MANUALI HOEPLI

LEZIONI
DI
CALCOLO INFINITESIMALE

DETTATE DA

ERNESTO PASCAL

PROFESSORE NELLA R. UNIVERSITÀ DI PAVIA.

PARTE II.
CALCOLO INTEGRALE

Con 15 incisioni

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA

MILANO

1895.

Milano, Tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.

INDICE

CAPITOLO I.

GLI INTEGRALI DEFINITI E INDEFINITI.

CAPITOLO II.

L'INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI.

CAPITOLO III.

CALCOLO DEGLI INTEGRALI INDEFINITI E DEFINITI.

CAPITOLO IV.

GLI INTEGRALI MULTIPLI.

CAPITOLO V.

CAPITOLO VI.

GEOMETRIA INTEGRALE.

CAPITOLO VII.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

CAPITOLO I.

GLI INTEGRALI DEFINITI E INDEFINITI.

§ 1. **Definizione di integrale definito.** — Si abbia a funzione $f(x)$ *finita* in tutto un intervallo da a b; si divida quest'intervallo in altri n intervalli parziali che chiameremo $\delta_1\ \delta_2 \ldots \delta_n$; sia il valore della funzione in un punto qualunque ll'intervallo δ_r, o anche il *limite superiore o feriore* dei valori di f in δ_r; formiamo il sommatorio

$$\sum_1^n f_r \cdot \delta_r$$

steso a tutti gli intervalli parziali. Tale sommatorio ha un valore finito, e avrà sempre un valore finito comunque noi facciamo crescere il numero n degli intervalli, facendo impiccolire ciascuno di essi.

Se il limite di tal sommatorio, quando ciascuno degli intervalli parziali impiccolisce indefinitivamente mentre il loro numero n *tende all'infinito, esiste ed è indipendente dalla maniera colla quale si fanno decrescere le ampiezze degli intervalli, e* *indipendentemente dalla scelta dei valori* f_r, *allora esso limite si chiamerà l'integrale definito della funzione* f (x) *da* a *sino a* b. I numeri a e b si chiamano rispettivamente *limiti inferiore e superiore* dell'integrale definito, e il tratto da a sino a b si chiama *cammino d'integrazione.* L'integrale definito si rappresenta con una notazione speciale, e propriamente col simbolo

$$\int_a^b f(x)\,d\,x;$$

si premette cioè il segno $\int$ (che è una degenerazione del segno della lettera S iniziale della parola *somma*) e poi si scrive la funzione $f(x)$, di cui si vuol calcolare l'integrale, moltiplicata per il differenziale $d\,x$ della variabile indipendente.

Perchè esista il limite del sommatorio di cui si è parlato sopra, è necessario che la funzione $f(x)$ soddisfi a certe condizioni che considereremo nei paragrafi seguenti; inoltre perchè valga la data definizione di integrale definito, è necessario che la funzione $f(x)$ non sia mai infinita nell'intervallo da a a b, e inoltre che tali limiti sieno finiti.

Occorrerà poi estendere la data definizione anche nei casi in cui o la funzione diventi infinita in qualche punto, ovvero uno dei limiti d'integrazione è l'infinito.

Riserberemo ad un apposito capitolo lo studio dell'integrabilità delle funzioni; per ora nei paragrafi seguenti supporremo che le funzioni di cui si tratta sieno sempre integrabili.

Secondo la definizione data calcoliamo l'integrale da a a b della funzione semplicissima $(x - c)$, cioè

$$\int_a^b (x - c)\, d\, x\,.$$

Dividiamo per semplicità l'intervallo da a a b in n parti eguali; ponendo $b - a = h$, ciascuno degli intervalli parziali δ_r sarà

$$\delta_r = \frac{h}{n}\,.$$

I punti di divisione degli intervalli saranno rispettivamente

$$x_0 = a \quad x_1 = a + \frac{h}{n}\quad,\quad x_2 = a + \frac{2\,h}{n}, \ldots$$

In ciascuno di tali intervalli parziali dobbiamo scegliere un punto in cui calcolare il valore della funzione; scegliamo tal punto proprio nell'estremo di ciascuno intervallo; il sommatorio fondamentale resta dunque costruito così:

$$\frac{h}{n}\left[(a - c) + \left(a - c + \frac{h}{n}\right) + \left(a - c + \frac{2\,h}{n}\right) + \right.$$
$$\left. + \ldots + \left(a - c + \frac{n-1}{n} h\right)\right]$$

che è eguale a:

$$\frac{h}{n}\left[n\,(a - c) + \frac{n\,(n-1)}{2}\,\frac{h}{n}\right] =$$
$$= (b - a)\,(a - c) + \frac{1}{2}\,\frac{n-1}{n}\,(b - a)^2\,.$$

Passando al limite per $n = \infty$ si ha pel valore dell'integrale definito:

$$(b - a)(a - c) + \frac{1}{2}(b - a)^2$$

cioè

$$\frac{b^2 - a^2}{2} - c(b - a).$$

Come si vede, il processo del calcolo per questa via è certamente complicato dal punto di vista pratico; per funzioni più complicate il calcolo del limite potrebbe riuscire praticamente impossibile. In seguito però noi mostreremo come, per mezzo di una proprietà fondamentale degli integrali delle funzioni continue, questi si possono calcolare mediante le note nozioni e formole di calcolo differenziale; in ciò i due calcoli, differenziale e integrale, si uniscono sostanzialmente fra loro.

§ 2. **Proprietà elementari degli integrali definiti. Formola del valor medio.** — In questo paragrafo fisseremo alcune proprietà generali che risultano senz'altro dalla data definizione di integrale definito.

1. *Se si invertono i limiti di integrazione il valore del nuovo integrale è eguale a quello dell'antico ma col segno cambiato.*

Infatti eseguiamo, secondo la data definizione, la integrazione da a sino a b, e poi l'integrazione *in senso inverso* da b sino ad a. È evidente che sia nell'uno che nell'altro caso possiamo formare gli stessi intervalli parziali δ_r, solo che i valori di questi, nei due casi dovranno considerarsi di segno contrario. Onde tutti i termini del sommatorio del primo caso riusciranno tutti di segno contrario, sebbene del medesimo valore dei termini del sommatorio del secondo caso.

2. È evidente inoltre la formola

$$\int_a^b c\, f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$$

essendo c una costante.

3. Se $f(x) = 1$, allora l'integrale da a a b si riduce alla somma di tutti gli intervalli δ_r, cioè si riduce alla lunghezza del cammino d'integrazione $b - a$.

4. Immaginiamo che in tutto un intervallo da α sino a β una funzione sia integrabile, e scegliamo in tale intervallo tre punti in un ordine qualunque a, b, c. Si può facilmente dimostrare che

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b .$$

Infatti immaginiamo che c sia compreso fra i due punti a, b. Formiamo l'integrale da a a b giusta la definizione. Essendo a nostro arbitrio la scelta degli intervalli δ_r, noi possiamo fare in maniera che uno dei punti di divisione sia proprio il punto c, e questo resti sempre punto di divisione in tutti gli stadii del passaggio al limite, *essendo arbitraria* la maniera colla quale gli intervalli δ_r si debbono far tendere a zero.

Così facendo è evidente che il sommatorio

$$\Sigma f_r \delta_r$$

resta scisso in due parti, una che va da a sino a c, e l'altra che va da c sino a b; passando quindi al limite resta dimostrato il nostro assunto.

Se poi il punto c è esterno all'intervallo a, b, p. es. è a destra di b, allora per ciò che abbiamo dimostrato si ha

$$\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$$

ed essendo

$$\int_b^c = -\int_c^b$$

possiamo ricavare anche qui:

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b .$$

5. *Se $f^{(1)}(x)$ $f^{(2)}(x)\ldots$ sono funzioni integrabili, sarà integrabile la loro somma, e l'integrale di questa è eguale alla somma degli integrali delle singole funzioni; in altri termini, il segno di integrale è invertibile col segno di somma.*

Formiamo infatti il sommatorio

$$\Sigma \delta_r \left[f_r^{(1)} + f_r^{(2)} + \ldots\right] \tag{1}$$

con cui si viene a costruire, col passaggio al limite, l'integrale corrispondente alla somma

$$f^{(1)}(x) + f^{(2)}(x) + \ldots\ldots \tag{2}$$

Evidentemente quel sommatorio è eguale a

$$\Sigma\, \delta_r . f_r{}^{(1)} + \Sigma\, \delta_r . f_r{}^{(2)} + \ldots \tag{3}$$

e avendo supposto che ciascuna delle funzioni date è integrabile, e che quindi esistono i limiti di

$$\Sigma\, \delta_r . f_r{}^{(1)} \quad , \quad \Sigma\, \delta_r . f_r{}^{(2)} , \ldots$$

esisterà anche il limite della somma di queste espressioni, e quindi possiamo conchiudere la prima parte del nostro assunto, cioè che la somma delle funzioni in numero finito è una funzione integrabile. Inoltre passando al limite nella espressione (3) che è eguale alla (1), si vede che ciascuno dei termini di (3) diventa l'integrale corrispondente ad una delle funzioni $f^{(1)}\, f^{(2)} \ldots .$, e quindi resta dimostrata anche la seconda parte del nostro assunto.

6. Possiamo infine ricavare una formola sul valore di un integrale definito.

Immaginiamo di prendere tutti eguali fra loro gli intervalli δ_r, e di conservarli sempre eguali fra loro in tutti gli stadi del passaggio al limite; in altri termini dividiamo tutto l'intervallo $b - a$ d'integrazione in un numero sempre maggiore di parti eguali. Allora ogni intervallo δ_r è eguale a $\dfrac{b-a}{n}$, e quindi per la definizione

$$\int_a^b f(x)\, d\, x = \lim_{n=\infty} \frac{b-a}{n} \sum_1^n f_r .$$

donde

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = \lim_{n=\infty} \frac{\sum_1^n f_r}{n}$$

cioè: *il rapporto fra il valore dell'integrale definito e l'intervallo d'integrazione, può considerarsi come il limite della media aritmetica dei valori che la funzione prende nei singoli punti dell'intervallo totale.*

Di qui possiamo ricavare un teorema che ci sarà utile varie volte. Indichiamo con f e F rispettivamente il limite inferiore e superiore della funzione nell'intervallo da a a b. Allora è evidente che la espressione

$$\frac{\sum_1^n f_r}{n}$$

che è una media aritmetica non può essere minore di f nè maggiore di F, e quindi avrà un valore compreso fra tali due estremi, valore che possiamo indicare con $f + \theta(F - f)$ dove θ è un numero compreso fra 0 e 1.

Abbiamo quindi la formola

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)[f + \theta(F-f)].$$

Se la funzione $f(x)$ è una funzione continua, allora nell'intervallo acquisterà qualunque valore *compreso fra* il massimo e il minimo, e quindi *esisterà nell' intervallo* un punto in cui la funzione avrà il valore $[f + \theta(F - f)]$. Chiamando

$$a + \vartheta(b - a)$$

tale punto dove al solito ϑ è un numero compreso fra 0 e 1 possiamo scrivere l'altra formola *valevole pel caso in cui* f *sia funzione continua*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b - a) f(a + \vartheta(b - a)).$$

Questa formola si chiama *la formola del valor medio*, e, come faremo vedere a suo tempo, ha una relazione con quella trovata nel calcolo differenziale, e similmente denominata.

§ 3. **L'integrale definito considerato come funzione dei limiti. La funzione integrale.** — In un integrale definito lasciamo fisso uno dei limiti p. es. il limite inferiore a e facciamo variare il limite superiore che chiameremo x, facendolo però variare in modo che nell' intervallo da a ad x la funzione data sia sempre integrabile. Allora è evidente che per ogni valore di x, vi sarà un valore unico e determinato per l'integrale definito, il quale quindi potrà considerarsi funzione del limite superiore x.

Ora noi vogliamo dimostrare prima di tutto che tale funzione è una funzione *continua*.

Facciamo variare il limite superiore x, di una quantità h che poi faremo decrescere sino a zero.

Formiamo la differenza fra i due integrali definiti, quello da a sino ad $x + h$, e quello da a

sino ad x. Si ha:

$$\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx = \int_x^{x+h} f(x)\,dx.$$

Per effetto del teorema del valor medio dimostrato al § precedente, noi possiamo scrivere

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = h\,[f + \theta\,(F - f)]$$

dove f, F sono rispettivamente, il minimo e il massimo valore che la funzione f ha nell'intervallo da x sino ad $x + h$.

Essendo $f(x)$ una funzione sempre finita, il secondo fattore del secondo membro della formola superiore non potrà che essere una quantità finita, e, diminuendo h, non potrà che restare sempre finito. Quindi il secondo membro della formola superiore, avendo per fattore h, tenderà a zero con h, e con ciò resta dimostrata la *continuità* della funzione integrale.

Passiamo ora alla sua *derivabilità.*

Dalla formola superiore si ricava

$$\lim_{h=o} \frac{\int_a^{x+h} - \int_a^x}{h} = \lim_{h=o} [f + \theta\,(F - f)].$$

Il primo membro non è altro che la formola che dà la derivata dell'integrale, quindi tale derivata esisterà o no, secondochè esisterà o no il limite indicato dal secondo membro.

5
ri
ii
b
o-
o-
n-
e
ta
io
o-
al
li-
e-
la

e, applicando il teorema della derivazione rispetto al limite superiore, si ha

$$\frac{d}{d\,a}\int_a^x = -f(a).$$

Nel caso in cui la funzione non è continua nel punto x, allora la derivata dell'integrale avrà un valore diverso, e potrà anche non esistere.

Si vede quindi che per le funzioni continue il problema dell'integrazione si riduce al problema inverso di quello della derivazione, si riduce cioè e trovare un'altra funzione tale che la sua derivata sia proprio la funzione data.

È di questo fatto fondamentale che noi ci serviremo in seguito per trovare le principali formole del calcolo integrale.

§ 4. **L'integrale definito in due casi singolari.** — Nella definizione che abbiamo data nel § 1 dell'integrale definito, abbiamo dovuto supporre prima, che la funzione resti sempre *finita* in tutto il cammino d'integrazione, e inoltre che i limiti d'integrazione sieno ambedue *finiti.* Ora vogliamo esaminare a parte i due casi singolari in cui queste condizioni non sono soddisfatte.

Supponiamo che la funzione diventi infinita in un punto, e per fissare le idee, supponiamo che diventi infinita proprio nel limite superiore b.

Allora noi consideriamo una quantità piccolissima ε, e l'integrale

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,d\,x$$

il quale potrà calcolarsi secondo l'antica definizione, perchè, per ipotesi, in tutto l'intervallo da a sino a $b - \varepsilon$ (per quanto piccolo sia ε ma diverso da zero) la funzione non diventa mai infinita.

Questo integrale riuscirà una funzione di ε, e *potrà avere un limite determinato per* $\varepsilon = 0$. Volendo dare la definizione di

$$\int_a^b$$

noi faremo naturalmente in modo da conservare le proprietà più fondamentali della funzione integrale; p. es. la proprietà della continuità rispetto al limite superiore; quindi vien spontanea l'idea di assumere come valore di

$$\int_a^b$$

il limite dei valori di

$$\int_a^{b-\varepsilon}$$

per $\varepsilon = o$, nel caso che questo limite esista.

Se poi il punto in cui la funzione diventa infinita non è un punto estremo dell'intervallo d'integrazione, cioè uno dei limiti, ma è un punto intermedio, allora, sempre nell'intento di conservare le proprietà generali degli integrali definiti, si può procedere nel seguente modo: sia c il punto fra a, b (limiti d'integrazione) in cui la funzione diventi *infinita.*

Spezziamo l'integrale da a a b in due parti nel punto c, estendendo così la proprietà nota degli integrali ordinarii, ponendo cioè

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$$

e definiamo ciascuno degli integrali del secondo membro colla formola già indicata. Per modo che infine *avremo per definizione*

$$\int_a^b = \lim_{\varepsilon=o} \int_a^{c-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon'=o} \int_{c+\varepsilon'}^b$$

supposto naturalmente che i limiti indicati nel secondo membro esistano.

Se in luogo di un solo punto d'infinito ve ne fossero varii non vi sarebbe che applicare ripetutamente questi stessi concetti.

È facile trovare la condizione necessaria è sufficiente per l'esistenza di tali limiti.

Se deve esistere il limite di $\int_a^{b-\varepsilon}$ per $\varepsilon = o$, giusta la teoria generale dei limiti, è necessario ed è sufficiente che dato σ si possa trovare un tratto di variabilità di ε in modo che per due ε compresi in tale tratto, ε_1, ε_2 sia sempre in valore assoluto

$$\int_a^{b-\varepsilon_1} - \int_a^{b-\varepsilon_2} = \sigma$$

cioè

$$\int_{b-\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} = \sigma.$$

Un' analoga condizione può stabilirsi per gli altri casi.

Possiamo stabilire un tipo di funzione in cui questa condizione è soddisfatta.

Immaginiamo che la funzione $f(x)$ nel punto b diventi infinita ma sia tale che il suo valore assoluto sia sempre inferiore o eguale al valore assoluto di una funzione del tipo

$$\frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}$$

dove ν è positivo minore di 1 e $\varphi(x)$ sia una funzione che nel punto b acquista un valore finito, e che in tutto il tratto da a a b non diventi infinita in alcun punto.

In particolare la $f(x)$ potrebbe essere proprio di quel tipo.

Sia allora M il limite superiore dei valori assoluti di $\varphi(x)$ in tale tratto. Per le ipotesi fatte tal numero è finito.

Si ha dunque *in valore assoluto*

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \leqq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{|\varphi(x)|}{(x-b)^\nu}\,dx \leqq$$

$$\leqq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(x-b)^\nu}\,dx.$$

Questa disuguaglianza si ottiene ricorrendo direttamente alla definizione fondamentale di integrale definito, osservando cioè che, se si ha da calcolare l'integrale definito corrispondente ad una funzione che è minore in valore assoluto di un'altra per qualunque punto del cammino d'integrazione, i diversi termini del sommatorio relativo alla data funzione sono rispettivamente minori di quelli relativi alla seconda, e quindi l'integrale corrispondente alla prima funzione sarà certamente minore di quello relativo alla seconda.

Ora sarà dimostrato in seguito che (v. Cap. III, § 1).

$$\int_a^{b-\varepsilon} \frac{M}{(x-b)^\nu}\, d\,x = \frac{M}{1-\nu}\left[\frac{1}{\varepsilon^{\nu-1}} - \frac{1}{(a-b)^{\nu-1}}\right].$$

Onde si vede che se $\nu - 1$ è una quantità minore di zero, cioè *se* ν *è minore di* 1, allora $\frac{1}{\varepsilon^{\nu-1}}$ per $\varepsilon = 0$ tende a zero e quindi quell'integrale tende ad una quantità finita. Possiamo dunque conchiudere:

Se una funzione integrabile diventa infinita in un punto b, *e il suo valore assoluto si mantiene sempre inferiore o eguale a quello di una funzione del tipo:*

$$\frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}$$

dove $\nu < 1$, *in cui cioè l'ordine dell'infinito è minore di* 1, *allora l'integrale definito da* a *sino a* b *è una quantità finita.*

Immaginiamo invece che la funzione diventi in b infinita ma il suo valore si mantenga sempre maggiore del valore di una funzione del tipo

$$\frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}$$

dove $\nu \gtreqless 1$, e $\varphi(x)$ sia sempre *positiva* e non diventi infinita in nessun punto nell'intorno di b, e non diventi *zero* in b. *In particolare* la $f(x)$ potrebbe essere proprio una funzione di quel tipo.

Sia m il limite inferiore dei valori di $\varphi(x)$ nel tratto da a a b.

Allora sarà

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \geqq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}\,dx \geqq$$

$$\geqq \int_a^{b-\varepsilon} \frac{m}{(x-b)^\nu}\,dx$$

Ma, come sopra, quest'ultimo integrale è

$$\frac{m}{1-\nu}\left[\frac{1}{\varepsilon^{\nu-1}} - \frac{1}{(a-b)^{\nu-1}}\right]$$

che per $\nu > 1$ e per $\varepsilon = 0$ tende all'infinito, dunque il nostro integrale non tenderà ad alcun limite finito.

Se poi $\nu = 1$ allora sarà in seguito dimostrato che quell'integrale ha per valore

$$m\,[\log \varepsilon - \log(a-b)]$$

che per $\varepsilon = 0$ tende anche all'infinito.

Quindi possiamo dire:

Se una funzione diventa in un punto b *infinita e il suo valore si mantiene maggiore di quello di un'altra funzione della forma* $\frac{\varphi(x)}{(x-b)^\nu}$ dove $\nu \geqq 1$

e $\varphi(x)$ *è sempre positivo, allora l' integrale definito da* a *a* b *non ha un valore finito.*

Passiamo ora al caso in cui uno dei limiti è l'infinito.

Tenendo anche qui presente la proprietà fondamentale della funzione integrale, di essere cioè una funzione continua dei limiti, abbiamo il mezzo di definire l'integrale

$$\int_a^\infty f(x)\, dx$$

supposto che la f(x) *sia integrabile in qualunque tratto a cominciare da* a *sino ad un punto qualunque verso la parte positiva, o rispettivamente la parte negativa, secondochè si vuol calcolare l'integrale da* a *sino a* $+\infty$, *ovvero da* a *sino a* $-\infty$.

Scegliamo un limite superiore qualunque x e calcoliamo l'integrale da a a x, e poi calcoliamo il limite di tale espressione per $x=\infty$.

Se questo limite esiste, lo chiameremo il valore dell'integrale da a ad ∞.

Si ha dunque

$$\int_a^\infty = \lim_{x=\infty} \int_a^x .$$

Anche qui può trovarsi la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di tal limite. Ricordando la teoria generale dei limiti, ricaviamo che perchè quel limite esista è necessario e sufficiente che dato σ piccolo a piacere si possa trovare un punto a tale che per due qualunque punti x' x''

compresi fra a e l'∞ si abbia sempre in valore assoluto

$$\int_{x'}^{x''} < \sigma.$$

Possiamo dimostrare un teorema che ha molta analogia con quello dimostrato sopra pel caso in cui la funzione diventi infinita.

Se la funzione da integrare diventa zero per $x = \infty$, *e propriamente in modo che il suo valore assoluto resti sempre minore o eguale al valore assoluto di una funzione del tipo*

$$\frac{\varphi(x)}{x^\nu}$$

dove ν *sia maggiore di* 1, *e* $\varphi(x)$ *sia sempre finita e per* $x = \infty$ *abbia un valore finito diverso da zero, allora l'integrale definito da* a *ad* ∞ *avrà un valore finito. In particolare la* $f(x)$ *potrebbe essere proprio una funzione di quel tipo.*

Sia M il limite superiore dei valori assoluti di $\varphi(x)$, e si ha allora

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x=\infty} \int_a^x f(x)\,dx \leq \lim_{x=\infty} \int_a^x \frac{|\varphi(x)|}{x^\nu}\,dx$$

$$\leq \lim_{x=\infty} \int_a^x \frac{M}{x^\nu}\,dx.$$

Ma, come abbiamo già detto sopra,

$$\int_a^x \frac{M}{x^\nu}\,dx = \frac{M}{1-\nu}\left[\frac{1}{x^{\nu-1}} - \frac{1}{a^{\nu-1}}\right]$$

e, se $\nu > 1$ l'espressione del secondo membro tende ad un valore finito per $x = \infty$, dunque resta dimostrato il nostro assunto.

In simile maniera può dimostrarsi che *se* f(x) *si mantiene sempre maggiore od eguale al valore di una funzione del tipo*

$$\frac{\varphi(x)}{x^\nu}$$

dove φ(x) *è sempre positiva, e* ν *è minore o eguale al* 1, *o anche, in particolare, è una funzione di questo tipo, allora l'integrale sino all'* ∞ *non ha un valore finito.*

Nei paragrafi seguenti sarà fatto vedere, man mano che ne capiterà l'occasione, quali cangiamenti subiscono i teoremi fondamentali sugli integrali definiti nei due casi singolari di cui abbiamo qui trattato (v. p. es. il § 7 di questo Cap. I).

§ 5. **Integrali indefiniti.** — La definizione che abbiamo data di integrale definito suppone essenzialmente la esistenza di due limiti d'integrazione determinati e fissi.

Noi abbiamo visto che pel caso della funzione $f(x)$ continua, il problema dell'integrazione si riduce a trovare una funzione $F(x)$ la cui funzione derivata sia proprio quella data.

Ora di funzioni le quali abbiano per derivata $f(x)$, ve ne sono infinite, e tutte, come si sa dal calcolo differenziale, differiscono fra loro per una costante; in altri termini trovata una di tali funzioni, se vi aggiungiamo una qualunque costante, si ha ancora una funzione della stessa specie.

Formiamo quindi la espressione generale

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, d\, x + \text{cost.};$$

si ha una funzione generale di x che si chiama l'*integrale indefinito* della funzione data. In questa formola per a si intende un determinato valore numerico.

Si chiama *indefinito*, volendo contrapporlo all'integrale *definito* in cui i limiti sono fissi, mentre che in esso, da un certo punto di vista, i limiti possono considerarsi come mobili, dipendenti cioè dalla variabilità della costante arbitraria.

Se noi consideriamo l'integrale definito

$$\int_a^x f(x)\, d\, x$$

e mutiamo il limite inferiore a, abbiamo l'integrale

$$\int_b^x$$

che è eguale a

$$\int_b^x = \int_a^x + \int_b^a$$

e il secondo integrale non dipende più da x e quindi è una costante rispetto ad x.

Si vede quindi che, mutando il limite inferiore, l nuovo integrale definito è eguale all'antico aggiuntavi una certa costante il cui valore dipende naturalmente dal nuovo limite inferiore scelto.

L'integrale *indefinito* è una funzione di x, non dipendente più dal limite inferiore dell'integrale. Esso si indica col solo simbolo di integrazione senza alcuna designazione di limiti particolari.

Conosciuta questa funzione, se ne può dedurre il valore di qualunque integrale definito.

Sia $F(x)$ tale funzione, e se ne voglia dedurre il valore dell'integrale definito

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\, d\, x$$

dove $\alpha\,\beta$ sono due numeri fissi.

La $F(x)$ è della forma

$$F(x) = \int_{a}^{x} + c.$$

Poniamo $x = \beta$ e si ha

$$F(\beta) = \int_{a}^{\beta} + c$$

e per $x = \alpha$

$$F(\alpha) = \int_{a}^{\alpha} + c$$

e sottraendo queste due eguaglianze si ha:

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int_{a}^{\beta} - \int_{a}^{\alpha} = \int_{a}^{\beta}$$

e con ciò resta calcolato il nostro integrale definito.

Si ha dunque che, *dato l'integrale indefinito, per calcolare un integrale definito qualunque, basta sostituire nel primo, in luogo di* x, *il limite superiore, poi il limite inferiore, e sottrarre i due risultati.*

Viceversa, se è dato il valore di un integrale definito, non se ne potrà in generale ricavare l'integrale indefinito, cioè la funzione di x. Avvertiamo però esplicitamente che quando diciamo *dato l'integrale definito*, intendiamo che di questo è dato il valore *numerico* fra limiti *numerici* dati; che non sarebbe più naturalmente lo stesso, se di esso fosse conosciuto il valore fra limiti indeterminati indicati p. es. colle lettere a, b perchè allora quella conosciuta, funzione di a o di b, sarebbe essa stessa, salvo il nome della variabile, l'integrale indefinito.

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo mostrare che la relazione fondamentale fra gli integrali definiti e indefiniti continua a sussistere inalterata anche nei due casi singolari di cui abbiamo trattato nel § 4, cioè o quando la funzione sotto il segno integrale diventa infinita in un punto del cammino d'integrazione, ovvero quando uno dei limiti è l'infinito.

Infatti la funzione $f(x)$ diventi infinita nel punto c compreso fra i limiti a, b dell'integrale definito

$$\int^b f(x)\,d\,x.$$

Per definizione tale integrale sarà eguale a

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon'=0} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)\,dx$$

e se $F(x)$ è l'integrale indefinito, il primo dei due integrali sarà

$$F(c-\varepsilon) - F(a)$$

e il secondo sarà

$$F(b) - F(c+\varepsilon')$$

Ora la funzione $F(x)$ è una funzione continua anche nel punto c, supposto verificate le disuguaglianze fondamentali

$$\int_{c-\varepsilon_1}^{c-\varepsilon} < \sigma$$

(σ piccolo a piacere)

$$\int_{c+\varepsilon'}^{c+\varepsilon_1'} < \sigma$$

(senza di che non esiste l'integrale definito da a a b); onde

$$\lim_{\varepsilon=0} F(c-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon'=0} F(c+\varepsilon') = F(c)$$

e quindi l'integrale dato è eguale a

$$F(b) - F(a)$$

con che si dimostra il nostro assunto.

Supponiamo ora inoltre che uno dei limiti d'integrazione sia l'infinito. Allora per definizione e conservando le stesse notazioni:

$$\int_a^{\infty} f(x)\, d\, x = \lim_{x'=\infty} \int_a^{x'} f(x)\, d\, x$$

$$= \lim \Big[F(x') - F(a) \Big].$$

Ma per la solita continuità della funzione $F(x)$ anche nel punto all'infinito si ha

$$\lim_{x'=\infty} F(x') = F(\infty)$$

dunque resta dimostrato il nostro assunto.

§ 6. **Trasformazione di un integrale semplice.** — Si abbia un integrale indefinito (che chiameremo *semplice* per distinguerlo da altri integrali che studieremo in seguito e che chiameremo *multipli*)

$$\int f(x)\, d\, x$$

dove $f(x)$ sia una funzione *continua.*

Si sa che la ricerca di tale integrale si riduce alla ricerca di una funzione la cui derivata sia $f(x)$, o anche, il cui differenziale sia $f(x)\, d\, x$ cioè la espressione che figura sotto il simbolo di integrale.

Vogliamo ora esaminare come si muta questo *integrale se noi vogliamo mutare, con una data trasformazione, la variabile d'integrazione x.*

Noi faremo vedere che *l'integrale si trasformerà in modo che sotto il simbolo ∫ occorrerà porre ciò che risulta dalla trasformazione dell'espressione differenziale* f (x) d x.

In effetti si ponga $x = \varphi(y)$ e sia y la nuova variabile indipendente. Il calcolo dell'integrale si riduce a quello di una funzione la cui derivata rispetto a x sia $f(x$; quindi, la derivata sua rispetto a y sarà $f(x)\frac{dx}{dy}$. Ora se esprimiamo tutto l'integrale colla variabile y, abbiamo una funzione la cui derivata rispetto ad y deve essere proprio questa ora scritta; cioè la funzione di integrare espressa in y è

$$f(\varphi(y))\frac{dx}{dy};$$

l'integrale quindi è

$$\int f(\varphi(y))\frac{dx}{dy}dy.$$

Nel calcolo degli integrali la trasformazione degli integrali può essere assai utile; perchè è evidente che tanto più complicata sarà la ricerca di un integrale indefinito per quanto più complicata è la funzione che comparisce sotto il segno; ora naturalmente potrà accadere che con opportuna trasformazione di variabile indipendente, l'integrale dato si riduca ad un altro meno complicato, o di un tipo che sia già noto.

Di questo principio avremo spesso occasione di servirci.

Si abbia per esempio da calcolare

$$\int \frac{d\,x}{\operatorname{sen} x}$$

Qui la funzione che sta sotto il segno è una funzione *trascendente*.

Poniamo

$$x = \operatorname{arc} \cos y$$

cioè

$$y = \cos x$$

Allora

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1 - y^2}$$

$$\frac{d\,x}{d\,y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

e quindi l'integrale diventa

$$-\int \frac{d\,y}{1 - y^2}$$

e si ha così da integrare una funzione *algebrica razionale*, invece di una funzione *trascendente*.

Se ora si tratti di un integrale *definito* fra i limiti a, b, il nuovo integrale nella variabile y, bisognerà naturalmente definirlo fra due limiti che corrispondono ai due dati. Mediante la relazione data

$$x = \varphi\,(y)$$

noi possiamo trovare qual valore di y corrisponde al valor a di x, e qual valore di y corrisponde al valore b di x. Sieno a' b' tali valori di y; essi dovranno assumersi come nuovi limiti d'integrazione.

Così nell'esempio dato, se l'integrale rispetto ad x bisognava definirlo da $x = 0$ sino a $x = \frac{\pi}{2}$, quello trasformato in y, bisognerà definirlo da $y = 1$ sino ad $y = 0$ perchè è facile verificare che si ha proprio una siffatta corrispondenza fra i valori di x e di y.

§ 7. **Derivazione rispetto ad un parametro. Invertibilità dei segni di limite e integrazione; invertibilità dei segni di derivazione e integrazione.** — Cominciamo collo studiare l'integrale definito di una funzione che contiene, oltre la variabile d'integrazione, anche un'altra variabile y.

Per maggiore generalità supponiamo che i limiti d'integrazione sieno anche funzioni della variabile y, $a(y)$, $b(y)$.

La data funzione $f(x\,y)$ sia *continua rispetto ad ambo le variabili in un certo campo, e sieno continue le funzioni* $a(y)$ $b(y)$. Allora prima di tutto si può far vedere che l'integrale definito da $x = a(y)$ sino ad $x = b(y)$ è anche una funzione *continua* di y.

Poniamo

$$\varphi(y) = \int_{a(y)}^{b(y)} f(x\,y)\,d\,x.$$

Avvertiamo una volta per sempre che pei teoremi di questo paragrafo e dei paragrafi seguenti, noi in generale non daremo che delle *condizioni sufficienti* per la loro sussistenza, ma non *necessarie*.

Le condizioni puramente *necessarie*, se anche possono trovarsi, sono quasi sempre di una complicatezza, che quasi inutilizza quei teoremi, per la difficoltà dell'applicazione ai casi speciali. Questa osservazione capita continuamente in tutto il calcolo infinitesimale, come noi a suo tempo abbiamo avvertito (vedi prefazione del calcolo differenziale).

Allora sarà:

$$\varphi(y+k)-\varphi(y)=\int_{a(y+k)}^{b(y+k)} f(x,y+k)\,dx -$$

$$-\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,dx = \int_{a(y)}^{b(y)} [f(x,y+k)-f(x,y)]\,dx -$$

$$-\int_{a(y)}^{a(y+k)} f(x,y+k)\,dx + \int_{b(y)}^{b(y+k)} f(x,y+k)\,dx.$$

Ora consideriamo:

$$\int_{a(y)}^{a(y+k)} f(x,y+k)\,dx.$$

Essendo a una funzione *continua* di y si ha che la differenza fra $a(y+k)$ e $a(y)$ tende a zero col tendere di k a zero.

Se per un momento indichiamo con $F(x,y+k)$ l'integrale indefinito, si ha che l'integrale definito sarà

$$F[a(y+k),y+k]-F[a(y),y+k].$$

Ora per la continuità di F e per un teorema noto, si ha

$$F[a(y+k), y+k] - F[a(y), y+k] =$$
$$= [a(y+k) - a(y)]\, F'[a(y+\theta k), y+k] =$$
$$= [a(y+k) - a(y)]\, f[a(y+\theta k), y+k]$$

e per la continuità delle funzioni f ed $a(y)$ possiamo sempre porre:

$$f[a(y+\theta k), y+k] = f(a, y) + \varepsilon$$

essendo ε una quantità che si può rendere piccola a piacere diminuendo opportunamente k, onde

$$\int_{a(y)}^{a(y+k)} f(x, y+k)\,dx = [a(y+k) - a(y)][f(a, y) + \varepsilon].$$

Analogamente

$$\int_{b(y)}^{b(y+k)} f(x, y+k)\,dx = [b(y+k) - b(y)]\,[f(b, y) + \varepsilon']$$

indicando semplicemente con a, b, i valori di queste funzioni nel punto y.

Onde infine:

$$\varphi(y+k) - \varphi(y) =$$
$$= \int_a^b [f(x, y+k) - f(x, y)]\,dx -$$
$$- [a(y+k) - a(y)]\,[f(a, y) + \varepsilon] +$$
$$+ [b(y+k) - b(y)]\,[f(b, y) + \varepsilon'].$$

Ora, supponendo la funzione f una funzione *continua* delle due variabili x y, per tutti i valori di x compresi fra i limiti d'integrazione, dato un numero σ piccolo a piacere, si potrà sempre trovare un valore di k tale che, *per ogni* x *compreso nell'intervallo d'integrazione* sia sempre in valore assoluto

$$f(x, y+k) - f(x\,y) < \sigma.$$

Ciò si ricava subito dal teorema di cui abbiamo discorso nel § 9, Cap. I del calcolo differenziale, cioè che anche per le funzioni di *più* variabili, la continuità semplice è contemporaneamente *continuità uniforme* per tutto il campo.

Si ha quindi che l'integrale

$$\int_a^b [f(x, y+k) - f(x\,y)]\, d\,x$$

è minore in valore assoluto di

$$\int_a^b \sigma\, d\,x$$

cioè di

$$\sigma \int_a^b d\,x = \sigma\,(b-a)$$

la quale quantità può rendersi piccola a piacere diminuendo σ.

Si vede quindi che tutti i termini del secondo membro della formola superiore si possono rendere *piccoli a piacere*, e quindi il limite di esso è zero, *cioè la funzione* φ è *continua*.

Si ha dunque: *Se la funzione integranda è una funzione continua delle due variabili* x y, *allora il segno di limite è invertibile col segno di integrale.*

In formola

$$\lim_{y=y'} \int_a^b f(x\,y)\,d\,x = \int_a^b \lim_{y=y'} f(x\,y)\,d\,x$$
$$= \int_a^b f(x\,y')\,d\,x.$$

Supponiamo ora che le funzioni $\alpha(y)$ $\beta(y)$ $f(x\,y)$ oltre che continua, sieno anche derivabili rispetto ad y, e che inoltre la derivata f'_y sia *continua* rispetto ad ambedue le variabili.

Si ha intanto

$$f(x\,,y+k) - f(x\,y) = k\,f'_y(x\,,y+\theta\,k)$$

essendo θ un numero compreso fra 0 e 1, onde

$$\frac{\varphi(y+k)-\varphi(y)}{k} = \int_a^b f'_y(x\,,y+\theta\,k)\,d\,x$$
$$- [f(a\,,y)+\varepsilon]\left[\frac{a(y+k)-a(y)}{k}\right]$$
$$+ [f(b,y)+\varepsilon']\left[\frac{b(y+k)-b(y)}{k}\right]$$

Ora per le ipotesi fatte si ha

$$f'_y(x\,,y+\theta\,k) = f'_y(x\,y) + \varepsilon''$$

essendo ε'' una quantità che converge a zero per $k=0$, e inoltre, per la solita ragione, che la continuità semplice è anche una *continuità uniforme* in tutto il campo, si ha che si può trovare un k tale che *per qualunque coppia di valori* x, y *del campo*, in quella eguaglianza sia sempre $\varepsilon'' < \sigma$ quantità piccola a piacere. Allora per qualunque valore di y compreso nel campo e per qualunque θ compreso fra 0 e 1 sarà sempre in valore assoluto l'integrale

$$\int_a^b f'_y(x, y + \theta k)\, dx$$

differente dall'integrale

$$\int_a^b f'_y(x y)\, dx$$

di una quantità

$$\int_a^b \varepsilon''\, dx$$

che è minore di

$$\sigma \int_a^b dx = \sigma(b - a)$$

cioè di una quantità piccola a piacere.

Ciò significa che il limite per $k = 0$ dell'integrale rappresentato dal primo termine della formola superiore è

$$\int_a^b f'_y(x y)\, dx$$

e quindi si ha la formola (passando al limite per $k=0$).

$$\varphi'(y) = \int_a^b f'_y(x\,y)\,d\,x - f(a\,,y)\,a'(y) + f(b\,,y)\,b'(y)$$

indicando con φ', a', b' le derivate delle funzioni φ, a, b.

Se in particolare a, b non sono funzioni di y, ma costanti, allora la formola si riduce semplicemente a

$$\frac{d}{d\,y}\int_a^b f(x\,y)\,d\,x = \int_a^b \frac{d}{d\,y} f(x\,y)\,d\,x.$$

Come si vede dunque, *nel caso in cui la funzione* f *soddisfi alle condizioni dette, cioè che essa e la sua derivata rispetto a* y, *sieno funzioni continue rispetto ad ambedue le variabili* x, y, *sussiste il teorema della invertibilità dei due segni di derivazione e di integrazione.*

Questo teorema si chiama *il teorema della derivazione sotto il segno.*

Dalla formola superiore possiamo subito ricavare le già note formole di derivazione di un integrale definito rispetto ai limiti (v. § 3).

Infatti basta supporre che f non contenga y, e che delle due funzioni $a(y)$, $b(y)$ una sia costante, e l'altra sia la variabile stessa y.

Si può notare che il teorema della invertibilità di cui si è parlato sussiste ancora semprechè la funzione rappresentata dall' integrale definito

$$F(x\,y) = \int_a^x f(x\,y)\,d\,x$$

è una tal funzione di x y *che per essa sussiste il teorema della invertibilità delle due derivazioni rispetto ad* x *e* y.

Infatti si ha

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x} = f(x\,y) \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} f(x\,y)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \int_a^x f(x\,y)\,d\,x.$$

Per l'ipotesi fatta si ha intanto

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x\,y) = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} \int_a^x f(x\,y)\,d\,x$$

e integrando rispetto ad x si ha

$$\int_a^x \frac{\partial}{\partial y} f(x\,y)\,d\,x = \frac{\partial}{\partial y} \int_a^x f(x\,y)\,d\,x$$

la quale formola dimostra il nostro assunto.

Dobbiamo ora passare a considerare il teorema della derivazione sotto il segno, nei casi singolari in cui o uno dei limiti d'integrazione è l'*infinito*, ovvero la funzione integranda è *infinita* in qualche punto.

In tali casi le condizioni poste non bastano più, e noi potremo aggiungerne delle altre, espresse anche sotto una forma semplice, e che sono *sufficienti* per la validità del teorema.

Supponiamo prima che uno dei limiti d'integrazione sia l'*infinito*, che cioè si abbia da derivare l'integrale

$$\int_a^\infty f(x\, y)\, d\, x.$$

Noi abbiamo visto che in generale perchè un integrale definito sia funzione *continua* di un parametro y contenuto nell'integrando, basta che la funzione integranda sia una funzione continua di ambedue le variabili x, y. Ora una tal condizione non basta più se uno dei limiti è l'infinito.

Per convincersi di questo basta ricorrere ad un esempio.

Si può trovare che

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} y\, x}{x}\, d\, x = \frac{1}{2}\pi$$

per ogni valore finito di y; ma per $y = 0$ evidentemente essendo zero l'integrando, per qualunque x, anche per $x = \infty$ tutto l'integrale sarà zero, e quindi quell'integrale definito non resta una funzione continua di y, sebbene la funzione $\frac{\operatorname{sen} y\, x}{x}$ sia una funzione continua di ambo le variabili.

Questo esempio basta per intendere che nel caso in esame occorrono altre condizioni.

Noi dimostreremo che *nel caso in cui la funzione da integrare oltre che continua è tale che per* x $= \infty$ *diventa zero algebricamente di ordine maggiore di* 1, *allora si conserva la continuità dell'integrale definito considerato come funzione del parametro, anche quando uno dei limiti è l'infinito, e se poi lo stesso si verifica anche per la derivata di quella funzione rispetto al parametro* y, *allora si conserva il teorema della derivazione sotto il segno.*

Infatti nel caso in cui la funzione $f(x\,y)$ per $x = \infty$ diventa zero algebricamente di ordine maggiore di 1, sappiamo (v. § 4) che l'integrale definito sino all'∞ ha un valore finito, e quindi che potrà sempre trovarsi un numero a' tale che, scelti due *qualunque* numeri $x'\,x''$ fra a' e ∞ si abbia sempre che l'integrale definito da x' a x'' sia minore di σ, ovvero anche, scegliendo in particolare $x' = a'$:

$$\int_{a'}^{x''} f(x\,y)\,dx < \sigma$$

e quindi analogamente anche

$$\int_{a'}^{x''} f(x\,,y+k)\,d\,x < \sigma$$

donde

$$\int_{a'}^{x''} [f(x\,,y+k) - f(x\,y)|\,d\,x < 2\,\sigma$$

e quindi anche il limite di questo integrale per $x'' = \infty$ sarà minore di 2σ.

Ora

$$\int_a^\infty [f(x, y+k) - f(x\,y)]\, dx =$$

$$= \int_a^{a'} + \int_{a'}^\infty = \int_a^{a'} + \lim_{x''=\infty} \int_a^{x''}.$$

Intanto per effetto della continuità della funzione $f(x\,y)$ si potrà sempre trovare un valore di k tale che per ogni k_1 minore di esso e per qualunque x sia sempre in valore assoluto

$$|f(x, y+k_1) - f(x\,y)| < |f(x, y+k) - f(x\,y)|$$

e allora fissato un tale k si potrà trovare il punto a' per il quale sussiste la disuguaglianza

$$\lim_{x''=\infty} \int_{a'}^{x''} < 2\sigma$$

e fissato così a', si potrà poi diminuire il k in maniera che sia anche

$$\int_a^{a'} < \sigma$$

e ciò per effetto della dimostrata continuità dell'integrale definito fra limiti finiti.

Si vede dunque che si potrà sempre, sotto le *ipotesi fatte*, rendere piccola a piacere col diminuire k la quantità

$$\int_a^{\infty} [f(x, y + k) - f(x\, y)]\, d\, x$$

con che si dimostra la continuità rispetto ad y dell'integrale.

Supponiamo ora che anche f'_y sia zero di ordine maggiore di 1 per $x = \infty$.

Allora per effetto della dimostrazione ora fatta ricaviamo che

$$\int_a^{\infty} [f'_y(x, y + 0\, k) - f'_y(x\, y)]\, d\, x$$

converge a zero col diminuire di k; ma intanto

$$\int_a^{\infty} \frac{f(x, y + k) - f(x\, y)}{k}\, d\, x = \int_a^{\infty} f'_y(x, y + 0\, k)\, d\, x$$

onde la differenza

$$\int_a^{\infty} \frac{f(x, y + k) - f(x\, y)}{k}\, d\, x - \int_a^{\infty} f'_y(x\, y)\, d\, x$$

per $k = 0$ converge a zero, cioè

$$\lim_{k=o} \int_a^{\infty} \frac{f(x, y + k) - f(x\, y)}{k}\, d\, x,$$

che è la derivata dell'integrale rispetto a y, è proprio eguale all'integrale della derivata; con ciò resta dimostrato il teorema della derivazione *sotto il segno anche* nel caso in cui uno dei limiti è *l'infinito.*

Passiamo ora all'altro caso singolare in cui la funzione sotto il segno diventa infinita in un punto; per fissare le idee supporremo che diventi infinita nel limite superiore.

Dimostreremo il teorema:

Se le funzioni f$(x\,y)$ *e* f$'(x\,y)$ *diventano in un punto* x (*qualunque sia il valore di* y *compreso nel campo*) *infinite algebricamente di ordine minore di* 1, *e se inoltre sono continue rispetto ad ambo le variabili, allora sussiste ancora il teorema della derivazione sotto il segno.*

Infatti se b è il punto d'infinito, nelle ipotesi fatte i due integrali

$$\int_a^b f(x\,y)\,dx \quad , \quad \int_a^b f'_y(x\,,y+\theta k)\,dx$$

sono finiti per un qualunque y compreso nel campo, giusta un teorema del § 4.

Quindi per i risultati dello stesso citato paragrafo l'integrale

$$\int_{b-\varepsilon}^b f'_y(x\,,y+\theta k)\,dx$$

si potrà rendere piccolo a piacere, opportunamente diminuendo ε. Quindi anche il suo limite per $k=0$ potrà rendersi piccolo a piacere.

Intanto

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(xy)\,dx = \lim_{k=0}\int_a^{b-\varepsilon}\frac{f(x\,,y+k)-f(xy)}{k}\,dx$$

$$+\lim_{k=0}\int_{b-\varepsilon}^b f'_y(x\,,y+\theta k)\,dx$$

(applicando alla seconda parte il noto teorema del valor medio); e inoltre evidentemente, per effetto del teorema generale di derivazione sotto il segno, si ha che

$$\lim_{k=o} \int_a^{b-\varepsilon} \frac{f(x\,,y+k)-f(x\,y)}{k}\,d\,x =$$

$$= \int_a^{b-\varepsilon} f'_y(x\,y)\,d\,x$$

perchè fra i limiti a, $b-\varepsilon$ non esiste alcun punto in cui la funzione diventa infinita.

Si può dunque fissare ε in modo che la differenza fra

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b f(x\,y)\,d\,x$$

e

$$\int_a^{b-\varepsilon} f'_y(x\,y)\,d\,x$$

sia minore di una quantità piccola a piacere; per $\varepsilon=0$ si ha dunque l'eguaglianza della derivata dell'integrale coll'integrale della derivata.

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo notare che il teorema della derivazione sotto il segno può servire alcune volte utilmente per la ricerca di certi integrali definiti ricavandoli da altri *già noti.*

Così p. es. si sappia che

$$\int_0^\infty \frac{d\,x}{y^2 + x^2} = \frac{\pi}{4\,y}.$$

Applicando la derivazione rispetto ad y si ha evidentemente l'altra formola

$$\int_0^\infty \frac{d\,x}{(y^2 + x^2)^2} = \frac{\pi}{4\,y^2}$$

e da questa riapplicando la derivazione rispetto ad y si potrebbero ottenere altre formole.

Inoltre c'è anche un'altro modo con cui applicare il teorema della derivazione sotto il segno, per ricavarne il calcolo di integrali definiti.

Si voglia p. es. calcolare

$$\int_0^1 x^\alpha \log x\, d\,x.$$

Si può osservare che $x^\alpha \log x$ è la derivata rispetto ad α di x^α; quindi possiamo scrivere

$$\int_0^1 x^\alpha \log x\, d\,x = \int_0^1 \left(\frac{d}{d\,\alpha}\, x^\alpha\right) d\,x$$

e per il teorema della derivazione sotto il segno, possiamo invertire il segno di derivazione col segno di integrale e scrivere che quell'integrale è uguale a

$$\frac{d}{d\,\alpha}\int_0^1 x^\alpha\, d\,x$$

ed evidentemente abbiamo così ottenuto una rilevante semplificazione, perchè è naturalmente assai più facile il calcolo dell'integrale della funzione x^α che quello della funzione $x^\alpha \log x$. Ed in effetti possiamo subito osservare che essendo x^α una funzione continua, il calcolo dell'integrale corrispondente si riduce al calcolo di una funzione la cui derivata sia x^α, e d'altra parte tale funzione è semplicemente

$$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$$

la cui derivata è proprio x^α.

Abbiamo quindi

$$\int_0^1 x^\alpha\, d\, x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$

e quindi

$$\int_0^1 x^\alpha \log x\, d\, x = \frac{d}{d\,\alpha}\frac{1}{\alpha+1} = \frac{1}{(\alpha+1)^2}.$$

§ 8. **Invertibilità di due segni d'integrazione.** — Nel § precedente abbiamo supposto che la funzione sotto il segno d'integrale contenga un parametro y, e abbiamo studiata la derivazione dell'integrale rispetto ad y. Ora consideriamo invece l'integrazione rispetto ad y dell'integrale dato.

Posto, come nel § 7,

$$\varphi(y) = \int^b f(x\,y)\, d\, x$$

consideriamo

$$\int_c^d \varphi(y)\, d\, y$$

che è eguale a

$$\int_c^d d\, y \int_a^b f(x\, y)\, d\, x.$$

Una tale espressione si chiama un *integrale doppio;* noi in seguito avremo occasione di dedicare agli integrali multipli un capitolo speciale.

Per ora vogliamo solo rispondere alla domanda: Si può invertire l'ordine delle due integrazioni? Questo problema è l'analogo di quello già trattato nel calcolo differenziale sull'invertibilità delle derivazioni.

Si può far vedere *che se i limiti* a, b *sono costanti, cioè non dipendenti da* y, *e sono naturalmente anche costanti i limiti* c, d, *e se la funzione* f (x y) *è una funzione continua delle due variabili in tutto il campo che si estende, per* x *da* a *a* b, *e per* y *da* c *a* d, *allora si può invertire l'ordine delle integrazioni.*

È facile infatti far vedere che le derivate delle due espressioni

$$A = \int_c^d d\, y \int_a^b d\, x\, f(x\, y)$$

$$B = \int_a^b d\, x \int_c^d d\, y\, f(x\, y)$$

considerate come funzioni delle quattro quantità a, b, c, d, sono fra loro tutte eguali; donde si conchiuderà che le due espressioni A B non possono che differire per una costante che poi sarà facile dimostrare eguale a zero,

Facciamo p. es. le derivate rispetto ad a.

Nell'integrale A, la quantità a è un parametro che compare nella funzione che è sotto il primo integrale che è quello da c a d; e tale funzione che è poi

$$\int_a^b d\,x\, f(x\,y)$$

è una funzione continua di a e di y in virtù delle ipotesi fatte e dei teoremi noti; e inoltre la derivata di questa funzione rispetto ad a cioè $-\,f(a\,y)$ (v. § 3) è anche una funzione continua delle due variabili a, y.

In virtù quindi dei teoremi del § precedente noi possiamo operare la derivazione sotto il segno e otteniamo quindi

$$\frac{\partial A}{\partial a} = \int_c^d d\,y \frac{\partial}{\partial a} \int_a^b d\,x\, f(x\,y)$$

$$= -\int_c^d d\,y\, f(a\,y)$$

Deriviamo invece B rispetto ad a.

Essendo a *il limite* inferiore del primo integrale che compare in B si ha

$$\frac{\partial B}{\partial a} = -\left[\int_c^d d\,y\, f(x\,y)\right]_{x=a}$$

$$= -\int_c^d d\,y\, f(a\,y)$$

cioè si ha lo stesso risultato di prima.

Nella stessa maniera si possono riconoscere uguali le derivate rispetto a tutte quattro le variabili a, b, c, d.

Le due espressioni A, B non possono dunque differire fra loro che per una costante C, cioè per una quantità che non dipende da nessuna delle quattro variabili a, b, c, d. Ponendo allora $a = b$, tale quantità costante C non può che conservare il medesimo valore; ma in tal caso sia A che B diventano zero, dunque è zero anche la loro differenza, cioè possiamo scrivere $C = 0$, e quindi $A = B$.

Il teorema dimostrato si suol chiamare *il teorema della integrazione sotto il segno*.

Resta ora ad esaminare i soliti due casi singolari di cui abbiamo trattato nel § 4.

Esaminiamo se sussiste ancora il teorema dell'integrazione sotto il segno, se uno dei limiti è l'infinito, o lo sono ambedue.

Supponiamo che si verifichi la relazione.

$$\int_c^d d\,y \int_a^b d\,x\, f(x\,y) = \int_a^b d\,x \int_c^d d\,y\, f(x\,y)$$

qualunque sieno i limiti b, d finiti, ma grandi a piacere. Facciamo tendere uno di essi all'infinito, p. es. b, e supponiamo naturalmente che esistano limiti determinati dei due membri per $b = \infty$. Allora il secondo membro diventa senz'altro per le definizioni del § 4.

$$\int_a^\infty d\,x \int_c^d d\,y\,f\,(x\,y)$$

mentre il primo membro lo indicheremo con

$$\lim_{b=\infty} \int_c^d d\,y \int_a^b d\,x\,f\,(x\,y).$$

Questa ultima espressione non può farsi eguale a

$$\int_c^d d\,y \lim_{b=\infty} \int_a^b d\,x\,f\,(x\,y) = \int_c^d d\,y \int_a^\infty d\,x\,f\,(x\,y)$$

almenochè non si possa mostrare che il segno di limite rispetto al parametro b è invertibile col segno di

$$\int_c^d.$$

Ora pei teoremi del § precedente tale invertibilità sussiste senz'altre condizioni, perchè sappiamo che *essendo finiti i limiti* c, d, per tale invertibilità, cioè per la continuità dell'integrale considerato come funzione di b, basta che la funzione racchiusa *sotto* il segno di tale integrale cioè che

$$\int_a^b d\,x\,f(x\,y)$$

sia funzione continua di b e y, il che
mente si verifica.

Ricaviamo quindi che *se uno solo de*
limiti è l'∞, allora il teorema della int
sotto il segno sussiste, senza aggiungere
dizioni sulla natura della funzione da
naturalmente quelle che si riferiscono al
bilità sino al limite ∞.

Ma non è più lo stesso se due dei li
infiniti, cioè se si fanno convergere a
sia b che d.

Ed infatti nella relazione

$$\int_c^d d\,y \int_a^\infty d\,x\,f(x\,y) = \int_a^\infty d\,x \int_c^d d\,y\,f$$

se vogliamo passare al limite per $d = \infty$,
membro diventa esattamente

$$\int_c^\infty d\,y \int_a^\infty d\,x\,f(x\,y)$$

ma il secondo diventa

$$\lim_{d=\infty} \int_a^\infty d\,x \int_c^d d\,y\,f(x\,y)$$

che non è eguale a

$$\int_a^\infty d\,x \lim_{d=\infty} \int_c^d d\,y\, f(x\,y) = \int_a^\infty d\,x \int_c^\infty d\,y\, f(x\,y)$$

almenochè non si verifichino altre condizioni.

Sappiamo infatti dal paragrafo precedente che perchè un integrale $\int_a^\infty$ di una funzione di d e x sia funzione continua del parametro d, non basta più che la funzione sotto il segno sia funzione continua delle due variabili d, x.

Abbiamo trovata una condizione sufficiente per questo caso, ma tale condizione adattata al caso nostro non ci si presenterebbe sotto una forma facile.

Possiamo invece tener conto di quest'altra condizione anche solo *sufficiente*, che cioè *sussiste la invertibilità se la funzione* f (x y) *si conserva sempre minore in valore assoluto del valore di*

$$\frac{\varphi(x)}{y^\nu}\ (\nu > 1)$$

dove φ (x) *sia una funzione integrabile in un qualunque intervallo sino all'* ∞.

Infatti in tal caso avendosi

$$\int_a^\infty d\,x \int_c^\infty d\,y\, f(x\,y) = \int_a^\infty d\,x \int_c^b d\,y\, f(x\,y) +$$
$$+ \int_a^\infty d\,x \int_b^\infty d\,y\, f(x\,y)$$

e potendosi sempre scegliere b tale che il secon
termine del secondo membro diventi piccolo a p
cere, (perchè tal termine è minore in valore as
luto di

$$-\frac{1}{1-\nu}\frac{1}{b^{\nu-1}}\int_a^\infty \varphi(x)\,dx \qquad \text{(v. § 4, Cap.}$$

che tende a zero per $b=\infty$), si ricava che il lim
del primo termine del secondo membro per $b=$
è eguale al primo membro.

Passiamo ora al caso in cui la funzione dive
infinita in un punto p. es. $x=b$.

Allora nell'eguaglianza

$$\int_c^d dy\int_a^{b-\varepsilon} dx\, f(x\,y) = \int_a^{b-\varepsilon} dx\int_c^d dy\, f(x$$

passando al limite per $\varepsilon=0$ si ha

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_c^d dy\int_a^{b-\varepsilon} dx\, f(x\,y) = \int_a^b dx\int_c^d dy\, f(x$$

e nel primo membro, come già sappiamo dal § p
cedente, il segno di limite non è invertibile
segno di integrale, almenochè la funzione $f(x$
oltre la continuità, non soddisfi ancora ad al
condizioni.

Possiamo trovare una condizione *sufficiente* so
la seguente forma:

Sussiste l' invertibilità delle due integrazi
anche nel caso in cui la funzione diventi infin

in un punto $x = b$, *se la funzione oltre alla solita condizione della continuità, si conservi poi nel suo valore assoluto minore di una espressione della forma*

$$\frac{\varphi(y)}{(x-b)^{\nu}} \quad (\nu < 1)$$

dove $\varphi(y)$ *sia sempre finita.*

La dimostrazione anche qui può procedere come quella di sopra osservando che

$$\int_c^d \int_a^b = \int_c^d \int_a^{b-\varepsilon} + \int_c^d \int_{b-\varepsilon}^b$$

e che nelle supposte ipotesi il secondo termine del secondo membro tende a zero coll'impiccolire di ε.

Prima di terminare questo paragrafo vogliamo notare che si potrebbe passare allo studio degli integrali doppi, non nel caso in cui i limiti sono costanti, ma nel caso più generale in cui i limiti della prima integrazione (quella rispetto ad x) sono funzioni della variabile y.

Con ciò si farebbe la ricerca più generale analoga a quella fatta a proposito della derivazione sotto il segno.

Ma di ciò tratteremo nell'apposito capitolo sugli integrali multipli.

Vogliamo poi ancora notare un esempio in cui non si può invertire l'ordine delle due integrazioni.

Tale esempio è

$$\int_0^1 d\,y \int_0^1 d\,x \frac{(y^2 - x^2)}{(y^2 + x^2)^2}$$

Facendo l'integrazione prima rispetto ad x e poi rispetto ad y si ha per risultato $+\frac{\pi}{4}$, e si ha invece $-\frac{\pi}{4}$ eseguendo le integrazioni nell'altro ordine. Si può osservare che la funzione data è discontinua nel punto ($x = 0$, $y = 0$).

CAPITOLO II.

L' INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI.

§ 1. **Prima forma delle condizioni di integrabilità.** — Finora noi abbiamo supposto che le funzioni di cui ci siamo occupati nei vari teoremi dei paragrafi precedenti erano tutte integrabili.

Ora ci si presenta naturalmente il problema: A quali condizioni deve soddisfare una funzione perchè sia integrabile fra limiti dati? cioè perchè, formato il sommatorio indicato nel capitolo precedente con

$$\Sigma f_r \cdot \delta_r ,$$

questo abbia un limite determinato e finito?

Cominciamo coll'osservare che, per ciò che abbiamo già detto nella definizione fondamentale di integrale definito, tale limite deve essere indipendente:

1.° Dal modo col quale gli intervalli δ_r si fanno tendere a zero.

2.° Dalla scelta dei valori f_r in ogni intervallo δ_r.

Ora supponiamo di fissare che ogni volta per valore di f_r si debba scegliere il massimo o il *limite superiore* L_r dei valori che la funzione $f(x)$ ha in tutto l'intervallo δ_r compresi gli estremi; allora il limite del sommatorio corrispondente

$$\Sigma L_r \, \delta_r$$

sarà il valore dell'integrale definito; e se invece scegliamo ogni volta per valore f_r, il *minimo* o il *limite inferiore* l_r dei valori di f in δ_r, il limite dell'altro sommatorio

$$\Sigma l_r \, \delta_r$$

sarà anche il valore dell'integrale. Per modo che la differenza dei due limiti cioè il limite della differenza

$$\lim \Sigma \delta_r \, [L_r - l_r]$$

dovrà essere zero.

Chiamando *oscillazione* della funzione nell'intervallo δ_r la differenza $(L_r - l_r)$, e indicandola con D_r, si ha che

$$\lim \Sigma \delta_r \, D_r = o$$

Dalla data definizione di integrale ci appare dunque *come condizione necessaria per la esistenza del limite del sommatorio, che sia zero il limite della somma dei prodotti degli intervalli parziali per le oscillazioni che la funzione* f *fa in essi intervalli.*

Dimostreremo ora che tale condizione è anche una condizione *sufficiente.*

Facciamo vedere che se

$$\lim \Sigma \delta_r \, D_r = o$$

allora esiste il limite

$$\lim \Sigma f_r \, \delta_r.$$

ed ha un valore indipendente dalla scelta degli f_r e dalla legge colla quale i δ_r convergono a zero.

Supponiamo in effetti che si considerino due diverse divisioni dell'intervallo totale; gli intervalli parziali della prima divisione sieno indicati con $\delta_1 \ldots \delta_r \ldots$ e quelli della seconda con $\delta'_1 \ldots \delta'_s \ldots$

Queste due divisioni sieno fra loro indipendenti.

Consideriamo come punti di una terza divisione dell'intervallo quelli che stabiliscono la prima insieme a quelli che stabiliscono la seconda, e gli intervalli di questa terza divisione chiamiamoli ρ; per modo che ogni δ e ogni δ' sarà la somma di un numero *intero* di intervalli parziali ρ.

Sia

$$\delta_r = \rho_{h+1} + \rho_{h+2} + \ldots + \rho_{h+t}$$

e quindi

$$f_r \, \delta_r = f_r \, \rho_{h+1} + \ldots + f_r \, \rho_{h+t}$$

e chiamando

$$f_{h+1}, f_{h+2} \ldots f_{h+t}$$

dei valori della funzione f negli intervalli $\rho_{h+1} \ldots \rho_{h+t}$, possiamo scrivere identicamente

$$f_r \, \delta_r = (f_{h+1} \, \rho_{h+1} + \ldots + f_{h+t} \, \rho_{h+t}) +$$
$$+ [(f_r - f_{h+1}) \, \rho_{h+1} + \ldots + (f_r - f_{h+t}) \, \rho_{h+t}].$$

Ora le differenze

$$f_r - f_{h+1} \quad , \quad \ldots f_r - f_{h+t}$$

sono differenze fra due valori di f nell'intervallo δ_r, giacchè ognuno degli intervalli $\rho_{h+1} \ldots \rho_{h+t}$ è sempre una parte dell'intervallo δ_r; quindi quelle differenze saranno certamente minori o al massimo eguali al valore della oscillazione in δ_r cioè a quella quantità che abbiamo chiamata D_r.

Ponendo dunque

$$f_r \delta_r = (f_{h+1} \rho_{h+1} + \ldots + f_{h+t}) + \omega$$

possiamo dire che in valore assoluto

$$\omega \leqq [D_r \rho_{h+1} + D_r \rho_{h+2} + \ldots + D_r \rho_{h+t}]$$

cioè

$$\omega \leqq D_r \delta_r.$$

Formando quindi il sommatorio facendo variare l'indice r, abbiamo

$$\Sigma f_r \delta_r = \Sigma f_h \rho_h + \Sigma \omega$$

dove abbiamo indicato con $\Sigma f_h \rho_h$ il sommatorio analogo, in quanto al modo di formazione, a quello del primo membro ma formato cogli intervalli ρ. La espressione $\Sigma \omega$ soddisfa alla disuguaglianza

$$\Sigma \omega \leqq \Sigma \delta_r D_r$$

e quindi, per le ipotesi fatte, converge a zero.

Se ora rifacciamo le stesse considerazioni, ma partendo dagli intervalli δ'_s anzichè dagli intervalli δ_r, otterremo la formola

$$\Sigma f_s \delta'_s = \Sigma f_h \rho_h + \Sigma \omega'$$

dove $\Sigma \omega'$ converge anche a zero.

Sottraendo si ha dunque

$$\Sigma f_r \delta_r - \Sigma f_s \delta'_s = \Sigma \omega - \Sigma \omega' = \Omega$$

dove Ω è evidentemente una quantità che converge a zero.

Supponiamo ora che la seconda divisione, quella cioè che dà luogo agli intervalli δ', non sia propriamente indipendente dalla prima divisione, ma rappresenti uno stadio successivo alla prima divisione; in altri termini che nel far tendere a zero gli intervalli parziali, in un precedente stadio, questi sono rappresentati dai δ, e in un seguente stadio, sono invece rappresentati dai δ'.

Allora l' ultima formola trovata ci dice che la differenza fra i valori della espressione $\Sigma f_r \delta_r$ in due stadi successivi si può rendere piccola a piacere; questa, come sappiamo, è condizione necessaria e sufficiente per conchiudere che quella espressione converge ad un limite determinato e finito. Resta con ciò dimostrato il nostro assunto.

Si può ora far vedere che questo limite è indipendente:

1) Dalla legge colla quale si è stabilita la divisione in intervalli parziali e si fanno tendere questi a zero;

2) Dalla scelta dei valori f_r.

Ed infatti dall'ultima formola ottenuta, supposto che gli intervalli δ e δ' sieno fra loro assolutamente indipendenti, si ricava che

$$\lim\,[\Sigma f_r \delta_r - \Sigma f_s \delta'_s] = o$$

e quindi *se esiste il limite del primo termine noi* possiamo scrivere

$$\lim \Sigma f_r \delta_r - \lim \Sigma f_s \delta'_s = o$$

donde concludiamo che *esisterà anche il limite del secondo termine e sarà lo stesso del primo.* Se poi inoltre stabiliamo un'altra legge per la scelta dei valori f_r e formiamo $\Sigma \delta_r f_r{}^{(1)}$ e supponiamo che esiste il limite $\Sigma \delta_r f_r$, possiamo subito dimostrare che esiste anche il limite della prima espressione e che è lo stesso dell'altro. Perchè evidentemente

$$\Sigma \delta_r f_r - \Sigma \delta_r f_r{}^{(1)} = \Sigma \delta_r [f_r - f_r{}^{(1)}],$$

ed essendo $(f_r - f_r{}^{(1)})$ la differenza fra due valori di f nell'intervallo δ_r, sarà minore o eguale all'oscillazione D_r, e quindi

$$\Sigma \delta_r f_r - \Sigma \delta_r f_r{}^{(1)} \leqq \Sigma \delta_r D_r$$

cioè il primo membro, per le ipotesi fatte, converge a zero, e quindi, *esistendo il limite di una di quelle espressioni, esisterà, e sarà lo stesso, anche il limite dell'altra.*

§ 2. **Seconda forma del criterio d'integrabilità.** — Il criterio d' integrabilità trovato nel paragrafo precedente ci si presenta sotto una forma che nell' applicazione pratica potrebbe riuscire difficile; cercheremo perciò di trasformare quel criterio in un altro che sia di più facile applicazione.

Se

$$\lim \Sigma \delta_r D_r = o$$

vuol dire che possiamo rendere $\Sigma \delta_r D_r$ minore *di qualunque* quantità assegnabile σ; cioè possiamo trovare uno stadio di impiccolimento degli intervalli δ, tale che *per esso e per tutti i successivi stadi*, sia sempre

$$\Sigma\, \delta_r . D_r < \sigma$$

Sia allora τ la somma di tutti gli intervalli parziali nei quali l' oscillazione sia maggiore di un certo numero fissato σ'.

Sarà evidentemente

$$\tau\, \sigma' \leqq \Sigma\, \delta_r . D_r < \sigma$$

donde

$$\tau < \frac{\sigma}{\sigma'}.$$

Lasciando dunque fisso σ', e facendo diminuire σ, diminuirà il valore di τ, cioè il limite di τ, per un qualunque σ' fisso, è zero.

Resta dunque trovata come *condizione necessaria per l'integrabilità che la somma degli intervalli parziali nei quali l'oscillazione della funzione si può rendere maggiore di una certa qualunque quantità assegnata, deve tendere a zero. In formola: lim* $\tau = 0$.

Ed è facile dimostrare che questa è anche una condizione *sufficiente.*

Perchè chiamando D la massima delle oscillazioni di f nei vari intervalli la cui somma è τ, e osservando che in tutti gli altri intervalli l'oscillazione è minore o eguale a σ', abbiamo evidentemente la disuguaglianza

$$\Sigma\, \delta_r\, D_r \leqq \tau\, D + (T - \tau)\, \sigma'$$

indicando con T tutto l' intervallo d' integrazione e quindi con $T - \tau$ la somma di tutti gli intervalli che non compongono la somma τ. Da questa relazione si vede che, *se τ può rendersi piccola a piacere,* cioè se $\lim \tau = o$, poichè σ' è arbitrario e quindi può farsi piccolo a piacere, anche il primo membro potrà farsi piccolo per quanto si vuole, cioè converge a zero.

Possiamo dunque conchiudere che le due condizioni espresse dalle due formole

$$\lim \Sigma \delta_r . D_r = o$$
$$\lim \tau = o$$

sono fra loro perfettamente equivalenti.

§ 3. **Funzioni integrabili e non integrabili. Applicazione dei criteri dimostrati.** — Applicando i teoremi dimostrati nei due paragrafi precedenti, possiamo trovare delle classi di funzioni integrabili. E prima di tutto è facile vedere che *ogni funzione continua è integrabile.*

Basta infatti ricordare i teoremi dimostrati nel Cap. I, § 8 del calcolo differenziale sulle funzioni continue. Ivi abbiamo fatto vedere che ogni funzione continua è anche *uniformemente continua*, e di qui ne abbiamo dedotto che data una funzione continua in tutto un intervallo si può dividere tale intervallo in altri intervalli parziali tali che in ognuno di questi l' oscillazione sia minore di una quantità σ' piccola a piacere. Tenendo dunque presente il criterio del paragrafo precedente, possiamo dire che per le *funzioni continue* il numero *τ può rendersi* sempre zero, per quanto piccol*sia σ' dato*, e quindi le funzioni continue sono i*tegrabili.*

Sono anche integrabili le funzioni finite discontinue aventi un numero finito di punti di discontinuità in ciascuno dei quali la funzione abbia naturalmente un salto finito. Queste funzioni si sogliono chiamare *funzioni generalmente continue.* Ricordiamo a questo proposito che per una funzione discontinua in un punto a si chiama *salto* della funzione in a la differenza del valore della funzione in a, e del *limite* dei valori della funzione avvicinandosi al punto a, supposto che tale limite esista. Che se poi questo limite è indeterminato allora per *salto* della funzione in a può intendersi la differenza fra i due valori estremi dentro i quali oscilla il valore della funzione coll'avvicinarsi ad a. Se, come abbiamo supposto, la funzione è sempre finita, allora naturalmente il *salto* della funzione è sempre finito.

Per dimostrare ora il teorema enunciato, indichiamo con $a_1\, a_2 \dots a_n$ gli n punti di discontinuità della funzione, e circondiamoli con n intervalli piccoli a piacere. Se d è il massimo di tutti questi intervalli, la somma di tutti essi è minore di nd. In tutto il rimanente tratto dell'intervallo totale di integrazione la funzione è continua, e quindi si può fare la divisione in intervalli parziali tali che l'oscillazione in essi sia sempre minore di una qualunque quantità fissata σ'. Gli intervalli in cui dunque l'oscillazione della funzione *potrà essere* maggiore di σ' sono solo quelli attorno ai punti di discontinuità; ma la somma di essi è minore di $n\,d$, e può perciò rendersi piccola a nostro piacere perchè n è finito, e d è arbitrario; quindi anche nel nostro caso il numero τ può rendersi piccolo a piacere, cioè ha per limite zero.

Esistono poi anche altre classi di funzior scontinue integrabili, e per trovarle occorrerà trarci in qualche considerazione sulle varie s di discontinuità delle funzioni.

I punti di discontinuità di una funzione po formare un gruppo infinito di punti (v. Cap. *Calcolo differenziale*). Ora un gruppo infini punti può essere di due specie; può cioè acc che si possano racchiudere tutti i punti del gr in intervalli la cui somma si possa rendere m di qualunque quantità assegnabile; ovvero q non possa farsi. Nel primo caso il gruppo di niti punti si suol chiamare un *gruppo discre punti*, e nel secondo caso un *gruppo linea punti*. Questa denominazione di gruppo *li* vuol ricordare il fatto che per *tutti* i punti tratto di *linea* effettivamente non si verifica q proprietà.

Un esempio di un gruppo *discreto* di pu un qualunque gruppo avente un numero fini punti-limiti (v. Cap. I, § 1 del *Calcolo differ* Perchè circondando allora tali punti limiti intervalli piccoli a piacere, al di fuori di q resteranno solo dei punti del gruppo ma in nu *finito*, e ciascuno di questi perciò potrà ci darsi con intervalli la cui somma sia anche cola a piacere.

Ciò premesso diciamo ancora che una fun discontinua si chiamerà una *punteggiata di tinua*, se i punti di discontinuità formano un *gr discreto*; e si dirà invece una *funzione discon lineare* se quei punti formano un gruppo lin

Possiamo allora subito dedurre il teoren

Riemann: *Una funzione punteggiata discontinua è integrabile.*

La dimostrazione può procedere esattamente come quella fatta sopra per il caso in cui è finito il numero dei punti di discontinuità, giacchè anche per la punteggiata discontinua si verifica la proprietà fondamentale che ci è servita per quel caso, che cioè tutti i punti di discontinuità possono racchiudersi in intervalli la cui somma può rendersi piccola a piacere.

Un esempio di una funzione punteggiata discontinua può esser dato da una funzione così definita. Abbia $f(x)$ il valore *1 in tutti i punti* del gruppo

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{n}, \dots$$

e il valore zero *in tutti gli altri punti* del tratto da *0* ad *1*. Una tal funzione è integrabile in tale intervallo. Applicando la definizione di integrale definito, è facile trovare che il valore dell'integrale di una tal funzione è zero. Perchè infatti facciamo la divisione di tutto il tratto da *0* ad *1* in intervalli parziali, e di questi distinguiamone due specie, cioè quelli attorno i punti di discontinuità, e quelli chė non comprendono quei punti. Quella parte del sommatorio

$$\Sigma f_r \, \delta_r$$

corrispondente a questi secondi intervalli è evidentemente zero, perchè $f(x)$ è sempre zero in qualunque punto di essi; e la parte del sommatorio corrispondente invece ai primi intervalli avrà sempre un valore minore o eguale al prodotto della somma di tutti gli intervalli, per *1* che è il valore della funzione nei punti di discontinuità.

Ma la somma di tutti i primi intervalli può impicciolirsi a piacere, dunque il limite del sommatorio non può essere che zero.

§ 4. **Teoremi sulle funzioni integrabili. Integrazione per serie.** — Una domanda che ci viene spontanea sulle funzioni integrabili è la seguente: Componendo fra loro, con segni di operazioni analitiche, più funzioni integrabili in numero finito o infinito, si ha una funzione integrabile?

In quanto alla somma di due funzioni integrabili, è evidente che essa è anche una funzione integrabile e a questo risultato si può giungere direttamente colla definizione di integrale definito, anche senza ricorrere ai teoremi di integrabilità sviluppati in questo capitolo; ed è perciò che noi nel capitolo precedente abbiamo potuto già servirci di questo teorema. Ed infatti se si suppongono $\varphi(x)$, $\psi(x)$ funzioni integrabili e quindi che i due sommatorii

$$\Sigma\, \varphi_r\, \delta_r \quad , \quad \Sigma\, \psi_r\, \delta_r$$

hanno limiti determinati e finiti, avrà anche limite determinato e finito la somma di tali due sommatorii; e tenendo cura di scegliere i valori di φ_r, ψ_r sempre nei medesimi punti, la somma di essi nel limite sarà precisamente l'integrale della somma delle due funzioni.

Un poco più difficile è invece dimostrare l'altro *teorema:*

Il prodotto di due funzioni integrabili è anche *na funzione integrabile.*

Infatti cominciamo coll'esaminare l'oscillazione el prodotto $\varphi(x)\psi(x)$ nell'intervallo δ_r.

Supponiamo per un momento che i valori di , ψ *sieno sempre positivi* per tutto il cammino di ıtegrazione.

Indichiamo con M_φ, m_φ i limiti, superiore e in-eriore, dei valori di φ in δ_r, e così analogamente on M_ψ, m_ψ quelli di ψ, e con $M_{\varphi\psi}$, $m_{\varphi\psi}$ quelli elativi al prodotto $\varphi\psi$.

Allora le differenze

$$\begin{gathered} M_\varphi - m_\varphi \\ M_\psi - m_\psi \\ M_{\varphi\psi} - m_{\varphi\psi} \end{gathered}$$

ono le oscillazioni di φ, ψ, $\varphi\psi$, rispettivamente in . Essendo intanto positive tutte le quantità M, $\imath$, possiamo senz'altro scrivere le disuguaglianze

$$\begin{gathered} M_{\varphi\psi} \leqq M_\varphi M_\psi \\ m_{\varphi\psi} \geqq m_\varphi m_\psi \end{gathered}$$

onde

$$\begin{aligned} M_{\varphi\psi} - m_{\varphi\psi} &\leqq M_\varphi M_\psi - m_\varphi m_\psi \\ &\leqq M_\varphi (M_\psi - m_\psi) + m_\psi (M_\varphi - m_\varphi) \end{aligned}$$

indicando con $D^{(r)}{}_{\varphi\psi}$, $D^{(r)}{}_\varphi$, $D^{(r)}{}_\psi$ le oscilla-ioni delle tre funzioni $\varphi\psi$, φ, ψ, abbiamo

$$D_{\varphi\psi}{}^{(r)} \leqq M_\varphi D_\psi{}^{(r)} + m_\psi D_\varphi{}^{(r)},$$

se in luogo di m_ψ poniamo M_ψ rinforziamo la lisuguaglianza e quindi possiamo scrivere

$$D_{\varphi\psi}{}^{(r)} \leqq M_\varphi D_\psi{}^{(r)} + M_\psi D_\varphi{}^{(r)}$$

Questa disuguaglianza vale per un qualunque intervallo δ_r; se dunque si indicano con $M M'$ i limiti superiori dei valori di φ, ψ in *tutto* l'intervallo d'integrazione, e se sostituiamo in quella formola, M, M' in luogo di M_φ, M_ψ evidentemente quella disuguaglianza si rinforza ancora, perchè M, M' non possono essere minori di M_φ, M_ψ rispettivamente. Abbiamo dunque

$$D_{\varphi\psi} \leqq M D_\psi^{(r)} + M' D_\varphi^{(r)}$$

e di qui si ha

$$\Sigma\, \delta_r . D_{\varphi\psi}^{(r)} \leqq M \Sigma\, \delta_r . D_\psi^{(r)} + M' \Sigma\, \delta_r . D_\varphi^{(r)} .$$

Supposto ora le due funzioni date integrabili, tenderanno a zero le sommatorie

$$\Sigma\, \delta_r . D_\psi^{(r)}$$
$$\Sigma\, \delta_r . D_\varphi^{(r)}$$

per effetto del teorema dimostrato nel § 1, e quindi, in forza della relazione di sopra, tenderà a zero anche

$$\Sigma\, \delta_r . D_{\varphi\psi}^{(r)}$$

e quindi il prodotto $\varphi\psi$ è integrabile.

Abbiamo fatta questa dimostrazione facendo la ipotesi che le due funzioni φ, ψ sieno sempre positive per qualunque punto dell' intervallo d'integrazione. Ma è chiaro che dimostrata la cosa per quel caso resta dimostrato anche in generale, perchè noi possiamo sempre aggiungere alle due funzioni φ, ψ due costanti C, C' tali che le somme

$$\varphi + C$$
$$\psi + C'$$

bbiano sempre valore positivo; basterà perciò rendere C, C' maggiori dei valori assoluti dei miti inferiori delle due funzioni φ, ψ in tutto l'in-ervallo dato.

Allora il prodotto

$$(\varphi + C)(\psi + C') = \varphi\psi + C\psi + C'\varphi + CC',$$

er le dimostrazioni fatte, è integrabile, e quindi ırà integrabile anche il prodotto $\varphi\psi$, che è e-uale a

$$(\varphi + C)(\psi + C') - C\psi - C'\varphi - CC'$$

oè che si compone mediante la somma di fun-oni integrabili.

Vogliamo ora supporre che il numero delle ope-ızioni non sia più *finito*, ma infinito, cioè p. es., ıe si tratti di una somma di infiniti termini ognuno əi quali rappresenti una funzione integrabile. ntriamo così nel cosiddetto problema dell'*inte-razione per serie*. Questo problema è analogo a ıello trattato nel volume primo e riferentesi alla ərivazione per serie (v. vol. I, Cap. II, § 2).

Immaginiamo data una serie convergente, i cui ərmini sieno funzioni integrabili di x in un in-ərvallo da a a b. Noi ci domandiamo:

In quali casi una tal serie rappresenterà *una ınzione integrabile* di x, e quando potrà farsi integrazione di tutta la serie facendo la somma əgli integrali dei singoli termini?

Al solito noi non vogliamo le condizioni *pura-ente necessarie* perchè questo accada; ci basterà əlo trovare una condizione sufficiente sotto una forma facile, di uso frequente e di facile applicazione.

Noi dimostreremo il teorema:

Se la serie data è una serie convergente in ugual grado, e se tutti i suoi termini sono funzioni integrabili, allora la serie rappresenta una funzione integrabile e l'integrazione si fa facendo la serie degli integrali dei singoli termini.

Sia infatti

$$f(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots$$
$$= \sum_1^\infty u_h(x).$$

Indichiamo con $R_n(x)$ il resto di questa serie; si ha allora

$$f(x) = \sum_{h=1}^{h=n} u_h(x) + R_n(x)$$

e per le ipotesi fatte *sulla convergenza in ugual grado della serie*, la quantità $R_n(x)$ può rendersi minore di σ per qualunque punto x.

Dimostriamo prima che $f(x)$ è integrabile supposto che sieno integrabili i diversi termini $u(x)$.

Indichiamo con

$$D_r^{(1)}\; D_r^{(2)} \dots$$

le oscillazioni dei termini

$$u_1(x)\; u_2(x) \dots$$

nell'intervallo parziale δ_r, che è al solito uno degli intervalli in cui si è diviso l'intervallo totale di integrazione, mentre poi indichiamo con D_r

$D_r^{(R)}$ le oscillazioni di f e R nello stesso intervallo δ_r.

Allora è evidente che il valore del limite superiore nell' intervallo δ_r della funzione f che è la somma di $u_1 u_2 \dots R$ non può superare la somma dei limiti superiori di tutte queste funzioni; se queste p. es., hanno i loro valori massimi tutte nel medesimo punto x, allora e allora solo il massimo di f corrisponde alla somma dei massimi; ma in generale, non avverandosi questa specialità, il massimo di f sarà *minore* della somma dei massimi; e così anche il minimo di f sarà *maggiore* della somma dei minimi. Onde abbiamo, indicando con $M_{(f)}, m_{(f)}, M^{(1)}, m^{(1)}, \dots M^{(R)}, m^{(R)}$, rispettivamente i massimi e i minimi di $f, u_1, \dots R$:

$$M^{(f)}, \leqq M^{(1)} + M^{(2)} + \dots + M^{(R)}$$
$$m^{(f)} \geqq m^{(1)} + m^{(2)} + \dots + m^{(R)}.$$

donde sottraendo si ha

$$D_r^{(f)} \leqq D_r^{(1)} + D_r^{(2)} + \dots + D_r^{(R)}.$$

Se ora per qualunque x è in valore assoluto

$$R_n(x) < \sigma$$

è evidente che l'oscillazione di R non può superare la quantità 2σ, e quindi

$$D_r^{(f)} \leqq D_r^{(1)} + D_r^{(2)} + \dots + 2\sigma$$
$$\Sigma \delta_r D_r^{(f)} \leqq \Sigma \delta_r D_r^{(1)} + \Sigma \delta_r D_r^{(2)} + \dots + 2\sigma \Sigma \delta_r.$$

e osservando che $\Sigma \delta_r = b - a$ cioè è eguale a tutto l'intervallo d'integrazione, che tutte le sommatorie del secondo membro convergono a zero perchè abbiamo supposto che i termini $u_1(x)$, $u_2(x)$ . . . sono funzioni integrabili, e che σ può rendersi piccolo a piacere, si ricava che anche il sommatorio del primo membro può rendersi piccolo per quanto si vuole, e quindi che *la funzione* f *è integrabile.*

È facile ora dimostrare infine che il suo integrale è la somma degli integrali dei singoli termini.

Ed infatti formiamo

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = \int_a^b u_1(x)\,d\,x + \int_a^b u_2(x)\,d\,x + \ldots + \\ + \int_a^b R_n(x)\,d\,x$$

dove nel secondo membro possiamo, appunto come abbiam fatto, distribuire il segno d'integrale a ciascun termine perchè il secondo membro è la somma di un numero *finito* di termini.

Se noi dimostriamo che

$$\int_a^b R_n(x)\,d\,x$$

col crescere del numero n può rendersi minore di qualunque quantità assegnabile, cioè tende a zero, allora è chiaro che la serie degli integrali

$$\sum_{h=1}^{h=\infty} \int_a^b u_h(x)\,d\,x$$

è *una* serie convergente e il suo valore è propri*o* *il valore* dell'integrale di f (x).

Ora se $R_n(x)$ può rendersi minore di σ per qualunque x compresa nell'intervallo d'integrazione, è chiaro che quell'integrale

$$\int_a^b R_n(x)\, d\, x$$

è in valore assoluto minore di

$$\int_a^b \sigma\, d\, x = (b - a)\, \sigma$$

cioè è minore di una quantità che può impicciolirsi per quanto si vuole. Resta con ciò dimostrato il nostro assunto.

Applicando il teorema ora dimostrato ad *una serie di potenze*, che, come si sa, (v. vol. I, Cap. I, § 7) quando è convergente in un certo campo *compresi gli estremi*, è anche sempre certamente *convergente in ugual grado* nel medesimo campo *ma esclusi gli estremi*, otteniamo il teorema:

Una serie di potenze della variabile x, *è una funzione integrabile, e il suo integrale si calcola facendo la somma degli integrali dei singoli termini.*

Facciamo ora vedere come i teoremi dimostrati possono utilizzarsi per lo sviluppo in serie di alcune funzioni.

Si voglia p. es., sviluppare in serie la funzione *arc sen* x.

Noi cominciamo coll'osservare che tale funzione *può esprimersi* mediante un integrale definito.

Perchè sappiamo che la derivata di arc *sen* x è

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

e quindi, per le cose note sugli integrali, possiamo scrivere

$$\text{arc } sen\, x = \int_o^x \frac{d\,x}{\sqrt{1-x^2}}$$

supposto che la funzione sia definita in modo che per $x = o$, sia zero.

Ora per lo sviluppo binomiale (v. vol. I, Cap. III, § 3) si ha (se $x^2 < 1$):

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} x^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} x^6 + \ldots;$$

essendo questa una serie di potenze, possiamo allora effettuare l'integrazione per serie. È evidente che l'integrale di ogni termine è un integrale del tipo (a meno di fattori costanti)

$$\int_o^x x^{2n}\, d\,x$$

e quindi eguale a

$$\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_o^x = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

perchè infatti la derivata di questa espressione proprio x^{2n} (v. Cap. I, § 3).

Onde la serie degli integrali è

$$\text{arc } sen\, x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\frac{x^5}{5} + \ldots$$

Si può osservare che questa serie è convergente ıche per $x^2 = 1$, sebbene allora la serie binoiale da cui si è partiti non è più convergente. a funzione sotto il segno integrale diventa allora finita di ordine $\frac{1}{2}$, ma l' integrale resta finito l suo valore è $\left.\frac{\pi}{2}\right)$.

Un bell'esempio di integrazione per serie è ıello dato da

$$\int \log (1 - 2\rho \cos x + \rho^2) \, d x$$

Essendo molto complicata la funzione sotto il ·gno integrale, non riuscirebbe facile eseguire ıi direttamente l'integrazione; invece si può far ədere che se si sviluppa in serie la funzione, si ıò poi fare l'integrazione per serie, e quindi ot·nere il valore dell'integrale, sebbene sotto forma serie.

Un esempio di una serie che *non essendo con-ergente in ugual grado, non può dar luogo al-integrazione per serie*, è dato da Darboux, ed è

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[n\, x\, e^{-nx^2} - (n+1)\, x\, e^{-(n+1)x^2} \right]$$

cui valore è semplicemente

$$x\, e^{-x^2}$$

Non entriamo ora nei dettagli di questa discusone che del resto sarebbe facile.

CAPITOLO III.

CALCOLO DEGLI INTEGRALI INDEFINITI E DEFINITI.

---

§ 1. **Integrali indefiniti fondamentali.** — Nei due capitoli precedenti abbiamo considerato le proprietà generali che derivano dalla definizione di integrale; passiamo ora alla parte pratica del calcolo integrale, cioè passiamo a rispondere a questa domanda:

Data una funzione come se ne può calcolare l'integrale indefinito?

Nel calcolo differenziale il problema della derivazione si può risolvere in modo completo, supposto che nella data funzione entrino solo gli ordinarii simboli di operazioni analitiche; ma non è più lo stesso nel calcolo integrale; infatti qui, almenochè non si tratti di tipi elementari di funzioni, noi non possiamo stabilire delle proprie regole d'integrazione, ma il successo dipende dall'adoperare un artifizio piuttosto che un altro, e non sempre si riesce a trovare l'artifizio che fa giungere alla *meta; oltre* di che, mentre colla derivazione dei *tipi ordinarii* di funzioni si ottengono sempre funzioni che non escono dall'orbita di quei tipi, non è più lo stesso per l'integrazione; perchè integrando gli ordinarii tipi di funzioni si ottengono alle volte funzioni che non sono più rappresentabili, come quelle da cui si è partiti, con un numero *finito* delle ordinarie operazioni analitiche fatte sulla variabile indipendente, intendendo per ordinarie operazioni analitiche tutte quelle che capitano nelle matematiche elementari, cioè le sei operazioni fondamentali dell'algebra, e poi l'operazione logaritmica ed esponenziale, le operazioni trigonometriche e le inverse di queste.

Per convincersi che coll'integrazione si possa giungere a delle funzioni nuove più complicate, facciamo la seguente considerazione.

Noi sappiamo che la derivata di $\log x$ è $\frac{1}{x}$, e quindi ne deduciamo che l'integrale indefinito di $\frac{1}{x}$ è $\log x$, essendo $\frac{1}{x}$ una funzione *continua* (v. Cap. I, § 3).

Ora immaginiamo per un momento che la funzione logaritmica non entri ancora nell'orbita delle funzioni che vogliamo considerare come ordinarie, e quindi non vi entri neanche la sua inversa, cioè la funzione esponenziale; è chiaro allora che col semplice processo d'integrazione della funzione razionale semplicissima $\frac{1}{x}$ si sarà già introdotta la funzione logaritmica.

Ponendo in una prima classe le funzioni razionali, in una seconda classe le funzioni irrazionali, e in una terza classe le funzioni trascendenti (trigonometriche e loro inverse, logaritmiche ed esponenziali), colla derivazione delle funzioni di una classe non si hanno mai funzioni di una classe superiore, ma si hanno funzioni o della stessa classe o di una classe inferiore, mentre coll'integrazione si *possono* avere funzioni di una classe superiore.

Nei paragrafi seguenti noi stabiliremo alcuni fondamentali artifizii di integrazione; ma intanto per ora dobbiamo stabilire le cosiddette *formole fondamentali di integrazione.*

Consideriamo tutte le funzioni che abbiamo sopra distinte in tre classi; esse sono tutte funzioni continue, e derivandole si ottengono ancora funzioni continue.

Ricordando ora che l'integrale indefinito di una funzione *continua* è una funzione la cui derivata è proprio la funzione data, noi possiamo stabilire alcune formole che saranno per noi le *formole fondamentali.*

Dalle undici relazioni:

1. $\frac{d}{dx} \frac{x^{m+1}}{m+1} = x^m$ (per m qualunque ma diverso da -1)

2. $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$

3. $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

4. $\frac{d}{dx} \operatorname{sen} x = \cos x$

$$5.\quad \frac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$$

$$6.\quad \frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$7.\quad \frac{d}{dx}\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$8.\quad \frac{d}{dx}\operatorname{arc\,sen} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$9.\quad \frac{d}{dx}\operatorname{arc\,cos} x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$10.\quad \frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$11.\quad \frac{d}{dx}\operatorname{arc\,ctg} x = -\frac{1}{1+x^2},$$

icaviamo nove formole fondamentali:

$$1.\quad \int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

(per m diverso da -1)

$$2.\quad \int \frac{1}{x}\,dx = \log x$$

$$3.\quad \int e^x\,dx = e^x$$

$$4.\quad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

$$5.\quad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$$

6. $\int \frac{1}{\cos^2 x} d x \quad = \operatorname{tg} x$

7. $\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} d x \quad = - \operatorname{ctg} x$

8. $\int \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} d x = \operatorname{arc\,sen} x = - \operatorname{arc\,cos} x$

9. $\int \frac{1}{1 + x^2} d x \quad = \operatorname{arc\,tg} x = - \operatorname{arc\,ctg} x.$

S'intende che ai secondi membri di queste nove formole si può aggiungere sempre una costante arbitraria, per la formazione completa dell'integrale indefinito.

Dato che sia ora da calcolare l'integrale di una funzione che non comparisce in questa tabella, bisognerà cercare con opportuni artifizii, di ridurre il calcolo a uno di questi già noti.

Di ciò saranno dati vari esempi nel paragrafo seguente.

§ 2. **Artifizii di integrazione. Integrazione per parti. Integrazione per serie.** — Si abbia da calcolare

$$\int \frac{d x}{\operatorname{sen} x}$$

che non è uno dei nove tipi stabiliti nel paragrafo precedente.

Si ha

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\,\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{\frac{d}{dx}\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Ora una funzione la cui derivata rispetto ad x è quella contenuta in quest'ultima espressione, è proprio

$$\log\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

dunque possiamo conchiudere

$$\int\frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \log\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \text{Costante}.$$

Un metodo che si può adoperare frequentemente per la ricerca degli integrali definiti è quello così detto *di sostituzione*, e che consiste nel trasformare la variabile indipendente in un'altra (v. Cap. I, § 6) in modo che la nuova funzione da integrare sia più semplice per l'integrazione che quella data.

Naturalmente non possono stabilirsi regole per riconoscere quale sia la sostituzione da farsi, e il successo dipenderà sempre dalla maggiore o minor pratica che si ha in calcoli di tal genere.

Lo scopo della sostituzione sarà sempre di giungere ad un tipo di funzione il cui integrale sia già anteriormente noto, anche che qualche volta la nuova funzione sia di una specie più elevata che quella da cui si è partiti; che cioè p. es., la nuova sia una funzione trascendente, mentre che *la data sia algebrica*.

Così p. es., l'integrale

$$\int \frac{d\,x}{1 - x^2}$$

colla sostituzione

$$x = \cos y$$

si trasforma in (v. Cap. I, § 6)

$$- \int \frac{d\,y}{\operatorname{sen} y}$$

che per le considerazioni fatte sopra è eguale

$$-\log \operatorname{tg} \frac{y}{2} + \text{Cost.}$$

onde l'integrale dato è

$$-\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \operatorname{arc} \cos x + \text{cost.}$$

Questo risultato può semplificarsi giovand delle formole di trigonometria.

Infatti si ha:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} y = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} y}{\cos \frac{1}{2} y} =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} y \cos \frac{1}{2} y}{2 \cos^2 \frac{1}{2} y}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} y}{1+\cos y}$$
$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x};$$

onde infine il nostro integrale è eguale a

$$\log \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} + \text{cost.}$$

Si abbia da calcolare

$$\int \frac{dx}{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}$$

che non è compreso nella tabella fondamentale.

Poniamo identicamente

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = (ax+b)^2 + c$$

dove a, b, c sono tre costanti da determinare.

Sviluppando il quadrato e eguagliando i coefficienti delle potenze di x si ha

$$\alpha = a^2$$
$$\beta = ab$$
$$\gamma = b^2 + c$$

donde

$$a = \sqrt{\alpha}$$
$$b = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$$
$$c = \gamma - \frac{\beta^2}{\alpha}$$

e quindi l'integrale dato resta intanto trasformato in

$$\int \frac{d\,x}{(a\,x + b)^2 + c}\,.$$

Facciamo ora la sostituzione

$$a\,x + b = y$$

donde

$$d\,x = \frac{d\,y}{a}$$

e quell'integrale diventa

$$\frac{1}{a}\int \frac{d\,y}{y^2 + c}$$

il quale colla nuova sostituzione (se c è positivo

$$y = \sqrt{c}\,z$$
$$d\,y = \sqrt{c}\,d\,z$$

diventa

$$\frac{1}{a\sqrt{c}}\int \frac{d\,z}{z^2 + 1}$$

e, se c è quantità negativa, facendo invece la stituzione

$$y = \sqrt{-c}\,z$$
$$d\,y = \sqrt{-c}\,d\,z$$

si ha

$$-\frac{1}{a\sqrt{-c}}\int \frac{d\,z}{1 - z^2}$$

Nel primo caso l'integrale cui ci siamo *è di un tipo* compreso nella tabella fond e nell'altro caso è del tipo di un integrale che abbiamo già sopra calcolato.

Si ha quindi per risultato, nel primo caso

$$\frac{1}{a\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{a\sqrt{c}} \operatorname{arc\,tg} \frac{a x + b}{\sqrt{c}}$$

e nel secondo caso

$$- \frac{1}{a\sqrt{-c}} \log \operatorname{tg} \operatorname{arc\,cos} \frac{z}{2} =$$

$$= - \frac{1}{a\sqrt{-c}} \log \operatorname{tg} \operatorname{arc\,cos} \frac{a x + b}{2\sqrt{-c}}.$$

Potremmo continuare a dare esempii di integrazioni fatte col metodo delle sostituzioni, ma ci bastino per ora questi dati.

Passiamo invece ad esporre i principi di un altro metodo che può rendere moltissimi servizii nella pratica, intendiamo parlare del *metodo di integrazione per parti.*

Siano $u(x)$, $v(x)$ due funzioni derivabili; per le regole di derivazione del prodotto si ha

$$\frac{d}{dx}[u(x)\,v(x)] = u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x)$$

donde

$$u(x)\frac{d}{dx}v(x) = \frac{d}{dx}[u(x)\,v(x)] - v(x)\frac{d}{dx}u(x).$$

Facendo le integrazioni dei singoli termini e tenendo presente che l'integrale della derivata di

una funzione è la funzione stessa, si ha la fc
fondamentale

$$\int u(x) \frac{d\,v(x)}{d\,x} d\,x = u(x)\,v(x) - \int v(x) \frac{d\,u(}{d\,}$$

Fermiamoci un momento su questa formo intendere in che modo essa può essere ut nostro scopo.

Si abbia da calcolare l'integrale di una fu continua $f(x)$. Noi potremo sempre imma questa $f(x)$ scissa nel prodotto di due fatt cui uno lo chiamiamo $u(x)$ e l'altro lo chiaı $\frac{d\,v(x)}{d\,x}$, cioè il secondo lo poniamo eguale al rivata di una ignota funzione di x che chiaı $v(x)$.

Ciò fatto, noi possiamo con quella formo durre il calcolo dell'integrale dato, al calc un altro integrale in generale assolutamen verso dal primo, e che *potrà* essere più sen o già noto.

Noi possiamo fare in infiniti modi la dec sizione di cui si è parlato; ma naturalmen tutti questi infiniti modi noi sceglieremo que esiste o se lo possiamo trovare) che soddisf temporaneamente a queste due condizioni:

1.° Che si possa conoscere immediata la funzione $v(x)$;

2.° Che la funzione

$$v(x) \frac{d\,u(x)}{d\,x}$$

sia più facile da integrare che la funzione

Anche qui tutto dipende dall' acume personale e dalla perizia che si è acquistata in siffatta specie di calcolo.

Alcuni esempi rischiareranno meglio la cosa.

Si abbia da integrare

$$\int \log x \, d\, x.$$

Consideriamo la funzione $\log x$ come il prodotto di

$$\log x \,.\, 1$$

e il primo fattore lo chiamiamo $u\,(x)$, mentre il secondo lo chiamiamo $\frac{d\, v\,(x)}{d\, x}$.

Dalla relazione

$$\frac{d\, v}{d\, x} = 1$$

si ha subito

$$v = x;$$

e da

$$u = log x$$

si ha

$$\frac{d\, u}{d\, x} = \frac{1}{x}\,.$$

Applicando la formola dell'integrazione per parti si ha dunque

$$\int \log x \, d\, x = x \log x - \int d\, x$$
$$= x \log x - x + \text{cost}.$$

e così resta calcolato l'integrale dato.

Alcune volte non si riesce a compire l'integrazione applicando una sola volta il metodo sviluppato, ma applicandolo più volte di seguito.

Diamo un esempio di questo caso.

Si abbia

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, d\, x.$$

Scindendo la funzione sotto il segno nei due fattori

$$x^2 = u$$

$$\operatorname{sen} x = \frac{d\, v}{d\, x}$$

donde

$$\frac{d\, u}{d\, x} = 2\, x$$

$$v = -\cos x$$

si ha

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, d\, x = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, d\, x$$

Ora l'integrale del secondo membro neanche si conosce, ma evidentemente esso è più semplice di quello dato perchè l'esponente di x è restato diminuito di un' unità.

Applicando di nuovo l'integrazione per parti si riuscirà al risultato finale.

Infatti si ha colla solita formola

$$\int x \cos x \, d\, x = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x \, d\, x$$

$$= x \operatorname{sen} x + \cos x$$

onde infine

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\, d\, x = - x^2 \cos x + 2\, x \operatorname{sen} x +$$
$$+ 2 \cos x + \text{cost.}$$

Nei paragrafi seguenti noi ci proporremo il problema dell'integrazione di alcuni tipi speciali di funzioni, e per alcuni tipi anche abbastanza generali potremo dare le formole generali di risoluzione.

Ma quando la funzione data non è riducibile a nessuno dei tipi che si sanno integrare, quando cioè sono riusciti vani tutti i tentativi e gli artifizii adoperati, allora non resta altro espediente che ricorrere all'*integrazione per serie* la cui teoria noi la abbiamo sviluppata nel § 4 del Cap. II; si cercherà cioè allora di sviluppare la funzione in una serie che sia integrabile termine a termine, e si otterrà così il risultato espresso sotto forma di serie.

A questo proposito sviluppiamo il seguente esempio. Si voglia calcolare l'integrale

$$\int \frac{d\, \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \qquad (k^2 < 1).$$

Esso si suol chiamare *integrale ellittico*, e nelle matematiche superiori si studiano estesamente questi integrali che danno luogo a delle funzioni più elevate che le ordinarie funzioni trascendenti, mediante le quali essi quindi non possono esprimersi.

È naturale quindi che se li vogliamo esprimere mediante le ordinarie funzioni, qualunque tentativo ed artifizio, deve riuscire vano, e non si potrà che applicare l'integrazione per serie.

Per non ridurre molto complicato quest'esempio, noi ci limiteremo a calcolare non l'integrale indefinito, ma il definito fra o e $\frac{\pi}{2}$.

La funzione sotto il segno sviluppata in serie dà

$$(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi +$$
$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \operatorname{sen}^4 \varphi + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} k^6 \operatorname{sen}^6 \varphi + \ldots$$

Questa serie è *convergente in ugual grado*, perchè ponendo per sen φ il suo massimo valore che è 1, la serie dei massimi

$$1 + \frac{1}{2} k^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 + \ldots$$

è una serie convergente per $k^2 < 1$, e quindi per un principio noto (v. Calcolo differenziale, Cap. I, § 7) la serie in esame è convergente in ugual grado.

Può quindi farsi l'integrazione termine a termine e si ha

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \varphi + \frac{1}{2} k^2 \int \operatorname{sen}^2 \varphi \, d\varphi +$$
$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} k^4 \int \operatorname{sen}^4 \varphi \, d\varphi + \ldots$$

Per giungere al risultato finale dovremmo quindi conoscere un integrale della forma

$$\int \operatorname{sen}^{2n} \varphi \, d\varphi.$$

Un tale integrale lo possiamo calcolare col metodo d'integrazione per parti.

Si ha

$$\int \operatorname{sen}^{2n} \varphi \, d\varphi = -\operatorname{sen}^{2n-1} \varphi \cos \varphi +$$
$$+ (2n - 1 \int \operatorname{sen}^{2n-2} \varphi \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

e ponendo

$$\cos^2 \varphi = 1 - \operatorname{sen}^2 \varphi$$

e raccogliendo poi i termini simili, si ha infine la formola

$$\int \operatorname{sen}^{2n} \varphi \, d\varphi = -\frac{\operatorname{sen}^{2n-1} \varphi \cos \varphi}{2n} +$$
$$+ \frac{2n-1}{2n} \int \operatorname{sen}^{2n-2} \varphi \, d\varphi.$$

Con questa formola l'integrale corrispondente all'esponente $2n$, si fa dipendere da quello corrispondente all'esponente $2n-2$; applicando quindi ripetute volte questa formola, sino a che ci riduciamo all'esponente zero, possiamo ottenere il valore finale del primo membro.

Il calcolo si semplifica, se come abbiamo detto, vogliamo limitarci al calcolo dell'integrale definito fra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Allora l'ultima formola diventa semplicemente

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-2}\varphi\, d\varphi,$$

e quindi applicando questa formola n volte di seguito si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}\varphi\, d\varphi = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{(2n)(2n-2)\ldots 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

il qual valore sostituito nella serie dà

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\varphi}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 k^6 + \ldots\right].$$

§ 3. **Integrazione delle funzioni razionali.** — I metodi indicati nei capitoli precedenti servono a trasformare un integrale dato in un altro il cui calcolo sia in molti casi più facile.

Ora supporremo che la funzione da integrarsi sia di una specie particolare e propriamente sia una *funzione razionale*. Allora possiamo effettivamente indicare un metodo generale col quale calcolare l'integrale in ogni caso. S'intende però che la soluzione supporrà sempre in generale quella di un altro problema di una natura meno elevata, come p. es., la risoluzione di un'equazione algebrica, risoluzione che praticamente potrebbe essere difficile e anche inattuabile; il che però non toglie che dal punto di vista teorico il problema dell'integrazione resti considerato come risoluto.

Supponiamo dunque una funzione razionale qualunque che sarà il quoziente di due funzioni intere $\frac{F(x)}{f(x)}$, che possiamo sempre immaginare prime fra loro.

Dividiamo il numeratore pel denominatore (supposto che il grado di F sia maggiore di quello di f) e ci riduciamo ad una parte intera più una parte frazionaria in cui il grado del numeratore è minore di quello del denominatore.

In quanto alla parte intera, la sua integrazione si riduce ad integrare termini del tipo

$$a\, x^n$$

dove a è una costante; tali integrali si calcolano colle regole note.

La questione si riduce dunque ad integrare una funzione dal tipo:

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

dove F, f sono prime fra loro, e F è di grado minore di f.

Siano $a_1\ a_2 \ldots a_r$ le radici di f che supporremo per ora tutte reali e sieno rispettivamente $n_1\ n_2 \ldots n_r$ i loro gradi di molteplicità. Allora si ha dall'algebra (come faremo vedere alla fine di questo paragrafo) che la funzione $\frac{F(x)}{f(x)}$ può scomporsi nella somma di tante altre frazioni nel seguente modo:

$$\left.\begin{aligned}\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{b_1^{(n_1)}}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{b_1^{(n_1-1)}}{(x-a_1)^{n_1-1}} + \dots + \frac{b_1'}{x-a_1} + \\ + \frac{b_2^{(n_2)}}{(x-a_2)^{n_2}} + \frac{b_2^{(n_2-1)}}{(x-a_2)^{n_2-1}} + \dots + \frac{b_2'}{x-a_2} + \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + \frac{b_p^{(n_p)}}{(x-a_p)^{n_p}} + \frac{b_p^{(n_p-1)}}{(x-a_p)^{n_p-1}} + \dots + \frac{b_p}{x-a_p}\ .\end{aligned}\right\} (1)$$

dove le b sono costanti di cui alcune possono essere zero, ma certamente però sono diverse da zero le:

$$b_1^{(n_1)}\ ,\quad b_2^{(n_2)}\ ,\ \dots\ b_p^{(n_p)}.$$

Applicando allora l'integrazione al secondo membro, si vede che ci riduciamo sempre ad integrare termini del tipo

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n}.$$

Ora per $n = 1$ tale integrale è

$$\log(x-a)$$

e per n diverso da 1, esso è invece

$$-\frac{1}{(n-1)}\frac{1}{(x-a)^{n-1}}.$$

Si vede quindi che in questa maniera resta com*pletamente* risoluta la decomposizione e s inoltre che *il risultato non è che un assieme di funzioni razionali e funzioni logaritmiche.*

Facciamo un'applicazione di questo metodo.

Si voglia calcolare:

$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)} .$$

Le radici del denominatore sono tutte reali e sono

$$x = 0, x = 1, x = -1$$

e sono tutte di molteplicità *1*. Allora poniamo

$$\frac{1}{x(1-x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} .$$

Per calcolare a, b, c, moltiplichiamo consecutivamente per x, $x-1$, $x+1$, e poi poniamo rispettivamente $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$.

Si ha così:

$$a = 1 \quad , \quad b = -\frac{1}{2} \quad , \quad c = -\frac{1}{2}$$

onde infine

$$\int \frac{dx}{x(1-x^2)} = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$= \log x - \frac{1}{2}\log(x-1) - \frac{1}{2}\log(x+1) + C$$

$$= \log \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}} + C.$$

Questo metodo si può utilmente adoperare nel caso che tutte le radici a di f sieno *reali*. Se alcune delle a sono immaginarie allora noi non possiamo procedere nel calcolo, perchè tutte le considerazioni fatte fin qui sul calcolo differenziale ed integrale si riferiscono essenzialmente a funzioni non complicate con immaginari.

Bisognerebbe prima di tutto cominciare ad estendere tutte le considerazioni fatte fin qui al caso delle funzioni immaginarie, e si potrebbe effettivamente dimostrare che operando sulle quantità immaginarie come se fossero quantità reali, si giungerebbe a risultati finali dai quali l'immaginario deve sparire, ed i risultati che così si verrebbero ad ottenere sotto forma reale sarebbero esattamente i richiesti.

Però è utile mostrare come anche nel caso che alcune radici di f sono immaginarie si può condurre avanti il calcolo dell'integrale senza introdurre alcuna quantità immaginaria.

Supponiamo perciò che f abbia la radice *immaginaria* $(\alpha + i\beta)$ il cui grado di molteplicità sia n. Avrà allora anche la radice coniugata $(\alpha - i\beta)$ collo stesso grado di molteplicità. Quindi avrà per fattore

$$[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^n = (x^2 + a\,x + b)^n .$$

Allora si sa dall'algebra (e noi lo faremo vedere alla fine di questo paragrafo) che la frazione $\frac{F(x)}{f(x)}$ *si può* scomporre anche in un'altra maniera diversa da quella rappresentata dalla formola (*1*), cioè si può scomporre in una serie di termini di cui alcuni sono come in (*1*), e sono quelli corrispondenti alle radici reali di f, e altri sono del tipo

$$\frac{c\,x+d}{(x^2+a\,x+b)^n}$$

dove le radici di

$$x^2+a\,x+b=0$$

sono immaginarie

Tutta la questione si riduce dunque a calcolare

$$\int\frac{c\,x+d}{(x^2+a\,x+b)^n}\,d\,x.$$

Se, come avanti, sono $(\alpha+i\,\beta)$, $(\alpha-i\,\beta)$ le radici del denominatore, si ha:

$$x^2+a\,x+b=(x-\alpha)^2+\beta^2$$

e l'integrale diventa

$$\int\frac{c\,x+d}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^n}\,d\,x \qquad (n>0).$$

Questo integrale può scriversi identicamente

$$\int\frac{c\,(x-\alpha)+(c\,\alpha+d)}{[x-\alpha^2)+\beta^2]^n}\,d\,x=$$

$$=c\int\frac{(x-\alpha)}{[(x-\alpha^2)+\beta^2]^n}\,d\,x+(c\,\alpha+d)\int\frac{d\,x}{[(x-\alpha^2)+\beta^2]^n}$$

Il primo di questi integrali colla sostituzione

$$x-\alpha=y.$$

diventa

$$c \int \frac{y\, d\, y}{(y^2 + \beta^2)^n}$$

che è eguale a

$$-\frac{c}{2\,n - 2}\,\frac{1}{(y^2 + \beta^2)^{n-1}} \qquad (\text{se } n > 1)$$

oppure a

$$\frac{c}{2} \log (y^2 + \beta^2) \qquad (\text{se } n = 1).$$

Resta quindi a considerare solo l'altro integr
il quale colla medesima trasformazione in y
venta intanto

$$\int \frac{d\, y}{(y^2 + \beta^2)^n}\ .$$

Se $n = 1$, allora questo integrale è eguale

$$\frac{1}{\beta} \text{ arc tg } \frac{y}{\beta}\ .$$

Se $n > 1$ facciamo le seguenti altre trasfo
zioni.

Osserviamo che

$$\int \frac{d\, y}{(y^2 + \beta^2)^{n-1}} = \int \frac{(y^2 + \beta^2)^n}{(y^2 + \beta^2)^n}\, d\, y =$$

$$= \int \frac{y^2\, d\, y}{(y^2 + \beta^2)^n} + \beta^2 \int \frac{d\, y}{(y^2 + \beta^2)^n}$$

e facendo l'integrazione per parti si ha inoltre:

$$\int \frac{y^2\,dy}{(y^2+\beta^2)^n} = -\frac{y}{(2n-2)(y^2+\beta^2)^{n-1}} + \\ + \frac{1}{2n-2}\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{n-1}}$$

la quale formola combinata colla precedente dà

$$\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^n} = \\ + \frac{y}{(2n-2)\beta^2(y^2+\beta^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)\beta^2}\int \frac{dy}{(y^2+\beta^2)^{n-1}}.$$

Si vede che colla successiva applicazione di questa formola di riduzione, dobbiamo giungere (poichè n è un numero intero positivo) al calcolo di un integrale della stessa specie, ma dove l'esponente di $(y^2+\beta^2)$ è l'unità; un tale integrale si esprimerà allora mediante la funzione *arco tangente*, come abbiamo visto sopra.

Resta così risoluta completamente l'integrazione della funzione razionale data, supposte naturalmente note le radici dell'equazione $f(x) = o$, e si è visto anche che può condursi il calcolo in ogni caso, sempre colla introduzione di sole quantità *reali*, anche se le radici dell'equazione $f(x)=o$ sieno *immaginarie*.

Come risultato di tutta questa ricerca possiamo dire: *che l'integrale di una funzione razionale si esprime sempre mediante i soli tre tipi di funzioni, 1.° funzioni razionali, 2.° funzioni logaritmiche, 3.° funzione arcotangente.* Se nel calcolo non si *vogliono introdurre le quantità complesse occorrono anche le funzioni della terza specie; si può invece limitarsi solo alle due prime specie volendo introdurre gli immaginarii.*

Prima di terminare questo paragrafo, ci occorre ora, per rendere più completa la nostra trattazione, riassumere i teoremi generali dell'algebra relativi alla decomposizione delle funzioni fratte razionali in frazioni elementari, teoremi che sono il fondamento di tutti gli sviluppi fatti in questo paragrafo.

Divideremo questa trattazione, che del resto è una parte puramente algebrica, in vari sottoparagrafi.

a) Teoremi generali sulla decomposizione delle funzioni razionali fratte. Immaginiamo una funzione di cui il numeratore e il denominatore sieno due polinomi in x

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

dei gradi m, n rispettivamente.

Se il grado di F è maggiore o eguale di quello di f, si esegua la divisione dei due polinomi, e si ha una parte intera $Q(x)$ di grado $m-n$, e un resto $R(x)$ di grado minore di n; allora può scriversi:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{f(x)}.$$

Prima di tutto dimostriamo che questa scomposizione in una parte intera e in una frazionaria non può farsi che in un sol modo. Sia:

$$F(x) = a_0\, x^m + a_1\, x^{m-1} + \dots + a_m$$
$$f(x) = b_0\, x^n + b_1\, x^{n-1} + \dots + b_n;$$

dico che *in un sol modo* si possono *sempre* trovare altri due polinomi $Q(x)$ di grado $m-n$, e $R(x)$ di grado minore di n, tali che si abbia *identicamente, cioè per qualunque valore di* x:

$$F(x) = Q(x)\, f(x) + R(x).$$

Poniamo:

$$Q(x) = q_0\, x^{m-n} + q_1\, x^{m-n-1} + \dots + q_{m-n}$$
$$R(x) = r_0\, x^{n-1} + r_1\, x^{n-2} + \dots + r_{n-1}.$$

Allora si deve avere:

$$a_0 x_m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m =$$
$$= (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n)(q_0 x^{m-n} q_1\, x^{m-n-1} + \dots + q_{m-n}) +$$
$$+ r_0\, x^{n-1} + r_1\, x^{n-2} + \dots + r_{n-1}.$$

E poichè questa eguaglianza deve sussistere qualunque sia il valore di x, si ha che i coefficienti delle diverse potenze di x nel primo e nel secondo membro debbono essere uguali e quindi si hanno le relazioni:

$$\begin{cases} a_0 = b_0\, q_0 \\ a_1 = b_0\, q_1 + b_1\, q_0 \\ a_2 = b_0\, q_2 + b_1\, q_1 + b_2\, q_0 \\ a_3 = b_0\, q_3 + b_1\, q_2 + b_2\, q_1 + b_3\, q_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m-n} = b_0\, q_{m-n} + b_1\, q_{m-n-1} + \dots + b_{m-n}\, q_0 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} a_{m-n+1} = b_1 q_{m-n} + b_2 q_{m-n-1} + \ldots + b_{m-n+1} q_0 + r_0 \\ a_{m-n+2} = b_2 q_{m-n} + b_3 q_{m-n-1} + \ldots + b_{m-n+2} q_0 + r_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m \qquad = b_n q_{m-n} + r_{n-1}. \end{array}\right.$$

Da questo quadro risulta che la prima categoria di formole non contiene i coefficienti r, e contiene invece *tutti* i coefficienti q. La seconda categoria contiene i coefficienti r ed i coefficienti q.

Inoltre dalla prima categoria di formole i coefficienti q si determinano in una sola maniera, perchè la prima di esse contiene solo il coefficiente q_0, e quindi lo determina in un modo unico; la seconda determinerà poi in un modo unico il valore del coefficiente q_1, determinato che sia q_0; e così di seguito l'ultima di quelle equazioni determinerà il valore di q_{m-n}.

Determinate così tutte le q, le equazioni della seconda categoria determineranno in un modo unico le r.

Resta così dimostrato che esistono *sempre* i polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ colle proprietà indicate e non si possono determinare che *in una sola maniera*.

Dimostriamo ora il seguente teorema:

Sia $(\mathrm{x}-\mathrm{a})^\alpha$ *un fattore della funzione* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$, *cioè sia* a *una radice di* $\mathrm{f}(\mathrm{x})$ *multipla di grado* α. *Allora la funzione irreducibile* $\frac{\mathrm{F}(\mathrm{x})}{\mathrm{f}(\mathrm{x})}$ *si può sempre scomporre in*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F_1(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)}$$

***essendo* A *una costante*, $F_1(x)$ *un polimonio intero e* $f_1(x)$ *il quoziente di* $f(x)$ *per* $(x-a)^\alpha$.**

Infatti essendo

$$f(x) = (x-a)^\alpha f_1(x),$$

si ha identicamente

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{F(x) - A f_1(x)}{(x-a)^\alpha f_1(x)}.$$

Ora possiamo sempre scegliere la costante A in modo che

$$F(a) - A f_1(a) = 0$$

cioè possiamo porre A ugúale a

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)},$$

e allora la funzione

$$F(x) - A f_1(x)$$

avrà per fattore $x-a$, e quindi nel secondo termine della formola superiore possiamo sopprimere un fattore $x-a$ e resta una funzione $F_1(x)$ di grado $m-1$, mentre al denominatore resta:

$$(x-a)^{\alpha-1} f_1(x);$$

si è operato così la richiesta scomposizione.

Da questo teorema possiamo dedurne un altro:

Immaginiamo che tutte le radici di* $f(x)$ *reali o immaginarie sieno:

$$a, b, \ldots l$$

colla molteplicità:

$$\alpha, \beta, \ldots \lambda,$$

allora la frazione $\frac{F(x)}{f(x)}$ *può decomporsi in*

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} +$$
$$+ \frac{B}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \ldots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dove le A, B, ... A_1 B_1 ... *sono delle costanti.*

Infatti, tenendo presente la scomposizione dimostrata sopra, e riapplicandola alla frazione

$$\frac{F(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)},$$

si ha

$$\frac{F(x)}{(x-a)^{\alpha-1} f_1(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a)^{\alpha-2} f_1(x)}$$

e al secondo termine applicando daccapo la formola di scomposizione, e sostituendo, e poi così proseguendo si ha infine la dimostrazione del nostro assunto.

Possiamo osservare che i primi coefficienti A, B, ... non possono essere mai zero, perchè sappiamo che essi sono dati da

$$A = \frac{F(a)}{f(a)} \quad , \quad B = \frac{F(b)}{f(b)} \ldots$$

e dovrebbe essere $F(a) = 0$, cioè a essere una radice di $F(x) = 0$ contro l'ipotesi che $\frac{F(x)}{f(x)}$ sia una frazione *irriducibile.*

b) Metodi per effettuare la decomposizione nel caso delle radici reali. — Distinguiamo ora due casi fondamentali, cioè il caso in cui le radici di $f(x)$ sieno tutte reali e il caso in cui ve ne sia qualcuna immaginaria.

Nel caso in cui tutte le radici sono reali distinguiamo quello in cui sono tutte semplici e quello in cui ve n'è qualcuna multipla.

Sia dunque in primo luogo:

$$f(x) = (x - a)(x - b)\dots(x - l).$$

Allora il teorema precedente ci dice che può porsi

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \dots + \frac{L}{x-l};$$

ora vogliamo dare un metodo per trovare i valori dei coefficienti $A, B, C\dots$

Sappiamo già che posto

$$f(x) = (x - a) f_1(x)$$

cioè

$$f_1(x) = (x - b)(x - c)\dots(x - l)$$

sarà:

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)}.$$

Ora facciamo la prima derivata di f, e si ha:

$$f'(x) = (x-b)(x-c)\dots(x-l) +$$
$$+ (x-a)(x-c)\dots(x-l) + (x-a)(x-b)\dots(x-l) + \dots$$

donde:

$$f'(a) = (a-b)(a-c)\dots(a-l) = f_1(a).$$

Ne deduciamo dunque senz'altro in questo caso

$$A = \frac{F(a)}{f'(a)} \quad , \quad B = \frac{F(b)}{f'(b)}, \dots$$

Possiamo applicare questi risultati per dimostrare una formola che può essere utile in diversi casi.

Supponiamo che $F(x)$ sia di grado $n-2$ essendo $f(x)$ di grado n.

Allora nella formola di scomposizione, moltiplicando per

$$f(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-l)$$

si ha

$$\begin{aligned} F(x) = A\,(x-b)(x-c)\dots &+ \\ + B\,(x-a)(x-c)\dots &+ \\ \dots\dots\dots\dots\dots& \end{aligned}$$

e nel secondo membro il coefficiente di x^{n-1} è

$$A + B + C + \dots$$

cioè

$$\frac{F(a)}{f'(a)} + \frac{F(b)}{f'(b)} + \dots = \Sigma \frac{F(x)}{f'(x)}$$

intendendo che il segno Σ si debba estendere a tutte le n radici di $f(x) = 0$.

Intanto in $F(x)$ il coefficiente di x^{n-1} è zero, onde possiamo scrivere:

$$\Sigma \frac{F(x)}{f'(x)} = o.$$

Passiamo ora a vedere come si calcolano i coefficienti $A, A_1\ A_2 \ldots B, B_1, B_2 \ldots$ del caso generale. Naturalmente essi si potrebbero determinare col procedimento tenuto in a); ma questo metodo sarebbe lungo, e noi vogliamo trovare delle formole che ci possano dare i valori delle A mediante le derivate di f e F.

Partiamo dalle formole

$$A = \frac{F(a)}{f_1(a)} \quad , \qquad A_1 = \frac{F_1(a)}{f_1(a)} \ldots$$

dove

$$F_1(x) = \frac{F(x) - A f_1(x)}{x - a}$$

$$F_2(x) = \frac{F_1(x) - A_1 f_1(a)}{x - a}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Essendo

$$f(x) = (x - a)^{\alpha} f_1(x)$$

si ha derivando colla formola di Leibnitz

$$f^{\alpha}(x) = \alpha!\, f_1(x) + \alpha \frac{\alpha!}{1} (x - a) f'_1(x) +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \frac{\alpha!}{1 \cdot 2} (x - a)^2 f''_1(x) + \ldots$$

$$f^{\alpha+1}(x) = (\alpha+1)!\, f'_1(x) + \frac{(\alpha+1)\,\alpha}{2}\,\frac{\alpha!}{1}\,(x-a)\, f''_1(x) +$$

$$+ \frac{(\alpha+1)\,\alpha\,(\alpha-1)}{2\,.\,3}\,\frac{\alpha!}{1\,.\,2}\,(x-a)^2 f'''_1(x) + \dots$$

e per $x = a$ si ha

$$f^{\alpha}(a) = \alpha!\, f_1(a),$$

$$f^{\alpha+1}(a) = \frac{(\alpha+1)!}{1!}\, f'_1(a),\ f^{\alpha+2}(a) = \frac{(\alpha+2)!}{2!}\, f''_1(a), \dots$$

Ora derivando successivamente le formole

$$(x-a)\, F_1(x) = F(x) - A\, f_1(x)$$
$$(x-a)\, F_2(x) = F_1(x) - A_1\, f'_1(x)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

si ha

$$F_1(x) + (x-a)\, F'_1(x) = F'(x) - A\, f'_1(x)$$
$$F_2(x) + (x-a)\, F'_2(x) = F'_1(x) - A_1\, f'_1(x)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$2\, F'_1(x) + (x-a)\, F''_1(x) = F''(x) - A\, f''_1(x)$$
$$2\, F''_2(x) + (x-a)\, F''_1(x) = F'''_1(x) - A_1\, f''_1(x)$$

e per $x = a$ si ha:

$$F_1(a) = F'(a) - A\, f'_1(a)$$
$$= F'(a) - \frac{A}{(\alpha+1)!}\, f^{\alpha+1}($$

$$F_2(a) = F'_1(a) - A_1 f'_1(a)$$
$$= \frac{F''(a) - A f''_1(a)}{2} - A_1 f'_1(a)$$
$$= \frac{1}{2} F''(a) - \frac{A}{\alpha+2} f^{\alpha+2}(a) - \frac{A_1}{(\alpha+1)} f^{\alpha+1}(a)$$

. . . .

. . . .

Sostituendo nelle espressioni che danno i valori di $A, A_1, A_2 \ldots$ si hanno le richieste formole di ricorrenza:

$$F(a) - \frac{A}{\alpha!} f^{\alpha}(a) = 0$$

$$F'(a) - \frac{A}{(\alpha+1)!} f^{\alpha+1}(a) - \frac{A_1}{\alpha!} f^{\alpha}(a) = 0$$

$$F''(a) - \frac{A}{(\alpha+2)!} f^{\alpha+2}(a) -$$
$$- \frac{A}{(\alpha+1)!} f^{\alpha+1}(a) - \frac{A_2}{\alpha!} f^{\alpha}(a) = 0$$

. . . .

la cui legge di formazione è evidente.

c) Decomposizione delle funzioni fratte nel caso in cui il denominatore abbia radici immaginarie. — Nel caso in cui fra le radici di $f(x)$ ve ne siano alcune immaginarie, allora si potrebbe anche effettuare la decomposizione operata nei *paragrafi precedenti*, ma allora le formole verrebbero complicate con immaginari, e si avrebbe una decomposizione immaginaria.

Però in questo caso si può fare un'altra decomposizione, che è quella che noi passeremo adesso ad esporre.

Tale decomposizione risulta dal seguente teorema:

Se $(x^2 + p\,x + q)$ *è un fattore del denominatore* f(x), *cioè si abbia*

$$f(x) = (x^2 + p\,x + q)^n f_1(x)$$

e si ha identicamente

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{P\,x + Q}{(x^2 + p\,x + q)^n} + \frac{F_1(x)}{(x^2 + p\,x + q)^{n-1} f_1(x)}$$

essendo P, Q *due costanti, e* $F_1(x)$ *una nuova funzione intera.*

Infatti si ha:

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x^2 + p\,x + q)^n f_1(x)} =$$

$$= \frac{P\,x + Q}{(x^2 + p\,x + q)^n} + \frac{F(x) - (P\,x + Q) f_1(x)}{(x^2 + p\,x + q)^n f_1(x)}\,.$$

Ora possiamo determinare le due costanti P, Q in modo che

$$F(x) - (P\,x + Q) f_1(x)$$

abbia per fattore $x^2 + p\,x + q$; giacchè sieno

$$\alpha + i\,\beta$$

$$\alpha - i\,\beta$$

le due radici di

$$x^2 + p\,x + q = 0;$$

allora deve essere

$$F(\alpha + i\,\beta) - [P(\alpha + i\,\beta) + Q]\,f_1\,(\alpha + i\,\beta) = 0$$
$$F(\alpha - i\,\beta) - [P(\alpha - i\,\beta) + Q]\,f_1\,(\alpha - i\,\beta) = 0$$

donde:

$$P(\alpha \pm i\,\beta) + Q = \frac{F(\alpha \pm i\,\beta)}{f(\alpha \pm i\,\beta)}$$

e calcolando il secondo membro che sarà in generale della forma:

$$M \pm i\,N$$

si ha

$$P\alpha + Q = M$$
$$P\beta = N$$

donde:

$$P = \frac{N}{\beta}$$

$$Q = M - \frac{M\alpha}{\beta}.$$

Per i valori di P, Q così determinati sarà

$$F(x) - (P\,x + Q)\,f_1\,(x) = (x^2 + p\,x + q)\,F_1\,(x)$$

e quindi resta dimostrato il nostro assunto.

Colla successiva applicazione di questo teorema si vede, analogamente come in a), che si ha la decomposizione

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{P x + Q}{(x^2 + p x + q)^n} + \frac{P_1 x + Q_1}{(x^2 + p x + q)^{n-1}} + \ldots +$$

$$+ \frac{P_{n-1} x + Q_{n-1}}{x^2 + p x + q} + \frac{F_n(x)}{f_1(x)}\,.$$

I coefficienti $P, Q, P_1, Q_1, \ldots$ sono determinati dalle relazioni:

$$P k + P = \frac{F(k)}{f_1(k)}\,, \qquad (P k + Q) f_1(k) = F(k)$$

$$P_1 k + Q_1 = \frac{F_1(k)}{f_1(k)}\,, \qquad (P_1 k + Q_1) f_1(k) = F_1(k)$$

. . . .

dove k è una delle due radici di

$$x^2 + p x + q = 0$$

e $F_1(x), F_2(x), \ldots$ sono definite dalle formole:

$$(x^2 + p x + q) F_1(x) = F(x) - (P x + Q) f_1(x)$$

$$(x^2 + p x + q) F_2(x) = F_1(x) - (P_1 x + Q_1) f_1(x)$$

. . . .

Prima di abbandonare questo argomento è utile osservare che nel caso in cui le radici immaginarie di f sono semplici e non multiple, allora questa decomposizione si può ricavare facilmente dalla prima decomposizione.

Infatti sieno k, k' le due radici immaginarie *coniugate* di $x^2 + p x + q$; allora facendo la decomposizione col primo metodo si hanno le due frazioni:

$$\frac{R}{x-k}+\frac{R}{x-k'}$$

dove

$$R=\frac{F(k)}{f_1(k)(k-k')} \qquad R'=\frac{F(k')}{f_1(k')(k'-k)};$$

riunendo in una le due frazioni si ha:

$$\frac{(R+R')x-(Rk'+R'k)}{(x-k)(x-k')}=\frac{(R+R')x-(Rk'+R'k)}{x^2+px+q};$$

essendo k, k' due numeri immaginarii coniugati, anche R,R' saranno immaginarii coniugati, e quindi anche Rk', $R'k$, onde:

$$R+k'$$
$$Rk'+R'k$$

saranno certamente numeri reali, perchè somme di numeri immaginarii coniugati. Inoltre ponendo $\frac{F(k)}{f_1(k)}$ sotto la forma

$$M+Ni$$

e

$$k=a+i\beta\,, \quad k'=a-i\beta,$$

si ha:

$$R=\frac{M+Ni}{2i\beta}$$
$$R'=\frac{M-Ni}{-2i\beta}$$

onde

$$R + R' = \frac{N}{\beta} = P$$

$$-(Rk' + R'k) = \frac{(M + Ni)(\alpha - i\beta) - (M - Ni)(\alpha + i\beta)}{-2i\beta} =$$

$$= M - N\frac{\alpha}{\beta} = Q.$$

§ 4. **Integrazione delle funzioni irrazionali. Integrali binomii. Integrali ellittici.** — Mentre nel caso delle funzioni *razionali* noi abbiamo potuto risolvere completamente il problema dell'integrazione, non possiamo più fare lo stesso nel caso delle funzioni *irrazionali.*

Per questo dobbiamo limitarci a considerare solo dei tipi speciali, e vedere se è possibile, e come, assegnare per tali tipi il metodo generale di risoluzione.

Uno dei tipi più facili di funzioni irrazionali è quello in cui compariscono varie potenze *frazionarie* della variabile x; quello cioè di una funzione

$$f(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma \ldots)$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sono dei numeri qualunque razionali frazionarii. La funzione f è così effettivamente una funzione irrazionale di x; ma con una semplice trasformazione possiamo subito ridurci al caso delle funzioni razionali.

Sia in effetti μ il minimo comune multiplo di *tutti i denominatori* delle frazioni $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, allora i prodotti

$$\mu\alpha,\ \mu\beta,\ \mu\gamma,\ldots$$

saranno tutti numeri interi.

Poniamo

$$x = y^\mu$$

e quindi

$$x^\alpha = y^{\mu\alpha},\quad x^\beta = y^{\mu\beta},\ldots$$
$$dx = \mu y^{\mu-1}\,dy.$$

Con questa sostituzione si ottiene una funzione in y, ma in cui gli esponenti di y sono tutti numeri interi; si ottiene cioè una funzione razionale in y; siamo così ricondotti al caso già considerato nel paragrafo precedente.

Consideriamo ora un integrale del tipo

$$\int f(x, \sqrt{R})\,dx$$

dove R sia un polinomio di 2.° grado in x, cioè

$$R = a + 2bx + cx^2,$$

e f rappresenti una combinazione *razionale* di x e di $\sqrt{R}$. La f è naturalmente una funzione *irrazionale* di x, e l'irrazionalità proviene dal radicale di 2.° grado $\sqrt{R}$.

Facciamo delle trasformazioni preliminari per mostrare come, a meno di trasformazioni algebriche, l'integrale *dato può* comporsi mediante alcuni di *tipo determinato.*

Considerando che la seconda potenza di $\sqrt{I}$
già un' espressione razionale, ricaviamo che in
il $\sqrt{R}$ non ci potrà comparire che solo *a pri*
grado; la forma generale di f è dunque

$$\frac{\varphi(x) + \psi(x)\sqrt{R(x)}}{\varphi_1(x) + \psi_1(x)\sqrt{R(x)}}.$$

Moltiplicando il numeratore e denominatore]

$$\varphi_1(x) - \psi_1(x)\sqrt{R(x)}$$

la $f(x)$ diventa

$$\frac{\varphi(x)(\varphi_1(x) - \psi(x)\psi_1(x)R(x) + \sqrt{R(x)}(\varphi_1(x)\psi(x) - \varphi(x)\varphi_1(}{\varphi_1^2(x) - \psi_1^2(x)R(x)}$$

cioè il denominatore diventa razionale. La f p
dunque sempre ridursi al tipo

$$G(x) + H(x)\sqrt{R}$$

dove G, H sono due funzioni razionali di x.

Quindi dobbiamo occuparci solo di un integr
del tipo

$$\int H(x)\sqrt{R(x)}\,dx$$

o anche, moltiplicando e dividendo per $\sqrt{R}$,

$$\int \frac{H(x)\,R(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx = \int \frac{K(x)}{\sqrt{R(x)}}\,dx$$

dove $K(x)$ è una funzione razionale qualunque

Se ora scomponiamo la funzione K in una pa
intera, e in frazioni elementari, giusta la te

esposta nel paragrafo precedente, si vede che *volendo stare sempre nel campo delle quantità reali*, ci riduciamo a soli *tre* tipi di integrali, cioè

$$\int \frac{x^n}{\sqrt{R(x)}} dx,$$

proveniente dalla parte *intera* contenuta in K,

$$\int \frac{1}{(x-a)^n \sqrt{R(x)}} dx,$$

proveniente dalle radici *reali* del denominatore di K,

$$\int \frac{cx+d}{(x^2+px+q)^n \sqrt{R(x)}} dx,$$

proveniente dalle radici *immaginarie* del denominatore di K. Si può far vedere che ciascuno di questi integrali può sempre ridursi ad integrale razionale.

Una tal dimostrazione la faremo per un integrale del tipo generale

$$\int f(x, \sqrt{R(x)})\, dx$$

e non per un integrale di uno dei tipi speciali soprasegnati; però praticamente le trasformazioni ora indicate potranno essere molto utili.

Distinguiamo i due casi di c positivo e c negativo.

Sia in primo luogo c positivo. Allora poniamo

$$\sqrt{R} = y + \sqrt{c}\, x$$

donde

$$a + 2\, b\, x + c\, x^2 = y^2 + 2 \sqrt{c}\, x\, y + c\, x^2$$

e quindi

$$x = \frac{y^2 - a}{2\,(b - \sqrt{c}\, y)}$$

$$\sqrt{R} = y + \frac{\sqrt{c}\,(y^2 - a)}{2\,(b - \sqrt{c}\, y)} = - \frac{\sqrt{c}\, y^2 - 2\, b\, y + a \sqrt{c}}{2\,(b - \sqrt{c}\, y)}$$

$$d\, x = \frac{2\, y\,(2\, b - 2 \sqrt{c}\, y) + 2\,(y^2 - a) \sqrt{c}}{4\,(b - \sqrt{c}\, y)^2}\, d\, y$$

$$= - \frac{\sqrt{c}\, y^2 - 2\, b\, y + a \sqrt{c}}{2\,(b - \sqrt{c}\, y)^2}\, d\, y.$$

Con queste sostituzioni è evidente che la f diventa una funzione *razionale* di y.

Applichiamo questa trasformazione all'integrale

$$\int \frac{d\, x}{\sqrt{R}}.$$

Esso diventa semplicemente

$$\int \frac{d\, y}{b - \sqrt{c}\, y}$$

che è eguale a

$$- \frac{1}{\sqrt{c}} \log\,(b - \sqrt{c}\, y) + \text{cost.}$$

onde infine il nostro integrale è

$$-\frac{1}{\sqrt{c}}\log\left(b-\sqrt{c}\sqrt{R}+c\,x\right)+\text{cost.}$$

Supponiamo ora $c<0$. Se la funzione da integrare è una funzione di x *reale* per ogni x *reale*, non potrà essere $\sqrt{R}$ una quantità immaginaria, cioè R non potrà essere *negativo* per ogni valore di x; ora

$$\begin{aligned} R &= c\left(x^2+\frac{2\,b}{c}\,x+\frac{a}{c}\right) \\ &= c\,(x-\alpha)\,(x-\beta) \end{aligned}$$

se α, β sono le radici di $R=0$. Queste radici non potranno perciò essere immaginarie perchè se lo fossero, il prodotto

$$(x-\alpha)\,(x-\beta)$$

per ogni x *reale* sarebbe il prodotto di due quantità complesse coniugate e quindi sarebbe eguale alla somma di due quadrati di numeri reali, cioè una quantità essenzialmente positiva; per c negativo la R sarebbe perciò negativa per qualunque x reale, e quindi $\sqrt{R}$ sarebbe immaginaria, e la funzione data contenente razionalmente l' espressione $\sqrt{R}$ sarebbe complessa, mentre che noi supponiamo che la funzione data sia sempre una funzione *reale*.

Se le radici α, β sono reali, possiamo noi allora fare la trasformazione

$$\sqrt{R}=y\,(x-\alpha)$$

la quale riuscirà una sostituzione *reale*. Di qui, quadrando si ha:

$$R = a + 2\,b\,x + c\,x^2 = y^2\,(x - \alpha)^2$$

cioè

$$c\,(x - \alpha)\,(x - \beta) = y^2\,(x - \alpha)^2$$
$$c\,(x - \beta) = y^2\,(x - \alpha)$$

donde

$$x = \frac{c\,\beta - \alpha\,y^2}{c - y^2}$$

$$d\,x = \frac{-\,2\,\alpha\,y\,(c - y^2) + 2\,(c\,\beta - \alpha\,y^2)\,y}{(c - y^2)^2}\,d\,y$$

$$= \frac{2\,c\,y\,(\beta - \alpha)}{c - y^2}\,d\,y$$

$$\sqrt{R} = y\left(\frac{c\,\beta - \alpha\,y^2}{c - y^2} - \alpha\right)$$

$$= \frac{c\,y\,(\beta - \alpha)}{c - y^2}$$

e, come si vede, anche con questa trasformazione ci riduciamo ad una funzione razionale di y. Questa trasformazione può naturalmente farsi anche nel caso in cui c è positivo, purchè le radici di $R = 0$ sieno reali.

Applicando questa trasformazione all' integrale già considerato sopra, esso diventa

$$2\int \frac{d\,y}{c - y^2} = -\,\frac{2}{c}\int \frac{d\,y}{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{-c}}\right)^2}$$

$$= -\,\frac{2}{\sqrt{-c}}\,\text{arc tg}\,\frac{y}{\sqrt{-c}} + \text{cost.}$$

Dopo avere studiati gli integrali di funzioni contenenti la radice quadrata di un polinomio di 2.° grado in x, viene spontanea l'idea di considerare gli integrali di funzioni contenenti la radice quadrata di un polimonio di 3.° o di 4.° o di grado superiore.

Senonchè mentre nel caso del polinomio di 2.° grado, si è visto che si può sempre effettuare la integrazione per mezzo delle funzioni ordinarie, non è più lo stesso per gli altri casi. Per questi casi occorre l'introduzione di funzioni trascendenti più elevate delle ordinarie. Tali integrali si chiamano *integrali ellittici* e furono studiati per la prima volta dal matematico italiano Fagnano (1682-1766) e da Eulero (1707-1783) e poi più diffusamente da Legendre (1752-1833).

La denominazione di *ellittici* viene a loro dal fatto che per mezzo di essi si risolve il cosiddetto *problema della rettificazione dell'ellisse.*

Noi non possiamo entrare in una trattazione degli integrali ellittici. Ci limiteremo solo a stabilire alcune nozioni fondamentali.

Con una trasformazione nei cui dettagli noi non vogliamo entrare, si giunge a far vedere che *supposto che nel calcolo si vogliano includere anche le quantità complesse ogni integrale della forma*

$$\int f(x, \sqrt{R})\, d\, x$$

dove R *è un polinomio di 4.° grado e* f *è il simbolo di una funzione razionale, si può sempre esprimere mediante una combinazione lineare di* *integrali dei soli tre tipi:*

$$1.\ \int \frac{d\,y}{\sqrt{R}}$$

$$2.\ \int \frac{y^2\,d\,y}{\sqrt{R}}$$

$$3.\ \int \frac{d\,y}{(y^2 - a)\sqrt{R}}$$

dove R *è il polinomio di 4.° grado sotto la forma*:

$$R = (1 - y^2)(1 - k\,y^2) \qquad (k^2 < 1).$$

Tali integrali si chiamano gli *integrali normali* rispettivamente di *1.ª*, *2.ª*, *3.ª specie di Legendre.*

Vogliamo ora mostrare come questi tre integrali si possono ridurre ad un' altra forma che viene molto spesso adoperata, e che noi abbiamo anche altra volta avuto occasione di studiare a proposito degli sviluppi in serie degli integrali (v. Cap. III, § 2).

Poniamo

$$y = \operatorname{sen} \varphi$$
$$d\,y = \cos \varphi\, d\,\varphi$$

e i tre integrali diventano

$$1.\ \int \frac{d\,\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$2.\ \int \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi\, d\,\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

$$3. \int \frac{d\varphi}{(1 + n \operatorname{sen}^2 \varphi) \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

(a meno di un fattore costante)

ponendo poi anche $a = -\frac{1}{n}$.

Questi tre integrali sogliono indicarsi rispettivamente coi simboli

$$F(\varphi), \qquad Z(\varphi), \qquad \Pi(\varphi)$$

e il primo di essi è proprio quello da noi considerato nel luogo citato.

Essi potrebbero calcolarsi operando l'integrazione per serie.

Passiamo ora a considerare un altro tipo di integrali, assai meno complicati cioè i cosiddetti *integrali binomii*, considerati per la prima volta da Eulero.

Un tale integrale è della forma

$$\int x^m (a + b x^n) d x$$

dove m, n, p sono dei numeri *razionali frazionarii positivi o negativi*. Se il numero p fosse un numero intero positivo o negativo, allora si potrebbe sviluppare la potenza del binomio o al numeratore o al denominatore secondochè p fosse positivo o negativo, e si avrebbe una funzione razionale di varie potenze frazionarie di x; un tal tipo di funzione lo abbiamo già considerato sul principio di *questo paragrafo*.

Supponiamo quindi che p sia un numero frazionario.

I numeri m, n possono sempre supporsi dei numeri qualunque, ma è facile vedere che, senza diminuire la generalità, essi possono sempre supporsi *interi*.

Perchè se non lo fossero, e sia μ il minimo comune moltiplo fra i loro denominatori, ponendo

$$x = y^{\mu}$$

l'integrale si trasforma in

$$\mu \int y^{(m+1)\mu-1} (a + b\, y^{n\mu})^p \, d\, y$$

che è anche un integrale binomio, ma dove però gli esponenti di y dentro e fuori parentesi sono numeri interi.

Inoltre n può sempre immaginarsi positivo, perchè altrimenti l'integrale dato può scriversi

$$\int x^{m+np} (a\, x^{-n} + b)^p \, d\, x$$

moltiplicando e dividendo il primitivo per x^{np}; se n è negativo, $-n$ sarà positivo, e quindi l'integrale dato resta sempre ricondotto ad un altro in cui l'esponente di x dentro parentesi è positivo.

Facciamo ora la seguente trasformazione; poniamo

$$a + b\, x^n = y,$$

donde

$$x = \left(\frac{y - a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$dx = \frac{1}{nb}\left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dy$$

e quindi l'integrale diventa

$$\frac{1}{nb}\int\left(\frac{y-a}{1}\right)^{\frac{m}{n}} y^p \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}$$

$$= \frac{1}{nb}\int y^p \left(\frac{y-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} \qquad \text{(I)}$$

Se invece di prender le mosse dalla forma data dell' integrale binomio, prendiamo le mosse dall'altra forma equivalente

$$\int x^{m+np}(a\,x^{-n} + b)^p\, dx$$

ponendo $a\,x^{-n} + b = y$, abbiamo invece

$$-\frac{1}{na}\int y^p \left(\frac{y-b}{a}\right)^{-\frac{m+1}{n}-p-1} \qquad \text{(II)}$$

Ora se $\dfrac{m+1}{n}$ è un numero intero, allora la I si può subito ridurre ad una funzione razionale ponendo $y = z^\mu$ dove μ sia il denominatore del numero p. E così analogamente se $\dfrac{m+1}{n} + p$ è un *numero intero* la II potrà colla medesima *sostituzione ridursi* ad una funzione razionale.

Abbiamo dunque: ***esistono due casi in cui l'integrale binomio può immediatamente ridursi ad un integrale razionale, e questi due casi sono:***

1.° Quando $\frac{m+1}{n}$ *è un numero intero;*

2.° Quando $\frac{m+1}{n}+p$ *è un numero intero.*

Quando non sono verificati questi casi allora si possono adoperare delle formole di riduzione colle quali l'integrale binomio dato resta espresso mediante altri in cui gli esponenti m, n, p sono diversi.

Tali formole di riduzione si ottengono applicando il metodo dell'integrazione per parti. Così ponendo

$$u = (a + b\,x^n)^p$$

$$\frac{d\,v}{d\,x} = x^m$$

donde

$$v = \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

$$\frac{d\,u}{d\,x} = b\,p\,n\,(a + b\,x^n)^{p-1}\,x^{n-1}$$

si ha la formola

$$\int x^m (a + b\,x^n)^p\,d\,x = \frac{x^{m+1}(a + b\,x^n)^p}{m+1} -$$

$$- \frac{b\,p\,n}{m+1}\int x^{m+n}(a + b\,x^n)^{p-1}\,d\,x. \quad (1)$$

colla quale l'integrale binomio corrispondente agli esponenti m, n, p, resta espresso mediante quello cogli esponenti $m+n$, $n, p-1$.

Se ora poniamo

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \int x^m (a+bx^n)(a+bx^n)^{p-1}\,dx$$

$$= a\int x^m (a+bx^n)^{p-1}\,dx + b\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}\,dx$$

e eliminiamo colla formola precedente quest'ultimo integrale otteniamo

$$\int x^m (a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1+pn} - $$

$$+ \frac{apn}{m+1+pn}\int x^m (a+bx^n)^{p-1}\,dx \qquad (B)$$

colla quale formola il solo esponente che resta cangiato, e propriamente resta diminuito di una unità, è l'esponente della parentesi.

Combinando così fra loro in vari modi questi artifizii potrebbero trovarsi quante formole di riduzione si voglia. È inutile del resto stabilirle qui, sia perchè non offrono nessuna difficoltà teorica, sia perchè è più conveniente adoperare quelli artifizii caso per caso, e, adattarli alla natura particolare dell'integrale che si sta considerando.

Molte volte è più conveniente applicare le formole di riduzione che si ottengono cogli artifizii indicati, anzichè servirsi, anche che si verifichi, del criterio *dell'integrabilità* di cui abbiamo parlato *sopra.*

Quando con nessuna formola di riduzione possiamo ridurci ad un integrale noto, allora non resterà che adoperare la integrazione per serie, sviluppando in serie la potenza p^ma^ di $(a + b x^n)$.

Come esempio si potrebbe scegliere il calcolo dell'integrale

$$\int \frac{x^m\, dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (m = \text{intero})$$

che può scriversi

$$\int x^m (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$$

e quindi è un integrale binomio, dove $a = 1$, $b = -1$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$.

È facile vedere che esso rientra nei casi elementari d'integrabilità.

Infatti se m è pari allora

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{m+1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$$

è un numero intero, e se invece m è dispari allora

$$\frac{m+1}{n} = \frac{m+2}{n}$$

è un numero intero.

§ 5. **Integrazione delle funzioni trascendenti.** — In questo paragrafo studieremo alcuni speciali tipi di funzioni trascendenti e faremo vedere come si possono integrare.

1.° Si abbia una funzione del tipo

$$f(e^x)$$

essendo f *il* simbolo di una funzione razionale.

Ponendo

$$e^x = y$$
$$e^x\, d\,x = d\,y$$
$$d\,x = \frac{d\,y}{y}$$

l'integrale della funzione data si riduce a quello di una funzione razionale di y.

2.° Consideriamo ora gli integrali del tipo

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, d\,x$$

Ponendo

$$\operatorname{sen} x = t$$

si ha da integrare

$$\int t^m (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, d\,t$$

e quindi ci riduciamo ad un integrale binomio.

Però possiamo procedere diversamente.

Operiamo il metodo d' integrazione per parti prendendo:

$$u = \cos^{n-1} x \quad , \quad \frac{d\,v}{dx} = \operatorname{sen}^m x \cos x$$

e si ha:

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\, d\,x = \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} +$$
$$+ \frac{n-1}{m+1} \int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x\, \mathrm{d}\,x$$

e facendo una trasformazione analoga a que adoperata per gli integrali binomii, cioè ı nendo

$$\int \operatorname{sen}^{m+2} x \cos^{n-2} x \, d\, x =$$

$$= \int \operatorname{sen}^{m} x \,(1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x \, d\, x$$

$$= \int \operatorname{sen}^{m} x \cos^{n-2} x \, d\, x - \int \operatorname{sen}^{m} x \cos^{n} x \, d$$

e sostituendo e risolvendo rispetto a:

$$\int \operatorname{sen}^{m} x \cos^{n} x \, d\, x$$

si ha infine

$$\int \operatorname{sen}^{m} x \cos^{n} x \, d\, x =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \operatorname{sen}^{m} x \cos^{n-2} x \, d$$

3.° Si abbia inoltre da calcolare

$$\int e^{ax} \cos b\, x \, d\, x \quad , \quad \int e^{ax} \operatorname{sen} b\, x \, d\, x.$$

Operando la integrazione per parti si ha:

$$\int e^{ax} \cos b\, x \, d\, x = \frac{e^{ax} \cos b\, x}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \operatorname{sen} b\, x$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} b\, x \, d\, x = \frac{e^{ax} \operatorname{sen} b\, x}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos b\, x$$

donde

$$\int e^{ax} \cos b\,x\,d\,x = \frac{a \cos b\,x + b \operatorname{sen} b\,x}{a^2+b^2} e^{ax} + C$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} b\,x\,d\,x = \frac{a \operatorname{sen} b\,x - b \cos b\,x}{a^2+b^2} e^{ax} + C.$$

4.° Si abbia infine da calcolare l'integrale corrispondente ad una funzione del tipo

$$f(\operatorname{sen} x,\ \cos x)$$

essendo f il simbolo di una funzione razionale.

Ponendo

$$\operatorname{tang} \frac{x}{2} = t$$

si ha:

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tang} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{2\,t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{d\,x}{d\,t} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Onde con questa sostituzione la funzione da integrarsi diventa una funzione razionale di t e quindi si integra coi metodi noti.

Così p. es., determiniamo

$$\int \frac{dx}{a \operatorname{sen} x + b \cos x}.$$

Si ha, operando la trasformazione precedente:

$$2\int \frac{dt}{2at + b(1-t^2)} = 2b\int \frac{dt}{(a^2+b^2)-(bt-a)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[\int \frac{b\,dt}{\sqrt{a^2+b^2}+(bt-a)} + \right.$$

$$\left. + \int \frac{b\,dt}{\sqrt{a^2+b^2}-(bt-a)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \frac{\sqrt{a^2+b^2}+(bt-a)}{\sqrt{a^2+b^2}-(bt-a)} + C.$$

e sostituendo poi per t il suo valore in x si ha la formola finale.

§ 6. **Calcolo di integrali definiti. Integrali Euleriani.** — Nei paragrafi precedenti abbiamo studiato vari speciali tipi di funzioni coll'intento di calcolarne gli integrali *indefiniti* corrispondenti.

Può però accadere alcune volte che pur non potendosi calcolare l'integrale indefinito, si possa invece calcolare l'integrale definito fra limiti assegnati, e che per l'uso che noi ne dobbiamo fare non ci occorra effettivamente altro che proprio l'integrale definito.

Perciò noi dedichiamo questo paragrafo all'esposizione di artifizi e di metodi per la ricerca di integrali definiti.

Nei paragrafi 7, 8 del Cap. I abbiamo già notato che un metodo abbastanza fecondo per la ricerca di integrali definiti è la derivazione e l'integrazione sotto il segno.

Diamo qualche esempio di questo metodo.

Da

$$\int_0^1 x^{a-1}\,d\,x = \left[\frac{x^a}{a}\right]_0^1 = \frac{1}{a} \qquad (a > 0)$$

colla derivazione rispetto al parametro a otteniamo

$$\int_0^1 x^{a-1}\log x\,d\,x = -\frac{1}{a^2}$$

$$\int_0^1 a^{a-1}(\log x)^2\,d\,x = \frac{1\,.\,2}{a^3}$$

. . . .

$$\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^n\,d\,x = (-1)^n\,\frac{1\,.\,2\ldots n}{a^{n+1}}$$

Invece coll'integrazione rispetto ad a fra due qualunque limiti α, β otteniamo

$$\int_0^1 \frac{x^{\beta-1} - x^{\alpha-1}}{\log x}\,d\,x = \log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Da una formola trovata nel paragrafo precedente ricaviamo

$$\int \operatorname{sen}^n x\,d\,x = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x}{n} + \\ + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} x\,d\,x$$

e limitando l'integrazione fra 0 e $\frac{\pi}{2}$ si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, d\, x = \frac{(n-1)}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{n-2} x\, d\, x$$

e quindi se n è pari si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, d\, x = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 3.1}{n(n-2)\ldots 4.2} \, \frac{\pi}{2}$$

e se n è dispari si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^n x\, d\, x = \frac{(n-1)(n-3)\ldots 4.2}{n(n-2)\ldots 5.3}$$

Ora osserviamo che fra i limiti o e $\frac{\pi}{2}$ il s
è un numero positivo minore di 1, e quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n-1} x\, d\, x > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} x\, d\, x >$$

$$> \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, d\, x$$

cioè

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1} > \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} >$$

$$> \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}$$

donde

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}>\frac{\pi}{2}>$$

$$>\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-3}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}.$$

I due numeri fra i quali è sempre compreso $\frac{\pi}{2}$ differiscono fra loro per il fattore

$$\frac{2n}{2n+1}$$

il quale tende a 1 se $2n$ tende all'infinito.

Dunque possiamo conchiudere che

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

cioè abbiamo l'espressione di $\frac{\pi}{2}$ sotto forma di un prodotto infinito.

Questa formola è la cosiddetta formola di Wallis (1616-1703).

Nella formola trovata sul principio di questo paragrafo

$$\int_0^1 x^{a-1}(\log x)^n\,dx=(-1)^n\frac{1\,.\,2\,.\,.\,.\,n}{a^{n+1}}$$

ponendo

$$x=e^{-y}$$

si ha

$$\log x = -y$$
$$dx = -e^{-y}\,dy$$
$$y = \infty \text{ per } x = o; \; y = o \text{ per } x = 1$$

onde

$$\int_o^1 x^{a-1} (\log x)^n \, dx = + \int_o^\infty e^{-ay} (-y)^n \, dy$$

da cui

$$\int_o^\infty e^{-ay} y^n \, dy = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

Per $a = 1$ si ha dunque

$$\int_o^\infty e^{-y} y^n \, dy = n!$$

Questa formola sussiste per n intero positivo; perchè pel modo con cui abbiamo ricavato questa formola, il numero n in esso contenuto, rappresenta il numero di volte che si è fatta la derivazione rispetto ad una certa variabile.

Lo studio del valore di questo integrale definito nel caso in cui n non è più un numero intero positivo, costituisce lo studio del cosiddetto ***integrale Euleriano di 2.ª specie.*** Si adopera la seguente notazione

$$\int_o^\infty x^{a-1} e^{-x} \, dx = \Gamma(a).$$

Si introduce così nel calcolo lo studio della cosiddetta *funzione gamma di Eulero.* Questa funzione *gamma* gode di molte proprietà singolari. Si trova che essa può svilupparsi in un prodotto infinito, cioè

$$\Gamma(a) = \prod_{m=1}^{m=\infty} \frac{m\left(\frac{m+1}{m}\right)^{a-1}}{(a+m-1)} .$$

Noi non possiamo entrare nei dettagli dello studio di queste funzioni.

CAPITOLO IV.

GLI INTEGRALI MULTIPLI.

§ 1. **Definizione di integrale doppio e multiplo. Condizioni di integrabilità.** — Nel § 8 del Cap. I noi abbiamo accennato per incidente ad una definizione di integrale doppio. Ora passiamo ad una trattazione completa. Daremo prima di tutto una definizione che non è che la estensione diretta di quella data per gli integrali semplici.

Si abbia una funzione di due variabili $f(x, y)$, e sia definita o si voglia considerare solo in una area piana il cui contorno sia una curva chiusa di equazione $\varphi(x, y) = o$. Per ogni punto interno a questa curva la f sia *finita*.

I campi di variabilità di x e y non sono indipendenti l'uno dall'altro; fissato un valore ad y, il campo di variabilità di x resta definito nella seguente maniera: meniamo la retta parallela all'asse x e avente per ordinata la y fissata; questa retta taglierà il contorno dell'area chiusa almeno in due punti, e *il campo di variabilità di* x *per quella* y *fissata si intenderà esteso dal valore dell'ordinata del punto più a sinistra, sino al valore* *dell' ordinata del punto più a destra.* I limiti di variabilità di x sono dunque funzioni del valore di y, o viceversa.

Se si volessero effettivamente trovare queste funzioni, basterebbe risolvere rispetto ad x la equazione $\varphi(xy) = o$ la quale darà in generale almeno due valori di x per ogni valore di y, darà cioè luogo a due funzioni di y, i cui valori per ogni x corrisponderanno ai limiti del campo di variabilità di x.

In particolare, i limiti di variabilità riescono costanti, quando l'area data è un rettangolo coi lati paralleli agli assi coordinati di x e y. Allora per ogni y i limiti di variabilità di x sono sempre i medesimi.

In questo caso noi possiamo dire che la funzione f è definita o si vuol considerare fra limiti *costanti* di variabilità di x e y, per es. da $x = a$ sino ad $x = b$ e da $y = a'$ sino ad $y = b'$.

Dividiamo l'area data in un numero arbitrario di parti, e tale divisione la possiamo fare con *una legge qualunque.*

Per es., per fissare le idee, si può procedere così: Fra tutte le infinite y dei diversi punti dell'area si consideri la minima e la massima, e sieno a', b'; e così sieno a, b, la minima e la massima x. Si disegnino le rette $y = a'$, $y = b'$, $x = a$, $x = b$ le quali formeranno un rettangolo nel cui interno è tutta compresa l'area data. Si divida l'intervallo $a' b'$ in un numero arbitrario di parti, e quello $a\, b$ similmente.

Menando pei punti di divisione delle rette *parallele agli assi, tutto* il rettangolo resterà diviso *in tanti rettangoli* parziali; e tutta l'area resterà anche divisa in tante parti di cui alcune sono rettangolari, e altre (quelle che sono situate prossime al contorno) sono parti di rettangoli. Di questi rettangoli consideriamo solo quelli che sono interamente interni all'area data.

Se $\delta_1\, \delta_2 \ldots,\ \delta_1'\, \delta_2' \ldots,$ sono gli intervalli parziali in cui si sono divisi gli intervalli ab sull'asse di x e $a'\, b'$ sull'asse di y, allora l'area di un rettangolo sarà data dal prodotto $\delta_r\, \delta'_s$.

Consideriamo un punto nell'interno di ciascun rettangolo parziale $(\delta_r\, \delta'_s)$ e in esso calcoliamo il valore della funzione, che chiameremo f_{rs}, e formiamo il sommatorio doppio

$$\sum_{rs} f_{rs}\, \delta_r\, \delta_s$$

il quale avrà un valore *finito* in qualunque modo si è fatta la scelta dei valori di f, e in qualunque modo si è effettuata la divisione.

Facciamo ora, come si fa per la definizione di integrali semplici, tendere a zero gli intervalli δ, δ' mentre il loro numero lo facciamo crescere all'infinito; allora il sommatorio doppio *potrà* tendere ad un limite determinato, che sia lo stesso qualunque sia la scelta dei valori f_{rs} e qualunque sia la maniera colla quale si fanno tendere a zero gli intervalli; se questo accade noi chiameremo quel limite *l'integrale doppio definito della funzione* f *in tutta l'area data*, e lo indicheremo col simbolo

$$\iint f(x\, y)\, d\, x\, d\, y.$$

Come si vede la definizione data è la diretta estensione di quella già data per gli integrali semplici, e si possono poi fare delle considerazioni che sono le medesime di quelle fatte altra volta, e che noi solo accenneremo.

La condizione *necessaria* e *sufficiente* per l'esistenza del limite del sommatorio è che sia zero il limite

$$\lim \Sigma D_{rs}\, \delta_r\, \delta'_s$$

dove con D_{rs} si indica l'*oscillazione* della funzione f nell'area $(\delta_r\, \delta'_s)$.

La dimostrazione di ciò si fa in una maniera perfettamente simile a quella tenuta nel § 1 del Cap. II. Di qui si ricava che sono integrabili:

1. le funzioni continue di due variabili $x\, y$;
2. le funzioni discontinue in un numero *finito* di punti o di linee del piano;
3. le funzioni discontinue in un numero *infinito* di punti o di linee, ma tali però che possano racchiudersi in aree la cui somma può rendersi piccola a piacere.

Per intendere ora meglio la natura dell'integrale doppio definito, e per poter avere un mezzo per calcolarlo, facciamo vedere che relazione c'è fra esso e gli integrali semplici.

Per la costruzione dell'integrale doppio noi dobbiamo fare un sommatorio doppio, nel quale dobbiamo passare al limite per δ_r, δ'_s tendenti a zero, essendo poi arbitraria la maniera colla quale li facciamo tendere a zero.

Ora immaginiamo di effettuare prima il sommatorio rispetto all'indice r e poi quello rispetto all'indice s. Vuol dire che allora noi sommiamo prima tutti i termini $f_{rs}\,\delta_r\,\delta'_s$ provenienti dai rettangoli situati in una striscia orizzontale cioè parallela all'asse di x, (propriamente la striscia s^{ma}), e poi facendo acquistare all'indice s tutti i suoi valori, facciamo la somma di tutti i termini che si ottengono relativi alle varie strisce orizzontali.

La scelta dei valori f_{rs} è anche a nostro arbitrio; ora noi possiamo in particolare scegliere tutti questi valori in punti situati su rette parallele all'asse di x e interne naturalmente alle varie striscie orizzontali. Esaminiamo allora il valore del sommatorio relativo ad una sola striscia orizzontale, per es. la striscia s^{ma}. Sia $y^{(s)}$ l'ordinata della retta interna a tale striscia e sulla quale scegliamo i valori di f_{rs}.

Allora tutti i valori di f che consideriamo saranno quelli della funzione di sola x

$$f\,(x\,y^{(s)})$$

che si ottiene dalla data ponendo $y = y^{(s)}$.

Il sommatorio rispetto all'indice r e relativo alla striscia s^{ma} sarà

$$\delta'_s \sum_r \delta_r\, f\,(x^{(r)}\,y^{(s)})$$

indicando con $x^{(r)}$ l'ascissa di un punto compreso nell'intervallo δ_r. Questo sommatorio deve estendersi fra due limiti che dipendono dall'indice s, cioè dal valore dell'ordinata $y^{(s)}$ della striscia s^{ma}. Secondochè si considera un valore di y piuttosto che un altro, il campo di variabilità di x [illegible] come abbiamo sviluppato sul principio di [illegible] paragrafo. Passando allora al limite solo in quel sommatorio semplice, facendo cioè convergere a zero solo i δ_r, è evidente per la definizione di integrale semplice, che esso si muta in

$$\delta'_s \int f(x\, y^{(s)})\, d\, x$$

dove l'integrazione bisognerà estenderla fra due valori di x, che corrispondono alle ascisse degli estremi della striscia s^{ma}; tali due limiti saranno due funzioni di y che si ricavano dalla equazione del contorno $\varphi\,(x\,y) = o$ risolvendola rispetto ad x e ponendo $y = y^{(s)}$.

Se ora formiamo il sommatorio di tutti i valori già ottenuti, estendendolo alle varie strisce orizzontali, cioè facendo variare l'indice s, otteniamo

$$\Sigma\, \delta'_s \int f(x\, y^{(s)})\, d\, x$$

e passando al limite per i $\delta'_s = o$ si ha

$$\int d\, y \int f\,(x\, y)\, d\, x$$

dove la seconda integrazione rispetto ad y bisogna farla fra limiti costanti che corrisponderebbero alle ordinate della più bassa e della più alta striscia, cioè (essendo le strisce divenute infinitamente sottili) alle ordinate delle due tangenti orizzontali del contorno piano.

Vediamo con ciò che l'integrale doppio corrisponde *alla successione* di due integrali semplici, *di cui il primo è fatto* fra limiti che sono funzioni *di y, e il secondo* fra limiti costanti.

Se l'area d'integrazione data è un rettangolo, coi lati paralleli agli assi coordinati, allora anche la prima integrazione si fa fra limiti costanti.

È così che queste considerazioni si rannodano con quelle del § 8 del Cap. I.

Se la funzione $f(x\,y)$ è *integrabile*, allora è evidente che il suo integrale doppio fra limiti costanti sia rispetto ad x che rispetto ad y, è eguale sia a

$$\int_{a'}^{b'} d\,y \int_{a}^{b} d\,x\, f(x\,y)$$

sia a

$$\int_{a}^{b} d\,x \int_{a'}^{b'} d\,y\, f(x\,y)$$

supposto che le ascisse e le ordinate del rettangolo dentro cui si fa la doppia integrazione sieno rispettivamente a, b; a', b'.

Di qui si ricava che tali due ultime espressioni sono fra loro eguali; cioè come generalizzazione del teorema dell'integrazione sotto il segno (vedi Cap. I § 8) otteniamo che *questa è possibile quando la funzione data è una funzione integrabile di due variabili.*

Le considerazioni fatte per gli integrali doppi si potrebbero estendere senza sostanziali modificazioni agli *integrali tripli*, *quadrupli*, ecc. in generale *multipli*.

Ogni integrale multiplo (la cui definizione sarebbe analoga a quella data sopra per gli integrali doppi) si potrà comporre mediante una successione di integrali semplici. Ci pare completamente inutile insistere su queste idee.

§ 2. L'integrale multiplo come funzione dei limiti; sua definizione nei casi singolari. — Dobbiamo ora per gli integrali doppi fare considerazioni analoghe a quelle del § 3 del Cap. I; dobbiamo cioè esaminare la continuità e la derivabilità di essi considerati come funzioni dei limiti.

Consideriamo l'integrale doppio

$$\int_{a'}^{y}\int_{a}^{x} f(x, y)\, d\, x\, d\, y$$

dove abbiamo voluto indicare con x, y i limiti superiori della doppia integrazione.

Il valore di questo integrale riuscirà una funzione di x e y, che chiameremo $\varphi\,(x\, y)$.

Per esaminare la *continuità* di questa funzione formiamo

$$\varphi\,(x+h, y+k) - \varphi\,(x\, y) = \int_{a'}^{y+k}\int_{a}^{x+h} - \int_{a'}^{y}\int_{a}^{x}$$

che può trasformarsi in

$$\left[\int_{a'}^{y} + \int_{y}^{y+k}\right]\int_{a}^{x+h} - \int_{a'}^{y}\left[\int_{a}^{x+h} - \int_{x}^{x+h}\right] =$$

$$= \int_{y}^{y+k}\int_{a}^{x+h} + \int_{a'}^{y}\int_{x}^{x+h}$$

d *essendo invertibile* la successione delle due integrazioni nel secondo integrale, possiamo scri

$$=\int_y^{y+k}\int_a^{x+h}+\int_x^{x+h}\int_{a'}^{y}.$$

Ora gli integrali da y a $y+k$, e da x a x sono, come si sa, delle quantità tendenti a (v. § 3, Cap. I), quindi l'ultima espressione vata, potendo considerarsi come somma di du tegrali semplici di due diverse funzioni, estesi punto fra i limiti citati, tenderà a zero con tendenti a zero; ciò dimostra la continuità (funzione $\varphi(x\,y)$.

Passiamo ora alle derivate parziali di φ.

Sapendo che l'integrale doppio non è che successione di due integrali semplici, e pot(poi permutare l'ordine delle due integrazioni, può considerarsi sia come un integrale rispetto variabile x, sia come un integrale rispetto alla riabile y. Quindi volendo la derivata parziale spetto ad x, noi considereremo la φ come un tegrale rispetto ad x, e per il noto teorema (derivazione degli integrali ricaviamo che *se*

$$\int_{a'}^{y} f(x\,y)\,d\,x$$

è una funzione continua di x, *allora la deri parziale di* φ *in un punto* x′ *è data da*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'}=\left[\int_{a'}^{y} f(x\,y)\,d\,y\right]_{x=x'}.$$

Se ora noi supponiamo che *la funzione* f(x y) *sia una funzione continua delle due variabili* $x\,y$, allora essendo l'integrale $\int_a^y f(x\,y)\,d\,y$ una funzione continua di x, e quindi essendo il suo valore per $x = x'$ eguale al limite dei suoi valori per x tendente ad x', e inoltre (v. § 7, Cap. I) tal limite essendo eguale all'integrale del limite della funzione, si ha semplicemente:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x'} = \int_{a'}^{y} f(x'\,y)\,d\,y\,.$$

Analogamente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} = \int_{a}^{x} f(x\,y')\,d\,x\,.$$

Al solito la condizione posta per f, che sia continua rispetto al sistema delle due variabili, è una *condizione sufficiente, ma non necessaria.*

Colle condizioni poste sussiste poi ancora per la funzione φ *il teorema della invertibilità delle derivazioni.* Perchè è evidente che dalle formole di sopra si ricava

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y'\,\partial x'} = f(x'\,y')$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'\,\partial y'} = f(x'\,y')$$

e *quindi le due* derivate seconde sono eguali.

Possiamo ora passare a stabilire il concetto di integrale doppio nei soliti due casi singolari già considerati per gli integrali semplici, cioè il caso in cui la funzione diventi infinita in qualche punto o linea del campo d'integrazione, e il caso in cui uno dei limiti d'integrazione è l'infinito.

Il criterio che ci serve per la definizione in questi casi è sempre lo stesso, cioè quello di conservare la proprietà fondamentale della *continuità* dell'integrale. Quindi se la funzione diventa infinita in un punto allora chiameremo integrale doppio della funzione esteso in un campo comprendente quel punto, il limite (supposto che esista e che sia unico) dei valori dell' integrale in campi che escludono quel punto.

Per esempio immaginiamo di circondare quel punto con un cerchietto, e di considerare poi il campo primitivo diminuito di questo cerchietto; facendo diminuire il raggio di questo cerchio, il limite del valore dell'integrale doppio, sarà il richiesto valore dell'integrale definito in tutto il campo.

Ma qui capitano naturalmente tante distinzioni, perchè potrebbe accadere che il limite di cui si parla esiste avvicinandosi colle variabili $x\,y$ al punto singolare solo per certe determinate direzioni, e non per tutte le direzioni, oppure che si ottenga un limite per certe direzioni di avvicinamento e se ne ottenga un altro per certe altre. In tali casi non esisterà propriamente l'integrale esteso *a tutto il campo*; può accadere allora anche che esista e *sia finito* il valore dell' integrale calcolato mediante le due integrazioni semplici, e non esista invec iello dato dalla nostra definizione, e che bisogna nsiderare come valore dell'integrale doppio.

Non possiamo fermarci sui dettagli di queste nsiderazioni.

Se poi il campo d'integrazione si estende all'in- ito allora per integrale doppio intenderemo anche limite dei valori degli integrali definiti in campi e man mano si estendono sino all'infinito, sup- sto che questo limite esista e sia unico qualunque . il modo col quale si fa crescere il campo al- nfinito.

Anche qui potrebbero farsi alcune considerazioni eciali che per brevità tralasciamo.

§ 3. **Trasformazione degli integrali multipli** — biamo già visto a suo tempo (Cap. I § 6) come fa a trasformare un integrale semplice; se cioè ha l'integrale:

$$\int R\, d\, x$$

ve R è una funzione di x, e si vuol trasformare un altro integrale colla variabile indipendente y gata ad x da una qualunque relazione, allora sognerà moltiplicare la funzione sotto il segno r la derivata dell'antica variabile rispetto alla iova.

Vogliamo fare lo stesso nel caso degli integrali ultipli. Si abbia cioè un integrale multiplo:

$$\int\int \ldots \int R\,(x_1\, x_2 \ldots x_n)\, d\, x_1\, d\, x_2 \ldots d\, x_n$$

i voglia trasformare in un integrale colle variabili indipendenti non più $x_1\, x_2 \ldots x_n$, ma $y_1\, y_2 \ldots y_n$ legate alle x da n date relazioni.

Si abbiano le formole che esprimono le x mediante le y, cioè

$$\begin{array}{l} x_1 = x_1\,(y_1\, y_2 \ldots y_n) \\ x_2 = x_2\,(y_1\, y_2 \ldots y_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = x_n\,(y_1\, y_2 \ldots y_n) \end{array} \tag{1}$$

Nella seconda di esse sostituiamo in luogo di y_1 il valore ricavato dalla prima equazione, e allora x_2 resterà espresso mediante $x_1\, y_2 \ldots y_n$; poi nella terza poniamo in luogo di $y_1\, y_2$ i valori ricavati dalle due prime equazioni; e allora x_3 resterà espresso mediante $x_1\, x_2\, y_3 \ldots y_n$, e così continuiamo, sino a che in tal maniera esprimeremo x_n mediante $x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, y_n$.

Si hanno cioè le seguenti formole:

$$\begin{array}{l} x_1 = f_1\,(y_1\, y_2 \ldots y_n) \\ x_2 = f_2\,(x_1\, y_2\, y_3 \ldots y_n) \\ x_3 = f_3\,(x_1\, x_2\, y_3 \ldots y_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n = f_n\,(x_1\, x_2 \ldots x_{n-1}\, y_n) \end{array} \tag{2}$$

Cominciamo ora nell'integrale multiplo a fare l'integrazione rispetto a x_n, e mediante l'ultima di queste relazioni introdurremo la variabile y_n in luogo della variabile x_n, considerando tutte le altre *variabili* per un momento come costanti; allora nostro integrale diventa

$$\int R \frac{\partial f_n}{\partial y_n} d x_1\, d x_2 \ldots d x_{n-1}\, d y_n$$

Possiamo ora analogamente, mediante la penultima delle formole precedenti, introdurre la variabile y_{n-1} in luogo della variabile x_{n-1}, e l'integrale allora diventa:

$$\int R \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial f_n}{\partial y_n} d x_1\, d x_2 \ldots d y_{n-1}\, d y_n$$

e così seguitando, si ha infine che il nostro integrale si trasforma in:

$$\int R \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial y_{n-1}} \frac{\partial f_n}{\partial y_n} d y_1\, d y_2 \ldots d x_n$$

e così otteniamo l'integrale trasformato nelle variabili y.

Per eseguire questa trasformazione occorre conoscere le funzioni $f_1 f_2 \ldots f_n$, le quali non sono propriamente quelle che esprimono le antiche variabili mediante le nuove, e che sono direttamente date, ma si ricavano da esse con eliminazioni opportune di variabili nel modo indicato. Però naturalmente si presenta ora la questione di operare la trasformazione dell'integrale facendo a meno della formazione delle funzioni f, ma operando direttamente sulle funzioni colle quali le x si esprimono mediante le y.

Consideriamo il *determinante funzionale* o *jacobiano delle x* rispetto alle y, cioè il determinante formato colle derivate prime delle x rispetto alle y

(vedi *Calcolo differenziale*, Cap. V § 2).

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial x}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

Ora si può subito dimostrare che il prodotto

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial y_n}$$

pel quale, come abbiam visto, si dovea moltiplicare la funzione che sta sotto il segno di integrale, per avere l'integrale trasformato, non è altro che tale *determinante funzionale*; e quindi allora possiamo stabilire il risultato, *che per avere l'integrale trasformato basta moltiplicare la funzione sotto il segno, per l'jacobiano delle antiche variabili considerate come funzioni delle nuove.*

Cominciamo infatti a stabilire la seguente formola riguardo alle derivate delle x:

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial f_i}{\partial y_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_j} + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}}\frac{\partial x_{i-1}}{\partial y_j}$$

dove nel primo membro s'intende la derivata di x_i rispetto ad y_i ricavata dalle formole esplicite, (1) e nel secondo membro le derivate della f, s'intendono ricavate dalle formole (2).

Se l'indice j è inferiore ad i allora il primo ternine del secondo membro è zero; poichè la prima lelle (2) è la stessa della prima delle (1), così le lerivate di x_1 sono esattamente eguali alle derivate di f_1.

Ora dalla teoria del prodotto di due determinanti, tenendo presente la formola precedente messa otto la forma

$$-\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_j}-\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_j}-\dots-$$

$$-\frac{\partial f_i}{\partial x_{i-1}}\frac{\partial x_{i-1}}{\partial y_j}+\frac{\partial x_i}{\partial y_j}=\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$$

i ricava senz'altro la eguaglianza:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \dots \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \dots \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \dots \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} +1 & 0\dots0 \\ -\frac{\partial f_n}{\partial x_2}+ & 1\dots0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots \\ -\frac{\partial f_n}{\partial x_1}-\frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots+1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & 0 & 0 \dots 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_2} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots\dots \\ \dots & \dots & \dots\dots \\ \frac{\partial f_1}{\partial y_n} & \frac{\partial f_2}{\partial y_n} & \dots \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial y_n}.$$

Ma il secondo determinante del primo membro è uguale a 1, dunque il prodotto

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial y_n}$$

è uguale al determinante funzionale, come si voleva dimostrare.

Resta così completata la teoria della trasformazione di un integrale multiplo. Occorre appena notare che pel caso di $n = 1$, cioè pel caso di un integrale semplice, la formola di trasformazione ora data coincide con quella già nota per gli integrali semplici.

Facciamo un'applicazione di queste formole. Si abbia l'integrale doppio

$$\int\int f(x\,y)\,d\,x\,d\,y$$

e si vogliano trasformare le variabili $x\,y$ in altre due variabili ρ, φ, mediante le formole che danno la trasformazione di coordinate *cartesiane* in coordinate *polari*, cioè

$$x = \rho \cos \varphi$$
$$y = \rho \operatorname{sen} \varphi.$$

Il determinante funzionale è

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \operatorname{sen} \varphi \\ -\rho \operatorname{sen} \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \rho\,(\cos^2 \varphi + \operatorname{sen}^2 \varphi) = \rho.$$

L'integrale trasformato è dunque

$$\int\int f(\rho \cos \varphi, \ \rho \operatorname{sen} \varphi)\, \rho\, d\rho\, d\varphi.$$

§ 4. **Proprietà degli integrali doppi. — Teorema di Green.** — Noi sappiamo che per le funzioni continue $f(x)$ la ricerca dell'integrale semplice indefinito si riduce a quella di un'altra funzione $F(x)$ la cui derivata sia $f(x)$, e trovata poi tale funzione, la ricerca del valore di un qualunque integrale definito in un intervallo si fa formando *la differenza fra i valori di* F (x) *nei due estremi dell'intervallo, per modo che il valore dell'integrale definito non verrà a dipendere che dai valori di* F (x) *nei due estremi dell'intervallo e non dai valori di* F (x) *negli altri punti dell'intervallo stesso.*

Vediamo ora che cosa c'è di analogo a questo per il caso degli integrali doppi.

Si abbia l'integrale doppio

$$\int\int f(x\,y)\, dx\, dy$$

esteso a tutta un'area piana, il cui contorno abbia per equazione $\varphi(x\,y) = o$. Per fissare le idee supponiamo che questo cortorno sia formato di una curva della forma di un ovale, per modo cioè che ogni retta lo incontri al più in *due* punti. Facendo la prima integrazione indefinita rispetto ad x abbiamo una funzione di x e y, nella quale dobbiamo porre per limiti le due funzioni di y che si ricaverebbero da $\varphi(x\,y) = o$ risolvendo questa equazione rispetto ad x. Sieno $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$

queste due funzioni e propriamente per ogni valore di y, la *prima* dia il valore dell'ascissa del punto *più a sinistra*, e la *seconda* dia il valore dell'ascissa del punto *più a destra*; e sia $F(xy)$ l'integrale indefinito ottenuto facendo l'integrazione rispetto ad x, per modo che

$$\frac{\partial F(xy)}{\partial x} = f(xy).$$

Bisognerà allora integrare rispetto ad y la espressione

$$F(\varphi_2(y), y) - F(\varphi_1(y), y).$$

Questa integrazione bisogna estenderla fra due limiti che sono rispettivamente le ordinate del punto più basso della curva e del punto più alto, cioè di quei due punti in cui le tangenti sono parallele all'asse di x. Sieno $y_1\, y_2$ rispettivamente queste ordinate; noi allora dobbiamo calcolare

$$\int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_2(y), y)\, dy - \int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_1(y), y)\, dy$$

cioè, scambiando i limiti nel secondo integrale,

$$\int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_2(y), dy + \int_{y_2}^{y_1} F(\varphi_1(y), y)\, dy.$$

Ora la somma di questi due integrali può interpretarsi nel seguente modo.

Consideriamo l'integrale

$$\int F(xy)\, dy$$

dove in luogo di x si debba intendere messo il valore ricavato dalla equazione $\varphi(x\,y) = o$, e immaginiamo che questo integrale si debba estendere a tutte le coppie di valori di $x\,y$ soddisfacenti quella equazione, cioè *si debba estendere a tutto il contorno dell'area data.* Spezziamo in due parti quest' integrale; partiamo dal punto più basso della curva cioè da quello di ordinata y_1 e percorrendo il lato *destro* della curva (cioè quello i cui punti hanno le loro ascisse date dalla funzione $\varphi_2(y)$) andiamo sino al punto più alto la cui ordinata è y_2; ciò facendo veniamo a calcolare l'integrale

$$\int_{y_1}^{y_2} F(\varphi_2(y),\ y)\, d\, y.$$

Poi proseguiamo il cammino da y_2 sino ad y_1 ma percorrendo il lato *sinistro* della curva (cioè quello i cui punti hanno le loro ascisse date dalla funzione $\varphi_1(y)$).

Si ha così l'integrale

$$\int_{y_2}^{y_1} F(\varphi_1(y),\ y)\, d\, y.$$

La somma di questi due integrali sarà l'integrale esteso a tutto il contorno dell'area. Risulta anche senza indeterminazione la direzione colla quale si deve percorrere il contorno detto. Noi siamo partiti dal punto *più basso* e abbiamo per*corso la parte destra* del contorno, e poi abbiamo *seguitato nello* stesso senso. Dunque il contorno *bisogna percorrerlo in modo che l'area resti sempre a sinistra.*

Possiamo dunque scrivere la formola

$$\int\int f(x\,y)\,d\,x\,d\,y = \int F(x\,y)\,d\,y$$

dove nel primo membro si intende l'integrale doppio esteso all'area data, e nel secondo membro s'intende l'integrale semplice esteso al contorno dell'area. Si ha così *la trasformazione di un integrale doppio, in un integrale semplice, e il valore dell'integrale doppio dipendente solo dai valori che la funzione* F (x y) *ha sul contorno dell'area e non nei punti interni all'area stessa.* Si ha così la perfetta generalizzazione della proprietà già citata sul principio di questo paragrafo. In ciò consiste *la formola di Green* che può porsi poi anche sotto altre forme.

Nello stesso modo con cui abbiamo ottenuto la formola precedente, assumendo la x per prima variabile d'integrazione, così scambiando le due variabili si ha analogamente

$$\int\int f(x\,y)\,dx\,d\,y = -\int F'(x\,y)\,d\,y$$

dove gli integrali hanno gli analoghi significati come sopra, e inoltre

$$\frac{\partial\,F'(x\,y)}{\partial\,y} = f(x\,y).$$

Il segno negativo del secondo membro si ottiene volendo sempre immaginare che il contorno sia percorso nello stesso senso di prima.

Le due formole possono anche scriversi

$$\int\int\frac{\partial F}{\partial x}\,d\,x\,d\,y=\int F\,d\,y$$

$$\int\int\frac{\partial F'}{\partial y}\,d\,x\,d\,y=-\int F'\,d\,x$$

dove le due funzioni $F\,F'$ sono legate dalla relazione

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F'}{\partial y}=f.$$

Del resto queste due formole sono fra loro indipendenti, e le due funzioni $F\,F'$ potrebbero anche non essere legate da quella relazione.

In tal caso si ha la formola (sottraendo le due formole di sopra)

$$\int\int\left(\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial F'}{\partial y}\right)d\,x\,d\,y=\int(F\,d\,y+F'\,d\,x)$$

intendendo per $F\,F'$ due funzioni qualunque, fra loro indipendenti, di $x\,y$. Sotto questa forma può porsi *la formola di Green*.

Se in particolare F F′ *sono due tali funzioni che per tutti i punti dell'area data soddisfanno alla relazione*

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F'}{\partial y},$$

il primo membro della formola superiore è zero e *quindi si ha*

$$\int (F\,d\,y + F'\,d\,x) = 0$$

cioè l'integrale di $F\,d\,y + F'\,d\,x$ *esteso a tutto il contorno dell'area è identicamente zero.*

Da questo teorema ne possiamo ricavare un altro. Consideriamo due qualunque punti dell'area o del contorno, e sieno rispettivamente di coordinate $x_0\,y_0$, $x\,y$. Disegniamo una linea tutta compresa nell'area e che vada dal primo punto al secondo. Se noi disegniamo poi un'altra simile linea che torni dal secondo punto al primo, è naturale che, poichè per tutto il nuovo contorno che così si è formato e per l'area che vi è racchiusa, valgono le condizioni di sopra, si avrà che l'integrale

$$\int (F\,d\,y + F'\,d\,x)$$

esteso a questo nuovo contorno deve essere zero, e quindi l'integrale esteso da $(x_0\,y_0)$ a $(x\,y)$ lungo la prima linea sarà eguale a quello che va dagli stessi limiti ma lungo la seconda linea; il che significa che *per qualunque linea compresa nell'area, si giunga al punto* $(x\,y)$ *si ha sempre lo stesso valore per l'integrale.* Fissato dunque un limite inferiore, l'integrale potrà definire una funzione di un punto qualunque appartenente all'area.

Si può dimostrare che questa funzione ha per *derivate* parziali rispetto ad x e y rispettivamente le funzioni F' F date, e quindi ha per differenziale totale la espressione

$$F' \, dx + F \, dy.$$

Resta così risoluto il problema: *Date due funzioni* F F' *tali che*

$$\frac{\partial F'}{\partial x} = \frac{\partial F''}{\partial y}$$

trovare la funzione le cui derivate parziali sieno eguali alle funzioni date.

Questo problema si chiama il problema dell'integrazione del differenziale totale, e noi avremo occasione di tornarci.

CAPITOLO V.

INTEGRAZIONE DEI DIFFERENZIALI TOTALI.

Abbiamo visto che se $f(x)$ è una funzione continua, allora il calcolo dell'integrale indefinito

$$\int f(x)\, d\, x$$

si riduce a calcolare un'altra funzione $\varphi(x)$ la cui derivata sia proprio $f(x)$, o, ciò che è lo stesso, il cui differenziale sia $f(x)\, d\, x$.

Quindi se $f(x)$ è continua il problema di trovare una funzione il cui differenziale sia $f(x)\, dx$ si riduce al calcolo dell'integrale indefinito corrispondente alla funzione f.

Vogliamo estendere questo problema al caso di un numero qualunque di variabili.

Se abbiamo una funzione $\varphi(x_1\, y_2 \ldots)$ di un numero qualunque di variabili, sappiamo che il differenziale totale è:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \ldots$$

Ora ci proponiamo il problema inverso. Data una espressione di questo tipo, e sia:

$$X_1\, d\, x_1 + X_2\, d\, x_2 + \ldots + X_n\, d\, x_n \qquad (1)$$

dove le X sieno funzioni continue e finite di tutte le variabili $x_1\, x_2 \ldots x_n$, come si trova una funzione φ di tutte queste variabili tale che il suo differenziale totale coincida con quello dato? Ed esiste sempre una tale funzione?

In un problema di questo genere siamo anche capitati per incidente alla fine del capitolo precedente.

Noi troveremo che non è sempre possibile trovare una tale funzione φ, ma perchè essa esista, le funzioni date X debbono soddisfare a certe relazioni.

Incominciamo prima di tutto col supporre che le X sieno finite e continue, e lo siano anche le loro derivate rispetto a tutte le variabili. Inoltre se esiste $\varphi\,(x_1\, x_2 \ldots x_n)$ il cui differenziale totale

$$\frac{\partial\, \varphi}{\partial\, x_1}\, d\, x_1 + \frac{\partial\, \varphi}{\partial\, x_2}\, d\, x_2 + \ldots + \frac{\partial\, \varphi}{\partial\, x_n}\, d\, x_n$$

debba coincidere con (1) è necessario che

$$\frac{\partial\, \varphi}{\partial\, x_1} = X_1\ ,\ \frac{\partial\, \varphi}{\partial\, x_2} = X_2\, , \ldots ,\ \frac{\partial\, \varphi}{\partial\, x_n} = X_n$$

e considerando p. es., solo le prime due di queste formole, e derivando la prima rispetto ad x_2 e la seconda rispetto ad x_1 si ha:

$$\frac{\partial^2\, \varphi}{\partial\, x_2\, \partial\, x_1} = \frac{\partial\, X_1}{\partial\, x_2}\ ,\quad \frac{\partial^2\, \varphi}{\partial\, x_1\, \partial\, x_2} = \frac{\partial\, X_2}{\partial\, x_1} \qquad (3)$$

Ora avendo supposto che le X sieno finite insieme colle loro derivate prime, si ha in virtù delle (2) e (3) che sono finite e continue le derivate di 1.° e 2.° ordine di φ, e quindi sono soddisfatte le condizioni perchè le derivazioni rispetto alle due variabili $x_1\, x_2$ sieno invertibili, cioè perchè sia (v. *Calcolo diff.*, Cap. II, § 7)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2\, \partial x_1} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2}$$

onde possiamo dire che sarà anche:

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_2} = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}.$$

È chiaro che gli stessi ragionamenti possono farsi prendendo a considerare due altre qualunque delle X. Onde accanto a questa condizione se ne hanno tante altre tutte dello stesso tipo, combinando le X a due a due in tutti i modi possibili; cioè si hanno in tutto $\frac{n\,(n-1)}{2}$ relazioni.

Possono esprimersi colla formola generale:

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_s} = \frac{\partial X_s}{\partial x_r} \tag{4}$$

dove r, s prendono tutti i valori da *1* sino ad n.

Dobbiamo ora passare a dimostrare che tali condizioni sono anche sufficienti; cioè che se esse si verificano, allora esisterà sempre la funzione φ.

Infatti consideriamo per un momento come costanti le $x_2 \ldots x_n$ e calcoliamo:

$$\int X_1\, d\, x_1$$

il quale esisterà sempre perchè X_1 è continua. Sia L_1 l'integrale indefinito. Noi possiamo aggiungervi una costante arbitraria rispetto alla variabile x_1, epperò tale costante potrà essere una funzione delle altre variabili. Allora l'integrale sarà rappresentato da:

$$\varphi = L_1(x_1 x_2 \ldots x_n) + \psi_1(x_2 x_3 \ldots x_n)$$

e resta a vedere se si può determinare la ψ_1 in modo che φ sia il richiesto integrale del differenziale totale.

Ora il differenziale totale di φ è:

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1} d x_1 + \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right) d x_2 + \ldots + \\ + \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}\right) d x_n .$$

Se questo differenziale deve coincidere col dato (1) è necessario che la loro differenza sia zero, e osservando che

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1} = X_1 ,$$

si ha che deve essere:

$$\left(X_2 - \frac{\partial L_1}{\partial x_2}\right) d x_2 + \ldots + \left(X_n - \frac{\partial L_1}{\partial x_n}\right) d x_n = \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} d x_2 + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_3} d x_3 + \ldots + \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} d x_n$$

cioè ***la funzione*** ψ_1 delle sole variabili $x_2 \ldots x_n$

deve essere determinata in modo che il suo differenziale totale sia:

$$\left(X_2 - \frac{\partial L_1}{\partial x_2}\right) d\,x_2 + \ldots + \left(X_n - \frac{\partial L_1}{\partial x_n}\right) d\,x_n \quad (5)$$

Siccome ψ_1 non contiene la variabile x_1, così è chiaro in primo luogo che in questa espressione non deve comparire più la variabile x_1. Inoltre debbono senz'altro verificarsi per questo nuovo differenziale totale le condizioni da noi già riconosciute *necessarie* per l'integrabilità.

Ora è facile dimostrare che in (5) non vi comparisce che solo apparentemente la variabile x_1. Infatti facciamo la derivata rispetto ad x_1 di uno dei coefficienti:

$$X_r - \frac{\partial L_1}{\partial x_r}.$$

Si ha, derivando:

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial L_1}{\partial x_r} \quad (6)$$

cioè:

$$\frac{\partial X_r}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_r} \frac{\partial L_1}{\partial x_1} = \frac{\partial X_r}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_r}$$

che è zero in virtù delle condizioni a cui supponiamo che soddisfino le X.

Dimostriamo ora che in (5) sono soddisfatte le *condizioni* di integrabilità.

Si ha in forza delle condizioni poste:

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(X_s - \frac{\partial L_1}{\partial x_s}\right) = \frac{\partial X_s}{\partial x_r} - \frac{\partial}{\partial x_r}\frac{\partial L_1}{\partial x_s} =$$

$$= \frac{\partial X_r}{\partial x_s} - \frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial L_1}{\partial x_r} = \frac{\partial}{\partial x_s}\left(X_r - \frac{\partial L_1}{\partial x_r}\right)$$

e con ciò è dimostrata anche la seconda parte del nostro assunto.

Allora sul differenziale (5) possiamo riapplicare daccapo il metodo già adoperato e così troviamo che ψ_1 sarà eguale ad una funzione

$$L_2(x_2 \ldots x_n)$$

più una costante rispetto a x_2 che potremo porre eguale a $\psi_2(x_3 \ldots x_n)$.

Così seguitando ci riduciamo ad un differenziale contenente una sola variabile x_n, e che è quindi sempre integrabile.

Si avrà infine:

$$\varphi = L_1 + L_2 + \ldots + L_n + \text{costante}$$

dove la costante ora lo è nel senso assoluto, cioè costante rispetto a tutte le variabili.

Si vede adunque che senza servirci di altre condizioni che di quelle poste nella formola (4) possiamo giungere alla ricerca di φ. Con ciò le (4) sono anche condizioni ***sufficienti.***

Come esempio prendiamo a considerare.

$$\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \left(2y - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy\,.$$

È facile vedere che la condizione d'integrabi è soddisfatta.

Infatti

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2y-\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Per effettuare l'integrazione calcoliamo:

$$\int\frac{y}{x^2+y^2}\,dx=\text{arco tang}\,\frac{x}{y}+\psi_1(y).$$

Formando ora l'espressione:

$$\left(2y-\frac{y}{x^2+y^2}\right)-\frac{d}{dy}\,\text{arc tg}\,\frac{x}{y}=$$

$$=\left(2y-\frac{x}{x^2+y^2}\right)+\frac{x}{y^2}\,\frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}=2y$$

e integrando si ha:

$$\int 2y\,dy=y^2$$

onde infine l'integrale è:

$$\text{arco tang}\,\frac{x}{y}+y^2+\text{costante}.$$

CAPITOLO VI.

GEOMETRIA INTEGRALE.

§ 1. **Area delle curve piane.** — Sia data una curva piana di equazione:

$$y = f(x)$$

e consideriamo due punti AB di essa, di ascisse α, β.

La porzione del piano compresa fra la curva, l'asse di x e le due ordinate estreme dei punti A, B, la chiamiamo l'*area della curva*.

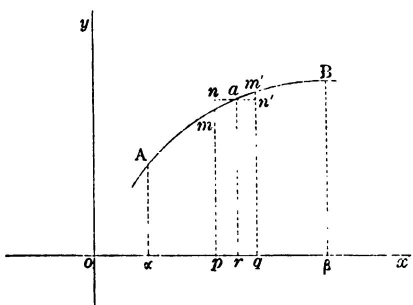

Fig. 1.

È necessario però fissare con più precisione la *definizione di area*. Perciò dividiamo l'intervallo

$\alpha\beta$ in intervalli parziali δ_r, e per ogni punto di divisione meniamo l'ordinata corrispondente.

Uno di tali intervalli sia pq di ampiezza δ_r e le ordinate corrispondenti incontrino la curva nei punti m, m'.

Scegliamo un punto qualunque a sulla curva, compreso fra m e m' e da esso meniamo la $n\,n'$ parallela ad x e formiamo il rettangolo $n\,n'\,p\,q$ la cui misura è $n\,p\,.\,p\,q$ cioè $f(x)\,\delta_r$ cioè il prodotto di δ_r per il valore che la funzione f ha nel punto a.

Facciamo la somma di tutti i prodotti analoghi e poi facciamo tendere a zero gli intervalli δ_r. Allora per la definizione di integrale definito si ha che il limite di tale somma (se esiste) non è che l'integrale definito da α a β della funzione $f(x)$.

Ora $f(x)$ è l'ordinata della curva data, e *noi supporremo che essa sia continua o al più abbia un numero finito di punti di discontinuità.* Ricordando allora che per una funzione continua o avente un numero finito di discontinuità l'integrale definito esiste sempre, si ha che

$$\lim \Sigma f(x)\,\delta_r$$

cioè

$$\lim \Sigma\,(n\,n'\,p\,q)$$

esiste ed è determinato.

Tale limite lo chiamiamo l'*area della curva.*

In questa maniera veniamo anche a vedere come il calcolo integrale ci dà un mezzo per calcolare l'area; basta cioè calcolare l'integrale definito:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

o anche:

$$\int_{\alpha}^{\beta} y\, d\, x$$

essendo:

$$y = f\,(x)$$

Se lasciamo indeterminato il limite superiore $\beta = x$ e lasciamo fisso il limite inferiore, il che equivale a lasciar fissa la prima ordinata estrema, e a far variare l'altra, allora per ogni posizione di quest'altra ordinata si ha un valore dell'area, cioè l'area u può considerarsi funzione di x.

$$u = \varphi\,(x) = \int_{\alpha}^{x} f\,(x)\, d\, x = \int_{\alpha}^{x} y\, d\, y.$$

Essendo la f una funzione continua, noi sappiamo che la derivata della funzione integrale è precisamente la funzione sotto il segno, onde possiamo conchiudere che *la derivata dell'area rispetto ad* x *non è altro che il valore dell'ordinata della curva.*

Per questa analogia che c'è fra il calcolo delle curve piane e gli integrali semplici delle funzioni continue, tali integrali si chiamano anche *quadrature*, giacchè si suol dire *quadrare una curvatura piana* il calcolare la sua area.

Passiamo ad alcuni esempi:

1.° Si abbia una iperbole equilaterale la cui equazione riferita a' suoi assintoti è, come è noto,

$$x\, y = m^2$$

essendo m^2 una costante.

Vogliamo calcolare l'area $A\ B\ \alpha\ \beta$ che avrà per equazione:

$$u = \int_\alpha^\beta y\,d\,x = m^2 \int_\alpha^\beta \frac{d\,x}{x}$$

Essendo

$$\int \frac{d\,x}{x} = \log x$$

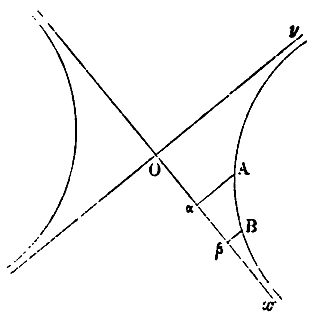

Fig. 2.

si ha

$$u = m^2 (\log \beta - \log \alpha) = m^2 \log \frac{\beta}{\alpha}.$$

Ora supponiamo in particolare che la costante m^2 sia *1*, e che A sia il vertice dell'iperbole. Allora α (ascissa del punto A) sarà *1*, perchè nel vertice dovendo essere x, y uguali, e dovendo essere *uguale* ad *1* il loro prodotto, ciascuno di essi sarà *1*.

Onde resta:

$$u = \log \beta$$

cioè *l'area è misurata dal logaritmo neperiano dell'ascissa* $O\,\beta$.

Per questa ragione i logaritmi neperiani si chiamano anche *iperbolici*.

2.° Si abbia il cerchio:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

e si voglia calcolare l'area $S\,O\,P\,Q$.

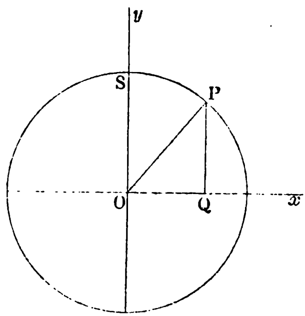

Fig 3.

Dobbiamo calcolare:

$$\int y\,d\,x = \int \sqrt{r^2 - x^2}\,d\,x$$

dove i limiti sono da $x = 0$ sino ad $x = O\,Q$ che lascieremo indeterminato, cioè scriveremo:

$$\int^x \sqrt{r^2 - x^2}\,d\,x\,.$$

Calcoleremo prima l'integrale indefinito, e poi ponendo in esso una volta per x il valore x e poi per x il valore zero e sottraendo i due risultati avremo l'integrale definito.

Per calcolare l'integrale indefinito usiamo prima la formola d'integrazione per parti e abbiamo

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, d\, x = x \sqrt{r^2 - x^2} + \int \frac{x^2\, d\, x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (1)$$

E inoltre:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, d\, x = \int \frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, d\, x =$$

$$= r^2 \int \frac{d\, x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - \int \frac{x^2\, d\, x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (2)$$

e sommando (1) con (2) si ha:

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\, d\, x = \frac{1}{2}\, x\, \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{x} \text{ arc sen } \frac{x}{r}$$

Poichè per $x = 0$ il secondo membro è zero, così questo risultato rappresenta esattamente anche l'integrale definito da 0 a x.

Si osservi che poichè il triangolo $O\,P\,Q$ ha proprio per misura

$$\frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2}$$

così si ha che l'area del settore circolare $O\,P\,S$ è data da:

$$\frac{r^2}{2} \text{ arco sen } \frac{x}{r}.$$

3.° Si voglia ora calcolare l'area di una curva di equazione:

$$y^n = p\,x^m$$

dove n, m sono due numeri razionali qualunque.

Le curve rappresentate da queste equazioni sono dette in generale *parabole*.

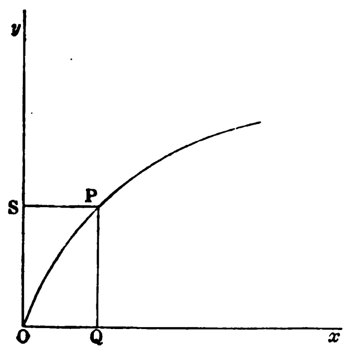

Fig. 4.

Calcoliamo $O\,P\,Q$. Si ha:

$$\int_0^x y\,d\,x = p^{\frac{1}{n}} \int_0^x x^{\frac{m}{n}}\,d\,x = \frac{n}{m+n}\,p^{\frac{1}{n}}\,x^{\frac{m}{n}+1} =$$

$$= \frac{n}{m+n}\,x\,y$$

cioè ricaviamo il risultato, che l'area parabolica $O\,P\,Q$ sta all'area del rettangolo $O\,S\,P\,Q = x\,y$ come n sta ad $m+n$.

Quindi se dal rettangolo togliamo l'area parabolica abbiamo

$$\left(1 - \frac{n}{m+n}\right) x\, y = \frac{m}{m+n} x\, y$$

$$O\,S\,P = \frac{m}{m+n} x\, y$$

e quindi

$$\frac{O\,P\,Q}{O\,S\,P} = \frac{n}{m}$$

cioè la parabola divide il rettangolo $O\,S\,P\,Q$ nel rapporto di n a m.

Nel caso della parabola conica $n = 2$, $m = 1$. si torna ad un teorema noto di Geometria analitica.

4.° Consideriamo ora le curve di equazione:

$$x^m\, y^n = p$$

Tali curve si chiamano *iperboli*, e hanno come caso particolare l'iperbole equilaterale ordinaria quando cioè $n = m = 1$.

Supponiamo $n > m$.

Allora si ha:

$$\int_0^x y\, d\, y = p^{\frac{1}{n}} \int_0^x x^{-\frac{m}{n}} = \frac{n}{n-m} p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}+1} =$$

$$= \frac{n}{n-m} x\, y$$

Di qui si ricava intanto che l'area compresa fra *l'asse di y* e l'ordinata P Q sebbene si estend fino all'infinito perchè la curva incontra l'asse di y all'infinito, (l'asse di y è un assintoto della curva) pure tale area ha una ampiezza finita.

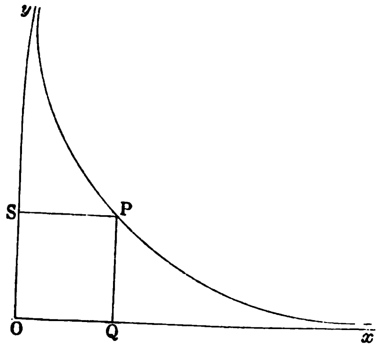

Fig. 5.

Inoltre togliendo da tale area quella del rettangolo $x\,y$ si ha:

$$\text{area}\,(S\,P\,\infty) = \left(\frac{n}{n-m} - 1\right) x\,y = \frac{m}{n-m}\,x\,y$$

e quindi

$$\frac{O\,Q\,P\,\infty}{S\,P\,\infty} = \frac{n}{m}$$

cioè anche qui si ha un teorema analogo a quello del caso precedente.

5.° *Si voglia* ora l'area dell'ellisse:

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2.$$

Si deve calcolare

$$\int_0^x y\,d\,x = \frac{b}{a}\int \sqrt{a^2 - x^2}\,d\,x.$$

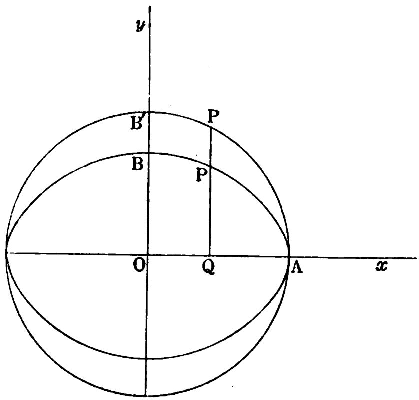

Fig. 6.

Ora l' area corrispondente al cerchio di raggio $OA = a$ cioè l'area $O\,B'\,P'\,Q$ non è altro che:

$$\int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}\,d\,x$$

dunque

$$\frac{O\,B\,P\,Q}{O\,B'\,P'\,Q} = \frac{b}{a}\,.$$

Quindi per trovare l'area del quarto dell'ellisse *non* c'è che da trovare l'area del quarto di cerchio che è $\frac{1}{4}\,\pi\,a^2$ e moltiplicarla per $\frac{b}{a}$, il che ci dà $\frac{1}{4}\,\pi\,a\,b$. Onde l'ellisse ha per area

$$\pi\,a\,b.$$

6.° Passiamo ora a studiare una curva assai interessante che gode di proprietà assai notevoli, la cosiddetta *cicloide*.

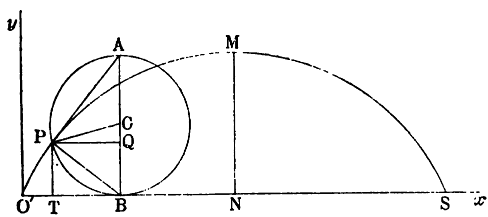

Fig. 7.

Ecco la generazione meccanica di questa curva: Immaginiamo un cerchio che rotola su di una retta fissa.

Uno de' suoi punti P comincia coll' essere il punto di contatto del cerchio colla retta, poi si eleva, e descriverà una curva come $O\,P\,M\,S$, e poi se il cerchio continua a rotolare, descriverà un altro ramo simile, e così all'infinito.

Vogliamo prima di tutto trovare le coordinate di un punto qualunque P della cicloide.

Scegliamo per asse di x la retta su cui rotola cerchio e per asse di y la retta perpendicolare passante pel vertice O della cicloide.

Consideriamo la posizione del cerchio corrispondente al punto P.

Congiungiamo P con C e chiamiamo θ l'angolo al centro $P C Q$. Allora:

$$x = O T = O B - T B = O B - P Q.$$

Ora evidentemente la lunghezza rettilinea $O B$ è quanto l'arco circolare $P B$, cioè è uguale a $r \theta$, e inoltre $P Q = r \operatorname{sen} \theta$, chiamando r il raggio del cerchio, onde

$$x = r\,(\theta - \operatorname{sen} \theta)$$

Inoltre

$$y = P T = C B - C Q = r - r \cos \theta$$

cioè

$$y = r\,(1 - \cos \theta)$$

Se fra queste due relazioni si eliminasse θ si avrebbe l'equazione della cicloide.

Vogliamo ora prima di tutto dimostrare una proprietà fondamentale della tangente alla cicloide.

Se meniamo il diametro verticale $A B$, e congiungiamo P col punto più alto A, o col punto più basso B; abbiamo rispettivamente la tangente o la normale alla cicloide nel punto P.

Per questo basta far vedere che l'angolo che $P A$ forma con x è lo stesso dell'angolo che la tangente deve formare con x.

Essendo evidentemente $\frac{1}{2} \theta$ l'angolo $P A C$ si ha in primo luogo che l'angolo di $P A$ con x è il complemento di $\frac{1}{2} \theta$.

D'altra parte la tangente dell'angolo che la tangente geometrica in P fa con x, è data da $\frac{dy}{dx}$.

Poichè nel nostro caso x, y sono espresse in funzione del parametro θ, per calcolare $\frac{dy}{dx}$, calcoliamo il rapporto delle derivate:

$$\frac{dy}{d\theta} \quad , \quad \frac{dx}{d\theta}.$$

Ora

$$\frac{dy}{d\theta} = r \operatorname{sen} \theta = 2r \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta \cos\frac{1}{2}\theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) = 2r \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta$$

onde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos\frac{1}{2}\theta}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta} = \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}}$$

cioè l'angolo della tangente con x è proprio il complemento di $\frac{1}{2}\theta$, e quindi la tangente geometrica coincide con la retta PA. Si ricava allora anche che PB è normale.

Passiamo ora a calcolare l'*area della cicloide*.

Perciò facciamo un mistamento di assi trasporandoli parallelamente a se stessi in Bx, By.

Allora la nuova x sarà uguale all' antic
minuita di $O A = \pi r$, e la nuova y sarà
a $2r$ diminuito dell'antica y, cioè si ha:

$$x = r(\theta - \operatorname{sen}\theta) - \pi r$$

$$y = 2r - 2r \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta$$

$$= 2r \cos^2 \frac{1}{2}\theta$$

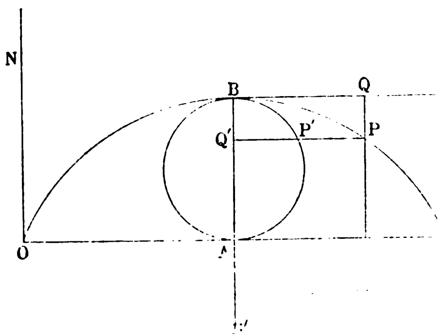

Fig. 8.

da cui

$$\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta) = 2r \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -2r \operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta \cos\frac{1}{2}\theta$$

onde

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{d\theta}}{\frac{dy}{d\theta}} = -\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta}{\cos\frac{1}{2}\theta} = -\frac{\sqrt{2r-y}}{\sqrt{y}}.$$

L'area BPQ è data da

$$BPQ = \int_0^x y\,dx.$$

Se costruissimo per y e dx i loro valori prendendo per variabile indipendente θ, allora si avrebbe da integrare una funzione trascendente; invece possiamo far vedere che si ha da integrare una funzione algebrica purchè si prenda per variabile indipendente la y.

Allora la funzione da integrare è

$$y\frac{dx}{dy}$$

cioè si ha (poichè per $x = 0$ si ha anche $y = 0$):

$$BPQ = -\int_0^y \sqrt{2ry - y^2}\,dy.$$

Ora se volessimo calcolare l'area $BQ'P'$ racchiusa dal cerchio generatore della cicloide si otterrebbe esattamente la stessa formola, quindi possiamo concludere che

$$BP'Q' = BQP$$

Onde tutta l'area BAM sarà uguale al rettangolo di BA e AM diminuito dell' area del semicerchio $BP'A$ cioè

$$BAM = 2r^2\pi - \frac{1}{2}r^2\pi = \frac{3}{2}r^2\pi$$

e quindi tutta l' area della cicloide è $3\pi r^2$, cioè tre volte l'area del cerchio generatore.

§ 2. **Arco di curva piana.** — Immaginiamo una curva continua e la cui tangente fra i punti A, B si muova con continuità o anche abbia un numero

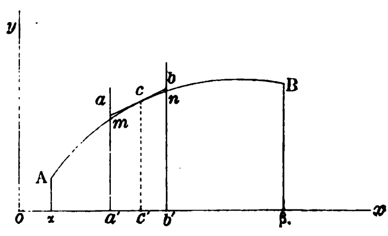

Fig. 9.

finito di punti di discontinuità. Allora chiameremo *arco* della curva fra i punti A, B, la lunghezza di un filo flessibile che si adagi esattamente lungo la curva e termini nei due punti A, B.

Occorre però dare una definizione più esatta dell'arco di curva.

Immaginiamo l'intervallo da α a β diviso in tanti intervalli parziali δ_r e sia $a'\,b'$ uno di tali intervalli.

Meniamo dai punti di divisione le diverse ordinate, cioè le parallele all'asse di y. Queste incontreranno la curva in altrettanti punti come m, n. Scegliamo sulla curva un punto intermedio fra i due punti m, n e sia c e meniamo in esso la tangente alla curva, e limitiamola fra le due ordinate.

Ripetendo questa operazione per tutti gli intervalli δ_r, e facendo la somma di tutti i tratti rettilinei come $a\,b$, il limite di tal somma, quando gli intervalli δ_r tendono a zero e il loro numero cresce all'infinito, lo chiameremo l'*arco della curva fra* A *e* B.

Dobbiamo far vedere che, per le condizioni poste riguardo alla natura della tangente della curva, il limite, di cui si parla, effettivamente esiste.

Prima di tutto cerchiamo di trovare la espressione analitica dell'arco.

Il lato $a\,b$ è uguale alla sua proiezione $a'\,b'$ divisa per il coseno dell'angolo che $a\,b$ fa coll'asse x, cioè:

$$a\,b = \frac{a'\,b'}{\cos\theta}$$

Ora

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta}}$$

onde:

$$a\,b = a'\,b'\sqrt{1+\mathrm{tang}^2\theta}.$$

Essendo la retta $a\,b$ tangente alla curva nel punto c, si ha

$$\mathrm{tang}\,\theta = \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)_c$$

intendendo con $\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)_c$ la derivata calcolata p
punto c, che è un punto di ascissa intermedia fr
i due punti a, b.

Ponendo poi $a'\,b' = \delta_r$ si ha che la definizion
dell'arco è espressa dalla formola:

$$s = \lim \Sigma \sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}\,\delta_r$$

Dove la somma bisogna estenderla a tutti g
intervalli δ_r da α a β, e il valore della funzio

$$\sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}$$

bisogna prenderlo ogni volta per un certo pun
la cui ascissa è compresa nell'intervallo δ_r.

Si vede dunque che s resta definito precisamen
mediante l'integrale corrispondente alla funzion

$$\sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}$$

cioè

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}\,d\,x.$$

Poichè per ipotesi la tangente della curva s
muove anche con continuità o al più ha un nu
mero finito di discontinuità, così la funzione

$$\sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}$$

sarà una funzione continua di x o al più con un numero finito di discontinuità, e quindi s è l' integrale di una funzione continua o generalmente continua, e perciò *esisterà sempre.*

Considerando fissa l'ascissa α e variabile l'altra ascissa β, e ponendo x per β, si ha che l'arco s è una funzione di x e la sua derivata rispetto ad x è:

$$\frac{d\,s}{d\,x} = \sqrt{1 \quad \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}$$

donde:

$$d\,s^2 = d\,x^2 + d\,y^2$$

Resta così risoluto il problema del calcolo dell'*arco* di una curva. Questo problema si suol chiamare quello della *rettificazione delle curve*, come il problema dell'area si suol chiamare il problema delle *quadrature.*

Immaginiamo un arco e la sua corda rettilinea. Lasciando fisso uno degli estremi A e facendo avvicinare l'altro estremo ad A, l'arco e la corda diminuiscono indefinitamente. Si può dimostrare che il limite del loro rapporto è l'unità, proprietà di cui già ci siamo serviti nel calcolo differenziale.

Infatti si può dimostrare che la corda contata dal punto fisso A considerata come funzione dell'ascissa ha la stessa derivata di s nel punto A:

Poichè chiamando $\Delta\,x$, $\Delta\,y$ le differenze fra le coordinate corrispondenti dei due estremi della corda si ha:

$$c = \sqrt{\Delta\,x^2 + \Delta\,y^2} = \sqrt{1 \quad \left(\frac{\Delta\,y}{\Delta\,x}\right)^2}\;\Delta\,x$$

donde:

$$\frac{c}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

e facendo convergere Δx a zero tenderanno a zero anche Δy e c, e $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{c}{\Delta x}$ tenderanno ai valori delle derivate delle funzioni y e c rispetto ad x dunque la derivata di c rispetto ad x è:

$$\frac{dc}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

e quindi

$$\frac{ds}{dc} = \frac{\frac{ds}{dx}}{\frac{dc}{dx}} = 1.$$

La formola data sopra per il differenziale dell'arco di una curva piana vale nel caso delle coordinate rettangolari. Nel caso delle coordinate oblique formanti fra loro l'angolo φ si può trovare una formola analoga.

Infatti col medesimo procedimento possiamo trovare che allora la derivata di s rispetto ad x è:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx}\cos\varphi}$$

e quindi:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2\,dx\,dy\cos\varphi}.$$

Passiamo al caso delle coordinate polari.

Siano ρ, θ le coordinate polari di M. Noi possiamo ricavare la formola per il differenziale dell' arco trasformando in coordinate polari quella ottenuta avanti in coordinate rettangolari.

Le coordinate x, y si esprimono mediante ρ, θ colle formole:

$$x = \rho\cos\theta \quad , \quad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$$

donde:

$$dx = -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta + \cos\theta\,d\rho$$
$$dy = \rho\cos\theta\,d\theta + \mathrm{sen}\,\theta\,d\rho$$

e quadrando e sommando

$$dx^2 + dy^2 = \rho^2\,d\theta^2 + d\rho^2$$

onde

$$ds = \sqrt{\rho^2\,d\theta^2 + d\rho^2}.$$

Mediante il differenziale ds possiamo esprimere in modo assai semplice i coseni e seni di direzione della tangente alla curva.

Infatti se θ è l'angolo che la tangente fa coll'asse x, si ha:

$$\mathrm{tang}\,\theta = \frac{dy}{dx}$$

onde

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dy}{ds}$$

$$\cos\theta = \frac{dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{dx}{ds}.$$

Abbiamo detto avanti che l'arco può considerarsi come una funzione dell'ascissa x. Viceversa dato l'arco (contato da una origine fissa) è determinato il punto della curva che è l'altro estremo dell'arco, e quindi sono unicamente determinate le x,y. Onde le due coordinate x,y possono considerarsi come funzioni dell'arco s che potrà dunque assumersi come variabile indipendente.

Allora l'equazione della curva potrà sempre immaginarsi sotto la forma:

$$x = \varphi(s)$$
$$y = \psi(s)$$

salvo poi a determinare nei singoli casi la forma esplicita delle due funzioni φ, ψ.

Dalle formole superiori risulta allora che le derivate di x, y rispetto ad s non sono altro che i coseni e i seni di direzione della tangente alla curva.

Dalla formola:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

prendendo s per variabile indipendente e differen*ziando* un'altra volta, e osservando che il secondo differenziale di s deve ritenersi zero, si ha la formola:

$$0 = \frac{dx}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}$$

che sussiste quando x, y si considerano funzioni della variabile indipendente s.

Passiamo a qualche esempio:

1.° Vogliamo trovare l'espressione dell'arco di cerchio di raggio r.

L'equazione del cerchio sia:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Allora

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

onde

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}} = \frac{1}{y}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{r}{y} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Integrando si ha:

$$s = r \text{ arco cos } \frac{x}{r} + C$$

Se vogliamo cominciare a contare l'arco dal punto ($y = 0$, $x = r$) cioè dall'estremo a destra del cerchio, allora si ha che per $x = r$ la s deve essere zero, e quindi $C = 0$, onde resta solo

$$s = r \text{ arco cos } \frac{x}{r}$$

che è la nota espressione dell'arco di cerchio.

2.° Si voglia calcolare l'arco della spirale
garitmica la cui equazione in coordinate polari

$$\rho = e^{\theta}$$

Si ha

$$d\rho = e^{\theta}\, d\theta$$

onde:

$$ds = \sqrt{e^{2\theta}\, d\theta^2 + e^{2\theta}\, d\theta^2} = \sqrt{2}\, e^{\theta}\, d\theta$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{2}\, e^{\theta}$$

Integrando si ha:

$$s = \sqrt{2}\, e^{\theta} + C = \sqrt{2}\, \rho + C.$$

Per determinare C osserviamo che volendo cominciare a contare l'arco s dal punto corrisp dente a $\rho = 1$ e $\theta = 0$ (cioè per tali valori di θ ponendo $s = 0$), la costante C acquista il val $-\sqrt{2}$, onde infine:

$$s = \sqrt{2}\,(\rho - 1) = \sqrt{2}\,(e^{\theta} - 1).$$

3.° Si voglia rettificare la parabola di eq zione:

$$y^2 = 2\, p\, x$$

Si ha

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{p}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}$$

onde

$$s = \int \sqrt{1 + \frac{p}{2\,x}}\, d\,x$$

Ora ci conviene trasformare questo integrale in modo che la variabile indipendente sia y. Si ha:

$$s = \frac{1}{p} \int \sqrt{y^2 + p^2}\, d\,y$$

e volendo cominciare a calcolare gli archi dal vertice della parabola dobbiamo estendere l'integrazione da $y = 0$ sino ad y.

Per calcolare questo integrale facciamo prima l'integrazione per parti e abbiamo:

$$s = \frac{1}{p}\, y \sqrt{y^2 + p^2} - \frac{1}{p} \int \frac{y^2\, d\,y}{\sqrt{y^2 + p^2}}.$$

Ma d'altra parte

$$s = \frac{1}{p} \int \sqrt{y^2 + p^2}\, d\,y = p \int \frac{d\,y}{\sqrt{y^2 + p^2}} + \frac{1}{p} \int \frac{y^2\, d\,y}{\sqrt{y^2 + p^2}}$$

onde infine si ha

$$s = \frac{1}{2\,p}\, y \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p}{2} \int \frac{d\,y}{\sqrt{y^2 + p^2}}.$$

Resta quindi a calcolare quest'ultimo integrale. Ora nel Cap. III, § 4 abbiamo in generale calcolato l'integrale:

$$\int \frac{d\,y}{\sqrt{a + 2\,b\,y + c\,y^2}}$$

di cui il nostro non è che un caso particolare, onde applicando la formola trovata si ha:

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y^2+p^2}} = \log\left(y+\sqrt{y^2+p^2}\right) - \log p$$

come del resto è facile verificare.

L'arco della parabola risulta così dato da

$$s = \frac{y\sqrt{y^2+p^2}}{2p} + \frac{p}{2}\log\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}.$$

4.° Si voglia calcolare la lunghezza dell'arco dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Le coordinate di un punto dell' ellisse si possono esprimere in funzione di un parametro nel seguente modo:

$$x = a \operatorname{sen}\varphi$$
$$y = b\cos\varphi$$

da cui

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\ ,\quad \frac{dx}{d\varphi} = a\cos\varphi$$

e quindi prendendo per variabile indipendente φ:

$$s = \int\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}\ d\varphi =$$

$$= a\int\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\operatorname{sen}^2\varphi}\ d\varphi$$

e in quanto ai limiti dell'integrale noi porremo i limiti da $x = 0$ sino a x qualunque, ciò che dà rispetto a φ i limiti da $\varphi = 0$ sino a φ qualunque.

Ora qualunque artificio potessimo usare per calcolare questo integrale si può mostrare che non possiamo mai riuscirci coi mezzi ordinari, cioè tale integrale non è esprimibile sotto forma finita mediante le ordinarie funzioni che conosciamo, le razionali e le irrazionali algebriche, le logaritmiche, le trigonometriche e le esponenziali.

A tali integrali noi abbiamo accennato nel Capitolo III, § 4. Essi sono chiamati integrali ellittici appunto perchè, come si vede, servono alla rettificazione dell'ellisse.

Per il calcolo di essi si potrà ricorrere all'integrazione per serie. Vedi perciò il § 2 del Capitolo III.

5.° Si voglia la lunghezza dell'arco della cicloide.

Assumiamo gli stessi assi coordinati che nel paragrafo precedente. Abbiamo trovato che

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sqrt{2r - y}}{\sqrt{y}}$$

onde prendendo y per variabile indipendente si ha:

$$s = \int_0^y \sqrt{1 + \frac{2r - y}{y}}\, dy = \int_0^y \sqrt{\frac{2r}{y}}\, dy$$

onde

$$s = 2\sqrt{2r}\sqrt{y}\,.$$

Dunque la lunghezza dell'arco $B\,P$ (ved. fig. nel § 1) è uguale al doppio della retta $B\,P'$ la cui lunghezza è esattamente $\sqrt{2\,r\,y}$.

Per $y = 2\,r$ si ha $s = 4\,r$, che la lunghezza della mezza cicloide, esprimerà.

§ 3. **Arco di una curva storta.** — Immaginiamo il segmento di curva storta $A\,B$, a tangente continua. Le ascisse dei punti estremi sieno α, β, e dividiamo il segmento rettilineo $\alpha\,\beta$ in un certo numero di segmenti parziali, come $a''\,b'' = \delta_r$.

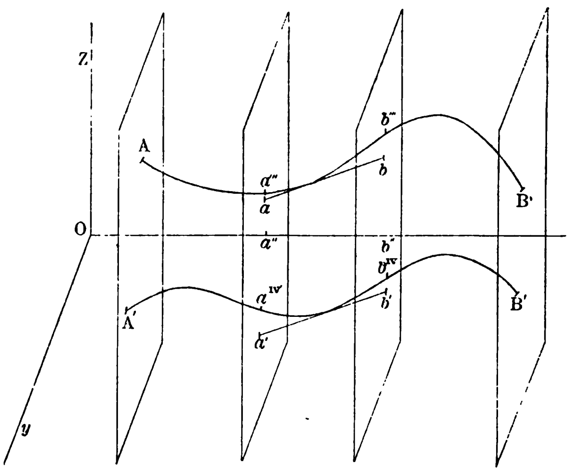

Fig. 10.

Per questi punti di divisione meniamo i piani perpendicolari all'asse x come aa'', bb'', ... Questi piani taglieranno la curva in punti a''', b''', ... *intermedi* fra i punti $A\,B$.

Meniamo la tangente alla curva in un punto c intermedio fra $a''' b'''$, e arrestiamo questa tangente fra i due piani paralleli; abbiamo così il segmento rettilineo $a\,b$. Operando nello stesso modo per tutte le altre zone, si ha un assieme di segmenti come $a\,b$, ed evidentemente tali segmenti tendono a zero quando i segmenti $a''\,b'' = \delta_r$ tendono a zero.

Ora il limite della somma di tutti i segmenti come $a\,b$, quando gli intervalli δ_r tendono a zero mentre il loro numero aumenta indefinitamente, è ciò che diciamo *arco di curva fra* A *e* B. Dobbiamo far vedere che tale limite esiste, e ciò lo otteniamo al solito mostrando che esso è esprimibile mediante un integrale di una funzione continua, o generalmente continua.

Troviamo l'espressione di $a\,b$.

Chiamiamo ξ, η, ζ gli angoli che la tangente $a\,b$ fa con gli assi coordinati; evidentemente

$$a\,b = \frac{\delta_r}{\cos \xi}\,.$$

Ma

$$\cos^2 \xi + \cos^2 \eta + \cos^2 \zeta = 1$$

donde

$$\frac{1}{\cos \xi} = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \zeta}{\cos^2 \xi} + \frac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \xi}}$$

dunque

$$a\,b = \delta_r \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \xi} + \frac{\cos^2 \zeta}{\cos^2 \xi}}\,.$$

Ora possiamo mostrare che

$$\frac{\cos\eta}{\cos\xi}\ ,\qquad \frac{\cos\zeta}{\cos\xi}$$

si esprimono mediante le derivate di y e z rispetto ad x.

Infatti sul piano $x\,y$ la curva storta si proietta in una curva piana $A'\,B'$, e la tangente $a\,b$ si proietta nella tangente $a'\,b'$ alla curva piana.

Chiamando δ_r, ε_r le proiezioni di $a\,b$ sugli assi x e y, si ha che δ_r, ε_r sono anche le proiezioni di $a'\,b'$ sugli stessi assi.

Si hanno quindi le formole:

$$\cos\xi = \frac{\delta_r}{a\,b}$$

$$\cos\eta = \frac{\varepsilon_r}{a\,b}$$

e chiamando ξ', η' gli angoli di $a'\,b'$ cogli assi $x\,y$ si hanno analogamente le altre due:

$$\cos\xi' = \frac{\delta_r}{a'\,b'}$$

$$\cos\eta' = \frac{\varepsilon_r}{a'\,b'}$$

donde

$$\frac{\cos\eta'}{\cos\xi'} = \frac{\varepsilon_r}{\delta_r} = \frac{\cos\eta}{\cos\xi}\,.$$

Ma $\dfrac{\cos\eta'}{\cos\xi'}$, essendo gli assi di x e y ortogonali, è la tangente dell'angolo ξ' che $a'\,b'$ fa con x, la qual tangente è anche espressa da $\frac{d\,y}{d\,x}$ (essendo $a'\,b'$ tangente alla curva piaua). dunque:

$$\frac{\cos\eta}{\cos\xi}=\frac{d\,y}{d\,x}$$

intendendo che questa derivata bisogna naturalmente calcolarla pel punto di contatto di $a\,b$.

Analogamente si può trovare che

$$\frac{\cos\zeta}{\cos\xi}=\frac{d\,z}{d\,x}$$

dunque

$$a\,b=\delta_r\sqrt{1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2+\left(\frac{d\,z}{d\,x}\right)^2}$$

e quindi, chiamando s l'arco $A\,B$, si ha per definizione:

$$s=\lim\sum_{\alpha}^{\beta}\delta_r\sqrt{1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2+\left(\frac{d\,z}{d\,x}\right)^2}.$$

Questa formola ci dice che s si esprime mediante un integrale, e propriamente

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{1+\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2+\left(\frac{d\,z}{d\,x}\right)^2}\,d\,x.$$

Avendo supposto che il segmento di curva AB abbia la tangente continua o generalmente continua si ha che $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ che dipendono appunto dalla direzione della tangente, sono funzioni continue, o generalmente continue e quindi l'integrale *s esiste sempre.*

Inoltre la derivata di s rispetto ad x (supposto il limite superiore β variabile, e posto x in luogo di β) sarà in generale proprio la funzione sotto il segno di integrale, cioè

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

donde ricaviamo pel differenziale di s la formola:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Anche qui si potrebbe dimostrare, come nel caso delle curve piane, che il limite del rapporto della corda all'arco tende ad *1.*

Ci è utile fare un'altra osservazione.

Noi abbiamo trovato avanti che:

$$\frac{1}{\cos \xi} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

essendo ξ l'angolo che la tangente alla curva fa con l'asse di x.

Di qui si ha:

$$\cos \xi = \frac{dx}{ds}.$$

Analogamente

$$\cos \eta = \frac{d\,y}{d\,s}$$

$$\cos \zeta = \frac{d\,z}{d\,s}\,.$$

Mediante dunque il differenziale $d\,s$ noi possiamo esprimere i coseni di direzione della tangente: ciò è analogo al caso delle curve piane.

Passiamo ad un esempio:

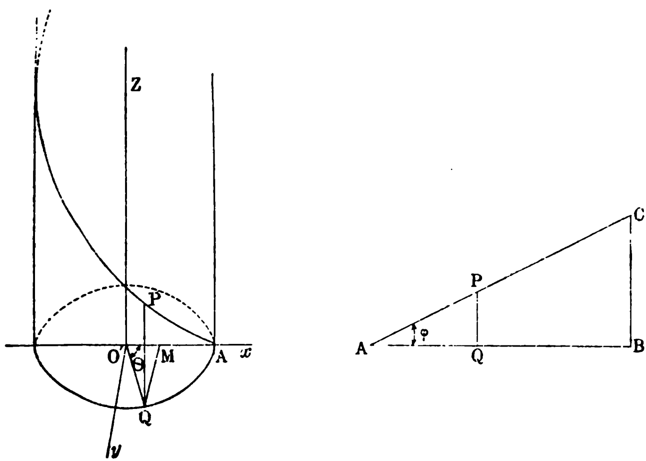

Fig. 11.

Immaginiamo un triangolo rettangolo $A\,B\,C$ e un cilindro retto a base circolare, e avvolgiamo il *foglio del triangolo* attorno al cilindro in modo che la base venga a coincidere con la circonferenza della base del cilindro. Allora l'ipotenusa AC segnerà sulla superficie del cilindro una curva storta che si chiama *elica*.

Troviamo le coordinate di un punto P dell'elica. Scegliamo per assi di x, y due rette sul piano della base, fra loro perpendicolari e passanti pel punto O, e per asse z l'asse del cilindro.

Le coordinate di P saranno

$$x = OM \quad y = MQ \quad z = QP$$

Evidentemente spiegando il cilindro, il triangolo curvilineo AQP diventa il triangolo rettangolo AQP coll'angolo costante φ; cioè:

$$PQ = \text{arco } AQ \text{ tang } \varphi = r \,.\, \theta \,.\, \text{tang } \varphi$$

E inoltre

$$MQ = r \text{ sen } \theta \quad , \quad OM = r \cos \theta$$

chiamando r il raggio del cerchio base.

Così sono trovate le coordinate di un punto dell'elica, cioè:

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \text{ sen } \theta$$
$$z = \text{tang } \varphi \,.\, r \,.\, \theta$$

Di qui si ha che

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = -\frac{\text{tang}\,\varphi}{\text{sen}\,\theta}$$

e quindi:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\text{sen}\,\theta}\sqrt{\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta + \text{tang}^2\,\varphi} = \frac{1}{\text{sen}\,\theta}\sqrt{1 + \text{tang}^2\,\varphi}.$$

Onde essendo

$$s = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, \frac{dx}{d\theta}\, d\theta$$

si ha:

$$s = -\int_\alpha^\beta r\sqrt{1 + \text{tang}^2\,\varphi}\, d\theta = -r\theta\sqrt{1 + \text{tg}^2\,\varphi} + \text{Cost.}$$

Ora volendo cominciare a contare gli archi s dal punto A, si ha che $s = 0$ per $\theta = 0$ e quindi

$$\text{Cost.} = 0$$

e resta quindi

$$s = -r\,\theta\sqrt{1 + \text{tang}^2\,\varphi}$$

Ed essendo

$$\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$r\,\theta = A\,Q$$

si vede che, a meno del segno

$$s = \frac{A\,Q}{\cos \varphi}$$

come risulterebbe immediatamente dalla considerazione del triangolo rettangolo $A\,P\,Q$, essendo s non altro che la lunghezza dell'ipotenusa $A\,P$.

§ 4. **Area delle superficie.** — Immaginiamo una superficie di equazione $z = \varphi\,(x\,y)$ e limitata da una linea chiusa ad un sol contorno l la quale si proietti sul piano $x\,y$ in una linea chiusa ad un sol ramo.

Vogliamo definire che cosa s' intende per area della superficie limitata dalla linea chiusa. Supporremo che la porzione di superficie sia tale che una retta parallela a z non la incontri che in un punto solo.

Facciamo nel piano $x\,y$ il rettangolo coi lati paralleli agli assi x, y e circoscritto alla linea chiusa proiezione di quella che limita la superficie.

Dividiamo uno dei lati di questo rettangolo in intervalli parziali δ_r e l' altro in intervalli δ'_s, e meniamo le parallele agli assi pei punti di divisione. Allora tutto il rettangolo $A\,B\,C\,D$ verrà diviso in tanti altri rettangoli $a\,b\,c\,d$ di cui alcuni resteranno compresi dentro la curva chiusa, altri resteranno in parte dentro e in parte fuori, altri totalmente fuori.

Consideriamo solo quelli che sono totalmente dentro alla curva chiusa, e eleviamo su di essi, presi per basi, altrettanti parallelepipedi retti,

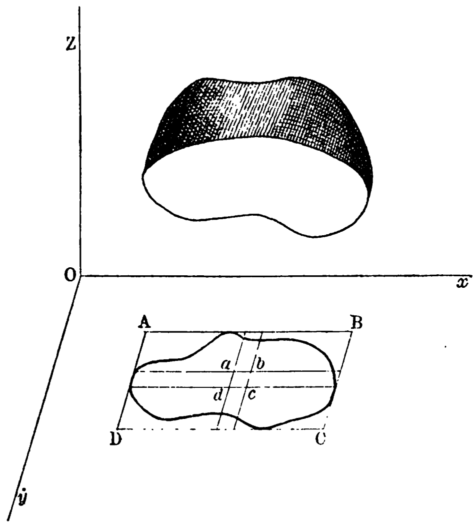

Fig. 12.

i quali andranno a spezzare la superficie in altrettante parti; prendiamo un punto sulla superficie interno a ciascuna di queste parti, e per esso meniamo il piano tangente alla superficie, del quale consideriamo solo quel quadrilatero che su di esso resterà determinato dal parallelepipedo corrispondente.

Il limite della somma di tutti questi quadrila quando gli intervalli δ_r, δ_s diminuiscono indefir mente, mentre il loro numero aumenta, è ciò diciamo l'*area della superficie*.

Ciascuno di tali quadrilateri è uguale alla proiezione, cioè al rettangolo $\delta_r \delta'_s$, diviso pel seno dell'angolo che il piano tangente fa col pi di $x y$ o, ciò che è lo stesso, per il coseno l'angolo che la perpendicolare al piano tang fa coll'asse z.

Chiamiamo ξ, η, ζ gli angoli di direzione d perpendicolare al piano tangente, e allora uno quadrilateri sarà:

$$q = \frac{\delta_r \delta'_s}{\cos \zeta}$$

ed essendo:

$$\cos^2 \xi + \cos^2 \eta + \cos^2 \zeta = 1$$

si ha:

$$\frac{1}{\cos \zeta} = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \xi}{\cos^2 \zeta} + \frac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \zeta}}$$

onde:

$$q = \delta_r \delta'_s \sqrt{1 + \frac{\cos^2 \xi}{\cos^2 \zeta} + \frac{\cos^2 \eta}{\cos^2 \zeta}}.$$

Ora cercheremo di trasformare il radicale.

Per il punto di contatto del piano tangente niamo il piano parallelo al piano $x z$, il q taglierà la superficie lungo una curva c; e il p tangente lungo la tangente t a tale curva; l'equazione di tale curva c sarà la stessa equazione della superficie quando si consideri y costante, (uguale cioè alla distanza del piano della linea dal piano $x\,z$). Sieno α', β', γ' gli angoli di direzione della tangente t alla curva c; allora evidentemente, poichè tale retta t sta in un piano perpendicolare all'asse y, si ha $\cos\beta'=0$, e inoltre α' e γ' fra loro complementari.

La perpendicolare al piano tangente sarà perpendicolare alla retta t, e quindi fra i coseni di direzione sussiste la relazione:

$$\cos\xi\cos\alpha' + \cos\eta\cos\beta' + \cos\zeta\cos\gamma' = 0$$

la quale diventa

$$\cos\xi\cos\alpha' + \cos\zeta\cos\gamma' = 0$$

donde:

$$\frac{\cos\xi}{\cos\zeta} = -\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'}\,.$$

Ma

$$\frac{\cos\gamma'}{\cos\alpha'} = \frac{\operatorname{sen}\alpha'}{\cos\alpha'} = \operatorname{tang}\alpha'$$

e inoltre

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{\partial z}{\partial x}$$

dunque

$$\frac{\cos\xi}{\cos\zeta} = -\frac{\partial z}{\partial x}\,.$$

Analogamente si troverebbe

$$\frac{\cos\eta}{\cos\zeta} = -\frac{dz}{dy}$$

onde infine

$$q = \delta_r \cdot \delta_s \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

e quindi la superficie di S resterà definita d
formola:

$$S = \lim \sum_r \sum_s \delta_r \cdot \delta'_s \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

Per la definizione che abbiamo dato di integ
doppio, si vede di quì che

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dx\, dy.$$

In quanto ai limiti d'integrazione non c'è
ripetere le stesse considerazioni fatte a suo te
a proposito degli integrali doppi.

Poichè noi supponiamo che la superficie
continua e il piano tangente in tutta la porz
di superficie che si considera si muova con
tinuità, così la funzione

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

sarà una funzione continua di $x\,y$. Onde l'
grale doppio esisterà sempre.

Resta così al solito non solo dimostrata l'esistenza del limite del sommatorio, cioè dell'area della superficie giusta la definizione da noi data, ma anche trovata la formola colla quale la si può calcolare.

§ 5. **Superficie di rotazione.** — Nel caso delle superficie di rotazione possiamo facilmente ridurci ad un integrale semplice potendo in quel caso eseguire una delle due integrazioni

Immaginiamo sul piano $z\,x$ la curva di equazione

$$z = \varphi(x')$$

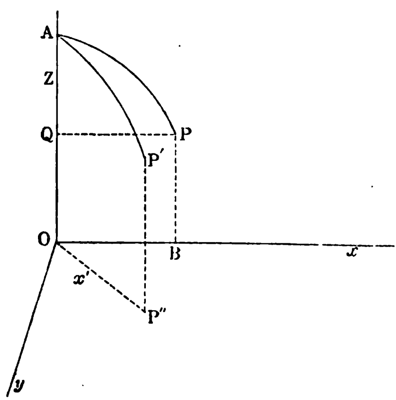

Fig. 13.

che rotando intorno all'asse z genera la superficie di rotazione.

Nella rotazione il punto P serberà distanza costante dall'asse z (tale distanza sarà sempre x') e altezza costante sul piano zy, per modo che la z del punto P in una posizione qualunque sarà sempre la stessa z del punto P del piano xz.

Inoltre la x' sarà in ogni posizione di P la radice di $x^2 + y^2$ se con x, y indichiamo le coordinate di P nello spazio.

Per avere dunque l'equazione della superficie basta porre nell'equazione della curva $x' = \sqrt{x^2+y^2}$, onde l'equazione della superficie è

$$z = \varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Le derivate parziali di z rispetto ad x e y sono

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

donde

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \varphi'^2\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

La superficie diventa adunque:

$$S = \iint \sqrt{1 + \varphi'^2\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}\, d\,x\, d\,y.$$

Immaginiamo che il ramo di curva piana che rota intorno a z sia AB e l'ascissa di B sia $x' = r$. Allora il contorno della superficie sarà il cerchio descritto da B, il quale si proietterà sul piano xy in un cerchio eguale di raggio r.

Dovendo estendere l'integrazione in modo che x, y percorrano tutto il quarto di cerchio compreso fra gli assi $x y$ dobbiamo fare l'integrazione rispetto ad y da $y = 0$ fino a $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ e l'integrazione rispetto ad x da $x = 0$ sino ad $x = r$.

Facciamo ora un cambiamento di variabili nell'integrale rispetto ad y, ponendo la variabile x' in luogo della variabile y, cioè ponendo:

$$x^2 + y^2 = x'^2.$$

Allora la funzione da integrare diventa $\sqrt{1 + \varphi'^2(x')}$ e per trasformare l'integrale bisognerà moltiplicare tale funzione per la derivata dell'antica variabile y rispetto alla nuova x', cioè per:

$$\frac{dy}{dx'} = \frac{x'}{y} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 - x^2}}.$$

Onde l'integrale diventa:

$$\int x' \sqrt{1 + \varphi'^2(x')}\, dx' \int \frac{dx}{\sqrt{x'^2 - x^2}}$$

e queste due integrazioni bisogna estenderle in maniera da comprendere tutti i punti del quarto di cerchio di raggio r.

La integrazione rispetto ad x la estendiamo da $x = 0$ sino ad $x = x'$, e quella rispetto ad x' la estendiamo da $x' = 0$ sino ad $x' = r$.

Ora

$$\int_0^{x'} \frac{dx}{\sqrt{x'^2 - x^2}} = \left[\text{arco sen}\,\frac{x}{x'}\right]_0^{x'} = \frac{\pi}{2}$$

onde il doppio integrale è eguale all'integrale semplice:

$$\frac{\pi}{2}\int_0^r x'\sqrt{1+\varphi'^2(x')}\,d\,x'.$$

Se vogliamo tutta la superficie di rotazione intorno A è chiaro che basta moltiplicare per 4 questo risultato, e quindi si ha infine

$$S = 2\,\pi\int_0^r x'\sqrt{1+\varphi'^2(x')}\,d\,x'.$$

Si vede dunque che nel caso della superficie di rotazione l'integrale doppio si può ridurre ad un integrale semplice.

Si può far vedere che $\sqrt{1+\varphi'^2(x')}$ non è altro che l'inverso del coseno dell'angolo che la tangente alla curva generatrice forma coll'asse di x.

Giacchè la tangente di tale angolo è evidentemente:

$$\frac{d\,z}{d\,x'} = \varphi'(x')$$

e

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\theta}}$$

onde

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2(x')}}.$$

§ 6. **Zona sferica.** — Vogliamo trovare la superficie di una zona sferica compresa fra un piano tangente alla sfera in un punto A e un piano parallelo.

La curva generatrice sul piano $z\,x$ in questo caso è un quarto di circonferenza di raggio R, se R è il raggio della sfera. Sia B il punto in cui questa circonferenza è tagliata dal dato piano parallelo al piano tangente, e A' il punto in cui il medesimo piano taglia l'asse z.

Poniamo $B\,A' = r$ e applichiamo la formola precedente dove φ sia la funzione

$$z = \varphi(x') = \sqrt{R^2 - x'^2}$$

e quindi

$$\varphi'(x') = -\frac{x'}{\sqrt{R^2 - x'^2}}$$

$$\sqrt{1 + \varphi'^2(x')} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x'^2}}$$

Abbiamo allora

$$\int_0^r \frac{R\,x'}{\sqrt{R^2 - x'^2}}\,d\,x' = \Big[-R\sqrt{R^2 - x'^2}\Big]_0^r =$$

$$= -R\sqrt{R^2 - r^2} + R^2.$$

L'area della zona è dunque:

$$2\pi R\left(R - \sqrt{R^2 - x^2}\right).$$

Volendo tutto l'omisfero poniamo in questa formola $x = R$ e si ha $2\pi R^2$, come si sa dalla geo*metria elementare.*

§ 7. **Superficie dell'ellissoide di rotazione.** — Consideriamo nel piano $x z$ l'ellisse $A B$ che roti intorno all'asse maggiore a.

Sia la sua equazione

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1.$$

Si ha:

$$\sqrt{1 + \varphi'^2 (x')} = \sqrt{1 + \left[\frac{d z}{dx'}\right]^2} = \frac{1}{b^2 z} \sqrt{b^4 z^2 + a^4 x'^2} =$$

$$= \frac{1}{b z} \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2) z^2}$$

o, introducendo l'eccentricità dell'ellisse, cioè:

$$e = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

si ha:

$$\sqrt{1 + \varphi'^2 (x')} = \frac{a}{b z} \sqrt{a^2 - e^2 z^2}$$

e quindi

$$S = 2 \pi \int \frac{b}{a} \frac{x'}{z} \sqrt{a^2 - e^2 z^2} \, d z.$$

Facciamo un cangiamento di variabile indipendente, cioè prendiamo per variabile indipendente la z in luogo della x'; allora dobbiamo moltiplicare la funzione da integrare per $\frac{d x'}{d z} = - \frac{b^2 z}{a^2 x'}$,

onde si ha, a meno del segno:

$$S = 2\pi \int \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - e^2 z^2}\, dz.$$

Ora noi sappiamo già che:

$$\int \sqrt{1 - t^2}\, dt = \frac{t}{2}\sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{2}\,\text{arco sen}\, t$$

onde:

$$\int \sqrt{a^2 - e^2 z^2}\, dz = \frac{z}{2}\sqrt{a^2 - e^2 z^2} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{e}\,\text{arco sen}\,\frac{e}{a} z$$

e perciò fra i limiti 0 e z si ha:

$$S = \pi\,\frac{b}{a}\left[z\sqrt{a^2 - e^2 z^2} + \frac{1}{2}\frac{a^2}{e}\,\text{arco sen}\,\frac{e}{a} z\right]$$

Per $z = a$ si ha la superficie del mezzo ellissoide, cioè:

$$\pi b^2 + \frac{\pi a b}{e}\,\text{arco sen}\, e.$$

Per $e = o$ e quindi:

$$a = b = R$$

si ha

$$2\pi R^2$$

che è la superficie della semisfera.

§ 8. **Volumi racchiusi da superficie.** — Una considerazione *analoga* a quella che si fa per le aree delle curve piane si può fare per i volumi delle superficie. E noi procederemo in questa ricerca in un modo analogo a quello tenuto per le aree.

Immaginiamo una porzione di superficie a contorno chiuso, il qual contorno si proietti in una curva chiusa sul piano xy, e la superficie al solito sia tale che una retta parallela all'asse z non la incontri in più di un punto solo.

Immaginiamo precisamente come nei paragrafi precedenti divisa l'area di questa curva chiusa in rettangoli parziali $\delta_r \, \delta'_s$; e formiamo i parallelepipedi retti aventi per basi tali rettangoli. Questi parallelepipedi andranno a tagliare sulla superficie altrettante porzioni di superficie, in ciascuna delle quali prendiamo un punto e per esso conduciamo il piano parallelo al piano xy. Con questo piano si verrà a chiudere il parallelepipedo, di cui esso verrà a formare la base superiore. Allora il limite della somma di tutti questi parallelepipedi è ciò che diciamo il *volume compreso fra la superficie ed il piano* x y.

Se l'equazione della superficie è $z = f(xy)$ è chiaro che ciascuno dei parallelepipedi sarà misurato da:

$$\delta_r . \delta'_s \, f(xy)$$

dove il valore di $f(xy)$ è calcolato per un punto xy che si trova interno al rettangolo $\delta_r . \delta'_s$.

Quindi il volume richiesto è:

$$V = \lim \Sigma \, \delta_r . \delta'_s \, f(xy)$$

cioè

$$V = \iint f(xy) \, dx \, dy.$$

nmaginiamo ora una superficie chiusa e veno come possiamo calcolare la porzione dello :io da essa racchiusa.

asterà applicare due volte il metodo precedente a seguente maniera:

onduciamo il cilindro retto con le generatrici pa-ɜle all'asse z e circoscritto alla superficie chiusa. ɜ cilindro toccherà la superficie data lungo una ı storta che effettuerà la separazione della suicie in due parti, una parte superiore e l'altra riore. Se calcoliamo i due volumi compresi fra le due parti ed il piano xy e sottraghiamo o dall'altro questi volumi, abbiamo evidentete il volume racchiuso dalla superficie.

oichè le due parti della superficie in questa iera vengono ad avere lo stesso contorno il e non è altro che la linea di contatto fra il dro e la superficie, così le integrazioni rispetto variabili x, y debbono farsi in ambo i casi ;li stessi limiti, perchè in ambo i casi debbono ndersi in modo da comprendere tutta la mema area piana. Solo che una volta $f(xy)$ ha 'alore e un'altra volta ne ha un altro, supposto la superficie sia chiusa. Questi due valori si ano risolvendo l'equazione della superficie rito a z; si ha allora una funzione

$$z = f(xy)$$

deve essere una funzione a due valori $f_1(xy)$, ;y), perchè abbiamo supposto che una retta ıllela all'asse z incontra la superficie in due ;i; tali due valori sono quelli che dovranno fiıre nelle integrazioni.

Il volume sarà dunque dato da:

$$V = \int\int [f_1(x\,y) - f_2(x\,y)]\,d\,x\,d\,y$$

ed essendo:

$$\int_{f_2(xy)}^{f_1(xy)} d\,z = f_1(x\,y) - f_2(x\,y)$$

possiamo anche scrivere:

$$V = \int\int\int d\,x\,d\,y\,d\,z$$

dove l'integrazione rispetto a z bisogna farla fra i limiti dei due valori $f_1\,f_2$ che ha la z, e che si ottengono dall'equazione della superficie risolvendola rispetto a z; l'integrazione rispetto ad y deve farsi fra i limiti dei due valori funzioni di x che si hanno per y risolvendo rispetto ad essa l'equazione della curva piana intersezione del piano $x\,y$ col cilindro suddetto circoscritto alla superficie; e l'integrazione rispetto a x bisogna farla fra i limiti costanti che vengono ad essere le ascisse dei punti di contatto delle due tangenti a tale curva piana, parallele all'asse y.

Per potere applicare questo metodo nei diversi casi speciali l'unica cosa che ci resta a fare è di trovare la curva piana proiezione del contorno della superficie.

Ora noi abbiamo visto in un paragrafo precedente che se $\xi\,\eta\,\zeta$ sono gli angoli di direzione della perpendicolare ad un piano tangente nel punto $x\,y\,z$

si ha

$$\frac{\cos\xi}{\cos\zeta} = -\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\cos\eta}{\cos\zeta} = -\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Se l'equazione della superficie ridotta sotto la forma razionale è data da

$$F(x\,y\,z) = 0$$

si ha dunque:

$$\frac{\cos\xi}{\cos\zeta} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\,, \qquad \frac{\cos\eta}{\cos\zeta} = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}$$

cioè:

$$\cos\xi : \cos\eta : \cos\zeta = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Se il piano tangente è parallelo all'asse z allora $\cos\zeta = 0$ e quindi per il punto di contatto deve essere $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$.

Questa relazione rappresenta una nuova superficie che sega la superficie data lungo la curva di contatto del cilindro circoscritto; eliminando z fra l'equazione della superficie $F(x\,y\,z) = 0$ e l'equazione $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$ si ha una relazione fra $x\,y$ che si può considerare come l'equazione del cilindro circoscritto, o anche, limitandoci al piano $x\,y$, come l'equazione della base di tal cilindro, e abbiamo con ciò l'equazione richiesta della curva.

§ 9. **Volume del solido di rotazione.** — Come si è visto, il calcolo di un volume si riduce a quello di un integrale doppio; ma se si tratta di un volume racchiuso da una superficie di rotazione possiamo anche far vedere facilmente che si può effettuare una delle integrazioni prima di conoscere l'equazione della superficie, e quindi ci possiamo ridurre ad un integrale semplice, il cui calcolo dipenderà poi dalla conoscenza della equazione della curva generatrice della superficie. Capita cioè qui un fatto simile a quello che abbiamo visto che accade nel caso del calcolo delle aree della superficie.

Conserveremo le stesse notazioni adoperate nei paragrafi precedenti.

Essendo $z = \varphi\sqrt{(x^2 + y^2)}$ l'equazione della superficie di rotazione. il volume sarà dato da

$$\int\int \varphi\;(\sqrt{x^2 + y^2})\,d\,x\,d\,y.$$

Poniamo ora

$$x^2 + y^2 = x'^2$$

e trasformiamo la variabile y nella variabile x'. Allora si ha:

$$\int\int \varphi\,(x')\,\frac{x'}{\sqrt{x'^2 - x^2}}\,d\,x\,d\,x'$$

e volendo estendere, come nel caso della superficie, l'integrazione al quarto di cerchio di raggio r dobbiamo estendere l'integrazione

$$\text{da } x = 0 \qquad \text{sino ad} \qquad x = x'$$

e

$$\text{da } x' = 0 \qquad \text{sino ad} \qquad x' = r$$

Eseguendo l'integrazione rispetto ad x si ha evidentemente $\frac{\pi}{2}$ onde resta

$$\frac{\pi}{2} \int_0^r x' \varphi(x') \, d\, x'.$$

Colla formola precedente si ha il volume generato da $APBO$ (v. fig. del § 5) che rota di $\frac{\pi}{2}$ intorno all'asse z; moltiplicando per 4 si avrà il volume generato da tutta la rotazione

$$V = 2\pi \int_0^r x' \varphi(x') \, d\, x'.$$

Volendo il volume generato dalla sola rotazione di APQ dobbiamo togliere il volume del cilindro generato da $QPBO$, cioè $\pi r^2 . PB$, cioè:

$$\pi r^2 \varphi(r).$$

Ora integrando per parti si ha

$$2\pi \int x' \varphi(x') \, d\, x' = \pi x^2 \varphi(x') - \pi \int x'^2 \varphi'(x') \, d x'$$

e fra i limiti si ha:

$$2\pi\int_0^r x'\varphi(x')\,dx' = \pi r^2\varphi(r) - \pi\int_0^r x'^2\varphi'(x')dx'$$

onde la differenza fra i due volumi è, a meno del segno

$$V_1 = \pi\int_0^r x'^2\varphi'(x')\,dx'.$$

E in questo integrale facendo un cambiamento di variabile indipendente, introducendo cioè per variabile indipendente

$$z = \varphi(x')$$

e quindi moltiplicando per

$$\frac{dx'}{dz} = \frac{1}{\varphi'(x')},$$

resta:

$$V_1 = \pi\int_{z_2}^{z_1} x'^2\,dz$$

chiamando z_2, z_1, le ordinate dei punti A, P estremi della curva generatrice, cioè le lunghezze OA, BP.

§ 10. **Volume dell'ellissoide qualunque. — Solido generato dalla cicloide.** — Sia l'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Dobbiamo calcolare l'integrale triplo

$$\int\int\int d\,x\,d\,y\,d\,z.$$

La integrazione rispetto a z bisogna farla fra i limiti:

$$z = \pm\, c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

resta così l'integrale doppio:

$$2\,c\int d\,x\int d\,y\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}};$$

Esaminiamo quali debbono essere i limiti dell'integrazione rispetto ad y. Osserviamo intanto che la proiezione della superficie sul piano $x\,y$ è in questo caso l'intersezione della superficie stessa col piano $x\,y$, e quindi ha per equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

donde:

$$y = \pm\, b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Applicando la formola:

$$\int d\,t\sqrt{1 - t^2} = \frac{1}{2}\,t\sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{2}\,\text{arc sen}\,t$$

si ha

$$\int d\,y \sqrt{\left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right] - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\, y \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} +$$

$$+ \frac{b}{2}\left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right] \text{arc sen} \frac{y}{b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}$$

e, fatta l'integrazione fra i limiti, si ha

$$\frac{1}{2}\,\pi\, b \left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right]$$

onde il volume è dato da

$$\pi\, b\, c \int_{-a}^{+a} \left[1 - \frac{x^2}{a^2}\right] d\,x$$

cioè finalmente da:

$$\frac{4}{3}\,\pi\,.\,a\,.\,b\,.\,c.$$

Se ora:

$$a = b = c = r$$

si ha $\frac{4}{3}\pi\, r^3$ che è appunto il volume della sf

Passiamo ora alla ricerca del volume racch nella superficie generata da una mezza cicloide che ruota attorno alla tangente O F nel verti

Sia OEB il cerchio generatore della cicloide. Dobbiamo calcolare $\pi\int x'^2\,dz$ esteso fra i limiti da $z=0$ sino a z.

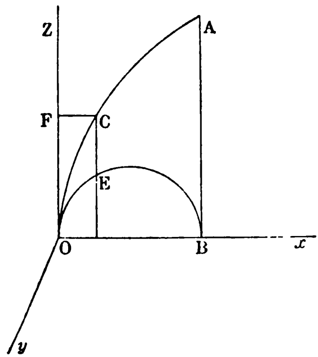

Fig. 14.

Ci conviene di mutare la variabile d'integrazione, e prendiamo per variabile indipendente la x'. Allora dobbiamo moltiplicare per $\frac{dz}{dx'}$, che, come sappiamo, per la cicloide è eguale a $\sqrt{\frac{2r-x'}{x'}}$. Si ha così da calcolare:

$$\pi\int_0^{x'} x'\sqrt{2rx'-x'^2}\,dx'$$

che può scriversi:

$$\pi r\int_0^{x'} \sqrt{2rx'-x'^2}\,dx'$$

$$-\pi\int_0^{x'}(r-x')\sqrt{2\,r\,x'-x'^2}\,d\,x'.$$

Ora se volessimo calcolare l'area piana O.
racchiusa dal cerchio, dovremmo calcolare pre(
mente l'integrale

$$\int_0^{x'}\sqrt{2\,r\,x'-x'^2}\,d\,x',$$

quindi possiamo dire che:

$$\text{Volume} = \pi\, r \text{ segm. } O\,E\,D -$$
$$-\pi\int_0^{x'}(r-x')\sqrt{2\,r\,x'-x'^2}\,d\,x'.$$

Il secondo integrale si può calcolare facilm
ponendo $2\,r\,x'-x'^2=t$.

Si ha allora:

$$\frac{d\,t}{d\,x'}=2\,r-2\,x'$$

donde

$$\frac{d\,x'}{d\,t}=\frac{1}{2\,(r-x')}$$

e quindi si ha da calcolare:

$$-\frac{\pi}{2}\int_0^t t^{\frac{1}{2}}\,d\,t=-\frac{\pi}{3}\,t^{\frac{3}{2}}$$

onde in fine:

$$\text{Volume} = \pi\, r \text{ segm. } O\,E\,D - \frac{\pi}{3}(2\,r\,x' - x'^2)^{\frac{3}{2}}$$

Volendo tutto il volume racchiuso dalla superficie generata da tutta la mezza cicloide $O\,C\,A$, dobbiamo fare $x' = O\,B = 2\,r$, e allora il segm. $O\,E\,D$ diventa tutta la mezza circonferenza la cui area è $\frac{\pi\, r^2}{2}$, onde si ha infine:

$$\text{Volume} = \frac{1}{2}\, \pi^2\, r^3.$$

CAPITOLO VII

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

§ 1. Considerazioni e definizioni fondamentali. — Ci siamo già proposti questo problema: conosciuta la derivata di una funzione come si fa per trovare la funzione stessa?

Ora possiamo proporci un problema più generale ed è questo: immaginiamo una funzione y di x, e di questa funzione se ne facciano le derivate di primo, secondo.... n^{mo} ordine che indicheremo con y' y'' ... $y^{(n)}$ e sieno ignoti i valori espliciti sia di questa funzione che di tutte le sue derivate; ma si conosca invece una relazione fra $x\ y\ y' \ldots y^{(n)}$. Ora ci domandiamo: conoscendo una tale relazione, si potrà trovare la funzione y?

Una relazione di questo genere si chiama una *equazione differenziale*, e il problema che vi si riferisce, e che noi abbiamo enunciato, si chiama il problema dell'*integrazione delle equazioni differenziali.*

Cominciamo a fissare delle distinzioni fondamentali fra le varie specie di equazioni differenziali che noi possiamo immaginare. Prima di tutto può immaginarsi che la funzione ignota da ricercarsi, sia funzione di una sola variabile o di più variabili indipendenti; e quindi che la relazione data, sia una relazione fra la funzione, la variabile e le derivate della funzione rispetto a quell'unica variabile, ovvero sia una relazione fra la funzione, le variabili e le derivate *parziali* della funzione rispetto alle diverse variabili. Abbiamo quindi due grandi categorie di equazioni differenziali; quelle della prima categoria si chiamano *equazioni differenziali ordinarie*, e quelle della seconda si chiamano *equazioni a derivate parziali.*

Nell'uno e nell'altro caso si chiamerà *ordine dell'equazione* quello della derivata di più alto ordine che in essa comparisce. Può poi anche immaginarsi che invece di una sola relazione fra la variabile, la funzione e le sue derivate, ne sieno date più, da considerarsi come *simultanee;* allora si ha ciò che si chiama un *sistema di equazioni differenziali.*

Prima di passare allo studio del problema dell'integrazione delle equazioni differenziali, noi naturalmente cercheremo di fare uno studio preliminare sul problema diretto, cioè sul modo di costruire una equazione differenziale, conosciuta che sia la funzione. Con ciò potremo poi più facilmente tentare la soluzione del problema inverso.

Sia data una funzione y di x, e ne formiamo la derivata prima y'. Se la funzione data contiene un parametro qualunque c, in generale anche la derivata conterrà c, e se noi eliminiamo c fra la funzione data e la sua derivata, abbiamo evidentemente una relazione fra y, y', x, che sarà un'equazione differenziale.

L'integrale di quella equazione sarà naturalmente la funzione y data, ma dove a c può darsi qualunque valore, perchè per qualunque c (che è il parametro che abbiamo eliminato) la y data soddisfa sempre la equazione differenziale. Non si ha dunque effettivamente *una sola* funzione, ma *infinite* funzioni, o meglio *una funzione contenente un parametro arbitrario.*

L'equazione differenziale così formata è un'equazione differenziale di 1° ordine, ma è chiaro che con considerazioni analoghe potrebbe formarsi un'equazione differenziale di ordine n.

Basta cioè supporre che la funzione data contenga n costanti $c_1 c_2 \ldots c_n$, e che si formino le prime n derivate della funzione; fra queste, insieme colla funzione data, eliminando le n costanti si ha un'equazione contenente in generale $x\, y\, y' \ldots y^{(n)}$, che è un'equazione differenziale di ordine n.

Dalla costruzione stessa di una tale equazione differenziale si vede che la funzione data che dovremo considerare come *integrale* dell'equazione differenziale, ha la proprietà, che *se si formano le sue derivate sino a quella di ordine* n, *e i valori di* $y\, y' \ldots y^{(n)}$ *così ottenuti si sostituiscono nell'equazione differenziale, si deve avere una relazione identicamente soddisfatta qualunque sia* x *e qualunque sieno i valori delle costanti* $c_1 c_2 \ldots c_n$.

Una siffatta soluzione dell'equazione differenziale con n costanti arbitrarie noi la chiameremo l'*integrale generale*, e vien subito la domanda, se data un'equazione differenziale qualunque esista o no sempre l'*integrale generale.* Si dimostra che effettivamente qualunque sia l'equazione differenziale, l'*integrale generale esiste sempre;* ma noi non entreremo nei dettagli di queste dimostrazioni.

Se a tutte o ad alcune delle costanti diamo dei valori particolari allora abbiamo anche delle soluzioni dell'equazione differenziale, che si chiamano *integrali particolari.* Tali integrali non contengono n costanti arbitrarie, ma o nessuna o un numero minore di n; ognuno di essi si può sempre ricavare dall'integrale generale, mentre viceversa da essi non può ricavarsi l'integrale generale, meno che in certi casi speciali.

Vogliamo ora fissare con precisione quali sono i caratteri distintivi di un integrale generale.

Qualunque soluzione dell'equazione differenziale deve sempre essere una funzione y di x tale che ricavandone $y' \, y'' \ldots y^{(n)}$ e sostituendoli, insieme col valore di y, nell'equazione data, si abbia un'espressione in x identicamente soddisfatta *qualunque sia il valore di* x. Queste sono le proprietà comuni a qualunque specie di integrali; ma che cosa deve verificarsi dippiù perchè si possa dire che l'integrale di cui si tratta sia della specie di quelli chiamati *generali?*

Abbiamo detto che l'integrale generale deve contenere n costanti arbitrarie; ma dobbiamo precisare meglio il carattere essenziale di queste costanti. Queste costanti devono essere contenute in una maniera speciale, e propriamente in questa: *che formando le successive* n *derivate di* y, *possa poi eseguirsi il processo di eliminazione* di quelle *costanti dalle* n + 1 *equazioni* che si vengono ad *ottenere.* È allora solo che noi diremo che quelle costanti sono fra loro tutte ***indipendenti*** e sono proprio n; potrebbe accadere invece che, eliminando alcune delle costanti, se ne eliminino per conseguenza alcune altre, e allora esse non sarebbero che solo apparentemente n, ma in effetti rappresenterebbero un numero inferiore di costanti, e quindi l'integrale non sarebbe più *generale* ma *particolare.*

Evidentemente possiamo mettere sotto quest'altra forma la proprietà indicata: che *dalle prime* n *di quelle equazioni, cioè da quella che esprime la funzione data e da quelle delle prime* n − 1 *derivate, si possano ricavare i valori di* $c_1\, c_2 \ldots c_n$ *cioè delle* n *costanti;* è chiaro infatti che quando questo si possa fare, allora sostituendo poi questi valori nell'equazione contenente la derivata n^{ma} di y, si avrà una relazione, *certamente non identica*, che sarà proprio l'equazione differenziale. Quella relazione che si viene a ottenere sarà *certamente non identica* perchè il termine contenente $y^{(n)}$ non potrà distruggersi con nessun altro termine *simile*, giacchè $c_1\, c_2 \ldots c_n$ vengono espressi solo mediante $x\, y\, y' \ldots y^{(n-1)}$, e non mediante $y^{(n)}$.

Se i valori delle costanti arbitrarie sono espressi in funzione di x, y, $y' \ldots y^{(n-1)}$ vuol dire che dando ad x un qualunque valore compreso in un certo campo, e a $y\, y' \ldots y^{(n-1)}$ valori arbitrariamente stabiliti, ogni volta se ne debbano poter ricavare per le costanti valori determinati; onde possiamo dire anche *che le* n *costanti devono comparire in maniera che almeno per i valori di* x *compresi in un certo campo*, si debbano potere dare sempre ad esse *tali valori che le quantità* $y\, y' \ldots y^{(n-1)}$ *acquistino valori già precedentemente e arbitrariamente fissati.*

Oltre le due dette specie di integrali cioè i *generali* e i *particolari*, ne esiste anche un'altra specie, cioè gli *integrali singolari;* ma di questi discorreremo in seguito in un paragrafo apposta.

Le considerazioni fatte si riferiscono alle *equazioni differenziali ordinarie.* In quanto poi agli integrali delle *equazioni a derivate parziali* ne discorreremo in un altro paragrafo.

Resta ora a passare allo studio del problema: *data l'equazione differenziale trovare l'integrale;* per tale problema noi al solito non possiamo stabilire delle regole generali, ma dobbiamo limitarci a fissare dei tipi di equazioni differenziali, e studiarli separatamente, come già si fece nel problema dell'integrazione delle funzioni (quadrature).

Il problema delle equazioni differenziali lo considereremo però risoluto sempre che lo avremo ricondotto ad un problema di semplice integrazione, cioè, come si dice, alle *quadrature.* Potrà anche accadere che una tale quadratura non si sappia praticamente effettuare, ma la difficoltà allora resta spostata in un campo di ricerche diverso. È nella stessa maniera che noi nel calcolo infinitesimale consideriamo come risoluto un problema, semprechè lo possiamo trasformare in modo che la sua soluzione dipenda dalla soluzione di un problema algebrico, per es. dalla risoluzione di un'equazione algebrica.

Prima ora di passare allo studio dei diversi tipi *di equazioni* differenziali, facciamo vedere come esse possono presentarsi per la soluzione di un problema ordinario di geometria.

§ 2. **Esempio di un problema di geometria la cui soluzione conduce ad un'equazione differenziale.** — Applicando l'analisi a molti problemi di geometria in cui p. es., sia da trovare l'equazione di una curva piana dotata di speciali proprietà, può accadere di imbatterci direttamente non in una semplice relazione analitica fra le coordinate x, y, ma in una relazione fra x, y e le derivate di y rispetto ad x, cioè precisamente in una equazione differenziale. È chiaro che allora la soluzione di esso problema si riduce allo studio e all' integrazione di questa equazione differenziale.

Scegliamo il seguente esempio. Si voglia determinare una curva tale che il raggio vettore OP sia eguale al segmento OR che la tangente PR in P stacca sull'asse x.

Cominciamo dall'osservare che

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Inoltre

$$\frac{PQ}{QR} = \frac{dy}{dx}$$

onde

$$\frac{y}{x + OR} = \frac{dy}{dx}$$

e dovendo essere $OP = OR$ si ha la relazione:

$$\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{dy}{dx}$$

che è precisamente un' equazione differenziale di 1.° ordine.

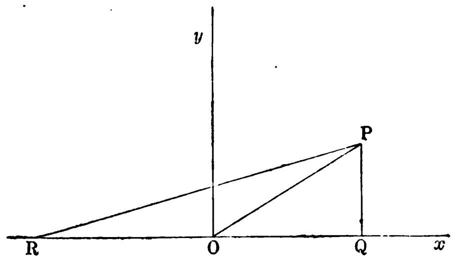

Fig. 15.

In un paragrafo seguente (v. § 4) vedremo come si può fare per integrare tale equazione, e come essa dia luogo ad un fascio di parabole. Per modo che si ricava ancora il teorema, che non c'è altra curva che le parabole che soddisfano alla proprietà enunciata.

§ 3. Equazioni differenziali di 1° ordine. Equazioni in cui si possono separare le variabili. — Vogliamo ora passare ad esporre alcuni metodi con cui si può effettuare l' integrazione di alcuni tipi speciali di equazioni differenziali.

Cominciamo da quelle di 1.° ordine.

Si abbia dunque un'equazione:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dy}\right) = 0 \qquad (1)$$

e supponiamo che $\frac{dy}{dx}$ vi sia contenuto algebricamente in modo razionale ed intero.

Allora questa relazione può considerarsi come un'equazione in $\frac{dy}{dx}$, e si può risolvere rispetto a questa variabile, e si otterrà la scomposizione di (1) in un prodotto di n fattori lineari in $\frac{dy}{dx}$.

Possiamo allora considerare separatamente uno di questi fattori, e ci riduciamo così ad un'equazione differenziale del tipo:

$$M + N\frac{dy}{dx} = 0 \tag{2}$$

dove M, N sono funzioni di x, y.

Uno dei primi casi in cui (2) può immediatamente integrarsi si ha quando M, N *sono funzioni rispettivamente della sola* x *e della sola* y.

Allora si ha:

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

e integrando si ha:

$$\int M\,dx + \int N\,dy = \text{cost.}$$

Questo caso si dice *il caso in cui le variabili si possono separare*. Si abbia per esempio da integrare:

$$xy\,dx - (a-x)(y-b)\,dy = 0;$$

dividendo per $y(a-x)$ si ha:

$$\frac{x}{a-x}\,dx - \frac{y-b}{y}\,dy = 0$$

e, integrando termine a termine, si ha:

$$-x - a\log(a-x) - y + b\log y = \text{cost.}$$

Ci è comodo porre la costante arbitraria sotto la forma di un logaritmo, cioè scrivere $\log C$ al secondo membro e allora si ha, passando dai logaritmi ai numeri,

$$y^b\ (a-x)^{-a} = C\, e^{x+y}$$

Si potrebbe vedere che se si deriva questa equazione e poi si elimina C fra essa e la sua derivata si ricade nell'equazione differenziale data.

§ 4. **Equazioni differenziali omogenee.** — Immaginiamo che in

$$M\,dx + N\,dy = 0 \qquad (1)$$

le M e N sieno *funzioni omogenee* dello stesso grado. In altri termini sieno tali funzioni che moltiplicando x, y per una indeterminata λ, esse risultino le stesse di prima moltiplicate per λ^m.

Allora è facile indicare un metodo generale di integrazione. Infatti introduciamo una nuova variabile z in luogo di y ponendo

$$\frac{y}{x} = z.$$

Dividiamo la (1) per x^m, e si ha che i coefficienti di dx, dy, risultano funzioni del solo rapporto $\frac{y}{x}$, cioè si ha:

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0.$$

Intanto da

$$\frac{y}{x} = z$$

si ha:

$$d\,y = x\,d\,z + z\,d\,x$$

onde sostituendo si ha l'equazione differenziale:

$$\varphi(z)\,d\,x + \psi(z)\,(x\,d\,z + z\,d\,x) = 0$$

cioè

$$\frac{d\,x}{x} + \frac{\psi(z)}{\varphi(z) + z\,\psi(z)}\,d\,z = 0$$

in cui le variabili sono separate e quindi ci riduciamo al caso precedente.

L'equazione ottenuta nel § 2 è precisamente una equazione omogenea, e quindi si può integrare nel modo indicato.

Essa è:

$$y\,d\,x - (x + \sqrt{x^2 + y^2})\,d\,y = 0$$

ed è omogenea di grado *1*.

Dividendo per y e poi ponendo $\dfrac{x}{y} = z$ si ha:

$$z\,d\,y + y\,d\,z - (z + \sqrt{1 + z^2})\,d\,y = 0$$

donde

$$\frac{d\,z}{\sqrt{1 + z^2}} = \frac{d\,y}{y}$$

e integrando

$$\log y = \log (z + \sqrt{1 + z^2}) + \log C$$

donde

$$y = (z + \sqrt{1 + z^2})\, C$$

e ponendo $z = \dfrac{x}{y}$ si hanno successivamente gli sviluppi:

$$y^2 = C(x + \sqrt{x^2 + y^2})$$
$$(y^2 - C x)^2 = C^2 (x^2 + y^2)$$
$$y^2 (y^2 - 2 C x - C^2) = 0$$

onde, escludendo la soluzione $y = 0$, si ha per soluzione la parabola

$$y^2 - 2 C x - C^2 = 0$$

il cui fuoco è l'origine.

§ 5. **Equazioni lineari di 1.° ordine.** — Un' equazione della forma

$$\frac{d y}{d x} + P y = Q$$

dove P, Q *sieno funzioni della sola* x, si dice una equazione lineare; essa contiene linearmente la y e la $\dfrac{d y}{d x}$.

Poniamo

$$y = u \,.\, v$$
$$\frac{d y}{d x} = u \frac{d v}{d x} + v \frac{d u}{d x};$$

Si ha

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+Puv=Q$$

$$u\frac{dv}{dx}+\left(\frac{du}{dx}+Pu\right)v=Q$$

Potendo scegliere ad arbitrio una delle due funzioni u, v, scegliamo u in modo che sia:

$$\frac{du}{dx}+Pu=0$$

cioè

$$\frac{du}{u}=-P\,dx;$$

e integrando

$$\log u=-\int P\,dx$$

$$u=e^{-\int P dx}.$$

Allora resta:

$$u\frac{dv}{dx}=Q$$

cioè

$$v=\int Q\,e^{\int P dx}\,dx+C$$

e quindi

$$y=e^{-\int P dx}\left[\int Q\,e^{\int P dx}\,dx+C\right].$$

Sia p. es. da integrare:

$$\frac{dy}{dx} + y = x^3.$$

Si ha:

$$\int P\,dx = x$$

$$\int Q\, e^{\int P dx}\, dx = \int x^3 e^x\, dx.$$

Per effettuare la quadratura

$$\int x^3 e^x\, dx$$

ci serviremo della integrazione per parti;

$$\int x^3 e^x\, dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x\, dx$$

$$= x^3 e^x - 3\, x^2 e^x + 6 \int x\, e^x\, dx$$

$$= x^3 e^x - 3\, x^2 e^x + 6\, x\, e^x - 6 \int e^x\, dx$$

$$= x^3 e^x - 3\, x^2 e^x + 6\, x\, e^x - 6\, e^x$$

onde si ha:

$$y = e^{-x} [x^3 e^x - 3\, x^2 e^x + 6\, x\, e^x - 6\, e^x + C].$$

Vi sono alcuni tipi di equazioni differenziali che si possono ridurre immediatamente a caso delle *equazioni lineari.*

Si abbia p. es.:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

dove *P, Q sieno funzioni della sola* x.

Poniamo:

$$\frac{y^{1-n}}{1-n} = z$$

$$y^{-n}\,dy = dz;$$

si ha allora:

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)Pz = Q,$$

e con ciò l'equazione data è trasformata in un'altra del tipo delle equazioni lineari.

Abbiamo detto precedentemente che se noi conosciamo un integrale particolare non possiamo senz'altro conoscere l'integrale generale. Però possiamo indicare il seguente tipo di equazioni in cui questo si può fare.

Sia l'equazione:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^2 + R.$$

Sia u un integrale *particolare*, cioè sia identicamente:

$$\frac{du}{dx} + Pu = Qu^2 + R. \qquad (1)$$

Poniamo

$$y = u + v$$

Si ha in virtù di (1)

$$\frac{dv}{dx} + (P - 2Qu)v = Qv^2$$

che è del tipo precedente; quindi si può integrare e si ha v con una costante arbitraria.

Per esempio l'equazione:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^2 + (1 + Px - Qx^2)$$

ha per integrale particolare

$$y = x$$

Possiamo perciò applicare il metodo indicato e abbiamo da integrare

$$\frac{dv}{dx} + (P - 2Qx)v = Qv^2.$$

§ 6. Equazioni differenziali di 1.° ordine non risolubili rispetto a $\frac{dy}{dx}$. — Quando la risoluzione dell'equazione differenziale rispetto a $\frac{dy}{dx}$ riuscisse praticamente impossibile allora si presenta la necessità di ricercare alcuni metodi che si possono applicare senza risolvere l'equazione differenziale rispetto a $\frac{dy}{dx}$.

Al solito non possiamo dare metodi generali, ma metodi speciali pei vari casi.

1.° Supponiamo che l'equazione differenziale non contenga nè x nè y e contenga solo $\frac{dy}{dx}$.

Allora la riduzione dell'equazione darebbe

$$\frac{dy}{dx} = \alpha = \text{cost.}$$

dove non conosciamo α. Però sapendo che essa è una quantità costante possiamo integrare quest'ultima relazione, e abbiamo:

$$y = \alpha x + c$$

donde:

$$\alpha = \frac{y - c}{x}.$$

Quindi se nell'equazione data poniamo per $\frac{dy}{dx}$ questo valore di α abbiamo l'integrale generale richiesto.

2.° Immaginiamo che l'equazione differenziale non contenga y, e sia:

$$f\left(x, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Si possa allora risolvere rispetto ad x; poniamo

$$\frac{dy}{dx} = p \qquad x = \varphi(p) \qquad \frac{dx}{dp} = \varphi'(p).$$

Prendiamo per nuova variabile la p, onde:

$$p = \frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,p}\,\frac{d\,p}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,p}\,\frac{1}{\varphi'(p)}$$

e perciò

$$\frac{d\,y}{d\,p} = p\,\varphi'(p)$$

donde:

$$y = \int p\,\varphi'(p)\,d\,p + C$$

Calcolato questo integrale basta eliminare p fra esso e la

$$x = \varphi\,(p)$$

per avere la relazione fra x e y.

Si abbia p. es.:

$$\left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2 + \frac{d\,y}{d\,x} - x = 0.$$

Sarà:

$$x = p + p^2$$

$$y = \int p\,(2\,p + 1)\,d\,p = \frac{2}{3}\,p^3 + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{6}\,C$$

ed eliminando p fra queste ultime due relazioni si ha l'integrale generale. Dalla prima si ha:

$$p^2 = x - p$$

onde

$$y = \frac{2}{3} p (x - p) + \frac{1}{2} (x - p) + \frac{1}{6} C =$$

$$= \frac{2}{3} p x - \frac{1}{2} p + \frac{1}{2} x - \frac{2}{3} (x - p) + \frac{1}{6} C =$$

$$= \frac{2}{3} p x + \frac{1}{6} p - \frac{1}{6} x + \frac{1}{6} C$$

e risolvendo rispetto a p si ha:

$$p = \frac{6 y + x + C}{1 + 4 x}$$

e sostituendo nella prima equazione si ha infine:

$$x = \left(\frac{6 y + x + C}{1 + 4 x} \right)^2 + \left(\frac{6 y + x + C}{1 + 4 x} \right).$$

3.° Immaginiamo in terzo luogo che l'equazione data non contenga x, ma solo y, e si possa risolvere rispetto ad y.

Allora poniamo anche qui:

$$\frac{d y}{d x} = p$$

per modo che l'equazione differenziale diventa:

$$y = f(p)$$

Derivando rispetto ad x si ha:

$$\frac{d y}{d x} = f'(p) \frac{d p}{d x}$$

donde si ha l' altra equazione differenziale fra le variabili x e p:

$$p = f'(p)\,\frac{dp}{dx}$$

da cui

$$x = \int \frac{f'(p)}{p}\,dp + C$$

ed eliminando adesso al solito p fra questa relazione e la $y = f(p)$ si ha l'integrale generale.

Sia p. es. l'equazione:

$$y\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = a\,\frac{dy}{dx};$$

coll'introduzione del simbolo p e colla risoluzione rispetto ad y si ha:

$$y = \frac{ap}{1+p^2}$$

$$x = \int \left[\frac{a\,dp}{p(1+p^2)} - \frac{2\,ap\,dp}{(1+p^2)^2}\right] + C$$

$$= -\frac{a}{1+p^2} + a\int \frac{dp}{p(1+p^2)} + C.$$

Ora:

$$\int \frac{dp}{p(1+p^2)} = \int \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{1+p^2}\right) dp =$$

$$= \log p - \frac{1}{2} \log(1+p^2)$$

onde

$$x = -\frac{a}{1+p^2} + a \log p - \frac{1}{2} a \log (1 + p^2) + C.$$

Adesso non resterebbe che eliminare p fra questa equazione e la

$$y = \frac{a p}{1+p^2}.$$

4.° Vogliamo ancora considerare un'equazione differenziale del tipo:

$$y = x f\left(\frac{d y}{d x}\right) + \varphi\left(\frac{d y}{d x}\right);$$

derivando rispetto ad x si ha $\left(\text{ponendo } \frac{d y}{d x} = p\right)$

$$p = f(p) + x f'(p) \frac{d p}{d x} + \varphi'(p) \frac{d p}{d x}$$

cioè:

$$\frac{d x}{d p} + \frac{x f'(p)}{f(p) - p} = -\frac{\varphi'(p)}{f(p) - p}.$$

Questa è un'equazione *lineare* come quelle considerate nel paragrafo precedente, e ha per integrale:

$$x = e^{-\int \frac{f(p) dp}{f(p)-p}} \left[-\int \frac{\varphi'(p)}{f(p) - p} e^{\int \frac{f'(p)}{f(p)-p} dp} dp + C \right]$$

e eliminando p colla data si ha l' integrale generale.

Resta però ancora da considerarsi il caso in cui sia $f(p) = p$, perchè in tal caso la funzione da integrare è infinita.

Si abbia cioè da integrare l'equazione:

$$y = xp + \varphi(p);$$

allora derivando rispetto ad x, e riducendo si ha:

$$[x + \varphi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0.$$

Quindi ci si presentano due casi; o poniamo

$$x + \varphi'(p) = 0$$

ovvero:

$$\frac{dp}{dx} = 0.$$

Il secondo caso ci dice che p è costante, cioè l'integrale è:

$$p = C$$

Eliminando quindi p fra questa relazione e l'equazione data si ha l'integrale generale:

$$y = xC + \varphi(C)$$

In quanto al primo caso esso ci dà:

$$x = -\varphi'(p)$$

ed eliminando p fra questa relazione e la data si ha l'integrale. Però questo integrale non verrà a contenere alcuna costante arbitraria; è facile dimostrare che esso non può ottenersi dall'integrale generale particolarizzando la costante. Giacchè ricavando p dall'ultima relazione e avendosi:

$$p = \psi(x)$$

l'integrale di cui si parla è

$$y = x\,\psi(x) + \varphi[\psi(x)]$$

e, come si vede, questo si ricava dall'integrale generale, non dando a C un valore particolare costante, ma un valore che è funzione di x.

Quindi questo integrale non è neanche uno di quelli integrali che abbiamo chiamati integrali particolari. Esso costituisce una specie di integrali che studieremo in seguito e che si chiamano *integrali singolari.*

§ 7. **Del fattore integrante.** — Sia data una equazione differenziale di 1.° ordine e di 1.° grado e sia posta sotto la forma:

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{1}$$

Se M, N sono rispettivamente funzioni di sola x e di sola y, allora evidentemente il primo membro di questa equazione è un differenziale esatto; tal primo membro sarà pure un differenziale esatto quando sia verificata la condizione:

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}.$$

Essendo zero il secondo membro dell'equazione data, noi possiamo sempre alterarne la forma moltiplicando il primo membro per un fattore qualunque.

Ora ci domandiamo: sarà in generale possibile trovare una certa funzione di x, y tale che moltiplicata per il primo membro dell'equazione differenziale lo renda un differenziale esatto?

È chiaro che se in un qualunque modo possiamo giungere alla ricerca di un tal fattore, allora l'integrazione dell'equazione differenziale è senz'altro effettuata.

Tal fattore, se esisterà, si chiamerà il *fattore integrante.* Noi dimostreremo:

1.° *Che esiste sempre;*

2.° *Che ne esistòno infiniti;*

3.° *Che dato uno si possono trovare tutti gli altri.*

In quanto alla prima tesi si può dimostrare nel seguente modo: noi abbiamo detto avanti che esiste sempre l'integrale generale di una equazione differenziale. Ora immaginiamo tale integrale generale risolto rispetto alla costante arbitraria C; allora si avrà un'espressione del tipo:

$$\varphi(x\,y) = C \tag{2}$$

Se questo è l'integrale generale dell' equazione differenziale, ciò significa che derivando questa equazione, e eliminando poi C fra essa e la sua derivata, si deve ricadere nell'equazione differenziale data.

Possiamo anche dire che dopo eliminata la C, e ricavato il $\frac{d\,y}{d\,x}$ dalla relazione risultante, il valore di tal $\frac{dy}{dx}$ così ricavato deve coincidere identicamente con quello ricavato dall'equazione differenziale. Ma se nel fare la derivazione dell'integrale generale, la costante C sparisce da sè, come succede appunto quando l'integrale generale è posto sotto la forma (2), allora non ci sarà più bisogno evidentemente di eliminare la C, e la equazione dalla quale dobbiamo ricavare il $\frac{dy}{dx}$ è proprio l'equazione derivata di (2).

Ora da (2) si ha:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

mentre dall'equazione differenziale si ha:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$$

onde dovrà essere identicamente

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}$$

cioè

$$\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\mathrm{M}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\mathrm{N}}.$$

Se chiamiamo μ il valore comune di questi due rapporti abbiamo:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \mu M$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \mu N$$

onde moltiplicando per μ il primo membro di (1) si ha:

$$0 = \mu M d x + \mu N d y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} d x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} d y$$

cioè il primo membro di (1) diventa il differenziale esatto della funzione φ di x, y. Trovato φ basta porre $\varphi = C$ per avere l'integrale generale.

Si vede con ciò che *esisterà sempre* una certa funzione μ che gode proprio della proprietà del *fattore integrante.*

È facile ora dimostrare che, ammesso che di fattori integranti ne esista uno, *ne esisteranno infiniti.*

Infatti se μ è un fattore che rende

$$\mu (M d x + N d y)$$

il differenziale di una funzione φ, allora consideriamo l'espressione:

$$\mu f (\varphi) \tag{3}$$

dove f è il simbolo di una funzione *arbitraria* di φ. *Moltiplicando il* primo membro di (1) per tale espressione si ha

$$f(\varphi)\,[\mu\, M\, d\, x + \mu\, N\, d\, y]$$

cioè

$$f(\varphi)\, d\, \varphi$$

che è il differenziale esatto di:

$$\int f(\varphi)\, d\, \varphi.$$

Quindi possiamo asserire che anche (3) è fattore integrante.

Passiamo ora a dimostrare che tutti i fattori integranti sono compresi nella formola (3).

Sieno μ, μ' due fattori integranti per modo che le espressioni:

$$\mu\, M\, d\, x + \mu\, N\, d\, y$$
$$\mu'\, M\, d\, x + \mu'\, N\, d\, y$$

sieno rispettivamente differenziali esatti di due funzioni φ, φ' cioè sieno identicamente uguali a:

$$d\, \varphi,\ d\, \varphi'$$

Si ha allora:

$$\frac{d\, \varphi}{d\, \varphi'} = \frac{\mu}{\mu'} \quad , \qquad d\, \varphi' = \frac{\mu'}{\mu}\, d\, \varphi.$$

Le φ, φ' sono funzioni di x, y; eliminando fra esse la variabile x, possiamo sempre supporre φ' *funzione* di φ e y.

Allora il differenziale totale di φ' sarà:

$$d\varphi' = \frac{\partial \varphi'}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \varphi'}{\partial y} dy$$

e paragonando questa formola con la precedente si ha

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0$$

cioè la φ' non verrà a contenere neanche la y quando vi si elimina la x con $\varphi(xy) = \varphi$; in altri termini φ' verrà ad essere funzione della sola φ. Quindi $\frac{\mu'}{\mu}$ che è la derivata di φ' rispetto a φ sarà funzione della sola φ, cioè

$$\frac{\mu'}{\mu} = f(\varphi)$$

donde:

$$\mu' = \mu f(\varphi)$$

come si voleva dimostrare.

Di qui si ricava che *quando sono noti due fattori integranti, il loro rapporto eguagliato ad una costante arbitraria (supposto che non sia già da sè una costante) sarà l'integrale generale.*

Giacchè il detto rapporto dei due fattori integranti, eguagliato ad una costante, darà:

$$f(\varphi) = C$$

e se

$$\varphi = \text{cost.}$$

è l'integrale generale, anche $f(\varphi) = \text{cost.}$ sarà l'integrale generale.

§ 8. **Equazione a derivate parziali a cui soddisfano i fattori integranti.** — È facile trovare una equazione a derivate parziali a cui debbono soddisfare i fattori integranti.

Infatti se

$$\mu M d x + \mu N d y$$

deve essere un differenziale esatto dovrà aversi (v. Cap. V).

$$\frac{\partial (\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial (\mu N)}{\partial x}$$

onde sviluppando

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} - N \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \tag{1}$$

Questa è una equazione differenziale nella quale la funzione ignota è μ, e vi compariscono le due derivate parziali di μ rispetto ad x e y.

La integrazione di questa equazione differenziale costituisce in generale un problema più complicato di quello dell'integrazione dell'equazione differenziale data. Però in molti casi il problema si semplifica, e noi studieremo a parte questi casi.

1.° Caso. *Supponiamo che*

$$-\frac{1}{N}\left[\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right]$$

sia funzione della sola x, ψ (x); *allora è facile vedere che esiste un fattore integrante* μ *funzione della sola* x.

Infatti se prendiamo

$$\mu = e^{\int \psi(x) dx}$$

cioè

$$\log \mu = \int \psi(x)\, d\, x$$

si avrà

$$\frac{\frac{\partial \mu}{\partial x}}{\mu} = \psi(x)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0.$$

e di quì si vede che l'equazione a derivate parziali (1) è soddisfatta.

Analogamente esisterebbe un solo fattore integrante funzione di sola y, *se*

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

fosse funzione di sola y.

Consideriamo per esempio l'equazione differenziale

$$(x + y)\, d\, x + d\, y = 0$$

Si ha:

$$M = x + y \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

$$N = 1 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

onde

$$-\frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)=1$$

che possiamo considerare come funzione di sola x. Allora il fattore integrante corrispondente sarà:

$$\mu = e^{\int dx} = e^x .$$

Moltiplicando infatti per e^x si ha:

$$e^x (x+y) d x + e^x d y = d [e^x y + e^x x - e^x].$$

Quindi l'integrale della data equazione differenziale è:

$$e^x [y + x - 1] = \text{cost}.$$

2.° Caso. *Supponiamo che:*

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

si possa porre sotto la forma:

$$N \varphi (x) - M \psi (y);$$

allora si può far vedere che esiste un fattore integrante che è il prodotto di una funzione di sola x *per una funzione di sola* y.

Infatti determiniamo le due funzioni

$$X = e^{\int \varphi(x) dx}$$
$$Y = e^{\int \psi(y) dx}$$

Si può dimostrare che il prodotto $X Y$ è un fattore integrante. Perchè nella (1) ponendo

$$\mu = X\, Y$$

e quindi

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = Y \frac{d X}{d x} = X Y \varphi(x)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = X \frac{d Y}{d y} = X Y \psi(y)$$

si trova che l'equazione è identicamente soddisfatta.

Sia p. es., l'equazione differenziale:

$$\left(\frac{x^2 + 2x - 1}{y} + y\right) d x + 2 d y = 0$$

Abbiamo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{x^2 + 2x - 1 - y^2}{y^2} = -\frac{1}{y} M + 2$$

$$= 1 . N - \frac{1}{y} M$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

onde possiamo porre:

$$\varphi(x) = 1 \quad , \quad \psi(y) = \frac{1}{y}$$

$$X = e^{\int dx} = e^x \quad , \quad Y = e^{\int \frac{dy}{y}} = y$$

e il fattore integrante sarà:

$$\mu = y\, e^x$$

L'integrale sarà:

$$e^x\ (x^2 + y^2 - 1) = \text{cost.}$$

3.° Caso. *Consideriamo finalmente il caso in cui le funzioni* M, N *sono omogenee dello stesso grado; allora un fattore integrante è:*

$$\mu = \frac{1}{Mx + Ny}.$$

Infatti facendo le derivate si ha:

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = -\frac{M + x\dfrac{\partial M}{\partial x} + y\dfrac{\partial N}{\partial x}}{(Mx + Ny)^2}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = -\frac{N + x\dfrac{\partial M}{\partial y} + y\dfrac{\partial N}{\partial y}}{(Mx + Ny)^2}$$

e sostituendo nell'equazione fondamentale (1) e riducendo si ha:

$$xN\frac{\partial M}{\partial x} + yN\frac{\partial N}{\partial x} - xM\frac{\partial M}{\partial y} - yM\frac{\partial N}{\partial y}.$$

$$= (Mx + Ny)\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

e ricordando che M, N sono funzioni omogenee e dello stesso grado n e quindi pel teorema di Eulero

$$x\frac{\partial M}{\partial x} + y\frac{\partial M}{\partial y} = n\,M$$

$$x\frac{\partial N}{\partial x}+y\frac{\partial N}{\partial y}=n\,N$$

si trova che l'equazione di sopra è identicamente soddisfatta.

Consideriamo p. es., l'equazione

$$\frac{x+y}{y}\,d\,x+d\,y=0.$$

Per espressione del fattore integrante si ha:

$$\frac{1}{x+2\,y}$$

per il quale moltiplicando, si ha l'equazione:

$$\frac{x+y}{x\,(x+2\,y)}\,d\,x+\frac{1}{x+2\,y}\,d\,y=0$$

di cui il primo membro è il differenziale esàtto di

$$\frac{1}{2}\log x\,(x+2\,y).$$

Se noi possiamo in altra maniera qualunque conoscere un fattore integrante μ di un'equazione differenziale omogenea, siccome sappiamo che un fattore integrante è certamente

$$\frac{1}{M\,x+N\,y}$$

possiamo asserire che l'integrale generale sarà il *rapporto di* μ *per* $\frac{1}{M\,x+N\,y}$ a meno che tal

rapporto non sia già da sè una costante. Cio
l'integrale generale sarà

$$\mu\,(M\,x + N\,y) = \text{cost.}$$

Onde se il primo membro dell'equazione è gi
un differenziale esatto allora possiamo prender
$\mu = 1$ e si ha che l'integrale generale sarà

$$M\,x + N\,y = \text{cost.}$$

*a meno che il primo membro di tal relazione no
sia da sè una costante.*

Così p. es., sappiamo che il primo membro del-
l'equazione:

$$\frac{x+y}{x\,(x+2\,y)}\,d\,x + \frac{1}{x+2\,y}\,d\,y = 0$$

è un differenziale esatto; ma però formando $Mx+Ny$
si ha la costante *1*. Invece per le equazioni

$$y\,d\,x + x\,d\,y = 0$$

$$(x+y)\,d\,x + x\,d\,y = 0$$

formando la espressione $M\,x + N\,y$ si ha rispet-
tivamente

$$2\,x\,y$$

$$x\,(x + 2\,y)$$

che eguagliati a costanti saranno dunque gli in-
tegrali.

§ 9. Integrali singolari delle equazioni differen-*ziali* ordinarie. — Abbiamo già accennato nei pa-
ragrafi precedenti all' esistenza di un' altra spec

di integrali delle equazioni differenziali, oltre gli *integrali generali e particolari.* Ora passeremo a dirne qualcosa di più dettagliato.

Si abbia un'equazione differenziale

$$f\left(x,\ y,\ \frac{d\,y}{d\,x}\right)=0$$

e il suo integrale generale:

$$\varphi\,(x\,y\ C)=0$$

dove C è una costante arbitraria. Si abbia poi un'altro integrale $\psi\,(x\,y)=0$ della stessa equazione differenziale: potrà avvenire che φ per un valore particolare di C diventi proprio la funzione ψ; nel qual caso ψ è un *integrale particolare.* Ma potrà anche avvenire, come ora vedremo, che ψ non si possa ricavare da φ particolarizzando C. Allora sarà un integrale di altra natura e che chiameremo *singolare.*

È chiaro intanto che se esiste una tale ψ si deve sempre poter ricavare da φ dando a C non più un valore costante determinato, ma ponendo per C una funzione di x, y. Infatti basta prendere per C il valore che si ricava dalla relazione:

$$\varphi\,(x\,y\,.C)=\psi\,(x\,y)$$

Passiamo allora a vedere se è possibile dare nell'integrale generale, a C per valore una funzione di x, y in modo che la espressione che ne risulti sia ancora un integrale dell'equazione data.

Infatti se φ è l' integrale, vuol dire che se da esso ricaviamo $\frac{d\,y}{d\,x}$, e poi eliminiamo C colla relazione $\varphi = 0$ si deve avere lo stesso valore di $\frac{dy}{dx}$ ricavato dall'equazione differenziale.

Ora il $\frac{dy}{dx}$ ricavato da $\varphi = 0$ è quello che si ricava da:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{1}$$

Se invece C si suppone una funzione di x, y allora il $\frac{dy}{dx}$ ricavato da $\varphi = 0$ è quello che si ricava da

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{2}$$

Queste due relazioni sono identiche se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

e poichè da

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

si ricaverebbe C costante e quindi non più funzione di x, y, così dovremo porre eguale a zero l'altro fattore, cioè

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0.$$

Se dunque determiniamo C in modo che si verifichi questa relazione, allora potrà accadere di imbattersi in un integrale dell' equazione data, e si avrà così l'integrale singolare.

Si abbia p. es. da integrare

$$d\,x = \frac{y\,d\,y}{\sqrt{a^2 - y^2}}.$$

L'integrale generale è

$$(x - C)^2 + y^2 = a^2$$

che è l'equazione di una serie di cerchi col centro sull'asse di x e col medesimo raggio a.

Per avere le soluzioni singolari dobbiamo porre

$$0 = \frac{\partial\,\varphi}{\partial\,C} = -2\,(x - C),$$

la quale equazione ci dà

$$C = x$$

che posto nell'integrale generale dà

$$y^2 = a^2$$

equazione che rappresenta le due rette

$$y - a = 0$$
$$y + a = 0$$

Queste due rette sono tangenti a tutti gli infiniti cerchi determinati dall'integrale generale. Possiamo dire più precisamente che queste due rette rappresentano l'inviluppo di quei cerchi.

È facile dimostrare che questa proprietà è generale per tutti quegli integrali singolari che si hanno ponendo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial C} = 0.$$

In altri termini, immaginiamo che l'integrale generale si rappresenti geometricamente sul piano; esso rappresenterà una serie di curve che si otterranno variando la costante C. Allora *l'integrale singolare rappresenterà precisamente l'inviluppo di tutte queste curve, quando tale inviluppo esiste.*

Infatti noi sappiamo che per ricavare l'*inviluppo* dobbiamo derivare l'equazione della serie di curve rispetto al parametro C, e poi eliminare il parametro fra l'equazione data e questa derivata; ora questo è precisamente il processo per ottenere la soluzione *singolare.*

§ 10. Equazioni differenziali lineari omogenee.—

Nei paragrafi precedenti abbiamo studiate le equazioni differenziali di 1.° ordine; ora dovremo passare a quelle di ordine superiore.

Considereremo per ora una classe speciale di equazioni differenziali di ordine superiore, e propriamente le cosiddette *equazioni differenziali lineari.*

Si indica con questo nome una equazione differenziale del tipo

$$X_0 \frac{d^n y}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \ldots + X_{n-1} \frac{d y}{d x} + X_n y = X_{n+1}$$

dove le X sono tutte funzioni della sola variabile

x; in tale equazione compariscono le y o le sue derivate successive solo *linearmente.*

Si chiama poi *omogenea* una siffatta equazione quando manca il secondo membro, quando cioè in particolare è

$$X_{n+1} = 0$$

In questo capitolo studieremo solo le omogenee, e poi in seguito faremo vedere che l'*integrazione di ogni equazione non omogenea si può sempre ridurre all'integrazione di una equazione omogenea.*

Cominciamo a dimostrare alcune proprietà delle equazioni lineari omogenee, la cui forma generale è dunque:

$$X_0 \frac{d^n y}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \ldots + X_n y = 0 \qquad (1)$$

In primo luogo *con una opportuna trasformazione questa equazione si può ridurre ad un'altra di ordine* n — 1, *ma non più lineare.*

Infatti poniamo

$$y = e^{\int z dx} .$$

dove z rappresenti la nuova funzione in luogo di y.

Allora

$$\frac{d y}{d x} = e^{\int z dx} z$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = e^{\int z dx} \left[z^2 + \frac{d z}{d x} \right]$$

. . . .

Si vede di qui che in generale la derivata di y d' ordine k si esprime mediante le derivate di z fino a quella di ordine $k - 1$.

Sostituendo queste espressioni nella (1) si può sopprimere il fattore comune a tutti i termini:

$$e^{\int z dx};$$

resta allora un' equazione in z che contiene le derivate di z sino a quella di ordine $n - 1$.

Con ciò il teorema è dimostrato.

In secondo luogo è chiaro che se y_1 è una soluzione particolare di (1) sarà soluzione di (1) anche la $c_1 y_1$ essendo c_1 una costante arbitraria.

E così se y_1, y_2 sono due soluzioni particolari, l'espressione

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

dove $c_1 c_2$ sono costanti arbitrarie, sarà anche un integrale. Perchè sostituendo in (1) in luogo di y tale espressione si ottengono due categorie di termini, in una delle quali c'è sempre come fattore comune c_1 e poi tutte le derivate della sola y_1, e nell'altra c'è come fattore comune c_2 e poi le derivate della sola y_2; e ciascuna di queste classi di termini è zero da sè, perchè $y_1 y_2$ soddisfano per ipotesi all'equazione (1).

In generale se sono note n *soluzioni particolari di* (1)

$$y_1, y_2 \dots y_n$$

allora possiamo analogamente dire che:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \tag{2}$$

è anche un integrale di (1).

Poichè questo contiene n costanti $c_1\, c_2 \ldots c_n$ viene spontanea la domanda. Può (2) essere proprio integrale generale?

Sappiamo che perchè (2) sia l'integrale generale è necessario che le costanti sieno combinate fra loro in una maniera speciale, cioè che formando di (2) le $n-1$ prime equazioni derivate se ne possano ricavare le c in modo determinato in funzione di $x, y', y'' \ldots y^{(n-1)}$.

Ora le equazioni dalle quali dobbiamo di ricavare le c sono:

$$\begin{array}{llll} y & = c_1 y_1 & + c_2 y_2 & + \ldots + c_n y_n \\ y' & = c_1 y_1' & + c_2 y_2' & + \ldots + c_n y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(n-1)} & = c_1 y_1^{(n-1)} & + c_2 y_2^{(n-1)} & + \ldots + c_n y_n^{(n-1)} \end{array}$$

onde *è necessario che il determinante:*

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = D$$

sia diverso da zero.

È interessante però fissare in che modo D deve essere diverso da zero. Tutti i termini di D sono funzioni determinate della variabile x. Ora è chiaro che esistono in generale sempre valori di x pei quali si ha $D = 0$; onde bisognerà immaginare *che x si muova* dentro un campo in cui non vi sia alcuno di tali punti x. *In altri termini la* y *definita dalla formola* (2) *è integrale generale di* (1) *solo in un campo in nessun punto del quale* D *sia zero.*

Potrebbe però darsi che per qualunque x il determinante D sia sempre zero, allora la (2) non può rappresentare in nessun caso l' integrale generale; cioè gli n integrali particolari $y_1 y_2 \dots y_n$ non sono tutti scelti in maniera da potere dare l' integrale generale, cioè, come si usa dire, non costituiscono un *sistema fondamentale.* Noi nel calcolo differenziale abbiamo già studiato un determinante formato come D, che abbiamo chiamato wronskiano (v. Cap. V, § 3), e abbiamo dimostrato che se esso è zero per qualunque x, allora fra le funzioni y esiste una relazione lineare; possiamo dunque conchiudere, che *perchè le* $y_1 y_2 \dots y_n$ *costituiscano un sistema fondamentale è necessario che fra esse non esista alcuna relazione lineare omogenea.*

Ma ora si presenta spontanea la domanda: Esiste un *sistema fondamentale?* Questa domanda coincide coll'altra: L'integrale generale dell'equazione differenziale lineare omogenea si può porre sotto la forma (2), cioè in modo che le n costanti vi entrino linearmente?

Se si risponde affermativamente a questa domanda è chiaro che si sarà risposto affermativamente anche alla prima.

Ora si può dimostrare che effettivamente l'integrale generale di (1) *si può mettere sempre sotto la forma* (2).

E per ciò fare cominciamo col fissare il seguente teorema:

Se di un' equazione come (1) *si conosce un integrale particolare*

$$y = y_1$$

allora l'integrazione di (1) *si può ridurre a quella di una altra equazione dello stesso tipo ma in cui l'ordine è diminuito di una unità.*

Infatti sia y_1 l'integrale particolare e poniamo:

$$y = y_1 z$$

dove z sia la nuova variabile che si vuole introdurre in luogo di y.

Allora:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} z + y_1 \frac{dz}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 y_1}{dx^2} z + 2 \frac{dy_1}{dx} \frac{dz}{dx} + \frac{d^2 z}{dx^2} y_1$$

. . . .

Sostituendo questi valori in (1) e osservando che la parte contenente per fattore z si distrugge, perchè y_1 è soluzione di (1) per ipotesi, resta una equazione lineare contenente solo le derivate di z, da quella di ordine n sino a quella di ordine 1.°, e non contenente più z esplicitamente. Cioè si ha:

$$X'_0 \frac{d^n z}{dx^n} + X_1' \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + X'_{n-1} \frac{dz}{dx} = 0$$

dove le X' *sono funzioni di* x.

Ponendo allora

$$\frac{dz}{dx} = u$$

si ha

$$X_0' \frac{d^{n-1} u}{d x^{n-1}} + \ldots + X'_{n-1} u = 0,$$

cioè un'equazione lineare omogenea di ordine $n-1$. Trovato u si ha:

$$z = \int u \, dx + c_1$$

e quindi

$$y = y_1 z = y_1 \left(\int u \, dx + c_1 \right).$$

Ciò posto *supponiamo che per un'equazione differenziale lineare di ordine* n − 1 *l'integrale si possa sempre porre sotto la forma:*

$$u = c_2 u_2 + c_3 u_3 + \ldots + c_n u_n$$

e dimostriamo che allora la stessa proprietà si verifica per una equazione differenziale lineare di ordine n.

Infatti dalla trasformazione precedente risulta, se y_1 è un integrale particolare della data:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 \int u_2 \, dx + c_3 y_1 \int u_3 \, dx + \ldots +$$

$$+ c_n y_1 \int u_n \, dx.$$

Ora:

$$y_1 \int u_2\, d\, x \quad , \quad y_1 \int u_3\, d\, x \,, \ldots y_1 \int u_n\, d\, x$$

son tutti integrali particolari della equazione data e quindi li possiamo chiamare $y_2\, y_3 \ldots y_n$, e con ciò si è dimostrato che se il teorema è vero per l'ordine $n-1$ è vero per l'ordine n.

Resta a far vedere che per $n=1$ il teorema è vero, cioè che per una equazione lineare di 1.° ordine omogenea, l'integrale può sempre porsi sotto la forma:

$$y = c\, y_1$$

dove y_1 è un integrale particolare.

Ora per l'equazione

$$\frac{d\,y}{d\,x} + X_1\, y = 0$$

si ha:

$$\frac{d\,y}{y} = -\, X_1\, d\,x$$

e integrando

$$\log y = -\int X_1\, d\,x + \log c$$

$$y = c\, e^{-\int X_1 dx}$$

come si dovea dimostrare.

§ 11. **Equazioni lineari omogenee con coefficienti costanti** — *Passiamo a considerare il caso in cui* l'equazione lineare (1) del paragrafo precedente abbia tutti i coefficienti X costanti, cioè sia della forma

$$a_0 \frac{d^n y}{d x^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d y}{d x} + a_n y = 0 \quad (1)$$

Ricerchiamo se una funzione del tipo $y = e^{\alpha x}$, dove α sia una costante, può soddisfare questa equazione.

Le derivate successive di y sono:

$$\frac{d y}{d x} = \alpha\, e^{\alpha x}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^3} = \alpha^2\, e_{\alpha x}$$

. . . . .

onde sostituendo in (1) si ha:

$$e^{\alpha x} (a_0\, \alpha^n + a_1\, \alpha^{n-1} + \dots + a_n) = 0$$

e poichè $e^{\alpha x}$ non può essere zero, lo dovrà essere l'altro fattore; onde perchè $y = e^{\alpha x}$ rappresenti una soluzione particolare di (1) è necessario che α sia una delle n radici dell'equazione algebrica

$$a_0\, \alpha^n + a_1\, \alpha^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2)$$

la quale si forma da (1) ponendo in luogo delle derivate successive di y le potenze successive della variabile α. Se dunque noi risolviamo la (2) e supponiamo che le sue n radici sieno tutte disuguali e sieno:

$$\alpha_1\, \alpha_2 \dots \alpha_n$$

allora

$$e^{\alpha_1 x}, \quad e^{\alpha_2 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}$$

rappresentano altrettante soluzioni particolari distinte di (1). Se quindi dimostriamo che il determinante formato con queste soluzioni e le loro derivate sino a quelle di ordine $n-1$, è diverso da zero, allora potremo affermare, giusta la teoria sviluppata avanti, che l'integrale generale è:

$$y = c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + c_n e^{\alpha_n x}.$$

Ora il determinante di cui si parla è effettivamente diverso da zero, perchè esso è:

$$\begin{vmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} & \ldots & e^{\alpha_n x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2 e^{\alpha_2 x} & \ldots & \alpha_n e^{\alpha_n x} \\ \alpha_1^2 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2^2 e^{\alpha_2 x} & \ldots & \alpha^2_n e^{\alpha_n x} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{a-1} e^{\alpha_1 x} & \alpha_2^{n-1} e^{\alpha_2 x} & \ldots & \alpha_n^{n-1} e^{\alpha_n x} \end{vmatrix}$$

cioè:

$$e^{\alpha_1 x} e^{\alpha_2 x} \ldots e^{\alpha_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots \alpha_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

di cui il primo fattore che è un esponenziale sempre diverso da zero e il secondo fattore ch è un determinante, è uguale, come si sa dall'a gebra, al prodotto delle differenze delle α combi nate a due a due fra loro in tutti i modi possi bili; quindi esso non può essere zero almenoch due delle α non sieno fra loro eguali, ciò che n abbiamo escluso.

Sia p. es., l'equazione:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - u^2 y = 0$$

L'equazione algebrica corrispondente è

$$\alpha^2 - u^2 = 0$$

donde:

$$\alpha = \pm u$$

quindi l'integrale generale è:

$$y = c_1 e^{u x} + c_2 e^{-u x}$$

Immaginiamo ora che l'equazione caratteristic (2) abbia due radici eguali; allora non si avrann più n integrali particolari distinti, e quindi no più si troverà l'integrale generale per la via ir dicata.

Per trovare in tal caso la forma che acquist l'integrale generale noi ci serviremo di un metod di passaggio del limite.

Sieno α_1 α_2 le due radici eguali. Incominceren *col* supporre che prima le due radici sieno dis *guali*, e differiscano per una quantità h. Allo possiamo trovare colla formola precedente l'integrale generale; trasformando poi questo in modo opportuno e passando al limite per $h=0$ avremo l'integrale generale pel nostro caso.

Se dunque:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + h$$

allora l'integrale generale sarà:

$$c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} + \ldots + c_n e^{\alpha_n x} =$$

$$= (c_1 + c_2 e^{hx}) e^{\alpha_1 x} + c_3 e^{\alpha_3 x} + \ldots + c_n e^{\alpha_n x} =$$

$$= \left[(c_1 + c_2) + c_2 h x + c_2 \frac{h^2 x^2}{2!} + \ldots\right] e^{\alpha_1 x} + c_3 e^{\alpha_3 x} + .$$

Poniamo ora

$$c_1 + c_2 = C_1 \quad , \quad c_2 h = C_2$$

si ha:

$$\left[C_1 + C_2 x + C_2 \frac{h x^2}{2!} + \ldots\right] e^{\alpha_1 x} + c_3 e^{\alpha_3 x} + \ldots$$

e facendo poi $h=0$ si ha infine

$$(C_1 + C_2 x) e^{\alpha_1 x} + c_3 e^{\alpha_3 x} + \ldots$$

che è l'integrale generale pel caso in cui due radici dell'equazione caratteristica sono eguali.

Analogamente si ha in generale, che se k radici sono eguali fra loro, allora basta moltiplicare la esponenziale corrispondente a quella radice per un *polinomio intero* in x di ordine $k-1$ *di cui i coefficienti sieno tutti arbitrari.*

Del resto possiamo effettivamente verificare che se α_1 è radice doppia dell'equazione in α allora

$$y = x\, e^{\alpha_1 x}$$

è un altro integrale particolare.

Giacchè

$$\frac{dy}{dx} = e^{\alpha_1 x} + x\,\alpha_1\, e^{\alpha_1 x}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2\,\alpha_1\, e^{\alpha_1 x} + x\,\alpha_1^2\, e^{\alpha_1 x}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = 3\,\alpha_1^2\, e^{\alpha_1 x} + x\,\alpha_1^3\, e^{\alpha_1 x}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

e sostituendo nell' equazione differenziale data e sopprimendo il fattore esponenziale comune, resta:

$$(a_0\,\alpha_1^n + a_1\,\alpha_1^{n-1} + \ldots a_{n-1}\,x + a_n) +$$
$$+ (n\,a_1\,\alpha_1^{n-1} + (n-1)\,a_1\,\alpha_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1}) = 0$$

la quale relazione è effettivamente verificata se α_1 è radice doppia, perchè allora per $x = \alpha_1$ si annulla il primo membro dell' equazione e la sua prima derivata, e quindi ciascuna delle parentesi è effettivamente da sè zero.

Così in generale si potrebbe dimostrare che se α_1 è radice multipla di ordine k, allora:

$$x^{k-1}\, e^{\alpha_1 x}$$

è integrale particolare.

Sia p. es. l'equazione differenziale:

$$\frac{d^n y}{d x^n} = 0$$

l'equazione algebrica corrispondente è:

$$\alpha^n = 0$$

che ha tutte le radici eguali a zero. Quindi possiamo dire che l'integrale generale è:

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots + c_n x^{n-1}$$

Immaginiamo ora finalmente che fra le radici α ve ne sieno alcune immaginarie; allora si potrebbe applicare lo stesso metodo e si avrebbe l'integrale generale sotto forma immaginaria.

Ora poichè tutti i principii da noi dati finora suppongono sempre funzioni reali di variabili reali, così dobbiamo cercare di escludere sempre ogni considerazione di immaginari.

Epperò cercheremo di dare l'integrale generale sotto forma reale. Sieno:

$$\alpha_1 = \beta + i\gamma \quad , \quad \alpha_2 = \beta - i\gamma$$

le due radici immaginarie coniugate.

Allora

$$c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x} = e^{\beta y} \left[c_1 e^{i\gamma x} + c_2 e^{-i\gamma x}\right] =$$
$$= e^{\beta x} [c_1 (\cos\gamma x + i \operatorname{sen}\gamma x) + c_2 (\cos\gamma x - i \operatorname{sen}\gamma x)] =$$
$$= e^{\beta x} [c_1 + c_2) \cos\gamma x + (c_1 - c_2)\, i \operatorname{sen}\gamma x]$$

e ponendo:

$$c_1 + c_2 = C_1$$
$$i\,(c_1 - c_2) = C_2$$

dove C_1, C_2 sono due nuove costanti arbitrarie si ha:

$$e^{\beta x}[C_1 \cos \gamma x + C_2 \operatorname{sen} \gamma x]$$

Quindi nell' integrale generale c'entrerà questo termine in luogo dei due corrispondenti alle radici immaginarie.

Anche qui si potrebbe far vedere che effettivamente

$$\cos (\gamma x)\, e^{\beta x}$$
$$\operatorname{sen} (\gamma x)\, e^{\beta x}$$

rappresentano due integrali particolari dell' equazione data.

Sia p. es. l'equazione:

$$\frac{d^3 y}{d x^3} - \frac{d y}{d x} - 6 y = 0.$$

L'equazione algebrica corrispondente è:

$$\alpha^3 - \alpha - 6 = 0$$

che ha per radici

$$\alpha = 2 \quad , \quad \alpha = -1 + i\sqrt{2} \quad , \quad \alpha = -1 - i\sqrt{2}$$

e quindi l'integrale generale sarà:

$$y = c_1 e^{2x} + [c^2 \cos (\sqrt{2}\, x) + c_3 \operatorname{sen} (\sqrt{2}\, x)]\, e^{-x}$$

Se consideriamo ancora l'equazione:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + y = 0$$

applicando il metodo trovato si trova:

$$y = C \cos x + C_1 \operatorname{sen} x$$

A questo risultato si può giungere osservando che $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ sono proprio due funzioni tali che le loro seconde derivate sono eguali alla funzione stessa, ma col segno cambiato, e quindi esse rappresentano due soluzioni particolari dell'equazione data.

§ 12. **Equazioni lineari non omogenee.** – Si abbia l'equazione non omogenea:

$$X_0 \frac{d^n y}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \ldots + X_n y = X \qquad (1)$$

dove le X sono funzioni della sola x.

Allora si integri l'equazione omogenea:

$$X_0 \frac{d^n y}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \ldots + X_n y = 0 \qquad (2)$$

che si ricava da (1) sopprimendo il secondo membro.

Sia

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n \qquad (3)$$

l'integrale generale dell'equazione (2). Noi vogliamo vedere se è possibile soddisfare ad (1) colla stessa funzione (3) in cui però supporremo che le c non sieno più costanti ma funzioni di x.

Formiamo dunque le derivate successive di (3).

Si ha in primo luogo:

$$\frac{d\,y}{d\,\omega} = c_1 \frac{d\,y_1}{d\,x} + \ldots + c_n \frac{d\,y_n}{d\,x} +$$

$$+ y_1 \frac{d\,c_1}{d\,x} + \ldots + y_n \frac{d\,c_n}{d\,x}.$$

Poniamo eguale a zero la espressione

$$y_1 \frac{d\,c_1}{d\,x} + \ldots + y_n \frac{d\,c_n}{d\,x} = 0$$

e allora resta semplicemente:

$$\frac{d\,y}{d\,x} = c_1 \frac{d\,y_1}{d\,y} + \ldots + c_n \frac{d\,y_n}{d\,x}$$

cioè un'espressione eguale a quella che si avrebbe se le c fossero considerate come costanti.

Deriviamo ancora questa prima derivata, e poniamo poi eguale a zero la parte contenente le derivate di c, e così di seguito eseguiamo questo processo sino alla derivata di ordine $n-1$.

Abbiamo allora il sistema di equazioni:

$$y = c_1\,y_1 + c_2\,y_2 + \ldots + c_n\,y_n$$

$$\frac{d\,y}{d\,x} = c_1 \frac{d\,y_1}{d\,x} + \ldots + c_n \frac{d\,y_n}{d\,x}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{d^{n-1}\,y}{d\,x^{n-1}} = c_1 \frac{d^{n-1}\,y_1}{d\,x^{n-1}} + \ldots + c_n \frac{d^{n-1}\,y_n}{d\,x^{n-1}}$$

avendo sottoposte le derivate delle c alle condizioni:

$$\left.\begin{array}{l}
y_1 \dfrac{d\,c_1}{d\,x} + \ldots + \qquad y_n \dfrac{d\,c_n}{d\,x} = 0 \\[2ex]
\dfrac{d\,y_1}{d\,x}\dfrac{d\,c_1}{d\,x} + \ldots + \qquad \dfrac{d\,y_n}{d\,x}\dfrac{d\,c_n}{d\,x} = 0 \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dfrac{d^{n-2} y_1}{d\,x^{n-2}}\dfrac{d\,c_1}{d\,x} + \ldots + \dfrac{d^{n-2} y_n}{d\,x^{n-2}}\dfrac{d\,c_n}{d\,x} = 0
\end{array}\right\} \quad (4)$$

Con ciò le $c_1 \ldots c_n$ le abbiamo sottoposte ad $n-1$ condizioni espresse da altrettante equazioni differenziali. Le sottoporremo poi ancora ad una ultima condizione e propriamente alla condizione corrispondente al fatto che (3) debba essere integrale di (1). Vediamo come si esprime quest'ultima condizione.

Si ha evidentemente:

$$\frac{d^n y}{d\,x^n} = c_1 \frac{d^n y_1}{d\,x^n} + \ldots + c_n \frac{d^n y_n}{d\,x^n} + $$
$$+ \frac{d^{n-1} y_1}{d\,x^{n-1}}\frac{d\,c_1}{d\,x} + \ldots + \frac{d^{n-1} y_n}{d\,x^{n-1}}\frac{d\,c_n}{d\,x}$$

e sostituendo i valori delle derivate successive *di y nel primo* membro di (1) si ha, ordinando i termini:

$$c_1\left(X_0 \frac{d^n y_1}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_1}{d x^{n-1}} + \ldots + X_n y_1\right) +$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+ c_n\left(X_0 \frac{d^n y_n}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_n}{d x^{n-1}} + \ldots + X_n y_n\right) +$$

$$+ X_0\left(\frac{d^{n-1} y_1}{d x^{n-1}} \frac{d c_1}{d x} + \ldots + \frac{d^{n-1} y_n}{d x^{n-1}} \frac{d c_n}{d x}\right)$$

e perchè la (1) sia soddisfatta deve dunque essere tutta questa espressione eguale a X.

Ora tutte le quantità contenute nelle prime parentesi sono zero perchè $y_1\, y_2 \ldots y_n$ sono soluzioni particolari di (2), onde resta l' altra condizione a cui debbono soddisfare le derivate delle c, cioè:

$$\frac{d^{n-1} y_1}{d x^{n-1}} \frac{d c_1}{d x} + \ldots + \frac{d^{n-1} y_n}{d x^{n-1}} \frac{d c_n}{d x} = \frac{X}{X_0}. \qquad (5)$$

Se si potranno trovare le c in modo da soddisfare a tutte queste n relazioni differenziali cioè le (4) e la (5), allora avremo risoluto il problema.

Ora queste n equazioni sono prima di tutto lineari in:

$$\frac{d c_1}{d x}, \frac{d c_2}{d x}, \ldots, \frac{d c_n}{d x} \qquad (6)$$

e quindi potremo ricavare i valori di queste derivate se il determinante dei coefficienti non è zero.

Ora ciò si verifica effettivamente perchè il determinante dei coefficienti è:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \dots & y_n \\ y_1' & y_2' \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

cioè proprio il determinante fondamentale delle soluzioni particolari $y_1 y_2 \dots y_n$, il quale (vedi paragrafo precedente) è diverso da zero altrimenti (3) non sarebbe l'integrale generale di (2).

Determinate dunque le derivate (6) in funzione di x, con semplici quadrature saranno poi determinate le c.

La determinazione di ciascuna c porta con sè daccapo una costante arbitraria, quindi si hanno ancora in tutto n costanti arbitrarie.

Si abbia da integrare

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - n^2 y = e^x .$$

Bisogna prima di tutto trovare l'integrale generale di:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} - n^2 y = 0$$

che è:

$$y = c_1 e^{nx} + c_2 e^{-nx}.$$

Indi bisogna determinare le c_1 c_2 in modo che

$$y_1 \frac{d\,c_1}{d\,x} + y_2 \frac{d\,c_2}{d\,x} = 0$$

$$y_1' \frac{d\,c_1}{d\,x} + y_2' \frac{d\,c_2}{d\,x} = e^x$$

cioè

$$e^{nx} \frac{d\,c_1}{d\,x} + e^{-nx} \frac{d\,c_2}{d\,x} = 0$$

$$n\,e^{nx} \frac{d\,c_1}{dx} + n\,e^{-nx} \frac{d\,c_2}{d\,x} = e^x$$

donde

$$\frac{d\,c_1}{d\,x} = \frac{1}{2\,n} e^{(1-n)x} \quad , \quad \frac{d\,c_2}{d\,x} = -\frac{1}{2\,n} e^{(1+n)x} .$$

Di qui si ha:

$$c_1 = \frac{1}{2\,n} \int e^{(1-n)x}\,d\,x = \frac{1}{2\,n\,(1-n)} e^{(1-n)x} + C_1$$

$$c_2 = -\frac{1}{2\,n} \int e^{(1+n)x}\,d\,x = -\frac{1}{2\,n\,(1+n)} e^{(1-n)x} + C_2$$

e quindi l' integrale generale della data equazione è:

$$y = \frac{1}{2\,n\,(1-n)} e^x + C_1\,e^{nx} - \frac{1}{2\,n\,(1+n)} e^x +$$

$$+ C_2\,e^{-nx} = \frac{1}{1-n^2} e^x + C_1\,e^{nx} + C_2\,e^{-nx}.$$

§ 13. **Teoremi sulle equazioni differenziali lineari. Formola di Liouville.** — Abbiamo visto nel precedente capitolo come si può ricavare l'integrale dell'equazione lineare completa (con secondo membro diverso da zero) da quello dell'equazione omogenea che si ricava sopprimendo il secondo membro. Ora vogliamo dimostrare alcuni altri teoremi. Sia data l'equazione

$$X_0 \frac{d^n y}{d x^n} + X_1 \frac{d y^{n-1}}{d x^{n-1}} + \ldots + X_n y = X \qquad (1)$$

e formiamo l'equazione omogenea corrispondente:

$$X_0 \frac{d^n y}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \ldots + X y = 0. \qquad (2)$$

Si conosca un integrale particolare di (1), *e sia* Y *e l'integrale generale di* (2), *che sia* Y_1; *allora si potrà subito conoscere l'integrale generale di* (1) *che sarà dato semplicemente dalla formola:*

$$Y + Y_1$$

Infatti per ipotesi si ha che Y sostituito in luogo di y, nel primo membro di (1) lo riduce eguale ad X, e Y_1 sostituito nello stesso modo nel primo membro di (1) lo riduce eguale a zero, dunque $(Y + Y_1)$ sostituito nel primo membro di (1) lo ridurrà eguale ad X, cioè ($Y + Y_1$ è integrale di (1), e poichè contiene n costanti (perchè Y_1 è integrale generale di (2)) si ha che esso è l' integrale generale di (1).

Si vede dunque che mentre colla teoria sviluppata nel paragrafo precedente, conosciuto l' inte-

grale generale di (2), per conoscere quello di (
bisognava ancora fare n quadrature, queste ultir
si possono risparmiare se si conosce un integra
particolare di (1).

Consideriamo p. es., l'equazione:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + a^2 y = 2 \cos m x + 3 \operatorname{sen} m x.$$

Conoscendo l'integrale generale di:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + a^2 y = 0$$

che è:

$$Y_1 = c_1 \cos a x + c_2 \operatorname{sen} a x$$

per risolvere l'equazione data ci basterà di trova
un suo integrale particolare.

Sperimentiamo un'espressione della forma:

$$Y = \alpha \cos m x + \beta \operatorname{sen} m x$$

dove α, β sieno due costanti incognite.

Facendo le derivate e sostituendo nell'equazio
data si trova che essa è soddisfatta se:

$$\alpha = \frac{2}{a^2 - m^2} \qquad \beta = \frac{3}{a^2 - m^2}$$

dunque:

$$y = c_1 \cos a x + c_2 \operatorname{sen} a x + \frac{2 \cos m x + 3 \operatorname{sen} m}{a^2 - m^2}$$

è l'integrale richiesto.

Si può ora passare a dimostrare i seguenti teoremi:

1.° *Se si conosce un integrale particolare di* (1) *allora l'integrazione si può ridurre a quella di un'altra equazione lineare dello stesso ordine ma omogenea.*

2.° *Se si conosce un integrale particolare di* (2) *allora l'integrazione si può ridurre a quella di un'altra equazione lineare non omogenea ma di ordine inferiore.*

Sia Y l'integrale particolare di (1), allora basta fare la trasformazione

$$y = Y + z$$

e si giunge facilmente ad avere un' equazione in z omogenea e dello stesso ordine, e con ciò resta dimostrato il 1.° teorema.

Se poi Y_1 è un integrale particolare di (2) allora colla trasformazione

$$y = Y_1 z$$

si dimostra il secondo teorema.

Vogliamo finalmente dimostrare un teorema notevole dovuto a Liouville sull'espressione del determinante wronskiano D (v. *Calcolo differenziale*, Cap. V, § 3) degli n integrali particolari dell'equazione differenziale lineare omogenea.

Dalle relazioni:

$$X_0 \frac{d^n y_1}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_1}{d x^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y_1}{d x^{n-2}} + \ldots + X_n y_1 = 0$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$X_0 \frac{d^n y^n}{d x^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y_n}{d x^{n-1}} + X_2 \frac{d^{n-2} y_n}{d x^{n-2}} + \ldots + X_n y_n = 0$$

eliminando $X_2\, X_3 \ldots X_n$ si ha:

$$\begin{vmatrix} X_0 \dfrac{d^n y_1}{d x^n} + X_1 \dfrac{d^{n-1} y_1}{d x^{n-1}}, & \dfrac{d^{n-2} y_1}{d x^{n-2}}, & \ldots y_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ X_0 \dfrac{d^n y_n}{d x^n} + X_1 \dfrac{d^{n-1} y_n}{d x^n}, & \dfrac{d^{n-2} y_n}{d x^{n-2}}, & \ldots y_n \end{vmatrix} =$$

e poichè gli elementi della prima colonna ri… tano di due termini così questo determinante scinde in due, cioè

$$X_0 \begin{vmatrix} y_1^{(n)}\, y_1^{(n-2)} \ldots y_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(n)} y_n^{(n-2)} \ldots y_n \end{vmatrix} +$$

$$+ X_1 \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}\ \ y_1^{(n-2)} \ldots y_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(n-1)}\ \ y_n^{(n-2)} \ldots y_n \end{vmatrix} = 0$$

e in forza di un teorema dimostrato (v. *Cal… differenziale*, Cap. V, § 3), il primo determina… è la derivata del secondo, che chiameremo *I* quindi si ha:

$$X_0 \frac{d\,D}{d\,x} + X_1\, D = 0$$

donde

$$\frac{dD}{D} = -\frac{X_1}{X_0}dx$$

$$\log D = -\int \frac{X_1}{X_0}dx + \log C$$

e quindi

$$D = Ce^{-\int \frac{X_1}{X_0}dx}$$

cioè il determinante D si esprime con questa formola mediante un esponenziale.

Questa è la cosiddetta *formola di Liouville.*

§ 14. Sopra certe classi particolari di equazioni differenziali lineari. — Per il caso in cui le equazioni lineari abbiamo coefficienti costanti noi abbiamo visto che si può trovare l'integrale generale e tale ricerca dipende dalla risoluzione di una equazione algebrica.

Nel caso in cui i coefficienti sono funzioni di x non possiamo dare in generale nessun metodo per la risoluzione, il cui successo dipenderà da artifizii più o meno opportuni.

Vogliamo però qui studiare alcuni tipi fra i più semplici che ci si presentano.

Sia l'equazione

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \frac{a_1}{ax+b}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \dots +$$

$$+ \frac{a_i}{(ax+b)^i}\frac{d^{n-i}y}{dx^{n-i}} + \dots + \frac{a_n}{(ax+b)^n}y = X$$

dove $a_1 \ldots a_n$, a, b sono costanti e X è una funzione qualunque di x.

Poniamo:

$$a\,x + b = e^t$$

e prendiamo per variabile indipendente t in luogo di x.

Allora:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\,\frac{a}{a\,x + b}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dt}{dx}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) =$$

$$= \frac{a}{a\,x + b}\left[\frac{d^2 y}{dt^2}\,\frac{a}{a\,x + b} - \frac{dy}{dt}\,\frac{a^2}{(a\,x + b)^2}\,\frac{a\,x + b}{a}\right] =$$

$$= \frac{a^2}{(a\,x + b)^2}\left[\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

. . . .

Sostituendo questi valori nell'equazione data e moltiplicando per $(a\,x + b)^n$ si ha un'equazione con coefficienti costanti.

Sia p. es.

$$x^2\frac{d^2 y}{dx^2} - (2\,n - 1)\,x\,\frac{dy}{dx} + n^2 y = 0.$$

Dividendo per x^2 questa equazione risulta esattamente del tipo sopra considerato. Poniamo:

$$x = e^t$$

e allora l'equazione diventa:

$$\left[\frac{d^2 y}{d t^2} - \frac{d y}{d t}\right] - (2n - 1)\frac{d y}{d t} + n^2 y = 0$$

cioè

$$\frac{d^2 y}{d t^2} - 2n\frac{d y}{d t} + n^2 y = 0.$$

L' equazione algebrica caratteristica corrispondente è:

$$z^2 - 2nz + n^2 = 0$$

cioè

$$(z - n)^2 = 0$$

che dà

$$z = n$$

come radice doppia.

Quindi due integrali particolari della proposta saranno:

$$e^{nt} \quad , \quad t\, e^{nt}$$

e perciò l'integrale generale è:

$$c_1\, e^{nt} + c_2\, t\, e^{nt}$$

che trasformato in x diventa

$$c_1\, e^{n} + c_2\, x^n \log x$$

Consideriamo ora ancora l' altro tipo di equazione differenziale lineare a coefficienti non co-

stanti:

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{d x^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} \frac{d y}{d x} +$$
$$+ a_n y = 0.$$

Poniamo

$$y = x^\alpha$$

dove α sia una costante ancora indeterminata.

Facendo le derivate si ha:

$$\frac{d y}{d x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \alpha (\alpha - 1) x^{\alpha-2}$$

. . . .

$$\frac{d^n y}{d x} = \alpha (\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1) x^{\alpha-n}$$

e sostituendo nell'equazione data si ha per fattore comune x^α, e poi

$$a_0 \alpha (\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 1) +$$
$$+ a_1 \alpha (\alpha - 1) \ldots (\alpha - n + 2) + \ldots$$
$$+ a_{n-1} \alpha + a_n.$$

Perchè dunque l'equazione sia soddisfatta è necessario che questa ultima espressione sia zero, cioè che α sia radice della equazione di grado n in α che si ha ponendo eguale a zero questa espressione.

Risolvendo tale equazione algebrica si hanno n valori per α, cui corrisponderanno n integrali particolari dell'equazione data; di qui può formarsi l'integrale generale nel solito modo.

§ 15. **Equazioni lineari di 2.° ordine.** — Vogliamo ora studiare in modo speciale l'equazione lineare di 2.° ordine:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P\frac{d y}{d x} + Q y = X \tag{1}$$

Se si conosce un integrale particolare di

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P\frac{d y}{d x} + Q y = 0 \tag{2}$$

allora si può abbassare l'ordine di (2) e si ha una equazione di primo ordine che si può sempre integrare; onde possiamo dire che in questo caso si potrà conoscere l'integrale generale di (2), donde poi, come si sa in generale, con sole quadrature si ricava l'integrale di (1).

Per l'integrazione dell'equazione di 2.° ordine (1) basta dunque la conoscenza di uno solo integrale particolare di (2).

Vogliamo mostrare come si può semplificare questo calcolo.

Sia y_1 l'integrale particolare di (2) in modo che:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P\frac{d y_1}{d x} + Q y_1 = 0. \tag{3}$$

Moltiplichiamo per y_1 la (1) e per y la (3), e sottragghiamo. Si ha:

$$\left(y_1\frac{d^2 y}{d x^2} - y\frac{d^2 y_1}{d x^2}\right) + P\left(y_1\frac{d y}{d x} - y\frac{d y_1}{d x}\right) = X y_1$$

Poniamo:

$$y_1 \frac{d y}{d x} - y \frac{d y_1}{d x} = z \tag{4}$$

donde:

$$y_1 \frac{d^2 y}{d x^2} - y \frac{d^2 y_1}{d x^2} = \frac{d z}{d x}$$

e quindi l'equazione di sopra diventa:

$$\frac{d z}{d x} + P z = X y_1.$$

Conosciamo l'integrale di questa equazione lineare di 1.° ordine che è:

$$z = e^{-\int P dx} \left[\int X y_1 e^{\int P dx} + C \right].$$

Intanto da (4) si ha:

$$\frac{d \frac{y}{y_1}}{d x} = \frac{z}{y_1^2}$$

onde:

$$\frac{y}{y'} = \int \frac{z}{y_1^2} d x + C_2$$

$$y = y_1 \int \frac{z}{y_1^2} d x + C_2 y_1$$

e così è trovato il valore di y che è la soluzione di (1).

Vogliamo ora passare a dimostrare una proprietà interessante, trovata da Sturm, degli integrali particolari dell'equazione lineare omogenea di 2° ordine.

Se $y_1\, y_2$ sono due integrali particolari distinti di (2) il determinante:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \frac{d\,y_1}{d\,x} & \frac{d\,y_2}{d\,x} \end{vmatrix}$$

deve essere diverso da zero per qualunque valore di x compreso nel campo che si considera, cioè la funzione

$$y_1 \frac{d\,y_2}{d\,x} - y_2 \frac{d\,y_1}{d\,x}$$

per qualunque valore di x racchiuso nel campo considerato ha sempre lo stesso segno. Sia p. e. sempre positivo.

Allora se $y_1 = 0$ per $x = a$ e per $x = b$, si avrà per questi valori di x

$$y_2 \frac{d\,y_1}{d\,x} < 0$$

cioè y_2 e $\frac{d\,y_1}{d\,x}$ saranno di segno contrario. Ora fra i due punti in cui si annulla y_1 vi sarà certamente un punto intermedio in cui si annulla la prima derivata $\frac{d\,y_1}{d\,x}$ (pel teorema di Rolle), e quindi se x va da a, a b, $\frac{d\,y_1}{d\,x}$ deve mutar segno e quindi anche y_2 deve mutar segno dovendo il prodotto avere il medesimo segno sia in a che in b, perciò y_2 deve

essere zero in un punto compreso fra *a* e *b*. Cioè *fra due punti consecutivi zero di* y_1, *esiste sempre un punto zero di* y_2, *e così analogamente fra due punti zero di* y_2 *esiste un punto zero di* y_1, *cioè i punti zero dei due integrali particolari* y_1 y_2 *dell'equazione differenziale lineare di 2.° ordine sono alternati*. Si suppone naturalmente sempre *la continuità delle funzioni*, altrimenti non potrebbe applicarsi il teorema di Rolle, nè potrebbero farsi tutte le altre deduzioni.

§ 16. **Sistemi di equazioni lineari simultanee.** — Immaginiamo n equazioni contenenti n funzioni $y, z \ldots$ di una variabile x_1 e le derivate di queste funzioni.

Allora ci possiamo proporre il problema di determinare queste funzioni.

Per fissare le idee immaginiamo che si abbiano due equazioni contenenti le funzioni y, z e le loro derivate fino a quelle di 2.° ordine:

$$\left.\begin{aligned} f\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0 \\ \varphi\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Allora poniamo:

$$\frac{dy}{dx} = u \quad , \quad \frac{dz}{dx} = v \tag{2}$$

si ha

$$\left.\begin{aligned} f\left(x, y, z, u, v, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right) = 0 \\ \varphi\left(x, y, z, u, v, \frac{du}{dx}, \frac{dv}{dx}\right) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

le quali insieme con le (2) danno quattro equazioni contenenti le quattro funzioni x, z, u, v e le loro derivate di 1.° ordine.

In generale si vede dunque *che dato un sistema di* n *equazioni differenziali contenenti* n *funzioni e le loro derivate di ordine superiore noi possiamo sempre ridurci ad un sistema di* m *equazioni* (m > n) *fra* m *funzioni e le loro derivate di 1.° ordine.*

In altri termini aumentando il numero delle equazioni e delle funzioni noi possiamo sempre abbassare l'ordine delle equazioni date. Così per es. se si ha una sola equazione con una sola funzione y e le derivate di questa fino a quella di r.° ordine, evidentemente ponendo

$$\frac{dy}{dx}=z \quad , \quad \frac{dz}{dx}=u, \ldots$$

si avranno altre $r-1$ equazioni che insieme colla data formano r equazioni fra le r funzioni $y, z, u, \ldots$ e in tali equazioni entrano soltanto le derivate prime di queste funzioni. Ma evidentemente la risoluzione di questo sistema non dovrà offrire minori difficoltà che la risoluzione della primitiva equazione.

Vediamo ora come si può fare un procedimento inverso, cioè da un sistema di n equazioni di 1.° ordine fra n funzioni ricavarne un altro di un numero minore di equazioni differenziali di ordine superiore, fra un un numero minore di funzioni, e quindi in particolare una sola equazione differenziale con una sola funzione.

Per semplicità supponiamo il caso di tre sole *equazioni con tre funzioni* y, z, u.

Supponiamo risolute queste tre equazioni rispetto alle tre derivate prime di y, z, u, o più generalmente immaginiamo queste tre equazioni ridotte con processi di eliminazione alla forma:

$$f_1\left(x, y, z, u, \frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$f_2\left(x, y, z, u, \frac{dz}{dx}\right)=0$$

$$f_3\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}\right)=0$$

Dall'ultima ricaviamo y espresso per x, z, u, $\frac{du}{dx}$, e quindi derivando possiamo ricavare $\frac{dy}{dx}$ espresso per:

$$x, y, u, \frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}.$$

Sostituendo questi valori nelle due prime equazioni si hanno allora due equazioni del tipo:

$$\varphi_1\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{dz}{dx}\right)=0$$

$$\varphi_2\left(x, y, z, u, \frac{du}{dx}, \frac{dz}{dx}\right)=0$$

le quali risolute rispetto a $\frac{dz}{dx}$, $\frac{du}{dx}$ possono trasformarsi in due altre equazioni del tipo:

$$\psi_1\left[x, z, u, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}\right]=0$$

$$\psi_2\left[r, z, u, \frac{d\,u}{d\,x}, \frac{d^2\,u}{d\,x^2}\right] = 0$$

dalla seconda delle quali possiamo ricavare z espresso per $x, u, \frac{d\,u}{d\,x}, \frac{d^2\,u}{d\,x^2}$, e derivando si ha $\frac{d\,z}{d\,x}$ espresso per $x, u, \frac{d\,u}{d\,x}, \frac{d^2\,u}{d\,x^2}, \frac{d^3\,u}{d\,x^3}$.

Sostituendo questi valori nella prima equazione si ha un'equazione differenziale di 3.° ordine colla sola funzione u.

Un analogo procedimento si potrebbe tenere in generale; del resto questo procedimento, esattissimo dal lato teorico, molte volte può offrire difficoltà pratiche, e quindi essere inattuabile.

Diventa invece attuabile quando le equazioni date sono equazioni differenziali lineari, e quindi sempre facilmente risolubili rispetto alle variabili che contengono.

Possiamo mostrare su di un esempio come si applica questo metodo nel caso delle equazioni lineari.

Siano date le due equazioni:

$$\frac{d\,y}{d\,x} + 3\,y + z = 0$$

$$\frac{d\,z}{d\,x} - y + z = 0.$$

Dalla seconda ricaviamo:

$$y = \frac{d\,z}{d\,x} + z$$

donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{dz}{dx}$$

e quindi sostituendo nella prima si ha:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + 4\frac{dz}{dx} + 4z = 0$$

che è un'equazione lineare omogenea a coefficci costanti.

L'equazione caratteristica corrispondente è

$$t^2 + 4t + 4 = 0$$

cioè

$$(t + 2)^2 = 0$$

e quindi si hanno due integrali particolari

$$e^{-2x} \quad , \quad x e^{-2x}$$

per modo che l'integrale generale è:

$$z = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}$$

e quindi:

$$y = (c_2 - c_1) e^{-2x} - c_2 x e^{-2x}.$$

§ 17. **Equazioni differenziali d'ordine superic** — Fra le equazioni differenziali di ordine superi al primo non abbiamo considerato che le cosidde equazioni lineari. Ora vogliamo studiare altri t di equazioni.

1. Si abbia un'equazione contenente solo la derivata n^{ma} di y, cioè del tipo:

$$f\left[\frac{d^n y}{d x^n}, x\right] = 0$$

Risolvendola rispetto a $\frac{d^n y}{d x^n}$ si ha

$$\frac{d^n y}{d x^n} = X$$

dove X è una funzione di x. Con ciò l'equazione è ridotta alla forma lineare.

Per integrarla si potrebbe adoperare il metodo generale sviluppato nei paragrafi precedenti ricordando che l'integrale generale dell'equazione corrispondente senza secondo membro

$$\frac{d^n y}{d x^n} = 0$$

è:

$$y = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1} x + C_n .$$

Però in questo caso la cosa si semplifica, perchè dall'equazione di sopra si può ricavare coll'integrazione:

$$\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-2}} = \int X d x + C_1$$

da cui, integrando daccapo, si ha:

$$\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} = \int d x \int X d x + C_1 x + C_2$$

e così continuando si giunge finalmente al valore di y.

2. Consideriamo un'equazione nella quale non compariscono che due derivate successive:

$$f\left[\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}}, \frac{d^n y}{d x^n}\right] = 0.$$

Ponendo:

$$\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} = p$$

si avrà

$$\frac{d^n y}{d x^n} = \frac{d p}{d x}$$

e allora l'equazione è ridotta a:

$$f\left[p, \frac{d p}{d x}\right] = 0$$

e quindi risolvendola rispetto a $\frac{d p}{d x}$ si ha:

$$\frac{d p}{d x} = \varphi(p)$$

donde:

$$x = \int \frac{d p}{\varphi(p)} + \text{cost.}$$

Se di qui ricaviamo poi p in funzione di x:

$$p = \psi(x)$$

abbiamo:

$$\frac{d^{n-1} y}{d x^{n-1}} = \psi(x)$$

e questa è una equazione del tipo ultimamente considerato.

Come esempio si potrebbe scegliere l'equazione

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \sqrt{1 + \left[\frac{d y}{d x}\right]^2}$$

che dà per integrale

$$y = c_1 + \frac{e^{x-c_2} + e^{-(x-c_2)}}{2}.$$

3. Consideriamo ora un'equazione nella quale compariscono solo due derivate i cui ordini differiscano di due unità:

$$\frac{d^n y}{d x^n} = f\left[\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}}\right].$$

Poniamo

$$\frac{d^{n-2} y}{d x^{n-2}} = p$$

donde

$$\frac{d^n y}{d x^n} = \frac{d^2 p}{d x^2}$$

e quindi l'equazione diventa:

$$\frac{d^2 p}{d x^2} = f(p)$$

Poniamo in quest'ultima equaziono:

$$\frac{d p}{d x} = q \quad \frac{d^2 p}{d x^2} = \frac{d q}{d x} = \frac{d q}{d p} q$$

e abbiamo:

$$q \frac{d q}{d p} = f(p)$$

donde

$$q\, d q = f(p)\, d p$$

e integrando si ha:

$$\frac{1}{2} q^2 = \int f(p)\, d p + C$$

e quindi

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d p}{d x}\right]^2 = \int f(p)\, d p + C$$

donde

$$d x = \int \frac{d p}{\sqrt{2 \int f(p)\, d p + 2 C}}.$$

Integrando si ha infine:

$$x = \int \frac{d p}{\sqrt{2 \int f(p)\, d p + 2 C}} + C_1.$$

Da questa equazione ricavando p in funzione di x e sostituendolo in:

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = p$$

resta da integrare ancora un'equazione del tipo considerato sul principio di questo paragrafo.

4. Vogliamo finalmente considerare il caso in cui l'equazione differenziale data sia omogenea di grado m rispetto alla y e alle sue derivate.

Allora si può abbassare l'ordine dell'equazione di una unità e per ciò fare si può adoperare il seguente metodo.

Poniamo:

$$y = e^z .$$

Le derivate di y si esprimeranno per mezzo delle derivate degli stessi ordini di z, e avranno sempre per fattore l'esponenziale e^z. Questo comparirà allo stesso grado m in tutti i termini, e quindi si può sopprimere e resta un'equazione contenente le derivate di z senza contenere esplicitamente z.

Posto quindi allora

$$\frac{dz}{dx} = u$$

si abbassa l'ordine dell'equazione.

Questo stesso metodo si può esporre sotto altra forma, che compendia le due successive sostituzioni di prima.

Poniamo

$$y' = u\,y.$$

Allora

$$y'' = u'\,y + u\,y' = u'\,y + u^2\,y = y\,(u' + u^2)$$

. . . .

Tutte le derivate di y risultano col fattore y stesso, e quindi per la supposta omogeneità dell'equazione, tutti i termini verranno a contenere y^m per fattore. Soppresso questo fattore resterà una equazione in u di ordine $n-1$, se la data era di ordine n.

§ 18. **Integrazione per serie.** — Dopo aver studiato i vari metodi per l'integrazione di una equazione differenziale non ci resta che studiare il metodo dell'*integrazione per serie*, che, quando riesce, rappresenta l'ultimo espediente che si può tentare per risolvere l'equazione.

Sia data una equazione differenziale:

$$f(x, y, y' \ldots y^n) = 0$$

L'integrale generale di questa, come già sappiamo, deve essere una funzione di x con n costanti $c_1\,c_2 \ldots c_n$ tale che per ogni valore $x = x_0$ compreso in un certo campo di variabilità di x, assegnati ad $y\,y' \ldots y^{(n-1)}$ valori arbitrari $y_0\,y'_0 \ldots y_0^{(n-1)}$ si possano sempre trovare per le costanti c valori che vi corrispondono cioè che facciano che per $x = x_0$ le $y\,y' \ldots y^{(n-1)}$ acquistino effettivamente i valori fissati.

Consideriamo allora un punto $x = x_0$ e immaginiamo sviluppato l'integrale y ignoto nell'intorno del punto x_0 mediante la formola di Taylor.

Si ha:

$$y = y_0 + (x - x_0)\, y'_0 + \frac{(x - x_0)^2}{2\,!}\, y''_0 + \ldots +$$
$$+ \frac{(x - x_0)^n}{n\,!}\, y_0^{(n)} + \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)\,!}\, y_0^{(n+1)} + \ldots$$

Intanto dall'equazione differenziale si ricava:

$$y^{(n)} = \varphi\,(x\, y\, y' \ldots y^{(n-1)})$$

e derivando consecutivamente si hanno le altre formole (2)

$$y^{(n+1)} = \psi\,(x\, y\, y' \ldots y^{(n)})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Da queste relazioni si possono avere i valori di

$$y^{(n)}\, y^{(n+1)} \ldots \text{ per } x = x_0$$

quando si son fissati arbitrariamente i valori di

$$y\, y' \ldots y^{(n-1)}.$$

Tali valori sieno $y_0^{(n)}\, y_0^{(n+1)} \ldots$

Sostituendoli allora nella formola (1) si ha una funzione y espressa per una serie in x, e nella quale ci entrano le n quantità costanti arbitrarie $y_0 \ldots y_0^{(n-1)}$.

Ora se questa serie è convergente in un certo campo *attorno* x_0, essa può considerarsi come l'*integrale generale* nell'intorno del punto x_0, e se di essa se ne potrà effettuare la somma si avrà allora l'integrale generale sotto forma finita.

Ma potrebbe accadere che le equazioni (2) per $x = x_0$ e $y = y_0$ $y' = y'_0 \dots y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$ diano luogo a delle incompatibilità (per es. che alcune $y^{(r)}$ diventassero infinite), a togliere le quali bisognerebbe mutare i valori fissati arbitrariamente, e allora la (1), anche che sieno soddisfatte tutte le condizioni di convergenza, non potrà più considerarsi come integrale generale, ma come un integrale particolare, perchè per l'integrale generale è necessario che i valori di y, $y', \dots y^{(n-1)}$ possano essere assolutamente arbitrari. Ciò significherà che l'integrale generale non potrà svilupparsi in serie di Taylor nell'intorno del punto x_0.

Un esempio che si presenta assai bene per rischiarare il metodo sviluppato ci è fornito dalla cosiddetta *equazione di Bessel*, che ha la forma:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + \frac{m}{x} \frac{d y}{d x} + n y = 0.$$

È una equazione lineare omogenea di 2.° ordine. Avendosi da essa

$$x y'' + m y' + n x y = 0 \tag{3}$$

si ha derivando

$$\left.\begin{array}{r} x y''' + (m+1) y'' + n x y' + n y = 0 \\ x y^{IV} + (m+2) y''' + n x y'' + 2 n y' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} (4)$$

e la legge di formazione è evidente.

Qui si vede appunto che per $x_0 = 0$ non può prendersi arbitrariamente y_0 e y'_0, perchè se non si prende per es. $y'_0 = 0$ si ha che y'_0 diventa infinito. Quindi l'integrale *generale* della nostra equazione non potrà svilupparsi in serie di Taylor nell'intorno del punto $x = 0$.

Con questo metodo dunque potremo solo ricavare un integrale particolare nell' intorno del punto $x = 0$.

Poniamo

$$x = x_0 = 0 \qquad y = y_0 \qquad y' = y'_0 = 0$$

e allora dalle equazioni (4) precedenti si ha:

$$y''_0 = -\frac{n\,y_0}{m+1}$$

$$y''' = 0$$

$$y''''_0 = +\frac{3\,n^2\,y_0}{(m+3)(m+1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(si noti che nella prima delle (4) per $x = 0$ scompare y''', quindi è da essa che si ricava y'', e così dalla seconda delle (4) si ricava y''' e così di seguito).

Sostituendo si ha dunque l'integrale

$$y = y_0\left[1 - \frac{1\,.\,n\,.\,x^2}{2\,!\,(m+1)} + \frac{1\,.\,3\,.\,n^2\,x^4}{4\,!\,(m+1)\,(m+3)} - \ldots\right]$$

Il termine generale di questa serie è:

$$\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2\,r+1)\,n^{r+1}\,x^{2r+2}}{(2r+2)!\;\;(m+1)\,(m+3)\;\;(m+2r+1)}$$

ed è facile vedere che il rapporto di un termine al precedente tende a zero e perciò possiam dire che la serie è convergente per ogni valore di x finito. Esso rappresenterà un integrale particolare dell'equazione di Bessel.

Per $m = 1$, $n = 1$ si ha:

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 . 4^2} - \frac{x^6}{2^2 . 4^2 . 6^2} + \ldots\right).$$

La quantità dentro parentesi è una funzione conosciuta in analisi sotto il nome di *funzione di Bessel.*

Per $m = 2$, $n = 1$ si ha la funzione:

$$y = y_0 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{a^4}{5!} - \ldots\right)$$

di cui il secondo membro non è altro che

$$y_0 \frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

come si vede facilmente ricordando la serie di sviluppo del *seno.*

§ 19. **Equazioni a derivate parziali.** — Finora abbiamo considerato funzioni di una sola variabile, le quali danno luogo alle equazioni differenziali ordinarie.

Immaginiamo ora una funzione di più variabili indipendenti, quindi una relazione fra la funzione, le variabili indipendenti e le sue derivate parziali rispetto a queste variabili.

Il problema che ci proponiamo è quello di ritrovare mediante l'equazione a derivate parziali la forma più generale della funzione che vi corrisponde, e che si chiamerà l'integrale dell'equazione data.

Cominciamo a considerare un caso assai semplice di equazioni a derivate parziali. Si abbia un'equazione:

$$f\left(x\, y\, z\, \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

dove si debba considerare z funzione di x e y, mentre che nella equazione non entra che solo la derivata di z rispetto ad x e non quella rispetto ad y.

Allora considerando y come costante, si può integrare l'equazione che ne risulta che è allora una equazione differenziale ordinaria.

Fatta questa integrazione si ha:

$$z = \varphi\,(x\, y\, c)$$

dove c è la costante d'integrazione. Questa funzione z soddisfa alla equazione data nel senso che ricavata da essa la derivata parziale $\frac{d\,z}{d\,x}$ ed eliminando c si ricade nell'equazione data.

Ma allora è evidente che se invece di considerare c come costante, si considera come una funzione arbitraria di y, poichè la $\frac{d\,z}{d\,x}$ verrà allora espressa nella stessa maniera come prima, anche in tal caso la z continuerà a soddisfare l'equazione data; quindi nella risoluzione delle equazioni a derivate parziali si presenta già questo fatto, che cioè nell'espressione dell'integrale, più che una costante arbitraria, può entrare una funzione arbitraria.

Non possiamo passare a studiare la teoria generale delle equazioni a derivate parziali, ma ci limitiamo solamente a quelle di 1.° ordine e lineari rispetto alle derivate.

Consideriamo il caso di due variabili indipendenti x, y.

Allora la forma generale di un'equazione a derivate parziali e lineari rispetto alle derivate è

$$Pp + Qq = R \tag{1}$$

essendo p, q le derivate di z rispetto ad x e y, ed essendo P, Q, R funzioni di z, x, y.

Ora dico che la risoluzione di questa equazione si può ridurre a quella di un sistema di equazioni differenziali ordinarie.

Sia $u =$ cost. una funzione di x, y, z, soluzione (supposto che esista) della equazione data. Allora ricavandone

$$p = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}} \qquad q = -\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial u}{\partial z}}$$

e sostituendoli nella proposta equazione, questa deve essere identicamente soddisfatta, cioè deve essere:

$$P\frac{\partial u}{\partial x} + Q\frac{\partial u}{\partial y} + R\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

e se si suppone che esista un'altra soluzione:

$$v = \text{cost.}$$

diversa dalla precedente, si ha analogamente:

$$P\frac{\partial v}{\partial x} + Q\frac{\partial v}{\partial y} + R\frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

ed essendo poi

$$\frac{\partial u}{\partial x} d\,x + \frac{\partial u}{\partial z} d\,y + \frac{\partial u}{\partial z} d\,z = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} d\,x + \frac{\partial v}{\partial y} d\,y + \frac{\partial v}{\partial z} d\,z = 0$$

si ha che i $d\,x$, $d\,y$, $d\,z$ ricavati dalle due relazioni:

$$u = \text{cost.} \qquad v = \text{cost.}$$

devono essere tali che:

$$\frac{d\,x}{P} = \frac{d\,y}{Q} = \frac{d\,z}{R} \tag{3}$$

cioè debbono essere proporzionali a P, Q, R.

Ora le due equazioni (2) possono ritenersi come formanti un sistema di due equazioni differenziali ordinarie nelle quali due delle tre variabili x, y, z si considerano funzioni della terza.

Questo sistema, come sappiamo, ammette sempre una soluzione, cioè si possono sempre trovare *due* relazioni fra x, y, z tali che da esse ricavando *due di quelle* variabili in funzione della terza si *abbiano due* funzioni soddisfacenti il sistema (2).

Questi due integrali saranno precisamente:

$$u = \text{cost}, \qquad v = \text{cost}.$$

di cui ciascuno rappresenterà un integrale della equazione a derivate parziali.

In questa maniera possiamo trovare due integrali distinti dell'equazione data. I due integrali compariscono risoluti rispetto a due costanti arbitrarie.

Ma adesso è facile vedere che si può ricavare ancora una soluzione molto più generale. Si può cioè mostrare che la espressione:

$$u = \varphi(v)$$

dove φ è simbolo di *una funzione arbitraria*, soddisfa anche all'equazione data.

Infatti da tal nuova relazione fra x, y, z (contenute in u, v) si ha:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} p = \varphi'(v) \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} p\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} q = \varphi'(v) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} q\right]$$

donde

$$p = -\frac{\varphi'(v)\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\varphi'(v)\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial u}{\partial z}}$$

$$q = -\frac{\varphi'(v)\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}}{\varphi'(v)\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial u}{\partial z}}$$

e quindi sostituendo nell'equazione data si ha:

$$-\varphi'(v)\left[P\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}Q+R\frac{\partial v}{\partial z}\right]+$$
$$+\left[\frac{\partial u}{\partial x}P+\frac{\partial u}{\partial y}Q+\frac{\partial u}{\partial z}R\right]$$

che è evidentemente zero qualunque sia la funzione φ, perchè i due termini in parentesi sono zero.

Si ha dunque questo risultato interessante che, conosciuti gli integrali u, v, possiamo formare un integrale più generale introducendo il simbolo di una funzione arbitraria.

Tale integrale chiamasi l'*integrale generale dell'equazione a derivate parziali.*

Vogliamo ora passare ad un'applicazione di questa teoria.

1). *Vogliamo ricercare l'equazione di una superficie tale che il piano tangente in ogni punto sia parallelo ad una retta fissa.*

La retta condotta per l'origine delle coordinate sia:

$$aZ=X \quad , \quad bZ=Y$$

cioè:

$$\frac{X}{a}=\frac{Y}{b}=\frac{Z}{+1}$$

essendo a, b due costanti.

Il piano tangente in un punto di una superficie

$$z=f(xy)$$

è:

$$(X-x)p+(Y-y)q-(Z-z)=0$$

e la condizione perchè questo sia parallelo alla retta precedente è:

$$a p + b q - 1 = 0.$$

Per la determinazione della superficie siamo dunque giunti ad un'equazione a derivate parziali di 1.° ordine e lineare.

Applicando il metodo sviluppato avanti bisogna considerare il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{d x}{a} = \frac{d y}{b} = \frac{d z}{1}$$

e ricavarne i due integrali risoluti rispetto alle costanti:

$$u = \text{cost.} \qquad v = \text{cost.}$$

Queste equazioni si possono scrivere:

$$\frac{d x}{d z} = a \qquad \frac{d y}{d z} = b$$

donde:

$$x = a z + \text{cost.}$$
$$y = b z + \text{cost.}$$

e quindi nel nostro caso:

$$u = x - a z$$
$$v = y - b z;$$

la soluzione generale sarà una funzione arbitraria di u e v eguagliata a zero, cioè l'equazione della superficie richiesta sarà

$$\varphi(x - a z \, , \, y - b z) = 0.$$

Ogni superficie di questa specie non è che un cilindro colle generatrici parallele alla retta fissa.

Infatti se $x\,y\,z$ è un punto della superficie e se:

$$x - a\,z = \alpha \qquad y - b\,z = \beta$$

è chiaro che ogni punto della retta di cui queste due sono le equazioni è anche un punto della superficie.

2). *Vogliamo trovare l'equazione di una superficie tale che il piano tangente in ogni punto passi per un punto fisso.*

Se $x_0\,y_0\,z_0$ è il punto fisso, la condizione pel piano tangente in un punto $x\,y\,z$ è

$$(x - x_0)\,p + (y - y_0)\,q = (z - z_0)$$

che sarà l'equazione a derivate parziali della superficie richiesta.

Per integrare questa equazione dobbiamo considerare il sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{d\,x}{x - x_0} = \frac{d\,y}{y - y_0} = \frac{d\,z}{z - z_0}$$

che integrate danno:

$$\log\,(x - x_0) = \log\,(z - z_0) + \log C_1$$
$$\log\,(y - y_0) = \log\,(z - z_0) + \log C_2$$

o anche:

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = C_1$$

$$\frac{y - y_0}{z - z_0} = C_2$$

e quindi l'equazione della superficie sarà

$$\varphi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}\,,\,\frac{y-y_0}{z-z_0}\right)=0$$

dove φ è una funzione arbitraria.

Queste superficie sono *coni* col vertice nel punto $x_0\, y_0\, z_0$. Infatti se $x\, y\, z$ sono le coordinate di un punto della superficie $\varphi = o$ allora evidentemente

$$\frac{x+\lambda x_0}{1+\lambda}\,,\;\frac{y+\lambda y_0}{1+\lambda}\,,\;\frac{z+\lambda z_0}{1+\lambda}$$

sono anche le coordinate di un punto della superficie, come si può subito verificare.

L. c.

Aritmetica pratica, del Dott. F. PANIZZA, di pagine VIII-188 . . . . 1 50
Aritmetica razionale, del Prof. Dott. F. PANIZZA, 2ª ediz., pag. XII-210 . . . . 1 50
Arte del dire (L'), del Prof. D. FERRARI, 2ª ediz., corretta ed ampliata, di pag. XVI-190. . . . . . . 1 50
— (Vedi *Rettorica — Ritmica — Stilistica*).
Arte militare. (Vedi *Storia dell'*).
Arte mineraria, dell'Ing. Prof. V. ZOPPETTI, di pagine IV-182, con 112 figure in 14 tavole. . . . . . 2 —
Arte greca, etrusca e romana. (Vedi *Archeologia dell'arte*).
Arti. (Vedi *Anatomia pittorica — Archeologia dell'arte — Architettura — Decorazione — Disegno — Pittura — Scienza dei colori — Scoltura*).
Arti (Le) grafiche fotomeccaniche. Zincotipia, Autotipia, Eliografia, Fototipia, Fotolitografia, Fotosilografia, Tipofotografia, ecc., secondo i metodi più recenti, dei grandi maestri nell'arte: ALBERT, ANGERER, CRONENBERG, EDER, GILLOT, HUSNIK, KOFAHL, MONET, POITEVIN, ROUX, TURATI, ecc., con un cenno storico sulle arti grafiche e un Dizionarietto tecnico; pag. IV-176 con 9 tavole illustrate. . . . . 2 —
— (V. *Dizion. Fotografico — Fotografia dei colori — Fotografia per dilettanti — Ricettario fotografico*).
Asfalto (L'), fabbricazione - applicazione, dell'Ing. E. RIGHETTI, con 22 incisioni, di pag. VIII-152 . . . . . 2 —
Assicurazione sulla vita, di C. PAGANI, di pagine VI-152 . . . . 1 50
Assistenza degli infermi nell'Ospedale ed in famiglia, del Dott. C. CALLIANO, di pag. XXIV-448, con 7 tavole. 4 50
— (V. *Acque minerali — Igiene — Soccorsi d'urgenza*).
Assonometria. (Vedi *Disegno assonometrico*).
Astronomia, di I. N. LOCKYER, tradotta ed in parte rifatta da E. SERGENT e riveduta da G. V. SCHIAPARELLI, 3ª ediz., di pag. VI-156, con 44 incisioni . . . 1 50
— (Vedi *Gravitazione — Spettroscopia*).
Atlante geografico-storico dell'Italia, del Dott. G. GAROLLO, 24 carte, 76 pag. di testo e un'Appendice. 2 —
— (Vedi *Alpi — Dizionario geografico — Esercizi geografici — Geografia — Prontuario di Geografia*).
Atlante geografico universale, di KIEPERT, con notizie geografiche e statistiche del Dott. G. GAROLLO, 8ª ediz. (dalla 70000 alla 80000 copia), 25 carte, 88 pagine di testo . . . . 2 —
Atmosfera. (V. *Climatologia - Igroscopi - Meteorologia*).
Atti notarili. (Vedi *Notaro — Testamenti*).

L. c.

Attrezzatura, manovra delle navi e segnalazioni marittime, di F. IMPERATO, di pag. XXII-360, con fig. 232 nel testo e XV tavole litografate 4 50
— (Vedi *Ingegnere navale — Macchinista navale*).
Autotipia. (Vedi *Arti Grafiche*).
Avicoltura. (Vedi *Animali da cortile — Colombi domestici — Pollicoltura*).
Bachi da seta, del Prof. T. NENCI, di pag. VI-276, 2ª ediz., con 41 incisioni e 2 tavole . . . . 2 —
— (Vedi *Gelsicoltura — Industria della seta — Tintura della seta*).
Balistica. (Vedi *Esplodenti - Storia dell'Arte Militare*).
Batteriologia, dei Proff. G. e R. CANESTRINI, di pagine VI-240 con 29 illustrazioni 1 50
— (Vedi *Animali Parassiti — Microscopio — Protistologia*).
Bestiame (Il) e l'agricoltura in Italia, del Prof. F. ALBERTI, di pag. VIII-312, con 22 zincotipie 2 50
— (Vedi *Agricoltura — Alimentazione del bestiame*).
Biancheria. (Vedi *Disegno, taglio e confezione di — Macchine da cucire*).
Bibliografia, di G. OTTINO, 2ª ediz., riveduta di pagine VI-166, con 17 incisioni . . . . 2 —
— (Vedi *Dizionario bibliografico*).
Bibliotecario (Manuale del), di PETZHOLDT, traduzione di G. BIAGI, e G. FUMAGALLI. di pag. XX-364 con un'appendice di pag. 213 . . . . 7 50
Biografia. (Vedi *Cristoforo Colombo — Dante — Omero — Shakespeare*).
Bitume. (Vedi *Asfalto*).
Blasoni. (Vedi *Araldica — Paleografia*).
Borsa (Oper. di). (V. *Valori pubblici - Debito pubblico*).
Botanica, del Prof. I. D. HOOKER, traduz. del Prof. N. PEDICINO, 4ª edizione, di pag. XIV-134, con 68 incisioni 1 50
Bromatologia. (Vedi *Adulterazione — Alimentazione — Conserve alimentari — Frumento e mais — Latte burro e cacio — Panificazione*).
Burro. (Vedi *Latte — Caseificio*).
Cacciatore (Manuale del), di G. FRANCESCHI, di pagine VIII-268, con 10 tavole e 14 incisioni nel testo. 2 50
Calcolo differenziale, del Prof. E. PASCAL (volume doppio). (In lavoro).
Calcolo integrale, del Prof. E. PASCAL (vol. doppio). (In lavoro).
Calligrafia (Manuale di). Cenno storico, cifre numeriche, materiale adoperato per la scrittura e metodo d'insegnamento, con 69 tavole di modelli dei principali

L. c.

caratteri conformi ai programmi governativi del Professore R. Percossi, con 35 fac-simili di scritture, elegantemente legato, tascabile, con leggío annesso al manuale per tenere il modello . . . . 3 —

Calore (Il), del Dott. E. Jones, trad. di U. Fornari, di pag. VIII-296 con 98 incisioni 1 50

Caloriferi. (Vedi *Riscaldamento*).

Candele. (Vedi *Stearineria e Fabb. di Candele*).

Cantante (Manuale del), di L. Mastrigli, di p. XII-132. 2 —

Cantiniere. Lavori di cantina mese per mese, dell'Ingegnere A. Strucchi, di pag. VIII-172 con 30 incisioni. 2 —

Cartografia (Manuale teorico-pratico della), con un sunto sulla storia della Cartografia, del Prof. E. Gelcich, di pag. VI-257, con 37 illustrazioni . . . . . 2 —

— (Vedi *Disegno topografico — Telemetria*).

Case. — (Vedi *Proprietario di Case*).

Caseificio, di L. Manetti, 2ª edizione, completamente rifatta di Sartori, di pagine IV-212, con 34 incisioni. 2 —

— (Vedi *Adulterazione degli alimenti — Latte, burro, cacio*).

Catasto (Il nuovo) **italiano,** dell'Avv. E. Bruni, di pag. XII-346, vol. doppio. . . . . 3 —

Cavallo (Manuale del), del Ten. Colonnello C. Volpini, di pag. IV-200 con illustrazioni e 8 tavole. . . 2 50

Celerimensura (Manuale pratico di), e tavole logaritmiche a quattro decimali dell'Ing. F. Borletti, di pag. VI-148 con 29 incisioni 3 50

Celerimensura (Manuale e tavole di), dell'Ing. G. Orlandi, di p. 1200 con quadro generale d'interpolazioni. 18 —

— (V. *Cartografia — Compensazione degli errori — Disegno topografico — Geometria pratica — Telemetria*).

Cementazione. (Vedi *Tempera*).

Ceralacche. (Vedi *Vernici*).

Cereali. (Vedi *Frumento e Mais — Panificazione*).

Chimica, del Prof. H. E. Roscoe, traduzione del Prof. A. Pavesi, di pag. VI-124, con 36 inc., 4ª ediz. 1 50

Chimica agraria, del Dott. A. Aducco, di p. VIII-328. 2 50

— (Vedi *Concimi*).

Chimico (Manuale del) **e dell'industriale,** ad uso dei Chimici analitici e tecnici, degli industriali, ecc., del Dott. Prof. L. Gabba, di pag. XII-354 . . . . . 5 —

— (Vedi *Analisi volumetrica*).

Ciclista (Manuale del), di A. Galante, riccamente illustrato, di pag. VI-194, con 73 fototipie 2 50

Climatologia, di L. De Marchi, p. X-204, con 6 carte 1 50

— (*Vedi Igroscopi — Meteorologia — Sismologia*).

Codice doganale italiano con commento e note, *dell'*Avv. E. Bruni, di pag. XX-1078 con 4 incisioni. 6 50

— (*V. Amministrazione pubblica* - Trasporti e tariffe).

L. c.

Codice metrico internazionale. (Vedi *I Prototipi del metro e del kilogramma*).

Cognac (Fabbricazione del) **e dello spirito di vino e distillazione delle fecce e delle vinacce,** di DAL PIAZ-DI PRATO, di pag. X-168, con 37 incisioni. 2 —

Coleotteri italiani, del Dott. A. GRIFFINI, p. XVI-334 con 215 incisioni (volume doppio) . . . . 3 —

Colombi domestici e colombicoltura, del Prof. P. BONIZZI, di pag. VI-210, con 29 incisioni . . . . . 2 —

— (Vedi *Animali da cortile — Pollicoltura*).

Colombo C. (Vedi *Cristoforo Colombo*).

Colori e la pittura (La scienza dei), del Prof. L. GUAITA, di pag. 248. . . . . 2 —

— (Vedi *Anatomia pittorica*).

Colori e vernici, di G. GORINI, 3ª ediz., di p. IV-184. 2 —

— (Vedi *Fotografia — Luce e colori — Vernici*).

Coltivazione ed industrie delle piante tessili, propriamente dette e di quelle che danno materia per legacci, lavori d'intreccio, sparteria, spazzole, scope, carta, ecc., coll'aggiunta di un Dizionario delle piante ed industrie tessili, di oltre 3000 voci, del Prof. M. A. SAVORGNAN D'OSOPPO, di pag. XII-476, con 72 incis. 5 —

— (Vedi *Filatura - Gelsicoltura - Piante industriali*).

Compensazione degli errori con speciale applicazione ai rilievi geodetici, di F. CROTTI, pag. IV-160. 2 —

Computisteria, del Prof. V. GITTI, vol. I. Computisteria commerciale, 3ª ediz., di pag. VI-168. . . . . 1 50

— Vol. II. Computisteria finanziaria, di pag. VIII-156. 1 50

Computisteria agraria, del Prof. L. PETRI, di pagine VI-212. . . . . 1 50

— (Vedi *Contabilità — Logismografia — Ragioneria — Scritture d'affari*).

Concia delle pelli ed arti affini, di G. GORINI, 3ª edizione interamente rifatta dai Dott. G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI, di pag. IX-210. . . . . . 2 —

Concimi, del Prof. FUNARO, di pag. VII-253 . . . . 2 —

— (Vedi *Chimica agraria*).

Confezione di biancheria. (Vedi *Disegno, taglio e*).

Conserve alimentari, di G. GORINI, 3ª ediz. interamente rifatta dai Dott. G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI. (In lavoro).

— (Vedi *Adulterazione — Alimentazione — Frumento e mais — Latte, burro e cacio — Panificazione*).

Contabilità comunale, secondo le nuove disposizioni *legislative e regolamentari* (Testo unico 10 febbraio 1889 *e R. Decreto* 6 luglio 1890, del Prof. A. DE BRUN, *di pag.* VIII-244 . . . . 1 50

— (*Vedi Diritto amministrativo — Legge comunale*).

L. c.

Contabilità generale dello Stato, dell'Avv. E. Bruni, pag. XII-422 (vol. doppio) . . . . 3 —
— (V. *Computisteria* — *Ragioneria* — *Logismografia*).

Corpi grassi e stearineria, dell'Ing. E. Marazza. — (Vedi *Industria stearica*).

Correttore e compositore tipografo. (V. *Tipografia*).

Corse (Dizionario delle), (Vedi *Cavallo*).

Costituzione di tutti gli Stati. (Vedi *Ordinamento*).

Costumi. (Vedi *Etnografia*).

Cristallografia geometrica, fisica e chimica applicata ai minerali, del Prof. F. Sansoni, di p. XVI-368, con 284 incisioni nel testo (vol. doppio) . . . . . . 3 —
— (Vedi *Geologia* — *Mineralogia*).

Cristoforo Colombo, di V. Bellio, con 10 inc., p. IV-136 1 50

Crittogame. (V. *Malattie crittogamiche delle piante*).

Cronologia. (Vedi *Storia e Cronologia*).

Cubatura. Prontuario per la cubatura dei legnami, di G. Belluomini, 2ª ediz. aumentata e corretta, di pag. 204. 2 50

Curve. Manuale pel tracciamento delle curve delle Ferrovie e Strade carrettiere di G. H. Kröhnke, traduzione di L. Loria, 2ª ediz. di pag. 164, con 1 tavola. 2 50

Dantologia, di G. A. Scartazzini, 2ª ediz. Vita ed Opere di Dante Alighieri, di pag. VI-408 (vol. doppio) 3 —

Debito (Il) pubblico italiano e le regole e i modi per le operazioni sui titoli che lo rappresentano, di F. Azzoni, di pag. VIII-376 (vol. doppio) . . . . 3 —

Decorazione e industrie artistiche, con una introduzione sulle industrie artist. nazionali, dell'Arch. A. Melani, 2 vol., di complessive pag. XX-460, con 118 incis. 6 —

Demografia. (Vedi *Statistica*).

Diboscamento. (Vedi *Selvicoltura*).

Didattica per gli alunni delle scuole normali e pei maestri elementari del Prof. G. Soli, di pag. VIII-214 . 1 50

Digesto (Il), di C. Ferrini, di pag. IV-134 . . . . . 1 50

Dinamica elementare, del Dott. C. Cattaneo, di pag. VIII-146, con 25 figure 1 50
— (Vedi *Termodinamica*).

Diplomatica, del Prof. L. Zdekauer. (In lavoro).

Diplomi. (Vedi *Araldica* — *Paleografia*).

Diritti e doveri dei cittadini, secondo le Istituzioni dello Stato, per uso delle pubbliche scuole, del Prof. D. Maffioli, 8ª ed., di pag. XVI-206 . . . . 1 50

Diritto amministrativo giusta i programmi governativi, ad uso degli Istituti tecnici, del Prof. G. Loris, 2ª edizione, di pag. XXII-506 (volume doppio) . . . . 3 —

Diritto civile italiano, del Prof. C. Albicini, p. VIII-128 1 50

Diritto commerciale. (Vedi Mandato).

Diritto comunale e provinciale, di Mazzoccolo. (Vedi *Legge comunale e provinciale*).

	L. c.
Diritto costituzionale, di F. P. CONTUZZI, p. XII-320.	1 50
Diritto ecclesiastico, del Dott. C. OLMO, di pagine XII-472 (volume doppio).	3 —
— (Vedi *Benefici vacanti*).	
Diritto internazionale privato, dell'Avv. Prof. F. P. CONTUZZI, di pag. XVI-392 (volume doppio)	3 —
Diritto internazionale pubblico, dell'Avv. Prof. F. P. CONTUZZI, di pag. XII-320 (volume doppio).	3 —
Diritto penale, dell'Avv. A. STOPPATO, di p. VIII-192.	1 50
Diritto romano, del Prof. C. FERRINI, di pag. VIII-132.	1 50
Disegno. I principii del Disegno e gli stili dell'Ornamento, del Prof. C. BOITO, 3ª edizione, di pag. IV-206, con 61 silog.	2 —
Disegno assonometrico, del Prof. PAOLONI, di pagine IV-122 con 21 tavole e 23 figure nel testo. . .	2 —
Disegno geometrico, del Prof. A. ANTILLI, di pagine VIII-85, 6 figure nel testo e 26 tavole litografiche	2 —
Disegno topografico, del Capitano G. BERTELLI, 2ª ediz. di pag. VI-137, con 12 tavole e 10 incisioni .	2 —
— (*Vedi Cartografia — Telemetria*).	
Disegno, taglio e confezione di biancheria (Manuale teorico pratico di), di E. BONETTI, con un Dizionario di nomenclatura, p. VIII-216 con 40 tav.	3 —
Disinfezione. (Vedi *Infezione*).	
Distillazione. (Vedi *Alcool — Cognac*).	
Dizionario alpino italiano. Parte 1ª: *Vette e valichi italiani,* dell'Ing. E. BIGNAMI-SORMANI. — Parte 2ª: *Valli lombarde e limitrofe alla Lombardia,* dell'Ing. C. SCOLARI, di pag. XXII-310	3 50
— (Vedi *Alpi e Prealpi bergamasche*).	
Dizionario Eritreo italiano arabo-amarico, di A. ALLORI. (In lavoro).	
Dizionario della lingua dei Galla (Oromonica). (Vedi *Grammatica*).	
Dizionario bibliografico, di C. ARLÌA, di pag. 100.	1 50
Dizionario Filatelico, per il Raccoglitore di francobolli con introduzione storica e bibliografia di J. GELLI di pag. LXIV-412.	4 50
Dizionario fotografico ad uso dei dilettanti e professionisti, contenente oltre 1500 voci in 4 lingue, nonchè 500 sinonimi e 600 formule del Dott. LUIGI GIOPPI, di pag. VIII-600 con 95 incis. e 10 tavole fuori testo.	7 50
— (Vedi *Arti grafiche fotomeccaniche — Fotografia per dilettanti — Ricettario fotografico*).	
Dizionario geografico universale, del Dott. G. GAROLLO, 3ª edizione, di pag. VI-632 a due colonne . .	6 50
Dizionario italiano. (Vedi Vocabolario italiano).	
Dizionario italiano e Volapük, di C. MATTEI. (Vedi *Volapük*).	

L.

Dizionario termini delle corse, di C. VOLPINI, di pag. 47 1
Dizionario universale delle lingue italiana, tedesca, inglese e francese, disposte in un unico alfabeto, 1 vol. di pag. 1200 8
Dogane. (Vedi *Codice doganale — Trasporti*).
Dottrina popolare, in 4 lingue. (Italiana, Francese, Inglese e Tedesca). Motti popolari, frasi commerciali e proverbi, raccolti da G. SESSA, 2ª ediz., di pag. IV-212. 2
Economia dei fabbricati rurali, di V. NICCOLI, di pag. VI-192. 2
— (Vedi *Estimo rurale — Legislazione rurale*).
Economia politica, del Prof. W. S. JEVONS, traduz. del Prof. L. COSSA, 3ª ed., riveduta, di pag. XIV-174. 1
— (Vedi *Scienza delle finanze*).
Elettricista (Manuale dell'), di G. COLOMBO e R. FERRINI, di pag. VIII-204-44 con 40 incisioni 4
— (Vedi *Illuminazione — Telefono — Telegrafia*).
Elettricità, del Prof. FLEEMING JENKIN, traduz. del Prof. R. FERRINI, di pag. VIII-180, con 32 incisioni. 1
— (Vedi *Magnetismo — Unità assolute*).
Elettrolisi. (Vedi *Galvanoplastica*).
Eliografia. (Vedi *Arti grafiche*).
Embriologia e morfologia generale, del Prof. G. CATTANEO. (In lavoro).
Enciclopedia Hoepli (Piccola), in 2 volumi di 3375 pagine di due colonne per ogni pagina con Appendice. L'opera completa elegantemente legata. . . . 20
Energia fisica, di R. FERRINI, di p. VI-108, con 15 inc. 1
— (Vedi *Dinamica elementare — Termodinamica*).
Enologia, precetti ad uso degli enologi italiani, del Prof. O. OTTAVI, 2ª ediz., riveduta e ampliata da A. STRUCCHI, di pag. XII-194, con 21 incisioni 2
— (Vedi *Analisi del vino - Cantiniere - Cognac - Enologia domestica - Malattie dei vini - Vino - Viticoltura*).
Enologia domestica, di R. SERNAGIOTTO, pag. VIII-223. 2
Entomologia. (Vedi *Coleotteri italiani — Insetti nocivi — Insetti utili — Lepidotteri*).
Equazioni (Teoria delle), del Prof. S. PINCHERLE, di pag. XII-170, con 4 incisioni 1
— (Vedi *Algebra complementare*).
Errori e pregiudizi volgari, confutati colla scorta della scienza e del raziocinio da G. STRAFFORELLO, di pag. IV-170. 1
Esercizi geografici e quesiti, di L. HUGUES, **sull'Atlante di R. Kiepert,** 2ª ediz., di pag. 76 . . 1
Esercizi di traduzione a complemento della grammatica francese, del Prof. G. PRAT, p. VI-183

L. c.

Esercizi di traduzione con vocabolario a complemento della grammatica tedesca, del Prof. G. Adler, di pag. IV-236 . . . . 1 50
— (Vedi *Grammatica tedesca — Letteratura*).
Esplodenti e modo di fabbricarli, R. Molina, p. XX-300 2 50
Estetica, del Prof. M. Pilo, di pag. XX-260 . . . . . 1 50
— (Vedi *Etica — Filosofia — Logica — Psicologia*).
Estimo rurale, di F. Carega di Muricce, p. VI-164. 2 —
— (Vedi *Agronomia — Disegno topografico — Economia dei fabbricati rurali — Geometria pratica*).
Etica, del Prof. L. Friso. (In lavoro).
Etnografia, del Prof. B. Malfatti, 2ª ediz., interamente rifusa, di pag. VI-200 . . . . 1 50
— (Vedi *Antropologia — Paleoetnologia*).
Etnologia. (Vedi *Antropologia*).
Fabbricati rurali. (Vedi *Economia dei*).
Fabbriche. (Vedi *Proprietario di Case*).
Fabbro. (Vedi *Fonditore — Operaio — Tornitore*).
Falegname ed ebanista. Natura dei legnami, maniera di conservarli, prepararli, colorirli e verniciarli, loro cubatura, di G. Belluomini, pag. X-138, con 42 inc. 2 —
Falsificazione degli alimenti. (Vedi *Adulterazione*).
Farmacista (Manuale del), del Dott. P. E. Alessandri, di pag. XII-628, con 138 tav. e 80 incisioni originali. 6 50
Ferro. (Vedi *Siderurgia*).
Ferrovie. (Vedi *Trasporti*).
Filatelia, (Vedi *Dizionario filatelico*).
Filatura. Manuale di filatura, tessitura e lavorazione meccanica delle fibre tessili, di E. Grothe, traduzione sull'ultima edizione tedesca, di p. VIII-414, con 105 inc. 5 —
— (Vedi *Coltivazione — Piante industriali*).
Filologia classica, greca e latina, del Prof. V. Inama, di pag. XII-195 . . . . 1 50
— (Vedi *Letteratura greca e romana*).
Filonauta. Quadro generale di navigazione da diporto e consigli ai principianti, con un Vocabolario tecnico più in uso nel panfiliamento, del Cap. G. Olivari, p. XVI-286 2 50
Filosofia morale, di L. Friso, p. XVI-336 (vol. doppio) 3 —
— (Vedi *Estetica — Etica — Logica — Psicologia*).
Finanze (Vedi *Scienza delle*).
Fiori. (Vedi *Floricoltura — Piante e fiori*).
Fisica, del Prof. Balfour Stewart, trad. del Prof. G. Cantoni, 4ª ediz., di pag. X-188, con 48 incisioni . . 1 50
— (Vedi *Calore — Energia fisica — Luce e suono*).
Fisiologia, di Foster, traduz. del Prof. G. Albini, 3ª ediz., di pag. XII-158, con 18 incisioni 1 50
Fisiologia comparata. (V. *Anatomia* — Embriologia).
Fitologia. (Ved[illegible] - Flora italiana — Floricoltura — F[illegible]

L. c.

Flora italiana tascabile, di R. Pirotta. (In lavoro).
Floricoltura (Manuale di), di C. M. Fratelli Roda, di pag. VIII-186, con 61 incisioni. . . . . 2 —
— (Vedi *Botanica — Piante e fiori*).
Fognatura cittadina, dell'Ing. D. Spataro. (In lav.).
Fonditore in tutti i metalli (Manuale del), di G. Belluomini, di pag. 146, con 41 incisioni . . . . . . 2 —
Fonologia greca, del Prof. A. Cinquini. (In lavoro).
Fonologia italiana, del Dott. L. Stoppato, p. VIII-102. 1 50
Fonologia latina, di S. Consoli, di pag. 208 . . . 1 50
Fotogalvanotipia. (Vedi *Arti grafiche*).
Fotografia dei colori, del Dott. C. Bonacini. (In lav.)
Fotografia pei dilettanti. (Come il sole dipinge), di G. Muffone, di pag. X-204, 2ª ediz., con molte incis. 2 —
— (Vedi *Arti grafiche — Dizionario fotografico — Ricettario fotografico*).
Francobolli. (Vedi *Dizionario Filatelico*).
Frumento e mais, di G. Cantoni, p. VI-168 e 13 incis. 2 —
— (V. *Adulterazione — Alimentazione — Panificazione*).
Frutticoltura, del Prof. Dott. D. Tamaro, con 63 illustrazioni, di pag. VIII-192 . . . . 2 —
— (Vedi *Pomologia artificiale — Uva passa*).
Fulmini e parafulmini, del Dott. Prof. E. Canestrini, di pag. VIII-166, con 6 incisioni. . . . . . . 2 —
Funghi (I) ed i tartufi, loro natura, storia, coltura, conservazione e cucinatura. Cenni di Folco Bruni . . 2 —
Fuochi artificiali. (Vedi *Pirotecnia*).
Fuochista. (Vedi *Macchinista*).
Galvanoplastica, ed altre applicazioni dell'elettrolisi, Galvanostegia, Elettrometallurgia, Affinatura dei metalli, Preparazione dell'alluminio, Sbianchimento della carta e delle stoffe, Risanamento delle acque, Concia elettrica delle pelli, ecc., del Prof. R. Ferrini, 2ª ed., completamente rifatta, di pag. XII-392 con 45 incisioni. 4 —
Gelsicoltura, del Prof. Dott. D. Tamaro, p. XVI-175, con 22 incisioni nel testo . . . . 2 —
— (Vedi *Coltivazione e industria delle piante tessili*).
Geodesia. (Vedi *Compensazione degli errori — Celerimensura — Curve — Disegno topografico — Geometria pratica — Telemetria*).
Geodinamica. (Vedi *Sismologia — Termodinamica — Vulcanismo*).
Geografia, di G. Grove, trad. del Prof. E. Galletti, 2ª ediz., riveduta, di pag. XII-160, con 26 incisioni. . 1 50
— (Vedi *Alpi — Atlante* — Cartografia — *Disegno topografico — Dizionario* geografico — Mare — Prontuario di geografia).
[Ge]ografia classica, di H. F. Tozer, traduzione e [n]ote del Prof. I. Gentile, 5ª ediz., di pag. IV-168. . 1 5

L. c.

Geografia fisica, di A. GEIKIE, traduzione sulla 6ª edizione inglese di A. STOPPANI, 3ª ediz., pag. IV-132, con 20 incisioni 1 50

Geologia, di GEIKIE, traduzione sulla 3ª edizione inglese di A. STOPPANI, 3ª ed., di p. VI-154, con 47 inc. 1 50

— (Vedi *Cristallografia* — *Mineralogia*).

Geometria analitica dello spazio, del Prof. F. ASCHIERI, di pag. VI-196, con 11 incisioni 1 50

Geometria analitica del piano, del Pr. F. ASCHIERI, di pag. VI-194, con 12 incisioni 1 50

Geometria descrittiva, del Prof. F. ASCHIERI, di pag. IV-210, con 85 incisioni 1 50

Geometria metrica e trigonometria, del Prof. S. PINCHERLE, 3ª ediz., di pag. VI-152, con 16 incisioni. 1 50

Geometria pratica, dell'Ing. Prof. G. EREDE, 2ª ediz., riveduta, di pag. X-184, con 124 incisioni . . . . . 2 —

— (Vedi *Celerimensura* — *Disegno assonometrico* — *Disegno geometrico* — *Disegno topografico* — *Geodesia* — *Regolo calcolatore* — *Statica* — *Telemetria*).

Geometria projettiva del piano e della stella, del Prof. F. ASCHIERI, 2ª ed., di p. VI-228, con 86 inc. 1 50

Geometria projettiva dello spazio, del Prof. F. ASCHIERI, con molte incisioni. (In lavoro).

Geometria pura elementare, del Prof. S. PINCHERLE, 3ª ediz., di pag. VI-140, con 112 incisioni. . . 1 50

Ghisa. (Vedi *Siderurgia*).

Giardino (Il) **infantile,** del Prof. P. CONTI, di pagine IV-214, con 27 tavole (vol. doppio) . . . . . . 3 —

Ginnastica (Storia della), di F. VALLETTI, di p. VIII-184. 1 50

Ginnastica femminile, di F. VALLETTI, di pag. VI-112, con 67 illustrazioni . . . . 2 —

Ginnastica maschile (Manuale di), per cura di J. GELLI, di pag. VIII-108, con 216 incisioni . . . . . 2 —

— (Vedi *Scherma*).

Gioielleria, oreficeria, oro, argento e platino, di E. BOSELLI, di pag. 336, con 125 incisioni . . . 4 —

— (Vedi *Pietre preziose* — *Metalli preziosi*).

Giuochi. (Vedi *Scacchi*).

Giurisprudenza. (V. *Codice doganale* — *Digesto* — *Diritto amministrativo* — *Diritto civile* — *Diritto costituzionale* — *Diritto ecclesiastico* — *Diritto internazionale pubblico e privato* — *Diritto penale* — *Diritto romano* — *Imposte dirette* — *Legge comunale* — *Legislazione rurale* — *Mandato commerciale* — *Notaio* — *Ricchezza mobile* — *Testamenti*).

Grafologia con numerosi autografi del Prof. C. LOMBROSO. (In lavoro).

Grammatica araldica. (Vedi *Araldica*).

L. c.

Grammatica e dizionario della lingua dei Galla (oromonica), del Prof. E. VITERBO.
Vol. I. Galla-Italiano, di pag. VIII-152 . . . . . 2 50
Vol. II. Italiano-Galla, di pag. LXIV-106. . . . . 2 50
Grammatica francese, del Prof. G. PRAT, p. XI-287. 1 50
— (Vedi *Esercizi di traduzione*).
Grammatica greca, del Prof. INAMA. (In lavoro). (Vedi *Fonologia — Morfologia*).
Grammatica della lingua greca moderna, del Prof. R. LOVERA, di pag. VI-154 . . . . 1 50
Grammatica inglese, del Prof. LUGI PAVIA, p. XII-260 1 50
Grammatica italiana, di T. CONCARI, di p. VII-204. 1 50
Grammatica latina, del Prof. VALMAGGI, di p. X-250. 1 50
— (Vedi *Fonologia latina — Letteratura romana*).
Grammatica e vocabolario della lingua rumena, del Prof. R. LOVERA, di pag. VIII-200 . . . . . . 1 50
Grammatica sanscrita. (Vedi *Sanscrito*).
Grammatica spagnuola, del Prof. L. PAVIA. (In lav.).
Grammatica tedesca, del Prof. L. Pavia, p. XVIII-254. 1 50
— (V. *Esercizi di traduzione — Letteratura tedesca*).
Gravitazione. Spiegazione elementare delle principali perturbazioni nel sistema solare di Sir G. B. AIRY, traduzione con note ed aggiunte del Prof. F. PORRO, con 50 incisioni, di pag. XXIV-176 . . . . 1 50
— (Vedi *Astronomia — Spettroscopio*).
Grecia (La) **antica,** di G. TONIAZZO. (V. *Storia antica*).
Idroterapia. (Vedi *Acque* [*cura delle*]).
Igiene del lavoro, TRAMBUSTI A. e SANARELLI. di pagine VIII-332 con 70 incisioni. 2 50
Igiene della vita pubblica e privata, del Dott. G. FARALLI, di pag. XII-250 . . . . 2 50
Igiene privata e medicina popolare ad uso delle famiglie, di C. BOCK, trad. di E. PARIETTI sulla 7ª ediz. ted. con una introduzione di G. SORMANI, di pag. XII-278. 2 50
Igiene pubblica, del Prof. SORMANI. (In lavoro).
Igiene rurale, A. CARRAROLI, pag. X-470 (vol. doppio). 3 —
— (Vedi *Assistenza agli infermi — Soccorsi d'urgenza*).
Igiene scolastica, di A. REPOSSI, 2ª ed., di pag. IV-246. 2 —
Igiene veterinaria, del Dott. U. BARPI, di p. VIII-228. 2 —
— (Vedi *Zoonosi*).
Igroscopi, igrometri, umidità atmosferica, del Prof. P. CANTONI, di pag. XII-146, con 24 inc. e 7 tab. 1 50
— (Vedi *Climatologia — Meteorologia*).
Illuminazione elettrica (Impianti di), dell'Ing. E. PIAZZOLI, 2ª edizione interamente rifatta, di pag. XIV-466, con 263 incisioni, 78 tabelle e 2 tav. litografate. 6 50
Imbalsamatore (Manuale dell'), preparatore tassidermista, di R. GESTRO, 2ª ed. riv., di p. XII-148, 38 inc. 2 —
— (Vedi *Naturalista viaggiatore*).

L. c.

Impianti elettrici. (V. *Elettricità — Illuminazione*).
Imposta sui redditi di ricchezza mobile (Vedi *Ricchezza mobile*).
Imposte dirette (Riscossione delle), E. BRUNI, p. VIII-158 1 50
Imposte sui fabbricati. (Vedi *Proprietario di case*).
Inchiostri. (Vedi *Vernici*).
Industria della seta, di L. GABBA, 2ª ed., p. IV-208. 2 —
Industria (L') **stearica.** Manuale pratico dell'Ing. E. MARAZZA, di pag. 288, con 76 inc. e con molte tab. 5 —
Industrie. (Vedi *Apicoltura — Arte mineraria — Asfalto — Bachi da seta — Caseificio — Concia delle pelli — Conserve — Galvanoplastica — Giojelleria — Merceologia — Molini — Olio — Orologeria — Piccole industrie — Tabacco — Tintore,* ecc.).
Industrie artistiche. (Vedi *Decorazione*).
Industrie tessili. (Vedi *Coltivazione — Gelsicoltura Filatura — Seta*).
Infezione, disinfezione e disinfettanti, del Dottor Prof. P. E. ALESSANDRI, di pag. VIII-190, con 7 inc. 2 —
Ingegnere civile. Manuale dell'Ingegnere civile e industriale, di G. COLOMBO, 13ª ed. (31°, 32° e 33° migliaio), di p. XIV-356, con 203 fig. e con una Bibliografia dell'Ingegnere disposta in ordine alfabetico delle materie di p. 148 5 50
Il medesimo tradotto in francese da P. MARCILLAC. 5 50
Ingegnere navale. Prontuario di A. CIGNONI, con 36 fig., di pag. XXXII-292. Leg. in tela L. 4 50, in pelle. 5 50
— (Vedi *Attrezzatura — Macchinista navale*).
Ingrassi. (Vedi *Chimica agraria — Concimi*).
Insetti nocivi, F. FRANCESCHINI, p. VIII-264, 96 incis. 2 —
Insetti utili, di F. FRANCESCHINI, di pag. XII-160, con 43 incisioni ed 1 tavola . . . . 2 —
Interesse e sconto, di E. GAGLIARDI, di pag. VI-204. 2 —
— (Vedi *Contabilità — Computisteria — Debito pubblico — Ragioneria — Valori pubblici*).
Istituzioni dello Stato (Le). (Vedi *Diritti e doveri dei cittadini — Ordinamento degli Stati*).
Ittiologia. (Vedi *Piscicoltura — Ostricoltura e Mitilicoltura*).
Latte, burro e cacio. Chimica analitica applicata al caseificio, del Prof. SARTORI, di pag. X-162, con 24 inc. 2 —
— (Vedi *Adulterazione degli alimenti — Caseificio*).
Legge sulle caldaje. (Vedi *Macchinista e Fuochista*).
Legge (La nuova) **comunale e provinciale,** annotata dall'Avv. E. MAZZOCCOLO, 3ª ediz., con l'aggiunta di due regolamenti e due indici, di pag. VIII-728 . . 4 50
Leggi. (Vedi *Codice doganale — Diritto amministrativo-civile-commerciale-ecclesiastico-penale-romano — Imposte dirette — Legislazione rurale — Ordinamento degli stati — Ricchezza mobile*).

L. c.

Legislazione rurale secondo il programma governativo per gli Istituti Tecnici dell'Avv. E. Bruni, di p. XI-422 3 —
Legnami. (Vedi *Cubatura dei legnami — Falegname*).
Lepidotteri italiani, del Dott. A. Griffini, di pagine VIII-238 con 149 incisioni 1 50
Letteratura americana, di G. Strafforello, p. 158 1 50
Letteratura danese. (Vedi *Letteratura norvegiana*).
Letteratura ebraica, di A. Revel, 2 vol., di pag. 364. 3 —
Letteratura egiziana, del Dott. L. Brigiuti. (In lav.).
Letteratura francese, del Prof. F. Marcillac, trad. di A. Paganini, 2ª ediz., di pag. VIII-184 . . . . . 1 50
Letteratura greca, del Prof. V. Inama, 10ª ediz., migliorata (dal 35° al 40° migliaio), di pag. VIII-234 . . 1 50
— (Vedi *Filologia classica — Verbi Greci Anomali*).
Letteratura indiana, del Prof. A. De Gubernatis, di pag. VIII-159 . . . . 1 50
Letteratura inglese, del Prof. E. Solazzi, 3ª ediz., di pag. VIII-194 . . . . 1 50
Letteratura islandese, di S. Ambrosoli. (In lavoro).
Letteratura italiana, di C. Fenini, 4ª ed., di p. VI-204 1 50
Letteratura latina. (Vedi *Fonologia latina — Grammatica latina — Letteratura romana*).
Letteratura norvegiana del Dott. S. Consoli, di pag. XVI-272 . . . . 1 50
Letteratura persiana, del Prof. I. Pizzi, di pag. X-208. 1 50
Letteratura provenzale, A. Restori, di pag. X-220. 1 50
Letteratura romana, del Prof. F. Ramorino, 3ª ediz. riveduta e corretta (dall'8° al 12° migliaio), p. IV-320. 1 50
— (Vedi *Filologia classica — Grammatica latina*).
Letteratura spagnuola e portoghese, del Prof. L. Cappelletti, di pag. VI-206 . . . . 1 50
Letteratura tedesca, del Prof. O. Lange, traduz. di A. Paganini, 2ª ediz., corretta, di pag. XII-168. . 1 50
— (Vedi *Esercizi — Grammatica tedesca*).
Letteratura ungherese, di Zigány Arpád, di pagine XII-295 . . . . 1 50
Letterature slave, di D. Ciàmpoli, 2 volumi:
I. Bulgari, Serbo-Croati, Yugo-Russi, di pag. IV-144. 1 50
II. Russi, Polacchi, Boemi, di pag. IV-142 . . . . 1 50
Libri. (Vedi *Bibliografia — Bibliotecario — Dizionario Bibliografico — Paleografia — Tipografia*).
Lingua araba. (Vedi *Arabo volgare*).
Lingua dei Galla (oromonica). (Vedi *Grammatica*).
Lingua francese. (Vedi *Grammatica e Esercizi*).
Lingua greca. (Vedi *Grammatica — Letteratura*).
Lingua greca moderna. (Vedi Grammatica).
Lingua latina. (Vedi Grammatica — Letteratura *romana*).
Lingua rumena. (Vedi Grammatica).

L. c.

Lingua sanscrita. (Vedi *Sanscrito*).
Lingua tedesca. (Vedi *Esercizi — Grammatica — Letteratura*).
Lingua tigrè. (Vedi *Tigrè*).
Lingue comparate. (Vedi *Storia comparata*).
Lingue diverse. (V. *Letteratura delle singole lingue*).
Lingue dell' Africa, di R. CUST, versione italiana del Prof. A. DE GUBERNATIS, di pag. IV-110. . . . 1 50
— (Vedi *Arabo volgare — Dizionario eritreo — Grammatica oromonica — Tigrè*).
Lingue neo-latine, del Dott. E. GORRA, di pag. 147. 1 50
Lingue straniere (Studio delle), di MARCEL, ossia l'Arte di pensare in una lingua straniera, traduz. del Prof. DAMIANI, di pag. XVI-136 . . . . 1 50
Livree. (Vedi *Araldica*).
Logaritmi (Tavole di), con 5 decimali, pubblicate per cura di O. MÜLLER, 3ª ediz., di pag. XX-142 . . . . 1 50
Logica, di W. STANLEY JEVONS, traduz. del Prof. C. CANTONI, 4ª ediz., di pag. VIII-154, e 15 incisioni . . 1 50
— (Vedi *Estetica — Etica — Filosofia — Psicologia*).
Logica matematica, di C. BURALI-FORTI, p. VI-158. 1 50
Logismografia, di C. CHIESA, 3ª ediz., pag. XIV-172. 1 50
— (V. *Computist. - Contabilità dello Stato - Ragioneria*).
Luce e colori, del Prof. G. BELLOTTI, di pag. X-156, con 24 incisioni e 1 tavola. 1 50
Luce e suono, di E. JONES, trad. di U. FORNARI. (In lav.)
Macchinista e fuochista, del Prof. G. GAUTERO, 6ª edizione, con aggiunte dell'Ing. L. LORIA, di pagine XIV-180, con 24 incisioni e col testo della Legge sulle caldaie, ecc. (dal 10° al 12° migliaio). . . . . 2 —
Macchinista navale (Manuale del) di M. LIGNAROLO, di pag. XII-404, con 164 figure 5 50
Macchine agricole, del conte A. CENCELLI-PERTI, di pag. VIII-216, con 68 incisioni . . . . 2 —
Macchine da cucire e ricamare, dell'Ing. ALFREDO GALASSINI, di pag. VII-230 con 100 incisioni 2 50
Macchine. (Vedi *Ingegnere civile — Ingegnere navale — Macchinista e fuochista — Macchinista navale — Meccanismi (500) — Meccanica — Orologeria*).
Magnetismo ed elettricità, del Dott. G. POLONI, di pag. XII-204, con 102 incisioni 2 50
Mais. (V. *Agricoltura — Frumento — Panificazione*).
Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate, del Dottor R. WOLF, traduzione con note ed aggiunte del Dottor P. BACCARINI, p. X-268, 50 inc. 2 —
Malattie ed alterazioni dei vini, del Prof. S. CETTOLINI, di pag. XI-138, con 13 incisioni . . . . 2 —
Malattie trasmissibili dagli animali all' uomo. (*Vedi Zoonosi*).

L. c.

Mandato commerciale, del Prof. E. VIDARI, p. VI-160 1 50

Mare (Il), del Prof. V. BELLIO, di pag. IV-140, con 6 tavole litografate a colori 1 50

Marino (Manuale del) **militare e mercantile,** di DE AMEZAGA, con 18 xilografie ed un elenco del personale dello Stato maggiore, di pag. VIII-264. . . . 5 —

Mastici. (Vedi *Vernici e lacche*).

Materiali da costruzione (Vedi *Resistenza dei — Travi metallici composti*).

Matematica. (Vedi *Algebra — Aritmetica — Celerimensura — Compensazione — Equazioni — Geometria — Logaritmi — Logica matematica*).

Materia medica moderna (Manuale di), del Dott. G. MALACRIDA. (In lavoro).

Materie coloranti. (Vedi *Colori e Vernici — Tintore — Piante industriali — Vernici e Lacche*).

Meccanica, del Prof. R. STAWELL BALL, traduz. del Prof. J. BENETTI, 3ª edizione, di pag. XVI-214, con 89 incisioni. 1 50

Meccanismi (500), scelti fra i più importanti e recenti riferentisi alla dinamica, idraulica, idrostatica, pneumatica, macchine a vapore, molini, torchi, orologerie ed altre diverse macchine, da H. T. BROWN, traduzione italiana sulla 16ª edizione inglese, dall'Ingegnere F. CERRUTI, p. VI-176, con 500 inc. nel testo 2 50
— (Vedi *Orologeria — Tornitore meccanico*).

Medaglie. (Vedi *Numismatica*).

Medicina. (Vedi *Anatomia — Animali parassiti — — Assistenza agli infermi — Batteriologia — Embriologia — Fisiologia — Farmacista — Igiene — Materia medica — Protistologia — Soccorsi d'urgenza — Terapeutica — Zoonosi*).

Metalli. (Vedi *Peso dei metalli — Operaio — Fonditore — Tempera — Tornitore*).

Metalli preziosi (oro, argento, platino, estrazione, fusione, assaggi, usi), di G. GORINI, 2ª ediz., di pag. 196, con 9 incisioni . . . . 2 —
— (Vedi *Oreficeria e Gioielleria*).

Metallurgia. (Vedi *Siderurgia*).

Meteorologia generale, del Dott. L. DE MARCHI, di pag. VI-156, con 8 tavole colorate 1 50
— (Vedi *Climatologia — Igroscopi — Sismologia*).

Metrica dei greci e dei romani, di L. MÜLLER, tradotta dal Dott. V. LAMI, di pag. XVIII-130 . . . 1 50
— (Vedi *Letteratura greca — Ritmica — Verbi greci*).

Metrologia. (Vedi Prototipi internazionali del metro e del kilogramma).

Micologia. (Vedi Funghi e Tartufi — Malattie Crittogamiche).

L. c.

Microscopio (Il), ossia Guida elementare alle più facili osservazioni di Microscopia, del Prof. CAMILLO ACQUA, di pag. XII-226, con 81 incisioni. 1 50
— (Vedi *Batteriologia — Protistologia — Tecnica microscopica*).
Miele. (Vedi *Apicoltura*).
Militaria. (Vedi *Esplodenti — Scherma — Storia arte militare*).
Mineralogia generale, del Prof. L. BOMBICCI, 2ª edizione riveduta, di pag. XIV-190, con 183 incisioni e 3 tavole cromolitografate 1 50
Mineralogia descrittiva, del Prof. L. BOMBICCI, 2ª ediz. di pag. IV-300, con 119 incisioni (vol. doppio). . 3 —
— (Vedi *Cristallografia*).
Miniere. (Vedi *Arte mineraria*).
Miniatura. (Vedi *Colori e vernici — Luce e colori — Decorazione e ornamentazione — Pittura*).
Miti. (Vedi *Errori e pregiudizi*).
Mitilicoltura. (Vedi *Ostricoltura — Piscicoltura*).
Mitologia comparata, di A. DE GUBERNATIS, 2ª ediz., di pag. VIII-150 . . . . 1 50
Mitologia greca, di FORESTI Vol. I *Divinità*, p. VIII-264 1 50
Vol. II, *Eroi*. 1 50
Mitologia romana, di A. FORESTI. (In lavoro).
Molini (Industria dei), di C. SIBER-MILLOT. (In lavoro).
Momenti resistenti e pesi di travi metalliche composte. Prontuario ad uso degli ingegneri, architetti e costruttori, con 10 figure ed una tabella per la chiodatura, di E. SCHENCK, di pag. XL-188. . . . 3 50
— (Vedi *Peso dei metalli — Resistenza dei materiali*).
Monete. (Vedi *Archeologia — Numismatica — Paleografia — Tecnologia e Terminologia monetaria*).
Morfologia, (Vedi *Embriologia*).
Morfologia greca, del prof. V. BETTEI. (In lavoro).
Morale. (Vedi *Etica — Filosofia morale*).
Musica. (Vedi *Armonia — Cantante — Pianista — Storia della musica — Strumentazione — Strumenti ad arco* ecc.).
Mutuo soccorso. (Vedi *Società di*)
Naturalista viaggiatore, di A. ISSEL e R. GESTRO (Zoologia), di pag. VIII-144, con 38 incisioni . . . . 2 —
— (Vedi *Imbalsamatore — Zoologia*).
Nautica. (Vedi *Attrezzatura — Filonauta — Ingegnere navale — Macchinista navale — Marino*).
Notaro (Manuale del), aggiuntevi le Tasse di registro, di *bollo ed ipotecarie*, le norme ed i moduli pel Debito pubblico, del Notaio AVV. A. GARETTI, 2ª ediz., rifusa e notevolmente ampliata, di pag. XII-340 . . . . . . 3 50
— (Vedi *Giurisprudenza — Testamenti*).

L. c.

Numismatica, del Dott. S. Ambrosoli, di pag. xvi-216, con 100 fotoincisioni nel testo e 4 tavole 1 50
— (Vedi *Araldica — Archeologia — Paleografia*).

Olii vegetali, animali e minerali, loro applicazioni, di G. Gorini, di pag. viii-214, con 7 incis., 2ª ediz., completamente rifatta dal Dott. G. Fabris . . . . 2 —
— (Vedi *Industria stearica — Olivo ed olio — Saponi*).

Olivo ed olio, *Coltivazione dell'olivo, estrazione, purificazione e conservazione dell'olio,* del Prof. A. Aloi, 3ª ediz., di pag. xii-330, con 41 incisioni . . . . . 3 —

Omero, di W. Gladstone, traduz. di R. Palumbo e C. Fiorilli, di pag. xii-196 . . . . 1 50

Operaio (Manuale dell'). Raccolta di cognizioni utili ed indispensabili agli operai tornitori, fabbri, calderai, fonditori di metalli, bronzisti, aggiustatori e meccanici, di G. Belluomini, 3ª edizione, di pag. xvi-216. 2 —
— (V. *Falegname - Fonditore - Paga operai - Tornitore*).

Operazioni doganali. (Vedi *Codice doganale — Trasporti*).

Opifici. (Vedi *Proprietario di Case*).

Ordinamento degli Stati liberi d' Europa, del Dott. F. Racioppi, di pag. viii-310 (vol. doppio) . . 3 —

Ordinamento degli Stati liberi fuori d'Europa, del Dott. F. Racioppi, di pag. viii-376 (vol. doppio). 3 —

Oreficeria e giojelleria, oro, argento e platino, di E. Boselli, di pag. 336, con 125 incisioni. . . . . 4 —
— (Vedi *Metalli preziosi — Pietre preziose*).

Oriente antico (L'), di I. Gentile. (V. *Storia antica*).

Ornamentazione. (Vedi *Colori — Decorazioni — Disegno — Pittura — Scoltura*).

Orografia. (Vedi *Alpi — Dizionario Alpino — Prealpi Bergamasche*).

Orologeria moderna, dell'Ing. Garuffa, con 187 illustrazioni, di pag. viii-302, con 276 incisioni . . . 5 —

Orticoltura, del Prof. D. Tamaro, con 60 incisioni. 4 —
— (Vedi *Agricoltura*).

Ostricoltura e mitilicoltura, del Dott. D. Carazzi, con 13 fototipie, di pag. viii-202 . . . . 2 50

Ottica, di E. Gelcich, con molte illustrazioni (In lav.).

Ovicoltura. (Vedi *Alimentazione — Bestiame*).

Paga giornaliera (Prontuario della), **da cinquanta centesimi a lire cinque,** di C. Negrin, di pag. 222. 2 50

Paleoetnologia, di I. Regazzoni, p. xi-252, con 10 inc. 1 50

Paleografia, di E. M. Thompson, traduz. dall'inglese, con aggiunte e note di G. Fumagalli, di pag. viii-156, con 21 incisioni nel testo e 2 tavole in fototipia . . 2 —

Panfiliamento. (Vedi *Filonauta*).

Panificazione razionale, di Pompilio, di pag. iv-128. 2 —

Parafulmini. (Vedi *Elettricità — Fulmini*).

L. c.

Parassitologia. (Vedi *Animali parassiti*).
Pedagogia. (Vedi *Didattica — Giardino infantile — Ginnastica femminile e maschile — Igiene scolastica*).
Pelli. (Vedi *Concia delle pelli*).
Pensioni. (Vedi *Società di Mutuo soccorso*).
Peso dei metalli, ferri quadrati, rettangolari, cilindrici, a squadra, a U, a Y, a Z, a T e a doppio T, e delle lamiere e tubi di tutti i metalli, di G. Belluomini, di pag. XXIV-248 . . . 3 50
— (V. *Fonditore — Ingegnere civile — Ingegnere navale — Momenti resistenti — Operaio — Resistenza*).
Pianista (Manuale del), di L. Mastrigli, di p. XVI-112. 2 —
Piante e fiori sulle finestre, sulle terrazze e nei cortili. Coltura e descrizione delle principali specie e varietà, di A. Pucci, di pag. VIII-198 con 116 incisioni. 2 50
— (Vedi *Botanica — Floricoltura — Frutticoltura*).
Piante industriali, coltivazione, raccolto e preparazione, di G. Gorini, nuova edizione, di pag. II-144. 2 —
Piante tessili. (Vedi *Coltivazione ed industrie delle — Gelsicoltura*).
Piccole industrie, del Prof. A. Errera, di p. XVI-186. 2 —
Pietre preziose, classificazione, valore, arte del gioielliere, di G. Gorini, 2ª ed., di pag. 138, con 12 inc. 2 —
— (Vedi *Metalli preziosi — Oreficeria — Gioiellería*).
Pirotecnica moderna, di F. Di Maio, con 111 incisioni, di pag. VIII-150. . . . . 2 50
Piscicoltura, del Dott. E. Bettoni. (In lavoro).
— (Vedi *Ostricoltura e Mitilicoltura*).
Pittura. Pittura italiana antica e moderna, del Prof. A. Melani, 2 vol., di pag. XX-164 e XXVI-202, illustrati con 102 tav., di cui una cromolit. e 11 figure nel testo. 6 —
— (Vedi *Anatomia pittorica — Colori (scienza dei) — Colori e vernici — Decorazione — Luce e colori*).
Poesia. (Vedi *Arte del Dire — Dantologia — Letteratura — Omero — Rettorica — Ritmica — Shakspeare — Stilistica*).
Pollicoltura, del March. G. Trevisani, con 70 illustrazioni, di pag. XVI-176 . . . . 2 50
— (Vedi *Animali da cortile — Colombi*).
Pomologia artificiale, secondo il sistema Garnier-Valletti, del Prof. M. Del Lupo, p. VI-132, con 44 inc. 2 —
— (Vedi *Frutticoltura — Orticoltura*).
Prato (Il), del Prof. G. Cantoni, di pag. 146, con 13 inc. 2 —
Prealpi bergamasche (Guida-itinerario alle), compresi i passi alla Valtellina, con prefazione di Stoppani, 2ª ediz., di pag. XX-124, con carta topografica e panorama delle Alpi Orobiche . . . . 3 —
— (Vedi *Alpi — Dizionario alpino — Geografia*).
Pregiudizi. (Vedi *Errori e pregiudizi — Mitologia*).

L. c.

Prontuario di geografia e statistica, di G. Garollo, pag. 62 . . . . 1 —
— (Vedi *Atlante Universale — Atlante d'Italia — Dizionario geografico — Geografia*).
Prontuario per le paghe. (Vedi *Paghe*).
Proprietario di case e di opifici (Manuale del), Imposta sui fabbricati dell'Avv. Giordani, pag. xx-264. 1 50
Protistologia, di L. Maggi, 2ª ediz., di pag. xvi-278, con 93 incisioni nel testo (volume doppio). . . . . 3 —
— (Vedi *Animali parassiti — Batteriologia — Microscopio*).
Prototipi (I) internazionali del metro e del kilogramma ed il codice metrico internazionale, di A. Tacchini. (In lav.)
Proverbi in quattro lingue. (V. *Dottrina popolare*).
Psicologia, del Prof. C. Cantoni, di pag. iv-158 . . 1 50
Psicologia fisiologica, di G. Mantovani. (In lav.).
Raccoglitore di francobolli. (Vedi *Dizionario filatelico*).
Ragioneria, del Prof. V. Gitti, 2ª ediz., di pag. vi-132. 1 50
— (V. *Computisteria — Contabilità — Logismografia*).
Reclami ferroviari. (Vedi *Trasporti*).
Regolo calcolatore e sue applicazioni nelle operazioni topografiche, dell'Ing. G. Pozzi, di pag. xv-238 con 182 incisioni e 1 tavola 2 50
Religione e lingue dell'India inglese, di R. Cust, trad. dal Prof. A. De Gubernatis, di pag. iv-124 . 1 50
— (Vedi *Letteratura indiana*).
Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni, dell'Ing. Gallizia, pag. x-336, 236 incisioni e 2 tavole. 5 50
— (Vedi *Peso dei metalli — Travi metallici*).
Rettorica, ad uso delle Scuole, di F. Capello, p. vi-122. 1 50
— (Vedi *Arte del dire — Ritmica — Stilistica*).
Ricamo. (Vedi *Macchine da cucire*).
Ricchezza mobile (Imposta sui redditi di), dell'Avvocato E. Bruni, di pag. viii-218 . . . . 1 50
Ricettario fotografico, Dott. Luigi Sassi, di p. vi-150 2 —
Rimedi. (Vedi *Terapeutica*).
Riscaldamento e ventilazione degli ambienti abitati, del Prof. R. Ferrini, 2 vol., di pag. x-332, 94 incis. 4 —
Riscossione d'imposte. (Vedi *Imposte dirette*).
Risorgimento italiano (Storia del), del Prof. F. Bertolini, di pag. vi-154 . . . . 1 50
— (Vedi *Storia e cronologia — Storia italiana*).
Ristauratore dei dipinti, del Conte G. Secco-Suardo, 2 vol., di pag. xvi-269, xii-362 con 47 incisioni . . . 6 —
Ritmica e metrica razionale italiana, del Professore Rocco Murari, di pag. xvi-216. . . . . . . 1 50
— (Vedi *Arte del dire — Rettorica — Stilistica*).

L. c.

Rivoluzione (La) **francese** (1789-1799), del Prof. Dott. Gian Paolo Solerio, di pag. iv-176 . . . . . . 1 50
Sanscrito (Avviamento allo studio del), di F. G. Fumi, 2ª ediz., rifatta, di pag. xii-254 (vol. doppio) . . . . 3 —
Saponeria, dell'Ing. E. Marazza. (In lavoro).
Scacchi (Manuale pel giuoco degli), di A. Seghieri, di pag. xv-222, con 191 illustrazioni 2 50
Scherma italiana (Manuale di), su i principii ideati da Ferdinando Masiello, di J. Gelli, di pag. viii-194, con 66 tavole. 2 50
Scienza delle finanze, di T. Carnevali, pag. iv-140. 1 50
Scienze naturali. (Vedi *Anatomia comparata — Animali parassiti — Antropologia — Arte mineraria — Batteriologia — Bestiame — Botanica — Chimica — Coleotteri — Chimica agraria — Concimi — Cristallografia — Fisiologia — Flora italiana — Funghi e Tartufi — Gelsicoltura — Geologia — Imbalsamatore — Insetti — Lepidotteri — Microscopio — Mineralogia — Naturalista — Ostricoltura — Piante e Fiori — Piscicoltura — Pomologia — Protistologia — Selvicoltura — Zoologia*).
Scoltura. Scoltura italiana antica e moderna, statuaria e ornamentale dell' Archit. Prof. A. Melani, di pagine xviii-196, con 56 tav. e 26 fig. intercalate nel testo. 4 —
Scoltura in legno. (Vedi *Decorazione e industrie artistiche — Falegname*).
Scritture d' affari (Precetti ed esempi di), per uso delle Scuole tecniche, popolari e commerciali, del Professor D. Maffioli, di pag. viii-203. . . . . 1 50
Selvicoltura, di A. Santilli, pag. viii-220 e 46 inc. 2
Sericoltura. (Vedi *Bachi da seta — Gelsicoltura — Industria della seta — Tintura della seta*).
Shakspeare, di Dowden, trad. di Balzani. (In lav.). 1 50
Siderurgia (Manuale di), dell'Ing. V. Zoppetti, pubblicato e completato per cura dell' Ing. E. Garuffa, di pag. iv-368, con 220 incisioni. 5 50
— (Vedi *Metalli — Tempera*).
Sismologia, del Capitano L. Gatta, di pag. viii-175, con 16 incisioni e 1 carta 1 50
Soccorsi d' urgenza, del Dott. C. Calliano, di pagine xli-299, con 6 tavole litografate, 3ª edizione . . 3 —
Società di Mutuo soccorso (Manuale Tecnico per le). Norme per l'assicurazione delle pensioni e dei sussidi per malattia e per morte del dott. G. Gardenghi (in lav.).
Spettroscopio (Lo) **e le sue applicazioni,** di R. A. Proctor, traduz. con note ed aggiunte di F. Porro, di pag. vi-178, con 71 incisioni e una carta di spettri. 1 50
Spirito di vino. (Vedi *Alcool — Cognac*).

[redacted]

L. c.

Sport. (Vedi *Alpi — Cacciatore — Ciclista — Dizionario Alpino — Ginnastica — Scacchi — Scherma*).

Statica (Principî di) **e loro applicazione alla teoria e costruzione degli strumenti metrici,** per l'Ing. E. BAGNOLI. di pag. VIII-252 con 192 incisioni . . . 3 50

Statistica, di F. VIRGILII, di pag. VIII-176 . . . . 1 50

Stearineria. (Vedi *Industria stearica*).

Stemmi. (Vedi *Araldica*).

Stenografia, di G. GIORGETTI e M. TESSAROLI (secondo il sistema Gabelsberger-Noe), di pag. 200. . . 2 —

Stilistica, del Prof. F. CAPELLO. di pag. XII-164. . . 1 50
— (Vedi *Arte del dire — Rettorica — Ritmica.*

Storia antica (Elementi di). Vol. I. *L'Oriente Antico,* prospetto storico, di I. GENTILE, di pag. XII-232 . . 1 50
Vol. II. *La Grecia,* di G. TONIAZZO, di pag. VI-216. 1 50

Storia e cronologia medioevale e moderna, in CC tav. sinottiche, di V. CASAGRANDI, di pag. XVIII-204. 1 50

Storia dell'arte militare antica e moderna, di V. ROSSETTO, con 17 tavole illustrative, di pag. VIII-504. 5 50

Storia della ginnastica. (V. *Ginnastica - Scherma*).

Storia italiana (Manuale di), di C. CANTÙ, di p. IV-160. 1 50
— (Vedi *Risorgimento — Storia e cronologia*).

Storia della musica, del Dott. A. UNTERSTEINER, di pag. 300 (vol. doppio). . . . . 3 —

Storia naturale. (Vedi *Scienze naturali*).

Strategia. (Vedi *Storia dell'arte militare*).

Strumentazione (Manuale di), di E. PROUT, trad. ital. con note di V. RICCI, con 95 esempi, di pag. X-222. 2 50
— (Vedi *Armonia — Cantante — Pianista*).

Strumenti ad arco (Gli) **e la musica da camera,** del Duca di CAFFARELLI F., di pag. X-235 . . . . 2 50

Strumenti metrici. (Vedi *Statica*).

Suono (Vedi *Luce e suono*).

Sussidî. (Vedi *Società Mutuo soccorso*).

Tabacco, del Prof. G. CANTONI, di p. IV-176, con 6 inc. 2 —

Tacheometria. (Vedi *Celerimensura*).

Taglio e confezione di biancheria. (V. *Disegno*).

Tariffe ferroviarie. (V. *Codice doganale - Trasporti*).

Tartufi e funghi. (Vedi *Funghi*).

Tasse di registro, bollo, ecc. (Vedi *Notaro*).

Tassidermista. (Vedi *Imbalsamatore — Naturalista viaggiatore*).

Tavole logaritmiche. (Vedi *Logaritmi*).

Tavole tacheometriche. (Vedi *Celerimensura*).

Tecnica di anatomia microscopica, del Prof. D. CARAZZI, di pag. XI-211 con 5 incisioni. 1 50

Tecnologia e terminologia monetaria, di G. SACCHETTI, di pag. XIV-192 . . . . 2 —

L. c.

Telefono, di D. V. PICCOLI, di pag. IV-120, con 38 inc. 2 —
Telegrafia, di R. FERRINI, di pag. VI-318, con 95 inc. 2 —
Telegrafia marittima. (Vedi *Attrezzatura*).
Telemetria, misura delle distanze in guerra, di G. BERTELLI, di pag. XIII-145, con 12 zincotipie . 2 —
— (Vedi *Cartografia* — *Celerimensura* — *Compensazioni errori* — *Disegno topografico*).
Tempera e cementazione, dell'Ing. FADDA, di pagine VIII-108, con 20 incisioni . . . . 2 —
Terapeutica (Manuale di) l'impiego ipodermico e la dosatura dei rimedî del Dott. G. MALACRIDA. (In lav.)
Termodinamica, di C. CATTANEO, p. X-196, con 4 fig. 1 50
Terremoti. (Vedi *Sismologia* — *Vulcanismo*).
Tessitura. (Vedi *Filatura*).
Testamenti (Manuale dei), per cura del Dott. L. SERINA, di pag. VI-238 . . . . 2 50
Tigrè-italiano (Manuale), con due dizionarietti italiano-tigrè e tigrè-italiano ed una cartina dimostrativa degli idiomi parlati in Eritrea, del Cap. MANFREDO CAMPERIO, di pag. 180 . . . . 2 50
— (V. *Arabo volgare* — *Grammatica Galla* — *Lingue dell'Africa*).
Tintore (Manuale del), di R. LEPETIT, 3ª ediz., di pagine X-279, con 14 incisioni (vol. doppio) . . . . . 4 —
Tintura della seta, studio chimico tecnico, di T. PASCAL, di pag. XVI-432 . . . . 5 —
Tipografia. I. — Guida per chi stampa e fa stampare. — Compositori e Correttori, Revisori, Autori ed Editori, di S. LANDI, di pag. 280 . . . . 2 50
Topografia. (Vedi *Cartografia* — *Celerimensura* — *Compensazione errori* — *Disegno topografico* — *Regolo calcolatore* — *Telemetria*).
Topografia di Roma antica, di L. BORSARI, con illustrazioni. (In lavoro).
Tornitore meccanico (Guida pratica del), ovvero sistema unico per calcoli in generale sulla costruzione di viti e ruote dentate, arricchita di oltre 100 problemi risolti, di S. DINARO, di pag. 164. . . . . . 2 —
— (Vedi *Meccanica* — *Meccanismi* — *Operaio*).
Trasporti, tariffe, reclami ferroviari ed operazioni doganali. Manuale pratico ad uso dei commercianti e privati, colle norme per l'interpretazione delle tariffe e disposizioni vigenti, per A. G. BIANCHI, con una carta delle reti ferroviarie italiane, di pagine XVI-152 . . . . 2 —
Travi metallici composti (Momenti resistenti, pesi dei), di E. SCHENCK, pagine XL-188, 10 figure e tabella per chiodatura 3
— (Vedi *Peso dei metalli* — Resistenza dei materiali).

L. c.

Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali, dell'Ing. O. Jacoangeli. (In lavoro).

Trigonometria. (Vedi *Geometria metrica*).

Unità assolute. Definizione, Dimensioni, Rappresentazione, Problemi, dell'Ing. G. Bertolini, di p. x-124-44. 2 50

Uva passa (Industria dell') **e della essicazione delle frutta e degli ortaggi**, Prof. L. Paparelli. (In lav).

Valli Lombarde, di Scolaro. (Vedi *Dizion. alpino*).

Valori pubblici (Manuale per l'apprezzamento dei) e per le operazioni di Borsa, Dott. F. Piccinelli, di pag. xiv-236 . . . . 2 50

Velocipedismo, di A. Galante. (Vedi *Ciclista*).

Ventilazione. (Vedi *Riscaldamento*).

Verbi greci anomali (I), di P. Spagnotti, secondo le Grammatiche di Curtius e Inama, di pag. xxiv-107. 1 50

Vernici, lacche, mastici, inchiostri da stampa, ceralacche e prodotti affini (Fabbricazione delle), dell'Ing. Ugo Fornari, di pag. viii-262 . . . . . 2 —

— (Vedi *Colori e Vernici*).

Veterinaria. (Vedi *Bestiame — Cavallo — Igiene veterinaria — Zoonosi*).

Viaggi. (Vedi *Ciclista — Cristoforo Colombo — Naturalista viaggiatore*).

Vinacce (Fabbricazione delle). (Vedi *Cognac*).

Vino (Il), di Grazzi-Soncini, di pag. xvi-152 . . . . 2 —

Viticoltura. Precetti ad uso dei Viticoltori italiani, del Prof. O. Ottavi, rived. ed ampliata da A. Strucchi, 3ª ediz., di pag. viii-184 e 22 incisioni . . . . 2 —

— (Vedi *Analisi del vino — Cantiniere — Enologia — Enologia domestica — Malattie dei vini — Uva passa — Vino*).

Vocabolario (Nuovo) **della lingua italiana**, di A. Straccali e L. Gentile. Volume di circa 1400 pagine. (In lavoro).

Volapük (Dizionario italiano-volapük), preceduto dalle Nozioni compendiose di grammatica della lingua, del Prof. C. Mattei, secondo i principii dell'inventore M. Schleyer, ed a norma del *Dizionario Volapük* ad uso dei francesi, del Prof. A. Kerckhoffs, di pag. xxx-198. 2 50

— (Dizionario volapük-italiano), del Prof. C. Mattei, di pag. xx-204 . . . . 2 50

— Manuale di conversazione e raccolta di vocaboli e dialoghi italiani-volapük, per cura di M. Rosa Tommasi e A. Zambelli, di pag. 152 . . . . 2 50

Volumetria. (Vedi *Analisi volumetrica*).

Vulcanismo, del Capitano L. Gatta, di pag. viii-268, con 28 incisioni 1 50

— (*Vedi Climatologia — Igroscopi — Meteorologia — Sismologia*).

L. c.

Zincotipia. (Vedi *Arti grafiche*).
Zoologia, Proff. E. H. GIGLIOLI e G. CAVANNA, 3 vol.:
I. Invertebrati, di pag. 200, con 45 figure . . . 1 50
II. Vertebrati. Parte I, Generalità, Ittiopsidi (Pesci ed Anfibi), di pag. XVI-156, con 33 incisioni. . 1 50
III. Vertebrati. Parte II, Sauropsidi, Teriopsidi (Rettili, Uccelli e Mammiferi), p. XVI-200 con 22 inc. 1 50
— (Vedi *Animali parassiti — Batteriologia — Coleotteri italiani — Imbalsamatore — Insetti — Lepidotteri — Naturalista viaggiatore — Protistologia*).
Zoonosi, del Dott. B. GALLI VALERIO, di pag. XV-227 1 50
— (Vedi *Igiene veterinaria*).
Zootecnia, del Prof. TAMPELINI. (In lavoro).

INDICE ALFABETICO DEGLI AUTORI.

MILANO TIP LOMBARDI E [illegible]