examens, quoique n'étant pas l'idéal, remplit cependant d'une façon satisfaisante le rôle qu'on lui attribue.

L'auteur nous fait part ensuite de ses impressions sur l'enseignement scolaire. Il est en général du même avis que Mr. Jolliffe, tout en étant un peu moins pessimiste. Les maîtres ne possèdent souvent pas les connaissances mathématiques suffisantes. Ils devraient employer une partie de leur temps à une étude sérieuse de leur branche et même, dans certains cas, à quelques recherches spéciales plutôt que de le consacrer en majeure partie à l'organisation des examens, l'élaboration des programmes, etc.

En géométrie pure, l'enseignement des parties avancées du sujet semble avoir réellement progressé. Par contre l'enseignement de la géométrie élémentaire est abominable. L'abandon des méthodes d'Euclide a été le signal de l'apparition d'une foule de manuels élémentaires dont les auteurs ne semblent pas avoir la plus faible connaissance des principes du sujet. En géométrie analytique l'auteur se rallie aux observations de Mr. Jolliffe. L'enseignement de l'analyse (calcul infinitésimal, algèbre supérieure, séries, trigonométrie analytique) progresse lentement mais d'une façon réelle. L'auteur insiste spécialement sur deux points : on devrait tout d'abord débarrasser les programmes de ces stupidités qu'on avait coutume d'enseigner autrefois sous le titre d'algèbre supérieure et de trigonométrie supérieure. Le second point concerne seulement les meilleurs élèves ; l'enseignement de ces différents sujets devrait leur être présenté dès le début d'une manière rigoureuse. Bien des maîtres s'imaginent à tort qu'un enseignement rigoureux entraîne de trop grandes difficultés. Par contre, les méthodes qu'ils proposent contribuent souvent à fausser l'esprit de leurs élèves, ce dont ils se ressentent durant toutes leurs études.

Comme exemples de ces pseudo-démonstrations, l'auteur nous donne en appendice quelques citations tirées de deux livres récents sur le calcul infinitésimal.

N° 32. — Droites parallèles et la méthode de direction.

Parallel Straight Lines and the Method of Direction [1], by Mr. T. James Garstang, Senior Mathematical Master, Bedales School, Petersfield.

En Angleterre, les réformes de l'enseignement de la géométrie dans les écoles n'ont pas produit toute l'amélioration désirable. Dans la question des parallèles, spécialement, les diverses tentatives faites pour remplacer la méthode d'Euclide par d'autres procédés sont condamnables à juste titre. Sous le titre de « Teaching of Geometry and Graphic Algebra in Secondary Schools », le « Board of Education » publia en mars 1909 une circulaire proposant de baser la question des parallèles sur la notion de direction et encourageant ainsi les maîtres à adopter une méthode fausse et par conséquent nuisible à l'enseignement. Il n'est en effet pas possible de donner une idée claire de parallèles en les considérant comme des lignes ayant la même

[1] 1 fasc. 8 p., prix : 1 d. ; Wyman and Sons, Londres.

direction. Dans la leçon de géométrie on apprendra aux élèves que des verticales ont la même direction et par conséquent sont parallèles et dans la leçon de géographie on leur dira qu'elles concourent en un même point qui est le centre de la terre. D'autres inconvénients résultent de l'assimilation de la surface terrestre à une surface plane. Les élèves doivent réaliser que l'existence des parallèles implique l'admission d'un genre de surfaces différentes des surfaces sphériques dans lesquelles les notions de verticale et d'horizontale n'interviennent plus nécessairement. L'auteur nous expose un procédé géométrique montrant la non-évidence de l'axiome d'Euclide. Une conception claire des parallèles ne peut s'obtenir sans faire appel à la notion de l'infini, et personne n'a pu établir un critérium sur l'égalité de deux directions sans faire intervenir, d'une façon ou d'une autre, quelque propriété des parallèles déjà prouvées par Euclide.

Cette controverse sur la question des parallèles est au moins aussi vieille qu'Aristote. Plus récemment, divers auteurs s'en sont occupés. Killing a fait des recherches sur la théorie de la direction en remontant jusqu'à Leibniz. Gauss s'est prononcé contre cette théorie ainsi que De Morgan, dont l'opinion se trouve exprimée dans une revue de la Géométrie de Wilson (Athenæum, July 18, 1868); on en trouvera des extraits dans l'Appendice II de « Euclid and his Modern Rivals » par Dodgson. Les critiques de De Morgan ne furent pas relevées, et dans les éditions suivantes de la Géométrie de Wilson, la méthode de direction fut abandonnée.

A l'assemblée générale de l' « Association for the Improvement of Geometrical Teaching » (actuellement la « mathematical Association ») tenue le 17 janvier 1891, Mr. E. T. Dixon exposa le résumé de son livre sur les « Foundations of Geometry » qui introduisait la méthode de direction sous une forme modifiée de façon à tenir compte de quelques-unes des objections de De Morgan. Mais, comme précédemment, cette méthode échoua, car elle ne fournissait aucun critérium, pratique ou logique, de la notion de « même direction.

Pour ce qui concerne les Etats-Unis, on consultera avec intérêt la Circulaire N° 3, 1890, sur le « Teaching and History of Mathematics in the United States » par Prof. Cajori. Dans le chapitre « On Parallel Lines and Allied Subjects » on trouvera une critique des nombreuses tentatives erronées qui furent faites pour remplacer la méthode d'Euclide.

Si l'on désire se convaincre davantage, on trouvera encore dans « Euclid and his Modern Rivals » de Dogson la critique détaillée des trois Géométries de Wilson, Pierce et Willock respectivement, qui emploient la méthode de direction pour les parallèles.

Actuellement on convient assez généralement que les éléments d'Euclide ne conviennent pas pour les débutants en géométrie, mais ce n'est pas une raison pour introduire une des parties fondamentales de cette science en faisant usage d'une méthode incorrecte. Beaucoup estiment que, dans l'enseignement élémentaire de la géométrie, on devrait admettre explicitement un plus grand nombre de faits. A cet égard, nous pouvons rappeler les méthodes proposées par Méray, Poincaré, Hadamard, Bourlet, Borel et d'autres auteurs en France, dont les procédés constituent une première introduction à la notion de groupe.

N° 33. — Les mathématiques pratiques dans les « Public Schools ».

Practical Mathematics at Public Schools[1], par Mr. H. H. Turner, Savilian Professor of Astronomy in Oxford University; Mr. R. C. Fawdry, Assistant Master at Clifton College; Mr. A. W. Siddons, Assistant Master at Harrow School; Mr. F. W. Sanderson, Head Master of Oundle School; and Mr. G. M. Bell, Assistant Master at Winchester College.

Dans une introduction, le professeur H. H. Turner nous donne tout d'abord un aperçu général du sujet. Durant ces dernières années, l'enseignement des mathématiques a subi de notables transformations. On s'est aperçu que les anciennes méthodes, tout en pouvant convenir aux « mathématiciens-nés » n'étaient guère recommandables pour les élèves de force moyenne. Dès lors on s'est efforcé de remédier à cet état de choses et jusqu'à présent les résultats ont été certainement encourageants. En outre le gain que peut retirer l'élève moyen de ces changements n'est pas contre-balancé par une perte correspondante du « mathématicien-né ». En effet, l'élève habile peut être découvert par les nouvelles méthodes d'enseignement aussi bien, si ce n'est mieux, que par les anciennes; on peut alors s'occuper de lui d'une façon spéciale.

L'idée fondamentale qui sert de base à ces nouvelles méthodes est la suivante : Un élève saisira beaucoup plus facilement les procédés mathématiques si on les lui présente sous une forme pratique. Malheureusement, ce principe, excellent en lui-même, donne lieu à certaines objections lorsqu'on tient compte d'autres principes importants tels que celui de l'ordre logique, par exemple. Ainsi la méthode d'Euclide, conforme à ce dernier principe, devra être modifiée si l'on désire introduire la géométrie sous une forme pratique. Jusqu'à quel point cette modification doit-elle être poussée ? C'est là une question qui n'est pas facile à trancher, et les opinions sont fort diverses. Certains abandonnent complètement la méthode, d'autres la maintiennent en partie, d'autres enfin se contentent d'introduire en classe quelques modèles et appareils divers. Dans tous les cas, l'introduction des méthodes pratiques a contribué à éveiller l'intérêt des élèves, à développer leur initiative et à stimuler l'enseignement.

Ce qui distingue encore les nouveaux procédés d'enseignement des anciens, c'est le principe de la coopération. Les élèves travaillent par groupes de deux ou trois, et si cette collaboration est bien comprise, elle peut présenter de réels avantages.

Il est un point, cependant, relativement auquel l'ancien système paraît préférable, à première vue du moins. C'est qu'avec les nouvelles méthodes pratiques les progrès sont moins rapides ou en tous cas moins évidents. Mais s'ils perdent en rapidité, nous feront remarquer les partisans du nouveau système, ils sont par contre plus sûrs et plus réels.

Il est incontestable que les procédés pratiques prennent plus de temps que les autres, mais il serait facile de leur consacrer un nombre d'heures plus considérable, car ils sont aussi moins fatigants.

Au point de vue des examens, il faut constater que ces nouvelles méthodes sont plus difficiles à juger et à apprécier que les anciennes. Un élève peut

[1] 1 fasc. 39 p., prix : 2 $1/2$ d.; Wyman and Sons, Londres.

avoir compris et être cependant incapable de montrer qu'il a compris. Celui qui se contente d'apprendre par cœur un certain nombre de faits peut paraître à l'examen sous un jour plus favorable que celui qui possède de sérieuses connaissances pratiques. Par conséquent, il ne faut pas attacher trop d'importance aux résultats des examens. On modifiera plutôt ceux-ci de façon à les adapter autant que possible au nouvel état de chose. Cette modification présentera sans doute de grandes difficultés, peut-être même insurmontables ; mais en tous cas il serait regrettable de transformer un excellent système d'enseignement uniquement parce qu'il ne s'adapte pas au système d'examens en vigueur.

Les nouvelles méthodes pratiques présentent encore un sérieux avantage, elles permettent d'établir une corrélation plus étroite entre les maîtres de mathématiques et ceux de sciences (spécialement de physique). Dans plusieurs écoles, cette coopération des maîtres a été organisée d'une façon systématique, d'autres suivront sans doute le pas ; en outre, les séances simultanées de la « Mathematical Association » et de l' « Association of Science Masters » activeront encore le mouvement.

Somme toute, les procédés pratiques introduits dans l'enseignement des mathématiques semblent bien avoir fait leurs preuves, ils se sont montrés jusqu'à présent sous leur côté favorable et les maîtres eux-mêmes en retirent une certaine stimulation pour leur enseignement.

Après l'introduction du professeur H. H. Turner que nous venons de résumer ci-dessus, le rapport nous expose d'une façon plus détaillée l'enseignement des mathématiques pratiques dans différentes écoles (Clifton College, Harrow School, Oundle School, Winchester College). Nous y renvoyons le lecteur qui désirerait obtenir de plus amples renseignements sur cette question, car nous devons nous borner, faute de place, aux indications générales qui précèdent.

J.-P. Dumur (Genève).

Cours universitaires.

Paris. *Faculté des Sciences.* — Cours de Mathématiques du 2e semestre 1913-1914. (Ouverture : 2 mars 1914). — Mécanique analytique et mécanique céleste. — P. Appell : Figures d'équilibre des masses fluides en rotation. Application à la forme des corps célestes (2 h.). — Analyse supérieure et algèbre supérieure. — E. Picard : Intégrales multiples et en particulier leurs applications à la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables (2 h.). — Calcul différentiel et Calcul intégral. — E. Goursat : Equations différentielles et Equations aux dérivées partielles (2 h.). — Mécanique rationnelle. Cl. Guichard (2 h.). — Mathématiques générales. M. Vessiot, chargé du cours (2 h.). — Astronomie. Andoyer (2 h.) ; travaux pratiques (2 h.). — Physique mathématique et Calcul des probabilités. Boussinesq : Ecoulements tumultueux et tourbillonnants des cours d'eau (2 h.). — Mécanique physique et expérimentale. — G. Kœnigs : Moteurs thermiques et visites d'usines (2 h.).

Cours annexe. — Théorie des nombres. Cahen : Du « Grand Théorème » de Fermat (2 h.).

Conférences. — Lebesgue : Conférences sur le Calcul intégral et ses applications géométriques (2 h.). — DRACH : Conférence de Mécanique rationnelle (2 h.). — VESSIOT : Travaux pratiques de Mathématiques générales (1 h.). — MONTEL : Conférences de Mathématiques générales (2 h.). — ANDOYER : Conférences d'Astronomie (1 h.). — SERVANT : Conférences de Mécanique physique ; Les éléments de la statique graphique (1 h.).

Enseignements et exercices pratiques réservés aux élèves de l'Ecole normale supérieure, par les professeurs E. BOREL, CARTAN, VESSIOT, LEBESGUE et DRACH.

Collège de France (suite). — M. GEVREY, chargé du cours de la *fondation Peccot*. « Les équations aux dérivées partielles du type parabolique. Problèmes aux limites et nature des solutions » (2 h.). (Dès le 28 février).

BIBLIOGRAPHIE

Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1914. — 1 vol. in-16 de 700 pages avec figures, 1 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

Ce Recueil a été, cette année, entièrement remis à jour, en ce qui concerne les Tableaux relatifs à la Physique et à la Chimie.

Cet ouvrage ne se trouvera pas seulement sur la table du technicien, du physicien, du mathématicien : chacun voudra le consulter pour avoir sous les yeux la liste des constantes usuelles, et aussi pour lire les intéressantes Notices de cette année : celle de M. BIGOURDAN, Le jour et ses divisions : Les fuseaux horaires et la Conférence internationale de l'heure, et de M. P. HATT, De la deformation des images par les lunettes.

E. BOREL. — **Introduction géométrique à quelques théories physiques.** — 1 vol. gr. in-8° de VII-150 pages et 3 figures, 5 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1914.

On peut, je crois, prédire un grand succès à cet ouvrage qui, à beaucoup de mérites divers, joint celui de la brièveté. On sait l'intérêt et même le grand étonnement soulevé par la physique moderne, avec ses vitesses ayant pour limite la vitesse de la lumière, puis par l'interprétation de la chose à l'aide de la géométrie non-euclidienne[1]. Or M. Borel vient de nous la présenter avec une simplicité et une élégance incomparables, en introduisant d'abord la géométrie hyperbolique où les points à l'infini sur les axes réels remplacent les points cycliques de la géométrie ordinaire. Les deux géométries sont ensuite généralisées dans l'hyperespace qui, dans le cas d'un très grand nombre de dimensions, illustre facilement les fonctions d'un grand nombre de variables. Il est alors aisé de passer aux considérations de mécanique statistique qui ont été particulièrement travaillées par l'auteur depuis quelques années et aussi à certaines questions relevant du Calcul des probabilités. Bien des personnes ont été séduites, de loin, par toutes ces captivantes théories, mais craignaient de ne pouvoir se mettre réellement au

[1] L'*Enseignement mathématique* vient précisément de publier, à ce sujet, un excellent article de M. L. Rougier (ce tome, p. 5).

courant sans un travail énorme dans les publications les plus diverses dues principalement à des physiciens étrangers. La nouvelle œuvre de M. Borel dissipera rapidement de telles craintes. A. Buhl (Toulouse).

P. Boutroux. — **Les principes de l'analyse mathématique.** Exposé historique et critique. Tome I (Les nombres. Les grandeurs. Les figures. Le calcul combinatoire. Le calcul algébrique. Calcul des fonctions. L'algèbre géométrique). — 1 vol. gr. in-8° de xii-548 p. et 221 figures; 14 fr.; A. Hermann, Paris.

Cet ouvrage parait destiné à intéresser également les mathématiciens purs, les praticiens et les philosophes. L'auteur, qui est d'ailleurs à la fois mathématicien et philosophe, laisse transparaître des opinions d'une simplicité et d'une vérité tranchantes par rapport au malaise d'où sort à peine un enseignement qui, pendant de longues années, a désespérément oscillé entre l'entière rigueur et les procédés simplement pratiques.

L'art de raisonner, nous dit-il dans sa préface, n'est point le plus nécessaire pour une société d'hommes d'action. Quelle belle franchise! Que d'applications on pourrait trouver à ce précepte même en dehors de la science! Combien il changerait l'allure de nos sociétés modernes s'il pouvait être pris en considération beaucoup plus qu'il ne l'est actuellement! Mais ne sortons point de la science.

Nous reconnaîtrons sans peine, dans l'œuvre de M. Pierre Boutroux, toute l'érudition nécessaire aux raisonnements les plus rigoureux, mais aussi le désir de ne point alourdir les admirables lignes des théories séculaires, il retrace très brièvement, en les terminant de manière à ce qu'on puisse y adapter les problèmes modernes. Plus d'un millier de notes, mises au bas des pages, complètent le texte sans en rompre la continuité. L'historique des sujets contient une foule de données trouvables, aurait-on pu croire, seulement chez un spécialiste de l'histoire des mathématiques Et, à ce sujet, j'ai eu quelques étonnements bizarres et qui probablement seront assez partagés.

Quel rapport, par exemple, entre le mot *ellipse* désignant une courbe et le même mot désignant une figure abréviative dans la construction d'une phrase? Je ne m'étais jamais expliqué la chose. Or elle provient de ce que, chez Apollonius, la construction de certains rectangles *défaillants* (c'est-à-dire *moindres, réduits* par rapport à un carré) revient à la construction de la conique fermée. L'ellipse géométrique et l'ellipse littéraire naissent donc bien toutes deux de l'idée de réduction. Et il y a des explications analogues pour l'hyperbole et la parabole.

Il serait superflu d'essayer de citer toutes les matières traitées toujours dans un même esprit d'originalité. D'ailleurs l'un des chapitres, celui qui traite de la démonstration géométrique, a déjà été reproduit par l'*Enseignement Mathématique* (t. XV, 1913, p. 298). En algèbre proprement dite, là où la science paraît toujours un peu plus sèche, l'auteur a su présenter très rapidement une résolution uniforme des équations des quatre premiers degrés, et cela sans s'encombrer des discussions particulières à chaque cas, lesquelles pourraient justement masquer l'uniformité du raisonnement général.

Espérons que les succès scientifiques de M. Pierre Boutroux, qui professe actuellement dans une Université des Etats-Unis, ne l'empêcheront pas de nous livrer rapidement la suite de son œuvre. A. Buhl (Toulouse).

G. Darboux. — **Leçons sur la théorie générale des surfaces.** Tome I (Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima) 2me édition. — 1 vol. gr. in-8° de VIII-620 p. ; 20 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Il serait superflu de vouloir représenter en détail, au public des géomètres, la seconde édition du tome premier de ce magnifique ouvrage. Il est non seulement connus, mais est à la base même de toutes recherches et, pendant les quelques mois qui ont séparé l'épuisement de l'ancienne édition et la publication de celle-ci, l'impatience a été vive. Contentons-nous d'indiquer brièvement les importantes adjonctions qui distinguent le nouveau volume.

On sait que c'est surtout la théorie du déplacement d'un trièdre qui est fondamentale chez M. Darboux. Il y a là des coordonnées mobiles qui, pour l'étude des principales surfaces de la géométrie, se montrent bien supérieures, en simplicité et en souplesse, aux coordonnées relatives à un trièdre fixe. C'est d'abord dans cette théorie du déplacement que nous trouvons de nouveaux développements. Parmi les différents systèmes de variables dus à Euler ont été mentionnés immédiatement les paramètres quaternoniens ; les formules fondamentales pour la courbure et la torsion de courbes gauches ont été retrouvées avec la plus extrême simplicité. Une formule purement géométrique lie la courbure, la torsion et le volume du tétraèdre formé avec quatre points infiniment voisins d'une courbe gauche. Le rôle de la sphère de rayon nul (cône isotrope) est devenu une base fondamentale quant à la notion de déplacement, et d'ailleurs cette dernière a été étudiée de manière nouvelle et plus générale qu'autrefois avant de passer aux déplacements à deux variables qui sont les plus utiles dans la théorie des surfaces.

L'étude des axes des mouvements hélicoïdaux nous mène aussi au conoïde de Plücker dont l'équation seule promet une étude des plus simples. M. Darboux a examiné toutes les façons de l'engendrer ; bien que ce conoïde soit du troisième ordre, on l'engendre facilement au moyen de coniques et même de coniques formellement invariables. M. Appell a démontré que *toute surface réglée pour laquelle le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur les génératrices est une courbe plane, est un cylindre ou un conoïde de Plücker*. Le conoïde est ainsi rattaché à un cylindre, ce qui explique le nom de *cylindroïde* qui lui est souvent donné. MM. Bricard et Demoulin sont revenus sur le même sujet. M. Bricard rattache la question au mouvement d'un cylindre de révolution qui roule dans un cylindre de rayon double avec glissement dans le sens des génératrices ; alors un point du cylindre mobile décrit une courbe plane.

Tout un chapitre a été rajouté sur les surfaces qui peuvent être considérées, de plusieurs manières, comme surfaces de translation. Henri Poincaré s'était occupé de la question et la liait au théorème d'Abel ; M. Darboux n'emprunte rien à ce théorème, mais le retrouve ensuite. Telles sont, très sommairement, les principales transformations du Livre I.

Le Livre II a moins varié. On sait qu'il est consacré aux coordonnées curvilignes et aux réseaux conjugués. Après l'étude des familles conjuguées planes, j'y relève surtout de bien intéressants travaux dus à un géomètre peu connu, Peterson. Il y a là de fort élégantes propriétés concernant les quadriques et les surfaces applicables sur ces quadriques.

Le chapitre sur la représentation conforme a été reporté dans le Livre III mais a été remplacé ici par le problème général de la représentation conforme des surfaces les unes sur les autres.

Dans le Livre III, consacré aux surfaces minima, remarquons surtout les surfaces minima de Lie, qui sont, de plusieurs manières, surfaces de translation.

Puis les surfaces minima réelles engendrées par un cercle, surfaces dont la première idée revient à Riemann, mais que M. Darboux a récemment retrouvées par une analyse tout à fait générale. La représentation conforme des aires planes, reportée en ce Livre, nous familiarise avec les belles idées de Schwarz, qui s'appliquent ensuite aux surfaces minima et nous conduisent jusqu'à des cas particuliers du problème de Plateau (surface minimum passant par un contour donné). Quant à ce dernier problème, il en est toujours à peu près au même point. Dans l'édition de 1887, M. Darboux écrivait : « L'analyse n'a pu, jusqu'ici, imaginer aucune méthode générale permettant de commencer l'étude de cette belle question. » Cette phrase est encore là, tout comme en 1887 ! Le problème va-t-il, tout à coup, faire un pas de géant, comme celui des trois corps, sous l'influence de M. Sundman ? Est-ce à l'école de M. Volterra que reviendra cette nouvelle gloire ?

J'avoue que tout pronostic me semble bien hasardé !

Terminons par une remarque matérielle, mais qui a bien son importance. Les plus grands efforts ont été visiblement faits pour que cette nouvelle édition du premier volume ne cesse de s'accorder avec les volumes suivants. Au point de vue du numérotage des paragraphes, il n'y en a que dix nouveaux. Les autres ont été fondus ou affectés de la mention *bis*. Au total presque tous les paragraphes ont le même numéro dans les deux éditions ; tout renvoi s'accordant avec la première s'accordera, en général, avec la seconde. L'illustre savant qui nous donne ce nouveau livre n'a rien négligé comme professeur. A. BUHL (Toulouse).

J. FITZ-PATRICK. — **Exercices d'Arithmétique.** Enoncés et solutions, avec une préface de J. TANNERY. Edition entièrement refondue et considérablement augmentée. — 1 vol. in-8, 707 p. ; 12 francs ; A. Hermann et fils, Paris.

En présentant la première édition de ce recueil, M. J. Tannery a insisté sur la place qu'il convient de maintenir à l'Arithmétique dans l'enseignement secondaire. « Peut-être serait-il sage, écrivit-il, de prévenir les candidats des dangers qu'ils courent en abordant trop tôt les parties élevées des programmes, et de laisser inscrites en tête de ces programmes, les connaissances fondamentales qu'ils supposent. »

L'Arithmétique continue à figurer dans un grand nombre de concours en France et cette nouvelle édition, entièrement refondue et considérablement augmentée, rendra à son tour de grands services aux élèves et aux maîtres. Le recueil renferme plus de 1300 problèmes dont la plupart sont complètement résolus. Ils sont répartis sur 18 chapitres embrassant les diverses parties de l'arithmétique, depuis la numération jusqu'aux régions élevées qui conduisent à la théorie des nombres.

L'ouvrage contient en appendice une intéressante note de M. Ern. LEBON, dans laquelle il expose sa méthode pour former une table des nombres premiers. H. F.

J. Haag. — **Cours complet de mathématiques spéciales.** Trois volumes gr. in-8° avec trois volumes d'exercices résolus ou proposés. Tome I. — *Algèbre et analyse.* Vol. de vi-402 p. avec 44 fig.; 1914; 9 fr. — *Exercices du tome I.* Vol. de vi-220 p. avec 14 fig.; 1914; 7 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

On est assez étonné, par ce temps de mathématiques générales à outrance, de voir paraître un cours de mathématiques spéciales, et surtout un cours qui a la prétention d'être complet. Il faut presque faire un effort pour se rappeler que des élèves de mathématiques spéciales existent encore et qu'on ne peut leur donner l'enseignement intuitif des mathématiques générales : ils se l'assimileraient trop facilement et, interrogés là-dessus, répondraient encore trop facilement ! Comment pourrait-on se sortir alors des concours d'admission à nos grandes écoles ? M. Haag n'a pas été si ironique; il a même pris la chose très au sérieux et nous présente un cours fort moderne, d'autant plus moderne même que les derniers en date semblent s'effacer dans la nuit des temps.

L'arrangement des matières est particulièrement heureux. L'Analyse infinitésimale a la première place et c'est fort naturel, car il est beaucoup plus simple de calculer des intégrales élémentaires que d'étudier, par exemple, la transformation des équations algébriques; mais les anciens auteurs n'osaient pas être aussi naturels que cela. Il est même plus simple d'intégrer les différents éléments provenant de la décomposition d'une fonction rationnelle que de former ces éléments en partant d'une fraction quelconque. Et l'auteur ne peut être que félicité d'avoir respecté l'ordre ainsi indiqué. D'ailleurs le souci pratique est constamment visible. Après les critères de convergence concernant les séries, nous trouvons quelques raisons intuitives destinées à indiquer aux débutants qu'ils ne doivent pas attendre indifféremment les mêmes services de tous ces critères. Les infiniment petits sont fort bien définis par continuité. Et quand, dans la seconde moitié du volume, nous arrivons à l'Algèbre proprement dite, nous y trouvons une parfaite élégance. Le théorème de Bezout sur l'élimination est ramené à son idée essentielle qui est simple : ce n'est qu'ensuite que nous voyons les difficultés particulières qui peuvent se présenter, et ainsi elles n'obscurcissent pas tout de suite ce Mémoire fameux et redoutable.

En résumé, ce cours est fort clair, peu encombré d'inégalités, on y calcule beaucoup et le souci de faire résoudre un grand nombre d'exercices est suffisamment attesté par le fait de les publier à part, en volumes séparés. Ces problèmes sont intéressants, d'une part parce que beaucoup sont simples et immédiatement faisables par des procédés harmonieux que l'on peut suivre *sur des figures,* quoiqu'il ne s'agisse ici que d'algèbre et d'analyse, et cela est vraiment très bien. D'autre part, certains problèmes initient sans longueurs à des théories qui n'ont pu être traitées dans le corps de la partie didactique.

Une grande symétrie règne partout. Il ne serait point étonnant que cet ouvrage devienne rapidement classique. A. Buhl (Toulouse).

K. Hensel. — **Zahlentheorie.** — 1 vol. in-8° de xii-356 pages, 10 M.; G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, Berlin und Leipzig, 1913.

Dès ses premiers travaux M. Hensel a cherché à utiliser et à mettre en lumière les analogies qui existent entre les propriétés des nombres et celles des fonctions. Cette tendance apparaît dans ses remarquables recherches sur la théorie des fonctions algébriques, où les considérations arithmétiques jouent un si grand rôle; elle s'accentue dans ses travaux arithmétiques et surtout dans sa théorie des nombres algébriques, dont il a donné il y a cinq ans un exposé détaillé dans son livre « Theorie des algebraischen Zahlen », analysé ici-même par M. Dumas (Cf. *Ens. Math.*, 1910, p. 440); elle se dessine plus nettement encore dans son ouvrage récent « Zahlentheorie », consacré aux éléments de la théorie des nombres. Certes, quelques-unes des analogies utilisées par M. Hensel avaient été aperçues avant lui, mais personne ne s'en était servi d'une manière aussi systématique.

Pour rapprocher ces deux domaines, apparemment si distincts : la théorie des nombres et la théorie des fonctions, M. Hensel, comme l'a très bien expliqué M. Dumas dans sa note de l'*Ens. Math.*, emprunte à la théorie des fonctions son instrument de recherches le plus puissant : les développements en série, qui lui fournissent ses fameux développements ou nombres *g-adiques*. C'est en partant de cette notion aussi simple que féconde que M. Hensel réussit à reconstituer les éléments de la théorie des nombres et la théorie des corps algébriques, et parvient en particulier à la conception profonde de ses diviseurs, équivalente, à un certain point de vue, à celle d'idéal de Dedekind.

Dans son nouvel ouvrage M. Hensel parcourt un domaine moins vaste : il s'en tient, comme nous l'avons déjà dit, aux éléments de la théorie des nombres, mais ses méthodes de recherches s'appliquent encore à l'étude des corps plus élevés, et rien ne serait plus facile que de passer de ces éléments à la théorie des nombres algébriques. Aussi le livre de M. Hensel pourrait-il servir d'introduction à sa « Theorie der algebraischen Zahlen », mais sa portée est plus grande : dans le domaine restreint qu'il embrasse, il est infiniment plus complet et abonde en idées et conceptions nouvelles.

Pour M. Hensel, le problème fondamental de la théorie des nombres est la recherche des relations (Beziehungen) qui existent entre tous les nombres rationnels m et un nombre fixe mais quelconque g, qu'il appelle « *Grundzahl* » ou module. Ce qu'il importe de savoir c'est donc la manière dont les nombres m se comportent vis-à-vis du module g.

Dans certains problèmes très élémentaires, un nombre m peut être remplacé par son reste module g, mais dans l'étude de questions plus complexes cette donnée pourrait ne pas suffire : un nombre m n'est caractérisé d'une manière complète par rapport au module g que par la suite totale des termes que fournit son développement en série suivant les puissances croissantes du module g. On voit que les nombres *g-adiques* peuvent être introduits de la manière la plus naturelle dès le début de la théorie des nombres.

Nous voilà donc en présence d'un ensemble de symboles, car les nombres *g-adiques* ne sont en général que des symboles, ensemble plus vaste que le corps des nombres rationnels dont on est parti. Ces symboles peuvent être soumis au calcul : on peut les ajouter, les soustraire, les multiplier les uns par les autres, sans sortir de l'ensemble des nombres *g-adiques*. Cet ensemble forme donc un domaine holoïde ou un anneau, qui, dans le cas où g est un nombre premier p et où la division est toujours possible, devient un domaine orthoïde ou un corps.

Mais M. Hensel montre que l'anneau des nombres *g-adiques* peut être décomposé en corps relatifs aux différents facteurs premiers de g, ce qui permet de ramener l'étude des nombres *g-adiques* quelconques à celle beaucoup plus simple des corps *p-adiques*.

Une notion importante, celle d'ordre, permet de rapprocher encore davantage la théorie de ces corps de celle des fonctions. M. Hensel appelle ordre d'un nombre *p-adique* le degré de son premier terme par rapport à p. Cet ordre peut être négatif, nul ou positif.

Soient maintenant deux nombres *p-adiques* A et A′ d'ordres ρ et ρ' ; on dira que A est plus petit que A′, si ρ est supérieur à ρ'. En vertu de cette convention, un nombre variable *p-adique* est d'autant plus petit que son ordre est plus grand, et sa grandeur ou son rang relatif est donné non pas par son ordre ρ, mais par l'inverse de ρ. Rien ne nous empêche maintenant d'introduire dans la théorie de ces corps les notions et les procédés du calcul infinitésimal : les notions de continuité, de convergence, de dérivée, etc., et d'étudier relativement à p les fonctions algébriques ou transcendantes envisagées dans l'analyse. Le parallélisme entre l'arithmétique et la théorie des fonctions s'accentue de plus en plus : c'est ainsi que l'étude de la fonction exponentielle fournit à M. Hensel une expression des nombres *p-adiques*, analogue a la relation classique $A = e^{\gamma}$, où $\gamma = lg A$; mais ici le facteur exponentiel ne figure pas seul, — il est nécessaire d'introduire deux autres facteurs de nature différente : une puissance de p et une puissance d'une racine $(p - 1)^e$ de l'unité. Un nombre *p-adique* est donc caractérisé par trois indices, et c'est l'ensemble de ces trois indices que M. Hensel appelle *logarithme* du nombre A. La portée et l'utilité de cette notion est comparable à celles des logarithmes ordinaires, et il serait intéressant de la rapprocher aussi de ces expressions logarithmiques dont Kummer s'était servi dans ses belles recherches sur le théorème de Fermat et les lois de réciprocité.

Les notions introduites par M. Hensel simplifient singulièrement l'étude des congruences et des équations binômes : elles permettent aussi d'approfondir la théorie des nombres *g-adiques*. En effet la plupart des résultats établis pour les corps *p-adiques*, s'étendent, avec des modifications légères, aux anneaux *g-adiques* ; en particulier le logarithme d'un nombre *g-adique* est représenté aussi par une suite d'indices, mais au lieu de trois indices isolés, cette suite se compose de trois systèmes ou cortèges d'indices ; à part cette différence, les propriétés des logarithmes subsistent, et les questions relatives aux congruences ou aux équations binômes se traitent à l'aide de méthodes analogues.

Les deux derniers chapitres du livre de M. Hensel sont consacrés à la loi de réciprocité et à l'étude des formes quadratiques binaires et ternaires. Examinées à la lumière des belles méthodes de M. Hensel, ces questions, depuis longtemps classiques, apparaissent sous un aspect inattendu et nouveau.

Je ne saurais, même brièvement, indiquer tous les sujets abordés par M. Hensel dans cette arithmétique *g-adique*, où sa pensée se meut avec aisance et souplesse, qui en rendent la lecture particulièrement attrayante et facile. Malgré l'originalité de ses méthodes et la variété des problèmes qui y sont traités, ce livre, pour être pleinement compris, n'exige aucune préparation spéciale. D. Mirimanoff (Genève).

J. Knoblauch. — **Grundlagen der Geometrie.** — 1 vol. in-8, 634 p. ; 18 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

M. Knoblauch, professeur à l'Université de Berlin, a publié il y a 25 ans, une introduction à la Géométrie des surfaces. Depuis cette époque il n'a cessé de suivre le développement de la Géométrie supérieure et y a donné lui-même d'intéressantes contributions. Dans ce nouvel Ouvrage il présente *les fondements de la Géométrie différentielle* en s'efforçant à faire ressortir les méthodes qui sont propres à cette branche de la Géométrie. Il expose d'une façon systématique les notions essentielles indispensables à ceux qui veulent aborder l'étude plus approfondie de la Géométrie des surfaces, telle qu'elle se trouve exposée dans l'Œuvre magistrale de M. Darboux ou dans les mémoires originaux.

Voici l'énumération des principaux objets traités par l'auteur :

Introduction à la théorie des courbes gauches. — Formules fondamentales de la théorie des surfaces. — Théorie de la courbure. — Théorie des formes différentielles binaires. — Les trois équations fondamentales. — Courbes tracées sur une surface. — Représentation sphérique ; surfaces réglées. — Théorie de la déformation. — Théorie générale des courbes et des réseaux tracés sur une surface. — Invariants et covariants d'ordre donné. — Equations de Weingarten. — Théorèmes et problèmes spéciaux de la théorie des surfaces.

L'ouvrage se termine par une liste bibliographique limitée aux mémoires classiques de la théorie des surfaces, puis une table des notations employées, enfin un répertoire analytique des matières.

L. Lecornu. — **Cours de Mécanique** professé à l'Ecole Polytechnique. Tome I. — 1 vol. gr. in-8° de VII-536 pages et 281 figures, 18 fr. ; Gauthier-Villars, Paris. 1914.

Ce cours de Mécanique peut être caractérisé par son allure à la fois pratique et originale. L'enseignement de l'Ecole Polytechnique doit être hautement scientifique et cependant il s'adresse surtout à de futurs praticiens. M. Lecornu a très heureusement concilié les deux choses en ne sacrifiant jamais l'exposé mathématique de la méthode et en appliquant celle-ci, non à des systèmes plus ou moins fantaisistes, mais aux mécanismes et machines se rencontrant dans la pratique.

L'exposé de la Cinématique justifie déjà cet ordre d'idées : d'abord la partie géométrique, poussée notamment jusqu'au théorème de Savary : puis la Cinématique proprement dite avec ses compositions de vitesses et d'accélérations ; enfin la très élégante étude d'une riche collection de mécanismes. L'auteur adopte la classification de Willis qui suppose une pièce conductrice en rotation uniforme et une pièce conduite ; le mécanisme est dit de première, de deuxième ou de troisième classe, suivant que le rapport de transmission est constant en grandeur et en signe, ou constant seulement en signe, ou enfin variable en signe. Dans chaque classe on distingue trois genres suivant que la transmission a lieu par contact direct, par intermédiaire rigide ou par intermédiaire flexible. Je ne puis analyser ici en détail les neuf groupes qu'on peut définir ainsi ; qu'il me suffise de rappeler les engrenages (cl. 1 ; g. 1), les bielles (1 ; 2), les courroies (1 ; 3), les courbes roulantes diverses (2 ; 1), les manivelles et joints (2 ; 2), les courroies sur poulies quelconques (2 ; 3), les excentriques (3 ; 1), les manivelles et balanciers, le parallélogramme de Watt, l'inverseur Peaucellier, la coulisse de Stephenson (3 ; 2). La catégorie (3 ; 3) n'existe pas.

Au début de la dynamique nous trouvons d'abord les questions de mesure, d'homogénéité, de similitude. L'attraction newtonienne est introduite immédiatement et donne ainsi une réalité aux actions à distance dont il faudra, bon gré, mal gré, parler dans bien des problèmes physiques. Le mouvement d'un point amène à de beaux développements sur les problèmes balistiques, problèmes dans lesquels les hodographes sont étudiés avec autant de détails que les trajectoires.

Les mouvements d'un point sur une ligne sont illustrés par les divers pendules et par l'ingénieuse recherche de la courbe qui doit être décrite, avec pression constante, par un point pesant; on a, là encore, de fort intéressantes considérations relativement à l'hodographe décrit d'un mouvement képlérien. Les mouvements relatifs nous conduisent à la chute des corps à la surface de la Terre et au pendule de Foucault soigneusement étudié quant à certaines causes secondaires qui peuvent affecter le mouvement du plan d'oscillation et se superposer fâcheusement à l'effet dû à la rotation de la Terre.

Toutes ces considérations dynamiques relatives au point comprennent, comme cas particulier, la statique du point. Ce n'est qu'ensuite que l'ouvrage expose la statique des systèmes et c'est encore là une marche fort avantageuse au point de vue pratique, car non seulement la statique des systèmes est plus compliquée que la dynamique du point, mais cette dernière est surtout propre à familiariser rapidement le lecteur avec les principes de la mécanique. En particulier, il est fort désirable que la notion de travail, surtout celle de travail virtuel qui intervient en Statique, soit d'abord éclaircie par quelques considérations dynamiques que l'on trouve facilement dans la Dynamique du point. Observons aussi que M. Lecornu ne cherche pas à *établir* que les réactions sont normales lors de l'absence du frottement; il admet la chose et dit qu'il y a frottement quand la réaction devient oblique.

Après la Statique des courbes funiculaires, nous trouvons celle des lames et des tiges et enfin celle des solides naturels. Nombreux sont les appareils industriels qu'étudie M. Lecornu; je cite, au hasard, l'échelle, le valet de menuisier, le coin, le plan incliné, les cônes de friction, les coquilles, presses, encliquetages, treuils, poulies avec corde flexible ou raide, etc., etc. Tout cela est d'une lecture fort attrayante et rappelle la cinématique des mécanismes signalée plus haut.

Si l'on ajoute que ce premier volume n'est que le tiers de l'œuvre annoncée, on pressent déjà que l'éminent auteur travaille à un exposé qui jouera sans doute un rôle considérable dans la Mécanique à la fois théorique, pratique et, de plus, très simplement enseignée. A. Buhl (Toulouse).

Fr. Riesz. — **Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.** — 1 vol. gr. in-8° de VI-182 p., 6 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

Voici un ouvrage que l'on pourrait rapprocher avec grand profit de celui de M. Volterra analysé plus bas. Des deux côtés on assiste à la généralisation de l'algèbre lorsque le nombre des variables ou des inconnues augmente indéfiniment. Mais, alors que M. Volterra paraît continuellement servi par une admirable continuité, par des passages à la limite qui semblent se justifier d'eux-mêmes, M. Riesz discute avec un appareil plus rigoureux et va même au-devant des cas singuliers. J'ajoute tout de suite que ceci n'est pas fait sans élégance; c'est surtout l'antique inégalité de Lagrange-Cauchy, convenablement généralisée qui sert de base aux raisonnements et nous aide à juger de la convergence des déterminants infinis. L'auteur a eu aussi grand soin d'asseoir son analyse sur tous les précédents qui y ont conduit naturellement. Il invoque d'abord la détermination par récurrence des coefficients de certaines séries et le procédé de même type employé par Fourier dans la théorie de la chaleur; il rappelle ensuite un procédé, déjà beaucoup plus nouveau, qui fut employé par M. Appell pour établir certaines formules de la théorie des fonctions elliptiques, procédé qui fut repris par Poincaré et qui contient déjà, en somme, un usage de déterminants d'ordre infini. Rappelons ensuite que Poincaré devait à nouveau reprendre ces déterminants pour justifier l'emploi qu'en faisait implicitement Hill dans sa théorie de la Lune et ceci nous expliquera pourquoi, dans le présent livre, nous trouvons tout un chapitre sur les équations différentielles linéaires. Naturellement les équations intégrales ordinaires servent de conclusion.

Au sujet de toutes ces extensions algébriques, on peut faire une remarque qui ne surprendra plus personne, mais qui aurait semblé bizarre il y a vingt ans. On distinguait alors l'analyse infinitésimale et l'algèbre. Aujourd'hui les progrès de l'analyse sont, en grande partie, empruntés à l'algèbre ; la séparation ne semble plus possible, et il serait bizarre de voir quelqu'un chercher à apprendre la théorie des formes linéaires ou quadratiques à une infinité de variables sans posséder d'abord les connaissances purement algébriques relatives au nombre fini. Toutefois, des ouvrages comme ceux de M. Riesz faciliteront les choses, car cet excellent auteur a rappelé très nettement et très simplement tous ses points de départ purement algébriques. A. Buhl (Toulouse).

Hermann Weyl. — **Die Idee der Riemannschen Fläche.** [Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen] — 1 vol., 169 p. ; 7 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ami lecteur, si tu as lu dans un traité d'Analyse les chapitres relatifs à la théorie des surfaces de Riemann et des fonctions algébriques ; si, saisi par la beauté de cette théorie, tu t'intéresses aux recherches récentes sur l'uniformisation des fonctions analytiques ; si, enfin, tu désires connaître une exposition *rigoureuse* et *originale* des surfaces de Riemann et de leur signification profonde pour la théorie des fonctions, prends ce livre, lis-le et relis-le. Sa lecture te semblera l'ascension d'une haute montagne. Tel l'alpiniste, arme-toi de courage ; l'ascension sera dure. A certains moments la rigueur et la minutie du raisonnement, tels les contours du sentier, cacheront la cime à tes yeux. Mais, d'étape en étape, tu t'en rapprocheras. Et combien seras-tu récompensé, lorsque, ayant atteint le sommet, tu domineras le vaste panorama de la théorie des fonctions, que tu en suivras d'un coup d'œil les grandes idées directrices, vallées qu'aura suivies ton sentier et que tu reconnaîtras leurs connexions aux cols qu'il aura franchis.

A lire plusieurs des livres qui traitent des surfaces de Riemann, tu pourrais croire que leur utilité consiste à rendre intuitive et facilement saisissable la théorie des fonctions non uniformes. Mais, ce serait méconnaître la véritable portée et l'importance de la conception géniale de Riemann que de la réduire à être uniquement une représentation commode de faits analytiques. L'idée de la surface de Riemann pénètre au cœur de la notion de fonction analytique. Cette idée, encore un peu confuse chez Riemann, a été dégagée magistralement par M. Félix Klein dans son opuscule : « Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale, Leipzig

1882. », rien de plus intéressant et de plus suggestif que l'heureux mélange d'intuition physique et de raisonnement mathématique contenu dans cet ouvrage. Mais si l'esprit de Weierstrass et de Cantor a soufflé sur toi, tu ne te sentiras pas entièrement satisfait tant que tu n'auras pas donné une base arithmétique rigoureuse aux notions d'analysis situs qui interviennent dans l'exposition de la théorie des surfaces de Riemann.

C'est à te donner cette base rigoureuse qu'est consacrée la première partie du livre de M. Weyl. Tu y trouveras une exposition exacte du rapport qu'il y a entre les notions de fonction analytique et d'« analytisches Gebilde » de Weierstrass d'une part et de surface de Riemann d'autre part. Tu y trouveras encore une détermination précise de la notion de surface et en particulier de la notion de surface de Riemann. Une démonstration rigoureuse des théorèmes d'analysis situs nécessaires à la théorie des fonctions clôt cette première partie.

La seconde partie du livre traite des fonctions sur une surface de Riemann. M. Weyl établit d'abord, au moyen du principe de Dirichlet, l'existence de fonctions uniformes sur une surface de Riemann donnée. La théorie des fonctions sur une surface fermée fait l'objet de quelques chapitres. La fin de l'ouvrage traite de l'uniformisation des fonctions analytiques. Cette théorie, créée par Poincaré et Klein et que Kœbe vient d'asseoir solidement, forme le couronnement du livre, car c'est dans la relation entre les surfaces de Riemann et les groupes de mouvements du plan non-euclidien que transparait le mieux *l'idée* de la surface de Riemann.

C'est à Riemann, à Klein et à Poincaré que nous devons principalement les idées qui forment le corps du livre de M. Weyl. Mais M. Weyl a su y marquer son empreinte personnelle. Et d'abord, l'exposition *rigoureuse* de la théorie de Riemann témoigne d'un travail et d'un talent que l'on ne saurait trop estimer. Le livre contient plusieurs choses nouvelles et dignes d'attention. Qu'il me suffise de citer : l'introduction dès le début des « Überlagerungs flächen », la définition de la surface simplement connexe et celle du genre d'une surface. A noter aussi la démonstration nouvelle que M. Weyl donne du principe de Dirichlet. Cette démonstration, inspirée par les travaux de Hilbert, Zaremba, B. Levi, en diffère par le point de départ ; elle est plus simple et plus puissante. M. Plancherel (Fribourg).

L. Zoretti. — **Leçons de mathématiques générales,** avec une préface de M. P. Appell. — 1 vol. gr. in-8° de xvi-753 p. et 205 figures ; 20 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

Nous ne saurions mieux faire, pour présenter ces nouvelles leçons, que de reproduire la magistrale préface de M. Appell, non seulement parce qu'elle fait honneur à M. Zoretti, mais parce qu'elle expose les idées de l'éminent doyen de la Faculté des Sciences de Paris, idées qui ont une place toute indiquée dans cette Revue.

« C'est un fait bien connu que le baccalauréat, envisagé au point de vue scientifique, malgré sa prétention surannée d'être le premier grade de l'Enseignement supérieur, n'est même pas un certificat de capacité à recevoir cet enseignement.

« Pour combler cette lacune, les Facultés des Sciences ont dû créer un enseignement préparatoire à l'étude des Sciences mathématiques et des Sciences physiques, enseignement sanctionné par un certificat d'études supérieures de Mathématiques générales ou préparatoires.

« Déjà l'enseignement nouveau, organisé dans toutes les Facultés des Sciences, a attiré un grand nombre d'étudiants qui ont dû reconnaître qu'une base mathématique solide est indispensable à toute étude scientifique sérieuse, théorique ou pratique. Futurs mathématiciens, futurs physiciens, futurs ingénieurs électriciens, mécaniciens ou chimistes, conducteurs des Ponts et Chaussées et contrôleurs des Mines, jeunes filles se destinant à l'Enseignement public, se forment aux cours de Mathématiques générales. Les matières de ce nouvel enseignement sont imposées par la nature des choses. Ce sont les matières des cours de Mathématiques spéciales, enseignées avec plus d'élévation et de souplesse, plus d'applications et d'exercices numériques, sans les soucis étroits de concours artificiels en vue desquels, comme le disait Joseph Bertrand, on *prépare* au lieu d'*instruire*.

« Plusieurs cours de Mathématiques générales ont déjà été publiés. Je demande la permission de présenter au public celui de M. Zoretti. L'auteur était particulièrement qualifié pour l'écrire : il est, en effet, un ancien professeur de Lycée et il connaît toutes les finesses de cette gymnastique intellectuelle qui prépare de brillants sujets pour les grands concours ; il est aussi un savant, auteur de recherches personnelles sur la théorie des fonctions, qui professe la Mécanique rationnelle dans une de nos Universités et qui a conscience des besoins de l'Enseignement supérieur théorique et technique.

« Voici comment il a conçu l'enseignement des Mathématiques générales dans les Facultés. Cet enseignement s'adresse à un public divers par ses origines, par sa mentalité, par ses besoins et par ses destinées. Le Livre doit donc ne sacrifier aucune de ces catégories et cette condition est difficile à réaliser, car les connaissances utiles aux uns et aux autres diffèrent par l'étendue et par la nature. M. Zoretti a résolu la question en traitant le *programme maximum*, mais en le traitant de manière que les divers chapitres soient aussi indépendants les uns des autres que possible. On trouve, dans cette préoccupation de M. Zoretti, l'explication de la longueur de son Livre : le professeur ne devra pas l'enseigner entièrement ; il se bornera à enseigner les théories générales et à faire faire de nombreux exercices, de façon que l'étudiant n'ait pas de difficulté à compléter son information tout seul, soit immédiatement, soit plus tard, avant ou après son entrée dans la vie active. C'est le souci de cette initiation à l'étude personnelle qui, à mon avis, rend tout à fait indispensable un Livre qui soit autre chose qu'un cours, et qui tienne un peu de l'aide-mémoire. C'est aussi, en vue de cette initiation, que M. Zoretti s'est appliqué à remplir une condition plus importante que celle de la belle ordonnance didactique : celle de la commodité.

« Le Livre de M. Zoretti se différencie d'abord des Traités qui ont été spécialement écrits pour telle ou telle catégorie d'étudiants en ce qu'il s'adresse à toutes. L'auteur a sacrifié toutes les difficultés d'ordre théorique, se contentant d'appels à l'intuition où à des images concrètes. Il a également sacrifié les théories générales sans emploi en Mécanique et en Physique, comme, par exemple, toute la théorie des coniques et des quadriques, et, comme conséquence, celle de l'homographie et de l'involution. Il ne parle de ces courbes ou de ces surfaces qu'au point de vue de leurs applications, en insistant spécialement sur leur dessin. A propos des théories de M. d'Ocagne sur les abaques, il se borne à montrer par de nombreux exemples le parti que l'élève pourra tirer des méthodes graphiques, sans qu'il soit nécessaire d'introduire toute la terminologie et tous les procédés bien spéciaux de la nomographie, qui masquent, pour l'étudiant, la généralité de la méthode.

« Les divergences avec les autres Traités sont plus grandes encore dans le choix des exercices. L'auteur a multiplié les exercices d'application purement numérique, proposés, au cours des Chapitres, immédiatement après les théories qu'ils illustrent. Il a indiqué de nombreux exercices qui sont de véritables travaux pratiques : dessins ou épures, cartonnages, mesures effectuées au moyen d'instruments. Son expérience personnelle à Caen lui a montré que les élèves apportent un vif intérêt à ce genre de travaux. L'auteur a su éviter l'erreur qui consiste à introduire, à propos d'exercices, des notions nouvelles qui rebutent le lecteur, et que l'élève, suivant une habitude d'esprit constante, croira devoir apprendre, au détriment des grandes théories qu'il oubliera.

« En résumé, l'Ouvrage de M. Zoretti constitue une conception élevée et nouvelle de l'enseignement des Mathématiques générales. Tout en conservant une entière rigueur, sans laquelle aucune éducation mathématique n'existe, l'auteur a su répondre à tous les besoins essentiels des Sciences expérimentales; par le choix des applications et des exercices numériques, il fait comprendre les théories générales, il développe l'esprit de curiosité, le goût du travail et de la lecture personnels : il tend, en un mot, à former des hommes de réflexion et d'action, capables de servir utilement la France dans la Science et dans l'Industrie. »

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Zeitschrift für mathem. u. naturw. Unterricht. Leipzig. — Band 44. Nos 9-12. — Felix Müller : Versuch einer Gruppierung der neueren mathematisch-historischen Schriften (1887-1911). — B. Funk : Die Kleinsche Einführung des Logarithmus. — Prof. Diesing : Zur Konstruktion konjugierter Durchmesser eines beliebigen Kegelschnittes. — Chr. Lenhardt : Aufgaben über Stellungen der Uhrzeiger. Eine Stunde in Obertertia. — Wilh. Effenberger : Zur graphischen Lösung kubischer Gleichungen. — Milan Zdelar : Der Pythagoreische Lehrsatz. — P. Kiesling : Wie bestimmt man in der Schule die Neigung und die Knoten der Mondbahn. — Dr. Karl Krüse : Der Schwerpunkt im Dreieck. — B. Reismann : Ueber die graphische Behandlung von Zinseszins- und Rentenaufgaben. — Prof. Leman : Ueber die reziproken Gleichungen. — Otto Förster : Geometrische Darstellung einer besonderen Art unendlicher Reihen. — W. W. : Der Lehmus-Steinersche Satz. — H. Pfaff : Die Konische Loxodrome. — I. J. Schwatt : On the sum of a family of series.

A partir du 1er janvier 1914, cette revue, qui entre dans sa 45e année, sera dirigée par MM. H. Schotten, W. Lietzmann et E. Grimsehl. *Ce dernier représente plus particulièrement les sciences physiques. Quant à M. Lietzmann, il n'est guère nécessaire de le présente à nos lecteurs ; il est suffisamment connu par son active collaboration aux rapports publiés sur l'enseignement mathématique en Allemagne.*

Band 45, N° 1. — W. Lietzmann et E. Grimsehl : Zur Einführung. — Killing : Die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung in ihrer Bedeutung für den Schulunterricht. — Böger : Inhalt, Art und Name der neueren Geometrie. — P. Luckey : Die Aufsuchung gewisser Gesetze nach graphischer Methode und die Verwendung des logarithmischen Koordinatenpapiers. — E. Höhnemann : Verwendung von Vektoren für die elem. Behandlung von Aufgaben aus der Mechanik, insbesondere der Mechanik des Himmels.

Zeitschrift für das Realschulwesen, herausgegeben von Em. Czuber, Ad. Bechtel und G. Schilling. — XXXVIII. Jahrg., 1913; Alfr. Hölder, Wien. Nos 1-12. — L. Tuschel : Ueber eine Abbildung der Punkte einer Fläche auf die Geraden der Bildebene und eine sich daraus ergebende Flächengattung. — P. V. Schæwen : Die rektangulären Gleichungen. — E. Vogel : Der Ellipsenschnitt des Drehparaboloïdes. — S. Holz : Eine Parabelkonstruktion. — A. Lechner : Ueber einen Apparat zur Demonstration der Massenwirkung. — F. Schicht : Die Entstehung von zirkularen Sinus- und Kosinuslinien. — F. Schicht : Ueber den Wirkungsgrad der schiefen Ebene als Maschine. — R. Fischer ; Die Verschiedenheit der Sonnentage. — M. Franceschi : Zur Dreiteilung des Winkels. — F. Schicht : Die Zuzammensetzung von Kreisbewegungen. — P. v. Schæwen : Zeichnung des regelmässigen Siebzehnecks. — K. Emmerling : Eine Eigenschaft des Drehparaboloïdes.

2. Livres nouveaux :

Annuaire pour l'an 1914, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques de MM. Hatt, Bigourdan et Baillaud. — 1 vol. in-16, 700 p. ; 1 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

J. C. Barolin. — **Der Hundertstundentag,** Vorschlag zu einer Zeitreform unter Zugrundlegung des Dezimalsystems, im Anschluss an ein analoges Bogen- und Längenmass ; mit einem Geleitwort von Prof. Dr Ing. Hugershoff. — 1 vol. in-8°, 144 p. ; 1 M. 50 ; W. Braumüller, Vienne et Leipzig.

W. G. Borchardt et A. D. Perrott. — **A Junior Trigonometry.** — 1 vol. in-16, xv-257 p. ; 3 sh. 6 ; Bell & Sons, Londres.

E. Borel. — **Introduction géométrique à quelques théories physiques.** — 1 vol. in-8°, vii-139 p. ; 5 fr. : Gauthier-Villars, Paris.

P. Crantz. — **Ebene Trigonometrie zum Selbstunterricht.** (Aus Natur und Geisteswelt, N° 431). — 1 vol. in-16, 98 p. ; 1 M. 25 ; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Dressler et K. Körner. — **Der Mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten** in Sachsen, Thüringen und Anhalt. (Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, Band V. Heft 4). — 1 fasc. in-8°, v-132 p. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Doliarus (J. Ed. Böttcher). — **Alle Jahreskalender auf einem Blatt.** — (Calendrier perpétuel, format poche) ; 30 pf. ; B. G. Teubner, Leipzig.

V. Ducla. — **Démonstration d'un théorème de Fermat.** — 2e édition, revue et corrigée, 1 fasc. in-8°, 30 p. ; Garet et Haristoy, Pau.

C. Elliott. — **Models to illustrate the Foundations of Mathematics.** — 1 vol. in-8°, viii-116 p ; 2 s. 6 d. ; Lindsay & Co., Edimbourg.

H. Ganter u. F. Rudio. — **Die analytische Geometrie der Ebene.** Achte Auflage. — 1 vol. cart. in-8°, 191 p., 53 fig. ; 3 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

G. Kerschensteiner. — **Wesen und Wert des Naturwissenschaftlichen Unterrichtes,** neue Untersuchungen einer alten Frage. — 1 vol. in-8°, xii-141 p. ; broché 3 M. ; relié 3 M. 60 ; B. G. Teubner, Leipzig.

F. KLEIN. — **Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus** bearbeitet von E. HELLINGER. Teil II : Geometrie (cours autographié). — 1 vol. in-8°, 547 p. ; 7 M. 50 ; B. G. Teubner, Leipzig.

J. KÖNIG. — **Neue Grundlagen der Logik. Arithmetik und Mengenlehre,** mit dem Bildniss des Verfassers. — 1 vol. in-8°, 259 p. ; 8 M. ; relié 9 M. ; Veit & Cie, Leipzig.

L. LECORNU. — **Cours de Mécanique.** Tome I. — 1 vol. in-8°, VII-536 p. ; 18 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

W. LIETZMANN. — **Die Organisation des mathematischen Unterrichtes in den preussischen Volks- und Mittelschulen.** — (Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, Band V, Heft 6). — 1 fasc. in-8°, V-106 p. ; B. G. Teubner, Leipzig.

H. MAURER. — **Richtige elementare Lösung des Fermat'schen Problems** $x^n + y^n = z^n$. — 1 fasc. de 15 p. ; 1 fr. ; Orell Füssli, Zurich.

A. PAHDE. — **Meereskunde.** (Bücher der Naturwissenschaft herausgegeben von prof. S. GÜNTHER, N° 20). — 1 vol. in-16, avec 3 cartes, 7 planches, 1 portrait et 13 fig., 190 p. ; relié 1 M. ; Philipp Reclam jun. Leipzig.

H. POINCARÉ. — **Wissenschaft und Methode** Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von L. LINDEMANN (Coll. « Wissenschaft und Hypothese », N° XVII). — 1 vol. relié in-8°, VI-283 p. ; 5 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

R. ROTHE. — **Darstellende Geometrie des Geländes.** (Mathematische Bibliothek, N° 14). — 1 vol. in-8°, 67 p. ; 0 M. 80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

C. SALOMON. — **Questions inédites et nouveaux essais de Magie arithmétique polygonale.** I. Etoiles Magiques à 8, 16 et 20 branches (24, 64 et 100 points) et Rosaces Hypermagiques (16, 25 et 36 points). — II. Etoiles Magiques à 10 et 12 branches (30, 36, 48 points) et Hexagones et Octogones Magiques. — 2 fasc. in-8°, chaque fasc. 21 p. ; 1 fr. 50 ; Gauthier-Villars, Paris.

W. SCHEFFER. — **Das Mikroskop.** (Aus Natur und Geisteswelt, N° 35). — 2e édition, 1 vol. in-16, 100 p. ; 1 M. 25 ; B. G. Teubner, Leipzig.

D. E. SMITH and Yoshio MIKAMI. — **A History of Japanese Mathematics.** — 1 vol. in-8°, VIII-288 p. ; 3 $; The Open Court Publishing Co., Chicago.

W. TROST. — **Die Mathematischen Fächer an den niederen gewerblichen Lehranstalten in Deutschland.** (Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland. Band IV, Heft 5). — 1 fasc. in-8°, VI-150 p. ; 4 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

W. WIEN. — **Neuere Probleme der Theoretischen Physik.** — Six lectures delivered in Columbia University in april, 1913. — 1 vol. in-4°, 76 p. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées. Edition française dirigée par J. MOLK et pour ce qui concerne la mécanique sous la direction scientifique de P. APPELL. — Tome III, vol. 2 : *Géométrie descriptive, Géométrie élémentaire ;* fasc. 1 : Géométrie projective ; exposé, d'après l'article allemand de A. SCHOENFLIES par A. TRESSE. — Configuration ; exposé, d'après l'article allemand de E. STEINITZ, par E. Merlin.

Tome IV, vol. 6 ; *Balistique, Hydraulique ;* fasc. 1 : Balistique extérieure ; exposé, d'après l'article allemand de C. CRANZ, par E. VALLIER. — Balistique intérieure ; exposé, d'après l'article allemand de C. CRANZ, par C. BENOIT. — Développement concernant quelques recherches de Balistique exécutées en France ; exposé par F. GOSSOT et R. LIOUVILLE. — Hydraulique ; exposé, d'après l'article allemand de Ph. FORCHHEIMER, par A. BOULANGER. — B. G. Teubner, Leipzig, et Gauthier-Villars, Paris.

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

COMPTE RENDU

DE LA

CONFÉRENCE INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

PARIS, 1-4 Avril 1914

PUBLIÉ PAR

H. FEHR

Secrétaire général de la Commission.

1re PARTIE

Compte rendu sommaire.
Séances des Délégués et Rapport du Secrétaire général.
Séance générale publique :
Discours de MM. Appell, Castelnuovo et Darboux.
Conférences de MM. Emile Borel et Maurice d'Ocagne.

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

COMITÉ CENTRAL

Président : F. Klein, G. R. R., Göttingue.
Vice-Présidents : Sir George Greenhill, Londres. D. E. Smith, New-York.
Secrétaire général : H. Fehr, Genève.
G. Castelnuovo, Rome. — E. Czuber, Vienne. — J. Hadamard, Paris.

Bureau de la Sous-Commission Française :
Présidents d'honneur : P. Appell et A. de Saint-Germain.
Délégués : J. Hadamard, M. d'Ocagne, Ch. Bioche.

Liste des membres de la Commission
au 1er avril 1914.

Allemagne : MM. F. Klein (Gœttingue), P. Stæckel (Heidelberg), A. Thaer (Hambourg).
Australie : M. Carslaw (Sidney).
Autriche : MM. E. Czuber, W. Wirtinger, R. Suppantschitsch (Vienne).
Belgique : M. J. Neuberg (Liége).
Brésil : M. R. Gabaglia (Rio de Janeiro).
Bulgarie : M. A. V. Sourek (Sophia).
Colonie du Cap : M. Hough (Observatoire royal de Capetown).
Danemark : M. P. Heegaard (Copenhague).
Egypte : F. Boulad (Le Caire).
Espagne : M. O.-L. de Toledo (Madrid).
Etats-Unis : MM. Dav.-Eug. Smith (New-York), W. Osgood (Cambridge, Mass.), J.-W.-A. Young (Chicago).
France : MM. J. Hadamard, M. d'Ocagne, Ch. Bioche (Paris).
Grèce : M. C. Stéphanos (Athènes).
Hollande : M. J. Cardinaal (Delft).
Hongrie : MM. M. Beke, C. Radoz, Ratz (Budapest).
Iles Britanniques : Sir George Greenhill (Londres), Prof. E.-W. Hobson (Cambridge), Mr. C. Godfrey (Osborne).
Italie : MM. G. Castelnuovo (Rome), Fr. Enriques (Bologne), G. Scorza (Parme).
Japon : M. R. Fujisawa (Tokio).
Mexique : M. Valentin Gama (Observatoire de Tacuyaba).
Norvège : M. Alfsen (Christiania).
Portugal : M. Gomes Teixeira (Porto).
Roumanie : M. G. Tzitzeica (Bucarest).
Russie : MM. v. Sonin, Kojalovic, C. Possé (St-Pétersbourg).
Serbie : M. Michel Petrovitch (Belgrade).
Suède : M. E. Göransson (Stockholm).
Suisse : MM. H. Fehr (Genève), C.-F. Geiser (Zurich), J.-H. Graf (Berne).

Secrétariat général :

H. Fehr, Professeur à l'Université, 110, Florissant, Genève (Suisse).

LA CONFÉRENCE INTERNATIONALE

DE

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Paris, 1-4 avril 1914.

PROGRAMME

La Commission internationale de l'Enseignement mathématique se réunira à Paris, du 1er au 4 avril 1914, en une Conférence ayant principalement pour objet l'étude des deux questions suivantes :

A. — *Les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures de l'enseignement moyen.*

B. — *De la place et du rôle des mathématiques dans l'enseignement technique supérieur.*

Les séances ont lieu à la Sorbonne ; entrées : rue des Ecoles et rue de la Sorbonne.

Mercredi 1er avril.

Après-midi, 2 $^1/_2$ h. — Séance du Comité central.

» **4 h.** — Séance des délégués.

Soir, 8 $^3/_4$ h. — Séance de la Société Mathématique de France, à la Sorbonne, entrée : place de la Sorbonne.

Jeudi 2 avril.

Matin, 9 $^1/_2$ h. — *Séance générale d'ouverture*, sous la présidence de M. Gaston Darboux, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, représentant le Ministre de l'Instruction publique.

Allocution de bienvenue de M. le Prof. P. Appell, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences.

Discours de M. le Prof. G. Castelnuovo, membre du Comité central, au nom de M. le Prof. F. Klein (Gœttingue), président de la Commission.

Allocution de M. le Prof. G. Darboux, représentant du Ministre de l'Instruction publique.

Présentation des publications de la Commission par M. le Prof. H. Fehr, secrétaire-général.

Conférence de M. le Prof. Emile Borel : *l'adaptation de l'enseignement secondaire aux progrès de la Science.*

Conférence de M. le Prof. d'Ocagne : *le rôle des mathématiques dans les sciences de l'ingénieur.*

Après-midi, 2 $^1/_2$ h. — *Séance de travail* consacrée à l'étude de la question A : *Introduction des premières notions du Calcul des dérivées des fonctions primitives dans l'enseignement secondaire.*

Rapport général de M. le Prof. BEKE (Budapest), sur les réponses reçues relativement à la question A.

Rapport spécial de M. le Prof. Ch. BIOCHE, sur l'organisation de l'enseignement du Calcul des dérivées et des fonctions primitives dans les lycées de France, et sur les résultats obtenus.

Indications complémentaires fournies par les divers délégués.

Discussion.

Vendredi 3 avril.

Les séances du vendredi sont réservées à l'étude de la question B : l'*Enseignement des Mathématiques aux élèves ingénieurs.*

Matin, 9 $^1/_2$ h. — *Séance de travail* consacrée à l'étude de la question B.

Rapport général de M. le Prof. Paul STÆCKEL (Heidelberg), sur les réponses reçues relativement à la question B.

Indications complémentaires fournies par les divers délégués.

Discussion.

Après-midi, 2 $^1/_2$ h. — Discussion sur l'enseignement mathématique dans les Ecoles d'ingénieurs.

Soir, 9 h. — Séance de la Société des Ingénieurs civils de France, 19, rue Blanche.

Samedi 4 avril.

Matin, 9 $^1/_2$ h. — Continuation des discussions sur les questions A et B.

Présentation par les rapporteurs généraux, MM. les Prof. BEKE et STÆCKEL, de résumés sur les questions A et B.

Suite et fin de la discussion.

Après-midi, 2 $^1/_2$ h. — Séance des délégués : Les travaux futurs de la Commission.

Les délégués seront appelés à examiner les grandes lignes du programme de la Réunion que la Commission tiendra en 1915 à Munich, et dont l'objet principal sera la préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques des divers degrés de l'enseignement.

Soir, 9 $^1/_2$ h. — Réception chez S. A. le prince Bonaparte membre de l'Institut, 10, avenue d'Iéna.

COMPTE RENDU SOMMAIRE

La Commission internationale de l'Enseignement mathématique s'est réunie à Paris du 1er au 4 avril 1914 en une Conférence qui a attiré sur elle l'attention de tous ceux qui se préoccupent de la façon dont les mathématiques sont enseignées dans les diverses nations. Grâce à la présence d'un grand nombre de mathématiciens et de professeurs, la réunion a remporté un éclatant succès au dire de tous les participants. La réussite en revient en grande partie aux remarquables conférences et rapports présentés aux différentes séances.

Les séances étaient accessibles non seulement aux membres de la Commission et des Sous-commissions nationales, mais encore à tous ceux qui avaient manifesté le désir d'en suivre les travaux. La liste des adhésions comprend plus de 160 noms se répartissant sur 17 pays :

Allemagne	14	Hongrie	15
Autriche	2	Iles Britanniques	6
Belgique	2	Italie	7
Danemark	1	Roumanie	1
Egypte	1	Russie	10
Espagne	2	Serbie	2
Etats-Unis	1	Suède	1
France	82	Suisse	12
Hollande	2		

Plusieurs délégués s'étaient fait excuser en raison de la distance et du choix de la date. Quelques-uns ont dû renoncer au dernier moment à se rendre à Paris ; retenus par leurs devoirs professionnels, ils n'ont pu obtenir le congé nécessaire. Il y a pourtant un intérêt évident à ce que toutes les nations civilisées participent à ces conférences internationales dont les travaux contribuent à faire progresser l'enseignement scientifique.

Nous allons passer rapidement en revue les différentes séances, dans l'ordre chronologique, puis nous donnerons un compte rendu de la séance des délégués et le rapport du Secrétaire général. Nous reproduirons ensuite le texte complet des discours et des conférences de la séance générale publique.

Puis viendront les rapports généraux de MM. Beke et Staeckel ; nous les ferons suivre des indications complémentaires fournies par les délégués et d'un résumé de la discussion. Nous ne manquerons pas de rendre également compte de l'intéressante séance qui a eu lieu le vendredi soir 3 avril à la Société des Ingénieurs civils. Enfin, nous reproduirons quelques-uns des documents fournis par les Sous-commissions nationales en réponse aux questionnaires A et B.

Mercredi 1er avril, *2 h $^1/_2$*, amphithéâtre Le Verrier. *Séance du Comité central* sous la présidence de Sir George Greenhill, Vice-président. Le Comité adopte le règlement de la Conférence proposé par le Secrétaire-général. Il examine ensuite les différents points du programme de la Conférence internationale et arrête la liste des présidents des différentes séances.

4 heures. — Première séance des délégués sous la présidence de M. Castelnuovo.

9 h. du soir, Séance de la Société mathématique de France. Un grand nombre de membres de la Conférence avaient répondu à l'invitation de la *Société mathématique de France.* Dans son discours de bienvenue, M. Vessiot, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, Président, dit que la Société mathématique est heureuse de recevoir Messieurs les membres de la Conférence internationale de l'Enseignement mathématique et de manifester ainsi à la fois l'intérêt qu'elle porte aux travaux de la Conférence et les sentiments de sympathie qu'elle éprouve pour les savants qui vont y prendre part. Il insiste sur l'utilité que présente l'œuvre de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique pour le développement des Sciences mathématiques. La Société mathématique ne pouvait rester étrangère à la Conférence. « Elle n'oublie pas, dit-il, avec quelle cordialité les mathématiciens français ont été reçus à l'étranger dans les précédentes réunions internationales et nous sommes heureux de prouver le souvenir reconnaissant que nous gardons de ces amicales réceptions. »

Parlant au nom du Comité central et des congressistes présents, M. Fehr, Secrétaire-général de la Conférence, remercie la Société de son généreux accueil, puis M. de Demeczky, membre de la Sous-commission hongroise, remercie à son tour et rappelle quelques souvenirs personnels.

La séance proprement dite a été consacrée aux deux communications suivantes :

M. Hadamard : *Points-pinces, arêtes de rebroussement et représentation paramétrique des surfaces.*

M. Lebesgue : *Sur les courbes orbiformes, à propos d'une Note récente de* M. R. Bricard.

La séance a été suivie d'une réception amicale.

Jeudi 2 avril, *le matin, à 9 h. $^1/_2$*, Amphithéâtre Richelieu. La *Séance générale d'ouverture* a eu lieu sous la présidence de M. Gaston Darboux, secrétaire perpétuel de l'Académie des

Sciences, représentant le Ministre de l'Instruction publique. Les représentants des différents Ministères avaient pris place sur l'estrade avec la délégation française et le Comité central.

M. le professeur P. APPELL, Doyen de la Faculté des Sciences de Paris et Président de l'Institut, souhaite la bienvenue au nom de la Délégation française, puis M. G. CASTELNUOVO, membre du Comité central, prononce un discours au nom du Président de la Commission. Le Secrétaire général présente ensuite les publications de la Commission et annonce que la Commission fait don d'une collection à la Sorbonne et d'une collection à l'École normale supérieure.

M. DARBOUX, dans une allocution très applaudie, rappelle le temps où, dans les lycées et les collèges, le professeur de mathématiques était considéré comme de classe inférieure, assimilé aux professeurs de gymnastique ou de dessin. Il fait l'éloge de la réforme de l'enseignement secondaire français dont l'étude fut entreprise en 1899 et qui, mise en application en 1902, assura à l'enseignement scientifique une place de plus en plus en rapport avec les nécessités de la vie moderne. Quelque progrès qu'ait réalisé cet enseignement, il doit être encore perfectionné.

Puis vinrent les conférences de M. le professeur E. BOREL sur l'adaptation de l'enseignement secondaire aux progrès de la science, et de M. le professeur D'OCAGNE sur le rôle des mathématiques dans les sciences de l'ingénieur

Jeudi *après-midi, 2 h.* $^1/_2$, Amphithéâtre de Chimie. Présidence de M. J. HADAMARD. La séance est consacrée à la lecture du Rapport général de M. BEKE (Budapest) sur les résultats obtenus dans l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures de l'enseignement secondaire; et du Rapport spécial de M. BIOCHE, sur l'organisation de l'enseignement du Calcul des dérivées et des fonctions primitives dans les lycées de France et les résultats obtenus.

M. HADAMARD remercie les deux rapporteurs au nom du Comité central.

Les délégués sont ensuite invités à donner des renseignements complémentaires s'il y a lieu. Ont pris la parole : MM. LIETZMANN pour l'Allemagne, VAN VLECK pour les États-Unis, CASTELNUOVO pour l'Italie, RATZ pour la Hongrie, RALLET pour la Roumanie, PETROVITCH pour la Serbie et POSSÉ pour la Russie.

Puis vient une première partie de la discussion générale du Rapport de M. Beke. La suite de la discussion est remise à la séance du samedi matin.

Vendredi 3 avril. *Séance du matin 9 h.* $^1/_2$: Amphithéâtre Milne Edwards. — Présidence de M. CZUBER. — Les séances du vendredi ont été entièrement consacrées à l'enseignement mathématique dans les écoles d'ingénieurs. Dans la séance du matin M. le Prof.

Staeckel a donné lecture de son Rapport général sur la préparation mathématique des ingénieurs dans les différents pays. M. Czuber, qui préside la séance, remercie le savant professeur d'Heidelberg de son exposé très documenté.

Des renseignements complémentaires sont ensuite donnés par les représentants de plusieurs pays ; prennent la parole MM. von Dyck pour l'Allemagne, Godeaux pour la Belgique, d'Ocagne pour la France, Rados pour la Hongrie, Forsyth pour les Iles Britanniques, Abraham et Padoa pour l'Italie, Rallet pour la Roumanie, Gavrilovitch pour la Serbie et Geiser pour la Suisse.

M. Staeckel lit ensuite un résumé qui servira de base à la discussion générale qui aura lieu l'après-midi. M. Castlenuovo propose d'y ajouter deux questions : 1. La place accordée aux mathématiques dans les plans d'étude des Ecoles d'ingénieurs. 2. De la formation des ingénieurs, *a)* en vue de la technique ; *b)* en vue des sciences d'ingénieurs.

2 h. ½. — La séance de l'après-midi, qui a eu lieu dans le même amphithéâtre, a été réservée à une discussion sur le rapport de M. Staeckel. Elle était présidée par M. Hadamard.

9 h. — Le soir, à la séance de la *Société des Ingénieurs Civils de France,* M. d'Ocagne a rendu compte de la discussion qui avait eu lieu dans la journée, et donné un aperçu du Rapport de M. Staeckel dont il a lu quelques passages. Une discussion très intéressante a suivi cet exposé. Les différents orateurs ont insisté sur la nécessité qu'il y a pour l'ingénieur d'avoir une culture mathématique générale très forte. L'enseignement qu'ils reçoivent ne doit pas être utilitaire, il doit leur fournir les méthodes générales débarrassées des discussions spéciales qui n'ont d'intérêt que pour le mathématicien.

Samedi 4 avril. *Séance du matin 9 h. ½.* Amphithéâtre Milne Edwards. — La séance du matin, présidée par M. Czuber, a été consacrée à la suite des discussions sur les questions A et B. Tout d'abord le président ouvre la discussion sur les deux questions proposées par M. Castelnuovo. La seconde partie de la séance est consacrée à la fin de la discussion du Rapport de M. Beke.

Communications diverses : M. von Dyck annonce un nouveau fascicule des *Berichte und Mitteilungen* de la Sous-commission allemande : c'est un rapport de M. H. Weinreich sur la période récente du mouvement de réforme dans l'Enseignement mathématique en Allemagne, comme suite au rapport publié par M. Schimmack. M. von Dyck présente ensuite les trois premiers fascicules de l'importante publication *Die Kultur der Gegenwart* herausgegeben von P. Hinneberg, dont le volume consacré aux sciences mathématiques est dirigé par M. Klein. Ces trois fascicules contiennent les monographies de M. Zeuthen, sur les Mathématiques dans l'antiquité et au moyen âge; de M. A. Voss, sur les rapports entre les Mathématiques et la culture moderne; de M. Timerding, sur la connaissance des Mathématiques et la compréhension; et de M. A. Voss, sur la théorie de la connaissance mathématique.

2 h. $^1/_2$. — Amphitéâtre Le Verrier. — *Deuxième séance des délégués.* Présidence de M. Castelnuovo. — Dans la séance de l'après-midi les membres de la Commission ont examiné les grandes lignes du programme de la Conférence internationale qui aura lieu à Munich en 1915, et dont l'objet principal sera la préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques des divers degrés de l'enseignement. Ensuite un premier échange de vues a eu lieu sur le plan des travaux qu'il conviendrait de présenter à la réunion de clôture qui aura lieu à Stockholm en 1916.

9 h. $^1/_2$. — Le soir une brillante réception a été offerte aux membres de la Conférence par S. A. le prince Bonaparte, membre de l'Institut. Un grand nombre de membres du corps diplomatique ainsi que de nombreux académiciens étaient présents. Tous les salons et la magnifique Bibliothèque du prince étaient ouverts aux invités auxquels S. A. a fait le plus cordial accueil.

RÈGLEMENT

DE LA

CONFÉRENCE INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Paris, 1-4 avril 1914.

Article premier. — La Commission internationale de l'Enseignement mathématique se réunira à Paris, du 1er au 4 avril 1914, en une conférence ayant principalement pour objet l'étude des deux questions suivantes :

A. *Les résultats obtenus dans l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures de l'enseignement moyen.*

B. *De la place et du rôle des mathématiques dans l'enseignement technique supérieur.*

Les séances auront lieu à la Sorbonne.

Art. II. Les travaux de la Conférence sont dirigés par le Comité central. L'organisation de la réunion est confiée à un comité restreint, comprenant le Secrétaire général de la Commission, agissant au nom du Comité central, et un représentant de la délégation française.

Art. III. Seront membres de la Conférence :

1) Les membres de la Commission et des Sous-commissions nationales qui auront envoyé leur adhésion au Secrétaire-général.

2) Les personnes inscrites auprès du Secrétariat par l'intermédiaire des membres de la Commission Les adhésions sont reçues jusqu'au 1er mars 1914 auprès du Secrétaire général, M. H. Fehr, 110, Florissant, Genève, Suisse. Les mathématiciens français peuvent s'adresser auprès de M. Ch. Bioche, délégué de la Commission, 56, rue Notre-Dame-des-Champs, Paris VIe.

Les membres de la Conférence recevront une *carte de participant* qui leur sera délivrée par les soins du Comité d'organisation.

Art. IV. — La Conférence comprend : une séance générale d'ouverture, deux séances des délégués et quatre séances de travail.

La séance inaugurale sera présidée par un représentant du Ministre de l'Instruction publique de France ; les autres séances seront présidées par des membres du Comité central.

La séance inaugurale est publique. Les séances des délégués sont réservées aux membres de la Commission et des Sous-commissions nationales, tandis que les séances de travail sont accessibles à tous les membres de la Conférence.

Art. V. — Les langues officielles sont l'allemand, l'anglais, le français et l'italien.

Art. VI. — Au début de la discussion, le président annoncera le temps qui peut être accordé à chaque orateur. Pendant le premier tour la parole sera accordée dans l'ordre alphabétique des pays à raison d'un orateur par délégation. Les noms des orateurs seront désignés dans la première séance des délégués.

Les membres de la Conférence qui auront pris la parole dans une séance devront remettre au secrétariat, avant la fin de la journée, un résumé de leur communication.

Art. VII. — Le compte rendu complet des séances sera publié par les soins de l'« *Enseignement Mathématique* », revue internationale, organe officiel de la Commission. Il sera distribué aux membres de la Conférence comme fascicule 3 des *Publications du Comité central*, 2me série.

Les publications du Comité central étant destinées à une large diffusion, la reproduction et la traduction du compte rendu sont autorisées *sous la seule condition de l'indication de la source*.

SÉANCES DES DÉLÉGUÉS

Première séance des délégués; mercredi 1er avril 1914, à 4 h. ; Amphithéâtre Le Verrier. Présidence de M. Castelnuovo.

En ouvrant la séance, M. Castelnuovo exprime ses regrets que notre Président M. Klein soit empêché par la maladie de venir présider nos séances ; il excuse également M. D. E. Smith, l'un des vice-présidents, retenu à New-York ; puis, au nom du Comité central, il souhaite la bienvenue aux différents délégués.

M. Fehr, Secrétaire général donne ensuite lecture du Règlement proposé par le Comité central. Ce Règlement est adopté sans modification.

M. Enriques propose que dans nos séances les orateurs se servent le plus possible de la langue française, tout en reconnaissant que, conformément au Rapport préliminaire, l'allemand, l'anglais et l'italien sont également reconnus comme langues officielles de nos Congrès. Adopté.

M. Fehr, Secrétaire général, donne ensuite lecture de son Rapport sur la période de 1912 à 1914, reproduit ci-après

Etat des publications : Les délégués présents indiquent quels sont les *Rapports en préparation*, ou tout au moins projetés.

Allemagne : il reste huit fascicules :

Belgique : un volume est en préparation.

Autriche : M. Czuber annonce un fascicule 13.

Hollande : M. Cardinaal annonce un supplément qui sera spécialement consacré à l'enseignement technique.

Hongrie : M. Beke fait savoir que trois fascicules sont encore en préparation.

Italie : La Sous-commission italienne compte publier encore quelques fascicules.

Russie : M. Possé annonce encore deux Rapports.

Serbie : La Sous-commission vient d'être formée et compte publier un Rapport sur l'enseignement mathématique en Serbie.

Le Secrétaire général exprime le vœu que ces publications soient terminées *avant la réunion de Munich*. En vue du Rapport général qui devra être présenté à Stockholm, il est en effet indispensable que les Sous-commissions nationales aient terminé leurs travaux avant Munich. Il s'agit, bien entendu, des travaux destinés à la Commission elle-même, et non pas des rapports d'un caractère national en vue de faire connaître les travaux dans leur propre pays.

Deuxième séance des délégués ; samedi 4 avril à 2 h. $^1/_2$: Amphithéâtre Le Verrier, Présidence de M. Castelnuovo.

M. Fehr, Secrétaire général établit tout d'abord la liste des délégués présents à la Conférence. Il donne lecture des lettres des délégations empêchées de se rendre à Paris, et notamment une lettre de M. D. E. Smith de New-York.

Réunion de Munich. — Au nom du Gouvernement bavarois et de la Municipalité de Munich, M. von Dyck invite la Commission à tenir sa prochaine Conférence à Munich. M. Castelnuovo remercie M. von Dyck de son invitation et le prie de transmettre les remerciements de la Commission aux autorités bavaroises.

M. Fehr présente ensuite un avant-projet du plan de travail élaboré par le Comité central. La réunion de Munich sera principalement consacrée à la préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques des divers degrés de l'enseignement. Le Comité central propose de prévoir les trois catégories suivantes :

A. — L'enseignement secondaire (lycées, gymnases, écoles reales supérieures).

B. — L'enseignement professionnel (écoles techniques moyennes, etc.).

C. — L'enseignement élémentaire.

Le principal objet sera la question A concernant l'enseignement secondaire.

Le Comité central a invité M. G. Loria, professeur à l'Université de Gênes, de se charger du Rapport général sur la préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire. M. le Professeur Loria a bien voulu accepter cette tâche. Nous sommes certains qu'il trouvera le meilleur accueil auprès des délégués pour réunir les documents qui serviront de base à son travail.

Le Comité central examinera la possibilité de trouver des personnes compétentes pour fournir les rapports généraux sur les questions B et C. Dans tous les cas, en dehors des Rapports généraux, le Comité central organisera des conférences d'ordre général, comme cela a été fait à Paris pour la séance d'ouverture.

M. Hadamard attire l'attention de la Commission sur *l'enseignement de la Mécanique dans les écoles moyennes*. Il s'agit d'étudier cet enseignement *dans ses rapports avec les Mathématiques d'une part et la physique d'autre part*. Peut-être cette question pourrait-elle être examinée à Munich. D'une manière plus générale, on pourrait envisager la question suivante : « Que peut-on faire pour donner aux professeurs un sens suffisant des Mathématiques appliquées ? »

M. Fehr pense que cette question pourrait faire l'objet de l'une des conférences générales. Dans les écoles municipales de la ville de Munich, l'enseignement est précisément orienté du côté de la pratique suivant les idées de M. Kerschensteiner.

La Commission s'en remet entièrement au Comité central pour l'organisation de la Conférence de Munich et pour le choix de la date[1].

Réunion de Stockholm. — La Commission examine ensuite la question très importante du rapport à présenter à Stockholm. L'extension donnée aux travaux des Sous-commissions nationales rend fort difficile l'élaboration d'un rapport unique résumant l'ensemble des travaux. Tout d'abord, le Secrétaire général préparera un Rapport d'ordre plutôt administratif et documentaire,

[1] Le Comité central vient de décider que la Conférence internationale de Munich aura lieu *du lundi 2 au jeudi 5 août 1915.*

avec une liste détaillée des publications et des travaux. Cet exposé accompagnera la série des publications du Comité central renfermant les comptes rendus des Conférences internationales organisées par la Commission.

M. Geiser demande s'il ne serait pas possible de faire un Rapport en groupant des pays qui présentent une certaine analogie dans leur organisation et en se limitant aux écoles qui préparent à l'Université et aux écoles techniques supérieures. Dans tous les cas, vis-à-vis des autorités, qui ont donné leur appui à la Commission, il estime qu'il est indispensable de faire quelque chose ayant un caractère d'ensemble.

M. Beke pense que la Commission doit s'en remettre au Comité central, et se borner à lui transmettre quelques vœux ou suggestions. D'une part, chaque pays doit utiliser pour lui les documents réunis par la Commission; cette partie concerne le travail des Sous-commissions nationales. D'autre part, comme il l'a indiqué dans son Rapport général, la Commission pourrait publier un *fascicule comprenant l'ensemble des programmes et plans d'études de l'enseignement secondaire des différents pays.*

M. Hadamard s'associe à la proposition de M. Beke. Il pense en outre que les auteurs des rapports partiels seraient certainement disposés à collaborer à l'établissement d'une table générale des matières contenues dans nos Rapports.

M. Fehr annonce qu'il compte précisément faire suivre son Rapport d'une sorte de guide des documents de la Commission.

M. Castelnuovo résume la discussion concernant les travaux futurs de la Commission :

1) Les Sous-commissions nationales sont invitées à faire connaître dans leur milieu les documents réunis par la Commission. Ces travaux peuvent se faire par exemple sous la forme d'études comparées et par le moyen de conférences suivies de discussions.

2) Quant au travail à élaborer en vue de la réunion de clôture de Stockholm, il ne s'agit, pour le moment, que d'un premier échange de vues; la question sera examinée par le Comité central, puis elle sera reprise l'an prochain, à Munich.

M. Cardinaal se fait l'interprète des membres de la Commission pour remercier le Comité local et le Comité central de tout ce qu'ils ont fait pour l'organisation de cette Conférence dont la réussite a été complète.

M. Castelnuovo déclare la séance levée en donnant rendez-vous aux délégués l'an prochain à Munich.

La Commission internationale de l'enseignement mathématique pendant la période août 1912 à avril 1914.

Rapport présenté à la séance du 1er avril 1914

PAR

H. FEHR

Secrétaire-général de la Commission.

Au début de ce Rapport je tiens avant tout à rendre hommage à la mémoire de notre regretté collègue C. BOURLET. M. Carlo BOURLET a succombé le 12 août 1913 à Annecy, aux suites d'un accident tragique. Trois semaines auparavant il assistait encore à la réunion du Comité central, tenue à Heidelberg, en qualité de représentant de la délégation française. Sa mort est vivement ressentie dans notre Commission qui perd en lui l'un de ses membres les plus actifs et les plus distingués. Que Messieurs les membres de la Sous-commission française reçoivent ici la nouvelle expression de notre profonde sympathie.

A la suite du décès de M. C. BOURLET et de la démission pour raison d'âge et de santé, de M. DE SAINT-GERMAIN et de M. LAISANT, le Comité central a fait appel à M. BIOCHE, qui avait déjà pris une part très active aux travaux de la Commission, et à MM. HADAMARD et D'OCAGNE. La nouvelle délégation française se compose donc de MM. J. HADAMARD, membre de l'Institut, professeur au Collège de France et à l'Ecole polytechnique; M. D'OCAGNE, professeur à l'Ecole polytechnique et à l'Ecole des Ponts et Chaussées; Ch. BIOCHE, professeur au Lycée Louis-le-Grand.

Le Comité central tient à renouveler ici l'expression de sa profonde gratitude à MM. DE SAINT-GERMAIN et LAISANT pour le concours très précieux qu'ils ont apporté à la Commission dès sa fondation, il y a cinq ans.

Nous avons également eu le regret d'apprendre le décès de M. Ch. VOGT, survenu le 1er août 1913, membre de la délégation russe, auteur du Rapport sur l'enseignement mathématique dans les Ecoles réales en Russie.

Monsieur le Ministre de l'Instruction publique a désigné comme nouveau délégué M. M.-C. POSSÉ, professeur émérite de l'Université de Saint-Pétersbourg. Notre nouveau collègue, que le Gouvernement russe a délégué à la Conférence de Paris, est l'auteur du Rapport sur l'Enseignement mathématique dans les Universités et dans les Écoles techniques supérieures russes.

Au lendemain du Congrès nous avons dû accepter, bien à regret, la démission de M. le professeur H. von Koch, délégué suédois. Pour des raisons de santé il a demandé à être relevé de ses fonctions. On sait que c'est la Sous-commission suédoise qui fut la première à terminer les rapports sollicités par le Comité central.

M. H. von Koch a été remplacé comme délégué par M. Göransson qui avait collaboré aux rapports suédois non seulement en se chargeant de ce qui concerne les Gymnases et les Écoles réales, mais encore en participant avec M. von Koch à la direction du volume suédois.

C'est aussi pour des motifs de santé que M. C.-J. Rueda, délégué espagnol, vient de se retirer de la Commission. Sur la proposition de la Société mathématique espagnole, le Comité central a désigné comme successeur M. L.-O. de Toledo, professeur à l'Université de Madrid.

La Commission comprend actuellement des délégués de vingt-six pays représentés par 44 membres. Plusieurs pays n'ont pas adhéré à la Commission bien que leurs gouvernements aient été sollicités à plusieurs reprises. A l'occasion du Congrès de Cambridge, ou immédiatement après, nous avons enregistré les adhésions de représentants du Brésil, de la Bulgarie, de l'Egypte et de la Serbie.

Bien que plusieurs pays n'aient pas adhéré spécialement, leurs professeurs n'en suivent pas moins avec intérêt les travaux de la Commission, ainsi qu'en témoignent les demandes de renseignements et la correspondance échangée avec le Secrétaire général.

On constate par là que nos travaux ont déjà exercé une influence jusque dans les pays les plus lointains. Leur action ne manquera pas d'augmenter lorsque les publications annoncées seront entièrement terminées.

Comité central. — Dans sa réunion de Heidelberg (21-23 juillet 1913), le Comité central a décidé de porter de 4 à 7 le nombre de ses membres. Il a estimé, en effet, qu'à la veille des réunions qui auront lieu à Paris en 1914 et à Munich en 1915, il convenait de compléter le Comité, afin de faciliter les suppléances lorsque l'un ou l'autre des membres se trouverait empêché de prendre part à l'un des Congrès.

Le choix du Comité central s'était porté sur M. P. Appell, membre de l'Institut, Paris, M. G. Castelnuovo, professeur à l'Université de Rome et M. E. Czuber, professeur à l'École technique supérieure de Vienne, qui, par leur situation et leurs connaissances des choses de l'enseignement, sont tout particulièrement qualifiés pour participer à la direction des travaux et des séances de la Commission. Toutefois, en ce moment, les nombreuses occupations de M. APPELL, notamment ses fonctions de Doyen de la Faculté des Sciences de Paris et sa présidence, en 1914, de l'Institut et de l'Académie des Sciences, ne lui ont pas permis d'accepter cette invitation. Le Comité central s'est alors adressé à M. HADAMARD, membre de l'Institut, qui a bien voulu promettre son concours.

Le Comité central se compose donc actuellement de MM. les professeurs F. KLEIN (Gœttingue), président; Sir George GREENHILL (Londres), et Dav. Eug. SMITH (New-York), vice-présidents; M. H. FEHR (Genève), secrétaire général; G. CASTELNUOVO (Rome); E. CZUBER (Vienne) et J. HADAMARD (Paris).

Publications parues depuis le Congrés de Cambridge.

Le Rapport présenté par le Secrétaire-général au Congrès de Cambridge contient la liste complète des publications du Comité central et des Sous-commissions nationales. Plusieurs des rapports qui figurent dans cette liste portaient la mention : « en préparation. » Quatorze fascicules ont été distribués aux membres de la Commission. La liste complète sera annexée à ce rapport. En voici un aperçu sommaire :

Publications du Comité central : 2me série, Nos 1 et 2 (2 fascicules).

ALLEMAGNE : *Abhandlungen*, Tome I, fasc. 5 (le Tome II, fasc. 8, est un fascicule supplémentaire qui ne figure pas dans la liste présentée à Cambridge). Tome III, Fasc. 8. — Tome IV, fasc. 2, 5 et 8. — Tome V, fasc. 4 et 6 (8 fascicules).

Berichte und Mitteilungen : nos 8 et 9 (2 fasc.).

ITALIE : Fasc. No 10.

SUISSE : Fasc. 9, annexe : Réformes à accomplir. Ce sont des conclusions aux Rapports de la Sous-commission suisse (1 fasc.).

La liste des pays ayant terminé les rapports annoncés reste la même qu'à Cambridge : Suède, Hollande, France, Suisse, Autriche, Japon, Etats-Unis, Iles Britanniques, Danemark (9 pays).

Pour les pays suivants les Rapports sont en cours de publication : Allemagne, Australie, Belgique, Espagne, Hongrie, Italie, Norvège, Roumanie et Russie (9 pays).

Le Comité central exprime le vœu qu'au moment de la réunion de Munich, l'an prochain, ces publications soient entièrement terminées.

Publications en préparation :

ALLEMAGNE : 1. *Abhandlungen.* — Band III, Heft 9 : LOREY, W., Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten.

Band IV, Heft 3. GIRNDT, M., Der mathematische Unterricht an den Baugewerkschulen.

Heft 9, Staeckel, P., Die mathematische Ausbildung der Architekten, Chemiker und Ingenieure an den deutschen technischen Hochschulen.

Band V, Heft 5, Umlauf, K., Der mathematische Unterricht an den Seminaren und Volksschulen der Hansestädte.

Heft 7, Körner, H. und Lietzmann, Die Organisation des mathematischen Unterrichts an den Lehrerbildungsanstalten in Preussen.

2. *Berichte und Mitteilungen.* — La Sous-commission allemande prévoit de nouveaux fascicules qui seront consacrés notamment à des Rapports plus brefs ayant principalement pour objet l'exposé de l'enseignement mathématique dans les principaux pays, comparé à celui de l'Allemagne. Ainsi M. Wolff (Betzdorf) a fait un voyage en Angleterre et exposera l'organisation anglaise; M. Rohrberg (Steglitz) examinera de la même manière le cas des pays scandinaves. D'autres s'occuperont de l'Italie, de la France et des Etats-Unis. En outre, M. Weinreich (Gœttingue) rédige une suite au rapport de Schimmack sur le mouvement de réforme (Band III, Heft 1). Ces mémoires paraîtront comme supplément à la *Zeitschrift für math. u. naturw. Unterricht*, dont M. Lietzmann vient de prendre la direction à côté de MM. Schotten et Grimsehl.

Autriche : La Sous-commission autrichienne fera paraître un fascicule supplémentaire (nº 13).

Belgique : Tome II, Les mathématiques dans les écoles industrielles et professionnelles, par M. Rombaut, inspecteur honoraire. — L'enseignement des mathématiques dans les Universités et les Ecoles supérieures, par M. Neuberg.

Espagne : Mémoires, Tome II.

Hollande : Il paraîtra un supplément consacré à l'enseignement technique moyen.

Hongrie : La Sous-commission prévoit encore trois fascicules (Ecoles primaires, Écoles militaires, Universités.

Italie : Quelques nouveaux fascicules sont en préparation.

Norvège : Bericht über den mathematischen Unterricht in Norwegen.

Portugal : L'Enseignement mathématique au Portugal.

Russie : D'après les renseignements très complets fournis par M. Possé sur les travaux de la Sous-commission russe, il résulte qu'à la suite des nouveaux règlements et de transformations prochaines, la liste des travaux en préparation doit être modifiée. La Sous-commission publiera encore *deux fascicules* consacrés l'un aux Cours supérieurs de femmes, l'autre à la préparation des maîtres secondaires. — M. Possé signale l'intérêt très vif que les professeurs russes témoignent à la réforme de l'enseignement mathématique, comme le prouve du reste leur participation aux

Congrès des maîtres de mathématiques qui ont eu lieu à St-Pétersbourg en janvier 1912 et en janvier 1914.

SERBIE : L'enseignement mathématique en Serbie.

La Conférence Internationale de Paris. — Le programme général de la Conférence de Paris, ainsi que les deux questionnaires ont été préparés par le Comité central dans une réunion tenue à Heidelberg, du 21 au 23 juillet 1913, et à laquelle assistaient en outre les rapporteurs, MM. BEKE et STAECKEL, et M. C. BOURLET. Le programme élaboré à Heidelberg et la date de la Conférence ont été définitivement arrêtés à la suite des pourparlers que le Secrétaire général de la Commission a eus à Paris en octobre 1913, avec le Bureau de la Sous-commission française et les principaux intéressés. Il a été adressé aux membres, en date du 30 octobre 1913; puis à l'occasion d'un nouvel envoi, le 10 décembre 1913, nous les avons prié de communiquer le programme aux autorités scolaires, aux directeurs des Ecoles d'ingénieurs, aux membres de leur Sous-commission nationale, aux professeurs ou amis de la Science que les questions mises à l'ordre du jour peuvent intéresser et aux périodiques scientifiques.

Le Comité central et la délégation française ont adopté un règlement concernant l'organisation des séances et tout particulièrement des séances de travail. Nous estimons que pour les discussions qui suivront les Rapports généraux de MM. Beke et Staeckel, les différentes délégations doivent tour à tour être appelées à fournir des remarques ou des renseignements complémentaires ; c'est du reste l'usage que nous avions déjà établi dans les Conférences de Bruxelles et de Milan.

La Conférence Internationale de Munich. — Dans sa réunion de Heidelberg le Comité central a déjà jeté les premières bases de la Conférence internationale que la Commission compte organiser à Munich au commencement d'août 1915. Cette réunion sera uniquement consacrée à une question qui est capitale pour la réalisation de nouveaux progrès : c'est la préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques aux différents degrés de l'enseignement. Nous vous soumettrons le projet du programme de Munich à la seconde séance des délégués, samedi prochain. A cette même séance vous serez appelés à examiner la suite qu'il convient de donner à nos travaux en vue de la réunion de clôture qui aura lieu à Stockholm.

Annexe.

Publications parues depuis le Congrès de Cambridge.

Août 1912-Mars 1914.

Comité central; 2me série: Fasc. 1: Compte rendu du Congrès de Cambridge, 21-27 août 1912, publié par H. Fehr (97 p.: 2 fr. 50).

Fasc. 2: Conférence internationale de l'enseignement mathématique, Paris, 1-4 avril 1914. Travaux préparatoires (34 p.: fr. 0.75).

Allemagne: *Abhandlungen:* Band I. Heft 5. Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den höheren Mädchenschulen Deutschlands insbesondere Norddeutschlands, von Prof. Dr. J. Schröder. Mit einem Schlusswort zu Band I von F. Klein (xii-183 p.: 6 M.)

Band II, Heft 8. — Neue Erlasse in Bayern, Württemberg und Baden, von W. Lietzmann, E. Geck, H. Cramer. Mit einem Schlusswort zu Band II von A. Thaer (ix-49 p.: M. 1.50).

Band III, Heft 8. — Psychologie und mathematischer Unterricht, von Dr. D. Katz (120 p.; M. 3,20).

Band IV, Heft 2. — Die angewandte Mathematik an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie, von Dipl. Ing. K. Ott (vi-158 p.; 4 M.).

Band IV, Heft 5. — Die mathematischen Fächer an den niederen gewerblichen Lehranstalten in Deutschland, von Dip. Ing. W. Trost (vi-147 p.; 4 M.).

Band IV, Heft 8. — Die mathematische Ausbildung der Deutschen Landmesser, von Dr. P. Furtwängler und G. Ruhm (vi-50 p.: M. 1,60).

Band V, Heft 4. — Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten in Sachsen, Thüringen und Anhalt, von H. Dressler und K. Körner (v-132 p.: 4 M. 80).

Band V, Heft 6. — Die Organisation des mathematischen Unterrichtes in den preussichen Volks- und Mittelschulen, von W. Lietzmann (v-106 p: 3 M.).

Berichte und Mitteilungen: Heft VIII. — Nachruf auf Peter Treutlein, von P. Stäckel, sowie Der Internationale Mathematikerkongress in Cambridge, von W. Lietzmann (58 p.; M. 1,60).

Heft IX. — Mathematische Lehrmittelsammlungen, insbesondere für höhere Schulen, von H. Dressler (31 p.: M. 1.).

Italie: Fascicule 10. — Sui libri di testo di geometria per le scuole secondarie superiori, par prof. Scorza (15 p.).

Suisse: L'enseignement mathématique en Suisse. — Annexe: Réformes à accomplir dans l'enseignement mathématique en Suisse (Reproduit dans les trois langues, 34 p.; fr. 0,50).

Tableau d'ensemble de la répartition par pays des publications parues jusqu'au 1er avril 1914.

		Fasc. ou volumes		Nombre de pages
Comité Central . . .		8		331
Allemagne	A.	33	A.	3605
	B.	9	B.	217
Autriche.		12		690
Belgique.		1		348
Danemark		1		107
Espagne		3		165
Etats-Unis		11		670
France		5		674
Hollande		1		151
Hongrie		10		130
Iles Britanniques . . .		34		853
Italie.		10		253
Japon.		2		788
Roumanie.		1		16
Russie		6		254
Suède.		8		229
Suisse		9		812
		164		10293

SÉANCE GÉNÉRALE D'OUVERTURE

Jeudi 2 avril, à 9 h. 1/2 du matin, à l'amphithéâtre Richelieu.

Présidence de M. Gaston Darboux,
Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences,
représentant le Ministre de l'Instruction publique.

Ordre du Jour :

Allocution de bienvenue de M. le Prof. P. Appell, membre de l'Institut, doyen de la Faculté des Sciences.
Discours de M. le Prof. G. Castelnuovo, membre du Comité central, au nom de M. le Prof. F. Klein (Gœttingue), président de la Commission.
Présentation des publications de la Commission, par M. le Prof. H. Fehr, secrétaire-général.
Allocution du représentant du Ministre de l'Instruction publique.
Conférence de M. le Prof. Emile Borel : *l'adaptation de l'enseignement secondaire aux progrès de la Science.*
Conférence de M. le Prof. d'Ocagne : *le rôle des mathématiques dans les sciences de l'ingénieur.*

Allocution de M. P. Appell,

Doyen de la Faculté des Sciences,
Président de l'Académie des Sciences et de l'Institut.
Président d'honneur de la Délégation française.

Mesdames, Messieurs,

La Délégation française m'a chargé de l'agréable mission de souhaiter la bienvenue aux nombreuses personnes, professeurs, ingénieurs et savants, venues des pays les plus divers pour prendre part aux travaux de la Conférence. Nous avons le plaisir de réunir aujourd'hui plus de cent cinquante assistants qui sont régulièrement inscrits et qui représentent les pays suivants, que j'énumère par ordre alphabétique : Allemagne, Autriche, Belgique, Espagne, Etats-Unis, France, Hollande, Hongrie, Iles Britanniques, Italie, Roumanie, Russie, Serbie, Suède, Suisse.

Je souhaite tout particulièrement la bienvenue aux membres présents du Comité Central, à Messieurs Castelnuovo, Greenhill, Czuber, Hadamard et à Monsieur Fehr, Secrétaire-général, dont la compétence et le dévouement sont connus de tous et qui a généreusement ouvert son journal l'*Enseignement Mathématique* aux publications de la Conférence. Nous regrettons vivement que deux membres du Comité central n'aient pu se rendre à Paris. Monsieur Smith, des Etats-Unis, le promoteur de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique, au Congrès de Rome, a été retenu au dernier moment dans son pays. Plus graves sont les raisons qui ont empêché de venir le Président de la Commission internationale, l'illustre professeur Klein, de Gœttingue; l'état de santé de notre collègue lui interdit momentanément tout voyage; je répondrai à vos sentiments à tous, en lui adressant les vœux de la Conférence pour son prompt rétablissement.

Le Gouvernement de la République française qui, par ses encouragements et ses subventions, a montré tout l'intérêt qu'il porte aux travaux de la Conférence, s'est fait représenter à cette réunion par des délégués des divers Ministères que je suis heureux de saluer en votre nom; j'espère qu'ils pourront tirer quelque utilité de vos travaux.

Vous allez tout à l'heure entendre deux causeries : l'une, de M. Maurice d'Ocagne, a pour sujet *le rôle des mathématiques dans les sciences de l'ingénieur;* l'autre, de M. Emile Borel, est relative à *l'adaptation de l'Enseignement aux progrès de la science.* Elles se rapportent précisément aux deux questions principales qui sont à notre ordre du jour. Nous devons étudier, en effet, d'abord *les résultats obtenus par l'introduction du calcul différentiel et du calcul intégral dans les classes supérieures de l'enseignement moyen ;* puis, *la place et le rôle des mathématiques dans l'enseignement technique supérieur.*

A la demande du Comité central, M. Beke, professeur à l'Université de Budapest, a bien voulu se charger du rapport sur la première question, et M. Stæckel, professeur à l'Université d'Heidelberg, du rapport de la deuxième. Je remercie ces deux éminents professeurs qui ont eu la lourde tâche de dépouiller les documents fournis par les principaux pays, en réponse aux deux questionnaires que le Comité central a établi dans sa réunion de juillet à Heidelberg.

L'ensemble de ces documents publiés par les soins de la Commission internationale, constitue une œuvre unique en son genre. En cinq ans de travail, la Commission a réuni trois cents rapports formant plus de cent soixante fascicules ou volumes qui sont relatifs, d'une part, à tous les degrés de l'enseignement mathématique dans les Ecoles de garçons, comme dans celles de jeunes filles, depuis les Ecoles primaires jusqu'aux Universités et aux grandes écoles ; d'autre part, à tous les degrés mathématiques de l'Enseignement technique, depuis les écoles du type Arts et Métiers jusqu'aux écoles supérieures d'Ingénieurs. Deux collections complètes de ces Rapports ont été données par le Comité central à des établissements français : l'une à la Bibliothèque de l'Ecole normale supérieure, l'autre à la Bibliothèque de l'Université de Paris. Je lui en exprime nos vifs remerciements.

Mesdames, Messieurs,

Notre réunion est attristée par le deuil cruel qui a atteint la Commission française. Carlo Bourlet, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, avait mis au service de notre œuvre ses rares qualités d'organisateur et de professeur, sa connaissance approfondie de l'enseignement scientifique et de l'enseignement technique. Sorti de l'Ecole normale, formé à la discipline des mathématiques pures, il avait été peu à peu entraîné par son tempérament d'action, vers les applications des mathématiques ; il avait notamment publié de nombreux travaux utiles et féconds sur la théorie de la bicyclette et de l'automobile, sur l'étude des frottements et de la résistance de l'air. En juillet 1913, Carlo Bourlet venait de prendre part à la réunion du Comité central à Heidelberg, quand un accident, en apparence peu grave au début, l'emporta en quelques jours. Je vous demande la permission de terminer sur ce triste souvenir et je vous propose d'adresser l'expression de nos douloureuses condoléances à la famille de notre regretté collègue.

Discours de M. G. Castelnuovo.

Professeur à l'Université de Rome, membre du Comité Central, parlant au nom de M. le Prof. F. Klein (Gœttingue), président de la Commission.

Mesdames, Messieurs,

Le Président de notre Commission, M. Klein, devait aujourd'hui parler devant vous. Malheureusement sa santé l'a empêché de se rendre à Paris. Il m'a prié de vouloir bien le remplacer. J'ai accepté non sans hésitation. C'est qu'on ne parvient pas à remplacer M. Klein. Dans nos discussions nous ressentirons souvent l'absence de l'illustre savant qui est l'âme de notre Commission. Je suis donc sûr d'interpréter vos sentiments, en vous proposant d'adresser à M. Klein un télégramme qui lui exprime notre profond regret de ne pas le voir au milieu de nous et nos vœux d'apprendre de meilleures nouvelles de sa santé.

Au nom de la présidence de notre Commission, au nom de mes collègues, j'accomplis l'agréable devoir de présenter nos remerciements les plus vifs aux ministères qui ont bien voulu se faire représenter à cette séance, à M. Darboux, secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, à M. Appell, doyen de la Faculté des sciences et président de l'Institut, à toutes les autorités qui ont voulu nous témoigner l'intérêt qu'elles portent à nos travaux.

Vous connaissez probablement l'origine de notre Commission. Vous savez qu'elle a été constituée par un vœu du Congrès international des mathématiciens tenu à Rome en 1908, et que son mandat a été prolongé en 1912, à Cambridge, jusqu'au prochain congrès de Stockholm. Le but qu'on nous avait assigné d'abord était de faire une étude comparée des méthodes employées dans l'enseignement mathématique secondaire par les différentes nations. Mais on a jugé utile d'élargir ce programme et d'étendre l'enquête aux écoles de tous les degrés. Nos travaux ont été conduits avec un tel entrain que déjà plus de cent soixante fascicules ou volumes ont été publiés par les Sous-commissions nationales des Etats de l'Europe, de l'Amérique et du Japon. Et d'autres rapports sont annoncés par les pays qui n'ont pas encore terminé leur tâche. Le problème qui s'impose maintenant, c'est de faire la synthèse de tous les renseignements recueillis pour présenter à Stockholm une vue d'ensemble de notre enquête.

On a exprimé parfois des doutes sur nos intentions. On pensait, qu'en abusant de nos pouvoirs, nous tâcherions de faire triompher une tendance déterminée dans les méthodes d'enseignement des mathématiques. Je tiens à déclarer que rien n'est plus loin de nos propos. Nous n'avons ni les moyens, ni le désir de réformer radicalement l'instruction mathématique. Nous reconnaissons que chaque Etat doit régler, comme il croit mieux, ses écoles, en harmonisant le respect de la tradition avec les exigences de la vie moderne. Mais il faut bien constater que les relations plus fréquentes entre les peuples, et l'analogie des conditions économiques, ont créé chez les différentes nations des besoins pareils auxquels l'instruction doit pourvoir. Il devient donc toujours plus nécessaire de connaître, même en matière d'instruction, ce que font nos voisins et de profiter de leur expérience. La connaissance d'ailleurs n'impose pas l'action, mais l'action serait aveugle sans la connaissance.

Nos travaux ne se bornent pas à la publication de rapports : ils consistent aussi dans les discussions que nous tenons, presque annuellement, dans nos réunions internationales sur des sujets didactiques fixés d'avance. C'est ainsi que dans nos réunions précédentes nous avons parlé *de la rigueur, du rôle de l'intuition et de l'expérience dans l'enseignement secondaire* et de *la préparation mathématique des physiciens.*

Maintenant le Comité central a proposé à notre attention deux sujets dont vous verrez bien l'intérêt. Il s'agit d'examiner les résultats obtenus par l'introduction des éléments du calcul infinitésimal dans les écoles moyennes, et d'étudier la place et le rôle des mathématiques dans la préparation des ingénieurs. C'est précisément en vue de ces thèmes que le Comité Central a choisi Paris comme siège de notre réunion. On a jugé en effet que nulle part mieux qu'ici nous n'aurions trouvé des conditions favorables à nos travaux.

De la France est partie en 1902 l'initiative d'une réforme organique de l'enseignement traditionnel des écoles moyennes. Le plan d'études de cette époque a introduit d'une manière systématique, avant les autres pays, les notions de dérivées et de fonctions primitives dans les programmes des lycées. Il est donc naturel de constater ici ce que l'expérience de dix ans a pu enseigner à ce sujet.

La France d'ailleurs a consacré depuis plus d'un siècle ses soins les plus assidus à la préparation des ingénieurs, et a compris l'importance de ce problème en une époque où le développement colossal de l'industrie moderne ne pouvait encore être prévu. A la glorieuse Ecole polytechnique, d'autres Instituts ont été adjoints pour répondre aux nouveaux besoins qui se sont présentés. La multiplicité de ces grandes Ecoles et la diversité de leur organisation nous fourniront des sujets de comparaisons instructives. Nous devons examiner jusqu'à quel point il convient d'enseigner aux futurs ingénieurs les branches supérieures des mathématiques pures, ou s'il est préférable de donner une éducation plus pratique en resserrant les liens entre la science et ses applications.

C'est là un problème dont l'intérêt surpasse même les limites de notre enquête pour empiéter sur le domaine plus vaste de la philosophie scientifique.

Depuis la réunion de Cambridge notre Commission a éprouvé deux pertes douloureuses. M. Vogt, directeur de la deuxième Ecole réale de St-Pétersbourg et membre de la délégation russe, est mort le 1er août de l'année dernière. Il n'avait jamais pris part à nos réunions ; mais nous apprécions la contribution qu'il a apporté à nos travaux par un diligent rapport sur les écoles réales de son pays.

L'autre collègue, dont nous pleurons la perte, ne manquait jamais à nos discussions où il portait sa parole enthousiaste et sa profonde connaissance des problèmes didactiques.

M. Bourlet avait pris dans notre Commission une place remarquable dès notre première réunion de Bruxelles : il avait su conquérir toute notre estime et notre sympathie par ses rares qualités de l'esprit et du cœur. Nous l'avions quitté à Cambridge avec l'espoir de le retrouver dans sa ville. Un tragique accident, en enlevant dans toute sa vigueur ce savant distingué, a cruellement frappé notre Commission, ainsi que la science et l'enseignement français. Au nom de mes collègues je prie la délégation française de vouloir bien accepter l'expression de notre profond regret pour la perte de ce cher collègue que nous n'oublierons jamais.

J'ai signalé la part que la délégation française a prise dans nos travaux. Mais le cercle des personnes qui s'intéressent chez vous aux problèmes de l'enseignement est bien plus large et comprend tous vos savants. On dirait que les découvertes admirables que notre science doit à leur génie n'ont pas suffi à satisfaire l'activité de leur esprit. En suivant une noble tradition qui remonte à Monge et à Lagrange, ils ont voulu porter l'influence de leur savoir au profit des écoles.

C'est là un grand exemple qu'ils nous donnent et même un encouragement précieux.

Car nous nous demandons parfois si le temps que nous consacrons aux questions d'enseignement n'aurait pas été mieux employé dans la recherche scientifique. Eh bien, nous répondons que c'est un devoir social qui nous force à traiter ces problèmes. Il ne suffit pas, en effet, de produire la richesse, il faut aussi faire en sorte que sa distribution ait lieu sans retard et sans gaspillage. N'est-ce donc pas une richesse, même la plus précieuse des richesses, que celle qui forme notre orgueil et qui est la source de nos jouissances les plus pures ? Ne devons-nous pas faciliter à nos semblables l'acquisition du savoir, qui est à la fois une puissance et un bonheur ?

C'est avec ces sentiments, Messieurs, que nous commençons aujourd'hui nos travaux, avec l'assurance de pouvoir compter sur la sympathie de cette noble nation qui, en toute époque, a professé la religion de la science.

Présentation des Publications

M. Fehr, Secrétaire-général de la Commission présente la série complète des publications du Comité central et des Sous-commission nationales. Il annonce que la Commission fait hommage à l'Université de Paris de deux séries complètes l'une étant destinée à la Bibliothèque de la Sorbonne, l'autre à l'Ecole normale supérieure. La collection comprend actuellement 164 fascicules et volumes renfermant un ensemble de près de 300 Rapports.

La Sous-commission allemande fait en outre hommage d'une série de ses cinq volumes au Musée pédagogique de la rue d'Ulm.

Discours de M. G. Darboux

Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, représentant le Ministre de l'Instruction publique.

Messieurs,

En choisissant, pour le représenter à cette réunion d'ouverture, un des deux vice-présidents de notre Conseil supérieur de l'Instruction publique, M. le Ministre a voulu montrer tout l'intérêt qu'il attache aux travaux que vous poursuivez en commun depuis six ans sous la haute direction de mon ami M. Félix Klein. Vos études se bornent exclusivement à l'Enseignement mathématique, considéré il est vrai dans toutes ses formes et tous ses états ; mais elles embrassent l'ensemble des nations civilisées. Sans pénétrer longuement ici dans un domaine qui m'est interdit, je puis remarquer que les nations deviennent de plus en plus solidaires les unes des autres. Partout les mêmes problèmes se posent, et presque dans les mêmes termes, partout aussi l'on envisage à peu près les mêmes solutions. S'il y a entre les solutions adoptées ici et là des différences, qui tiennent évidemment au génie propre de chaque nation, il y a plus de ressemblances, plus de points communs entre elles qu'on ne serait tenté de le supposer au premier abord. Malgré les apparences, qui sont quelquefois contraires, les nations se rapprochent de plus en plus les unes des autres, elles tendent de plus en plus à former une humanité civilisée, un concert des peuples dans lequel chacun doit s'attacher à exécuter sa partie de manière à concourir à l'harmonie de l'ensemble et au bien de tous.

Parmi les questions qui préoccupent aujourd'hui les hommes de science et les hommes politiques, il n'en est pas de plus importante que celle de l'enseignement. Depuis que le latin a cessé progressivement d'être la langue universelle, la langue commune aux peuples civilisés, depuis que les merveilleuses découvertes de la science ont transformé les conditions matérielles de la vie des peuples, depuis que de grands génies ont apporté dans tous les pays des contributions originales au vieux fonds de la civilisation gréco-latine, on peut dire que partout on a senti le besoin de transformer radicalement les vieux cadres rigides qui avaient servi pendant tant de siècles à l'enseignement. Ces modifications toutefois ne se sont pas faites sans de grandes résistances, et c'est à grand'peine qu'on a réussi à faire aux sciences de tout ordre, à l'histoire, aux langues vivantes, à la géographie, la place qui devait leur revenir.

Si vous voulez me permettre de vous rappeler un souvenir de ma jeunesse, je vous dirai qu'il y a 50 ans, je siégeais dans une Commission à côté d'un professeur de lettres distingué qui répondait froidement à toutes mes avances. Je réussis enfin à le faire parler et à en extraire cette simple parole : « Les sciences sont quelque chose de bien envahissant. » Ce simple aphorisme résume admirablement l'état d'esprit des anciens professeurs de l'Enseignement secondaire. Quand l'illustre mathématicien Hermite faisait vers 1840 sa seconde à notre Collège Henri IV, son professeur de lettres lui faisait un crime de s'intéresser au cours de physique, bien rudimentaire pourtant, que l'on faisait alors ; je n'ai pas besoin de vous rappeler qu'autrefois le professeur de mathématiques était considéré comme de classe inférieure, assimilé au professeur de gymnastique ou de dessin. Dans la correspondance de Gauss et de Schumacher, nous voyons qu'un pédagogue de mérite voulait exclure les mathématiques de l'enseignement secondaire sous prétexte que les mathématiques ne contiennent aucun élément moral. Ce à quoi Schumacher répondait, aux applaudissements de Gauss, que la morale ne contient aucun élément mathématique. Malgré les répugnances des pédagogues, les sciences ont su se faire leur place, les langues vivantes et l'histoire aussi. Mais alors se sont présentées les difficultés contre lesquelles on se débat aujourd'hui.

Si la matière du savoir s'élargit sans cesse, il ne peut en être de même des cadres de l'enseignement, qui ne saurait rester encyclopédique. Il y a des nécessités inéluctables, l'enfant grandit et devient homme, il ne peut rester indéfiniment sur les bancs du Collège. Son intelligence est limitée et ne lui permet de s'assimiler qu'une certaine dose de savoir. Il a donc fallu de toute nécessité songer à créer différents types d'enseignement, il a fallu faire en sorte que chacun de ces types répondît à cette condition, qui contient toute la formule de l'enseignement secondaire : faire de l'enfant un homme en état d'aborder avec les moyens nécessaires toutes les difficultés et toutes les tâches de la vie à laquelle il est destiné, capable surtout, à l'aide des notions acquises, de continuer à recevoir des hommes et des choses qui l'entourent cet enseignement et ce développement qui ne doivent finir qu'avec son dernier jour. La solution d'un tel problème ne saurait être facile, même s'il s'agit d'un enfant riche, d'un fils de prince si l'on veut, auquel on peut donner les meilleurs précepteurs. Mais elle rencontre des difficultés infiniment plus graves lorsqu'on doit la rechercher pour tous les enfants d'une même classe ou d'une même communauté. Ces difficultés s'accroissent encore si l'on veut soumettre à des programmes uniformes tous les enfants d'une même nation. On est allé autrefois, surtout en France, jusqu'à vouloir leur imposer, dans le détail, des exercices uniformes, et l'on cite volontiers cette parole d'un de nos anciens ministres de l'Instruction publique, regardant la pendule de son cabinet et disant : « A cette heure, dans toute la France, on compose en version grecque et sur le même texte. »

En France, la première tentative qui a été faite pour constituer des types différents dans l'enseignement secondaire remonte au commencement du second empire et est connue sous le nom de *bifurcation*. Pendant cinq ans les enfants suivaient les mêmes études, puis; pendant les quatre dernières années, les uns faisaient du latin et des sciences, les autres approfondissaient l'étude du grec et du latin. Il y avait des classes communes aux deux sections de l'enseignement. Ce système n'a pas réussi, il est inutile et il serait trop long de rechercher ici pour quelles raisons; mais, après un essai malheureux d'enseignement encyclopédique, on a dû reconnaître la nécessité de constituer des types distincts d'enseignement secondaire. En 1899, notre Chambre des Députés, qui a toujours compris l'importance des questions d'enseignement, nomma une grande commission, en lui donnant pour mission d'opérer la réforme de l'enseignement secondaire, qui était réclamée de tous côtés.

Cette commission, présidée par M. A. Ribot, ouvrit une enquête des plus sérieuses et des plus étendues. Ses travaux ont été publiés et forment cinq volumes qui constitueront à l'avenir un document essentiel pour l'étude de l'éducation dans tous les pays. Elle a entendu plus de 200 personnes, a consulté les Chambres de commerce, les Conseils généraux, et, à la suite de cette enquête, des modifications profondes ont été établies en 1902, dans le régime de nos établissements d'enseignement secondaire.

Voici l'état actuel :

Un *premier cycle*, d'une durée de quatre ans, comprend deux divisions : l'une A dans laquelle on fait du latin; l'autre B dans laquelle on le laisse de côté en donnant plus de temps à l'étude des sciences et des langues vivantes.

Le *second cycle*, d'une durée de trois ans, comprend quatre divisions :

A. Grec, latin. — B. Latin, langues vivantes. — C. Latin, sciences. — D. Sciences, langues vivantes.

C'est dans les deux dernières sections que la place prépondérante a été accordée aux Sciences. On leur consacre 11 et 12 heures par semaine dans les deux premières années et 18 heures pendant la troisième.

Cette réforme de 1902 a été beaucoup attaquée. On l'a combattue surtout en lui reprochant d'affaiblir les études littéraires, et ce reproche était certainement de nature à toucher plusieurs de mes compatriotes qui se souviennent volontiers de leur origine latine et attachent avec raison un grand prix aux études classiques. Mais il ne semble pas que le principe de la réforme ait été sérieusement contesté. La majorité des contradicteurs est toute disposée à conserver différents types d'enseignement, sauf à reléguer certains de ces types dans une classe inférieure et à leur retirer, ce qui me paraît inadmissible, les sanctions qui leur sont accordées actuellement en vue de l'entrée dans les carrières libérales et dans l'enseignement supérieur.

Le mieux serait, à mon avis, de ne plus contester la légitimité d'une réforme qui s'imposait réellement et de s'attacher au contraire, par des études méthodiques et précises, à constituer sur des bases solides chacune des différentes sections de l'enseignement, en s'efforçant de donner une satisfaction aussi complète que possible aux besoins en vue desquels chacun de ces types a été établi. Un grand progrès serait aussi réalisé, il me semble, si, partout où cela sera possible, on se gardait de réunir et de mêler dans un même établissement les différentes sections entre lesquelles l'enseignement est partagé.

Cette étude approfondie des programmes de l'enseignement est une tâche bien vaste et bien digne de tenter tous ceux qui s'intéressent à la cause sacrée de l'enseignement; vous l'avez entreprise, en vous limitant à l'objet pour lequel vous êtes particulièrement compétents : je veux parler des mathématiques, qui sont aujourd'hui en grande faveur, plus peut-être que ne le voudraient les mathématiciens de profession. Les physiciens, les philosophes, les médecins, les lettrés eux-mêmes, font appel à notre concours. Nous nous demandons quelquefois avec inquiétude d'où viennent tous ces adhérents « qu'en notre sein nous n'avons pas portés ». J'ajoute, pour employer une expression banale, que nous sommes à un tournant de notre histoire. Après deux mille ans, le vieil Euclide a perdu une partie de sa vertu, tous les cadres de notre enseignement sont brisés ou sont à la veille de l'être. Pourrons-nous les reconstituer, j'en doute fort. En tous cas, ils n'auront ni la solidité, ni la durée de ceux qu'ils sont appelés à remplacer. Dans cette période nouvelle, où tout sera en perpétuel devenir, il faudra les surveiller, les modifier au besoin, les adapter aussi aux fins diverses et si variées qu'on nous impose de tous côtés et à chaque instant.

Cette tâche si belle et si difficile, vous la poursuivez avec une persévérance et un esprit de suite que l'on doit admirer.

En vous souhaitant la bienvenue au nom du Ministre et en vous invitant à commencer sans retard vos travaux, j'ose soumettre à votre attention nos programmes de 1902 auxquels j'ai eu l'honneur de collaborer.

En discutant la question A qui fera l'objet de vos délibérations, vous pourrez reconnaître que ces programmes, déjà vieux de douze ans, ont réalisé quelques-unes des réformes dont vous allez vous occuper.

Sans entrer dans le détail, on peut indiquer les points qui sont acquis en mathématiques depuis notre réforme de 1902; ce sont :

1° l'introduction dans l'enseignement élémentaire du Calcul des dérivées et même de notions de Calcul intégral;

2° l'emploi systématique dans la géométrie des méthodes de transformation qui simplifient l'étude et apportent un principe de classification;

3° le développement donné aux applications qui sont posées par la pratique, à l'exclusion de ces problèmes qui n'ont aucune racine dans la réalité;

4° le développement aussi complet que possible de l'initiative personnelle chez tous les élèves qui prennent part à l'enseignement et une préoccupation incessante d'une bonne formation de l'esprit.

L'ADAPTATION DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE AUX PROGRÈS DE LA SCIENCE

Conférence de M. Émile Borel.
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris.
Sous-directeur de l'École normale supérieure.

Messieurs,

Le public s'intéresse généralement assez peu aux programmes et aux méthodes de l'enseignement primaire, de l'enseignement technique ou professionnel, de l'enseignement supérieur; il pense, avec raison, que c'est là surtout l'affaire des spécialistes, et il s'en remet à eux avec confiance; il ne se passionne que sur certains points, qui touchent à la religion ou à la politique, à l'influence plus ou moins directe de l'Etat ou de certaines associations confessionnelles sur l'organisation de l'enseignement.

Il n'en est pas de même dès qu'il s'agit de l'enseignement secondaire; les programmes en sont souvent discutés, non seulement dans les Revues, mais dans les journaux quotidiens; chacun s'y intéresse et formule volontiers son avis. Les professeurs eux-mêmes ne se désintéressent pas des parties de l'enseignement qui ne les concernent pas directement; tandis qu'un professeur de grec, dans une Université, serait fort étonné qu'on lui demandât son avis sur les cours de mathématiques, ou un professeur de mathématiques sur les cours de grec, chacun d'eux a une opinion motivée sur la place que les langues anciennes et les sciences doivent occuper dans l'enseignement secondaire. Il est naturel qu'il en soit ainsi, pour plusieurs raisons, dont la principale est peut-être l'unité du but de l'enseignement secondaire [1],

[1] Pour prévenir tout malentendu, je précise qu'il s'agit ici de l'enseignement secondaire français, se terminant avec le baccalauréat. Dans plusieurs pays, la première année d'université, parfois même les deux ou trois premières années, correspondent assez exactement aux dernières années d'enseignement secondaire français. Pour des raisons aisées à deviner, l'enseignement secondaire est bien plus divers, dans les différents pays, que ne le sont l'enseignement supérieur proprement dit, l'enseignement primaire, les enseignements techniques et professionnels.

unité bien marquée par le beau nom d'*humanités* qu'on lui donne souvent et qu'il doit chercher à justifier. Il s'agit avant tout de former des hommes cultivés, possédant cette « culture générale » si difficile à définir dogmatiquement, mais dont l'idée est cependant fort claire. Les connaissances précises ne sont pas regardées comme une fin en soi, mais comme un moyen de contribuer à cette culture commune à tous les hommes qui aspirent à diriger en quelque mesure l'effort des autres hommes. Cette conception de l'enseignement secondaire a été très discutée et l'on est allé jusqu'à contester le droit même à l'existence d'un tel enseignement ; on prétend que dans la société moderne il n'y a plus de place pour cette culture générale, que la vie est décidément trop courte pour qu'on perde plusieurs années à acquérir des connaissances qui ne seront pas directement utiles. Nous n'avons pas à discuter ici cette conception strictement utilitaire ; nous n'avons pas non plus à rechercher dans quelle mesure l'évolution politique et sociale peut modifier l'organisation de l'enseignement secondaire et le recrutement de ses élèves ; nous constatons simplement l'existence de l'enseignement secondaire comme un fait social actuel.

Il semble bien d'ailleurs que la complexité croissante de la vie et des relations internationales rendra de plus en plus nécessaires les hommes dont le rôle est de coordonner les efforts dispersés de la masse des travailleurs manuels. Qu'une culture commune soit indispensable pour cette coordination, c'est ce qu'il paraît difficile de contester.

*
* *

L'enseignement secondaire ne peut évoluer que très lentement.

La culture générale ne peut être définie que par l'opinion commune des hommes qui sont regardés comme cultivés ; ces hommes ont été formés par l'enseignement secondaire de leur époque ; bien rares sont ceux qui ne regardent pas comme excellente la culture qu'ont reçue les meilleurs d'entre eux ; seuls, de très rares esprits conservent la jeunesse intellectuelle qui a permis à M. Lavisse, dans des souvenirs parus l'année de son jubilé, de critiquer la culture qui, cinquante ans auparavant, avait fait de lui un des plus brillants élèves de l'Ecole Normale.

Les tendances conservatrices de la génération précédente d'écoliers ne se manifestent pas seulement dans la presse et dans l'opinion ; à cette génération appartiennent deux catégories de personnes dont l'influence sur l'enseignement est considérable : la plupart des parents d'élèves et les professeurs même de l'enseignement secondaire [1].

La lenteur de l'évolution de l'enseignement secondaire a des raisons plus profondes encore et plus sérieuses. On enseigne rarement très bien ce que l'on n'a pas appris soi-même comme élève ; la perfection d'un enseignement est le résultat d'expériences successives d'un grand nombre de maîtres. Un professeur improvisé, si intelligent et si dévoué qu'on le suppose, ne peut suppléer à cette tradition et construire à lui seul cette chose si complexe qu'est un enseignement secondaire cohérent ; de même que les plus habiles constructeurs, livrés aux seules ressources de la théorie, lanceraient des bateaux peu stables et naviguant mal, s'ils n'étaient pas constamment guidés par les types anciens.

Si l'on admet d'ailleurs, comme beaucoup d'excellents maîtres, que dans l'enseignement secondaire la matière importe moins que la forme, que l'essentiel est de former l'esprit à l'occasion de connaissances précises, bien plus que d'acquérir ces connaissances, on sera porté à voir plus

---

[1] C'est à Paris que cette double influence est la plus forte et la plus conservatrice ; d'une part, en moyenne, les parents des élèves des lycées de Paris renferment une plus forte proportion de personnes ayant fait dans leur jeunesse des études secondaires que les parents des élèves des lycées et collèges moins importants ; d'autre part, les professeurs des lycées de Paris sont en moyenne, plus âgés que les professeurs des lycées des départements, puisque la nomination à Paris ne se fait qu'après un stage plus ou moins long en province.

J'ai été témoin récemment d'un exemple typique d'une des nombreuses formes sous lesquelles s'exerce l'action conservatrice des parents d'élèves. Il s'agissait d'une modification dans la terminologie grammaticale dont le détail importe peu ; une mère d'élève expliquait qu'elle n'avait pu se résoudre à apprendre cette terminologie nouvelle, mais que son fils avait appris facilement la correspondance entre la terminologie nouvelle et la terminologie ancienne connue par sa mère et avait pris l'habitude de lui demander, dans les cas subtils qui font le désespoir des écoliers : « Dis-moi, maman, comment cela s'appelait-il de ton temps ? Je saurai bien ce qu'il faut mettre aujourd'hui ». Cette mère excellente annihilait donc l'effort fait par le professeur de son fils pour améliorer son enseignement. (J'ignore, bien entendu, si le professeur avait tort ou raison dans son « amélioration.) »

d'avantages que d'inconvénients à cette lenteur de l'évolution. Il s'agit de former des hommes ; pourquoi les « humanités » évolueraient-elles plus vite que l'homme lui-même ? Et sommes-nous si différents de nos grands-pères ? Ce qui était bon pour eux ne vaut-il pas vraisemblablement mieux que des innovations dont le succès est douteux ?

Ces arguments sont très forts et suffisent à justifier l'opposition que rencontre tout projet de changement dans les programmes de l'enseignement secondaire. Il ne faut pas hésiter à reconnaître que ces changements doivent être faits avec beaucoup de prudence ; toute modification trop brusque ou trop considérable risque d'être fâcheuse pendant un temps assez long ; on peut même affirmer d'une manière presque absolue que toute modification est tout d'abord nuisible et, pendant la période d'adaptation, entraîne plus d'inconvénients que d'avantages.

* * *

Personne cependant ne pense que l'enseignement secondaire doive être immuable. En France, les partisans les plus intransigeants de la tradition et de la culture gréco-latine désirent que les auteurs français du XVII^e siècle aient leur place à côté des auteurs grecs et des auteurs latins ; voilà donc une partie considérable des programmes littéraires qui a dû être modifiée en moins de deux siècles, car ce n'est pas avant la mort de Louis XIV que l'on pouvait songer à regarder son règne comme classique.

Les modifications sont plus rapides encore pour l'enseignement de l'histoire, de la géographie, des sciences expérimentales ; revenir aux programmes d'il y a seulement cent ans apparaîtrait comme une absurdité. Il arrive même, pour les sciences qui sont en relation avec les applications industrielles, que le public, au lieu de tendre à retarder l'évolution, trouverait volontiers qu'elle n'est pas assez rapide ; cela tient à ce que la vie quotidienne montre à chacun de nous les lacunes de la culture qu'il a acquise sur les bancs du lycée, les applications industrielles se mêlant chaque jour davantage à notre existence. Il y aurait beaucoup à dire sur cette adaptation progressive des enseignements divers aux progrès des sciences et à l'évolution des sociétés humaines ; mais le phénomène le plus intéressant et le plus curieux, que je veux me borner à étudier aujourd'hui, c'est la stabilité extraordinaire de l'enseignement des mathématiques.

*
* *

Aux raisons générales signalées plus haut de la lenteur de l'évolution de tout enseignement secondaire, on peut en ajouter de spéciales à l'enseignement secondaire des mathématiques. Les mathématiques sont de beaucoup la plus ancienne des sciences ; les Éléments d'Euclide remontent à près de vingt-cinq siècles ; les parties élémentaires de la géométrie et de l'arithmétique ont acquis depuis longtemps un degré de perfection logique qui ne peut pas être dépassé ; si le but principal de l'enseignement de ces éléments est d'habituer les élèves à la rigueur des raisonnements, il est complètement inutile de rechercher des modèles meilleurs : c'est sans doute pour cela qu'on utilise encore parfois, notamment en Angleterre, les traductions même d'Euclide pour enseigner la géométrie. Cet exemple n'est pas le seul que l'on pourrait donner des tendances conservatrices de l'enseignement mathématique.

Il n'est pas douteux qu'en mathématiques, comme pour les autres disciplines, le rôle éducatif d'un enseignement dépend surtout de ses traditions ; tout bouleversement est donc tout d'abord nuisible. Dans l'ordonnance des matières, dans le choix des exercices, dans les réponses à faire par le professeur aux objections plus ou moins conscientes des élèves, l'expérience de plusieurs générations guide à chaque instant. Lorsqu'un enseignement est entièrement nouveau, lorsque même un enseignement s'adresse pour la première fois à des élèves relativement plus jeunes, toute cette tradition est à créer ; chaque professeur ne peut plus compter que sur sa propre expérience, et l'expérience d'un seul homme est bien peu de chose au regard de l'expérience de plusieurs siècles de professeurs. En supposant même qu'il n'y ait chez les maîtres jeunes ou vieux aucun parti pris contre les innovations, qu'il ne se produise aucun découragement prématuré à la suite d'essais ayant médiocrement réussi pour des raisons peut-être fortuites, il n'est pas possible d'espérer que l'enseignement nouveau atteigne vite le même degré de perfection que les enseignements anciens dont il prend la place. Dans les circonstances les plus favorables, il faut compter au moins une génération pour que ce degré de perfection soit atteint, lorsqu'il s'agit d'innovations de quelque importance : il faut en effet que la majorité du corps enseignant soit renouvelée, car il est généralement très difficile d'adapter à de jeunes élèves un enseignement que l'on n'a pas reçu soi-même à leur âge.

On est tenté, dès lors, de se demander s'il vaut la peine de s'occuper des programmes de mathématiques de l'enseignement secondaire. Si cet enseignement a pour but la formation de l'esprit et non l'acquisition de connaissances précises et si ce but est atteint d'une manière à peu près parfaite par les programmes traditionnels, pourquoi modifier ces programmes, puisque l'on est certain que tout changement produira une petite crise ? Je voudrais indiquer brièvement pourquoi cette attitude ne me paraît pas acceptable.

*
* *

Tout d'abord, pour une raison de fait. Il n'est pas possible de conserver intangible une portion d'un organisme dont toutes les autres portions se transforment. Or les humanités littéraires et scientifiques forment un tout ; on ne doit pas envisager séparément les divers programmes spéciaux, puisque le but de l'enseignement est un, la formation de l'homme cultivé. Les mathématiques ne peuvent donc rester la seule partie immuable dans un enseignement où tout se transforme ; les nécessités même des enseignements voisins imposent des modifications dont il serait facile de donner des exemples.

De plus, et ceci est peut-être plus important encore, ce ne serait pas sans danger qu'un enseignement se séparerait de plus en plus de la vie et de la réalité. Les applications des sciences pénètrent chaque jour davantage notre existence ; nous nous servons quotidiennement d'une bicyclette, nous voyons constamment dans les journaux des graphiques, nous construisons, chaque fois qu'un des nôtres est malade, des courbes de température. Si l'enseignement des mathématiques se rattache à de tels objets familiers, il risquera bien davantage d'intéresser, il échappera surtout à la mortelle scolastique. Quand un enseignement est trop scolastique, il dégoûte un grand nombre d'élèves et déforme plutôt qu'il ne forme l'esprit d'une partie des autres ; il n'est pas certain que l'enseignement des mathématiques ait toujours su éviter cet écueil.

Lorsque l'on parle de rapprocher l'enseignement des mathématiques de la réalité, certains croient ou feignent de croire qu'il s'agit simplement de bêtifier en disant rond au lieu de cercle, boule au lieu de sphère, pain de sucre au lieu de cône, etc. Ils oublient que l'enseignement des mathématiques ne peut avoir toute sa valeur éducative que s'il apprend à éviter ce sophisme trop fréquent qui consiste à croire que les difficultés réelles peuvent être résolues au moyen de simples définitions de mots, sans qu'il soit nécessaire de vérifier la cohérence de ces définitions avec le vocabulaire vulgaire. L'enfant a une idée concrète du cercle ou de la sphère ; d'autre part, le géomètre en donne une définition abstraite, sur laquelle il basera ses raisonnements ; le sophisme consiste à admettre sans examen, simplement parce que le mot employé est le même, que la sphère concrète du bon sens et la sphère abstraite du géomètre sont exactement la même chose. Il faut donc confronter à chaque instant les définitions avec les réalités, afin de constater l'accord — au moins approximatif — entre la langue artificielle créée par les mathématiciens et la langue vulgaire à laquelle l'élève est habitué.

* * *

Le développement scientifique admirable du XVIIIe siècle, qui a eu comme conséquence le développement industriel du

XIX^e, peut être rattaché à quatre grands noms : Galilée, Descartes, Newton et Leibniz. Grâce à la géométrie analytique et au calcul différentiel, les problèmes mécaniques ont pu être traités jusqu'au bout, sur des principes bien établis. C'est peut-être là le fait le plus important de l'histoire de l'humanité ; c'est grâce à la prédominance industrielle ainsi acquise que l'homme a conquis et organisé le globe. Dans l'ordre matériel il n'est pas un objet et dans l'ordre moral il n'est pas une de nos pensées sur lesquels on ne puisse reconnaître l'influence de la révolution scientifique du XVII^e siècle. Sans les principes de la mécanique, la géométrie analytique et le calcul différentiel, rien n'existerait de ce qui constitue la civilisation moderne. Il n'est pas une branche de l'activité humaine sur laquelle l'influence du génie de Galilée, de Descartes, de Newton, de Leibniz, n'ait été considérable ; je me trompe, il y en a une qui a échappé à cette influence et qui est restée immuable : c'est l'organisation de l'enseignement secondaire des mathématiques. C'est seulement en 1902 qu'un essai modeste a été fait dans les programmes français, par des hommes qui jugeaient deux siècles un délai suffisant pour que les idées « neuves » aient fait leurs preuves et puissent être sans danger exposées à la jeunesse. Cette innovation a paru scandaleuse à beaucoup et aujourd'hui encore on discute sur elle. Ces discussions, auxquelles seront consacrées une partie des séances de ce Congrès, ne peuvent qu'être profitables, car tout nouvel enseignement est difficile à créer : c'est seulement en mettant en commun l'expérience de beaucoup de maîtres que l'on peut espérer abréger un peu le délai pendant lequel l'innovation, faute d'une suffisante adaptation, présente des inconvénients réels. Je ne veux point anticiper ici sur ces discussions, dont on peut être assuré, par le nombre et la compétence des congressistes, qu'elles seront sérieuses et fécondes ; je voudrais seulement essayer de répondre à quelques objections *a priori* que j'ai souvent entendu formuler contre toute innovation dans les programmes mathématiques. Ces objections ont pour point de départ principal la représentation que l'on se fait souvent de la science mathématique comme une série linéaire, ou un petit nombre de séries linéaires dans chacune desquelles l'ordre rigoureux des antécédents et des conséquents ne peut pas être modifié. Lorsqu'on accepte cette représentation, il est clair que l'on ne peut introduire une matière nouvelle qu'en conservant toutes celles qui précèdent dans le développement logique de la science ; à moins d'enfler démesurément les programmes, on ne pourra donc que très difficilement y introduire des idées neuves. En particulier, on s'est habitué à qualifier certaines portions de mathématiques de supérieures, par opposition aux élémentaires ; de ce nombre sont le calcul différentiel et le calcul intégral, dont le nom seul inspire quelque effroi aux profanes ; il est donc absurde, dit-on, de vouloir enseigner ces matières supérieures, dont fait partie aussi la géométrie analytique, à ceux qui ne connaissent pas parfaitement les mathématiques dites élémentaires. On étonnerait beaucoup de nos contemporains, qui ont été dans leurs classes mathématiques des élèves plus ou moins médiocres, en leur apprenant qu'en regardant des graphiques comme les journaux quotidiens en publient souvent, ils font de la géométrie analytique sans le savoir ; parfois même, en discutant sur la rapidité plus ou moins grande des oscillations de ces graphiques et sur les conséquences qu'on peut en tirer, ils font, sans le savoir, du calcul différentiel et du calcul intégral. Ces disciplines redoutées sont, au moins dans leurs éléments, bien plus près des simples notions de calcul qu'on acquiert à l'école primaire, que de nombreuses considérations sur les volumes des corps ronds, ou sur les équations du second degré, ou même que les calculs sur les fractions ordinaires [1] et bien d'autres questions, qui sont le cauchemar des écoliers et que les quatre-vingt-dix-neuf centièmes d'entre eux s'empressent d'oublier sitôt les examens passés.

Les véritables éléments des mathématiques, dont on ne

[1] La place excessive occupée dans l'enseignement de l'arithmétique par la théorie des fractions ordinaires est une survivance de l'époque où le système métrique n'était pas devenu usuel, comme il l'est aujourd'hui dans les pays civilisés, à une exception près. La vulgarisation du système métrique doit avoir comme conséquence la substitution générale des fractions décimales aux fractions ordinaires et par suite une simplification de l'enseignement de l'arithmétique, les opérations sur les nombres décimaux devant être enseignées directement, comme une simple généralisation des opérations sur les nombres entiers. Les fractions ordinaires sont intéressantes pour le mathématicien, c'est vrai ; mais les fractions continues ne le sont pas moins, et on ne les met pas cependant dans les programmes élémentaires.

peut pas se passer pour aller plus loin, se réduisent à très peu de chose ; aux notions d'arithmétique et de géométrie nécessaires pour comprendre et appliquer le système métrique[1], il suffit de joindre les principes de la notation algébrique pour avoir une base solide à partir de laquelle on peut étudier les mathématiques dans des directions variées, sans qu'un ordre de matières particulier soit imposé autrement que par la tradition et les usages. Si les traditions n'existaient pas, on pourrait se proposer d'organiser de toutes pièces un enseignement mathématique adapté aux besoins actuels de la science et de l'industrie ; la mécanique y tiendrait une grande place, et les autres disciplines lui seraient subordonnées. Il serait très intéressant de tenter une telle organisation dans un pays en voie de développement rapide ; il est probable qu'après une courte période de tâtonnements, les avantages seraient considérables. Mais dans les pays où l'enseignement secondaire est fortement organisé depuis longtemps, il ne peut être question d'aussi grands bouleversements, aux dépens de toute une génération d'écoliers ; pour les raisons déjà dites, les changements doivent être lents : mais peut-être n'est-il pas excessif de penser qu'il est aussi absurde pour le professeur de mathématiques de l'enseignement secondaire de paraître ignorer Galilée, Descartes, Newton et Leibniz qu'il le serait pour le professeur de chimie d'ignorer Lavoisier, ou pour le professeur d'histoire de négliger la Révolution française. L'enseignement des mathématiques se trouverait ainsi moins mal coordonné avec les autres enseignements scientifiques ; il serait surtout mieux coordonné avec les réalités et il intéresserait sans doute un bien plus grand nombre d'élèves. On verrait s'atténuer cette disproportion vraiment paradoxale entre la place que les mathématiques ont dans la vie des sociétés modernes et l'intérêt qu'y portent un très grand

---

[1] Certaines personnes « cultivées » ont sur ces notions une ignorance grossière conduisant parfois à des absurdités curieuses. Dernièrement, à la première page d'un grand journal du matin, un titre en gros caractères indiquait que le prix du pavage en caoutchouc était de *trois francs le centimètre carré ;* lorsqu'on lisait l'article, on s'apercevait que son auteur l'avait écrit d'après un article anglais où était donné le prix de cent francs (ou de 4 livres, je pense) le *pied carré.* Le journaliste français s'était informé ; un pied, c'est trente centimètres ; donc un pied carré, c'est trente centimètres carrés, d'où ce prix de 3 francs (au lieu de 10 centimes environ que l'on trouve quand on tient compte des $30 \times 30 = 900$ centimètres carrés que renferme un carré de 30 centimètres de côté).

nombre de ceux qui dirigent ces sociétés. C'est qu'au fond les mathématiques enseignées dans nos lycées ne sont guère qu'une relique scolastique; ce sont d'autres mathématiques qui régissent le monde; ces mathématiques-là, il n'est donné qu'à un très petit nombre d'en admirer pleinement toute la superbe complexité: mais tout homme cultivé devrait savoir du moins qu'elles existent et ne pas imaginer les mathématiciens comme des maniaques passant leurs nuits à extraire des racines cubiques ou même des racines cinquièmes, tels les trop célèbres chevaux d'Elberfeld.

* * *

On peut se demander si l'adaptation de l'enseignement secondaire aux progrès des sciences n'est pas dangereuse en ce qu'elle ne saurait jamais être terminée; dès qu'on abandonne la sage immuabilité, on peut se trouver entraîner à des changements constants, dont les inconvénients sont manifestes. Il est nécessaire, en effet, que l'adaptation soit prudente et progressive; de même que les programmes littéraires n'admettent les auteurs modernes qu'un certain laps de temps après leur consécration par les contemporains, de même les programmes scientifiques doivent se garder des modes passagères, du défaut de perspective trop fréquent qui nous fait regarder comme particulièrement importante la dernière découverte faite sous nos yeux. Le but de l'enseignement secondaire scientifique n'est pas de préparer les élèves à comprendre et à perfectionner les aéroplanes, la télégraphie sans fil, ou la cinématographie en couleurs; mais les plus prudents devront se montrer satisfaits si, pour donner à l'enseignement mathématique, base de l'enseignement scientifique, une stabilité particulière, on évalue à un siècle le délai après lequel les travaux importants pour la science n'y seront pas regardés comme inexistants. Or, il y a plus de deux siècles que les principes de la mécanique, la géométrie analytique, le calcul différentiel subissent victorieusement l'épreuve du temps; ce ne sont pas là des fantaisies passagères, c'est la substance même de tout notre effort scientifique. C'est seulement lorsque ces doctrines essentielles auront pris la place qu'elle doivent occuper, que notre enseignement scientifique secondaire sera véritablement éducatif et moderne.

*
* *

Reste une objection souvent faite *a priori*, et à laquelle on ne pourrait répondre par des faits qu'après une très longue expérience. N'est-il pas à craindre que les matières nouvelles, insuffisamment adaptées, soient moins propices que les anciennes à la culture générale ? C'est l'objection déjà signalée contre tous les changements ; nous avons dit pourquoi elle contient une part de vérité. Tout changement de programmes doit nécessairement échouer, ou du moins avoir les apparences d'échouer, par la simple raison que la masse des professeurs ne peut arriver du premier coup à une technique pédagogique aussi bonne pour les matières nouvelles que la technique traditionnelle l'était pour les anciennes. Mais la contre-partie de cette constatation pessimiste n'est pas moins exacte : s'il est vrai que l'essentiel dans l'enseignement secondaire est moins le programme que la méthode, tout changement de programmes doit en définitive donner de bons résultats, après que l'on aura su créer les méthodes appropriées aux matières nouvelles. Il serait trop paradoxal de soutenir que ces méthodes n'existent peut-être pas et qu'il est dans la nature de certaines disciplines d'être moins éducatives, précisément parce qu'elles sont plus parfaites. C'est ainsi cependant qu'on a souvent opposé l'arithmétique à l'algèbre et essayé de proscrire artificiellement l'emploi de la notation algébrique, même dans les cas où cet emploi simplifie notablement l'effort. On insiste parfois sur le fait que cette simplification de l'effort est précisément nuisible, l'effort étant bon et non le résultat. C'est à peu près comme si l'on prétendait qu'il vaut mieux ne pas apprendre la multiplication à un enfant afin que s'il désire savoir combien coûtent 125 objets à 3 fr. 75 chacun, il soit réduit à employer le procédé plus long qui consiste à additionner 125 nombres égaux chacun à 3 fr. 75 ; son effort sera plus considérable et lui apprendra admirablement la technique de l'addition, qui est une fort belle opération arithmétique. Cela n'est pas douteux, mais lorsqu'il saura la multiplication, on pourra exiger de lui un effort aussi grand avec cet instrument plus parfait et cet effort pour être moins stérile ne lui sera pas moins profitable. Les problèmes de géométrie élémentaire sont l'occasion d'efforts très ingénieux et parfois pénétrants, dont ne perdent jamais le souvenir ceux qui en ont eu le goût dans leur jeunesse; mais la douceur de ces souvenirs ne doit tout de même pas faire perdre de vue que ces efforts sont souvent aussi vains que l'addition de 125 nombres égaux entre eux [1]; des méthodes plus parfaites permettent d'obtenir sans peine les mêmes résultats et, si l'on dépense autant d'efforts avec les méthodes perfectionnées, on va bien plus loin. Il en sera de même avec le calcul différentiel et le calcul intégral; n'hésitons pas à initier le plus tôt possible les écoliers à ces admirables disciplines, à la fois plus utiles et plus éducatives que tout autre branche des mathématiques.

*
* *

Ce n'est pas seulement en mathématiques que les tendances opposées, réformatrice et conservatrice, luttent à propos des programmes de l'enseignement secondaire. Si les réformateurs arrivaient à bien comprendre que tout changement est mauvais pendant qu'on le réalise et si les conservateurs admettaient qu'un changement, s'il n'est pas absurde, devient bon une fois qu'il est réalisé depuis un certain temps et que l'enseignement ne peut tout de même pas rester immuable à travers les siècles, peut-être pourrait-on concilier ces deux tendances opposées dans une évolution lente, sage et prudente.

[1] Il n'est peut être pas inutile de préciser ma pensée, car elle n'a pas été comprise par tous mes auditeurs. Je n'ai jamais mis en doute que l'étude directe des figures ne fût nécessaire pour développer chez les jeunes élèves le sens géométrique; j'avais voulu simplement m'élever contre l'abus de certains problèmes artificiellement et inutilement compliqués. (*Note ajoutée après la Conférence.*)

LE ROLE DES MATHÉMATIQUES DANS LES SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

Conférence de M. Maurice d'Ocagne
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées,
Professeur à l'École polytechnique et à l'École des Ponts et Chaussées.

Messieurs,

Sur le sujet que je suis appelé à traiter devant vous, tout a été dit, depuis si longtemps qu'il y a des ingénieurs et qui réfléchissent, et je viens trop tard pour garder quelque espoir de vous apporter du nouveau. Je ne saurais, d'autre part, en cette rapide causerie, tenter d'embrasser tout l'ensemble d'un tel sujet sans me condamner à ne point sortir des généralités qui risqueraient de vous paraître par trop banales. Le mieux me semble donc d'attirer votre attention sur quelques points que je crois particulièrement importants, en m'efforçant de les éclairer d'exemples caractéristiques, choisis parmi bien d'autres qui ne seraient pas d'une moindre valeur.

Et, tout d'abord, quand on parle du rôle des mathématiques, dans les sciences de l'ingénieur, il s'agit de s'entendre. Si l'on se borne aux simples besognes de la pratique journalière, on peut évidemment se tirer d'affaire avec du coup d'œil et du bon sens lorsqu'on dispose d'un bagage de connaissances générales suffisant pour être à même, en s'inspirant d'exemples antérieurs, d'approprier à l'objet que l'on a en vue, les schémas et les formules qui se rencontrent dans les recueils spéciaux. Encore convient-il, en pareil cas, de n'être pas absolument novice dans le maniement de l'outil mathématique, et notamment, pour ne l'indiquer que d'un mot, dans l'emploi des méthodes graphiques qui sont, pour les techniciens de toute spécialité, d'un si puissant secours et dont la pleine intelligence suppose une sérieuse initiation géométrique.

Autre chose est non plus de savoir se servir d'une formule, mais d'être en mesure, par une juste critique, d'en apprécier la valeur et, si besoin est, d'en proposer une nouvelle; non plus seulement d'appliquer correctement certaines solutions connues de problèmes anciennement posés, mais, lorsqu'elles sont jugées insuffisantes, de les améliorer de façon à serrer les faits de plus près, et, plutôt encore, d'en découvrir d'originales en vue de problèmes nouveaux, tâches auxquelles tout véritable ingénieur doit avoir à cœur de mettre la main. Or, pour y réussir, il ne suffit pas toujours d'avoir — ce qui, d'ailleurs, est indispensable — un sens pénétrant de la réalité; il y faut encore souvent le concours intelligemment mis en œuvre de la théorie la plus avancée. Il peut même arriver qu'à ce point de vue, le rôle de la théorie soit prédominant. Parmi tant d'exemples que j'en pourrais citer, je me bornerai à vous rappeler celui qui nous est offert par le problème de la télégraphie sous-marine, résolu par lord Kelvin au moyen de la pure théorie. C'est, en effet, vous le savez, d'une étude mathématique que l'illustre physicien de Glascow a déduit les conditions pratiques de fonctionnement d'une ligne télégraphique sous-marine. Il a montré, en particulier, que, pour éviter la confusion à l'arrivée des signaux expédiés, il était utile de faire suivre toute émission de courant d'une émission égale et contraire qui ramène la ligne à l'état primitif. D'ailleurs, l'étude du même système d'équations linéaires aux dérivées partielles, qui l'a conduit à cette belle conquête technique, permet encore de discuter les conditions de fonctionnement des lignes de transport de force à grande distance.

D'une manière générale, et quel que soit l'objet auquel s'applique son activité, l'ingénieur doit faire concourir des phénomènes d'ordre mécanique et physique à la réalisation de certains ensembles matériels répondant à des conditions données d'équilibre et de résistance, ou à la production de certains effets dynamiques. C'est assez dire que l'expérience se trouve nécessairement à la base de toutes ses spéculations, et la question qui se pose pour lui, relativement à l'utilité de l'emploi des mathématiques, est à peu près la même que pour le physicien, à cette différence près toutefois — elle est d'ailleurs capitale — qu'à l'encontre de celui-ci, qui a le sentiment de ne jamais atteindre à une assez grande précision, il peut, lui, dans la plupart des cas, se contenter d'une approximation assez grossière. Mais cette différence ne se fait sentir que dans la limite jusqu'où il convient de pousser le développement des calculs ; elle n'intervient pas pour établir une sorte de départ entre les principes mathématiques utilisables dans un cas ou dans l'autre. Pour l'ingénieur comme pour le physicien, le rôle des mathématiques consiste à fournir une interprétation rationnelle de faits réductibles à la notion de mesure, et la question qui se pose est de savoir jusqu'à quel point la théorie de forme mathématique est susceptible de servir de guide dans ce que je vous demanderai la permission d'appeler le débrouillement des faits expérimentaux.

Remémorons-nous ici, Messieurs, le mot célèbre de Bacon : « Si les expériences ne sont pas dirigées par la théorie, elles sont aveugles ; si la théorie n'est pas soutenue par l'expérience, elle devient incertaine et trompeuse ». Cette pensée a été renouvelée récemment sous une forme pittoresque et frappante, par M. l'Ingénieur en chef de la Marine Marbec, au cours d'une remarquable conférence dans laquelle il a mis en lumière, aux yeux des élèves de l'Ecole polytechnique, la part qu'ont eue simultanément la théorie et la pratique dans l'invention de cet engin merveilleux qui a nom « le Sous-marin ». La pratique, dit M. Marbec, donne la connaissance des faits, la théorie donne le moyen d'en tirer les conséquences lointaines. Un mécanicien complet doit posséder les deux.

« Elles sont entre elles comme le sens de la vue et celui du toucher. Le sens du toucher est bien borné, la vue nous donne du monde une notion bien plus claire et plus étendue, et pourtant, quand ces deux sens sont en désaccord, c'est au premier que va notre confiance. Ce que la vue annonce et le toucher dément, nous l'appelons illusion et mirage. C'est aussi ce qu'il faut faire pour la théorie et la pratique. Mais discuter comme on le fait trop souvent, en les opposant l'une à l'autre, comme si l'on devait être fatalement privé de l'une ou de l'autre, c'est en somme discuter sur les inconvénients comparés de deux infirmités. Cette discussion est d'un intérêt médiocre pour les gens bien portants.

« On n'a le droit de déclarer une chose inutile ou superflue que si on la possède réellement et si on n'a jamais ressenti le besoin de s'en servir, sinon on n'est pas de bonne foi.

« Le praticien et le théoricien, dans le mauvais sens des mots, sont deux infirmes qui ne veulent pas convenir de leur infirmité. Ce sont, du reste, des infirmités fort répandues. Il faut vous proposer de n'être pas infirmes ».

Examinons maintenant d'un peu plus près, à la lumière de quelques exemples, quels genres de services les mathématiques sont susceptibles de rendre à la technique.

Tout d'abord — et bien que cela s'écarte peut-être un peu de ce qui fait en réalité le fond de mon sujet — il n'est pas indifférent de rappeler que la théorie mathématique a parfois suggéré la découverte de faits expérimentaux qui se sont montrés pour le technicien d'une utilisation immédiate. Il suffit, sur ce point, d'évoquer la genèse des ondes hertziennes nées du besoin de soumettre au contrôle de l'expérience les conséquences de la théorie toute mathématique des ondes électromagnétiques que l'on devait à l'étonnant génie de Maxwell. Je rappellerai aussi, que, contrairement à ce qu'a pu croire, à une certaine époque, Joseph Bertrand, la théorie mathématique a permis à Green de révéler diverses lois de l'électrostatique antérieurement à l'époque où Faraday les a mises en lumière par la voie expérimentale.

Dans un ordre d'idées en corrélation peut-être plus étroite avec ce qu'on est dans l'habitude de considérer comme de la technique, niera-t-on la répercussion qu'a eue le développement de la thermodynamique sur les perfectionnements réalisés dans la construction et l'emploi industriel des machines thermiques ? Or, il semble bien difficile que l'on puisse atteindre à la pleine compréhension des principes si délicats de la thermodynamique sans une forte éducation mathématique.

Mais, là même où les constatations de l'expérience ont devancé les déductions de la théorie, ne rencontrons-nous pas bien des questions sur lesquelles pendant longtemps nos connaissances restent, en quelque sorte, à l'état stagnant, jusqu'à ce qu'enfin l'emprise exercée sur elles par la théorie mathématique vienne brusquement en provoquer l'essor ? Les longues et patientes recherches de M. Boussinesq, prolongeant si heureusement celles de Barré de St-Venant, fourniraient, dans le domaine de l'élasticité et dans celui de l'hydrodynamique, de nombreuses occasions d'illustrer cette manière de voir.

Le problème de la propagation des ondes liquides dans les tuyaux élastiques, auquel M. Boulanger a consacré récemment une étude magistrale, est caractéristique à cet égard. Longtemps la solution de ce problème est restée indécise faute d'une base mathématique suffisante. Elle est pourtant d'un intérêt capital pour l'ingénieur hydraulicien à qui elle fournit la clef du phénomène bien connu sous le nom de coup de bélier ; et l'on n'ignore pas l'importance qu'offre ce phénomène au point de vue des grandes conduites d'alimentation des usines hydroélectriques par suite des complications qu'il entraîne pour la régulation des turbines. Or, on sait maintenant que ce problème se ramène à l'étude d'une intégrale discontinue d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, du type hyperbolique. Nul doute que la discussion de la question, poursuivie à la lumière de cette théorie, ne conduise sur le terrain expérimental et, par voie de conséquence, sur celui des applications, aux inductions les plus fécondes.

De même la théorie moderne des explosifs n'a pu se développer, entre les mains d'Hugoniot, de M. Chapman, de M. Jouguet, qu'en prenant son point de départ dans la notion purement analytique des ondes de choc due à Riemann.

D'ailleurs, et c'est encore là un avantage à l'actif des mathématiques, la traduction analytique des lois physiques est de nature, en certains cas, à faire apparaître des liens tout d'abord insoupçonnés entre des questions se référant à des objets distincts et de permettre, par suite, de les faire progresser parallèlement. A cet égard, il est curieux de constater l'analogie signalée par M. Boulanger, dans l'étude à laquelle je viens de faire allusion, entre ce problème du coup de bélier et celui du choc longitudinal des tiges prismatiques, traité en détail par St-Venant, MM. Flamant et Boussinesq et où se rencontre une intégrale toute pareille.

Le domaine de l'électrotechnique est particulièrement fécond en exemples où l'on voit s'éclairer certaines questions techniques grâce à la lumière qu'y projettent les mathématiques supérieures. Je citerai notamment l'explication donnée en 1911 par M. Boucherot, des surintensités très fortes constatées lors des courts-circuits d'alternateurs, d'où il a déduit les précautions à prendre pour limiter ces surintensités. Ici, la solution dépend d'équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions sinusoïdales du temps dans le cas d'alternateurs monophasés, équations dont l'intégration n'a d'ailleurs pu être obtenue que par la voie des approximations. Dans le cas de systèmes polyphasés, un changement de variables ramène les coefficients à être constants.

Je citerai encore l'étude de l'effet Kelvin *(skineffect)* dans les conducteurs massifs en courants alternatifs, qui conduit à intégrer des équations aux dérivées partielles ; et il s'agit bien là d'une question offrant un intérêt pratique puisqu'elle intervient, en particulier, dans le calcul de la résistance apparente des rails pour la traction monophasée. Dans le cas de conducteurs cylindriques, la solution dépend des *fonctions de Bessel*, dont l'importance s'affirme chaque jour davantage dans maintes applications physiques et mécaniques comportant l'intégration d'équations aux dérivées partielles du second ordre, en même temps que celle des *fonctions sphériques* et de leurs congénères.

Je ne veux d'ailleurs pas quitter le terrain de l'électrotechnique sans ouvrir une parenthèse pour signaler les services qu'y rend le calcul des quantités imaginaires, alors, sans doute, que les premiers inventeurs de cette doctrine n'avaient pas dû en prévoir ce genre d'utilisation. C'est là un nouvel exemple (à joindre à celui si souvent invoqué de la théorie des sections coniques dans ses rapports avec celle des mouvements planétaires) de l'intérêt que peut prendre, à un moment donné, au point de vue des applications mécaniques ou physiques, un sujet d'abord uniquement envisagé *in abstracto* par les purs mathématiciens.

Dans le même ordre d'idées, c'est du développement des théories mathématiques de l'élasticité et de l'hydrodynamique que l'on doit attendre la mise au point des sciences techniques connues sous les noms de *résistance des matériaux* et d'*hydraulique*, qui sont restées pour ainsi dire en enfance tant que, faute de mieux, elles n'ont été tributaires que des seules mathématiques élémentaires, et dont le progrès commence à s'accuser depuis qu'y ont pénétré les premiers rayons de théories mathématiques plus élevées.

Je ne puis à cet égard me dispenser de rappeler les belles recherches de MM. Eugène et François Cosserat sur la théorie générale des corps déformables, non plus que les profondes leçons de M. Hadamard sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Certes, il reste encore à faire pour que ces difficiles théories atteignent la région des faits sur lesquels s'exerce directement l'activité de l'ingénieur; mais il n'est pas douteux qu'elles n'ouvrent, dès maintenant, des horizons nouveaux vers lesquels il est intéressant que se portent les regards du technicien.

N'avons-nous pas déjà vu les applications de la théorie de l'élasticité à des problèmes comportant des vérifications expérimentales conduire M. Volterra à montrer le rôle de l'*analysis situs* et des *équations intégro-différentielles* dans des problèmes bien voisins de ceux de la technique?

Si l'on en est encore à constater la lenteur avec laquelle se développe la théorie de l'aviation, c'est sans doute que la voie à suivre pour y réaliser de vrais progrès est toute hérissée d'obstacles tenant notamment à ce que nous sommes encore incapables de résoudre les problèmes généraux que pose le mouvement d'un solide dans un fluide. A la vérité, des cas simples ont été abordés par Helmholtz et Kirchhoff, d'autres plus complexes par MM. Greenhill, Levi-Civita, Villat, et il convient de noter qu'ils offrent des applications très délicates et très difficiles de deux doctrines de haute analyse, celle de la *représentation conforme* et celle des *fonctions elliptiques*. Cela permet de présumer à quel niveau des sciences mathématiques se rencontreront les notions à faire intervenir dans les cas généraux. Il faut espérer que, de ce côté-là aussi, les progrès de la théorie, étayés, bien entendu de résultats expérimentaux, finiront par déchirer les voiles qui nous dérobent encore le mystère de ces phénomènes extrêmement compliqués.

Je viens, à diverses occasions, de signaler les intuitions auxquelles nous peut conduire la théorie mathématique sans cependant nous permettre d'atteindre le but extrême visé par la technique. Même borné à cela, le rôle de cette théorie n'est pas négligeable en ce sens qu'elle nous met à même d'effectuer, grâce, s'il le faut, à quelques hypothèses simplificatives, ce que je serais tenté d'appeler une *analyse qualitative des phénomènes* qui intéressent le technicien, à défaut de l'*analyse quantitative* qui répondrait pleinement à ses besoins. L'ingénieur ne saurait toutefois se contenter de cela. Il lui faut, en fin de compte, pour arrêter les dispositions d'un projet, aboutir à une décision ferme, et si la théorie est impuissante à la lui dicter, c'est aux données de l'expérience, recueillies indépendamment de toute théorie *a priori*, qu'il ira les demander. Le rôle des mathématiques va-t-il s'arrêter ici ? Je ne le crois pas ; et, pour ne point vous cacher le fond de ma pensée, c'est, au contraire, à cette occasion que, pour la grande majorité des ingénieurs, il me semble devoir prendre le plus d'importance.

Il s'agit alors, en effet, de mettre en œuvre ce qui ressort de l'expérience pour édifier, à défaut d'une théorie purement rationnelle, au moins une sorte de synthèse, de forme encore mathématique (car il faut bien qu'elle se traduise par des formules) mais ne résultant plus, par voie de déduction logique, de principes empruntés aux seules sciences théoriques. C'est là une besogne bien plus délicate et qui exige un sens mathématique bien plus aiguisé qu'on ne serait d'abord tenté de le croire.

Sans doute, quelques ingénieurs, uniquement soucieux de cette pratique tout à fait courante dont je parlais en commençant, estimeront-ils que, pour cette mise en œuvre des données de l'expérience, il suffit de quelques moyens de fortune empruntés aux mathématiques les plus élémentaires. Je me permettrai de dire que je ne suis pas de cet avis. En se limitant de la sorte dans le mode d'expression des faits expérimentaux, on risque de n'avoir pas la possibilité, en bien des cas, de les serrer d'assez près. De là, ces formules purement et simplement empiriques, qui se rencontrent encore aujourd'hui en si grand nombre dans les aide-mémoires à l'usage des ingénieurs, sans aucune indication ni de leur origine, ni des limites entre lesquelles on peut les tenir pour valables, et que je ne serais pas loin de regarder comme un scandale dans le domaine des sciences techniques. Il ne faudrait, au reste, pas croire que le manque de toute véritable signification soit le moindre de leur défaut. Elles risquent bien souvent de devenir un réel danger. Je ne suis pas, tant s'en faut, le premier à en faire la remarque. Au Congrès international des mathématiciens tenu à Rome en avril 1908, un grand constructeur italien, M. l'Inspecteur Général du Génie civil Luiggi n'a pas craint de s'exprimer ainsi : « Divers graves mécomptes rencontrés au cours de « certaines constructions doivent peut-être, avant tout, être « imputés à l'insuffisance des formules employées ».

C'est que, il faut bien le dire, telles de ces formules empiriques, obtenues par de simples tâtonnements que n'est venue renforcer aucune considération théorique, peuvent être totalement dépourvues de valeur dans des cas qui s'écartent tant soit peu de ceux à l'occasion desquels elles ont vu le jour. Et l'on risque d'être ainsi conduit à faire inconsciemment, en quelque sorte, des extrapolations aboutissant à des conclusions entièrement erronées.

En vue de l'adaptation des résultats de l'expérience à la prévision de certains faits du domaine de la technique, les mathématiques peuvent intervenir utilement pour fixer le mode rationnel d'expression analytique auquel il convient de recourir ; la détermination des valeurs numériques à adopter pour les coefficients sera ensuite tout ce que l'on demandera à l'empirisme. C'est là un cas analogue à celui qui se présente pour la prévision des marées : le principe de la gravitation universelle, joint à la théorie du potentiel, permettant de prévoir la forme du développement de la hauteur de la marée, les propriétés de la *série de Fourier* conduisent à la détermination, par l'analyse harmonique, des valeurs numériques des coefficients d'après le relevé expérimental de la courbe des hauteurs pendant un certain intervalle de temps. Il est inutile d'insister sur l'impossibilité où l'on se serait trouvé, par de simples tâtonnements et en l'absence de toute base théorique, de parvenir à une expression analytique satisfaisante des variations, d'allure compliquée, que révèle un tel enregistrement expérimental.

Des occasions de procéder de la même façon pourraient se rencontrer dans toutes les branches de la technique. Je me bornerai à rappeler ici la remarquable étude publiée par M. l'Inspecteur Général des Ponts et Chaussées, Jean Résal, sur le calcul des hourdis en béton armé, qui est un modèle à suivre pour l'emploi de la théorie mathématique en vue de l'établissement rationnel de formules à coefficients empiriques, là où la théorie seule ne peut être poussée jusqu'au point où ses résultats deviendraient immédiatement utilisables en pratique.

M. Jean Résal, dont l'autorité comme constructeur ne saurait être contestée par personne, est de ceux qui font la guerre aux formules « dénuées de tout fondement et sans rapport aucun avec la vérité » ; c'est là sa propre expression. Il proteste notamment contre la tendance, qui s'accuse bien souvent chez les tenants du strict empirisme, de ramener de préférence toute représentation à la forme parabolique alors parfois que des nécessités logiques en imposent d'autres, comme il a eu l'occasion de le signaler à propos de la variation du poids des ponts métalliques avec leur portée, qui doit, ainsi qu'il l'a montré, revêtir nécessairement une forme hyperbolique.

A mon tour, je me permettrai de formuler cette interrogation : l'ingénieur, homme de progrès, peut-il vraiment se résigner à n'avancer, en quelque sorte, qu'à tâtons, sans chercher à pénétrer le sens des phénomènes ayant pour siège les systèmes matériels sur lesquels il opère ?

Si, comme M. Marbec en a déjà fait la remarque, son lot n'est pas de penser sans agir (ce à quoi, si tel est son goût, peut se borner le pur mathématicien enfermé dans sa tour d'ivoire), il ne peut être non plus d'agir sans comprendre.

Abdiquer entre les mains des seuls mathématiciens de profession le soin de faire avancer l'application des théories rationnelles aux divers objets techniques qui le sollicitent, serait de sa part une lourde erreur. Pour contribuer efficacement au progrès d'une doctrine embrassant un certain ensemble de faits positifs, il faut, dans l'ordre de ces faits, avoir, comme on dit, mis la main à la pâte. Le mathématicien qui n'est pas, comme le technicien, talonné par les exigences de la pratique, aura fatalement une tendance, séduit qu'il sera par l'intérêt propre des développements analytiques rencontrés en chemin, à se laisser aller à faire de l'art pour l'art. Tout au moins, ses habitudes d'esprit l'inciteront-elles, presque fatalement, à pousser les approximations bien au delà des limites dont l'expérience a appris au technicien qu'il y avait lieu de se contenter.

On ne peut exiger du pur mathématicien qu'il ait, au même degré que le technicien, la hantise du but concret à atteindre, et je n'hésiterai pas à ajouter que, s'il en était ainsi, ce serait grand dommage. Si, en effet, le mathématicien peut, et avec grand avantage, puiser de fécondes suggestions dans l'évolution des sciences physiques, il ne faudrait pas que l'essor de sa pensée se trouvât entravé du fait de préoccupations trop strictement utilitaires qui pourraient en alourdir le vol. Le culte désintéressé de la science, si noblement, si magnifiquement célébré par Henri Poincaré, doit rester la loi du pur mathématicien dont les découvertes ne tirent pas leur importance d'une utilisation pratique plus ou moins immédiate, ce qui lui permet de les poursuivre avec plus de hardiesse et plus de liberté.

Il serait infiniment regrettable qu'il se trouvât détourné par d'autres devoirs du rôle magnifique qui lui incombe, qui est de nous entraîner vers des régions de plus en plus élevées du domaine accessible à la raison pure.

En se livrant au labeur qui est le sien, il contribue d'ailleurs pour sa part au progrès général de la science appliquée parce qu'il élargit le cercle de notre pensée et qu'il fournit à son expression des formules plus souples et plus compréhensives.

Mais il faut que l'ingénieur, qui aura, lui, à faire concourir les ressources empruntées au mathématicien au perfectionnement des théories qui dominent son art, reste en état de comprendre la langue que parle ce mathématicien. Et cela exige que le plus grand nombre possible d'ingénieurs (dont l'esprit, suivant le mot de Pascal, n'y pourra d'ailleurs gagner qu'« une vigueur toute nouvelle »), reçoivent une éducation mathématique suffisante pour rester capables de suivre, fût-ce même d'un peu loin, le mouvement de la science, de saisir le sens de ses nouveautés, d'en apprécier la portée possible aux divers points de vue qui les intéressent et, le cas échéant, d'en réaliser eux-mêmes, sans maladresse, l'adaptation aux fins pratiques qu'ils se proposent d'atteindre.

SÉANCES DE TRAVAIL

Conformément au programme les quatre séances de travail furent consacrées à la lecture et à la discussion des Rapports sur les questions A et B. Le compte rendu étant encore en préparation nous nous bornerons pour le moment à reproduire ici les résumés des rapports très remarquables de MM. Beke et Staeckel. Nous publierons ces rapports dans le prochain numéro avec le compte rendu de la discussion. *(Note de la Réd.)*

RÉSUMÉ DU RAPPORT DE M. E. BEKE

sur les résultats obtenus dans l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures de l'enseignement secondaire.

Introduction. — La source et la force de l'activité de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique vient : 1) de la transformation des idées de culture qui tendent à faire entrer l'exactitude dans la vie et dans la science. 2) De l'esprit international qui place plus haut, le but que l'école se propose d'atteindre.

I. — **Place du Calcul différentiel et intégral dans l'enseignement**

secondaire. — Dans tous les pays, où pendant les douze dernières années, un nouveau plan d'études des écoles secondaires est entré en vigueur, une place plus ou moins grande y a été réservée à la Notion de fonction et aussi — à très peu d'exception près — aux premiers éléments du Calcul différentiel et intégral.

II. — **Rapport détaillé sur l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans les établissements secondaires des différents Etats.** — Voici les Etats dont nous avons reçu des rapports.

	Rapporteurs :		Rapporteurs
Allemagne	MM. Lietzmann et Thær	Hongrie	MM. Beke et Mikola
Australie	Carslaw	Iles Britanniques	Godfrey
Autriche	Suppantschitsch	Italie	Castelnuovo
	Bydzovski	Norvège	Alfsen
Brésil	E. Gabaglia	Russie	Possé
Danemark	Heegaard	Serbie	Petrovitch
Etats-Unis	D. E. Smith	Suisse	Brandenberger et Fehr
France	Ch. Bioche		
Hollande	Cardinaal		

A. — Les Eléments du Calcul infinitésimal figurent au programme officiel des écoles ou au plan d'études établi par les écoles elles-mêmes dans les pays suivants :

Etats allemands : Bavière, Wurtemberg, Bade, Hambourg.

Autres Etats : Autriche, Danemark, France, Iles Britanniques, Italie, Roumanie, Russie, Suède et Suisse.

B. — Les Eléments du Calcul infinitésimal ne figurent pas dans le plan d'études, mais ils sont enseignés dans un grand nombre d'écoles : Prusse, Saxe, Hongrie, Australie, et ils le seront probablement avant peu en Hollande, Norvège, Belgique et Serbie.

III. — **Etendue et application du Calcul différentiel et intégral.** — *a)* Il n'est appliqué presque partout qu'aux fonctions d'une variable.

b) On enseigne partout la différentiation des polynômes de fonctions rationnelles (ou au moins des quotients de deux polynômes linéaires), ainsi que dans la plupart des pays celle des fonctions exponentielles, trigonométriques et de leurs inverses.

c) Dans la plupart des pays on préfère la notation de Lagrange à celle de Leibniz.

d) Dans la plupart des pays on introduit aussi la notion d'intégrale. En France, seul le Calcul des dérivées est enseigné. Partout la notion d'intégrale suit celle de dérivée (en Bohême on les enseigne simultanément). Dans quelques pays l'intégrale définie précède l'intégrale indéfinie ; mais dans la plupart des Etats la marche inverse est suivie.

IV. — **Application du Calcul infinitésimal.** — *a)* La série de Taylor figure dans peu de programmes. Elle est néanmoins enseignée dans les écoles où les plans d'études embrassent depuis longtemps les séries infinies. Là on établit les séries de e^x, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^m$, $\operatorname{arc\,tg} x$. Je crois que l'exposition de la série de Taylor n'est pas encore suffisamment préparée pour l'école secondaire.

b) Le Calcul infinitésimal est appliqué partout à la recherche des maxima et minima.

c) Il est aussi appliqué en Physique, au moins pour définir la vitesse et l'accélération, mais quelquefois il trouve une application plus étendue (centre de gravité, moments d'inertie, potentiel, etc.) En Russie, on ne se sert généralement en Physique, que des Mathématiques élémentaires.

d) Le Calcul infinitésimal est appliqué en Géométrie : à la détermination des aires et des volumes et c'est ici que la nouvelle méthode rend le plus de services au point de vue de l'économie. Mais on continue à appliquer les méthodes anciennes surtout le principe de Cavalieri.

V. — **La question de rigueur.** — C'est un des points les plus délicats. Du côté de l'enseignement supérieur on entend dire que l'enseignement secondaire fait plus de mal que de bien s'il n'adopte pas les méthodes rigoureuses d'une exposition scientifique : par contre, les représentants de l'enseignement secondaire affirment que l'intelligence moyenne des élèves ne permet pas une exposition rigoureuse du Calcul différentiel et intégral. Les professeurs des écoles secondaires doivent connaître le calcul infinitésimal moderne et rigoureux, mais dans leur enseignement ils doivent appliquer une méthode intuitive des considérations géométriques et mécaniques, et s'élever graduellement aux abstractions nécessaires. C'est aussi la manière la plus sûre d'éveiller dans l'esprit des élèves le désir de la rigueur.

a) Les nombres irrationnels sont introduits presque partout incidemment à l'occasion de l'extraction des racines. La théorie générale n'est exposée qu'exceptionnellement.

b) La notion de limite est introduite partout, nulle part on ne se contente de l'intuition. Les théorèmes élémentaires relatifs aux limites sont adoptés presque partout sans explications.

c) On ne fait pas d'allusions à des fonctions continues n'admettant nulle part de dérivée. Dans certaines écoles on se borne à dire qu'en certains points la dérivée peut cesser d'exister.

d) dans la plupart des écoles la différentielle n'est pas introduite, il règne une confusion dans l'explication de la notion de différentielle. Il est à désirer que le brouillard métaphysique de l'infiniment petit n'entre pas dans l'enseignement secondaire.

VI. — **Fusion du Calcul différentiel et intégral avec les matières de l'enseignement secondaire.** — Les matières nouvelles ne doivent pas être placées comme un supplément à côté des matières anciennes, mais une fusion complète devra s'opérer entre elles.

L'élargissement du rôle de la notion de fonction et l'introduction du Calcul infinitésimal ne peuvent avoir de succès que si le programme ancien est réduit et s'il devient plus économique. Il résulte un allégement grâce à la fusion des matières nouvelles avec les anciennes et à la suppression de quelques matières surannées.

VII. — **Le mouvement réformiste et l'opinion publique des pédagogues.** — Le caractère définitif des résultats de notre mouvement peut être assuré : 1) Par le succès :

2) Par l'opinion publique toujours éveillée, des représentants de l'enseignement. Le mouvement a rencontré partout la sympathie des professeurs de l'enseignement secondaire, mais les professeurs appartenant à l'enseignement supérieur, qui le regardent de leur point de vue spécial, ne sympathisent pas toujours avec nos tendances.

Nous entendons la plainte qu'un cours de Calcul différentiel et intégral n'est pas suivi avec intérêt par celui qui en a déjà quelques connaissances. Il n'est pas difficile de réfuter cette assertion. Qu'il nous suffise de rappeler les avis favorables que nous avons rencontrés parmi les professeurs des Universités de tous les pays, qui regardent notre mouvement d'un point de vue plus élevé.

RÉSUMÉ DU RAPPORT DE M. STÆCKEL

sur la préparation mathématique des ingénieurs.

I. — **Généralités.** — *a)* Relativement à la préparation des ingénieurs il y a deux systèmes. La plupart des pays ont adopté le système des Universités techniques ; dans les autres ce sont les Universités proprement dites qui se chargent de l'enseignement théorique des ingénieurs ; l'enseignement technique se fait soit dans les sections techniques des Universités soit dans les Ecoles d'application. Dans quelques pays il y a mélange des deux systèmes.

b) On exige, pour l'entrée dans l'enseignement technique supérieur la préparation par une école secondaire ou une préparation équivalente. Il y a des ingénieurs qui veulent renvoyer l'enseignement des mathématiques et des sciences physiques entièrement aux écoles secondaires, tandis que les mathématiciens et la plupart des ingénieurs sont convaincus que l'étude systématique du calcul infinitésimal doit être réservée à l'Université.

c) En France on donne un enseignement étendu des mathématiques supérieures dans les classes de mathématiques spéciales.

II. — **Nature de l'enseignement.** — *a)* Les professeurs de mathématiques et la plupart des ingénieurs sont d'avis que l'enseignement des mathématiques doit avoir pour but un développement général méthodique.

b) On ne saurait recommander d'établir une séparation de cet enseignement suivant les différentes branches des ingénieurs.

c) On doit tenir compte, dans l'enseignement mathématique des ingénieurs, de la carrière à laquelle les jeunes gens se destinent et lui donner dès le début une teinte technique. Mais ce n'est pas la tâche des mathématiciens d'enseigner prématurément la science de l'ingénieur.

III. — **Scolarité.** — *a)* Il faut convenir que le puissant développement de la technique a rendu nécessaire une réduction des heures consacrées aux études mathématiques. Il y a une certaine compensation dans la meilleure préparation des étudiants qui permet d'économiser du temps en élevant dès le début le niveau de l'enseignement.

b) D'un autre côté les sciences de l'ingénieur réclament de plus en plus l'aide des méthodes modernes des mathématiques supérieures.

c) On peut espérer que les professeurs de mathématiques réussiront à adapter l'enseignement aux exigences de l'époque si on leur laisse une certaine liberté.

d) Il faut attacher une grande importance aux exercices mathématiques, surtout aux exercices individuels.

IV. — **Matière et méthode.** — *a)* L'étendue de l'enseignement mathématique est bornée supérieurement par le but de fournir aux futurs ingénieurs les connaissances de mathématiques supérieures nécessaires à une étude suffisante de la mécanique et des parties fondamentales de la physique.

b) La connaissance du calcul différentiel et du calcul intégral élémentaire ne suffit plus pour les ingénieurs. Il leur faut en outre les méthodes graphiques et numériques d'intégration des équations différentielles qui se sont développées dans le dernier tiers du XIX^e^ siècle.

c) Question de rigueur. Il ne faut pas chercher à approfondir dès le début de l'analyse supérieure les questions de principe dont les jeunes étudiants ne peuvent comprendre la portée. Il faut bien établir exactement les hypothèses sous lesquelles les déductions s'opèrent, mais il ne faut pas enseigner l'axiomatique.

d) L'unification. La réunion des cours de géométrie analytique et d'analyse supérieure en un seul cours de mathématiques générales a eu de bons résultats.

(à suivre)

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'un article de M. C. HALPHEN Sur la ligne de Terre et le second Bissecteur[1].

Extrait d'une lettre de M. E. DUMONT, Bruxelles.

Nous recevons de M. E. DUMONT (Bruxelles), une lettre à propos de la suppression de la ligne de terre en Géométrie descriptive. Nous en extrayons le passage suivant :

« Il y a 20 ans que M. Chomé, professeur de géométrie descriptive à l'Ecole militaire de Belgique, a publié un cours[2] où il n'est plus fait emploi ni de la ligne de terre, ni des traces des plans ou des droites, et où les méthodes générales ont pris la place principale. Tous les cours préparatoires aux grandes écoles ont, en Belgique, immédiatement adopté cette méthode, claire, simple, agréable, débarrassée du formalisme étroit de la méthode de Monge. L'enseignement secondaire a suivi en partie. Malheureusement les deux universités de l'Etat, Gand et Liège, résistent toujours ; mais Bruxelles, Mons et Louvain ont depuis longtemps suivi la voie tracée par MM. MANNHEIM et CHOMÉ. Les remarquables facilités fournies par le second bissecteur sont classiques chez nous. »

La méthode préconisée par le colonel MANNHEIM a comme on sait, rencontré de nombreux adhérents, non seulement en France et en Belgique, mais encore dans d'autres pays.

Note de la Réd.

---

[1] L'*Ens. Math.*, n° du 15 mars 1914, p. 107-124.

[2] F. CHOMÉ, Cours de Géométrie descriptive à l'Ecole militaire, 2e édition, 1893, Paris, Gauthier-Villars.

CHRONIQUE

Circolo Matematico di Palermo

30e Anniversaire de fondation, 1884-1914.

Le 14 avril 1914, le Circolo Matematico di Palermo, a fêté le 30e anniversaire de sa fondation en une séance solennelle qui a eu lieu à l'Aula Magna de l'Université de Palerme, sous la présidence de M. Albeggiani.

On sait que cette Société internationale, fondée le 2 mars 1884 par le professeur G.-B. Guccia, groupe aujourd'hui la plupart des mathématiciens du monde entier. Son effectif, au 12 avril 1914, était de 924 membres, dont 306 pour l'Italie. Pour les autres pays le nombre des membres se répartit comme suit :

Allemagne, 140; Etats-Unis d'Amérique, 140; Autriche-Hongrie, 77; France, 67; Russie, 44; Iles Britanniques, 29; Suède, 21; Belgique, 12; Danemark, 12; Suisse, 12; Espagne, 11; etc.

L'accueil qu'a rencontré dès le début le Circolo, est dû à la fois à l'activité persévérante de son fondateur et à son périodique les *Rendiconti del Circolo*, dirigé par M. Guccia. Depuis trente ans un grand nombre de mémoires très remarquables ont été publiés par cette importante revue qui a toujours été largement ouverte à tous les mathématiciens. Beaucoup de jeunes ont débuté dans ce périodique, et ce n'est pas un des moindres services que les *Rendiconti* ont rendus à la science que d'avoir facilité les premières publications des commençants.

La séance solennelle du 14 avril s'adressait donc à la fois au Circolo, à son fondateur M. Guccia et à son périodique les *Rendiconti*. Des discours furent prononcés par :

M. le Prof. Dr F. Raffaele, Recteur de l'Université de Palerme ;

M. le Sénateur G. Di Martino, Syndic de Palerme;

M. le Prof. Dr G. Bagnera, Président de la Faculté des Sciences de l'Université de Palerme ;

M. le Prof. Ing. M. Albeggiani, Président du Circolo Matematico ;

M. le Prof. Dr E. Landau, de l'Université de Gœttingue ;

M. le Sénateur Prof. Dr V. Volterra, de l'Université de Rome. Une médaille d'or, due à une souscription internationale, fut offerte au professeur Guccia.

A l'occasion de la séance, un grand nombre d'académies, de sociétés, d'institutions et de savants avaient envoyé des adresses, des lettres de félicitations ou des télégrammes.

La Rédaction de l'*Enseignement mathématique* s'associe de tout cœur aux vœux et aux félicitations que le monde scientifique a exprimés au Cercle mathématique de Palerme et à son fondateur.

H. Fehr.

Université d'Edimbourg. — Conférences de mathématiques.

Edinburg mathematical Colloquium, 1914.

A la suite de la célébration du Tricentenaire de Néper, qui aura lieu à Edimbourg, du 20 au 27 juillet prochain, des conférences seront organisées à l'Université, du 28 au 31 juillet, sous les auspices de la Société mathématique d'Edimbourg.

En voici la liste :

M. D'Ocagne, Professeur à l'École polytechnique, Paris : *Nomography* (2 conférences).

H.-W. Richmond, M.A., F.R.S., Fellow and Lecturer of King's College, Cambridge, and University Lecturer in Mathematics : *Infinity in Geometry* (4 conférences).

E. Cunningham, M.A., Fellow and Lecturer of St John's College, Cambridge : *Critical studies of modern electric theories* (4 conférences).

E. T. Whittaker, Sc.D., F.R.S., Professor of Mathematics in the University of Edinburg : *The solution of algebraic and transcendental equations in the mathematical laboratory* (2 conférences).

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — La *Société mathématique allemande* tiendra sa prochaine réunion annuelle à *Hanovre,* du 20 au 26 septembre 1914, à l'occasion de la 86e Réunion des Naturalistes et Médecins allemands.

— M. R. König, privat-docent à l'Université de Leipzig, a été nommé professeur extraordinaire de mathématiques à l'Université de Tubingue.

France. — *Association française pour l'avancement des Sciences.* — Le Congrès de 1914 aura lieu *au Havre*, du 27 juillet au 2 août 1914, sous la présidence de M. Armand GAUTIER, membre de l'Institut.

Le Congrès aura cette année un éclat tout particulier, en raison de son fusionnement avec le Congrès de la *British Association*, dont un très grand nombre de membres ont accepté l'invitation de l'Association française et de la ville du Havre.

Les 1re et 2me sections (mathématiques, astronomie, géodésie et mécanique) seront présidées par M. René MESNY, directeur de l'Ecole d'hydrographie de la Marine, Le Havre.

— M. BOULANGER a été nommé professeur au Conservatoire national des Arts et métiers de Paris, en remplacement de C. Bourlet, décédé.

Suisse. — *La Société Mathématique Suisse* tiendra sa prochaine réunion annuelle à Berne, à l'occasion de la 97me assemblée annuelle de la Société Helvétique des Sciences naturelles (31 août - 3 septembre 1914).

Nécrologie.

M. John S. MACKAY, ancien professeur de mathématiques à l'Académie d'Edimbourg, est décédé le 25 mars dernier à l'âge de 70 ans.

Jules MOLK. — Nous avons le regret d'apprendre la mort, survenue au commencement de mai, de M. Jules MOLK, professeur de mathématiques générales et de mécanique rationnelle à l'Université de Nancy et directeur de l'édition française de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques. Molk était né à Strasbourg le 8 décembre 1857.

POYNTING. — On annonce la mort du physicien J.-H. POYNTING, professeur à l'Université de Birmingham.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Semestre d'été 1914.

BELGIQUE [1]

Gand. — A. Demoulin : Géométrie infinitésimale, 1 ; fonctions analytiques et fonctions elliptiques, 2. — C. Wasteels : Dynamique des systèmes, 2 ; Mécanique céleste, 2. — E. Van Aubel : Physique mathématique générale, 1 ; Chapitres choisis de physique mathématique, 2. — M. Stuyvaert : Théorie des nombres, 1 ; Théorie de l'élimination, 1. — C. Servais : Courbes et surfaces algébriques Invariants. Involutions, 2.

Liége. — J. Deruyts : Fonctions elliptiques, 3 ; Equations aux dérivées partielles en relation avec la théorie des surfaces, 2. — L. Meurice : La propagation des petits mouvements dans les fluides, 3. — C. le Paige : Astronomie sphérique, 2 ; Probabilités, 1 ; Histoire des mathématiques, 1 ; Mécanique céleste, 2. — J. Fairon : Géométrie analytique, 2. — P. de Heen : Théorie de l'électrolyse et du point critique, 1.

Bruxelles. — E. Brand : Fonctions elliptiques, 2 ; Histoire des mathématiques, 1. — L. Anspach : Dynamique, 2. — Th. de Donder : Oscillations hertziennes, 1 ; Théories cinétiques et statistiques et applications à la théorie des quantités, 2. — P. Stroobant : Astronomie sphérique, 1 ; Probabilités, 1 ; Exercices d'astronomie, 2. — J. Verschaffelt : Optique, 2, et exercices. — E. Henriot : Electricité et magnétisme, 2. — A. Mineur : Géométrie supérieure, 3.

Louvain. — C. de la Vallée-Poussin : Equations aux dérivées partielles et équations de la mécanique, 2. — E. Pasquier : Dynamique, 2. — S. Demanet : Thermodynamique, 2. — R. de Muynck : Exercices de physique, 1. — G. Verriest : Formes binaires, 1. — A. de Hemptinne : Chapitres choisis de physique, 1. — E. Goedseels : Astronomie, 2 ; Probabilités, 1.

[1] Non compris les cours des deux premières années ni ceux des écoles techniques annexées aux Universités. — L'abondance des matières nous a obligé de retarder la publication de cette liste. — *(Réd.)*

BIBLIOGRAPHIE

P. Aubert et G. Papelier. — **Exercices de Géométrie analytique** à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales. Tome Premier. — 1 vol. in-8° ; 360 pages ; 6 fr. ; Vuibert, Paris.

Ces exercices de géométrie analytique sont destinés aux élèves de Mathématiques spéciales. Le premier volume, seul encore paru, est consacré à la Géométrie plane ; il renferme les chapitres suivants :

I. — Ligne droite. — II. Cercle. — III. Courbes dont l'équation est résolue par rapport à x ou à y, ou dont les coordonnées des points sont exprimées en fonction d'un paramètre. IV. Classification et construction des coniques. — V. Equations générales des coniques. — VI. Centre et diamètres des coniques. — VII. Exercices sur les équations réduites des coniques. — VIII. Coordonnées polaires.

Un second volume, actuellement en préparation, contiendra la suite des problèmes sur les coniques et sur d'autres chapitres de Géométrie plane, tandis que le tome III comprendra les exercices de Géométrie analytique dans l'espace.

F. P. Paterno. — **Nuovi Metodi d'Analisi Geometrografica** (1re Partie). — 1 broch. 8°, extraite des « *Atti del Collegio degli Ingegneri ed Architetti in Palermo* » ; 29 pages, 22 figures. Stabilimento Virzé Palermo, 1913.

Le travail de M. Paterno n'a de commun que le nom avec les travaux de Lemoine, le fondateur de la Géometrographie. Les méthodes diffèrent complètement : Au lieu d'admettre l'hypothèse de Lemoine : « qu'un point est également bien déterminé quel que soit l'angle sous lequel se coupent les lignes qui le placent » ; — M. Paterno veut se conformer davantage aux contingences réelles de la pratique, tenir compte de l'inévitable *largeur graphique* des lignes et de l'incertitude de leurs intersections. Il tente d'évaluer la valeur probable des erreurs graphiques ; d'en atténuer les causes principales ; de diriger le choix entre les différentes dispositions possibles d'une construction, car l'exactitude de la solution ne sera pas souvent indépendante de l'ordre, de la position, de la grandeur des éléments variables de la construction.

L'auteur considère les lignes graphiques sur un plan comme des rubans d'une certaine largeur (s) (constante dans un même dessin), leurs intersections : *points graphiques* sont dès lors de petits *losanges* (Si les lignes sont courbes, on leur substitue leur tangente au point considéré.)

Ce petit losange : « *point rhombique* » est circonscrit à un cercle de diamètre s. Ses diagonales varient avec l'angle α des côtés entre s et ∞.

Deux perpendiculaires déterminent un « *point carré* ».

Un point qui ne provient pas de l'intersection de deux lignes, mais qui figure par exemple dans la donnée d'un problème sera considéré comme circulaire et appelé «*point rond*».

Il est facile de calculer, pour certains angles, la longueur de la plus grande diagonale du losange en fonction de la distance s des côtés (dans cette question $s =$ largeur des traits).

On trouve que :

Quand le plus petit angle des 2 droites	est	$60°$	la plus grande diagonale	$=$	$2s$
»	»	$45°$	»	$=$	$2,32s$
»	»	$30°$	»	$=$	$3,86s$
»	»	$22\frac{1}{2}°$	»	$=$	$5,11s$
»	»	$15°$	»	$=$	$7,66s$
»	»	$11\frac{1}{4}°$	»	$=$	$10,17s$
»	»	$7\frac{1}{2}°$	»	$=$	$15,3s$
»	»	$5\frac{5}{8}°$	»	$=$	$20,32s$

Si l'épaisseur du trait est de $\frac{1}{5}$ de mm. la grande diagonale varie pour les angles considérés entre $\frac{2}{5}$ de mm. et 4 mm.

On peut évaluer aussi l'extension graphique du contact d'une circonférence avec sa tangente : en désignant par R le rayon de la circonférence, par s la largeur des traits, on trouve que la corde du segment commun à la circonférence et à la tangente est de $2\sqrt{s(2R - s)}$

si $s = \frac{1}{5}$ de mm. et $R = 3$ cm., la corde mesure 5 mm.

L'auteur considère 3 erreurs principales dans le tracé des lignes.

En traçant une droite :

1° Un *déplacement parallèle :* la droite est parallèle à celle qui aurait dû être tracée.

2° Une *déviation angulaire :* la direction de la droite fait un angle avec la direction de celle qu'on devait tracer.

En traçant une circonférence ou un arc :

3° Une *erreur d'excentricité :* la pointe-sèche du compas est placée à une certaine distance du vrai centre.

Ces 3 erreurs sont loin d'être également nuisibles, c'est surtout la 2e, l'erreur de déviation angulaire qu'il faut redouter, elle produit entre la position exacte et la position obtenue d'un point cherché un écart proportionnel à sa distance au sommet de l'angle de déviation.

L'auteur établit quelle erreur se produira probablement dans les tracés élémentaires en considérant les losanges qui sont la forme graphique des points à joindre.

Quand on doit joindre par une droite deux «*points rhombiques*» disposés de sorte que les petites diagonales des losanges soient dans la direction de cette droite, l'erreur probable est un déplacement parallèle d'une valeur

$$\delta = \frac{d - s}{2}$$

où $d =$ grande diagonale, $s =$ largeur des traits.

L'erreur commise probablement en joignant deux points rhombiques est la plus petite possible lorsque les grandes diagonales sont dans la direction de la droite.

Lorsqu'on doit joindre un point « rond » à un point rhombique dont la petite diagonale est dans la direction de la droite, l'erreur probable est une déviation angulaire α dont la valeur est exprimée par $\operatorname{tg}\alpha = \frac{d - s}{2l}$, où d = grande diagonale, s = épaisseur du trait, l = distance des deux points.

Si l'angle aigu du losange est 15°, $l = 2$ cm et $s = \frac{1}{5}$ de mm., on trouve que α vaut un peu plus de 2°.

L'erreur probable, lorsqu'on doit joindre deux points rhombiques dont les diagonales sont inclinées sur la direction de la droite, est plus grande que lorsque les grandes diagonales sont sur cette direction et plus petite que dans le cas où les petites diagonales sont sur cette direction.

Le danger d'un point rhombique ne dépend pas seulement de sa forme (plus ou moins allongée), mais surtout de la direction de la droite qu'on doit y faire passer. Une erreur graphique ne pèse pas seulement sur les opérations subséquentes, en raison de sa grandeur, mais surtout selon la nature de ces opérations, suivant les relations de position et de grandeur de leurs éléments avec l'erreur considérée.

Ces résultats guident dans le choix des éléments arbitraires d'une construction.

Par exemple : mener par un point donné (rond) une parallèle à une droite donnée.

Dans la solution consistant à dessiner un losange dont un sommet est le point donné, un deuxième sommet choisi arbitrairement sur la droite donnée, le 3e également sur la droite et éloigné du 2e comme le 2e du 1er le 4e sommet est déterminé par l'intersection de deux arcs de cercle et devra être joint au point donné. Il est avantageux que ce 4e point, qui est rhombique ait des diagonales peu inégales, ce qui arrivera si le 2e sommet a été choisi (à vue d'œil) près du pied de la perpendiculaire abaissée du point donné sur la droite donnée. Le losange qui donne la solution différera alors peu d'un carré.

On établit, par des considérations analogues, qu'en construisant un triangle donné par ses 3 côtés, il est avantageux de décrire les 2 arcs de cercle nécessaires avec les extrémités du *plus grand* côté comme centres.

Pour trouver le centre d'une circonférence donnée, on y choisit 3 points arbitrairement, le centre sera le mieux déterminé lorsqu'on choisit les deux premiers points à peu près diamétralement opposés et le 3e à peu près au milieu de l'arc des deux premiers.

Pour partager un segment rectiligne en 2 parties égales, on choisira le rayon arbitraire des arcs à mener assez petit pour que les deux points rhombiques à joindre présentent leur *grande* diagonale dans la direction de la droite qui les joint.

Pour élever une perpendiculaire à une droite par un point donné de cette droite, on choisira les deux points équidistants du point donné aussi loin que les dimensions du dessin le permettent.

Quant aux erreurs d'excentricité les points rhombiques très allongés présentent le plus d'inconvénients.

L'effet d'une erreur d'excentricité dépend de l'angle compris entre la ligne que l'arc (affecté d'erreur) coupe, et la direction déterminée par le centre effectif et le centre exact; cet effet est maximum lorsque les deux directions coïncident.

L'auteur applique encore ces résultats à différents problèmes : Partager une droite en *n* parties égales. Division de la circonférence en parties égales et tracé des polygones réguliers. Bissection de l'angle Construction de la tangente au cercle, etc...

Il serait trop long de décrire les procédés recommandés sans mettre les figures sous les yeux du lecteur.

Nous avons tenté de montrer l'esprit de la méthode d'investigation de M. Paterno, et nous recommandons aux praticiens, à qui les résultats seraient utiles, de recourir à ce travail dont les figures illustrent si bien le texte. E. Chatelain. (La Chaux-de-Fonds).

H. Poincaré. — **Wissenschaft und Methode.** Autorisierte Deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. u. L. Lindemann. (Sammlung « Wissenschaft und Hypothese », XVII. — 1 vol. cart. in-16, 283 p. ; 5 M. ; B. H. Teubner, Leipzig.

Cette importante collection, publiée par la maison Teubner sous le titre même de l'un des volumes de Poincaré « Science et hypothèse », comprend aujourd'hui une série de remarquables ouvrages de philosophie scientifique, au nombre desquels on trouve aussi un autre ouvrage de Poincaré « La valeur de la Science », traduit par E. et H. Weber. Ce nouveau volume donne la traduction de « Science et méthode ». Comme le premier, celui-ci a été traduit avec beaucoup de soin par M. et M^me^ F. et L. Lindemann et complété de nombreuses annotations. L'ouvrage est trop connu dans le monde scientifique pour qu'il y ait lieu de rappeler ici les chapitres très intéressants abordés par Poincaré sur l'invention mathématique, les mathématiques et la logique, la nouvelle mécanique, la science astronomique, etc.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Bibliotheca Mathematica, herausgegeben von G. Eneström. — Verlag B. G. Teubner, Leipzig. — Band XIII, Hefte 2-4. — L. C. Karpinski : Hindu numerals among the Arabs. — L. C. Karpinski : The « Quadripartitum numerorum » of John of Meurs. — H. Wieleitner : Der « Tractatus de latitudinibus formarum » des Oresme. — O. Bolza : Bemerkungen zu Newtons Beweis seines Satzes über den Rotationskörper kleinsten Widerstandes. — H. Burkhardt und R. Kleeberg : Zur Geschichte der Interpolation durch Exponentialfunktionen. — H. Vogt : Die Lebenszeit Euklids. — N. Ramanujacharia and G. R. Kaye : The Trisatika of Sridharacarya. — W. Crosby

Ells : On formation and use of numerals in Indian languages of North America. — L. C. Karpinski : The whetstone of witte (1557). — G. Eneström : Ueber die angebliche Integration einer trigonometrischen Funktion bei Kepler. — H. Wieleitner : Marino Ghetaldi und die Anfänge der Koordinatengeometrie. — L. C. Karpinski : John Caswell. — D. Mahnke : Die Indexbezeichnung bei Leibniz als Beispiel seiner kombinatorischen Charakteristik. — G. Eneström : Der «Algorismus de integris» des Meisters Gernardus. — G. Loria : Lagrange e la storia della matematiche.

Bulletin of the American Mathematical Society. — Vol. 19, nos 6-10. — F. N. Cole : The Nineteenth Annual Meeting of the American Mathematical Society. — G. A. Miller : The Product of Two or More Groups. — D. E. Smith : The Mathematics of Mahaviracarya. — E. J. Wilczynski : Some general aspects of Modern Geometry. — H. Galajikian : On certain non-linear integral equations. — Vincent C. Poor : A theorem on asymptotic series. — W. D. Macmillan : On Poincaré's correction to Bruns' Theorem. — Miss L. D. Cummings : Note on the groups for Triple systems. — F. N. Cole : The February meeting of the American Mathematical Society. — J. E. Rowe : Three or more Rational curves collinearly related. — R. D Carmichael : Second note on Fermat's last theorem. — E. H. Taylor : An Extension of a theorem of Painlevé. — H. E. Slaught : The Spring Meeting of the Chicago Section. — L. L. Dines : Concerning Two Recent Theorems on Implicit Functions. — A. D. Pitcher : Concerning the Property Δ of a Class of Functions. — P. Williams : The Asymptotic Form of the Function $\psi(x)$. — F. N. Cole : The April Meeting of the American Mathematical Society. — W A. Manning : The Twenty-Third Regular Meeting of the San Francisco Section. — A. R. Crathorne : The Total Variation in the Isoperimetric Problem with Variable End Points. — S. D. Killam : A Note on Graphical Integration of a Function of a Complex Variable. — E. B. Wilson : The Unification of Vectorial Notations.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 1er semestre 1913 (suite). — *7 avril.* — Emile Cotton : Sur une question concernant les fonctions de deux variables réelles. — J. Boussinesq : Application des formules de viscosité superficielle à la surface d'une goutte liquide sphérique tombant lentement, d'un mouvement devenu uniforme, au sein d'une masse fluide indéfinie en repos, d'un poids spécifique moindre. — Stanislas Belsetsky : De la stabilité d'équilibre dans un cas particulier de pièce courbe.

14 avril. — Tzitzeica : Sur une généralisation des surfaces minima non euclidiennes. — G. Valiron : Sur les fonctions entières d'ordre fini. — G. Remoundos : Sur les séries et les familles de fonctions algébroïdes dans un domaine. — G. Polya : Sur la méthode de Græffe. — Gunther : Sur les caractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles. — Emile Picard : Application de la théorie des équations intégrales à certains problèmes de la théorie analytique de la chaleur, dans l'hypothèse d'un saut brusque de température à la surface de séparation des corps en contact.

21 avril. — H. Burkhardt : Un théorème sur la fonction gamma. — Michel Petrovitch : Sur des transcendantes entières généralisant les fonctions exponentielles et trigonométriques. — A. Bilimovitch : Sur les systèmes conservatifs non holonomes avec des liaisons dépendantes du temps. — Louis Roy : Sur le mouvement des milieux visqueux indéfinis. — L. Decombe : Sur la théorie électronique de la gravitation.

28 avril. — L. Godeaux : Sur les involutions appartenant à une surface de genre 0 et de bigenre 1. — G. H. Hardy et J. E. Littlewood : Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable. — L. Roy : Sur le mouvement des milieux visqueux et les quasi-ondes.

5 mai. — Th. Angheluтza : Quelques remarques sur le développement exponentiel de Cauchy. — G. Bouligand : Sur la fonction de Green du cylindre indéfini. — J. Hadamard : Observations à propos de la note précédente.

13 mai. — P. Appell : Les polynomes $V_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions. — E. Landau : Sur les séries de Lambert. — Gaston Cotty : Sur la réduction des formes quadratiques binaires à coefficients entiers dans un corps quadratique réel.

19 mai. — R. Soreau : Nouvelle formule approchée de la longueur de l'ellipse. — P. Lévy : Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles.

26 mai. — P. Appell : $U_{m,n}$ d'Hermite et leurs analogues rattachés aux fonctions sphériques dans l'hyperespace. — N. Kryloff : Sur quelques propriétés des équations intégrales à noyau non symétrique. — Tamarkine : Problème du développement d'une fonction arbitraire en séries de Sturm-Liouville. — W. F. Osgood : Sur une extension d'un théorème de Weierstrass et sur une restriction d'un autre théorème du même auteur. — M. d'Ocagne : Sur l'application générale de la méthode des points alignés aux problèmes qui se ramènent à des résolutions de triangles sphériques. — Th. Got : Sur l'équivalence de certaines formes quadratiques ternaires indéfinies du même genre. — L. Décombe : Sur la viscosité de l'atome.

2 juin. — N. Lusin : Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier. — P. Lévy : Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles. — J. Chapelon : Sur les nombres de classes des formes quadratiques binaires positives et à déterminant négatif. — L. Roy : Complément à deux notes récentes sur le mouvement des milieux visqueux indéfinis.

9 juin. — L. Godeaux : Classification des involutions de genre 1 appartenant à une surface de genre 1. — A. Buhl : Sur les formules analogues à la formule de Stockes. — Th. Got : Sur les domaines fondamentaux de certains groupes fuchsiens. — P. Duhem : Remarque élémentaire sur le problème des ondes sphériques.

16 juin. — N. Jonas : Sur une transformation qui dépend d'une équation aux dérivées partielles du troisième ordre. — V. Jamet : Sur le complexe des moments vectoriels. — E. Fabry : Un essai de démonstration du théorème de Fermat. — P. Montel : Sur les différentielles totales et les fonctions monogènes. — M. Petrovitch : Séries hypertrigonométriques. — Ch. Platrier : Sur des solutions holomorphes de certaines équations intégrales linéaires de troisième espèce. — P. Appell et H. Vergne : Sur une transformation du mouvement d'un système holonôme conservatif donné dans le mouvement d'un système donné de même liberté. — Th. Poschl : Sur les équations des systèmes non holonômes. — M. Moulin : Sur les courbes terminales du spiral droit.

30 juin. — A. Korn : Sur les équations intégrales à noyau asymétrique.

2me semestre, 1913. — *7 juillet.* — Barbe : Sur les hélicoïdes de seconde espèce. — P. Appell : Sur les développements en série procédant suivant les inverses de polynômes donnés. — C. Platrier : Sur des solutions méromorphes de certaines équations intégrales linéaires de troisième espèce. — Th. Got : Sur les symétries des groupes reproductifs des formes quadratiques ternaires indéfinies. — J. Boussinesq : Équations de l'équilibre dynamique de la couche superficielle séparant un liquide d'un autre liquide.

15 juillet. — Robinson : Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles. — Th. Anghelutza : Sur une généralisation de la sommation de Riemann.

21 juillet. — F. S. Zarlatti : Sur quelques équations intégrales singulières.

28 juillet. — R. Soreau : Formule approchée de l'arc d'ellipse. — Stiemke : Sur les modules dénombrables.

4 août. — R. Gateaux : Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques. — J. Andrade : Loi de similitude des ressorts circulaires.

1er septembre. — De Seguier : Sur les groupes quadratiques et hermitiens dans un champ de Galois.

22 septembre. — D. Mirimanoff : Remarque sur une communication de M. Eugène Fabry au sujet de la démonstration du théorème de Fermat. — T. Levi-Civita : Théorème de Torricelli et début de l'écoulement.

29 septembre. — L. Fejer : Sur les polynômes harmoniques quelconques. — H. Tiezte : Sur les représentations continues des surfaces sur elles-mêmes.

6 octobre. — M. Plancherel : Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales. — G. Remoundos : Sur les familles de fonctions multiformes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine.

13 octobre. — L. Fejér : Sur les polynômes trigonométriques. — M. Fekete : Sur une propriété de racines des moyennes arithmétiques d'une série entière réelle. — N. Gunther : Sur la forme canonique des équations algébriques. — M. Tomassetti et J. S. Zarlatti : Le problème des deux corps de masses variables.

20 octobre. — L. Lichtenstein : Sur quelques applications de la notion des fonctions d'une infinité de variables au calcul des variations. — F. Lukacs : Sur la série de Laplace.

27 octobre. — G. Rémoundos : Le théorème de M. Picard dans un cercle dont le centre est un point critique algébrique. — M. Janet : Existence et détermination univoque des solutions des systèmes d'équations aux dérivées partielles. — Chipart et Liénart : Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique. — J. Chazy : Sur certaines trajectoires du problème des n corps. — H. Villat : Sur la validité des solutions des problèmes d'hydrodynamique : E. Borel : La cinématique dans la théorie de la relativité.

10 novembre. — E. Picard : Remarque au sujet d'une équation intégrale considérée par M. Charlier. — G. Polya : Sur un algorithme toujours convergent pour obtenir les polynômes de meilleure approximation de Tchebychef pour une fonction continue quelconque. — E. Goursat : Sur quelques équations intégrales singulières. — Chipart et Liénard : Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique. — Fessenkoff : Sur l'accélération équatoriale du Soleil. — C. V. L. Charlier : Sur la réfraction terrestre et la constitution de l'atmosphère. — R. Boulouch : I. Relations homographiques dans les systèmes de dioptries sphériques centrés ; II. Points stigmatiques singuliers.

17 novembre. — E. Kéraval : Sur une famille de systèmes triplement orthogonaux. — Tzitzeica : Sur les réseaux conjugués à suite de Laplace périodique. — Z. de George : Sur la quadrature des variétés. — Kampé de Fériet : Sur les polynômes ultrasphériques.

24 novembre. — M. Petrovitch : Sur le module minimum d'une fonction analytique le long d'une circonférence. — G. Koenigs : Sur les mouvements doublement décomposables et sur les surfaces qui sont le lieu de deux familles de courbes égales.

1er décembre. — A. Demoulin : Sur une propriété caractéristique des familles de Lamé. — P. Appell : Développement de $(x-y)^{-1}$ en série procédant suivant les inverses de polynômes donnés. — E. Vessiot : Sur la réductibilité des systèmes différentiels. — S. Bernstein : Sur quelques propriétés asymptotiques des polynômes. — H. Chrétien : Sur l'analyse statistique des amas d'étoiles. — A. Korn : Sur l'origine du magnétisme terrestre.

8 déc. — M. Gevrey : Sur les fonctions indéfiniment dérivables de classe donnée et leur rôle dans la théorie des équations partielles. — G. Bouligand : Sur le problème de Dirichlet, dans un cylindre indéfini. — A. Bitimovitch : Sur les transformations canoniques spéciales. — M. Brillouin : Propagation du son dans un fluide homogène non absorbant. — E. Guillaume : La vitesse de la lumière et le principe de Carnot. — Maurain et de Moismont : Mesures comparatives du frottement de l'air sur des surfaces de natures différentes. — V. Valcovici : Sur la résistance hydrodynamique d'un obstacle dans un mouvement avec des surfaces de glissement.

15 déc. — Séance publique annuelle.

22 déc. — G. Darmois : Sur les courbes algébriques à torsion constante. — Tzitzéica : Sur les réseaux à invariants égaux et à suite de Laplace périodique. — B. Hostinsky : Sur les courbes fermées à torsion constante. — E. Esclangon : Sur les fonctions quasi-périodiques moyennes déduites d'une fonction quasi-périodique. — Kampé de Fériet : Sur le développement d'une fonction en série de polynômes ultra-sphériques. — K. Popoff : Sur les équations de Fredholm de première espèce. — G. Bouligand : Rectification à la note « sur le problème de Dirichlet pour le cylindre indéfini » (séance du 8 déc. 1913). — G. Humbert : Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. — A. Chatelet : Sur la multiplication complexe. — J. Chazy : Sur les points singuliers de l'intégrale générale du problème des n corps. — Th. de Donder : Sur le mouvement de la chaleur dans un corps athermane. — E. Belot : Extension d'une théorie de Faye et application au mode de formation du système planétaire.

29 déc. — A. Demoulin : Résolution d'un problème de calcul intégral. — L. Lichtenstein : Intégration de l'équation $\Delta_1 u = ke^u$ sur une surface fermée — G. Giraud : Sur un groupe de transformations birationnelles. — A. Rosenblatt : Sur les invariants des variétés algébriques à trois dimensions. — J. Drach : Sur les intégrales communes à plusieurs problèmes de mécanique.

Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung, herausgegeben von A. Gutzmer; Verlag B. G. Teubner, Leipzig, Band 22, fasc. 1-10. — D. Hilbert : Begründung der elementaren Strahlungstheorie. — W. Killing : Bemerkungen über die Ausbildung der Gymnasiallehrer. — W. F. Osgood : Zum Beweise des Picardschen Satzes : eine Ergänzung. — R. Suppantschitsch : Eine Vereinfachung im Existenzbeweis des bestimmten Integrals. — R. Sturm : Ueber die Vorzeichenrichtigkeit metrischer Relationen in der Geometrie. — Sturm : Zur Existenzfrage eines Maximums oder Minimums. — E. Müller : Das Abbildungsprinzip. — E. Salkowski : Zum Biegungsproblem der Regelflächen — W. Fr. Meyer : Ueber einem verallgemeinerten Krümmungsbegriff und einen neuen Aufbau der Krümmungstheorie. — A. Voss : Wilhelm Fiedler. — F. Pfeiffer : Theorien des Flüssigkeitswiderstandes. — A. Voigt : Mathematische Theorie des Tarifwesens. — J. Westlund : On the factorization of rational primes in cubic cyclotomic number fields. — O. Perron : Zur Existenzfrage eines Maximums oder Minimums. — L. Bieberbach : Ueber den Jordanschen Kurvensatz, die Schoenfliesschen Sätze von Erreichbarkeit und Unbewalltheit und den Satz von der Invarianz des ebenen Gebietes. — W. Blaschke : Ueber isometrische Flächenpaare. — H. Rothe : Ueber Hamiltonsche Sechsecke. — R. Weitzenböck : Die Invarianten der affinen Gruppe. — D. Kryschanowsky : Ueber eine Verallgemeinerung des Grenzwertbegriffes und ihre Anwendung auf den Existenzbeweis des bestimmten Integrals. — R. Suppantschitsch : Eine Ergänzung zu meiner Note über eine Vereinfachung im Existenzbeweis des bestimmten Integrals. — A. W. Velten : Ueber die Funktionen, die aus der Jacobischen Ω-Funktion entspringen. — H. Burkhardt : Mathematische Miszellen aus der Vorlesungspraxis. — H. Beck : Zur Lehre von den Mongeschen Flächen. — R. König : Ueber quadratische Formen und Zahlkörper, sowie zwei Gruppensätze. — R. Sturm : Uber den festen Kreis bei Aufgaben 2. Grades. — F. Dingeldey : Ueber ein gewisses Integral und eine einfache Darstellung der Kugelfunktionen erster Art. — K. Doehlemann : Ueber den Bildungswert der reinen Mathematik. — E. Haentzschel : Euler und die Weierstrasssche Theorie der elliptischen Funktionen. — H. von Koch : Ueber das Nichtverschwinden einer Determinante nebst Bemerkungen über Systeme unendlich vieler linearer Gleichungen. — G. A. Miller : Maximal order of the multiplying group corresponding to a p-isomorphism of an abelian group of order p^m. — H. Wiener : Ueber den Wert der Anschauungsmittel für die mathematische Ausbildung. — H. Wiener : Neue mathematische Modelle aus B. G. Teubners Sammlung.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von K. Hensel ; Verlag Reimer, Berlin. — *Band 142*. Hefte 2-4 — H. W. E. Jung : Ueber die ausgezeichneten Kurven algebraischer Flächen (Schluss.). — H. Lemke : Ueber die Differentialgleichungen, welche den Gleichgewichtszustand eines gasförmigen Himmelskörpers bestimmen, dessen Teile gegeneinander nach dem Newtonschen Gesetze gravitieren. — L. E. J. Brouwer : Ueber den natürlichen Dimensionsbegriff. — G. Rabinowitsch : Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlfaktoren in quadratischen Zahlkörpern. — L. Fejer : Ueber die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer Fourierreihe. — L. Lichtenstein : Ueber das Poissosche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials. — R. König : Beiträge zur Arithmetik der hyperelliptischen Funktionenkörper. — J. Kürschak : Ueber Limesbildung und allgemeine Körpertheorie. — O. Perron : Ueber lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhängig Variable reell ist (I). — J. Rosanes : Zur Theorie der Kegelschnitte. — R. Remak : Neuer Beweis eines Minkowskischen Satzes. — K. Knopp : Ueber Lambertsche Reihen.

Monatshefte für Mathematik und Physik, herausgegeben von G. v. Escherich u. W. Wirtinger ; Verlag Eisenstein, Wien. — XXIV. *Jahrgang*

1913. — J. A. Gmeiner : Ueber die Zerlegung der natürlichen Zahlen in Primfaktoren. — H. Hahn : Ergänzende Bemerkung zu meiner Arbeit über den Osgoodschen Satz in Band 17 dieser Zeitschrift. — A. Kanda : Beiträge zur reinen Differentialgeometrie. — J. Rosenberg : Ueber das Verhalten von Extremalenbogen, die den zum Anfangspunkt konjugierten Punkt enthalten, beim Lagrange'schen Problem der Variationsrechnung. — P. Roth : Das erweiterte Umkehrproblem der Abelschen Integrale in der Geometrie der ebenen Kurven. — F. Rulf : Ueber die Grundlagenforschung in der Geometrie. — E. Kohl : Ueber die Berechnung der inneren Energie aus der Zustandsgleichung. — G. Kowalewski : Bemerkung über die Transformation der Laplaceschen Gleichung. — L. Braude : Ueber Parallelkurven von Epi- und Hypozykloiden. — E. Kohl : Ueber eine Beziehung zwischen den beiden spezifischen Wärmen einiger fester Körper. — H. Tietze : Ueber die raschesten Kettenbruchentwicklungen reeller Zahlen. — R. Weitzenböck : Zur Differentialgeometrie algebraischer Flächen. — E. L. Dood : The Error-risk of certain Funktions of the Measurements. — K. Zorawski : Ueber Eigenschaften eines vielfachen Integrals, welche Verallgemeinerungen zweier Sätze der Theorie der Wirbelbewegung sind. — J. Lissner : Berichtigung der Bewegungsgleichungen für Fernwirkung mit endlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit mit Rücksicht auf das Relativitätsprinzip. — L. Schaller : Ueber die Grenzfläche der Strahlensysteme.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, G. Guccia. — T. XXXV — M. Botasso : Omografie vettoriali del piano. — M. de Franchis : Sulle superficie del 5° ordine con infinite coniche. — L. Tonelli : Sul caso regolare nel Calcolo delle Variazioni. — A Schœnflies : Ueber einen Youngschen Beweis des verallgemeinerten Borelschen Intervall-Theorems. — P. Appell : Sur le potentiel d'un polyèdre homogène. — L. von David : Zur Gauss'schen Theorie der Modulfunktion. E. Jahnke : Das Orthogonalsystem der Lorentz-Transformation — T. H. Gronwall : Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann au voisinage de $\sigma = 1$. — W. F. Osgood : Existenzbeweis betreffend Funktionen, welche zu einer eigentlich diskontinuierlichen automorphen Gruppe gehören. — A. Errera : Zahlentheoretische Lösung einer functionentheoretischen Frage. — T. H. Gronwall : Sur les séries de Dirichlet correspondant à des caractères complexes. — G. Vivanti : Sui gruppi finiti di sostituzione lineari. — E. Maccaferri : Le definizioni per astrazione e la classe di Russell. — R. Weitzenböck : Ueber schiefsymmetrische Funktionen (II. Mitteilung). — N. E. Nörlund : Sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies par des séries de farultés. — G. Remoundos : Le théorème de M. Picard et les fonctions algébroïdes. — F. Levi : Arithmetische Gesetze im Gebiete diskreter Gruppen. — A. Rosenblatt : Sur les surfaces irrégulières dont les genres satisfont à l'inégalité : $p_g \geqslant 2\,(p_a + 2)$. — G. Usai : Una generalizzazione di determinanti tipo Lauricella. — J. Pérès : Résolution des problèmes aux limites relatifs à une équation intégro-différentielle de M. Volterra. — E. Landau : Ueber einen Satz des Herrn Littlewood. — D. Pompeiu : Sur une classe de fonctions d'une variable complexe et sur certaines équations intégrales — P. Appell : Sur le potentiel d'un polyèdre homogène. (Extrait d'une lettre à M. Guccia). — E. Kasner : Equitangential Congruences of Curves in Space. — H. P. Hudson : On the Composition of Cremona Space-Transformations. — P. Tortorici : Sulle deformazioni infinitesime delle superficii e sul teorema di permutabilità. — A. Korn : Ueber die erste und zweite Randwertaufgabe der Potentialtheorie. — C. Rosati : Sulle assinotiche della superficie di Kummer. — E. Bortolotti : Sugli integrali definiti improprii. — P. Martinotti : Il Wronskiano e la dipendenza lineare di n funzioni di una variabile reale.

Zeitschrift für Mathematik und Physik, herausgegeben von E. Mehmke und C. Runge. Verlag B. G. Teubner, Leipzig. — *Band 61*. — A. Francke : Der Parabelträger $y = h\left(\frac{x}{a}\right)^n$. — K. Goldziher : Methode zur graphischen Lösung von Systemen linearer Gleichungen. — R. Gans u. P. Hertz : Die Theorie des Ewingschen Modells eines ferromagnetischen Körpers. — H. Happel : Ueber einige Probleme aus dem Gebiet der geometrischen Wahrscheinlichkeiten. — J. Schatte : Ein Satz über Wurfbahnen im leeren Raume. — O. Schæfer : Eine mechanische Vorrichtung zur Lösung einiger Differentialgleichungen. — P. Field : On Coulomb's Laws of Friction. — W. Rottsieper : Ein Instrument zum Zeichnen von Hyperbeln mit Benutzung der Asymptoten. — U. Cisotti : Sopra il regime permanente nei canali a rapido corso. — A. Willers : Ein Rechenstab für Ballonführer. — P. Fillunger : Ein Beitrag zur Theorie der Festigkeit von Zughaken. — M. Gerbia : Studio sulla spinta delle terre. — H. v. Sanden : Ueber den Auftrieb zylindrischer Körper im natürlichen Winde. — R. Mayer : Ueber die Formänderung, Beanspruchung und Stabilität des geschlossenen Kreisringes und des an beiden Enden befestigten Kreisbogens. — L. von Schrutka : Ueber einige besondere Verwendungsarten der Rechenmaschine. — J. Wellstein : Zur Theorie der Reibung starrer Körper. — M. Sergelius : Untersuchungen kinetographischer Korrespondenzen [2, 2] in der Ebene und im Raume. — C. Mineo : Su una nuova deduzione della legge di frequenza degli errori. — A. Proll : Zur Dynamik des Kurbelgetriebes. — H. Nies : Ueber eine Gesetzmässigkeit der Planetenrotation. — H. v. Sanden : Graphische harmonische Analyse.
die durch Bewegung eines Strahlenbüschels entstehen. — L. Theisinger . Bestimmte Integrale. — F. Gomes Teixeira : Sur les courbes à développée intermédiaire circulaire. — A. E. Haas : Ueber ein Problem aus der Theorie der Kugelfunktionen. — L. Theisinger : Einige Reihen entwicklungen.

Proceedings of the London Mathematical Society. Vol. 12. — H. F. Baker : On some Recent Advances in the Theory of Algebric Surfaces. — W. H. Young : On the Fourier Series of Bounded Functions. — W. H. Young : On the Determination of the Summability of a Function by means of its Fourier Constants. — W. Burnside : On Groups of Linear Substitutions of Finite Order which possess Quadratic Invariants. — H. Hilton : Some Properties of Symmetric and Orthogonal Substitutions. — T. J. I. A. Bromwich : Certain Potential Functions and a New Solution of Laplace's Equation. — J. B. Holt : On the Irreducibility of Legendre's Polynomials (Second Paper). — E. Cunningham : The Theory of Functions of a Real Vector. — E. W. Hobson : On the Representation of a Summable Function by a Series of Finite Polynomials. — G. H. Hardy : An Extension of a Theorem on Oscillating Series. — H. R. Hasse : The Equations of the Theory of Electrons transformed relative to a System in Accelerated Motion. — W. H. Young : On Derivates and their Primitive Functions. — J. C.

Fields : Proofs of certain General Theorems relating to Orders of Coincidence. — H. E. J. Curzon : On a Connexion between the Functions of Hermite and the Functions of Legendre. — W. H. Young : On Functions and their Associated Sets of Points. — G. N. Watson : Some Properties of the Extended Zeta-Function. — E. W. Hobson : On the convergence of Series of Orthogonal Functions. — A. E. H. Love : Notes on the Dynamical Theory of the Tides. — A. B. Grieve : Some Points in the Geometry of Cubic Surfaces. — W. H. Young : On Uniform Oscillation of the First and Second Kind. — G. H. Hardy : On the Summability of Fourier's Series. — P. J. Hedwood : On a Graphical Demonstration of the fundamental Properties of Quadratic Residues. — H. T. H. Piaggio : Some Non-Primary Perpetuant Syzygies of the Second Kind. — W. E. H. Berwick : The Classification of Ideal Numbers that depend on a Cubic Irrationality. — H. M. Macdonald : The Diffraction of Light by an Opaque Prism. — W. H. Young : On the Mode of Oscillation of a Fourier Series and of its Allied Series. — J. Proudman : On some Cases of Tidal Motion of Rotating Sheets of Water. — T. C. Lewis : Figures in n-Dimensional Space analogous to Orthocentric Tetrahedra.

2. Livres nouveaux :

P. Aubert et G. Papelier. — **Exercices de Géométrie analytique** à l'usage des élèves de mathématiques spéciales. Tome premier. — 1 vol. in-8, 360 p., 6 fr. ; Vuibert, Paris.

F. Auerbach. — **Die graphische Darstellung**. Eine allgemeinverständliche, durch zahlreiche Beispiele aus allen Gebieten der Wissenschaft und Praxis erlaüterte Einführung in den Sinn und den Gebrauch der Methode. — (Aus Natur und Geisteswelt, N° 437). — 1 vol. in-16, vi-97 p., 1 M. 25 ; B. G. Teubner, Leipzig.

L. Bachelier. — **Le Jeu, la Chance et le Hasard**. — (Bibliothèque de Philosophie scientifique). — 1 vol. in-8, 320 p. ; 3 fr. 50 ; E. Flammarion, Paris.

Ch. Bioche. — **Histoire des Mathématiques**. — 1 vol. in-16, vi-93 p. ; 1 fr. 75. E. Belin, Paris.

L. Braude. — **Les coordonnées intrinsèques, Théorie et Applications**. — (Collection Scientia N° 34.), 1 vol. in-8, 100 p. ; 2 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

G. St. L. Carson and D. E. Smith. — **Elements of Algebra**. Part. I. — 1 vol. in-16 ; iv-346 p. ; 3 sh. ; Ginn & Co., Londres, New-York, Chicago.

E. Cotton. — **Cours de Mécanique générale**. (Introduction à l'étude de la Mécanique industrielle) : — Vecteurs. — Géométrie des Masses. — Principes. — Cinématique. Statique. (Bibliothèque de l'Elève Ingénieur.) — 1 vol. in-8, 166 p. ; 5 fr. ; Gauthier-Villars, Paris ; Rey, Grenoble.

Z. G. de Galdeano. — **Anuario de Propaganda Matematica** (1914) comprendiendo el Curso de extension universitaria Genesis y desenvolvimiento Matematico. Cuaderno Primero. — 1 fasc. in-8, 63 p. ; G. Casanal, Saragosse.

H. H. Goodacre, E. F. Holmes, C. F. Noble and P. Steer. — **Bell's Outdoor and Indoor Experimental Arithmetics**. Teacher's Book. — 1 vol. in-8, xii-377 p. ; 3 s. 6 d. ; G. Bell & Sons, Londres.

J. Hjelmslew. — **Darstellende Geometrie** (Handbuch der angewandten Mathematik, N° 2). — 1 vol. in-8, x-320 p.; 5,40 M., relié 6 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Lampe. — **Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.** Band 42. Jahrgang 1911 (In 3 Heften.) — 1 vol. in-8, 1200 p.: G. Reimer, Berlin, 1914.

Fernand Levy. — **Sur la détermination, par les fonctions elliptiques, du nombre des classes de formes quadratiques binaires de déterminant négatif donné.** (Thèse de doctorat, Ecole polytechnique, Zurich). — 1 fasc. in-8, 48 p.; A Kündig, Genève.

E. Netto. — **Elementare Algebra**. Akademische Vorlesungen für Studierende der ersten Semester. 2me édition. — 1 vol. in-8, x-200 p.; 4,40 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

H. von Sanden. — **Praktische Analysis.** (Handbuch der angewandten Mathematik, N° 1.) — 1 vol. p. in-8, xx-185 p.; 3,60 M., relié 4,20 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

V. Volterra, J. Hadamard, P. Langevin, P. Boutroux. — **Henri Poincaré.** L'œuvre scientifique. L'œuvre philosophique. (Nouvelle collection scientifique.) — 1 vol. in-16, 265 p.; 3 fr. 50; F. Alcan, Paris.

M. Wilensky. — **Ueber Besselsche Funktionen.** (Thèse de doctorat, Université de Berne). — 1 fasc. in-8, 65 p.; Leemann & Co., Zurich.

Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées. Edition française dirigée par J. Molk. — *Tome* II, vol. 5: Développements en séries; fasc. 2: Fonctions sphériques: exposé, d'après l'article allemand de A. Wangerin par A. Lambert, avec une note de P. Appell et A. Lambert (fin.) Généralisations diverses des fonctions sphériques; exposé par P. Appell et A. Lambert. — *Tome* IV, vol. 5. Systèmes déformables, fasc. 2: Hydrodynamique, partie élémentaire, exposé d'après l'article allemand de A. E. H. Love par P. Appell et H. Beghin. Développements concernant l'hydrodynamique, exposé d'après l'article allemand de A. E. H. Love, par P. Appell, H. Beghin et H. Villat. B. G. Teubner, Leipzig, et Gauthier-Villars, Paris.

Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenchaftlichen Unterricht. Heft 18: Bericht über die Tätigkeit des deutschen Ausschusses im Jahre 1913, erstattet vom W. Lietzmann. — 1 fasc. in-8, 10 p.; B. G. Teubner, Leipzig.

COMPTE RENDU

DE LA

Conférence internationale de l'enseignement mathématique.

Paris, 1-4 Avril 1914.

(suite et fin)

LES RÉSULTATS OBTENUS DANS L'INTRODUCTION DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL DANS LES CLASSES SUPÉRIEURES DES ÉTABLISSEMENTS SECONDAIRES

I

RAPPORT GÉNÉRAL

présenté à la séance du 2 avril 1914

PAR

E. BEKE

Professeur à l'Université de Budapest.

Introduction.

L'activité de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique est presque sans pareille parmi les activités internationales intellectuelles du XX^e siècle. Pourtant, il est incontestable que ce ne sont ni les lacunes de l'enseignement, ni l'insuffisance des résultats qui ont provoqué la réclamation énergique des réformes. En effet, en comparant le fruit des études mathématiques avec celui d'autres études, on avait raison, dans le monde entier, de ne pas être trop mécontent. Des considérations d'ordre plus élevé ont déclanché le mouvement réformiste. Il faut en chercher la vraie origine dans la transformation, survenue au XX^e siècle, des idées sur la culture générale et dans les efforts de l'enseignement secondaire tendant à suivre la transformation de ces idées.

La tendance à être exact, dans toutes les recherches, dans la pensée et dans l'action, a rehaussé la valeur des études scientifiques. Il semble que c'est l'avis, parmi les personnalités dirigeantes de l'enseignement secondaire, de celles même qui n'ont pas varié dans leur jugement sur la valeur de l'enseignement des lettres. « Les lettres sont et resteront — dit M. *Liard*, vice-recteur de l'Académie de Paris, dans une réunion tenue au Musée pédagogique en 1904 — comme par le passé, des institutrices éprouvées qu'il serait impossible de suppléer dans leur domaine. Mais dans le domaine qui est celui des sciences positives, on attend des sciences plus d'effets que par le passé, pour la formation des esprits. » Ce changement de la valeur éducative, attribuée aux Sciences, exige que l'enseignement des Mathématiques, clef de toutes les études scientifiques, devienne plus conforme aux idées nouvelles sur la formation des esprits. Il y a des sciences qui, ayant passé ce que M. *Picard* appelle, d'une expression heureuse, la phase « prémathématique » de leur histoire, viennent de franchir le seuil où les Mathématiques cessent d'être un ornement sans utilité, pour devenir la langue naturelle de la pensée et des déductions scientifiques et, par conséquent, l'instrument du progrès. Il suit de là que l'habitude des Mathématiques et la connaissance de certains éléments des sciences mathématiques qui étaient, jusqu'à présent, le privilège d'un petit nombre d'esprits, doivent pénétrer, désormais, dans des couches plus vastes de l'Humanité. Ce sont probablement ces réflexions qui ont conduit les maîtres de l'enseignement à reviser les matières de l'enseignement mathématique, et ce sont ces pensées ou des pensées analogues qui ont conduit des hommes de valeur, au Congrès des mathématiciens à Rome, à émettre et à réaliser l'idée d'une Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Peut-être y a-t-il, dans le subconscient, d'autres raisons encore qui nous déterminèrent à venir, de toutes les parties du monde, nous réunir pour réformer l'enseignement mathematique et à publier, avec l'aide de toutes les nations et dans un laps de temps relativement court, un ouvrage de 200 fascicules, monument sans précédent d'un effort et d'un esprit international. Je crois pouvoir affirmer, sans crainte de me tromper, que c'est un haut idéal d'internationalisme qui nous a réunis ici. Nous avons senti que l'éducation de la jeunesse n'a pas seulement pour but de former, d'accroître et de maintenir les forces vives d'une nation et l'esprit national, de doter du patrimoine commun les ouvriers actifs de la civilisation nationale; elle a aussi la tâche encore plus noble de créer et de faire vivre un idéal commun à toute l'Humanité. Ce n'est pas par un pur hasard que ce travail international a été entrepris par les représentants de l'enseignement mathématique. M. *Félix Klein,* notre président d'un zèle infatigable, a fait ressortir dans son allocution présidentielle prononcée à la conférence de Bruxelles, que les Mathématiques, n'ayant aucun rapport avec les aspirations nationales, sont prédestinées à être le sujet de discussions internationales.

Quand notre Commission délibère sur la transformation de l'enseignement mathématique en vue de l'adapter aux exigences accrues de la civilisation et de l'idéal de culture de notre temps, elle fait aussi un premier pas dans la voie qui s'élève au-dessus des aspirations nationales, vers des aspirations de l'Humanité. Espérons qu'elle trouvera en cela de dignes continuateurs. C'est de ce point de vue élevé, embrassant la marche de la civilisation générale, qu'il faut considérer notre action, même si, en apparence, nous nous occupons de questions sans importance extrême, comme celle sur laquelle j'aurai l'honneur de faire un rapport aujourd'hui.

Il nous arrive souvent, à nous autres mathématiciens, de traiter en détail quelque cas particulier après avoir fait la théorie générale d'un problème ; il nous arrive aussi — et cela nous fait beaucoup plus de plaisir — de découvrir dans une question spéciale les caractéristiques d'un problème général et important. Je crois donc que le champ restreint, auquel nous bornerons notre étude, éveillera d'autant plus notre attention qu'il ouvrira une vue sur l'accomplissement de la tâche plus noble dont j'ai parlé plus haut, tâche qui est la plus digne peut-être de l'activité humaine.

I. — Place du Calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire.

La tâche que j'ai assumée, sur l'invitation gracieuse de la Présidence de la Commission internationale, est de vous tracer un tableau des résultats produits par l'introduction du Calcul différentiel et intégral, objet principal de notre mouvement réformiste, et — en dehors des résultats des projets — des tendances et des expériences, le temps ayant été trop court pour que les résultats puissent être considérés partout comme définitifs.

Dans les pays où quelques écoles ou quelques types d'écoles enseignent depuis longtemps le Calcul différentiel et intégral, des méthodes et des procédés sont en voie de formation et les résultats peuvent être considérés comme définitivement acquis. Nous aurons le plaisir d'entendre, dans le rapport suivant, un compte rendu des résultats définitifs acquis en France.

Là, depuis 12 ans déjà, l'enseignement secondaire des éléments du Calcul différentiel et, en partie, ceux du Calcul intégral ont pénétré dans les institutions. Nous pouvons dire avec Faust que là « au commencement fut l'action ». L'action réfléchie, fruit du concours de forces organisées. Ce n'est pas seulement le plan d'études officiel qui introduit ces notions dans certaines branches de l'enseignement secondaire, mais on a mis tout de suite des outils parfaits, nécessaires au travail, à la disposition des écoliers et des maîtres. Si l'on trouve quelque part des résultats rapidement acquis, cela doit être bien là, où les célébrités mondiales de notre science, nos maîtres à nous tous, dans leurs ouvrages de Mathématiques et dans leurs écrits philosophiques, ont su se pencher sur l'école secondaire et élever à eux ceux qui y enseignaient les Mathématiques. J'accomplis un devoir agréable en rendant hommage aux esprits dirigeants de cette grande nation qui, tant dans le passé tout proche que dans le présent, ont pris une part active, par la parole et par l'exemple, à rénover l'enseignement mathématique et qui ont porté haut le flambeau de notre mouvement international.

L'étude des documents et informations reçus m'a convaincu — comme je l'ai déjà dit — que notre mouvement réformiste a déjà produit partout un immense effet en donnant une impulsion aux aspirations rénovatrices. Cela ressort surtout des réponses faites à la première question. Cette question était ainsi rédigée :

« Dans quelle mesure a-t-on introduit les premiers éléments de Calcul différentiel et intégral dans les écoles moyennes de notre pays? »

Les brochures publiées et les informations permettent de constater que *dans tous les pays où, pendant les 12 dernières années, un nouveau plan d'études des écoles secondaires est entré en vigueur, une place plus ou moins grande y a été réservée à la notion de fonction et aux éléments du Calcul différentiel et intégral.* — La notion de fonction a été presque entièrement négligée il y a douze ans, ce que le Président de notre Commission a constaté pour son propre pays [1]; ses paroles s'appliquant à presque tous les autres pays. Aujourd'hui, au contraire, il n'existe plus de pays où la notion de fonction ne trouve place dans l'enseignement secondaire et même — à très peu d'exceptions près — les éléments du Calcul différentiel et intégral figurent dans le plan d'études. Si l'on voit le changement rapide des choses, on ne peut ne pas être frappé d'admiration devant l'étendue du succès de notre mouvement international. Comment est-il arrivé que l'école, institution conservatrice s'il en fut, s'est transformée si rapidement dans le monde entier, sous l'impulsion de l'énergie du professeur anglais, M. *Perry*, sous la suggestion de l'action française, sous l'influence de la propagande active et multiple de M. *Félix Klein*? Cela ne peut être que grâce aux idées latentes qui vivaient dans l'esprit des pédagogues et qui n'attendaient qu'une impulsion. Cette transformation n'est pourtant pas encore ce que M. *Klein* avait souhaité et nous tous avec lui; elle n'a pas encore mis la notion de fonction au centre de tout l'enseignement secondaire, pour que cette notion y agisse comme ferment et vivifie toute la matière enseignée [2]; pourtant nous avons le droit d'être fiers de ce que, partout, l'école secondaire a largement ouvert ses portes devant les idées nouvelles. Pour le faire voir en détail, nous allons passer en revue les états de la question dans les divers pays. Je crois remplir le mieux mon devoir de rapporteur général en faisant parler, le plus souvent possible, MM. les rapporteurs eux-mêmes ou en puisant

---

[1] Klein-Schimmack, p. 27.
[2] Klein-Riecke, p. 4.

mes informations dans les documents publiés par la Commission internationale ; exceptionnellement, je demanderai la permission d'exprimer mon propre avis.

II. — Rapport détaillé sur l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans les établissements secondaires des différents Etats.

1. Allemagne. — Le désir de transformer l'enseignement mathématique a depuis longtemps préoccupé l'opinion publique en Allemagne, mais le courant d'opinion ne s'est dessiné que le jour où M. *Félix Klein*, notre président actuel, s'est mis à la tête des réformateurs. Dans son article de 1902, dans son cours de vacances de 1904 à Göttingue et depuis, dans ses écrits et dans ses leçons, il ne se lassait pas de démontrer la nécessité de la réforme de l'enseignement mathématique. Son collaborateur dévoué, M. *Lietzmann* nous a informé des résultats acquis : en *Prusse*, où l'on n'a pas fait un nouveau plan d'études dans les dernières années, l'enseignement du Calcul différentiel et intégral n'est pas introduit officiellement, pourtant il a trouvé place dans presque toutes les écoles réales, dans beaucoup de gymnases réaux et dans un bon nombre de gymnases ; en *Bavière*, il figure déjà dans le plan d'études des écoles réales et il y a lieu d'espérer qu'il entrera dans le plan d'études qu'on prépare pour les autres genres d'écoles ; en *Saxe*, le nouveau plan d'études des écoles réales l'autorise pourvu que l'état de la classe en fasse prevoir des fruits ; il est porté sur le programme de tous les genres d'écoles par le plan d'études de 1912 en *Wurtemberg* et en *Bade*. Dans d'autres Etats, où il n'y a pas un nouveau plan d'études, il est donné dans presque toutes les écoles réales et dans nombreux gymnases. A *Hambourg*, comme un autre membre zélé de notre Commission, M. le directeur *Thaer*, nous en informe, le Calcul différentiel et intégral est facultatif dans les gymnases depuis 6 ans, le Calcul différentiel est obligatoire et le Calcul intégral facultatif dans les gymnases réaux depuis 40 ans, et les Calculs différentiel et intégral sont tous les deux obligatoires dans les écoles réales depuis 1897. On mesure l'étendue de la conquête qu'a faite la notion de fonction dans les Etats allemands, si l'on jette un regard sur les récents livres de classe. Je ne veux citer que la 2e partie du 1er volume du *Mathem. Unterrichtswerk*, par MM. Schwab et Lesser (Ausgabe A), Leipzig, 1909 et *Lehrbuch der Mathematik*, par MM. Behrendsen et Götting (Ausgabe B), Leipzig, 1912 ; les représentations graphiques et les chapitres du Calcul différentiel qu'on y trouve sont la preuve que tout l'enseignement mathématique a profondément changé dans les dernières années.

2. Australie. — M. le professeur *Carslaw* nous a informé que

dans les classes supérieures des écoles de New-South-Wales on enseigne le Calcul différentiel et intégral à ceux des élèves qui montrent une aptitude spéciale pour les mathématiques

3. Autriche. — Les mathématiciens autrichiens, surtout les professeurs appartenant à l'enseignement supérieur, M. *Czuber*, actuellement l'un des membres du Comité central, et M. *Hočevar* ont adhéré dès le commencement au programme de M. *Klein* et préparaient l'opinion publique à accepter la réforme de l'enseignement mathématique. Au Congrès de Rome, M. le professeur *Suppantschitsch*, le rapporteur actuel, ne put rendre compte que du fait que les élèves bien doués avaient le moyen de connaître à l'école les éléments du Calcul différentiel et intégral, pourtant il parut juger les circonstances propices puisqu'il ajouta à la fin de sa conférence : « En résumé, j'espère qu'en Autriche les expériences actuelles finiront par nous convaincre qu'il ne faut pas trop insister sur le programme invétéré, lorsqu'on veut que les jeunes gens aient, en sortant, le goût des sciences et la faculté de comprendre la vie moderne[1]. » Et, en effet, avant qu'une année se fût écoulée, le nouveau plan d'études officiel fit une réalité de l'espérance des mathématiciens : il prescrit l'enseignement du Calcul différentiel pour les gymnases et les gymnases réaux et celui du Calcul différentiel et intégral pour les écoles réales, le Calcul intégral trouvant place aussi dans l'enseignement d'un grand nombre de gymnases. La notion de fonction pénètre toutes les parties de l'enseignement depuis les procédés de calcul élémentaire ; on tire parti de l'étude des grandeurs directement et inversement proportionnelles pour rendre familière l'idée de fonction et l'on s'élève progressivement au cours de l'enseignement de l'Algèbre par le moyen de représentations graphiques nombreuses.

4. Belgique. — Le plan d'études date de 1888 ; la représentation graphique d'une fonction et le Calcul différentiel et intégral n'y figuraient naturellement pas ; et l'enseignement mathématique n'a guère varié depuis 1888, sauf en ce qui concerne l'enseignement de l'Arithmétique qui est devenu plus pratique. Dans son rapport adressé à la Commission internationale, M. Ploumen, inspecteur de l'enseignement moyen, nous dit que son gouvernement a constitué récemment une commission qui s'occupe des réformes à introduire dans l'enseignement secondaire. M. *Ploumen* choisit la matière de l'enseignement mathématique en se laissant conduire par des vues pédagogiques générales et par les nécessités des différentes carrières. Il attribue une importance capitale à la représentation graphique des fonctions et, en général, au rôle de l'idée de fonction, sur laquelle il désire qu'on insiste dès le commencement et il réserve une place relativement grande au Calcul diffé-

[1] Atti del IV. Congresso, etc., t. III, p. 478.

rentiel et intégral. La fin de son rapport définit nettement l'importance et les méthodes des matières nouvelles.

« La puissante impulsion, dit-il, conséquence probable de la réalisation de ces tendances rénovatrices, ne peut manquer d'être salutaire à l'influence des mathématiques sur l'esprit et le caractère de nos élèves, ainsi que sur leurs chances d'avenir. Mais il faut, pour cela, que les méthodes actives restent en honneur dans nos classes, que les diverses branches scientifiques se rapprochent pour se prêter un mutuel appui et que la série de nos déductions rigoureuses et abstraites gardent comme source et point de départ l'intuition et l'observation concrètes. » Peut-être aurons-nous l'occasion, dans une des prochaines séances, d'entendre exposer l'état actuel de la question par des personnes compétentes.

5. Brésil. — Le Calcul différentiel et intégral a été enseigné avec la Géométrie analytique depuis 1891 jusqu'à 1901 ; à cette époque, malgré les résultats satisfaisants, il fut supprimé, de sorte qu'actuellement il ne figure pas sur le programme de l'enseignement secondaire ; seule la dérivée est définie dans certaines écoles. Notre informateur, M. *Eugenio de Barros Raja Gabaglio*, nous fera peut-être le plaisir de présenter un Mémoire sur l'enseignement du Calcul différentiel et intégral.

6. Danemark. — Le récent plan d'études résout la question de telle manière qu'il laisse entière liberté aux écoles de mettre le Calcul différentiel et intégral à la place des chapitres suivants : déterminants ; fractions continues ; équations indéterminées ; étude détaillée de l'équation des coniques : icosaèdre, dodécaèdre et projection orthogonale.

M. *P. Heegaard*, qui a bien voulu nous renseigner sur ces questions, remarque qu'en 1913, toutes les écoles autorisées ont opté pour le Calcul différentiel et intégral.

7. Etats-Unis. — Comme M. D. E. Smith, réformateur zélé et l'un des initiateurs de la Commission nous en informe, le Calcul différentiel et intégral ne figure pas dans l'enseignement secondaire ; on ne peut même pas le rendre facultatif, puisque les élèves des classes supérieures sont trop absorbés par la préparation de l'examen d'admission des Collèges. Tant qu'il ne sera pas porté sur le programme de cet examen, il y a peu de chances pour qu'il entre parmi les matières de l'enseignement secondaire. Pourtant M. Smith garde l'espoir qu'avant peu d'années le Calcul différentiel et intégral sera introduit dans les établissements secondaires professionnels. Connaissant l'activité énergique déployée par nos collègues américains, dans le passé et dans le présent, sur le terrain de la réforme de l'enseignement mathématique (nous n'avons qu'à rappeler l'œuvre de MM. D. E. Smith, Moore, Young) et voyant l'immense essor de l'activité mathématique d'outre-mer qui éblouit nos yeux et qui n'est pas assurément

sans exercer une influence heureuse sur les professeurs de l'enseignement secondaire ; en prenant confiance enfin du contact qui existe, malgré la distance, entre les travailleurs des deux continents : nous ne pouvons pas douter qu'avant peu de temps le développement libre de l'enseignement mathématique aura fait le pas décisif.

8. France. — La conférence suivante nous donnera un exposé complet sur l'enseignement du Calcul différentiel et intégral dans les écoles françaises. Je me borne à rappeler qu'on y attribue, depuis 1902, plus d'importance à l'étude des fonctions et des dérivées qu'auparavant.

Le rapporteur français M. *Ch. Bioche*, qui a bien voulu nous fournir les informations, fait observer que dans la classe de *Mathématiques spéciales*, aujourd'hui comme avant, on fait une étude approfondie du Calcul différentiel et intégral. Je ne peux passer sous silence l'influence extraordinairement heureuse qu'ont exercé, dans le sens de nos aspirations, les excellents ouvrages de M. *Tannery*, M. *Borel*, M. *Bourlet*, M. *Grévy* et M. *Commissaire*. Nous devons une reconnaissance particulière à deux hommes qui, précurseurs avant tous, n'ont pas eu la joie de voir leur labeur porter des fruits. J'entends en premier lieu *Jules Tannery*, bien connu de tous les mathématiciens, éducateur des futurs professeurs. Dans son premier Mémoire scientifique, publié en 1875 dans les Annales de l'Ecole Normale où il expose la théorie, alors toute nouvelle, de Fuchs sur les équations différentielles linéaires, il définit l'idéal de sa vie, avec sa grande modestie élevée, en disant : « Ceux qui aiment la Science et qui ont trop de raisons pour se défier de leurs facultés d'invention, ont encore un rôle utile à jouer : celui d'élucider les recherches des autres et de les répandre ; c'est ce que j'ai essayé de faire dans ce travail. »

Cet idéal, il l'a bien servi dans les travaux scientifiques et pédagogiques de toute sa vie. Non content d'écrire pour le public mathématique proprement dit, tant pour le public mathématique francais que pour celui de tous les pays, des traités excellents qui captivent le lecteur par le fond et par la forme et j'ajouterai, par la force inspiratrice du Maître, il a montré aux professeurs de l'enseignement secondaire par son ouvrage didactique, publié dans la Collection de M. *Darboux*, quels trésors se cachent dans les connaissances élémentaires qui s'enseignent tous les jours et quel vaste champ de réflexions s'ouvre dans ce qu'on croit fermé par une muraille de Chine, les mathématiques d'école. Ce n'est pas tout. Il s'est mis à la tête des réformateurs et il a écrit un livre à l'usage des élèves pour leur apprendre les connaissances mathématiques, indispensables à qui aspire à la culture générale de l'esprit et à ceux surtout qui, naturalistes, médecins ou économistes, veulent mettre les méthodes exactes au service de la

Science. Cette tentative fut des plus heureuses au point de vue pédagogique. Les professeurs allemands qui ne peuvent pas lire ce livre de Tannery dans l'original doivent être reconnaissants à leur maître, M. *Félix Klein*, pour avoir encouragé une traduction allemande, le rendant ainsi accessible à tous ses compatriotes.

Nous devons un hommage particulier à la mémoire d'un des réformateurs français les plus actifs, *Carlo Bourlet*, qui, par son activité et son zèle inlassables et par l'exemple de ses ouvrages didactiques, a largement contribué à la propagation des idées nouvelles. Quelques semaines avant l'accident déplorable dont il fut la victime, au grand dommage de la science française et surtout du mouvement réformiste, nous avons causé, à Heidelberg, du programme de la Conférence internationale de Paris et des préparatifs qu'il restait à faire. De toutes ces paroles se dégageait une confiance dans le mouvement réformiste et dans l'expansion des méthodes scientifiques exactes. Il avait de beaux projets, des projets d'ordre scientifique et pédagogique. Sa perte irréparable les empêchera de se réaliser.

9. Hollande. — Sans qu'il figure dans le plan d'études actuel, on espère, suivant M. *Cardinaal*, qui a bien voulu mettre à notre disposition les renseignements nécessaires, que le Calcul intégral et différentiel sera introduit dans le prochain plan d'études. M. *Cardinaal* nous écrit que, dans certaines bonnes classes, on a déjà fait des tentatives et elles ont été couronnées de succès.

10. Hongrie. — Le dernier plan d'études date de 1899, mais déjà le plan d'études de 1879 mentionne les éléments de la Géométrie analytique, l'étude analytique et la représentation graphique des fonctions du second degré et la solution, par des moyens élémentaires, de certains problèmes de maximum et minimum. Cela prouve que les éléments de la notion de fonction avaient figuré sur le programme des études secondaires en Hongrie bien avant que le mouvement réformiste ait pris naissance. Il y a lieu d'espérer que le prochain plan d'études en embrassera davantage et notamment les éléments du Calcul différentiel et intégral. Nous fondons cet espoir sur le Décret de M. le Ministre de l'Instruction actuel, décret instituant les travaux préparatoires d'un nouveau plan d'études, où M. le Ministre insiste particulièrement sur la place importante que doit recevoir dans l'enseignement mathématique la notion de fonction.

Le rapporteur hongrois se croit autorisé à déclarer que M. le Ministre souhaite qu'on entende aussi par là l'introduction des éléments du Calcul différentiel et intégral. Dans un avenir prochain, le plan des études mathématiques aura donc subi une réforme complète et officielle; mais on enseigne dès maintenant les éléments du Calcul différentiel et intégral dans un tiers à peu près des établissements secondaires. La représentation graphique des fonctions a pénétré presque partout, on l'emploie dans la plupart des écoles. Quelques livres de classe récemment parus donnent déjà les éléments du Calcul différentiel et intégral.

11. Iles Britanniques. — M. *C. Godfrey*, qui nous renseigne dans un rapport détaillé sur toutes les questions posées, fait observer que les jeunes gens de 17 à 19 ans se préparant aux études mathématiques reçoivent, d'après une pratique en honneur depuis 20 à 25 ans, un enseignement spécial et relativement étendu du Calcul différentiel et intégral, enseignement qui s'appuie sur des méthodes rigoureuses. Une pratique un peu moins ancienne mais vieille d'au moins 15 ans fait donner aussi un enseignement spécial aux élèves se destinant à la carrière militaire ou au génie civil. Cet enseignement est, dans beaucoup d'établissements, commun aux deux groupes mentionnés. Là, où ces groupes sont séparés, on a moins d'égard à la rigueur pour le second groupe que pour le premier. La nouvelle tendance paraît être, d'après M. *Godfrey* : « Calculus for the avarage boy ». Dans certaines écoles, le plan d'études général embrasse le *Calculus;* dans d'autres, on fait des tentatives. Pour juger le progrès en Angleterre, point n'est besoin d'analyser les nombreux cours élémentaires de Calcul différentiel et intégral, tel que les ouvrages très répandus de MM. *Mercer* et *Gibson*, qui embrassent un vaste domaine du Calcul infinitésimal et font usage parfois de méthodes élémentaires intéressantes; il suffit de comparer, parmi les anciens ouvrages excellents, l'Algèbre de *Todhunter*, que je prends aujourd'hui même avec piété en main et qui m'était d'un usage de tous les jours à l'époque où j'appartenais à l'enseignement secondaire; il suffit de comparer ce livre, dis-je, avec n'importe lequel des manuels aujourd'hui en usage, par exemple avec celui de MM. *Godfrey* et *Siddons* que notre éminent informateur ne mentionne point. Dans l'Algèbre de *Todhunter* qui, pour la richesse des matières, pour la clarté et la brièveté de l'exposition, était un modèle, nous ne trouvons pas une figure, pas un mot sur la représentation graphique des fonctions ou sur la notion de dérivée. Par contre, nous ne doutons pas que l'ouvrage de MM. *Godfrey* et *Siddons* ne transforme complètement le monde des idées mathématiques de l'« avarage boy », tant l'introduction et l'utilisation de la notion de fonction, la représentation graphique, les principes bien groupés du *Calculus* y sont clairs, précis et présentés sans artifice.

12. Italie. — M. *Castelnuovo*, délégué italien, a bien voulu nous informer que dans le nouveau plan d'études du *Liceo moderno*, qui entrera en vigueur cette année, le Calcul différentiel et intégral est porté sur le programme des deux classes supérieures. Actuellement il n'est enseigné qu'exceptionnellement dans certaines écoles. Nous fondons de grands espoirs sur la transforma-

tion de l'enseignement mathématique secondaire en Italie. Il ressort clairement du plan d'études que, tout en se bornant à un programme minimum, on veut y apporter une entière précision en suivant les traditions de l'enseignement mathématique italien. Les instructions insistent particulièrement sur ce point que l'enseignement doit éviter avec un égal soin l'empirisme grossier qui obscurcit le caractère logique de la formation mathématique et le criticisme subtil pour lequel l'esprit des élèves n'est pas suffisamment mûr. Nous attendons avec un vif intérêt comment, dans le pays de la critique mathématique où *Dini, Genocchi* et *Peano* ont traité des principes du Calcul infinitésimal d'une façon modèle, comment, dans ce pays, on présentera ces principes aux élèves. Nous pouvons être sûr que si ce travail est fait par les mêmes hommes qui, dans leurs manuels de géométrie, si intéressants, mais si difficiles à suivre dans d'autres pays, ont cherché avec virtuosité à concilier une exposition scientifique rigoureuse avec le but que se propose l'enseignement secondaire : notre mouvement réformiste sera infiniment redevable à nos compagnons de lutte italiens.

13. Norvège. — Le plan d'études n'est changé dans ce pays que graduellement, avec précautions. Celui de 1911, comme M. *Alfsen* nous l'écrit, n'innove dans le sens des idées nouvelles qu'en ce qu'il introduit la représentation graphique des fonctions ; il ne touche pas aux autres parties de l'enseignement mathématique et ne fait pas mention du Calcul différentiel et intégral. Mais les professeurs qui se déclarent prêts à enseigner les éléments du Calcul différentiel et intégral sont autorisés à le faire. Cependant, jusqu'ici, aucun d'eux n'a déclaré vouloir faire une tentative ce que M. *Alfsen* attribue aux circonstances que ce nouvel ordre des choses n'a commencé que cette année et qu'il manque encore des manuels scolaires. Un manuel qui paraîtra prochainement changera peut-être la face des choses.

14. Roumanie. — La brochure publiée par M. *Tzitzéica* sur les mathématiques dans l'enseignement secondaire nous permet de constater que le Calcul différentiel et même la différentiation des fonctions de plusieurs variables sont inscrits dans le récent plan d'études de la section réale.

15. Russie. — Suivant le rapport détaillé et complet de M. *C. Possé,* le Calcul différentiel et intégral figure dans les plans d'études de 1907 des écoles réales et de quelques écoles particulières de jeunes filles, ainsi que dans celui datant de 1910 des écoles militaires, mais il n'est pas enseigné, ni même les éléments de la Géométrie analytique, dans les gymnases où un plan d'études plus ancien est encore en vigueur.

16. Serbie. — M. *Petrovich,* délégué serbe, nous apprend que des personnes compétentes ont élaboré depuis longtemps un pro-

gramme détaillé pour l'enseignement du Calcul différentiel et intégral, mais, à la suite des circonstances politiques, les réformes ont dû subir un retard.

17. Suède. — D'après le rapport de M. *D.-E. Goransson,* délégué suédois, le plan d'études de 1905 embrasse, tant pour les gymnases que pour les écoles réales, la notion de fonction et la représentation graphique ; pour les écoles réales, il prescrit en outre la différentiation de quelques fonctions simples, mais non l'intégration ; cependant, dans la plupart des écoles, on introduit la notion de l'intégrale indéfinie et on l'applique à la détermination des aires et des volumes.

18. Suisse. — Il n'y a pas un plan d'études uniforme pour tout le pays, chaque canton étant autonome dans les affaires de l'instruction publique. Cependant le programme officiel de l'examen de maturité baccalauréat et celui de l'examen d'admission à l'Ecole polytechnique exercent une certaine influence dans le sens de l'uniformisation. Ces programmes ne mentionnent pas les éléments du Calcul différentiel et intégral ; néanmoins, on les enseigne dans 84 pour cent des écoles réales et dans 21 pour cent des gymnases. On les enseignait dans certaines écoles bien avant que les tendances rénovatrices se fissent jour, par exemple à l'école réale de Bâle depuis 50 ans, comme l'a remarqué M. *Fehr,* l'âme de notre Commission, dans sa conférence au Congrès de Rome. Nous apprenons dans cette conférence que l'Association suisse des professeurs de mathématiques a adopté, à l'unanimité des voix, en 1904, la proposition du rapporteur (M. *Fehr*), déclarant que, « en raison de leur importance et de leur portée, la notion de fonction et les problèmes fondamentaux qui s'y rattachent appartiennent au programme de l'enseignement mathématique des écoles moyennes ». Une telle déclaration a plus d'importance en Suisse qu'ailleurs, car la Suisse est le pays heureux où, d'après M. *Brandenberger* qui nous a aimablement informé, la conférence des professeurs détermine elle-même le plan d'études et les autorités se bornent à en prendre connaissance. C'est donc à la réunion des professeurs de 1904 ou plutôt au conférencier de cette réunion que revient le mérite d'avoir contribué à développer le rôle de la notion de fonction dans les gymnases et les écoles réales de la Suisse.

Résumé.

Pour avoir une vue d'ensemble, nous pouvons ranger les Etats dont il a été question plus haut en deux catégories :

I. Les éléments du Calcul infinitésimal figurent sur le programme officiel des écoles ou sur le plan d'études établi par les écoles elles-mêmes dans les pays suivants : Parmi les États allemands : Bavière, Wurtemberg, Bade, Hambourg ; parmi les autres États : Autriche, Danemark, France, Iles Britanniques, Italie, Roumanie, Russie, Suède, Suisse.

II. Les éléments du Calcul infinitésimal ne figurent pas sur le plan d'études, mais ils sont enseignés dans un grand nombre d'écoles : en Prusse, Saxe, Hongrie, Australie, et ils le seront probablement avant peu de temps en : Hollande, Norvège, Belgique et Serbie.

Nous pouvons, je crois, conclure qu'il n'existe pas d'États, ni parmi les États mentionnés ni parmi les autres, où les aspirations tendant à introduire dans l'enseignement la notion de fonction et la représentation graphique, n'aient acquis une force considérable. Il n'existe peut-être pas de manuel scolaire récent, ni d'école où les réformes n'aient trouvé quelques applications. En constatant ce fait comme un des succès les plus éclatants de notre propagande, nous pouvons dire que nos personnalités dirigeantes ont compris l'esprit des temps nouveaux et elles ont donné l'impulsion à la marche naturelle du progrès. J'ai la conviction ferme que le progrès ultérieur, en surmontant peut-être plus d'obstacles encore dans sa marche lente, mais sûre, assurera partout une place au Calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire, et aussi dans la conscience des classes instruites. Notre conception du monde deviendra, par la connaissance du Calcul infinitésimal, science générale des variations, plus mathématique que par les connaissances enseignées jusqu'ici à l'école. *Pour cela, il faut, par une action méthodique et constante, soutenir l'intérêt éveillé, soumettre à un examen approfondi les matières de l'enseignement mathématique et, surtout, perfectionner sans relâche les méthodes de l'enseignement.*

III. — Etendue et applications du Calcul différentiel et intégral.

Nous avons maintenant à rechercher, dans quelle étendue le Calcul différentiel et intégral est enseigné ?

Nos conclusions d'aujourd'hui, comme j'ai déjà eu l'occasion de le remarquer, ne sauraient être définitives. Dans une institution si lente à se transformer, comme l'école, et après l'intervalle de temps si court, écoulé depuis l'introduction des matières nouvelles, les résultats sont nécessairement sujets à varier ! Il fallait des siècles et des génies comme *Euler* et *Lagrange*, sans compter les excellents esprits méthodiques du milieu du dernier siècle, auteurs des manuels scolaires — pour que les Mathématiques enseignées aux écoles secondaires eussent pris une forme achevée. Et encore, cela ne s'applique qu'à l'Algèbre et à une partie de la

Géométrie, en premier lieu, à la Trigonométrie. Il ne s'agit donc aujourd'hui que de nous rendre compte des différentes méthodes employées et d'amener les conceptions diverses à se placer sur un terrain commun. Nous pouvons espérer qu'avec le concours des maîtres de l'enseignement supérieur et de ceux de l'enseignement secondaire, ce terrain aussi sera conquis en peu de temps pour l'école. Nous avons pu constater ce qui suit :

a) *Fonctions d'une et de plusieurs variables.* Le Calcul infinitésimal n'est appliqué presque partout qu'aux fonctions d'une variable; exceptionnellement, nous trouvons des fonctions de deux variables sur le programme des écoles réales de Wurtemberg, de Hambourg, de Lugano en Suisse et dans le projet serbe. Nous ne prenons pas en considération ici l'enseignement dépassant le niveau moyen et donné à certains élèves ou à certains groupes.

b) *Fonctions différentiées.* Partout, où l'on enseigne la différentiation, on l'applique naturellement aux polynomes et aux fonctions rationnelles — ou au moins, parmi les dernières, au quotient de deux polynomes linéaires. Là, il n'y a aucune difficulté dans le passage à la limite. Par contre, pour différentier les fonctions trigonométriques et exponentielles, il faut connaître les valeurs de $\lim\limits_{x=0} \frac{\sin x}{x}$ et de $\lim\limits_{z=0} (1+z)^{\frac{1}{z}}$ ou des limites d'expressions équivalentes. On conçoit donc que dans les écoles où la notion de limite n'est pas approfondie, et là où l'âge des élèves ne permet pas de suivre les raisonnements conduisant à ces deux limites, on ne s'occupe pas de la différentiation des fonctions trigonométriques et exponentielles. Tel est le cas des écoles françaises (il ne s'agit pas, bien entendu, des classes de *Mathématiques spéciales*[1]), des manuels scolaires anglais et du nouveau plan d'études de l'Italie. Par contre nous la trouvons enseignée dans les écoles allemandes, autrichiennes, russes, suisses, danoises et dans certaines écoles hongroises.

S'il m'est permis d'exprimer une opinion personnelle, je dirai que la différentiation ne doit pas être considérée comme un but absolu ; son importance dans l'enseignement secondaire vient des applications géométriques et physiques qui s'y rattachent; il est donc indispensable en vue des applications de savoir différentier les fonctions trigonométrique et exponentielle et leurs fonctions inverses. La première ne présente aucune difficulté grave, puisque la seule limite nécessaire ou, si l'on veut, la dérivée de sin x pour

---

[1] Il ne faut pas confondre la classe de *Mathématiques*, qui est la dernière classe de l'enseignement secondaire proprement dit, et la classe de *Mathématiques spéciales* qui prépare les élèves au concours pour l'Ecole polytechnique et quelques autres grandes écoles.

$x=0$ peut s'obtenir facilement au moyen des connaissances trigonométriques. Le calcul de $\lim_{z=0}(1+z)^{\frac{1}{z}}$ est autrement ardu et plus éloigné des connaissances élémentaires des élèves. C'est probablement la raison pour laquelle plusieurs auteurs voudraient le supprimer ou le faire par des moyens plus faciles que ceux ordinairement employés dans les Cours. J'avoue qu'aucun des récents manuels scolaires — et j'ai examiné plusieurs des manuels allemands, français ou anglais que MM. les rapporteurs m'ont signalés — ne m'a satisfait à cet égard. Parmi les procédés cherchant à faciliter la marche, le plus recommandable est peut-être celui qu'on trouve dans le Cours autographié de M. *Félix Klein*, procédé qui consiste à calculer l'expression $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ pour quelques valeurs suffisamment grandes de n, se bornant ensuite à dire que le raisonnement par induction manque de rigueur

c) *Notation des dérivées.* Il est à remarquer que, dans la plupart des cas, on préfère la notation de *Lagrange* ou la notation $Df(x)$ à celle de Leibniz; en France, en Italie, dans certains manuels scolaires anglais et dans plusieurs écoles suisses, cette dernière est complètement abandonnée. Là, où elle est employée, on invoque des raisons historiques en évitant jusqu'à l'apparence même de définir un véritable quotient. *Poincaré* dit à ce sujet : « Sans doute, il faut connaître la notation différentielle; il faut pouvoir manier ce langage qui est celui de tout le monde, de même qu'il faut savoir l'allemand... parce qu'elle [la langue allemande] est parlée par 60.000.000 d'hommes, dont beaucoup sont des savants. Mais c'est une science dangereuse qu'il ne faut aborder que quand on a appris à penser en dérivées... Pour donner cette habitude aux élèves, il faut dans les commencements employer exclusivement la notation de *Lagrange*... Ce sera donc la dérivée que l'on définira d'abord; je voudrais que cette définition soit préparée par des exemples concrets. Il y en a deux, celui des tangentes, celui de la vitesse ; et ils ne sont pas à dédaigner puisque le premier a été le point de départ de *Fermat* et de *Roberval*, le second celui de *Newton*... (Conférence du Musée pédagogique, 1904, p. 22; l'*Enseign. mathém.*, numéro de juillet 1904, p. 276-277).

d) *Introduction de la notion d'intégrale.* Dans la plupart des Etats, on ne se contente pas de définir la dérivée, on introduit aussi l'intégrale. Et cela s'explique aisément. Nous savons bien qu'il importe de connaître la dérivée pour exécuter avec une méthode unique et déterminée tous les calculs relatifs aux tangentes qu'on rencontre en Mathématiques et les calculs relatifs aux vitesses et aux accélérations qu'on rencontre en Physique, pour se faire une idée précise de la mesure de la variation d'une fonction, pour aborder directement et avec méthode les problèmes de maximum et de minimum traités jusqu'à présent par des artifices et des moyens détournés. Il importe tout autant de déterminer les aires et les volumes qui figurent sur le programme de l'enseignement mathématique et les quelques intégrales cachées qui interviennent au cours de l'enseignement physique par la méthode de l'intégration; méthode plus simple, plus économique, plus naturelle et surtout plus honnête et plus digne de l'esprit de l'enseignement mathématique que les anciennes méthodes d'exhaustion ou le principe indémontré de Cavalieri. Pourtant, dans plusieurs Etats où les matières nouvelles n'apparaissent que dans les classes supérieures, le programme de l'enseignement mathématique entier n'ayant pas été remanié, les calculs relatifs à la Stéréométrie précèdent les méthodes infinitésimales et, par conséquent, celles-ci ne peuvent plus être utilisées dans le but indiqué plus haut. Cela explique que, dans certains Etats, seul le Calcul des dérivées est enseigné. Tels sont : la France, mais ici les Classes de Mathématiques font connaître l'intégrale comme fonction primitive; la Prusse, où le Calcul différentiel est enseigné dans presque toutes les écoles réales, tandis qu'on est réservé relativement au Calcul intégral; la Bavière où le plan d'études embrasse le Calcul différentiel sans le Calcul intégral; l'Autriche où, dans certaines écoles, il n'y a pas de Calcul intégral. Par contre, le Calcul intégral est introduit en Russie, en Danemark, dans un grand nombre d'écoles anglaises, dans la plupart des écoles prussiennes et autrichiennes, en Wurtemberg, en Suisse, en Hongrie, dans le plan d'études italien qui va entrer en vigueur (mais là, seule l'intégrale définie est admise) et dans le projet du plan d'études serbe.

D'après mon avis, l'introduction de la fonction primitive avec utilisation de considérations géométriques ne se heurte à aucune difficulté de la part des élèves et elle a, au point de vue philosophique, autant d'importance que l'introduction des dérivées. Elle en a plus encore au point de vue de l'économie de l'enseignement, et cela n'est pas à dédaigner quand il est question de ne pas allonger le programme des études pour des élèves menacés déjà de surmenage. J'ose exprimer l'opinion que le développement réformiste interdira de s'arrêter à mi-chemin.

Partout où la notion d'intégrale est enseignée, elle suit celle de dérivée, quoique, au point de vue de la méthode et même de l'histoire, le contraire puisse aussi bien s'imaginer. Dans le cours de vacances de l'Université de Gœttingue, M. le professeur *Runge* a recommandé cette voie, comme M. *Lietzmann* m'en a aimablement informé. Mais il n'existe pas, à ma connaissance, de manuel scolaire qui ait pris ce parti. Dans son cours déjà mentionné, M. le professeur *Klein* pose en même temps le problème des tangentes et celui de la quadrature, ce qui l'amène à ne pas séparer le Calcul différentiel et le Calcul intégral. L'introduction simultanée des deux notions fondamentales ne présente que des avantages, même dans l'exposition du Calcul différentiel.

Les commencements du Calcul intégral sont divers : dans certaines écoles, l'intégrale définie est enseignée avant l'intégrale indéfinie, dans d'autres, la marche est inverse. Les écoles allemandes pratiquent les deux méthodes ; en France, seule la fonction primitive est enseignée ; en Autriche, l'intégrale définie précède l'intégrale indéfinie, sauf dans certaines écoles de Bohême où, d'après le rapport envoyé par M. le professeur *Bydzoesky*, les notions de dérivée et d'intégrale sont introduites simultanément. En Suisse aussi, on enseigne l'intégrale définie d'abord, l'intégrale indéfinie ensuite ; en Russie et en Danemark, la marche inverse est suivie. Le plan d'études italien ne fait introduire que l'intégrale définie et cela à propos de la détermination des aires (qui se fait d'abord sur papier quadrillé ; mais je crois que cela ne doit pas exclure la définition de la fonction primitive, d'autant plus que les instructions mentionnent la détermination des chemins parcourus dans un mouvement uniformément accéléré. Parmi les ouvrages anglais les plus répandus, ceux de MM. *Mercer* et *Gibson* commencent par la fonction primitive et celui de M. *Edwards* par l'intégrale définie.

Les deux méthodes ont, sans doute, chacune leurs avantages scientifiques et didactiques propres. Dans l'exposition rigoureuse d'un cours de Faculté, où l'existence de l'intégrale définie est démontrée, celle-ci doit précéder la fonction primitive, la notion d'aire étant l'objet d'une définition spéciale. Parmi les traités d'Analyse les plus connus, celui de M. *Jordan*, par exemple, expose la théorie de l'intégrale définie avant celle de la dérivée, ce qui est légitime pour la seule raison (et il en existe d'autres) que l'ensemble des fonctions intégrables est plus étendu que celui des fonctions dérivables. Dans l'enseignement secondaire où l'aire, le volume et la longueur d'un arc de courbe doivent être considérés comme des notions primitives, il est le plus sage, je crois, de suivre le conseil de *Poincaré* qui dit (*loc. cit.*) : « Alors ce qui reste à faire est bien simple : définir l'intégrale comme l'aire comprise entre l'axe des x et deux ordonnées de la courbe ; montrer que, quand l'une des ordonnées se déplace, la dérivée de cette aire est précisément l'ordonnée elle-même. C'est le raisonnement de *Newton*, c'est comme cela que le Calcul intégral est né et, bon gré mal gré, il faut repasser par où nos pères ont passé. »

IV. — Applications du Calcul infinitésimal.

a) *Série de Taylor.* Notre questionnaire se rapportait aussi à la démonstration de la formule de Taylor, à la détermination du reste et à l'interpolation. Il ressort des réponses que la formule de Taylor figure sur peu de programmes de l'enseignement secondaire; elle est néanmoins enseignée dans les écoles secondaires allemandes où le plan d'études embrassait depuis longtemps les séries infinies : dans les écoles réales de Prusse, de Bavière, de Wurtemberg et de Hambourg, dans quelques écoles suisses et autrichiennes, dans les écoles danoises, dans les groupes mathématiques des écoles anglaises et dans les classes de Mathématiques spéciales en France. Là, où l'on enseigne la série de Taylor, on établit les séries de e^x, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $(1+x)^m$ et $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ (la dernière en vue, surtout, du calcul de π). Cependant l'étude des manuels scolaires nous porte à penser que *ce terrain n'est pas encore suffisamment préparé pour l'école.* L'ancienne théorie des séries infinies, qui évite soigneusement de faire appel à la notion de dérivée et qui opère habituellement avec la méthode des coefficients indéterminés et avec certaines relations fonctionnelles, n'est pas entièrement balayée du terrain, et on aperçoit çà et là des restes de la « méthode pure » de l'Analyse algébrique qui fut très en honneur dans la seconde moitié du siècle dernier.

Je ne veux pas traiter ici en détail des questions de méthode, ni analyser minutieusement quelque manuel scolaire. J'ouvrirais ainsi des discussions portant sur la méthode de tel ou tel chapitre de l'enseignement et nous autres, professeurs, nous savons bien que ces discussions, une fois commencées, semblent ne jamais finir. Je me bornerai à faire une remarque générale, c'est que la didactique des mathématiques aurait la tâche de changer les grandes valeurs scientifiques en petites monnaies pour qu'un élève puisse rassembler petit à petit sa fortune scientifique. Le plus souvent, hélas, ce changement ne se fait pas sans perte et il entre beaucoup de fausse monnaie dans la circulation.

Tant que les vérités mathématiques n'entrent pas à l'école sans déformation ou, du moins, sans grande déformation, nous ne pouvons considérer nos méthodes comme satisfaisantes. De ce point de vue je ne dissimule pas qu'aucune des méthodes proposées dans les manuels scolaires que j'ai pu examiner ne me paraît bonne pour établir la formule de Taylor. L'un de ces manuels, par exemple, parle de la série infinie de Taylor sans définir ce que c'est que la somme d'une série infinie; un autre affirme qu'une fonction $f(x)$ est développable en série de Maclaurin, si elle admet des dérivées de tous les ordres, finies pour $x=0$. On pouvait lire dans un livre, c'est à M. *Klein* que je dois cette information, que toute série entière avait pour rayon de convergence l'unité. Les nombreuses méthodes graphiques qu'on a inventées dernièrement pour évaluer le reste de la formule de Taylor ne sauraient être prises pour des démonstrations rigoureuses. M. *F. Klein,* qui manie avec virtuosité le Calcul différentiel et intégral dans son cours déjà plusieurs fois mentionné, expose la théorie générale de la série de Taylor sans s'écarter essentiellement de la démonstration rigoureuse en usage, fondée sur le théorème de *Rolle*. Naturellement il sait mettre à profit, dans certains cas, les circonstances particulières pour tourner la difficulté de la détermination du reste.

Quelque grande que soit l'importance attribuée à la série de Taylor, qui ouvre un monde nouveau devant l'élève des écoles secondaires en lui faisant voir les expressions analytiques des fonctions $\sin x$, $\cos x$, $\log(1 + x)$, $\operatorname{arctg} x$ connues jusqu'ici par les tables seulement et en lui enseignant la formule générale du binôme établie, par des moyens élémentaires, seulement pour des exposants entiers et positifs : l'exposition de la théorie de la série de Taylor est, je crois, au point de vue des méthodes, un problème irrésolu aujourd'hui. Nous attendons des éclaircissements sur ce sujet des observations de MM. les délégués ici présents.

Cependant, la formule de Taylor, en la limitant au terme du deuxième ordre, peut s'établir facilement et à l'abri de toute objection, ce qui se voit dans plusieurs manuels scolaires. Cela est, selon mon avis, pleinement suffisant pour les besoins les plus urgents de l'enseignement secondaire : usage des tables de logarithmes et des tables de fonctions circulaires, évaluation de l'erreur, justification de l'interpolation linéaire. Pourtant on doit constater que même dans les écoles où la formule ou la série de Taylor sont enseignées, on néglige ces applications. Elles seraient pourtant utiles pour bien faire comprendre le sens de certains procédés qu'on emploie mécaniquement dans les écoles.

b) *Maximum et minimum.* On s'accorde généralement sur la méthode à appliquer pour les problèmes de maximum et de minimum. On sent partout que ces problèmes sont peut-être la partie la plus intéressante des matières nouvelles de l'enseignement secondaire et qu'ils ont, en outre, une importance universelle qui dépasse les cadres de l'enseignement. Dans plusieurs États, ils étaient toujours traités ou par des moyens algébriques élémentaires en se bornant aux fonctions du second degré ou par des méthodes en usage avant l'introduction de la langue du Calcul différentiel, méthodes qui cachaient, en réalité, des différentiations.

Les dérivées du premier et du second ordre apportent ici l'économie, l'unité et l'ordre de sorte que, presque partout, les anciennes méthodes sont tombées en désuétude. Il est regrettable que, dans quelques États, en conséquence de la manière dont on a incorporé les matières nouvelles, ces vieilles méthodes de calcul des maxima et des minima aient subsisté. C'est à regretter surtout parce qu'il faudrait éviter jusqu'à l'apparence même que les matières nouvelles soient placées à côté et au-dessus des anciennes, ne servant qu'à augmenter les matières de l'enseignement.

e *Applications physiques.* Il va sans dire — et les réponses reçues nous apportent à ce sujet une pleine confirmation — que la dérivée une fois définie est utilisée en Physique pour définir la vitesse et l'accélération. Cachée, elle intervenait toujours dans l'enseignement de la physique; qu'elle intervienne ouvertement et c'est déjà un succès des idées nouvelles. Dans la Plupart des écoles allemandes, le Calcul infinitésimal trouve une application plus étendue : on s'en sert pour déterminer des centres de gravité, des moments d'inertie, le potentiel, le mouvement du pendule, la variation de la hauteur du baromètre avec l'altitude, etc.; on s'en sert en Autriche pour l'étude du potentiel; en Bohème et Danemark, pour déterminer aussi des centres de gravité et des moments d'inertie. Dans les écoles hongroises qui ont adopté l'enseignement du Calcul infinitésimal, on l'utilise dans une foule d'applications physiques, surtout si l'enseignement des Mathématiques et celui de la Physique sont donnés par le même professeur. Il y a cependant des chapitres de la Physique où les méthodes infinitésimales sont peu employées; elles sont rarement employées en Optique (dans certaines écoles allemandes seulement) et en Electrodynamique (dans des écoles allemandes, autrichiennes et hongroises). Comme le remarque justement M. *Possé,* auteur du rapport sur la Russie, en Physique, on ne se sert généralement que des Mathématiques élémentaires.

Le mouvement réformiste ne peut être considéré comme achevé tant que nous voyons les notions fondamentales de la Mécanique enseignées indépendamment des éléments du Calcul infinitésimal. L'avenir fera régner certainement l'harmonie, si désirable au point de vue pédagogique, entre les enseignements qui s'occupent, l'un de l'étude des fonctions et l'autre des phénomènes physiques et chimiques. M. *Timerding,* membre de la Sous-commission allemande, a publié sur ce sujet, pour la Commission internationale, une brochure du plus haut intérêt. Après avoir tracé un tableau historique du développement des méthodes infinitésimales, il soumet à une critique sévère, mais juste, les méthodes qu'on emploie en Physique et qui font usage du Calcul infinitésimal sans l'avouer; il dénonce les défauts de ces Compléments sur le Calcul infinitésimal, écrits à l'usage des physiciens qui sont, selon lui, la honte de la littérature mathématique, et il indique sur plusieurs exemples la marche irréprochable qu'on devrait suivre en appliquant le Calcul infinitésimal à traiter des problèmes de Physique. « Le Calcul infinitésimal, dit M. Timerding[1], rend, en Physique, les services qu'on attend d'une méthode satisfaisante aux points de vue scientifique et pédagogique : notations claires où apparaît la nature des choses, et déductions simples, dénuées

[1] Timerding, *Die Mathematik in den physik. Lehrbüchern,* p. 108.

d'artifice ; de plus, il débarrasse la marche de l'enseignement physique des déductions mathématiques encombrantes et insuffisantes. »

Nous sommes loin de considérer la transformation de l'enseignement de la Physique, comme achevée dans tous les Etats ; mais l'intérêt de l'enseignement secondaire exige impérieusement que les idées nouvelles dont nous aspirons à la réalisation dans l'enseignement mathématique, pénètrent à fond l'enseignement physique. Celui-ci en deviendra plus vrai, plus sincère, plus simple, plus économique, plus complet par les forces et le temps gagnés et il réagira, à son tour, sur l'enseignement mathématique en le rendant plus pratique, plus facile à comprendre, plus uni et répondant mieux à l'idéal scientifique.

d *Applications géométriques.* Le Calcul intégral est appliqué partout où il est enseigné à déterminer des aires et des volumes. Cela ne pourrait pas être autrement et là est principalement le caractère économique de l'introduction des méthodes nouvelles dans l'enseignement secondaire. Si l'on songe aux difficultés de la détermination des volumes du prisme oblique, de la pyramide et de la sphère, au calcul — qu'on effectue en quelques endroits — de l'aire de l'ellipse et d'un segment de parabole, il faut saluer comme un affranchissement l'introduction du Calcul intégral dans toutes ces questions. Pourtant, il me faut constater une fois de plus qu'on continue à appliquer, pour la détermination des aires et des volumes, les méthodes anciennes et, dans la plupart des cas, le principe sans beaucoup de valeur didactique de Cavalieri, même après avoir exposé les notions fondamentales du Calcul intégral. Cela tient assurément, d'une part, à ce que le Calcul infinitésimal n'a pas pénétré entièrement la matière de l'enseignement mathématique et, d'autre part, que les transformations ne se font que très lentement dans la vie des écoles. M. *Klein* dit avec justesse[1] : « Quand il s'agit de faire entrer des développements nouveaux, la loi de l'hystérésis se manifeste plus forte dans les Mathématiques que dans d'autres Sciences. Une idée mathématique nouvelle ne trouve le chemin de l'école que si des professeurs des Facultés la mettent en relief dans leurs cours, s'ils forment des générations de professeurs de lycée qui la représentent et enfin, si ceux-là lui donnent une forme propre à favoriser la propagation : elle tombe à la fin dans le domaine public et une place lui est désignée dans les institutions scolaires. Et cela dure le plus souvent des dizaines d'années. » Je crois que la transformation du calcul des aires et des volumes ne s'accomplira aussi que dans quelques dizaines d'années. Il n'y a là rien qui doive nous surprendre : ce n'est pas seulement la force de l'habitude

[1] Klein-Riecke, p. 11.

qui conduit le professeur à appliquer les méthodes usuelles et, en particulier, la méthode d'exhaustion, c'est aussi, et surtout, la beauté de ces méthodes et l'admiration devant l'œuvre grandiose de l'antique esprit de la Grèce. Je crois fermement qu'un jour la situation sera complètement changée : l'enseignement secondaire utilisera, en vue de l'utilité, de l'économie et de la simplicité, le Calcul intégral et notamment la fonction primitive pour déterminer des aires et des volumes, et à l'Université on enseignera aussi les découvertes ingénieuses d'Eudoxe et d'Archimède pour perpétuer le souvenir des œuvres et des méthodes créatrices grecques et pour former la génération future des savants.

V. — La question de la rigueur.

Le Comité central désirait en outre savoir, dans quelle mesure on faisait appel à la rigueur en enseignant le Calcul différentiel et intégral dans les écoles secondaires des différents Etats ; il ne lui faisait pas de doute que c'était là le point le plus délicat. C'est surtout du côté de l'enseignement supérieur qu'on entend se plaindre que l'enseignement secondaire fait plus de mal que de bien s'il n'adopte pas les méthodes rigoureuses d'une exposition scientifique ; par contre, les représentants de l'enseignement secondaire affirment que l'intelligence moyenne des élèves ne permet pas une exposition rigoureuse du Calcul différentiel et intégral. Où est donc la vérité ? L'avènement de l'entière rigueur n'est pas accompli de longue date dans les Mathématiques supérieures. Une étude historique nous montre qu'aux commencements on n'exigeait pas une définition précise des notions, ni des déductions logiques irréprochables. C'était peut-être favorable au progrès. Comme M. *Picard* dit : « dans les époques vraiment créatrices, une vérité incomplète ou approchée peut être plus féconde que la même vérité accompagnée des restrictions nécessaires. Si, par exemple, *Newton* et *Leibniz* avaient pensé que les fonctions continues n'ont pas nécessairement une dérivée, ce qui est le cas général, le Calcul différentiel n'aurait pas pris naissance ; de même les idées inexactes de *Lagrange* sur la possibilité des développements en série de Taylor ont rendu d'immenses services et il est heureux que *Newton* ait eu, au début de ses recherches, pleine confiance dans les lois de *Képler*[1]. » Cet état primitif, précédant la critique scientifique, était peut-être propice aux progrès des Sciences ; les inventeurs n'ont pas vu des barricades se dressant de tous côtés ; ils croyaient que l'infini s'ouvrait devant eux ; ils ont mis une confiance exagérée dans leurs forces et dans la force

[1] Picard, *La Science moderne*, p. 52.

de leurs méthodes. Mais le maintien de cet état de choses serait-il légitime et désirable, serait-il conforme à la dignité, à la vérité, à la sincérité et surtout à la valeur pédagogique et scientifique de l'enseignement mathématique?

La rigueur du Calcul différentiel et intégral ne commence qu'avec *Cauchy*, qui a reconnu, le premier, l'importance du théorème des accroissements finis. Celui qui connaît la lenteur de l'expansion des idées ne s'étonnera pas qu'à l'époque où *Gauss*, *Cauchy* et même *Weierstrass*, *Dirichlet* et *Riemann* ont agi, la plupart des mathématiciens ont appris, en Allemagne et ailleurs, les éléments de leur science dans des livres comme ceux de Lübsen, d'Autenheimer, etc. ou même dans des cours élémentaires servant d'introduction à des traités de Physique. Cette littérature sans nulle critique scientifique n'a pas nui à ceux qui étaient bien doués pour les Mathématiques, elle leur a été utile peut-être en les stimulant à préciser les notions enveloppées de brouillard métaphysique. Mais à la grande masse du public des écoles elle a été funeste : les esprits ont acquis un semblant de science qui chancelait, au lieu d'apprendre une science limpide et sûre. Cette époque est caractérisée avec justesse par M. *Klein* dans son ouvrage autographié *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, où il retrace en quelques mots brefs et décisifs le développement historique du Calcul différentiel et intégral [1]. Quelques souvenirs de jeunesse qu'on trouve dans l'ouvrage déjà mentionné, Klein-Riecke, etc. (p. 11), sont particulièrement caractéristiques. En 1865, lorsque la critique mathématique était, sinon à son apogée, du moins en pleine floraison, il entendit dire, au sortir du gymnase, par son professeur de Mathématiques : « les Mathématiques supérieures ont un tout autre caractère que les Mathématiques élémentaires; en Mathématiques élémentaires, tout se démontre, tandis que les Mathématiques supérieures sont comme un système de Philosophie, on les croit ou on ne les croit pas. » Mais n'avait-il pas raison, ce brave professeur lorsqu'on pouvait lire dans l'ouvrage le plus répandu de l'époque que l'infiniment petit est un souffle, l'ombre d'une grandeur évanouie. Et ce Calcul différentiel et intégral sans rigueur, sans critique a longtemps vécu dans les esprits. Comme des couches géologiques à l'intérieur et sur la surface de la Terre, des couches humaines se sont conservées dans l'enseignement secondaire, couches qui ont gardé les fossiles de la Science des époques sans critique. Ne nous étonnons pas que, dans cet état des choses, le gouvernement prussien ait retiré en 1882 aux écoles réales, et en 1892 aux gymnases réaux, l'autorisation d'enseigner le Calcul différentiel et intégral [2]. Je constate

---

[1] KLEIN, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Teubner, p. 554.

LIETZMANN, *Stoff und Methode*, etc., p. 81.

anxieux que le Calcul différentiel et intégral exact n'est toujours pas universellement connu et adopté. Eh bien, quelque partisans ardents que nous soyons des réformes en vue d'un haut idéal de culture générale, nous ne voulons pas de ce Calcul infinitésimal, superficiel, dépourvu de toute précision et indigne de la Science.

Heureusement, la situation change complètement aujourd'hui. Les professeurs d'aujourd'hui de l'enseignement secondaire connaissent, dans le monde entier, le Calcul infinitésimal rigoureux. Il n'est peut-être personne parmi eux qui n'ait lu l'un ou l'autre des ouvrages sur le Calcul différentiel et intégral de MM. *Jordan, Dini, Genocchi-Peano, de la Vallée-Poussin, Hobson, Kowalewsky* ou, pour citer le plus récent, celui de M. *von Mangoldt*. Je ne peux pas m'imaginer quelque part une formation des professeurs de lycée où, au moins dans les cours les plus élevés, l'esprit de ces ouvrages ne serait pas dominant. Même en Angleterre, où l'on s'attache si fort aux traditions de l'enseignement mathématique, la situation a beaucoup varié. Comme M. le rapporteur nous le signale, à Cambridge, il y a 20 à 25 ans, on ne faisait pas entrer la rigueur parfaite dans l'exposition des Mathématiques supérieures. Mais depuis, l'enseignement a subi une transformation profonde et les générations nouvelles respirent une atmosphère tout autre.

Nos vues sur la Science sont pénétrées d'esprit critique. Les méthodes de l'enseignement mathématique secondaire se sont améliorées. Les démonstrations à souricière de Schopenhauer, l'assemblage sans raison des théorèmes abstraits, les constructions compliquées fondées sur des artifices, la mémorisation démodée des Mathématiques ont disparu ou sont sur le point de disparaître : l'observation personnelle, les considérations d'ordre pratique, le travail simultané d'une classe entière, l'habitude du travail indépendant et l'introduction de la méthode heuristique ont transformé de fond en comble le système de l'enseignement secondaire. Il est à espérer que, si les nouvelles générations de professeurs acquièrent une vue claire et précise des principes fondamentaux du Calcul infinitésimal et de ses applications nombreuses et si elles ont une connaissance suffisante des méthodes, le travail pédagogique conscient de ces professeurs fera prendre au Calcul infinitésimal la place qui lui est due et lui donnera une forme aussi aisément maniable que celle des matières anciennes. Le travail tendant à ce but ne peut pas être considéré comme achevé là surtout, où les matières nouvelles ont trop d'étendue. C'est à nous, propagateurs des idées de réforme qu'incombe le devoir de conquérir le terrain par les armes de méthodes pédagogiques nouvelles.

Le point le plus difficile sera d'unir aux raisonnements intuitifs la rigueur au sujet de laquelle M. *Picard* dit avec raison « que la vraie rigueur est féconde, se distinguant par là d'une autre purement formelle et ennuyeuse qui répand l'ombre sur les problèmes qu'elle touche. » Joindre l'intuition à la rigueur, un enchaînement de pensées mathématiques à des vues pratiques, faire un choix judicieux de matières et les ranger en bon ordre pour l'éducation : ce sont là des tâches pédagogiques et mathématiques que nous attendons voir accomplies dans l'avenir. A mon avis, notre devoir principal est d'introduire les notions du Calcul différentiel et intégral d'une manière intuitive, au moyen de considérations géométriques et mécaniques et de nous élever graduellement aux abstractions nécessaires. Toutes nos affirmations doivent être vraies, mais nous ne devons pas viser à atteindre la généralité parfaite. L'exposition des théories doit être naturelle; n'acceptons pour guide que le simple bon sens et rejetons les artifices incompréhensibles. C'est aussi le moyen le plus sûr pour éveiller dans nos élèves le désir de la rigueur. Le professeur formé par l'éducation mathématique moderne, ayant des notions claires de la limite, de la dérivée, des intégrales définies et indéfinies, des séries infinies pourra aisément satisfaire le désir de rigueur s'il se manifeste. Nous n'avons qu'à songer aux paroles de M. *Hadamard* prononcées à propos de l'enseignement de la Géométrie [1] : « C'est par le bon sens que les commençants doivent comprendre les vérités qui relèvent du bon sens — quand ce ne serait que pour éviter cette erreur, si fréquente et si déplorable, de croire que les Mathématiques et le bon sens sont deux choses opposées. La rigueur viendra plus tard, lorsque la nécessité en sera apparue. »

Le Comité central désirait être éclairé à ce sujet lorsqu'il posait des questions relatives à la rigueur; il voulait savoir, d'une manière précise, quels éléments d'une exposition scientifique exacte ont pu entrer ou ont la chance d'entrer prochainement dans l'enseignement des établissements secondaires. Il semble que le premier rang appartiendra, à cet égard, à l'Italie. M. *Castelnuovo* écrit dans son rapport : « Quelques-uns des professeurs ont introduit ces notions d'une manière rigoureuse, conforme à l'esprit qui domine l'enseignement mathématique de nos écoles moyennes. On pouvait respecter la rigueur d'autant plus que les programmes officiels des Instituts techniques comprennent la théorie des nombres irrationnels et des limites, théories qu'on développe ordinairement avec soin. La notion des irrationnelles (qui entre aussi dans les programmes des lycées) est présentée ordinairement en suivant la méthode de M. *Dedekind* ou en partant de la représentation par les nombres décimaux illimités. »

Nous pouvons nous faire une idée, sinon exacte, du moins approchée du degré de rigueur, en jetant un regard sur la marche

[1] Conférence du Musée pédagogique, 1904, p. 163.

suivie dans l'introduction des nombres irrationnels, et des limites, sur l'établissement des théorèmes relatifs aux limites, sur les éclaircissements donnés au sujet de la dérivabilité et enfin sur la définition et l'emploi des différentielles.

a) *Nombres irrationnels.* Nous avons vu dans les phrases empruntées à M. *Castelnuovo* qu'en Italie on présente une théorie complète et impeccable des nombres irrationnels en ayant recours aux coupures de M. *Dedekind.* Dans d'autres États, on introduit les nombres irrationnels incidemment à l'occasion de l'extraction des racines et l'on ne s'attarde pas à construire une théorie générale. Par exception, quelques professeurs insistent, dans les classes supérieures des écoles allemandes, sur le développement sciende la notion de nombre, et dans un tiers environ des écoles autrichiennes on définit le nombre irrationnel par la méthode de M. *Dedekind.*

b) *Limites.* Nous avons demandé, pour mesurer le degré de rigueur, quel rôle on attribue à la notion de limite. Nous pouvons constater que, nulle part, on ne se contente de l'intuition, pas même — d'après les manuels scolaires employés — en France, où pourtant le programme dit expressément : « Le professeur laissera de côté les questions subtiles que soulève une exposition rigoureuse de la théorie des dérivées ; il aura surtout en vue les applications et ne craindra pas faire appel à l'intuition. »

M. le rapporteur anglais résume en une formule concise la marche la plus recommandable à mon avis : « State nothing but the truth, but do not necessarly state the whole truth. » Tandis qu'une définition précise des limites ne fait nulle part défaut, les théorèmes élémentaires relatifs aux limites sont adoptés, presque partout, sans explications. Ainsi on les mentionne à peine dans les écoles allemandes et suisses, pas du tout dans les écoles anglaises, danoises et françaises ; on les enseigne dans un tiers environ des écoles autrichiennes et dans toutes les écoles russes ; on les trouve dans un manuel scolaire hongrois pour le cas où les fonctions envisagées sont de la forme $f(x) = A + (x - a)^{\alpha}\ \varphi(x)$, la fonction $\varphi(x)$ étant bornée en valeur absolue dans le voisinage du point a, ce cas offrant le plus de facilité. A mon avis, on ne peut qu'approuver l'introduction claire de la notion de limite ; la passer sous silence serait absolument condamnable. Sans une définition précise des limites, seules les dérivées des fonctions rationnelles pourraient se déterminer, et encore cela n'irait pas sans faire souffrir la rigueur. Mais d'autre part, la notion de limite invervient si fréquemment au cours de l'enseignement secondaire et même dans le cycle inférieur (fractions décimales illimitées, aire du cercle, logarithme, série géométrique, etc.) que sa définition générale ne doit rencontrer aucune difficulté. Sa connaissance est indispensable à qui veut acquérir une culture générale mathématique et philosophique, objet de première importance pour tout l'enseignement secondaire. Je crois même qu'il existe à peine une notion mathématique qui l'égalerait pour l'influence sur le développement et l'expansion des habitudes de raisonnements exacts.

c) *Dérivabilité*. A la question du Comité central : *Signale-t-on l'existence de fonctions non dérivables*, les réponses étaient aisées à prévoir. Dans la plupart des écoles, on ne parle pas de fonctions non dérivables et là, où il en est question, comme par exemple dans quelques écoles allemandes, dans les écoles russes, dans un cinquième environ des écoles autrichiennes, dans un manuel scolaire anglais et dans certaines écoles suisses et hongroises, on se borne à dire qu'en *certains points* il n'y a pas de dérivée, parce que la sécante n'admet pas de position limite ; mais on ne fait même pas allusion à des fonctions continues, n'admettant nulle part de dérivées. Il va sans dire, et je crois exprimer ici une opinion unanime, que « la pathologie des fonctions » — pour employer l'expression de M. *Schœnflies* — n'est pas à sa place dans l'enseignement secondaire.

d) *Différentielles*. La notion de différentielle n'est pas introduite dans les écoles françaises et dans la plupart des écoles suisses, allemandes et hongroises. Parmi les manuels scolaires allemands, celui de MM. *Behrendsen* et *Götting* est le représentant le plus répandu des idées de réforme, et ce manuel ne mentionne pas les différentielles. Notre rapporteur anglais nous informe que, parmi les ouvrages employés, celui de *Lodge* adopte pour base les différentielles pour la raison qu'elles ont une importance capitale dans les applications géométriques et physiques et dans l'intégration considérée comme processus sommatoire et parce qu'elles sont plus facilement compréhensibles que la notion de dérivée, sans compter que les considérations d'ordre historique parlent en leur faveur. — Cependant, les autres manuels anglais se placent à un point de vue différent.

D'après M. le rapporteur russe : « on définit en Russie la différentielle d'une fonction, comme produit de la dérivée par l'accroissement arbitraire de la variable indépendante et l'on ne considère jamais le Calcul différentiel, comme Calcul approximatif. » On voit que ces idées s'accordent avec la définition *Cauchy*. C'est ce qu'on peut dire aussi du point de vue adopté, dans son manuel anglais, par M. *Gibson* qui définit la différentielle géométrique, à l'aide de la tangente, comme $f'(x)\,\Delta x$ et aussi des instructions du plan d'études projeté en Serbie, qui définit, d'une manière analogue, la différentielle d'une fonction de plusieurs variables.

Dans les écoles danoises, on parle de différentielles, mais les professeurs n'ont, en général, pas pris parti. Nulle part, le Calcul différentiel n'est considéré comme ayant un caractère d'approximation et il ne semble pas que les différentielles d'ordre supérieur aient trouvé des partisans. Notre rapporteur allemand écrit qu'on juge les différentielles de façons diverses. L'impression qui se dégage de la littérature est que les différentielles ont vécu. Pourtant, des mathématiciens s'occupant de calculs approximatifs, comme M. *Schülke* et ceux qui arrivent au Calcul différentiel par la voie de la Physique, comme M. *Richter*, penchent plutôt à la conservation des différentielles. Il est possible, quoique la littérature ne fournisse pas d'indications à cet égard, que, dans certaines écoles, on opère avec les différentielles comme si elles etaient des quantités déterminées.

Suivant les informations du rapporteur autrichien, les différentielles sont enseignées dans la moitié environ des établissements secondaires; on les considère comme des quantités infiniment petites, sauf un établissement où les différentielles ne remplissent que le rôle d'abréger les calculs approximatifs. M. le rapporteur est d'avis que les professeurs eux-mêmes n'ont pas une idée suffiment claire de ces choses.

Les opinions peu différentes des rapporteurs autrichiens et danois ne sont pas isolées. En effet, la littérature scientifique elle-même n'a pas pris nettement parti parmi les diverses définitions des différentielles. La définition de *Cauchy*, dont nous avons déjà parlé, présente l'avantage qu'une relation homogène quelconque entre les différentielles se ramène immédiatement à une relation entre les dérivées, il n'y a, pour cela, qu'à diviser par une puissance convenable de dx. Mais on définit souvent la différentielle d'une fonction $y = f(x)$ par l'égalité : $dy = [f'(x) + \eta]\, dx$ où dy désigne l'accroissement total de la fonction y pour l'accroissement dx de la variable indépendante et $\lim\limits_{dx=0} \eta = 0$. Si l'on adopte cette définition qui paraît convenir mieux aux applications géométriques et physiques, les relations homogènes existant entre les différentielles ne sont que des relations approchées qui ne deviennent exactes qu'en divisant par une certaine puissance de dx et en passant à la limite $dx = 0$. L'une ou l'autre de ces définitions, pourvu qu'on les applique conséquemment, apportent également la clarté et la précision dans les Mathématiques, mais nous sommes, je crois, unanimes *à désirer que le brouillard métaphysique de l'infiniment petit n'entre pas dans l'enseignement secondaire*. Je suis d'avis que la méthode la plus sage est de ne pas introduire du tout les différentielles dans l'enseignement secondaire. Cette vue est justifiée par la tendance qui veut les éliminer de toute la Science. Dans l'Encyclopädie der math. Wissenschaften (II. A. 2. p. 69), M. *Voss* écrit à ce sujet : « Les différentielles employées par *Leibniz* pour développer d'une manière simple le Calcul différentiel, sont *superflues* dans la théorie actuelle, quoiqu'elles soient difficiles à remplacer dans les notations usuelles du Calcul intégral, des équations différentielles et des applications géométriques et mécaniques. » C'était déjà l'avis de *D'Alembert*; *Poincaré* aussi se ralliait à ces vues dans sa conférence plusieurs fois citée. Combien paraît-il plus nécessaire de rejeter de l'enseignement les notions qui donnent lieu à tant de malentendus.

VI. — Fusion du Calcul différentiel et intégral avec les matières de l'enseignement secondaire.

Tous les pédagogues sont d'accord que, pour respecter l'ensemble harmonique et organisé de l'enseignement secondaire, les matières nouvelles réclamées par le mouvement réformiste ne doivent pas être placées, comme un supplément, à côté des matières anciennes, mais une fusion complète devra s'opérer entre elles. Le mouvement réformiste s'efforce, d'après M. *Klein*, de faire pénétrer d'un esprit nouveau les matières anciennes, plutôt que d'introduire des matières nouvelles [1]. M. *Timerding* manifeste une opinion pareille : « Nous insistons particulièrement sur le fait que les aspirations réformatrices ne tendent pas à faire suivre d'un cours de Calcul infinitésimal les matières enseignées en première, mais plutôt de faire entrer, dans toutes les parties de l'enseignement, les germes des notions du Calcul infinitésimal, germes qui ne manqueront pas, dans la suite, de se développer vigoureusement [2]. »

Conformément à ces vues répandues, la notion de fonction est préparée aujourd'hui avec soin depuis les classes inférieures : en insistant, dans l'enseignement de l'Arithmétique, sur les liaisons entre diverses grandeurs ; plus tard, au cours de l'enseignement algébrique, sur la représentation graphique des fonctions linéaire, quadratique et autres et, enfin, elle est préparée par l'introduction graduelle (lors même que le manuel y consacre un chapitre spécial) du Calcul différentiel et intégral. Je n'ai pas à exposer ici en détail les réponses se rapportant à ces questions. Toutes les réponses constatent que les matières nouvelles se sont fondues avec les anciennes. Seul le rapporteur russe est obligé d'écrire : Cette introduction n'est préparée dans les classes par aucune étude. Les nouvelles matières constituent un supplément tout nouveau au programme.

Pour opérer la fusion, plusieurs plans pourraient être adoptés : je n'ai qu'à rappeler le plan de Meran des professeurs allemands ; les plans d'études officiels de certains États allemands en particulier, ceux de Wurtemberg, Bavière et Bade publiés récemment parmi les brochures de la Commission internationale [3] ; les plans

---

[1] KLEIN-RIECKE, p. 26.

[2] TIMERDING, *Die Mathematik in den physik. Lehrbüchern*, p. 109.

[3] Neue Erlasse in Bayern, Würtemberg und Baden, von Lietzmann. Geck. Cramer Band. II. 8.

d'études français, italien (liceo moderno), autrichien ; les manuels scolaires traitant du Calcul différentiel et intégral. (Je remarque, entre parenthèses, qu'à mon avis, notre Commission ferait un travail utile en publiant dans un même volume les plans d'études mathématiques des divers États). En 1911, dans une école hongroise (école réale du IV^e arrondissement de Budapest), les professeurs de Mathématiques, présidés par le directeur de l'école, M. *Kopp,* lui aussi mathématicien, se sont mis d'accord sur un plan qu'il convient de suivre dans l'enseignement des matières du programme. Ce plan étant remarquable par le rôle élargi qu'il attribue à la notion de fonction et par la fusion heureuse qu'il opère entre le Calcul infinitésimal et le programme du reste des matières admises, je me permettrai ici d'en extraire quelques passages : dans les classes de 2^e et 3^e, on dresse des tables empiriques et on représente graphiquement ces tables (température, pression barométrique, lever et coucher du soleil, etc.) ; dans la 4^e, on représente des fonctions entières du premier et du deuxième degré et quelques fonctions rationnelles simples ; dans la 5^e, on étudie la signification graphique de l'équation $ax + by = c$, en faisant usage du quotient de différences qu'on écrit avec la notation $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et l'on résout graphiquement le système d'équations linéaires à deux inconnues sans oublier de mentionner que les méthodes graphiques ne peuvent pas rivaliser avec le calcul. On suit une marche analogue pour représenter les fonctions du second degré et pour résoudre les équations du deuxième degré. En 6^e, les fonctions 10^x et $\log x$ sont étudiées ; la représentation graphique fait voir que l'une est la fonction inverse de l'autre ; la représentation graphique est aussi utilisée pour les fonctions trigonométriques et pour l'interpolation linéaire. En 7^e apparaît le problème de la tangente, ce qui conduit à différentier d'abord les polynomes. Après avoir défini, d'une manière précise, la notion de limite, on détermine $\lim\limits_{x=0} \frac{\sin x}{x}$ et les dérivées des fonctions trigonométriques ; on passe ensuite aux notions de fonction primitive et d'intégrale définie et l'on exécute, comme applications, les calculs de volumes figurant sur le programme de cette classe. Enfin, en 8^e, où le programme porte sur les éléments de la Géométrie analytique, on applique, pour déterminer la tangente des coniques, la marche qui conduirait, en général, à la différentiation des fonctions implicites. Il est toujours bien entendu que les démonstrations ne doivent pas être inexactes ; il est permis d'admettre des théorèmes sans démonstration, mais il faut le dire. Je tiens pour le principal mérite du plan qu'il embrasse *peu* du Calcul différentiel et intégral, mais ce peu est bien ordonné, étudié à fond, élucidé par des applications et mis en harmonie avec le reste du programme. On m'a informé que ce plan modifié obtenait du succès et qu'il rendait les mathématiques plus faciles et plus aimées. Je ne crois pas me tromper en attribuant ce résultat à la sage modération.

La question de l'allégement. L'élargissement du rôle de la notion de fonction et l'introduction du Calcul différentiel et intégral ne peuvent produire le succès que si le programme ancien est réduit et s'il devient, dans son ensemble, plus économique. Ce dernier point n'a pas besoin d'explications. Des différentiations et des intégrations cachées interviennent si souvent dans l'enseignement mathématique et physique que leur remplacement par une méthode unique fait nécessairement gagner de temps et d'efforts. M. *Timerding* dit avec justesse que celui qui veut emporter du bois de la forêt fait mieux d'aller le chercher avec une voiture que d'emporter les morceaux un à un, à pied. L'amélioration de la méthode produit de l'allégement partout où le plan d'études choisit bien le moment d'enseigner les éléments du Calcul différentiel et intégral; si le choix n'est pas heureux, la simplification ne se fait sentir que dans l'enseignement de la Physique en y faisant usage des notions nouvelles. — En dehors de l'allégement qui vient de l'économie, il y a encore celui qui vient de la suppression de certaines parties du programme. Ainsi, en *Allemagne*, on désire supprimer les constructions compliquées des triangles et les formules trigonométriques difficiles et beaucoup y ajoutent l'analyse combinatoire et les nombres complexes (dans les gymnases), mais sur ces derniers points, les partisans de la réforme ne sont pas tous d'accord.

En *Autriche*, la moitié environ des écoles ne mentionne aucune suppression, le reste voudrait voir disparaître du programme les transformations algébriques artificielles et les équations et constructions compliquées. Il y en a qui suppriment les équations de Diophante, mais on est unanime à constater la simplification qu'apportent les éléments du Calcul différentiel et intégral.

En ce qui concerne les écoles *danoises*, j'ai déjà parlé de la question de l'allégement, en remarquant qu'elles pouvaient choisir entre deux programmes. En *France*, on trouve des avantages dans la simplification générale des méthodes et surtout dans les applications, notamment en Mécanique; le Calcul des aires et volumes se fait avant l'exposition des éléments du Calcul intégral par les méthodes élémentaires anciennes. En *Hongrie*, les partisans de la réforme sont d'avis qu'on peut supprimer les formules trigonométriques compliquées (établies en vue des calculs logarithmiques) et les équations compliquées et artificielles (les constructions compliquées étant déjà éliminées), mais que l'allégement proviendra surtout du contact intime des enseignements algébrique et géométrique, de l'élargissement du rôle de la notion de fonction et de l'économie produit par l'introduction des éléments du Calcul différentiel et intégral. En *Angleterre*, on attend de l'allégement, en Algèbre, dans les méthodes commerciales du Calcul (obsolete commercial rules) et, en Géométrie, dans l'enseignement formel. En *Russie*, les matières de l'enseignement mathématique de la classe la plus haute ont été remplacées, en grande partie, par le Calcul différentiel et intégral. Ainsi, la revision générale, la divisibilité des nombres, les fractions décimales illimitées, les equations du second degré, la décomposition d'un polynome en facteurs, certaines parties de la théorie des équations, construction des racines de l'équation du deuxième degré, le dessin projectif, etc. sont supprimés. En *Suisse*, on voit un allégement dans la simplification des méthodes.

Ainsi, dans tous les Etats, on cherche à réaliser les réformes de façon à éviter le surmenage des élèves et on attend de la transformation des programmes une amélioration des méthodes apportant un allégement dans l'enseignement. De plus, on espère arriver à une réduction en revisant minutieusement les matières actuellement enseignées. Les détails sacrifiés ne représentent une perte considérable ni pour la culture mathématique générale, ni surtout pour les applications pratiques.

VII. — Le mouvement réformiste et l'opinion publique des pédagogues.

Sur la question de l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire, l'opinion publique des pédagogues s'est prononcée non en paroles, mais en actes, lorsque, dans presque tous les Etats qui ont adopté dernièrement un nouveau plan d'études, elle attribuait une place plus ou moins importante au Calcul différentiel et intégral et que, dans d'autres Etats, elle le faisait entrer dans l'enseignement avec le consentement tacite ou exprès des autorités. Pourtant, la Commission ne se dissimule pas que d'une part le succès, et d'autre part, l'opinion publique éveillée des représentants de l'enseignement peuvent seuls assurer le caractère définitif des résultats; c'est pourquoi elle avait rédigé ainsi la dernière question :

Quels sont les résultats obtenus? La réforme est-elle reconnue comme nécessaire? Dans quelle mesure rencontre-t-elle de l'approbation ou de l'opposition? En particulier, quelle est l'opinion des représentants des mathématiques et de la physique?

Comme premier résultat, il est à signaler, d'après le rapporteur *anglais*, que les questions posées aux examens d'Université exigent une connaissance de plus en plus approfondie du Calcul différentiel et intégral, et cela ne manquera pas d'agir comme un puissant levier sur l'enseignement secondaire qui se développe avec une entière liberté. Un seul inconvénient peut en résulter, c'est que la pratique des Calculs algébriques en souffrira. Mais l'obstacle le plus grand qui empêche la diffusion des réformes, c'est — d'après M. le rapporteur — toujours l'inertie.

M. le rapporteur *autrichien* nous informe qu'à la question : l'introduction du Calcul différentiel et intégral est-elle un progrès ? deux tiers environ des établissements secondaires ont répondu affirmativement, un sixième négativement et le reste n'a pas manifesté d'opinion. On constate qu'en général les physiciens se montrent plus favorables aux réformes que les mathématiciens purs (y compris les représentants de la Géométrie descriptive). Il y en a qui se plaignent de surmenage et qui craignent que cette partie des Mathématiques ne devienne un formalisme vide de tout sens. Les mathématiciens appartenant à l'enseignement supérieur sont plus réservés encore. Selon eux, il faut, pour suivre l'enseignement supérieur, une certaine habileté dans le Calcul, une habitude de manier les formules et une capacité de saisir des raisonnements enchaînés. Les cours de Calcul différentiel et intégral de l'Université et de l'Ecole technique supérieure ne profiteraient pas d'un cours élémentaire où les mêmes matières auraient été traitées. Ces remarques visent ceux des élèves qui se destinent aux carrières techniques ou à la carrière de mathématicien. Mais la majorité des élèves n'est pas dans ce cas et c'est à eux que pense M. le rapporteur, en disant que « donner aux futurs mathématiciens et aux futurs ingénieurs la préparation nécessaire et l'habileté de Calcul indispensable et, en même temps, faire acquérir aux autres élèves les éléments mathématiques de la culture générale, c'est là un problème grave qui n'a pas encore reçu de solution.

En *Danemark*, où le désir unanime des professeurs a été la cause de l'introduction du Calcul différentiel et intégral, on considère l'innovation comme un progrès incontestable, et les élèves, qui y apportent un intérêt très vif, acquièrent vite une habileté dans le Calcul différentiel et intégral, non sans le trouver difficile dans l'établissement logique des principes.

D'après M. le rapporteur *français*, « l'introduction d'éléments de Calcul infinitésimal est universellement approuvée, pourvu qu'on évite certaines exagérations, c'est-à-dire qu'on écarte les difficultés logiques en faisant appel à l'intuition et que l'on se borne à donner les notions élémentaires et précises suffisantes pour les applications usuelles. » Le rapporteur s'est aussi adressé au Président de l'Union des Physiciens, qui écrit : « L'avis de mes collègues est tout à fait favorable au maintien dans les programmes de ces notions sommaires, qui ne paraissent pas d'ailleurs présenter pour nos élèves de difficultés sérieuses. »

M. le rapporteur *russe* nous informe que « la plupart des représentants des Mathématiques considèrent l'introduction des éléments du Calcul infinitésimal comme utile et même nécessaire et demandent que cette réforme du programme soit accomplie dans les gymnases. Mais on n'est pas d'accord ni sur la manière dont cette réforme a été faite, ni sur les résultats obtenus. Les uns disent que les élèves suivent avec un grand intérêt les nouvelles méthodes et sortent de l'école mieux préparés qu'autrefois. Les autres signalent quelques défauts de la réforme, comme le surmenage; ils se plaignent de ce que la préparation aux matières nouvelles ne soit pas faite dans les classes inférieures, de ce que la plupart des élèves n'apprennent que des procédés mécaniques de Calcul différentiel et intégral, sans y voir le fond, et de ce que les Mathématiques élémentaires, jadis enseignées dans les classes supérieures, sont oubliées aujourd'hui, etc. » De tout cela, M. le rapporteur conclut que la réforme de 1907 ne saurait être définitive et qu'une réorganisation complète de tout l'enseignement secondaire est devenue une nécessité.

M. le rapporteur *suisse* observe que les professeurs appartenant à l'enseignement secondaire sont contents de la réforme pour des raisons scientifiques, vu l'importance extrême de la notion de fonction au double point de vue théorique et pratique, pour des raisons psychologiques, parce que les matières nouvelles peuvent servir de centre à tout l'enseignement mathématique et enfin, pour des raisons économiques, parce que l'introduction du Calcul différentiel et intégral élimine les méthodes élémentaires plus difficiles.

Les professeurs des écoles techniques supérieures *suisses*, tout en approuvant le mouvement réformiste et surtout la mise en relief de la notion de fonction et la réduction, dans leurs parties superflues, des programmes traditionnels, ne préconisent pas l'enseignement du Calcul différentiel et intégral dans les établissements secondaires, cet enseignement ne faisant qu'aggraver la tâche des écoles techniques supérieures.

Parmi les professeurs *hongrois*, la plus grande partie regarde avec sympathie le mouvement réformiste, mais une minorité estime que le Calcul différentiel et intégral devrait être enseigné seulement aux élèves bien doués pour les Mathématiques et non à des classes entières. La majorité des professeurs de l'enseignement secondaire et, avec eux, plusieurs professeurs d'Université, tiennent au contraire comme nécessaire l'introduction du Calcul différentiel et intégral d'abord, pour des raisons de culture générale et puis, comme il a été déjà dit, pour des raisons économiques, pédagogiques et pratiques. Qu'il me soit permis de citer ici l'opinion exprimée au sein de notre Commission par M. *Czakó*, membre d'élite du corps des ingénieurs hongrois, professeur et actuellement doyen à l'École royale polytechnique de Budapest.

Il ne croit pas que l'enseignement du Calcul différentiel et intégral des établissements secondaires puisse influer sur l'enseignement mathématique donné à l'École polytechnique : celui-ci, en effet, ne se contenterait pas des notions sommaires acquises par les élèves. Mais l'enseignement de la Mécanique pourrait être commencé et terminé plus tôt sur la base de l'enseignement secondaire nouveau et cela serait, conformément à un vœu depuis longtemps exprimé des ingénieurs, éminemment désirable dans l'intérêt des élèves-ingénieurs.

Quoi qu'il en soit, ajoute M. *Czakó*, l'importance capitale des tendances rénovatrices réside dans le fait que leurs effets se feront sentir, par l'éducation reçue aux établissements secondaires, sur l'ensemble des classes dirigeantes. Parce que, plus encore que faire progresser l'enseignement technique, l'école secondaire doit se proposer la formation des esprits qui n'embrasseront pas les carrières techniques et qui, par la force du nombre, occuperont la plus grande partie des places dirigeantes dans la société. Ces esprits ont besoin de comprendre les phénomènes par lesquels se manifeste la marche de la civilisation humaine ; et pour résoudre les problèmes toujours nouveaux posés par la civilisation en marche, il leur faut trouver des voies nouvelles et des moyens appropriés.

Il me reste à résumer les observations du rapporteur *allemand*. Je fais ce résumé à dessein après les autres pour les terminer avec la réponse que M. *Klein*, notre président, a adressée au rapporteur allemand. D'après M. *Lietzmann*, les professeurs sont contents, en général, des résultats et les considèrent comme un progrès ; mais les mathématiciens appartenant à l'enseignement supérieur ne sont guère partisans des réformes, quoique peu d'entre eux s'y montrent résolument hostiles. Voici comment s'exprime M. *Klein* à ce sujet :

« Ce n'est pas aux professeurs de Mathématiques des Universités, mais c'est aux professeurs de Mathématiques des Écoles techniques supérieures et aux professeurs de Physique des Universités qu'il appartient de se prononcer. Ceux-là, en premier lieu, ont à compter avec l'éducation mathématique moyenne des élèves arrivant à l'Université. Comment envisagent-ils l'introduction du Calcul infinitésimal ? Je suis convaincu qu'un grand nombre d'entre eux n'a aucune connaissance de l'état actuel des choses. Et il y a encore une autre raison, pour laquelle beaucoup de mathématiciens des Universités se prononcent contre l'introduction du Calcul infinitésimal dans l'école. C'est l'inexactitude ou le manque de rigueur avec lesquels le Calcul infinitésimal est présenté dans certains manuels scolaires récents. On en conclut que le sujet est trop difficile pour l'école.

A cela, on peut répondre que pareils défauts se rencontrent dans d'autres chapitres aussi des manuels scolaires, en particulier, dans l'exposition avec les méthodes de l'Analyse algébrique des séries infinies. La situation défectueuse s'explique non par les difficultés inhérentes à la matière, mais par le fait qu'un grand nombre des professeurs des écoles secondaires sont trop absorbés par les exigences pratiques de l'enseignement pour pouvoir porter leur attention sur les questions de la rigueur.

Par contre, les mathématiciens de l'Université ont la tendance de ne voir dans un manuel scolaire que les incorrections et ils négligent de juger la marche méthodique de l'exposition et l'adaptation du livre à l'intelligence des élèves. Ces deux états d'esprit ont éloigné les professeurs des écoles secondaires de ceux des Universités à tel point que le contact entre eux était très rare pendant des dizaines d'années. Maintenant que les questions du Calcul infinitésimal intéressent les deux parties, les divergences de vue se manifestent de nouveau et avec une ardeur qui crée des difficultés inutiles mais qui s'explique par le passé impossible à supprimer. Il faut, en y réfléchissant, nous réjouir de ce qu'une rencontre a été provoquée par la réforme de l'enseignement mathématique, réforme à laquelle l'introduction du Calcul infinitésimal donne son caractère distinctif. Plus les discussions sont vives, plus il y aura de chances que la séparation regrettable qui existe entre les milieux de l'enseignement secondaire et supérieur, et qui fait souffrir l'instruction publique, doive enfin disparaître. »

*
* *

Tous les rapports font ressortir que le rôle élargi de la notion de fonction et l'introduction du Calcul différentiel et intégral ont rencontré partout la sympathie des professeurs de l'enseignement secondaire. En plusieurs endroits, là surtout où les réformes ont été accomplies sur *l'initiative des professeurs, avec leur concours actif ou même par le choix libre de leur volonté*, cette sympathie allait jusqu'à l'enthousiasme. Ils mettent leur ambition à bien enseigner les matières nouvelles et s'ils savent garder la mesure, s'ils ont de bons livres à leur disposition, s'ils peuvent vaincre les difficultés de méthode par une main sûre et par une science profonde, les résultats acquis ne manqueront pas d'égaler leur zèle.

Il est à regretter seulement que les professeurs appartenant à l'enseignement supérieur ne regardent pas toujours avec sympathie le mouvement réformiste. Notre président en a mis en lumière les raisons. Les professeurs d'Université, ennemis des réformes, les envisagent de leur point de vue spécial. Nous entendons la plainte éternelle qu'un cours de Calcul différentiel et intégral n'est pas suivi avec intérêt par celui qui en a déjà quelques connaissances. Pareils scrupules se présentaient toujours dans d'autres branches aussi. J'ai entendu parler d'un professeur de Physique qui commençait son cours en invitant ses auditeurs à oublier tout ce qu'ils avaient appris de la Physique dans l'école secondaire. J'ai connu un chimiste qui, dans l'intérêt de l'enseignement supérieur, s'opposait à l'introduction de la Chimie dans l'enseignement secondaire. Un professeur de la Géométrie descriptive préférait les élèves sortant du gymnase à ceux qui avaient étudié la Géométrie descriptive pendant quatre ans dans l'école réale. Je crois que des exemples pareils abondent dans tous les pays. Le scrupule du mathématicien n'est donc pas nouveau et il est aussi dénué de fondement que les autres.

Le professeur d'Université a précisément pour tâche, après s'être rendu un compte exact de l'état d'instruction de ses élèves, d'éclairer d'un jour nouveau leurs connaissances et de bâtir ensuite sur ce fondement reconnu. Si l'école secondaire garde une sage mesure et ne veut pas se hausser à l'égal de l'Université, cette tâche ne sera point difficile. *Par l'étendue, le degré de généralité, la rigueur des méthodes, et par tout le vaste champ des applications, les deux enseignements se distingueront toujours. Ils se distingueront aussi par la personnalité des professeurs, par l'intelligence et la maturité des élèves.* Et ces différences sont si profondes, pour des raisons pédagogiques et scientifiques, qu'il ne peut pas être question d'un relâchement de l'intérêt si l'enseignement supérieur est à la hauteur de sa tâche. L'enseignement secondaire doit respecter les besoins de l'enseignement supérieur et celui-ci doit connaître les méthodes en usage dans l'enseignement secondaire. S'il en est ainsi, la connaissance des principes du Calcul différentiel et intégral servira de base aux développements ultérieurs, tout comme un enseignement intuitif de la Géométrie est la base de l'étude systématique de la Géométrie, la Physique expérimentale celle de la Physique théorique, l'enseignement secondaire de l'Histoire politique celle de l'enseignement supérieur de l'Histoire des lois et des institutions; bref, comme l'enseignement d'un cycle inférieur précède et prépare l'enseignement du cycle supérieur.

C'est plus qu'il ne faut pour attirer l'attention des professeurs d'Université sur les aspirations réformatrices et pour les engager — comme ils en ont donné l'exemple dans plusieurs pays — à donner une direction à l'enseignement secondaire du Calcul infinitésimal. Jusqu'à présent, ils se sont laissé guider à peu près uniquement par des considérations ayant trait à leur spécialité. Cependant, comme beaucoup de rapporteurs l'ont fait observer, notre question n'est pas celle des futurs ingénieurs et mathématiciens, mais celle de la culture générale. Elle est la question — j'y insistais dans l'Introduction — du développement de l'habitude des raisonnements exacts, de la pénétration de l'esprit mathématique dans toute la civilisation moderne. « Dans l'enseignement secondaire — dit M. *Liard* — les études scientifiques doivent, comme les autres, contribuer à la formation de l'homme. Elles sont donc, elles aussi, à leur façon, des « humanités » au sens large du mot, les « humanités scientifiques ».

En envisageant la question de ce point de vue, il est impossible que les maîtres de l'enseignement supérieur, les plus hauts représentants de la civilisation humaine, ne s'associent à nos vœux qui tendent à faire répandre dans le cercle le plus large possible, parmi tous les hommes qui cultivent la Science, la connaissance du Calcul infinitésimal qui est la Science du changement, principe éternel du monde, qui est l'instrument indispensable de tout raisonnement scientifique et qui, enfin, représente une création magnifique de l'esprit humain.

J'emprunte l'image à un récent discours éloquent de M. le Président de la République française, qui parlait du rôle de l'épée et de la plume, et je dirai que l'enseignement secondaire aussi a un triple devoir : Glorifier le passé, honorer le présent et préparer l'avenir. A mesure que nous avançons parmi ces devoirs de l'école, le rôle des Mathématiques se fait de plus en plus haut dans l'ensemble des humanités. Nous voulons préparer l'avenir en formant la jeunesse pour la vie active et pour la pensée scientifique.

Heureusement, notre mouvement réformiste trouve, parmi les professeurs d'Université de tous les pays, des appuis forts qui l'ont fait naître, qui l'ont doté de manuels scolaires et qui en répandent, dans leurs cours, les idées rénovatrices. Il est à désirer que tous les professeurs appartenant à l'enseignement supérieur connaissent ce mouvement qui n'est pas — comme M. *Gutzmer*, collaborateur dévoué de notre président, l'a dit au Congrès de Rome — une révolution, mais qui est une étape de l'évolution. Oui, nous travaillons par ces réformes non seulement au progrès de l'enseignement mathématique, mais aussi à l'évolution de toute l'éducation. Nous attendons de l'évolution de l'enseignement mathématique une forte discipline logique, une intuition féconde, un vif intérêt pour les questions pratiques, le sentiment des réalités, l'appréciation juste des faits, la méthode critique, l'habitude du travail indépendant et par-dessus tout : la connaissance et l'amour de la vérité. Tout cela ensemble fait l'idéal suprême de l'éducation, la question primordiale de la civilisation. Pour servir cet idéal, pour résoudre cette question, les professeurs des enseignements secondaire et supérieur doivent concentrer tous leurs efforts ; s'ils le font l'avenir sera bien préparé.

Annexe : Nous reproduisons, à titre documentaire, le questionnaire qui a servi de base à l'enquête de M. le Prof. BEKE.

Questionnaire pour la Sous-Commission A sur l'introduction des premières notions de Calcul différentiel et intégral dans les Ecoles moyennes.

Remarques préliminaires. — 1. Le Comité central pose ces questions de manière à être renseigné sur les matières et la méthode d'exposition de cet important chapitre du plan d'études de l'enseignement moyen. Il tient à rappeler à nouveau qu'il ne prend pas parti pour une tendance déterminée, mais qu'il se propose avant tout de mettre en lumière les divers points de vue et les résultats obtenus.

2. — Nous entendons par écoles moyennes les établissements de l'enseignement secondaire supérieur désignés sous les noms de lycées, gymnases classiques ou réaux, ou établissements similaires des divers pays. Il serait utile d'avoir aussi des renseignements sur ce qui ce fait dans les écoles normales d'instituteurs, s'il y a lieu.

I. — *Dans quelle mesure a-t-on introduit les premiers éléments de Calcul différentiel et intégral dans les écoles moyennes de votre pays ?*

Nous désirons notamment être renseignés sur les points suivants :

a) Le Calcul différentiel est-il limité aux fonctions d'une variable ou considère-t-on aussi des fonctions de plusieurs variables ?

b) Quelles sont les fonctions auxquelles on applique le Calcul différentiel ?

c) Fait-on du Calcul intégral ? si oui, suivant quel programme ?

d) Expose-t-on le théorème de Taylor ?

e) Intègre-t-on des équations différentielles simples ? Lesquelles ?

II. — *Quel est le degré de rigueur dont on fait usage dans l'introduction des concepts fondamentaux et dans les démonstrations ?*

a) Se contente-t-on d'une introduction géométrique au Calcul différentiel, sans adopter d'une façon expresse la notion de limite, ou utilise-t-on cette notion ? Dans l'affirmative, est-ce que l'on présente une démonstration rigoureuse, ou envisage-t-on comme évidents des théorèmes tels que celui-ci : $\lim \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim a}$?

b) Fait-on usage des différentielles ? Dans l'affirmative présente-t-on le Calcul différentiel comme une sorte de calcul approximatif, ou calcule-t-on avec des infiniment petits comme avec des grandeurs existant effectivement ?

c) Dans le théorème de Taylor tient-on compte du reste ou non ?

d) Signale-t-on l'existence de fonctions non dérivables ?

e) La notion de nombre irrationnel est-elle présentée sous une forme rigoureuse, ou se contente-t-on de parler seulement occasionnellement des nombres irrationnels, par exemple à l'occasion du calcul des racines ?

III. — *Quelles sont les considérations méthodiques que l'on suit dans l'introduction au Calcul différentiel et intégral ?*

a) Cette introduction est-elle déjà préparée dans les classes précédentes par une étude appropriée des fonctions simples et de leur représentation graphique, de manière que ces nouvelles matières ne constituent pas un supplément au programme, mais comme un chapitre qui se rattache étroitement à ce qui a déjà été vu.

b) Emploie-t-on la notation différentielle de Leibniz, ou bien les dérivées et les intégrales sont-elles désignées autrement ?

c) Commence-t-on l'exposé par le Calcul différentiel ou par le Calcul intégral, ou étudie-t-on simultanément les deux ?

d) L'intégrale est-elle présentée comme limite d'une somme (intégrale définie) ou comme fonction primitive (intégrale indéfinie) ? Si l'on opère des deux manières, dans quel ordre et dans quel lieu expose-t-on ces deux notions ?

e) Fait-on usage d'un manuel ? Quels sont les ouvrages caractéristiques dont on tient compte ? (Indication complète du titre, de l'éditeur et de l'édition).

IV. — *Quelles sont les applications du Calcul différentiel et intégral que l'on donne dans ce premier enseignement ?* Telles questions d'analyse, de géométrie ou de physique utilisant la notion de limite et qui, par leur importance, se trouvaient déjà partiellement ou entièrement introduites dans l'enseignement, sont-elles maintenant attachées directement à l'étude du Calcul différentiel et intégral, de manière à obtenir un exposé plus économique des matières à étudier ?

Nous signalons notamment les points suivants :

a) La théorie des maxima et minima.

b) Si l'on étudie la série de Taylor, quelles sont les fonctions dont on fait le développement en série entière ?

c) Au cas où l'on tient compte du reste dans la série de Taylor, fait-on usage des séries entières pour l'interpolation, l'extrapolation ou pour le Calcul des erreurs ?

d) Au cas où l'on étudie le Calcul intégral, applique-t-on celui-ci au calcul des aires (par exemple de la parabole, de l'ellipse) et au calcul des volumes ?

e) Pour quels concepts fondamentaux de la Mécanique, (vitesse, accélération travail, moment d'inertie, etc.) fait-on usage du Calcul différentiel et intégral ?

f) De la même manière en Physique, en particulier pour l'optique (courbes enveloppes, etc.) et en Électrodynamique (lignes de force, etc.).

V. — *L'introduction du Calcul différentiel et intégral a-t-elle amené un allègement du plan d'études en supprimant d'autres théories ? Dans l'affirmative, de quelle manière ?*

VI. — *Quels sont les résultats obtenus par l'introduction du Calcul différentiel et intégral ? Est-elle reconnue comme une réforme nécessaire ? Dans quelle mesure rencontre-t-elle de l'approbation ou de l'opposition ?* En particulier quelle est l'opinion des représentants des mathématiques et de la physique ?

Si vous avez à signaler d'autres observations ou remarques concernant l'enseignement du Calcul différentiel et intégral, veuillez en faire mention dans votre réponse à cette place.

Quels sont les passages des rapports publiés par votre sous-commission concernant la question de l'enseignement du Calcul différentiel et intégral ?

II

L'ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT DU CALCUL DES DÉRIVÉES ET DES FONCTIONS PRIMITIVES DANS LES LYCÉES DE FRANCE ET SUR LES RÉSULTATS OBTENUS

Rapport présenté à la séance du 2 avril 1914.

PAR

Ch. BIOCHE

Professeur au Lycée Louis-le-Grand (Paris).

Ce rapport doit compléter ce qui a été exposé dans les volumes publiés en 1911 par la Sous-commission française, et ce qui a été répondu à M. le Rapporteur Général pour la question A. Je me trouverai obligé de reprendre un certain nombre de choses déjà dites pour éviter de renvoyer à des textes dispersés : mais je serai aussi bref que possible, des explications complémentaires pouvant être données au cours de la discussion.

1. — Si on néglige quelques faits exceptionnels que j'ai signalés dans le rapport intitulé : « Sur la place et l'importance des mathématiques dans l'enseignement secondaire en France », on peut dire qu'avant 1902 les dérivées étaient réservées au cours d'enseignement supérieur ou à ceux de la classe dite de *Mathématiques spéciales*.

En 1902, la notion de dérivée a été introduite dans l'enseignement secondaire proprement dit ; le programme de *Seconde* C et D (élèves de 14 à 15 ans) contenait cet article :

« Notion de la dérivée ; signification géométrique de la dérivée. Le sens de la variation est indiqué par le signe de la dérivée ; application à des exemples numériques très simples. »

En 1912, les notions sur les dérivées ont été supprimées du programme de *Seconde* et reportées en *Première*. Voici en entier le programme actuel de *Première* C et D :

« Equation et trinôme du second degré. Exemples numériques où la variable peut être une ligne trigonométrique. Notion de la dérivée ; signification géométrique de la dérivée, le signe de la dérivée indique le sens de la variation ; application à la variation des fonctions

$$\frac{ax+b}{a'x+b'}, \qquad ax^2+bx+c \qquad ax+b+\frac{c}{x}$$

et à la variation de de la fonction

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

où les coefficients sont numériques.

« Étude d'un mouvement rectiligne, uniforme ou uniformement varié. Définition de la vitesse et de l'accélération dans le mouvement rectiligne par les dérivées. »

On voit que le programme précise les fonctions simples auxquelles on doit se borner dans la classe de première. Pour ces fonctions l'expression $F(x+h) - F(x)$ contient explicitement h en facteur; on peut donc simplifier le quotient $\frac{F(x+h) - F(x)}{h}$ et obtenir une expression qui a une valeur bien déterminée lorsqu'on y fait $h = 0$.

Dans la classe de *Mathématiques*, où entrent les élèves[1], après avoir subi une première série d'épreuves, pour se préparer à la seconde série du baccalauréat, on est conduit à des dérivées pour le calcul desquelles intervient la notion de limite; on établit, par exemple, que le rapport du sinus à l'arc tend vers 1 quand l'arc tend vers 0, ce qui se fait facilement en montrant que

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

il y a donc à ce point de vue une différence bien nette entre les dérivées considérées en *Première* et celles qui sont réservées pour la classe de *Mathématiques*. Voici la partie du programme qui est relative aux dérivées et aux fonctions primitives :

« Dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de la racine carrée d'une fonction, de $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$.

Application à l'étude de la variation, à la recherche des maxima et minima de quelques fonctions simples, en particulier des fonctions de la forme

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}, \qquad x^3 + px + q$$

où les coefficients ont des valeurs numériques.

Dérivée de l'aire d'une courbe regardée comme fonction de l'abscisse on admettra la notion d'aire . »

Je dois citer une note précisant l'esprit de l'enseignement des matières précédemment énumérées. « Le professeur laissera de côté toutes les questions subtiles que soulève une exposition rigou-

---

[1] La limite d'âge pour la première partie du baccalauréat est 16 ans ; cependant les élèves approchant de cette limite obtiennent facilement une dispense d'âge.

reuse de la théorie des dérivées ; il aura surtout en vue des applications et ne craindra pas de faire appel à l'intuition.

Je crois devoir mentionner la classe de *Mathématiques spéciales* sans donner ici beaucoup de détails, parce que cette classe n'a pas d'analogue dans l'enseignement moyen en dehors de la France. En *Mathématiques spéciales* on introduit la rigueur dans les questions de limites ; les nombres incommensurables sont définis au moyen de la notion de coupure ; on étudie les infiniments petits ; on emploie la notation différentielle de Leibniz ; on fait la théorie logique de l'intégrale définie avec de nombreuses applications géométriques et mécaniques ; on donne des propriétés fondamentales des séries entières[1]; on intègre certaines équations différentielles : équations du premier ordre où les variables se séparent, équations différentielles linéaires du premier ordre, équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants.

2. — L'introduction des dérivées dans l'enseignement élémentaire telle qu'elle résulte de ce que je viens de dire, a donné dans l'ensemble de bons résultats. La notion de dérivée, quand on évite les subtilités logiques, semble très accessible aux élèves ; ceux-ci s'intéressent aux applications et arrivent facilement à étudier des fonctions simples. Je cite pour préciser des types de questions qui ont été traitées par des élèves de lycées, et qui semblent bien correspondre à ce qu'on peut demander à ceux-ci.

I. Devoir donné dans une classe de 1re C (élèves de 15 à 16 ans).

Etudier les variations de la fonction

$$y = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

et construire la courbe représentative. Dire combien l'équation $y = m$ admet de racines, m désignant un nombre donné quelconque.

II. Composition donnée dans une classe de *Mathématiques* (16 à 17 ans) [durée de la composition : 2 heures et demie.]

On considère le solide formé par un cône SAA′ et un cylindre ABB′A′ ayant la même longueur de génératrice SA = AB = a.

Soit x la hauteur SH du solide.

1° Exprimer le volume V du solide au moyen de a et de x.

2° Trouver pour quelles valeurs de x le volume V est maximum.

Calculer ce maximum en Hectolitres dans le cas où $a = 1^{m}$.

3° Construire la courbe qui représente les variations de la fonction

$$y = \frac{3V}{\pi a^3}$$

en représentant a par l'unité de longueur graphique.

[1] La théorie des séries entières permet d'éviter les complications qu'entrainait la considération du reste, pour le développement de certaines fonctions d'après la formule de Taylor. Par exemple, pour développer L$(1 + x)$, on considère maintenant le développement de $\frac{1}{1+x}$ et on intègre.

4° Calculer l'aire comprise entre la courbe et la corde, joignant le point d'abscisse 1 au point d'abscisse 2.

5° Déduire de la considération de la courbe combien il y a de valeurs de x pour lesquelles y reprend une valeur donnée. Calculer les valeurs de x qui correspondent à $y = 3$.

3. — Beaucoup de formules de mécanique ou de physique peuvent se démontrer maintenant dans les classes des lycées sans qu'on ait besoin de recourir aux procédés ingénieux, mais souvent bien compliqués ou artificiels, qu'on était obligé d'employer autrefois. On trouvera l'opinion des professeurs exprimée dans la lettre dont je vais donner des extraits. Cette lettre est de mon excellent collègue M. Wallon, professeur au Lycée Janson de Sailly, Président de l'Union des Physiciens ; celui-ci a bien voulu, avant de m'écrire, prendre l'avis de ses collègues constituant le bureau de l'Union, de sorte que le témoignage de M. Wallon a une autorité toute particulière.

« Nous nous sommes trouvés d'accord pour penser que l'introduction dans l'enseignement secondaire des notions élémentaires de calcul différentiel et intégral, nous avait rendu service et pour en souhaiter le maintien. Tel de nos collègues qui est, en même temps que d'un cours dans un lycée de Paris, chargé dans un lycée de jeunes filles de conférences complémentaires, nous signalait qu'à ces jeunes filles il était obligé, pour les besoins de son enseignement, de donner ces notions élémentaires. Et tous ceux d'entre nous qui ont eu autrefois à faire, en *Mathématiques élémentaires* par exemple, quelques leçons de mécanique, se trouvaient dans la même obligation ; seulement il leur arrivait souvent de ne pas appeler les choses par leur nom ! Il fallait bien tout de même montrer aux élèves, dans l'étude du mouvement uniformément varié, que l'équation donnant les vitesses en fonction du temps et l'équation donnant les distances à l'origine se déduisaient nécessairement l'une de l'autre ! Et je pourrais citer d'autres exemples.

« Il est certainement avantageux pour nous, de trouver nos élèves capables d'utiliser dans les cas, simples d'ailleurs, où nous en avons besoin avec eux, les méthodes de calcul dont il est question. Les comprennent-ils bien ? Ceci est autre chose, mais je puis dire que nous les y aidons, et nous pouvons, à cet égard, invoquer leur témoignage même ; nous leur fournissons, en effet, l'occasion d'appliquer à des choses concrètes, des notions un peu bien abstraites.

« Vous le voyez, l'avis de nos collègues est tout à fait favorable au maintien dans les programmes de ces notions sommaires qui ne nous paraissent pas d'ailleurs, pour des élèves de cet âge, présenter des difficultés sérieuses. »

Je vais maintenant exposer ce qui me semble être *l'opinion générale des professeurs de Mathématiques*, (opinion qui s'accorde bien avec celle de leurs collègues de physique, de façon à formuler la *conclusion* de ce rapport.

Pour donner de bonnes habitudes aux élèves, il semble utile de ne pas faire commencer l'enseignement des dérivées au moment même où l'on donne les premières notions sur les fonctions. On constate en effet, souvent, que les élèves ont trop facilement tendance à s'imaginer qu'une fonction ne peut être étudiée sans qu'on n'ait besoin d'employer la dérivée. Cet abus ne se manifeste pas seulement dans les classes de l'enseignement secondaire, car on en trouve bien des exemples dans des concours où les concurrents ne sont plus des débutants en Mathématiques. L'introduction des dérivées dans le programme de *Seconde* telle qu'elle a été faite en 1902 a été, dès cette époque, jugée quelque peu prématurée par bien des professeurs. La modification apportée en 1912 et qui consiste à ne donner les notions sur les dérivées qu'à partir de la classe de *Première* conduit à un plan d'études qui se trouve bien gradué : les trois années, à partir du début du deuxième cycle, sont en effet nettement caractérisées.

I. — En *Seconde*, âge de 14 à 15 ans, les élèves doivent étudier directement des fonctions simples

$$ax + b \qquad ax^2 + bx + c \qquad \frac{ax + b}{a'x + b'}$$

et se familiariser avec les notions de variation et de représentation graphique.

II. — Ces notions acquises facilitent l'exposition donnée en *Première* des principes essentiels de la théorie des dérivées en faisant appel à l'intuition et en se bornant à des cas simples précisés au programme.

III. — En *Mathématiques* le champ d'études s'élargit encore : à ce moment les élèves arrivent facilement à pouvoir traiter les applications simples qui se rencontrent dans les problèmes de mécanique ou de physique ; par exemple, dans ma classe de *Mathématiques*, je discute les différentes formes que peut prendre la courbe correspondant à l'équation de Van der Waals et j'établis la formule qui donne le moment d'inertie d'une sphère par rapport à un diamètre ; mon collègue de physique traitant dans son cours les questions correspondantes, relatives à la théorie des gaz et au pendule composé.

En résumé, il semble bien établi que l'introduction de notions élémentaires de calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire présente de grands avantages si ces notions sont introduites graduellement et si on utilise le plus tôt possible les notions acquises pour des applications pratiques.

III

DISCUSSION

Sur les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures de l'enseignement secondaire.

1. Indications complémentaires

fournies par les délégués.

Allemagne. — M. W. Lietzmann: Der Hauptberichterstatter, Herr Beke, hat in so ausgezeichneter, vollständiger und übersichtlicher Weise, wie von allen Ländern, so auch von Deutschland die Tatsachen zusammengestellt, dass ich es im Augenblick vermeiden möchte, auf Einzelheiten einzugehen. Die Zeit ist schon weit vorgeschritten und sicherlich wird uns allen weniger an kleinen Ergänzungen, als an einer recht ausführlichen Diskussion gelegen sein. Deshalb nur einige kleine Bemerkungen.

Es war uns in Deutschland nicht möglich, eine ausführliche Rundfrage zur Beantwortung des von der Subkommission A ausgegebenen Fragebogens zu versenden. Ich habe selbst die Antworten auf den Fragebogen auf Grund der in den deutschen Imuk-Abhandlungen zusammengestellten Darstellungen und der sonstigen mir bekannten Literatur gegeben. Um aber einigermassen sicher zu gehen, habe ich nachträglich meine Antwort an eine grössere Anzahl von Schulmännern geschickt, die mir in der Mehrzahl interessante Ergänzungen zu meinen Antworten zukommen liessen. Ist auch im wesentlichen das Bild ungefähr das gleiche geblieben wie vorher, so liessen es doch die mancherlei individuellen Züge jetzt wünschenswert erscheinen, das Ergebnis zu veröffentlichen. Ich erlaube mir, Ihnen einige Exemplare dieser Arbeit, die in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht erschienen ist, hier vorzulegen[1].

Lassen Sie mich aus dem grossen Komplex der sich aufdrängenden Fragen zwei herausgreifen. Es ist ausserordentlich schwer den gegenwärtigen Standpunkt, den man in Sachen der Infinitesimalrechnung auf der höheren Schule in Deutschland einnimmt,

[1] W. Lietzmann, Die Einführung der Elemente der Differential- und Integralrechnung in die höheren Schulen. *Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterricht*, **45** (1914), 145 ff.

genau anzugeben. Wir haben überall ein Nebeneinander verschiedener Standpunkte, statt eines einzigen. Ich nehme ein Beispiel heraus. Ich wähle die Lehre von den Potenzreihen, die an fast allen deutschen Realanstalten und auch an einem kleinen Teile der Gymnasien behandelt werden. Und ich betrachte da wieder nur die Stellungnahme zur mathematischen Strenge.

Ich will drei Perioden unterscheiden, die einen historischen Hintergrund haben.

In der ersten Periode rechnete man mit unendlichen Reihen wie mit endlichen; manchmal führte man eine Rechnung glücklich zu Ende, manchmal nicht. Die Untersuchung der Konvergenz fehlte noch.

In der zweiten Periode ist der Begriff der Konvergenz voll erfasst. Aber in der Art und Weise, wie man zu den Reihen kommt, ist man unkritisch. Man geht irgend einen Weg, der zur Aufstellung der Reihe führt, ohne sich darum zu kümmern, ob jeder der dabei getanenen Schritte erlaubt ist oder nicht. Man vertauscht z. B. den lim und das über unendliche Gliedzahl erstreckte Summenzeichen ohne zu beachten, dass das falsch ist. Es wird, kurz gesagt, der strenge Nachweis dafür, dass die erhaltene, später auf ihre Konvergenz untersuchte Reihe die Funktion auch wirklich darstellt, gar nicht ins Auge gefasst.

Und schliesslich die dritte Periode, die man etwa kennzeichnen kann dadurch, dass in der Taylorschen Reihe das Restglied berücksichtigt und diskutiert wird.

Diese drei Stellungnahmen zur Strenge bei der Reihenlehre gehen nun in unseren deutschen Schulen vollkommen nebeneiander her. Irgend eine feste Abmachung, was erlaubt ist und was nicht, besteht nicht. Dem Mathematiker an der Universität graut, während gleichzeitig der Methodiker an der Schule das Verfahren noch für viel zu streng hält. Ich denke, dieses Beispiel zeigt recht deutlich, dass wir in unserer Methodik der Infinitesimalrechnung, so grosse Fortschritte sie gemacht hat, noch nicht zu einem festen Abschluss gekommen sind.

Und deshalb scheint mir eine andere Frage nicht unwichtig. Warum wollen wir jetzt in der höheren Schule Infinitesimalrechnung treiben? Der mathematische Unterricht ist gar nicht für die späteren Mathematiker da; er ist also beispielsweise durchaus nicht mit der Classe de mathématiques spéciales hier in Frankreich zu vergleichen, die einen gewissen Facheharakter hat. Wir denken in unseren höheren Schulen nur an den mathematischen Bedarf des Gebildeten und vielleicht noch den besonderen Bedarf aller mehr technisch gerichteten Berufe, vom Kaufmann, Offizier usw. bis zu den Technikern im engeren Sinne. In Deutschland war deshalb auch mit dem Eindringen der Infinitesimalrechnung keine bedeutende Stoffvermehrung verbunden- das

Aussmass der Mathematik-Stunden ist sogar fast durchweg bei den neueren Lehrplänen gleichgeblieben oder gar zurückgegangen. Wir wollten nur das, was wir sowieso schon in unseren höheren Schulen trieben, einfacher, schöner, aufrichtiger treiben als vordem. Die Physik, die wir vorher auch schon trieben, wird mit der Benutzung der Infinitesimalrechnung erst recht durchsichtig. Die Berechnung der Flächen und Körper kann erst systematisch durchgeführt werden mit der Integralrechnung. Die Kurvendiskussion erfordert Differential- und Integralrechnung. Und auch wenn wir die Schüler soweit führen wollen, dass sie die Werte ihrer trigonometrischen und ihrer logarithmischen Tabelle selbst finden können, brauchen wir die Reihenlehre. So ist in Deutschland das Eindringen der Infinitesimalrechnung vor sich gegangen ohne dass Stoffe aus früherer Zeit in grösserem Umfange ausgeschieden sind.

Es liegt nahe, an dieser Stelle etwas über die Geschichte des Eindringens der Infinitesimalrechnung in das höhere Unterrichtswesen zu sagen, da hierbei der Einfluss des Landes, dessen Gast wir hier sind, nicht ohne entscheidende Bedeutung war. Infinitesimalrechnung ist schon seit vielen Jahrzehnten an deutschen Realanstalten getrieben worden. Wichtige Zentren, in denen sich eine Methodik der Infinitesimalrechnung unter der Führerschaft hervorragender Pädagogen entwickelt hat, waren in Süddeutschland Württemberg, im Westen Wiesbaden unter Traugott Müller, im Norden, wie Herr Beke näher belegt hat, eine lange Tradition in Hamburg. Weiter ist zu nennen der Einfluss von Seeger in Güstrow, in Berlin derjenige des Realschulmannes Gallenkamp und des Gymnasialmannes Schellbach. Sie haben aber doch alle die Sache anders angefasst als wir heute. Der Anstoss zu einer regeren Betätigung in der Infinitesimalrechnung ging von Göttingen aus, dort war es das kräftige Eintreten unseres verehrten Präsidenten der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission, die die Sache vorwärts getrieben hat. Klein aber ist in dem Gedanken, ebenso wie an die Realanstalten auch an die Gymnasien die Infinitesimalrechnung zu bringen, wesentlich durch die französischen Lehrpläne von 1902 bestärkt worden. Namentlich ist es die in diesen Lehrplänen zum Ausdruck gekommene Betonung des Funktionsbegriffes schon in den mittleren Klassen gewesen, die er als den springenden Punkt erkannt hat. Die Durchführung dieser Idee in den Lehrbüchern von *Tannery* und *Borel*, die uns in Deutschland in ausgezeichneten Uebersetzungen zur Hand sind, hat nicht wenig anregend für die ersten Förderer der Reformbewegung, wie nachher für die immer zahlreicher werdenden Anhänger gewirkt. Später ist man in Deutschland in den überaus zahlreichen Veröffentlichungen sehr bald auch eigene Wege gegangen. Wir legen in Deutschland sehr viel Gewicht auf didaktische Durcharbeitung der Unterrichtsstoffe und so ist z. B. in unserer pädagogischen Presse über solche Fragen ausserordentlich viel diskutiert worden. Immer aber bleibt bestehen, dass die Anregung zur Wiederaufnahme alter Erfahrungen und zu ihrer allgemeineren Verbreitung zu einem Teile auf das französische Vorbild zurückgeht.

Etats-Unis d'Amérique. — M. E.-B. Van Vleck : M. D. E. Smith has correctly stated (see page 7, report of M. E. Beke) « que le calcul différentiel et intégral ne figure pas dans l'enseignement secondaire » des Etats-Unis. To this it may be added that to some degree the first year or two of the American College course correspond, in character of work, to the last year of the German gymnasium and the classes spéciales of the Lycées. The study of calculus is very commonly begun in the second year of the college course, and not unfrequently it is taken by students in their first year. Furthermore, graphical representation for simple functions (linear and quadratic functions) has been increasingly introduced as a topic into the algebra of the high schools. From both of these facts it is clear that the tendencies now under discussion at this conference are also manifesting themselves visibly in the United States.

Hongrie. — M. Ratz : Nach dem ausführlichen und alle Fragen beleuchtenden Referat des H. Berichterstatters, Prof. Beke, möchte ich mich nur auf einige Bemerkungen beschränken, welche sich auf den Unterricht der Diff.- u. Int. Rechnung in Ungarn beziehen. Aus eigener Erfahrung kann ich behaupten, dass wir nur dann einen wirklichen Erfolg dieses Unterrichtes erwarten können, wenn wir denselben in den unteren Klassen gewissenhaft und gründlich vorbereiten. Die graphische Darstellung und die Veränderungen der Funktionen, so wie auch die Einführung der Elemente der Differential- und Integralrechnung darf sich nicht auf die obersten Klassen beschränken. Es ist ja nicht Zweck der Reformbestrebungen den mathematischen Lehrstoff bedeutend zu vermehren, sondern wir wollen den Unterricht einheitlicher gestalten und die bisher voneinander unabhängig behandelten Fragen und Aufgaben mittelst allgemeiner Methoden auf gemeinschaftlicher Basis behandeln.

Der Funktionsbegriff muss sorgfältig vorbereitet werden und man muss den Schülern dazu hinlänglich Zeit gönnen, damit sie in das volle Verständnis desselben eindringen können.

Deshalb beginnen wir mit den graphischen Darstellungen in den untersten Klassen. Wir wählen verschiedene Aufgaben aus der Statistik, der Geometrie, der Physik, dem geschäftlichen Leben u. s. w. Diese vorbereitenden graphischen Uebungen beschäftigen die Schüler 3 Jahre hindurch. Im IV. Jahrgange beginnen wir dann mit der Bildung der Funktionen, welche sich auf den vorhergegangenen Rechenunterricht stützen. Erst dann wird auf die systematische Behandlung der Funktionen 1., 2. und 3. Grades eingegangen. Die Lösung der Gleichungssysteme wird rechnerisch und graphisch ausgeführt. Grosses Gewicht legen wir auf die graphischen Lösungen der Ungleichheiten. Sehr instruktiv ist auch die Diskussion der Gleichungen der Kegelschnitte. Der Schüler der mittleren Klassen soll, ohne im voraus zu wissen, um welchen Kegelschnitt es sich handelt, durch Eintragung einzelner Punkte und aus der Form der Funktion die fundamentalen Eigenschaften des betreffenden Kegelschnittes selbst erkennen.

Mit diesem Verfahren wird die analytische Geometrie, welche auf einer höheren Stufe des Unterrichtes die Umkehrung dieser Aufgabe behandelt, bestens vorbereitet. Auch in dem Unterricht der Trigonometrie und der Logarithmen, wird die graphische Darstellung ausgiebig benützt und verwertet. An die analytische Geometrie der Ebene, welche wir in der vorletzten Klasse unterrichten, schliesst sich dann die Einführung der Infinitesimal-Rechnung.

Wenn der Funktionsbegriff mittelst einfacher, dem praktischen Leben entnommener Beispiele eingeführt und befestigt, wenn in den mittleren und oberen Klassen der Unterricht in der Algebra auf den Funktionsbegriff aufgebaut wird und wenn der Unterricht überall die graphische Darstellung begleitet und ergänzt, dann bietet die Einführung der Differential- und Integralrechnung den Schülern keine besonderen Schwierigkeiten.

Es wäre verfrüht über den Erfolg dieses Unterrichtes schon jetzt ein Urteil fällen zu wollen. Ich möchte nur bemerken, dass diejenigen unserer Schüler, welche die Universitäten und die polytechnischen Institute besuchen, uns zu wiederholten Malen ihren Dank darüber aussprachen, dass sie schon in den Mittelschulen Gelegenheit fanden sich die Elemente der Differential- und Integralrechnung anzueignen, da sie dadurch in die günstige Lage versetzt wurden, sich in die wissenschaftlichen Methoden des Universitätsunterrichtes besser einarbeiten zu können und ihnen das Verständnis der naturwissenschaftlichen Lehren stark erleichtert wurde.

Im übrigen stimme ich dem Herrn Berichterstatter vollkommen bei, besonders was den Umfang der zu unterrichtenden Infinitesimal-Rechnung anbelangt.

Wenn wir die richtige Grenze überschreiten, setzen wir uns der Gefahr aus, einzelne Gebiete der Elementar-Mathematik zu vernachlässigen. Es muss besonders betont werden, dass wir den Unterricht der Geometrie nicht im geringsten einschränken, sondern denselben auf der bisherigen Höhe erhalten wollen. Deshalb dürfen wir im Unterrichte der Differential-Rechnung nicht zu weit gehen, aber das Wenige was wir bieten, muss gründlich und gewissenhaft durchgearbeitet werden.

Italie. — M. CASTELNUOVO remaque qu'on n'a, en Italie, aucune expérience sur l'enseignement des éléments du calcul infinitésimal dans les écoles moyennes, car ces éléments n'y ont pas été introduits jusqu'ici, sauf dans quelques classes particulières, sous la responsabilité directe des professeurs. C'est seulement dans les programmes des lycées modernes qui ont été publiés tout dernièrement et qui seront adoptés l'année prochaine, que paraissent pour la première fois les notions de fonction, de dérivée et d'intégrale définie. M. Castelnuovo, qui a contribué à la rédaction de ces programmes et qui est favorable à la réforme de l'enseignement secondaire, croit cependant qu'il faut éviter d'introduire des sujets trop élevés pour l'intelligence et la culture moyenne d'un élève du lycée (tels que la série de Taylor, etc.). M. Castelnuovo pense qu'il faudrait se borner à exposer, dans les écoles secondaires, les notions de mathématiques qui appartiennent à la *culture générale;* il entend parler de ces notions que toute personne doit connaître pour aborder l'étude des sciences (économiques, naturelles...) où les conceptions et le langage des mathématiques ont une importance bien supérieure à celle de l'algorithme. Il convient de réserver l'enseignement *technique* des mathématiques aux personnes qui se consacreront à des études spéciales (mathématiques, physique, sciences de l'ingénieur) ; la place pour cet enseignement se trouve dans les universités ou dans les écoles polytechniques.

Roumanie. — M. RALLET : En Roumanie, dans l'enseignement secondaire, en fait de Mathématiques, on a introduit depuis quelques années déjà, dans les 3-4 dernières années du lycée réal les notions de dérivées et fonctions primitives; dans la dernière année même on enseigne un peu de Géométrie analytique en particulier la ligne droite, le cercle et les coniques, étudiées sur les équations simplifiées.

Russie. — M. C. POSSÉ : M. le général POPROUGENKO, membre de la Direction des écoles militaires en Russie, ici présent, a bien voulu me charger de communiquer, que l'enseignement des éléments d'analyse a été introduit en 30 corps de Cadets il y a 5 ans. La notion de dérivées et son application à l'étude de la variation des fonctions constitue le programme modeste de ce cours d'une heure par semaine, pendant les deux premières années d'études.

Les élèves n'éprouvent aucune difficulté à se familiariser avec ces notions et s'y intéressent plus qu'à d'autres matières de leurs études. Les éléments de la Géométrie analytique figurent déjà depuis longtemps dans le programme de ces écoles.

Serbie. — M. Petrovitch : On n'a pas introduit jusqu'à présent les éléments du Calcul infinitésimal dans les écoles moyennes en Serbie. On y a pensé depuis quelque temps, mais les événements dont notre pays a été le théâtre ont empêché de mettre le projet en exécution. Une sous-commission nationale est maintenant formée en Serbie, elle fonctionne et a élaboré un plan d'enseignement mathématique dont la réalisation s'effectuera, selon toute vraisemblance, dans un bref délai. Pour réaliser le nouveau programme, on compte sur les simplifications et réductions à faire dans les parties plus élémentaires.

Le délégué serbe compte pouvoir présenter au prochain Congrès comme chose finie, la réforme de l'enseignement mathématique en Serbie dans le sens des idées modernes, adaptées aux circonstances dont nous aurons à tenir compte.

2. — Discussion générale.

Pour donner une image fidèle des intéressants débats auxquels donnèrent lieu les rapports très documentés de MM. Beke et Staeckel, il faudrait pouvoir reproduire non seulement dans tous leurs détails les observations générales, mais aussi les remarques spontanées, souvent fort suggestives, présentées par quelques-uns des orateurs. Cela n'est guère possible ; aussi devons-nous nous borner à signaler les points essentiels sur lesquels a porté la discussion. Celle-ci était basée sur les résumés, rédigés par les rapporteurs eux-mêmes et rappelant les principales parties de leur exposé.

Résumé du Rapport général de M. E. Beke

sur les résultats obtenus
dans l'introduction du Calcul différentiel et intégral
dans les classes supérieures de l'enseignement secondaire.

I. — **Place du Calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire.** — Dans tous les pays où, pendant les douze dernières années, un nouveau plan d'études des écoles secondaires est entré en vigueur, une place plus ou moins grande y a été réservée à la Notion de fonction et aussi — à très peu d'exceptions près — aux premiers éléments du Calcul différentiel et intégral.

A. — Les Eléments du Calcul infinitésimal figurent au programme officiel des écoles, ou au plan d'études établi par les écoles elles-mêmes, dans les pays suivants :

Etats allemands : Bavière, Wurtemberg, Bade, Hambourg.

Autres Etats : Autriche, Danemark, France, Iles Britanniques, Italie, Roumanie, Russie, Suède et Suisse.

B. — Les Éléments du Calcul infinitésimal ne figurent pas dans le plan d'études, mais ils sont enseignés dans un grand nombre d'écoles : Prusse, Saxe, Hongrie, Australie, et ils le seront probablement avant peu en Hollande, Norvège, Belgique et Serbie.

2. — **Etendue donnée au Calcul différentiel et intégral.** — *a*) Il n'est appliqué presque partout qu'aux fonctions d'une variable.

b) On enseigne partout la différentiation des polynômes, des fonctions rationnelles (ou au moins des quotients de deux polynômes linéaires), ainsi que, dans la plupart des pays, celle des fonctions exponentielles, trigonométriques et de leurs inverses.

c) Dans la plupart des pays on préfère la notation de Lagrange à celle de Leibniz.

d) Dans la plupart des pays on introduit aussi la notion d'intégrale ou de fonction primitive. Partout la notion d'intégrale suit celle de dérivée (en Bohême on les enseigne simultanément). Dans quelques pays, l'intégrale définie précède l'intégrale indéfinie; mais dans la plupart des Etats la marche inverse est suivie.

3. — **Applications du Calcul infinitésimal.** — *a*) La série de Taylor figure dans peu de programmes. Elle est néanmoins enseignée dans les écoles où les plans d'études embrassent depuis longtemps les séries infinies. Là on établit les séries de e^x, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\log(1 + x)$, $(1 + x)^m$, arc tg x. Je crois que l'exposition de la série de Taylor n'est pas encore suffisamment préparée pour l'école secondaire.

b) Le Calcul infinitésimal est appliqué partout à la recherche des maxima et minima.

c) Il est aussi appliqué en Physique, au moins pour définir la vitesse et l'accélération, mais quelquefois il trouve une application plus étendue (centre de gravité, moments d'inertie, potentiel, etc.) En Russie, on ne se sert généralement en Physique que des Mathématiques élémentaires.

d) Le Calcul infinitésimal est appliqué en Géométrie à la détermination des aires et des volumes, et c'est ici que la nouvelle méthode rend le plus de services au point de vue de l'économie. Mais on continue à appliquer les méthodes anciennes, surtout le principe de Cavalieri.

4. — **La question de rigueur.** — C'est un des points les plus délicats. Du côté de l'enseignement supérieur on entend dire que l'enseignement secondaire fait plus de mal que de bien s'il n'adopte pas les méthodes rigoureuses d'une exposition scientifique ; par contre, les représentants de l'enseignement secondaire affirment que l'intelligence moyenne des élèves ne permet pas une exposition rigoureuse du Calcul différentiel et intégral. Les professeurs des écoles secondaires doivent connaître le calcul infinitésimal moderne et rigoureux, mais dans leur enseignement ils doivent appliquer une méthode intuitive, des considérations

géométriques et mécaniques, et s'élever graduellement aux abstractions nécessaires. C'est aussi la manière la plus sûre d'éveiller dans l'esprit des élèves le désir de la rigueur.

a) Les nombres irrationnels sont introduits presque partout incidemment à l'occasion de l'extraction des racines. La théorie générale n'est exposée qu'exceptionnellement.

b) La notion de limite est introduite partout, nulle part on ne se contente de l'intuition. Les théorèmes élémentaires relatifs aux limites sont adoptés presque partout sans explications.

c) On ne fait pas d'allusions à des fonctions continues n'admettant nulle part de dérivée. Dans certaines écoles on se borne à dire qu'en certains points la dérivée peut cesser d'exister.

d) Dans la plupart des écoles la différentielle n'est pas introduite, il règne une confusion dans l'explication de la notion de différentielle. Il est à désirer que le brouillard métaphysique de l'infiniment petit n'entre pas dans l'enseignement secondaire.

5. — **Fusion du Calcul différentiel et intégral avec les matières de l'enseignement secondaire.** — Les matières nouvelles ne doivent pas être placées comme un supplément à côté des matières anciennes, mais une fusion complète devra s'opérer entre elles.

L'élargissement du rôle de la notion de fonction et l'introduction du Calcul infinitésimal ne peuvent avoir de succès que si le programme ancien est réduit et s'il devient plus économique. Il résulte un allègement grâce à la fusion des matières nouvelles avec les anciennes et à la suppression de quelques matières surannées.

6. — **Le mouvement réformiste et l'opinion publique des pédagogues.** — Le caractère définitif des résultats de notre mouvement peut être assuré : 1) Par le succès ; 2) Par l'opinion publique toujours éveillée, des représentants de l'enseignement. Le mouvement a rencontré partout la sympathie des professeurs de l'enseignement secondaire, mais les professeurs appartenant à l'enseignement supérieur, qui le regardent de leur point de vue spécial, ne sympathisent pas toujours avec nos tendances.

Nous entendons la plainte qu'un cours de Calcul différentiel et intégral n'est pas suivi avec intérêt par celui qui en a déjà quelques connaissances. Il n'est pas difficile de réfuter cette assertion. Qu'il nous suffise de rappeler les avis favorables que nous avons rencontrés parmi les professeurs des Universités de tous les pays, qui regardent notre mouvement d'un point de vue plus élevé.

* * *

Une première partie de la discussion sur les notions de dérivées et de fonctions primitives dans l'enseignement secondaire a eu lieu immédiatement après la lecture du rapport général de M. Beke et du rapport spécial de M. Bioche. Ont pris la parole : MM. Buhl (Toulouse), Padoa (Gênes), Hadamard (Paris), Castelnuovo (Rome), Possé (St-Pétersbourg), Thaer (Hambourg), A. Lévy (Paris), Th. Rousseau (Dijon).

Il ressort de cette première discussion que l'introduction, dans l'enseignement moyen, des notions de dérivées et de fonctions primitives, a été généralement bien accueillie dans les principaux pays.

Comme l'a fait remarquer M. Hadamard, membre de l'Institut, il faut que dans le premier enseignement des dérivées on évite d'établir un fossé entre l'intuition et la rigueur.

M. Padoa exprime la crainte que, pour donner satisfaction à des prétendues exigences didactiques, on ne retourne à la pseudo-intuition infinitésimale.

M. Castelnuovo, professeur à l'Université de Rome, désire avoir l'avis de ses collègues sur l'étendue à donner au calcul différentiel et intégral dans le programme des écoles moyennes. Il pense que dans cette première initiation on doit se borner à fixer clairement les notions indispensables pour suivre un cours d'une science quelconque, naturelle ou sociale, où l'on introduit le langage précis suggéré par les mathématiques.

A la question soulevée par M. Castelnuovo, M. Possé, professeur émérite de l'Université de St-Pétersbourg, répond qu'il estime que le minimum de connaissances mathématiques que doit fournir l'enseignement secondaire supérieur se trouve très bien représenté dans l'excellent manuel publié par Jules et Paul Tannery, sous le titre *Notions de Mathématiques*[1], programme du 31 mai 1902, Librairie Delagrave, Paris.

M. Thaer, Directeur d'Ecole réale supérieure (Hambourg), tient à constater qu'en Allemagne l'introduction des dérivées n'a pas apporté de surcharge dans les programmes ; ces notions sont plus accessibles que celles qui ont été supprimées dans les classes supérieures. Quant à l'étendue du programme, M. Thaer estime que l'on doit s'arrêter à l'aire de l'ellipse ; il résume ses remarques comme suit :

« Ich bin nicht vorbereitet auf die Frage zu antworten, ob bei einem Umfang des Unterrichts in der Infinitesimalrechnung, wie er nach dem Bericht des Herrn Beke in Deutschland erteilt wird, eine Ueberbürdung der Schüler eintritt. Nach meinen persönlichen Erfahrungen möchte ich sie verneinen. Die Infinitesimalrechnung ist eher leichter als schwerer, wenn man sie mit dem vergleicht, was früher in den obersten Klassen getrieben wurde. Kein Schüler, der bis dahin in Mathematik normal folgen konnte, versagte in der Differenzialrechnung, ja mancher, der für Trigonometrie und Stereometrie wenig Interesse zeigte, gewann es an der Infinitesimalrechnung. Auch die Philologen stehen in Hamburg wohlwollend dieser Erweiterung des mathematischen Pensums gegenüber, waren es doch zwei klassische Philologen Direktor Friedländer und Schulrat Hoche die vor 40 Jahren in Hamburg die Differenzialrechnung einführten. Die Ergebnisse, wenn man als Grenze des Pensums die Berechnung der Fläche der Ellipse bezeichnet, sind gut, soweit man dies nach der Zenzuren der Schüler beurteilen kann. Jedenfalls wird dies Prädikat, wie statistisch festgestellt ist, vier mal so oft in Mathematik erteilt wie in den Sprachen. »

M. Thær désirerait être renseigné sur le moment où l'on introduit généralement les dérivées. Le rapport de M. Bioche signale les modifications ap-

[1] Trad. allemande par P. Klaess. B. G. Teubner, Leipzig.

portées en France au programme de 1902 : il serait intéressant de connaître les raisons qui ont amené cette revision des programmes.

« Gestatten Sie, dass ich Ihre Aufmerksamkeit auf eine Frage richte, die Herr Beke in seinem mündlichen Bericht nur leicht gestreift hat, weil sie nicht im Fragebogen stand. Das ist die Frage : Wann im Schulleben können wir, wann müssen wir mit der Einführung der Ableitung beginnen ? Herr Bioche hat die Frage für Frankreich in einem Bericht beantwortet. Darin fand ich zu meinem Erstaunen, dass man die Behandlung der Ableitungen in der zweiten Klasse gestrichen. In Hamburg unterrichtet man allerdings seit 40 Jahren Differenzialrechnung, aber wir sind trotzdem noch nicht zu einer definitiven Methode gekommen. Die Ursache liegt vielleicht darin, dass wir im XIX. Jahrhundert die Infinitesimalrechnung an den Schluss eines durchaus im alten Stil gehaltenen Unterricht setzen. Erst durch den Einfluss von Herrn Klein haben wir seit 10 Jahren mit der Betrachtung der Funktionen in den Mittelklassen begonnen, und daraufhin in den letzten Jahren, angeregt gerade durch die Beobachtungen, die Herr Grimsehl in französischen Schulen gemacht hat, einen ganz elementaren Kursus, der sich im wesentlichen auf ganze Funktionen beschränkt, in der Differential- und Integralrechnung in der Oberrealschule bei Schülern von 15—16 Jahren eingeführt. Wir haben dadurch den Vorteil, dass wir im zweiten Kursus der Physik, der in derselben Klasse beginnt, sofort Differentiale und Integrale benutzen können. Auch der zweite Kursus der Stereometrie speziell die Volumberechnung wird dadurch auf ein höheres Niveau gehoben und in der analytischen Geometrie erreichen wir ganz wesentliche Vereinfachungen besonders bei der Behandlung der Tangenten und Normalen. Es wäre deshalb interessant, wenn Herr Bioche die Gründe angeben wollte, warum man in Frankreich die Infinitesimalrechnung in der zweiten Klasse gestrichen hat und dadurch auf den Vorteil verzichtet, sie schon nützlich in der Physik zu verwenden. »

La seconde partie de la discussion a eu lieu samedi matin. Y ont pris part : MM. Beke (Budapest), Thaer (Hambourg), Bioche (Paris), Fontené (Paris), Hadamard (Paris), Darboux (Paris), Padoa (Gênes), Enriques (Bologne) et Rival (Grenoble).

M. Bioche, professeur au Lycée Louis-le-Grand (Paris), répond à M. Thaer en le renvoyant au rapport spécial annexé au rapport de M. Beke, on y trouve précisément la gradation établie maintenant, depuis la modification apportée en 1912 au plan d'études antérieur.

En *Seconde*, étude de fonctions simples, sans dérivées ;

En *Première*, notions sur les dérivées et leur usage, en se limitant à certaines fonctions précisées au programme ;

En *mathématiques*, extension aux fonctions rationnelles, irrationnelles du 2e degré, et trigonométriques.

Quelques personnes ont trouvé le programme trop restreint, et ont regretté que celui-ci ne mentionne pas la dérivée d'une fonction de fonction. Il ne faut pas oublier que les programmes de *Première* ou de *Mathématiques* sont des programmes de baccalauréat ; on a voulu éviter d'y mentionner certaines questions pour que celles-ci ne soient pas prises commme *questions de cours*. Mais les professeurs peuvent donner, et donnent effectivement, des théories ou des formules qui peuvent être utiles, bien que non explicitement mentionnées dans le programme ; on peut le constater en lisant les traités publiés à l'usage des élèves.

M. Fontené, inspecteur de l'Académie de Paris, est de l'avis de M. Bioche. La séparation prévue dans le programme actuel est très utile : l'élève doit d'abord étudier la fonction sans faire usage de la dérivée.

M. Hadamard, membre de l'Institut, se déclare également d'accord avec les deux orateurs précédents. Dans l'enseignement il faut éviter l'automatisme ; il faut, le plus souvent possible, faire appel au bon sens. Le professeur doit s'assurer que l'élève sait étudier les fonctions élémentaires pour elles-mêmes, par la discussion directe et l'observation, avant de faire intervenir la dérivée. M. Hadamard illustre ses observations par ses souvenirs d'examinateur.

M. Darboux, membre de l'Institut, l'un des principaux collaborateurs aux programmes de 1902, fait remarquer que ces programmes prévoyaient déjà une gradation dans l'introduction des notions de fonction et de dérivée. Il faut aussi tenir compte qu'à côté du programme il y a également le rôle du professeur, qui doit savoir se limiter aux choses essentielles.

M. Thaer dit qu'en Allemagne la première initiation se fait également dans les classes précédentes par la considération de fonctions simples et de représentation graphique. Le maître s'adresse alors à des élèves d'environ 14 ans. Les premières notions de calcul différentiel ne sont présentées que plus tard, lorsque les élèves ont 15-16 ans ; ce qui correspond donc, au point de vue de l'âge, à ce qui se fait en France. Pendant les trois années suivantes, les connaissances acquises sont utilisées, notamment en physique.

D'après M. Padoa, professeur à l'Institut technique de Gênes, le concept d'intégrale définie est plus accessible que celui de dérivée, car le premier réclame la seule notion de limite supérieure et inférieure, que les élèves possèdent déjà (nombres réels, longueur d'une circonférence, etc.), tandis que le second repose sur la notion plus subtile du passage à la limite. D'ailleurs, le théorème « sur le maximum d'un produit de n nombres absolus, ayant une somme donnée » permet de résoudre toutes les questions de maximum et de minimum qui se présentent dans les Mathématiques élémentaires ; tandis que, pour atteindre ce but par la méthode des dérivées, il ne suffit pas d'étudier les fonctions d'une seule variable.

M. Fontené insiste à son tour sur la nécessité d'avoir un programme bien gradué ; il faut éviter chez les élèves un emploi machinal des connaissances mathématiques ; il craint qu'avec l'abus des dérivées, utilisées seules et sans réflexion, on ne diminue les occasions d'obtenir un effort personnel.

Quant à l'étude de la série de Taylor, comme l'a dit M. Beke, les élèves ne sont pas encore suffisamment préparés.

M. Hadamard estime même que l'étude directe de la *série* de Taylor est d'un intérêt minime, non seulement dans l'enseignement élémentaire, mais d'une manière générale, car elle est fondée sur une idée peu scientifique, celle qu'une fonction arbitraire admet en général un développement de cette espèce.

Les récents programmes de la classe de *Mathématiques spéciales* ont modifié les vues relatives à l'application de la série de Taylor. Les seuls développements qui s'obtiennent par l'emploi du théorème général sont ceux de $\sin x$, $\cos x$. Tous les autres [a^x, $\log(1+x)$, $(1+x)^m$, $\operatorname{arctg} x$] sont déduits des propriétés analytiques des fonctions envisagées. A cet effet, les propriétés générales les plus simples des séries entières — en particulier en ce qui concerne la dérivation et l'intégration — sont démontrées.

M. Enriques, professeur à l'Université de Bologne, trouve exagéré le point de vue de M. Hadamard, d'autant plus qu'on doit à M. Hadamard des mémoires très remarquables qui se rattachent à la série de Taylor.

M. Darboux est d'accord dans une certaine mesure avec M. Hadamard. Pour les fonctions élémentaires, il n'est pas nécessaire d'employer la série de Taylor, mais il faut tout de même reconnaître que la formule est utile.

M. Czuber, qui présidait la dernière séance, remercie au nom du Comité Central tous ceux qui ont participé à la discussion et proclame la clôture des séances de travail.

Annexe : Extraits de quelques rapports nationaux.

Voici les Etats dont les délégués ont envoyé des réponses au questionnaire A concernant l'introduction des premiers éléments du Calcul des dérivées et des fonctions primitives dans l'enseignement secondaire supérieur.

	Rapporteurs :		Rapporteurs :
Allemagne	MM. Lietzmann et Thær	Hongrie	MM. Beke et Mikola
Australie	Carslaw	Iles Britanniques	Godfrey
Autriche	Suppantschitsch	Italie	Castelnuovo
	Bydzovski	Norvège	Alfsen
Brésil	E. Gabaglia	Russie	Possé
Danemark	Heegaard	Serbie	Petrovitch
Etats-Unis	D. E. Smith	Suisse	Brandenberger et Fehr
France	Ch. Bioche		
Hollande	Cardinaal		

Le rapporteur général a dépouillé et étudié avec beaucoup de soins les réponses rédigées par les délégués et qui, pour la plupart des pays, formaient de véritables rapports. Il en a mentionné les résultats essentiels dans son excellent exposé ; nous n'avons donc pas à y revenir.

Trois des rapporteurs nationaux, MM. Godfrey, Lietzmann et Suppantschitsch, ont publié le résultat de leur enquête à la veille de la Conférence de Paris. Nous en extrayons les passages concernant plus particulièrement l'accueil fait à l'introduction des premiers éléments du Calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire.

Allemagne. — Le rapport publié dans la *Zeitschrift für mathem. u. naturw. Unterricht aller Schulgattungen* (45. Jahrg., 1914, 3. Heft, p. 145-160), sous le titre « Die Einführung der Elemente der Differential- u. Integralrechnung in die höheren Schulen. Bericht über die Verhältnisse in Deutschland, der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission erstattet von W. Lietzmann mit zahlreichen Bemerkungen von Fachleuten », se termine par la remarque suivante de M. F. Klein :

Nicht auf die Vertreter der Mathematik an den Universitäten kommt es eigentlich an, sondern auf die Mathematiker an den technischen Hochschulen und die Universitätsphysiker. Denn diese haben mit der mittleren mathematischen Durchbildung der Abiturienten in erster Linie zu rechnen. Wie sie zur Frage der Einführung der Infinitesimalrechnung stehen ? Ich fürchte beinahe, dass eine grosse Zahl von dem augenblicklichen Stande der Dinge gar keine Kenntnis hat.

Wir befinden uns eben in einem Uebergangszustande. Im Zusammenhang damit stellt sich bei den Zuhörern, die mit einiger Kenntnis der Infinitesimalrechnung zur Hochschule kommen, vielfach ein besonderer Missstand ein, der nicht verschwiegen werden darf. Die Anfangsvorlesungen der Hochschulen setzen von alters her eine solche Kenntnis nicht voraus und können sie bis auf weiteres auch nicht allgemein voraussetzen. Es lässt sich also nicht vermeiden, dass zu Beginn Dinge berührt werden, die jenen Zuhörern bereits bekannt sind oder doch bekannt vorkommen. Der Studierende lässt sich dadurch nur zu leicht bestimmen, den Vorlesungsbesuch eine Zeitlang einzustellen, um dann plötzlich zu bemerken, dass er den Anschluss verloren hat; es gibt Fälle, wo dieser Schaden nie mehr gut gemacht wird. Auf Grund solcher Erfahrungen kommt dann der Hochschuldozent nur zu leicht dazu, den Unterricht in Infinitesimalrechnung an der Schule überhaupt zu verurteilen. Er hört auch zuweilen, dass dem Studierenden die Illusionen, unter denen er zu leiden hat, von der Schule her bereits geläufig waren. Wie ist da zu helfen? Ich denke nur dadurch, dass man die tatsächlichen Verhältnisse klar und immer erneut vor der Oeffentlichkeit bespricht und dadurch den Beteiligten mehr und mehr ein richtiges Urteil über sie ermöglicht.

Es gibt aber noch einen anderen Grund, um deswillen sich manche Hochschulmathematiker gegen die Einführung der Infinitesimalrechnung an der Schule aussprechen. Es ist dies die Ungenauigkeit oder auch der Mangel an Folgerichtigkeit, mit der die Lehren der Infinitesimalrechnung in manchen neuerdings erschienenen Schulbüchern auseinandergesetzt werden. Man schliesst daraus, dass der Gegenstand für die Schule zu schwer sei.

Hierauf ist zu antworten, dass auch in anderen Kapiteln der Schullehrbücher, insbesondere in der Behandlung der unendlichen Reihen mit den Methoden der algebraischen Analysis, ähnliche Unvollkommenheiten auftreten. Der Missstand haftet also nicht am Stoff, sondern begründet sich dadurch, dass viele Lehrer unserer höheren Schulen von den praktischen Aufgaben der Unterrichtserteilung einseitig in Anspruch genommen sind und darüber nicht dazu kommen, den Fragen der Genauigkeit die erforderliche Aufmerksamkeit zuzuwenden. Umgekehrt neigt der Universitätsmathematiker dazu, bei der Durchsicht eines Schullehrbuches nur auf letztere zu achten und darüber die Leistung, die im methodischen Aufbau des Lehrganges und der Berücksichtigung der Fassungskraft der heranwachsenden Schüler liegt, zu übersehen. Beide Arten von Einseitigkeit haben sich bei uns so schroff entwickelt, weil der Kontakt zwischen den Vertretern der Schule und der Hochschule bei uns Dezennien hindurch ein äusserst spärlicher gewesen ist. Nun die Frage der Infinitesimalrechnung beide Seiten interessiert, stossen die Gegensätze unvermittelt aufeinander. Die Plötzlichkeit dieses Zusammentreffens verursacht unnötige Schwierigkeiten, ist aber in den Verhältnissen der Vergangenheit begründet, die wir nicht ändern können. Freuen wir uns umgekehrt, dass durch die Reform unseres mathematischen Unterrichts, die in der Einführung der Infinitesimalrechnung ihren bezeichnenden Ausdruck findet, überhaupt ein Zusammentreffen herbeigeführt wird. Je lebhafter dann die Erörterungen beiderseits werden, um so mehr wird die unheilvolle Trennung zwischen den Schulkreisen und den Hochschulkreisen, an der unser Unterrichtswesen krankt, überwunden werden.

Autriche. — M. R. Suppantschitsch, l'un des délégués autrichiens à la Commission internationale, s'est excusé de ne pouvoir prendre part au Congrès. S'étant chargé des travaux préparatoires en réponse au questionnaire A du Comité central, M. Suppantschitsch a eu l'occasion d'étudier à fond l'état de l'enseignement du Calcul des dérivées en Autriche. A ce propos il a publié un article dans la *Zeitschrift f. das Realschulwesen* (1914, nos 1 et 2, 16 p.) sous le titre « Zur Frage der Infinitesimalrechnung an den Mittelschulen ». L'auteur a fait hommage à la Conférence de vingt-cinq tirages à part de sa Note ; ils ont été distribués à la première séance de travail par les soins du secrétaire général, avec les exemplaires de la *Zeitschrift f. mathem. und naturw. Unterricht* contenant le rapport de la sous-commission allemande, par M. Lietzmann.

Nous reproduisons ci-après les conclusions de M. Suppantschitsch qui nous prie, d'ailleurs, d'insister sur le fait qu'il exprime une opinion personnelle dont il est seul responsable :

« *Ueber Zustimmung und Ablehnung.* — Etwa zwei Drittel der Anstalten haben sich zustimmend geäussert, die anderen Anstalten verhalten sich zur Hälfte ablehnend, zur Hälfte ganz unentschieden.

Die Zustimmung wird motiviert mit der Vereinheitlichung aller Grenzbetrachtungen, die früher im Unterricht des notwendigen Zusammenhanges entbehrt hätten, mit einem günstigen Einfluss auf die Lernfreudigkeit der Schüler, die sich besonders durch die Belebung der Wiederholung in der obersten Klasse zeige. Es wird gesagt, dass die Schüler den neuen Stoff, ohne die Mehrbelastung als drückend zu empfinden, in zufriedenstellender, wenn auch nicht eindringlicher Weise erfassten. Schliesslich wird auch manchmal auf den allgemeinen Wert dieser Dinge für die Bildung des jungen Mannes hingewiesen. Sehr oft wird auch der Vorteil betont, den die Absolventen auf der Hochschule hätten, da ihnen nunmehr die Vorlesungen nicht mehr als etwas unerhört Neues erschienen.

Gerade dies ist aber ein heikler Punkt. Hier müssen wohl auch die akademischen Lehrer gehört werden. Unter ihnen verhalten sich aber die meisten sehr ablehnend. Nach der Ansicht vieler von ihnen wünschen die Hochschullehrer bei den jungen Semestern vorzüglich eine beachtenswerte Rechenfertigkeit, die Fähigkeit, Formeln zu lesen und bei variierten Grössen zu deuten, und ganz besonders die Willensdisposition, eine Rechnung auch bis zu Ende durchzuführen. Auf unsicheren Kenntnissen der Infinitesimalrechnung — mehr könne die Mittelschule ja gewiss nicht leisten — könne man überhaupt nicht weiter bauen, man müsse nach wie vor von vorne beginnen. Könnten die neuen Verhältnisse vielleicht auch ein rascheres Vorgehen in den Anfangsvorlesungen nahelegen, so stehe doch dagegen die jetzt geringere Rechenfertigkeit der Studierenden und die grössere Ungleichartigkeit ihrer Vorbildung. Es sei auch gar schwer, einmal erworbene unrichtige Auffassungen zu korrigieren. Die Mathematik in der Mittelschule habe sich eben vorzüglich um jene Schüler zu bekümmern, die später nichts mehr von dieser Wissenschaft zu hören bekämen, den andern werde sie ja später in ganz anderem Ausmasse vorgesetzt.

Das Problem, den künftigen Ingenieuren und Naturforschern die passende Vorbildung und das nötige Ausmass an Rechenfertigkeit und gleichzeitig den späteren Nichtmathematikern die Fähigkeit zum richtigen Verständnis der mathematischen Elemente unserer Kultur zu geben, dieses Problem ist eben sehr schwer und noch nicht gelöst. Bloss um eine Art von Schülern hat sich die Mathematik der Mittelschule gar nicht oder fast gar nicht zu kümmern, das sind jene seltenen hohen Talente, die später bis zu eigener Forschung vordringen.

Den oben erörterten Zustimmungen stehen in den eingegangenen Antworten auch schroffe Ablehnungen entgegen. Es wird geklagt, dass eine Ueberbürdung der Schüler eintrete; sehr oft hört man, dass ein nur einigermassen zufriedenstellendes Verständnis bei der Vielseitigkeit der Lehraufgabe der Mittelschule nicht zu erreichen sei, dass auch dieser Teil der Mathematik in der Schule zu einem verständnislosen Mechanismus heruntersinke. Eine Beantwortung weist auf den fundamentalen Unterschied hin, der zwischen der auf den nächsten Zweck gerichteten Sinnesart des Realschülers und der dem Problem an sich mit Interesse gegenüberstehenden des Gymnasiasten bestehe. Die Physiker scheinen von der Infinitesimalrechnung mehr zu halten als jene Lehrer, die neben Mathematik nur noch darstellende Geometrie unterrichten. Sehr allgemein und wohl auch berechtigt ist aber die Klage, auch bei zustimmenden Urteilen, dass die jetzige Verteilung des Lehrstoffes äusserst ungünstigt sei. Die Infinitesimalrechnung reife gewöhnlich erst in dem Jahre aus, das auf den Eintritt der Physik in den Unterricht folge. Dadurch gehe das passendste Anwendungsgebiet fast leer aus. Etwas besser scheint es in dieser Sache in einem Kronlande zu stehen, in dem die Infinitesimalrechnung schon etwas früher systematisch zusammengefasst wird. Sehr allgemein und wohl ebenso berechtigt ist der Wunsch, dass Mathematik und Physik von demselben Lehrer unterrichtet werden sollen, und der Wunsch nach grosser Beschränkung im Lehrstoffe.

Man sieht also : Die Frage, ob die Einführung der Infinitesimalrechnung einstimmig als ein entscheidender Fortschritt zu betrachten sei, ist mit nein zu beantworten. Es wird sehr interessant sein, die hier niedergelegten Beobachtungen mit den Erfahrungen anderer Länder zu vergleichen, was eben eine Aufgabe der Versammlung in Paris sein wird. Bedenke ich aber, dass gerade jene Anstalten, die sich nicht mit einer ganz groben Approximation begnügen, am meisten über den Mangel an Verständnis bei den Schülern klagen, so steigen mir Zweifel auf, ob unsere Schüler überhaupt für die Infinitesimalrechnung reif sind. Ich halte daher schon jetzt die Frage für sehr diskutierbar, ob die Infinitesimalrechnung aus der Schule nicht wieder verschwinden soll. »

Iles Britanniques. — M. C. Godfrey, l'un des délégués anglais à la Commission internationale, a été empêché, pour raison de service, de se rendre à la Conférence de Paris. C'est lui qui avait été chargé de renseigner le rapporteur général pour ce qui concerne les Iles Britanniques. Son rapport a été reproduit dans le n° de janvier 1914 de la *Mathematical Gazette* sous le titre « Teaching of Calculus in Public and Secondary Schools in the United Kingdom (16 p.).

Parlant de l'accueil fait à l'introduction du Calcul des dérivées et des fonctions primitives, M. Godfrey s'exprime en ces termes :

In answering this question in the absence of definite replies from a large number of correspondents, it is difficult to eliminate one's own personal views and aspirations. The subject has been ably discussed by Mr. C. S. Jackson, in a paper entitled : « The Calculus as a School Subject », which is incorporated in Part I. of the Reports on the Teaching of Mathematics in the United Kingdom, as presented to the Cambridge Congress in 1912. Mr. Jackson's attitude may be described as sympathetic but critical.

Broadly speaking the movement has received general support. Perhaps the most powerful stimulus is that of the engineers, as represented by Prof. Perry. The physicists have long pressed for a modicum of calculus, and prefer to take it without too much mathematical rigour. The Universities have progressively included more calculus in their examination papers for schools; these papers, together with those set by the Civil Service Commissioners (for admission to the Army and the public service generally), are the most powerful lever that acts on the school curriculum. It will be understood, of course, that there is in England no general curriculum imposed upon schools: schools frame their own curricula, but tend to adapt them to the examination requirements of their pupils.

Whatever opposition there has been to an introduction of the calculus at an early stage has come from those who fear that a diminished emphasis on the manipulative and formal side of algebra will have a bad effect. The question raised is this: What algebraic equipment constitutes a firm base for a superstructure of Calculus?

This is the only articulate objection that has found a voice. But the main obstacle is that most powerful force in educational matter — vis inertiæ.

I submitted a first draft of this report to the members of the Public School Sub-committee of the Mathematical Association. I have to thank many of these gentlemen for suggestions which I have been glad to incorporate in the final report. It mus not be understood, however, that anyone shares with me the responsability for the statements made above.

Prof. Gibson informs me that my remarks may be taken as generally applicable to the Secondary Schools of Scotland.

LA PRÉPARATION MATHÉMATIQUE DES INGÉNIEURS DANS LES DIFFÉRENTS PAYS

I

RAPPORT GÉNÉRAL

présenté à la séance du 3 avril 1914

PAR

Paul STAECKEL

Professeur à l'Université de Heidelberg.

I. — Généralités[1].

Ce n'est pas par hasard que la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique a inscrit à l'ordre du jour de sa réunion de Paris, la question de la préparation mathématique des ingénieurs. C'est à Paris, en effet, que se trouve l'Ecole polytechnique, cette œuvre caractéristique de la première République, institution qui durant 120 ans a fait honneur à sa fière devise : Pour la patrie, les sciences et la gloire.

C'était une idée véritablement nouvelle que celle qui trouve son expression dans la loi de septembre 1794, et qui demandait une éducation théorique uniforme pour tous les jeunes gens désirant entrer dans certains corps militaires ou civils, l'artillerie, le génie, les mines, les constructions navales, les ponts et chaussées, etc. Pour atteindre ce but, on créa à côté des Ecoles spéciales de fondation antérieure, telles que l'Ecole des mines, l'Ecole des ponts et chaussées et d'autres, l'Ecole polytechnique. L'organisation de cette Ecole exerça une influence durable sur l'Enseignement des Mathématiques et sur la préparation mathématique des ingénieurs du monde entier.

---

[1] *Question I.* Comment la formation en vue d'une carrière d'ingénieur est-elle organisée dans l'Enseignement supérieur ? — L'entrée aux Ecoles supérieures est-elle précédée d'un enseignement particulier, comme les Mathématiques spéciales en France ? — Existe-t-il des établissements particuliers (écoles techniques supérieures) pour l'instruction des élèves-ingénieurs, ou n'y a-t-il dans ce but, que des subdivisions spéciales dans les Universités, ou bien les deux modes existent-ils simultanément ? — Une partie de la formation, en particulier la formation mathématique est-elle commune avec d'autres étudiants, par exemple avec les étudiants en Mathématiques ou en Sciences naturelles ?

D'une façon générale nous trouvons relativement à la préparation des ingénieurs deux systèmes. La plupart des pays ont adopté pour leurs écoles le système d'organisation mis en vigueur au milieu du XIX^{e} siècle à Karlsruhe et à Zurich ; ce sont les universités techniques (*Technische Hochschulen*). Ce qui caractérise ces écoles, c'est la présence d'une section consacrée aux sciences générales, sur le modèle de l'Ecole polytechnique, précédant d'autres sections spéciales pour les architectes, les ingénieurs proprement dits, les chimistes. En bien des endroits, on trouve également des sections pour les constructions navales, les mines, les eaux et forêts, l'agriculture et enfin pour la préparation des professeurs de mathématiques et de sciences physiques et naturelles. Dans ces pays, on accorde une grande importance à la réunion des différentes sections en un seul ensemble, car on pense que des écoles spéciales isolées risquent de dépérir, si l'on les destine surtout à la préparation des fonctionnaires de l'Etat.

Dans le second système, ce sont les universités elles-mêmes, utilisées déjà pour la préparation des carrières libérales, qui se chargent de l'enseignement théorique des ingénieurs. Par la création de nouveaux instituts, elles entreprennent également une étude plus étendue de certaines branches techniques.

Le premier système est en vigueur en Allemagne, Autriche, Danemark, Espagne, Hollande, Hongrie, Norvège, Russie et Suède. Naturellement il existe aussi dans ces pays, outre les Universités, d'autres écoles spéciales, comme les Académies des mines et forêts, en Allemagne, l'Ecole des voies et communications et l'Ecole des mines de S^{t}-Pétersbourg.

En France, en dehors de l'Ecole polytechnique qui dépend du Ministère de la Guerre, il y a des Ecoles supérieures qui dépendent du Ministère du Commerce et de l'Industrie ou du Ministère des Travaux Publics. Ce sont l'Ecole centrale des Arts et Manufactures, le Conservatoire des Arts et Métiers, l'Ecole des Mines, l'Ecole des Ponts et Chaussées, les Ecoles d'Arts et Métiers. Ces écoles forment des ingénieurs pour l'industrie privée, les Compagnies de chemins de fer, etc., en même temps que pour les Administrations publiques.

L'Ecole centrale recrute ses élèves en majeure partie dans les lycées. Le Conservatoire des Arts et Métiers recrute ses élèves plutôt dans le public des contremaîtres ou des ingénieurs occupant déjà des situations dans l'industrie et désirant se perfectionner.

Depuis la réorganisation des Universités françaises (1897), qui dépendent du Ministère de l'Instruction publique, plusieurs d'entre elles ont institué un enseignement technique supérieur faisant suite à leur enseignement théorique. C'est surtout dans les branches de la chimie, de l'électricité et de la mécanique que se sont développés ces enseignements techniques. Citons en particulier les Universités de Grenoble, Nancy, Lille et Toulouse.

En Angleterre l'enseignement des ingénieurs s'est développé plus tard que dans les pays continentaux. Ce n'est que vers la fin du XIX^e^ siècle qu'on a organisé des cours techniques faisant suite à l'enseignement théorique des universités. En 1907 on a fondé le Collège impérial technique à Londres, institution analogue aux universités techniques ; cependant les jeunes gens ont l'habitude d'aller travailler dans les ateliers qu'une partie de ceux-ci qui immédiatement après avoir fini leurs études théoriques et ce n'est reviennent au Collège pour compléter leurs études techniques.

La Suisse possède une Ecole polytechnique fédérale à Zurich et une Faculté technique à l'université de Lausanne.

Autrefois, en Italie, la préparation théorique des futurs ingénieurs comprenait deux années d'université suivies de trois années d'étude dans une école technique spéciale ou dans une section technique d'une université. En outre il y avait une université technique à Milan fondée par Brioschi. Récemment, on a ajouté des universités techniques complètes, avec cinq années d'études, à Turin et Padoue.

Aux Etats-Unis, où une centaine d'universités s'occupent de la préparation des ingénieurs, il en existe à peu près un tiers de nature franchement technique ; les autres sont des universités ou des collèges renfermant, à côté des sections techniques, encore d'autres sections. Le rapport de la sous-commission américaine indique les avantages qui résultent de cette réunion des différentes sections. On signale l'émulation réciproque des diverses sections ; la possibilité de se procurer de meilleurs professeurs pour de plus grands établissements et de doter plus richement les instituts et les bibliothèques ; enfin une base plus large pour la préparation des étudiants. Comme désavantages, on constate que l'enseignement prend facilement un caractère abstrait et que les étudiants s'occupent davantage de sports dans les universités que dans les collèges séparés. On peut ajouter que, tout récemment, des tentatives ont été faites dans des pays possédant des universités techniques, à Dresde et à Innsbruck, pour rattacher l'université proprement dite à l'université technique supérieure.

Quelques-unes des universités techniques ont été d'abord des écoles spéciales qui avaient été elles-mêmes fondées pour satisfaire les besoins de l'industrie. Ce n'est que peu à peu que ces écoles ont acquis le rang académique, et qu'on leur a confié la préparation des fonctionnaires techniques supérieurs de l'Etat. Ce développement progressif est lié étroitement à la question de la préparation antérieure des étudiants. Ces écoles spéciales étaient généralement pourvues d'écoles préparatoires, dont l'enseignement était organisé en vue des diverses directions à suivre ultérieurement : en outre il existait également des écoles indépendantes pour la préparation des techniciens comme les Ecoles professionnelles provinciales en Prusse et les Ecoles industrielles de Bavière. Il est remarquable que les écoles de cette nature, à part quelques rares exceptions, ont disparu dans le courant du XIX^e siècle, car l'opinion s'est de plus en plus implantée que la préparation aux diverses carrières supérieures doit être toujours précédée d'un enseignement général, permettant d'acquérir une éducation qui corresponde à l'état actuel de culture générale. Jusqu'à quel âge faut-il étendre cette instruction générale et quand peut-on commencer à prendre en considération l'individualité de l'élève ? Ce sont là des questions difficiles qui ont été fort discutées durant ces dernières années et sur lesquelles nous reviendrons.

Pour les raisons qui viennent d'être signalées, on exige partout pour l'entrée dans une université technique la preuve d'une préparation antérieure telle que celle qu'on peut acquérir dans une école moyenne, de sorte que les jeunes gens peuvent commencer leurs études à l'âge de 18 ou 19 ans. Dans le cas où une préparation de ce genre ne serait pas prouvée par des certificats officiels, on peut, dans bien des pays, remplacer ceux-ci par un examen d'entrée qui roule principalement sur les mathématiques.

En France, l'admission à l'Ecole polytechnique se fait par voie de concours; les programmes exigent des connaissances importantes puisées dans les éléments de l'algèbre, de l'analyse, de la géométrie analytique, de la mécanique rationnelle, dont l'ensemble constitue ce qu'on appelle, en ce pays, les *mathématiques spéciales*. La préparation à ce concours peut se faire dans une classe de mathématiques spéciales, d'une durée d'un an au minimum, généralement de deux ans, et qui fait suite à la classe de mathématiques élémentaires par laquelle se termine l'enseignement secondaire. D'autres classes de mathématiques spéciales organisées d'une manière analogue préparent à l'Ecole centrale. En dehors de la France, de semblables dispositions n'existent, semble-t-il, qu'au Portugal.

En Allemagne on envisage de plus en plus favorablement l'idée d'une transformation de l'enseignement des dernières classes secondaires, afin de permettre aux élèves de manifester plus librement leurs goûts et leurs dons particuliers et de faciliter le passage à la liberté académique des universités. A cette demande de réforme, il faut ajouter celle des ingénieurs qui voudraient qu'on fût en droit de supposer connus, dès le début, des cours mathématiques et de physique professés dans une université technique, les éléments d'une forme plus large qu'on ne le fait actuellement. A Zurich on est déjà arrivé à n'admettre sans examen comme étudiants, que les élèves ayant obtenu leur maturité dans un

Gymnase scientifique (Oberrealschule) suisse reconnu par le Conseil de l'École polytechnique ou ayant une préparation équivalente; par contre ceux qui ne possèdent que la maturité d'un Gymnase classique ou réal doivent subir un examen complémentaire en mathématiques.

En Russie, les jeunes gens qui se présentent à l'admission sont soumis à un triage fondé en partie sur les témoignages de maturité et en partie sur les résultats d'un concours roulant sur les mathématiques, la physique et la langue russe.

Par les observations qui viennent d'être faites, nous avons abordé la discussion de la question fondamentale de la préparation mathématique antérieure des étudiants. Les réponses qui ont été fournies par le questionnaire de la Sous-commission B montrent que les opinions sur ce sujet sont fort diverses; la question mérite par conséquent d'autant plus qu'on la traite d'une façon détaillée dans la discussion.

Il existe d'abord une opinion extrême qui trouve ses adhérents surtout parmi les ingénieurs-mécaniciens; ceux-ci veulent faire disparaître de l'université technique l'enseignement des mathématiques et des sciences physiques et le renvoyer entièrement aux écoles secondaires. Par exemple, le professeur Riedler de Berlin s'est plaint dernièrement de ce que les universités techniques ne soient pas encore devenues ce qu'elles devraient être à cause du tort que leur font les cours de sciences pures qui, à son avis, ne servent qu'à combler les grosses lacunes de la préparation antérieure.

Dans le rapport de la Sous-Commission suisse sur l'École polytechnique de Zurich l'auteur s'est exprimé très énergiquement contre l'idée d'une étude méthodique du calcul différentiel et intégral dans les écoles secondaires. L'École polytechnique, dit-il, ne peut renoncer à reprendre ces sujets depuis le début, car les bases mathématiques qui ont été inculquées dans l'enseignement secondaire aux élèves des écoles réales sont beaucoup trop peu sûres et ne peuvent guère l'être rendues davantage. En outre, la différence de conception et même de notation peut faire naître de la confusion et de l'incertitude. Enfin l'expérience montre que l'augmentation du champ des mathématiques dans l'enseignement secondaire se fait souvent au détriment des éléments, c'est-à-dire de l'algèbre, de la trigonométrie et de la géométrie analytique et est, par suite, en partie, la cause du peu de sûreté dont les élèves font souvent preuve dans ces branches.

Dans sa séance du mois de décembre 1913, la commission de l'enseignement technique, constituée par l'Association des ingénieurs allemands, qui durant ces trois dernières années a examiné la question de l'enseignement technique sous toutes ses faces, a formulé une résolution qu'il importe de signaler. D'après celle-ci, on doit exiger de la part des nouveaux étudiants, outre la sûreté et l'habileté dans l'usage des mathématiques élémentaires, une connaissance approfondie, acquise par une longue pratique, des notions de variation des grandeurs et des fonctions, y compris la représentation graphique des relations fonctionnelles, ainsi que les notions de dérivée et d'intégrale appliquées à des exemples simples et clairs. Par contre, l'étude systématique du calcul infinitésimal est réservée expressément à l'université technique.

En France, la question est encore envisagée d'une façon toute différente. A l'Ecole polytechnique et à l'Ecole centrale on exige que des candidats soient bien familiarisés avec les éléments des mathématiques supérieures, mais ceci afin de pouvoir établir sur cette base une forte culture mathématique générale On ne néglige pas, il est vrai, de prendre en considération les recherches mathématiques qui peuvent prendre de l'importance au point de vue technique dans un avenir immédiat, mais on prend bien garde que cela ne porte pas préjudice aux parties fondamentales de la théorie.

II. — Nature de l'enseignement [1].

Ceci nous amène à l'enseignement mathématique dans les universités techniques. Il peut arriver qu'une grande partie des ingénieurs qui proviennent de ces universités, une fois dans la pratique de leur métier, se servent peu des mathématiques supérieures. Par exemple, dans un questionnaire envoyé aux anciens élèves du Sibley Collège de la Cornell University, à Ithaca, environ la moitié de ceux-ci déclarèrent ne pas faire emploi des mathématiques supérieures dans leurs occupations actuelles. Or, tout ingénieur scientifique ne doit pas seulement savoir utiliser les lois et formules fondamentales, mais aussi les comprendre. Il doit être en état de suivre les progrès de la science. Il doit être capable de faire face avec honneur aux nouvelles tâches qui lui incombent. Pour cela, il ne suffit pas d'un entraînement mathématique faisant comprendre la résolution de quelques problèmes correspondant à l'état actuel de la technique. Enfin, l'enseignement mathématique dans les universités techniques a aussi pour but de développer et de fortifier la pensée abstraite.

Les professeurs de mathématiques de même que la grande majorité des ingénieurs de tous les pays civilisés sont d'avis que l'enseignement de cette branche doit avoir pour but un dévelop-

[1] *Question II.* L'enseignement mathématique vise-t-il une formation générale et est-il identique pour les étudiants des diverses branches techniques, ou bien y a-t-il une séparation suivant les diverses branches et en même temps une adaptation de l'enseignement aux besoins particuliers de chaque catégorie ?

pement général méthodique. C'est pourquoi on ne saurait recommander d'établir, lors des débuts de l'enseignement des mathématiques, une séparation des étudiants suivant les différentes branches de la science de l'ingénieur, c'est-à-dire d'organiser des cours spéciaux pour les ingénieurs-constructeurs, les ingénieurs-mécaniciens et les ingénieurs-électriciens. Par contre, on tiendra compte plus tard des besoins particuliers des diverses sections à l'aide de cours complémentaires facultatifs. Il faut encore remarquer qu'il en est autrement pour les architectes. L'enseignement mathématique a pour eux moins d'importance; il est presque partout séparé de celui des ingénieurs, quelquefois même, il est complètement supprimé.

Ce principe, d'après lequel les futurs ingénieurs doivent recevoir une éducation mathématique générale, n'est pas en opposition avec la nécessité de tenir compte dans l'enseignement de la carrière à laquelle les jeunes gens se destinent. En effet, la pédagogie exige avant tout que l'enseignement intéresse les élèves, afin de ne pas tomber dans le pire des défauts, celui de devenir ennuyeux. La plupart des sujets des cours universitaires éveillent tout de suite l'intérêt des étudiants par leur relation directe avec la vocation choisie et également par le charme de la nouveauté, spécialement si ces étudiants ont fait, comme on le recommande souvent, quelque temps de pratique à l'atelier, immédiatement après avoir terminé leurs études secondaires. Par contre, les jeunes gens ne sauront pas généralement apprécier à sa juste valeur, dès le début de leurs études universitaires, l'importance des mathématiques pour l'ingénieur. S'ils sont, en outre, surchargés par un plan d'études trop vaste, ce dont souffrent beaucoup d'universités techniques, ils négligeront en premier lieu les mathématiques, et ceci est d'autant plus à regretter qu'il n'existe aucune branche pour laquelle une interruption des études ait de plus fâcheuses conséquences. Quelques étudiants réussissent à combler les lacunes par eux-mêmes. D'autres ont recours à des répétiteurs privés; ce qu'ils emmagasineront à la hâte et superficiellement leur suffira peut-être pour passer l'examen, mais ne saura leur constituer un acquis durable pour la vie.

Pour remédier aux inconvénients visés, on a essayé, non sans résultat, de donner, dès le début, à l'enseignement mathématique une « teinte technique », c'est-à-dire de le mettre en relation avec les applications des sciences de l'ingénieur. Comment trancher cette question? C'est là un des grands problèmes non encore résolus de la méthodologie universitaire.

Une difficulté de sa solution réside tout d'abord dans le fait que plus d'un professeur de mathématiques ignore ces relations et qu'il y en a qui ne s'y intéressent pas du tout. Nous aurons à revenir sur cette circonstance en parlant de la préparation et du choix des professeurs de mathématiques pour les universités techniques ; disons déjà, toutefois, que rien ne serait plus funeste que de confier l'enseignement mathématique à des professeurs qui connaissent bien ces relations, mais ne possèdent pas à fond les mathématiques elles-mêmes.

Une autre difficulté, non des moindres, résulte du fait que les étudiants, durant les premiers semestres, ne connaissent pas suffisamment le domaine technique pour comprendre l'application des procédés mathématiques aux sciences techniques. On aurait tort de vouloir écarter cet inconvénient en introduisant dans ces exemples techniques des simplifications par lesquelles la base technique devient illusoire; on ne peut se permettre des simplifications que sur des circonstances d'importance secondaire, autrement le dommage qui en résulte est supérieur au profit qu'on en retire. En tout cas ce n'est pas la tâche du mathématicien que d'enseigner prématurément un peu des sciences de l'ingénieur, d'une façon sûrement incomplète et sans grand résultat. Pour la physique, les conditions sont plus favorables, mais c'est la mécanique surtout qui fournit une grande abondance de problèmes propres à animer l'enseignement mathématique et à réveiller chez les étudiants le sens de l'utilisation des mathématiques, sens qui n'est pas moins utile à l'ingénieur qu'un certain bagage de connaissances mathématiques.

L'essentiel dans les difficultés qui précèdent, c'est que, dans les applications des mathématiques, la recherche pratique et la recherche mathématique ne peuvent pas être séparées. Ainsi, celui qui désire enseigner aux étudiants les méthodes d'approximation graphiques, numériques et expérimentales, qui sont de la plus grande importance pour le progrès scientifique de la technique et le seront toujours davantage, ne doit pas insister uniquement sur le côté logique des recherches, il doit au contraire traiter le sujet complet en n'oubliant pas de donner des exemples concrets. Mais comment cela doit-il se faire, si les étudiants ne possèdent aucune notion claire sur l'objet de l'application ? Dans l'avenir, au lieu de restreindre les cours mathématiques, il faudra leur donner au contraire de l'extension, c'est-à-dire que, pendant les dernières années d'étude, il faudra rendre obligatoires les cours sur les méthodes modernes d'approximation.

III. — Scolarité[1].

On se rend compte, par ce qui précède, de la grandeur de la tâche qui incombe aux mathématiciens dans les universités tech-

[1] *Question III.* Combien de temps accorde-t-on à l'instruction mathématique des élèves-ingénieurs ? — Existe-t-il des cours et travaux pratiques, bien définis par un programme

niques. L'accomplissement de cette tâche leur est encore rendu plus difficile par le peu de temps dont ils disposent presque partout. Il est impossible d'établir une comparaison exacte entre les différents pays en ce qui concerne le temps consacré aux mathématiques. Le nombre d'heures par semaine qui figurent dans les programmes ne suffit pas pour cela, car on ne peut pas en déduire la somme des heures réservées aux mathématiques dans le courant des années d'études. Mais même la connaissance de cette somme n'apprendrait pas grand'chose, car c'est l'emploi des heures qui est le principal. Si, par exemple, aux Etats-Unis l'enseignement mathématique s'étend sur les cinq premiers semestres, du moins tant qu'il est obligatoire, et si durant le premier semestre la part du lion lui est réservée, cela tient à ce que, étant donné la préparation antérieure inégale des étudiants, on cherche à obtenir tout d'abord des connaissances uniformes en mathématiques élémentaires. Au second semestre seulement on commence la géométrie analytique et au troisième l'analyse supérieure qui s'étend jusqu'au cinquième semestre. Du reste, on a bien l'intention de rendre plus difficiles les conditions d'admission, afin de pouvoir supprimer, ou en tout cas resteindre, l'enseignement des mathématiques élémentaires.

Malgré les données incomplètes, on peut constater qu'il existe d'importantes différences entre les différents pays. C'est en Italie qu'on consacre le plus de temps à l'enseignement mathématique. Ici, pendant les deux premières années, de beaucoup la plus grande partie du temps est à la disposition des mathématiques: puis viennent des études techniques d'une durée de trois ans.

Jusqu'en 1890, les mathématiques jouissaient également, dans la plus grande partie des autres pays, des mêmes avantages qu'actuellement en Italie. Le mouvement impétueux qui, à cette époque, conduisit à une forte réduction des études mathématiques, devait en partie son origine au puissant développement des sciences de l'ingénieur; l'enseignement de ces sciences prenant une plus grande envergure, il a fallu leur créer de la place dans les universités techniques. L'aspect extérieur de ces écoles nous permet déjà d'apprécier combien les temps ont changé. Il y a 25 ans, ce n'était qu'un bâtiment d'études, auquel on adjoignait, le plus souvent sous forme d'agrandissements subséquents, un laboratoire de chimie et un institut de physique. Aujourd'hui, nous sommes en présence d'un ensemble de bâtiments, de destinations très différentes, et par suite de dispositions fort diverses. Nous trouvons un laboratoire électro-chimique et un laboratoire électro-

détaillé, dont la fréquentation est obligatoire et contrôlée, ou bien l'enseignement a-t-il pour base une liberté universitaire qui, dans certaines limites, laisse aux professeurs le choix des matières et des méthodes, aux élèves le choix des cours et la participation effective à l'enseignement? — Comment traite-t-on les exercices mathématiques?

technique, une série de laboratoires de machines, des instituts pour l'examen des matériaux, en certains endroits des installations pour des expériences de construction hydraulique ou de navigation aérienne, etc.

On fit encore valoir, en faveur d'une réduction des heures destinées aux mathématiques le fait qu'en raison du caractère académique des écoles supérieures techniques, seuls les jeunes gens ayant complètement terminé l'école secondaire y étaient admis comme étudiants. On pouvait donc leur supposer une meilleure préparation et par conséquent économiser du temps dans les cours théoriques.

Si l'on ne peut nier la valeur de ces motifs, il faut cependant reconnaître que le caractère plutôt uniforme des deux premières années d'études, consacrées autrefois essentiellement aux mathématiques et aux sciences physiques, présentait de gros avantages sur l'état actuel des choses. Sans doute on a bien fait d'introduire dès le début les étudiants dans les sciences de l'ingénieur, mais en exigeant déjà pendant les deux premières années l'étude approfondie d'une série de branches très différentes de ces sciences, on a produit une sorte d'éparpillement de l'intérêt qui porte préjudice au rendement de l'enseignement dans toutes les branches, mais avant tout au rendement de l'enseignement des mathématiques pour lequel une certaine concentration de l'esprit est indispensable. Une plus grande diminution du nombre d'heures équivaudrait à expulser les mathématiques et les mathématiciens des universités techniques, et détruirait ainsi ces liens et cette collaboration qui, durant des siècles, se sont montrés de la plus haute utilité pour les deux parties.

Dans le courant de ces dix dernières années, la situation des mathématiques dans les universités techniques s'est améliorée, et cela pour deux raisons. Tout d'abord, la technique moderne s'est peu à peu tellement diversifiée, que les universités techniques ne peuvent plus prétendre à faire de leurs élèves des ingénieurs accomplis, versés dans toutes les branches spéciales, ou, comme on l'a dit, à former des spécialistes universels. L'industrie et ceux qui la dirigent demandent plutôt des ingénieurs possédant une instruction générale solide pouvant être utilisée au point de vue technique. En second lieu, les sciences de l'ingénieur réclament de plus en plus l'aide des mathématiques. Tandis qu'autrefois les méthodes classiques qu'on trouve déjà, dans leurs parties essentielles, dans les traités d'Euler, suffisaient, on y a ajouté actuellement, pour citer quelques exemples, la nomographie de M. d'Ocagne et les méthodes d'approximation graphiques et numériques de M. Runge; on ne peut guère non plus se dispenser d'initier les étudiants à la théorie des vecteurs.

En résumé, l'enseignement mathématique dans les universités techniques est en train de subir une profonde transformation dont on peut reconnaître les traces dans tous les pays. Même l'Angleterre ne fait pas exception : il suffit de citer le nom de PERRY. S'il est possible de modifier peu à peu l'enseignement et de l'adapter aux exigences de l'époque, cela tient à la liberté académique laissée aux professeurs, même à ceux qui sont liés par des programmes déterminés. Le grand nombre de professeurs presque de tous les pays du monde, présents à notre réunion, nous montre combien ceux-ci s'intéressent à cette question.

On sera obligé, par suite de ces transformations, de l'enseignement, d'exiger toujours davantage de la part des étudiants. Ce n'est qu'en travaillant sérieusement qu'ils atteindront le but dans le temps prescrit ; la négligence et l'insouciance peuvent compromettre toute leur carrière. C'est pourquoi la question de savoir jusqu'à quel point l'université peut entreprendre la surveillance des étudiants, prend une importance de plus en plus grande. Remarquons que, dans bien des pays, cette liberté que possèdent les étudiants de choisir leurs cours et de les suivre ou de ne pas les suivre, selon leur convenance, n'est pas aussi absolue qu'on pourrait le croire ; en réalité elle est fortement limitée par les règlements des examens, spécialement par la mesure que les étudiants sont tenus de présenter les résultats de leurs exercices et ne sont admis aux examens que si ces résultats témoignent d'un travail suffisant.

Ces exercices ont contribué considérablement à développer l'enseignement mathématique ; ils jouent actuellement un rôle important dans tous les pays.

Suivant le procédé le plus ancien, les participants sont appelés par le professeur à tour de rôle et sont chargés de résoudre un problème au tableau ; en cas de besoin, le professeur intervient pour aider ou corriger l'étudiant. L'avantage que présente cette méthode, c'est que tous les participants peuvent se rendre compte des erreurs commises. Comme désavantages, on pourrait signaler le manque d'habileté des étudiants, la difficulté de se servir au tableau des méthodes graphiques et numériques, et le fait que le reste des étudiants n'assiste que passivement à la résolution du problème.

A côté de ce procédé existe celui des exercices individuels où chaque participant travaille pour soi, sous la direction et l'aide du professeur et de ses préparateurs. Les énoncés des problèmes sont écrits au tableau ou reproduits, dans le cas d'un plus grand nombre d'étudiants, sur des feuilles, de façon que chacun en reçoive un exemplaire ; souvent ces feuilles renferment des indications et des formules. Fréquemment, à la fin de la leçon, le professeur ou l'un de ses préparateurs exécute les problèmes, ou une partie de ceux-ci, au tableau, et l'on peut ainsi relever les erreurs et donner des explications. Spécialement en Angleterre et aux États-Unis, on attache une grande importance à ces exercices. Pour qu'ils donnent de bons résultats, le nombre des préparateurs ne doit pas être trop faible ; malheureusement il n'est pas toujours facile d'en trouver un nombre suffisant et souvent aussi on manque des moyens nécessaires à leur rémunération.

Les cours de mathématiques obligatoires qui figurent dans les plans d'études ne durent généralement que quatre semestres ; il existe même des universités techniques où l'instruction mathématique cesse déjà à la fin du deuxième semestre. Il y a en outre des cours facultatifs, mais parce que les étudiants sont déjà surchargés par les cours obligatoires, ils n'ont plus de temps pour les facultatifs. Par conséquent la mesure prise par quelques universités allemandes d'introduire les mathématiques comme branche facultative pour les examens du diplôme, n'aura pas grand effet. Cependant, cette décision, recommandée par des ingénieurs en vue, est un signe heureux de l'importance qu'on attribue aux mathématiques dans la technique. Un questionnaire adressé en 1912 aux milieux industriels par la Société des ingénieurs allemands a montré qu'il existe effectivement, pour une série de domaines, un besoin d'ingénieurs possédant une instruction approfondie dans les mathématiques et la mécanique théorique ; citons parmi ces domaines la construction des turbines à vapeur et à eau, des réservoirs, des vaisseaux, des ponts et des grues, et certaines parties de l'électro-technique. Pour la préparation d'ingénieurs de ce genre, mathématiciens et praticiens devraient agir concurremment, et, s'ils parvenaient ainsi à se connaître et à s'apprécier davantage, il faudrait s'en féliciter.

IV. — Matières et méthodes [1].

Dans ce qui suit, il n'est pas question des cours facultatifs ; les considérations sur les matières, la méthode et l'étendue de l'enseignement mathématique, auxquelles je passe maintenant, ne

[1] *Question IV.* Jusqu'où pousse-t-on l'enseignement des mathématiques aux élèves-ingénieurs ? (Dans quelles limites, par exemple, traite-t-on des équations différentielles ?) — Jusqu'à quel point pousse-t-on la rigueur dans les définitions et les démonstrations ? — Emploie-t-on des modèles et des appareils pour l'enseignement ? — Les nouvelles méthodes d'approximation sont-elles prises en considération ? — La formation des étudiants est-elle complétée, pour certaines catégories, par exemple pour les électriciens, par des cours spéciaux de Mathématiques supérieures ? — La Géométrie analytique et l'Analyse supérieure sont-elles traitées séparément ou bien réunies en un grand cours unique qui embrasse tout le calcul dans les Mathématiques supérieures ? — Quelles sont la place et l'importance des méthodes graphiques dans l'enseignement mathématique ? — Quel est le développement donné à l'enseignement de la Géométrie descriptive ? — Y a-t-il un cours particulier de Mécanique analytique, ou bien la Mécanique est-elle enseignée aux élèves-ingénieurs sous forme de Mécanique appliquée ? — Quels sont les rapports de l'Arpentage et de la Géodésie avec les Mathématiques ?

concernent que les cours obligatoires. De nombreuses questions surgissent ici, mais nous devons nous borner à ne traiter que les plus importantes.

En ce qui concerne tout d'abord l'étendue de l'enseignement, on peut observer qu'elle est bornée supérieurement par le but qu'on se propose d'atteindre, qui est de fournir aux futurs ingénieur les connaissances de mathématiques supérieures qui sont nécessaires à une étude suffisante de la mécanique et des parties fondamentales de la physique. Autrefois on s'occupait aussi dans les cours d'analyse supérieure de diverses questions ressortissant au calcul des probabilités ; en particulier on enseignait la méthode des moindres carrés que les ingénieurs-constructeurs ont quelquefois à appliquer. Toutefois, lorsqu'on eut restreint d'une façon sensible le temps consacré aux mathématiques, ces questions furent presque partout réservées aux cours de topométrie.

Si l'on se place uniquement au point de vue logique, le choix des objets d'étude n'est pas chose facile. On a pu s'en rendre compte à propos du *Syllabus of mathematics* publié par la Société pour l'avancement de l'Education des ingénieurs (*Society of Promotion of Engineering Education*) en Amérique. A la réunion de Pittsburg, en 1911, en effet, une vive discussion s'éleva relativement aux quantités complexes qui ne figuraient pas dans le plan proposé. Ce n'étaient pas les mathématiciens qui réclamaient en leur faveur, mais les ingénieurs-électriciens, ce dont il ne faut pas s'étonner dans la patrie d'un Steinmetz. Ce sont les ingénieurs qui ont obtenu l'addition au Syllabus, d'un chapitre sur les quantités complexes et leurs applications.

On admet en général que la connaissance du calcul différentiel et du calcul intégral élémentaire, c'est-à-dire l'étude de la différentiation et de l'intégration des fonctions élémentaires avec leurs applications les plus simples, ne suffit plus pour les ingénieurs. La Commission allemande pour l'enseignement technique demande dans ses résolutions de décembre 1913, que les étudiants soient en état de traiter par les mathématiques des questions comme le flambement, le support élastique, les plaques tournantes, les vibrations provoquées par des forces extérieures. Mais cela n'est guère possible qu'à la suite d'une solide instruction dans la théorie des équations différentielles. Cependant il ne s'agit pas ici de cette étude scolastique des équations différentielles où l'on s'occupe, comme au XVII[e] siècle, des équations qui se ramènent à des fonctions élémentaires ou à des quadratures. Ce qu'il faut aux futurs ingénieurs, ce sont plutôt les méthodes graphiques et numériques d'intégration des équations différentielles, qui se sont développées pendant le dernier tiers du XIX[e] siècle. Mais le temps viendra où ces méthodes se relieront aux méthodes de la théorie des fonctions qui permettent de déduire les propriétés d'une fonction de l'équation différentielle qui la définit, et en tirer des représentations qui facilitent l'étude numérique de la fonction alors que l'ancienne méthode du développement de Taylor limité à ses premiers termes échoue. C'est là un domaine dans lequel les mathématiciens pourront rendre de grands services aux ingénieurs, ce qui légitimera une fois de plus le rôie important qu'ils jouent dans les universités techniques. Actuellement on ne s'occupe de ces nouvelles méthodes d'intégration que dans peu d'établissements. Il semble cependant qu'il se prépare un revirement à cet égard ; mais sa réalisation exigera un temps considérable.

On sait qu'en matière d'enseignement les innovations ne s'implantent pas du jour au lendemain ; ainsi l'usage des modèles et des appareils n'est encore que fort peu répandu. Cependant dans plusieurs écoles on est encore plus avancé. Non seulement on y utilise l'appareil de projection, mais même la cinématographe entre en scène. Dans tous les cas, les appareils modernes de démonstration ne doivent être introduits dans l'enseignement qu'après un soigneux examen de leur valeur didactique.

Nous ne pouvons passer sous silence la question de la rigueur dans l'enseignement mathématique des universités techniques. Il ne faut pas oublier que le mathématicien y a affaire à des jeunes gens qu'il faut d'abord initier à la pensée mathématique, dont les intérêts semblent avoir au début une direction tout autre, chez lesquels les procédés déductifs ne sont généralement que peu développés, mais qui possèdent souvent des facultés intuitives bien formées. Dans les discussions relatives à ce point qui eurent lieu en 1897 et 1898 aux réunions de l'Association des mathématiciens allemands à Brunswick et à Düsseldorf, un des principaux orateurs, M. Félix Klein, a résumé son opinion en disant qu'il est avant tout important d'intéresser les étudiants des universités techniques aux problèmes de mathématiques et de leur expliquer le sens et le but des opérations mathématiques ; qu'il ne fallait pas par contre chercher à approfondir dès le début certaines questions de principe dont les étudiants ne pourront comprendre la portée et envisager les applications qu'après de longues réflexions personnelles.

Sans doute l'enseignement mathématique dans les universités techniques se fait actuellement presque partout conformément à ces idées. Il faut bien observer, de plus, que la rigueur ne doit pas être confondue avec l'axiomatique. Une déduction est rigoureuse lorsque les hypothèses, sous lesquelles elle s'opère, sont établies exactement ; par contre, l'analyse des hypothèses et leur réduction au plus petit nombre d'axiomes possible est une question d'une nature toute différente. Les élèves-ingénieurs devraient être conduits à une conception intuitive des notions mathématiques, dans la mesure où l'état de leurs connaissances et de leur expérience le leur permet : le fait que ces notions peuvent et doivent être soumises à un examen plus approfondi ne devrait être mentionné, au besoin, que lorsqu'elles seront devenues familières à l'étudiant, et lorsque celui-ci aura acquis une sûreté suffisante dans leur maniement. Autrement, il pourrait se produire des faits analogues à celui que citait M. Woodward à la réunion de la Société pour l'avancement de l'Education des ingénieurs Chicago, en 1907, savoir qu'un mathématicien, à force d'explications détaillées sur les doutes qui peuvent naître de l'emploi des séries infinies dans les calculs, en était arrivé à ce que ses élèves n'osaient plus se servir des formules d'approximation les plus simples.

Une question qui a été fort discutée aux Etats-Unis durant ces dernières années, c'est celle de l'unification de l'enseignement mathématique. On entend par cela la réunion des cours de trigonométrie, de géométrie analytique et d'analyse supérieure en un seul cours de mathématiques générales. Une fusion de ce genre a été entreprise pour la première fois, semble-t-il, dans les années 1875 à 1880, à l'Université technique de Munich, sous la direction de MM. les professeurs Brill et Klein. Les expériences faites ont été favorables, et peu à peu on a procédé de même dans presque toutes les universités techniques allemandes. En Amérique, cette unification a été introduite en premier lieu dans la plus grande des universités techniques du pays, l'Institut technologique de Boston.

La géométrie descriptive, qui est généralement enseignée par des ingénieurs et dans les sections pour ingénieurs, est restée une branche indépendante. En Allemagne, en Suisse et en Autriche, on l'enseigne en la rattachant à la géométrie de position ; cet enseignement est donné par des mathématiciens. Il convient d'observer que les relations entre la partie purement théorique et les applications techniques ont été rendues de plus en plus étroites. C'est la méthode de Monge qui est toujours le plus en vigueur ; en bien des endroits, cependant, on constate la tendance de comprendre sous le terme de géométrie descriptive l'ensemble des méthodes qui, par le moyen du dessin, servent à établir les propriétés et les relations des figures de l'espace.

Pour l'enseignement de la mécanique, qui touche de si près aux sciences techniques, les mathématiciens, autrefois nombreux, ont dû peu à peu, presque partout céder le pas aux ingénieurs. Il faut chercher la raison de ce changement dans le désir des sections techniques de réunir tous les problèmes des diverses branches techniques présentant une nature essentiellement mécanique et de les exposer d'une manière uniforme. En outre, il faut tenir compte du fait qu'en mécanique on estime souvent nécessaire d'effectuer, à l'égard des exemples, une séparation entre l'enseignement des ingénieurs-constructeurs et celui des ingénieurs-mécaniciens. Ces transformations qui s'opèrent partout ou sont en voie de s'opérer, ont des inconvénients. Selon le rapport américain actuellement la mécanique se présente en Amérique soit comme branche de la physique générale, soit comme mécanique appliquée, et, sous cette dernière forme, elle est généralement enseignée par des ingénieurs. Cependant, dit-on, l'importance de la mécanique, et la place fondamentale qu'elle occupe conduisent à désirer qu'elle soit envisagée sous ses trois aspects, physique, technique et mathématique. L'avantage qu'on en retirerait suffirait à justifier la plus grande dépense de temps qui en résulterait. C'est pourquoi les cours mathématiques devraient être suivis d'un cours spécial sur la mécanique rationnelle.

V. — Livres[1].

A côté des cours et des exercices, les étudiants ont des livres à leur disposition. Ceux-ci peuvent faciliter l'enseignement, mais non pas le remplacer : il ne faut pas désirer davantage qu'un « textbook » dirige l'enseignement.

Les manuels qui proviennent de l'enseignement même ont une valeur toute spéciale. La France, en premier lieu, nous a fourni un grand nombre d'excellents ouvrages de ce genre : de jeunes mathématiciens rédigent les cours, sous la surveillance du professeur, et des reproductions sont mises à la disposition des étudiants. Cette coutume, qui a donné de bons résultats, s'est répandue dans d'autres pays, particulièrement en Italie et en Russie.

Les traités français reproduisant avec quelques développements les cours de l'Ecole polytechnique présentent manifestement le caractère d'un enseignement ayant en vue une instruction mathématique générale ; les étudiants en mathématiques et les techniciens les utilisent avec un égal profit. Quelques-uns d'entre eux sont plus que de simples traités, ils ont eu une action décisive sur le progrès des sciences mathématiques : il suffit de rappeler à cet égard les ouvrages de Cauchy, de Hermite et de M. Camille Jordan.

Si l'enseignement mathématique pour mathématiciens et celui pour techniciens se sont peu à peu différenciés, les traités dont on fait usage, sont cependant restés longtemps les mêmes. Dans le rapport sur les traités d'analyse supérieure présenté par M. Bohlmann en 1899 à l'Association des mathématiciens allemands,

[1] *Question V.* — Quels sont les ouvrages d'enseignement en usage parmi les étudiants ? Caractériser les ouvrages suivant les points de vue indiqués à la question III.

on trouve, après la discussion des ouvrages mathematiques dans le sens propre un paragraphe sur les cours de portée philosophique et un autre sur ceux de portée physique, mais l'auteur ne parle pas des ouvrages de portée technique. En effet, à ce moment-là on n'avait que très peu de ces cours. Depuis l'année 1900, il en a été autrement ; du moins il a paru une série de traités écrits par des ingénieurs et destinés aux ingénieurs ; mais il semble que les livres dont se servent les étudiants soient écrits presque tous par des mathématiciens.

En plus, nous voudrions mentionner un livre qui n'a pas la prétention d'être un manuel, mais qui rend de grands services à l'enseignement mathématique des universités techniques, et cela aux professeurs aussi bien qu'aux étudiants. C'est le *Syllabus of Mathematics* déjà mentionné, paru en 1911, composé, à la demande de la Société pour l'avancement de l'Education des ingénieurs, par un comité de professeurs universitaires de mathématiques et de sciences de l'ingénieur et d'ingénieurs pratiques. Le Syllabus cherche à donner un aperçu des matières d'instruction mathématique indispensables à l'ingénieur scientifique ; il ne se préoccupe pas de façon dont ces matières doivent être enseignées ; à cet égard, le professeur est laissé libre d'agir selon son jugement personnel. Une deuxième édition qui sera considérablement améliorée, est en préparation. En outre paraîtront deux volumes complémentaires qui contiendront les méthodes du calcul numérique et la mécanique élémentaire.

Cet exemple de collaboration des mathématicens et des ingénieurs mériterait d'être imité partout ailleurs. C'est le meilleur moyen permettant de résoudre les grands problèmes de l'enseignement technique supérieur.

VI. — Corps enseignant [1].

Un des plus importants parmi ces problèmes est celui de la préparation d'une nouvelle génération de professeurs aptes à enseigner les mathématiques dans le sens moderne. Une demande réitérée des ingénieurs, formulée encore en 1913 par la Société des ingénieurs autrichiens, est que l'enseignement mathématique dans les universités techniques soit confié exclusivement à des ingénieurs, alors qu'il se trouve actuellement, à quelques rares exceptions près, entre les mains de mathématiciens. Pour

[1] *Question VI.* Les maîtres qui enseignent les Mathématiques sont-ils mathématiciens de carrière ? — Sont-ce des mathématiciens purs ou des mathématiciens ayant des connaissances dans une ou plusieurs branches de la Science appliquée ? — Sont-ce des ingénieurs autodidactes qui, ne possédant que les connaissances mathematiques qu'ils ont reçues comme étudiants, ont complété eux-mêmes leur instruction ?

plus d'une raison, il est à présumer qu'il en sera ainsi longtemps encore. Les jeunes gens qui embrassent les sciences techniques, ont généralement un goût d'une carrière pratique et sont peu aptes à l'enseignement. Ceux du reste qui se destinent à la carrière peu lucrative de professeurs universitaires trouvent leur emploi dans les différentes sections techniques. En outre, les connaissances acquises par un ingénieur dans le cours normal de ses études ne suffisent pas pour le rendre capable d'un enseignement mathématique utile. Dans les mathématiques comme partout le maître doit dominer son sujet ; aussi est-il nécessaire qu'il possède une instruction mathématique toute speciale. Enfin, il faut remarquer que les universités techniques ne pourront profiter des progrès des sciences mathématiques que si ses maîtres sont en contact personnel avec les chercheurs, ou encore mieux s'ils sont eux-mêmes des chercheurs.

Certainement, pour pouvoir enseigner les mathématiques à des ingénieurs, il ne suffit pas d'être mathématicien. Abstraction faite des qualités qu'il faut exiger de n'importe quel maître, et parmi lesquelles figurent en premier lieu un certain enthousiasme pour la science et le talent de faire naître cet enthousiasme chez les élèves, le maître idéal de mathématiques dans les universités techniques doit non seulement être mathématicien par ses dons naturels et une instruction soignée, mais s'intéresser à la manière de voir des ingénieurs et comprendre ce dont ils ont besoin en fait de mathématiques. Pour cela, il est nécessaire qu'il se soit occupé des mathématiques appliquées et qu'il possède une certaine expérience dans ce domaine. Des recherches dans les mathématiques pures seront les bienvenues, mais elles ne sont pas absolument nécessaires ; à défaut de ces recherches, il faut exiger une activité scientifique dans le domaine des applications.

L'essentiel pour le maître c'est d'acquérir les qualités qui viennent d'être citées et qui le rendront apte à son enseignement ; la facon particulière, par laquelle il les aura acquises est moins importante. Disons toutefois que la formation d'un professeur de mathématiques dans une université technique a généralement pour point de départ les études universitaires de mathématiques pures et appliquées qui conduisent au doctorat. Il sera avantageux pour lui de passer quelque temps dans une université technique ou dans une université proprement dite lui fournissant l'occasion d'une pratique plus approfondie des différentes branches des mathématiques appliquées. Avant d'entrer dans la carrière académique, il pourrait faire un stage dans l'enseignement secondaire, car on y apprend mieux l'art d'enseigner que dans une université ; d'ailleurs, un professeur à l'université devrait connaître par sa propre expérience les établissements d'où proviennent ses élèves. En même temps ou immédiatement après, le futur professeur devrait occuper une place de préparateur de mathématiques ou peut-être être associé à l'enseignement d'un des cours facultatifs supérieurs suivis par des d'étudiants désirant approfondir leur instruction au point de vue mathématique ou mécanique.

Conclusion.

Pendant le dernier siècle, le développement des mathématiques s'est effectué dans deux directions en apparence opposées. Notre science a été arithmétisée, c'est-à-dire débarrassée de ses parties empiriques et ramenée à ses bases logiques. Mais, à côté de cela, le domaine des applications a pris une extension énorme ; conformément à la devise de l'Université technique d'Aix-la-Chapelle : *Mens agitat molem,* les mathématiques méritent d'être considérées comme l'un des plus puissants moyens de l'esprit humain qui dominent l'inertie de la matière. Cette séparation, cependant, ne doit pas par trop s'accentuer. Livrée à elle-même, la théorie pure court le risque de dégénérer en une scolastique stérile, mais d'autre part la déesse de la science refuse sa faveur à celui qui ne regarde qu'à l'utilité. Sachons donc considérer l'ensemble des mathématiques comme une science uniforme, indivisible, dont les progrès reposent sur les relations vivantes de ses différentes parties et sur leur action réciproque. Cette pénétration mutuelle des mathématiques pures et appliquées était le sujet de la brillante conférence donnée en 1910 à la réunion de Bruxelles par notre regretté collègue Bourlet. Il a atteint le but élevé qu'il caractérisait alors par ces belles paroles : « Sans rien sacrifier des qualités de rigueur, de logique et de précision qui sont l'apanage des mathématiques, nous saurons y discerner l'essentiel, y mettre en évidence les moyens les plus propres à préparer les élèves à la compréhension des sciences expérimentales. La limite entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées n'existe pas, car ces deux sciences, loin d'être séparées, doivent sans cesse s'entr'aider et se compléter. Cette pénétration est le gage d'un progrès certain ».

Lorsque l'enseignement des mathématiques dans les universités techniques se fera dans cet esprit, nous pourrons regarder avec confiance dans l'avenir. C'est alors que se réalisera sans doute ce que M. Tyler disait dans le rapport américain. « On peut fonder de hautes espérances sur le développement futur d'une science qui a fait preuve de sa vitalité en face des prétentions des astronomes, des physiciens et des ingénieurs. Les mathématiciens dans les universités techniques feront bien cependant de ne pas exagérer l'importance du rôle que pourront dans cet ordre d'idées jouer les mathématiques. S'ils apportent leur part de contributions au progrès des mathématiques, s'ils savent utiliser avec économie et d'une manière efficace le temps restreint dont ils disposent, pour doter les étudiants de la technique d'une base solide de connaissances mathématiques et les rendre capables de s'en servir, s'ils cherchent d'une façon intelligente à reconnaître et à satisfaire les exigences mathématiques des diverses branches techniques, s'ils ont en vue l'utilité commune et n'insistent pas trop sur les finesses de leur science, ils sauront maintenir la dignité et l'intégrité des mathématiques ».

Annexe : Liste des documents fournis par les délégués.

Le travail de M. Staeckel était basé sur les documents fournis par les délégués et comprenant :

a) Les rapports publiés antérieurement par les sous-commissions nationales ;

b) Les réponses rédigées par les délégués en réponse au questionnaire élaboré par le Comité central.

Allemagne. — *a)* Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission. Band IV : Die Mathematik an den technischen Schulen, Heft 9, P. Staeckel, Die mathematische Ausbildung der Architekten, Chemiker, und Ingenieure an den deutschen Technischen Hochschulen. Unter der Presse.

Abhandlungen und Berichte über technisches Schulwesen, veranlasst und herausgegeben vom Deutschen Ausschuss für technisches Schulwesen. Bd. IV : Berichte aus dem Gebiet des technischen Hochschulwesens, Leipzig 1912, p. 12-34. P. Staeckel, Die mathematisch-naturwissenschaftliche Ausbildung der Ingenieure.

b) Réponses au questionnaire par toutes les Universités techniques allemandes.

Australie. — Réponses de M. Carslaw, Sidney.

Autriche. — *a)* Berichte über den mathematischen Unterricht in Oesterreich, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission. Heft 5, E. Czuber, Der mathematische Unterricht an den technischen Hochschulen, Wien 1910.

b) Renseignements complémentaires par M. E. Czuber, Vienne.

Belgique. — *a)* Le tome II des Rapports sur l'enseignement mathématique en Belgique contiendra un rapport de M. Neuberg, L'enseignement des mathématiques dans les Universités et Ecoles techniques supérieures.

b) Réponses de M. Neuberg, Liège.

Danemark. — *a)* Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission. Der Mathematikunterricht in Dänemark, Bericht erstattet von Paul Heegaard, Kopenhagen 1912, Kapitel IX : Die Universität und die technische Hochschule, p. 85-87, 94-97.

b) Réponses de M. Heegaard, Copenhague.

Espagne. — *a)* L'enseignement des mathématiques en Espagne, tome I, Madrid 1912, Gaztelu ; Les mathématiques à l'école des ingénieurs des ponts et chaussées ; TORNER, Les mathématiques à l'École d'ingénieurs des eaux et forêts ; MATAIX et TERAN, L'enseignement des mathématiques à l'Ecole centrale des ingénieurs industriels, p. 75-124.

b) Réponses de M. GAZTELU, Madrid.

Etats-Unis. — *a)* International Commission on the teaching of mathematics, the american report. Committee IX. Mathematics in the technological schools of collegiate grade in the united states. Washington 1911.

b) Réponses au questionnaire par M. D. E. SMITH, New-York ; renseignement par TYLER, Boston.

France. — *a)* Commission internationale de l'enseignement mathématique, Sous-commission française, Rapports, volume III, Paris, 1911. VOGT, Sur l'enseignement mathématique dans les instituts techniques des Facultés des sciences, p. 53-64 ; HUMBERT, Sur l'enseignement mathématique à l'Ecole polytechnique, p. 85-96. Volume IV, Paris, 1911 : BOURLET, Rapport sur l'enseignement des Mathématiques au Conservatoire National des Arts et Métiers, p. 173-182 ; APPELL, Rapport sur l'enseignement mathématique à l'Ecole centrale des Arts et Manufactures, p. 183-208.

b) Réponses au questionnaire pour l'Ecole polytechnique, par M. d'OCAGNE, Paris.

Hollande. — *a)* Commission internationale de l'enseignement mathématique, Rapport sur l'enseignement mathématique dans les Pays-Bas publié par la Sous-commission nationale sous la direction de M. CARDINAAL, Delft, 1911, Académie technique, p. 83-99.

b) Réponses de M. CARDINAAL, Delft.

Hongrie. — *a)* Internationale Mathematische Unterrichts-Kommission, Ungarische Subkommission. RADOS, Der heutige Stand des mathematischen Unterrichts am königlich ungarischen Josefs-Polytechnikum (Technische Hochschule zu Budapest), Budapest, 1911.

b) Réponses par M. KÜRSCHÁK, Budapest.

Iles Britanniques. — *a)* The teaching of mathematics in the united kingdom, being a series of papers prepared for the international commission on the theaching of mathematics. No 21. HOPKINSON, The relation of mathematics to engineering at Cambridge. No 26. ABBOTT, The preliminary mathematical training of technical students. London, 1912.

b) Le rapporteur n'a reçu aucune réponse au questionnaire.

Italie. — *a)* Commissione internazionale dell'insegnamento matematico, Atti dells sottocommissione italiana. SCORZA, L'insegnamento della matematica nelle scuole e negli istituti tecnici. Roma, 1911 ; voir aussi *Bollettino della Mat.* Anno III, 1911.

b) Réponses au questionnaire par M. LEVI-CIVITA, Padoue.

Japon. — *a)* Report on teaching mathematics in Japan, Tokio, 1912. SHIBATA and YOKOTA. The teaching of mathematics in the faculty of technology of the Tokio Imperial University, 7 pages ; OTASHIRO, The teaching of mathematics in technical schools and colleges, 43 pages.

Norvège. — *a)* Le rapport sur l'enseignement mathématique en Norvège n'est pas encore paru.

b) Réponses au questionnaire par MM. ALFSEN et BIRKELAND, Christiania.

Portugal. — *a)* Le rapport sur l'enseignement mathématique en Portugal n'est pas encore paru.

b) Réponses au questionnaire par M. TEIXERA, Porto.

Roumanie. — *a)* Le rapport est en préparation.

b) Pas de réponses.

Russie. — *a)* Commission internationale de l'enseignement mathématique. Sous-commission russe. Possé, Rapport sur l'enseignement mathématique dans les universités, les écoles techniques supérieures et quelques-unes des écoles militaires, St-Pétersbourg, 1910.

b) Réponses au questionnaire par M. Possé, St-Pétersbourg.

Serbie. — Réponses au questionnaire par M. Gavrilovitch, Belgrade.

Suède. — *a)* Berichte und Mitteilungen, veranlasst durch die schwedische Abteilung der Internationalen Mathematischen Unterrichts-Kommission. H. v. Koch, Die Mathematik an der Technischen Hochschule in Stockholm, Stockholm, 1910.

b) Pas de réponses.

Suisse. — *a)* Internationale mathematische Unterrichts-Kommission. Schweizerische Subkommission. Berichte N. 7, Grossmann, Der mathematische Unterricht an der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich, Basel und Genf, 1911.

b) Réponses au questionnaire par M. Grossmann, Zurich, et M. Lacombe, Lausanne.

II

DISCUSSION

Sur la préparation mathématique des ingénieurs.

1. — Indications complémentaires
fournies par les délégués.

Allemagne. — M. W. von Dyck (Munich) : Les différentes écoles préparatoires (ou plus généralement les différents états des connaissances préparatoires acquises avant l'entrée à l'école) ne peuvent pas dispenser l'Université technique de faire un cours général de Calcul différentiel et intégral et de Géométrie analytique. Les écoles moyennes ont la possibilité d'obliger les écoliers de résoudre des devoirs spéciaux, de faire des exemples numériques, et cela est nécessaire pour que les élèves acquièrent une certaine *pratique du calcul*. Mais donner les grandes lignes du calcul infinitésimal devrait être réservé à l'enseignement de l'Université. En outre, je pose une question que l'on pourrait traiter dans la discussion de l'après-midi : « quelle est la durée des études techniques supérieures après l'enseignement secondaire, et combien de temps consacre-t-on spécialement aux études théoriques ? » En Allemagne la durée des études à l'Ecole technique supérieure est en général de quatre ans, dont deux pour les études théoriques. C'est la stricte volonté des ingénieurs pratiques que le temps de quatre ans ne soit pas dépassé pour les études régulières.

L'enseignement secondaire doit se borner à des questions spéciales, à des exemples de calcul différentiel et aux éléments de la géométrie analytique (constructions et équations de courbes, sections coniques).

La vue générale sur l'esprit du calcul infinitésimal et sur les applications géométriques doit être réservée à l'Université, où les étudiants ont une maturité suffisante.

France. — M. d'Ocagne : En raison du caractère très particulier, souligné dans le rapport de M. Stäckel, de l'Ecole Polytechnique de Paris, il y a lieu de signaler le point que voici : l'Ecole Polytechnique ne doit pas être envisagée indépendamment des écoles d'applications qui y recrutent leurs élèves (Mines, Ponts et Chaussées, Génie maritime, Télégraphes, etc...). Leur ensemble constitue, de fait, ce qui, dans le rapport de M. Stäckel, est désigné sous le nom d'Université technique. Des circonstances historiques, des nécessités administratives particulières à la France, ont conduit à faire des diverses parties de ce tout des établissements distincts, en réalité, il existe, entre l'Ecole Polytechnique (division théorique commune) et les écoles d'application (divisions techniques diverses) une étroite corrélation que sanctionne la présence, dans le conseil de perfectionnement de l'Ecole Polytechnique, de représentants qualifiés de ces diverses branches techniques.

Il ne faudrait d'ailleurs pas croire que l'Ecole Polytechnique se borne à fournir des fonctionnaires à l'Etat. Un bon tiers, au moins, de ces élèves, soit après un certain nombre d'années passées au service de l'Etat, soit immédiatement après avoir satisfait à leurs obligations militaires, se dirigent vers des carrières libérales d'ingénieurs, cette circonstance est de nature à rendre plus exacte l'analogie indiquée de l'Ecole Polytechnique et de ses Ecoles d'application avec une Université technique.

Iles Britanniques. — M. A. R. Forsyth, Professeur à l'Imperial College of Science and Technology, à Londres : In offering some observations supplementary to the interesting report to which we have listened with much intellectual profit, I must appeal to the Congress for their indulgence when I speak in my own language. My remarks will be concerned with the academic training of engineers in so far as they are trained in mathematics and cognate subjects (such as graphics and practical geometry) in the various institutions of the United Kingdom ; and I do so the more readily because the report deals very slightly with the matter, so far as these institutions are concerned.

Without attempting to enumerate all of them, I would refer first to some of the Universities. There are special faculties or schools of Engineering in Cambridge, Oxford, Manchester, Liverpool, Leeds and Sheffield ; also at Glasgow, Edinburgh ; and at Dublin.

The courses are designed, in varying ways, for various classes of students: but, in all the courses, mathematics play an important part. Again, the amount of time devoted to mathematics is not the same throughout; nor is the distribution of the allowed time the same. But, in all of them, mathematics is an essential part of the training, which aims at giving a theoretical training, and some acquaintance with matters of practice, rather than at producing young engineers.

But in addition to these University course, there are Colleges and schools of a technical character. Of one of these, the Imperial College of Science and Technology in London, I wish to speak in particular, as being concerned with the teaching and the organisation of mathematics in the widest sense of the word in that College. There are several constituent bodies in the College as will be seen from the Calendar, a copy of which I have the honour to offer to the President for the use of the Commission. And we have many classes of students (I am not thinking of branches of science in general). There are groups of students for Mining Engineering, for Mechanical Engineering, for Civil Engineering, for Electrical Engineering, for the engineering necessary in connection with the technology of the Oil industries. In all of the courses, though not to the same extent, mathematics is a necessary part of the training. For some, the knowledge only proceeds as far as a reasonable working knowledge of the differential and integral calculus, so far as concerns pure mathematics; for others, a sound working knowledge of the useful processes of the differential equations, which occur in mechanics, is required, together with other subject of the same range. We have one class of students, specially interested in mathematics and not solely in engineering; they consist of young men, who have had some scientific training, then have passed a few years in practical works, and then come to us for two or three years under special encouragement in order to pursue their studies in applied mathematics, in some work connected with the theories in technical mechanics, and not a few of them in selected branches of pure mathematics. In regard to such students, the avowed significance of mathematics in the whole course of their training is obvious.

As regards the ideals prevalent in British institutions which train engineers, there has been divergence in the past as regards the amount of mathematics which should be included in the training of engineers. The mathematicians demanded more than the event ultimately allowed; the engineers refused to give as much as present tendencies now concede and even compel. I do not wish to dwell upon this divergence which has largely disappeared under the pressure of experience; I would rather refer to the decision of the Institution of Civil Engineers in England, whose decision requires that, in order to qualify for Membership, it will be necessary to undergo a combination of practical work and theoretical training, in the latter of which there occurs a sufficient amount of mathematics in those branches bearing upon practical issues. In regard to the whole of this part of the subject, I would refer to the extremely interesting paper read by the late Sir W. H. White at the international congress of mathematicians held in Cambridge in 1912; the paper is printed in the Proceedings of that congress.

In so far as my own observation and knowledge extend, I am of the opinion that the oscillating divergence, between the opinions of mathematicians and engineers as regards the amount of mathematics to be included in the best training of engineers, is disappearing to some considerable extent. The mathematicians can pursue their researches and can obtain their results, and time will test and sift the value of their results; but engineers cannot, generally, be expected to devote supreme attention to results that seem removed from the range of their practical aims. On the other hand engineers, in their practical aims, seek for immediate results to meet the urgent needs of mankind; and their results, also, are tested and sifted by time, more swiftly even that those of the mathematicians. They are faced by new demands which arise in extended solutions of older questions; an instance is to be found in the ever-changing problems of naval architecture. There, engineers find new conditions requiring the help of mathematics; the mathematicians need all their knowledge even to attempt the solution of the problems propounded. But, as regards the ordinary training of students in engineering, these considerations do not arise directly, they only shew the necessity for the assistance of mathematics in even the most advanced stages of engineering while, of course, the mathematical results must be controlled in their application by experiment and experience. The foundations, at least sufficiently broad for immediate needs, must be laid in the earliest stages of training.

Just one remark in conclusion. For the most part, the mathematical teaching of engineering students in the best courses in England is given by mathematicians; but it must not be supposed (as is almost implied by the report) that the character of that teaching has been much affected by Professor Perry, stimulating as was his teaching for many sections of students. This teaching was directed to a special method of teaching mechanics, a method which often substituted graphical and arithmetical processes for processes of a more directly mathematical character. The changes in English mathematical teaching are wide spread, in the Universities more particularly; and an inspection, even of only the textbooks that have been produced and are being produced, will shew the profound transformation that has taken place in the spirit of mathematical teaching in the principal centres of England.

Italie. — M. Padoa ajoute qu'à Gênes il y a aussi une Ecole navale supérieure, qui est une Université technique autonome pour la création des ingénieurs constructeurs navals.

Les deux premières des cinq années du cours sont consacrées aux Mathématiques, dont l'enseignement est confié à des mathématiciens.

Roumanie. — M. J. Rallet, professeur à l'Université de Jassy: En Roumanie il existe une école d'ingénieurs, l'Ecole des Ponts, à Bucarest; elle est organisée un peu sur le type de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures de Paris avec cette différence que le concours d'entrée se passe sur les matières du lycée. A la suite de ce concours, les élèves sont admis dans une année préparatoire qui correspond aux mathématiques spéciales de France, puis ils commencent les études d'ingénieur comprenant une année théorique et deux années d'études techniques proprement dites. Pour l'année préparatoire et l'année théorique ce sont des mathématiciens, généralement professeurs à l'Université, qui font les cours.

Nous avons en outre encore une autre école d'ingénieurs, l'Ecole d'application d'Artillerie et de Génie dont les élèves sont recrutés parmi les élèves du Lycée militaire de Jassy.

En plus, on tend à créer des instituts techniques rattachés aux Universités, comme par exemple, l'institut électrotechnique de la Falculté des Sciences de Jassy et d'Agronomie de la même faculté.

Quoique encore à l'état embryonnaire, ces deux instituts commencent néanmoins à donner des résultats assez satisfaisants.

Serbie. — M. B. Gavrilovitch, professeur à l'Université de Belgrade : Après l'excellent exposé de M. Stäckel, je n'ai pour le moment rien à ajouter au rapport que j'ai eu l'honneur de lui transmettre sur l'enseignement mathématique, de l'organisation et des cours professés à la Faculté technique de l'Université de Belgrade. Pourtant, permettez-moi de vous dire que la question de l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire a été accueilli chez nous, en Serbie, avec un enthousiasme bien déclaré. Chez les nations qui ont à peine dans leur développement, passé les premiers seuils de la civilisation, il n'y a pas de tradition et une idée en général et surtout une idée nouvelle, devient très facilement l'idéal même d'une génération. Par conséquent, dans ces circonstances la réalisation de cet idéal n'est pas empêchée ou retardée par des questions de tradition. Au point de vue théorique nous sommes d'accord, en Serbie, que l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans l'enseignement secondaire est une question d'une importance très profonde.

Mais y a une question pratique que j'oserais peut-être poser ici. Chez nous, l'enseignement secondaire est organisé à peu près comme en Allemagne ou en Autriche. Nous n'avons pas de classes de Mathématiques spéciales ; nous avons des gymnases proprement dits, des gymnases réaux et des écoles réales (Ober-Realschule). Je voudrais bien savoir si le Calcul différentiel et intégral devrait être introduit dans tous les types des écoles mentionnées ou peut-être seulement dans quelques-uns de ces types, disons, dans les gymnases réaux et les écoles réales.

Cette question a été posée hier sous une autre forme par M. Possé ; il serait désirable de la voir discutée par le congrès[1].

2. — Discussion générale.

Au début de la séance du vendredi après-midi, M. Fehr, secrétaire-général, rappelle qu'un Congrès international de l'enseignement technique a eu lieu à Bruxelles en septembre 1910, et que plusieurs membres de la Commission y ont pris part. Il signale le rapport rédigé à cette occasion par M. le Prof. W. von Dyck sur « l'enseignement des sciences mathématiques, naturelles et techniques dans les Ecoles supérieures » (67 p. in-8°).

Afin de faciliter la discussion, M. le prof. P. Staeckel a résumé comme suit son rapport sur la préparation mathématique des ingénieurs :

Résumé du Rapport Général de M. Staeckel.

Sur la préparation mathématique des ingénieurs.

1. — **Généralités.** — *a)* Relativement à la préparation des ingénieurs il y a deux systèmes. La plupart des pays ont adopté le système des Universités techniques ; dans les autres pays ce sont les Universités proprement dites qui se chargent de l'enseignement théorique des ingénieurs ; l'enseignement technique se fait soit dans les sections techniques des Universités, soit dans les Ecoles d'application. Dans quelques pays il y a mélange des deux systèmes.

b) On exige, pour l'entrée dans l'enseignement technique supérieur, la préparation par une école secondaire ou une préparation

[1] Faute de temps, cette question n'a pas pu être reprise. Mais on peut affirmer que tous ceux qui sont favorables au mouvement de réforme sont généralement d'accord pour demander, qu'en raison de leur importance fondamentale, les premières notions de fonctions, de dérivées et de fonctions primitives soient enseignées dans toutes les sections de l'enseignement secondaire supérieur. (Voir le rapport de M. Beke.) H. Fehr

équivalente. Il y a des ingénieurs qui veulent renvoyer l'enseignement des mathématiques et des sciences physiques entièrement aux écoles secondaires, tandis que les mathématiciens et la plupart des ingénieurs sont convaincus que l'étude systématique du calcul infinitésimal doit être réservée à l'Université.

c) En France on donne un enseignement étendu des mathématiques supérieures dans les classes de mathématiques spéciales.

II. — **Nature de l'enseignement.** — *a)* Les professeurs de mathématiques et la plupart des ingénieurs sont d'avis que l'enseignement des mathématiques doit avoir pour but un développement général méthodique.

b) On ne saurait recommander d'établir une séparation de cet enseignement suivant les différentes branches des ingénieurs.

c) On doit tenir compte, dans l'enseignement mathématique des ingénieurs, de la carrière à laquelle les jeunes gens se destinent, et lui donner dès le début une teinte technique. Mais ce n'est pas la tâche des mathématiciens d'enseigner prématurément la science de l'ingénieur.

III. — **Scolarité.** — *a)* Il faut convenir que le puissant développement de la technique a rendu nécessaire une réduction des heures consacrées aux études mathématiques. Il y a une certaine compensation dans la meilleure préparation des étudiants qui permet d'économiser du temps en élevant dès le début le niveau de l'enseignement.

b) D'un autre côté, les sciences de l'ingénieur réclament de plus en plus l'aide des méthodes modernes des mathématiques supérieures.

c) On peut espérer que les professeurs de mathématiques réussiront à adapter l'enseignement aux exigences de l'époque si on leur laisse une certaine liberté.

d) Il faut attacher une grande importance aux exercices mathématiques, surtout aux exercices individuels.

IV. — **Matière et méthode.** — *a)* L'étendue de l'enseignement mathématique est bornée supérieurement par le but de fournir aux futurs ingénieurs les connaissances de mathématiques supérieures nécessaires à une étude suffisante de la mécanique et des parties fondamentales de la physique.

b) La connaissance du calcul différentiel et du calcul intégral élémentaire ne suffit plus pour les ingénieurs. Il leur faut en outre les méthodes graphiques et numériques d'intégration des équations différentielles qui se sont développées dans le dernier tiers du XIXe siècle.

c) Question de rigueur. Il ne faut pas chercher à approfondir, dès le début de l'analyse supérieure, les questions de principe dont les jeunes étudiants ne peuvent comprendre la portée. Il faut bien établir exactement les hypothèses sous lesquelles les déductions s'opèrent, mais il ne faut pas enseigner l'axiomatique.

d) L'unification. La réunion des cours de géométrie analytique et d'analyse supérieure en un seul cours de mathématiques générales a eu de bons résultats.

Nous donnerons ci-après un compte rendu aussi fidèle que possible, mais forcément bien écourté, de l'intéressante discussion sur les questions si complexes que présente l'organisation des études mathématiques dans les écoles d'ingénieurs.

1, *a. Généralités.* — M. G. Fano, professeur à l'Université et à l'Ecole polytechnique de Turin. — En Italie, depuis 1860 jusqu'à il y a 6 ans environ, nous avons toujours suivi le second système (Universités proprement dites, suivies d'écoles techniques), sauf une seule exception : l'Ecole polytechnique de Milan, créée par Brioschi et qui était une véritable Université technique. Les résultats ont été bons, sans doute. L'Ecole des Ingénieurs de Turin, réorganisée et rendue autonome par la loi de 1906, qui eut seulement en 1908 pleine exécution, a été constituée en Université technique complète à la suite de circonstances particulières, même locales et financières, qui à ce moment s'imposèrent. La plus grande partie de nos mathématiciens n'étaient pas favorables au changement ; puisque nous n'avons pu l'éviter, nous l'avons accepté de bon gré, et il s'est accompli, en effet, d'une façon très satisfaisante, d'autant plus que les professeurs de mathématiques de la nouvelle Université technique étaient presque tous les mêmes qu'auparavant à l'Université. A Padoue aussi on a donné à l'Ecole des Ingénieurs un cours complet, en lui conservant les cours de mathématiques en commun avec la Faculté des Sciences. — Je crois à présent que tous les deux systèmes peuvent donner de bons résultats, pourvu que, dans les Universités techniques, les cours de mathématiques soient confiés à des mathématiciens. Mais, s'il m'est permis d'exprimer mon opinion personnelle, j'aime toujours beaucoup mieux notre ancien système italien, qui est toujours en vigueur chez nous, seuf à Milan, Turin et Padoue (Ecoles qui sont même obligées de recevoir dans leur troisième année les étudiants venant des Facultés de Sciences). Je crois aussi très avantageux pour les étudiants du cours de mathématiques des Facultés de Sciences, de recevoir quelques cours en commun avec les ingénieurs ; ils auront ainsi l'occasion de rester en contact avec le monde réel et les applications. Dans la suite de leurs études, ils ont encore bien du temps et de nombreux cours pour se familiariser avec la science.

M. d'Ocagne, professeur à l'Ecole polytechnique et à l'Ecole des Ponts et Chaussées, Paris, dit : Il est bien entendu qu'il n'y a pas pour les ingénieurs des mathématiques distinctes de celles qu'étudient les mathématiciens ; mais, si vaste est le domaine de ces sciences que, dans leur enseignement on peut tout de même faire un peu varier les points de vue, suivant le but poursuivi, en insistant, par exemple, davantage sur telle ou telle partie des théories générales.

A l'Ecole Polytechnique, notamment, l'enseignement des mathématiques pures (analyse et géométrie), celui de l'analyse surtout, a très sensiblement évolué depuis quelques années de façon à donner plus d'extension aux théories qui intéressent plus particulièrement les applications à la mécanique et à la physique, sans toutefois rien sacrifier, comme M. Stäckel l'a très justement fait remarquer dans son rapport, des principes qui sont unanimement considérés comme fondamentaux.

Cette préoccupation ne doit pas prédominer dans les Universités proprement dites où elle risquerait d'entraver le développement de la science purement désintéressée.

Il est clair qu'on ne doit pas chercher à creuser un fossé entre les enseignements des deux ordres suffisamment mis en contact par les rapports scientifiques qu'ont nécessairement entre eux leurs maîtres respectifs ; mais il semble plus avantageux de maintenir à chacun son autonomie.

M. G. Fano (Turin). — M. d'Ocagne craint qu'en faisant suivre aux ingénieurs les cours de mathématiques dans les Facultés des Sciences on ne puisse suffisamment tenir compte des questions, qui pour eux, ont précisément le plus grand intérêt. Or, chez nous on a constaté, et à Rome, à Naples, il arrive encore, que, parmi nos étudiants, des cours de mathématiques des deux premières années, les neuf dixièmes et même plus sont des ingénieurs ; et beaucoup de professeurs font justement des cours arrangés en vue de la plus grande utilité de ces derniers. Moi-même, je faisais ainsi jusqu'en 1908, c'est-à-dire avant la constitution de notre Université technique.

J'admets toutefois que mes opinions ne peuvent avoir une valeur absolue ; il faut faire leur part aux conditions locales, même aux professeurs dont on dispose.

Je ne crois absolument pas que l'enseignement donné en commun à des groupes différents d'élèves, pendant un ou deux ans au plus, puisse entraver le développement de la science. C'est dans les cours supérieurs seulement que nos étudiants de mathématiques sont dirigés vers des recherches scientifiques ; et il serait même très bien que pour quelques-uns d'entre eux ces recherches puissent avoir pour objet des problèmes vraiment importants pour les applications.

M. Lechatelier, membre de l'Institut, ne croit pas que les méthodes d'enseignement des Universités scientifiques doivent nécessairement être différentes de celles des Universités techniques. Le motif principal pour reporter aux Universités techniques l'enseignement des sciences pures est surtout qu'elles ont une *organisation*, une orientation vers un but précis, qui leur permet d'obtenir une formation scientifique des jeunes gens, plus complète dans un temps donné que l'enseignement dispersé, sans but homogène des universités purement scientifiques. Mais l'on peut concevoir l'organisation d'Universités scientifiques mieux organisées, et alors la préférence à donner à l'un ou l'autre système n'est plus évidente. C'est une question d'espèce.

M. E. Czuber, professeur à l'Ecole technique supérieure de Vienne (Autriche), estime que seule l'Université technique est en mesure de tenir compte d'une manière satisfaisante des besoins de la technique.

« Bei der Gründung des ersten polytechnischen Instituts (1806, Prag) in Oesterreich hat man das 2. System gewählt und die mathem. und physikalischen Fächer an die Universität verlegt ; man ist aber bald von dieser Fusion abgegangen und hat das polytechnische Institut zu einer selbständigen Schule ausgestaltet. Als man 1815 in Wien an die Gründung des polytechnischen Instituts schritt, wurde der Versuch einer Verbindung mit der Universität nicht mehr wiederholt. Im Laufe der späteren Zeit ist wiederholt der Gedanke einer Fusion neu aufgetaucht, aus Gründen der Oekonomie, er ist aber immer mit genau denselben Gründen bekämpft worden, welche Herr d'Ocagne betreffs des Studiums der mathem.-naturwissenschaftlichen Fächer an den Universitäten einerseits und für die Bedürfnisse der Ingenieure andererseits angeführt hat. In neuester Zeit erst sind wieder Bestrebungen aufgetreten, an einzelne Universitäten technische Abteilungen anzugliedern (z. B in Innsbruck), aber nicht aus innern Gründen, sondern um auf diese Weise einzelnen Ländern einen neuen Bildungsweg zu eröffnen auf eine leichtere Weise, als dies durch die kostspielige Schaffung einer selbständigen technischen Hochschule möglich wäre. Doch handelt es sich hier nur um spezielle Zweige der Technik, die man im Anschluss an die Universitäten zur Pflege bringen will. Die Ueberzeugung in Oesterreich geht dahin, dass nur selbständige technische Hochschulen in der Lage sind, für die Aufgaben der Technik entsprechend vorzubereiten und die technischen Wissenschaften zu kultivieren. »

M. Possé, professeur émérite de l'Université de St-Pétersbourg. En Russie, l'Institut des ingénieurs de voies de communication a été organisé d'après le type de l'Ecole des Ponts et Chaussées à Paris. En 1881, on a été forcé, par des raisons qu'il serait trop long d'énumérer, mais d'un caractère plutôt économique que pédagogique, de clore les deux premiers cours, où les mathématiques étaient enseignées, et de n'admettre que les jeunes gens ayant un diplôme universitaire d'une Faculté physico-mathématique. Après une expérience de cinq ans on est revenu à l'ancien système et a restitué l'enseignement mathématique à l'Institut même. On s'est persuadé que la préparation mathématique universitaire était : 1° trop longue ; 2° ne correspondait pas aux exigences d'une école technique.

M. Vogt, directeur de l'Institut Electrotechnique et de mécanique appliquée de Nancy, estime qu'il y a place pour les deux systèmes : Universités techniques et Universités proprement dites suivies d'enseignements techniques. En France, l'Ecole Polytechnique et les Ecoles d'application ont un recrutement par concours ; il peut y avoir des étudiants renonçant au concours ou ne pouvant le passer pour diverses raisons, et désireux de recevoir un enseignement technique ; certaines Universités leur offrent des ressources nouvelles. Depuis la réorganisation de l'Enseignement supérieur, les Universités ont créé des laboratoires où les applications techniques de la science pure sont développées et étudiées à côté des applications théoriques ; de très bons élèves entrent dans les Universités pour acquérir des certificats de Licence ou se préparer à la carrière de l'enseignement ; s'ils changent d'avis et se tournent du côté des applications techniques, ils peuvent maintenant trouver des enseignements faisant suite aux études théoriques qu'ils ont déjà faites.

Dans certaines Universités, en particulier dans celle de Nancy, il y a un enseignement général durant deux années, et conservant son caractère d'enseignement supérieur, couronné par des certificats de Licence ; à la suite de ces deux années vient un enseignement plutôt technique, qui repose dès lors sur des bases solides. Il y a tout avantage à procéder de cette manière, car d'une part on offre des carrières aux étudiants des Universités, d'autre part on oriente les études vers les problèmes intéressants de la technique. A côté du professeur de Mécanique rationnelle se trouve un professeur de Mécanique technique, et à côté du professeur de Physique générale un autre professeur de Physique technique ; tous ces professeurs se prêtent appui, et l'enseignement ne peut qu'y gagner.

L'exemple des Universités qui ont créé des enseignements techniques montre que l'on peut concilier tous les points de vue.

M. Kœnigs, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, fait observer qu'un des rôles des laboratoires d'Université peut être d'entreprendre la recherche des problèmes que soulève la technique ; ils doivent pouvoir admettre des travailleurs, déjà familiarisés avec la technique, et qui, pour asseoir plus solidement leurs recherches, peuvent avoir besoin de certains enseignements de la Faculté.

M. Kœnigs saisit cette occasion pour inviter les membres du Congrès à venir visiter les appareils de mécanique exposés par M. l'ingénieur Léonardo Torrès dans son Laboratoire, 96, boulevard Raspail.

M. Marbec, sous-directeur de l'Ecole du Génie maritime, Paris. La place occupée dans l'enseignement mathématique par les diverses questions n'est pas proportionnelle à leur rôle dans les applications. Le cas banal, facile, est traité en peu de mots, tous les développements sont nécessairement consacrés aux cas difficiles et exceptionnels qui exigent une exposition plus minutieuse et plus longue. L'exception prend ainsi aux yeux de l'élève une importance excessive. Les élèves sont au contraire, en général, peu entraînés aux applications effectives dans des cas usuels. En général, ils ont plutôt retenu la « démonstration » que réfléchi sur les circonstances où le résultat peut être utilisé et sur la façon réelle de l'utiliser.

M. de Demeczky, professeur à l'Université de Budapest, constate qu'il y a non seulement une grande variété d'Universités techniques, — il y en a même avec des Facultés de droit — mais on trouve aussi des Universités proprement dites avec des facultés techniques. Nous sommes trop conservateurs dans l'organisation de l'enseignement technique. A l'avenir on n'aura que des Universités avec des Facultés techniques.

I, *b*. — M. Grossmann, professeur à l'Ecole polytechnique de Zurich. — M. Staeckel a signalé dans son rapport, le passage du rapport suisse, d'après lequel il vaut mieux ne pas introduire l'étude *systématique* du calcul différentiel et intégral dans les écoles secondaires. Cette opinion du rapporteur et de ses collègues de l'Ecole polytechnique se base sur des expériences faites. Comme l'a dit M. Beke, hier, il y a en Suisse des Ecoles dont le programme contient les éléments du calcul différentiel et intégral depuis une cinquantaine d'années. Nous avons fait l'expérience, que les élèves venant de ces écoles n'étaient en général pas mieux préparés que leurs camarades. Beaucoup d'entre eux avaient de sérieuses lacunes dans leurs connaissances *élémentaires;* ils avaient oublié les mathématiques élémentaires sans avoir compris les mathématiques supérieures.

M. J. Franel, professeur à l'Ecole polytechnique de Zurich. — Nous avons fait à l'Ecole polytechnique de Zurich, les constatations suivantes : les élèves auxquels on enseigne les éléments du calcul infinitésimal se figurent, à tort, généralement, posséder la matière. Aussi considèrent-ils nos premières leçons comme une sorte de répétition superflue, ils n'y prêtent qu'une attention distraite, le sujet est comme défloré ; il n'a plus pour eux l'attrait de la nouveauté. Or ces premiers éléments sont rarement exposés avec la rigueur et la précision voulues. Vouloir bâtir avec des matériaux aussi chancelants serait faire œuvre chimérique. Nous sommes donc obligés de revenir sur ces premiers principes, d'insister sur ces notions fondamentales. Nous ne pensons pas qu'on puisse attendre un profit véritable en effleurant un sujet qu'on n'a pas le temps d'approfondir. L'introduction du calcul des dérivées dans l'enseignement secondaire peut se justifier par d'excellents arguments. Nous demandons seulement qu'on le fasse avec prudence et modération.

M. Fehr, professeur à l'Université de Genève, tient à compléter ce que viennent de dire MM. Grossmann et Franel. Il est indispensable que l'enseignement secondaire supérieur fournisse, dans les différentes sections, une initiation aux notions de fonction et de dérivées. Ces notions doivent être étudiées d'une manière plus approfondie dans les sections qui conduisent à l'enseignement technique supérieur.

Quant à l'étendue à donner, c'est une question de mesure. Il est d'accord pour que l'enseignement secondaire n'empiète pas sur des cours qui appartiennent réellement à l'enseignement supérieur. Peut-être ferons-nous bien d'éviter dans les programmes de l'enseignement secondaire les termes de « calcul différentiel et intégral. » Il fait remarquer, à ce point de vue, que les programmes français se bornent à parler des dérivées et des fonctions primitives. En France, le terme de « calcul différentiel et intégral » n'apparaît que dans les classes dites de mathématiques spéciales, dont l'enseignement correspondant se donne ailleurs dans les Facultés.

M. de Demeczky (Budapest). — Dans l'enseignement secondaire supérieur, il serait désirable qu'à la fin des études secondaires des classes spéciales soient établies en vue des principales sciences et par conséquent aussi pour les mathématiques.

M. von Dyck, professeur à l'Ecole technique supérieure de Munich. — L'Université doit donner des vues générales dans les différentes branches; il faut réserver ce caractère à son enseignement. Les cours de sciences mathématiques et physiques de l'école moyenne ne peuvent remplacer un cours universitaire.

I, *c*. — M. Tripier, sous-directeur de l'Ecole Centrale, Paris. — A l'Ecole Centrale, le cours sur les éléments de l'Analyse mathématique principalement professé par M. Appell, depuis vingt ans, ne donne plus d'aussi bons résultats depuis que les intégrations simples et la résolution des équations différentielles élémentaires ont été introduites dans le programme du concours d'admission à l'Ecole, qui puise dans les matières de la classe de Mathématiques spéciales. Nous pensons donc, et pour les raisons qu'a indiquées M. Franel, qu'il est préférable de ne pas trop rejeter l'enseignement du Calcul diff. et intégral avant l'entrée à l'Université technique.

M. Hadamard, membre de l'Institut, estime que pour le professeur de l'enseignement supérieur, il est insupportable de se trouver en face d'un programme partiellement traité. Il y a intérêt à ce que, dans les Ecoles secondaires qui préparent à cet enseignement, les questions soient traitées ou ne le soient pas au lieu de l'être à demi.

M. Tripier a pu constater que les élèves de l'Ecole Centrale ne sont pas suffisamment préparés pour l'application des mathématiques par les cours de mathématiques spéciales.

En réponse à M. le Professeur Hadamard, je préciserai en disant que les élèves qui ont subi avec succès les épreuves du concours d'admission à l'Ecole, savent faire des calculs, mais en ne faisant trop souvent ainsi que du mécanisme, en restant pourtant insuffisants au point de vue de leur faculté de faire vraiment des applications, parce qu'ils sont arrêtés lorsque le problème posé n'a pas les aspects auxquels ils ont été accoutumés, ce qui montre qu'ils ne possèdent pas la signification pour ainsi dire concrète des calculs qu'ils sont capables de réussir. On est ainsi conduit à penser que les futurs ingénieurs seront mieux préparés au cours supérieurs des Universités techniques par l'Université technique elle-même, où le souci de l'application et du sens concret est constant.

II. — *Nature de l'enseignement.* — Le résumé de M. Staeckel relatif à la nature de l'enseignement ne donne guère lieu à de longues remarques. Tout le monde semble d'accord pour reconnaître que l'enseignement mathématique dans les Ecoles d'ingénieurs doit avoir pour but un développement général méthodique.

M. Kœnigs fait remarquer qu'il y a un danger à donner une trop grande place aux développements analytiques au détriment de la géométrie proprement dite. La géométrie a un caractère éducatif qu'elle tient de sa nature et qu'il faut lui conserver.

Pour ce qui est des applications, M. Hadamard estime que le professeur de mathématiques a tout à gagner en étant à l'affût des applications au point de vue mathématique. Il peut en tirer parti pour émailler son enseignement.

A ce propos il rappelle le passage du rapport de M. Beke dans lequel l'auteur parle du rôle de l'intuition jointe à la rigueur.

III, *a*, *b*, *c*). — *Scolarité*. Les objets *a* et *b* du résumé de M. Staeckel ne donnent lieu à aucune remarque. — *c)* Pour adapter l'enseignement aux exigences modernes il faut laisser une certaine liberté aux professeurs. En Russie, dit M. Possé, les nouveaux programmes laissent une grande liberté.

Comme le fait remarquer M. d'Ocagne, il faut éviter d'enserrer le programme dans un cadre trop rigide ; il faut que le libellé soit assez élastique pour que des modifications soient possibles.

M. Enriques, professeur à l'Université de Bologne, parle dans le même sens. Une certaine liberté doit être accordée aux professeurs. Celle-ci pourrait être limitée en prévoyant que les examens soient passés auprès d'un jury ne renfermant pas le professeur qui a donné l'enseignement.

d) Exercices de Mathématiques. — M. Lefèvre, professeur à l'Ecole militaire de Belgique, désire compléter les renseignements donnés par M. Staeckel, relatifs aux exercices pratiques qui doivent contribuer au développement de l'enseignement mathématique. Depuis une quinzaine d'ances exercices jouent un rôle important dans le Cours d'Analyse ainsi que dans la plupart des autres cours de l'École militaire de Belgique où ils sont organisés d'une façon complète et systématique.

Ils sont donnés chaque semaine et ils exigent la connaissance des matières exposées dans les trois, quatre et parfois cinq dernières leçons. Les élèves sont livrés à eux-mêmes, en ce sens qu'ils travaillent isolément sous la surveillance d'un répétiteur. A la fin de toute séance d'exercices pratiques, la solution de la question est affichée dans la Salle d'études ; les élèves peuvent donc ainsi apprécier eux-mêmes leurs erreurs, avant la correction. Après la remise du travail corrigé, un échange de vues s'établit entre le correcteur et les élèves ; ceux-ci acquièrent ainsi rapidement une grande confiance dans le personnel attaché à leur enseignement ; c'est avec confiance aussi qu'ils font usage des règles qui synthétisent les théories exposées ; ils s'habituent enfin à travailler avec ordre et méthode.

Une amélioration sera prochainement introduite dans le régime, car ils pourront, comme le fait généralement l'ingénieur, s'entourer de renseignements nécessaires à l'élaboration de tout travail. Ils auront à leur disposition un formulaire du Cours d'Analyse, formulaire qui leur permettra d'éviter des erreurs résultant de l'oubli de certaines formules mêmes élémentaires.

Nous avons pu constater que les exercices individuels donnent de très bons résultats; mais il est utile d'ajouter que les promotions de l'École militaire sont relativement faibles (60 à 70 élèves); il est donc toujours facile de trouver un nombre suffisant de répétiteurs chargés de la correction.

M. von Dyck. — A l'Université technique de Munich, les exercices figurent pour 2 heures par semaine pour 4 heures de cours. Les étudiants sont appelés à résoudre les exercices par écrit. Ces travaux pratiques forment un complément indispensable du cours.

IV. — ***Matière et méthode.*** — *a)* Au sujet de l'étendue de l'enseignement des mathématiques pour les futurs ingénieurs, M. Hadamard estime que l'Université technique doit fournir une culture élevée. Le choix des matières est une affaire de tact et de mesure. M. Buhl (Toulouse) est du même avis.

M. Tripier dit que l'enseignement doit être assez développé, non seulement afin d'élever les vues des futurs ingénieurs, mais aussi afin que l'ingénieur puisse conserver toujours assez de mathématiques pour suivre la marche de la science et résoudre les questions théoriques simples qui se poseront à lui, et ceci malgré la grande contraction qui se produira souvent dans ses connaissances mathématiques au cours d'une carrière où il aura très peu à les appliquer.

IV, *c)*. — M. Padoa, professeur à l'Institut technique de Gênes, attire l'attention de ses collègues sur la confusion que l'on fait souvent entre la rigueur et la volonté d'analyser certaines questions. La rigueur n'exclut aucun appel à l'intuition; elle veut seulement que ces appels ne soient pas faits subrepticement dans les définitions et dans les démonstrations, mais qu'ils soient énoncés à part (concepts fondamentaux, postulats). Sans rigueur il n'y aurait ni mathématiques, ni honnêteté scientifique.

Dans toute proposition mathématique il faut faire ressortir l'hypothèse et la thèse; la démonstration est rigoureuse si elle prouve que l'hypothèse est suffisante. La recherche de ce qui arriverait en supprimant quelques-unes des conditions dont se compose l'hypothèse donne naissance à des nouvelles questions qui peuvent intéresser le mathématicien sans intéresser l'ingénieur.

M. Hadamard a été conduit, par son expérience de l'enseignement à une idée qui peut paraître paradoxale: c'est qu'il faut développer l'intuition dans l'usage de la rigueur. Il importe à l'élève — l'expérience le montre — de savoir que, *pratiquement*, il y a des cas où la rigueur n'est qu'une formalité et d'autres où il est nécessaire d'y apporter la plus grande attention.

M. Possé parle dans le même sens. Sans rigueur il n'y a pas de science; son emploi n'est pas aussi difficile qu'on le croit parfois.

M. Castelnuovo remarque que lorsqu'on parle à des élèves dirigés vers les applications, il faut éviter de donner l'illusion que la rigueur théorique puisse suffire pour transporter les résultats dans la technique. Il faut, au contraire, toujours rappeler aux élèves qu'entre la théorie et la pratique il y a encore un abîme à franchir, et que les coefficients de réduction dont les praticiens font usage, n'ont pas une moindre importance que les résultats théoriques sur lesquels on s'appuie.

M. Bioche, ajoute qu'il importe de faire observer qu'une solution théorique d'un problème n'est pas nécessairement une solution réalisable, et d'indiquer comment on doit adapter la solution aux différents cas qui peuvent se présenter. Par exemple, lorsqu'il s'agit de déterminer le rayon d'une sphère solide la méthode classique donnée dans les traités de géométrie n'est pas applicable pour une sphère lisse, comme celles qu'on à a considérer en optique ; on doit dans ce dernier cas employer le sphéromètre. Pour déterminer le rayon de la terre on ne peut employer le procédé, élégant et ingénieux, fondé sur la dépression de l'horizon, pour un observateur placé à une certaine altitude, ce procédé manquant de précision.

Quoi qu'il en soit, on ne doit pas négliger, même pour de futurs praticiens, d'exposer les principes théoriques qui donnent les raisons fondamentales des règles de calcul. Ainsi la considération des courbes unicursales et celle de diverses autres théories géométriques permettent de reconnaître dans quels cas des problèmes de calcul intégral peuvent être résolus complètement, et donnent des procédés réguliers pour obtenir la solution.

IV, *d)*. — Quant à la réunion des cours de mathématiques destinés aux ingénieurs en un seul cours, M. Possé ne pense pas que ce soit bon.

M. Enriques n'y serait pas opposé ; peut-être que les expériences faites dans ce sens ne sont pas encore assez longues. La fusion pourrait se faire en tenant compte du développement historique de l'analyse.

M. Staeckel fait remarquer que l'unification a été faite à Munich. Elle a le grand avantage de ne pas traiter certaines questions dans les deux cours de géométrie analytique et de calcul différentiel intégral.

M. Buhl, professeur à l'Université de Toulouse, pense que l'enseignement des mathématiques générales doit faire appel à la fois à la Géométrie et à l'Analyse. Il faut montrer les relations réciproques entre les différentes branches mathématiques.

Dans les cours faits à de futurs techniciens, on ne peut avoir uniquement en vue les besoins, prêtés assez arbitrairement d'ailleurs, à ceux-ci. Les professeurs doivent voir les choses de manière élevée ; des applications diverses peuvent être réunies en examinant des sujets qui ne correspondent directement à aucune application.

Si le professeur appartient à l'enseignement supérieur (mathématiques générales), il a pour premier devoir d'être un savant, un homme susceptible de recherche originale et alors il lui répugnera naturellement d'avoir *uniquement*, dans ses préoccupations, ce qui est nécessaire pour la technique industrielle. Les méthodes qui lui semblent bonnes et fécondes pour ses découvertes ne lui sembleront pas propres à être rayées de son enseignement.

Quant au choix des méthodes il ne doit pas être étroit, il ne faut pas sous prétexte d'homogénéité, d'unicité, se tenir, par exemple, sur le terrain de la géométrie quand les calculs peuvent intervenir utilement dans une demonstration, et réciproquement.

Autres questions. — Sur la proposition de M. Castelnuovo, la Conférence consacre ensuite un court échange de vues sur les deux questions suivantes :

1° *De la place des mathématiques dans le plan d'études des Ecoles d'ingénieurs ;*

2° *Ingénieurs techniciens et ingénieurs théoriciens.*

1° Pour ce qui concerne le premier point, M. Castelnuovo demande s'il convient de séparer nettement, dans la préparation des ingénieurs, les études théoriques de leurs applications, comme on fait maintenant dans la plupart des pays, ou bien s'il conviendrait d'alterner dans chaque année les cours théoriques et les pratiques. Cette dernière solution a été sciemment proposée par M. Lori, professeur à l'École Polytechnique de Padoue, avec le but de porter tout de suite l'attention des élèves sur les questions techniques, et d'éviter qu'on oublie l'instrument des mathématiques dans les cours supérieurs consacrés ordinairement aux questions techniques.

M. Loria, professeur à l'Université de Gênes, fait remarquer que dans la répartition des cours on peut accompagner les branches théoriques de cours pratiques n'exigeant pas trop de mathématiques, tel que, par exemple, la topographie. On peut faire alterner les cours théoriques et les cours pratiques d'un caractère élémentaire.

M. Staeckel observe qu'en Allemagne les étudiants ingénieurs ont dès la première année des cours techniques élémentaires.

2° Les ingénieurs italiens, dit M. Castelnuovo, affirment parfois que certains cours destinés aux élèves ingénieurs sont trop élevés. Quelques professeurs ont tenu compte de ces remarques, mais il y a pourtant une limite inférieure dans l'ensemble des connaissances indispensables que doit fournir l'Université technique. Si l'on veut juger ces différents points de vue, il faut se rappeler qu'il y a *deux catégories d'ingénieurs :* ceux qui appliquent la science déjà formée, et ceux qui développent et qui construisent la science de l'ingénieur. Dans ces conditions l'Université technique peut donner aux ingénieurs techniciens une culture limitée mais elle doit ajouter des cours supérieurs en vue de la seconde catégorie.

M. Possé appuie la distinction qui vient d'être signalée.

M. Staeckel dit qu'en Allemagne les Universités techniques demandent à former les deux catégories : 1. Les ingénieurs techniciens ; 2. Ceux qui poussent les études jusqu'au doctorat.

En outre on trouve les écoles techniques moyennes (Maschinenbauschulen) qui forment une catégorie importante de techniciens.

M. Franel parle de l'organisation de l'École polytechnique de Zurich. On y prévoit des cours obligatoires pendant les deux premiers semestres (5 h. de cours, 2 h. d'exercices et 1 h. de répétitoire), et comme complément, des cours facultatifs recommandés aux étudiants et dont le sujet est variable suivant le semestre.

M. Czuber, qui présidait la dernière séance de discussion, résume les débats et remercie tous ceux qui ont pris une part active à la discussion.

* * *

Extrait d'une lettre de M. Andrade. — M. J. Andrade, professeur à la Faculté des sciences de Besançon, empêché pour raison de santé de prendre part à la Conférence, nous adresse une note dont voici un extrait :

« Un enseignement technique supérieur sera celui qui arme l'esprit et la volonté de ses élèves de ce sens critique réaliste ou de cette intuition rapide mais précise qui fait reconnaître la valeur exacte d'une invention. L'esprit d'invention souffle d'où il veut, il n'appartient certes à aucune école, il ne relève d'aucun esprit de corps.

L'organisation de l'enseignement technique doit aussi prévoir l'éducation d'ingénieurs.

L'opposition de ces deux vocables « Ingénieurs ou Techniciens » appartient à une classification surannée avec laquelle il nous faut compter; ayons néanmoins la franchise de dire nettement que cette opposition ne correspond plus à aucune réalité.

A l'époque où fut fondée l'Ecole Polytechnique, le nom même de cette école avait une signification réelle; les sciences d'une part, les manifestations industrielles d'autre part étaient alors assez simples pour permettre à une même école de mêler ensemble la culture scientifique et la formation technique; il n'en est plus de même aujourd'hui; si l'ingénieur a, plus que jamais besoin d'une culture scientifique solide, il a aussi plus que jamais besoin d'être autre chose qu'un chef administratif de techniciens; technicien lui-même il doit être; il sera donc initié à fond aux travaux personnels du laboratoire ou de l'atelier: de plus en plus la distinction entre manuels et intellectuels est devenue techniquement fausse; et nulle part cette fausseté n'est plus choquante que dans les programmes administratifs et dans les façades de l'éducation des ingénieurs.

Sans aucun doute, quelques bons mathématiciens ont pu devenir des techniciens, comme quelques artisans adroits ont pu devenir de bons ingénieurs, mais l'esprit humain artificiellement coupé en plusieurs tronçons a pu reformer son unité de pensée et d'action à travers les cloisons étanches des classifications factices; il serait toutefois prudent de ne pas exagérer la difficulté demandée à l'initiative individuelle et de revenir à des méthodes plus saines dans l'organisation des enseignements scientifiques et techniques combinés ».

3. — Suite de la discussion.

La discussion s'est poursuivie le vendredi soir à la Société des Ingénieurs civils de France sous la présidence de M. Gall. Elle a été résumée dans le *Procès-verbal de la séance du 3 avril 1914*, publié par la Société dans son bulletin intitulé *Résumé de la Quinzaine* (1914, nº 7, p. 68-81). M. le Secrétaire administratif A. de Dax, gérant, a bien voulu nous autoriser à reproduire le compte rendu de la discussion rédigé par l'un des secrétaires techniques M. A. Gosse.

Séance de la Société des Ingénieurs civils de France.

M. le Président rappelle qu'il y a actuellement à Paris un Congrès international d'enseignement mathématique.

M. l'Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées d'Ocagne, Professeur à l'Ecole Polytechnique, a bien voulu accepter de venir faire à notre Société le compte rendu des premières séances de ce Congrès.

Il lui souhaite la bienvenue ainsi qu'à M. Stäckel et aux nombreux congressistes qui ont bien voulu venir assister à la séance de ce soir. Il cite parmi eux M. Torres y Quevedo, l'inventeur de machines à calculer et à intégrer; Sir George Greenhill, auteur de « The Tabulation of Bessel and other functions »; et M. Fehr, le distingué Secrétaire Général de la Commission Internationale de l'Enseignement mathématique.

M. le Président rappelle ensuite que le Congrès a été inauguré par un rapport extrêmement remarquable de M. Stäckel, Professeur à l'Université d'Heidelberg; celui-ci, dans un travail de très haute impartialité, a bien voulu rappeler un souvenir qui nous est particulièrement cher, à quelque origine que nous appartenions : ce sont les circonstances qui ont présidé à la création de l'École Polytechnique, il y a cent vingt ans, au mois de septembre 1794. M. le Professeur Stäckel a bien voulu rendre hommage aux idées très générales qui ont présidé à l'organisation de l'enseignement mathématique dans cette École et à l'influence qu'a eu cet enseignement sur la préparation des Ingénieurs du monde entier. M. le Président croit que c'est la première fois que cela a été fait dans un compte rendu de ce genre. Il adresse tous les remerciements de la Société à M. le Professeur Stäckel, en lui disant combien nous avons tous été touchés des sentiments auxquels il a obéi.

M. le Président ajoute que M. Torres y Quevedo se mettra très volontiers à la disposition des Membres de la Société, le mercredi 8 avril, de 9 heures à midi, au Laboratoire de Mécanique de M. Kœnigs, 96, boulevard Raspail, pour leur montrer ses appareils remarquables.

M. le Président remercie M. Torres y Quevedo de son aimable invitation.

M. M. d'Ocagne, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École Polytechnique, membre de la délégation française à la Commission internationale de l'enseignement mathématique[1], fait un exposé sommaire de l'échange de vues qui a eu lieu, aujourd'hui même, au sein du Congrès international réuni à Paris par les soins de cette Commission, relativement aux questions que soulève la préparation mathématique des ingénieurs, questions qui ont été posées dans un rapport rédigé, à la suite d'une enquête faite dans les différents pays, par M. le Professeur Stäckel, de l'Université de Heidelberg, qui assiste à la séance.

Parmi ces questions, celles sur lesquelles M. d'Ocagne croit devoir particulièrement attirer l'attention des ingénieurs en raison des utiles avis qu'elles pourront sans doute provoquer de leur part, sont les suivantes :

1° Deux systèmes principaux sont en présence pour la formation des futurs ingénieurs ; ils consistent l'un à leur faire faire leurs études mathématiques dans une *Université ordinaire*, au milieu des étudiants ne recherchant qu'une pure culture scientifique, pour les diriger ensuite vers des écoles strictement techniques, l'autre à leur enseigner les mathématiques supérieures à part, dans une institution spéciale rattachée aux écoles techniques, et formant avec elle un groupe désigné sous le nom d'*Université technique*.

Des renseignements recueillis par M. le Professeur Stäckel, il résulte que c'est, aujourd'hui, d'une manière générale, le second système, celui des Universités techniques, qui semble devoir prévaloir.

En France, où l'enseignement technique a le plus anciennement reçu une organisation systématique, les circonstances historiques font que cette organisation se présente sous une forme particulière. Toutefois, on peut considérer que l'ensemble de l'École Polytechnique et des diverses écoles d'application qui s'y recrutent constitue une sorte d'Université technique. Une remarque analogue s'applique à l'École Centrale bien que l'enseignement y soit commun à tous les élèves non seulement pendant l'année d'études théo-

[1] Les autres membres de la délégation française sont MM. Hadamard, Membre de l'Institut, Professeur au Collège de France et à l'École Polytechnique, et Bioche, Professeur au Lycée Louis-le-Grand. La Commission internationale a pour Président M. le Professeur Félix Klein, de Gœttingue, et pour Secrétaire Général M. le Professeur Fehr, de Genève.

riques, mais encore pendant les deux années techniques, alors que, dans les Universités techniques proprement dites, il y a, après la période d'études scientifiques communes, spécialisation des cours suivis par les diverses catégories d'étudiants suivant la branche à laquelle ils se destinent.

Le système des Universités techniques a l'inconvénient, au regard des Universités ordinaires, d'en réduire sensiblement l'animation. Il a l'avantage de permettre de donner à l'enseignement des mathématiques une orientation plus favorable au développement des applications aux sciences physiques, mécaniques et, par suite, aux sciences techniques, sans d'ailleurs toucher aux principes fondamentaux qui se trouvent nécessairement à la base de tout enseignement mathématique élevé.

2° A quelles bornes doit-on arrêter l'enseignement mathématique dispensé aux futurs ingénieurs? Faut-il, comme le pensent certaines personnes, s'en tenir aux premiers éléments du calcul différentiel et intégral? Ou bien convient-il de tenir compte, dans une certaine mesure, du développement pris par les mathématiques modernes? Au sein de la Conférence internationale, la tendance s'est affirmée de ne pas proscrire systématiquement tout ce qui dépasse tant soit peu les éléments classiques. Nous ne savons pas, en effet, ce que demain nous réserve. Il se peut que telle théorie, qui apparaît aujourd'hui comme purement abstraite, soit susceptible, d'ici quelques années, d'intervenir utilement dans un domaine de la technique. A ce point de vue, l'exemple du calcul des quantités imaginaires est caractéristique. Qui se fût douté, il y a une cinquantaine d'années qu'il dût devenir, entre les mains des électrotechniciens, l'outil vraiment si commode qu'il est aujourd'hui? Il est bon que les ingénieurs soient mis en état de comprendre au moins le sens des principales nouveautés mathématiques afin d'avoir la possibilité, le cas échéant, d'en tirer parti pour tel ou tel objet qui les intéresse.

3° Pour le temps à consacrer aux études mathématiques supérieures préparatoires aux études techniques, l'avis dominant, dans les différents pays, est qu'il est bon de ne pas le réduire à moins de deux ans.

L'idée s'est fait jour en Italie qu'il serait peut-être à propos d'établir une sorte de pénétration réciproque entre l'enseignement théorique et l'enseignement pratique afin, d'une part, d'intéresser de meilleure heure les élèves aux choses de la réalité et, d'autre part, de leur faire utiliser les notions mathématiques qu'ils acquièrent alors qu'elles sont bien fraîches dans leur esprit. Une telle réforme, qui peut séduire à première vue, comporte toutefois, quand on y regarde de plus près, de sérieuses difficultés de réalisation qui ne sauraient probablement être levées que dans des cas d'espèce.

4° Une autre importante question qui a été examinée est celle du choix du corps enseignant mathématique pour les ingénieurs. Doit-il de préférence se recruter parmi les techniciens ou parmi les mathématiciens de profession? Sur ce point, M. le Professeur Stäckel n'a pas hésité à faire observer que, pour enseigner les mathématiques, quel que soit le but particulièrement visé, il faut, avant tout, être mathématicien. On ne saurait, en effet, enseigner utilement quelque sujet que ce soit si on ne le domine pas et même d'un peu haut. Maintenant, il est clair qu'à cette aptitude mathématique indispensable, il vaudra mieux que le professeur joigne une connaissance assez avertie des besoins des ingénieurs, acquise de préférence par une expérience personnelle. Il ne semble pas que l'on puisse recommander le système consistant à confier un tel enseignement à des ingénieurs n'ayant jamais rien produit par eux-mêmes dans le domaine des mathématiques et n'en connaissant que la pratique courante.

M. F. Chaudy ne désire présenter des observations que sur quelques points seulement du remarquable rapport de M. Stäckel.

Tout d'abord convient-il de donner aux futurs ingénieurs l'enseignement mathématique supérieur en dehors des Universités techniques, c'est-à-dire dans les Universités proprement dites, pour leur donner ensuite l'enseignement technique dans les écoles spéciales, ou bien faut-il leur donner cet enseignement mathématique dans les Universités techniques elles-mêmes?

De l'avis de M. Chaudy, il convient de donner l'enseignement mathématique supérieur aux futurs ingénieurs dans les Universités techniques. C'est ce qui se fait, en France, à l'École Centrale ainsi qu'à l'École Polytechnique qui prépare, le cas échéant, aux Écoles des Ponts et Chaussées et des Mines.

La raison qui, selon M. Chaudy, milite en faveur de cette opinion, c'est que, comme le permet l'organisation de l'École Centrale, par exemple, le Conseil de perfectionnement de cet Établissement peut servir d'intermédiaire entre les professeurs-mathématiciens et les professeurs de sciences appliquées en vue d'obtenir que les mathématiciens n'enseignent que les parties de leur science qui peuvent servir à l'Ingénieur dans l'exercice de son art.

Le mathématicien professant en Sorbonne a naturellement tendance à pousser très loin son enseignement, plus loin certainement qu'il ne faut pour la formation des ingénieurs.

L'inconvénient qui résulterait pour ceux-ci d'une culture mathématique trop élevée serait de diminuer chez beaucoup le sens inné des applications mathématiques en vue des réalisations pratiques.

Un ingénieur qui a reçu un enseignement mathématique trop élevé eu égard à cet objectif des applications à son art, risque beaucoup d'échafauder plus tard des théories tout à fait à côté des réalités. On a vu des ingénieurs très versés dans les sciences mathématiques prétendre déterminer algébriquement la réaction dont un terrain est capable sous une charge donnée, comme celle de la poussée d'un arc, parce qu'ils ne voyaient pas que la compressibilité des terres est une chose qui échappe au calcul. On en a vu d'autres, et non des moindres, s'attaquer à la théorie de la résistance des poutres en béton armé et qui ne s'apercevaient pas de l'utilité de cet organe essentiel que les constructeurs appellent des étriers. Et tout cela provenait vraisemblablement de ce que ces ingénieurs, plus mathématiciens que physiciens, avaient, en développant trop leur sens mathématique, si on peut s'exprimer ainsi, diminué cette sorte de prescience des choses de la pratique qu'il faut avoir pour bâtir des théories saines.

Ce sens particulier que doivent posséder les ingénieurs, les mathématiciens purs de l'Université proprement dite ou de l'École normale supérieure ne l'ont pas, et c'est pour cela qu'il paraît nécessaire à M. Chaudy que, dans les Universités techniques, les professeurs-ingénieurs se mettent en rapport avec les professeurs-mathématiciens pour leur faire connaître les besoins de leur art, afin que le professeur de mathématiques ne fasse que signaler dans son cours les théories qui paraissent être sans utilité pour les applications, et insiste sur les autres. A ce sujet, M. Chaudy rappelle les services que rendent aux ingénieurs la Statique graphique et la Nomographie, et on ne peut signaler cette dernière sans rappeller les travaux de M. d'Ocagne sur les abaques.

Sur la question de savoir si, dans les Universités techniques, il convient de faire enseigner les mathématiques par les mathématiciens ou par des ingénieurs ayant de fortes connaissances en mathématiques, M. Chaudy est d'avis qu'il faut laisser cet enseignement aux mathématiciens purs, car, comme le dit très bien M. Stäckel dans son rapport, il faut toujours que le professeur domine son sujet. Or, les ingénieurs ne peuvent prétendre à la connaissance approfondie de leur art et des mathématiques. On est mathématicien ou ingénieur, on ne peut être les deux à la fois.

M. C. Monteil présente quelques observations sur le rapport de M. Stäckel et sur le commentaire qui en a été fait par M. d'Ocagne.

Il a été dit en premier lieu que la plupart des grandes écoles techniques françaises possèdent leurs chaires théoriques, ce qui dispense leurs élèves d'un séjour préalable dans les facultés de sciences, mais, en revanche, ces élèves doivent subir, dans les classes de mathématiques spéciales des lycées, une préparation très longue.

Pour critiquer la durée de cette préparation, M. Monteil est amené à analyser le rôle des mathématiques dans la préparation aux écoles techniques. Ce rôle est double. En premier lieu, l'enseignement des mathématiques doit procurer une documentation préalable de méthodes et formules. Ce premier point de vue est loin de justifier un développement aussi important des mathématiques spéciales, le secours réclamé par les applications aux mathématiques pures étant très faible.

En second lieu, et il n'échappera à personne que c'est là le côté important de la question, les mathématiques jouent un rôle dans la formation intellectuelle d'un cerveau. Elles y apportent les qualités solides de justesse, de rigueur, et celles subtiles de finesse et d'ingéniosité, toutes qualités pour lesquelles les démonstrations d'algèbre sont le plus efficace des entraînements.

Mais il ne faut pas perdre de vue que les mathématiques ne sont pas l'unique méthode de formation intellectuelle. Les études littéraires, historiques, de droit, aboutissent au même but avec des modalités différentes, et il faut s'en souvenir pour ne pas tracer pour les préparations des programmes trop étroits.

Une observation fort décevante, et dont il n'existe nulle trace dans le rapport, est le fossé entre les sciences d'une part et, d'autre part, les besoins réels que font naître les applications.

M. d'Ocagne a cité un certain nombre de sciences qui constituent, d'après lui, l'intermédiaire entre le champ de la science pure et celui des applications. Ce sont l'Elasticité et l'Hydrodynamique. Il n'est pas douteux que les problèmes concrets qui y sont posés intéressent au plus haut point l'ingénieur, mais ils se traduisent, hélas, par des équations différentielles rebelles à toute intégration, et derrière lesquelles la solution semble plus cachée encore qu'elle ne l'était sous l'énoncé primitif.

Il a fallu alors créer des sciences d'ingénieurs totalement étrangères aux précédentes, ce sont : la résistance des matériaux et l'hydraulique, où la détermination expérimentale directe de quelques fonctions inconnues et aussi quelques complaisances de raisonnement permettent l'aboutissement jusqu'aux solutions numériques.

Restons fidèles à l'enseignement élevé des mathématiques pour leur contribution incontestable à la formation préalable des esprits, mais réduisons énergiquement le séjour, actuellement exagéré, dans les classes de mathématiques spéciales, et invitons les savants à se rapprocher de plus en plus des questions vraiment utiles qu'ils ont toujours volontairement ignorées jusqu'à ce jour, et pour l'étude desquelles ils sont personnellement mal préparés

M. Ch. Rabut dit que le plus grave inconvénient reproché au système français de préparation mathématique des ingénieurs, c'est assurément l'exagération du temps passé dans les classes de mathématiques dites élémentaires, élémentaires fortes et spéciales (quatre ans en moyenne, pour la préparation à l'Ecole Polytechnique) comparé au temps accordé à l'enseignement technique proprement dit (deux ans et demi à l'Ecole des Ponts et Chaussées).

Ce contre sens vient de ce que le Concours décisif a été placé, non à la sortie, mais à l'entrée des grandes Ecoles : l'Université, ainsi rendue maîtresse de la préparation, s'arrange naturellement pour garder les candidats le plus longtemps possible ; c'est ainsi qu'ils se voient presque obligés de suivre deux fois les cours élémentaires, et deux, trois, quatre, et même cinq fois les cours spéciaux, alors qu'ils ne suivent qu'une fois, et même rapidement, les cours techniques des Ecoles.

Un autre inconvénient non moins grave est que l'objet des cours spéciaux est presque exclusivement sportif, sans valeur éducative, étranger à la formation de l'ingénieur ; exemples : les règles de convergence des séries (toujours subtiles, de temps en temps reconnues fausses), la théorie générale des équations algébriques (qui ne peut aboutir à rien moins qu'à leur résolution), l'étude des lignes et surfaces du premier et du second degré au moyen de leurs équations générales (une batterie d'artillerie pour tuer un moineau [1]).

Ce second contre sens vient de ce que, parmi les professeurs de spéciales, les examinateurs d'entrée aux Ecoles et les fonctionnaires appelés à rédiger les programmes des concours, les ingénieurs ne figurent qu'exceptionnellement, et toujours en infime minorité.

Ces défauts de l'enseignement ont engendré un mal de plus en plus grand signalé par les ingénieurs de profession : l'abus du calcul dans la Science appliquée.

Formés exclusivement à la méthode déductive, presque étrangers à la méthode expérimentale qui doit être, par excellence, la méthode de la Science appliquée, encore plus étrangers à l'observation et à la critique qui sont les meilleures armes de l'ingénieur, les élèves de nos grandes Ecoles ne parviennent pas toujours à y réformer leur mentalité au contact de professeurs qui ont vécu leur métier, et ils apportent dans l'exercice de leur profession un reste des contre sens de l'enseignement préparatoire, cela au détriment de notre art.

M. Rabut se borne à deux exemples empruntés aux deux matières qu'il a eu l'honneur d'enseigner : la Construction et l'Hydraulique.

Parmi les constructeurs en maçonnerie, les voûtes, qui ne se calculent guère, ne donnent lieu qu'à peu de mécomptes ; les grands barrages, au

---

[1] M. Appell, la plus haute autorité universitaire en matière de pédagogie scientifique, a écrit dans l'*Enseignement mathématique*, du 15 septembre 1900 « On est arrivé à un enseignement qui est moins une science qu'un sport et auquel il faut reprocher : l'artifice ;... le « dédain des applications, des calcul numériques, des questions simples : l'abus de la géo- « métrie analytique ; etc. ».

contraire, dont les dimensions sont rigoureusement déterminées par le calcul, périssent par accident les uns après les autres.

Parmi les constructions métalliques, les premiers ponts construits par Brunel et Stéphenson presque sans calcul, mais après auscultation d'un modèle réduit, sont encore debout, alors que des milliers d'ouvrages, petits et grands, établis depuis sur des calculs minutieux, ont péri en peu d'années, souvent même pendant leur construction. L'auscultation des ouvrages en service en a donné la raison en accusant des déformations très différentes de ce qu'annonçait le calcul usuel, notamment dans les barres de treillis et les fermes en arc.

En Hydraulique, c'est une éclipse presque complète de la science des eaux courantes, due à la persistance d'un enseignement théorique suranné : pendant un demi-siècle, on ignore l'œuvre expérimentale immense de Bazin, qui commence seulement à porter ses fruits. Cinq équations simultanées aux dérivées partielles aboutissant piteusement à la formule (insuffisante, d'ailleurs) de l'écoulement uniforme dans un canal prismatique ; n'est-ce pas encore une batterie d'artillerie dressée contre un moineau ?

La substitution de la méthode déductive à la méthode expérimentale, seule légitime dans l'enfantement de la Résistance des matériaux et de l'Hydraulique, a été le *crime d'avortement* exercé contre l'art de construire, et se chiffrant, rien qu'en France, par des centaines de millions en argent et des centaines de vies humaines.

M. Rabut se permet de conclure en souhaitant :

1° Que, sauf les premiers éléments, l'instruction mathématique soit donnée aux futurs ingénieurs, non en Sorbonne, mais dans les Ecoles techniques, par des ingénieurs ayant pratiqué leur art avec succès ;

2° Que cette instruction soit limitée au strict nécessaire, le premier principe de l'enseignement étant de subordonner l'emploi de la méhode déductive à celui de la méthode expérimentale, de *ne jamais calculer ce qu'on peut mesurer.*

M. R. Soreau s'excuse de prendre la parole après d'éminents professeurs qui ont une compétence et une autorité particulières sur le sujet en discussion. Il se bornera à présenter quelques observations, comme ingénieur et aussi comme père de famille.

Ayant eu récemment trois fils en mathématiques spéciales, il a pu apprécier le bien fondé des critiques que vient de formuler M. Monteil sur la trop longue préparation donnée dans cette classe. D'autre part, les élèves y subissent un surmenage véritablement abusif. Les programmes actuels comprennent presque toutes les matières d'il y a trente ans augmentées d'une très notable partie des cours d'analyse et de mécanique qu'on apprenait alors à l'Ecole Polytechnique en première, et même en deuxième année ; c'est ainsi qu'on y expose la théorie des équations différentielles du second ordre. Certes, le développement donné au calcul différentiel et intégral est une innovation excellente en soi, tant au point de vue spéculatif qu'au point de vue pratique, puisque ce calcul s'impose dès qu'on aborde des problèmes tant soit peu élevés de mécanique rationnelle ou de mécanique appliquée ; mais il aurait fallu alléger d'autant les programmes par ailleurs : cet allégement eût été facile et même profitable, car il aurait permis au professeur de dégager plus vigoureusement les théories générales, les seules qui importent. L'enseignement actuel est beaucoup trop touffu : c'est le cas de dire que l'abondance des feuilles masque les arbres de cette forêt.

Les inconvénients d'un tel système sont graves : fatigue marquée de la plupart des élèves, alors qu'on devrait avoir le souci de les faire entrer frais et dispos dans les écoles techniques qui vont leur demander un effort important ; prolongation excessive et sans profit des années passées au collège ; rendement en définitive médiocre, étant donné qu'on écrème les classes de sciences au profit des mathématiques spéciales, pour ne conduire qu'une partie de leurs élèves dans les écoles techniques.

A qui cet état de choses incombe-t-il ? Est-ce, comme on le donnait à entendre, à l'Université, qui cherche à garder ses élèves le plus longtemps possible ? M. Soreau ne le pense pas ; il estime même que la faute n'en est pas seulement aux programmes, car il ne suffirait pas de les alléger : en effet, pour discriminer des candidats qui sont trop nombreux, les examinateurs, et, à leur suite, les professeurs auraient tôt fait d'introduire de nombreuses subtilités en marge de ces programmes, qui ne se trouveraient réduits que sur le papier. Pour enrayer un surmenage véritablement insensé il faut abaisser les limites d'âge ; de la sorte, n'entreraient en spéciales que les jeunes gens suffisamment sûrs d'eux-mêmes ; quant aux autres, ce serait leur rendre service que d'orienter leur activité vers des carrières différentes, et de leur éviter de rester trois ou même quatre années dans cette classe, souvent pour ne pas franchir le seuil de l'école à laquelle ils se destinaient. Tous les hommes qui se rendent compte du danger que présente pour un pays le gaspillage des forces intellectuelles de la jeunesse, et les pères de famille au premier rang, devraient porter une attention particulière à cette importante question de la limite d'âge, et protester énergiquement quand les pouvoirs publics l'augmentent inopinément de deux années, ainsi qu'ils viennent de le faire pour l'une de nos grandes Ecoles.

En ce qui concerne l'enseignement mathématique dans les écoles techniques elles-mêmes, M. Soreau ne conçoit pas qu'il puisse être réduit au rôle strictement utilitaire préconisé par un de nos Collègues ; au surplus, on ne connait les contingences de la pratique que pour l'heure présente, et les notions théoriques acquises dans les écoles doivent servir pour la vie. Tout au contraire, il faut aux ingénieurs une culture mathématique étendue, qui convienne non seulement aux besoins de la technique actuelle, mais encore aux besoins inconnus de la technique de demain, qui leur permette de collaborer aux progrès incessants de la science, ou tout au moins d'en suivre le développement. Pour de telles fins, l'enseignement mathématique doit être nourri de méthodes générales, et donné par des mathématiciens éminents qui sauront y faire passer un souffle large et puissant, tout en évitant d'alourdir le bel ordonnancement de ces méthodes par des discussions de Sorbonne, par des subtilités d'un intérêt médiocre pour de futurs ingénieurs ; sans rien sacrifier de l'ingéniosité de certaines théories, ils ne doivent pas, suivant la remarque très profonde qui termine le Rapport de M. Stäckel, « trop insister sur les finesses de leur science ».

Quand le professeur de mathématiques pures aura donné aux élèves-ingénieurs ce fort enseignement général, quand il aura mis entre leurs mains ce levier d'une puissance incomparable, les professeurs des techniques spéciales pourront venir, et ils seront compris ; plus tard, après la sortie de l'Ecole, la technique pourra progresser ou même se modifier profondément : si cette évolution fait appel aux connaissances mathématiques, les ingénieurs ainsi formés la suivront sans peine.

On parlait tout à l'heure des équations générales de l'Hydrodynamique.

et l'on rappelait combien les résultats auxquels elles conduisent sont décevants et concordent peu avec les lois réelles ; la faute n'en est pas aux mathématiques, mais à l'application qui en est faite ; et ce serait vraiment une prétention singulière que de compter sur une concordance entre des résultats théoriques découlant d'un simple concept, et les résultats expérimentaux obtenus avec un fluide réel. Mais rien ne dit que l'analyse mathématique ne parviendra pas à donner la clé de la mécanique des fluides le jour où nous connaîtrons mieux leur nature intime. M. Soreau a beaucoup étudié une technique de cet ordre, celle de l'Aérodynamique, plus déconcertante encore que l'Hydrodynamique ; et voici déjà qu'une connaissance plus complète du rôle de la viscosité et de la compressibilité de l'air permet d'expliquer partiellement certaines singularités apparentes de cette technique.

M. d'Ocagne, au sujet d'une des observations présentées par M. Soreau (dont il a, par ailleurs, beaucoup apprécié la manière de voir) demande à faire, à son tour, une remarque, ajoutant que, bien que professeur à l'Ecole Polytechnique, il n'a pris aucune part à l'élaboration du programme d'admission à cette Ecole, et que, par suite, dans ce qu'il va dire, on ne doit voir à aucun degré un plaidoyer *pro domo suâ*.

La remarque est celle-ci : on entend souvent dire, comme M. Soreau vient de le faire, que l'on rencontre maintenant dans le programme d'admission des matières qui, naguère, étaient enseignées à l'Ecole, voire en seconde année, et l'on en conclut tout naturellement à l'effroyable surmenage des pauvres candidats. Mais on ne prend pas garde que si ces nouveautés ont, en effet, été introduites dans le programme, bien d'autres théories en ont, par contre, été retranchées, ni, peut-être, que certaines de ces matières nouvelles exigent un moindre effort intellectuel que celles dont elles ont pris la place. Il n'est pas niable, par exemple, que les cas élémentaires d'intégration des équations différentielles, auxquels M. Soreau a précisément fait allusion et qui effraient surtout à cause de leur nom, sont en réalité d'une étude beaucoup plus facile, exigeant une bien moindre dépense cérébrale, que les développements sur la théorie des équations algébriques, comprenant notamment le théorème de Sturm, et divers autres difficiles théorèmes d'Hermite, de Laguerre, etc., avec lesquels devaient être familiarisés les candidats à l'Ecole d'il y a trente ou quarante ans. Des observations analogues pourraient au reste être faites à propos d'autres parties du programme.

Les nouveaux programmes comportent peut-être, dans leur ensemble, une somme un peu plus grande de matières ; il ne semble pas toutefois qu'il faille, pour se les assimiler, un effort bien supérieur à celui qu'exigeaient les anciens.

M. Soreau reconnaît volontiers qu'on a supprimé quelques parties des anciens programmes de spéciales, mais quand on en retirait long comme le doigt, on en ajoutait long comme le bras, à tel point que beaucoup de professeurs de cette classe sont véritablement effrayés de tout ce qu'on les force à introduire dans de jeunes cerveaux.

M. Rabut, répondant à M. Soreau, fait remarquer que la limite d'âge a toujours pour effet de réduire le nombre d'années consacrées par les candidats, non pas aux mathématiques spéciales, mais bien aux classes de lettres, aux humanités, ce qui n'est pas désirable [1].

[1] Voir H. Poincaré : *Les Sciences et les Humanités*.

M. le Professeur A. Padoa (Gênes, Italie) se trouve pleinement d'accord avec M. Soreau sur plusieurs points. Mais comme la question dont on s'occupe a été posée par une Conférence internationale, il lui semble bon de l'envisager à un point de vue un peu plus général, et, précisément, au lieu de s'attarder à blâmer ou à exalter l'état actuel de l'organisation des études en France, il trouve préférable d'analyser les tendances qui à ce moment partagent les opinions dans presque tous les pays.

Est-ce seulement au moment où ils vont commencer leurs études techniques que les futurs ingénieurs doivent être séparés des futurs mathématiciens, ou vaut-il mieux les séparer dès la fin des écoles secondaires? Jusqu'à présent, des raisons didactiques et financières s'accordaient pour donner la préférence à la première solution, mais le développement progressif des études théoriques et techniques et la nécessité de ménager les forces des élèves finiront peut-être par imposer la seconde, qui d'ailleurs se trouve déjà réalisée dans plusieurs universités techniques.

Or, dans celles-ci, est-ce aux mathématiciens ou aux ingénieurs eux-mêmes qu'il faut confier l'enseignement des mathématiques pures? On vient de dire, ce soir même, que l'application des mathématiques à des problèmes sur la résistance des matériaux n'avait pas donné des résultats satisfaisants, d'où une prétendue raison de méconnaître la valeur des mathématiques et le vœu que l'enseignement des mathématiques fût animé d'un esprit plus pratique, que seulement un ingénieur aurait pu lui donner. Mais avant d'appliquer un théorème quelconque, il faut s'assurer si les données de la question pratique vérifient l'hypothèse de ce théorème, au moins d'une manière suffisamment approchée ; et l'on ne doit jamais rendre responsable les mathématiques des fausses applications qu'on en peut faire. Or, sans nier qu'il y ait des ingénieurs auxquels on pourrait confier un cours de mathématiques, dans la plupart des cas il est à craindre qu'ils feraient prévaloir la tendance technique sur la tendance théorique, en faussant le caractère de cet enseignement qui ne doit pas seulement fournir des règles, mais doit aussi contribuer à la formation de l'esprit scientifique.

Mais alors, en quoi se distinguerait le cours de mathématiques pour les ingénieurs de celui pour les mathématiciens? Certainement, ce n'est pas au point de vue de la rigueur, car sans rigueur il n'y aurait plus de mathématiques. C'est plutôt une question d'opportunité dans le choix des théories à traiter, de mesure dans le développement à donner à chacune d'elles, d'insistance sur les applications numériques des résultats les plus importants, parce que les règles dont on n'a pas appris à se servir avec sûreté et rapidité sont vite oubliées.

Donc, en laissant aux mathématiciens les soins et la responsabilité de l'enseignement théorique et aux ingénieurs les soins et la responsabilité de l'enseignement technique, ce qui est désirable c'est qu'un accord s'établisse entre les mathématiciens et les ingénieurs, et que cet accord devienne toujours plus cordial et plus intime, pour amener à une collaboration continue dans le choix des programmes, leur coordination et leur revision, tant au point de vue général des liens entre la théorie et la pratique, qu'à celui de l'organisation et de la coordination des différents cours d'une même école.

M. J. Legrand rappelle à M. d'Ocagne qu'il a eu l'honneur de l'entendre comme répétiteur de mécanique à l'Ecole Polytechnique, il y a vingt ans. S'il recherche quels avantages il a tirés pour sa carrière de l'enseignement de ses maîtres, il apprécie comme le principal la possibilité d'aborder la lecture d'un ouvrage de science moderne quelconque sans être rebuté par les notations et les développements de calcul.

Il s'est trouvé aux côtés de collègues qui avaient reçu à l'Ecole Navale une instruction scientifique plus spécialisée en vue d'une carrière unique et qui lui ont semblé éprouver, du fait de cette formation moins générale, plus de difficultés que lui-même dans l'étude des questions de balistique ou de mécanique appliquée. Un ingénieur qui veut se documenter fait appel aux sources étrangères. S'il doit vaincre, outre les difficultés d'une langue qui n'est pas la sienne et de notations inhabituelles, le manque d'entraînement aux développements scientifiques, sa tâche sera rebutante. Il ne faut pas attacher trop d'importance à la valeur des théories scientifiques, qui évolueront, et l'on ne peut prévoir quelles applications s'imposeront plus tard à l'attention d'un jeune homme qui veut entrer à Polytechnique ou à l'Ecole Centrale.

En père de famille, M. J. Legrand recommande la haute culture scientifique, mais surtout comme une gymnastique et un assouplissement.

M. Stæckel remercie la Société de l'intérêt qu'elle a bien voulu prendre à la Conférence Internationale de l'Enseignement mathématique et surtout au rapport sur l'enseignement mathématique des ingénieurs. Il est convaincu que les remarques formulées dans la discussion seront d'une grande importance pour les travaux futurs de la Commission Internationale, parce que les problèmes de l'enseignement mathématique des ingénieurs ne peuvent se résoudre que par la collaboration des ingénieurs et des mathématiciens.

M. le Président dit que les paroles aimables de M. le Professeur Stäckel abrègent beaucoup sa tâche.

Au début de son compte rendu, M. d'Ocagne a bien voulu poser des questions à notre Société et M. le Président remercie à son tour ceux de ses collègues qui ont pris part à la discussion et qui ont répondu d'une façon qui a satisfait si pleinement M. Stäckel.

M. Chaudy a apporté l'avis de la pratique ; MM. Monteil et Rabut ont fait bénéficier la Société du produit de leur haute expérience de professeurs.

M. Soreau a parlé avec l'autorité d'un père de famille et nul plus que lui n'avait le droit de formuler les observations qu'il a faites, et cela avec la clarté à laquelle il a habitué ses collègues.

Il remercie M. le Professeur Padoa de son intervention ; M. Legrand, qui a bien voulu reprendre la parole et qui a rendu un juste hommage à l'enseignement qui lui a été donné.

M. le Président croit qu'il ne pourrait mieux faire que de reprendre lui-même une phrase qui l'a beaucoup frappé dans le rapport de M. Stäckel, qui dit, en parlant des mathématiques spéciales citées au cours de la discussion :

« Les mathématiques méritent d'être considérées comme l'un des plus « puissants moyens de l'esprit humain qui dominent l'inertie de la matière ».

Ces paroles résument admirablement la discussion qui a eu lieu ce soir.

M. Androuin, n'ayant pu prendre la parole, vu l'heure avancée, a remis en fin de séance la note suivante :

M. Androuin pense que l'enseignement spécial à la formation des ingénieurs comprend certaines branches principales qui, énumérées dans l'ordre où chacune d'elles sert à l'intelligence de la suivante, sont : la Science pure (mathématiques, etc.) ; la Science appliquée (mécanique rationnelle, électricité théorique, etc.) ; la Technique (mécanique appliquée, électricité industrielle, etc.); la Technologie (étude descriptive des produits industriels et des moyens de production); les Travaux pratiques (bureau, salle de dessin, laboratoire, atelier, chantier, etc.).

L'élève ingénieur doit, évidemment, être assez avancé dans chacune de ces branches, pour profiter pleinement de l'enseignement qu'il reçoit de la suivante; cela, pour la science appliquée, détermine le *minimum* de science pure à enseigner. La question du *maximum* sera envisagée un peu plus loin.

Sur la question de savoir si l'enseignement des sciences pures et celui de la technique doivent être donnés à la même époque, M. Androuin répond sans hésiter : *oui*. En effet, il importe que le futur ingénieur vive le plus tôt possible dans une *ambiance* propre à le pénétrer de sa profession. Cela lui rend l'étude de la technique infiniment moins pénible, puisqu'il se l'est assimilée graduellement par le travail naturel de l'esprit.

Il est d'ailleurs très important de réduire au minimum la durée des études. Lorsque les études sont trop longues, en effet, l'ingénieur débute dans l'industrie à un âge où il ne lui est plus très facile d'accomplir *dans le rang* une période d'*apprentissage*, sans laquelle il est extrêmement difficile d'acquérir cette *intuition* que l'un de nos collègues a appelée « le flair de l'ingénieur ». Les études trop longues ont aussi le très grave inconvénient d'être excessivement coûteuses et de fermer la carrière d'ingénieur à ceux des bons sujets dont les parents ne sont pas assez riches.

Dans ces conditions, il semble que, pour la facilité de l'organisation de l'enseignement, il soit préférable d'enseigner les mathématiques aux futurs ingénieurs dans des institutions techniques où ils puissent entrer très jeunes.

Sur les questions de choix des matières à enseigner et du personnel enseignant : Dans l'enseignement des mathématiques aux futurs ingénieurs, l'objectif doit être bien moins de leur enseigner *beaucoup* que de leur enseigner *très bien*. La considération d'où découle le minimum à enseigner a été indiquée plus haut. Le maximum ne doit pas trop s'en éloigner, mais l'ensemble de chaque branche enseignée en mathématiques doit former un tout homogène où l'enchaînement de tous les éléments apparaisse d'une manière bien nette.

C'est seulement à cette condition que l'on aura atteint l'objectif principal de l'enseignement mathématique, qui est de donner à l'esprit les qualités d'ingéniosité et de précision dont l'ingénieur a besoin.

La question de l'enseignement limité et spécialisé sur la base de l'utilitarisme immédiat ne se pose même pas ; un tel enseignement jetterait le désordre dans l'esprit des élèves qui, après avoir dans leurs toutes jeunes années étudié l'harmonieux ensemble que présentent les premiers livres de la géométrie et les mathématiques élémentaires en général, auraient la désillusion de se trouver aux prises avec un fatras de théories sans liaison.

Il est donc nécessaire que chaque professeur de mathématiques ait une *mentalité de mathématicien*, et que, dans la pratique de son enseignement, il attribue la première place à la *culture générale* tout en se tenant en contact avec les professeurs de sciences appliquées afin de donner à ceux-ci des élèves capables de comprendre facilement les parties de ces sciences appliquées où il est fait usage des mathématiques.

En résumé, l'enseignement doit être dirigé de manière à :

A. — Donner aux élèves une *culture générale* bien ordonnée dont leur esprit puisse rester indéfiniment imprégné, et cela sans surcharger leur mémoire.

B. — Maintenir dans l'esprit des élèves *l'équilibre* entre cette culture générale et les notions professionnelles.

C — Réduire au minimum la durée des études, afin de donner aux jeunes ingénieurs les plus grandes facilités pour leur *apprentissage industriel*, et de laisser la carrière d'ingénieur aussi largement ouverte que possible.

Erratum.

Rapport général de M. E. Beke, p. 276, lignes 6 à 11.

Dans une lettre datée du 30 juin 1914, M. C. Possé, l'un des délégués russes, nous signale une modification à introduire dans un passage concernant la Russie. La phrase « Ainsi, la revision générale.... » doit être remplacée par la suivante :

« Ainsi, la revision générale du cours des classes précédentes, la discussion des équations du second degré, le dessin projectif, l'application de l'algèbre à la géométrie (homogénéité des formules, construction des formules rationnelles et des racines des équations du second degré, etc.), sont supprimés. »

POINTS-PINCES, ARÊTES DE REBROUSSEMENT ET REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE DES SURFACES[1]

Les « points-pinces » de Cayley sont assurément, en un sens, une particularité très spéciale, très exceptionnelle des surfaces. Il ne semble pas, au premier abord qu'il puisse y avoir lieu de s'y arrêter dans un cours d'Analyse destiné aux débutants.

Or je me trouve amené presque obligatoirement à y faire une brève allusion dans l'enseignement très condensé cependant que je professe à l'Ecole Polytechnique.

C'est à propos de la représentation paramétrique des surfaces que je suis conduit à opérer ainsi. Soient les équations

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v), \tag{1}$$

u et v désignant deux paramètres variables. On se borne généralement à dire que, u et v variant indépendamment de toutes les manières possibles, ces équations définissent :

[1] Communication présentée par M. J. Hadamard, membre de l'Institut, à la Société mathématique de France, le 1er avril 1914, à l'occasion de la Conférence internationale de l'enseignement mathématique.

a) une surface, si l'on n'a pas simultanément

$$(2) \qquad \frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \frac{D(z, x)}{D(u, v)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 0$$

b) une courbe, si les relations (2) ont lieu ensemble quels que soient u, v.

J'ai été frappé de ce qu'il y avait d'antiscientifique et, par contre coup, de vicieux au point de vue éducatif, dans cette énumération volontairement incomplète, faussée, des cas possibles.

Il tombe sous le sens, en effet, que ces cas ne sont pas au nombre de deux, mais de quatre, savoir (outre *a* et *b*) :

c) Ces trois déterminants (2) s'annullent ensemble en un point unique.

d) Ces trois déterminants s'annullent ensemble en tous les points d'une ligne.

En ce qui concerne ce dernier, il n'y a qu'avantage à l'introduire dans l'enseignement.

Il correspond, en effet, à une *arête de rebroussement ;* et ceci permet d'établir, de la manière la plus simple, l'existence énoncée très souvent sans démonstration d'une telle arête.

A quoi correspond le cas *c* ? Autrement dit, quelle forme a, autour de l'origine, la surface

$$(2') \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x(u, v) = a_1 u + b_1 v + \alpha_1 u^2 + 2\beta_1 uv + \gamma_1 v^2 + \dots \\ y &= y(u, v) = a_2 u + b_2 v + \alpha_2 u^2 + 2\beta_2 uv + \gamma_2 v^2 + \dots \\ z &= z(u, v) = a_3 u + b_3 v + \alpha_3 u^2 + 2\beta_3 uv + \gamma_3 v^2 + \dots \end{aligned} \right.$$

si les trois formes linéaires

$$(3) \qquad a_1 u + b_1 v, \qquad a_2 u + b_2 v, \qquad a_3 u + b_3 v$$

sont proportionnelles les unes aux autres ?

On peut voir que, dans ce cas, *la surface* (2') *peut, en général*[1], *par une transformation ponctuelle*

$$(I) \qquad f(x, y, z) = X, \qquad g(x, y, z) = Y, \qquad h(x, y, z) = Z$$

[1] Plus précisément, c'est ce qui a lieu si on suppose :

1° que l'un au moins des coefficients a_i, b_i ($i = 1, 2, 3$), a_1, par exemple, est différent de zéro ;

2° que

$$\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 b_1 - \beta_1 a_1 & \beta_1 b_1 - \gamma_1 a_1 \\ a & \alpha_2 b_2 - \beta_2 a_2 & \beta_2 b_2 - \gamma_2 a_2 \\ a_3 & \alpha_3 b_3 - \beta_3 a_3 & \beta_3 b_3 - \gamma_3 a_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

régulière et à jacobien non nul à l'origine, se ramener à

$$(S_0) \qquad Y^2 = XZ^2$$

Tout d'abord, il est clair que moyennant une subtitution linéaire effectuée sur x, y, z, on peut supposer nulles les deux premières des formes (3).

Puis, comme rien n'empêche d'effectuer également sur u, v n'importe quelle transformation ponctuelle

$$(\text{II}) \qquad \varphi(u, v) = U, \qquad \psi(u, v) = V$$

à jacobien non nul à l'origine, on peut (si la forme (3) restante n'est pas identiquement nulle[1]) supposer que la troisième équation (2′) se réduit à

$$(4) \qquad z = u$$

Ceci fait, nous supposerons[2] que l'un des deux coefficients γ, par exemple γ_1, est différent de zéro et peut, par conséquent être pris égal à 1.

On peut alors admettre que la première équation (2′) se réduit à

$$(4') \qquad x = v^2$$

Pour le voir, remarquons que l'équation

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial x}{\partial v} = v + \beta_1 u + \ldots = 0$$

est alors résoluble en v dans le voisinage de $u = v = 0$ et donne

$$v = \beta_1 u + \lambda_2 u^2 + \ldots = \chi(u).$$

Effectuons le changement de variable

$$v = \chi(u) + V$$

lequel est de la forme (II). Ceci revient à admettre que l'équation (5) est vérifiée (identiquement en u) pour $v = 0$, c'est-à-dire que le développement de x ne contient aucun terme linéaire en v, soit

$$x = \Phi(u) + v^2(1 + m_1 u + n_1 v + \ldots)$$

---

[1] C'est l'hypothèse 1° de la note précédente.
[2] Ceci est contenu dans l'hypothese 2° de la note précédente.

Or

$$v(1 + m_1 u + n_1 v + \dots)^{\frac{1}{2}} = V$$

est une transformation (II), et

$$x - \Phi(z) = X$$

est une transformation (I). En les effectuant toutes deux, l'expression de x est bien réduite à la forme (4').

Celle de y peut s'écrire, en séparant les termes pairs et les termes impairs en v,

$$y = vF(u, v^2) + G(u, v^2) = vF(z, x) + G(z, x).$$

Comme la transformation $y - G(z, x) = Y$ est de la forme (I), on peut supposer $G = 0$. Les équations de la surface sont alors (5), (4') et

(4'') $$y = vF(z, x),$$

d'où

(S_1) $$y^2 = xF^2(z, x).$$

En général[1], F contiendra un terme en z seul du premier degré. Il pourra être alors pris comme nouvelle variable z et l'équation sera ramenée à la forme (S_0). Sur celle-ci, il apparaît bien que l'origine appartient à une ligne double et joue le rôle de « point pince »[2].

En laissant de côté le détail des calcul qui précèdent, on voit que l'étude très simple de la surface (S_0) suffit à rendre compte de ce qui se passe dans le cas c.

J. Hadamard,
Membre de l'Institut, Paris.

---

[1] C'est l'hypothèse 2° mentionnée dans la note 1 de la page précédente.

[2] Un point de rebroussement non situé sur une ligne double (exemple : $y^2 = x(z^2 + x^2)$) est, à ce point de vue, une singularité plus élevée que celle du texte.

SUR DEUX APPLICATIONS DES COORDONNÉES INTRINSÈQUES

1. — Dans un article « Sur quelques généralisations de la transformation de M. E. Koestlin », qui paraîtra prochainement dans les « *Annales de l'Académie de Porto* », nous avons traité l'*arcuïde*. Nous y avons généralisé cette courbe[1] en remplaçant l'axe rectiligne par une axe curviligne (voir la définition au n° 2). De même nous avons mentionné plusieurs générations et les propriétés principales des courbes, dont l'équation intrinsèque est

$$(1) \qquad R = ae^{m\varphi} \cos n\varphi \qquad \text{ou} \qquad (1') \qquad R = a\varphi e^{m\varphi} .$$

Ces courbes, que nous avons nommées *logarithmoïdales*, ont été signalées comme semblables à leurs développées successives par M. G. Loria[2], nous les avons traitées comme *causticoïdes* de la *spirale logarithmique*[3]. La *logarithmoïde* ($n = 1$) a fait l'objet de plusieurs articles de M. Koestlin; (voir Mitt. math. nat. Verein Württemberg, (2), 9, 1907, p. 21-30; (2), 11, 1909, p. 54); elle a aussi été mentionnée par d'autres auteurs[4].

Dans ce qui suit, nous allons déduire une relation intéressante entre les trois courbes associées à une courbe (C) à l'aide des coordonnées intrinsèques.

2. — Si l'équation intrinsèque de (C) a la forme

$$(2) \qquad (C) \equiv f(s, R) = 0$$

on aura la *courbe de Mannheim*, représentée par l'équation ponctuelle

$$(3) \qquad (M) \equiv f(x, y) = 0$$

[1] Voir la thèse de M. Koestlin : *Über eine Deutung der Gleichung, die zwischen dem Bogen einer Kurve und der Neigung der Tangente im Endpunkte des Bogens einer ebenen Kurve besteht*, Tubingen, 1907. — H. Wieleitner, *Spezielle ebene Kurven*. Leipzig, 1908, p. 373.

[2] Voir *Spezielle Ebene Kurven*, 2e éd., Leipzig, 1910-11, t. II, p. 260.

[3] Voir Nils Grane, *Über Kurven mit gleichartigen successiven Developpoiden*, thèse, Lund, 1894 ; G. Loria, II, p. 309.

[4] L. Braude, *Über einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Evolutoïde*, Archiv der Math. und Physik (3), XX, p. 44-52 ; E. Turrière, L'Enseign. Math. XV, 1913, p. 236 ; H. Wieleitner, Spez. Eb. Kurven, p. 373.

comme lieu du premier centre de courbure quand on fait rouler[1] (C) sur l'axe des x.

En cherchant à l'aide de l'équation

$$(4)\qquad ds = R\,d\varphi$$

le rayon de courbure comme fonction de sa déviation φ, on aura l'équation intrinsèque sous la forme

$$(5)\qquad (C) \equiv f_1(R, \varphi) = 0 .$$

Alors la *radiale*[2] de (C) est le lieu des extrémités des rayons vecteurs équipollents aux rayons de courbure de (C) : son équation polaire est

$$(6)\qquad f_1(r, \omega) = 0 .$$

Enfin, en représentant la courbe (C) par l'équation

$$(7)\qquad s = f_2(\varphi)$$

l'*arcuïde* de (C) aura l'équation tangentielle :

$$(8)\qquad x\cos\varphi + y\sin\varphi - f_2(\varphi)\cos\varphi = 0$$

Elle sera l'enveloppe des droites parallèles aux normales de (C) qui coupent l'axe des x aux points dont les abscisses sont égales aux arcs correspondants de (C).

En dérivant (8) ou l'équation équivalente

$$(8')\qquad x + y\,\mathrm{tg}\,\varphi - s = 0$$

on aura les coordonnées cartésiennes du point de contact P (x, y), savoir

$$(9)\qquad x = s - R\sin\varphi\cos\varphi , \qquad y = R\cos^2\varphi .$$

De là, on déduit

$$(x - s)^2 + y^2 = R^2\cos^2\varphi ;$$

le point P (x, y) est donc la projection du point E $(x = s, y = R)$, c'est-à-dire du point correspondant de la *courbe de Mannheim* M sur la tangente (8).

3. — D'après un théorème publié par M. SANTANGELO et quelque temps après par l'auteur[3], on peut faire rouler la radiale (R) de

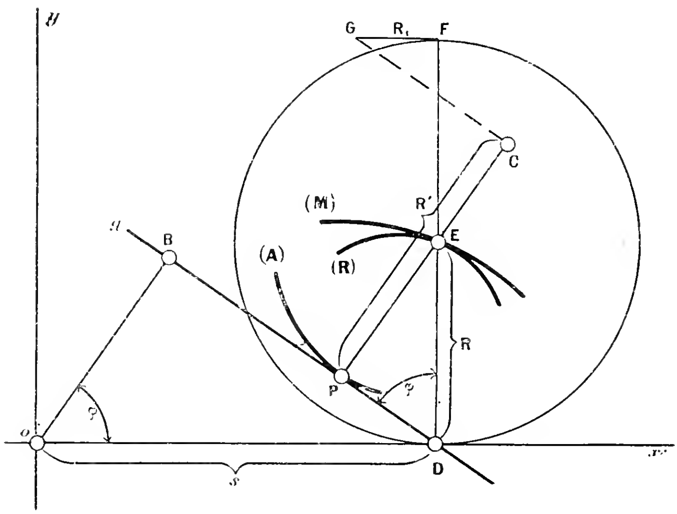
[1] Voir A. MANNHEIM, *Géom. ciném.*, p. 500 ; G. LORIA, II, p. 231 ; H. WIELEITNER, p. 227 Voir de même notre thèse *Über einige Verallgemeinerungen des Begriffes der Mannheimschen Kurve*, Heidelberg, 1911.

[2] Voir G. LORIA, II, p. 289 ; H. WIELEITNER, p. 362.

[3] Voir G. B. SANTANGELO, *Sulle curve di Mannheim, sulle radiale e und generalizzazione di esse*, Rend. Circ. Mat. Pal., 29, 1910, ou notre thèse, ou enfin notre article *Ueber Roll- und Fusspunktkurven*, Rend. Circ. Mat. Pal., 34, 1912.

la courbe (C) sur la courbe de Mannheim (M) de sorte que la roulette du pôle est l'axe des x, théorème qui est identique aux théorèmes bien connus de Steiner et de Habich sur les *roulettes à base rectiligne* et sur les *podaires* (Wieleitner, p. 207, 208). En ce cas la tangente g de (A) et l'ordonnée de (M) ou le rayon de (R) forment toujours l'angle φ; g est donc identique à une droite immobile menée par le pôle de (R). De là, il résulte :

Quand on fait rouler la radiale (R) *sur la courbe de Mannheim* (M) *on aura comme enveloppe d'une droite* g, *menée par le pôle de* (R), *une certaine arcuïde de* (C).



Par variation de g on aura les ∞^1 différentes arcuïdes de (C), liées entre elles par la transformation de Koestlin, c'est-à-dire *par une rotation constante de chaque tangente autour de son tracé sur l'axe des* x.

Applications. — *a)* Soit (C) une circonférence de rayon a, alors la courbe de Mannheim est une droite g parallèle à l'axe des x à la distance d; la radiale est une circonférence congruente pour laquelle le pôle est situé au centre. En la faisant rouler sur g on aura, d'après Chasles (*G. Loria*, II, p. 142) comme enveloppes des diamètres un système de cycloïdes congruentes, représentant les arcuïdes de (C).

b) Supposons que (C) est une cycloïde

$$s^2 + R^2 = a^2 \tag{10}$$

ou

$$R = a\cos(\varphi - \varphi_0) . \tag{11}$$

Alors la radiale est la circonférence

$$(12) \qquad r = a \cos(\varphi - \varphi_0)$$

la courbe de *Mannheim* est une circonférence à double extension

$$(12') \qquad x^2 + y^2 = a^2 .$$

En faisant rouler (12) de même courbure sur (12'), on aura comme roulette du pôle (qui est ici, d'après (12) un point P de sa périphérie) l'axe des x de (12'). L'enveloppe d'une droite (g) menée par P est une *astroïde oblique*, parallèle à l'enveloppe du diamètre de (12) qui est parallèle à g.

c) L'arcuïde d'une astroïde droite, représentée par

$$(13) \qquad 4s^2 + R^2 = a^2$$

ou

$$(13') \qquad s = \frac{a}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_0) \, , \quad R = a \cos 2(\varphi - \varphi_0)$$

est une *hypocycloïde de Steiner*, dont l'extension est indépendante de la position de l'astroïde ; son équation tangentielle est

$$(14) \qquad x \cos \varphi + y \sin \varphi - \frac{a}{2} \sin 2(\varphi - \varphi_0) \cos \varphi = 0$$

elle aura donc toujours l'axe des x comme tangente à l'origine[1]. La radiale de (13) est la *rosace à quatre feuilles*

$$(15) \qquad r = a \sin 2\alpha \; ,$$

la courbe de Mannheim est l'ellipse correspondante :

$$(15') \qquad 4x^2 + y^2 = a^2 .$$

De là, il résulte :

Quand on fait rouler la rosace (15) sur l'ellipse (15') de sorte que la roulette du pôle soit l'axe des x *on aura comme enveloppe d'une droite quelconque* g *menée par le pôle un système d'hypocycloïdes tricuspidales congruentes entre elles.*

d) Enfin la spirale logarithmique

$$(16) \qquad R = as$$

aura comme courbe de Mannheim la droite $y = ax$; la *radiale* est une *spirale congruente*. On aura donc sans aucun calcul l'arcuïde,

---

[1] Voir Laguerre, *Œuvres*, II, p. 580 ; Wieleitner, p. 384 ; quant à une généralisation de ce théorème et de quelques autres, mentionnés dans cet article, voir aussi notre petit opuscule : *Les coordonnées intrinsèques*, Gauthier-Villars, 1914.

c'est-à-dire la *logarithmoïde* comme enveloppe d'une droite menée par le pôle de la spirale qu'on fait rouler sur la droite.

4. — De même nous allons regarder les arcuïdes d'une famille de *courbes à courbure proportionnelle*. On aura une telle famille de courbes par la variation de la constante c dans l'équation intrinsèque

$$\text{(17)} \qquad R = cf(s) .$$

Les courbes de Mannheim dont les équations ponctuelles sont

$$\text{(17')} \qquad y = cf(x)$$

sont affines entre elles par rapport à l'axe des x. L'équation polaire des radiales est

$$\text{(18)} \qquad \rho = cf\left(\frac{1}{c}\int \frac{ds}{f(s)}\right) ;$$

on aura donc toutes ces courbes par une seule par la multiplication du rayon polaire et de l'angle polaire avec deux constantes réciproques entre elles. Enfin les arcuïdes de $R = f(s)$ et de $R = cf(s)$ ont les équations

$$\text{(19)} \qquad \text{(A)} \qquad x + y \operatorname{tg} \varphi - s = 0 ,$$

$$\text{(19')} \qquad \text{(A')} \qquad x + y \operatorname{tg} n\varphi - s = 0 .$$

On aura donc (A') en divisant l'angle φ compris entre la tangente de (A) et l'axe des x dans un rapport constant.

Applications. — *a)* Soit (C) une circonférence dont l'arcuïde est une cycloïde. Toutes les courbes à courbure proportionnelle sont des circonférences semblables ; de là il résulte :

Quand on divise l'angle entre la tangente (normale) d'une cycloïde et la tangente aux sommets (directrice) dans un rapport constant, l'enveloppe de ces droites est une cycloïde semblable.

b) Soit (C) une spirale logarithmique $R = as$ alors toutes les *courbes à courbure proportionnelle* sont des autres spirales : $R = a_1 s$; de là on déduit :

Quand on divise l'angle de contingence d'une logarithmoïde par rapport à l'axe fondamental (tangente) dans un rapport constant on aura comme enveloppes des droites une autre logarithmoïde.

c) Supposons enfin comme (C) une astroïde oblique

$$\text{(20)} \qquad x \cos \varphi + y \sin \varphi - \cos \varphi \cos (\varphi - \varphi_0) = .$$

Elle est l'arcuïde de la cycloïde $s = \cos(\varphi - \varphi_0)$ ou $R^2 + s^2 = 1$; l'axe des x est une tangente double de l'astroïde. En appliquant la transformation $s = s'$, $R = \frac{R'}{2}$, la cycloïde aura comme courbe à courbure proportionnelle une astroïde droite, dont l'arcuide est une hypocycloïde de Steiner. On trouve donc :

Quand on dédouble l'angle d'inclinaison de la tangente variable d'une astroïde oblique par rapport à une tangente double, l'enveloppe de ces droites est une hypocycloïde tricuspidale.

Si par exemple l'équation cartésienne de l'astroïde est

$$(21) \qquad (x-a)^{2/3} + y^{2/3} - a^{2/3} = 0$$

celle de l'hypocycloïde tricuspidale est

$$(21') \qquad x \cos\varphi + y \sin\varphi - 2a \cos^3\varphi = 0 \,,$$

il y a donc au point de rebroussement de (21), situé à l'origine, un rebroussement de la courbe (21') ; le sommet opposé de (21') est situé dans l'autre rebroussement de (21) (c'est-à-dire au point $x = 2a$, $y = 0$).

Pour la croix de Malte

$$(22) \qquad x \cos\varphi + y \sin\varphi - a \cos^2\varphi = 0$$

dont l'axe des x est la tangente au point auto-tangentiel, la podaire de la transformée

$$(22') \qquad x \cos\varphi + y \sin\varphi - a \cos\varphi \cos 2\varphi = 0$$

est un *trifolium droit*[1].

L. Braude (Bierstadt-Wiesbaden).

---

[1] Voir G. Loria, I, p. 170 ; F. G. Teixeira, *Traité de courbes spéciales remarquables planes et gauches*, Coïmbre, 1908, t. II, p. 188 ; H. Wieleitner, p. 149.

REMARQUE SUR LES POINTS D'INFLEXION D'UNE CUBIQUE A POINT DOUBLE[1]

La construction des points d'inflexion d'une cubique à point double revient, au fond, à la construction des trois éléments unis d'une correspondance (1,2). Sous ce point de vue, le problème n'est point nouveau, puisque la définition des points d'inflexion par une correspondance (1,2), a déjà été donnée par Em. WEYR[2] et que la construction des points unis d'une correspondance (1,2) générale par l'intersection de deux coniques est un problème depuis longtemps résolu[3].

Mais on peut se poser un autre problème au sujet de la construction des points d'inflexion d'une cubique unicursale : c'est celui de construire la droite, joignant les trois points d'inflexion et que l'on peut appeler ligne des inflexions. On verra dans la suite que cette construction se fait par la règle seule ; aussi cette construction résume-t-elle une grande partie de la théorie des points d'inflexion.

J'appelle conjugués[4] deux points qui ont le même point tangentiel. Rappelons deux propriétés de ces points :

a) La ligne qui joint deux points conjugués, dont le point tangentiel est A, rencontre la courbe à nouveau au point A′, conjugué du point A[5].

b) Toutes ces lignes touchent une même conique[6].

Les couples de points conjugués forment une involution sur la courbe ; ils sont donc découpés par les coniques d'un faisceau [F]

---

[1] A propos de la communication de M. L. CRELIER, *Sur les correspondances en géométrie synthetique* (V. l'*Enseignement mathématique*. n° du 15 nov. 1913).

[2] E. WEYR, *Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde* (Leipzig, 1869), p. 93.

[3] V. p. ex. H. SCHRŒTER, *Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung* (Leipzig, 1888), p. 20.

[4] V. p. ex. H. SCHRŒTER, *l. c.*, p. 6.

[5] V. p. ex. H. SCHRŒTER, *l. c.*, p. 11.

[6] V. Em. WEYR, *l. c.*, p. 103

passant par le point double O, par deux points fixes choisis arbitrairement sur la courbe et par un quatrième point Q situé hors de la courbe et déterminé par les trois précédents. Prenons pour les deux points fixes sur la courbe un couple de points conjugués P,P'. Le faisceau [F] est lié par une correspondance homographique au faisceau de droites projetant du point O les points tangentiels communs des couples de points conjugués. Ces deux faisceaux engendrent une cubique C ayant O pour point double et passant par les points P,P',Q ; on conçoit facilement qu'elle coupe en outre la courbe primitive aux trois points d'inflexion. La courbe C se compose de trois droites. En effet : à la droite $\overline{OP}$ correspond dans le faisceau [F] la conique découpant les deux points conjugués dont le point tangentiel est P ; ces deux points sont situés (théorème *a*) sur une droite *p* contenant P' ; comme cette droite a trois points communs avec la conique, cette courbe se compose de la droite *p*, qui doit contenir le point Q, et de la droite OP. Donc, cette droite fait partie de la courbe C ; il en est de même de la droite OP'. Appelons *i* la troisième droite concourant à former la courbe C. On conclut du raisonnement qui précède que la droite *i* contient les trois points d'inflexion de la courbe ; que cette droite contient le point Q ; que par le point Q passent aussi la droite *p* et la droite analogue *p'*, laquelle passe par le point P et joint les points dont le point tangentiel est P'.

On a le théorème : *Prenons deux couples de points conjugués dont les points tangentiels communs sont eux-mêmes conjugués. Les droites joignant les deux couples se rencontrent sur la ligne des inflexions.*

On pourrait déduire de ce théorème une construction quadratique de la ligne des inflexions.

On a vu que chaque conique passant par le point double, par le couple de points conjugués P,P' et par un autre couple arbitraire de tels points passe par le même point Q situé sur la droite *i*. Soit B le point d'intersection de la droite OQ avec la courbe ; et soient R,R' les points conjugués ayant B pour point tangentiel. La conique déterminée par les points O,P,P'R,R' passe aussi par le point Q. Puisqu'on peut intervertir les rôles des deux couples P,P'R,R', on conçoit facilement que la droite joignant le point double au point tangentiel du couple P,P' rencontre la conique pour la deuxième fois en un point de la ligne des inflexions.

Donc : *la conique déterminée par le point double et par deux couples de points conjugués rencontre la droite des inflexions aux mêmes points que les deux droites qui joignent le point double aux points tangentiels des deux couples.*

Faisons coïncider les deux couples ; on conclut du théorème précédent : *la conique passant par le point double et touchant la courbe en deux points conjugués touche la ligne des inflexions au* *point où cette ligne est rencontrée par la droite qui joint le point double au point tangentiel du couple des points conjugués.*

On déduit de ce théorème la *construction* suivante *de la ligne des inflexions* : construisons la tangente en un point P de la courbe et déterminons son point tangentiel A ; menons de ce point la seconde tangente à la courbe et déterminons son point de contact P′. La ligne PP′ rencontre la droite $\overline{OA}$ au point A_1 ; construisons le conjugué harmonique Q du point O par rapport aux points A, A_1, et le conjugué harmonique N du point A_1 par rapport aux points P, P′ ; la ligne joignant les points Q, N est la ligne des inflexions. Cette construction se fait par la règle seule.

Puisque la ligne PP′ contient le point A′ conjugué au point A, il est facile de voir que la ligne NA contient le couple de points conjugués ayant A′ pour point tangentiel. Les lignes NA, NA_1 sont par suite deux tangentes de la conique-enveloppe des droites qui contiennent les couples de points conjugués (théorème *b*) ; il suit de la construction précédente que *la ligne des inflexions est la polaire du point double par rapport à cette conique.* Les tangentes au point double de la courbe sont aussi des lignes contenant des couples de points conjugués (ce sont les deux points superposés au point double ; il s'ensuit que *la ligne des inflexions rencontre la conique aux deux points où elle est coupée par les tangentes au point double* [1].

B. Bydžovsky (Prague-Karlin).

---

[1] J'ai publié une autre démonstration de la construction de la ligne des inflexions dans *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*, t. XXXV (Prague, 1905).

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos de la remarque de M. Bydžovsky.

Extrait d'une lettre de M. L. Crelier.

Nous avons communiqué la Note ci-dessus, en épreuve, à M. Crelier, qui nous a répondu par une lettre dont voici le principal passage. *(N. de la Réd.)*

« Quand j'ai publié mes premières recherches sur la géométrie synthétique des courbes supérieures *L'Enseign. Math.*, 1906, le travail de M. Em. Weyr m'était inconnu. Si nous sommes arrivés, Weyr et moi à des résultats analogues, nos points de départ et nos raisonnements sont quand même différents.

« Où Weyr n'a donné qu'une méthode de construction, j'en apporte en général deux et, d'autre part, par mes notes parues en 1906 et 1907, les résultats obtenus peuvent immédiatement s'appliquer à des courbes plus générales que celles du 3e degré ou de la 3e classe.

Enfin l'application systématique et constante de la dualité des raisonnements m'a permis d'étendre quelque peu et par des moyens faciles le champ des courbes de classe.

« A titre d'exemple, j'appliquerai la méthode dualistique à la Note même de M. Bydžovsky et j'en tirerai a priori les deux théorèmes suivants dont je donnerai la démonstration dans un prochain numéro de l'*Ens. Math.* :

« I. — *Les trois tangentes de rebroussement d'une courbe de la 3e classe à tangente double isolée se coupent en un même point. Celui-ci est le pôle de la tangente double par rapport à la conique auxiliaire lieu des points de coupe des tangentes conjuguées.*

« II. — *Dans une courbe de 3e classe avec une tangente double à points de tangence réels et différents, la tangente du seul rebroussement possible passe par le point de coupe des tangentes de la conique auxiliaire menées par les points de tangence de la tangente double.* »

L. Crelier (Berne-Bienne).

CHRONIQUE

Le Premier Congrès de Philosophie mathématique [1].

Paris, 6-8 avril 1914.

Le premier Congrès de Philosophie mathématique a eu lieu à Paris du 6 au 8 avril 1914, sous les auspices de la Société française de Philosophie, et comme suite à la Conférence internationale de l'Enseignement mathématique. Les séances se tinrent à la Sorbonne, sous la présidence de M. Xavier Léon, directeur de la Revue de Métaphysique et de Morale, et principal organisateur de la réunion.

Le dimanche 5 avril, à 4 heures, une réception des plus cordiales, offerte par M. et Mme X. Léon, permettait aux membres du Congrès de faire connaissance.

La *séance générale d'ouverture* eut lieu le lundi matin sous la présidence de M. Emile Boutroux, membre de l'Institut et président d'honneur du Congrès.

M. X. Léon exposa tout d'abord les origines de cette réunion de philosophes et de mathématiciens.

Dans son discours d'ouverture, M. E. Boutroux a commencé par rappeler le nom de M. Henri Poincaré, son beau-frère, dont le souvenir est présent dans tous les cœurs ; il salue les congressistes au nom de cette chère mémoire. Puis il étudie les rapports de la philosophie avec les sciences et plus spécialement avec les mathématiques. Cette étude, remarquable par la richesse et la hauteur de ses vues aboutit à la conclusion que voici : Comme son histoire le montre, la philosophie ne peut se développer que par un contact intime avec les sciences ; mais sous peine de manquer à sa mission elle ne doit se laisser absorber par aucune d'entre elles et maintenir jalousement sont autonomie.

M. Timerding expose ensuite les difficultés très grandes qu'il y a à organiser le plan et la matière des ouvrages qui, dans l'*Ency-*

[1] Les travaux et les discussions du Congrès feront l'objet d'un numéro spécial de la *Revue de Métaphysique et de Morale* dirigée par M. X. Léon. Librairie Arm. Colin, Paris.

clopédie des Sciences mathématiques, seront consacrés à la philosophie. Les rapports qui existent entre les mathématiques et la philosophie ont été et sont encore trop étroits pour que l'on puisse négliger cette dernière ; mais comment les comprendre ? Quelles sont les questions philosophiques qui sont d'un intérêt vital pour les mathématiques ? M. Timerding espère que le nouveau Congrès qui s'ouvre permettra de préciser en partie ce problème.

Les séances suivantes furent consacrées à la lecture et à la discussion des travaux énumérés ci-après :

M. P. Langevin : *Le temps local.*

M. H. Dingler : *Sur la théorie des Sciences de Henri Poincaré.*

M. Dienes : *Symbolisme et réalité dans les mathématiques.*

M. L. Couturat : *De l'abus de l'intuition dans l'enseignement mathématique.*

M. E. Le Roy : *Les démarches essentielles de la pensée mathématique en analyse pure.*

M. F. Enriques : *L'infini mathématique.*

M. A. Reymond : *L'infini géométrique et l'intuition.*

M. D. König : a) *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre von J. König.* — b) *Sur un problème de la théorie générale des ensembles.*

M. A. Padoa : *Des conséquences d'un changement d'idées primitives dans une théorie déductive quelconque.*

M. H. Dufumier : *La logique des classes et la théorie des ensembles.*

M. A.-N. Whitehead : *La relation d'espace* (the relational theory of space).

M. L. Nelson : *Ueber die Grundlagen der Geometrie.*

M. J. Hadamard : *Propriétés intrinsèques de l'espace.*

M. J. Hadamard : *Le calcul fonctionnel, analyse et synthèse.*

M. L. Brunschvicg : *L'arithmétique et la théorie de la connaissance.*

M. M. Winter : *Le temps et la mécanique héréditaire.*

Dès lundi après midi et jusqu'au mercredi soir, les séances furent toutes consacrées à l'étude critique des travaux qui figuraient au programme. Les communications avaient été groupées suivant leur contenu, ce qui contribua à donner plus d'unité aux discussions ; mais, comme le fit remarquer M. Fehr à la fin du Congrès, peut-être y aurait-il eu avantage à limiter et à concentrer encore les sujets que l'on se proposait d'étudier.

Dans la *séance du lundi après-midi*, M. Langevin donne tout d'abord, d'après ses propres idées et en tenant compte des récents travaux d'Einstein, un exposé magistral et complet de la question que soulève *le temps local*. M. Abraham fait des réserves sur les conclusions formulées par M. Langevin. Le groupe de transformations défini par Einstein est bien plus un programme de recherches qu'un fait établi, car en tant qu'il caractérise une propriété d'invariance il doit s'appliquer à toutes les forces physiques, y compris le champ de gravitation, ce qui n'est pas le cas.

M. Dingler lit ensuite sa communication *sur la théorie des sciences d'Henri Poincaré*. Il montre que sur ce point les idées du grand mathématicien ne sont pas aussi contradictoires qu'elles le paraissent à première vue. Pour les comprendre il faut distinguer « deux espèces de recherches : *a*) l'une opérant avec des conventions et *b*) l'autre opérant par l'expérience. En trouvant les frontières qui les séparent l'une de l'autre on peut montrer comment elles peuvent subsister simultanément ». M. Padoa loue M. Dingler d'avoir dissipé les équivoques que le style subtil et paradoxal de Poincaré a pu faire naître chez certains esprits faibles et d'avoir montré que ses théories ne donnent pas le droit de contester la valeur de la science.

M. Dienes résume les théories essentielles d'un remarquable travail intitulé : *Symbolisme et réalité dans les mathématiques*. Les symboles mathématiques ont pour caractère essentiel de constituer un système ; ils forment un tout auquel chacun d'eux est lié d'une façon indissoluble. Pris isolément, les termes n'ont aucun sens mathématique. La construction d'un système dit mathématique n'est ni déductive ni inductive ; mais elle procède par généralisations successives. Les mathématiques ne forment pas un ensemble de conventions arbitraires, à moins de procéder comme Hilbert et de dépouiller les signes de toute signification. On peut ne pas symboliser le côté systématique de la réalité sensible ; mais si l'on s'engage dans cette voie, les mathématiques surgissent inévitablement et c'est pourquoi elles ont une objectivité indéniable.

Dans son étude sur « l'Abus de l'intuition dans l'enseignement mathématique », M. L. Couturat pose le problème suivant : Quelle place convient-il d'attribuer respectivement à la logique et à l'intuition dans l'enseignement des mathématiques ? Il conclut en disant qu'après avoir pris dans la réalité intuitive et objective une base suffisamment large, la démonstration doit procéder par voie déductive, s'interdire tout appel à l'intuition et pratiquer la méthode même qu'Euclide croyait ou voulait employer. D'après M. Hadamard on ne saurait faire dans l'enseignement secondaire la part trop grande à l'intuition ; ce qu'il faut réprimer c'est, non pas l'abus de l'intuition, mais l'insuffisance de la rigueur. La rigueur doit marcher de pair avec l'intuition, et par rigueur il faut entendre l'énoncé complet des axiomes nécessaires à une théorie déductive, et non la réduction de ces axiomes au plus petit nombre possible. Cette dernière tâche, en effet, doit être réservée à l'enseignement universitaire.

En France, dit M. Bioche, on s'efforce de ne pas sacrifier la rigueur dans l'enseignement élémentaire ; on se borne parfois à énoncer et à faire vérifier expérimentalement certaines propositions lorsque la démonstration en est trop complexe. M. Padoa fait remarquer que par abus de l'intuition il faut entendre simplement l'emploi des pseudo-démonstrations. Loin de masquer les appels à l'intuition, la logistique les met en pleine lumière par le fait qu'elle énonce tous les postulats d'une théorie déductive. M. Couturat estime qu'il y a équivoque sur le mot intuition. Celui-ci désigne, tantôt un recours à l'usage des yeux et des sens, tantôt une opération intellectuelle, irréductible et inanalysable. M. Couturat n'a jamais voulu condamner l'intuition sous la deuxième de ses formes. M. Fontené, enfin, insiste sur la rigueur qui caractérise l'enseignement des mathématiques en France. Une figure n'est jamais introduite sans que l'on en ait démontré l'existence.

Malgré l'heure avancée, M. Le Roy sut retenir l'attention de l'auditoire par sa belle conférence sur « *les démarches essentielles de la pensée mathématique en analyse pure.* Par des exemples appropriés il montre qu'il y a dans les fonctions mathématiques un élément d'objectivité irréductible à l'analyse.

Le *mardi matin*, 7 avril, M. F. Enriques aborde le problème de *l'infini mathématique*. L'idée de l'infini ne peut provenir uniquement de l'expérience; elle implique nécessairement l'intervention de la raison et se présente sous deux aspects: potentiel et actuel. Jusque-là, tous les philosophes sont d'accord; mais peut-on passer de l'infini potentiel à l'infini actuel ? C'est sur cette question que les opinions divergent, et que les mathématiciens se partagent en réalistes et nominalistes pour employer une terminologie empruntée à la scolastique.

Les réalistes affirment l'existence d'un infini actuel, et cette affirmation, bien qu'elle soit indispensable comme méthode de recherche, repose cependant sur de faux principes qui sont les suivants: toute suite d'approximations successives a une limite; toute infinité est égale à une classe; à la limite on peut passer du fini à l'infini. Les nominalistes se refusent à accepter de semblables propositions parce qu'elles conduisent à des paradoxes comme celui énoncé par Galilée. D'autre part, Dubois-Reymond a montré que sous le nom d'idéalisme et d'empirisme les deux tendances qui viennent d'être caractérisées coexisteront toujours. Cantor, tout en se défendant d'être réaliste a essayé de surmonter la difficulté et de manier l'infini; mais il a dû recourir pour le nombre ω à un postulat d'existence; par suite il n'échappe pas aux difficultés que soulève le réalisme et que les antinomies de Burali-Forti ont mises en pleine lumière.

M. Hadamard se défend d'être réaliste au sens défini par M. Enriques; il approuve les critiques adressées par Burali-Forti au cantorisme; mais d'autre part il admet le théorème de Zermelo suivant lequel le continu peut être bien ordonné, ce qui suppose pour l'esprit la possibilité de concevoir une infinité de choix indépendants. Un certain réalisme touchant l'existence de l'infini est impliqué dans les mathématiques. La fonction de Dirichlet-Riemann ne peut sans cela être interprétée d'une façon satisfaisante. M. Borel bien que professant le nominalisme a cependant pris une attitude réaliste dans quelques-uns de ses plus remarquables travaux, par exemple dans la démonstration du théorème suivant : une série de Taylor, écrite au hasard, admet en général son cercle de convergence comme coupure. M. Cahen fait remarquer que ce théorème recevra peut-être un jour une interprétation nominaliste comme cela est arrivé dans d'autres cas. M. Enriques admet la fonction de Dirichlet-Riemann, parce que la notion en est suggérée par l'expérience ; mais cette suggestion fait défaut lorsqu'il s'agit de l'axiome de Zermelo, lequel suppose un choix extra-expérimental pour ainsi dire. M. Lebesgue estime que M. Hadamard est plus ou moins conduit par sa conception à supposer l'existence d'une intelligence divine capable d'opérer une infinité de choix indépendants ; les mathématiques dans ce cas renfermeraient des théorèmes que nous ne pourrons jamais comprendre. S'engager dans cette voie c'est aboutir à l'axiome de Zermelo et aux antinomies cantoriennes. MM. Couturat et Dufumier insistent sur la distinction qu'il faut faire relativement à ces problèmes entre la notion de loi et celle de correspondance. M. Whitehead enfin parle des moyens que M. Russell et lui ont mis en œuvre dans les *Principia mathematica* pour échapper aux antinomies de l'infini.

La *séance du mardi après-midi* fut ouverte par deux communications de M. König. Dans la première, M. König résume les idées de son père *sur la logique, l'arithmétique et la théorie des ensembles*. Grâce à un choix judicieux d'axiomes et de définitions les contradictions relatives au transfini disparaissent et n'ont plus de sens. Dans sa deuxième communication M. König donne *la démonstration d'un problème concernant la théorie des ensembles* et cela en s'appuyant sur l'axiome de Zermelo.

M. Padoa parle ensuite *des conséquences d'un changement d'idées primitives dans une théorie déductive quelconque*. Il commence par montrer l'intérêt de ce problème pour la coordination déductive de toute science. Etant donné le système d'idées primitives et le système de postulats sur lesquels repose une science, à quelles conditions peut-on en opérer la réduction et en découvrir de meilleurs ? Lorsqu'il s'agit des postulats, le problème est très simple ; mais dans le cas d'une déduction des idées primitives la tâche est plus délicate et demande une série d'opérations que M. Padoa analyse avec grand soin.

M. H. Dufumier dans son étude *sur la logique des classes et la théorie des ensembles* se propose de montrer que sous sa forme systématique l'algorithme des classes doit être considéré comme une généralisation de la théorie des ensembles. La signification logique du concept ne réside pas dans son extension, c'est-à-dire dans une fonction numérique, mais bien dans le fait qu'il peut être affirmé ou nié. Or la notion d'ensemble dépouillée des déterminations qui l'acheminent vers la notion de nombre se ramène à ceci : délimiter dans un univers donné et par rapport à cet univers un domaine d'objets qui répondent à une désignation définie à l'exclusion de tous les objets qui n'y satisfont pas. Classe et ensemble reposent donc sur le même fondement logique.

M. Padoa critique cet exposé et reproche en particulier à M. Dufumier d'avoir dans son exposé historique commis des erreurs en ce qui concerne l'emploi des symboles de subsomption. M. Dufumier déclare que M. Padoa ne l'a pas compris. L'emploi défectueux des symboles que celui-ci lui reproche avait précisément pour but de mettre en lumière leur imperfection.

M. Arnold Reymond résume sa communication sur *l'infini géométrique et l'intuition*. Mathématiquement on peut ramener le problème de l'infini géométrique à celui de l'infini analytique ; logiquement on peut le définir comme un élément idéal par rapport à d'autres éléments dits réels ; mais philosophiquement un problème subsiste. Pour le résoudre il faut distinguer entre l'intuition et la transintuition géométriques, l'une et l'autre concevant l'étendue comme homogène et continue. Cela étant, la considération des éléments à l'infini fait toujours intervenir une dimension spatiale de plus que ce n'est le cas pour ces mêmes éléments envisagés dans le fini. En outre, l'infini géométrique implique des caractères à la fois statiques et dynamiques. En effet, les éléments de l'infini soutiennent avec ceux du fini des rapports constants de position et de situation. D'autre part, ces rapports ne peuvent être explicités autrement que par des nombres et le dynamisme qui est propre à la loi de la numération s'introduit dans la notion de l'infini géométrique et la rend transintuitive.

M. Enriques ne croit pas qu'une dimension nouvelle intervienne nécessairement dans la considération des éléments à l'infini. La droite peut être définie sans être considérée comme une ligne fermée. M. Reymond répond que logiquement cela est en effet possible ; mais, du point de vue de l'intuition, la droite indéfinie ne peut être conçue autrement que comme une ligne fermée. Une discussion s'engage ensuite entre MM. Fontené, Langevin et Enriques sur les espaces à *n* dimensions.

Le *mercredi matin* 8 avril, M. A.-N. Whitehead donne une étude approfondie sur la *relation d'espace*. Cette étude utilise un symbolisme trop technique pour que nous puissions la résumer ici. Disons seulement que M. Whitehead fait ressortir avec netteté les divers sens attribués au mot espace. Il y a tout d'abord un espace apparent qui comprend lui-même deux catégories : l'espace apparent immédiat qui varie d'un individu à l'autre et l'espace apparent complet auquel se réfère le commun des hommes dans la conversation. Vient ensuite l'espace physique qui est celui d'un monde hypothétique d'objets, le même pour tous, et qui correspondrait exactement à nos sensations. Reste enfin l'espace abstrait auquel correspond la géométrie abstraite.

Il existe de nombreux espaces apparents immédiats et de nombreux espaces abstraits. Il est d'usage de supposer qu'il n'y a qu'un espace apparent complet et qu'un espace physique, ce qui est contestable pour ce dernier.

Cela étant, M. Whitehead développe la thèse suivante. Pour établir les fondements de la géométrie il ne faut pas prendre comme idées primitives et indéfinissables les notions de points, lignes, etc., car l'on est alors fatalement conduit à une théorie absolue de l'espace qui, nominalement du moins, est universellement abandonnée. Pour conserver un sens à la relativité de l'espace il faut définir les points en fonction des relations qui existent entre objets et M. Whitehead montre comment une telle définition peut être établie.

M. Hadamard signale un rapprochement intéressant entre les idées de M. Whitehead sur la limite conceptuelle et celle que M. Fréchet a développées dans sa thèse. M. Dingler fait remarquer que les opinions de M. Whitehead sont en désaccord avec les conclusions adoptées par M. Russell dans les *Principles of mathematics*. M. Whitehead réplique en disant que sa collaboration avec M. Russell n'empêche pas certaines divergences de vues et que du reste celui-ci a évolué dans ses idées sur l'espace.

Avec la maîtrise et la compétence que l'on sait, M. Hadamard expose ensuite deux sujets du plus haut intérêt. Le premier concerne une façon nouvelle et ingénieuse de concevoir *les propriétés intrinsèques de l'espace* par analogie avec la périodicité qui caractérise les fonctions elliptiques. Quant au second il traite du *calcul fonctionnel, analyse et synthèse ;* mais il ne saurait être résumé en quelques lignes seulement.

Le *mercredi après-midi*, M. L. Nelson donne lecture de son travail sur *les fondements de la géométrie.* D'après lui, on oscille constamment dans l'étude de cette question entre deux théories opposées qui sont l'empirisme et la logistique ; comme chacune d'elles s'affirme en niant l'autre, la lutte est sans issue. Si en désespoir de cause on les rejette l'une et l'autre on aboutit au conventionalisme ; mais cette solution est aussi fausse que les deux autres. C'est dans une synthèse féconde que la vraie solution sera trouvée. Cette synthèse a pour base une intuition à priori et une série de propositions démontrant que seule la géométrie euclidienne répond à la vérité géométrique intégrale.

M. Enriques conteste qu'il y ait une intuition à priori de la géométrie euclidienne. Plusieurs géométries sont également possibles; mais par l'expérience nous finissons par acquérir l'intuition de l'espace euclidien, et celle-là seulement. M. Padoa estime que l'on ne saurait opposer l'expérience et la logique; elles représentent deux moments successifs et non simultanés dans l'évolution de la science. On ne saurait, d'autre part, réaliser intuitivement un espace non euclidien avec des éléments tirés de l'espace euclidien. M. Fontené, enfin, développe des considérations sur la géométrie générale en s'inspirant des idées de Cayley.

M. Brunschvicg résume brièvement sa communication sur l'*Arithmétique et la théorie de la connaissance*. Il conclut en disant que certaines conceptions comme le nominalisme et le réalisme sont dépassées. Ce qui importe, c'est de saisir la connexion entre l'activité de l'intelligence et l'épreuve des faits.

La dernière communication annoncée au programme était celle de M. Winter: *le temps et la mécanique héréditaire*. En voici les idées essentielles. D'après M. Picard, un système est dit non-héréditaire si son état futur ne dépend que de l'état actuel et de l'état infiniment voisin; il est héréditaire dans le cas contraire. L'étude du mouvement d'un projectile dans le vide appartient au premier type; quand au second, on peut en donner, outre les phénomènes d'hystérésis, l'exemple pratique suivant: un pont métallique, selon qu'il est en usage depuis longtemps ou non, ne se déforme pas de la même façon sous l'influence d'une même charge.

Les travaux de M. Volterra concernant les fonctions de lignes et qui se rattachent au calcul fonctionnel ont permis de soumettre à un traitement mathématique les phénomènes mécaniques héréditaires. La détermination de ces phénomènes doit tenir compte de tous les états antérieurs du système jusqu'à un certain instant t_0 au delà duquel l'action héréditaire est négligeable. Il fallait trouver un algorithme exprimant cette action de toutes les valeurs d'une fonction le long du temps. M. Volterra a montré que selon les cas cet algorithme peut prendre, entre autres, la forme d'une équation intégrale, où la fonction inconnue figure sous le signe intégral ou bien d'une ou de plusieurs équations intégro-différentielles, dans lesquelles les dérivées de la fonction inconnue figurent également sous le signe intégral.

Mais certains auteurs et notamment M. Painlevé estiment que la non-hérédité des phénomènes mécaniques n'est qu'apparente. Si nous disposions d'ultra-microscopes très puissants, nous pourrions analyser l'état moléculaire d'un système mécanique dans ses conditions initiales et en exprimer le cycle par des équations différentielles ordinaires.

Une semblable objection suppose qu'un seul type d'explication mécanique convient aux phénomènes de la nature; ce qu'il est téméraire d'affirmer en présence de la mécanique de la relativité d'une part et de la mécanique basée sur la statistique d'autre part. La conception de M. Volterra suppose sans doute une sorte d'action à distance dans le temps analogue à l'action des forces newtoniennes dans l'espace. Mais on peut, dans un cas comme dans l'autre, ne pas trancher métaphysiquement le problème et dire que les choses se passent comme si une telle action existait en réalité.

Quoi qu'il en soit, la conception de phénomènes mécaniques héréditaires et surtout le fait que ces derniers peuvent être interprétés mathématiquement grâce au calcul fonctionnel constitue un problème philosophique du plus haut intérêt. Non seulement cette conception s'accorde par exemple avec la théorie bergsonienne de la durée, mais par le fait qu'elle comporte une méthode mathématique elle peut en s'appliquant aux phénomènes biologiques en suggérer une interprétation plus rigoureuse que par le passé.

Le congrès se termina par une double allocution, l'une de M. Xavier Léon, et l'autre de M. E. Boutroux. Ce n'est plus à des étrangers, mais à des amis que je parle, dit M. X. Léon et il exprime le vœu qu'un prochain congrès continue la tradition inaugurée en celui-ci. M. Boutroux, en des paroles élevées, rappelle la joie et les bienfaits du travail en commun, puis il termine en espérant que les congressistes étrangers garderont, comme autrefois Marie Stuart, un bon souvenir de la « douce France » où ils ont vécu quelques jours.

Arnold Reymond,
Professeur à l'Université de Neuchâtel.

Fondation Henri Poincaré.

Sur l'initiative de MM. Mittag-Leffler et G. Darboux, il vient de se constituer un Comité international comprenant les notabilités de la Science et des Lettres et portant le nom de « Comité international de la Médaille et de la Fondation Henri Poincaré ». Pour perpétuer la mémoire du grand mathématicien et pour attacher son nom à une fondation scientifique, le Comité invite les amis, les collègues et les admirateurs de Poincaré de tous les pays, à bien vouloir participer à une *souscription internationale*[1] destinée :

1° A frapper une Médaille à l'effigie de Henri Poincaré ;

[1] Une Médaille de bronze sera envoyée aux personnes dont la Souscription sera égale ou supérieure à 25 francs et inférieure à 50 francs; une Médaille d'argent sera envoyée aux personnes dont la Souscription sera égale ou supérieure à 50 francs.

2° A constituer un Fonds dont les arrérages seraient employés par l'Académie des Sciences de Paris à encourager ou à récompenser de jeunes savants qui s'occupent des parties de la Science dont le génie de Henri Poincaré a assuré le progrès : l'Analyse mathématique, la Mécanique céleste, la Physique mathématique, la Philosophie scientifique.

Le Bureau de formation du Comité international est composé de MM. Paul Appell, président de l'Institut; Etienne Lamy, secrétaire perpétuel de l'Académie française; Gaston Darboux, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, et Ernest Lebon, professeur honoraire, secrétaire-trésorier. Prière d'adresser les communications et les souscriptions à M. Ernest Lebon, secrétaire-trésorier, rue des Ecoles, n° 4bis, Paris, 5e.

Conférence internationale de l'enseignement mathématique.

Munich, 1-5 août 1915.

La Commission internationale de l'Enseignement mathématique se réunira à Munich, du dimanche 1er au jeudi 5 août 1915, en une Conférence qui aura principalement pour objet *la préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques des divers degrés de l'enseignement.*

Sur la demande du Comité Central M. le Prof. Gino Loria (Gênes), a bien voulu se charger du rapport général concernant l'enseignement secondaire (lycées, gymnases, écoles réales supérieures, etc.). Des conférences et des rapports seront également consacrés à la préparation des professeurs de l'enseignement professionnel (écoles techniques moyennes) et des maîtres de l'enseignement élémentaire.

Le questionnaire qui servira de base à l'enquête est en préparation. Il sera reproduit dans l'*Enseignement mathématique* du 15 novembre 1914.

Académie des Sciences de Paris. — Prix décernés.

Mathématiques. — Le Prix Poncelet est attribué à M. Lebesgue, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris.

Le Grand Prix des Sciences mathématiques n'est pas décerné.

Astronomie. — Prix Lalande : M. Guillaume, astronome à l'Observatoire de Lyon, pour l'ensemble de ses travaux.

Le Prix Valz est partagé entre M. P. Chevalier, directeur de l'Observatoire de Zo-Sé, près Shanghaï, et M. Pierre Salet, astronome à l'Observatoire de Paris.

Prix Janssen : M. Jarry-Desloges, astronome, pour son étude sur les planètes, en particulier sur la planète Mars.

Prix Damoiseau : M. Gaillot, correspondant de l'Institut, pour ses Tables rectifiées du mouvement de Jupiter.

JULES MOLK

8 décembre 1857 — 7 mai 1914

La Faculté des Sciences de Nancy vient de perdre un Professeur éminent dont l'enseignement était hautement apprécié de tous ceux qui ont suivi ses cours ; la science française perd aussi un homme de valeur qui a rendu de grands services aux sciences mathématiques.

Jules Molk, naquit à Strasbourg le 8 décembre 1857. Sa famille a laissé, dans l'histoire de sa ville natale, des souvenirs impérissables ; plusieurs de ses ancêtres ont joué un rôle actif dans l'administration de la ville libre de Strasbourg. D'autre part le père de notre collègue a fait preuve, pendant la période douloureuse de 1870-71, d'un dévouement dont les vieux Strasbourgeois ont conservé pieusement le souvenir ; il a en effet dirigé, pendant et après le siège, le restaurant populaire de la Halle Couverte qui rendit des services considérables, non seulement aux habitants, mais encore plus tard à tous les prisonniers français qui traversaient Strasbourg pour rentrer en France.

Tous les spectacles que notre collègue eut sous les yeux pendant son enfance ont contribué à conserver et à développer chez lui l'attachement à sa ville natale et c'est toujours avec une profonde émotion qu'il rappelait les souvenirs de Strasbourg et de sa patrie à laquelle il conservait un culte filial.

Jules Molk fit ses premières études au Gymnase protestant de Strasbourg, fondé par Sturm ; il y apprit les éléments du calcul pratique enseigné par un maître aussi distingué que modeste, Ledermann ; il fut ensuite élève de l'Ecole Professionnelle de Mulhouse alors dirigée par Emile Cherbuliez qui lui enseigna les éléments des mathématiques.

Il fit, de 1874 à 1877, des études complètes à l'Ecole Polytechnique féderale de Zurich dont il acquit le diplôme ; il y suivit les cours de Edouard Méquet, de C.-F. Geiser et de G. Frobenius ; ces maîtres développèrent chez lui le goût des études théoriques qu'il savait allier au sens des réalisations pratiques.

Il continua ses études à Paris et à la Sorbonne où il acquit les grades universitaires français ; il eut alors pour professeurs : Hermite, Bouquet, Bonnet, Tisserand, Jules Tannery, dont il devint plus tard le collaborateur et l'un des meilleurs amis.

Nommé secrétaire-rédacteur de la Bibliothèque de l'Ecole des

Hautes-Études le 21 mars 1882, il profita bientôt des facilités qui lui étaient offertes de continuer ses études en Allemagne, pour se diriger vers l'Université de Berlin dont les maîtres jouissaient alors d'un renom considérable.

De 1882 à 1884, il y suivit les cours de K. Weierstrass, de H. Helmholtz, de G. Kirchhoff et surtout de L. Kronecker ; les leçons de ce dernier sur l'Arithmétique supérieure et l'Algèbre eurent une influence considérable sur Jules Molk qui s'attacha à approfondir et à éclaircir les idées de l'éminent mathématicien dont il devint presque le collaborateur et le confident.

Les recherches personnelles de Jules Molk, jointes à différentes questions tirées des cours de Kronecker et qu'il mit au point, fournirent le sujet de la thèse qu'il soutint au mois de juillet 1884 à la Sorbonne pour obtenir le grade de Docteur ès sciences mathématiques. Il fut alors nommé Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Rennes (28 octobre 1884) ; là il se lia surtout avec Morin, dont l'esprit critique et le sens profond l'avaient attiré.

Le 28 octobre 1885, il fut envoyé comme chargé de cours à la Faculté des Sciences de Besançon ; il y enseigna la mécanique, d'abord comme chargé de cours, puis comme professeur titulaire (1er mars 1888).

La chaire de Mathématiques appliquées étant devenue vacante à la Faculté des Sciences de Nancy, à la suite du décès de Mathieu, il demanda son transfert et y fut nommé le 18 décembre 1890 ; lors de la création d'une nouvelle chaire en 1898, il fut nommé professeur de mécanique rationnelle (26 décembre 1898), fonction qu'il conserva jusqu'à sa mort survenue le 7 mai 1914.

Il obtint successivement des avancements mérités et il était Chevalier de la Légion d'Honneur depuis le 15 juillet 1909.

L'influence de Jules Molk à la Faculté des Sciences de Nancy fut considérable. Ses méthodes d'enseignement si claires et si précises lui attiraient l'estime de tous ses auditeurs qui voyaient en lui un guide sûr, développant leur initiative personnelle ; il contribua aussi pour une large part au succès des différentes créations de l'Université de Nancy, et en particulier de l'Institut Electrotechnique et de Mécanique appliquée. Il avait gardé le souvenir de l'enseignement qu'il avait reçu à Zurich et il cherchait par tous les moyens à créer à Nancy un centre d'instruction supérieure à la fois théorique et technique qui pût remplacer pour les jeunes gens français et étrangers, l'École polytechnique de Zurich ; il eut la joie de voir le succès toujours croissant de cet Institut, couronner les efforts qu'il avait faits et rendre en quelque sorte hommage aux vues qui l'avaient guidé.

Les *œuvres de Jules Molk* se rattachent à trois ordres d'idées :

1° L'Arithmétique au sens de Kronecker.

Il publia un premier article *Sur les unités complexes* inséré dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques* (2e série), t. VII, 1883, 1re partie, p. 133 et 136.

Il rédigea sa thèse *Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination*, publiée dans les *Acta Mathematica*, t. VI, p. 1 à 166 (1884). Ce travail considérable est un développement, avec compléments personnels, du grand mémoire de L. Kronecker *Grundzuge einer Arithmetischen Theorie der Algebraischen Grössen;* Festschrift zu Herrn E.-E. Kummers Doctor Jubiläum (Berlin 1882).

Il fit ensuite une traduction d'un mémoire de Lipschitz *Recherches sur la transformation par des substitutions réelles d'une somme de 2 ou de 3 carrés en elle-même. Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. II, 1886, p. 373; il y étudie les nombres complexes entiers dont la norme est un entier donné et il généralise aux quaternions entiers.

Il publia aussi dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2e série, t. XIV (1890), 1re partie, p. 186 et 228, une *Exposition de la démonstration donnée par K. Weierstrass, des théorèmes de Lindemann sur la fonction exponentielle* (transcendance des nombres e et π).

2° Les relations qu'il entretint avec Jules Tannery eurent pour résultat la publication, en collaboration avec lui, d'un grand ouvrage en quatre volumes sur les *Eléments de la théorie des fonctions elliptiques*. (Paris Gauthier-Villars).

1er Volume 1893. Introduction. Calcul différentiel (1re partie).

2me Volume, 1896. Calcul différentiel (2e partie);

3me Volume, 1898. Calcul intégral (1re partie);

4me Volume, 1902. Calcul intégral (2me partie), et applications.

Cet ouvrage fondamental a pour but de donner aux élèves des Facultés des Sciences, en commençant par les notions les plus élémentaires, un exposé des beaux travaux modernes relatifs aux fonctions elliptiques et à leurs applications en partant du point de vue de Weierstrass (Voir le compte rendu de M. Andoyer dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 2e série, t. XVII, 1893, p. 205).

3° Depuis la publication de cet ouvrage sur les fonctions elliptiques, Jules Molk s'est donné tout entier à une œuvre fondamentale qui doit réunir et fixer les documents accumulés jusqu'aujourd'hui sur les sciences mathématiques et leurs applications au point de vue historique et bibliographique; cette œuvre est l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées*.

Entreprise par les Académies des sciences de Göttingue, de Leipzig, de Munich et de Vienne, l'Encyclopédie a été d'abord rédigée en langue allemande, mais il était du plus grand intérêt d'en avoir une édition française. Cette édition dont se chargea notre collègue, a été commencée en 1902 et le premier fascicule a paru en 1904 ; elle ne constitue pas une simple traduction de l'ouvrage allemand, et les additions qu'y ont apportées Jules Molk et ses collaborateurs, en ont fait un ouvrage en quelque sorte nouveau, adapté aux lecteurs de langue française. Cette Encyclopédie, ainsi présentée successivement dans les deux langues en tenant compte des qualités particulières d'exposition des deux peuples, embrasse l'exposé des découvertes faites dans tout le domaine des sciences mathématiques et dans leurs applications à la Mécanique, à la Physique, à la Géodésie et à l'Astronomie.

Tous les savants du monde entier s'intéressent à cette publication, qui a un succès considérable et à laquelle le nom de Jules Molk restera attaché; notre collègue s'est en effet dépensé tout entier et a mis au service de la Science son esprit clair et méthodique, faisant des démarches personnelles auprès des savants de tous les pays et servant de trait d'union entre tous ceux qui ont collaboré à cette œuvre magistrale.

Les Académies les plus célèbres ont tenu à honneur de compter Jules Molk parmi leurs membres. Il était membre de l'Académie Léopoldine Carolina à Halle, docteur honoraire en philosophie de l'Université de Padoue et de celle de Giessen. L'Académie des sciences de Paris lui avait décerné en 1912, le prix Binoux comme récompense de ses travaux et de la publication française de l'Encyclopédie.

En dehors de cette œuvre, Jules Molk trouva encore le temps d'analyser plusieurs publications étrangères et de faire des comptes rendus dans le *Bulletin des sciences mathématiques* ; il était le collaborateur assidu de ce Bulletin et il y envoyait régulièrement les analyses des mémoires insérés dans les comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin, ainsi que l'Académie des Sciences de Munich.

La lourde tâche qu'il s'est imposée a contribué à abréger son existence si bien remplie, et il est mort avant d'avoir pu réaliser en entier le programme qu'il s'était tracé ; son souvenir reste vivant dans la mémoire de ses collègues et de tous ceux qui l'ont approché, il est pour eux un modèle de devoir et de probité scientifique.

H. Vogt (Nancy).

Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles.

La XXXIII[e] assemblée générale de l'Association allemande pour l'avancement de l'enseignement des sciences mathématiques et naturelles a été tenue à *Braunschweig*, du 1-4 juin 1914, sous la présidence de M. le prof. A. THAER (Hambourg).

Nous devons nous borner à signaler ici les conférences et discussions se rattachant aux mathématiques. En voici la liste :

Prof. PIETZKER, Worte der Erinnerung an W. Krumme.

Schulrat WERNICKE, Mathematik und Philosophie.

Prof. POSKE, Physik und Philosophie

Dir. GRIMSEHL, Interferenzerscheinungen.

Dr. RIEBESELL, Photogrammetrie in der Schule (mit Lichtbildern).

Prof. HENTZSCHEL, Das Rationale in der algebr. Geometrie.

Geheimrat RUNGE, Die Bedeutung der angewandten Mathematik für die Schule.

Gymnasialdirektor HILDEBRANDT, Das Zeichnen, insbesondere das geometrische, auf der höheren Lehranstalten.

Prof. NÄBAUER, Koordinaten im Gelände.

Prof. TIMERDING, Mathematische Statistik auf der Schule.

Diskussion über angewandte Mathematik.

La conférence de M. Timerding, sur la statistique mathématique dans l'enseignement, a été suivie d'une *discussion sur les mathématiques appliquées.* S'inspirant du vœu formulé par divers orateurs à la Conférence internationale de l'Enseignement mathématique, l'assemblée a adopté à l'unanimité une résolution en faveur des mathématiques appliquées à l'université; elle estime qu'il est désirable que l'enseignement universitaire fournisse aux étudiants en mathématiques l'occasion de s'initier aux méthodes des mathématiques appliquées et d'acquérir des connaissances plus approfondies dans au moins un domaine d'applications. Voici le texte même de la résolution :

« Es liegt im Interesse des mathematischen Schulunterrichtes, der nicht bloss die formale Geistesbildung, sondern auch die Anwendung der Mathematik auf die Erfassung der Wirklichkeit zu berücksichtigen hat, dass möglichst alle Mathematiklehrer wenigstens mit den Grundsätzen der mathematischen Anwendungen vertraut sind. Deshalb ist es dringend zu wünschen, dass auf allen Hochschulen den Studierenden der Mathematik volle Gelegenheit geboten wird, einen Einblick in die Methoden der angewandten Mathematik und in wenigstens ein besonderes Anwendungsgebiet zu gewinnen. Die Beschäftigung mit der angewandten Mathematik ist auch in der Prüfung für die Erlangung einer vollen Lehrbefähigung in der Mathematik nachzuweisen. »

Dans sa séance administrative, la Société a renouvelé son bureau. M. Thær, président sortant de charge, ayant décliné toute réélection, a été remplacé comme président par M. le prof. GRIMSEHL (Hambourg).

La prochaine assemblée annuelle aura lieu à *Dusseldorf* en 1915.

Association des Professeurs de mathématiques de l'Enseignement secondaire public français.

L'Association des Professeurs de mathématiques de l'Enseignement secondaire public français s'est réunie à Paris en assemblée générale, le 19 avril 1914, sous la présidence de M. Gros.

L'ordre du jour comprenait un rapport de Mme Mossé (Lille), sur *les Mathématiques dans l'enseignement secondaire féminin et la préparation aux brevets primaires, aux diplômes et au baccalauréat.* Mme Mossé estime que les horaires sont insuffisants pour pouvoir traiter complètement les programmes et que les classes de mathématiques sont désorganisées par des élèves préparant des examens autres que les examens du cours normal : elle exprime le vœu, qui est appuyé par l'assemblée, que la question de la réorganisation de l'enseignement secondaire féminin soit au plus tôt mise à l'étude.

Dans des réunions précédentes l'Association s'était déjà occupée de l'*unification des définitions et des notations mathématiques.* MM. Gros et Weill rappellent les difficultés que présente l'étude de cette question. Après discussion, l'Association décide de continuer l'enquête. Le Comité est chargé de recueillir les communications relatives à cette question ; il soumettra chaque année à l'assemblée générale, s'il y a lieu, un tableau des définitions de mots et des notations sur lesquelles l'entente semble pouvoir se faire. Ce tableau sera publié et l'emploi en sera conseillé.

L'assemblée examine ensuite la question de la *création d'une épreuve écrite des mathématiques au baccalauréat de premières A et B*, à la suite d'un rapport présenté par M. Blum (Douai).

L'assemblée décide ensuite de mettre à l'étude la question suivante comme contribution aux travaux que la Commission internationale de l'Enseignement mathématique met à l'ordre du jour de sa prochaine réunion (Munich, août 1915) : *Etude des modifications à apporter au concours de l'agrégation des sciences mathématiques et des moyens d'assurer la meilleure préparation des professeurs de l'enseignement secondaire.*

Le Comité a été renouvelé comme suit pour une année :

M. Pouthier, président ; Mme Ficquet, M. Bonin, vice-présidents ; M. Sainte-Laguë, M. Dubesset, secrétaires ; M. Julien, trésorier.

France. — Thèses de mathématiques.

1912-1913

A. Blondel : Sur la théorie des marées dans un canal. Application à la Mer Rouge (Paris, 15 novembre 1912, 60 p. in-4°).

Toulouse, Privat, 1912. — M. Luizet : Les céphéides considérées comme étoiles doubles avec une monographie de l'étoile variable δ Céphée (Lyon, 16 novembre 1912. 151 p. in-8°), Lyon, Rey, 1912. — K. Popoff : Sur le mouvement de 108 Hécube (Paris, 7 octobre 1912, 58 p. in-4°), Paris, Gauthier-Villars, 1912. — Alex. Véronnet : Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la terre (Paris, 17 juin 1912, 136 p. in-4°), Paris, Gauthier-Villars, 1912. — Patrick-J. Browne : Sur un problème d'inversion posé par Abel et sur ses généralisations (Paris, 28 juin 1913, 148 p. in-4°), Toulouse, Privat, 1913. — Gaston Cotty : Les fonctions abéliennes et la théorie des nombres (Paris, 8 mars 1913, 172 p. in-4°), Toulouse, Privat, 1912. — Fassbinder : Sur la dynamique des systèmes variables et la rotation de la terre (Paris, 13 juin 1913, 58 p. in-4°), Paris, Gauthier-Villars, 1913. — M. Gevrey : Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique (Paris, 28 juin 1913, 214 p. in-4°), Paris, Gauthier-Villars, 1913. — Lieut. Ch. Platrier : Sur les mineurs de la fonction déterminante de Fredholm et sur les systèmes d'équations intégrales linéaires (Paris, 8 avril 1913, 74 p. in 4°), Paris, Gauthier-Villars, 1913. — Louis Roche : Sur la surface des ondes dans la polarisation rotatoire magnétique et dans quelques phénomènes plus généraux (Paris, 13 juin 1913, 100 p. in-4°), Paris, Gauthier-Villars, 1913. — L. Rouyer : Sur la déformation des quadriques et les surfaces conjuguées par rapport à un complexe du second degré (Paris, 9 juin 1913, 120 p. in-4°), Toulouse, Privat, 1913. — J. Trousset : Etude semi-analytique du mouvement du huitième satellite de Jupiter (Paris, 22 avril 1913, 67 p. in-4°), Paris, Gauthier-Villars, 1913.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. E. Hellinger, privat-docent à Marbourg, a été nommé professeur extraordinaire de Mathématiques à l'Université de Francfort s/M.

M. P. Staeckel, professeur à l'Université de Heidelberg, a été nommé membre honoraire de la Société mathématico-physique de Budapest.

Ont été admis en qualité de *privat-docents* : M. A. Brill, pour l'Astronomie, à l'Université de Francfort s/M. ; M. W. Lenz, pour la Physique théorique, à l'Université de Munich.

Angleterre. — MM. A. Berry de Kings College, et G. H. Hardy, de Trinity College, ont été nommés professeurs de Mathématiques à l'Université de Cambridge.

Italie. — M. L. Tonelli, professeur d'Analyse algébrique à l'Université de Cagliari, occupera, l'année prochaine, la chaire d'Analyse infinitésimale à l'Université de Parme.

Ont été admis en qualité de *privat-docents :* M. E. Bompiani, pour la Géométrie analytique, à l'Université de Pavie ; M. A. Comessatti, pour la Géométrie descriptive, à l'Université de Padoue ; M. Umberto Crudeli, pour la Physique mathématique, à l'Université de Rome ; M. M. Picone, pour l'Analyse infinitésimale, à l'Université de Turin ; M. C. Rosati, pour la Géométrie projective, à l'Université de Pise ; M. A. Tonolo, pour l'Analyse infinitésimale, à l'Université de Padoue.

Nécrologie.

M. Georg Hettner, professeur à l'Ecole technique supérieure et à l'Université de Berlin, est décédé le 24 mai 1914, à l'âge de 59 ans.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Compte rendu des travaux des Sous-commissions nationales.

(18e article)

ALLEMAGNE

La préparation mathématique des géomètres.

Die mathematische Ausbildung der deutschen Landmesser [1], von Ph. Furtwaengler et G. Ruhm. — C'est le 8me fascicule du 4e volume (écoles techniques) des rapports de la sous-commission allemande de l'enseignement mathématique. Comparé à plusieurs des fascicules de la même série, parus précédemment, celui-ci est un des plus objectifs. Il n'a pas de longueurs inutiles, pas de détails superflus sur des questions élémentaires ; il donne une idée très exacte de la place et de l'importance de la culture mathématique dans la préparation des géomètres, ainsi qu'un aperçu très clair des méthodes employées en Allemagne. A côté de cela, ce petit livre nous renseigne fort bien sur l'état actuel de la question des géomètres chez nos voisins du Nord, car chez eux comme dans d'autres pays, cette question est à l'ordre du jour.

En Suisse, par exemple, la préparation des géomètres est aussi de toute

[1] Abhandlungen uber den mathem. Unterricht in Deutschland, Band IV, Heft 8. — 1 fasc. in-8°, 50 p., B. G. Teubner, Leipzig et Berlin.

actualité. D'après le nouveau règlement du 14.6.13. les candidats aux examens fédéraux de géomètres du cadastre devront être désormais porteurs du certificat de maturité. Cette innovation n'est pas arrivée à chef sans soulever bien des discussions. Malgré cela, la question de formation même des géomètres reste posée sans avoir encore reçu une solution définitive ou durable.

Le travail de MM. Furtwängler et Ruhm comprend *quatre chapitres :*

1. La préparation des géomètres dans les divers Etats allemands ;

2. Programmes des études mathématiques ;

3. Le calcul géodésique ;

4. Historique des écoles de géomètres et état actuel du mouvement de réforme.

Nous passerons sommairement en revue les points principaux de chaque chapitre.

I. — Les écoles allemandes qui s'occupent de la formation des géomètres sont : l'Académie agronomique de Bonn-Poppelsdorf (Prusse), l'Université agronomique de Berlin (Prusse) et les Universités techniques de Karlsruhe (Baden), Dresde (Saxe), Stuttgart (Wurtemberg) et Munich (Bavière).

Les conditions d'admission dans les sections de géomètres de ces écoles, ainsi que les examens de fin d'études varient passablement d'un Etat à l'autre. Néanmoins nous retrouvons, avec les auteurs, deux courants principaux, les mêmes que nous avons en chez nous : Les géomètres sans maturité et les géomètres avec la maturité.

La Prusse est pour le premier type de géomètres, ainsi que le Grand-Duché de Bade, le Wurtemberg et l'Alsace.

Les candidats quittent le gymnase après la première inférieure (Unterprima) ou après la seconde supérieure (Obersekunda). — Ils font un stage pratique de 1 à 2 ans, sous le nom d' « Elèves » puis commencent leurs études spéciales ; elles durent en général deux ans et se terminent par un examen théorique. Le jeune homme doit ensuite travailler pendant quelques années dans la pratique avant de faire son dernier examen qui lui confère le titre et les droits officiels de géomètre.

La Bavière et le Grand-Duché de Mecklembourg-Schwerin sont pour le système des géomètres avec maturité. Les jeunes gens suivent un gymnase complet, font l'examen de maturité puis entrent à l'Université technique. Le stage pratique intermédiaire entre le gymnase et l'Université n'est pas obligatoire en Bavière. Les études universitaires sont de trois années et elles se terminent par l'examen d' « Ingénieur-géomètre ». Les géomètres des services de l'Etat se recrutent par voie de concours, dans un deuxième examen, après quelques années de pratique.

La Saxe prévoit les deux systèmes : il y a des géomètres avec les études analogues à celles de la Prusse et des « Ingénieurs-géomètres » comme en Bavière.

II. — Les programmes mathématiques correspondent évidemment aux deux courants dont il vient d'être question.

Dans les écoles de géomètres où l'on n'exige pas la maturité, les cours de mathématiques comprennent, d'une manière générale :

1. Les mathématiques élémentaires avec la géométrie descriptive, la trigonométrie plane et la trigonométrie sphérique ;

2. La géométrie analytique du plan et de l'espace ;

3 L'analyse algébrique : Combinaisons, binôme, séries et théorie des équations supérieures ;

4. Les éléments du calcul différentiel et intégral. (En vue des applications à la géodésie.)

5. La théorie des erreurs d'observations et la méthode des moindres carrés.

Au sujet de la géométrie descriptive, il est intéressant de relever que des 3 heures prévues au programme pendant un semestre, une est exclusivement consacrée à la stéréométrie : calcul des corps, règle de Guldin et étude particulière des théorèmes servant de base à la géométrie descriptive.

Dans la géométrie analytique, la formule des surfaces des polygones au moyen des coordonnées des sommets joue un rôle de premier ordre, étant donné son application journalière dans les calculs géodésiques.

Le cours de calcul différentiel et intégral est de 3 heures, pendant un semestre d'hiver seulement.

Pendant les 4 semestres d'études, le plan prussien prévoit 4 heures d'exercices consacrées aux diverses parties des mathématiques étudiées jusque-là.

Pour les géomètres ayant préalablement suivi les cours complets du gymnase, le programme des branches mathématiques est évidemment différent de ce que nous venons de résumer. C'est à peu de chose près le même que pour les ingénieurs des autres directions.

On commence directement les mathématiques supérieures avec la géométrie analytique et le cours complet de calcul différentiel et intégral jusqu'à l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles.

Le cours de géométrie descriptive et celui de la méthode des moindres carrés se retrouvent également dans cet enseignement, mais ils sont présentés sous un jour différent, correspondant à la culture préalable des candidats.

III. — Les auteurs du fascicule ont tenu de donner une place à part au calcul géodésique. Ceci s'explique pour deux raisons. La première, c'est que le calcul géodésique constitue l'application par excellence des méthodes d'approximation, et la seconde, c'est que la méthode numérique des coordonnées tend de plus en plus à remplacer les méthodes graphiques dans la levée des plans. L'emploi de la planchette dans les opérations d'une certaine importance a pour ainsi dire disparu. Dans ces conditions, comme le disent du reste les auteurs, le calcul géodésique est une question de pain quotidien pour les géomètres.

Sous cette dénomination de calcul géodésique, MM. Furtwängler et Ruhm font ressortir l'importance d'une *notation uniforme* pour les grands nombres, pour les logarithmes, pour les nombres négatifs, pour la simplification des nombres décimaux, etc. Nous remarquerons encore qu'en géométrie, le sens des aiguilles de la montre est considéré comme le sens positif et que les appareils sont construits d'après cette observation.

Dans les cours de l'Académie agronomique de Bonn-Poppelsdorf, les questions que nous venons d'indiquer sont rattachées à l'analyse algébrique comme suite naturelle de l'arithmétique. Dans le cours de trigonométrie on insiste sur la question des petits angles et sur les moyens d'opérer le plus exactement possible quand ils se présentent. Nous avons déjà indiqué en passant l'importance de la question des coordonnées et du calcul correspondant des figures dans la géométrie analytique.

La question de notation est considérablement facilitée en Prusse par l'uniformité des tables de calcul et des tableaux officiels de disposition des opérations.

IV. — Le quatrième et dernier chapitre est consacré à l'historique de la question des études de géomètre en Prusse et en Bavière. Le chapitre se termine par des propositions de réforme qui semblent avoir trouvé un appui considérable dans les cercles intéressés. Ces propositions seraient : 1. Les études de géomètre ne devraient être accessibles qu'à des candidats possédant le certificat de maturité ; 2. La durée minimum des études devrait être portée de deux à trois ans ; 3. La pratique préalable d'une année comme « Elève » devrait être maintenue et le diplôme définitif ne devrait être accordé qu'après plusieurs années de pratique.

Tels sont les principaux points exposés par les auteurs dans leur intéressant rapport sur la préparation mathématique des géomètres.

L. Crelier (Bienne-Berne).

ILES BRITANNIQUES

N° 34. — Examens de mathématiques à Oxford.

Mathematical Examinations at Oxford[1], by Mr. A. L. Dixon, Fellow and Tutor of Merton College, Oxford.

I. — Examens pour le titre de « Bachelor of Arts ». Il faut remonter à l'année 1800 pour trouver les origines du système d'examens actuellement en vigueur. A cette époque, chaque candidat pouvait se présenter soit à l'examen habituel de passage, à la fin de chaque terme, soit à un examen plus sévère à Pâques, auquel on accordait des « honours » selon le mérite. En 1807 des « honours » en « disciplinis mathematicis » ainsi qu'en « literis humanioribus » furent introduits. En 1852 on intercala le « First Public Examination » ou « Moderations » entre les « Responsions » et le « Public Examination ». A partir de cette époque, il était donc nécessaire pour obtenir son titre de passer les examens suivants :

1. « Responsions » un examen de passage en latin, grec, arithmétique et à choix Euclide, livres I, II, ou algèbre.

2. « Moderations » un examen de passage ou d' « honours » en « Classics » avec à choix logique ou Euclide, livres I, II, III, et algèbre.

3. Un examen de passage ou d' « honours » sur deux branches finales, l'une devant être « Literae Humaniores » et l'autre pouvant être à choix les mathématiques, les sciences naturelles ou le droit et l'histoire moderne.

« Honours » en « Moderations », en « disciplinis mathematicis » pouvaient être également obtenus à la suite d'examens sur les mathématiques pures, tenus deux fois par an. Pour les examens finaux « final honour school » figuraient aussi les mathématiques appliquées, « Mixed Mathematics ».

Les règlements concernant ces examens se trouvent dans une brochure intitulée « New Examination Statutes, 1852 ». On y trouve une copieuse liste des livres en usage (80 à 90 titres).

Ce n'est qu'à partir de 1886 que les étudiants en mathématiques purent s'abstenir d'un examen de passage en « classics » dans les « moderations ».

[1] Un fasc. 117 p. ; Prix 6 d. Wyman and Sons, Londres.

Depuis cette époque, les candidats qui ont passé les « Responsions » et qui désirent se vouer aux mathématiques ont encore deux examens à subir : les « Mathematical Moderations » au bout d'un ou deux ans et le « Final Honour School of Mathematics » après trois ou quatre ans.

A titre de renseignement, l'auteur nous expose les règlements concernant ces deux examens, publiés en 1877 par le « Board of Studies ». Les connaissances requises n'étaient pas très étendues. Pour les derniers examens on n'exigeait pas de la part du candidat une spécialisation dans l'une ou l'autre des branches des mathématiques, ni une connaissance approfondie des développements modernes. Par contre on accordait plus d'importance à son habileté dans la résolution de problèmes variés sur divers sujets, à son exactitude et à sa rapidité dans ses calculs. On ne craignait pas, à cette époque, les questions à artifices. L'éducation universitaire consistait principalement à développer la rapidité de pensée et la souplesse de l'esprit et non pas à former des hommes de connaissances profondes et étendues.

Actuellement il en est tout autrement, on insiste particulièrement sur l'acquisition de connaissances solides et d'une ampleur suffisante sans perdre son temps sur les à côté du sujet et sans chercher à obtenir une habileté tout à fait superflue dans les manipulations. Par diverses réformes, on s'est efforcé :

1. D'introduire plus tôt l'étude des mathématiques appliquées ;

2. D'accorder une plus grande liberté dans les méthodes de travail afin d'éviter un entraînement excessif dans les manipulations ;

3. De permettre aux candidats une certaine spécialisation dans quelques sujets avancés en accordant quelque liberté dans le choix des sujets d'examen ;

4. De donner une place importante à la théorie de l'électricité à l'examen final.

Le rapport nous fournit l'histoire détaillée des réformes successives qui furent apportées aux programmes d'examens à partir de 1884. En 1911 (programme actuellement en vigueur) les sujets d'examen pour les « Moderations » étaient :

1. Algèbre : Théorie des équations ; Trigonométrie plane et sphérique ;

2. Géométrie pure ; géométrie analytique à deux dimensions ; géométrie analytique à trois dimensions jusqu'aux propriétés les plus simples des surfaces du second ordre, la théorie des surfaces homofocales étant exclue.

3. Calcul différentiel et intégral avec applications simples à la geométrie plane et de l'espace ; équations différentielles ;

4. Les éléments de la statique des solides et des fluides ; les éléments de la dynamique des points matériels et des solides rigides à deux dimensions.

Pour le « Final Honour School of Mathematics » de 1913, les candidats étaient examinés sur les sujets suivants :

Algèbre ; théorie des équations ; trigonométrie plane et sphérique ; séries et produits infinis ;

Géométrie pure et analytique à deux et à trois dimensions;

Calcul différentiel et intégral ; équations différentielles.

Les éléments de la théorie des fonctions d'une variable complexe, avec applications aux fonctions élémentaires et aux fonctions elliptiques.

Les éléments du calcul des différences finies.

Les éléments du calcul des variations.

Statique et dynamique des points matériels, des solides rigides et des cordes ; les éléments de la dynamique analytique ; statique des barres légèrement inclinées.

Hydrostatique ; les éléments de l'hydrodynamique ; vagues liquides.

Attraction ; théorie du potentiel

Electrostatique ; magnétostatique ; courant électrique constant ; électromagnétisme ; electrodynamique ; courants diélectriques.

Vibration des cordes ; propagation du son ; vibration de l'air dans les tuyaux.

Les éléments de l'optique géométrique.

L'astronomie sphérique.

II. — Examens pour « scholarships » universitaires. A Oxford il existe deux « scholarships » universitaires en mathématiques. Ce sont en réalité des prix accordés après examen aux meilleurs candidats de l'année. Les candidats pour le « Senior Scholarship » doivent avoir passé les examens pour le titre de « Bachelor of Arts », mais ne doivent pas avoir achevé sept années d'études depuis leur immatriculation. Les candidats pour le « Junior Scholarship » doivent être des non-gradués, immatriculés depuis moins de deux ans. Chaque examen comprend généralement 6 parties.

Il y a une trentaine d'années, le « Junior Scholarship Examination » comprenait l'algèbre ; la trigonométrie et la théorie des équations ; la géométrie pure ; la géométrie analytique ; le calcul différentiel, problèmes. On n'exigeait aucune connaissance du calcul intégral. En 1903, on introduisit le calcul intégral et les équations différentielles. A partir de 1904 on accorda une plus grande liberté quant aux méthodes utilisées. Actuellement l'examen porte toujours exclusivement sur les mathématiques pures, mais le champ des connaissances requises va constamment en s'accroissant.

Le « Senior Scholarship Examination » est une récompense et un encouragement pour les candidats qui désirent continuer l'étude des mathématiques après avoir obtenu leur titre. Les sujets d'examen étaient les mêmes que ceux du « Final Honour School », mais on en exigeait une connaissance plus étendue. Les six parties se répartissaient comme suit : I, II mathématiques pures ; III problèmes sur les mathématiques pures ; IV, V mathématiques appliquées ; VI problèmes sur les mathématiques appliquées. Ce règlement subit diverses modifications jusqu'en 1911, époque à laquelle l'examen fut aboli. Actuellement le « Senior Scholarship » est accordé au candidat qui présente la meilleure dissertation sur un sujet de son choix en mathématiques pures ou appliquées.

On trouvera en appendice une reproduction des questions d'examen pour les « Moderations ; Final Honour School ; Junior University Scholarship ; Senior University Scholarship » des années 1885 et 1911. Par leur comparaison, le lecteur pourra se rendre compte des modifications introduites et des tendances actuelles. J.-P. Dumur (Genève).

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1914-1915.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

Columbia University (New-York). — C. J. Keyser : Philosophie of Mathematics, 3. — Prof. T. S. Fiske : Theory of point sets, 3, second half-year. — Prof. F. N. Cole : Algebra, 4. — Prof. James Macklay : Theory of functions, 4. — Prof. Edw. Kasner : Integral equations, 2, second half-year ; seminar in Differential Geometry, 2. — Prof. W. B. Fite : Calculus of variation, 3, first half-year. — Prof. H. E. Hawkes : Diff. Geometry of curves, 3, first half-year. — Prof. C. Grove : Mathem. Theory of Statistics, 3, first half-year.

Cornell University (Ithaca). — Prof. J. Mc Mahon : Theory of probabilities, 3. — Prof. J. I. Hutchinson : Elliptic functions, 2. — Prof. V. Snyder : Descriptive geometry (first term), 3 ; Algebra (second term), 3. — Prof. F. R. Sharpe : Fourier series and spherical harmonics, 3. — Prof. W. B. Carver : Analytic and projective geometry, 3. — Prof. A. Ranum : Line geometry (first term), 2. — Prof. D. C. Gillepsie : Calculus of variations, 2. — Dr F. W. Owens : Mechanics, 3. — Dr J. V. Mc Kelvey : Advanced calculus, 3. — Dr L. L. Silverman : Infinite series (first term), 3. — Dr W. A. Hurwitz : Partial differential equations of mathematical physics, 2. — Dr R. W. Burgess : Differential equations, 2.

Harvard University (Cambridge, Mass.). — All courses meet three times a week throughout the year except those marked*, which meet for half a year. — Prof. W. F. Osgood : Infinite series and products* ; Introduction to potential functions and Laplace's equation * ; Galois theory of equations. *— Prof. M. Bôcher : Analytic theory of heat : Fourier series and Legendre polynomials * ; Linear differential and integral equations. — Prof. C. L. Bouton : Advanced calculus ; Elementary differential equations* ; Geometrical transformations, with special reference to the work of Sophus Lie. — Prof. J. L. Coolidge : Geometry of the circle ; Introduction to modern geometry and modern algebra (with Dr Green). — Prof. E. V. Huntington : Fundamental concepts of mathematics *. — Prof. G. D. Birkhoff : Advanced dynamics ; Calculus of variations *. — Dr D. Jackson : Theory of functions ; Definite integrals *. — Dr G. M. Green : Differential geometry of curves and surfaces * ; Projective differential geometry *.

Professors Bouton and Birkhoff will conduct a fortnightly seminar in analysis.

Courses of research are also offered by Professor Osgood in the theory of functions ; by Professor Bôcher in analysis and algebra ; by Professor Bouton in the theory of point transformations ; by Professor Coolidge in geometry ; by Professor Birkhoff in the theory of differential equations ; by Dr Jackson in the theory of functions of real variables.

Johns Hopkins University (Baltimore). — Prof. F. Morley : Higher geometry, 3. — Prof. A. B. Coble : Modular functions, 2 ; Theory of probability, 2, second half-year. — Dr A. Cohen : Calculus of variations, 2. — Dr H. Bateman : Differential equations of physics, 2.

University of Illinois (Urbana, Ill.) — Prof. E. J. Townsend : Functions of a complex variable, 3 ; Ordinary and partial differential equations and advanced calculus, 3. — Prof. G. A. Miller : Elementary groups, 3 ; Theory of equations and determinants, 3, second semester. — Prof. H. L. Rietz : Actuarial theory, 3, first semester ; Averages and the mathematics of investment, 3, second semester. — Prof. R. M. Fréchet : General analysis, (*a*) abstract sets, two hours ; (*b*) functional operations, 2. — Prof. C. H. Sisam : Algebraic surfaces, 3 ; Solid analytic geometry, 3, second semester.- Prof. J. B. Shaw : General algebra, 3. — Prof. A. Emch : Projective geometry, 3. — Dr A. R. Crathorne : Calculus of variations, 3. — Dr R. L. Borger : Modern algebra, 3. — Dr E. B. Lytle : History of mathematics, 2, second semester ; Teacher's course, 2, first semester.

Princeton University (Princeton, N. J.). — Prof. H. B. Fine : Algebra, 3. — Prof. L. P. Eisenhart : Differential geometry, 3 ; Mechanics, 3.— Prof. O. Veblen : Projective geometry, I, 3 ; Projective geometry, II, 3. — Prof. Boutroux : Differential equations and advanced calculus, three hours ; Higher analysis, 3. — Prof. H. T. Gronwall : Integral equations, 3. — Prof. E. P. Adams : Hydrodynamics, 3.

ITALIE[1]

Bologna. — *Università.* — Burgatti : Teoria dell' elasticità ; in particolare teoria delle vibrazioni elastiche, 3. — Donati : Elettrodinamica dei corpi in movimento. Termodinamica ; teoria della radiazione ; ipotesi dei quanti ; sua portata e sue applicazioni, 3. — Enriques : Teoria delle curve e superficie algebriche, 3. — Pincherle : Funzioni ellittiche. Equazioni integrali-esistemi di equazioni lineari ad infinite incognite.

Catania. — *Università.* — Daniele : Equilibrio dei corpi elastici, 4. — De Franchis : Geometria sulle superficie algebriche secondo l'indirizzo trascendente, 4. — Pennacchietti : Idrodinamica, 4. — Severini : Teoria delle funzioni analitiche ; teoria delle funzioni permutabili, 4.

Genova. — *Università.* — Levi : Calcolo delle variazioni, 4. — Loria : Applicazioni geometriche delle funzioni ellittiche, 3. — Tedone : Ottica geometrica e fisica, 3.

Napoli. — *Università.* — Amodeo : Storia delle scienze matematiche nell' evoantico, 3. — Del Re : Analisi di Grassmann ad n dimensioni con applicazioni alla meccanica degli spazi a curvatura costante, 4 $^1/_2$. — Marcolongo : Equazioni della dinamica. Soluzioni periodiche ; soluzioni asintotiche. Problema ristretto dei tre corpi, 3. — Montesano : Teoria delle superficie algebriche e dei loro sistemi lineari. Teoria delle trasformazioni birazionali dello spazio, 3 — Pascal : Le funzioni di linee e il calcolo delle variazioni, 3. — Pinto : Termodinamica, 3. — Torelli : Complementi della

---

[1] Les cours fondamentaux (analyse algébrique et infinitésimale, géométrie analytique, projective, descriptive, mécanique rationnelle), existant dans toute Université, ne figurent pas dans la liste.

teoria degli insiemi ad una o a più dimensioni. Gli integrali semplici e multipli di Lebesgue. Funzioni d'insieme. Derivazione degli integrali indefiniti, 4 1/2.

Palermo. — *Università.* — BAGNERA : Funzioni di variabile complessa. Trascendenti intere di una e due variabili, 3. — GEBBIA : Oscillazioni elettriche; onde elettromagnetiche, 4 1/2. — GUCCIA : Teoria generale delle curve e superficie algebriche, 4 1/2. — VENTURI : Fondamenti pei moderni metodi in meccanica celeste secondo Poincaré. Metodo di Hill per la Luna 4 1/2.

Padova. — *Università.* — D'ARCAIS : Funzioni di variabile complessa. Equazioni integrali, 4. — COMESSATTI : Geometria algebrica, 3. — GAZZANIGA : Teoria dei numeri, 3. — LEVI-CIVITA : Meccanica analitica. Problema dei tre corpi, 4 1/2. — RICCI : Calcolo differenziale assoluto. Potenziale. Elasticità, 4. — SEVERI : Sistemi lineari di curve piane e superficie razionali, 4. — TONOLO : Serie di Fourier. Equazioni a derivate parziali, 3. — VERONESE : Applicazioni geometriche della teoria degli insiemi, 4.

Pavia. — *Università.* — BERZOLARI : Geometria sopra una curva algebrica e applicazione ai sistemi lineari di curve piane algebriche, 3. — BOMPIANI : Geometria differenziale, 3. — CISOTTI : Meccanica dei sistemi continui. Potenziale. Elettricità, 3. — GERBALDI : Funzioni di variabile complessa. Funzioni ellittiche, 3. — VIVANTI : Equazioni integrali, 3.

Pisa. — *Università.* — BERTINI : Trasformazioni cremoniane nel piano e nello spazio, 3. — BIANCHI : Funzioni di variabile complessa. Equazioni differenziali lineari, 4 1/2. — DINI : Equazioni integrali. Equazioni differenziali lineari nel campo reale, 4 1/2. — MAGGI : Principi della meccanica analitica. Principi della teoria della funzione potenziale. Esposizione fenomenologica della teoria del campo elettromagnetico, 4 1/2. — PIZZETTI : Teoria della interpolazione. Nozioni generali di astronomia sferica. Teoria generale delle perturbazioni, 4 1/2.

Roma. — *Università.* — BISCONCINI : Applicazioni geometriche del calcolo, 3. — CASTELNUOVO : Calcolo delle probabilità, 3. — SILLA : Cinematica e meccanismi, 3. — VOLTERRA : Funzioni permutabili. Equazioni alle derivate funzionali. Applicazioni, 3 — Elasticità, 3. — N. N. : Analisi superiore, 3.

Torino. — *Università.* — BOGGIO : Funzioni potenziali ed idrodinamica, 3. — FUBINI : Calcolo delle variazioni. Serie di Fourier. Il principio di minimo come applicazione delle serie di Fourier al calcolo delle variazioni, 3. — SEGRE : Teoria degli invarianti applicata alla geometria, 3 — SOMIGLIANA : Magnetismo ed elettromagnetismo, 3.

BIBLIOGRAPHIE

Ch. Bioche. — **Histoire des Mathématiques.** — 1 vol. in-16 cart., 93 p. ; 1 fr. 75 ; E. Belin, Paris.

L'auteur a cherché à écrire une histoire des idées plutôt que celle des œuvres ou de la vie des mathématiciens. D'ailleurs le progrès scientifique, même en mathématiques, est surtout le résultat d'un effort collectif. Les grands inventeurs ont trouvé le terrain préparé, et leurs découvertes ont été souvent mises au point et rendues vraiment fécondes par bien des hommes dont le rôle peut-être un peu effacé n'en a pas moins été fort utile. C'est une constatation encourageante pour tous ceux qui aiment les sciences et qui peuvent ainsi espérer avoir leur part de mérite dans le progrès général.

L'histoire de l'astronomie a été détachée dans des chapitres spéciaux pour qu'il soit plus facile au lecteur de comprendre l'évolution de l'astronomie.

Spécialement destiné aux élèves de l'enseignement secondaire supérieur, l'ouvrage de M. Bioche a sa place marquée dans toutes les Bibliothèques de gymnases ; il sera lu avec intérêt par des professeurs qui ne manqueront pas d'en tirer parti pour illustrer leur enseignement d'aperçus historiques.

Voici l'énumération des 11 chapitres que comprend l'ouvrage :

1° Les Mathématiques avant l'Ecole d'Alexandrie. — 2° L'Ecole d'Alexandrie. — 3° Le Moyen âge. — 4° La Géométrie de la Renaissance. — 5° La formation de l'Algèbre. — 6° La Géométrie analytique. — 7° Le Calcul infinitésimal. — 8° La Géométrie au XVII^e et au XVIII^e siècle. — 9° Le XIX^e siècle. — 10° L'Astronomie dans l'antiquité. — 11° L'Astronomie moderne.

E. Borel. — **Le Hasard.** (Nouvelle collection scientifique E. Borel.) — 1 vol. in-8° de IV-312 p. ; 3 fr. 50 ; F. Alcan, Paris, 1914.

Les plus illustres savants qui ont publié des Traités sur le Calcul des probabilités, comme Laplace, Bertrand, Poincaré, ont volontiers fait précéder leur exposé mathématique d'une préface pouvant être lue par les gens du monde ; il me semble voir, dans le nouveau volume de M. Borel, le développement d'une telle préface qui pourrait d'ailleurs se raccorder fort aisément avec un ouvrage plus spécialement savant dont M. Borel est également l'auteur.

L'œuvre semble résulter, à volonté, des progrès de la philosophie mathématique ou de ceux de la physique statistique ; il résume les deux points de vue et, si quelques esprits se refusent encore à accorder leur conduite philosophique avec une discussion mathématique de hasard, ils ne peuvent que s'incliner devant les merveilleuses explications tirées des lois de ce même hasard au profit des théories telles que la théorie cinétique des gaz.

Les mathématiques, fort heureusement, ne sont pas complètement exclues de cet ouvrage ; dans la première partie nous trouvons les définitions simples des probabilités et de leurs compositions : l'usage du triangle arithmétique de Pascal est si clairement et si *explicitement* introduit, qu'il semble bien que tout esprit simplement intelligent puisse l'utiliser. Cet esprit concevra ensuite *au moins la possibilité logique* des méthodes qui consistent en calculs d'un ordre un peu plus élevé quand il s'agit, par exemple, d'atteindre, dans le triangle, un terme de rang trop grand pour qu'on puisse le calculer de proche en proche. Les probabilités continues, sujets, pour Joseph Bertrand, de paradoxes expliqués par Henri Poincaré, nous montrent comment des résultats non arbitraires en eux-mêmes peuvent dépendre de fonctions arbitraires ; il y a là un exemple très frappant de faits fort fréquents dans toutes les branches de l'analyse.

Dans la seconde partie, consacrée à l'application des lois du hasard, M. Borel nous montre d'abord la trop importante source de sophismes qui consiste à vouloir trancher bien des questions par *oui* ou par *non*, alors que la véritable réponse qui leur convient est un coefficient de probabilité qui n'est ni *un* ni *zéro*. Faut-il que telle habitation soit appelée *maison* plutôt que *masure*? J'ai le plus de chances de parler un langage d'accord avec celui de la majorité de ceux de mes concitoyens qui vivent dans le voisinage de la construction en question, si j'en interroge un nombre aussi grand que possible pour me ranger à l'avis de la majorité. Certes, une détermination définitive pourra toujours paraître un choix entre deux alternatives seulement, mais je me serai cependant décidé par un raisonnement infiniment plus souple que celui qui consistait à ne jamais voir que par moi-même ces deux alternatives.

Dans l'application physique des lois du hasard, l'auteur a trouvé de saisissantes comparaisons.

La théorie cinétique exige la diffusion l'une dans l'autre de deux masses gazeuses mises en contact ; la probabilité d'une hétérogénéité décelable par l'expérience devient rapidement inférieure à celle de la reconstitution de la Bibliothèque nationale par des singes frappant au hasard sur des claviers de machines à écrire, ce qui serait le « miracle des singes dactylographes ».

Comme application mathématique, la probabilité nulle de la rationalité d'un nombre imaginé au hasard correspond à la conception de l'ensemble de mesure nulle contenu dans l'ensemble continu : tout un chapitre est ainsi une initiation très simple aux premières grandes lignes de la théorie des ensembles.

Enfin dans une troisième partie sur la valeur des lois du hasard, M. Borel nous met en garde contre des applications formellement correctes du calcul à des choses qui par essence ne souffrent pas le calcul ; ainsi on ne peut parler de l'innocence ou de la culpabilité d'un accusé comme on parle des deux faces d'une pièce de monnaie ; on ne peut exiger non plus qu'un individu prenne une décision grave concernant sa vie (question des vaccinations plus ou moins hasardées) sous prétexte qu'on lui aura fait des prédictions justes concernant sa vie moyenne.

Quant à la portée philosophique de la méthode statistique, elle semble immense et ouvre des aperçus du plus vif intérêt. L'idée générale de *miracle*, aveuglément acceptée par des croyants et non moins aveuglément niée par des « esprits forts » apparaît peut-être ici sous son véritable jour. Si les lois physiques sont, au fond, des lois statistiques, elles peuvent admettre des miracles analogues à celui des singes dactylographes. Certes la probabilité de tels faits est d'une infimité extrême mais elle n'est pas rigoureusement nulle ; de plus, des croyants faciles à enthousiasmer et prêts, au besoin, à aider au miracle, peuvent se contenter de certains qui correspondraient à des probabilités qui, quoique petites, seraient loin d'être aussi infimes. A côté de tant de points de vue richement imagés on voit encore la belle leçon qui peut se dégager de ce volume en ce qui concerne la tolérance et la largeur des idées du philosophe.

A. Buhl (Toulouse).

E. Cotton — **Cours de Mécanique générale.** — (Introduction à la mécanique industrielle). Vecteurs, Géométrie de masses, Principes, Cinématique, Statique. — I vol. gr. in-8° de 166 p. et 58 figures ; 5 fr. ; Jules Rey, Grenoble ; Gauthier-Villars, Paris, 1914.

Voici un cours qui correspond à l'enseignement des Mathématiques générales et qui, par suite, vient heureusement compléter des Traités qui, presque tous, étaient muets sur la Mécanique. L'auteur définit très nettement sa méthode : Insister sur les définitions et sur les règles, laisser de côté toutes les questions dont l'intérêt réside exclusivement dans leur solution par l'Analyse.

L'ouvrage débute naturellement par la théorie des vecteurs où l'on remarque notamment la définition des coordonnées pluckériennes de la droite présentée comme une chose très élémentaire ; c'est ce qu'elle est en réalité. De plus la notion de complexe, que l'on peut immédiatement en déduire, s'adresse fort bien à des praticiens comme on peut s'en convaincre sans peine en examinant quelques problèmes fondamentaux d'optique. De même, les réductions vectorielles remarquables conduisent très élégamment à la réduction canonique où apparaît l'axe central. Le cas des vecteurs parallèles nous donne la théorie du centre de gravité brillamment illustrée par les théorèmes de Guldin ; une fois dans la géométrie des masses, la théorie des moments d'inertie offre, de son côté, de nombreux et jolis exemples d'intégrations très simples.

En Cinématique on ne peut guère traiter, autrement que par les méthodes classiques bien connues, les vitesses, les accélérations et leurs différents cas de composition ; notons plutôt quelques pages intéressantes sur les roulettes et les trains d'engrenages.

En Dynamique, l'auteur est de « l'école du fil » ; mais il n'est guère possible d'être d'une autre sans quitter le point de vue pédagogique où il s'est placé. Il emprunte d'ailleurs immédiatement au champ de la pesanteur les premiers exemples de forces.

En Statique, les idées simples et ingénieuses abondent particulièrement ; c'est ainsi que la poussée dont il est question dans le Principe d'Archimède est assimilée à l'ensemble des réactions qui, dans n'importe quel cas, équilibrent un solide pesant.

Les systèmes déformables, les systèmes triangulés sont étudiés surtout au moyen d'élégantes constructions bien connues en Statique graphique mais qui peuvent, comme on le voit ici, trouver leur place parmi les choses les plus simples à enseigner.

Dans l'équilibre des fils, les équations intrinsèques sont utilisées tout aussi bien que les équations ordinaires ; la forme intrinsèque est même immédiatement illustrée par le cas du fil enroulé avec frottement sur un cylindre circulaire. D'ailleurs, de nombreux exercices, souvent proposés avec données numériques, accompagnent, en détail, toutes les théories exposées. Si l'on ajoute que l'ouvrage doit être naturellement complété par un second fascicule relatif à la Dynamique, à la notion générale de travail et au Principe des travaux virtuels, on voit qu'il constituera un excellent ouvrage de début pour les futurs ingénieurs et techniciens.

A. Buhl (Toulouse).

H. H. Goodacre, E.-F. Holmes, C.-F. Noble, P. Steer. — **Bell's Outdoor and Indoor experimental Arithmetics.** — *Teacher's book.* — 1 vol. in-16; xii-377 p.; 3 s. 6 d.; G. Bell, and Sons, Londres.

La méthode adoptée par les auteurs de ce manuel est caractérisée nettement par son titre : *Exercices d'arithmétique appliquée en plein air et en classe.* La préface nous apprend que la circulaire 807 du *Board of Education* a servi de guide aux auteurs. Ils ont réuni et ordonné avec soin les exercices susceptibles de former un cours d'arithmétique dans une école élémentaire comprenant cinq années de cours correspondant aux classes intitulées Standard III à VII (9-14 ans).

Tous ces exercices ont été expérimentés par les auteurs eux-mêmes dans leurs classes respectives.

Ils mettent en garde, surtout pour les classes supérieures, contre la mode actuelle de donner une importance croissante au concret au détriment de l'abstrait. Afin de remédier cependant, dans la mesure du possible à la surcharge des programmes amenée par les exigences modernes, ils ont cherché à supprimer les exercices ayant pour seul but le développement du raisonnement ou l'acquisition de la maîtrise du calcul, pour les remplacer par ceux qui tout en conservant ces qualités y joignent une utilité plus directe, soit en établissant un principe abstrait, soit en donnant une démonstration pratique d'un calcul théorique.

L'introduction du système métrique en Angleterre ne paraissant plus très lointaine, les auteurs donnent un assez grand nombre d'applications de ce système et de ses rapports avec ceux actuellement en usage.

Comme l'indique un sous-titre, ce manuel est plus spécialement destiné aux maîtres; non pas pour être suivi à la lettre, mais pour faire naître des idées.

Une page sur deux est seule employée à l'énoncé et l'explication des exemples, la page en regard étant réservée à des remarques et conseils sur leur application, condition, limites et moyens, suggérés aux auteurs par leur propre expérience.

Un appendice contient la liste complète et la description des instruments nécessaires pour l'application effective de ces exercices.

Dans le courant de l'ouvrage on trouve également des indications très précises et complètes au sujet de la construction de quelques-uns des instruments que l'exiguïté des crédits scolaires rendraient souvent inaccessibles.

R. Masson (Genève).

J. König. — **Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre,** mit dem Bildnis des Verfassers. — 1 vol. in-8°, viii-259 p.; 8 M.; relié 9 M.; Veit et Cie, Leipzig, 1914.

Jamais peut-être on ne s'est tant occupé de questions relatives aux principes des mathématiques et de la logique pure, et jamais, croyons-nous, les rapports entre ces deux disciplines n'ont été plus étroits. Si la logique a tiré profit des recherches profondes des Hilbert, des Dedekind et des Cantor, la mathématique pure, et surtout l'arithmétique et la théorie des ensembles ont subi à leur tour l'influence des travaux subtils des logiciens d'aujourd'hui, qui ont abouti à un remaniement de la logique d'Aristote. Il en est résulté une sorte de collaboration inattendue, d'autant plus précieuse qu'elle a mis en présence des tendances entièrement différentes. Et si les divergences et le désaccord continuent toujours à subsister, des questions d'une importance capitale ont pu être élucidées grâce aux recherches de ces dernières années.

L'ouvrage posthume du mathématicien hongrois J. König se rattache à ces travaux ; il résume les résultats de ses profondes réflexions sur les fondements de la logique, de l'arithmétique et de la théorie des ensembles.

Pour bien comprendre la pensée de König, une étude approfondie serait nécessaire, car son livre abonde en idées originales et rien n'y est inutile ou banal : cette logique, qu'il construit de toutes pièces sur une base nouvelle, n'est ni celle de Russell, ni celle d'Aristote, et ses idées sur les fondements de l'arithmétique et de la théorie des ensembles diffèrent sur bien des points de celles de Hilbert ou de Zermelo. Mon analyse du livre de König sera donc forcément très incomplète.

Pour König, le but de la logique, qu'il compare volontiers aux sciences naturelles, est de décrire et d'ordonner les phénomènes de notre pensée, de même que la mécanique céleste décrit les mouvements des planètes.

Cette description doit commencer par les intuitions, expériences et faits premiers les plus simples. Je me bornerai à en citer deux, que König prend du reste pour point de départ : 1° un *Erlebnis* de ma conscience (le mot allemand *Erlebnis* désigne, si j'ai bien compris, tout phénomène se déroulant dans la conscience) peut se reproduire, 2° il existe dans ma conscience des *Erlebnisse* différents.

A ces faits premiers, où le mot *Erlebnis* peut du reste être remplacé par le mot *Ding* (chose), qui est un *Erlebnis* extériorisé, König adjoint successivement des faits premiers moins immédiats relatifs à des *Erlebnisse* particuliers tels que : représentations, noms, signes, associations de noms et de signes, etc.

Et un principe important est introduit, que König appelle « norme fondamentale de notre pensée » et qu'on peut énoncer ainsi : les *Erlebnisse* « M *est différent de* N » et « M *n'est pas différent de* N » sont incompatibles. Aussi toute hypothèse ou relation ou forme qui violeraient ce principe seront considérées comme *impossibles*.

Nous voilà donc en possession d'un ensemble de faits et d'un principe. En s'appuyant sur cette base, König passe à l'analyse des notions logiques fondamentales. Le mot *Ding* perd le sens intuitif qu'il avait au début et prend une extension de plus en plus large, mais l'originalité du point de vue de König apparaît surtout dans l'analyse de la notion de collection ou d'ensemble, qui joue un rôle essentiel dans cette étude. A bien des esprits, les distinctions qu'il introduit dans cette partie de son livre paraîtront certainement trop subtiles : il faut en chercher l'origine dans les difficultés soulevées par les fameuses antinomies cantoriennes, celles surtout de Russell et de Burali-Forti. La manière dont König décompose la notion délicate d'ensemble, en mettant en évidence les notions élémentaires qui y sont implicitement contenues, la distinction des ensembles purs et des ensembles ordinaires. — tout cela est fort curieux, et personne, je crois, n'y avait songé avant lui.

C'est en s'appuyant sur la notion d'ensemble ainsi précisée que König construit l'ensemble modèle qui lui servira plus tard de type de comparaison. En partant d'un *Ding* quelconque x, il envisage, à la manière de Zermelo, l'ensemble fx dont l'unique élément est x, l'ensemble ffx dont l'unique élément est fx, etc. On devine le rôle que cet ensemble modèle va jouer dans la suite : on dira par exemple qu'un ensemble donné est fini lorsqu'il est équivalent à une suite-modèle fermée ; et la suite ouverte, premier exemple d'une suite ω, interviendra dans l'étude des fondements de l'arithmétique et du principe d'induction complète.

D'autres notions logiques fondamentales sont introduites à leur tour : celles d'ordre, d'implication, d'équivalence, etc. Je ne saurais les énumérer toutes. Je me bornerai seulement à indiquer les points principaux sur lesquels König s'écarte de ses devanciers : c'est d'abord sa manière de définir l'addition logique, qui pour lui est toujours disjonctive ; c'est ensuite l'introduction de la notion d'isologie, sorte d'égalité sous un certain rapport. Mais la divergence s'accentue surtout dans sa manière d'interpréter la notion de vrai. Cette notion de vrai, au sens habituel du mot, est peu claire ; de plus elle est relative et dépend des conventions que nous introduisons spontanément. König la remplace par la notion plus précise de « vrai dans un certain domaine ». Un *Erlebnis* est vrai dans un certain domaine, s'il en fait partie. Quant au domaine (Denxbereich) où la notion de vrai se trouve ainsi enfermée, nous pouvons ou bien le créer de toutes pièces par un choix direct des *Erlebnisse* dont il est la réunion, ou bien compléter sa définition en lui imposant certaines propriétés, par exemple celle-ci, que König appelle involution : si l'*Erlebnis* A appartient au domaine, l'*Erlebnis* B y appartient aussi.

Supposons maintenant qu'un *Erlebnis* Z ne fasse pas partie d'un domaine D ainsi construit. Si alors l'*Erlebnis* Z' « *Z est un fait inadmissible* » appartient à D, nous dirons que Z est faux dans D. Mais il pourrait arriver que ni Z, ni Z' ne fissent partie de D : dans ce cas Z ne serait ni vrai, ni faux dans D.

Certes, cette manière de voir de König ne surprendra pas beaucoup les mathématiciens, mais on voit combien elle s'écarte de la manière classique.

Nous avons nommé les notions logiques fondamentales les plus importantes envisagées par König. De ces notions il remonte aux lois fondamentales, et des lois fondamentales au *domaine de la logique pure*, but principal de ses efforts.

Dans la plupart de ces lois et des formes logiques qui les expriment (la liste de König en comprend 28, divisées en cinq groupes), on reconnaît les lois et les formules de la logistique (*cf.* l'excellent livre de M. Couturat *L'Algèbre de la logique*), par exemple les formes qui expriment les propriétés des conjonctions *et, ou, donc*, bien que leur interprétation soit différente et qu'au lieu des égalités on ait en général des isologies.

Mais la liste de König contient aussi un groupe nouveau : ensemble des formes qui expriment les propriétés des notions de vrai et de faux « dans un certain domaine ».

D'autre part, et ce point est d'une importance capitale, certaines lois fondamentales de la logique classique, par exemple, les principes de contradiction et du milieu exclu, ne figurent pas dans la liste de König, j'en expliquerai la raison dans un moment.

C'est en partant des formes ou lois fondamentales que König construit son domaine de la logique pure.

Il introduit quatre règles ou principes, dont le fameux « dictum de omni et nullo », qui, appliqués aux formes fondamentales, sont destinés à donner des formes logiques nouvelles ; du reste les transformations qui peuvent être faites de cette manière sont toutes comprises dans un processus général « la déduction logique » que König définit avec précision.

Eh bien, le domaine de la logique pure est par définition l'ensemble de toutes les formes qu'on peut déduire de cette manière, y compris les formes fondamentales elles-mêmes.

Une question se pose alors : ce domaine de König est-il exempt de contradiction ? König y répond affirmativement : quelque grand que soit le nombre de nos déductions, nous ne tomberons jamais dans la contradiction. Certes, cette propriété ne saurait être démontrée, mais König fait voir qu'elle peut être rendue évidente, en faisant appel à l'intuition, par une sorte de « demonstratio ad oculos ».

Nous avons dit que les principes de contradiction et du milieu exclu ne figurent pas parmi les lois logiques fondamentales. En voici la raison : si l'on admettait l'un de ces principes, par exemple, le principe de contradiction, dans le domaine de König, ce domaine deviendrait impossible. Le principe de contradiction n'est pas une loi logique au sens de König ; il exprime une propriété du domaine de la logique pure, mais il n'en fait pas partie. Du reste les deux principes sont équivalents : ils se déduisent l'un de l'autre.

Maintenant le problème que s'est posé König peut être considéré comme résolu, au moins en ce qui concerne la logique pure. On passera à une discipline particulière, telle que l'arithmétique ou la géométrie, en adjoignant aux formes fondamentales de la logique pure un certain nombre de formes nouvelles, que König appelle formes axiomatiques, et en contruisant le domaine plus large caractérisé par les formes ainsi introduites.

Pour l'arithmétique le nombre des axiomes introduits par König est assez grand et la construction du domaine présente des difficultés spéciales.

La même question se pose ici : le domaine de l'arithmétique ainsi construit est-il exempt de contradiction ? La réponse de König est encore affirmative : le raisonnement arithmétique ne saurait jamais aboutir à une égalité telle que $3 = 4$. Là encore il s'agit d'une « demonstratio ad oculos ».

Très curieuse est aussi l'analyse des notions et des propositions fondamentales de la théorie des ensembles, à laquelle König consacre les derniers chapitres de son livre. Je signalerai, entre mille autres choses intéressantes, des considérations originales sur l'axiome et le théorème de Zermelo et une solution nouvelle des antinomies cantoriennes.

L'ouvrage de König est certainement l'un des livres les plus profonds qui aient été publiés sur les principes des mathématiques et de la logique.

D. Mirimanoff (Genève).

A. Mitzscherling — **Das Problem der Kreisteilung.** Ein Beitrag zur Geschichte seiner Entwicklung. Mit einem Vorwort von H. Liebmann. — 1 vol. in-8°; vi-214 p. avec 210 fig.; 7 M., relié 8,40 M.; B.-G. Teubner, Leipzig.

Cette étude historique est due à un jeune mathématicien allemand, enlevé prématurément à la Science, en 1912, à l'âge de 23 ans. Elle apporte une importante contribution à l'histoire des problèmes concernant la division du cercle. On sait le rôle que jouent dans le développement de la science les méthodes de résolution données au cours des siècles par la géométrie, depuis l'antiquité jusqu'à nos jours. L'auteur les expose avec soin en examinant dans une première partie la division du cercle, les constructions à l'aide de la règle et du compas, constructions approchées, instruments destinés à la division du cercle.

La seconde partie est consacrée à la division de l'angle ou de l'arc.

C'est tout d'abord le problème de la trisection de l'angle, l'impossibilité de le résoudre à l'aide de la règle et du compas, sa résolution à l'aide des coniques ou des courbes de degré supérieur, sa résolution approchée. Puis viennent la polysection de l'angle à l'aide de courbes algébriques ou de courbes transcendantes, les constructions fournissant une résolution approchée et les instruments permettant de faire la polysection d'un angle.

Par son exposé clair et bien ordonné, tant que par les renseignements complets qu'elle apporte sur les méthodes de résolution de ces problèmes classiques, la monographie de Mitzscherling forme un complément utile aux traités de Géométrie. Ce volume sera consulté avec profit par les maîtres de l'enseignement secondaire désirant fournir aux élèves quelques notions historiques sur les problèmes relatifs à la division de l'angle.

Fr. Paulhan. — **Esprits logiques et esprits faux.** Seconde édition. — 1 vol. in-8° de VIII-388 p. ; 7 fr. 50 : F. Alcan, Paris, 1914.

Voici un livre dont la première édition date de 1896, mais dont il serait bien regrettable de ne point signaler la seconde, surtout aux mathématiciens qui y retrouveront des méthodes d'analyse d'un caractère quasi-mathématique. Il s'agit d'une étude des types intellectuels depuis le type le plus pur qui ne vit, ou ne croit vivre, que par la pure intelligence, jusqu'à celui des frivoles, des étourdis, des impulsifs divers qui se conduisent toujours au hasard des réactions du moment.

L'esprit logique est défini par l'absence de contradiction (p. 3) dans les conséquences des idées ; on voit qu'un mathématicien n'aurait pu mieux dire puisque c'est l'absence de contradiction *interne* qui caractérise surtout la théorie mathématique susceptible d'un développement indéfini. La finesse d'esprit est la faculté de distinguer deux idées très rapprochées ; elle joue donc un rôle capital dans l'invention, dans le pouvoir de faire rendre à deux définitions très voisines ce qui doit être le propre de chacune.

En essayant de situer l'intelligence et le sentiment d'ordre passionnel, l'auteur écrit des lignes profondément justes et vécues, sans doute, par beaucoup de savants. Il n'y a nulle opposition nécessaire entre les deux choses, l'intelligence pouvant devenir « un objet de passions vivaces », la science pouvant être aimée ainsi pour elle-même et, à un degré un peu inférieur, pour la gloire qui s'attache à la production scientifique.

Un « esprit large » est celui qui peut réaliser en lui et comprendre différentes théories, des systèmes opposés, des croyances contradictoires ; l'esprit est « étroit » s'il ne sait y arriver.

Beaucoup de conclusions récemment tirées de la philosophie mathématique ne sont pas différentes de celles-ci.

Plus loin (p. 79) nous voyons que la solution d'un problème est semblable à l'acte qui vient calmer d'ardents désirs. Pour ma part cette analyse me semble rigoureusement exacte.

Je signale aussi des comparaisons des plus intéressantes (p. 128) entre la vraie perfection et l'automatisme de l'instinct. Il est clair en effet qu'une société parfaite aurait un caractère nettement automatique. Nous ne l'avons point et peut-être ne l'aurons-nous jamais ; cependant l'automatisme et la perfection doivent se rencontrer, « comme les parallèles à l'infini ».

Dans l'étude des simulateurs, qui se proposent simplement de singer les esprits supérieurs, il faut citer aussi un passage (p. 177) visant les calculateurs empiriques et les joueurs d'échecs. Que de gens de ce genre ont passé, aux yeux de foules naïves, pour des mathématiciens de génie. Il y a des procédés mécaniques pour simuler la mémoire des chiffres ; plus généralement « il y a des recettes qui permettent à des gens particulièrement doués de simuler un état mental qui n'est pas le leur ».

L'étude des esprits illogiques est abordée (p. 269) par une comparaison géométrique très nette. « Après avoir admis que la droite est le plus court chemin entre deux points, on ne peut plus logiquement croire qu'un côté d'un triangle n'est pas plus petit que la somme des deux autres. » Hélas ! que de gens admettent des choses qui sont en contradiction tout aussi flagrante avec d'autres érigées en principes ! Ce sont les « esprits faux ». Leur classification termine cette œuvre dont la seconde édition témoigne suffisamment du succès déjà acquis : ce succès méritait cependant d'être plus grand encore dans le monde mathématique et c'est là une grâce que nous devons souhaiter de grand cœur à ce nouveau volume.

A. Buhl (Toulouse).

J. Ser. — **Essai de Linéométrie**. — 1 vol. in-8° de IV-80 pages ; 2 fr. 75 ; Gauthier-Villars, Paris.

L'auteur de cette étude s'est proposé d'aborder sous une forme nouvelle le problème de la rectification des courbes élémentaires. Il s'appuie naturellement sur les propriétés fondamentales des fonctions algébriques mais en modifiant les méthodes classiques et en suivant aussi souvent que possible la voie géométrique.

Les premiers chapitres sont consacrés aux considérations relatives à la longueur d'un arc de courbe. L'auteur introduit à ce propos un certain nombre de courbes auxiliaires et il entre dans quelques détails concernant leurs propriétés. Dans un autre chapitre il cherche le genre de la fonction qui mesure l'arc d'une courbe algébrique plane ; la méthode suivie est basée sur l'emploi du théorème d'Abel.

C'est également à l'aide de ce même théorème qu'est faite l'étude des sommes d'arcs qui peuvent s'exprimer par une fonction algébrico-logarithmique. Dans le cas le plus intéressant les résultats sont expliqués par des considérations géométriques simples.

Pour faciliter l'emploi du théorème d'Abel, l'auteur fait d'ailleurs une théorie assez complète, et croyons-nous nouvelle, de certaines fonctions symétriques des coordonnées des points d'intersection de deux courbes.

Cette première partie se termine par l'application des théories au cas particulier des coniques et l'on trouve, en même temps que les propriétés des fonctions trigonométriques, certains théorèmes bien connus sur la parabole et l'ellipse.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Acta Mathematica. Stockholm. — Tome 37. Fasc. 1-3. — S. Bernstein : Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynômes de degrés donnés. — P. Staeckel : Periodische Funktionen und Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen. — J.-F. Steffenssen : Ueber eine Klasse von ganzen Funktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie. — S. Wigert : Sur quelques fonctions arithmétiques. — G.-C. Young : A note on Derivates and Differential Coefficients. — G. H. Hardy and J. E. Littlewood : Some problems of Diophantine Approximation. — G. Remoundos : Sur les familles de fonctions multiformes admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine. — O. Perron : Periodische Funktionen und Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen.

American Journal of Mathematics, Baltimore. — Tome XXXV. fasc. 4. — P. H. Schoute : On the Four-dimensional Angles of the Semiregular Polytopes of S_4. — Ch. Alb. Fischer : A Generalization of Volterra's Derivative of a Function of a Curve. — J. B. Shaw : On Differential Invariants. — A. Emch : Some Properties of Closed Convex Curves in a Plane. — L. E. Dickson : Finiteness of the Odd Perfect and Primitive Abundant Numbers with n Distinct Prime Factors. — L. E. Dickson : Even Abundant Numbers. — H. D. Thompson : The Identical Relations betwen the Elements of any Oblique Triple System of Surfaces. — C. B. Hennel : Transformations and Invariants Connected with Linear Homogeneous Difference Equations and Other Functional Equations. — J. A. Nyberg : Projective Differential Geometry of Rational Cubic Curves.

Tome XXXVI, fasc. 1 et 2. — H. H. Mitchell : Determination of all Primitive Collineation Groups in more than four Variables wich contain Homologies. — R. D. Carmichael : On Non-Homogeneous Equations with an Infinite number of Variables. — P. Field : On constrained Motion. — J. I. Tracey : Covariant Curves of the Plane Rational Quintic. — G. A. Miller : The Group of Isomorphisms of an Abelian Group and some of its Abelian Subgroups. — R.-M. Winger : Self-Projective Rational Curves of the fourth and fifth Orders. — R. E. Root : Iterated Limits in General Analysis. — Elisabeth R. Bennett : Simply Transitive Primitive Groups Whose Maximal Subgroup contains a Transitive Constituent of Order p^2, or pq, or a Transitive Constituent of Degree 5. — Ida Barney : An Extension of Green's Theorem. — C. E. Love : On the Asymptotic Solutions of Linear Differential Equations. — A. B. Coble : Restricted Systems of Equations. — A. H. Wilson : The Canonical Types of Nets of Modular Conics. — J. H. M. Wedderburn : On Long Waves.

Bulletin de la Société mathématique de France, Gauthier-Villars, Paris. — Tome XLI, fasc. 3 et 4. — E. Lindelöf : Démonstration nouvelle d'un théorème fondamental sur les suites de fonctions monogènes. — L. Godeaux : Sur les involutions appartenant à une surface de genres $p_a = p_g = 0$; $P_6 = 1$. — M. Petrovitch : Équations algébriques et transcendantes dépourvues de racines réelles. — J. Clairin : Sur la transformation d'Imschenetsky. — R. Garnier : Sur les simplifications du potentiel élastique dues à la symétrie cristalline. — J. Touchard : Sur la fonction gamma. — Barré : Théorie générale des surfaces engendrées par une hélice circulaire. — G Remoundos : Généralisation d'un théorème de M. Landau. — Bratu : Sur les équations intégrales non linéaires. — G. Julia : Sur les lignes singulières de certaines fonctions analytiques. — F. Boulad Bey : Sur la représentation de l'équation nomographique d'ordre 4 à quatre variables par double alignement. — E. Cahen : Remarque sur un article antérieur.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 1er semestre 1914. — *5 janvier.* — Ch. Platrier : Sur une propriété caractéristique des surfaces à courbure totale négative constante. — E. Goursat : Sur certaines transformations de la formule de Stokes. — E. Borel : Sur quelques problèmes de probabilités géométriques et les hypothèses de discontinuité.

12 janvier. — Gambier : Sur les courbes à torsion constante. — A. Denjoy : Sur une propriété des fonctions à nombres dérivés finis. — J Pal : Sur des transformations de fonctions qui font converger leurs séries de Fourier. — Ph. Franck et G. Pick : Sur quelques mesures dans l'espace fonctionnel. — H. Bohr et E. Landau : Sur les zéros de la fonction (s) de Riemann. — R. Bricard : Sur un mouvement doublement décomposable.

26 janvier. — Gambier : Sur les courbes de Bertrand et les courbes à courbure constante. — E. Keraval : Sur une famille de systèmes triplement orthogonaux. — Th. Angelutza : Sur le noyau symétrique gauche dans la théorie des équations intégrales. — E. Lindelöf : Sur la représentation conforme. — G. Remoundos : Sur la convergence des séries de fonctions analytiques. — H. Andoyer : Nouvelles tables trigonométriques fondamentales. — G. Humbert : Sur quelques fonctions numériques remarquables. — A. Chatelet : Sur les congruences d'ordre supérieur. — G. Armellini : Sur la solution analytique du problème restreint des trois corps.

2 février. — Gambier : Sur les courbes algébriques à torsion constante, de genre non nul. — A. Buhl : Sur les extensions de la formule de Stokes, les équations de Monge-Ampère et les fonctions analytiques de deux variables. — E. Cartan : Sur l'intégration de certains systèmes d'équations différentielles. — G. Polya : Sur une question concernant les fonctions entières — G. Humbert : Sur quelques fonctions numériques remarquables.- Boulyguine : Sur la représentation d'un nombre entier par une somme de carrés. — Duhem : Rapport sur un Mémoire de M. Louis Roy intitulé : « Sur le mouvement des milieux visqueux et les quasi-ondes. »

9 février. — P. Appell et J. Kampé de Feriet : Sur la convergence des séries procédant suivant les polynômes d'Hermite ou les polynômes analogues plus généraux.

16 février. — S. Bernstein : Sur la meilleure approximation des fonctions analytiques possédant des singularités complexes. — H. Hancock ; La fonction eulérienne généralisée.

23 février. — J. Darmois : Sur la méthode de Laplace. — G. Pick : Sur l'évaluation des distances dans l'espace fonctionnel. — Ph. Franck : Sur l'évaluation approximative de la plus petite valeur caractéristique de quelques équations intégrales. — G. Kowalewski : La géométrie intrinsèque et la première proposition fondamentale de Sophus Lie. — A. Rosenblatt : Sur certaines intégrales d'un système de deux équations différentielles ordinaires de premier ordre satisfaisant à des conditions initiales singulières. — E. Guyou : Sur l'homogénéité des équations et sur la simplification des problèmes quand certaines quantités deviennent petites. — Fessenkoff : Sur la capture des comètes par Jupiter. — A. Veronnet : Le refroidissement de la Terre ; Evolution et durée.

2 mars. — Gambier : Sur les courbes algébriques à torsion constante, réelles et non unicursales. — F. Jager : Sur l'application de la méthode de Fredholm aux marées d'un bassin limité par des parois verticales. — E. Mazurkiewicz et W. Sierpinski : Sur un ensemble superposable avec chacune de ses deux parties. — A. Pcheborski : Sur une généralisation d'un problème de Tchébischeff et de Zolotareff.

9 mars. — P. E. Gau : Sur les transformations générales des systèmes différentiels. — G. Armellini : Un théorème général sur le problème des *n* corps. — V. Valcovici : Sur la résistance hydrodynamique dans le mouvement non uniforme. — Th. de Donder : Interprétation cinématique du théorème de Poynting.

16 mars. — C. Guichard : Sur les réseaux et les congruences asymptotiques. — W. Blaschke : Evaluation d'intégrales doubles des fonctions convexes. — R. Jentzsch : Sur l'extension du théorème de Laguerre.

23 mars. — L. Godeaux : Sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique. — Gunther : Sur la théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles. — E. Baticle : Sur les équations aux dérivées partielles de l'équilibre limite d'un massif sablonneux.

30 mars. — J. Clairin : Sur quelques transformations de Bäklund. — J. Drach : Sur les équations différentielles du premier ordre et du premier degré. — G. Remoundos : Sur les séries de fonctions multiformes dans un domaine. — A. Korn : Sur le problème des sphères pulsantes et la théorie de la gravitation. — G. Lippmann : Sur une méthode photographique directe pour la détermination des différences de longitude.

6 avril. — A. Denjoy : Exemples de fonctions dérivées. — A. Buhl : Sur la forme intégrale des équations de Monge-Ampère. — A. Hurwitz : Sur les points critiques des fonctions inverses des fonctions entières. — P. Lévy : Sur les fonctions de Green et de Neumann. — Hadamard : Observation au sujet de la note précédente. — G. H. Hardy : Sur les zéros de la fonction (*s*) de Riemann. — B. Fessenkoff : Distribution de la poussière cosmique dans le plan invariable du système solaire.

14 avril. — A. Bilimovitch : Sur les transformations canoniques des équations du mouvement d'un système non holonôme.

20 avril. — Günther : Sur la théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

27 avril. — J. Clairin : Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. — W. Blaschke : Nouvelles évaluations de distances dans l'espace fonctionnel. — M. Riesz : Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynôme trigonométrique. —

B. Gambier : Sur les surfaces susceptibles d'être engendrées de plusieurs façons différentes par le déplacement d'une courbe invariable. — L. Roy : Sur le mouvement à trois dimensions des milieux visqueux indéfinis. — F. Jager : Sur l'application de la méthode de Ritz à certains problèmes de physique mathématique et en particulier aux marées. — H. Chrétien : Sur un astrolabe à miroirs.

2. Livres nouveaux :

H. Berliner. — **Involutionssysteme in der Ebene des Dreiecks.** — 1 vol. in-8°, XII-212 p. ; 8 M. ; F. Vieweg et Sohn, Braunschweig.

P. Delens. — **Problèmes d'Arithmétique amusante.** — 1 vol. in-8°, VIII-164 p. ; 2 fr. ; Vuibert, Paris.

Z. G. de Galdeano. — **Congreso de la enseñanza matemática celebrado en Paris del 1 al 4 de Abril.** Conferencia dada en la Facultad de Ciencius de Zaragoza el dia 22 de Abril. — 1 fasc. in-8°, 39 p. ; Saragosse.

A. Gutzmer. — **Die Tätigkeit des Deutschen Ausschusses** für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht in den Jahren 1908 *bis* 1913. — 1 vol. in-8°, 476 p. (comprenant 18 fasc.). — B. G. Teubner, Leipzig.

T. Proctor Hall. — **A Geometrical Vector Algebra.** — 1 fasc. in-8°, 30 p.; Western Specialty, Limited, Vancouver.

F. Hausdorff. — **Grundzüge der Mengenlehre.** — 1 vol. in-8°, 476 p. ; broch. 18 M., rel. 20 M. ; Veit u. Comp , Leipzig.

R. Heger. — **Fünfstellige Logarithmische und Goniometrische Tafeln.** 1 vol. in-8, 124 p. ; 2, 40 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

A. Kann. — **Ein philosophischer Gedankengang.** — 1 vol. in-8, VIII-108 p. ; A. Kann, Vienne.

H. von Mangoldt. — **Einführung in die höhere Mathematik** für Studierende und zum Selbststudium. — Band III : *Integralrechnung.* — 1 vol. in-8°, X-485 p. ; 13 fr. 60 M., relié 14 fr. 60, M. ; S. Hirzel, Leipzig.

R. C. Fawdry. — **Statics.** Part. I. (Bell's Mathematical Series). — 1 vol. p. in-8°, VI-165 p. ; 2 s 6 d. ; G. Bell et Sons, Londres.

H. Freeman. — **Arithmetic.** (Bell's Mathematical Series). — 1 vol. p. in-8°, VIII-231-XXXI p. (with answers) ; 2 s. 6 d. ; G. Bell et Sons, Londres.

J. A. Serret. — **Lehrbuch der Differential und Integralrechnung,** bearbeitet von G. Scheffers. — Dritter Band : *Differentialgleichungen und Variationsrechnung.* 4me et 5me éditions. — 1 vol. in-8°, XIV-735 p. ; 13 M., relié 14 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Wieleitner. — **Algebraische Kurven,** neue Bearbeitung. I Teil : Gestaltliche Verhältnisse. (Sammlung Göschen n° 435). — 1 vol. in-16, 140 p. 0 fr. 90 M. ; G. J. Göschen, Berlin et Leipzig.

XXX. Anniversario della Fondazione del Circolo Matematico di Palermo. Onoranze al Fondatore Prof. Dott. G. B. Guccia. — Adunanza Solenne del 14 Aprile 1914. — Resoconto compilato per cura del Segretario del Comitato Locale, Dr. Michele de Franchis. — 1 vol. gr. in-4, 68 p. ; Sede della Società, Palermo.

UNE LEÇON D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE SUR LES POLYNOMES BIQUADRATIQUES ET DOUBLEMENT QUADRATIQUES

I. — Préambule.

1. — La leçon qu'on va lire était destinée primitivement à servir d'introduction au cours que je professe ce semestre à l'Université de Genève sur les fonctions elliptiques. Diverses considérations, en particulier la longueur de cette étude m'ont engagé, en modifiant mon plan, à renoncer à ma première idée. Je me décide à faire paraître ici cette leçon, malgré le caractère élémentaire et même classique des questions que j'y discute.

En écrivant ces pages je me suis surtout inspiré du grand traité de G. H. Halphen[1] que j'ai dû consulter à maintes reprises pour la préparation de ce cours. On sait la manière de cet auteur, dense et pleine. Visant toujours à la perfection il ne touche aucun sujet sans l'épuiser. Un tel écrivain ne s'accommode guère d'une lecture cursive, et c'est le plus souvent la plume à la main que je l'ai étudié.

Il est résulté de là toute une série de notes, les unes très brèves, les autres assez développées, serrant de plus ou moins près le texte que je me proposais de commenter. La présente étude n'est, pour une forte part, qu'une de ces notes; elle s'écarte d'ailleurs beaucoup du livre d'Halphen. La méthode dont je me sers est partiellement nouvelle, et me paraît présenter des caractères intéressants : à défaut d'autres mérites, mon travail aidera peut-être quelques étudiants à lire plus facilement les chapitres 9, 10, 11 et 14 au second volume d'un ouvrage qu'on ne saurait aujourd'hui encore trop recommander.

Au chapitre 9, consacré à l'équation d'Euler, Halphen n'emploie évidemment les fonctions elliptiques qu'à titre d'auxiliaires: le

[1] G.-H. Halphen. *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications.* Paris 1886-1891, 3 vol. in 8°.

but principal demeure l'équation doublement quadratique, la recherche de ses invariants, le problème de l'équivalence entre de semblables équations, etc. Or on peut se demander si le détour par les fonctions elliptiques offre un avantage bien réel, et si ces diverses questions ne se résoudraient pas aussi simplement par les seules ressources de l'Algèbre.

En prenant ce point de vue direct, opposé à celui d'Halphen, il semble en effet qu'on gagne plutôt ; on obtient en tout cas un exposé aussi approfondi, et peut-être plus clair, des propriétés de l'équation dont il s'agit. Il est loisible ensuite de fermer le cercle par l'étude de l'intégrale elliptique attachée au polynôme doublement quadratique, c'est par là que je termine.

Tel est donc l'objectif que j'ai poursuivi ; j'ai essayé de discuter par une marche élémentaire, bien qu'assez à fond, le problème algébrique, et de trouver, dans sa résolution, la clef des premières propriétés de l'intégrale elliptique. Cette marche qui m'était suggérée par le plan même de mon cours, tel que je l'avais d'abord tracé, se confond avec celle qu'ont dû suivre tout naturellement les premiers inventeurs du théorème d'addition, Euler en particulier. Il me semble, en la renouvelant, l'avoir sensiblement perfectionnée ; au lieu de me contenter de vérifier des formules en quelque sorte toutes préparées, j'ai cherché à mettre partout en évidence les raisons cachées de ces formules. Ceci ne va pas sans quelques longueurs.

C'est notamment par ce souci de clarté qu'on s'expliquera la présence ici des deux premiers chapitres de mon travail : tout élémentaires qu'ils sont, ils font corps avec la suite et ne sauraient en être séparés, ce sont eux qui renferment le secret des propriétés assez complexes de l'équation doublement quadratique. On n'y verra peut-être pas sans intérêt le rôle prédominant que je fais jouer, notamment dans la théorie des équations du 4^{me} degré, aux polynômes quadratiques dont les racines se divisent harmoniquement deux à deux. L'introduction méthodique de pareils polynômes *conjugués*, ou *orthogonaux*, me paraît jeter une vive lumière sur tout le sujet ; aussi me suis-je attardé sur les propriétés de ces polynômes au delà de ce qui était strictement nécessaire.

II. — Polynômes du second degré.

2. — Dans toute la suite nous rencontrerons constamment des combinaisons homogènes de divers polynômes f, g, h, ... , les degrés de ces polynômes en x sont zéro, un, ou deux. Nous n'emploierons pas la notation homogène, et nous regarderons toujours ces polynômes comme de degré 2. Ils possèdent deux racines ; seulement quand le degré effectif s'abaisse, une des racines, ou toutes

les deux, se trouve rejetée à l'infini. A ce point de vue, deux polynômes d'un degré égal à l'unité ne sont jamais premiers entre eux comme ayant en commun le facteur $x - \infty$: une constante est un polynôme carré dont les deux racines sont à l'infini et dont la dérivée est identiquement nulle, etc.

Notons encore qu'une relation telle que $h^2 = fg$ ne peut subsister que dans les deux suppositions que voici : ou bien f et g sont des carrés parfaits, ayant respectivement pour racines les facteurs linéaires de h, ou bien f, g, h, ne diffèrent les uns des autres que par un facteur constant. Ce théorème, évident, ne suppose pas non plus le degré effectif égal a 2. En voici une application immédiate.

On sait que si $y^2 = ax^2 + 2bx + c$ est l'équation d'une conique rapportée à un axe de symétrie, les coordonnées x et y peuvent, d'une infinité de manières, s'écrire sous la forme

$$x = \frac{f}{g}, \qquad y = \frac{h}{g}. \tag{1}$$

Les trois polynômes f, g, h, en t, sont du second degré et donnent lieu à l'identité

$$h^2 = af^2 + 2bfg + cg^2 = \mathrm{FG}, \tag{2}$$

où F et G désignent certaines combinaisons linéaires de f et g. Par exemple si $a \neq o$, on peut prendre

$$\mathrm{F}\sqrt{a} = af + (b + \sqrt{\Delta})g, \qquad \mathrm{G}\sqrt{a} = af + (b - \sqrt{\Delta})g,$$

la lettre Δ représente ici le discriminant $b^2 - ac$ du polynôme $ax^2 + 2bx + c$.

En tout cas si la conique est non décomposable F, G, h sont distincts, car dans le cas contraire on aurait une relation linéaire entre x, y. On doit donc conclure de (2) que F et G sont des carrés,

$$\mathrm{F} = \varphi^2, \qquad \mathrm{G} = \gamma^2, \qquad h = \varphi\gamma. \tag{3}$$

et voici la conséquence. *Dans la représentation* (1) *le polynôme* h *ne diffère que par un facteur constant de cet autre* $fg' - f'g$.

En effet, si $\mathrm{F} = lf + mg$ et $\mathrm{G} = l'f + m'g$, on a d'abord

$$\mathrm{FG'} - \mathrm{F'G} = (lm' - l'm)(fg' - f'g);$$

puis d'après (3)

$$\mathrm{FG'} - \mathrm{F'G} = 2\varphi\gamma(\varphi\gamma' - \varphi'\gamma) = 2h(\varphi\gamma' - \varphi'\gamma).$$

La proposition est prouvée, car les quantités $lm' - l'm$ et $\varphi\gamma' - \varphi'\gamma$ sont évidemment constantes.

Réciproquement, si f, g, h représentent trois polynômes quadratiques en t, la courbe $x = \frac{f}{g}$, $y = \frac{h}{g}$ est une conique, décomposable ou non. Si, f et g restant quelconques, on prend h égal ou proportionnel au polynôme du second degré $h = fg' - f'g$, notre conique admet l'axe des x comme axe de symétrie. Cela résulte de l'identité

$$(fg' - f'g)^2 = (g'^2 - 2gg'')f^2 + 2(f''g - f'g' + fg'')fg + (f'^2 - 2ff'')g^2 ,$$

que nous écrivons en abrégé

$$(fg' - f'g)^2 = (gg)f^2 - 2(fg)fg + (ff)g^2 , \tag{4}$$

en posant, pour deux polynômes quelconques qui peuvent coïncider

$$(fg) = f'g' - f''g - fg'' . \tag{5}$$

La quantité (fg) ainsi définie est une constante, comme on le voit en la différentiant; elle s'appelle *l'invariant simultané* des polynômes f et g; lorsqu'ils deviennent égaux, l'invariant (ff) se trouve égal au quadruple du discriminant $B^2 - AC$ de la forme $f = Ax^2 + 2Bx + C$.

D'après l'identité (4), on voit bien que les formules

$$x = \frac{f}{g} , \qquad y = \frac{f'g - fg'}{g} ,$$

donnent la représentation paramétrique de la conique

$$y^2 = ax^2 + 2bx + c , \tag{6}$$

aux coefficients $a = (gg)$, $b = -(fg)$, $c = (ff)$.

Considérons le polynôme $h = fg' - f'g$; de cette définition on tire les formules

$$h = fg' - f'g , \qquad h' = fg'' - f''g , \qquad h'' = f'g'' - f''g' , \tag{7}$$

d'où

$$hf'' - h'f' + h''f = 0 , \qquad hg'' - h'g' + h''g = 0 , \tag{8}$$

c'est-à-dire $(hf) = 0$ et $(hg) = 0$.

Si on nomme *conjugués* ou *orthogonaux* deux polynômes à invariant nul, on montre aisément que les racines de l'un d'entre eux divisent harmoniquement l'intervalle des racines de l'autre. Les équations ci-dessus $(hf) = (hg) = 0$ signifient donc que dans la représentation paramétrique de la conique (6), le polynôme h est orthogonal à f et g, comme aussi à tout polynôme $lf+mg$ appartenant à leur faisceau. Et cette règle suffit à déterminer h, sauf un coefficient constant, en fonction de deux polynômes quelconques du dit faisceau.

Tirons quelques conséquences du système (7).

a) Si f et g admettent un facteur commun $t-\alpha$, les deux premières formules (7) montrent que h et h' admettraient ce même facteur $t-\alpha$; h serait donc carré parfait. Il n'y a pas d'exception pour $\alpha=\infty$; f et g seraient alors tous deux du premier degré et h une simple constante.

Inversement, si f et g sont premiers entre eux, h n'est jamais carré. Car d'abord il ne peut être constant, parce que, d'après la seconde formule (7), f et g seraient dans ce cas identiques, à un facteur près. En second lieu, si on pose $h=\frac{h''}{2}(t-\alpha)^2$, avec $h''\neq 0$, h et h' s'annulent pour $t=\alpha$ et comme le déterminant $f'g''-f''g'=h''$ est non nul, f et g possèdent tous deux le diviseur $t-\alpha$; ceci en vertu des mêmes formules (7).

En résumé : si f et g n'ont aucun facteur commun, h est non carré, s'ils en ont un seul, h est carré parfait, s'ils en ont deux, h est nul identiquement.

b) Supposons désormais f et g premiers entre eux, par suite h non carré, ou son discriminant $\frac{1}{4}(hh)$ différent de zéro. Dans ce cas la conique (6) est non décomposable; en effet, son discriminant

$$(fg)^2-(ff)(gg)=(f''g-f'g'+fg'')^2-(f'^2-2ff'')(g'^2-2gg''),$$

peut aussi s'écrire

$$(fg''-f''g)^2-2(fg'-f'g)(f'g''-f''g')=h'^2-2hh''=(hh),$$

ce qui rend la proposition évidente.

c) Les polynômes f, g, h sont linéairement indépendants. Soit en effet $F=lf+mg$ un polynôme appartenant au faisceau f, g; on ne saurait avoir $h=F$, car la condition d'orthogonalité $(hF)=0$ donnerait dans ce cas $h'^2-2hh''=0$, chose absurde h n'étant pas carré.

Je dis de plus que si h et F possèdent un facteur commun, F est un carré parfait. En effet, soit $t-\alpha$ le facteur commun; la condition $(hF)=h'F'-hF''-h''F=0$ montre que $t-\alpha$ divisera $h'F'$, sans diviser h' puisque h est non carré. C'est donc que F et F' sont tous deux divisibles par $t-\alpha$ et qu'ainsi F est carré : cette conséquence persiste, comme on voit facilement, même si $\alpha=\infty$. Réciproquement toutes les fois que F est un carré exact $(t-\alpha)^2$, h admet le diviseur $(t-\alpha)$, la chose est évidente.

On voit, en somme, que h étant écrit sous la forme $h = A(t-\alpha)(t-\beta)$, le faisceau (f,g) qui contient certainement deux carrés, comme on a vu plus haut, n'en contient pas d'autre que ces deux-ci $(t-\alpha)^2$ et $(t-\beta)^2$. Les racines α et β du polynôme h définissent ce qu'on appelle les points doubles du *faisceau*, ou de *l'involution* (f,g).

3. — *Condition de réalité.* — Supposons f et g non seulement premiers entre eux, mais réels; je dis que les points doubles sont toujours réels sauf dans le cas où les racines de f et g sont réelles et se séparent mutuellement.

En effet, on a

$$h = g^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{f}{g}\right) = -f^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{g}{f}\right) ;$$

par suite, si un de nos polynômes, par exemple g, a des racines imaginaires, le quotient $\frac{f}{g}$, continu de $t = -\infty$ à $t = +\infty$, reprend la même valeur pour ces deux valeurs de t. Il admet ainsi des maxima ou des minima, en même temps h s'annule. Si f et g admettent tous deux des racines réelles, mais que celles de f, γ et δ par exemple, soient comprises entre les racines de g, le quotient $\frac{f}{g}$ reste continu dans l'intervalle $\gamma\delta$ et s'annule à ses extrémités, ainsi h s'annule de nouveau. Passons au cas où les racines réelles de f et g se séparent mutuellement.

Si on fait dans ce cas varier les coefficients de f et g de manière que leurs racines conservent la même position relative, h ne peut devenir carré parfait, puisque f et g n'acquièrent pas de facteurs communs; ainsi les racines de $h = 0$ restent réelles ou imaginaires selon qu'elles l'étaient au début. Or on peut évidemment par les dits changements amener f à prendre la forme (t^2-1) et g la forme $2t$, polynômes à racines séparées. A cet instant $h = 2(t^2+1)$, et ses racines sont imaginaires, comme le voulait la proposition énoncée ci-dessus.

Les cas précédents sont évidemment exclusifs les uns des autres, et comme h est le même, à un facteur près, quand on le déduit de deux polynômes quelconques F, G du faisceau (f,g), on voit que si f et g sont deux polynômes à racines réelles se séparant mutuellement, $F = lf + mg$ et $G = l'f + m'g$ sont dans le même cas, cela quels que soient les facteurs réels l, m, l', m'.

4. — *Intégration.* — On sait que la représentation paramétrique (1) est employée dans les éléments pour intégrer les différentielles

$f(x, y)\,dx$, attachées à la conique $y^2 = ax^2 + 2bx + c$. Disons, en passant, un mot de cette intégration.

Admettons, pour fixer les idées, que g n'est pas carré parfait : il y a alors dans le faisceau $f - xg$ deux carrés parfaits. Soient donc

$$f - x_1 g = A_1(t - t_1)^2, \quad f - x_2 g = A_2(t - t_2)^2. \tag{9}$$

L'équation $x = \dfrac{f}{g}$ donne

$$g(x - x_1) = A_1(t - t_1)^2, \qquad g(x - x_2) = A_2(t - t_2)^2, \tag{10}$$

puis

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{t - t_1}{t - t_2}\right)^2,$$

qui n'est qu'une forme nouvelle pour $x = \dfrac{f}{g}$. On y lit que si t_1 et t_2 sont les racines du polynôme h, x_1 et x_2 représentent les extrêmums du quotient $\dfrac{f}{g}$, alors que t_1 et t_2 sont les valeurs de la variable correspondant à ces extremums.

Posons $h = gf' - fg'$, désignons par m un facteur de proportionnalité, et revenons à l'identité (4), nous avons

$$x = \frac{f}{g}, \qquad \sqrt{ax^2 + 2bx + c} = m\,\frac{h}{g}, \qquad dx = h\,\frac{dt}{g^2} = \frac{y}{m}\,\frac{dt}{g}.$$

On a donc

$$\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{1}{m}\,\frac{dt}{g},$$

ce qui est la formule bien connue de l'Analyse élémentaire. Il est aisé, en la généralisant, de l'adapter à l'intégration des fonctions rationnelles du type $\dfrac{rt + s}{f\sqrt{g}}\,dt$, où r et s sont deux coefficients constants.

Tirons à cet effet de (10)

$$\sqrt{g(x - x_1)} = (t - t_1)\sqrt{A_1}, \qquad \sqrt{g(x - x_2)} = (t - t_2)\sqrt{A_2};$$

additionnons celles-ci, après les avoir multipliées par deux facteurs constants, nous aurons

$$\frac{rt + s}{\sqrt{g}} = c_1\sqrt{x - x_1} + c_2\sqrt{x - x_2}.$$

Multiplions cette formule à son tour par le facteur

$$\frac{dt}{f} = \frac{m}{x} \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + 2bx + c}} = \frac{p}{x} \frac{dx}{\sqrt{(x - x_1)(x - x_2)}} ,$$

il vient

$$\frac{rt + s}{f\sqrt{g}} dt = b_1 \frac{dx}{x\sqrt{x - x_1}} + b_2 \frac{dx}{x\sqrt{x - x_2}} . \tag{11}$$

C'est là une formule très pratique pour l'intégration des différentielles du premier membre, une fois déterminés en fonction de r et s les paramètres b_1, b_2 qu'elle contient.

5. — *Transformations linéaires.* — Nous allons exécuter sur nos polynômes des transformations du type

$$t = \frac{\alpha u + \beta}{\alpha' u + \beta'} , \qquad \text{ou} \qquad u = \frac{-\beta' t + \beta}{\alpha' t - \alpha} , \tag{12}$$

dont le déterminant $\delta = \alpha\beta' - \alpha'\beta$ doit être différent de zéro. Il est ici bien entendu, à titre de convention expresse, que nous nous interdisons la suppression des facteurs communs dans les quatre coefficients α, α', β, β' de la transformation ci-dessus ; ces coefficients comptent ainsi pour eux-mêmes et non pas simplement par leurs rapports mutuels. L'importance de cette convention va ressortir à l'instant.

Le polynôme transformé de $f(t)$ est, par définition,

$$\varphi(u) = (\alpha' u + \beta')^2 f\left(\frac{\alpha u + \beta}{\alpha' u + \beta'}\right) \tag{13}$$

Désignons semblablement par $\gamma(u)$ le transformé de $g(t)$, par $\eta(u)$ le polynôme orthogonal à la fois à $\varphi(u)$ et $\gamma(u)$ comme $h(t)$ est orthogonal simultanément à $f(t)$ et $g(t)$. On a

$$dt = \frac{\delta du}{(\alpha' u + \beta')^2} , \qquad \text{puis} \qquad \eta(u) = \gamma^2 \frac{d}{du}\left(\frac{\varphi}{\gamma}\right) = (\alpha' u + \beta')^2 \delta g^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{f}{g}\right) ,$$

donc

$$\eta(u) = \delta(\alpha' u + \beta')^2 h(t) ;$$

ainsi, sauf le facteur δ, $\eta(u)$ est précisément le transformé de $h(t)$.

Multiplions l'identité fondamentale (4) par le facteur $\delta^2(\alpha' u + \beta')^4$, elle devient, grâce à l'égalité précédente,

$$\eta^2 = \delta^2 [(gg)\varphi^2 - 2(fg)\varphi\gamma + (ff)\gamma^2] ;$$

mais comme d'autre part

$$\eta^2 = (\gamma\gamma)\varphi^2 - 2(\varphi\gamma)\varphi\gamma + (\varphi\varphi)\gamma^2 ,$$

la comparaison de ces deux résultats donne de suite les invariants de φ et γ. Ce sont

$$(\varphi\varphi) = \delta^2(ff) , \qquad (\varphi\gamma) = \delta^2(fg) , \qquad (\gamma\gamma) = \delta^2(gg) ; \tag{14}$$

la seconde de ces formules reproduit les deux autres en faisant simplement coïncider les deux formes f et g.

Réciproquement je dis que si quatre polynômes f, g et φ, γ, les premiers en t, les deux autres en u, sont tels que les relations d'invariance (14) soient vérifiées, il existe une transformation linéaire de déterminant δ transformant f en φ et g en γ. Pour le montrer, prenons le polynôme doublement quadratique

$$F(t, u) = f(t)\gamma(u) - g(t)\varphi(u) ,$$

nous allons voir que, les conditions ci-dessus étant supposées vraies, il se décompose en un produit de deux facteurs linéaires en t et u.

En effet, le discriminant de F, relativement à t, s'écrit

$$\begin{aligned} F_t'^2 - 2FF_t'' &= (f'\gamma - g'\varphi)^2 - 2(f\gamma - g\varphi)(f''\gamma - g''\varphi) \\ &= (f'^2 - 2ff'')\gamma^2 + 2(f''g + fg'' - f'g')\gamma\varphi + (g'^2 - 2gg'')\varphi^2 , \end{aligned}$$

ou bien, en remplaçant les coefficients ff, fg, gg par leurs valeurs (14)

$$\begin{aligned} F_t'^2 - 2FF_t'' &= \frac{1}{\delta^2}\left[(\varphi'\gamma - \gamma'\varphi)^2 - 2(\varphi''\gamma - \gamma''\varphi)(\varphi\gamma - \gamma\varphi)\right] \\ &= \frac{1}{\delta^2}(\varphi'\gamma - \gamma'\varphi)^2 . \end{aligned}$$

Ce discriminant est donc carré parfait et la proposition est démontrée.

D'après le calcul qui précède on voit que la condition $F = 0$, laquelle contient évidemment toutes les transformations possibles de f en φ, et de g en γ, se dédouble dans les deux suivantes

$$F_t' = \frac{\varphi'\gamma - \gamma'\varphi}{\delta} , \qquad \text{et} \qquad F_t' = -\frac{\varphi'\gamma - \gamma'\varphi}{\delta} , \tag{15}$$

qui ne diffèrent l'une de l'autre que par le signe de δ.

Prenons l'une d'elles, la première par exemple; alors les conditions compatibles

$$F = 0, \quad F'_t = \frac{\varphi'\gamma - \gamma'\varphi}{\delta},$$

ou bien

$$f\gamma - g\varphi = 0, \quad \left(f' - \frac{\varphi'}{\delta}\right)\gamma - \left(g' - \frac{\gamma'}{\delta}\right)\varphi = 0,$$

donnent en éliminant le rapport $\frac{\gamma}{\varphi}$

$$f\left(g' - \frac{\gamma'}{\delta}\right) - g\left(f' - \frac{\varphi'}{\delta}\right) = 0, \qquad \text{soit} \qquad F'_u = \delta\left(fg' - gf'\right).$$

On peut donc, au lieu de $F = 0$, poser les deux conditions équivalentes

$$F'_t = \frac{\varphi'\gamma - \gamma'\varphi}{\delta}, \qquad F'_u = \delta\left(fg' - gf'\right), \tag{16}$$

qui montrent que t est linéaire en u, et u en t.

Soit donc

$$t = \frac{\alpha u + \beta}{\alpha' u + \beta'} \tag{17}$$

la solution des équations ci-dessus (16), admettons que le facteur indéterminé qui figure dans les coefficients $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ a été choisi de manière que $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ soit égal à δ. Je dis que cette transformation change f en φ, et g en γ.

Soient en effet $\Phi(u)$, $\Gamma(u)$ les transformées de $f(t)$, $g(t)$ par cette transformation, ou

$$(\alpha' u + \beta')^2 f(t) = \Phi(u), \qquad (\alpha' u + \beta')^2 g(t) = \Gamma(u),$$

d'où $\frac{f}{g} = \frac{\Phi}{\Gamma}$: à cause de $F(t, u) = 0$ on a aussi $\frac{f}{g} = \frac{\varphi}{\gamma}$. Donc, avec un facteur constant de proportionnalité, on a

$$\Phi(u) = K\varphi(u), \qquad \Gamma(u) = K\gamma(u).$$

Je dis que ce facteur K est égal à l'unité.

En effet, récrivons les formules précédentes sous la forme

$$(\alpha' u + \beta')^2 f(t) = K\varphi(u), \qquad (\alpha' u + \beta')^2 g(t) = K\gamma(u),$$

et dérivons-les en tenant compte de $dt = \frac{\delta du}{(\alpha' u + \beta')^2}$; il vient

$$\delta f'(t) + 2\alpha'(\alpha' u + \beta') f(t) = K\varphi'(u),$$
$$\delta g'(t) + 2\alpha'(\alpha' u + \beta') g(t) = K\gamma'(u).$$

Eliminons entre celles-ci le terme en $\alpha' u + \beta'$, on a

$$\delta(fg' - f'g) = \mathrm{K}(f\gamma' - g\varphi) = \mathrm{KF}'_u(t, u);$$

il suffit de comparer ce résultat à la seconde formule (16), pour voir que $\mathrm{K} = 1$.

Le théorème est ainsi démontré ; ayant donc choisi à volonté le signe de δ dans la formule (16), il y a deux transformations au déterminant δ, déterminées par cette formule même, qui changent f en φ et g en γ. En changeant δ en $-\delta$, on aura de la même manière deux nouvelles transformations, soit quatre en tout, pour effectuer le passage du système (f, g) au système (φ, γ).

Il est à peine besoin de faire remarquer que si de l'équation $\mathrm{F}'_t = \dfrac{\varphi'\gamma - \varphi\gamma'}{\delta}$, on tirait une transformation de t en u au déterminant $-\delta$, cette transformation changerait f en $-\varphi$, et g en $-\gamma$.

Terminons par une observation importante.

Nous avons jusqu'à présent pris les polynômes f et g comme point de départ ; c'est d'eux qu'ont été tirés les invariants $a = ff'$, $b = \ldots$, ainsi que le polynôme conjugué h, pour former les éléments qui figurent dans l'identité fondamentale (4). Si, à l'inverse, les données sont a, b, c, on vient de voir que les polynômes f et g ne sont plus déterminés qu'aux transformations linéaires près. On pourrait, par exemple, prendre pour f et g les polynômes purement quadratiques

$$f = \mathrm{A}t^2 + \mathrm{B}, \qquad g = \mathrm{A}'t^2 + \mathrm{B}',$$

les conditions seraient alors

$$a = -4\mathrm{AB}, \qquad c = -4\mathrm{A}'\mathrm{B}', \qquad b = \mathrm{A}'\mathrm{B} - \mathrm{BA}',$$

elles pourraient être encore réalisées d'une infinité de manières.

Relativement à la conique fondamentale il y aurait, pour être complet, à rechercher encore la signification géometrique du paramètre t; je me dispenserai de mentionner ici cette interprétation très connue et le théorème classique qui s'y rattache sur le rapport anharmonique de quatre points sur une conique.

6. — *Système de trois polynômes conjugués.* — En résumé, soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées homogènes d'un point dans un plan, et l_1, l_2, l_3 trois polynômes du second degré, les relations

$$x_1 = l_1, \qquad x_2 = l_2, \qquad x_3 = l_3,$$

caractérisent une conique. Si on veut que l'axe $x_1 = 0$ devienne.

relativement à la conique, la polaire du côté opposé, on doit prendre sauf un facteur constant, $l_1 = l_2 l'_3 - l_3 l'_2$.

Supposons la conique rapportée à un triangle autopolaire, son equation ne contiendra plus que des termes carrés; elle est du type

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = 0 ,$$

dans ce cas, chacun des polynômes l est le conjugué des deux autres. Ainsi ces polynômes seront premiers deux à deux et linéairement indépendants; aucun n'est carré parfait, en outre ils donnent lieu à une identité telle que

$$\alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 l_2^2 + \alpha_3 l_3^2 = 0 ; \tag{17'}$$

Réciproquement toutes les fois que trois polynômes, premiers entre eux, sont liés par une semblable relation, celle-ci est unique de son espèce, et ces polynômes sont conjugués deux à deux.

En effet, en différentiant la relation précédente, on a

$$\alpha_1 l_1 l'_1 + \alpha_2 l_2 l'_2 + \alpha_3 l_3 l'_3 = 0 ;$$

par suite

$$\frac{\alpha_1 l_1}{l_2 l'_3 - l_3 l'_2} = \frac{\alpha_2 l_2}{l_3 l'_1 - l_1 l'_3} = \frac{\alpha_3 l_3}{l_1 l'_2 - l_2 l'_1} = \rho , \tag{17''}$$

relations où le facteur de proportionnalité ρ est nécessairement constant. La proposition est établie.

Il est clair qu'un système de polynômes conjugués le reste par transformation linéaire: si donc on avait pris l'équation de la conique sous sa forme la plus réduite soit $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, on aurait eu

$$l_1 = t^2 - 1 , \quad l_2 = 2t , \quad l_3 = i(t^2 + 1) , \quad \text{d'où} \quad l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 0 . \tag{18}$$

C'est le système conjugué *réduit à sa forme normale;* pour cette forme les trois invariants simultanés sont zéro, et les trois discriminants sont égaux à l'unité. On peut, à partir de la forme normale, reproduire le cas général d'un système conjugué, en transformant les polynômes ci-dessus à l'aide d'une transformation linéaire quelconque, après les avoir affectés de coefficients constants arbitraires.

Reprenons ce cas général, et désignons par la notation $(l_2 l'_3)$ le déterminant $l_2 l'_3 - l_3 l'_2$, et ainsi des autres. On a donc

$$\alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 l_2^2 + \alpha_3 l_3^2 = 0 , \tag{19}$$

et

$$\left.\begin{array}{lll} \alpha_1 l_1 = \rho(l_2 l_3') , & \alpha_2 l_2 = \rho(l_3 l_1') , & \alpha_3 l_3 = \rho(l_1 l_2') \\ \alpha_1 l_1' = \rho(l_2 l_3'') , & \alpha_2 l_2' = \rho(l_3 l_1'') , & \alpha_3 l_3' = \rho(l_1 l_2'') \\ \alpha_1 l_1'' = \rho(l_2' l_3'') , & \alpha_2 l_2'' = \rho(l_3' l_1'') , & \alpha_3 l_3'' = \rho(l_1' l_2'') . \end{array}\right\} \quad (20)$$

Dans ce tableau les deux dernières lignes proviennent par dérivation de la première, celle-ci n'étant que la reproduction de la formule (17″) ci-dessus.

Composons avec (20) les quantités

$$\alpha_i(2l_i l_i'' - l_i'^2) = \alpha_i(l_i l_i'' - l_i' l_i' + l_i'' l_i) . \qquad (i = 1, 2, 3)$$

nous trouvons de suite

$$\alpha_i(2l_i l_i'' - l_i'^2) = \rho\left[l_i(l_j' l_k'') + l_i'(l_j'' l_k) + l_i''(l_j l_k')\right] = \rho(l_1 l_2' l_3'')$$ [1]

De là la conséquence suivante : *le polynôme l_i a pour discriminant la quantité*

$$-\frac{\rho}{4\alpha_i}(l_1 l_2' l_3'') . \qquad (21)$$

Empruntons encore au tableau (20) les combinaisons suivantes ; elles sont constantes comme il ressort de la valeur des seconds membres

$$\alpha_1 l_1'^2 + \alpha_2 l_2'^2 + \alpha_3 l_3'^2 = -\rho(l_1 l_2' l_3'') . \qquad (22)$$

$$\alpha_1 l_1 l_1'' + \alpha_2 l_2 l_2'' + \alpha_3 l_3 l_3'' = \rho(l_1 l_2' l_3'') . \qquad (23)$$

III. — Théorie du polynôme du quatrième degré.

7. — Avec trois polynômes conjugués l_1^2, l_2^2, l_3^2, tels que ceux qu'on a défini au § précédent, composons une forme du 4^me degré, telle que

$$l = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 . \qquad (24)$$

L'identité (17′) qui règne entre les l_i, permet, pour une même forme l, de choisir les coefficients c_i d'une infinité de manières. On pourrait par exemple faire $c_i = 0$, en chassant complètement de

[1] On désigne ici, et plus loin, par i, j, k les indices 1, 2, 3 permutés circulairement d'une manière quelconque ; $(l_1 l_2' l_3'')$ représente le déterminant fonctionnel des trois polynômes l_i.

la représentation (24) un des polynômes l_i^2 choisi à volonté ; en réalité, malgré la présence de trois coefficients, la formule (24) ne renferme qu'une double infinité de formes l.

Il importe de remarquer que les seuls carrés contenus dans le faisceau (24) sont précisément l_1^2, l_2^2, l_3^2. En effet, prenons un tel carré qui ne soit égal ni à l_1^2, ni à l_2^2 ; son expression serait donc

$$L^2 = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 , \qquad \text{avec} \qquad c_1 c_2 \neq 0 .$$

Pour chacune des racines de $L = 0$, nous aurions

$$c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 = 0 , \qquad \text{et} \qquad c_1 l_1 l_1' + c_2 l_2 l_2' = 0 .$$

On tire de là $(l_1 l_2') = 0$, ou $l_3 = 0$, condition satisfaite en même temps que $L = 0$; le dit carré L^2 est donc forcément l_3^2, sauf un facteur constant. La proposition est prouvée.

Remarquons maintenant que, les coefficients constants étant exceptés, le système l_1, l_2, l_3 renferme trois paramètres ; la formule (24), nous l'avons dit, en contient deux autres. Ainsi la définition de la forme l possède précisément autant de paramètres que le polynôme le plus général de son degré ; on doit donc prévoir que *tout polynôme du 4me degré peut revêtir la forme* (24).

Pour justifier cette présomption, désignons par a_0 le premier coefficient d'une biquadratique X, par γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 ses racines supposées distinctes ; employons les notations (xi) et (ij) pour représenter les différences $x - \gamma_i$ et $\gamma_i - \gamma_j$, et posons

$$\left.\begin{aligned} l_2 + l_3 &= a_0 (12)(x4)(x3) , & l_2 - l_3 &= a_0 (43)(x1)(x2) , \\ l_3 + l_1 &= a_0 (14)(x3)(x2) , & l_3 - l_1 &= a_0 (32)(x1)(x4) , \\ l_1 + l_2 &= a_0 (13)(x2)(x4) , & l_1 - l_2 &= a_0 (24)(x1)(x3) . \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Le calcul direct montre immédiatement que ces six relations sont compatibles ; d'ailleurs les trois polynômes $l_1\, l_2\, l_3$ sont premiers entre eux deux à deux puisque tout facteur commun à l_2 et l_3, par exemple, divisant $l_2 + l_3$ et $l_2 - l_3$, ne peut exister que si les racines γ_i ne sont pas toutes distinctes, cas exclu.

Je dis que ces polynômes l sont conjugués ; en effet, en égalant les trois valeurs de

$$X = a_0 (x1)(x2)(x3)(x4) = \frac{l_2^2 - l_3^2}{a_0 (12)(43)} = \frac{l_3^2 - l_1^2}{a_0 (14)(32)} = \frac{l_1^2 - l_2^2}{a_0 (13)(24)} , \qquad (26)$$

nous obtenons une seule identité entre les carrés l_1^2, l_2^2, l_3^2. En faisant

$$\alpha_1 = a_0 (12)(43) , \qquad \alpha_2 = a_0 (14)(32) , \qquad \alpha_3 = a_0 (13)(24) ,$$

quantités qui vérifient l'équation

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 ,$$

la dite identité s'écrit

$$\alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 l_2^2 + \alpha_3 l_3^2 = 0 . \qquad (27)$$

Les l_i sont donc conjugués ; il importe de remarquer qu'ils ne sont pas ordinairement réduits à la forme normale et que, à moins que le contraire ne soit expressément indiqué, nous en déterminerons toujours les coefficients constants conformément au tableau (25) ci-dessus.

Pour exprimer X en fonction de l_1^2, l_2^2, l_3^2, il est préférable d'employer, au lieu des formes dissymétriques (26), la forme symétrique

$$3\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 X = \alpha_1(\alpha_3 - \alpha_2) l_1^2 + \alpha_2(\alpha_1 - \alpha_3) l_2^2 + \alpha_3(\alpha_2 - \alpha_1) l_3^2 \qquad (28)$$

que l'on en déduit immédiatement.

On vient donc de démontrer que, *étant donné un polynôme du 4me degré X, il existe toujours trois polynômes orthogonaux l_i^2 tels que X soit un polynôme de leur faisceau.*

Une telle représentation est unique, car si on avait, par exemple, de deux manières différentes

$$X = l_1^2 - l_2^2 , \qquad \text{et} \qquad X = m_1^2 - m_2^2 .$$

on aurait aussi, en changeant éventuellement le signe de m_2,

$$l_1 + l_2 = a(m_1 + m_2) , \qquad l_1 - l_2 = \frac{1}{a}(m_1 - m_2) ;$$

et alors le conjugué $l_3 = (l_1 l'_2)$ des polynômes l_1, l_2 serait, à un facteur constant près, égal à celui $m_3 = (m_1 m'_2)$ des polynômes m_1, m_2. On démontrerait de même les égalités $l_1 = m_1$ et $l_2 = m_2$ qui ont lieu, bien entendu, seulement sous réserve des coefficients constants.

C'est donc d'une manière parfaitement déterminée que les polynômes l_i^2 correspondent à X ; en outre, sous l'angle de la définition (24), X peut être considéré comme un individu extrait d'un faisceau de formes biquadratiques qui possèdent en commun les mêmes polynômes conjugués l_i^2, et se trouve étroitement uni avec ces derniers.

Nous avons trouvé plus haut les l_i, correspondant à X, et construit le faisceau en partant de l'élément X décomposé en ses facteurs ; c'est un problème fondamental que d'opérer la même construction à l'aide des seuls coefficients de X. Il suffit pour le résoudre de déterminer, en fonction de X, une seconde forme appartenant au même faisceau.

Pour y parvenir, reprenons les définitions (25) des l_i, et écrivons pour eux les relations (20) du § précédent. Un calcul rapide donne

$$\rho = 1 \ , \qquad \text{et} \qquad (l_1 l_2' l_3'') = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ ,$$

on a donc

$$\alpha_i l_i = (l_j l_k') \ , \qquad \alpha_i l_i' = (l_j l_k'') \ , \qquad \alpha_i l_i'' = (l_j' l_k'') \ , \tag{29}$$

et, pour le discriminant de l_i, la valeur

$$-\frac{\alpha_j \cdot \alpha_k}{4} \ . \tag{30}$$

Soit maintenant une forme quelconque

$$l = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 \ , \tag{30'}$$

du faisceau en question ; il s'agit de calculer la valeur des deux combinaisons suivantes

$$c_1 l_1'^2 + c_2 l_2'^2 + c_3 l_3'^2 \ , \qquad \text{et} \qquad c_1 l_1 l_1'' + c_2 l_2 l_2'' + c_3 l_3 l_3'' \ ,$$

qu'on a trouvées au § 6 pour le cas $c_i = \alpha_i$.

Pour les déterminer dans le cas général, tirons de (30') les égalités

$$\left.\begin{aligned} l = \sum c_i l_i^2 \ , \qquad \frac{l'}{2} = \sum c_i l_i l_i' \ , \qquad \frac{l_i''}{2} = \sum c_i l_i'^2 + \sum c_i l_i l_i'' \ , \\ \frac{l'''}{2} = 3 \sum c_i l_i' l_i'' \ . \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Intégrons la dernière, et comparons le résultat avec l'avant-dernière formule ; nous avons

$$\left.\begin{aligned} \frac{l''}{6} &= \sum c_i l_i l_i'' + c \ , \\ \frac{l''}{3} &= \sum c_i l_i'^2 \quad - c \ . \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Pour déterminer la constante c d'intégration, éliminons l'', et remplaçons les discriminants $\frac{1}{4}(l_i'^2 - 2 l_i l_i'')$ par leurs valeurs (30), il vient

$$3c = \sum c_i(l_i'^2 - 2l_i l_i'') = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \sum \frac{c_i}{\alpha_i}$$

ou

$$c = -\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{3}\sum \frac{c_i}{\alpha_i} . \qquad (33)$$

Appliquons ce résultat général au cas particulier $l = X$, qui donne, d'après (28), $c_i = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha_j} - \frac{1}{\alpha_k}\right)$; dans ce cas on a $c = 0$, et les formules (31) et (32) deviennent

$$\frac{X''}{3} = \sum c_i l_i'^2 , \qquad \frac{X'}{2} = \sum c_i l_i l_i' , \qquad X = \sum c_i l_i^2 .$$

On tire de là

$$\frac{XX''}{3} - \frac{X'^2}{4} = \sum c_i l_i^2 \sum c_i l_i'^2 - \left(\sum c_i l_i l_i'\right)^2 = \sum c_j c_k (l_j l_k')^2 . \qquad (34)$$

Enfin cette dernière relation s'écrit encore, à cause des formules (29)

$$\frac{XX''}{3} - \frac{X'^2}{4} = \sum c_j c_k \alpha_i^2 l_i^2 .$$

Voici donc formé un nouveau polynôme $H = \frac{4XX'' - 3X'^2}{48}$, appartenant au même faisceau que X; c'est lui qu'on nomme le *Hessien* de X, et dont la valeur en fonction des coefficients de

$$X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 ,$$

est

$$H = (a_0 a_2 - a_1^2)x^4 + 2(a_0 a_3 - a_1 a_2)x^3$$
$$+ (a_0 a_4 + 2a_1 a_3 - 3a_2^2)x^2 + 2(a_1 a_4 - a_2 a_3)x + a_2 a_4 - a_3^2 . \qquad (35)$$

La relation (34) nous en donne l'expression en l_i^2; quelques réductions faciles, où intervient la condition $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, amènent le Hessien à la forme

$$12H = -l_1^2 - l_2^2 - l_3^2 . \qquad (36)$$

§ 8. — *Propriétés d'invariance.* Nous savons que le faisceau l_i^2 contient les deux formes X et H; ces polynômes étant certainement indépendants, au moins quand les racines de X sont distinctes, on peut les adopter comme base du faisceau, à la place des l_i^2. Nous avons donc trois équations telles que

$$H + e_i X = b_i l_i^2 . \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (37)$$

Pour déterminer ces constantes b_i et e_i, faisons d'abord x égal à la racine γ_i de X ; alors $X = 0$, $H = \frac{4XX'' - 3X'^2}{48} = -\frac{X'^2}{16}$; $l_i = \frac{X'}{2}$; on a donc, dans (37), $b_i = -\frac{1}{4}$.

Ajoutons maintenant les mêmes équations, multipliées soit par 1, soit par α_i, soit encore par $\alpha_i(\alpha_j - \alpha_k)$; il vient, à cause de $\Sigma\alpha_i = 0$, des équations (28) et (36) pour X et H, et de l'identité (27),

$$\sum e_i = 0 , \qquad \sum e_i \alpha_i = 0 , \qquad \sum e_i \alpha_i(\alpha_j - \alpha_k) = \frac{3}{4} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 .$$

On tire immédiatement de là

$$e_i = -\frac{1}{12}(\alpha_j - \alpha_k) .$$

Avant de récapituler les divers résultats qui précèdent, il est opportun de changer les notations en éliminant partout les quantités α_i pour mettre à leur place les trois *invariants irrationnels* e_i du polynôme X. Voici la correspondance entre ces quantités

$$\left.\begin{aligned}
e_1 &= \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{12} = \frac{a_0}{12}[(13)(24) - (14)(32)] , \\
e_2 &= \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{12} = \frac{a_0}{12}[(12)(43) - (13)(24)] , \\
e_3 &= \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{12} = \frac{a_0}{12}[(14)(32) - (12)(43)] ,
\end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

ou bien

$$\alpha_1 = 4(e_2 - e_3) , \qquad \alpha_2 = 4(e_3 - e_1) , \qquad \alpha_3 = 4(e_1 - e_2) . \qquad (39)$$

Les invariants irrationnels e_i, dont la somme est nulle, vérifient une équation cubique telle que

$$4s^3 - g_2 s - g_3 = 0 , \qquad (40)$$

avec les conditions

$$-\frac{1}{4} g_2 = e_2 e_3 + e_3 e_1 + e_1 e_2 , \qquad \frac{1}{4} g_3 = e_1 e_2 e_3 .$$

Ces dernières quantités, évidemment symétriques par rapport aux racines du polynôme X, sont exprimables rationnellement par les coefficients de X : voici la valeur de ces invariants rationnels

$$\left.\begin{aligned} g_2 &= a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 , \\ g_3 &= a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

Rappelons d'ailleurs que la combinaison

$$g_2^3 - 27 g_3^2 = 16(e_2 - e_3)^2 (e_3 - e_1)^2 (e_1 - e_2)^2 = \Delta \qquad (42)$$

joue le rôle du *discriminant* de X.

La théorie générale conduit donc au résumé suivant où se trouvent récapitulées les propriétés les plus essentielles du polynôme du 4ᵐᵉ degré.

a) Désignons toujours par l_i les polynômes conjugués, tels qu'ils sont définis au tableau (25) ; l_i a pour discriminant

$$\frac{-\alpha_j \alpha_k}{4}, \qquad \text{ou} \qquad 4(e_i - e_j)(e_i - e_k). \qquad (30'')$$

Alors, si H représente le Hessien de X, les trois combinaisons suivantes sont des carrés, à savoir

$$H + e_i X = -\frac{1}{4} l_i^2 ; \qquad (37')$$

ce sont les seuls carrés contenus dans le faisceau $H + eX$.

b) Mettons au lieu de $4(e_2 - e_3)(e_3 - e_1)(e_1 - e_2) = \sqrt{\Delta}$, quantité parfaitement déterminée, on a le tableau

$$(e_2 - e_3) l_1^2 + (e_3 - e_1) l_2^2 + (e_1 - e_2) l_3^2 = 0 , \qquad (27')$$

$$\left.\begin{array}{ll} X\sqrt{\Delta} = e_1(e_2 - e_3) l_1^2 + e_2(e_3 - e_1) l_2^2 + e_3(e_1 - e_2) l_3^2 , & (28') \\ X''\sqrt{\Delta} = 3[e_1(e_2 - e_3) l_1'^2 + e_2(e_3 - e_1) l_2'^2 + e_3(e_1 - e_2) l_3'^2] . & (32') \\ H = \dfrac{4XX'' - 3X'^2}{48} = -\dfrac{1}{12}(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) , & (36') \\ T = \dfrac{1}{2}(HX' - XH') = \dfrac{1}{4} l_1 l_2 l_3 , & (43) \end{array}\right\} (A)$$

$$T^2 = -4(H + e_1 X)(H + e_2 X)(H + e_3 X) = -4H^3 + g_2 H X^2 + g_3 X^3 . \qquad (44)$$

Dans le tableau ci-dessus, les diverses formules sont affectées du même numéro, avec un accent, que celles dont elles ne sont qu'une simple répétition ; seules (43) et (44) sont nouvelles et ont besoin de démonstration.

Il s'y introduit un covariant T, du sixième degré, dont l'annulation caractérise les extremas du quotient $\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{X}}$. Or ces extremas, à cause de

$$\frac{\mathrm{H}+e_2\mathrm{X}}{\mathrm{H}+e_1\mathrm{X}}=\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2.$$

sont les mêmes que ceux du quotient $\left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2$, à savoir les racines de l_1, les racines de l_2, celles enfin du polynôme $l_1 l_2' - l_2 l_1'$ ou l_3. La partie littérale de la formule (43) $\mathrm{T}=\frac{1}{4}l_1 l_2 l_3$ est ainsi évidente. Quant au coefficient numérique $\frac{1}{4}$, on le trouve en comparant la valeur des deux membres pour une valeur particulière de x, $x=\gamma_1$ par exemple.

On sait par l'Algèbre élémentaire que les divers éléments du tableau (A) sont des invariants, lesquels, sauf introduction de certaines puissances de δ, se reproduisent par les transformations linéaires de déterminant δ. Mais cette propriété résulte à son tour, et immédiatement, du tableau lui-même, ainsi que d'une remarque au sujet du Hessien.

En intégrant l'équation différentielle $4\mathrm{XX}''-3\mathrm{X}'^2=0$, on reconnaît que le Hessien de X est identiquement nul dans le seul cas où X est une quatrième puissance exacte. Or si on opère la transformation linéaire $\left(x,\ \frac{ay+b}{a'y+b'}\right)$, le transformé $\mathrm{Y}=(a'y+b')^4\mathrm{X}$ est une puissance quatrième en même temps que X lui-même. Le Hessien H_y de Y, s'annulant avec celui H_x de X, est divisible par ce dernier, et l'on a

$$\mathrm{H}_y=\delta^2(a'y+b')^4\,\mathrm{H}_x\ ;$$

la partie littérale de la formule est évidente, la présence du facteur δ^2, carré du déterminant de la transformation, se démontre immédiatement, par exemple par le calcul direct.

Revenons alors au tableau (A), et effectuons la transformation dont il s'agit. On voit, d'après la propriété du Hessien, que e_i acquiert le facteur δ^2, puis l_i, T, g_2, g_3 respectivement les facteurs δ, δ^3, δ^4, δ^6.

Les conditions d'invariance relatives à g_2 et g_3, qui sont nécessaires pour l'équivalence, sont aussi suffisantes. Autrement dit, *si deux formes* X et Y *ont le même invariant absolu* $\frac{g_2^3}{g_3^2}$, ou bien encore, *si deux formes ont des invariants irrationnels* e_i *propor-*

tionnels entre eux, il existe une transformation linéaire changeant X *en* Y.

En effet, dans ce cas, le système l_i d'un des polynômes est transformable dans le système l_i relatif au second ; la chose est évidente puisque le déterminant de l_i étant $4(e_i - e_j)(e_i - e_k)$, la proportionnalité des e_i implique celle des invariants fondamentaux des deux systèmes l_i. Soit δ le déterminant de la transformation T opérant le passage de l'un à l'autre ; reprenons, pour les deux polynômes les identités (31), on en conclut de suite

$$Y = (a'y + b')^4 X, \qquad H_y = \delta^2 (a'y + b')^4 H_x.$$

Ou bien, *la même transformation* T *qui transforme le premier système* l_i *dans le second, transforme aussi* X *en* Y.

Il est clair que ces questions d'équivalence se réduisent en réalité au cas $\delta = 1$ d'une transformation unimodulaire. Pour qu'une telle transformation de X en Y soit possible, il faut naturellement que les invariants rationnels g_2, g_3, ou irrationnels e_i, soient les mêmes pour X et pour Y. Supposons cette condition remplie, il est facile de trouver toutes les substitutions opérant le passage d'une forme à l'autre.

En effet, soient $l_i(x)$ les polynômes conjugués relatifs à X, $m_i(y)$ ceux relatifs à Y. Nous avons

$$H_x + e_i X = -\frac{1}{4} l_i^2, \qquad H_y + e_i Y = -\frac{1}{4} m_i^2,$$

et comme l_i^2 doit se transformer en m_i^2 en même temps que X en Y, il faut que

$$\frac{l_1^2}{m_1^2} = \frac{l_2^2}{m_2^2}, \qquad \text{ou bien} \qquad YH_x - XH_y = 0,$$

cette dernière est une conséquence de l'équation $x = \dfrac{ay + b}{a'y + b'}$ qu'on cherche pour passer de X à Y.

Si réciproquement nous avons $YH_x - XH_y = 0$, nous aurons aussi $\dfrac{l_1}{m_1} = \pm \dfrac{l_2}{m_2}$. Suivant la théorie développée au § 5, il résulte de cette équation et du fait de la concordance des deux discriminants pour l_i et m_i, que l'équation

$$F(x, y) = l_1 m_2 \pm l_2 m_1 = 0$$

se partage en deux équations linéaires. Voici donc le résultat.

Si deux polynômes biquadratiques X, Y *ont les mêmes invariants* e_i, *l'équation*

$$YH_x - XH_y = 0 \ .$$

se décompose en quatre équations linéaires en x *et en* y. *A chacun des quatre facteurs correspond une transformation unimodulaire de* X *en* Y ; *il n'en existe pas d'autres.*

Remarquons enfin que, dans tout ce qui précède, le degré effectif de X peut fort bien s'abaisser au troisième par le transport à l'infini d'une des racines γ_i. Ainsi parmi les diverses formes équivalentes à X figure le polynôme $4x^3 - g_2x - g_3$ dont les racines sont, comme nous savons, e_1, e_2, e_3. Il est intéressant de se procurer les polynômes conjugués n_i de cette forme réduite : ce sont d'après les définitions (25)

$$\left.\begin{aligned} n_1 &= 2(x^2 - 2e_1x - e_1^2 - e_2e_3) = 2\left[(x - e_1)^2 - (e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\right] \ , \\ n_2 &= 2(x^2 - 2e_2x - e_2^2 - e_3e_1) = 2\left[(x - e_2)^2 - (e_2 - e_3)(e_2 - e_1)\right] \ , \\ n_3 &= 2(x^2 - 2e_3x - e_3^2 - e_1e_2) = 2\left[(x - e_3)^2 - (e_3 - e_1)(e_3 - e_2)\right] \ . \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Ces polynômes n_i ne dépendent ainsi que des e_i, propriété qui n'appartient pas aux conjugués l_i d'une forme X quelconque ayant les e_i pour invariants ; on trouvera d'ailleurs les l_i en opérant sur les n_i une transformation unimodulaire quelconque.

9. — *Théorème de Cayley.* — On sait que toute forme du faisceau X, H, par exemple $aH + bX$ possède les mêmes polynômes conjugués l_i^2 que X lui-même ; il serait intéressant de se procurer, pour une telle forme, le système des invariants et covariants fondamentaux qui figurent dans le tableau (A). Nous nous bornerons à esquisser rapidement cette question en cherchant d'abord le Hessien de la forme précédente, lequel faisant partie du faisceau l_i^2, est lui aussi du type $AH + BX$.

Or le Hessien contient les coefficients de la forme au second degré, on a donc

$$A = \alpha_0 b^2 + 2\beta_0 ab + \gamma_0 a^2 \ , \qquad B = \alpha_1 b^2 + 2\beta_1 ab + \gamma_1 a^2 \ .$$

Pour déterminer ces polynômes, partons de la remarque que voici. Si X est un carré, ou $X = f^2$, son Hessien $H = \frac{4XX'' - 3X'^2}{48} = -\frac{(f'^2 - 2ff'')}{12} f^2$. Ce Hessien vaut donc $-\frac{\Delta}{3} f^2$, si Δ représente le discriminant de f.

Appliquons cette remarque à l'expression

$$\mathrm{H} + e_i \mathrm{X} = -\frac{1}{4} \mathrm{C}_i ,$$

dont le Hessien doit être $\dfrac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{3} (\mathrm{H} + e_i \mathrm{X})$. Comparons ce résultat à la règle générale énoncée ci-dessus : nous avons les conditions d'identification

$$\alpha_0 e_i^2 + 2\beta_0 e_i + \gamma_0 = \frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{3} ,$$

$$\alpha_1 e_i^2 + 2\beta_1 e_i + \gamma_1 = \frac{e_i (e_i - e_j)(e_i - e_k)}{3} .$$

Remplaçons aux seconds membres

$$\frac{(e_i - e_j)(e_i - e_k)}{3} \quad \text{et} \quad \frac{e_i (e_i - e_j)(e_i - e_k)}{3}$$

par les valeurs égales

$$e_i^2 - \frac{1}{12} g_2 , \quad \text{et} \quad e_i^3 - \frac{1}{12} g_2 e_i = \frac{g_2 e_i}{6} + \frac{g_3}{4} ,$$

on obtient à l'instant

$$\alpha_0 = 1 , \quad \beta_0 = 0 , \quad \gamma_0 = -\frac{1}{12} g_2 ,$$

$$\alpha_1 = 0 , \quad \beta_1 = \frac{g_2}{12} , \quad \gamma_1 = \frac{g_3}{4} .$$

Voici donc le résultat

Le Hessien de la combinaison $a\mathrm{H} + b\mathrm{X}$ *est un polynome du même faisceau, égal à*

$$h = \left(b^2 - \frac{g_2 a^2}{12}\right) \mathrm{H} + \left(\frac{g_2}{6} ab + \frac{g_3}{4} a^2\right) \mathrm{X} . \tag{46}$$

Si on appelle E_i les invariants irrationnels de cette forme $a\mathrm{H} + b\mathrm{X}$, on trouvera E_i en exprimant que

$$h + \mathrm{E}_i (a\mathrm{H} + b\mathrm{X})$$

ou bien,

$$\left(b^2 - \frac{g_2}{12} a^2 + \mathrm{E}_i a\right) \mathrm{H} + \left(\frac{g_2}{6} ab + \frac{g_3}{4} a^2 + \mathrm{E}_i b\right) \mathrm{X}$$

se réduit à un carré. On a donc, pour déterminer E_i, la condition

$$e_i \left(\mathrm{E}_i a + b^2 - \frac{g_2 a^2}{12}\right) = \mathrm{E}_i b + \frac{g_2}{6} ab + \frac{g_3}{4} a^2 .$$

soit, après quelques réductions

$$E_i = ae_i^2 + be_i - \frac{g_3}{6}a \ . \tag{47}$$

Quant au covariant $T = \frac{1}{2}(HX' - XH')$, c'est évidemment un *combinant* du faisceau (X, H); si on substitue $aH + bX$ à X, il se reproduit multiplié par le facteur

$$-\frac{1}{4}(4b^3 - g_2ba^2 - g_3a^3) \ .$$

IV. — Formes doublement quadratiques.

10. — On nomme *forme doublement quadratique* un polynôme tel que

$$F = \sum a_{mn}x^my^n \ ; \qquad (m, n = 0, 1, 2) \tag{48}$$

soit, en le développant suivant les puissances de l'une ou de l'autre des variables,

$$F = X_2y^2 + 2X_1y + X_0 = Y_2x^2 + 2Y_1x + Y_0 \ . \tag{49}$$

Les coefficients X_i et Y_i, dans ces représentations, valent

$$X_i = a_{2i}x^2 + 2a_{1i}x + a_{0i} \ , \qquad Y_i = a_{i2}y^2 + 2a_{i1}y + a_{i0} \ . \tag{50}$$

Relativement à ces formes F doublement quadratiques, nous avons à résoudre plusieurs questions importantes qui se rattachent toutes, plus ou moins directement, au problème de l'équivalence de deux pareilles formes par transformation linéaire unimodulaire. Un rôle fondamental, dans toute la théorie, est dévolu aux discriminants de F relatifs à chaque variable; ce sont les fonctions

$$D_y(x) = X_1^2 - X_0X_2 \ , \qquad \text{et} \qquad D_x(y) = Y_1^2 - Y_0Y_2 \ , \tag{51}$$

que nous représentons le plus souvent par les lettres X et Y.

Commençons par exclure le cas où X et Y possèdent des racines multiples; à ce sujet on doit remarquer que les racines multiples apparaissent ensemble dans les deux polynômes, ou que si X possède une racine multiple, Y en possède une autre.

En effet, il est évident que X et Y sont des covariants de la forme. Si on opère dans F une transformation portant sur les deux variables et telle que

$$x = \frac{ax' + b}{a'x' + b'} \ , \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\alpha y' + \beta}{\alpha' y' + \beta'} \ , \tag{52}$$

le nouveau polynôme F′ obtenu après avoir chassé les diviseurs est encore doublement quadratique en x' et y' ; sauf des facteurs constants, ses deux discriminants sont les transformés

$$X' = (a'x' + b')^4 X(x), \qquad Y' = (\alpha' y' + \beta')^4 Y(y),$$

de X et Y par (52).

Au moyen d'une transformation semblable amenons une racine de l'équation $X = 0$ à l'origine $x = 0$. En vertu de la condition $F = 0$, à cette racine $x = 0$, simple ou multiple, correspond une racine y de F, celle-là est une racine double. Amenons de nouveau y à l'origine des y par une transformation linéaire. Supposons maintenant que la première racine $x = 0$ soit multiple pour l'équation $X = 0$; on trouve immédiatement pour satisfaire ces diverses conditions les deux hypothèses que voici. Ou bien, on a $a_{00} = a_{01} = a_{10} = 0$, ou bien $a_{00} = a_{01} = a_{02} = 0$. Si c'est le premier système qui est vérifié, $y = 0$ est une racine double de $Y = 0$, si c'est le second $Y_0 = 0$, $Y = Y_1^2$ est un carré parfait ; ce deuxième cas n'existe par conséquent que si l'équation $F = 0$ est décomposable en deux équations linéaires en y.

De toute manière il est établi que X ne peut admettre de racines multiples sans que Y en admette de son côté. Il importe de fixer par une interprétation géométrique la signification du résultat précédent.

La courbe $F = 0$ est une biquadratique C_4 rencontrée en deux points seulement par les parallèles aux axes coordonnés. Elle possède donc deux points doubles à l'infini, un sur chaque axe ; elle est ainsi de 2me classe et de genre 1. Ce sera même, parmi les courbes du 4me degré, la plus générale possédant deux points doubles si, par une perspective, on a pris soin de les transporter tous deux à l'infini.

Il est aisé de voir que la condition pour que C_4 possède un troisième point double est précisément que X admette une racine double. On aperçoit immédiatement ainsi, à cause de la symétrie des axes, l'équivalence de la dite condition pour X et Y ; c'est donc simultanément que X et Y ont des racines multiples, et dans ce cas, le genre de C_4 s'abaisse de 1 à 0.

Si, dans $F = 0$, le coefficient a_{22} est nul, la courbe n'est plus que du troisième degré. Cette cubique C_3 contient les points situés à l'infini sur les deux axes, et ce sont des points ordinaires ; la courbe, d'un genre égal à l'unité, ne deviendra unicursale que si X, et par suite Y, admet une racine double.

Laissons désormais de côté les cas de dégénérescence, nos discriminants X et Y n'auront aucun facteur multiple, et leur degré ne peut s'abaisser au-dessous du troisième.

11. — *Forme normale. Equivalence des deux discriminants.* — Désignons par l_1, l_2, l_3 les polynômes conjugués relatifs à X, par m_1, m_2, m_3 ceux relatifs à Y. Nous savons que les l_i sont linéairement indépendants ; c'est dire que les quantités x^2, x, 1 peuvent s'exprimer en fonction linéaire homogène des polynômes l_i ; exactement de même on peut remplacer y^2, y, 1 par certaines combinaisons homogènes des m_i.

Cela étant, le polynôme F peut s'écrire, d'une seule manière, sous la forme doublement linéaire

$$(a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3) l_1 + (b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3) l_2 + (c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3) l_3 . \tag{53}$$

Or je dis que cette réduite à neuf termes se ramène en réalité à un simple trinôme, et que, en numérotant autrement, si besoin est, les trois polynômes m_1, m_2, m_3 dont l'ordre importe peu, elle s'écrira

$$a_1 l_1 m_1 + a_2 l_2 m_2 + a_3 l_3 m_3 .$$

Pour établir ce fait supposons, pour plus de simplicité, que les l_i, m_i ont été réduits à leur forme normale avec des discriminants égaux à l'unité, et considérons une forme linéaire telle que

$$f_1 l_1 + f_2 l_2 + f_3 l_3 ;$$

son discriminant est, par définition, égal à

$$\frac{1}{4}\left[\left(\sum f_i l_i'\right)^2 - 2\sum f_i l_i \sum f_i l_i''\right] .$$

A cause des conditions d'orthogonalité entre les l_i, il se réduit à

$$f_1^2 l_1^2 + f_2^2 l_2^2 + f_3^2 l_3^2 .$$

Appliquons cette règle pour trouver les deux discriminants de la forme bilinéaire ci-dessus (53), où l'on suppose, répétons-le, les l_i et m_i réduits à leur forme normale. On trouve à l'instant

$$X = (a_1 l_1 + b_1 l_2 + c_1 l_3)^2 + (a_2 l_1 + b_2 l_2 + c_2 l_3)^2 + (a_3 l_1 + b_3 l_2 + c_3 l_3)^2 ,$$

$$Y = (a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3)^2 + (b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3)^2 + (c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3)^2 .$$

Or, par supposition, les l_i sont les polynômes conjugués relatifs à X comme les m_i le sont à Y ; il faut donc que les seconds membres des formules précédentes se réduisent tous les deux à la forme purement quadratique, par destruction des doubles produits, de manière que

$$X = A_1 l_1^2 + A_2 l_2^2 + A_3 l_3^2, \qquad \text{et} \qquad Y = B_1 m_1^2 + B_2 m_2^2 + C_3 m_3^2. \quad (54)$$

Mais d'après un lemme d'Algèbre élémentaire, les conditions moyennant lesquelles les deux sommes de carrés

$$\Phi = (a_1 x + b_1 y + c_1 z)^2 + (a_2 x + b_2 y + c_2 z)^2 + (a_3 x + b_3 y + c_3 z)^2,$$

$$\Phi' = (a_1 x + a_2 y + a_3 z)^2 + (b_1 x + b_2 y + b_3 z)^2 + (c_1 x + c_2 y + c_3 z)^2,$$

deviennent purement quadratiques des types

$$\Phi = A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2, \qquad \text{et} \qquad \Phi' = B_1 x^2 + B_2 y^2 + C_3 z^2,$$

sont des plus limitées. On démontre, en effet, aisément la proposition suivante.

Si Φ et Φ' sont tous deux purement quadratiques et que, en outre, les constantes A_1, A_2, A_3 soient différentes les unes des autres, les trois polynômes

$$a_1 x + b_1 y + c_1 z, \qquad a_2 x + b_2 y + c_2 z, \qquad a_3 x + b_3 y + c_3 z,$$

se réduisent nécessairement à des monômes qui, de plus, sont linéairement indépendants.

Pour ne pas allonger, je laisse au lecteur le soin d'obtenir la démonstration, facile, de ces divers points ; je me borne à en faire l'application aux polynômes X, Y auxquels je reviens.

Remarquons que les discriminants des six polynômes l_i, m_i ont été supposés égaux à l'unité, et les polynômes eux-mêmes réduits à leur forme normale. On a donc

$$\sum l_i^2 = \sum m_i^2 = 0 ;$$

si donc, dans la formule (54), pour X, deux coefficients étaient égaux, par exemple $A_1 = A_2$, en remplaçant $l_1^2 + l_2^2$ par la quantité égale $-l_3^2$, ce discriminant serait un carré parfait, cas exclu.

Il faut donc que les formes réduites (54) possèdent trois coefficients distincts ; dès lors, en vertu du lemme ci-dessus, les trois trinômes

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3, \qquad b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3, \qquad c_1 m_1 + c_2 m_2 + c_3 m_3,$$

dégénèrent en trois monômes indépendants. Il suffit de changer au besoin la numérotation des m_i pour leur donner la forme

$$a_1 m_1, \qquad a_2 m_2, \qquad a_3 m_3.$$

Du même coup l'expression doublement quadratique F apparaît sous sa *forme réduite*, soit

$$F = a_1 l_1 m_1 + a_2 l_2 m_2 + a_3 l_3 m_3 \,.\ ^1 \tag{55}$$

Quant aux discriminants, leur valeur correspondante sera

$$X = a_1^2 l_1^2 + a_2^2 l_2^2 + a_3^2 l_3^2 \,. \tag{56}$$

$$Y = a_1^2 m_1^2 + a_2^2 m_2^2 + a_3^2 m_3^2 \,. \tag{57}$$

Or, nous savons que des transformations unimodulaires permettent de passer du système l_i^2 au système m_i^2. Les deux théorèmes fondamentaux suivants s'offrent à présent d'eux-mêmes.

a) *Les deux discriminants* X, Y *de la forme* F *sont transformables l'un dans l'autre ; ils sont équivalents et possèdent les mêmes invariants rationnels* g_i, *ou irrationnels* e_i.

b) *A l'aide d'une transformation linéaire opérée sur* y *seul* F *devient symétrique en* x *et en* y.

Arrêtons-nous un instant sur les interprétations géométriques de ces résultats, elles sont classiques et fort simples.

1° Soit d'abord le cas où la courbe $F = 0$ est une cubique ; pour qu'une cubique C_3 se présente sous la forme $F = 0$, il suffit de transporter à l'infini une corde AB de la cubique, puis O désignant un point quelconque de son plan, de prendre OA, OB pour axes coordonnés.

Cela étant, l'équation $X = 0$ détermine les abscisses des tangentes menées par le point B, autres que celles qui touchent la courbe en B ; il y a quatre tangentes pareilles puisque C_3 est de la sixième classe.

L'équation $Y = 0$ déterminera de même les tangentes menées à C_3 par le point A. Le théorème d'équivalence entre X et Y nous donne donc la propriété fondamentale de la géométrie des cubiques.

Qu'on mène par un point A *d'une cubique les quatre tangentes à la courbe telles que leur contact n'ait pas lieu en* A, *le rapport anharmonique de ces tangentes est constant quand* A *varie.*

2° Supposons, en second lieu, que la courbe $F = 0$ soit une biquadratique C_4 non dégénérée. Les points A et B sur la droite de l'infini sont les points doubles de C_4 ; la même interprétation nous apprend que

[1] Il est clair que cette même forme réduite peut être adoptée, même si l_i m_i ne sont pas réduits à leur forme normale. Les formules qui suivent pour X et Y supposent simplement, par exemple, que les l_i, m_i ont l'unité pour discriminant.

Si, par les points doubles d'une C_4 de genre 1, on mène quatre tangentes autres que les tangentes aux points doubles eux-mêmes, ces deux faisceaux de quatre tangentes sont projectifs.

3° Généralisons ceci en considérant une biquadratique gauche C_4. Soient A, B, C trois points de la courbe, choisissons ABC comme plan de l'infini, OA, OB, OC comme axes coordonnés. D'après ces conventions, les équations de C_4 seront

$$ayz + bzx + cxy + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0\,,$$

$$a'yz + b'zx + c'xy + \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0\,.$$

Eliminons z, nous trouvons pour définir la projection de la courbe sur le plan OX, OY, une équation doublement quadratique $F = 0$. Donc, toujours par la même interprétation, si par la corde $\overline{BC}$ on mène quatre plans tangents à C_4, ils ont le même rapport anharmonique que quatre autres plans semblables conduits suivant CA ; ou bien

Le rapport anharmonique des quatre plans tangents menés à la biquadratique gauche par une corde quelconque est constant.

4° Il existe encore d'autres interprétations géométriques du théorème d'équivalence; la plus connue, en dehors des précédentes, est celle fournie par le système de deux coniques. Elle résulte aisément du rapport qui existe entre un semblable système et l'équation doublement quadratique. Halphen a développé ces relations, avec un grand détail, dans les chapitres 10 et 11 de son second volume ; je me borne à citer ici la proposition qui traduit, pour deux coniques, le théorème d'équivalence entre les deux discriminants X et Y.

Deux coniques étant tracées à volonté dans un plan, le rapport anharmonique des points d'intersection, pris sur l'une des coniques, est égal au rapport anharmonique des tangentes communes pris sur l'autre[1].

12. — *Formes symétriques. Conditions d'équivalence.* — Le problème à résoudre consiste à trouver les conditions à satisfaire pour qu'une forme F soit équivalente à une autre F' ; la première forme doit se changer dans la seconde quand on exécute sur elle les deux transformations linéaires unimodulaires

$$x = \frac{ax' + b}{a'x' + b'}\,, \qquad y = \frac{cy' + d}{c'y' + d'}\,. \tag{58}$$

Une condition d'équivalence se rencontre immédiatement : il est clair en effet que si F se transforme en F', les deux discriminants

---

[1] Halphen. *Fonctions elliptiques*, 2^{me} vol. p. 374.

doivent être équivalents deux à deux, X à X′ et Y à Y′. En écrivant les conditions de cette double equivalence entre les discriminants, on se procure toutes les transformations possibles de F en F′, selon le mode susindiqué (58).

La condition précédente, qui est nécessaire pour l'équivalence et fournit toutes les équations de la transformation, n'est pas suffisante. Prenons en effet une forme F et essayons de la reconstruire à partir de ses discriminants X et Y.

Soient e_i les invariants irrationnels communs à X et à Y, l_i les polynômes conjugués de X, m_i ceux de Y ; ces polynômes sont de nouveau déterminés par les formules (25), et leur discriminant, identique pour l_i et m_i, vaut comme nous savons, $4(e_i-e_j)(e_i-e_k)$.

On a entre les l_i l'identité

$$\sum (e_j - e_k) l_i^2 = 0 , \tag{59}$$

tandis que X est donné par l'expression

$$X = \sum \frac{e_i(e_j - e_k) l_i^2}{\sqrt{\Delta}} . \tag{60}$$

Soit donc

$$F = \sum a_i l_i m_i , \tag{61}$$

la représentation bilinéaire de F ; son discriminant relatif à y trouvé suivant les règles du § précédent, sera

$$D_y(x) = \sum 4a_i^2 (e_i - e_j)(e_i - e_k) l_i^2 . \tag{62}$$

Il faut que D_y coïncide avec X ; en comparant (59) (60) et (62), on voit que la condition nécessaire et suffisante de cette égalité est

$$4a_i^2 (e_i - e_j)(e_i - e_k) = \frac{(e_i - \rho)(e_j - e_k)}{\sqrt{\Delta}} ,$$

la quantité ρ désignant une indéterminée.

On en tire

$$a_i^2 = \frac{(\rho - e_i)(e_j - e_k)^2}{\Delta}, \qquad \text{ou} \qquad a_i = \frac{(e_j - e_k)\sqrt{\rho - e_i}}{\sqrt{\Delta}} ; \tag{63}$$

tels sont les coefficients à porter dans (61). On voit, par ce calcul, que *si* X *et* Y *sont donnés*, F *peut prendre une infinité de formes différentes qui se distinguent les unes des autres par la valeur du paramètre* ρ.

Si donc une autre forme F' a des discriminants X', Y' respectivement équivalents à X et Y, elle donne lieu aux équations

$$F' = \sum a'_i l'_i m'_i , \qquad \text{avec} \qquad a'_i = \frac{(e_j - e_k)\sqrt{z' - e_i}}{\sqrt{\Delta}} .$$

Or toute transformation qui changerait F en F' changera aussi X en X', Y en Y', c'est-à-dire l_i en l'_i et m_i en m'_i ; ainsi donc l'équivalence entre F et F' ne saurait avoir lieu à moins que $\varrho' = \varrho$.

Voici donc un nouvel invariant absolu qui vient s'adjoindre aux deux autres g_2, g_3, pour que F se change en F', en même temps que X en X' et Y en Y'; il y a, sans plus, trois invariants g_2, g_3, ϱ dont l'égalité est nécessaire, mais aussi suffisante, pour la possibilité de la transformation.

Les expressions a_i ci-dessus dépendent de trois irrationnelles $\sqrt{z - e_i}$, il est aisé de les remplacer par une seule irrationnelle. Soit en effet Z un nouveau polynôme biquadratique en z, possédant les mêmes invariants e_i que X et Y ; nommons-en K le Hessien et n_i les polynômes conjugués.

Posons $\varrho = -\frac{K}{Z}$; alors, d'après la formule (37')

$$\sqrt{z - e_i} = \frac{n_i}{2\sqrt{Z}} ;$$

en substituant ces trois valeurs dans l'équation (61), on voit que *tout polynôme* F *aux discriminants* $D_y = X$ et $D_x = Y$ *se présente sous la forme canonique trilinéaire*

$$F = \frac{1}{2\sqrt{\Delta Z}} \sum (e_j - e_k) l_i m_i n_i .$$

Répétons que, dans cette forme, le polynôme Z qui contient l'arbitraire z est lui-même quelconque, pourvu qu'il ait les invariants e_i en commun avec X et Y.

Le théorème précédent, facile à vérifier par le calcul direct, peut encore s'énoncer comme suit :

Soient trois polynômes en x, y, *et* z *du* 4*me degré* X, Y, Z : *supposons-les équivalents ou doués des mêmes invariants* e_i. *Soient encore* l_i, m_i, n_i *leurs polynômes conjugués ; alors la forme triplement quadratique*

$$G = \sum (e_j - e_k) l_i m_i n_i \qquad (64)$$

admet, par rapport aux trois variables, des discriminants D_x, D_y, D_z *qui sont*

$$D_x = 4\Delta YZ , \qquad D_y = 4\Delta ZX , \qquad D_z = 4\Delta XY . \qquad (65)$$

Toutes les propositions qui précèdent concernent des polynômes F quelconques; nous voulons en faire l'application au cas le plus important qui est celui d'une forme F, non seulement quadratique en x et en y, mais encore symétrique par rapport à ces lettres. Il va de soi que, dans ce cas, X et Y d'une part et les l_i, m_i de l'autre, ne diffèrent que par le nom de la variable, x chez les uns, y chez les autres.

Parmi les diverses formes Z possédant les mêmes invariants que X, la plus simple, qui s'offre d'abord, est la forme transformée de X par changement de x en z, de sorte que de même que $Y = X(y)$ on ait aussi $Z = X(z)$. Ce choix particulier présente un intérêt spécial dans l'étude du théorème d'addition des fonctions elliptiques. Toutefois nous ne l'adopterons pas ici, et nous ferons

$$Z = 4z^3 - g_2 z - g_3 ;$$

les valeurs qui s'en déduisent pour les polynômes conjugués n_i sont donc celles consignées sous le n° (45).

Cherchons, pour le cas actuel, la constitution du polynôme G (64), en fonction explicite des variables x, y, z, et des coefficients du polynôme X que j'appellerai aussi f_{xx}. Nous avons

$$X = f_{xx} = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4 .$$

Développons G suivant les puissances de z et remplaçons les n_i par leurs valeurs (45), il vient

$$G = \sum (e_j - e_k) l_i m_i n_i = P^0 z^2 + 2P^1 z + P^{(2)} ,$$

$$P^{(0)} = 2[(e_2 - e_3) l_1 m_1 + (e_3 - e_1) l_2 m_2 + (e_1 - e_2) l_3 m_3] ,$$

$$P^{(1)} = -2[e_1(e_2 - e_3) l_1 m_1 + e_2(e_3 - e_1) l_2 m_2 + e_3(e_1 - e_2) l_3 m_3] ,$$

$$P^{(2)} = -2[(e_1^2 + e_2 e_3)(e_2 - e_3) l_1 m_1 + \dots \qquad] ,$$

et il ne reste plus qu'à exprimer ces trois quantités en fonction des variables x, y et des coefficients de X.

Remarquons pour cela que si deux polynômes doublement quadratiques, et en outre symétriques, L_{xy}, M_{xy} — comme le sont les quantités P^i — deviennent égaux quand $x = y$, ce qui constitue le cas de coïncidence, ces polynômes ne diffèrent l'un de l'autre que par un terme du type $a(x - y)^2$.

En effet le quotient $\dfrac{L_{xy} - M_{xy}}{x - y}$ doit être bilinéaire, entier, et en outre gauche relativement à la permutation des deux variables. En écrivant ce quotient sous la forme $axy + bx + cy + d$, il faut donc que

$$a = 0 , \qquad d = 0 , \qquad b + c = 0 ,$$

et l'on a bien $L_{xy} - M_{xy} = a(x-y)^2$. De cette remarque il résulte qu'une fonction telle que L_{xy} est complètement définie quand on connaît les deux valeurs L_{xx} et $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}\right)_{x=y}$; c'est cette observation que nous allons employer trois fois de suite pour déterminer les quantités $P^{(i)}$.

A l'égard de la première, on remarquera que dans le cas de coïncidence $x = y$, on a $l_i = m_i$; alors, en vertu de l'équation (27), P^0 s'annule. On a donc $P^0 = A(x-y)^2$; mais, comme d'autre part,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 P^0}{\partial x \partial y}\right)_{x=y} = \sum (e_j - e_k) l_i'^2 = -A ,$$

et que la somme nous est connue d'après (22), on tire

$$A = 4\sqrt{\Delta} , \qquad \text{et} \qquad P^0 = 4\sqrt{\Delta}(x-y)^2 .$$

Appliquons le même raisonnement à $P^{(1)}$; d'après l'équation (28') on a dans le cas de coïncidence

$$P^{(1)} = -2\sqrt{\Delta}\, X = -2\sqrt{\Delta} f_{xx} .$$

Or, en invoquant le résultat (32')

$$\left(\frac{\partial^2 P^1}{\partial x \partial y}\right)_{x=y} = -2\sum e_i (e_j - e_k) l_i'^2 = -\frac{2}{3} X'' \sqrt{\Delta}$$

dédoublons donc la forme f_{xx} biquadratique en une forme doublement quadratique et symétrique; on trouve immédiatement, d'après ce qui précède, l'équation

$$f_{xy} = a_0 x^2 y^2 + 2a_1 xy(x+y) + a_2(x^2 + 4xy + y^2) + 2a_3(x+y) + a_4 , \quad (66)$$

et

$$P^{(1)} = -2\sqrt{\Delta} f_{xy} .$$

Soit enfin $P^{(2)} = -2(e_1^2 + e_2 e_3)(e_2 - e_3) l_1 m_1 + \ldots$; nous avons

$$3e_1^2 = -(e_1 - e_2)(e_3 - e_1) + \frac{1}{4} g_2 , \quad \text{et} \quad 3e_2 e_3 = -(e_1 - e_2)(e_3 - e_1) - \frac{1}{2} g_2 ;$$

donc

$$3(e_1^2 + e_2 e_3)(e_2 - e_3) = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{1}{4} g_2 (e_2 - e_3) .$$

Cette identité, et ses analogues obtenues par permutation, amènent P^2_{xy} à la forme

$$P^2_{xy} = \frac{\sqrt{\Delta}}{3}\sum l_i m_i + \frac{g_2}{3}\sqrt{\Delta}(x-y)^2 .$$

Désignons maintenant par H_{xx} le Hessien de f_{xx}, et prenons de nouveau le cas de coïncidence. En vertu des formules (36'), nous avons

$$P^2_{xx} = -4\sqrt{\Delta}\,H_{xx}, \qquad \left(\frac{\partial^2 P^2_{xy}}{\partial x \partial y}\right)_{x=y} = \frac{\sqrt{\Delta}}{3}\sum l_i'^2 - \frac{2}{3}g_2\sqrt{\Delta}.$$

Appliquons au Hessien la relation générale (32), nous avons

$$\sum l_i'^2 = -4H''_{xx} - \frac{16}{3}[(e_3-e_1)(e_1-e_2)+\ldots] = -4H''_{xx} + 4g_2 .$$

Voici donc les conditions à employer pour déterminer P^2_{xy},

$$P^2_{xx} = -4\sqrt{\Delta}\,H_{xx}, \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial^2 P^2}{\partial x \partial y}\right) = -\frac{4}{3}\sqrt{\Delta}\,H''_{xx} ;$$

elles donnent, après un court calcul, par dédoublement du Hessien H_{xx}

$$P^2_{xy} = -4\sqrt{\Delta}\,H_{xy} ,$$

formule dans laquelle H_{xy} a la signification suivante

$$\begin{aligned}4H_{xy} = {} & 4(a_0a_2 - a_1^2)x^2y^2 + 4(a_0a_3 - a_1a_2)xy(x+y) + (a_0a_4 - a_2^2)(x+y)^2 \\ & + 8(a_1a_3 - a_2^2)xy + 4(a_1a_4 - a_2a_3)(x+y) + 4(a_2a_4 - a_3^2) . \quad (67)\end{aligned}$$

Résumons. *Si une équation doublement quadratique et symétrique en* x, y *admet pour discriminant la forme*

$$X = f_{xx} = a_0x^4 + 4a_1x^3 + \ldots ,$$

elle a pour expression

$$H_{xy} + zf_{xy} - z^2(x-y)^2 = 0 , \qquad (68)$$

où les symboles f_{xy} *et* H_{xy} *ont les valeurs* (66) *et* (67), *tandis que* z *désigne une arbitraire.*

De plus, le discriminant relatif à z de cette formule (68) est égal au produit $f_{xx} f_{yy}$, ainsi que nous savons. *On peut donc écrire* (68) *sous la forme résolue*

$$z = \frac{f_{xy} - \sqrt{f_{xx} f_{yy}}}{2(x-y)^2} . \tag{69}$$

Enfin une dernière forme de la même relation est digne de remarque, comme s'étant présentée à Euler[1] et Lagrange[2] dans leurs recherches sur le théorème d'addition des intégrales elliptiques. La voici.

Dans le carré $\left(\frac{\sqrt{f_{xx}} - \sqrt{f_{yy}}}{x-y}\right)^2$, remplaçons le double produit $-2\sqrt{f_{xx} f_{yy}}$ par sa valeur tirée de (69), il vient

$$\frac{f_{xx} + f_{yy} - 2f_{xy}}{(x-y)^2} + 4z .$$

Or, si l'on fait

$$Q_{xy} = \frac{f_{xx} + f_{yy} - 2f_{xy}}{(x-y)^2} ,$$

et qu'on remarque les identités

$$\left(\frac{\partial f_{xy}}{\partial x}\right)_{x=y} = \frac{1}{2} f'_{xx} , \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_{xy}\right)_{x=y} = \frac{1}{6} f''_{xx} ,$$

on voit que la valeur de coïncidence est

$$Q_{xx} = \frac{f''_{xx} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{2} = \frac{1}{3} f''_{xx} = 4a_0 x^2 + 8a_1 x + 4a_2 .$$

D'ailleurs Q_{xy} est entier, symétrique et du second degré en x et y ; le terme du second degré est évidemment

$$a_0 \frac{x^4 + y^4 - 2x^2 y^2}{(x-y)^2} = a_0 (x+y)^2 .$$

La valeur de Q_{xy} se dégage de suite de ce double renseignement, elle est

$$Q_{xy} = a_0 (x+y)^2 + 4a_1 (x+y) + 4a_2 .$$

La nouvelle forme cherchée pour l'équation (68) se déduit de là, la voici :

$$\left(\frac{\sqrt{f_{xx}} - \sqrt{f_{yy}}}{x-y}\right)^2 = a_0 (x+y)^2 + 4a_1 (x+y) + 4(a_2 + z) . \tag{70}$$

---

[1] EULER. *Institutiones Cal. Integr.*, vol. I, Sectio secunda c. VI.

[2] LAGRANGE. *Oeuvres, éd. Serret*, II. p. 533.

13. — *Détermination des invariants.* — Continuons à nous limiter aux équations doublement quadratiques symétriques. Ces équations possèdent comme nous savons, trois invariants qui sont g_2, g_3, et z; la détermination des invariants est extrêmement simple. Car, en premier lieu, g_2 et g_3 sont les invariants rationnels de la fonction $D_y = f_{xx}$; F_{xy} étant donné ils se trouvent ainsi d'une manière immédiate.

En second lieu, on a identiquement, comme nous savons,

$$F_{xy} = \frac{2}{\sqrt{Z}} [H_{xy} + zf_{xy} - z^2(x-y)^2] ; \qquad (71)$$

à leur tour les expressions f_{xy} et H_{xy} sont toutes connues quand f_{xx}, ou F_{xy}, sont donnés ; il suffit donc d'identifier les deux membres de (71) pour avoir le dernier invariant cherché z. On peut même, avant de procéder à cette identification, faire $x = y$, ce qui ramène l'équation précédente à la forme plus simple

$$F_{xx} = \frac{2}{\sqrt{Z}} [H_{xx} + zf_{xx}] ; \qquad (72)$$

sous l'une ou l'autre de ces diverses formes, on voit que le problème de la détermination de z n'offre aucune difficulté.

Halphen a donné, pour trouver les trois invariants, une règle sur laquelle il nous faut revenir[1]; il propose de former une *équation caractéristique* dont les racines seraient proportionnelles aux trois quantités $z - e_i$. Mais la page 366 où est formée cette équation contient, à côté de quelques obscurités, une erreur qui compromet singulièrement le résultat énoncé.

Je suppose qu'on ait sous les yeux le passage en question ; on y verra que l'illustre auteur propose de considérer la forme

$$sF_{xy} + (x-y)^2$$

comme une fonction des deux variables

$$xy = \xi , \qquad x + y = \eta .$$

Le discriminant de la forme quadratique en $\xi\eta$ ainsi formée serait précisément l'équation caractéristique. Quelques essais suffisent à montrer l'inexactitude de la règle; la raison en est facile à découvrir.

[1] Halphen. *Fonctions elliptiques*, 2me vol. p. 344, 364-366.

Prenons généralement la forme

$$F_{xy} = aH_{xy} + bf_{xy} + c(x-y)^2, \qquad (73)$$

à trois coefficients arbitraires; cherchons à en former le discriminant D_y relatif à y.

Nous savons que D_y est du type $AH_{xx} + Bf_{xx}$ et que les constantes A et B sont quadratiques en a, b, c. De plus, si $a = b = 0$, F_{xy} est un carré et D_y doit s'annuler; c'est donc que A et B sont linéaires en c.

Considérons en second lieu le cas $a = 0$, et soit

$$f_{xy} = X_2 y^2 + 2X_1 y + X_0 .$$

Le discriminant de f_{xy} est

$$X_1^2 - X_0 X_2 = -H_{xx} ;$$

celui de

$$F_{xy} = bf_{xy} + c(x-y)^2 ,$$

est égal à

$$(bX_1 - cx)^2 - (bX_2 + c)(bX_0 + cx^2) = -b^2 H_{xx} - bcf_{xx}$$

Enfin, et en dernier lieu, si dans (73) on fait $a = 1$, $b = z$, $c = -z^2$, le polynôme F_{xy} se confond avec le premier membre de (68), le discriminant est alors égal au produit

$$\frac{1}{4}(4z^3 - g_2 z - g_3) f_{xx} .$$

Il suffit de rapprocher ces trois cas particuliers pour obtenir le discriminant D_y de la formule générale (73), sous la forme

$$D_y = -(b^2 + ac) H_{xx} - \left(\frac{g_3}{4}a^2 + \frac{g_2}{4}ab + bc\right) f_{xx} ; \qquad (74)$$

on y lit, une fois de plus, ce fait fondamental qu'il existe une simple infinité de polynômes symétriques F_{xy} possédant un déterminant donné.

Voici maintenant la conséquence à tirer de (74). Parmi les formes F_{xy}, à quel caractère reconnaître celle qui sont décomposables en facteurs linéaires en x et en y? La réponse est immédiate : il faut et suffit que le discriminant D_y soit un carré parfait. Or, nous connaissons les seuls carrés contenus dans la relation (74); ils dépendent de la condition

$$e_i = \frac{4bc + g_2 ab + g_3 a^2}{4(b^2 + ac)} ,$$

qui peut s'écrire également

$$(b - ae_i)\left(c - e_i b - e_i^2 a + \frac{g_2}{4} a\right) = 0 . \qquad (75)$$

Cette condition est donc réalisée si $b = ae_i$, quelle que soit la valeur de c; ainsi

$$H_{xy} + e_i f_{xy} + c(x - y)^2$$

est toujours décomposable en facteurs linéaires. C'est ce qu'on peut d'ailleurs vérifier à l'instant: car $H_{xx} + e_i f_{xx}$ se réduisant au carré

$$-\frac{1}{4} t_i^2 = (\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)^2 ,$$

on obtient le polynôme décomposable

$$H_{xy} + e_i f_{xy} + c(x - y)^2 = (\alpha xy + \beta(x + y) + \gamma)^2 + \delta(x - y)^2 . \quad (76)$$

Mais, c'est ici le point délicat, *les facteurs de la décomposition ne sont pas symétriques en* x *et en* y, *ils ne sauraient donc s'exprimer en* ξ *et en* η.

Soit D le discriminant de F_{xy} par rapport aux variables ξ, η: si D s'annule, F_{xy} est décomposable en facteurs linéaires en ξ, η; ou, si on préfère, F_{xy} se partage alors en facteurs bilinéaires relativement à x, y et *symétriques*. Aussi le discriminant de la forme (76) n'est pas nul, quoique cette forme soit décomposable, parce qu'elle l'est de manière non symétrique.

Il est d'ailleurs facile de trouver le discriminant D de la forme générale par rapport aux variables ξ, η. La fonction D est du troisième degré en a, b, c; la condition $D = 0$ entraîne la relation (75), et comme elle n'est pas vérifiée si $b = ae_i$, elle le sera forcément en annulant le second facteur de la dite relation. On conclut de là

$$D = 4\prod\left(ae_i^2 + be_i + c - \frac{g_2}{4} a\right) ; \qquad i = 1, 2, 3 \qquad (77)$$

le coefficient numérique de cette formule se vérifie sur un essai particulier, par exemple en faisant $a = c = 0$, $b = 1$, $F_{xy} = f_{xy}$.

V. — *Les Intégrales elliptiques.*

14. — Les résultats précédents s'appliquent immédiatement aux intégrales elliptiques de première espèce. Convenablement interprétés ils contiennent la théorie complète de la réduction de ces intégrales à la forme normale de Weierstrass sans aucune résolution d'équations de degré supérieur; en outre, et du même coup, ils conduisent au théorème d'addition des intégrales elliptiques. Cette fusion en une seule formule de deux théories qui sembleraient de prime abord être bien éloignées l'une de l'autre est des plus remarquables; elle découle tout naturellement des théorèmes concernant les équations doublement quadratiques.

Soit F un polynôme doublement quadratique que je suppose d'abord non symétrique

$$F = X_2 y^2 + 2X_1 y + X_0 = Y_2 x^2 + 2Y_1 x + Y_0 . \tag{78}$$

Posons $F = 0$, et différentions, il vient

$$(X_2 y + X_1)\, dy + (Y_2 x + Y_1)\, dx = 0 ; \tag{78'}$$

ou bien, à cause de $X_2 y + X_1 = +\sqrt{X_1^2 - X_0 X_2} = \sqrt{X}$, et $Y_2 x + Y_1 = \sqrt{Y}$,

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0\,[1] . \tag{79}$$

Cette formule (78) donne donc une transformation algébrique d'une intégrale elliptique $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ en une autre $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$. Pour obtenir cette transformation explicitement, il faut, X étant donné, retrouver la forme F (78), c'est-à-dire décomposer X sous la forme $X = X_1^2 - X_0 X_2$. Une semblable decomposition est possible de ∞^4 manières, puisque X_1 contient trois paramètres et qu'un coefficient arbitraire peut passer de X_0 à X_2.

A chacune des décompositions ci-dessus correspond une forme F(78), partant un polynôme Z; d'après cet aperçu il semblerait que, X étant donné, il lui corresponde ∞^4 polynômes transformés Y. S'il en était ainsi, la différentielle $\frac{dx}{\sqrt{X}}$ pourrait, sauf un facteur constant, se transformer par l'intermédiaire d'une équation doublement quadratique en toute autre différentielle elliptique $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$.

[1] Pour ne pas allonger, je supprime dans ce § les discussions de signe des radicaux : le lecteur fera bien d'ailleurs de leur vouer l'attention qu'elles méritent.

Mais nous savons que, en réalité, les choses se passent différemment.

Au lieu d'être quelconques les polynômes X et Y sont toujours équivalents; comme conséquence de ce fait, parmi nos ∞^4 transformations de X en Y, il en existe ∞^1 qui transforment X en un seul et même Y. Par exemple, lorsque F est symétrique, Y ne diffère de X que par la dénomination de la variable: les dites ∞^1 transformations constituent l'intégrale algébrique de l'équation d'Euler (79) et correspondent au théorème d'addition, les autres ∞^3 transformations changent X en ses équivalents.

Reprenons d'abord le cas général d'une transformation non-symétrique $F = 0$, et supposons donnés les polynômes X, Y aux invariants communs g_2, g_3.

Il existe ∞^1 formes F dont les discriminants D_y et D_x coïncident respectivement avec X et Y; nous avons appris à construire toutes ces formes à la page ( ), et nous avons vu qu'il s'y introduit un troisième polynôme arbitraire Z possédant en commun avec X et Y les invariants g_2, g_3.

Les trois discriminants de la forme F, triplement quadratique ainsi constituée sont, comme nous l'avons vu,

$$D_x = 4\Delta YZ \,, \qquad D_y = 4\Delta ZX \,, \qquad D_z = 4\Delta XY \,. \tag{80}$$

Si donc on différentie, par rapport aux trois variables, l'équation $F = 0$, comme on l'avait différentiée en (78') par rapport à x et à y seulement, on obtient

$$\sqrt{D_x}\,dx + \sqrt{D_y}\,dy + \sqrt{D_z}\,dz = 0 \,,$$

ou bien

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} + \frac{dz}{\sqrt{Z}} = 0 \,. \tag{81}$$

Telle est la formule générale que nous avions en vue.

Pour l'appliquer reprenons F symétrique en x et en y; donnons-nous $X = f_{xx}$ et $Y = f_{yy}$, choisissons enfin $Z = 4z^3 - g_2 z - g_3$, où g_2 et g_3 sont, comme toujours, les invariants de f_{xx}.

Dans ces conditions, l'équation $F = 0$, s'écrit sous plusieurs formes équivalentes dont nous avons vu plus haut les principales; ce sont

$$\left.\begin{aligned} H_{xy} + z f_{xy} - z^2 (x-y)^2 = 0 \,, \\ z = \frac{f_{xy} - \sqrt{f_{xx} f_{yy}}}{2(x-y)^2} \,, \\ \left(\frac{\sqrt{f_{xx}} - \sqrt{f_{yy}}}{x-y}\right)^2 = a_0 (x+y)^2 + 4a_1 (x+y) + 4(a_2 + z) \,. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Toutes ces formules donnent lieu à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{f_{xx}}} + \frac{dy}{\sqrt{f_{yy}}} = - \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} \tag{83}$$

Si en premier lieu, on suppose que dans le système (82), z représente une constante arbitraire, dz est nul; dans cette hypothèse, le système (82) nous met en possession de l'intégrale générale de l'équation d'Euler, comme on le voit dans l'équation (83) dont le second membre est nul d'après l'hypothèse. Je n'ai pas à exposer ici par quelles transformations faciles, on en conclut le théorème d'addition des fonctions elliptiques.

Si, en second lieu, nous donnons dans (82) à la lettre y la signification d'un paramètre constant, l'équation différentielle devient, quelle que soit la valeur de cette indéterminée,

$$\frac{dx}{\sqrt{f_{xx}}} = - \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}; \tag{84}$$

dans cette acception, le système (82) opère la réduction d'une différentielle elliptique quelconque $\frac{dx}{\sqrt{f_{xx}}}$ à la forme normale de Weierstrass $\frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$.

Faisons enfin $x = y$, la première formule (82), donne la relation entre x et z sous la forme

$$z = - \frac{H_{xx}}{f_{xx}}, \tag{85}$$

équivalente, d'après (83), à l'équation différentielle

$$\frac{2dx}{\sqrt{f_{xx}}} = - \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}. \tag{86}$$

C'est la formule de duplication obtenue, pour la première fois, par M. Hermite. Par son moyen, le même problème de la réduction à la forme de Weierstrass se trouve résolu rationnellement. Le procédé usuel, pour démontrer cette formule remarquable, consiste à la déduire des équations générales (43) et (44) relatives au polynôme du 4[me] degré; ce procédé a le défaut de laisser dans l'ombre la parenté qui unit la transformation (85) avec le théorème d'addition.

Supposons toujours donnée la forme f_{xx}, faisons-lui correspondre un argument elliptique u tel que

$$pu = -\frac{H_{xx}}{f_{xx}}, \qquad p'u = -\frac{T_{xx}}{f_{xx}^{3/2}}[1], \tag{87}$$

qui donnent, comme on vient de voir

$$\frac{2dx}{\sqrt{f_{xx}}} = -du. \tag{88}$$

Soient de même v et w des arguments elliptiques correspondant à f_{yy} et à Z ; on a donc

$$pv = -\frac{H_{yy}}{f_{yy}}, \qquad p'v = -\frac{T_{yy}}{f_{yy}^{3/2}}, \qquad \frac{2dy}{\sqrt{f_{yy}}} = -dv, \tag{89}$$

$$pw = -\frac{K}{Z}, \qquad p'w = -\frac{U}{Z^{3/2}}, \qquad \frac{2dz}{\sqrt{Z}} = -dw. \tag{90}$$

De ces formules (87) à (90), nous tirons

$$pu - e_i = -\frac{H_{xx} + e_i f_{xx}}{f_{xx}} = \frac{l_i^2}{4f_{xx}}, \quad \text{donc} \quad \sqrt{pu - e_i} = \frac{l_i}{2\sqrt{f_{xx}}}; \tag{91}$$

on a ainsi

$$\sqrt{pu - e_i} = \frac{l_i}{2\sqrt{f_{xx}}}, \quad \sqrt{pv - e_i} = \frac{m_i}{2\sqrt{f_{yy}}}, \quad \sqrt{pw - e_i} = \frac{n_i}{2\sqrt{Z}}. \tag{92}$$

Portons ces valeurs dans l'équation doublement quadratique $G = 0$, écrite sous sa forme trilinéaire (64), ainsi que dans l'équation différentielle correspondante (83), nous obtenons le théorème suivant ;

Si trois arguments elliptiques u, v, w *sont liés par la condition*

$$\sum (e_j - e_k)\sqrt{(pu - e_i)(pv - e_i)(pw - e_i)} = 0, \tag{93}$$

on a aussi

$$d(u + v + w) = 0, \qquad \text{ou} \qquad u + v + w = \text{const.} \tag{94}$$

Remplaçons les $\sqrt{pu - e_i}$ etc... par leurs valeurs $\frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)}$; le théorème d'addition précédent prend un autre énoncé.

[1] T_{xx} représente ici le covariant T du tableau (A). K et U sont, de même, le Hessien et le covariant en question relatifs au polynôme $Z = 4z^3 - g_2 z - g_3$.

La somme

$$(e_2 - e_3)\sigma_1(u)\sigma_1(v)\sigma_1(w) + (e_3 - e_1)\sigma_2(u)\sigma_2(v)\sigma_2(w) + (e_1 - e_2)\sigma_3(u)\sigma_3(v)\sigma_3(w) \qquad (95)$$

qui est nulle pour u = v = w = 0, *le reste quand* u + v + w = 0; *en outre, à cause de la parité des* σ_i(u), *la même relation est satisfaite pour toutes les combinaisons des signes* ± *dans la formule*

$$u \pm v \pm w = 0 \; .$$

Ce résultat est conforme de tout point à l'équation bien connue dans la théorie des fonctions σ

$$\sum (e_j - e_k)\sigma_i(u)\sigma_i(v)\sigma_i(w) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\prod \sigma\left(\frac{u \pm v \pm w}{2}\right) ; \qquad (96)$$

il valait la peine de noter ici combien cette formule se rattache étroitement à l'équation d'Euler et aux polynômes doublement quadratiques.

C. Cailler (Genève).

SUR L'ORTHOGONALISATION DE FONCTIONS

1. — Considérons le système

$$\varphi_0, \; \varphi_1, \; \varphi_2, \; \ldots$$

de fonctions arbitraires et linéairement indépendantes de la variable réelle x. Exprimons pareillement par ψ_r celle parmi les expressions de forme

$$a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots + a_{r-1}\varphi_{r-1} + \varphi_r \; ,$$

où les a sont des constantes réelles, qui rend l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} (a_0\varphi_0 + a_1\varphi_1 + \ldots a_{r-1}\varphi_{r-1} + \varphi_r)^2 dx$$

égale à un minimum. On a évidemment (nous écrirons partout $\int$ au lieu de $\int_{x_1}^{x_2}$)

$$\int \varphi_0 \psi_r dx = \int \varphi_1 \psi_r dx = \ldots = \int \varphi_{r-1} \psi_r dx = 0$$

et pourtant, pour $s < r$, puisque ψ_s est une expression linéaire de $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_s$

$$\int \psi_r \psi_s dx = 0, \qquad (s < r)$$

d'où l'on tire en général

$$\int \psi_r \psi_s dx = 0. \qquad (s \neq r)$$

Les fonctions ψ sont orthogonales dans l'intervalle $(x_1 x_2)$, arbitrairement choisi.

En particulier, si nous posons

$$x_2 = -x_1 = 1, \qquad \varphi_r = x^r$$

nous arrivons à la définition de fonctions qui ne diffèrent des fonctions sphériques que par un facteur constant. C'est un résultat connu [1].

2. — M. Goursat [2] arrive à la définition de fonctions orthogonales $\Phi_0, \Phi_1, \ldots$ déduites des fonctions données $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ en posant d'abord

$$\varphi_0 = \Phi_0, \qquad \bar{\varphi}_i = \varphi_i + c_i \Phi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

la constante c_i etant déterminée de façon que

$$\int \Phi_0 \bar{\varphi}_i dx = 0.$$

---

[1] Runge, *Theorie und Praxis der Reihen*, Leipzig, 1904, p. 14.

[2] *Annales de la Faculté de Toulouse*, Tome 10, 2e série, 1908. L'auteur cite, d'après Lalesco, *Introduction à la Théorie des Equations Integrales*. Paris 1912.

Les fonctions $\bar{\varphi}_i$ sont orthogonales à Φ_0. Nous définissons d'une façon analogue des fonctions $\bar{\bar{\varphi}}_i$ $(i = 2, 3, \ldots)$ orthogonales à Φ_0 et à Φ_1

$$\Phi_1 = \bar{\varphi}_1$$

en formant les expressions

$$\bar{\bar{\varphi}}_i = \bar{\varphi}_i + \gamma_i \Phi_1 \qquad (i = 2, 3, \ldots)$$

et en déterminant la constante γ_i de façon, que

$$\int \Phi_1 \bar{\bar{\varphi}}_i \, dx = 0$$

La répétition du procédé indiqué nous donne toutes les fonctions Φ_r telles que

$$\int \Phi_r \Phi_s \, dx = 0 . \qquad (r \neq s)$$

3. — Nous nous proposons de démontrer que

$$\psi_r \equiv \Phi_r .$$

Il est avant tout évident, que Φ_r est une expression de la forme

$$a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + \ldots + a_{r-1} \varphi_{r-1} + \varphi_r .$$

En réalité, si nous exprimons en général par $D_\Phi f(x)$ la transformation linéaire

$$D_\Phi f(x) = f(x) - \frac{\int f(x) \Phi(x) \, dx}{\int \Phi(x) \Phi(x) \, dx} \Phi(x) ,$$

et si nous posons

$$D^2_{\Phi_1 \Phi_2} f(x) = D_{\Phi_2} [D_{\Phi_1} f(x)] ; \quad D^0_\Phi f = f .$$

. . . .

nous obtenons de suite

$$\Phi_r = D^r_{\Phi_0 \Phi_1 \ldots \Phi_{r-1}} \varphi_r = \varphi_r + \text{expression linéaire de } \varphi_0, \ldots \varphi_{r-1} .$$

On a avant tout

$$\int \Phi_r \varphi_0 \, dx = \int \Phi_r \Phi_0 \, dx \, .$$

Mais l'égalité

$$\int \Phi_r \varphi_{s-1} \, dx = 0$$

entraine l'autre

$$\int \Phi_r \varphi_s \, dx = 0 \, ,$$

dès que, si l'on suppose

$$\Phi_s = \alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1 + \ldots + \alpha_{s-1} \varphi_{s-1} + \varphi_s \, ,$$

on a aussi

$$\int \Phi_r \Phi_s \, dx = \alpha_0 \int \Phi_r \varphi_0 \, dx + \alpha_1 \int \Phi_r \varphi_1 \, dx + \ldots$$

$$\alpha_{s-1} \int \Phi_r \varphi_{s-1} \, dx + \int \Phi_r \varphi_s \, dx = \int \Phi_r \varphi_s \, dx = 0 \, . \qquad (s < r)$$

Nous obtenons donc

$$\int \Phi_r \varphi_0 \, dx = \int \Phi_r \varphi_1 \, dx = \ldots = \int \Phi_r \varphi_{r-1} \, dx = 0 \, .$$

Ce sont les équations qui découlent du problème de minimum

$$\int (a_0 \varphi_0 + a_1 \varphi_1 + \ldots + a_{r-1} \varphi_{r-1} + \varphi_r)^2 \, dx = \text{minimum}$$

formulé au commencement et qui définissent la fonction ψ_r.

Février 1914). Ugo Broggi (Buenos-Aires).

SUR UNE APPLICATION DE LA THÉORIE DES NOMBRES À LA MÉCANIQUE STATISTIQUE ET LA THÉORIE DES PERTURBATIONS[1]

Si l'on enroule sur une circonférence de longueur 1 un fil portant des repères équidistants, ces repères formeront, après un nombre infini d'enroulements, sur la circonférence, un ensemble qui non seulement sera dense, mais de plus présentera la même densité partout sur la circonférence. Nous supposons que la distance séparant deux repères soit mesurée par un nombre irrationnel a (c'est-à-dire que son rapport à la circonférence soit incommensurable). Ce théorème de la théorie des nombres, d'énoncé simple fut démontré en 1909-1910 presque simultanément par Bohl[2], Sierpinski[3] et Weyl. Je n'entrerai pas dans le détail des démonstrations et me bornerai ici à donner quelques applications de ce théorème, qui formeront le sujet de ma conférence. Permettez-moi d'abord de préciser un peu l'énoncé ci-dessus.

Enrouler la droite des nombres réels sur une circonférence de longueur un, signifie que l'on considère deux nombres comme étant égaux, lorsqu'ils sont congrus suivant le module 1 (c'est-à-dire lorsque leur différence est un nombre entier). Autrement dit, on remplace tout nombre réel x par le nombre réduit (x) qui lui est congru suivant le module 1, tel que

$$0 \leq (x) < 1 \ .$$

Désignons par $\alpha = aa'$ une portion quelconque de l'intervalle 01 et par n_α le nombre des n nombres

$$(ka) \qquad \{ k = 0, 1, 2, \ldots , \ n - 1 \}$$

---

[1] Conférence faite par M. Hermann Weyl, Professeur à l'Ecole polytechnique de Zurich, à la Réunion de la Société mathématique suisse, tenue à Zurich le 9 mai 1914. Rédaction française de M. Ch. Willigens.

[2] P. Bohl. *Journal f. reine u. angew. Math.*, t. 135 (1909).

[3] W. Sierpinski. *Krakau Ak. Anz.*, A, janv. 1910.

situés dans l'intervalle α; on a la relation

$$\lim_{n=\infty} \frac{n_\alpha}{n} = a' - a \tag{1}$$

ceci quel que soit l'intervalle aa'.

Je passe immédiatement à un deuxième énoncé de ce théorème. J'écrirai pour tout nombre x

$$x = [x] + (x) \ ,$$

le symbole $[x]$ introduit par Gauss ayant sa signification habituelle. n_α peut se représenter par la formule

$$n_\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ [ku - a] - [ku - a'] \right\} \ . \tag{2}$$

En effet, l'expression entre accolades n'est différente de zéro et dans ce cas elle est égale à l'unité que s'il existe un nombre entier h, tel que

$$ku - a' < h \leq ku - a \ ,$$

c'est-à-dire lorsque $ku - h$ ou bien (ku) est situé entre a et a'. n_α étant défini par la formule (2), la formule (1) reste valable alors même que l'hypothèse $o \leq a < a' < 1$ ne se trouve plus réalisée. Désignons par ξ, η les coordonnées rectangulaires des points d'un plan et considérons la portion, limitée par des parallèles, définie par

$$\eta \operatorname{cotg} \gamma - a' < \xi < \eta \operatorname{cotg} \gamma - a$$

l'angle γ des droites qui la limitent avec l'axe des ξ étant défini par la relation

$$\operatorname{cotg} \gamma = u \ .$$

Le terme général de la somme (2) désigne alors le nombre des points nodaux (à coordonnées entières) de la portion de plan ainsi définie, situés sur la droite $\eta = k$ parallèle à l'axe des ξ. n_α sera le nombre de points nodaux, situés dans cette bande de largeur $a' - a$ jusqu'à la hauteur n $(0 \leq \eta < n)$. Nous pouvons donner du théorème le 2e énoncé suivant :

Le nombre des points nodaux situés dans une partie de la bande qui a la hauteur n, tend asymptotiquement lorsque n croît indéfiniment, vers le nombre qui mesure l'aire de la partie ainsi limitée. (2me énoncé).

Nous allons encore transformer l'énoncé. Soit une longueur P_1P_2 donnée dans le plan des $\xi\eta$. Dessinons cette longueur dans toutes les positions qu'elle peut prendre par suite de translations dont les composantes suivant les axes des ξ et η sont mesurées par des nombres entiers. Nous obtenons ainsi tout un réseau de segments. Considérons une flèche se déplaçant d'un mouvement uniforme en suivant une trajectoire rectiligne. La loi du déplacement de la pointe sera définie par les relations :

$$(3) \qquad \xi = at + a' , \qquad \eta = bt + b' , \qquad (a, b, a', b' \text{ constantes})$$

Combien de segments du réseau notre flèche rencontrera-t-elle par unité de temps, ou bien *combien de fois par unité de temps la flèche passera-t-elle entre les extrémités d'un segment du réseau ?* Notre théorème nous dit que *ce nombre est mesuré par l'aire d'un parallélogramme, construit sur le vecteur* P_1P_2 *et la vitesse résultante* (a, b) *comme côtés.*

Car si nous désignons par g' la droite qui resulte de la trajectoire g de la flèche par une translation $\overrightarrow{P_1P_2}$, chaque fois que g rencontre un des segments P_1P_2, son extrémité P_2 sera dans la portion de plan limitée par les deux parallèles g et g', les extrémités P_2 des segments non rencontrés par g ne sont pas dans cette région. Les extrémités P_2 forment un réseau de points, il s'agit donc comme précédemment de compter les points nodaux situés dans une portion de plan limitée par deux parallèles. Ce troisième énoncé de notre théorème est dû à M. Bohl[1].

J'ajoute au dessin obtenu précédemment un réseau de carrés de côté $\frac{1}{2}$, défini par les relations

$$\xi = \frac{m}{2} \qquad \eta = \frac{n}{2} \qquad (m \text{ et } n \text{ nombres entiers}) .$$

Supposons le segment P_1P_2 contenu dans le « carré fondamental » $0 \leq \xi, \eta \leq \frac{1}{2}$. Plions le plan le long des côtés du réseau, de sorte que tous les carrés viennent se superposer au carré fondamental[2]. En un point ξ, η du carré fondamental viendront se superposer les points de coordonnées $m \pm \xi$, $n \pm \eta$ (m et n entiers quelconques et en prenant toutes les combinaisons de signes possibles. La trajectoire rectiligne (3) est devenue une ligne brisée, telle que la décrirait une bille de billard si le carré fondamental était un billard dont les bandes renvoient la bille suivant la loi ordinaire de la réflexion. Les vitesses de la bille sur les dif-

---

[1] P. BOHL, *Journal f. reine u. angew. Math.*, t. 135.

[2] Ce procédé est emprunté à un mémoire de MM. D. KÖNIG et A. SZÜCS, *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, t. 36.

férentes portions de trajectoire sont

$$(+a, +b), \quad (+a, -b), \quad (-a, +b), \quad (-a, -b)$$
$$(+, +), \quad (+, -), \quad (-, +) \quad (-, -).$$

Chaque fois que notre droite g rencontre un segment du réseau, la bille franchit le segment P_1P_2 tracé sur le billard, dans la direction $(+, +)$: ceci se produit en moyenne J fois par unité de temps, J désignant l'aire du parallélogramme défini par P_1P_2 et la vitesse (a, b). Nous choisissons comme unité le double de la longueur d'une bande du billard qui est supposé carré. Si nous prenons la longueur même d'une bande comme unité, nous devons prendre $\frac{1}{4}$J au lieu de J. Si le segment P_1P_2 est perpendiculaire à la vitesse (a, b) et si l'on construit sur P_1P_2 comme côté un rectangle situé dans le plan du billard et de surface R, on peut énoncer le résultat comme suit : Considérons la bille pendant l'intervalle de temps très long de $t = 0$ à t, la durée totale du temps que la bille a employé à traverser le rectangle R dans le sens $(+, +)$ se rapproche asymptotiquement de $\frac{1}{4}$Rt, t croissant indéfiniment. Tout domaine G tracé sur le billard, peut être considéré, par approximation, comme constitué par de petits rectangles dont les côtés sont parallèles à ceux de R. C'est pourquoi nous sommes en droit d'affirmer que le temps employé par la bille pour traverser le domaine G dans le sens $(+, +)$ pendant une durée très longue d'observation de $t = 0$ à t, est représenté asymptotiquement par $\frac{1}{4}$Gt. Si nous procédons de même pour les trois autres directions, $(+, -)$, $(-, +)$, $(-, -)$ et si nous désignons par t_G le temps pendant lequel dans l'intervalle d'observation de $t = 0$ à t la bille s'est trouvée à l'intérieur de G, le *temps de séjour*, et si nous appelons $\lim_{t=\infty} \frac{t_G}{t}$ le temps de séjour relatif, nous arrivons au théorème :

(Le temps de séjour relatif au domaine G est représenté par l'aire de ce domaine, ou bien, puisque nous pouvons considérer l'aire d'un domaine, comme mesurant la probabilité a priori pour qu'un point choisi arbitrairement sur le billard soit situé dans G, *le temps de séjour relatif est égal à la probabilité a priori*. (4^me^ énoncé).

Une hypothèse fondamentale de la mécanique statistique consiste à admettre que cette loi est valable pour tout système mécanique non ordonné. Représentons l'état d'un système à n degrés de liberté par $2n$ coordonnées canoniques, à savoir n coordonnées de position et n coordonnées moments $p_1, p_2, \dots p_n$ et $q_1, q_2, \dots q_n$.

L'espace à $2n$ dimensions, dans lequel un système de valeurs de ces coordonnées est représenté par un point, permet de représenter les états successifs par une courbe, l'état initial étant donné ; et l'espace se décomposera en ∞^{2n-1} de ces courbes, qui ne se rencontrent jamais. Pour développer la mécanique statistique (par exemple la théorie cinétique des gaz) il est nécessaire que l'une quelconque de ces trajectoires passe finalement aussi près que l'on voudra de tout point de l'espace, et que la durée de séjour moyenne dans des domaines égaux soit constante (Ergodenhypothese). Ce principe est un peu modifié par le fait que la courbe doit se trouver en outre sur une surface d'énergie constante, mais en ce moment j'en fais abstraction. *Notre bille de billard est l'exemple le plus simple satisfaisant à l'hypothèse ci-dessus, du moins en ce qui concerne les coordonnées de position.* L'hypothèse n'est pas valable dans notre exemple pour les coordonnées moments, qui sont ici les composantes de la vitesse, n'admettant que les quatre valeurs ($\pm a$, $\pm b$).

Quoique notre théorème de théorie des nombres et les idées qui interviennent dans sa démonstration soient plus intimement liés à la mécanique statistique qu'il ne ressort de l'exemple de la bille de billard, je me contenterai de cette indication et je passe à *l'application à la théorie des perturbations en astronomie.*

Il s'agit d'un système de planètes se mouvant autour d'un astre central, le Soleil (dépassant de beaucoup les planètes en masse). Ce système de masses admet un centre de gravité et un *plan invariable* passant par ce point, qui se trouve déterminé grâce au théorème des aires. Les trajectoires des planètes sont en première approximation des ellipses (loi de Kepler), dont les éléments sont toutefois soumis à des variations lentes, les *perturbations*. Les éléments entrant en ligne de compte sont :

la longitude du nœud ascendant. Le nœud est la droite d'intersection du plan de l'orbite et du plan invariable ; on fixe sa position en mesurant sa distance angulaire à partir d'une direction fixe, choisie une fois pour toutes dans le plan invariable) ;

l'inclinaison de l'orbite (angle du plan de la trajectoire avec le plan invariable) ;

la longitude du périhélie (mesurée dans le plan invariable depuis la direction fixe jusqu'au nœud, ensuite dans le plan de l'orbite jusqu'au périhélie) ;

l'excentricité numérique ;

le demi grand axe.

Prenons la masse du Soleil comme unité et représentons la masse des planètes par εm_h, m_h étant uncertain nombre fini pour chaque planète, le facteur ε par contre doit indiquer la petitesse des masses des planètes ; nous le supposerons tout de suite infiniment petit. Des perturbations appréciables ne se produisent alors que dans des intervalles de temps séculaires, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur de $\frac{1}{\varepsilon}$. Pour étudier les perturbations, au lieu de nous servir de « l'année » (durée de révolution d'une planète autour du soleil) comme unité de temps, nous nous servirons du temps séculaire $t = \varepsilon t'$, t' étant le temps mesuré en années. En faisant tendre ε vers zéro on parvient en passant à la limite aux équations différentielles des perturbations séculaires. L'une d'elles exprime la célèbre loi de stabilité de Laplace : *Les demi-grands axes des trajectoires planétaires sont constants.* Il faut réunir les éléments suivants, soumis à des variations séculaires :

1) l'excentricité numérique r et la longitude du périhélie $2\pi\sigma$, à l'aide desquels je forme le nombre complexe[1]

$$z = re^{2\pi i\sigma} = r(\cos 2\pi\sigma + i \sin 2\pi\sigma) ;$$

2) Le sinus de l'inclinaison de l'orbite j et de la longitude du nœud $2\pi\omega$, que je réunis dans la formule

$$u = \sin j \, . \, e^{2\pi i\omega} .$$

Si l'on se borne aux termes du 1$^{\text{er}}$ degré, ce qui suppose une excentricité et une inclinaison très petites, on obtient des équations de la forme :

$$\frac{dz_h}{dt} = i \sum_k a_{h,k} z_k ,$$

les constantes réelles $a_{h,k}$ désignant les coefficients d'une certaine forme quadratique positive. Pour u on obtient des équations analogues. Si l'on transforme la forme quadratique en prenant les axes de symétrie comme axes de coordonnées, z devient

$$z = \sum_h A_h e^{2\pi i a_h t} ,$$

a_h étant des nombres réels positifs (inverses des carrés des axes) ayant les mêmes valeurs pour toutes les planètes du système, tandis que les constantes complexes A_h se rapportent à une seule de ces planètes. Posons

$$A_h = \mathfrak{A}_h e^{2\pi i a_h'} \quad (\mathfrak{A}_h \geq 0 , \quad a_h' \text{ réel})$$

on a

$$z = \sum_h \mathfrak{A}_h e^{2\pi i (a_h t + a_h')} .$$

[1] Je m'écarte ici des notations d'usage en astronomie, qui pourraient prêter à confusion avec les quantités e, π, i des mathématiques pures, dont il est fait usage ici.

Ne considérons d'abord comme M. Bohl que le cas de trois planètes :

$$(4) \qquad z = \mathfrak{A} e^{2\pi i (at + a')} + \mathfrak{B} e^{2\pi i (bt + b')} + \mathfrak{C} e^{2\pi i (ct + c')}$$

Quoique la théorie classique des perturbations séculaires soit basée sur la conception de l'univers d'après Kepler et Newton et non d'après Ptolémée, nous ferons bien de nous représenter la dernière relation à l'aide d'un mécanisme d'épicycles. Supposons située dans le plan des nombres complexes z une roue de rayon $\mathfrak{C}$ de centre $z = 0$ mobile autour de son centre. Une deuxieme roue de rayon $\mathfrak{B}$ a son centre situé sur la circonférence de la première et finalement une troisième roue a son centre sur la circonférence de la seconde et se trouve munie d'un repère sur sa circonférence. Si nous faisons tourner la première roue avec une vitesse angulaire $2\pi c$, la seconde avec une vitesse $2\pi (b - c)$, la troisième avec la vitesse $2\pi (a - b - c)$, l'équation (4) représente le mouvement résultant du repère z. Il s'agit maintenant de trouver pour l'accroissement de l'azimut $2\pi\sigma$ longitude du périhélie une loi valable à la limite $t = \infty$. Nous pouvons supposer la roue de centre $z = 0$ immobile, car nous n'aurons qu'à composer son mouvement avec celui obtenu dans cette hypothèse pour le repère :

$$z = e^{2\pi i (ct + c')} z_1 \; ; \qquad z_1 = \mathfrak{A} e^{2\pi i (a_1 t + a_1')} + \mathfrak{B} e^{2\pi i (b_1 t + b_1')} + \mathfrak{C}$$

$$a_1 = a - c \, , \quad a_1' = a' - c' \, , \quad b_1 = b - c \, , \quad b_1' = b' - c' \, .$$

L'azimut $2\pi\sigma_1$ de $z_1 = re^{2\pi i \sigma_1}$ est relié à σ par la relation

$$\sigma = \sigma_1 + (ct + c') \, .$$

Nous pouvons étudier le mouvement de z_1 au lieu de celui de z, ce qui revient à poser en supprimant l'indice 1, $c = c' = 0$.

Toutes les positions de z possibles au point de vue cinématique (la roue principale de centre $z = 0$ étant fixe) sont données par

$$(5) \qquad z = \mathfrak{A} e^{2\pi i \xi} + \mathfrak{B} e^{2\pi i \eta} + \mathfrak{C} \, .$$

Les quantités réelles ξ, η pouvant prendre toutes les valeurs possibles, peuvent être considérées comme coordonnées d'un point d'un plan. Le mouvement réel sera défini par

$$(6) \qquad \xi = at + a' \qquad \eta = bt + b' \; ;$$

elle est donc représentée par une droite parcourue avec une vitesse uniforme.

Si $\mathfrak{C} > \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ (cas de Lagrange) on a pour toutes les positions possibles du repère

$$|2\pi\sigma| \leqq 2\pi\sigma^0 < \frac{\pi}{2}, \qquad |\sigma| < \frac{1}{4},$$

$2\pi\sigma^0$ étant un angle défini par la relation

$$\sin 2\pi\sigma^0 = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}.$$

Dans ce cas le repère ne peut parcourir un chemin enveloppant l'origine. Supprimons l'hypothèse $c = c^* = 0$, nous aurons

$$|\sigma - (ct + c^*)| < \frac{1}{4} \qquad \lim_{t=\infty} \frac{\sigma}{t} = c.$$

Le mouvement de la roue principale décide tout. *Le périhélie a un mouvement moyen*, c'est-à-dire qu'en moyenne par unité de temps, il se déplace de la quantité $2\pi c$ dans le sens du mouvement de la planète. Ce résultat est valable dans un système de plus de trois planètes, pour chacune d'entre celles pour lesquelles la condition de Lagrange est vérifiée, c'est-à-dire quand l'un des nombres $\mathfrak{A}_h$ est plus grand que la somme des autres. Cette condition est remplie pour les huit grandes planètes de notre système solaire sauf pour Vénus et la Terre. Il n'y a donc que pour ces deux planètes que l'on ignore si elles ont un déplacement moyen du périhélie et du nœud ascendant, dans le sens du mouvement planétaire.

C'est à M. Bohl que revient le mérite d'avoir traité le second cas où aucun des trois nombres $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ n'est supérieur à la somme des deux autres. Je vais tâcher d'établir rapidement son principal résultat, de telle sorte qu'il soit facile de l'étendre à plus de trois planètes, ce à quoi M. Bohl ne semble pas être parvenu.

Définissons $z = re^{2\pi i\sigma}$ par la relation (5) et considérons toutes les positions possibles au point de vue cinématique du repère, la roue principale étant au repos. σ est alors une fonction de ξ, η qui n'est pas uniforme, mais présente aux points où $z = 0$ des points de ramification d'ordre infini, c'est-à-dire pour une position du mécanisme telle que le repère soit confondu avec l'origine. Il y a deux telles positions, répondant à ce fait que l'on peut, connaissant les trois côtés, construire deux triangles (symétriques, mais non directement égaux). Désignons par $\pi\alpha$, $\pi\beta$, $\pi\gamma$ les angles du triangle de côtés $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, nous avons comme solutions de l'équation $z = 0$

$$\xi = \frac{1-\beta}{2}, \quad \eta = \frac{1+\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{1+\beta}{2}, \quad \eta = \frac{1-\alpha}{2},$$

ainsi que tous les points ξ, η, dont les coordonnées sont congrues à celles-ci mod. 1.

Réunissons les deux points ainsi obtenus par un segment de droite le long duquel nous ferons une coupure dans le plan, ainsi que le long de tous les segments qui s'en déduisent par des translations dont les composantes sont mesurées par des nombres entiers. Des considérations géométriques simples montrent que dans le plan ainsi obtenu, la fonction $\sigma = \sigma(\xi, \eta)$ est uniforme et continue et que pour chacune des variables ξ, η elle admet la période un. Par conséquent $\sigma_0(\xi, \eta)$ est une fonction bornée (en valeur absolue elle reste inférieure à $\frac{1}{2}$). Lorsque le point ξ, η traverse une coupure, la fonction subit une diminution brusque de valeur d'une unité. Poursuivons la variation continue de σ pendant que le point ξ, η décrit la trajectoire rectiligne définie par (6). Si nous partons de $t = 0$ correspondant à la valeur initiale $\sigma = \sigma_0(a', b')$ au bout du temps t pendant lequel la trajectoire a franchi n_t coupures, $\sigma = \sigma_0 + n_t$, on a donc pour tous les temps $|\sigma - n_t| \leq \frac{1}{2}$. Nous avons trouvé pour n_t une valeur asymptotique Jt, J désignant l'aire d'un parallélogramme dont les côtés sont le segment le long duquel s'étend la coupure et le vecteur de composantes (a, b): $J = a\alpha + b\beta$ (le rapport $\frac{a}{b}$ étant supposé incommensurable). Nous trouvons donc la loi

$$\lim_{t=\infty} \frac{\sigma}{t} = a\alpha + b\beta .$$

Si nous supprimons l'hypothèse $c = c' = 0$ nous devons remplacer dans le 2e membre a et b par $a - c$ et $b - c$, et ajouter c:

$$\lim_{t=\infty} \frac{\sigma}{t} = a\alpha + b\beta + c\gamma .$$

Cette belle loi due à Bohl constitue un cinquième énoncé de notre théorème. Il dit que *même dans le cas non traité par Lagrange il existe un déplacement moyen du périhélie dans le sens positif qui n'est pas donné par l'une des vitesses angulaires a, b, c, mais par une certaine valeur moyenne de ces trois quantités.*

Si l'on veut étendre la loi de Bohl à quatre et plus de planètes, il faut étendre le théorème de la théorie des nombres, qui nous a servi de base, à plusieurs nombres irrationnels considérés simultanément. Pour deux nombres u et v irrationnels qui ne sont pas liés par une relation linéaire à coefficients entiers il s'énonce alors :

Si nous considérons dans un plan un système de coordonnées rectangulaires, les points admettant les coordonnées nu — ne *réduites suivant le module un* ($n = 1, 2, 3, \ldots$) *ne forment pas seulement dans le carré ayant l'unité pour côté un ensemble dense* (c'est l'énoncé d'un célèbre théorème d'approximation de Kronecker), *mais ils présentent encore partout la même densité.*

Les démonstrations de Bohl et de Sierpinski (qui sont identiques dans leurs traits essentiels) ne se prêtaient pas à une généralisation telle qu'elle est nécessaire ici. C'est pour cette raison semble-t-il que M. Bohl a dû se borner au cas de trois planètes. Il y a à peu près un an, j'ai présenté à Göttingue une démonstration valable pour deux et un nombre supérieur de nombres irrationnels, se basant sur l'invariant analytique $e^{2\pi i x}$ des classes de nombres mod. 1 et la théorie des séries de Fourier. Elle paraîtra prochainement, ainsi que les résultats d'autres recherches du même ordre d'idées, dans les « Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen »[1]. Une autre démonstration élémentaire me fut communiquée peu après par M. H. Bohr.

En nous appuyant sur le théorème énoncé ci-dessus pour deux nombres irrationnels, nous pouvons aborder l'étude des perturbations dans le cas de quatre planètes.

Dans un espace rapporté aux coordonnées ξ, η, ζ, considérons une courbe fermée $\mathfrak{C}$ sur laquelle nous choisirons un sens de circulation. Considérons en outre la trajectoire rectiligne d'une flèche se déplaçant d'un mouvement uniforme

$$\xi = at + a^* \,, \qquad \eta = bt + b^* \,, \qquad \zeta = ct + c^* \,.$$

Nous supposerons que la flèche ne rencontre pas la courbe $\mathfrak{C}$, dans quelles conditions dirons-nous qu'elle traverse cette courbe ? Par un point O de la trajectoire de la flèche menons un plan E perpendiculaire a cette droite, sur lequel nous projetterons $\mathfrak{C}$ orthogonalement suivant $\overline{\mathfrak{C}}$. Si dans le plan E la courbe $\overline{\mathfrak{C}}$ enveloppe m fois le point O (c'est-à-dire si le rayon vecteur $\overline{\mathrm{OP}}$ décrit un angle $2\pi m$, lorsque le point P décrit la courbe $\overline{\mathfrak{C}}$ dans le sens de circulation) nous dirons que la flèche traverse m fois la courbe $\mathfrak{C}$ (m pouvant être négatif). Si nous avons deux plans E_1 et E_2 perpendiculaires à la trajectoire de la flèche, entre lesquels la courbe $\mathfrak{C}$ est entièrement située, qui sont rencontrés par la flèche aux instants t_1 et t_2, les m passages à travers la courbe seront effectués dans le temps qui s'écoule entre t_1 et t_2. Nous n'avons pas besoin de fixer le moment précis de ces passages. Construisons à l'aide de $\mathfrak{C}$ un réseau en lui faisant subir toutes les translations ayant des composantes mesurées par des nombres entiers, suivant les trois axes de coordonnées, et cherchons combien de fois la flèche

[1] *L. c.*, séance du 13 juin 1914.

traversera de courbes du réseau en moyenne par unité de temps. *Ce nombre sera mesuré par le volume d'un tronc de cylindre, ayant pour directrice $\mathcal{C}$, pour direction des génératrices la trajectoire de la flèche et pour hauteur la vitesse de la flèche :*

$$(7) \qquad V = \frac{a}{2} \int_{(\mathcal{C})} (\eta d\zeta - \zeta d\eta) + \frac{b}{2} \int_{(\mathcal{C})} (\zeta d\xi - \xi d\zeta) + \frac{c}{2} \int_{(\mathcal{C})} (\xi d\eta - \eta d\xi) .$$

Dans un système de quatre planètes nous avons pour l'une d'elles :

$$z = re^{2\pi i \sigma} = \sum_h \mathfrak{A}_h e^{2\pi i \xi_h} \qquad \xi_h = a_h t + \mathring{a}_h \qquad h = 1, 2, 3, 4 .$$

Nous représenterons de nouveau notre trajectoire dans le plan des z à l'aide d'un système d'épicycles qui se composera de 4 roues de rayons $\mathfrak{A}_h$. La roue principale de centre $z = 0$ aura pour rayon $\mathfrak{A}_4$ et ce ne sera pas une restriction que de la supposer immobile ou ce qui revient au même de supposer $a_4 = \mathring{a}_4 = 0$.

Faisons abstraction du cas connu, traité par Lagrange. Il sera possible d'amener le repère à passer par l'origine, c'est-à-dire de construire un quadrilatère à l'aide des quatre côtés $\mathfrak{A}_h$. Ce quadrilatère n'est pas complètement déterminé (comme le triangle dans le cas précédent) mais possède encore un degré de liberté. Nous avons un quadrilatère plan articulé. $2\pi\xi_h$ sont les angles des côtés avec une direction fixe choisie dans le plan une fois pour toutes. Nous avons deux cas à considérer.

1er cas: La somme du plus grand et du plus petit côté est supérieure à la somme des deux côtés moyens. On peut parcourir en un seul cycle toutes les formes du quadrilatère articulé, les six différences d'angles

$$\xi_2 - \xi_3 , \quad \xi_3 - \xi_1 , \quad \xi_1 - \xi_2 , \quad \xi_1 - \xi_4 , \quad \xi_2 - \xi_4 , \quad \xi_3 - \xi_4$$

revenant à leurs valeurs primitives. Si nous maintenons ξ_4 constant, c'est-à-dire si nous prenons $\mathfrak{A}_4$ comme base fixe du quadrilatère (par exemple, soit $\xi_4 = 0$), le point de coordonnées rectangulaires ξ_1, ξ_2, ξ_3 dans l'espace décrit une courbe fermée $\mathcal{C}$, qui n'est toutefois déterminée qu'à une translation près à composantes entières. Nous sommes donc en présence d'un réseau de courbes sur lesquelles $z = 0$. Le quadrilatère articulé est alors un système oscillant double, c'est-à-dire les deux bras ne peuvent qu'osciller de part et d'autre sans effectuer de tour complet.

2me cas: Toutes les formes distinctes possibles du quadrilatère articulé font partie de deux cycles sans que le passage de l'un à l'autre puisse s'effectuer d'une façon continue. Si $\mathfrak{A}_4$ est le plus petit côté, les différences $\xi_1 - \xi_4$, $\xi_2 - \xi_4$, $\xi_3 - \xi_4$ augmentent de ± 1 pendant que l'on décrit un cycle. Les trois autres différences d'angles reviennent à leurs valeurs primitives. Suivant les côtés que l'on choisit comme base, tige d'accouplement et bras du quadrilatère articulé nous aurons un système à deux bras effectuant des tours complets, un bras tournant, l'autre oscillant ou enfin les deux bras oscillant.

Je me bornerai au premier cas : la discussion du second cas n'est pas essentiellement différente. Supposons $a_4 = \dot{a}_4 = 0$. De la formule 7 nous déduirons par des considérations analogues à celles qui nous ont conduit au but dans le cas de trois planètes

$$\lim_{t=\infty} \frac{\sigma}{t} = \frac{a_1}{2} \int_{(\mathfrak{C})} (\xi_2 \, d\xi_3 - \xi_3 \, d\xi_2) + \frac{a_2}{2} \int_{(\mathfrak{C})} (\xi_3 \, d\xi_1 - \xi_1 \, d\xi_3) + \frac{a_3}{2} \int_{(\mathfrak{C})} (\xi_1 \, d\xi_2 - \xi_2 \, d\xi_1) \; .$$

Si nous supprimons la condition $a_4 = \dot{a}_4 = 0$ nous devons remplacer dans le 2me membre a_1, a_2, a_3, ξ_1, ξ_2, ξ_3 par $a_1 - a_4$, $a_2 - a_4$, $a_3 - a_4$, $\xi_1 - \xi_4$, $\xi_2 - \xi_4$, $\xi_3 - \xi_4$ et ajouter a_4. Pour écrire le résultat simplement, nous introduirons les intégrales :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{C}} \left\{ (\xi_2 \, d\xi_3 - \xi_3 \, d\xi_2) + (\xi_3 \, d\xi_4 - \xi_4 \, d\xi_3) + (\xi_4 \, d\xi_2 - \xi_2 \, d\xi_4) \right\}$$

et des expressions analogues α_2, α_3, α_4. Ces notations doivent être interprétées comme suit : $2\pi\xi_h$ désignent les angles que forment les côtés du quadrilatère avec une direction fixe du plan. Les intégrales s'étendent à un cycle complet parcouru dans le plan par le quadrilatère articulé et dans lequel il prend toutes les formes que peut prendre un quadrilatère de côtés $\mathfrak{A}_h$. La façon dont sont parcourues toutes ces formes possibles dépend de trois fonctions arbitraires du temps, mais elles sont sans influence sur les quantités α_h, et bien entendu les quantités α_h ne dépendent pas de la direction fixe à partir de laquelle on a mesuré les angles $2\pi\xi_h$. On pourra appeler à bon droit les quantités α_h les *invariants intégraux* du quadrilatère articulé. On obtient pour le mouvement moyen du périhélie l'expression :

$$a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + a_4 (1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) \; .$$

Le résultat devant être symétrique en a_1, a_2, a_3, a_4 on trouve :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$$

$$\lim_{t=\infty} \frac{\sigma}{t} = a_1 \alpha_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + a_4 \alpha_4 \; .$$

Je ne suis pas arrivé à vérifier le premier résultat, à savoir que la somme des quatre invariants intégraux d'un quadrilatère articulé est égale à l'unité, partant de leur définition. La dernière relation permet de supposer que les relations qui lient les quatre côtés aux quatre invariants intégraux d'un quadrilatère articulé sont l'analogue des relations entre les côtés et les angles d'un triangle fixe. Ce sont ces relations et non celles entre les côtés et les angles d'un quadrilatère fixe qui semblent être l'analogue le plus proche et le plus naturel de la théorie des triangles plans. J'ignore jusqu'à quel point ceci est vrai; mais on se rend en tout cas compte que l'on a devant soi le point de départ d'une théorie plus approfondie des quadrilatères articulés.

Les invariants intégraux sont positifs. Dans le cas discuté *nous avons donc de nouveau un déplacement moyen du périhélie dans le sens positif, déterminé par une valeur moyenne des vitesses* $2\pi a_p$ *des différentes roues de l'épicycle.*

Le mouvement moyen du périhélie et du nœud ascendant a été étudié pour toutes les planètes, sauf Vénus et la Terre, avec le plus de soin par Stockwell[1]. Pour les déterminer il faut être certain que l'on a affaire au cas de Lagrange, après quoi on n'a plus qu'à déterminer les quantités $a_1, a_2, \ldots a_8$, pour notre système planétaire, c'est-à-dire à rapporter à ces axes de symétrie une forme quadratique de huit variables. Si l'on veut résoudre le même problème pour la Terre et Vénus, il faut calculer les quantités $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots \mathfrak{A}_8$, correspondant à ces deux planètes, puis évaluer des intégrales quintuples, étendues à toutes les formes distinctes prises par un octogone articulé. Les calculs que ceci entraînerait pourraient faire reculer, et renoncer à les effectuer réellement.

On peut toutefois affirmer que Vénus et la Terre présentent également un mouvement moyen du périhélie dans le sens du mouvement planétaire. Le mouvement rétrograde actuel du du périhélie de Vénus ne saurait donc être qu'un phénomène passager.

J'espère vous avoir montré, par ces quelques développements, comment la théorie des nombres peut être appelée à jouer un rôle dans les applications des mathématiques.

Herm. WEYL (Zurich).

[1] *Smithsonian Contributions to Knowledge*, vol. XVIII, 1870.

LE PROBLÈME DES TRAJECTOIRES EN COORDONNÉES TANGENTIELLES

Dans un travail récemment publié par M. Teixeira, dans ses *Annales*[1], j'ai été amené, à l'occasion de recherches sur les courbes algébrico-interscendantes, à résoudre un problème particulier de trajectoires orthogonales d'une infinité de cercles, par une méthode tangentielle ; je pense que c'est là le premier exemple d'application de cette méthode au problème des trajectoires. Dès la lecture de mon travail, M. Maurice d'Ocagne a bien voulu, dans une lettre en date du 8 février 1914, attirer mon attention sur un certain nombre de points et me signaler l'intérêt que pourrait offrir une étude plus approfondie de la question. Aussi vais-je reprendre celle-ci sous un point de vue beaucoup plus général et essayer de présenter sous une forme précise les principes de l'application des tangentielles au problème des trajectoires de courbes planes.

1. — Soit donc

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - \varpi = 0$$

l'équation par rapport à deux axes rectangulaires (Ox, Oy), de la tangente, en un point courant M, à une courbe (C) ; soit de même

$$x \cos \varphi_1 + y \sin \varphi_1 - \varpi_1 = 0$$

l'équation, par rapport aux mêmes axes, de la tangente, au même point M, à une courbe (C_1), supposée orthogonale à la courbe (C) en ce point M. Pour exprimer l'orthogonalité, il suffit de poser tout d'abord

$$(1) \qquad \varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2},$$

puis d'écrire que les coordonnées cartésiennes x et y du point M de la courbe (C) sont respectivement égales aux coordonnées x et

[1] Sur une généralisation algébrico-interscendante de la tractrice (Extrait d'une lettre adressée, le 26 mai 1913, à M. F. Gomes-Teixeira), *Annaes da Academia Polytechnica do Porto*. Publicados sob a direcçao de F. Gomes Teixeira, t. VIII, 1913.

y du même point, considéré comme appartenant à la courbe C_1. Des expressions générales des coordonnées ponctuelles, dans la représentation tangentielle de Hesse, il résulte que l'on doit poser :

$$x = \varpi \cos \varphi - \frac{d\varpi}{d\varphi} \sin \varphi = - \varpi_1 \sin \varphi - \frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} \cos \varphi ,$$

$$y = \varpi \sin \varphi + \frac{d\varpi}{d\varphi} \cos \varphi = \varpi_1 \cos \varphi - \frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} \sin \varphi ,$$

c'est-à-dire :

$$\cos \varphi \left(\varpi + \frac{d\varpi_1}{d\varphi_1}\right) = \sin \varphi \left(\frac{d\varpi}{d\varphi} - \varpi_1\right) ,$$

$$\sin \varphi \left(\varpi + \frac{d\varpi_1}{d\varphi_1}\right) = \cos \varphi \left(\varpi_1 - \frac{d\varpi}{d\varphi}\right) ;$$

il vient donc finalement :

$$(2) \qquad \varpi_1 = \frac{d\varpi}{d\varphi} , \qquad \frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} = - \varpi .$$

Ces résultats étaient à prévoir, puisque ϖ_1 est la distance du pôle O à la normale de (C) et $\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1}$ la distance du pôle à la tangente de (C). La méthode de pur calcul, que j'ai exposée, présente l'avantage de supprimer toute hésitation relative aux signes à prendre devant ces distances, que l'on sait être égales en valeurs absolues.

Les trois formules (1) et (2) vont permettre de traiter la question posée. Mais avant d'aller plus loin, il convient de faire une vérification importante. En appliquant, en effet, à la courbe C_1 les formules (1) et (2), on a :

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} = \varphi + \pi$$

$$\varpi_2 = \frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} = - \varpi , \qquad \frac{d\varpi_2}{d\varphi_2} = - \varpi_1 = - \frac{d\varpi}{d\varphi} ,$$

d'où

$$x \cos \varphi_2 + y \sin \varphi_2 - \varpi_2 \equiv - (x \cos \varphi + y \sin \varphi - \varpi) ,$$

$$- x \sin \varphi_2 + y \cos \varphi_2 - \frac{d\varpi_2}{d\varphi_2} \equiv - \left(- x \sin \varphi + y \cos \varphi - \frac{d\varpi}{d\varphi}\right)$$

ce qui prouve bien que toute courbe orthogonale à C_1 en M est bien tangente à (C).

2. — Cela étant, je considère une famille de courbes planes (C) ; soit

$$f\left(\varpi, \frac{d\varpi}{d\varphi}, \varphi\right) = 0$$

l'équation différentielle du premier ordre définissant ou caractérisant ces courbes (C). Dans ces conditions, l'équation différentielle des trajectoires orthogonales (C_1) des courbes (C) sera :

$$f\left(-\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1}, \varpi_1, \varphi_1 - \frac{\pi}{2}\right) = 0 .$$

Plus généralement, dans le cas des trajectoires obliques, sous l'angle V, on devrait poser :

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + V , \\ \varpi_1 &= \varpi \cos V + \frac{d\varpi}{d\varphi} \sin V , \\ \frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} &= -\varpi \sin V + \frac{d\varpi}{d\varphi} \cos V , \end{aligned}\right.$$

formules qui permettraient de déduire sans difficulté l'équation différentielle des trajectoires de celle des courbes imposées.

La méthode pourrait cesser de s'appliquer dans le cas où les courbes (C) sont des droites, puisque cette méthode est tangentielle. Mais dans ce cas, on se trouve en présence des diverses développantes d'une courbe donnée, s'il s'agit du problème des trajectoires orthogonales. Si ϖ_0 et φ_0 sont les éléments qui caractérisent la droite, c'est-à-dire encore la développée imposée, les formules

$$\left\{\begin{aligned} \Phi &= \varphi_0 \pm \frac{\pi}{2} , \\ \Pi &= \int \varpi_0 \, d\varphi_0 + \text{const} , \end{aligned}\right.$$

résolvent, on le sait, le problème des développantes. Dans le cas des trajectoires obliques, on se trouve en présence d'un problème qui se rattache à la théorie des développoïdes des courbes planes : c'est le problème inverse de celui des développoïdes. On est amené au système d'équations

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi_0 \mp V = \Phi \\ &\Pi \cos V + \frac{d\Pi}{d\Phi} \sin V = \varpi_0 , \end{aligned}\right.$$

dont la seconde est du premier ordre, linéaire et à coefficients constants : son intégration donne l'équation des développantes généralisées cherchées

$$\sin V \cdot H = e^{-\Phi \operatorname{cotg} V} \times \left(A + \int \varpi_0 (\Phi + V) \times e^{\Phi \operatorname{cotg} V} d\Phi \right)$$

en fonction d'une constante arbitraire A.

Pour illustrer les considérations générales qui précèdent, je vais prendre l'étude d'une question d'apparence purement théorique et qui est pourtant susceptible de réalisation pratique. Elle est due à M. H. Brocard.

3. — Les cisailles de tôle se composent de deux branches dont l'une, rectiligne, est fixe et dont l'autre, curviligne, est mobile autour d'un point fixe O. On suppose que la partie mobile, qui doit trancher le métal, est assujettie à rencontrer la branche rectiligne sous un angle constant. Théoriquement, une spirale logarithmique, tournant autour de son pôle, représente la courbe désirée. Pour plus de généralité, on doit supposer que l'axe de rotation est en dehors de la ligne droite fixe et alors la courbe devient un peu plus compliquée. C'est là précisément l'objet de la question posée par M. H. Brocard (*Nouvelle Correspondance mathématique*, 1877, question n° 308, résolue en 1879, p. 54-55 par Bombled) : *Trouver une courbe qui, tournant autour d'un point fixe O, rencontre une droite fixe sous un angle constant.* La courbe a été définie par Bombled comme trajectoire oblique des tangentes à une courbe fixe et représentée par l'équation (à une rotation près autour du pôle)

$$\theta = m \cdot \log \left(\sqrt{r^2 - 1} - m\right) + \operatorname{arc} \cos \frac{1}{r}$$

en coordonnées polaires ; O est le pôle ; la droite fixe est l'axe polaire, le cercle fixe ayant l'unité pour rayon.

On peut définir le même problème comme un cas particulier de celui du problème inverse des développoïdes, que je considère ici : la courbe désirée, généralisation de la développante de cercle, est la courbe la plus générale qui admet un cercle pour développoïde particulière[1].

En appliquant la méthode générale que je viens d'indiquer quelques lignes plus haut, il vient pour $\varpi_0 = 1$:

$$H = \frac{1}{\cos V} + B \cdot e^{-\Phi \operatorname{cotg} V} \; ; \qquad (B = \text{const})$$

et sous cette forme, on reconnaît que la *partie mobile de la cisaille*

[1] H. Bouasse et E. Turrière, Exercices et compléments de Mathématiques générales, Paris, 1912, p. 352-353.

doit avoir pour profil une courbe parallèle à une spirale logarithmique, propriété dont il est aisé de se rendre compte géométriquement.

4. — Reprenons le cas général des trajectoires, orthogonales par exemple. Il est souvent avantageux de procéder de la manière suivante. La famille donnée de courbes (C) est supposée représentée par une équation

$$F(\varpi, \varphi, \lambda) = 0, \tag{3}$$

dans laquelle figure le paramètre λ. Par dérivation en φ, il vient :

$$\frac{\partial F}{\partial \varpi}\frac{d\varpi}{d\varphi} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0. \tag{4}$$

Dans ces équations (3) et (4), substituons les éléments de la courbe orthogonale (C₁), définis par les équations (1) et (2) ; on obtient :

$$\left\{\begin{aligned} &F\left(-\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1}, \quad \varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \quad \lambda\right) = 0, && (5)\\ &\varpi_1 \frac{\partial F}{\partial \varpi} + \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0 ; && (6)\end{aligned}\right.$$

dans ces deux dernières équations, $\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1}$, qui n'est point la dérivée de la fonction ϖ, est la valeur que prend en M cette dérivée. En d'autres termes, il faut actuellement considérer λ comme une certaine fonction de φ_1. Posons, pour abréger :

$$\left\{\begin{aligned} &F_1 = \frac{\partial F}{\partial \varpi}, \qquad F_2 = \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}, \qquad F_3 = \frac{\partial F}{\partial \lambda} ;\\ &F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial \varpi^2}, \qquad \text{etc.} \dots ;\end{aligned}\right.$$

il vient :

$$F = 0, \qquad \varpi_1 F_1 + F_2 = 0,$$

et par dérivation :

$$-\frac{d^2\varpi_1}{d\varphi_1^2} F_1 + F_2 + \frac{d\lambda}{d\varphi_1} \cdot F_3 = 0,$$

$$\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} \cdot F_1 + \varpi_1\left[-\frac{d^2\varpi_1}{d\varphi_1^2} \cdot F_{11} + F_{12} + \frac{d\lambda}{d\varphi_1} F_{13}\right]$$
$$-\frac{d^2\varpi_1}{d\varphi_1^2} F_{12} + F_{22} + \frac{d\lambda}{d\varphi_1} F_{23} = 0.$$

Eliminons alors $\frac{d^2\varpi_1}{d\varphi_1^2}$ entre ces deux dernières équations. Puis, entre l'équation obtenue et les équations (5) et (6), éliminons ϖ_1 et $\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1}$. Le résultant est une équation différentielle du premier ordre entre $\frac{d\lambda}{d\varphi_1}$, λ et φ_1.

Soit alors λ une intégrale particulière de cette équation différentielle. Après substitution de l'expression de λ en fonction de φ_1 dans l'équation (5), on obtient une relation entre $\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1}$ et λ. *C'est précisément la représentation analytique de la développée de la trajectoire orthogonale* C_1 particulière qui correspond à cette intégrale λ.

Portant enfin cette même expression de λ et celle de $\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1}$, déduite de (5), dans l'équation (6), on obtient la fonction ϖ_1 de φ_1, caractéristique de la trajectoire (C_1), elle-même.

Les calculs qui précèdent se simplifient considérablement dans le cas où le faisceau imposé C_1 est défini par une équation résolue en ϖ :

$$\varpi = f(\varphi_1 \lambda) ,$$

on a alors

$$\varpi_1 = \frac{\partial f}{\partial \varphi} , \qquad \frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} = - f ;$$

d'où l'équation différentielle :

$$\frac{d\lambda}{d\varphi_1} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi_1 \partial\lambda}\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \lambda\right) + f\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \lambda\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial\varphi_1^2}\left(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}, \lambda\right) = 0 .$$

Je vais appliquer cette méthode à l'étude des trajectoires orthogonales des familles de cercles, en commençant naturellement par le cas, tout particulièrement intéressant des cercles ayant leurs centres sur une ligne droite.

5. — *Trajectoires orthogonales d'une famille de cercles ayant leurs centres sur une ligne droite*. Soit

$$\varpi = R + \lambda \cos \varphi ,$$

l'équation polaire tangentielle d'un cercle de rayon R et de centre

$x = \lambda$ situé sur l'axe Ox. Les formules générales deviennent alors :

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2}, \qquad \varpi_1 = \frac{d\varpi}{d\varphi} = -\lambda \sin\varphi = \lambda \cos\varphi_1,$$

$$\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} = -\varpi = -R - \lambda\cos\varphi = -R - \lambda \sin\varphi_1 ;$$

on devra avoir :

$$\frac{d\lambda}{d\varphi_1}\cos\varphi_1 = -R$$

condition qui donne :

$$\log \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = -\int \frac{d\lambda}{R} + \text{const} ;$$

cette formule, associée à

$$\varpi_1 = \lambda\cos\varphi_1,$$

définit la courbe trajectoire générale désirée. La méthode qui précède n'est pas distincte de celle des coordonnées axiales de M. Maurice d'Ocagne : λ et φ_1 sont précisément les coordonnées axiales de la trajectoire.

En prenant R constant, on retrouve ainsi l'équation de la tractrice d'Huygens :

$$\varpi_1 = A\cos\varphi_1 - R\cos\varphi_1 \log\operatorname{tang}\left(\frac{\varphi_1}{2} + \frac{\pi}{4}\right) ;$$

la constante arbitraire A peut être réduite à 0 par un changement convenable d'axe Oy.

Pour $R = \lambda$, on retrouve les trajectoires orthogonales des cercles homothétiques à un cercle fixe. D'une manière générale, en prenant pour R un polynome quelconque en λ à zéros distincts, on aura une trajectoire générale algébrico-interscendante ; si tous les zéros de ce polynome R sont réels, la trajectoire sera soit algébrique soit interscendante proprement dite ; s'il y a au moins un couple de zéros imaginaires conjugués, on se trouvera en présence de trajectoires transcendantes qui pourront être considérées comme des courbes interscendantes par généralisation complexe. Si, enfin, le polynome R admet une racine multiple, les trajectoires correspondantes seront des courbes transcendantes, associables, au titre de courbes transcendantes singulières limites, à la famille algébrico-interscendante considérée. On voit donc qu'il sera possible de constituer ainsi des familles algébrico-interscendantes complètes de courbes trajectoires orthogonales de cercles.

Un autre cas particulier présentant de l'intérêt est celui des cercles bitangents à une conique. R est alors la racine carrée d'un polynome du second degré en λ.

6. — M. Maurice d'Ocagne m'a signalé cette propriété très simple des trajectoires orthogonales des cercles homothétiques : *Le centre de courbure de la trajectoire orthogonale en* M *au cercle de centre T est situé sur la perpendiculaire menée de* T *au rayon vecteur* OM ; ou encore : *si une droite issue de* O *coupe l'un des cercles en* M *et en* M', *les deux trajectoires orthogonales, en ces deux points, ont pour centre de courbure commun le pôle de la droite* OMM' *par rapport au cercle.*

Cette propriété bien curieuse est caractéristique de la famille considérée de cercles. Le pôle de OM par rapport au cercle

$$\varpi = R + \lambda \cos \varphi \; .$$

est situé sur la tangente M et sur la polaire de O, droites qui ont pour équations respectives :

$$\begin{cases} X \cos \varphi + Y \sin \varphi = \varpi \\ \lambda X = \lambda^2 - R^2 \; ; \end{cases}$$

les coordonnées de ce pôle sont donc :

$$X = \lambda - \frac{R^2}{\lambda} \qquad Y = \frac{R}{\sin \varphi} + \frac{R^2}{\lambda} \operatorname{cotang} \varphi \; .$$

l'équation

$$-x \sin \varphi + y \cos \varphi = \frac{\partial \varpi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varpi}{\partial \lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\varphi} = -\lambda \sin \varphi + \frac{R}{\sin \varphi}\left(\frac{dR}{d\lambda} + \cos \varphi\right) \; ,$$

représente d'autre part la perpendiculaire, au centre de courbure, à la normale de la trajectoire ; la distance δ du pôle de OMM' et du centre de courbure est donc :

$$\delta = -X \sin \varphi + Y \cos \varphi + \lambda \sin \varphi - \frac{R}{\sin \varphi}\left(\frac{dR}{d\lambda} + \cos \varphi\right)$$

c'est-à-dire en substituant à x et y leurs expressions précédemment trouvées :

$$\delta = \frac{R}{\sin \varphi}\left(\frac{R}{\lambda} - \frac{dR}{d\lambda}\right) \; ;$$

ces deux points seront confondus pour $\delta = o$; ce qui donne : $\frac{R}{\lambda} = \text{const.}$

7. — *Trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de cercles.* Le rayon R et les deux coordonnées a et b du centre C

d'un des cercles C sont des fonctions d'un paramètre λ ; le lieu des centres est une courbe Γ. L'équation tangentielle du cercle quelconque C étant

$$\varpi = \mathrm{R} + a \cos \varphi + b \sin \varphi \ ,$$

on aura :

$$\varpi_1 = - a \sin \varphi + b \cos \varphi = a \cos \varphi_1 + b \sin \varphi_1 \ ,$$

$$\frac{d\varpi_1}{d\varphi_1} = - \mathrm{R} - a \cos \varphi - b \sin \varphi = - \mathrm{R} - a \sin \varphi_1 + b \cos \varphi_1 \ ;$$

d'où résulte l'équation différentielle entre λ et φ_1 :

$$\frac{da}{d\lambda} \cos \varphi_1 + \frac{db}{d\lambda} \sin \varphi_1 + \mathrm{R} \frac{d\varphi_1}{d\lambda} = 0 \ .$$

Pour réduire celle-ci à une forme plus simple, il suffit de représenter la courbe Γ, qui n'est point une ligne droite, par une équation tangentielle. On posera :

$$a \cos \alpha + b \sin \alpha = p$$

c'est-à-dire

$$a = p \cos \alpha - p' \sin \alpha \ , \qquad \frac{da}{d\alpha} = - \rho \sin \alpha \ ,$$

$$b = p \sin \alpha + p' \cos \alpha \ , \qquad \frac{db}{d\alpha} = \rho \cos \alpha \ ;$$

ρ est le rayon de courbure :

$$\rho = p + \frac{d^2 p}{d\alpha^2} \ ;$$

on prendra enfin $\lambda = \alpha$. L'équation différentielle prend, dans ces conditions, la forme :

$$\frac{d\varphi_1}{d\alpha} + \frac{\rho}{\mathrm{R}} \sin (\varphi_1 - \alpha) = 0 \ .$$

On peut encore, conformément à la théorie générale des trajectoires de cercles, transformer l'équation différentielle précédente en une équation de Riccati, en prenant pour fonction inconnue $\operatorname{tang} \frac{\varphi_1}{2}$.

P.-S. — La propriété, reliant la spirale d'Archimède et la cycloïde ordinaire, que j'avais signalée dans mes deux notes de l'Enseignement mathématique (*Application d'une transformation de* M. Brocard *à la construction de certaines courbes transcen-*

dantes, mai 1913, t. XV, p. 234-238; *Sur la construction des courbes transcendantes planes dont les équations sont à coordonnées séparées*, janvier 1914, t. XVI, p. 31-37) avait été remarquée par M. Maurice D'OCAGNE; il l'avait signalée sous la forme suivante: « Si, sur le rayon vecteur OM d'une courbe M rapportée à l'axe polaire OX, on construit un losange ayant un côté OP dirigé suivant OX, le côté XP opposé à OM a pour enveloppe une courbe (M'). Lorsque la courbe M est une spirale d'Archimède, tangente à OX en son pôle O, la courbe M' est une cycloïde dont O est un sommet et qui est tangente en ce point à l'axe OX. »

Puisque l'occasion s'en présente, j'ajouterai quelques lignes concernant un article de M. Gino LORIA et un extrait de lettre de M. Maurice D'OCAGNE publiés dans l'*Enseignement Mathématique* (1912, t. XIV, p. 104 et 218). Il s'agit de l'*application des coordonnées tangentielles au rayon de courbure d'une courbe plane*.

Antérieurement à MM. D'OCAGNE et LORIA, des recherches autour de cette question et la formule de la courbure, en coordonnées tangentielles, avaient été l'objet de travaux de L. PAINVIN: *Courbure d'une courbe plane donnée par son équation tangentielle* (Bulletin des Sciences Mathématiques, t. 3, 1872, p. 174-190); *Courbures en un point d'une surface définie par son équation tangentielle* (Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Paris, le 2 octobre 1871 et publié au Journal de mathématiques pures et appliquées de Liouville, 2e série, 1872, t. XVII).

Le 12 février 1914. Emile TURRIÈRE (Montpellier).

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

La guerre européenne porte un coup sensible aux institutions internationales. Dans les pays belligérants et dans les pays neutres voisins tout ce que la nation compte d'hommes valides est sous les drapeaux. Il devient donc matériellement impossible de continuer les travaux faisant appel à de nombreux collaborateurs. Les œuvres de paix telles que la nôtre passent à l'arrière plan. D'ailleurs, poursuivant un idéal commun librement choisi, elles exigent une volonté d'union qu'on ne saurait demander aux savants dans une période aussi troublée que celle que nous traversons.

Elles subiront fatalement un temps d'arrêt, qui, espérons-le, ne sera pas de trop longue durée.

On comprendra donc que dans ces circonstances il ne puisse être question de réunir la Commission internationale de l'enseignement mathématique, en 1915, et que le Comité central se trouve dans l'obligation d'ajourner les travaux projetés.

H. Fehr,
Secrétaire général de la Commission.

Tricentenaire de Néper.

Les conférences organisées à Edimbourg pour commémorer le tricentenaire de la publication des premières tables de logarithmes de Néper, ont eu lieu du 24 au 27 juillet dernier. La séance d'ouverture fut tenue le vendredi 24 juillet à l'Université d'Edimbourg, sous la présidence du Lord Prévôt de la Ville. L'allocution de Lord Moulton donnait un aperçu de la voie qui, selon toute probabilité, a conduit Néper à sa conception finale des logarithmes. Des discours furent également prononcés par quatre des délégués officiels, MM. les Prof. d'Ocagne et Andoyer, de Paris, Smith, de New-York, et Bauschinger, de Strasbourg. Le soir, une réception, suivie d'un concert, fut offerte par le Lord Prévôt et le Conseil de la Ville.

La séance du samedi, présidée par le Professeur E. W. Hobson (Cambridge), comprit les communications suivantes : D[r] J. W. L. Glaisher (Cambridge), *sur l'œuvre de Néper.* — D[r] G. Vacca (Rome) : *le premier logarithme népérien calculé avant Néper* (communication lue par le D[r] Knott). — Prof. G. A. Gibson (Glasgow) : *de la transition des logarithmes de Néper à ceux de Brigg.* — Prof. Dav. Eug. Smith (New-York) : *sur la loi des exposants dans les ouvrages du XVI[e] siècle.* — Lieut. Salih Mourad (Constantinople) : *de l'introduction des logarithmes en Turquie.* — Prof. Florian Cajori (Colorado Springs) : *l'algèbre du temps de Néper et les inventions des logarithmes dites antérieures.* — D[r] D. M. Y. Sommerville (St-Andrew) : *les règles de Néper.*

L'après-midi, un « garden-party » réunissait les participants au Château de Merchiston (lieu de naissance de Néper et résidence de la famille Néper déjà un peu avant 1438). Les visiteurs purent voir la chambre dans laquelle les premiers logarithmes furent calculés. Le soir, une réunion eut lieu à l'Union universitaire (University Union).

Le dimanche matin, un service spécial avait été organisé dans la cathédrale de St-Giles ; le sermon consacré à Néper fut prêché par le Rév. D[r] Fisher de St-Cuthbert, église où fut inhumé Néper.

La première des séances du lundi fut présidée par le Professeur

Smith (New-York). Les communications suivantes y furent présentées : Prof. Bauschinger (Strasbourg) : *sur certaines formules dans les fonctions harmoniques de l'espace* (Spherical Harmonics). — Prof. Andoyer (Paris) : *à propos de ses tables trigonométriques et logarithmiques récentes.* — Prof. d'Ocagne (Paris) : *de l'histoire de la machine à calculer millionnaire et du développement de la nomographie.* — M[me] Emma Gifford : *sur sa table de fonctions trigonométriques naturelles pour chaque seconde d'arc.*

La seconde séance fut présidée par le D[r] J. W. L. Glaisher et le Major P. A. Mac-Mahon (Londres). Des communications furent lues par le D[r] J. R. Milne (Edimbourg) : *sur les méthodes de construction de tables.* — M. H. S. Gay (Shamokin Pennsylvanie) : *sur la formule approximative pour trouver un angle de sinus connu.* — M. J. C. Fergusson (Birmingham) : *une unité de pourcentage dans la mesure des angles.* — M. W. Schooling (Londres) : *sur une méthode de calcul des logarithmes par simples additions.* — D[r] A. Hutchinson (Cambridge) : *de l'usage de la règle à calculer en cristallographie.* — D[r] W. F. Sheppard (Surrey) : *sur les méthodes de calcul des tables.* En l'absence de leurs auteurs, quelques titres d'autres communications furent lus.

La commémoration du tricentenaire se termina le lundi après-midi par une réception offerte par la Société royale d'Edimbourg.

Société mathématique suisse et Société suisse des Professeurs de mathématiques.

1. — Réunion de Zurich ; mai, 1914.

Les mathématiciens suisses ont tenu une réunion de printemps, à Zurich, le samedi 9 et le dimanche 10 mai 1914. La première journée était spécialement réservée aux séances de la *Société mathématique*, présidée par M. le Prof. H. Fehr (Genève). La première séance, tenue à l'Ecole polytechnique, fut entièrement consacrée à une intéressante conférence de M. le Prof. H. Weyl, *Sur une application de la théorie des nombres à la mécanique statistique et à la théorie des perturbations.* (Voir *L'Enseign. mathém.* du 15 novembre 1914.)

La seconde séance a eu lieu le soir, à l'Hôtel Bellevue. Revenant sur la question de la publication des œuvres complètes d'Euler, la Société a décidé de faire des démarches auprès des Sociétés de mathématiques des autres pays pour solliciter leur adhésion à la Société Léonhard Euler.

M. le Prof. H. Fehr donna ensuite un aperçu des récents travaux de la Commission internationale de l'enseignement mathématique, en signalant tout particulièrement ceux qui se rapportent à l'enseignement supérieur et à la préparation mathématique de l'ingénieur.

Conformément à l'ordre du jour, l'assemblée consacra un second débat à l'organisation des études mathématiques dans les universités suisses. L'étude approfondie de la question a été renvoyée à une commission comprenant un représentant de chacune des universités suisses et composée de MM. les Prof. Bieberbach (Bâle), Du Pasquier (Neuchâtel), Fehr (Genève), Graf (Berne), Lacombe (Lausanne), Plancherel (Fribourg) et Zermelo (Zurich).

Le dimanche 10 mai a eu lieu la séance de la Société suisse des professeurs de mathématiques, sous la présidence de M. le Prof. L. Crelier (Bienne-Berne). Elle eut principalement pour objet la discussion des rapports présentés à la réunion précédente, à Baden, en octobre 1913, par MM. les Prof. Arni (Bienne), Ludin (Zurich), Egli (Zurich), Grossmann (Zurich) et Mercier (Genève). (Voir *L'Enseign. mathém.* du 15 janvier 1914.)

M. le Prof. Crelier rendit ensuite compte de la Conférence internationale de l'enseignement mathématique, tenue à Paris du 1er au 4 avril 1914 ; il développa surtout les questions traitant de l'enseignement secondaire.

2. — Réunion annuelle.

Par suite de la guerre européenne, les réunions annuelles des deux sociétés n'ont pu avoir lieu. Les professeurs de mathématiques devaient se réunir à Bienne, en octobre, en même temps que la Société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire, tandis que la Société mathématique suisse devait se joindre, au commencement de septembre, à la Société helvétique des Sciences naturelles à Berne.

Voici les titres des communications qui figuraient à l'ordre du jour de la séance de la Société mathématique :

Dr R. de Saussure (Berne) : Le mouvement le plus général d'un corps solide en tenant compte des vitesses.

Dr D. Mirimanoff (Genève) : Sur le « Tile Teorem » de W.-H. Young.

H. von Wayer (Oberwyl, Baselland) : Eine spezielle metrische Geometrie.

A. Giger (Zurich) : Ueber die dritte Steiner'sche Erzeugungsweise der Fläche 3. Ordnung.

Prof. K. Merz (Coire) : Die Steiner'sche Fläche in quadratischer Transformation.

Prof. Dr Kollros (Zurich) : Sur quelques problèmes de Géométrie.

Prof. Dr J. Franel (Zurich) : Sur les formules sommatoires.

Prof. Dr M. Daniels (Fribourg) : Le théorème de Polke.

Prof. Dr M. Plancherel (Fribourg) : Un théorème de convergence des représentations intégrales d'une fonction arbitraire.

Prof. Dr S. MAUDERLI (Soleure) : Die Saecularglieder in der Himmelsmechanik und ihre Bedeutung in der Stabilitätsfrage.
Th. STAUB (Zurich) : Mitteilungen über astronomische und mathematische Lehrmittel.

Les travaux qui devaient être lus à la réunion annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles seront publiés dans les Actes de la Société (97e année). On y trouvera un résumé des communications de MM. de Saussure, Kollros, Daniëls et Mauderli. Les autres auteurs ont préféré présenter leur mémoire dans une prochaine séance.

M. Albert de Saint-Germain.

1839-1914

La délégation française à la Commission internationale de l'Enseignement mathématique, déjà douloureusement éprouvée, en 1913, par la mort de Carlo Bourlet, vient de l'être à nouveau par celle de M. Albert de St-Germain, décédé le 1er septembre, des suites d'un accident. Les regrets des collègues de M. de St-Germain seront certainement partagés par tous ceux qui ont pu apprécier personnellement la vivacité de son esprit et l'aménité de son caractère.

Avant de faire partie de la Commission internationale, M. de St-Germain avait eu une belle carrière universitaire que je crois devoir retracer rapidement. Né le 17 mai 1839, il fit de très brillantes études littéraires et scientifiques au Collège de Chartres et au Lycée Charlemagne. Il se destinait à l'enseignement et voulut se présenter à l'Ecole normale : mais, à cause de son extrême myopie, il ne fut pas autorisé à subir les épreuves d'admission.

M. de St-Germain dut donc se contenter de suivre les cours de la Sorbonne ; il gagna brillamment le diplôme de Docteur ès Sciences mathématiques à l'âge de 23 ans et le titre d'agrégé à l'âge de 26 ans. Après avoir professé quelque temps dans des établissements d'enseignement libre, il fut chargé, en 1872, des conférences de Mécanique et d'Astronomie instituées à l'Ecole des Hautes Etudes. Ses thèses de doctorat consacrées, l'une aux équations générales de l'élasticité et aux surfaces isodynamiques, l'autre aux éclipses des satellites de Jupiter, justifiaient particulièrement le choix du Ministre de l'Instruction publique.

C'est à l'occasion de ses fonctions de maître de conférences que M. de St-Germain publia, en 1877, un *Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle*, réédité avec des additions importantes en 1889, et qui est un excellent modèle de discussions de problèmes du niveau de la licence et de l'agrégation. J'ai souvenir d'avoir entendu M. Félix Klein dire à M. de St-Germain que c'était dans son *Recueil* qu'il avait appris la Mécanique. Un tel éloge dispense de tout autre.

Chargé de cours à la Faculté des Sciences de Caen en 1875, titulaire en 1877, dans la chaire de Mécanique rationnelle, M. de St-Germain devient doyen de la Faculté en 1888, et la confiance de ses collègues le rappela plusieurs fois dans ces fonctions qu'il occupait encore en 1908, époque où il demanda sa mise à la retraite.

La liste des travaux de M. de St-Germain est assez longue; si la plupart se rapportent à la Mécanique rationnelle, il y en a d'importants qui sont consacrés à l'Analyse ou à la Géométrie. Tous ont un caractère particulier d'élégance et de finesse; l'un d'eux obtint une mention honorable dans le concours pour le prix Bordin en 1885 sur la question des *déblais et remblais*. M. Darboux, rapporteur du concours, signalait dans le mémoire de M. de St-Germain : « plusieurs remarques ingénieuses et quelques exemples dans lesquels la détermination des routes de transport s'effectue d'une manière élégante ».

Je ne puis omettre de dire que M. de St-Germain fit partie pendant neuf années du jury d'agrégation des Sciences mathématiques, et que c'est à lui, tout spécialement, qu'on doit des questions intéressantes proposées au concours d'agrégation; notamment une question sur les surfaces du 3e ordre qui ont une ligne d'ombilics, question qui attira l'attention de M. Darboux et à laquelle M. de St-Germain a consacré, outre une Note aux *Comptes Rendus*, un article dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*.

Lorsqu'il eut pris sa retraite, M. de St-Germain ne resta pas inactif. M. Appell, président de la délégation française, se trouvant trop absorbé par ses multiples occupations, pria M. de St-Germain de le remplacer dans la présidence effective, et M. de St-Germain ne considéra pas cette fonction comme une sinécure honorifique. C'est certainement à lui que la Sous-commission française dut d'avoir pu arriver à présenter, en septembre 1911, lors de la réunion de Milan, l'ensemble de ses rapports, alors que la plupart des autres sous-commissions étaient loin d'avoir achevé leur tâche. Car M. de St-Germain, payant activement de sa personne, savait presser les rapporteurs retardataires et au besoin prenait sa part de leurs travaux.

Lorsque, après la mort de notre ami Bourlet, M. de St-Germain demanda avec insistance que la délégation française fût rajeunie, il resta bien entendu que la maison de M. de St-Germain restait toujours le centre de réunion des délégués; et c'est chez M. de St-Germain que se sont retrouvés, à bien des reprises, pendant l'hiver dernier, les délégués et les collaborateurs de bonne volonté qui ont aidé ceux-ci à organiser la conférence de Pâques 1914[1]. M. de St-Germain a donc été jusqu'au dernier moment un des artisans les plus actifs et les plus utiles de l'œuvre de la Commission internationale. La récompense de ses travaux a été surtout le sentiment du devoir accompli, et aussi l'affectueuse estime qu'ont eue pour lui, et que conservent pieusement, tous ceux qui ont eu l'honneur et le plaisir de travailler sous sa direction.

Ch. Bioche (Paris).

G.-B. Guccia.

Les sciences mathématiques viennent de faire une perte très sensible en la personne de M. G.-B. Guccia, Nobile dei Marchesi di Ganzaria, professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Palerme, décédé le 29 octobre 1914, à l'âge de 61 ans. Fondateur du *Circolo matematico di Palermo*, M. Guccia avait réussi à faire de cette société un groupement international comprenant des mathématiciens de tous les pays; depuis trente ans il dirigea avec une activité inlassable les *Rendiconti* où se sont publiés tant de travaux remarquables. Le 14 avril dernier, à l'occasion de son jubilé, qui fut en même temps le trentenaire du Circolo, il eut encore la joie de constater combien ses efforts persévérés étaient appréciés dans le monde scientifique, ainsi que le témoignent les nombreuses adresses d'estime et d'admiration qui lui furent présentées à la séance solennelle. Voir *L'Ens. Math.* du 15 mai 1914.

H. Burkhardt.

Nous apprenons avec regret la mort de M. H. Burkhardt, professeur à l'Ecole technique supérieure de Munich, survenue le 2 novembre 1914. Né le 15 octobre 1861, M. Burkhardt débuta dans l'enseignement supérieur en qualité de privat-docent à l'Université de Gœttingue; en 1897 il fut nommé professeur à l'Université de Zurich, puis, en 1908, il répondit à un appel à l'Ecole technique supérieure de Munich. Doué d'une grande puissance de travail, Burkhardt laisse une œuvre scientifique très importante dans le domaine de l'algèbre supérieure, de la théorie des fonctions et de la physique mathématique.

En 1896 M. Burkhardt entreprit, avec son ami M. W.-Fr. Meyer, la publication de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques pures et appliquées;* peu à peu, lorsque le plan de l'encyclopédie s'élargit, il se limita à la direction du volume consacré à l'Analyse. Depuis quelques années il s'était assuré la collaboration de M. Wirtinger, professeur à l'Université de Vienne.

---

[1] Parmi ces collaborateurs, il est peut-être à propos de citer ici M. François Cosserat, décédé malheureusement quelques jours avant la conférence, qui a notablement facilité les négociations avec les compagnies de chemins de fer.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Compte rendu des travaux des Sous-commissions nationales.

(19e article)

ALLEMAGNE

Ecoles professionnelles élémentaires.

Die mathematischen Fächer an den niederen gewerblichen Lehranstalten in Deutschland[1], von W. Trost. — Cet ouvrage forme le 5e fascicule du IVe volume des rapports de la Sous-commission allemande. Comme son titre l'indique, il est consacré à l'enseignement des mathématiques dans les écoles techniques élémentaires de l'empire allemand.

En réalité, ce fascicule de 150 pages ne s'occupe pas exclusivement de l'enseignement des mathématiques. Il contient une foule de détails sur l'organisation des écoles dont nous parlons et sur tout l'enseignement qui s'y donne. Loin de nous la pensée de faire un reproche à l'auteur à cause de ces développements accidentels. Au contraire, c'est en illustrant son travail par toutes ces indications que M. Trost est arrivé à produire un rapport réellement intéressant.

Les onze chapitres du livre peuvent être groupés en trois parties principales. La première est consacrée à l'organisation des écoles; la deuxième comprend l'examen des écoles prises individuellement ou par région; la troisième partie s'occupe plus spécialement des méthodes et de la pédagogie générale. Les chapitres réservés à l'enseignement du dessin et à la préparation des maîtres des écoles professionnelles se rattachent à cette troisième partie.

Organisation générale. En 1885, l'enseignement professionnel figurait au budget du royaume de Prusse pour une somme de 570,000 M., tandis qu'en 1910 le même enseignement absorbait une somme de 9,000,000 de M.

Comme dans les autres pays, l'enseignement technique allemand comporte trois degrés : élémentaire ou primaire, moyen ou secondaire et supérieur. Le volume dont nous parlons se bornera dans la suite à l'enseignement technique élémentaire.

Cet enseignement relativement nouveau est considéré comme une œuvre sociale et utilitaire. Il permet à l'artisan de condition inférieure d'accéder

---

[1] Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland, Band IV, Heft 5. — 1 fasc. de 150 p. avec 64 fig.; 4 M.; B. G. Teubner. Leipzig.

aux hautes écoles techniques en passant par les écoles élémentaires, à la condition évidente qu'il soit intelligent et travailleur. D'autre part, cet enseignement élève le niveau intellectuel de l'ouvrier en lui ouvrant des horizons techniques réservés jusqu'ici aux ingénieurs et aux techniciens. Enfin, au point de vue utilitaire, cet enseignement est appelé à former une élite d'ouvriers qui doivent assurer la continuité du développement industriel du pays.

L'enseignement professionnel est organisé par les administrations municipales soutenues par l'Etat. Il s'adresse aux apprentis de tous les métiers. Il se donne le soir après le travail ou le dimanche matin, et comprend trois cours annuels, avec un minimum de 6 heures hebdomadaires. Ces cours sont obligatoires pour tous les apprentis (Gewerbliche Fortbildungsschulen).

Quelquefois, ces cours sont organisés par les grandes usines et ne s'adressent qu'à leurs apprentis (Werkschulen).

L'auteur signale encore une troisième forme de cet enseignement : l'école professionnelle permanente, dans laquelle l'enseignement théorique est combiné avec le travail pratique et où le jeune homme peut faire un apprentissage complet de son métier. Nous voyons de telles écoles à Schmalkalden, Remscheid et Kaiserlautern (Staatliche Fachschulen).

Les cours professionnels du soir sont poussés quelquefois plus loin que le minimum prévu par la loi. Ils correspondent à un stade intermédiaire entre les enseignements techniques élémentaire et moyen. Dans certaines grandes villes les cours supplémentaires représentent une véritable école d'artisans (Gehilfenschulen und Handwerkerschulen).

Ces cours supplémentaires ont pour but de permettre aux jeunes artisans sans fortune de perfectionner leurs connaissances et d'acquérir une situation plus avantageuse dans l'industrie, sans passer par une école spéciale.

Nomenclature des écoles. On trouve des cours professionnels ordinaires dans toutes les localités d'une certaine importance. Sans entrer dans les détails, l'auteur cite les points caractéristiques des programmes des branches mathématiques dans chaque Etat. Dans les grandes villes, Berlin, Munich, etc., les apprentis sont groupés par métier et les cours sont exactement combinés pour chaque profession. Dans les localités de moindre importance, les élèves sont réunis par groupe de métiers. Les ouvriers du bâtiment, les métallurgistes, les ouvriers travaillant sur le bois, voilà un groupe ; les métiers artistiques sont dans un autre groupe ; les ouvriers de l'alimentation et de l'habillement forment un troisième groupe. Avec une telle organisation, la spécialisation des questions d'enseignement et des exemples appropriés à chaque métier est déjà plus difficile.

Parmi les programmes cités, ceux des écoles professionnelles de Charlottenbourg et de Hagen en W. ont une importance toute particulière à cause des détails techniques qu'ils contiennent dans le choix des exemples usuels de calcul.

Nous avons dit que quelques grandes usines allemandes se chargent elles-mêmes de l'organisation de l'enseignement professionnel nécessaire à leurs apprentis. Ce sont les maisons Löwe & Cº à Berlin, Siemens & Halske à Berlin-Nonnendamm et la fabrique de machines à Augsbourg-Nuremberg. Les programmes des branches mathématiques prévues dans ces cours sont un peu plus étendus que ceux des cours publics, car l'enseignement se répartit sur 4 années d'apprentissage au lieu de 3.

Dans les trois écoles permanentes déjà citées, la durée des cours est de deux ans à Schmalkalden et de trois ans à Remscheid et à Kaiserlautern. Toutes les trois écoles forment des mécaniciens. Les programmes sont un peu plus étendus que dans les cours professionnels. En mathématiques, on a introduit l'algèbre et la géométrie.

Méthodes et pédagogie. Les matières enseignées dans les cours professionnels sont : la langue maternelle, le calcul professionnel, la comptabilité, le dessin et la technologie. En aucun cas l'enseignement de ces matières ne doit constituer une répétition du programme de l'école populaire. L'école professionnelle doit appliquer les connaissances de l'apprenti à son métier. L'enseignement doit être condensé et ne porter que sur des objets scientifiques ou techniques élémentaires en relation directe avec la carrière de l'apprenti.

Le calcul et le dessin sont les branches les plus importantes du programme ; elles absorbent à elles seules trois ou quatre des six heures hebdomadaires prévues. L'auteur insiste sur l'enseignement du calcul. « Un homme qui ne sait pas calculer n'est jamais libre dans l'exercice complet de sa volonté. » Il dit encore plus loin : « La connaissance approfondie des nombres et la facilité de s'en servir sont indispensables à tout artisan ou ouvrier qui veut faire son chemin. »

L'élève est entraîné dans tous les problèmes qui se rapportent à son métier : ceux de prix de revient, de prix de vente, de bénéfices, de frais généraux, etc., doivent faire l'objet d'exercices nombreux et variés, par écrit ou oralement. Ces points seront complétés par des questions de comptes personnels, de compte de ménage, d'ateliers, de communes, d'impôts, etc. Les programmes détaillés des cours professionnels de Charlottenbourg et de Hagen en W. (p. 30 et 32) sont les plus intéressants à ce sujet.

L'enseignement du calcul comprend encore les exercices de surfaces et de volumes liés à chaque métier. Ces problèmes sont rendus très objectifs par la représentation graphique et les dessins correspondants : projections, perspectives et développements.

Les exercices de calcul mental sont essentiels et ils doivent être appliqués en toute circonstance.

Les éléments d'algèbre et de géométrie ne figurent que sur les programmes des écoles permanentes et des cours privés.

En tout cas, l'enseignement des mathématiques dans les écoles professionnelles ne peut pas et ne doit pas être quelque chose d'abstrait. Il doit être lié à l'intuition et à l'expérience. Le jeune apprenti se rendra compte des règles par la comparaison et la décomposition de modèles clairs, par le dessin, ou encore par un modelage en carton qu'il exécutera lui-même. L'auteur indique toute une littérature particulière à ce sujet. L'usage des formulaires, des agendas de métier peut être également fort avantageux quand il est bien compris et qu'il se rapporte à des observations expérimentales.

L'enseignement du dessin est intimement lié à celui des mathématiques. Chaque dessin exécuté avec la règle et le compas est une opération mathématique puisqu'il se base forcément sur les lois de la géométrie. Ceci ne doit cependant pas signifier que cet enseignement est sous la dépendance totale de la géométrie. Loin de là. Les objets doivent avoir un caractère technique accentué. L'auteur donne du reste quelques figures pour bien montrer la représentation des formes géométriques au moyen de combinaisons techniques simples.

La mesure des pièces représentées, le calcul de leurs dimensions, surface, volume, poids, valeur, etc., puis l'observation des règles géométriques relatives à l'exécution des détails forment une liaison originale des trois enseignements : dessin, géométrie et calcul.

En 1910, le personnel de l'enseignement professionnel dans le royaume de Prusse comptait 15,000 membres. De ce nombre, 500 s'occupaient exclusivement d'enseignement professionnel et 14,500 ne s'en occupaient que d'une manière accessoire. Parmi les 500 maîtres permanents, 362 étaient des pédagogues et 137 des techniciens. Les 14,500 maîtres auxiliaires comptaient 12,500 pédagogues et 2000 techniciens.

La préparation des maîtres se vouant exclusivement à l'enseignement technique est un problème qui se pose en Allemagne comme ailleurs. Cet enseignement s'étant particulièrement développé ces dernières années, on a eu de la peine à trouver des spécialistes réunissant toujours les qualités pédagogiques et techniques ou pratiques voulues.

Depuis 1909 il existe, à Karlsruhe, une école normale particulière pour les maîtres de l'enseignement professionnel. Un établissement analogue a été fondé à Chemnitz en 1912. En 1913, on en a ouvert un autre à Charlottenburg.

Jusqu'à maintenant les maîtres provenaient des écoles techniques moyennes ou des universités techniques. Quoi qu'il en soit, la question n'est pas complètement résolue ; elle reste à l'ordre du jour.

L. Crelier (Bienne-Berne).

Cours universitaires.

Semestre d'hiver 1914-1915.

SUISSE

Bâle. — Bieberbach : Differential- u. Integralrechnung I, 4 ; Funktionentheorie, 4 ; Proseminar : Uebg. für Anfänger, 1. — Bieberbach et Spiess : Seminar, 1. — Spiess : Analyt. Geometrie des Raumes, 3 ; Variationsrechnung, 2. — Flatt : Pädagog. Seminar, math.-naturwiss. Abteilung I, 3 ; Projektive Geometrie, 2. — Matthies : Mechanik, 4 ; Uebg., 1.

Berne. — Graf : Kugelfunktionen mit Repet. I, 3 ; Besselsche Funktionen mit Repet., I, 3 ; Integralrechnung mit Repet., 3 ; Funktionentheorie I, 2 ; Differentialgleichungen I, 2 ; Renten- und Versicherungsrechnung, 2 ; Mathem. Seminar mit Prof. Huber, 1 1/2. — G. Huber : Sphär. Astronomie I, 2 ; Theorie der höh. ebenen Kurven, 3 ; Theorie der ellipt.- u. Thetafunktionen, 2 ; Theorie u. Anwendung der Determinanten, 1 ; Mathem. Seminar (geometrische Richtung), mit Prof. Graf, 1. — Ott : Algebr. Analysis II, 2 ; Sphär. Trigonometrie, 2 ; Integralrechnung, 2 ; Analyt. Geometrie II, 2. — Mauderli : Physik des Sonnensystems, 1 ; Astron. geographische Ortsbestimmung, 2 ; Uebg. dazu. — Berliner : Analyt. Zahlentheorie, 2. — Benteli : Darst. Geometrie, Kurven, Strahlenflächen, reguläre Polyeder, 2 ; Darst. Geometrie ; Uebg. u. Repet., 2 ; Prakt. Geometrie, I, 1 ; Rotationsflächen, 1. — Crelier : Geometrie der Bewegung, 2 ; Einführung in die *n* dimensionale

Geometrie, 2. — Moser : Ausgew. Kapitel der Reservenrechnung ; Technische Grundlagen der Krankenversicherung, 2 ; Math.-versicherungswissenschaftliches Seminar. — Bohren : Politische Arithmetik, 2 ; Mathem. Statistik, 2 ; Ausgleichungsrechnung, 2. — Luterbacher : Grundzüge der Mechanik (Dynamik) für Anfänger, 1.

Fribourg. — Plancherel : Théorie des fonctions, 3 ; Théorie du potentiel, 3. — Daniels : Differential- u. Integralrechnung, 4 ; Uebgn., 1 ; Théorie de la lumière, 3 ; Höhere Geometrie, 2.

Genève. — Cailler : Cal. différ. et intégr., 3 ; Exercices, 2 ; Mécanique rationnelle, 3 ; Exercices, 2 ; Conférences d'analyse, Th. des Fonctions, 2 ; Calcul des Probabilités, 1 ; Questions spéciales de Dynamique analytique, 1. — Fehr : Éléments de Mathématiques supérieures, 3 ; Exercices, 2 ; Conférences d'Algèbre et de Géométrie, 1 ; Géométrie projective, 1 ; Séminaire d'Algèbre sup., 2 ; Sém., Questions d'enseignement. — R. Gautier : Astronomie physique, 2. — A. Bernoud : Histoire des Sciences, 1. — D. Mirimanoff : Th. des ensembles et des fonctions de var. réelles, 2.

Lausanne. — Amstein : Théorie des fonctions, 3 ; Chapitres choisis de Calcul intégral, 2. — G. Dumas : Calcul différentiel et intégral, 1, 6 ; Exercices, 1, 2 ; Géométrie infinitésimale, 2 ; Séminaire mathématique, 1. — Lacombe : Géométrie descriptive, I, 4 ; Épures, 4 ; Géométrie analytique, 2 ; Géométrie de position avec exercices, 3. — Mayor : Mécanique rationnelle, III, 4 ; Exercices, III, 1 ; Statique graphique, III, 3 ; V, 2 ; Épure, III, 4 ; V, 4 ; Physique mathématique, 2. — Maillard : Calcul infinitésimal avec application aux sciences, 4 ; Exercices, I, 1 ; Mécanique rationnelle, III, 2 ; Astronomie sphérique, 3. — Jaccottet : Chapitres choisis de la théorie des équations algébriques, 1.

Neuchâtel. — G. Du Pasquier : Calc. différ. et intégr., 3 ; Exerc. et répét., 2 ; Équations différ., 3 ; Science actuarielle, 3e partie, 2. — L. Gaberel : Fonct. anal., 2. — H. Stroele : Méth. des moindres carrés, 1. — E. Le Grand Roy : Astron. sphér., 2 ; Géodésie, 1 ; Astronomie (cours sup.), 1 ; Exerc., 1. — Arndt : Astrospectroscopie, 1. — A. Jaquerod : Mécan. ration., 2.

Zurich ; *Université.* — Zermelo : Diff.- u. Integr.-Rechng., I, 4 ; Elemente der Determinanten, 2 ; Differentialgleichungen, 2 ; Math. Uebgn. f. Vorgerücktere, 2. — Weiler : Darstellende Geometrie, I, mit Uebgn., 4 ; Analytische Geometrie, I, mit Uebgn., 4 ; Mathematische Geographie, 2. — Gubler : Algebraische Analysis, 2. — Bernays : Theorie der ganzen transzendenten Funktionen, 3 ; Mathematische Uebgn. f. Anfänger, 2. — Wolfer : Einleitung in die Astronomie, 3 ; Uebgn., 2 ; Theorie der Finsternisse, 2.

Zurich ; *École polytechnique fédérale, section normale.* — Hirsch : Höh. Mathematik, I, 5 ; Repet., 1 ; Uebgn., 2 ; III, 3 ; Uebgn., 1. — Franel : Mathématiques supérieures, I, 5 ; Répét., 1 ; Exerc., 2 ; III, 3 ; Exerc., 1. — Herm. Weyl : Analyt. Geometrie, 3 ; Uebgn., 2. — Grossmann : Darst. Geometrie, 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 4 ; projektive Geometrie, 4. — Kollros : Géométrie descr., 4 ; Répét., 1 ; Exerc., 4 ; Géométrie de position, 3 ; Mathem., Uebgn., 2. — Hurwitz : Funktionentheorie, 4. — H. Weyl u. Hurwitz : Mathem. Seminar, 2. — Meissner : Mechanik, II, 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 2. — Beschlin : Vermessungskunde, II, 4 ; Repet., 1 ; Höh. Geodäsie, 3 ; Repet., 1. — Wolfer : Einl. in die Astronomie, 3 ; Uebgn., 2 ;

Theorie der Finsternisse, 2; AMBERG: Versicherungsmathematik. — BRANDENBERGER: Einf. in den mathem. Unterricht, I, 2. — BRYEL: Rechenschieber mit Uebgn.; Darst. Geometrie; Proj. Geometrie; Flächen 2 Grades. — CHERBULIEZ: Geschichte der Physik, I. Histoire de la Physique, I. — J. KELLER: Zentralprojektion. — KRAFT: Geom. Analysis. Vektoranalysis II, III, VII. — WEYL: Potentialtheorie u. Differentialgleichungen der math. Physik, 3. — MEISSNER: Elastizitätstheorie dunner Platten u. Schalen, 2. CHERBULIEZ: Geschichte der Untersuchungen über die Zusammendruckbarkeit der Körper. — KIENAST: Lineare Differentialgleichungen, 2.

BIBLIOGRAPHIE

Louis BACHELIER. — **Le Jeu, la Chance et le Hasard.** (Bibliothèque de philosophie scientifique.) — 1 vol. in-18, 320 p.; 3 fr. 50; Ern. Flammarion, Paris.

Tandis que le traité sur le *Calcul des probabilités* de M. L. Bachelier est destiné plus particulièrement aux mathématiciens, le présent ouvrage s'adresse au public beaucoup plus vaste que forment les nombreux lecteurs de la *Bibliothèque de philosophie scientifique*. Evitant tout calcul, l'auteur présente sous une forme purement descriptive les bases essentielles du Calcul des probabilités. Ce calcul, dit l'auteur, qui procède à la fois de la philosophie et de la science, qui est en même temps très profond et très simple, qui exige beaucoup de réflexion et très peu de formules, devrait être étudié par tous les philosophes comme par tous les savants : les uns et les autres y trouveraient sans doute un très grand intérêt et un très grand charme; suivant le mot célèbre de Laplace : « Il n'est pas de science plus digne de nos méditations. » C'est aussi l'impression que laisse ce petit volume.

Dans cet ouvrage d'initiation, M. Bachelier se borne aux généralités, à l'analyse des jeux, de la spéculation, des erreurs d'observation. En dehors des connaissances générales, les lecteurs y trouveront des études intéressantes sur les martingales, les lois des écarts, le jeu de la roulette, sur les opérations de bourse, etc. D'autres sujets ne se rapportant pas directement au jeu, ont été traités avec développement, par exemple, la théorie des écarts dans le tir à la cible.

L'exposé est clair, précis et d'une lecture facile : il permettra à beaucoup de lecteurs de se familiariser avec les problèmes usuels du calcul des probabilités et de ses applications. H. FEHR.

P. DELENS. — **Problèmes d'Arithmétique amusante.** — 1 vol. in-8°, broché, 2 fr.; librairie Vuibert, Paris.

L'auteur a réuni, dans ce recueil, sous une forme amusante, des applications élémentaires de propositions connues de l'Arithmétique.

Des propriétés fort simples des nombres — ordinairement basées sur les caractères de divisibilité — ont servi à M. Delens à construire des problèmes dont l'énoncé pique notre curiosité et dont la solution, très aisée d'ailleurs, constitue un agréable divertissement de société (retrouver un nombre pensé, tours de dés, de cartes, de dominos...).

Présentée de cette façon, l'Arithmétique cesse d'être un assemblage de théories plus ou mois abstraites et devient vraiment, pour un esprit un peu réfléchi, une distraction de choix.

Les problèmes contenus dans cet ouvrage intéresseront, tout en distrayant : ils inspireront le goût des recherches arithmétiques qui pourront fournir ainsi de nombreuses applications analogues à celles de ce recueil.

Pierre Duhem. — **Le Système du Monde.** Histoire des doctrines cosmologiques ; de Platon à Copernic. *Tome premier.* — 1 vol. gr. in-8°, 512 p., 18 fr. 50 ; A. Hermann & fils, Paris.

Grâce à une généreuse subvention de l'Institut de France et à une importante souscription du Ministère de l'Instruction publique, les éditeurs ont pu mettre sous presse cette remarquable publication qui rassemble les résultats des recherches historiques de M. Pierre Duhem sur *le Système du Monde*, de Platon à Copernic. Ces belles recherches seront consultées avec un profond intérêt par tous ceux qui désirent « connaître ce que les précurseurs de la science moderne ont pensé du monde, des corps qui le composent, des mouvements qui l'agitent, des forces qui l'entraînent ».

Lorsque dans l'étude de la genèse d'une doctrine scientifique on remonte de proche en proche aux idées directrices qui lui ont donné naissance, on parvient nécessairement à des opinions qui, à leur tour, ont été préalablement suggérées ou énoncées. Si M. Duhem fait commencer son histoire des hypothèses cosmologiques à Platon, c'est que c'est le premier philosophe dont les écrits utiles à cet objet nous soient parvenus entiers et authentiques. L'auteur commence cependant par un aperçu des doctrines astronomiques des Pythagoriciens, afin de mieux pénétrer celles de Platon.

Ce premier volume est entièrement consacré à la *cosmologie hellénique ;* il comprend les chapitres suivants :

L'astronomie pythagoricienne. — La Cosmologie de Platon. — Les sphères homocentriques. — La physique d'Aristote. — Les théories du temps, du lieu et du vide après Aristote. — La dynamique des Hellènes après Aristote. — Les astronomies héliocentriques. — L'astronomie des excentriques et des épicycles.

La place restreinte dont nous disposons ici ne nous permet pas d'entrer dans le détail de cette magistrale étude. Documentée avec le soin qui caractérise toutes les publications du savant de professeur de Bordeaux, elle doit être signalée non seulement à l'attention des astronomes, des mathématiciens et des physiciens, mais encore à tous ceux qui désirent être renseignés d'une manière exacte sur l'histoire des principales doctrines scientifiques de l'antiquité grecque. H. Fehr.

C. Runge. — **Graphical Methods.** — 1 vol. in-8°, 148 p. ; Columbia University Press, Lemcke & Buechner, New-York.

Ce petit volume contient les conférences que M. C. Runge, professeur à l'Université de Gœttingue, a données à l'Université Columbia, à New-York, pendant l'hiver 1909-1910. Elles ont pour but de donner un aperçu succinct des principales méthodes graphiques et de leurs applications techniques. L'auteur les a groupées en trois chapitres :

I. Le calcul graphique : Arithmétique graphique. — Fonctions entières et résolutions des équations algébriques. — Equations linéaires. — Nombres complexes.

II. La représentation graphique des fonctions d'une ou de plusieurs variables indépendantes. — Abaques.

III. Les méthodes graphiques du Calcul différentiel et intégral.

L'exposition de M. Runge fournit une excellente introduction. Pour avoir un aperçu plus complet à l'étude des méthodes graphiques, l'auteur engage lui-même le lecteur de recourir à l'article publié par l'Encyclopédie des Sciences mathématiques où l'on trouvera une bibliographie complète du sujet. On sait que l'édition française de cet article, rédigé par M. d'Ocagne d'après l'exposé allemand de M. Mehmke, contient de nombreuses additions.

E. Study. — **Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie.** Erstes Heft : Ebene analytische Kurven und zu ihnen gehörige Abbildungen. — 1 vol. in-8°, 126 p. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Le volume est consacré à la représentation des points d'un plan dont les coordonnées sont complexes (point général).

Dans l'introduction, l'auteur nous montre les essais de v. Staudt qui représente les points à coordonnées complexes à l'aide des involutions elliptiques. Ce mode de représentation est déjà compliqué pour les problèmes les plus simples de la géométrie, tel, par exemple : Mener une droite d'un point à un autre.

Study introduit par contre deux autres manières, indépendantes des mouvements réels, pour représenter un point à coordonnées complexes à l'aide des figures réelles. Dans les deux cas l'image est donnée par deux points à coordonnées réelles et par une direction. Analytiquement : Les coordonnées du point général sont (ξ, η) ; (x, y), (u, v) seront les coordonnées de la première image, (X, Y), (U, V) celles de la seconde, les parties réelles et imaginaires de (ξ, η) sont liées linéairement aux valeurs (x, y), ... Les deux images se transforment l'une dans l'autre par une rotation (Schwenkungsprozess).

Ces définitions fondamentales étant établies, l'auteur traite différentes questions de géométrie analytique et infinitésimale. La distance d'un point à un autre et la surface d'un triangle exprimée par les coordonnées des sommets sont les premiers problèmes étudiés. En utilisant les vecteurs, Study donne des expressions pour divers cas spéciaux. Ces expressions se réduisent évidemment aux cas simples pour lesquels les points sont réels.

De cette manière, la théorie des courbes analytiques est préparée. Les exemples d'introduction sont la droite et le cercle. Les deux images d'un cercle sont des faisceaux connus.

La partie principale de l'ouvrage est consacrée à la théorie des courbes analytiques. Il distingue des « fils » et des « membranes » analytiques, c'est-à-dire suivant que l'image dans l'espace à 4 dimensions est elle-même une conception à une ou à deux dimensions. Le problème le plus intéressant est la recherche des conditions pour que l'arc différentiel de l'image soit une forme différentielle, définie et positive (Positif-definite Differentialform) d'un réseau de courbes isothermes du plan. Les exemples généraux traités sont l'ellipse et la chaînette.

Le volume se termine par un chapitre sur la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe. Soit u et v les parties réelles et imaginaires d'une telle fonction. En substituant pour x et y des variables complexes on ne peut jamais obtenir de nouvelles fonctions.

L'auteur, qui évite tout calcul inutile, applique quelquefois des théorèmes purement géométriques à la géométrie cinématique.

H. Kistler (Bienne).

A. Trignart. — **Table auxiliaire d'intérêts composés,** avec une préface de A. Barriol. — 1 vol. in-8°, VIII-24 p.; 2 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Extrait de la Préface. — « Je venais de lire le très intéressant travail de M. Guillermin sur les Tables de logarithmes à 3 quatrades dans lequel l'auteur réhabilite les notions élémentaires de correspondance des deux progressions arithmétique et géométrique, quand M. Trignart m'a montré ses premiers essais et m'a soumis l'idée de remplacer un nombre quelconque par la puissance d'un binome $(1 + i)$. La coïncidence m'a paru curieuse et mon intérêt a été éveillé immédiatement par l'idée qui me semblait féconde. Le choix judicieux de M. Trignart avait fait de la valeur i et les quelques exemples qu'il apportait à l'appui de son idée m'ont incité à l'encourager à continuer ses travaux et le résultat des calculs laborieux qu'il a entrepris est le petit Livre qu'il présente.

« Les Tables, disposées d'une manière fort ingénieuse et très claire, rendront de réels services aux actuaires en leur permettant d'écourter, dans les calculs de précision par approximations successives, la série souvent pénible des essais. De même que la rapide convergence du développement de $L(1 + \varepsilon)$ a permis, grâce à l'ingénieuse méthode préconisée par Fédor Thoman, le calcul très précis des logarithmes des nombres, de même la double inégalité $(1{,}000)^n < N < (1{,}001)^{n+1}$ permettra, grâce à la très lente croissance de l'exponentielle $(1{,}0001)^x$, de calculer les puissances et les racines avec une approximation plus grande qu'avec les logaritmes... »

A. Barriol (Paris).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

American mathematical Monthly (The), founded by Benj. F. Finkel, A Journal for Teachers of Mathematics in the Collegiate and advanced secondary Fields. Editorial Committee : H. E. Slaught, G. A. Miller, E. R. Hedrick. — Vol. XXI, 1914. — Lancaster, P., and Chicago.

Annaes scientificos da Academia polytechnica do Porto, directeur F. Gomes Teixeira. — Vol. IX, 1914. Imprensa da Universidade, Coimbra.

Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse pour les Sciences mathématiques et les Sciences physiques. Année 1913. Gauthier-Villars, Paris ; Ed. Privat, Toulouse.

Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 38e année, 1913-1914. Secrétariat de la Société scientifique, Louvain.

Annales de l'Université de Grenoble, tome XXVI, 1914. — Gauthier-Villars, Paris ; Allier frères, Grenoble.

Atti della Reale Accademia dei Lincei, Anno CCCXI, 1914. Serie quinta. Rendiconti, Classe di Scienze fisiche, matematiche et naturali. — Tipografia della R. Accademia dei Lincei, Roma.

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche, pubblicato per cura di Gino Loria. Anno XVI. 1914 — Rosenberg & Sellier, Torino.

Bollettino di Matematica. Giornale scientifico didattico per l'incremento degli Studi matematici nelle scuole medie. Diretto dal Dott. Alb. Conti. Anno XIII. Roma, 1914.

Bulletin de la Société française de Philosophie, dirigé par Xavier Léon et André Lalande. Paris. — 14e année, 1914.

Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'enseignement secondaire public. — Rue de l'Estrapade, 15, Paris. — 4e année, 1913.

Bulletins de la Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique, 1914. Hayez, Bruxelles.

Giornale di Matematiche di Battaglini, diretta da Ernesto Pascal, colla collaborazione di P. del Pezzo, A. del Re, R. Marcolongo, D. Montesano, G. Torelli. Vol. LII (5o della 3a Serie). Pellerano, Naples.

Intermédiaire des Mathématiciens, dirigé par C.-A. Laisant, Ed. Maillet, A. Maluski, A. Boulanger. — Tome XXI, 1914. — Gauthier-Villars, Paris.

Isis, Revue consacrée à l'histoire et à l'organisation de la Science, publiée par George Sarton. Tome II, 1914. — Wondelgem-lez-Gand, Belgique.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von Em. Lampe. B. 42. Jahrgang 1911. — 1 vol., LXXVIII-1131 p. — G. Reimer. Berlin, 1914.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert, 38e année, 1913-1914. — Librairie Vuibert. Paris.

Mathematical Gazette (The), edited by W.-J. Greenstreet. 1914. — George Bell & Sons, Londres.

Mathematics Teacher (The). A Magazine devoted to the interests of Teachers of Mathematics, published quarterly by the Association of Teachers of Mathematics for the Middle States and Maryland. Editor : W. H. Metzler, Syracuse, N. Y. Vol. VI, 1913-1914.

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Blätter. Organ des Verbandes mathematischer u. naturwissenschaftlicher Vereine an deutschen Hochschulen, 11. Jahrgang, 1914. — Kommissionsverlag. B. G. Teubner, Leipzig.

Mathésis. Recueil mathématique à l'usage des écoles spéciales et des établissements d'instruction moyenne, publié par P. Mansion et J. Neuberg. 4e série, tome IV, 1914. — Hoste, Gand ; Gauthier-Villars, Paris.

Nieuw Archief voor Wiskunde, publié sous les auspices de la Société des Sciences d'Amsterdam, par J.-C. Kluyver, D.-J. Korteweg et F. Schuh. 2e série, tome XI. — Delsman en Nolthenius, Amsterdam.

Nyt Tidsskrift for Matematik. Revue dirigée par C. Juel et V. Trier, série A, 25e année ; série B, 25e année ; 1914. — Jul. Gjellerup, Copenhague.

Pädagogisches Archiv. Monatsschrift für Erziehung, Unterricht u. Wissenschaft, herausgegeben von J. Ruska u K. Durr, 56. Jahrg., 1914. — Quelle u. Meyer, Leipzig.

Periodico di Matematica per l'Insegnamento secondario. Diretto dal Prof G. Lazzeri. Série 3, vol. XI. — Raffaelo Giusti, Livorno.

Prace Matematyczno-Fizyczne, dirigé par S Dickstein, année 1914, Varsovie.

Revista de la Sociedad Matematica Espanola. Revue mensuelle, 3e année, 1913-1914 — Ed. Arias, Madrid.

Revue de l'Enseignement des Sciences (La). 8e année, 1914. — Librairie Félix Alcan, Paris.

Revue de Mathématiques spéciales, dirigée par E. Humbert et G. Papelier. 24e année, 1913-1914. — Librairie Vuibert, Paris.

Revue générale des Sciences pures et appliquées, fondée par L. Olivier, dirigée par J.-P. Langlois. 25e année, 1914. — Librairie Armand Colin, Paris.

Revue semestrielle des publications mathématiques, dirigée par H. de Vries, J. Cardinaal, J.-C. Kluyver, W. Kapteyn. — Tome XXI, 2e partie, oct.-avril 1913 et XXII, 1re partie, avril-octobre 1913 — Delsman en Nolthenius, Amsterdam, 1914.

Revue scientifique, paraissant le samedi. Directeur : Ch. Moureu. — 52e année, 1914. — 41bis, rue de Châteaudun, Paris.

School Science and Mathematics. A Journal for Science and Mathematics Teachers in secondary Schools vol. XIV, 1914. Smith and Turton, Chicago.

Scientia, Revista di Scienza. Revue internationale de synthèse scientifique, dirigée par E. Bruni, A. Dionisi, F. Enriques, A Giardina, E. Rignano. Vol. XVI, 1914. — N Zanichelli, Bologne ; F. Alcan, Paris.

Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-Naturw. Klasse. CXXII. Band. 1913. — A. Hölder, Wien.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgegeben von A. Thaer. XX. Jahrgang, 1914. Otto Salle, Berlin.

Wiadomoski Matematyczne, dirigé par S. Dickstein. Tome XVIII, 1914. — Varsovie.

Wiskundige Opgaven met de Oplossingen. Tome XI, Delsmann en Nolthenius. Amsterdam.

Wiskundig Tijdschrift onder Redactive van F.-J. Vaes, Chr. Krediet, N. Quint. X. Jahrgang, 1914. — P. Visser, Haarlem.

Annali di Matematica pura ed applicata. — Série III. Tome XXII. — M. Picone : Sulle superficie flessibili ed inestendibili deformabili in rigate. — A. del Re : Sulle equazioni generali per la Dinamica negli spazii ad n dimensioni ed a curvatura costante. — N. Nielsen : Recherches sur les suites régulières et les nombres de Bernoulli et d Euler. — L. Brusotti : Sulla generazione di curve piane algebriche reali mediante « piccola variazone » di una curva spezzata. — MAGGI : Sul Teorema di Kirchhoff traducente il Principio di Huyghens. — WILENSKY : Bestimmung der Koeffizienten in einer Funktionalgleichung nebst einer Anwendung. — EISENHART : Transformations of Surfaces of Guichard and Surfaces Applicable to Quadrics. — N. NIELSEN : Sur le théorème de v. Staudt et de Th. Clausen relatif aux nombres de Bernoulli. — BIANCHI : Sulle congruenze rettilinee W a parametro medio costante.

Annals of Mathematics. Havard University, Cambridge, Mass. — Vol. 15. — G. R. CLEMENTS : Singular Point Transformations in two Complex Variables. — R. W. REAVES : On the Projective Differential Geometry of Plane Anharmonic Curves. — L. E. DICKSON : On the Rank of a Symmetrical Matrix. — J. H. M. WEDDERBURN : Note on the Rank of a Symmetrical Matrix. — R. D. CARMICHAEL : On the Numerical Factors of the Arithmetics Forms $\alpha^n \neq \beta^n$. — J. LIPKA : Geometric Characterization, of Isogonal Trajectories on a Surface. — A. DRESDEN : On the Second Variation Jacobi's Equation and Jacobi's Theorem for the Integral $\int F(x, y, x', y')\,dt$. — F. R. SHARPE and F. M. MORGAN : Quartic Surfaces Invariant under Periodic Transformations — W. A. HURWITZ : Postulate Sets for Abelian Groups and Fields — J. H. M. WEDDERBURN : On continued Fractions in Non-commutative Quantities. — H. BATEMAN : A new Type of Solution of Maxwell's Equations. — T. HAYASHI : Relation between the Zeros of a Rational Integral Function and its Derivate. — L. E. DICKSON : The Invariants, Seminvariants and Linear Covariants of the Binary Quartic Forn. Modulo 2. — G. A. MILLER : Examples of Normal Domains of Rationality belonging to Elementary Groups. — T. H. GRONWALL : On Lebesgue's Constants in the Theory of Fourier Series. — K. P. WILLIAMS : The Linear Difference Equation of the first Order. — A. EMCH : Geometric Properties of the Jacobians of a Certain System of Functions. — C. E. LOVE : On the Irregular Integrals of Linear Differential Equations. — E. E. WHITFORD : Some Solutions of the Pellian Equations $x^2 - Ay^2 = \pm 4$. — W. H. METZLER : On the Rank of a Matrix. — W. H. METZLER : On the Expression of Certain Minors of the lth Compound of a Determinant as a Function of the Elements of a Single Line of mth Compound. — L. S. DEDERICK : Implicit Functions at a Boundary Point. — R. D. BEETLE : A Formula in the Theory of Surfaces. — F. R. MOULTON : The Deviations of Falling Bodies. — H. HILTON : Properties of Certain Homogeneous Linear Substitutions.

Bulletin des Sciences Mathématiques, rédigé par G. DARBOUX et E. PICARD. Gauthier-Villars, Paris. — Tome XXXVIII, janvier-août 1914. — P. APPELL : Sur un nouveau mode de développement d'un nombre en fraction continue. — E. DOUBLET : L'abbé Bossut (A l'occasion du centenaire de sa mort). — G. DARMOIS : Sur les courbes à torsion constante. — R. GARNIER : Sur la formation de l'équation différentielle de la fonction px. — Comptes rendus et analyses. — Revue des publications académiques et périodiques.

Bulletin of the American Mathematical Society. — Volume XX. — C. D. BIRKHOFF : Note on the Gamma Function. — E.-J. MILES : Some Properties of Space Curves Minimizing a Definite Integral with Discontinuous Integrand. — D.-R. CURTISS : The Degree of a Cartesian Multiplier. — A. EMCH : On Closed Continuous Curves. — E.-B. WILSON Let Us Have Our Calculus Early. — H.-E. SLAUGHT : The Twentieth Summer Meeting of the American Mathematical Society. — L.-E.-J. Brouwer : Intuitionism and Formalism. — A. Dresden : The Madison Colloquium. — L.-E. Dickson : On Binary Modular Groups and their Invariants. — H.-H. Mitchell : On some Systems of Collineation Groups. — T.-H. Gronwall : On the Summability of Fourier's Series. — M. Bôcher : The Infinite Regions of Various Geometries. — R.-D. Carmichael : Some Theorems on the Convergence of Series. — O.-E. Gleen : A Translation Principle Connecting the Invariant Theory of Line Congruences with that of Plane n-Lines. — F.-N. Cole : The Twentieth Annual Meeting of the American mathematical Society. — H.-E. Slaught : Winter Meeting of the Society at Chicago. — H.-B. Fine : An Unpublished Theorem of Kronecker Respecting Numerical Equations. — A. Emch : Two Convergency Proofs. — G.-A. Miller : Some Properties of the Group of Isomorphisms of an Abelian Group. — A.-B. Frizell : A Non-Enumerable Well-Ordered Set. — W.-A. Hurwitz : Note on the Fredholm Determinant. — R.-C. Archibald : Time as a Fourth Dimension. — T. Hayashi : On ovals. — W.-A. Manning : On the Class of Doubly Transitive Groups. — Ed. Kasner : The Ratio of the Arc to the Chord of an Analytic Curve need not Approach Unity.

Revue de Métaphysique et de Morale, dirigée par Xavier Léon, Paris. — 22e année, no 2. — A.-R. Schweitzer : Les idées directrices de la logique génétique des mathématiques.

Revue du Mois (La), dirigée par Emile Borel, Paris. — 9e année, 1914. — *Janvier*. — Paul Langevin : Thermodynamique et statistique. — Maxime Bôcher : Charles Sturm et les mathématiques modernes. — *Avril*. — Elie Cartan : La théorie des groupes. - *Juin*. — Pineau : Le compas gyroscopique. — *Juillet*. — Mme Pierre Curie : Les radio-éléments et leur classification. — Emile Borel : L'infini mathématique et la réalité. — *Août*. — Em. Esclangen : Le cinématographe et la Science. Application à l'Astronomie.

2. Livres nouveaux :

W.-H. Besant. — **A Treatise on Dynamics**. — 5e édition revue et augmentée par A.-S. Ramsey. — 1 vol. in-8o, xv-443 p.; 12 sh.; G. Bell & Sons, Londres.

A. Brill. — **Das Relativitätsprinzip**. Eine Einführung in die Theorie. — 2e édition. — 1 fasc. in-8o, 34 p.; 1 M. 20; B. G. Teubner, Leipzig.

D. Gigli — **Lezioni di Aritmetica e di Algebra elementare** ad uso delle Scuole secondarie superiori, I : I numeri interi; i numeri razionali. — 1 vol. in-8o, 263 p.; 2 L. 50; Mattei & Co, Pavie.

E. Lebon. — **Emile Picard**. Biographie, bibliographie analytique des écrits. — 1 vol. gr. in-8o, 96 p.; 7 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

H.-A. Lorentz. — **Das Relativitätsprinzip**. Drei Vorlesungen gehalten in Teylers Stiftung zu Harlem, bearbeitet von W.-H. Keesom. — 1 fasc. in-8o, 52 p.; 1 M. 40; B. G. Teubner, Leipzig.

Pendlebury's New Concrete Arithmetic by Ch. Pendlebury and H. Leather. — Années 1-5, 5 fasc., in-16 d'environ 60 p.; 4 d. et 6 d.; G. Bell & Sons, Londres.

A. S. Ramsey. — **Elementary Geometrical Optics**. — 1 vol. in-8o, xi-173 p.; 6 sh.; G. Bell & Sons, Londres

D. M. Y. Sommerville. — **The Elements of Non-Euclidean Geometry**. — 1 vol. in-8o, xvi-274 p.; 5 sh.; G. Bell & Sons, Londres.

TABLE DES MATIÈRES

ARTICLES GÉNÉRAUX

Méthodologie et Notes diverses.

Organisation de l'enseignement.

Philosophie et histoire.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCES

CHRONIQUE

Congrès internationaux et Sociétés savantes.

Articles divers.

Nécrologie.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Compte rendu des travaux des sous-commissions nationales :

Cours universitaires :

BIBLIOGRAPHIE

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Sommaire ou annonce des principaux périodiques.

2. *Publications non périodiques.*

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

Cette table comprend les auteurs d'articles généraux ou d'articles de chronique, de lettres ou notes insérées dans la correspondance ou de comptes rendus bibliographiques.

Les numéros qui suivent chaque nom renvoient aux pages du volume.