MANUALI HOEPLI

CALCOLO
DELLE
VARIAZIONI
E
CALCOLO
DELLE
DIFFERENZE FINITE

(III PARTE DEL CALCOLO INFINITESIMALE)

PER

ERNESTO PASCAL
PROF. ORDINARIO NELL'UNIVERSITÀ DI PAVIA.

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAJO DELLA REAL CASA
MILANO

1897.

Milano, Tip. Bernardoni di C. Rebeschini e C.

INDICE

PARTE II.

CALCOLO DIRETTO E CALCOLO INVERSO DELLE DIFFERENZE FINITE.

*

PREFAZIONE

Lo scopo del presente volume è lo stesso di quello di altri simili da me pubblicati poco tempo fa; far conoscere, cioè, lo stato attuale di una determinata teoria delle matematiche superiori. Naturalmente se si dovessero minutamente raccogliere tutte le considerazioni sviluppate dai vari Autori che hanno trattato dell'argomento non basterebbero molti volumi, ma non si farebbe neanche cosa capace di quell'utilità cui io intendo che una opera siffatta debba essere indirizzata.

Io credo assai utile, per lo stato presente degli studi matematici, dei lavori di sintesi, nei quali sieno indicati i procedimenti e le considerazioni generali riferentisi ai vari problemi di una teoria, sieno nel miglior modo aggruppati i metodi diversi dei vari Autori, prendendo da ciascuno quello che di meglio si può scegliere; nei quali sieno messi in luce i legami, non sempre facili a scoprirsi, che congiungono le idee e i punti di vista di un Autore con quelli di un altro, e nei quali infine sia lasciato una larga parte alle indicazioni storiche e bibliografiche *razionalmente ordinate.*

È quest' ultima parte che si può dire finora, salvo le eccezioni, notevolmente trascurata nei Trattati, ed invece a me pare che è la ragion storica che può alle volte porre sotto la sua più viva e più feconda luce un metodo o una ricerca.

Non basta che un Trattato sia chiaro e scritto bene, perchè possa produrre dei fecondi effetti nella mente del lettore.

La lettura di certi libri, che pure hanno pregi di altra natura, produce nella mente come una curiosa sensazione di vuoto; non si sa se quei procedimenti, quei metodi, quei teoremi sono di chi scrive o se sono di altri; non si vede mai qual' è la loro ragion di essere, donde son derivati e dove vanno a finire. La mente resta come estranea alle cose che impara, e non sa in quale direzione deve muoversi da sè.

L' informarsi ai princìpi ed ai concetti suesposti è tanto più importante quando poi si tratti di argomenti su cui c' è ancora tanto da discutere, e su cui l'esame critico ha trovato un vasto campo di azione. Di tale specie è p. es. l'argomento dell'altro mio libro: *Note critiche di calcolo infinitesimale* * (Milano, 1895), e di tale specie è anche

* Mi piace ricordare a questo proposito che il CANTOR riferendo su quel mio libro lo giudica: . . . . *eine Samm-*

l'argomento della prima parte (il *Calcolo delle variazioni*) del nuovo volume che presento oggi al pubblico matematico, argomento difficile i cui procedimenti generali e la cui parte, dirò così, formale, sono stati trovati da molto tempo, sino cioè dai tempi di Eulero, di Lagrange e di Jacobi, ma che dal punto di vista della legittimità di siffatti procedimenti e della più o meno attendibilità dei risultati che con essi procedimenti si ottengono, è ancora, si può dire, sul nascere. Basti ricordare che è appena da poco tempo che è stato messo fuori discussione la legittimità di un procedimento intuito già da Lagrange (il metodo dei moltiplicatori), e che finora era stato considerato come dipendente da una verità assiomatica, e non lo era.

Il programma che ho qui tracciato è quello appunto che mi ha servito di guida nel comporre questo lavoro e gli altri consimili.

Il calcolo delle variazioni, diramazione com'è del calcolo infinitesimale, risente di questo tutte le incompiutezze, e anzi le moltiplica; e presentemente esso perciò costituisce ancora una scienza, dal punto di vista della critica, molto imperfetta; il meglio che si possa fare in un Trattato è di non nasconderne le imperfezioni, ma anzi di porle bene in vista, e di richiamare in modo esplicito su di esse l'attenzione degli studiosi.

---

lung, welche bis jetzt einzig in der Mathematische Literatur dasteht, und gewiss zahlreiche Wünsche befriedigt ....
(Zeitsch. f. Math. u. Phys. Vol. XLI (1896), pag. 190.)

Sono però naturalmente ben lungi dal credere che l'opera mia abbia adempiuto in tutto e nel miglior modo le condizioni del programma; a me basterà che il lettore approvi l'ordine di idee nel quale mi sono messo, e consideri benevolmente l'opera mia come un primo, per quanto incompiuto, tentativo.

Pavia, Ottobre del 1896.

Ernesto Pascal.

In quanto alla seconda parte *(Calcolo delle differenze finite)* se ne vegga l'introduzione e la prefazione a pag. 207 di questo volume.

PARTE I.

Calcolo delle variazioni.

RIASSUNTO STORICO SUL CALCOLO DELLE VARIAZIONI.

Tutti i lavori che si riferiscono al calcolo delle variazioni possono raggrupparsi intorno a tre problemi fondamentali, cioè:

1) Il problema che, potremo chiamare, della variazione prima degli integrali semplici, la ricerca cioè delle equazioni differenziali, sotto la loro più opportuna forma, cui devono soddisfare le funzioni incognite del problema;

2) Lo studio e la trasformazione della cosidetta variazione seconda;

3) Il calcolo delle variazioni per gli integrali multipli a limiti variabili.

Il primo problema comincia coll' inizio stesso del calcolo delle variazioni, quindi con Eulero (1744) e più compiutamente con Lagrange (1762); il secondo si può dire che comincia con Jacobi (1837), sebbene prima di lui Legendre (1786) ne avesse già tentata la soluzione; e finalmente il terzo problema, occasionato per la prima volta da una ricerca di Gauss, comincia con Poisson (1833) e Ostrogradsky (1834).

Il primo problema di calcolo delle variazioni fu quello proposto da Newton, e di cui egli dette la soluzione senza dimostrarla (1686); si trattava di determinare la forma che deve avere un corpo rotondo perchè immerso in un fluido nel senso del suo asse, incontri la minima resistenza possibile, e facendo l'ipotesi che la resistenza sia proporzionale al quadrato della velocità. (Vedi il nostro § 30.)

Non fu questo però il problema che dette veramente origine al calcolo delle variazioni; fu invece il famoso preblema della *brachistocrona* o curva di minima discesa. (Vedi il nostro § 31.) Esso fu proposto da Giovanni Bernoulli nel 1696 e da lui stesso risoluto nell'anno successivo.

Non ripeteremo qui la storia di questo problema che noi abbiamo già trattata in un paragrafo speciale; solo diremo che il fratello Giacomo Bernoulli nello stesso anno 1697, dopo aver data un'altra soluzione del problema della *brachistocrona*, sul finire della Memoria, sviluppò alcune considerazioni generali sulla natura del problema e lo trovò affine ai problemi di dato perimetro e massime aree considerati già fin dai geometri greci, e, come conclusione del lavoro, dopo aver raggruppato tutti siffatti problemi sotto la denominazione comune di *isoperimetri*, propose ai geometri un altro problema. (Vedi il n. 1 del nostro § 34.) di tale specie, dando tre mesi di tempo, e promettendo 50 ducati di premio.

Per quasi mezzo secolo vari autori, fra cui principalmente i fratelli Bernoulli e Eulero, continuarono ad occuparsi del problema della brachistocrona e degli isoperimetri, variando in diversi modi le condizioni del problema, e non mancarono dei lavori sbagliati di Eulero stesso quali quelli pubblicati nei volumi VII, e VIII degli antichi *Comm. Petropolitani.*

Fu nel 1744 che comparve il primo lavoro veramente importante sull'argomento, e fu quello di Eulero, ***Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes***, *sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.*

In questo lavoro l'autore si propone, come dice il titolo, di stabilire un metodo generale per la soluzione degli isoperimetri, e giunge ad un metodo che è ancora ben lungi da un vero calcolo di variazioni, fondato, come è, principalmente sulla considerazione di *infinitamente piccoli.*

L'autore considerò il caso del massimo assoluto, il caso del massimo relativo ad *una* condizione data, e finalmente il caso in cui sieno *più di una* le condizioni date, e applicò il suo metodo a numerosissimi esempi, risolvendo forse tutti i problemi su questo soggetto che fino allora erano stati oggetto delle considerazioni dei geometri. Il metodo di Eulero era ingegnoso e degno veramente del suo genio, e la cosiddetta *regola isoperimetrica* fu trovata da lui, regola nella quale c'è indubbiamente il seme di quel procedimento che applicato poi da Lagrange in una maniera assai più generale prese nome di *metodo dei moltiplicatori.*

Tuttavia l'opera di Eulero per quanto sia semplice nei risultati, è troppo artifiziosa nel metodo.

" Essa, dice Lagrange (vedi Opere X, pag. 395), non avrebbe lasciato niente a desiderare se avesse avuto per base un'analisi più conforme allo spirito del calcolo differenziale; ma la decomposizione che l'autore fa delle differenziali e degli integrali nei loro elementi primitivi, distrugge il meccanismo di questo calcolo, e gli fa perdere i suoi principali vantaggi, la semplicità e la generalità del suo algoritmo. "

Abbiamo citato testualmente questo passo di Lagrange per mostrare come veramente nasce e si sviluppa l'opera di questo sommo analista nel calcolo delle variazioni, di cui, in certo senso, può chiamarsi il fondatore. Egli si propose, per adoperare una sua frase, *di piegare il calcolo differenziale a quel nuovo genere di problemi che sono essenzialmente di sua competenza.* La famosa Memoria stampata nel t. II delle *Memorie di Torino* (1762), si propose appunto questo scopo; in questo lavoro per la prima volta si riconosce l'opportunità di adoperare una caratteristica nuova per rappresentare le variazioni, e si introduce quella caratteristica δ che poi è diventata di uso generale.

Eulero avea invero già riconosciuto come non convenisse adoperare la stessa notazione per le nuove differenziali e per le differenziali ordinarie, e per evitare una tal confusione egli avea pensato di rappresentare tali differenziali per mezzo delle differenze dei valori successivi della variabile e della funzione; se egli avesse pensato, dice Cauchy (Exerc. III, pag. 51), di adoperare una notazione diversa pei due casi, sarebbe forse giunto immediatamente al calcolo delle variazioni di Lagrange.

Eulero accettò subito le nuove idee, e dopo due anni (1764) scrisse per i *Nova Comm. Petropolit.* (tom. X) la Memoria *Elementa calculi variationum, etc.* nella quale sviluppò con molti dettagli e, come soleva, con molte applicazioni, i princìpi fondamentali del metodo nuovo. Del quale egli non tralasciò di occuparsi ancora per molti anni, e nel vol. III delle *Inst. Calc. Integr.* Petersb., 1770, e nel t. XVI dei *Nova Comm.* 1771), e finalmente nel vol. IV delle *Institutiones* (1794) si trovano ancora lavori che trattano e sviluppano quel soggetto.

Nel 1767 il *Borda* fece stampare nell'*Accad. delle scienze di Parigi* una Memoria sul calcolo delle variazioni, nella quale criticò la soluzione data da Lagrange del problema della *brachistocrona* nel caso in cui non si suppone assegnato il punto iniziale, ma lo si vuole solo giacente su di una curva assegnata. Il Borda avea ragione, perchè Lagrange non si era accorto che, essendo allora variabile l'ordinata del punto iniziale, bisogna aggiungere un termine alla variazione dell'integrale, almenochè non si faccia una ipotesi diversa riguardo alla velocità iniziale (vedi il nostro § 31 in cui abbiamo discusso la quistione), e lo stesso Lagrange riconobbe il suo errore nella successiva Memoria del 1770. (Misc. Taur. IV.) Erroneamente dunque a questo proposito il Darboux (*Theorie des surfaces*, I, pag. 268) dice che la Memoria di Borda era inutile dal momento che non faceva che riprodurre le stesse cose già dette da Lagrange; invece forse fu proprio la Memoria di Borda che dette origine alla nuova di Lagrange del 1770.

In questa l'autore si propose di passare ad una seconda esposizione del suo metodo, e nella prefazione cominciò intanto col polemizzare con alcuni autori che aveano pubblicato nel frattempo dei lavori sull'argomento.

Primo fra questi era stato il Fontaine, il quale all'Accademia delle scienze di Parigi nel 1769 avea pubblicato un lavoro in cui, dopo aver detto che i suoi predecessori si erano sbagliati perchè ignoravano la vera teoria, proponeva due metodi, secondo lui, nuovi. Ma Lagrange gli osservò subito che uno di tali metodi era, salvo le notazioni, quel medesimo adoperato da Eulero, e l'altro era quello che egli stesso avea pubblicato otto anni prima.

Similmente i padri Le Seur et Jacquier aveano pubblicato a Parma nel frattempo un trattato di calcolo integrale, in cui aveano riprodotto il metodo di Lagrange, ma facendo credere che esso era de attribuirsi ad Eulero.

Le due Memorie di Lagrange che abbiamo citato si riferiscono ancora al Lagrange della prima maniera, quando egli cioè non ancora avea sentito il bisogno di cancellare dal calcolo infinitesimale il segno e il concetto di differenziale e di infinitamente piccolo; era naturale quindi che all'autore della celebre *Théorie des fonctions analytiques* si presentasse la necessità di esporre il calcolo delle variazioni in una maniera indipendente dagli infinitamente piccoli, ed è perciò che il 12.° capitolo della *Théorie* (1797) è dedicato a questo scopo, e in una maniera più diretta e più completa lo stesso argomento è ripreso e trattato nell'ultima zione (la 22.ª) del *Calcul des fonctions* (Paris, 806). Il cosidetto *metodo dei moltiplicatori*, per durre i problemi di massimo o minimo relativo problemi di massimo o minimo assoluto, fu espo-o per la prima volta da Lagrange nella sua *Mec-nica analitica* (1788), e poi riprodotto nella *heorie*, e nel *Calcul des fonctions*. Esso può con-iderarsi, come la estensione di quel metodo che trova già in Eulero per risolvere i problemi di operimetri.

Ecco per sommi capi delineato lo sviluppo sto-ico di quello che abbiamo chiamato *primo pro-lema del calcolo delle variazioni*. Esso si può ire un problema chiuso con Lagrange, dopo del uale l'attenzione degli analisti è stata richiamata rivolgersi specialmente sugli altri più difficili roblemi che questo calcolo offriva. È un proble-a già chiuso, se si tien conto della semplicità elle formole cui dà luogo, ma è ben diverso se sso vien considerato dal punto di vista della le-ittimità di quelle formole e della estensione dei roblemi cui quelle formole possono applicarsi. a quest' ultimo punto di vista il problema è ato riaperto da pochi anni, e si è sentito la ne-essità di dimostrare certe proposizioni che ser-ivano di fondamento a quelle formole, e che era-o state considerate dai primi fondatori come ve-ità assiomatiche, pur non essendolo; mentre poi altra parte si è presentata l'altra domanda: Pur mmettendo in generale la esattezza dei procedi-enti e dei risultati, fino a che punto questi pos-one darci delle soluzioni? O meglio le soluzioni he otteniamo sono le più generali possibili, ovvero l'applicare quei procedimenti presuppone implicitamente limitata la soluzione solo a certe categorie di funzioni?

Su questa seconda parte di critica che chiameremo, per intenderci, la *parte relativa alle soluzioni discontinue*, si è fatto assai poco progresso; di essa discuteremo in seguito, perchè essa non si attacca in modo speciale solo al primo dei tre problemi sopra classificati, ma si attacca a tutti tre; e passeremo quindi per ora a dire qualche parola su quella parte della critica che si correla alla dimostrazione di certe proposizioni fondamentali ritenute per lo innanzi assiomatiche.

La prima di tali proposizioni è quella riguardante il *metodo dei moltiplicatori*, e la seconda riguarda la dimostrazione del lemma che serve di fondamento alla ricerca dei massimi e minimi degli integrali, come, cioè, dall'annullarsi identico dell' integrale che rappresenta la variazione si possa dedurre l'annullarsi identico della funzione sotto il segno.

In quanto alla prima proposizione essa era stata ritenuta quasi come un assioma, e si era cercato solo di dare qualche dimostrazione della nota regola di Eulero per il caso speciale degli isoperimetri (Vedi per esempio Bertrand nel Volume VII del *Giornale di Liouville*, pagina 55 [1842].)

Del medesimo soggetto si occupò assai più tardi il Du Bois Reymond (*Math. Ann.*, XV) e di un caso più generale si occupò lo Scheeffer (*Math. Ann.*, Vol. XXV, 1885); ma fu Mayer il primo che nel volume seguente (XXVI) dei *Math. Ann.*

dedicò alla quistione un lavoro speciale. (Vedi i nostri §§ 12, 13, 14.) Ultimamente il sig. Turksma ha ripreso la quistione da un punto di vista diverso e ha ottenuto risultati che confermano pienamente quelli derivati dal metodo di Lagrange. (*Math. Ann.*, Vol. XLVII.)

Per la seconda proposizione il primo che abbia osservato come la dimostrazione che se ne soleva dare in tutti i trattati, portasse con sè la necessità di ammettere certe ipotesi di continuità e di altra natura sulla variazione δy che potrebbero non verificarsi in generale, pure continuando a sussistere il teorema, pare sia stato l'Heine in una breve comunicazione nel Vol. II dei *Math. Ann.* (1870); e dopo di lui il Du Bois Reymond si occupò assai più espressamente della quistione in un lavoro complesso, pieno di molte osservazioni acute e di idee nuove, ma certamente ancora molto incompleto, pubblicato nel Vol. XV dei *Math. Ann.* (1879).

Passiamo ora al secondo dei problemi fondamentali, quello cioè cosidetto della *seconda variazione*. Abbiamo già accennato che fu Legendre il primo che nel 1786 pensò alla necessità di ricorrere alla *seconda* variazione per riconoscere la effettiva esistenza dei massimi e minimi e per distinguere questi fra loro. Legendre incorse però in alcune sviste, delle quali alcune corresse egli stesso, altre furono osservate da Lagrange, e da altri come p. es. da Brunacci. (V. il nostro § 16.)

Del resto la soluzione cui si erano arrestati questi autori, per la cosidetta trasformazione della variazione seconda, era complicata da una nuova integrazione oltre quelle che già si richiedevano per rintracciare le *possibili* soluzioni di massimo e minimo.

Era riserbato ad Jacobi (1837) la gloria di portare nella difficile quistione dei punti di vista assolutamente nuovi, in una breve Memoria stampata nel Vol. XVII del *Giorn. di Crelle* e riprodotta nel Vol. III del *Giorn. di Liouville.*

Jacobi osservò che di quella integrazione sí potea fare a meno, e a tale scopo enunciò senza dimostrare, alcuni teoremi generali di calcolo differenziale, dai quali potea infine ricavarsi che, dopo avere integrata la prima equazione differenziale che si presenta nel problema delle variazioni, nel caso di una sola funzione incognita, gli integrali occorrenti per la trasformazione della variazione seconda possono ricavarsi facilmente con semplici derivazioni rispetto alle costanti.

La concezione geniale di Jacobi richiamò presto l'attenzione degli analisti, e furono Lebesgue, Delaunay e Bertrand i primi che intrapresero una dimostrazione dei teoremi di Jacobi, dei quali si occuparono posteriormente anche Mainardi e Brioschi. (Vedi il nostro § 16.) Noi non ripeteremo qui l'elenco di tutti quelli che si occuparono dei teoremi di Jacobi,[1] perchè un tale elenco lo faremo nel corso del volume in un paragrafo speciale.

Questi teoremi rappresentano delle verità molto riposte, e noi non sappiamo in che modo Jacobi li abbia scoperti; essi formarono ancora per molti anni oggetto delle considerazioni dei migliori analisti dell'epoca, fra i quali è da notarsi Spitzer che portò molto avanti la discussione della trasformazione Jacobiana, e Hesse che nella sua Memoria riuscì a stabilire quasi tutta una nuova teoria su di una certa rappresentabilità delle espressioni lineari nelle derivate successive di una medesima funzione. Alcuni dei teoremi di Hesse li abbiamo riprodotti nel corso del lavoro. (Vedi § 20.)

Con Clebsch (1858) si incominciò a considerare il caso di un numero qualunque di funzioni incognite, e il caso più generale, in cui fra queste esistano delle assegnate relazioni differenziali. Dello stesso argomento (limitato però solo al caso di un numero qualunque di funzioni incognite, senza supporre fra queste relazione di altra specie) si occupò il Lipschitz con metodo diverso giungendo agli stessi risultati (1864); e il suo metodo fu poi esteso da Mayer al caso più generale indicato (1868); di quest'ultimo autore esistono poi ancora parecchi altri interessanti lavori su questo soggetto.

Il lavoro di Scheeffer (*Math. Ann.* XXV, 1885) cerca di risolvere il problema per una via diversa e più rigorosa, e nel Vol. XXVI dello stesso giornale, lo stesso autore fece sulla risoluzione di questo problema delle osservazioni di grande importanza, riguardanti i limiti dentro i quali le soluzioni del problema possono dirsi attendibili.

Finalmente sono ancora da ricordarsi le recenti ricerche di Weierstrass esposte da lui nelle sue lezioni a Berlino (1884) nelle quali l'autore, limitando in vari sensi la natura del problema delle variazioni, giunge, con metodi rigorosi, a risultati che possono dirsi esatti ma che, per le molteplici limitazioni introdotte, non posseggono affatto quel carattere di generalità, il cui raggiungimento dovrebbe essere lo scopo precipuo degli ulteriori progressi del calcolo delle variazioni.

Le ricerche sulla trasformazione della variazione seconda non sono certamente facili, ma la difficoltà è forse insita nella natura stessa del problema. Alcuni anni fa il signor Zmurko credette di aver trovato nuove e più facili vie per la soluzione del problema, ma i suoi lavori furono trovati erronei.

Ed eccoci all'ultimo dei problemi avanti indicati, a quello cioè della variazione degli integrali multipli a limiti variabili.

La variazione degli integrali multipli a limiti fissi era stata già considerata, come una applicazione del metodo generale, da Lagrange, il quale anzi avea anche per tal via trovato l'equazione differenziale delle superficie minime.

Ma il caso dei limiti variabili offriva difficoltà ben maggiori e di altra natura. Fu Gauss che nel 1833 si imbattè per la prima volta in un problema di meccanica che richiedeva la ricerca di un minimo di un integrale doppio a limiti variabili; il problema era: *Determinare la forma di equilibrio di un liquido contenuto in un vaso di forma data*, e fu Poisson il primo che nel medesimo anno si occupò in modo esplicito della quistione; e nell'anno seguente Ostrogradsky trovò una formola importante che porta il suo nome.

La Memoria di quest'ultimo autore è anche importante per un'altra ragione.

Fu egli che cominciò collo stabilire nettamente i concetti e le formole di variazioni delle derivate parziali di funzioni di più variabili, concetti e formole che o erano state stabilite erroneamente, o in modo affatto particolare. È vero che Poisson avea esattamente trovate le formole di cui si parla, ma per stabilirle avea avuto bisogno di un artifizio coll'introduzione di certe variabili ausiliarie, e fu Ostrogradsky che fece per la prima volta vedere che in siffatte considerazioni si potea non allontanarsi affatto dai metodi di Lagrange.

Coi principi più elementari del calcolo differenziale ora le formole di cui si parla le possiamo rintracciare senza la minima difficoltà, ma si capisce che per quell'epoca esse poteano ancora essere oggetto di controversia.

Dopo la formola di Ostrogradsky restava ancora a risolvere la parte più difficile e più interessante del problema della variazione prima degli integrali multipli; trasformare cioè la variazione dell'integrale in due parti di cui una dipendente solo dai limiti del campo d'integrazione, analogamente a ciò che era stato fatto da Lagrange per gli integrali semplici.

Un concorso bandito nel 1842 dall'Accademia di Parigi, cui risposero, con due Memorie, Delaunay e Sarrus fece risolvere anche questo problema ottenendo una formola che è la estensione di quella già ottenuta da Lagrange, e a cui in verità avea vagamente già accennato Ostrogradsky alla fine della sua Memoria.

Ridotta la variazione prima alla forma più opportuna veniva spontaneo l'occuparsi della variazione seconda il cui studio, come si sa, è indispensabile per risolvere completamente il problema del massimo e minimo.

Abbiamo già detto che Clebsch fu il primo che si occupò di estendere le considerazioni di Jacobi ad un caso più generale; ora aggiungeremo che fu appunto a proposito di tali ricerche che egli trovò modo di occuparsi anche della variazione seconda degli integrali multipli (1859); sullo stesso soggetto sono poi anche da ricordarsi i più recenti lavori di Sabinine (1870-78-90.

Ricordiamo infine che un recente lavoro di Kobb (1893) cerca di estendere agli integrali multipli considerazioni analoghe a quelle già fatte da Weierstrass per gli integrali semplici, ma è quasi inutile l'aggiungere che la teoria della variazione degli integrali multipli lascia ancora molto a desiderare, e non poche nè piccole sono le lacune che essa presenta; è naturale che tutte le difficoltà le osservazioni critiche e le obbiezioni che si presentano per gli integrali semplici, si ripresentano in quantità assai maggiore per gli integrali multipli.

Passiamo finalmente a dire qualche cosa sulle limitazioni che nella natura delle soluzioni impongono i procedimenti del calcolo delle variazioni, e sulle cosidette soluzioni discontinue.

In vari paragrafi durante il corso del libro abbiamo fatto notare come, per potere eseguire le varie trasformazioni che conducono poi alle formole ordinarie del calcolo delle variazioni, occorre supporre nelle funzioni incognite delle proprietà speciali, e principalmente la continuità per esse o per le loro derivate.

Ne viene che se il problema di massimo e minimo ammette una soluzione con una funzione non continua, ovvero che, pure essendo continua, non è a derivata continua, e che quindi, rappresentata mediante una curva, questa possiede un numero finito o anche un numero infinito di punti singolari (nodi), allora il procedimento ordinario non potrà indicare questa soluzione.

Si presenterebbe quindi il problema di ricercare un altro metodo 'col quale si potessero includere anche siffatte soluzioni discontinue; ma bisogna dire che in tale indirizzo il progresso fatto finora è assai limitato.

Un tema proposto dall' Università di Cambridge nel 1871, dette occasione ad un grosso volume di Todhunter, relativo a questo argomento (*Researches in the calculus of variations, principally on the theory of discontinous solutions*. London, 1871); ma l'autore si perde in molti dettagli e in molti esempi, e non giunge in fondo a nessuna conclusione generale.

Altri lavori su questo argomento sono:

Cayley, *On a problem in the calculus of variations, etc.* (*Proc. of Lond. Math. Soc.*, III, pagina 221 (1871);

Wilkinson, *Review of Todhunter's researches, etc.* Messenger, 2.ª s. Vol. III, pag. 184 (1874);

Erdmann, *Ueber unstetigen Lösungen in der Variationsrech* (*Crelle.* Vol. LXXXII, pag. 21 (1876)).

Recentemente Starkoff ha creduto d'aver trovato un metodo generale per comprendere le soluzioni discontinue, e ha pubblicato su questo argomento dei lavori in varie riviste. (*Bull. Soc. Math.*, 1884; *Rend. di Palermo.* Vol. II, *Società di Odessa*, 1884-85, ecc.)

Le sue considerazioni però sono ovviamente erronee, come ha fatto notare Sonine e poi August. (Vedi il nostro § 30.)

Una speciale menzione dobbiamo fare a questo proposito del lavoro di Du Bois Reymond (*Math. Ann.* XV); basta leggere quel lavoro, che del resto è da considerarsi come un tentativo, per vedere quante sono ancora le incertezze e le imperfezioni che restano nella teoria delle variazioni. L'autore imprende a considerare un solo problema, uno dei più semplici, quello della linea di minima lunghezza, e seguendo passo per passo lo svolgimento di questo problema, fa delle considerazioni critiche della maggiore importanza sui vari procedimenti che bisogna adoperare e sui limiti dentro cui essi sono applicabili.

Per completare la nostra rassegna storica occorre ancora far menzione di quelli che si sono allontanati, in vari modi, dai metodi generalmente usati.

Citeremo p. es. il signor Challis che nel 1871 pubblicò nel *Phil. Magaz.* (4.ª serie. Vol. XLII, pag. 28) un lavoro la cui idea principale era questa: anzichè trovare direttamente la curva, trovarne prima l'evoluta, e da questa risalire poi all'evolvente. Questo lavoro sollevò delle polemiche cui presero parte Cayley e Todhunter; ecco i lavori che vi si riferiscono:

CAYLEY, *On a supposed new integration of differential equat. of 2. order.* (*Phil. Mag.*, Vol. XLII, pag. 197);

CHALLIS, *In reply to Prof. Cayley.* (Idem, pagina 302);

TODHUNTER, *On a problem, etc.* (Id., pag. 440).

CHALLIS, *On the solution of three problems in the calculus of variations, in reply to Mr. Todhunter. Phil. Mag.*, 1872.

Noteremo ancora a questo proposito i lavori di CURVELWEL, *Researches in the calculus of variat.* (*Proc. Lond. Math. Soc.* Vol. XXIII, p. 241 (1892) e Vol. XXV. pag. 361 (1894), nei quali l'autore si propone di stabilire la teoria dei massimi e minimi a limiti fissi e a limiti variabili, abbandonando i procedimenti analitici, e fondandosi su basi geometriche.

Prima di terminare questo riassunto storico dei progressi fatti nel calcolo delle variazioni, sarà pregio del nostro lavoro indicare la maggior parte dei trattati e saggi storici finora comparsi su questa teoria.

Uno dei primi trattati sul calcolo delle variazioni pare sia stato quello di Lacroix, contenuto nel suo celebre *Calcolo differenziale e integrale*, di cui la prima edizione apparve nel 1797 e la seconda nel 1814. Il calcolo delle variazioni occupa quasi 100 pagine del secondo volume.

Quasi contemporaneamente apparve in Italia il *Corso di matematica sublime* del Brunacci (Firenze 1808) di cui quasi 100 pagine del IV volume sono dedicate alle variazioni, in Inghilterra il trattato: WOODHOUSE, *A Treatise on Isoperimetrical Problems and Calculus of Variations.* Cambridge, 1810, e in Germania BUQUOY, *Eine eigene Darstellung der Grundlehren der Variationsrechnung*, 1812.

Posteriori sono i due trattati di Dirksen (Berlin, 1823) e di Ohm (Berlin, 1825) citati molto dagli autori dell'epoca; di cui il secondo è in qualche punto sbagliato (v. p. es. la Memoria di Jacobi nel vol. XVII del *Giorn. di Crelle*); l'*Essai historique* di Choisy (1823), e la *Commentatio Historia mcalculi Variationum*, etc. di Graeffe premiata dall'università di Göttingen nel 1825.

Dopo di questi si succedono per ordine di tempo:

BORDONI, *Lezioni di calcolo sublime.* Milano, 1831 (da pag. 192 a 298 del Vol. II);

MOMSEN, *Elementa calculi Variationum, etc.* Altona, 1833;

ABBAT, *A Treatise on the Calculus of Variat.* London, 1837;

ALMQUIST, *De Principiis Calculi Variationis.* I e II. Upsal, 1837;

SENFF, *Elementa Calculi Variationum.* Dorpat, 1838;

BRUUN, *Manuale di Calcolo di Variazioni.* Odessa, 1848 (in russo);

STRAUCH, *Theorie und Anwendung des sogenannten Variationscalcul's.* Zurich, 1849;

JELLETT, *An elementary treatise on the Calculus of Variations.* Dublin, 1850. Questo trattato fu tradotto in tedesco per cura di SCHNUSE (Braunschweig, 1860);

STEGMANN, *Lehrbuch der Variationsrech., etc.* Kassel, 1854;

POPOFF, *Elementi di calcolo di variazioni.* Kazan, 1856 (in russo);

MEYER, *Nouveaux éléments du Calcul des variations.* Liège et Leipzig, 1856;

SIMON, *Die Theorie der Variationsrechnung.* Berlin, 1857;

GIESEL, *Geschichte der Variationsrechnung.* Torgau, 1857;

LINDELÖFF-MOIGNO, *Calcul des variations.* Paris, 1861;

NATANI, *Die Variationsrech.* Berlin, 1866;

DIENGER, *Grundriss der Variationsrechnung.* Braunschweig, 1867;

CARLL, *Calculus of Variations.* New-York, 1885;

WASCHTSCHENKO - ZAKHARTSCHENKO, *Calcolo delle variazioni* (in russo). Kiew, 1889;

SABININE, *Calcolo delle variazioni* (in russo). Moskau, 1893.

Trattati recenti speciali sul calcolo delle variazioni, non ce n'è, ch'io sappia, quasi alcuno, se si eccettuano alcuni trattati scritti in lingua russa. Nell'elenco soprascritto non abbiano segnato i moderni trattati di calcolo infinitesimale nei quali naturalmente si trova sempre la parte relativa alle variazioni, qualche volta anche trattata con una certa estensione. (Vedi p. es. il trattato di Jordan e di altri.)

Infine dobbiamo fare particolare menzione di un libro di TODHUNTER, *A History of the progress of the Calculus of variations during the nineteenth century*, Cambridge, 1861.

In questo libro di 530 pagine l'autore si propose di fare la storia della teoria a cominciare da Lagrange.

Indubbiamente è un libro in cui si può trovare materiale abbondantissimo, ma l'autore intende la storia nè più nè meno che come una cronaca. Egli non fa altro che disporre tutti i lavori dei vari autori per ordine di tempo, e riprodurre un sunto delle cose in essi contenute; gli accade quindi di dover ripetere un grandissimo numero di volte le stesse cose; ogni volta che ha una Memoria nuova da esaminare, egli torna sempre daccapo a ripetere i princìpi e le notazioni fondamentali seguendo passo passo, quasi sempre colle medesime parole, l'autore di cui tratta; alle volte non fa altro che tradurre addirittura tutto il lavoro, se si tratta di un lavoro breve.

Avrebbe certamente fatto opera assai più utile e più geniale se quelle 500 e più pagine del volume le avesse occupate a stabilire la vera dipendenza storica di un lavoro da un altro, a mostrare come si sono andate sviluppando le idee sui vari particolari problemi della teoria, ed a esporre dei vari lavori solo quella parte che veramente è importante e che ha servito a far progredire la scienza, e trascurando quella che deve essere dimenticata. Ciò non toglie che il libro del Todhunter può rendere sempre dei servigi, e ne ha reso anche a me, ma credo fermamente che non possa considerarsi qualcosa di più di un indice bibliografico.

§ 1. — Considerazioni preliminari.

Sia y una funzione di x, $y = f(x)$.

Per intendere meglio il concetto che vogliamo passare ad esporre immaginiamo la rappresentazione geometrica di questa funzione nel modo solito mediante una curva f.

Immaginiamo poi una serie di curve di cui la curva limite sia proprio la f data, e consideriamo una delle curve di siffatta serie, e sia f_1, i cui punti corrispondano univocamente a quelli di f in modo che la distanza fra due punti corrispondenti sia infinitesima. Il valore della funzione y può variare per effetto di tre circostanze fra loro diverse.

Può farsi variare il valore di y:

1. Perchè si fa variare la x corrispondente; allora dal punto P si passa ad un punto P' della medesima curva f.

2. Perchè si muta la funzione f nella funzione f_1; allora dal punto P si passa ad un pun- P_1 della curva f_1; i due punti P, P_1 hanno però la stessa ascissa la quale è restata inalterata.

3. Perchè si muta la funzione f e contemporaneamente si muta l'ascissa x; allora da P si passa ad un punto P'_1 situato sulla curva f_1, ma non avente con P la medesima ascissa.

Il cangiamento che subisce la y nel primo caso ha rapporto con ciò che si è chiamato nel *calcolo differenziale*, il differenziale della funzione y, e la natura di tal rapporto è nota appunto per i fondamenti di quel calcolo. Si sa cioè che il cangiamento di y nel primo caso è una somma di infinitesimi di cui quello di ordine minimo ha precisamente la espressione indicata col nome di *differenziale di y.*

Evidentemente anche nel secondo caso il cangiamento che subisce y è un infinitesimo, ma è arbitrario perchè è arbitraria la curva $y = f_1(x)$ che noi vogliamo sostituire alla curva $y = f(x)$. Il valore di tal cangiamento lo chiameremo *variazione di y* e per analogia lo indicheremo col simbolo δy.

È comodo porre questo δy arbitrario sotto la seguente forma:

$$\delta y = \delta \alpha \,.\, \lambda(x)$$

dove $\lambda(x)$ è un'arbitraria funzione di x, e $\delta\alpha$ è una quantità che tende a zero; così si è posto in vista la proprietà di δy di tendere a zero, e l'altra proprietà di essere arbitraria.

È da notarsi però che sotto questa forma la variazione è speciale; la quantità δy rappresenta la differenza fra le ordinate y_1, y delle due curve infinitamente vicine; ora non si può affermare che tale differenza si possa sempre scomporre nel prodotto di una funzione di sola x, per una quantità tendente a zero che chiamiamo $\delta\alpha$; potrebbe per esempio facilmente immaginarsi il caso in cui la funzione λ contenga anche la quantità $\delta\alpha$, pure soddisfacendo alla condizione che il prodotto

$$\lambda(x)\,\delta\alpha$$

tenda a zero.

Del resto immaginando la variazione sotto la forma indicata si soddisfa ad un'altra proprietà fondamentale cui essa deve soddisfare, e cioè che non solo essa, *ma anche tutte le sue derivate rispetto ad x tendono a zero con $\delta\alpha$ tendente a zero.*

Ed infatti se le due curve infinitamente vicine devono tendere a coincidere, è naturale che p. es. tenderanno a coincidere anche le loro tangenti e quindi dovrà tendere a zero anche la variazione della derivata di y rispetto ad x, e così di seguito.

Se noi invece supponiamo che λ contenga $\delta\alpha$, non sempre si potrà soddisfare a questa condizione; se p. es.

$$\delta y = \delta\alpha \operatorname{sen} \frac{x}{\delta\alpha}$$

si ha bensi che δy tende a zero con $\delta\alpha$; ma la variazione di y' essendo

$$y'_1 - y' = \delta y' = \cos \frac{x}{\delta\alpha}$$

non tende a zero.

Un'altra osservazione è importante.

Avendo posto la variazione sotto la forma

$$\delta\alpha \,.\, \lambda(x)$$

si è venuto *a limitare* (come si è già detto) *la specie della curva variata*, la cui equazione verrà ad essere $y = f(x) + \delta\alpha \,.\, \lambda(x)$. La sola condizione cui finora deve soddisfare $\lambda(x)$ è di essere una funzione finita per qualunque x del campo che si considera, altrimenti non può più dirsi che la variazione sarà infinitesima, cioè tenderà a zero.

Sottoponendo la variazione ad altre condizioni, p. es. volendo che $\lambda(x)$ sia una funzione continua, si viene a limitare sempre più la natura della curva variata. Ma potrà accadere che per giungere a certi risultati sotto una forma semplice, ovvero per la speciale natura dei problemi particolari che si trattano, sia necessario ed opportuno limitare la natura della variazione, ovverosia di $\lambda(x)$. Ma resta sempre inteso, che ciò corrisponderà ad escludere certe categorie di curve fra quelle cui la curva $y = f(x)$ può con cangiamenti infinitesimi trasformarsi punto per punto.

Ciò non toglie però che in altri casi la limitazione che si viene implicitamente ad introdurre possa condurre ad errori. Vedi su ciò le acute considerazioni di Scheeffer. (*Math. Ann.* 26, pag. 197; *Leipz. Berichte.* (1885). pag. 92).

Passiamo ora a considerare il terzo dei casi succitati, il quale è anche il più generale.

Immaginiamo due archi di curve infinitamente vicini, e stabilita in un modo qualunque una corrispondenza *continua* fra i punti dell'una e quelli dell'altra. Se i punti corrispondenti sono quelli aventi la medesima ascissa, allora la corrispondenza è quella contemplata nel secondo caso; se invece le ascisse sono diverse, allora la differenza delle due ascisse di due punti corrispondenti sarà la *variazione* di x che indicheremo con δx, e la differenza delle due ordinate, *a meno di infinitesimi di ordine superiore*, sarà la variazione di y.

Se l'equazione della seconda curva è, come sopra,

$$y = f(x) + \lambda(x)\,\delta x,$$

e se è x_1 l'ascissa del punto sulla seconda curva corrispondente al punto di ascissa x sulla prima curva (la cui equazione è $y = f(x)$), la differenza delle due ordinate è

$$[f(x_1) + \lambda(x_1)\,\delta\alpha] - f(x)$$

ed essendo

$$\lambda(x_1)\,\delta\alpha = \lambda(x)\,\delta\alpha + \omega$$

$$(x_1 - x = \delta x)$$

$$f(x_1) - f(x) = f'(x)\,\delta x + \omega_1$$

dove ω, ω_1 sono infinitesimi di ordine superiore, rispetto a $\delta\alpha$, δx che li supponiamo del medesimo ordine, si ha la variazione di y espressa con

$$\delta y = \lambda(x)\,\delta\alpha + f'(x)\,\delta x$$

nella qual formola si sono trascurati gli infinitesimi di ordine superiore, giusta la data definizione *di variazione di y nel caso generale.*

Passiamo ora a vedere come si esprime la variazione della derivata y' di y nel caso generale.

Si ha, come sopra, che la variazione $\delta y'$ sarà l'assieme dei termini infinitesimi di ordine più basso in

$$[f'(x_1) - \lambda'(x_1)\,\delta\alpha] - f'(x).$$

Intanto

$$\lambda'(x_1)\,\delta\alpha = \lambda'(x)\,\delta\alpha + \omega$$

$$f'(x_1) - f'(x) = f''(x)\,\delta x + \omega_1$$

dove ω ω_1 sono infinitesimi di ordine superiore, dunque possiamo scrivere

$$\delta y' = \lambda'(x)\,\delta\alpha + f''(x)\,\delta x.$$

Similmente si otterrebbero $\delta y''$, $\delta y'''$, ecc.

Dalla definizione si ricava subito una proprietà fondamentale ed è che sono invertibili i due simboli d'operazione d e δ, di differenziale e di variazione.

Cominciamo a vedere la cosa per la semplice variabile x.

La variazione di x sarà la differenza fra due valori di x; cioè p. e. per un certo x si ha

$$\delta x = x_1 - x$$

e la variazione di $d\,x$ per il medesimo x sarà quindi

$$\delta\, d\,x = d\,x_1 - d\,x.$$

Ma intanto dalla formola di sopra si ha, differenziando

$$d\,\delta\,x = d\,x_1 - d\,x$$

dunque

$$d\,\delta\,x = \delta\,d\,x.$$

Ciò fissato, dalla formola

$$\delta y = \lambda(x)\,\delta\alpha + y'\,\delta x$$

differenziando rispetto ad x, si ha

$$d\,\delta y = \lambda'(x)\,d\,x\,\delta\alpha + y''\,d\,x\,\delta x + y'\,d\,\delta x.$$

D'altra parte abbiamo trovato sopra che

$$\delta y' = \lambda' \, x) \, \delta \alpha + y'' \, \delta x.$$

Questa formola insieme all'identità

$$\delta (d y) = \delta (y' d x) = d x \, \delta y' + y' \, \delta d x$$

eliminando $\delta y'$, dà

$$\delta d y = \lambda' (x) \, \delta \alpha \, d x + y'' \, \delta x \, d x + y' \, \delta d x$$

e, per la già dimostrata permutabilità dei simboli d e δ sulla variabile x, si ha infine

$$d \, \delta y = \delta d y.$$

Analogamente si dimostrerebbero le identità

$$d \, \delta y' = \delta d y'$$

. . . .

Nel calcolo differenziale, il differenziale della variabile indipendente è arbitrario ed è invece da questo dipendente il differenziale della funzione.

Nel calcolo delle variazioni, il differenziale diventa ciò che si è chiamato la *variazione*, e l'arbitrarietà che nel calcolo ordinario era nel differenziale della variabile indipendente, quì invece è non solo nella variazione della variabile indipendente, ma anche in quella della funzione.

Per immaginare qualcosa la cui variazione sia dipendente da quelle date come arbitrarie, e che quindi in certo modo compia, nel calcolo delle variazioni, lo stesso ufficio di quello che nel calcolo ordinario compie la *funzione*, immaginiamo una funzione F di x, y, y', y'' ... *Questa funzione F* *la immaginiamo ora e sempre una funzione derivabile dei suoi argomenti.*

Diamo ad x, l'incremento $\Delta x = \delta x$, e ad y l'incremento $\Delta y = y_1 - y = \delta y + \varepsilon$; *la F subirà un certo incremento infinitesimo di cui, al solito, l'infinitesimo di ordine minimo è ciò che chiameremo la variazione di F, e indicheremo con δF.*

Formiamo il differenziale di F quando si danno alle variabili $x\, y\, y' \ldots$ di cui F è funzione, gli incrementi

$$\Delta x = \delta x,\ \Delta y,\ \Delta y', \ldots;$$

abbiamo

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \Delta y' + \ldots;$$

ed essendo

$$\Delta x = \delta x,\ \Delta y = \delta y + \varepsilon,\ \Delta y' = \delta y' + \varepsilon', \ldots$$

e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore resta infine

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \ldots$$

Come generalizzazione del teorema della invertibilità, sopra dimostrato, si vede subito che *in generale*

$$d \delta F = \delta d F$$

se F è funzione per la quale sussiste il teorema della invertibilità delle derivazioni rispetto ai suoi argomenti

Giacchè calcolando $d\,\delta\,F$ e poi $\delta\,d\,F$, e ricordando che

$$d\,\delta\,x = \delta\,d\,x,\ d\,\delta\,y = \delta\,d\,y,\ d\,\delta\,y' = \delta\,d\,y',\ldots$$

si trovano due espressioni eguali.

Sostituendo nell'espressione della variazione di F, per $\delta\,y\ \delta\,y'\ldots$; i loro valori si ha

$$\delta\,F = \left\{\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\,y' + \frac{\partial F}{\partial y'}\,y'' + \ldots\right\}\delta\,x$$
$$+ \left\{\frac{\partial F}{\partial y}\,\lambda\,(x)\,\delta\,\alpha + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\lambda'\,(x)\,\delta\,\alpha + \ldots\right\}$$

di cui la seconda parte è evidentemente la variazione di F nel caso particolare in cui la x si conservi invariata.

Osservando allora che la espressione contenuta nella prima parentesi è la derivata totale di F rispetto ad x, abbiamo il risultato: *la variazione di F nel caso generale è sempre eguale alla somma della sua variazione nel caso particolare in cui x non varii, e di un' espressione che è il prodotto della derivata totale di F rispetto ad x, per $\delta\,x$.*

È naturale che tutte le considerazioni fatte possono estendersi al caso più generale in cui la F, anzichè contenere una sola funzione y di x e le derivate di essa, contenga più funzioni y, z,... e le loro derivate.

Gli ordinari princìpi del calcolo differenziale bastano per trovare le formole riguardanti questi casi più complessi.

§ 2. Variazione di un integrale definito semplice.

Cominciamo dal caso più semplice in cui si debba calcolare la variazione dell'integrale

$$\int_{x'}^{x''} y\,d\,x$$

dove y si suppone una funzione di x.

Supponiamo prima che x sia invariabile.

La differenza

$$\int_{x'}^{x''} (y+\delta\,y)\,d\,x - \int_{x'}^{x''} y\,d\,x$$

è eguale a

$$\int_{x'}^{x''} \delta\,y\,d\,x.$$

Quindi è evidente che la variazione dell'integrale in questo caso così semplice è eguale senz'altro all'integrale della variazione della funzione sotto il segno.

Supponiamo ora un integrale definito della seguente forma

$$I = \int_{x'}^{x''} F\,(x\,y\,y'\,\ldots)\,d\,x.$$

Diamo ad $y\,y'\dots$ gli incrementi

$$\delta y = \lambda(x)\,\delta\alpha$$
$$\delta y' = \lambda'(x)\,\delta\alpha$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

La funzione F che si suppone *continua*, si accresce di

$$\delta F + \omega$$

dove ω è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\delta\alpha$.

L'integrale I si accresce quindi di

$$\int_{x'}^{x''} \delta F\,d\,x + \int_{x'}^{x''} \omega\,d\,x.$$

Se il secondo di questi integrali è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\delta\alpha$, allora la variazione dell'integrale è esattamente

$$\int_{x'}^{x''} \delta F\,d\,x$$

cioè *la variazione dell'integrale è eguale all'integrale della variazione.*

La condizione posta si verifica nella maggior parte dei casi ordinari; e per convincersi di ciò basta fare la seguente considerazione.

Supponiamo che alla funzione F possa applicarsi la formola del valor medio estesa sino alle

2.[e] derivate, cioè che si abbia

$$F(x, y + \delta y, y' + \delta y', \ldots) - F(x\, y\, y' \ldots) =$$
$$= \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \ldots\right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\delta y^2 + \ldots\right)_{\substack{y+\theta\delta y\\ y'+\theta'\delta y'\\ \cdots\cdots}}$$

dove nella seconda parentesi si intende che in luogo di $y\, y' \ldots$ bisogna porre

$$y + \theta\,\delta y,\ y' + \theta'\,\delta y', \ldots$$

essendo $\theta\, \theta'$ dei numeri compresi fra 0 e 1.

La prima parte del secondo membro è δF e la seconda parte è ω; sostituendo i valori di

$$\delta y,\ \delta y', \ldots$$

si vede che in ω comparirà per fattore $\delta \alpha^2$.

L'integrale di ω diventa allora

$$\delta\alpha^2 \int_{x'}^{x''} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\lambda^2(x) + \ldots\right]_{\substack{y+\theta\delta y\\ y'+\theta'\delta y'\\ \cdots\cdots}} dx.$$

Ora se l'integrale che forma il secondo fattore di questa espressione *non tende all' infinito* (il che p. es. si verifica quando per ogni sistema di valori $y\, y' \ldots$ compresi fra

$$\begin{array}{ccc} y & \text{e} & y + \delta y \\ y' & \text{e} & y' + \delta y' \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

il suo valore assoluto si mantiene inferiore ad un numero finito), allora possiamo conchiudere che l'integrale di ω è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $\delta\alpha$.

Per una considerazione assai simile a questa si possono vedere le pag. 449-450 del 1.° volume della recente opera di Stolz: *Grundzüge der differential und Integralrechnung.*

Passiamo ora alla variazione di un integrale definito quando però i limiti d'integrazione sono variabili.

Sieno x' x'' i limiti e debbano diventare

$$x' + \delta x', \ x'' + \delta x''.$$

La variazione dell'integrale è data dall'assieme degli infinitesimi di ordine minimo in

$$\int_{x'+\delta x'}^{x''+\delta x''} F(x, y + \Delta y, \ y' + \Delta y', \ldots) \, dx -$$

$$- \int_{x'}^{x''} F(x \, y \, y' \ldots) \, dx$$

dove $\Delta y, \Delta y' \ldots$ sono proprio gli incrementi che ricevono $y \, y' \ldots$ quando dai singoli punti della curva $y = f(x)$ primitiva passo a quelli corrispondenti della curva variata

$$y = f(x) + \lambda(x) \, \delta\alpha.$$

Nel primo di quei due integrali facciamo il seguente cangiamento di variabile indipendente; poniamo

$$x = t + \delta t$$

dove δt sia una *funzione infinitesima di t* colla condizione di diventare eguale agli stabiliti valori $\delta x'$, $\delta x''$ quando t diventa x', x''.

Se allora facciamo $t = x'$, x diventa $x' + \delta x'$, e così facendo $t = x''$, x diventa $x'' + \delta x''$; quindi i limiti dell'integrale diventano semplicemente x' e x''.

La funzione sotto il segno integrale resta tutta una funzione di $t + \delta t$ che chiameremo

$$\Phi(t + \delta t)$$

e si ha

$$\int_{x'}^{x''} \Phi(t + \delta t)\, d(t + \delta t)$$

e ponendo x in luogo di t si ha

$$\int_{x'}^{x''} \Phi(x + \delta x)(d x + d\, \delta x).$$

Essendo

$$\Phi(x + \delta x) = \Phi(x) + \Phi'(x)\, \delta x + \omega$$

si ha, sviluppando,

$$\int_{x'}^{x''} \Phi(x)\, d x + \int_{x'}^{x''} d\,[\Phi(x)\, \delta x] + \ldots$$

cioè

$$\int_{x'}^{x''} \Phi(x)\, d x + \Big[\Phi(x)\, d x\Big]_{x'}^{x''} + \ldots$$

Esaminiamo ora il valore della funzione $\Phi(x)$. Essa è, per le apposizioni fatte, eguale a

$$\Phi(x) = F(x,\, y + \Delta y,\, y' + \Delta y', \ldots) =$$
$$= F(x, y, y', \ldots + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \ldots\right) + \omega_1$$

ed essendo $\Delta y = \delta y + \varepsilon, \ldots$ si ha

$$\Phi(x) = F(x,\, y,\, y', \ldots) +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \ldots\right) + \omega' = F + \delta F + \omega'$$

dove ω' è infinitesimo di ordine superiore, e δF è la variazione di F nell'ipotesi di x invariabile.

Sostituendo abbiamo dunque

$$\int_{x'}^{x''} F\,d x + \int_{x'}^{x''} \delta F\,d x + \Big[F \delta x\Big]_{x'}^{x''} + \Omega$$

e quindi la variazione dell'integrale sarà

$$\delta I = \int_{x'}^{x''} \delta F\,d x + \Big[F \delta x\Big]_{x'}^{x''}.$$

I procedimenti qui fatti e che sono quelli che si trovano ordinariamente nei trattati sono molto lungi dal presentare quel rigore che si richiede oggidì nei procedimenti analitici; non poche sono le condizioni occorrenti perchè si possa affermare con sicurezza che la formola da noi data per la variazione dell'integrale è esatta; essa certamente vale per le funzioni più ordinarie; ma su questo argomento il progresso che si è fatto anche cogli ultimi studi non è grande.

Consideriamo ora ancora un caso più generale. Supponiamo che F oltre contenere $x, y, y', \ldots$ contenga ancora i limiti dell'integrazione $x'\, x''$. Questo caso può capitare in vari problemi. Si incontra p. es. nel problema della brachistocrona quando non si fissa il punto iniziale, ma si fissa solo la curva su cui questo deve trovarsi, problema sul quale lo stesso Lagrange cadde in errore (v. § 31). Allora la variazione prima dell'integrale è data dall'assieme dei termini di ordine minimo in

$$\int_{x'+\delta x'}^{x''+\delta x''} F(x, x'+\delta x', x''+\delta x'', y+\Delta y, y'+\Delta y', \ldots) -$$

$$-\int_{x'}^{x''} F(x, x', x'', y, y', \ldots)\, dx.$$

Possiamo ripetere gli stessi procedimenti sopra eseguiti, e giungere a trasformare il primo termine di questa differenza in

$$\int_{x'}^{x''} \Phi(x)\, dx + \Big[\Phi(x)\, \delta x\Big]_{x'}^{x''} + \ldots$$

dove però ora $\Phi(x)$ è

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= F(x, x'+\delta x', x''+\delta x'', y+\Delta y, y'+\Delta y', \ldots) = \\ &= F(x, x', x'', y, y' \ldots) + \\ &+ \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial F}{\partial x''}\delta x''\right) + \delta F + \omega'.\end{aligned}$$

Sostituendo e sopprimendo al solito i termini di ordine superiore al primo, resta la variazione dell'integrale sotto la forma

$$\delta I = \int_{x'}^{x''} \delta F \, d x +$$

$$+ \int_{x'}^{x''} \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial F}{\partial x''} \delta x'' \right) d x + \Big[F \delta x \Big]_{x'}^{x''}$$

Nel secondo integrale le quantità $\delta x', \delta x''$ possono porsi fuori il segno d'integrazione perchè esse non dipendono da x. Si hanno così i due termini

$$\delta x' \int_{x'}^{x''} \frac{\partial F}{\partial x'} d x + \delta x'' \int_{x'}^{x''} \frac{\partial F}{\partial x''} d x$$

i quali si riuniscono cogli analoghi

$$(F)_{x=x'} \, \delta x' - (F)_{x=x''} \, \delta x''$$

che sono compresi nell'ultima parte della variazione.

§ 3. Trasformazione della formola relativa alla variazione di un integrale definito.

Cominciamo col trasformare la formola relativa alla variazione di un integrale definito.

Ponendo

$$M = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$M' = \frac{\partial F}{\partial y'}$$

. . . .

l'espressione di δF diventa

$$\delta F = M \delta y + M' \delta y' + \ldots$$

e quindi

$$\delta I = [F]_{x''} \delta x'' - [F]_{x'} \delta x' + \int_{x'}^{x''} M \delta y \, dx + \int_{x'}^{x''} M' \delta y' \, dx + \ldots$$

Gli integrali che qui figurano devono intenders in questo senso, che cioè in $M \delta y$ si sostituiscan per $y\, y' \ldots$ le loro espressioni in x, e poi si calcoli l'integrale.

Inoltre le variazioni $\delta y \; \delta y' \ldots$ che figurano in questa espressione sono quelle prese nell'ipotes di x invariabile; quindi possiamo scrivere

$$\delta y' = \delta \frac{dy}{dx} = \frac{\delta dy}{dx} = \frac{d \delta y}{dx}$$

. . . .

e perciò, integrando per parti

$$\int M' \delta y \, dx = \int M' d \delta y = M' \delta y - \int \frac{dM'}{dx} \delta y \, d$$

$$\int M'' \delta y'' dx = \int M'' d \delta y' = M'' \delta y' - \int \frac{dM''}{dx} \delta y' dx$$

$$= M'' \delta y' - \frac{dM''}{dx} \delta y + \int \frac{d^2 M''}{dx^2} \delta y$$

. . . .

Si vede di qui che applicando consecutivament e opportunamente le integrazioni per parti e i principio della invertibilità dei segni d e δ, si può giungere a trasformare l'espressione di δI in modo che sotto il segno integrale non ci comparisca che solo la variazione δy, e non le variazioni delle derivate cioè

$$\delta y', \delta y'' \ldots$$

A meno dei due primi termini, l'espressione di δI verrà sotto la forma

$$\left[M' - \frac{d M''}{d x} + \frac{d^2 M'''}{d x^2} - \ldots\right]_{x'}^{x''} \delta y +$$

$$+ \left[M'' - \frac{d M'''}{d x} + \ldots \qquad\right]_{x'}^{x''} \delta y' +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \int_{x'}^{x''} \left[M - \frac{d M'}{d x} + \frac{d^2 M''}{d x^2} - \ldots\right] \delta y \, d x.$$

Aggiungendo ancora i due primi termini, e ponendo per semplicità

$$H = \left[M - \frac{d M'}{d x} + \ldots\right]$$

$$K = \left[M' - \frac{d M''}{d x} + \ldots\right]$$

$$K' = \left[M'' - \frac{d M'''}{d x} + \ldots\right]$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

possiamo infine scrivere l'espressione di δI sotto la forma

$$\delta I = \Big[F \delta x + K \delta y + K' \delta y' + \ldots\Big]_{x'}^{x''} + \\ + \int_{x'}^{x''} H \delta y \, d x$$

intendendo col simbolo

$$\Big[\quad\Big]_{x'}^{x''}$$

la differenza dei valori dell'espressione racchiusa in quella parentesi quando in luogo di x si pone una volta x'' e un'altra volta x', (si intende che $y\, y' \ldots$ devono anch'esse in corrispondenza cambiare i loro valori nel primo e nel secondo caso).

Osserviamo che la parentesi del secondo membro conterrà sino al termine in $\delta y^{(k)}$ se l'espressione F contiene $y^{(k+1)}$; quindi se F contiene solo sino ad y', allora quella parentesi conterrà solo i due termini in δx e δy.

Se la F in luogo di contenere solo la y, contenesse ancora altre funzioni $z, u, \ldots$ di x e le derivate di esse, allora con un calcolo simile si otterrebbe per δI un'espressione nella quale vi compariscono altri termini formati precisamenti come quelli già scritti, e relativi, anzichè alla variabile y, alle altre variabili $z, u, \ldots$

Propriamente si ottiene

$$\delta I = \Big[F\,\delta x + K_1\,\delta y + K_1'\,\delta y' + \ldots$$

$$+ K_2\,\delta z + K_2'\,\delta z' + \ldots\Big]_{x'}^{x''} +$$

$$+ \int_{x'}^{x''} (H_1\,\delta y + H_2\,\delta z + \ldots)\,dx$$

dove il numero dei termini sotto il segno integrale è eguale al numero delle funzioni y, z,... e inoltre se in F le derivate di y compariscono sino a quella di ordine r, quelle di z sino a quella di ordine s, e così seguitando, nella prima parte di questa espressione l'ultimo termine della prima linea sarà $K_1^{(r-1)}\,\delta\,y^{(r-1)}$, l'ultimo della seconda linea sarà $K_2^{(s-1)}\,\delta\,z^{(s-1)}$, ecc. Infine le $K_2\,K'_2 \ldots H_2$ hanno le stesse espressioni di $K_1\,K'_1 \ldots H_1$ solo mutando y in z.

Nel caso particolare in cui la curva variata abbia gli stessi estremi della curva primitiva

$$y = f(x),$$

e che questi estremi sieno $x'\,x''$, allora evidentemente per $x = x'$ e $x = x''$, le variazioni $\delta x\ \delta y$ sono zero; e perciò, se F non contiene che solo la y' e non le derivate seguenti, nell'espressione della variazione sparisce il primo termine, e resta solo il termine integrale.

Lo stesso si avrebbe se la curva variata non solo ha gli stessi estremi della primitiva ma anche le stesse tangenti in tali estremi, e inoltre se F contiene le derivate solo sino ad y''; e così di seguito.

§ 4. Osservazioni sulle condizioni colle quali sono valide le trasformazioni eseguite nel precedente paragrafo.

Nel precedente paragrafo abbiamo eseguite delle integrazioni per parti. Ora perchè queste sieno valide occorrono delle condizioni che noi vogliamo qui passare rapidamente ad esaminare.

Per fissare le idee supponiamo che la F contenga solamente $x\ y\ y'$. Allora per la trasformazione precedente l'unica integrazione per parti sarà quella rappresentata dalla formola

$$\int M' \delta y' \, d x = M' \delta y - \int \frac{d M'}{d x} \delta y \, d x.$$

Perchè possa applicarsi questa formola è necessario p. es. che la M' sia derivabile in tutto l'intervallo che si considera cioè da x' sino ad x''. Ora siccome F e quindi $M'\ M'' \ldots$ sono date come funzione di $x\ y\ y' \ldots$, anche supposto che F sia una funzione continua e derivabile *dei suoi argomenti*, non se ne può ancora dedurre che

$$M' = \frac{\partial F}{\partial y'}$$

sia derivabile rispetto ad x. Il porre la condizione di tale derivabilità equivale a limitare la natura delle funzioni y e y' di x.

Per fissare le idee supponiamo che la y' sia ancora derivabile cioè che esista la y''; posto poi che le derivate di M' rispetto ad y e y' sieno funzioni continue, sappiamo che allora sussiste il cosidetto teorema delle funzioni composte e quindi esiste la derivata di M' rispetto ad x. Ecco che poste queste condizioni, restano escluse quelle funzioni che non posseggono la derivata seconda.

Abbiamo voluto fare queste osservazioni per far vedere che perchè possano ritenersi validi i procedimenti eseguiti, bisogna intendere posto per la funzione y delle nuove limitazioni nella sua natura.

Per le considerazioni di questo paragrafo si può vedere Du Bois Reymond, *Math. Ann.* Vol XV, pag. 294.

§ 5. Lemma fondamentale per il calcolo delle variazioni.

Lo studio che vogliamo fare in questo paragrafo è il seguente:

Supponiamo che l'integrale

$$\int_{x'}^{x''} H \delta y \, d x$$

dove

$$H = M - \frac{d M'}{d x} + \ldots \pm \frac{d M^{(n)}}{d x^n}$$

sia zero, qualunque sia il valore che si assegni per la variazione δy. Che cosa allora possiamo dedurre per il valore della espressione H?

Se la variazione δy la si deve immaginare completamente arbitraria, allora si può senz'altro ripetere il ragionamento che si trova riprodotto in tutti i trattati antichi riguardanti il calcolo delle variazioni. Poniamo cioè $\delta y = H$, e allora si ha un integrale di una funzione costantemente positiva, e questo non può essere zero, se H^2 non è zero per tutti i valori di x.

Dunque in questò caso dall'annullarsi dell'integrale risulta senz'altro l'annullarsi della funzione H.

Ma supponiamo che la variazione δy non debba più essere arbitraria in senso assoluto; sibbene debba essere sottoposta semplicemente alla condizione d'essere continua; debba cioè essere continua la funzione $\lambda'(x)$ il che p. es. è implicitamente ammesso quando ammettiamo l'esistenza di $\lambda'(x)$; allora non si può più porre $\delta y = H$ almenochè non si supponga che H sia funzione continua di x.

Fatta questa ipotesi, la quale naturalmente porta una limitazione sulla natura della funzione y, può dedursi, nello stesso modo come sopra, il teorema che, dall'annullarsi dell'integrale risulta l'annullarsi di H.

Supponiamo invece che H non sia continua, e cambii segno nei punti $\alpha_1 \alpha_2 \ldots$ in numero *finito*.

Allora noi possiamo prendere per δy l'espressione *continua*

$$\delta y = (x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2) \ldots$$

che anche cambia segno nei medesimi punti, e l'integrale proposto risulta quello di una funzione di segno costante; onde l'integrando deve essere zero, e quindi $H = 0$ *in generale, cioè a meno di speciali punti dell' intervallo d' integrazione* giacchè si sa che l'integrale non muta valore, se in dati punti dell'intervallo mutiamo il valore dell'integrando.

Supponiamo infine che δy debba essere sottoposto a condizioni di altra specie, p. es. che debba annullarsi in punti dati, o che le sue derivate debbano anch'esse annullarsi in dati punti.

Allora daccapo non può più ripetersi il ragionamento di sopra, perchè non può porsi $\delta y = H$.

Ma allora può porsi, se $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots$ sono i punti in cui δy debba annullarsi

$$\delta y = (x - \alpha_1)\ (x - \alpha_2) \ldots \delta_1 y$$
$$H_1(x) = (x - \alpha_1)\ (x - \alpha_2) \ldots H(x).$$

e evidentemente

$$\int H(x)\, \delta y\, d\, x = \int H_1(x)\, \delta_1 y\, d\, x = 0$$

e quindi dall'arbitrarietà di $\delta_1 y$ si ricava l'annullarsi di $H_1(x)$ per ogni x, donde l'annullarsi di $H(x)$.

Per le considerazioni di questo paragrafo si può vedere

Heine, *Math. Ann.*, Vol. II, pag. 188 (1870).

Du Bois Reymond, *Math. Ann.* XV, pag. 297 e seg. (1879).

Meray, *Ann. de l'École Norm.* 2.ª ser. Vol. VII, pag. 187.

Nel citato lavoro di Du Bois Reymond (p. 302) si trova anche il seguente teorema

Se δy debba ritenersi continua insieme ad un certo numero di sue derivate, ma del resto arbitraria, dall'annullarsi dell'integrale

$$\int_{x'}^{x''} H \delta y \, d x$$

per ogni valore di δy, e dall'ipotesi che H sia una funzione integrabile di x, risulta che è anche zero l'integrale fra gli stessi limiti della funzione H stessa.

§ 6. Problema fondamentale del calcolo delle variazioni.

Il calcolo delle variazioni non si propone principalmente che una sola specie di problema ed è un problema di massimo o di minimo.

Si abbia l'integrale definito

$$I = \int_{x'}^{x''} F(x\, y,\ y', \ldots y^{(r)})\, d x$$

dove y sia una funzione indeterminata di x.

Noi ci proponiamo di ricercare una tale y, funzione di x che questo integrale risulti massimo o minimo.

È facile vedere subito che per il massimo o minimo deve essere zero la variazione dell'integrale. Giacchè la differenza fra due valori che l' integrale acquista ponendo per y una volta quella funzione che corrisponde al massimo o minimo e una seconda volta la stessa funzione variata in modo arbitrario, è eguale alla *variazione* più infinitesimi di ordine superiore. Ora si sa che in una somma di infinitesimi si può fare in modo che il segno di tutta l' espressione dipenda da quello dell' infinitesimo di ordine minimo, il quale nel nostro caso è esattamente δI; ma il segno di δI dipende dal segno delle variazioni arbitrarie

$$\delta x, \delta y, \delta y', \ldots;$$

mutando il segno a queste muta anche quello di δI (vedi espressione di δI); dunque la differenza fra due valori consecutivi dell' integrale non avrebbe segno costante; intanto è chiaro che tale differenza deve avere segno costante se si tratti di massimo o minimo, cioè la differenza fra il valore dell' integrale per la y che corrisponde al massimo e quello per un' y variata *in una qualunque maniera*, deve essere o sempre positiva o sempre negativa. Concludiamo che la *variazione prima dell' integrale deve essere zero.*

Come si vede le considerazioni che qui si fanno sono analoghe a quelle che si fanno nel calcolo differenziale a proposito dei massimi e minimi delle funzioni di una o più variabili.

L' annullarsi della variazione prima non è una condizione sufficiente perchè si abbia un massimo o minimo, ma è solo una condizione necessaria. Per esaminare se davvero ha luogo un massimo o minimo per le curve $y = f(x)$ per le quali la variazione prima δI è zero, occorrono considerazioni sulle quali avremo occasione di tornare in seguito.

Nel calcolo differenziale posto eguale a zero il differenziale primo della funzione, cioè separatamente le sue derivate parziali rispetto a tutte le variabili, otteniamo una serie di equazioni analitiche le quali colla risoluzione possono servire a trovare i punti nei quali la funzione *può* essere massima o minima. Che cosa otteniamo di analogo nel calcolo delle variazioni?

La differenza sta in ciò che nel calcolo delle variazioni per determinare la funzione o le funzioni otteniamo non delle equazioni ordinarie, ma delle *equazioni differenziali*, la cui integrazione dà la funzione richiesta.

Vediamo in che modo.

Abbiamo visto che la variazione δI può porsi sotto la forma

$$\delta I = \Big[\Gamma \Big]_{x'}^{x''} + \int_{x'}^{x''} H \delta y \, d x$$

dove

$$\Gamma = F \delta x + K \delta y + K' \delta y' + \ldots$$

La variazione δI deve essere zero qualunque sieno le arbitrarie variazioni $\delta x \; \delta y \; \delta y' \ldots$,

Disponiamo per un momento di queste nella seguente maniera: supponiamo che esse sieno tutte zero nei punti x' e x'' che sono i due limiti dell'integrale; basterà porre $\delta x' = \delta x'' = 0$, e inoltre prendere per δy una funzione di x tale che essa e tutte le sue derivate sino all'ordine $r-1$ (se nelle nostre formole compariscano le variazioni sino alla $\delta\, y^{(r-1)}$) sieno zero nei due punti indicati; p. es. potrà prendersi

$$\begin{aligned}\delta\, y &= \delta\, \alpha\,.\,\lambda\,(x)\\ &= \delta\, \alpha\,.\,(x-x')^n\,(x-x'')^n\,\lambda_1\,(x)\end{aligned}$$

dove $\lambda_1\,(x)$ sia ancora un'arbitraria funzione di x.

Per tali valori la prima parte dell'espressione di $\delta\, I$ cioè

$$\Big[\,\Gamma\,\Big]_{x'}^{x''}$$

va a zero, e quindi deve essere zero la seconda parte, e questa deve essere zero qualunque sia la funzione $\lambda_1\,(x)$, cioè ancora qualunque sia $\delta\, y$ purchè soddisfacente alla condizione di annullarsi insieme alle sue derivate in $x=x'$, $x=x''$.

Nel paragrafo pracedente abbiamo considerato questo caso e abbiamo visto che ciò porta necessariamente l'annullarsi della espressione H; ora H non contiene le variazioni alle quali abbiamo dato valori speciali, quindi possiamo conchiudere che dall'annullarsi di $\delta\, I$ si ricava in ogni caso l'annullarsi di H.

D'altra parte dall'annullarsi di H si ricava quello dell' integrale e quindi quello di

$$\Big[\,\Gamma\,\Big]_{x'}^{x''}.$$

Abbiamo perciò questo risultato

Perchè si abbia il massimo o minimo è necessario che sieno

$$H = 0$$

$$\Big[\, \Gamma \,\Big]_{x'}^{x''} = 0.$$

La prima di queste equazioni contiene

$$x\, y\, y' \ldots y^{(2n)};$$

essa è dunque un'equazione differenziale di ordine $2n$ che servirà a determinare y.

Integrata tale equazione si ha la funzione y con $2n$ costanti arbitrarie, le quali si determinano per mezzo della seconda relazione

$$\Big[\, \Gamma \,\Big]_{x'}^{x''} = 0.$$

Il modo col quale ciò può farsi sarà esplicato più particolarmente nei paragrafi seguenti.

Analogamente può considerarsi il caso in cui non si abbia una sola funzione y ma più funzioni $y, z, \ldots$

Allora la variazione dell'integrale è del medesimo tipo, ma la prima parte contiene ancora tutti i termini in $\delta z, \delta z' \ldots$, e la seconda parte è

$$\int_{x'}^{x''} (H\,\delta y + H_1\, d\, z + \ldots)\, d\, x$$

dove H_1 è formato nello stesso modo che H ma prendendo in considerazione la variabile z piuttosto che la y; e così di seguito.

Ponendo $\delta z = 0$, e disponendo di δx, δy, $\delta y' \ldots$ n modo che sieno zero ai limiti $x' x''$, otteniamo ome avanti $H = 0$; e così similmente otteniamo $H_1 = 0$, ecc.

Abbiamo dunque non più una equazione differenziale, ma un sistema di equazioni differenziali

$$H = 0,\ H_1 = 0, \ldots$$

ontenenti altrettante funzioni incognite y, $z, \ldots$ ntegrato questo sistema di equazioni si hanno le unzioni y, $z, \ldots$ con un certo numero di costanti rbitrarie le quali poi si determineranno mediante altra relazione

$$\Big[\, \Gamma \,\Big]_{x'}^{x''} = 0,$$

a quale si chiama l'*equazione ai limiti.*

7. Discussione sulle condizioni che restano determinate dall'equazione ai limiti.

Il primo membro dell'equazione ai limiti ha la eguente forma

$$[F \delta x + K \delta y + K' \delta y' + \ldots]_{x=x''} -$$
$$- [F \delta x + K \delta y + K' \delta y' + \ldots]_{x=x'}.$$

sso dipende dunque dai valori di

$$\delta x \quad \delta y \quad \delta y' \ldots \delta y^{(r-1)}$$

e di $y\, y' \ldots$ nei due punti

$$x = x'', \qquad \text{e} \qquad x = x'.$$

Proponiamoci il problema sotto la sua forma più arbitraria, cioè supponiamo che la y che dobbiamo cercare non sia sottoposta a nessuna condizione; e quindi non sieno neanche assegnati i suoi valori o quelli delle sue derivate ai limiti $x''\, x'$, e neanche delle relazioni fra tali valori. Inoltre non sieno neanche assegnati in antecedenza i limiti $x''\, x'$:

Allora le quantità $\delta x\; \delta y\; \delta y' \ldots$ in qualunque punto e quindi in particolare nei due limiti, restano arbitrarie, come sempre le abbiamo considerate sinora; e quindi dalla relazione

$$\Big[\, \Gamma \,\Big]_{x'}^{x''} = 0$$

si ricava senz'altro che devono essere zero i coefficienti dei vari termini, cioè si ricavano le $2\,n + 2$ equazioni

$$\begin{array}{ll} F_{x''} = 0 & F_{x'} = 0 \\ K_{x''} = 0 & K_{x'} = 0 \\ K'_{x''} = 0 & K'_{x'} = 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

Dall' integrazione dell' equazione differenziale $H = 0$, ricavando y con $2\,r$ costanti arbitrarie e quindi $y'\, y'' \ldots$ e sostituendoli in queste equazioni dopo aver posto $x = x'$ ovvero $x = x''$, si ottengono $2\,r + 2$ relazioni le quali in generale possono servire a determinare le $2r$ costanti d'integrazione e le due altre quantità x' x''.

Ciò suppone però che $H = 0$ sia effettivamente un'equazione differenziale di ordine $2r$, per il che evidentemente occorre e basta (ricordando la forma di H) che

$$\frac{d\,M^{(r)}}{d\,x} = \frac{d}{d\,x} \frac{\partial F}{\partial y^{(r)}}$$

contenga $y^{(2r)}$ cioè che

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(r)}\,\partial y^{(r)}}$$

sia diverso da zero. Se ciò non si verifica allora il problema non sarà risolubile. Ma di ciò tratteremo più in generale in un paragrafo speciale. (Vedi § 15.)

Supponiamo ora che sieno assegnati i limiti x' x'' dell'integrale; allora sono zero le variazioni $\delta x'$, $\delta x''$, e quindi nell'espressione di

$$\Big[\,\Gamma\,\Big]_{x'}^{x''}$$

spariscono i due primi termini, e sugli altri restanti si fa una considerazione analoga a quella di sopra; si hanno non più $2r+2$, ma solo $2r$ relazioni che servono a determinare le $2r$ costanti.

Supponiamo inoltre che fra i valori di $x\,y\,y'$ ... ai limiti cioè fra x' x'' y_1 y_2 y'_1 y'_2 . . ., (indicando con y_1 y_2, y'_1 y'_2 . . . i valori di y y' . . . nei punti x' x'' rispettivamente) debbano sussistere k date relazioni

$$R_1 = 0 \quad R_2 = 0 \dots \quad R_k = 0.$$

Queste relazioni sono fisse per ogni sistema di variazioni

$$\delta x' \; \delta x'' \; \delta y_1 \; \delta y_2 \; \delta y'_1 \; \delta y'_2 \dots,$$

quindi le variazioni dei primi membri di queste relazioni considerate come funzioni di

$$x' \; x'' \; y_1 \, y_2 \; y'_1 \, y'_2 \dots$$

devono essere zero, cioè si ha

$$\frac{\partial R_1}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial R_1}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial R_1}{\partial y_1'} \delta y_1' + \dots +$$

$$+ \frac{\partial R_1}{\partial x''} \delta x'' + \dots\dots\dots\dots = 0$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial x'} \delta x' + \frac{\partial R_2}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial R_2}{\partial y_1} \delta y_1' + \dots +$$

$$+ \frac{\partial R_2}{\partial x''} \delta x'' + \dots\dots\dots\dots = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

le quali stabiliscono r relazioni fra le variazioni

$$\delta x' \; \delta x'' \; \delta y_1 \; \delta y_2 \dots$$

Da queste relazioni, ricavate r di tali variazioni e sostituite in

$$\left[\Gamma \; \right]_{x'}^{x''} = 0$$

si ha una relazione nella quale le rimanenti

$$2r + 2 - k$$

variazioni sono arbitrarie, e quindi eguagliando a zero i coefficienti di queste, si hanno $2r + 2 - k$ equazioni che insieme colle k assegnate possono determinare le $2r$ costanti e i due limiti x', x''.

Se in particolare $k = 2r + 2$, allora collo stesso procedimento di sopra si hanno $2r + 2$ equazioni lineari omogenee fra altrettante incognite; il determinante del sistema non può essere zero, perchè esso non è che l'Jacobiano delle funzioni

$$R_1 \, R_2 \ldots$$

e se fosse zero, una di tali relazioni sarebbe conseguenza delle altre, il che naturalmente si esclude. Quindi per i valori delle

$$\delta x' \quad \delta x'' \quad \delta y_1 \quad \delta y_2 \quad \delta y'_1 \quad \delta y'_2 \ldots$$

non possono prendersi che valori zero, cioè ricaviamo

$$\delta x' = \delta x'' = \delta y_1 = \ldots = 0;$$

perciò l'equazione ai limiti è identicamente soddisfatta.

Per determinare la $2r$ costanti d'integrazione, possiamo osservare che dalle $2r + 2$ relazioni R assegnate, colla risoluzione, si possono ricavare i valori delle $2r + 2$ quantità

$$x' \; x'' \; y_1 \, y_2 \ldots y'_1 \, y'_2 \ldots$$

Sostituendo tali valori nella y trovata e nelle sue derivate, abbiamo appunto $2r$ equazioni per determinare le altrettanti costanti.

È facilissimo estendere le già fatte considerazioni al caso in cui vi sieno più funzioni incognite y, z, ... Se il numero delle funzioni incognite è n, allora le equazioni ai limiti diventano $2nr + 2$.

Nel paragrafo seguente faremo vedere come tutti i vari casi trattati in questo paragrafo si possono ridurre all'ultimo di essi cioè a quello in cui si intendano assegnati i valori limiti delle funzioni incognite e i limiti stessi.

§ 8. Un problema generale di calcolo di variazione, con valori limiti non assegnati, può sempre ridursi ad uno con valori limiti assegnati.

La riduzione di cui si parla nel titolo di questo paragrafo è assai importante perchè servirà a semplificare moltissime delle considerazioni che avremo occasione di fare in seguito.

Un problema generale di massimo e minimo nel calcolo delle variazioni, può sempre scomporsi in due altri problemi di cui l'uno appartiene al calcolo differenziale.

Supponiamo infatti che si debba rendere massimo o minimo un integrale definito della specie nota.

Non sieno assegnati i valori delle funzioni incognite ai limiti d'integrazione x' x'', e non sieno neanche assegnati tali limiti; ovvero tali quantità sieno assegnate solo in parte o sottoposte ad altre qualunque condizioni che non bastino a determinarle completamente.

Noi possiamo prima supporre che sieno assegnati gli indicati valori limiti, e risolvere in corrispondenza il problema di calcolo di variazioni; abbiamo allora l'integrale massimo o minimo che sarà funzione dei valori limiti. Se questi, in tutto o in parte, non sono assegnati, e noi li immaginiamo variabili, l'integrale potrà immaginarsi funzione di essi. Ora se, fra tutti gli infiniti valori che l'integrale così può assumere cerchiamo il massimo o minimo, (il che si riduce evidentemente all'ordinario problema di massimo e minimo di una funzione di più variabili nel calcolo differenziale) abbiamo risoluto il problema che primitivamente ci eravamo proposti. Vedi per questo: A. Mayer, *Ueber die Kriterien des Max. und Min.* ecc. Crelle, Vol. LXIX, pag. 261-263.

§ 9. Problemi di massimo e minimo relativi.

Fra i problemi del massimo e minimo di un integrale definito ve ne possono essere anche quelli di una natura diversa da quelli finora trattati. Nei paragrafi precedenti si è trattato di rendere massimo o minimo un integrale definito disponendo delle funzioni y, z, ... che colle derivate comparivano sotto la funzione integranda; tali funzioni $y z$ ... o erano affatto indeterminate ovvero se ne fissavano in tutto o in parte i valori di esse e delle loro derivate nei due punti $x' x''$ limiti dell'integrale. Ma si possono proporre problemi di altra natura. Possiamo proporci di rendere massimo o minimo l'integrale quando però fra le y, z, ... e le loro derivate sieno assegnate altre relazioni; quando cioè le funzioni $y, z, \ldots$ devono soddisfare ad altre assegnate equazioni differenziali.

Oppure possiamo proporci di rendere massimo o minimo l'integrale, sottoponendo però le y, z, ... alla condizione che uno o più altri integrali della stessa natura e definiti fra gli stessi limiti abbiano un valore determinato.

Problemi di tal natura possono andare sotto il nome generico di *problemi di massimo relativo* e *minimo relativo*, inquantochè il massimo che si cerca non è un massimo assoluto come accadeva nei problemi sopra trattati.

In questi casi evidentemente non possiamo procedere come nei casi precedenti. La variazione dell'integrale definito è data da

$$\delta I = \Big[\, \Gamma \,\Big]_{x'}^{x''} + \int_{x'}^{x''} (H \delta y + H_1 \delta z + \ldots) \, d x.$$

Se le δy, δz fossero fra loro indipendenti come accadeva prima, allora si ricaverebbe

$$H = 0 \quad H_1 = 0 \ldots;$$

ma a questa conclusione non possiamo più giungere quando immaginiamo stabilite altre relazioni di qualunque specie fra y, z ... perchè allora anche le variazioni di queste vengono ad avere una certa dipendenza fra loro.

La soluzione del problema ci si delinea dunque così: bisognerà cercare di eliminare nella formola precedente alcune delle variazioni δy, $\delta z, \ldots$ in modo che le restanti possano reputarsi indipendenti, e quindi possa poi applicarsi il metodo già noto. Tutta la quistione si ridurrebbe dunque a trovare la relazione che deve esistere fra δy, $\delta z, \ldots$

Faremo vedere che il secondo dei problemi enunciati si riduce al primo, il quale per brevità lo indicheremo col nome di *problema di Lagrange;* e lo intitoliamo dal nome di Lagrange perchè fu questo sommo analista che intuì una geniale soluzione di questo problema (il cosidetto metodo dei moltiplicatori).

Il secondo problema poi lo chiameremo (per una ragione che si vedrà in seguito) il problema degli *isoperimetri.*

§ 10. Forma canonica del problema di Lagrange.

Ripetiamo l'enunciato del problema che abbiamo chiamato di Lagrange.

Si abbia un integrale

$$I = \int_{x'}^{x''} F\,dx$$

dove F sia funzione di

$$x,\ y,\ y' \ldots y^{(n)},\ z,\ z' \ldots$$

e le y z... sono funzioni della x. Si vogliono determinare tali funzioni in modo che I risulti massimo o minimo, e che sieno soddisfatte altre equazioni differenziali assegnate

$$\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = 0 \ldots$$

contenenti la x e le y, z... e loro derivate, e anche, più generalmente, altre funzioni di x insieme alle loro derivate.

Vediamo prima di tutto sotto quale forma *canonica* si possono ridurre i dati del problema.

Si può fare subito una riduzione simile a quella che si fa quando è dato un sistema di equazioni differenziali simultanee; si sa che accrescendo il numero delle equazioni date, e il numero delle funzioni, si può avere un sistema di equazioni differenziali tutte di 1.° ordine.

Poniamo nel caso nostro

$$y' = y_1,\ y'' = y_1' = y_2 \ldots y^{(n-1)} = y'_{n-2} = y_{n-1}$$
$$z' = y_n,\ z'' = y'_n = y_{n+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

e allora, considerando insieme alle funzioni incognite le altre $y_1\, y_2 \ldots$ e corrispondentemente le equazioni differenziali di 1.° ordine

$$y' = y_1 \quad y'_1 = y_2 \ldots,$$

si vede che infine riduciamo il problema ad una forma nella quale tutte le funzioni incognite compariscono non più che al 1.° ordine.

Cambiando opportunamente le notazioni per ridurle più simmetriche, possiamo porre il problema sotto la seguente forma:

Sia dato l' integrale

$$I = \int_{x'}^{x''} F(x,\ y_1 y_2 \ldots, y'_1 y_2' \ldots)\, d\,x$$

e le equazioni differenziali di 1.° ordine

$$\varphi_1 (x\, y_1\, y_2 \ldots\ y'_1\, y'_2 \ldots) = 0$$
$$\varphi_2 (x\, y_1\, y_2 \ldots y'_1\, y'_2 \ldots) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

trovare le funzioni incognite $y_1\, y_2 \ldots$ in modo che queste equazioni differenziali sieno soddisfatte, e che l' integrale sia massimo o minimo. In particolare alcune delle funzioni ignote potrebbero non comparire esplicitamente in F, e comparire invece nelle equazioni differenziali.

In particolare ancora, alcune delle φ potrebbero non contenere le derivate delle funzioni, ed essere perciò delle relazioni *finite* fra le funzioni stesse.

È facile mostrare che sotto la forma ora indicata possono presentarsi gli altri due problemi sopra enunciati cioè quello del massimo e minimo assoluto, e quello nel quale sono fissati i valori di certi altri *integrali definiti dati.*

Il problema del massimo e minimo assoluto nel quale la F contenga le derivate snperiori alla prima delle funzioni ignote, si può evidentemente subito porre sotto la forma del problema di Lagrange; basterà eseguire le stesse apposizioni

$$y' = y_1\ \ y'' = y'_1 = y_2, \ldots$$

fatte sul principio di questo paragrafo per il caso generale.

Passiamo ora ai cosidetti problemi degli isoperimetri.

L' integrale I debba essere massimo o minimo mentre gli altri integrali $I_1\, I_2 \ldots$ debbano avere valori determinati.

Un tal problema si riduce a quello di Lagrange col seguente procedimento di Lagrange stesso.

Sia

$$I_1 = \int_{x'}^{x''} F_1\, d\,x \ldots$$

e introduciamo una nuova funzione ignota y_1 definita dalla relazione

$$y_1 = \int_{x'}^{x} F_1\, d\,x$$

colla condizione che per $y = y'$ sia zero, e per $x = x''$ sia eguale al fissato valore I_1.

La funzione y_1 sarà anche definita dall' equazione differenziale $y'_1 = F_1$, e quindi il problema si riduce a questo: rendere I massimo o minimo mentre le funzioni $y, z, \ldots$ debbono anche soddisfare alle condizioni date dalle equazioni differenziali $y'_1 = F_1,\ y'_2 = F_2, \ldots$ nelle quali oltre le funzioni $y, z \ldots$ entrano anche altre funzioni $y_1\ y_2 \ldots$ di cui però sono fissate le condizioni ai limiti. Come si vede, ci siamo ridotti ad uno speciale problema del tipo di Lagrange.

§ 11. Problema generale di Mayer.

Chiameremo *problema di Mayer* quello enunciato da Adolfo Mayer e da lui risoluto con un metodo simile a quelle di Lagrange (Mayer, *Die Lagrange'sche Multiplicatorenmethode und das allgemeinste Problem der Variationsrechnung bei einer unabhängigen Variabeln.* Leipz. Berichte, 1878 e 4 marzo 1895). Questo problema può considerarsi come diretta generalizzazione di quello di Lagrange.

Nel problema di Lagrange poniamo

$$y_{n+1} = \int_{x'}^{x} F\,d\,x.$$

La funzione y_{n+1} di x è determinata dalle condizioni di essere zero per $x = x'$, di soddisfare all'equazione differenziale

$$y_{n+1} = F$$

e, inoltre di diventar massima e minima per

$$x = x''.$$

Ci si presenta allora subito la generalizzazione nel seguente modo:

Immaginiamo assegnate un certo numero di equazioni differenziali

$$\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = 0 \ldots \varphi_m = 0$$

contenenti x e le funzioni ignote

$$y_1\, y_2 \ldots y_{n+1} \qquad (m < n).$$

Delle prime n di queste funzioni sieno assegnati i valori nei due punti x' e x'' e di y_{n+1} sia assegnato il valore in x'. Trovare queste funzioni in modo che mentre soddisfino a tutte le equazioni differenziali date, e alle assegnate condizioni ai limiti, la y_{n+1} diventi massima o minima per

$$x = x''.$$

Quando la equazione differenziale cui soddisfa y_{n+1} è della speciale forma

$$y'_{n+1} = F$$

dove F non contiene più y_{n+1}, e quando il valore assegnato per y_{n+1} per $x = x'$ è il valore zero, allora si ricade nel problema di Lagrange.

Nel secondo dei citati lavori l'autore estende al caso più generale il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Considerazioni simili sono state fatte posteriormente anche da Ermakoff, *Rend. dell'Univ. di Kiew*, 1889 (in russo). (Vedi *Forsch. der math.*, Vol. XXII (1890), pag. 381.)

§ 12. Soluzione del problema di Lagrange. Metodo dei moltiplicatori.

Il metodo col quale si risolve il problema di Lagrange è il cosidetto metodo dei moltiplicatori intuito più che dimostrato da Lagrange stesso

(*Fonct. analyt.*, pag. 292; *Calcul des fonctions*, pag. 460). Esso può considerarsi come una estensione del metodo di Eulero per gli isoperimetri.

Della regola di Eulero il Bertrand dette una dimostrazione (*Liouville.* VII, pag. 55, 1842) e assai più tardi Du Bois Reymond (*Math. Ann.* XV) ne dette due.

Indi Scheeffer (*Max. und Minim. der einfach. Integr.*; Math. Ann. Vol. XXV, pag. 557) trattò un problema da lui chiamato *isoperimetrico sulle superficie;* il caso cioè in cui sono assegnati degli integrali che devono avere valori determinati, mentre fra le funzioni incognite sono anche assegnate delle relazioni *finite.*

Infine il Mayer si occupò espressamente della quistione per il caso generale (*Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechung.* Math. Ann. Vol. XXVI, pag. 74. Vedi anche *Leipz. Berichte.* 1885).

Ultimamente il signor Turksma ha ripreso la quistione (*Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung durch Vergleich derselben mit einer neuen Methode* ecc. Math. Ann. Vol. XLVII, pag. 33) per dare un altro metodo di risoluzione il quale conduce alle stesse equazioni cui conduce il metodo di Lagrange, il che riesce quindi una dimostrazione indiretta di quest' ultimo metodo; nello stesso tempo riesce a mostrare, col suo metodo, che non esistono altre soluzioni che quelle sole che vengono date dal metodo di Lagrange, cosa che non risultava finora dai soli lavori di Mayer.

Passiamo ora alla soluzione del problema di Lagrange sotto la sua forma più generale. Come abbiamo già detto nel paragrafo precedente possiamo sempre supporre che nei dati del problema compariscano solo le derivate prime delle funzioni incognite.

Facciamo poi la distinzione nelle equazioni di condizione, fra quelle finite e quelle differenziali; poniamo che le prime sieno m'' e le seconde m', e che sieno n le funzioni incognite

$$y_1\, y_2 \dots y_n.$$

Sia al solito

$$I = \int_{x'}^{x''} F\, d\, x$$

l'integrale da rendere massimo o minimo, e sieno

$$\varphi_1 = 0 \quad \varphi_2 = 0 \dots \quad \varphi_{m'} = 0$$

le equazioni differenziali, e

$$\psi_1 = 0 \quad \psi_2 = 0 \dots \quad \psi_{m''} = 0$$

le equazioni finite.

Indichiamo con

$$\lambda_1(x) \dots \lambda_{m'}(x) \quad \mu_1(x) \dots \mu_{m''}(x)$$

$m' + m''$ funzioni indeterminate, e formiamo la espressione

$$J = \int_{x'}^{x''} [F + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_{m'} \varphi_{m'} + \mu_1 \psi_1 + \dots + \mu_{m''} \psi_{m''}]\, dx =$$

$$= \int_{x'}^{x''} F_1\, d\, x.$$

Se le φ e le ψ sono zero per ogni x, l'integrale dato sarà massimo o minimo se lo sarà questo e viceversa. Eguaglieremo a zero la variazione di questo integrale, la quale al solito potrà mettersi sotto la seguente forma

$$\Omega + \int_{x'}^{x''} \left[\left(\frac{\partial F_1}{\partial y_1} - \frac{d}{d x} \frac{\partial F_1}{\partial y'_1} \right) \delta y_1 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial F_1}{\partial y_2} - \frac{d}{d x} \frac{\partial F_1}{\partial y'_2} \right) \delta y_2 + \ldots \right] d x$$

dove Ω è una parte integrata di cui conosciamo anche la forma; propriamente nel nostro caso (Vedi § 3)

$$\Omega = \left[F_1 \delta x + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \delta y_2 + \ldots \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \delta y_n \right]_{x'}^{x''}$$

Immaginando che si debba trovare il massimo *assoluto* dell' integrale di F_1, bisognerà allora eguagliare a zero i diversi coefficienti di

$$\delta y_1 \; \delta y_2 \ldots$$

nella funzione sotto il segno integrale (è sulla legittimità di questo procedimento che vertono i ragionamenti più rigorosi di Adolfo Mayer già citati); quindi si hanno le n equazioni

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_i} - \frac{d}{d x} \frac{\partial F_1}{\partial y'_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \qquad (a)$$

le quali insieme colle $m' + m''$ date, formano

$$n + m' + m''$$

equazioni per determinare le altrettante funzioni incognite y, λ, μ.

Il numero $m' + m''$ deve essere minore di n altrimenti le condizioni determinerebbero già, a meno di costanti, le funzioni y, o sarebbero sovrabbondanti.

Le prime $m' + m''$ delle relazioni (a) possono porsi come condizioni per determinare le funzioni λ, μ; si può cioè dire: disponiamo delle funzioni arbitrarie λ, μ in modo che sieno soddisfatte le prime $m' + m'$ delle relazioni (a). Tutta la quistione si riduce allora a vedere se anche le altre delle (a) devono essere soddisfatte. Un ragionamento poco rigoroso è questo:

Poichè allora nell'espressione della variazione di J non compariscono più (sotto il segno integrale) i termini in $\delta y_1 \ldots \delta y_{m'+m''}$, e solo i termini in $\delta y_{m'+m''+1} \ldots \delta y_n$, e poichè possiamo intendere che le date equazioni differenziali danno appunto $y_1 \ldots y_{m'+m''}$ in funzione dalle altre y, e quindi, se le variazioni delle prime y restano così legate a quelle delle altre, restano però indipendenti fra loro le variazioni di queste altre, possiamo perciò eguagliare a zero i coefficienti di

$$\delta y_{m'+m''+1} \ldots \delta y_n.$$

(Vedi p. es. Jordan, *Analyse.* III, pag. 479.) Questo ragionamento non offre tutto il rigore desiderabile perchè noi non possiamo *a priori* discutere con sicurezza sui possibili legami che le date equazioni *differenziali* stabiliscono fra le funzioni incognite. (Vedi a questo proposito le osservazioni di Turksma a pag. 35 dei *Math. Ann.* Vol. XLVII.)

Se si trattasse solo di equazione *finite* allora questo metodo di dimostrazione potrebbe dirsi rigoroso. È a questa lacuna che si propose di supplire A. Mayer nei citati lavori. Noi però non entreremo nei dettagli delle considerazioni di quell'autore.

Supponiamo che sieno assegnati i valori delle funzioni $y_1 y_2 \dots y_n$ ai limiti, i quali a loro volta sono anche assegnati. Questi valori ai limiti devono naturalmente essere assegnati in modo che le m'' equazioni finite $\psi_1 = 0 \dots \psi_{m''} = 0$ sieno soddisfatte da essi. Inoltre allora la quantità Ω sarà zero perchè

$$\delta y_1 = \dots = \delta y_n = 0.$$

Facciamo qualche considerazione sulla determinazione delle costanti che risultano dall'integrazione.

Le equazioni $a)$ sono di 2.° ordine rispetto alle funzioni y e di primo ordine rispetto alle λ e μ. In luogo delle equazioni

$$\varphi_h = 0$$

e

$$\psi_j = 0$$

poniamo le altre che da queste si ricavano

$$\frac{d\,\varphi_h}{d\,x} = 0, \qquad \frac{d^2\,\psi_j}{d\,x^2} = 0 \tag{b}$$

le quali sono anche di 2.° ordine rispetto alle y.

Le equazioni (a) sviluppate e ponendo in vista i termini in

$$y'_1 \dots y''_n, \quad \lambda_1 \dots \lambda_{m'}, \quad \mu_1 \dots \mu_{m''}$$

possono scriversi come segue:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial y'_i \, \partial y'_1} y''_1 + \ldots + \frac{\partial^2 F_1}{\partial y'_i \, \partial y'_n} y''_n + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_i} \lambda'_1 + \ldots +$$
$$+ \frac{\partial \varphi_{m'}}{\partial y'_i} \lambda'_{m'} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y_i} \mu_1 - \ldots - \frac{\partial \psi_{m''}}{\partial y_i} \mu_{m''} + S = 0$$

dove i va da 1 ad n, e S rappresenta un assieme di termini non contenenti alcuna y'', nè λ'_h, nè alcuna μ.

Le equazioni (b) possono poi scriversi

$$\frac{\partial \varphi_h}{\partial y'_1} y''_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_h}{\partial y'_n} y''_n + T = 0$$
$$\frac{\partial \psi_j}{\partial y_1} y''_1 + \ldots + \frac{\partial \psi_j}{\partial y_n} y''_n + R = 0$$

dove T, R rappresentano espressioni non contenenti nessuna y''_i.

Si ha in tutto un sistema di $n + m' + m''$ equazioni lineari in y''_i, λ'_h, μ_j le quali sono anche in numero di $n + m' + m''$.

Perchè tutte queste equazioni lineari non omogenee sieno risolubili rispetto alle dette incognite occorre che non sia zero il determinante del sistema il quale è

$$
\left.
\begin{array}{cccccccccc}
\frac{\partial^2 F_1}{\partial y'^2_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial y'_1 \partial y'_n} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{m'}}{\partial y'_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_{m''}}{\partial y_1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial^2 F_1}{\partial y'_n \partial y'_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F_1}{\partial y'^2_n} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_n} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{m'}}{\partial y'_n} & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} & \cdots & \frac{\partial \psi_{m''}}{\partial y_n} \\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y'_n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial \varphi_{m'}}{\partial y'_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_{m'}}{\partial y'_n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\frac{\partial \psi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_1}{\partial y_n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{\partial \psi_{m''}}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \psi_{m''}}{\partial y_n} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}
\right|
$$

Se $m' + m''$ fosse maggiore di n, questo determinante sarebbe identicamente zero; anche per altra ragione si sa infatti che è da escludersi il caso $m' + m'' > n$.

Se questo determinante è diverso da zero, allora si possono risolvere le precedenti equazioni lineari rispetto a y''_i, λ'_h, μ_j,

Ponendo da parte le equazioni che vengono così direttamente a dare i valori di μ_j, consideriamo le altre $n + m'$ equazioni differenziali.

Introduciamo come nuove funzioni incognite le $z_1 \dots z_n$ definite da

$$z_k = \frac{\partial y_k}{\partial x},$$

e allora

$$y''_k = \frac{\partial z_k}{\partial x},$$

e si ha un sistema di $2n + m'$ equazioni differenziali simultanee di 1.° ordine, ridotte alla cosidetta forma normale, cioè risolute rispetto alle derivate *prime* di tutte le funzioni incognite, le quali nel nostro caso sono le z, le y, e le λ. Coll'integrazione si introducono $2n + m'$ costanti.

Di queste, $2n$ restano determinate avendo fissati i valori delle funzioni y nei due limiti x' e x'', e le altre restano determinate colla condizione che le funzioni y devono soddisfare le m' equazioni $\varphi = 0$; è da notarsi a questo proposito che noi ci siamo finora serviti delle condizioni $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, le quali porterebbero $\varphi = \text{cost.}$, e non propriamente eguale a zero. Colle trovate y, sostituendo in φ abbiamo dunque certamente un aggregato di sole costanti (la x deve scomparire), e il porre eguale a zero una tal funzione delle costanti costituisce una condizione cui queste si sottopongono.

In quanto alle ψ esse devono trovarsi identicamente verificate, perchè naturalmente, abbiamo già detto, i valori ai limiti devono essere assegnati in modo che le ψ sieno soddisfatte.

Se il determinante avanti indicato è zero, il sistema di equazioni differenziali potrà ridursi ad un sistema di ordine più basso, un sistema, cioè, che potrà integrarsi con un numero minore di costanti. Queste non sono dunque più sufficienti per soddisfare tutti i dati del problema, e non si potrà perciò in generale annullare la *variazione prima* dell'integrale dato. (Vedi JORDAN, *Analyse*. III, pag. 506.)

Per le considerazioni fatte riguardo alla determinazione delle costanti, vedi

MAYER, *Crelle*. Vol. LIX, pag. 240.

SCHEEFFER, *Math. Ann.* Vol. XXV, pag. 559.

Prima di terminare vogliamo notare che la riduzione, da noi fatta sul principio, tendente a far comparire nei dati del problema solo le derivate *prime* delle funzioni incognite, se è utile per semplificare l'esposizione del metodo di risoluzione, non è però necessaria; e lo stesso metodo potrebbe applicarsi, anche se vi fossero le derivate di ordine superiore, ottenendo analoghi risultati.

§ 13. Caso speciale del problema degli isoperimetri.

Come abbiamo già detto il problema degli isoperimetri può trasformarsi in modo da diventare un caso speciale del problema di Lagrange. Quindi è naturale che stabilito con tutto il rigore il metodo per la soluzione di quest'ultimo problema, resta risoluto anche il primo.

Si debba rendere massimo o minimo l'integrale I, mentre altri integrali $I_1\, I_2 \ldots I_m$ debbano avere valori determinati.

Sia in generale

$$I_k = \int_{x'}^{x''} F_k\, d\, x$$

e introduciamo altre m funzioni definite dalla formola

$$y_{n+k} = \int_{x'}^{x} F_k\, d\, x$$

ovvero

$$y'_{n+k} = F_k$$

e colla condizione che sieno zero per $x = x'$, e abbiano i valori assegnati $I_1\, I_2 \ldots I_m$ per $x = x''$.

Si ha dunque uno speciale problema di Lagrange, il caso cioè in cui le equazioni differenziali sono della forma

$$y'_{n+k} - F_k = 0$$

dove tutte le F non contengono le funzioni

$$y_{n+1} \ldots y_{n+m},$$

e neanche le loro derivate.

Applicando il procedimento generale, dobbiamo porre

$$\Phi = F + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k (F_k - y_{n+k})$$

e stabilire le equazioni differenziali

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_n} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_n} = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_{n+1}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_{n+1}} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_{n+m}} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_{n+m}} = 0$$

Ora nessuna delle F contiene nè le y_{n+k} nè le y'_{n+k}; quindi le ultime m di queste equazioni si riducono semplicemente a

$$\frac{d}{dx} \lambda_1 = 0 \quad \frac{d}{dx} \lambda_2 = 0 \quad \frac{d}{dx} \lambda_m = 0$$

cioè

$$\lambda_1 = \text{cost} \ldots \lambda_m = \text{cost}.$$

Le prime n equazioni si riducono allora a

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'_i} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(\frac{\partial F_k}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F_k}{\partial y'_i} \right) = 0$$

le quali si possono interpretare nel seguente modo:

Si consideri l'integrale

$$J = \int_{x'}^{x''} \left(F + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k F_k \right) dx$$

dove le λ sono delle costanti, e si voglia rendere massimo o minimo tale integrale.

Le equazioni differenziali a cui bisogna sottoporre le funzioni incognite sono esattamente le n di sopra, come si sa dalla teoria generale.

Dunque possiamo affermare che il problema generale degli isoperimetri si risolve rendendo massimo o minimo l'integrale J. Le m costanti λ si determinano colla condizione che gli m integrali $I_1 \ldots I_m$ devono avere gli assegnati valori.

È questo il risultato cui era già giunto Eulero, e la cui esattezza era stata per molto tempo considerata come qualche cosa di assiomatico; poi si vide la necessità di dimostrarla più rigorosamente.

Noi l'abbiamo dedotta come caso particolare dalla soluzione del problema di Lagrange la cui esattezza è dimostrata dal Mayer come a suo luogo abbiamo detto.

Una delle prime ricerche sull'esattezza della soluzione di Eulero per il problema degli isoperimetri si deve a Bertrand (*Liouville.* Vol. VII, pagina 55, 1842); indi si occuparono della quistione Weierstrass (*Lezioni del 1877*), Du Bois Reymond (*Math. Ann.* Vol. XV, pag. 310 e pag. 573) e Scheeffer (*Math. Ann.* Vol. XXV, pag. 583).

Il Du Bois Reymond nell'opera citata dà due dimostrazioni di cui la prima è l'applicazione di un' idea di Reiff (*Inaugural Diss. über den Einfluss der Capillarkräfte auf die Form der Oberfläche einer bewegten Flüssigkeit.* Tübingen, 1879, pag. 8). La seconda dimostrazione è riprodotta dal Jordan nel suo Corso d'analisi.

Sarà pregio del nostro lavoro riprodurre qualcuna di tali dimostrazioni.

§ 14. Dimostrazione di Du Bois Reymond della regola isoperimetrica.

Debba diventare massimo o minimo l'integrale

$$I = \int_{x'}^{x''} F\,d\,x$$

mentre $I_1 \ldots I_m$ dati dalla formola

$$I_k = \int_{x'}^{x''} F_k\,d\,x$$

debbano acquistare valori fissati.

Dovranno essere zero la variazioni di tutti questi integrali cioè dovrà aversi (supposto che per le varie funzioni incognite sieno fissati i valori ai limiti e quindi sieno zero le variazione in tali limiti)

$$\delta I = \int \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{d}{d\,x}\frac{\partial F}{\partial y'_1} \right) \delta y_1 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial F}{\partial y_n} - \frac{d}{d\,x}\frac{\partial F}{\partial y'_n} \right) \delta y_n \right] d\,x = 0$$

$$\delta I_k = \int \left[\left(\frac{\partial F_k}{\partial y_1} - \frac{d}{d\,x}\frac{\partial F_k}{\partial y'_1} \right) \delta y_1 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial F_k}{\partial y_n} - \frac{d}{d\,x}\frac{\partial F_k}{\partial y'_n} \right) \delta y_n \right] d\,x = 0$$

Le variazioni $\delta y_1 \ldots \delta y_n$ nel primo integrale non sono indipendenti perchè legate dalle m condizioni

$$\delta I_k = 0.$$

Poniamo

$$\delta y_1 = \delta_0 y_1 + \rho_1 \delta_1 y_1 + \ldots + \rho_m \delta_m y_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\delta y_n = \delta_0 y_n + \rho_1 \delta_1 y_n + \ldots + \rho_m \delta_m y_n$$

dove le ρ sono costanti e i simboli $\delta_0 \delta_1 \ldots \delta_m$ sono quelli di $m+1$ sistemi di variazioni delle funzioni y.

Qualunque sia il sistema di variazioni

$$\delta y_1 \ldots \delta y_n$$

assoggettate alle m condizioni $\delta I_k = 0$, si possono trovare le costanti ρ in modo che le precedenti relazioni risultino soddisfatte, e le variazioni $\delta_0 \delta_1 \ldots \delta_m$ sono a loro volta affatto arbitrarie; in altri termini si può far vedere che prendendo le variazioni $\delta_0 \delta_1 \ldots \delta_m$ affatto arbitrarie, si possono sempre determinare le costanti ρ in modo che le $\delta y_1 \ldots \delta y_n$ risultino legate dalle $\delta I_k = 0$. Basterà sostituire e si ha allora, riducendo, la relazione

$$\delta_0 I_k + \rho_1 \delta_1 I_k + \ldots + \rho_m \delta_m I_k = 0$$

che per $k = 1, 2, \ldots m$ dà un sistema di m equazioni lineari non omogenee nelle costanti λ. Le variazioni $\delta_1 \ldots \delta_m$ restano assoggettate alla sola condizione di non rendere zero il determinante

$$\begin{vmatrix} \delta_1 I_1 & \ldots & \delta_m I_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_1 I_m & \ldots & \delta_m I_m \end{vmatrix};$$

la variazione δ_0 resta invece completamente arbitraria.

Sostituendo i valori di $\delta y_1 \dots \delta y_n$ in δI, e poi per $\rho_1 \dots \rho_m$ i loro valori si ha lo stesso risultato che eliminando le ρ fra le equazioni

$$\delta I + \rho_1 \delta_1 I + \dots + \rho_m \delta_m I = 0$$

e le

$$\delta_0 I_k + \rho_1 \delta_1 I_k + \dots + \rho_m \delta_m I_k = 0$$

Si ha cioè per risultato

$$\delta_0 I + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \delta_0 I_1 + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda_0} \delta_0 I_m = 0$$

dove le λ sono i minori della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \delta_1 I & \dots & \delta_m I \\ \delta_1 I_1 & \dots & \delta_m I_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \delta_1 I_m & \dots & \delta_m I_m \end{matrix} \right\|$$

e λ_0 è il determinante ottenuto da questa matrice sopprimendo la prima linea.

Disponendo delle variazioni arbitrarie $\delta_1 \dots \delta_m$ si può fare che

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \dots \frac{\lambda_m}{\lambda_0}$$

abbiamo valori *arbitrari.*

Il risultato che otteniamo è dunque questo:

Per risolvere il problema bisogna eguagliare a zero la variazione

$$\delta_0 (I + \mu_1 I_1 + \ldots + \mu_m I_m)$$

dove δ_0 rappresenta un simbolo di variazione affatto arbitraria, cioè sono da reputarsi affatto arbitrari, e quindi fra loro indipendenti, le variazioni

$$\delta_0 y_1, \delta_0 y_2, \ldots \delta_0 y_n,$$

e le μ sono costanti arbitrarie le quali si determinano poi con condizioni qualunque; p. es., nel problema che ci occupa, colle condizioni che gli integrali I_k abbiano gli assegnati valori. Abbiamo così esattamente ritrovata la regola isoperimetrica.

§ 15. Sulla possibilità di annullare la prima variazione dell'integrale.

Nel § 12 abbiamo stabilito un criterio riguardante la possibilità di annullare la variazione prima dell'integrale, e ciò nel problema più gegenerale che è il problema di Lagrange, cui, come sappiamo, possono ridursi tutti gli altri nei quali si tratti di rendere massimo o minimo un *integrale definito*; abbiamo trovato che un certo determinante deve essere diverso da zero: nel caso diverso si ha numero di costanti in generale insufficienti a soddisfare tutte le condizioni del problema stesso. Ora vogliamo applicare il risultato generale ai principali casi speciali.

Supponiamo che si tratti del problema del massimo *assoluto*, e che vi sieno n funzioni incognite e che in F non compariscano che solo le prime derivate.

Allora il criterio per la possibilità dell'annullamento della prima variazione lo possiamo ricavare immediatamente da quello del § 12 ponendo m' e m'' eguali a zero.

Osservando che in tal caso F_1 è lo stesso di F, si ha che il determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial {y_1'}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'_1 \partial y'_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'_n \partial y'_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2_n} \end{vmatrix}$$

deve essere diverso da zero.

Questo determinante è l'Hessiano di F considerato come funzione di $y'_1 y'_2 \dots y'_n$; dunque *Se si tratti di un problema di massimo assoluto e la funzione integranda contiene fino alle derivate prime delle funzioni incognite, allora, perchè il problema sia in generale risolubile, è necessario che l'Hessiano di F, considerato come funzione delle derivate prime, sia diverso da zero.*

Se vi è una sola funzione incognita y questa condizione si muta semplicemente in quest'altra: *deve essere diversa da zero la derivata seconda di F rispetto ad y'.*

Supponiamo ora il caso più generale in cui si tratti ancora del massimo assoluto, ma in F compariscano le n funzioni incognite colle loro derivate sino all'ordine r.

Cercheremo di applicare il criterio generale sviluppato nel § 12. Riduciamo prima le formole in modo che non vi compariscono che le derivate prime e perciò introduciamo le nuove funzioni incognite

$$y_{1,1} = y'_1\,,\ y_{1,2} = y''_1\,, \ldots y_{1,r-1} = y_1^{(r-1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{n,1} = y'_n\,,\ y_{n,2} = y''_n\,, \ldots y_{n,r-1} = y_n^{(r-1)}.$$

La funzione F diventa funzione di

$$y_1 \ldots y_n\,,\ y_{11} \ldots y_{n,r-1},\ y'_{1,r-1} \ldots y'_{n,r-1}\,;$$

non vi compariranno cioè che le derivate prime delle *sole n ultime funzioni.*

Le equazioni differenziali che bisogna aggiungere ai dati del problema sono

$$y'_1 - y_{11} = 0, y'_{11} - y_{12} = 0, \ldots y'_{1,r-2} - y_{1,r-1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y'_n - y_{n,1} = 0, y'_{n,1} - y_{n,2} = 0, \ldots y'_{n,r-2} - y_{n,r-1} = 0$$

in numero di $n\,(r-1)$ che poniamo eguale a m'. Indichiamo con $\varphi_1\, \varphi_2 \ldots \varphi_{m'}$ i primi membri di queste equazioni differenziali e formiamo il determinante del § 12. Per la forma speciale di F e delle φ molti elementi del determinante riusciranno zero.

Intanto essendo

$$F_1 = F + \lambda_1\, \varphi_1 + \ldots + \lambda_{m'}\, \varphi_{m'}$$

e non contenendo le φ che, al massimo, *a primo grado* le derivate prime delle y, le derivate seconde di F_1 rispetto a tali derivate prime saranno le stesse delle derivate seconde di F. Di tali derivate seconde sono diverse da zero solo quelle della seguente matrice

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2_{1,r-1}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'_{1,r-1}\,\partial y'_{n,r-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'_{n,r-1}\,\partial y'_{1,r-1}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'_{n,r-1}\,\partial y'_{n,r-1}} \end{matrix} \right\|$$

compresa nella matrice totale del determinante.

In quanto alle derivate delle φ rispetto alle y' è chiaro che esse risultano o zero o 1.

Inoltre, poichè nelle φ non è mai compresa una

$$y'_{k,r-1} \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

così gli elementi compresi, con quelli della precedente matrice, nelle stesse linee, o colonne, riusciranno tutti zero. Siccome poi non esistono due delle φ contenenti la medesima derivata *prima*, così gli elementi che riescono eguali ad 1 sono disposti in modo che due di essi non sono mai sulla medesima orizzontale o verticale; e d'altra parte siccome nelle φ compariscono le derivate prime di tutte le funzioni, meno di quelle nelle quali il secondo indice è $r-1$, così questi valori 1, sono disposti uno e uno solo per linee e uno e uno solo per colonne, meno per quelle linee e colonne cui appartengono gli elementi della soprascritta matrice; tutti gli altri elementi sono zero.

Si vede così che in conclusione il determinante si riduce al prodotto di tanti numeri 1 per il determinante rappresentato dalla precedente matrice, la quale, quando vi si faccia

$$y'_{k,r-1} = y_k^{(r)}$$

si trasforma in

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_1^{(r)2}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_1^{(r)} \partial y_n^{(r)}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_n^{(r)} \partial y_1^{(r)}} & \cdots & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_n^{(r)} \partial y_n^{(r)}} \end{vmatrix}$$

cioè diventa l'Hessiano di F considerato come funzione delle derivate r^{me}.

A questo medesimo risultato si potrebbe giungere più direttamente, considerando il sistema di equazioni differenziali cui conduce la condizione dell'annullarsi della variazione prima dell'integrale, ed esprimendo, per mezzo della teoria dei sistemi di equazioni differenziali simultanee, la condizione perchè quel sistema possa integrarsi con $2\,n\,r$ costanti arbitrarie, quante cioè ne occorrono perchè possano arbitrariamente fissarsi i valori delle $y_1 \ldots y_n$, e delle loro $r-1$ prime derivate nei due limiti. Abbiamo dunque:

Perchè sia possibile annullare la variazione prima di un integrale definito quando la funzione integranda F contiene le derivate delle n funzioni incognite sino all'ordine r^{mo}, è necessario che sia diverso da zero l'Hessiano di F considerato come *funzione delle derivate* r^{me}: (LIPSCHITZ, *Crelle.* Vol. LXIX, pag. 28.)

Per il caso di una sola funzione, $n = 1$, e si ricava che *deve essere diverso da zero la derivata seconda di* F *rispetto alla derivata* r^{ma} *dell'unica funzione incognita*, come abbiamo già trovato direttamente al § 7. (JACOBI, *Crelle.* Vol. XVII, pag. 68.)

Passiamo ora finalmente a considerare il caso del problema degli isoperimetri.

Adoperiamo le stesse notazioni del § 13.

Ponendo

$$\varphi_1 = F_1 - y'_{n+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_m = F_m - y'_{n+m}$$

e

$$\Phi = F + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_m F_m$$

è facile riconoscere che il determinante di cui ci occupiamo diventa quello dato dal seguente schema:

$$
\begin{array}{r}
\\ \\ \\ \\ \\
m\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\
\\ \\ \\ \\
\end{array}
\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
 & & & & \overbrace{}^{m} & & & & \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1'^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'_1 \partial y'_n} & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial y'_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y'_1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'_n \partial y'_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2_n} & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial F_1}{\partial y'_n} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y'_n} \\
\hline
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & -1 \\
\hline
\frac{\partial F_1}{\partial y'_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y'_n} & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial F_m}{\partial y'_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y'_n} & 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0
\end{array}\right|
$$

il cui valore è evidentemente, a meno del segno, quello del determinante

$$
\left|\begin{array}{ccc}
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_1'^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'_1 \partial y'_n} \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'_n \partial y'_1} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2_n}
\end{array}\right|
$$

che è l'Hessiano di Φ considerato come funzione delle y'. Abbiamo dunque:

Perchè si possa annullare la variazione prima dell' integrale dato nel problema generale degli isoperimetri, è necessario che sia diverso da zero l' Hessiano di

$$\Phi = F + \sum_1^m \lambda_i F_i$$

dove le λ *sono delle costanti, e le* F *sono le diverse funzioni integrande dei dati integrali.*

§ 16. La variazione seconda di un integrale definito. Preliminari. Bibliografia del problema.

Quando si è resa nulla la variazione prima dell'integrale non si può senz'altro affermare che si è risoluto il problema del massimo o minimo, perchè l'annullarsi di tal variazione è condizione solo necessaria ma non sufficiente per l'esistenza del massimo o minimo.

Per chi non ignora i princìpi del calcolo differenziale e la teoria dei massimi e minimi delle funzioni di una o più variabili, la cosa non può sorprendere, perchè anche nella citata teoria si sa che occorre la considerazione della derivata seconda ovvero delle derivate di ordine superiore, secondo le circostanze, la quale considerazione occorre oltrechè per stabilire la effettiva esistenza del massimo o minimo, anche per stabilire un criterio onde potere *a priori* riconoscere se si tratti di un massimo o se invece si tratti di un minimo.

Nel calcolo delle variazioni occorrerà dunque passare alla considerazione di quella che si chiama la *variazione seconda.*

Se Φ è al solito una funzione di $x\, y\, y' \ldots$, e diamo alle variabili $y\, y' \ldots$ gli incrementi

$$\delta y,\ \delta y' \ldots,$$

l'incremento che subisce Φ è infinitesimo (ammesse al solito tutte le occorrenti condizioni di continuità, derivabilità, ecc.) di cui la parte di ordine più basso è la variazione prima; *in tutta la parte restante l'assieme di tutti i termini di ordine più basso forma la variazione seconda che si indicherà con* $\delta^2 \Phi$.

Per i principi del calcolo differenziale tale variazione seconda è allora

$$\delta^2 \Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\delta y^2 + 2\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial y'}\delta y\, \delta y' + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2}\delta y'^2 + \ldots\right)$$

se si suppone x invariabile.

È evidente che il $\delta^2 \Phi$ si otterrebbe da $\delta \Phi$ applicando su questa variazione prima, un'altra volta il processo per ottenere la variazione prima, nell'ipotesi di x invariabile, e quindi anche invariabili $\delta y\ \delta y' \ldots$ che sono funzioni di sola x.

Se la Φ deve essere massima o minima, il suo incremento infinitesimo deve essere di segno costante qualunque sieno le variazioni infinitesime

$$\delta y\ \delta y' \ldots,$$

quindi è necessario che l'ultima variazione di Φ la quale non sia zero sia una di ordine *pari*, altrimenti mutando i segni di δy, $\delta y' \ldots$ muta il segno dell'incremento di Φ. Inoltre, posto che la variazione seconda sia diversa da zero, è, per la medesima ragione, necessario che essa sia di segno costante, e propriamente che sia costantemente positiva se si deve avere un *minimo* e costantemente *negativa* per un massimo.

Consideriamo un integrale definito

$$I = \int_{x'}^{x''} F(x\, y\, y' \ldots)\, d\, x.$$

Sappiamo che nello studio del problema del massimo o minimo possiamo sempre limitarci a considerare prima il caso in cui i limiti $x'\, x''$ sieno fissi, e sieno assegnati i valori delle funzioni

$$y, y' \ldots$$

in tali limiti.

Supposto che sieno verificate le condizioni per le quali la variazione seconda di un integrale è eguale all'integrale della variazione seconda della funzione sotto il segno (condizioni che p. es. sono soddisfatte per le funzioni ordinarie. Vedi § 2) allora la variazione seconda di I è

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'} \delta y\, \delta y' + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \delta y'^2 + \ldots \right) d\, x.$$

La quantità sotto il segno integrale è una espressione di 2.° grado generale nelle δy, $\delta y'$, $\delta y''\ldots$, e se la F contiene non una, ma più funzioni incognite $y_1\, y_2 \ldots y_n$, la quantità sotto l'integrale sarà sempre un'espressione quadratica generale in

$$\begin{matrix} \delta y_1 & \delta y'_1 \ldots \\ \delta y_2 & \delta y'_2 \ldots \\ \ldots & \ldots \end{matrix}$$

sarà cioè del tipo

$$\Sigma\, c_{ijhk} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i^{(h)}\, \partial y_j^{(k)}}\, \delta y_i^{(h)}\, \delta y_j^{(k)}$$

dove il sommatorio si estende a tutte le combinazioni $i\,j\,h\,k$, e le c sono eguali o a 1 o a 2.

Siamo quindi condotti a studiare quando questa espressione è diversa da zero, e la condizione perchè essa sia di segno *costante* al mutare dei valori delle variazioni δy $\delta y'\ldots$ in tutti i modi compatibili colle condizioni del problema.

Le prime ricerche sulla variazione seconda furono fatte da Legendre. (*Mem. de l' Acad. des sciences*, 1786, pag. 7-37.) Alcune correzioni a questa Memoria furono fatte dallo stesso Autore nel volume seguente delle Memorie di Parigi, 1789, pag. 348. (Vedi le osservazioni fatte da Stäckel in fine del libro: *Ostwald's Klassiker der exacten Wiss.* Numero 47. *Abh. über Variationsrechnung.* 2.ter Theil. Leipzig. 1894.)

In relazione a tali errori di Legendre il Brunacci scrisse una Memoria: (*Sui criterii per distin-*

guere i massimi e minimi nelle espressioni integrali. Mem. dell'Istit. Nazionale Italiano. Vol. I, parte 2.ª. Bologna. 1806, p. 191).

Lagrange nel Cap. XII (seconda parte) della sua *Théorie des fonctions analyt.* (Opere. Vol. IX, pag. 296 e seg.) si occupò brevemente della stessa quistione, e riprodusse in fondo, sotto altra forma, le considerazioni di Legendre che egli non citò, limitandosi a citare solo il volume delle Memorie di Parigi del 1786, il che probabilmente dovette poi indurre in errore Jacobi quando riprendendo a trattare la stessa quistione, volle citare i suoi predecessori. (Vedi le stesse osservazioni di Stäckel poc'anzi citate.)

Il Lagrange aggiunse però un'osservazione assai importante sul cangiamento di segno di un integrale quando la funzione sotto il segno pur conservando il medesimo segno, diventa infinita in qualche punto. (Vedi *Opere.* Vol. IX, pag. 303.)

Le condizioni di Legendre e Lagrange furono più o meno esattamente riprodotte nei trattati di Dirksen e Ohm. (Dirksen, *Analyt. Darst. der Variationsrech., ecc.* Berlin, 1823; Ohm, *Die Lehre vom Grössten und Kieinsten.* Berlin, 1825.)

Con Jacobi (*Zur Theorie der Variationsrechnung und der Differential-Gleichungen.* Crelle. Vol. XVII, pag. 68 (1838); lo stesso lavoro fu tradotto in *Journ. de Liouville.* Vol. III (1838)) comincia una nuova êra per la teoria della seconda variazione.

Al lavoro di Jacobi si correlano una serie di numerosi lavori nei quali si sviluppano, in vari modi, punti speciali della Memoria di Jacobi, e da lui dati senza dimostrazione.

Tali sono i seguenti:

LEBESGUE, *Memoria sulla formola di Vandermonde e sua applicazione alla dimostrazione di un teorema di Jacobi.* Liouville. Vol. VI, pag. 17 (1841);

DELAUNAY, *Sulla distinzione fra massimi e minimi, ecc.* Liouville. Vol. VI, pag. 209;

BERTRAND, *Dimostrazione di un teorema di Jacobi.* Journal de l'Éc. Polyt. Cah. XXVIII, pagina 266 (1841);

MAINARDI, *Ricerche sul calcolo delle variazioni.* Annali di Tortolini. Vol. III, pagina 142 e 379 (1852);

BRIOSCHI, *Sul teorema di Jacobi e sui criteri, ecc.* Ann. di Tortolini. Vol. III, pag. 322 (1852);

EISENLOHR, *Unters. über Variationsrech. Dissert.* Mannheim, 1853;

SPITZER, *Sui criteri per distinguere i massimi dai minimi, ecc.* Wien, Sitzungsberichte. Vol. XII, pag. 1014 (1854); Vol. XIV, pag. 41 (1854);

HEINE, *Bemerkungen zu Jacobi's Abh., ecc.* Crelle. Vol. LIV, pag. 68 (1857);

HESSE, *Ueber die Kriterien des Max. und Min. der einf. Int.* Crelle. Vol. LIV, pag. 227;

MINDING, *Ueber die Transformationen welche in der Variationsrechnung, ecc.* Crelle. Vol. LV, pag. 300 (1857);

HORNER, *On Jacobi's reduction, ecc.* Quart. Journ. XIV, pag. 218 (1876).

Il caso in cui vi sieno più funzioni incognite e fra esse esistano delle relazioni differenziali fu cominciato a trattare da Clebsch:

CLEBSCH, *Ueber die reduction der 2.ten Varia-*

tion auf ihre einfachste Form. Crelle. Vol. LV, pag. 254 (1858);

CLEBSCH, *Ueber diejenigen Probleme der Variationsrechnung. ecc.* Crelle. Vol. LV, pag. 335.

Di un terzo lavoro di Clebsch relativo al medesimo soggetto ma per gli integrali multipli parleremo in altro capitolo.

LIPSCHITZ si occupò con metodo diverso dello stesso problema, e delle stesse cosiddette trasformazioni della variazione seconda:

LIPSCHITZ, *Beiträge zur Theorie der Variation der einfachen Integrale.* Crelle. Vol. LXV, pagina 26 (1864),

e il suo metodo fu esteso poi da Mayer al caso dei massimi e minimi relativi:

MAYER, *Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums der einfachen Integrale.* Crelle. Volume LXIX, pag. 238 (1868).

Altre ricerche sullo stesso argomento sono le seguenti:

STERN, *Ueber die Bestimmung der Constanten in der Variationsrechnung.* Gött. Abhand. XIII (1868);

LUNDSTRÖM, *Distinction des max., ecc.* Nova acta soc. Upsaliensis. Serie III. Vol. VII (1869).

(In questo lavoro l'Autore tratta di uno speciale problema isoperimetrico.)

ERDMANN, *Zeitschr. f. Math.* Vol. XXIII, pagina 362;

KREY, *Die Kriterien des Max., ecc.* V. Forsch. Vol. VII, pag. 237 (1875);

MAYER, *Die Kriterien des Maximums, ecc.* Math. Ann. Vol. XIII, pag. 53 (1878).

(In questo lavoro l'Autore tratta in ispecial modo del caso isoperimetrico, e dimostra una certa legge di reciprocità di cui parleremo in seguito.)

Mayer, *Leipz. Berichte*, pag. 99 (1884).

(In questo lavoro l'Autore considera il caso in cui i limiti sono anche *variabili*.)

Scheeffer, *Die Maxima und Minima der einfachen Integrale zwischen festen Grenzen.* Math. Ann. Vol. XXV, pag. 522 e 594 (1885);

Culverwell, *Lond. Phil. Trans.* Volume CLXXVIII (*A*), pag. 95;

Winkler, *Wiener Bericht.* Vol. XCVII, pagina 1065;

von Escherich, *Zur Theorie der 2.ten Variation.* Wien. Berichte. Vol. XCVII, Parte II, pagina 1416; Vol. XCIX, pag. 1463;

Ermakoff, *Kiew Univ.* N. 9 (1891) (in russo).

Un lavoro che si riferisce alle recenti ricerche di Weierstrass, esposte da lui nelle sue lezioni, è:

Zermelo, *Untersuchungen zur Variationsrechnung.* Dissert. Berlin, 1894.

I seguenti lavori di Zmurko relativi al soggetto di questo capitolo ma per il caso generale degli integrali multipli, sono erronei:

Zmurko, *Ein Beitrag zur Variat.*, *ecc.* Krak. Denksch., II (1876) (in polacco);

Zmurko, *Theorie der relative Maxima und Minima bestimmter Integrale; Wiener Denksch.* Volume XXXVI, pag. 235 (1876).

Per essi si può vedere:

Mertens, *Ueber die Osculationsfunction des Hr. Zmurko.* Krak. Denksch., II;

Mertens, *Schlömilch Zeitsch.* Volume XXI, pagina 142 e anche le osservazioni di Mayer nei *Forschrift.* Vol. VIII, pag. 220 e seg., e la risposta di ZMURKO, *Krak. Denksch.* Vol. III (1877).

Sulla considerazione delle variazioni di ordine superiore al secondo, quando anche la seconda e la terza sono zero, ci sono pochissimi lavori. Si può vedere:

ERDMANN, *Schlömilch Zeits.* Vol. XXII. pagina 324 (1876) e Vol. XXVI, pag. 73 (1881).

ZMURKO, *Wiener Denksch.* Vol. XXXVII, pagina 43 (1876).

Sono però lavori che lasciano molto a desiderare.

Una formola sulle derivate di ordine superiore adoperata da Erdmann nel suo secondo lavoro (pag. 76), deve attribuirsi a E. Fergola. (Vedi *Rend. Acc.* Napoli. Vol. XXI, pag. 161 (1882).)

Osservazioni critiche di capitale importanza sul vero significato da attribuire ai risultati ordinarii del calcolo delle variazioni, relativamente alla esistenza o meno dei massimi o minimi si devono a Lodovico Scheeffer troppo presto rapito alla scienza e agli studi critici. (*Ueber die Bedeutung der Begriffe Maximum und Minimum in der Variationsrech.* Math. Ann. Vol. XXVI, pag. 197; *Leipz. Berich.* 1885, pag. 92.)

§ 17. Discussione generale del problema della trasformazione della seconda variazione.

La variazione seconda dell' integrale ha, come si è visto nel paragrafo precedente, la forma

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} \Omega\,(\delta y_1\, \delta y_2 \ldots \delta y'_1\, \delta y'_2 \ldots \delta y''_1 \ldots)\, d\,x$$

dove Ω è una *forma quadratica* nelle quantità

$$\delta y_1\ \delta y_2 \ldots \delta y'_1 \ldots$$

le quali sono funzioni arbitrarie di x (assoggettato alle solite condizioni di continuità, derivabilità ecc.) Se questi argomenti (che per un momento sarà utile indicare con $z_1\, z_2 \ldots$) fossero tutti fra loro indipendenti (il che non è perchè p. es. $\delta y'_1$ non è indipendente da δy_1 per quanto δy_1 sia arbitrario) allora sarebbe facile la ricerca del caso in cui $\delta^2 I$ ha segno costante.

Basterebbe perciò che avesse segno costante fra i limiti d' integrazione la forma quadratica Ω, qualunque sieno le $z_1\, z_2 \ldots$ e qualunque sia il punto x fra i limiti d' integrazione.

Giacchè in primo luogo è chiaro, che se Ω ha segno costante per ogni x fra x' e x'' e *non diventa mai infinita fra questi limiti*, allora l' integrale $\delta^2 I$ ha anche segno costante e propriamente il medesimo segno se $x' < x''$.

La condizione che Ω non debba diventare infinita in alcun punto fu aggiunta da Lagrange nella sua esposizione della ricerca di Legendre. (Vedi *Opere*. Vol. IX, pag. 303.)

L'esempio da lui esposto è il seguente:

La funzione

$$\frac{1}{(1-x)^2}$$

è sempre positivo per x reale.

Il suo integrale è

$$\frac{x}{1-x}$$

che definito fra

$$x' = \frac{1}{2}, \; x'' = 2$$

dà -3 (quantità negativa); ciò perchè la funzione

$$\frac{1}{(1-x)^2}$$

diventa infinita per $x = 1$ che è un valore compreso fra i limiti d'integrazione.

Supponiamo ora che l'integrale debba avere segno costante p. es. positivo.

Allora se Ω in un punto p. es. x_0 fra x' e x'' e per un certo sistema di valori delle $\delta y_1 \, \delta y_2 \ldots$ ha segno negativo potrà sempre trovarsi, per effetto della supposta continuità sua, tutto un intervallo attorno x_0 in cui Ω è negativa; gli estremi di tale intervallo sieno x_1 e x_2, e sieno

$$z_1 = \omega_1 (x), \ z_2 = \omega_2 (x), \ldots$$

quelle funzioni di x per le quali Ω è negativa nell'intervallo $x_1 x_2$. Costruiamo una qualunque funzione continua di x, $\lambda (x)$ la quale sia zero negli intervalli $x' x_1$, e $x'' x_2$, e sia positiva nell'intervallo $x_1 x_2$, e poniamo

$$z_1 = \lambda (x) \omega_1 (x), \qquad z_2 = \lambda (x) \omega_2 (x), \ldots$$

Per tali valori evidentemente Ω verrà ad avere per ogni x, o valore zero o valore negativo, e quindi il suo integrale sarà negativo, contro la ipotesi. Dunque dobbiamo conchiudere che perchè $\delta^2 I$ sia costantemente positivo è *necessario* che lo sia Ω.

È naturale che non possiamo più fare lo stesso ragionamento quando $z_1 z_2 \ldots$ sono fra loro dipendenti perchè allora non possiamo più arbitrariamente disporre di esse, cosa che occorre per il ragionamento che abbiamo fatto.

Qual'è l'idea che si presenta spontanea?

Supponiamo che delle $z_1 z_2 \ldots n$ possano considerarsi fra loro indipendenti, e le altre dipendenti dalle prime n.

Nel caso p. es. che vi sieno n funzioni incognite e le derivate di esse, $\delta y_1 \ldots \delta y_n$ sono indipendenti, e $\delta y'_1 \, \delta y'_2 \ldots \delta y''_1 \, \delta y''_2 \ldots$ sono dipendenti dalle prime.

Se noi possiamo trasformare la forma quadratica Ω in un'altra espressione la quale, a meno di parti integrabili, sia a sua volta una forma quadratica in sole n nuove variabili fra loro indipendenti, allora alla Ω così trasformata possiamo applicare il precedente criterio e risolvere completamente il problema.

È in ciò che consiste il problema della trasformazione della variazione seconda.

Trasformare la forma Ω *quadratica nelle*

$$\delta y_1 \ldots \delta y_n, \; \delta y'_1 \ldots \delta y'_n, \; \delta y''_1 \ldots$$

nella somma della derivata di una forma quadratica Ω_2 *che si annulli per* $x = x'$ *e* $x = x''$, *e di un'altra forma quadratica* Ω_1 *non più nelle variabili primitive, ma in* n *altre variabili che chiameremo per simmetria* $\delta Y_1 \ldots \delta Y_n$, *che sono formate linearmente mediante le prime, e che sono fra loro assolutamente indipendenti. La* Ω_1 *non deve diventare mai infinita fra i limiti d'integrazione.*

In formola si avrà allora

$$\Omega = \frac{d}{d\,x}\,\Omega_2 + \Omega_1$$

e integrando fra i limiti $x'\,x''$, e ricordando la voluta proprietà di Ω_2, si ha immediatamente

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} \Omega\, d\,x = \int_{x'}^{x''} \Omega_1\, d\,x$$

e allora perchè $\delta^2 I$ abbia segno costante, è necessario e basta che lo abbia Ω_1.

Se Ω_2 non diventasse zero nei due limiti, allora si avrebbe un termine dippiù fuori il segno integrale e non potrebbe più facilmente ricavarsi la condizione purchè $\delta^2 I$ abbia segno costante.

Supposto che Ω contenga

$$\delta y_i\,,\ \delta y'_i\,,\ldots \delta y_i^{(r)} \qquad (i=1,2,\ldots n)$$

la Ω_2 non potrà certamente contenere $\delta y_i^{(r)}$, altrimenti derivando rispetto ad x, la derivata conterrebbe $\delta y_i^{(r+1)}$, e dalla formola precedente risulta che questa quantità dovrebbe essere contenuta in Ω.

Ora essendo assegnati i valori delle funzioni incognite e delle loro prime $r-1$ derivate, ai limiti (in tutto $2rn$ valori), tutte le variazioni

$$\delta y_i\,,\ \delta y'_i \ldots \delta y_i^{(r-1)}$$

sono appunto eguali a zero, e quindi $\Omega_2=0$ ai limiti.

§ 18. Prime ricerche di Legendre e Lagrange.

Consideriamo il caso di $n=1$, cioè che vi sia una sola funzione incognita y.

La funzione F sotto il segno integrale contenga solo x, y, y'.

Allora la seconda variazione è

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} [A\,\delta y^2 + 2\,B\,\delta y\,\delta y' + C\,\delta y'^2]\,dx$$

dove A, B, C sono le seconde derivate di F rispetto ad y e y'.

Per i princìpi generali sviluppati nel paragrafo precedente dobbiamo trasformare la espressione Ω sotto il segno in modo che risulti del tipo

$$\frac{d}{dx}\Omega_2 + \Omega_1$$

dove Ω_2 sia una forma quadratica nella sola δy cioè sia del tipo $\alpha\,\delta y^2$, e Ω_1 sia una forma quadratica in *una variabile sola* funzione lineare omogenea di δy e $\delta y'$, cioè in altri termini sia, a meno di un fattore, il quadrato di una funzione lineare omogenea di δy, $\delta y'$.

Per la determinazione della funzione α di x si giunge ad un'equazione differenziale.

Ponendo

$$\Omega_2 = \alpha\,\delta y^2$$

$$\frac{d}{dx}\Omega_2 = \frac{d\alpha}{dx}\delta y^2 + 2\alpha\,\delta y\,\delta y'$$

si ha la relazione

$$A\,\delta y^2 + 2B\,\delta y\,\delta y' + C\,\delta y'^2 - \frac{d\alpha}{dx}\delta y^2 - 2\alpha\,\delta y\,\delta y' = \Omega_1$$

$$\left(A - \frac{d\alpha}{dx}\right)\delta y^2 + 2(B-\alpha)\,\delta y\,\delta y' + C\,\delta y'^2 = \Omega_1$$

e perchè Ω_1 sia il quadrato perfetto di una forma lineare in δy, $\delta y'$ occorre e basta che

$$C\left(A - \frac{d\alpha}{dx}\right) - (B-\alpha)^2 = 0$$

equazione differenziale che serve per determinare la funzione α.

Supposta verificata questa condizione, Ω_1 potrà porsi sotto la forma

$$C\left(\delta y' + \frac{B-\alpha}{C}\delta y\right)^2$$

(supposto che C sia diverso da zero).

Se α non è reale non potrà però dirsi che questa espressione ha segno costante, e propriamente lo stesso segno di

$$C = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2};$$

e inoltre se α diventa infinito in qualche punto compreso nell'intervallo d'integrazione, non potrà più dirsi che l'integrale di tale espressione ha segno costante e cioè lo stesso segno di C Ciò per le osservazioni fatte nel paragrafo precedente.

Ricaviamo dunque che perchè sia risolubile il problema nella maniera indicata è necessario che la funzione α ricavata dalla precedente equazione differenziale sia sempre *finita e reale.* Il Legendre cercò di dimostrare che è sempre possibile trovare α reale (*Mem. de Paris.* 1789, pag. 348); ma le sue dimostrazioni sono inesatte; del resto il teorema è vero, come si sa dalla teoria delle equazioni differenziali.

Un procedimento analogo potrebbe tenersi per il caso in cui in F comparisca anche la y''. Allora si hanno tre equazioni differenziali di 1.° ordine per determinare tre funzioni incognite $\alpha, \beta,$

γ, che sono i tre coefficienti della forma quadratica Ω_2 che in questo caso sarà del tipo:

$$\Omega_2 = \alpha\,\delta y^2 + \beta\,\delta y\,\delta y' + \gamma\,\delta y'^2.$$

Derivando rispetto ad x, e sottraendo da Ω e esprimendo la condizione perchè si abbia un quadrato perfetto, si hanno le tre indicate equazioni differenziali.

Esistono dunque le funzioni α, β... reali, ma non basta conoscere la loro esistenza; occorre conoscerle per poter decidere se Ω_2 diventa infinita in qualche punto del cammino d'integrazione, nel qual caso, come si sa, non sarebbe più applicabile il criterio per il massimo e minimo.

Passiamo ora ad esaminare qual'è il progresso fatto fare da Jacobi a questa teoria.

§ 19. Teoremi di Jacobi.

L'osservazione fondamentale fatta da Jacobi consiste in ciò che l'integrale generale dell'equazione differenziale o gli integrali delle equazioni differenziali che servono a determinare le funzioni ausiliarie (α, β, ... del paragrafo precedente) possono determinarsi immediatamente conoscendo l'integrale generale dell'equazione differenziale che determina la funzione incognita y.

I teoremi che egli enunciò senza dimostrare per giungere a questo risultato possono enunciarsi sotto la seguente forma: (Vedi per es. Jellett, *Die Grundlehren der Variationsrechnung.*

Braunschweig, 1860, pag. 92 e seg.; MOIGNO-LINDELÖFF, *Calcul des variations.* Paris, 1861, capitolo VIII, ecc.)

Teorema 1.° — *Poniamo al solito la variazione prima dell' integrale definito sotto la forma*

$$\delta I = \int_{x'}^{x''} \left(M - \frac{d M'}{d x} + \frac{d^2 M''}{d x^2} - \ldots \right) \delta y \, d x =$$

$$= \int_{x'}^{x''} \mu \, \delta y \, d x$$

dove

$$M = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad M' = \frac{\partial F}{\partial y'}, \ldots$$

La variazione di μ *può porsi sotto la forma*

$$\delta \mu = A \, \delta y - \frac{d}{d x} (A_1 \, \delta y') + \frac{d^2}{d x^2} (A_2 \, \delta y'') - \ldots$$

dove $A \, A' \, A'' \ldots$ *sono determinate funzioni di* x.

Per la dimostrazione di questo teorema invece di adoperare un metodo diretto (Vedi p. es. il trattato di Jellett citato) adoperemo il seguente semplice metodo di Heine. (*Crelle.* Vol. LIV, pagina 70.)

Indichiamo con δ e δ_1 due diversi simboli di variazione e formiamo la doppia variazione di I; sarà

$$\delta \, \delta_1 I = \sum_{i,j} \int_{x'}^{x''} \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(i)} \partial y^{(j)}} (\delta y^{(i)} \delta_1 y^{(j)} + \qquad (1)$$

$$+ \delta y^{(j)} \delta_1 y^{(i)}) \, d x$$

che dovrà essere eguale a

$$\delta \int_{x'}^{x''} \mu \, \delta_1 y \, d x = \int_{x'}^{x''} \delta \mu \, \delta_1 y \, d x. \qquad (2)$$

Intanto con successive trasformazioni per parti possiamo trasformare (1) nel seguente modo:

$$\int_{x'}^{x''} (A \, \delta y \, \delta_1 y - A_1 \delta y' \, \delta_1 y' + A_2 \delta y'' \, \delta_1 y'' - \ldots) \, dx. \quad (3)$$

In effetti i termini di (1) nei quali $i = j$ sono già di questa forma.

Se poi $j = i + 1$, il termine:

$$\int_{x'}^{x''} \alpha \, [\delta \, y^{(i)} \, \delta_1 \, y^{(i+1)} + \delta \, y^{(i+1)} \, \delta_1 \, y^{(i)}] \, d \, x$$

a meno di una parte integrata, è eguale a

$$- \int_{x'}^{x''} \frac{d \, \alpha}{d \, x} \, \delta \, y^{(i)} \, \delta_1 \, y^{(i)} \, d \, x$$

perchè, integrando per parti quella espressione, si ha esattamente come parte non integrata la espressione di sopra, e in quanto alla parte integrata essa è zero, perchè nei due limiti $x' \, x''$ sono zero tutte le variazioni di y e delle prime sue $r - 1$ derivate (se in F le derivate compariscono sino all'ordine r).

Se infine j è diverso da i e da $i + 1$, integrando per parti il termine

$$\int_{x'}^{x''} \beta \, [\delta \, y^{(i)} \, \delta_1 \, y^{(j)} + \delta \, y^{(j)} \, \delta_1 \, y^{(i)}] \, d \, x$$

a meno della parte integrata che al solito è zero, si hanno i due termini

$$\int_{x'}^{x''} \beta \left[\delta\, y^{(i+1)}\, \delta_1\, y^{(j-1)} + \delta\, y^{(j-1)}\, \delta_1\, y^{(i+1)}\right] d\, x,$$

e

$$\int_{x'}^{x''} \frac{d\, \beta}{d\, x} \left[\delta\, y^{(i)}\, \delta_1\, y^{(j-1)} + \delta\, y^{(j-1)}\, \delta_1\, y^{(i)}\right] d\, x$$

e quindi, applicando successivamente lo stesso procedimento, o ci ridurremo al caso in cui i due indici sono eguali, ovvero a quello in cui essi differiscono per un'unità, e anche quest'ultimo caso si riduce poi al caso dei due indici eguali. Resta dunque provato che la (1) è trasformabile in (3).

Consideriamo ora il termine

$$\int_{x'}^{x''} A_1\, \delta\, y'\, \delta_1\, y'\, d\, x.$$

Con integrazioni per parti, questo termine si riduce (a meno di una parte integrata che al solito è zero) a

$$\int_{x'}^{x''} \frac{d\,(A_1\, \delta\, y')}{d\, x}\, \delta_1\, y\, d\, x.$$

Così procedendo per gli altri termini, è evidente che la (3) potrà subito trasformarsi a sua volta in

$$\int_{x'}^{x''} \left[A\, \delta\, y - \frac{d\,(A_1\, \delta\, y')}{d\, x} + \frac{d^2\,(A_2\, \delta\, y'')}{d\, x^2} - \ldots\right] \delta_1\, y\, d\, x.$$

Dal paragone di (4) con (2) risulta subito la proposta espressione per $\delta \mu$.

La espressione di $\delta \mu$ è il primo membro di una equazione differenziale lineare rispetto alla funzione δy di x. Sviluppando infatti le derivate rispetto ad x, si vede immediatamente che si ha un'espressione lineare in δy e nelle sue derivate

$$\delta y' \; \delta y'' \ldots$$

È utile aggiungere che

$$A_n = \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}}$$

perchè $(-1)^n A_n$ e il coefficiente di $\delta y^{(2n)}$ nello sviluppo di

$$\delta \mu = A \, \delta y - \frac{d (A_1 \, \delta y')}{d x} + \ldots$$

e

$$(-1)^n \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}}$$

è il coefficiente di $\delta y^{(2n)}$ nello sviluppo di $\delta \mu$ calcolato direttamente dall'espressione

$$\mu = M - \frac{d M'}{d x} + \frac{d^2 M''}{d x^2} - \ldots$$

Teorema 2.° — *L'equazione differenziale*

$$\delta \mu = 0,$$

lineare in δy e nelle sue derivate, è identicamente soddisfatta da

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial c}$$

dove c è una qualunque delle costanti d'integrazione che compariscono nell'espressione generale dell'integrale y ricavato dall'equazione differenziale $\mu = 0$.

Infatti

$$\mu = M - \frac{d M'}{d x} + \frac{d^2 M''}{d x^2} - \ldots$$

Calcolando direttamente $\delta \mu$ si ha

$$\delta \mu = \left(\frac{\partial M}{\partial y} \delta y + \frac{\partial M}{\partial y'} \delta y' + \ldots\right) -$$

$$- \frac{d}{d x}\left(\frac{\partial M'}{\partial y} \delta y + \frac{\partial M'}{\partial y'} \delta y' + \ldots\right) + \ldots$$

Invece, supposto sostituito in μ per y e per le sue derivate il valore trovato da $\mu = 0$, e derivando allora il primo membro di questa equazione rispetto a c, e eguagliando a zero (perchè $\mu = 0$ è identicamente soddisfatta, e quindi μ è zero per qualunque c) si ha

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial M}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial c} + \ldots\right) -$$

$$- \frac{d}{d x}\left(\frac{\partial M'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial M'}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial c} + \ldots\right) + \ldots = 0$$

ed essendo

$$\frac{\partial y'}{\partial c} = \frac{d}{dx}\frac{\partial y}{\partial c}, \text{ ecc.}$$

si vede che il primo membro di questa relazione è esattamente quello che si ottiene da $\delta \mu$ sostituendo $\frac{\partial y}{\partial c}$ in luogo di δy. Dunque con questa sostituzione $\delta \mu$ è identicamente zero, cioè l'equazione differenziale lineare $\delta \mu = 0$ è soddisfatta. Per questa semplice dimostrazione (vedi HESSE, *Crelle.* Vol. LIV, pag. 251).

Supposto che nella funzione F sotto il segno integrale le derivate della funzione incognita compariscano sino all'ordine r, la $\mu = 0$ sarà un'equazione differenziale di ordine $2r$, e anche $\delta \mu = 0$ conterrà le derivate di δy sino all'ordine $2r$.

Allora coll'integrazione si avrà la y con $2r$ costanti arbitrarie $c_1 c_2 \dots c_{2r}$, e

$$\frac{\partial y}{\partial c_1} \; \frac{\partial y}{\partial c_2} \dots \frac{\partial y}{\partial c_{2r}}$$

saranno $2r$ integrali *particolari* dell'equazione

$$\delta \mu = 0.$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali lineari, si sa allora che l'integrale *generale* sarà una combinazione lineare a coefficienti costanti di tali $2r$ integrali particolari, cioè l'equazione $\delta \mu = 0$ è soddisfatta da

$$\delta y = C_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + \ldots + C_{2r} \frac{\partial y}{\partial c_{2r}}$$

dove $C_1 \ldots C_{2r}$ sono costanti arbitrarie.

Però perchè una tale espressione possa dirsi l'integrale *generale* è necessario che il determinante (Wronskiano)

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial c_1} & \ldots & \frac{\partial y}{\partial c_{2r}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial y^{(2r-1)}}{\partial c_1} & \ldots & \frac{\partial y^{(2r-1)}}{\partial c_{2r}} \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero. (Vedi *Calcolo integrale*, pagina 267.)

Ora ciò si verifica effettivamente, perchè

$$y = f(x, c_1 \ldots c_{2r})$$

è, per ipotesi, l'integrale *generale* di $\mu = 0$ di ordine $2r$ e quindi per la teoria degli integrali *generali* delle equazioni differenziali, le relazioni

$$\begin{array}{lll} y & -f & (x, c_1 \ldots c_{2r}) = 0 \\ y' & -f' & (x, c_1 \ldots c_{2r}) = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(2r-1)} & -f^{(2r-1)} & (x, c_1 \ldots c_{2r}) = 0 \end{array}$$

devono potersi risolvere rispetto alle $2r$ costanti; per il che occorre che esse sieno indipendenti, e perciò l'Jacobiano delle funzioni rappresentate dai loro primi membri rispetto alle variabili

$$c_1\, c_2 \ldots c_{2r}$$

sia diverso da zero (Vedi *Calcolo differenziale*, pag. 214); ora tale Jacobiano è esattamente il determinante soprascritto.

Per passare ora alla dimostrazione del 3.° teorema ausiliario di Jacobi, occorre premettere alcuni altri termini pei quali seguiremo l'esposizione che ne fece Hesse. (*Crelle.* Vol. LIV, pag. 230 e seg.)

§ 20. Teoremi di Hesse sulle espressioni differenziali.

Sia z una funzione di x, e $a_0\, a_1 \ldots$ date funzioni della stessa variabile. Consideriamo la seguente espressione differenziale omogenea

$$\varphi = a_0\, z + a_1\, z' + a_2\, z'' + \ldots + a_n\, z^n .$$

Si può vedere che una tale espressione può sempre porsi sotto la seguente forma

$$\varphi = A_0\, z - \frac{d\,(A_1\, z)}{d\,x} + \frac{d^2\,(A_2\, z)}{d\,x^2} - \ldots + \\ + (-1)^n \frac{d^n\,(A_n\, z)}{d\,x^n} .$$

In effetti sviluppando le derivate contenute in quest'ultima espressione e paragonando i coefficienti delle medesime derivate di z, si hanno le relazioni

$$
\begin{aligned}
a_0 &= A_0 - A_1' + A_2'' - A_3''' + \ldots = \Sigma (-1)^s A_s^{(s)} \\
a_1 &= \quad - A_1 + \binom{2}{1} A_2' - \binom{3}{1} A_3'' + \ldots = \Sigma (-1)^s \binom{s}{1} A_s^{(s} \\
a_2 &= \quad + A_2 - \binom{3}{2} A_3' + \ldots = \Sigma (-1)^s \binom{s}{2} A_s^{(s} \\
a_3 &= \quad - A_3 + \ldots = \Sigma (-1)^s \binom{s}{3} A_s^{(s}
\end{aligned}
$$

. . . .

dalle quali con una facile inversione si possono ricavare le formole inverse che sono della medesima forma di esse.

Giacchè moltiplicando la r^{ma} di esse per $(-1)^r$, la prima derivata della $(r+1)^{ma}$ per

$$(-1)^r \binom{r+1}{r};$$

la seconda derivata della $(r+2)^{ma}$ per

$$(-1)^r \binom{r+2}{r}$$

e così di seguito, e sommando si ha

$$(-1)^r \left\{ a^r - \binom{r+1}{r} a'_{r+1} + \binom{r+2}{r} a''_{r+2} - \ldots \right\} =$$

$$= A_r - \left(\binom{r+1}{r} - \binom{r+1}{r} \right) A'_{r+1} +$$

$$+\binom{r+2}{r} - \left\{\binom{r+2}{r+1}\binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r}\right\} A''_{r+2} -$$

$$-\ldots \pm \left\{\binom{r+k}{r} - \binom{r+k}{r+1}\binom{r+1}{r} + \right.$$

$$\left. + \binom{r+k}{r+2}\binom{r+2}{r} - \ldots\right\} A^{(k)}_{r+k} \mp \ldots$$

Ora

$$\binom{r+k}{r} - \binom{r+k}{r+1}\binom{r+1}{r} + \binom{r+k}{r+2}\binom{r+2}{r} - \ldots =$$

$$= \frac{(r+k)(r+k-1)\ldots(k+1)}{r!}\left(1 - \binom{k}{1} + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + \ldots\right)$$

che è evidentemente zero perchè il secondo fattore è lo sviluppo di $(1-1)^k$. Dunque possiamo dire che

$$a_r - \binom{r+1}{r} a'_{r+1} + \binom{r+2}{r} a''_{r+2} - \ldots = (-1)^r A_r$$

formola la quale fa appunto vedere *che le A si esprimono per mezzo delle a colle medesime formole colle quali le a si esprimono per le A.*

Conseguenza importante di ciò è che *se si forma l'altra espressione differenziale*

$$\Phi = A_0 z + A_1 z' + A_2 z'' + \ldots + A_n z^{(n)},$$

questa sarà eguale a

$$\Phi = a_0 z - \frac{d(a_1 z)}{dx} + \frac{d^2(a_2 z)}{dx^2} - \ldots (-1)^n \frac{d^n(a_n z)}{dx^n}.$$

La forma Φ la chiameremo la *coniugata* di φ.

È chiaro che se di Φ si forma la coniugata si deve ricadere nella forma φ; cioè la *forma coniugata della coniugata di una data è eguale alla data.*

È evidente ancora che *la somma o la differenza di due forme date ha per coniugata la somma o la differenza delle due forme coniugate alle date.*

Per il nostro scopo sono di particolare importanza quelle forme che hanno per coniugate se stesse.

Si può far vedere che *una forma di ordine dispari, non può avere per coniugata sè stessa.*

In effetti se n è dispari le a non possono essere eguali alle A, perchè dalla relazione

$$a_n = (-1)^n A_n$$

si ricaverebbe

$$a_n = -a_n$$

cioè $a_n = 0$ contro l'ipotesi.

La forma di ordine $2m$

$$\frac{d_m (b\, z^{(m)})}{d\, x^m}$$

ha per coniugata sè stessa.

Infatti la forma data, sviluppata, è

$$b^{(m)} z^{(m)} + \binom{m}{1} b^{(m-1)} z^{(m+1)} + \binom{m}{2} b^{(m-2)} z^{(m+2)} + \ldots$$

Intanto dalle relazioni identiche

$$(b^{(m)} z) = b^{(m)} z$$

$$\frac{d}{dx}\left(b^{(m-1)}z\right) = b^{(m)}z + b^{(m-1)}z'$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(b^{(m-2)}z\right) = b^{m}\ z + \binom{2}{1}b^{(m-1)}z' + b^{m-2}z''$$

. . . .

moltiplicando la prima per 1, la seconda per $-\binom{m}{1}$, la terza per $+\binom{m}{2}$, ecc. e sommando, e tenendo conto delle relazioni binomiali

$$\begin{aligned}
1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \dots \qquad & = 0 \\
-1 \quad + \binom{m}{2}\binom{2}{1} - \binom{m}{3}\binom{3}{1} + \dots & = 0 \\
+ \quad 1 - \qquad \binom{m}{3}\binom{4}{2} + \dots & = 0
\end{aligned}$$

. . . .

si ha infine

$$b\,z^{(m)} = (-1)^m\left[b^{(m)}z - \frac{d}{dx}\left(b^{(m-1)}z\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{d^2}{dx^2}\left(b^{(m-2)}z\right) - \dots\right]$$

e derivando primo e secondo membro m volte si ha

$$\frac{d^m\left(b\,z^{(m)}\right)}{dx^m} = (-1)^m\left[\frac{d^m\left(b^{(m)}z\right)}{dx^m} - \frac{d^{m+1}\left(b^{(m-1)}z\right)}{dx^{m+1}} + \dots\right]$$

di cui il primo membro è a sua volta la forma data. Questa formola mostra che i coefficienti A sono rispettivamente eguali alle a, e quindi la forma data ha per coniugata sè stessa.

Come corollario di questo teorema ricaviamo *che ogni espressione del tipo*

$$b_0 z - \frac{d(b_1 z')}{dx} + \frac{d^2(b_2 z'')}{dx^2} - \dots$$

ha per coniugata sè stessa, perchè tale proprietà l'hanno i suoi termini separatamente.

Dimostriamo ora il reciproco di questo teorema; cioè *ogni forma φ di ordine $2m$, che ha per coniugata sè stessa, è esprimibile colla forma*

$$\Psi = b_0 z - \frac{d(b_1 z')}{dx} + \frac{d^2(b_2 z'')}{dx^2} - \dots$$

(Vedi Hesse, *Crelle.* Vol. LIV, pag. 233.)

È semplicissima la dimostrazione di questo importante teorema. Se φ e ψ hanno ambedue la proprietà di essere eguali ai loro coniugati, la stessa proprietà deve essere posseduta dalla forma $\varphi - \psi$; ora sviluppando tale forma e ordinandola secondo le successive derivate di z, si potrà sempre disporre delle $m + 1$ funzioni indeterminate

$$b_0\, b_1 \dots b_m,$$

in modo da rendere nulli i coefficienti delle $m + 1$ derivate di ordine pari di z; allora restano solo le derivate di ordine *dispari,* e quindi (almenochè i loro coefficienti non sieno tutti zero) la forma restante $\varphi - \psi$ è certamente di ordine dispari; il che non può essere perchè una forma di ordine dispari non può avere per coniugata sè stessa. Ne deduciamo che anche tutti i coefficienti delle derivate dispari di z devono riuscir zero, quando le b sono determinate nella maniera indicata; cioè in altri termini la forma ψ risulta eguale alla φ data.

Per brevità di linguaggio chiameremo in seguito *una forma del tipo* ψ, una forma che ha per coniugata sè stessa.

Passiamo ora a dimostrare quest'altro teorema:

La forma

$$\varphi = \frac{d^m (b\, z)}{d\, x^m} \pm b\, z^m \qquad \left(\begin{matrix} + \; se \; m \; pari \\ - \; se \; m \; dispari \end{matrix}\right)$$

è riducibile al tipo ψ.

Basterà dimostrare che essa ha per coniugata sè stessa.

In effetti, sviluppando, si ha

$$\varphi = b^{(m)}\, z + \binom{m}{1} b^{(m-1)}\, z' + \binom{m}{2} b^{(m-2)}\, z'' + \ldots + \\ + b\, z^{(m)} \pm b\, z^{(m)}$$

e i due ultimi termini si sommano o si distruggono secondochè m è pari o dispari. Quindi φ in ogni caso è sempre di ordine pari cioè o m ovvero $m-1$.

I coefficienti di questa forma sono

$$
\begin{aligned}
a_0 &= b^{(m)} \\
a_1 &= \binom{m}{1} b^{(m-1)} \\
a_2 &= \binom{m}{2} b^{m-2} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_m &= \begin{cases} 2\,b & \text{(se } m \text{ è pari)} \\ 0 & \text{(se } m \text{ è dispari).} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Cercando i valori dei coefficienti $A_0\ A_1 \dots A_m$ della forma coniugata si ha (se $r < m$)

$$
\begin{aligned}
A_r &= (-1)^r \left[a_r - \binom{r+1}{r} a'_{r+1} + \binom{r+2}{r} a''_{r+2} \dots \right] \\
&= (-1)^r \left[\binom{m}{r} - \binom{r+1}{r}\binom{m}{r+1} + \binom{r+2}{r}\binom{m}{r+2} - \dots \pm \right. \\
&\qquad \left. \pm \binom{m-1}{r}\binom{m}{m-1} + \omega \right] b^{m-r}
\end{aligned}
$$

dove

$$
\omega = \begin{cases} (-1)^{m-r}\, 2 \binom{m}{r} & \text{(se } m \text{ è pari)} \\ 0 & \text{(se } m \text{ è dispari)} \end{cases}
$$

Tenendo ora conto della relazione sopra dimostrata relativa a certe combinazioni di coefficienti binomiali, si vede che in ogni caso si ha

$$
A_r = \binom{m}{r} b^{m-r} = a_r .
$$

E inoltre è evidente che se m è pari si ha

$$A_m = 2\,b$$

e se m è dispari si ha $A_m = 0$; dunque il teorema resta dimostrato.

Da esso ricaviamo quest'altro:

La forma

$$\varphi = \frac{d^m\,(b\,z^{(m')})}{d\,x^m} \pm \frac{d^{m'}\,(b\,z^{(m)})}{d\,x^m} \quad (m > m')$$

(*il segno* + *se* $m - m'$ *è pari*;
il segno — *se* $m - m'$ *è dispari*)

è riducibile al tipo ψ. (Vedi JELLETT, *Variations-rech. Braunschweig*. 1860, pag. 392.)

In effetti possiamo scrivere

$$\varphi = \frac{d^{m'}}{d\,x^{m'}} \left\{ \frac{d^{m-m'}\,(b\,z^{(m')})}{d\,x^{m-m'}} \pm b\,z^{(m)} \right\}$$

e ponendo

$$z^{(m')} = z_1, \qquad m - m' = p$$
$$z^{(m)} = z_1{}^{m-m'} = z_1{}^p$$

si ha

$$\varphi = \frac{d^{m'}}{d\,x^{m'}} \left\{ \frac{d^p\,(b\,z_1)}{d\,x^p} \pm b\,z_1{}^p \right\}.$$

Per il teorema precedente la forma contenuta nella parentesi, è riducibile al tipo

$$b_0\,z_1 - \frac{d\,(b_1\,z'_1)}{d\,x} + \frac{d^2\,(b_2\,z''_1)}{d\,x^2} - \ldots,$$

dunque si avrà

$$\varphi = \frac{d^{m'}(b_0 z_1)}{d x^m} - \frac{d^{m'+1}(b_1 z'_1)}{d x^{m'+1}} + \ldots$$

e ponendo $z_1 = z^{m'}$, la forma φ resta immediatamente ridotta al tipo ψ.

Dopo ciò possiamo subito passare al terzo teorema di Jacobi.

§ 21. Terzo teorema di Jacobi.

Sia t una determinata funzione di x; la forma

$$\varphi = t\left\{\alpha_0 t z - \frac{d\,\alpha_1 (t z)'}{d x} + \frac{d^2 \alpha_2 (t z)''}{d x^2} - \ldots\right\}$$

dove con $(t z)'$ $(t z)''$ ... si intendono le derivate successive del prodotto $(t z)$, è riducibile al tipo ψ.

Basterà dimostrare che ogni termine di quella espressione, cioè p. es.

$$t\,\frac{d^m \alpha (t z)^{(m)}}{d x^m},$$

è riducibile al tipo ψ.

Ora è facile trovare la seguente formola che del resto noi abbiamo già dimostrata con altri simboli nel paragrafo precedente

$$P Q^{(m)} = (P Q)^{(m)} - \binom{m}{1} (P' Q)^{(m-1)} + \ldots + (-1)^m P^{(m)} Q.$$

Applicandola al caso nostro, possiamo scrivere

$$t\,\frac{d^m\,\alpha\,(t\,z)^{(m)}}{d\,x^m}=\frac{d^m\,t\,\alpha\,(t\,z)^m}{d\,x^m}-$$

$$-\binom{m}{1}\frac{d^{m-1}\,t'\,\alpha\,(t\,z)^{(m)}}{d\,x^{m-1}}+\ldots$$

Sviluppando ora la derivata $(t\,z)^{(m)}$ colla solita formola cosidetta di Leibnitz, si vede che in ultima analisi ci riduciamo a termini del tipo

$$(-1)^r\binom{m}{r}\binom{m}{s}\frac{d^{m-r}\left[t^{(r)}\,\alpha\,t^{(m-s)}z^{(s)}\right]}{d\,x^{m\cdot r}}$$

dove r s possono avere tutti i valori da 0 ad m.

Ponendo $m-r=s'$ la precedente espressione diventa

$$(-1)^{m-s'}\binom{m}{s'}\binom{m}{s}\frac{d^{s'}\left[\alpha\,t^{(m-s')}\,t^{(m-s)}\,z^{(s)}\right]}{d\,x^{s'}}$$

e scambiando s con s' si ha

$$(-1)^{m-s}\binom{m}{s}\binom{m}{s'}\frac{d^{s}\left[\alpha\,t^{(m-s)}\,t^{(m-s')}\,z^{s'}\right]}{d\,x^{s}}$$

e questi due termini hanno lo stesso segno o segno diverso secondochè $s-s'$ è pari o dispari.

Introducendo la parte numerica sotto il segno di derivazione, si vede che se $s=s'$, allora si ha un termine del tipo di quelli di ψ; e se s è diverso da s' si hanno due termini del tipo

$$\frac{d^{s}\,(A\,z^{(s)})}{d\,x^{s'}}\pm\frac{d^{s}\,(A\,z^{(s')})}{d\,x^{s}}$$

dove il segno è + o — secondochè $s - s'$ è pari o dispari. Per l'ultimo teorema del paragrafo precedente un tal binomio è riducibile al tipo ψ; dunque infine abbiamo che tutta l'espressione proposta è riducibile al tipo ψ, e con ciò è dimostrato il teorema di Jacobi

Dal teorema di Jacobi si ha dunque che

$$\varphi = b_0 z - \frac{d(b_1 z')}{dx} + \frac{d^2(b_2 z'')}{dx^2} - \dots$$

È facile trovare il valore di c_0. Esso è evidentemente

$$c_0 = t \left\{ \alpha_0 t - \frac{d(\alpha_1 t')}{dx} + \frac{d^2(\alpha_2 t'')}{dx^2} - \dots \right\}.$$

Possiamo quindi ricavare quest'altro risultato:

Se t è una funzione determinata di x la quale soddisfi l'equazione differenziale lineare

$$\alpha_0 t - \frac{d(\alpha_1 t')}{dx} + \frac{d^2(\alpha_2 t'')}{da^2} - \dots = 0$$

allora la forma φ

$$\varphi = t \left\{ \alpha_0 t z - \frac{d \alpha_1 (t z)'}{dx} + \dots \right\}$$

è esprimibile con una forma del tipo

$$\varphi = - \frac{d(b_1 z')}{dx} + \frac{d^2(b_2 z'')}{dx^2} \quad \dots$$

e quindi l'integrale

$$\int \varphi \, d\, x$$

è riducibile al medesimo tipo, cioè

$$\int \varphi \, d\, x = -b_1 z' + \frac{d\,(b_2 z'')}{d\, x} - \ldots$$

Nello sviluppo della espressione φ, il termine in z^{2m} ha per coefficiente $(-1)^m \alpha_m t^2$; e lo stesso termine nello sviluppo di φ messa sotto la seconda forma ha per coefficiente $(-1)^m b_m$; dunque

$$b_m = \alpha_m t^2$$

§ 22. Applicazione dei teoremi precedenti per la trasformazione della seconda variazione.

Consideriamo il caso più semplice in cui la funzione F sotto il segno integrale contenga solo x, y, y':

$$I = \int_{x'}^{x''} F(x, y, y')\, d\, x.$$

Si ha

$$\delta\, I = \int_{x'}^{x''} \mu\, \delta\, y\, d\, x$$

dove

$$\mu = M - \frac{d M'}{d x}$$

e

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} \delta \mu \, \delta y \, d x$$

dove, per un teorema precedente (Vedi § 19.),

$$\delta \mu = A_0 \, \delta y - \frac{d (A_1 \delta y')}{d x}, \qquad \left(A_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right).$$

Poniamo

$$\delta y = t z$$

$$t = C_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial x}{\partial c_2}$$

dove y sia l'integrale generale dell'equazione di 2.° ordine $\mu = 0$. Per uno dei teoremi sopra dimostrati la espressione t soddisfa l'equazione differenziale

$$A_0 \, t - \frac{d (A_1 t')}{d x} = 0.$$

Quindi, per il terzo teorema di Jacobi:

$$\int t \left(A_0 \, t z - \frac{d (A_1 (t z)')}{d x}\right) d x$$

è eguale ad un' espressione del tipo

$$-b_1 z'$$

dove

$$b_1 = A_1 t^2$$

e tornando ai simboli antichi, possiamo perciò scrivere

$$\int t\,\delta\mu\,dx = -A_1 t^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{\delta y}{t}\right).$$

Ora sulla espressione della variazione seconda eseguiamo un'integrazione per parti.

Possiamo scrivere

$$\int_{x'}^{x''} \delta\mu\,\delta y\,dx = \int_{x'}^{x''} \delta\mu\,.\,t\,.\,z\,.\,dx =$$

$$= \left[z\int t\,\delta\mu\,dx\right]_{x'}^{x''} - \int_{x'}^{x''} z'\left[\int t\,\delta\mu\,dx\right]dx =$$

$$= \left[z\int t\,\delta\mu\,dx\right]_{x'}^{x''} + \int_{x'}^{x''} A_1 z'^2 t^2\,dx.$$

Dovendo δy annullarsi nei due limiti dell'integrale, dovrà annullarsi $t\,.\,z$; *ora supponiamo che le costanti C in t non possano determinarsi in modo che t si annulli in tali due punti*, e allora necessariamente dovrà in essi annullarsi z.

La prima parte di questa formola è perciò zero.

Inoltre

$$z' = \frac{d}{d\,x}\left(\frac{\delta y}{t}\right) = \frac{t\,\delta\,y' - \delta\,y\,.\,t'}{t^2}$$

e quindi

$$z'^2\,t^2 = \left[\delta\,y' - \frac{t'}{t}\,\delta\,y\right]^2.$$

La variazione seconda diventa infine

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} A_1 \left[\delta\,y' - \frac{t'}{t}\,\delta\,y\right]^2 d\,x$$

e con ciò è ridotta alla forma desiderata.

Per la condizione posta riguardo a t, se ne deduce che non sarà possibile determinare le costanti arbitrarie in t in modo che per opportuna scelta della funzione arbitraria $\delta\,y$, questa espressione sia zero; perchè allora dovrebbe essere

$$\delta\,y = t,$$

e quindi t dovrebbe, come $\delta\,y$, annullarsi ai due limiti.

Passiamo ora al caso generale in cui F contenga le derivate di y sino alla r^{ma}.

La variazione seconda si può ridurre alla forma

$$\int_{x'}^{x''}\left(A_0\,\delta\,y - \frac{d\,(A_1\,\delta\,y')}{d\,x} + \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^r\,\frac{d^r\,(A_r\,\delta\,y^{(r)})}{d\,x^r}\right)\delta\,y\,d\,x.$$

Poniamo

$$\delta y = t_1 z_1$$

$$t_1 = C'_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + \ldots + C'_{2r} \frac{\partial y}{\partial c_{2r}} .$$

e supponiamo che y sia tale che le costanti C' non possano mai determinarsi in modo che t e le sue prime $r-1$ derivate si annullino nei due limiti dell' integrale, e che z, e le sue derivate si annullino in tali due limiti.

Per un teorema sopra dimostrato si avrà identicamente

$$A_0 t_1 - \frac{d(A_1 t'_1)}{dx} + \ldots = 0$$

e quindi per altro teorema dimostrato

$$\int t_1 \delta\mu\, d\,x = \int t_1 \left(A_0 t_1 z_1 - \frac{d(A_1(t_1 z_1)')}{d\,x} + \ldots\right) d\,x =$$

$$= -b_1 z'_1 + \frac{d\,(b_2 z''_1)}{d\,x} - \ldots - (-1)^r \frac{d^{r-1}(b_r z_1^{(r)})}{d\,x^{r-1}} .$$

Intanto integrando per parti e osservando che z_1 è zero nei due limiti dell' integrale, si ha

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} \delta\mu\, \delta y\, d\,x \int_{x'}^{x''} \delta\mu \,.\, t_1 \,.\, z_1 \,.\, d\,x =$$

$$= -\int_{x'}^{x''} z'_1 \left[\int t_1 \delta\mu\, d\,x\right] d\,x = \int_{x'}^{x''} z'_1 \left\{ b_1 z'_1 - \frac{d\,(b_2 z''_1)}{d\,x} + \ldots \right\} d\,x .$$

L'integrale così ottenuto è della medesima forma di quello sotto cui si può esprimere immediatamente la variazione seconda, solo che in luogo di δy compare la quantità z'_1; e invece di comparirvi $r+1$ termini ve ne sono solo r.

Se poniamo

$$t_2 = C_1'' \frac{\partial y}{\partial c_1} + \ldots + C''_{2r} \frac{\partial y}{\partial c_{2r}}$$

si può osservare che $z_1 = \frac{t_2}{t_1}$ soddisfa l'equazione

$$b_1 z_1' - \frac{d(b_2 z_1'')}{dx} + \ldots = 0$$

purchè si ponga fra le costanti C'_s C''_s *una relazione.*

Giacchè essendo

$$\int t_1 \delta \mu \, dx = b_1 z_1' - \frac{d(b_2 z_1'')}{dx} + \ldots$$

si ha che ogni valore di δy che soddisfa $\delta \mu = 0$, renderà *costante* il secondo membro; ora per

$$\delta y = t_2$$

(valore di δy che rende zero $\delta \mu$), si ha

$$z_1 = \frac{\delta y}{t_1} = \frac{t_2}{t_1}$$

e quindi ponendo $\delta y = t_2$ nell'integrale del primo membro, o, ciò che è lo stesso, nel secondo membro $z_1 = \frac{t_2}{t_1}$, si dovrà avere per risultato una costante arbitraria; ponendo tale costante eguale a zero, si verrà a porre una relazione fra le C' e C''.

Poniamo allora

$$z_1' = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)' z_2$$

colla condizione che z_2 sia zero ai limiti, e operiamo come precedentemente.

Si otterrà la variazione seconda trasformata in

$$-\int_{x'}^{x''} z_2' \left\{ b_2' z_2' - \frac{d\,(b_3' z_2'')}{d\,x} + \ldots \right\} d\,x.$$

Poniamo ancora

$$t_3 = C_1''' \frac{\partial y}{\partial c_1} + \ldots + C_{2r}''' \frac{\partial y}{\partial c_{2r}}$$

e osserviamo che

$$z_2 = \frac{t_1 t_3' - t_3 t_1'}{t_1 t_2' - t_2 t_1'}$$

soddisfa la equazione

$$b_2' z_2' - \frac{d\,(b_3' z_2'')}{d\,x} + \ldots = 0$$

purchè fra le C si suppongano altre due relazioni.

Giacchè

$$\int \left(\frac{t_2}{t_1}\right)' \left[b_1 z_1' - \frac{d\,(b_2 z_1'')}{d\,x} + \ldots \right] d\,x =$$

$$= b_2' z_2' - \frac{d\,(b_3' z_2'')}{d\,x} + \ldots$$

e quindi quest'ultima espressione è eguale anche al doppio integrale

$$\int \left(\frac{t_2}{t_1}\right)' \left[\int t_1\, \delta\, \mu\, d\,x \right] d\,x.$$

Per $\delta\,\mu = 0$ l'integrale in parentesi diventa in generale una costante, che chiameremo M e quindi questo doppio integrale diventa

$$M\left(\frac{t_2}{t_1}\right) + N$$

essendo N una nuova costante d'integrazione.

Intanto $\delta\,\mu$ è 0 quando $\delta\,y = t_3$, cioè quando

$$z_1 = \frac{t_3}{t_1}, \quad z_2 = \frac{z_1'}{\left(\frac{t_2}{t_1}\right)'} = \frac{t_1\,t_3' - t_3\,t_1'}{t_1\,t_2' - t_2\,t_1'},$$

quindi per tale valore di z_2 la espressione

$$b_2' z_2' - \frac{d\,(b_3\,z_2'')}{d\,x} + \ldots$$

diventerà identicamente eguale a

$$M\,\frac{t_2}{t_1} + N$$

dove M e N sono due costanti, e quindi combinazioni delle costanti che entrano nei vari termini di quell'espressione. Quella espressione sarà perciò zero se noi aggiungiamo le due condizioni $M = N = 0$.

Così seguitando si ha infine dopo r trasformazioni

$$\delta^2 I = (-1)^{r-1} \int_{x'}^{x''} z_r'^2 B_r \, dx.$$

La quantità z'_r, sviluppandola, si esprimerà linearmente mediante $\delta y \; \delta y' \; \delta y'' \ldots \delta y^{(r)}$, e così la seconda variazione è ridotta alla forma desiderata.

È facile trovare la espressione generale di B_r.

In effetti sappiamo che $b_r = A_r t_1^2$; analogamente b'_r sarà eguale a

$$b'_r = b_r \left[\left(\frac{t_2}{t_1}\right)'\right]^2$$

$$= A_r t_1^2 \left[\left(\frac{t_2}{t_1}\right)'\right]^2.$$

Così seguitando abbiamo infine

$$B_r = A_r t_1^2 \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{t_2}{t_1}\right)\right]^2 \ldots$$

dove, per un'osservazione già fatta,

$$A_r = \frac{\partial^2 F}{\partial y^{(r)2}}.$$

Prima di andare avanti fermiamoci un momento a considerare quante dovranno essere le già accennate relazioni fra le costanti

$$C'_s\,,\ C''_s\,,\ldots$$

che sono in numero di $2\,r^2$.

Abbiamo già visto che tali costanti le dobbiamo introdurre legate da certe relazioni. È facile vedere che tali relazioni sono in generale in numero di $\frac{r\,(r-1)}{z}$. Giacchè una relazione si introduce quando si introducono le C''; ovverosia la variabile t_2; similmente *due* relazioni si introducono quando si introduce la t_3; così continuando si hanno infine

$$1+2+\ldots+r-1=\frac{r\,(r-1)}{2}$$

relazioni fra $2\,r^2$ costanti arbitrarie. Per $r=1$ si hanno due sole costanti fra loro indipendenti. Per lo studio delle relazioni fra le costanti si può vedere Hesse (cit., pag. 252) e più specialmente Stern, citato.

Torniamo ora alla discussione generale.

Quando la variazione seconda è ridotta alla forma precedente ecco come si può procedere per esaminare se esiste effettivamente un massimo o minimo, e per distinguere l'uno dall'altro.

Prima di tutto, essa non deve annullarsi mai qualunque sia il variare della funzione arbitraria $\delta\,y$. Se si annullasse identicamente per qualunque δy, allora non si potrebbe nulla decidere sulla esistenza del massimo o minimo, ma si dovrebbe passare allo studio della variazione terza, quarta, ecc. come si fa in generale nel calcolo differenziale per lo studio dei massimi o minimi delle funzioni; *questo caso noi lo escludiamo esplicitamente.*

Non deve dunque mai trovarsi un δy pel quale sia $\delta \mu = 0$. Ora sappiamo che l'integrale generale dell'equazione differenziale $\delta \mu = 0$ è proprio $\delta y = t_1$; quindi è necessario che la funzione arbitraria δy non possa mai rendersi eguale alla t_1 la quale contiene $2r$ costanti arbitrarie; ma δy è assoggettata alle condizioni di essere zero insieme alle sue prime $r - 1$ derivate nei punti x' e x''; quindi è necessario che le $2r$ costanti in t_1 non possano mai determinarsi in modo che t_1 insieme alle sue $r - 1$ prime derivate diventi zero in quei due punti. Se ciò non si verifica, allora potrebbe sempre prendersi δy eguale ad una speciale t_1, con che si annullerebbe $\delta \mu$.

Qui cade acconcio osservare che la condizione che t_1 non possa determinarsi in modo che essa e le sue prime $r - 1$ derivate si annullino nei due limiti, può essere anche surrogata da quest'altra più generale; *che cioè t_1 e le sue $r - 1$ derivate non possano annullarsi nel limite inferiore x' e in un qualunque altro punto x_0 compreso fra x' e x''.* Giacchè se questo potesse farsi, è facile vedere che allora potrebbe scegliersi un δy che annullerebbe la seconda variazione dell'integrale.

In effetti potremmo scegliere $\delta y = t_1$ per ogni x fra x' e x_0, e $\delta y = 0$ per tutti gli altri x fra x_0 e x''. Allora $\delta y'$ $\delta y''$ ... sarebbero tutti zero per ogni x fra x_0 e x'' e quindi fra x_0 e x'' la variazione sarebbe certamente zero; e fra x' e x_0 sarebbe anche zero perchè per il teorema generale $\delta y = t_1$ annulla la seconda variazione.

Supposto verificata questa condizione, per l'esistenza del massimo o minimo è necessario che la funzione A_r sotto il segno integrale non muti mai segno fra i limiti d'integrazione, e inoltre che tutta la funzione sotto il segno integrale non diventi mai infinita per alcuno x fra x' e x''.

Le C'_s $C''_s \ldots$ contenute in $t_1\, t_2 \ldots$ possono scegliersi a piacere purchè soddisfacenti alle relazioni cui le abbiamo sottoposte; si scelgano in maniera che la funzione sotto il segno non diventi mai *infinita*; supposto che ciò si possa fare (e che quelle costanti non si possano determinare anche in modo che la medesima funzione sia zero per qualche x) la variazione seconda resta ridotta ad una forma nella quale basta solo esaminare la natura di

$$(-1)^{r-1} A_r$$

per decidere sul massimo o minimo; se cioè

$$(-1)^{r-1} A_r$$

è negativa per ogni x si ha un *massimo*, e se la stessa quantità è positiva si ha un *minimo*. Non si ha nè massimo nè minimo, se A_r è positiva per alcuni punti x, e negativa per altri.

§ 23. Esempio di applicazione della trasformazione Jacobiana.

Sia

$$F = \sqrt{1 + y'^2}$$

dove si intenda che il radicale per ogni x compreso nei limiti d'integrazione si debba assumere positivo.

Si ha

$$M = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

$$M' = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{1}{2}}} .$$

L'equazione differenziale $\beta = 0$ diventa

$$\frac{d M'}{d x} = 0$$

donde

$$M' = \text{cost.} = c_0$$

$$\frac{y'^2}{1 + y'^2} = c_0^2$$

$$(1 - c_0^2)\, y'^2 = c_0^2$$

$$y' = \text{cost.} = c_1$$

$$y = c_1 x + c_2 .$$

La funzione t è

$$t = C_1 x + C_2$$

e quindi

$$t' = \frac{dt}{dx} = C_1.$$

Essendo poi

$$A_1 = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{1}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

sostituendo nella formola generale avanti trovata, si ottiene

$$\delta^2 I = \int_{x'}^{x''} \frac{1}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \left[\delta y' - \frac{C_1}{C_1 x + C_2} \delta y\right]^2 dx.$$

Ora, prima di tutto, non è possibile determinare δy in modo che la quantità sotto il segno diventi zero, perchè non può prendersi $\delta y = t$. Infatti se potesse essere $\delta y = t$, allora t dovrebbe annullarsi in x' e x'', come si suppone che faccia δy; ma intanto le due equazioni

$$C_1 x' + C_2 = 0$$
$$C_1 x'' + C_2 = 0$$

non possono coesistere.

Ciò stabilito, determiniamo C_1 C_2 in un modo arbitrario, ma in maniera però (se è ciò possibile), che la funzione sotto il segno non diventi infinita per alcuna x fra x' e x''.

Poniamo per es. $C_1 = 0$, $C_2 = 1$; allora la variazione seconda è ridotta alla forma semplicissima:

$$\int_{x'}^{x''} \frac{1}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} \delta y'^2 \, dx.$$

Avendo fissato che il radicale

$$\sqrt{1 + y'^2}$$

debba considerarsi positivo, ed essendo sempre positiva la quantità $1 + y'^2$, lo sarà anche

$$\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

e quindi la funzione y trovata corrisponde ad un *minimo* dell'integrale. Le due costanti si determinano colle condizioni che y abbia fissati valori ai due limiti.

Dovremmo ora passare a studiare la variazione seconda e il modo di trasformarla nel caso in cui non esista una sola funzione incognita, ma *più* funzioni incognite, e, più generalmente ancora, quando fra queste esistano poi delle date relazioni differenziali.

Come abbiamo già detto, fu Clebsch il primo che incominciò a trattare questo problema più generale, sul quale però non ci fermeremo, perchè andremmo troppo lontani dai limiti imposti ci. Riferiremo solo il risultato sotto la forma cui lo ha ridotto Mayer e lo facciamo per servircene poi per la dimostrazione di una cosidetta legge di reciprocità di Mayer, nel caso speciale del problema degli isoperimetri.

§ 24. — Cenno sui risultati ottenuti per la distinzione fra i massimi e minimi nel problema generale di Lagrange.

È dalla Memoria di Mayer (*Crelle.* Vol. LXIX, pag. 238) che prendiamo il risultato relativo alla seconda variazione nel caso del problema generale di Lagrange.

Sieno $y_1\, y_2 \ldots y_n$ funzioni incognite di x, e fra esse debbano sussistere le equazioni differenziali di 1.° ordine

$$\varphi_1 = 0 \ldots \varphi_m = 0.$$

Si vogliano determinare le y in modo che l'integrale

$$I = \int_{x'}^{x''} F(x\, y_1\, y_2 \ldots y_n\, y_1' \ldots y'_n)\, dx$$

sia massimo o minimo supposto che sieno assegnati i valori delle y e delle loro derivate nei limiti fissi $x'\, x''$.

Per le cose avanti dette (v. § 12), questo problema di massimo e minimo *relativo* si riduce al problema del massimo e minimo *assoluto* dell'integrale

$$J = \int_{x'}^{x''} \Omega \, d x$$

dove

$$\Omega = f + \lambda_1 \varphi_1 + \dots + \lambda_m \varphi_m$$

e le λ sono dei moltiplicatori da determinare.

Applicando quindi il metodo generale si hanno le n equazioni differenziali di 2.° ordine

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{d x} \frac{\partial \Omega}{\partial y'_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

che insieme colle $\varphi_j = 0$ costituiscono un sistema di $n + m$ equazioni differenziali dalle quali possono determinarsi le $n + m$ funzioni incognite $y_1 \, y_2 \dots y_n \; \lambda_1 \dots \lambda_m$ con $2 n$ costanti $c_1 \, c_2 \dots c_{2n}$.

Il risultato cui giunge Mayer (cit., pag. 260) è il seguente:

Se il determinante

$$\Delta(x \, x') = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial c_1} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial c_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial c_1} & \dots & \dfrac{\partial y_n}{\partial c_{2n}} \\ \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial c_1}\right)_{x=x'} & \dots & \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial c_{2n}}\right)_{x=x'} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\dfrac{\partial y_n}{\partial c_1}\right)_{x=x'} & \dots & \left(\dfrac{\partial y_n}{\partial c_{2n}}\right)_{x=x'} \end{vmatrix}$$

per ogni x fra x' e x'' è diverso da zero, e se la forma quadratica

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_i \, \partial y'_j} \zeta_i \zeta_j ,$$

(*dove le ζ sono delle quantità solo assoggettate alle condizioni*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_h}{\partial y'_i}\right) \zeta_i = 0,$$

ma del resto arbitrarie) *è di segno costante per qualunque sistema di valori delle ζ, allora esiste effettivamente un massimo o minimo per l'integrale.* Occorre però anche quì supporre l'ipotesi che i coefficienti della seconda variazione non acquistino mai valori infiniti per alcuna x dell'intervallo d'integrazione.

Nel caso di $n = 1$ la condizione che il determinante Δ sia diverso da zero si riduce alla condizione che non possono determinarsi le costanti C_1 C_2 in modo che

$$C_1 \frac{\partial y}{\partial c_1} + C_2 \frac{\partial y}{\partial c_2}$$

sia zero nel limite inferiore x' e in un altro qualunque punto x fra i limiti d'integrazione, risultato che noi già conosciamo (v. § 22).

§ 25. — Caso del problema degli isoperimetri.

Esaminiamo come si modifica il criterio per il massimo e minimo indicato nel paragrafo precedente quando in particolare si considera un problema di isoperimetri.

Si abbia da rendere massimo o minimo l'integrale

$$I = \int_{x'}^{x''} F\,d\,x$$

mentre gli altri integrali

$$I_1 = \int_{x'}^{x''} F_1\,d\,x, \ldots I_m = \int_{x'}^{x''} F_m\,d\,x$$

debbano acquistare valori determinati, $l_1\,l_2 \ldots l_m$.

Un tal problema (come abbiamo già detto a suo luogo) può ridursi al problema di Lagrange, introducendo m altre nuove funzioni

$$y_{n+1}\,y_{n+2} \ldots y_{n+m}$$

legate alle antiche dalle equazioni differenziali

$$\begin{array}{l} y'_{n+1} - F_1 = 0 = \varphi_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_{n+m} - F_m = 0 = \varphi_m. \end{array}$$

Come si sa, la espressione Ω risulta allora del tipo

$$\Omega = F + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_m F_m$$

dove le λ sono costanti, e, integrando le equazioni differenziali solite, si hanno le

$$y_1\, y_2 \ldots y_n\, y_{n+1} \ldots y_{n+m}$$

espresse per mezzo di $2(n+m)$ costanti

$$c_1 \ldots c_{2n}\, \lambda_1 \ldots \lambda_m\, \lambda_{m+1} \ldots, \lambda_{2m}.$$

(Le costanti λ_{m+i} compariscono nelle equazioni che danno le y_{n+i} perchè si ha

$$y_{n+i} = \lambda_{m+i} + \int F_i\, d\, x.)$$

Il determinante Δ diventa dunque (intendendo con

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial c_1}\right)^0 \ldots$$

i valori di tali derivate per il limite inferiore dell'integrale cioè per $x = x'$):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial c_1} \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial c_{2n}} & \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1} \ldots & \frac{\partial y_1}{\partial \lambda_{2m}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_1}\right)^0 \ldots & \left(\frac{\partial y_1}{\partial c_{2n}}\right)^0 & \left(\frac{\partial y_1}{\partial \lambda_1}\right)^0 \ldots & \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda_{2m}}\right)^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Ora le $y_1 \dots y_n$ non conterranno le $\lambda_{m+1} \dots \lambda_{2m}$ per le cose dette sopra, e inoltre ogni y_{n+i} contiene, fra le sopradette costanti, solo la λ_{m+i} e la contiene linearmente; cioè

$$\frac{\partial y_i}{\partial \lambda_{m+j}} = \left(\frac{\partial y_i}{\partial \lambda_{m+j}}\right)^0 = \frac{\partial y_{n+i}}{\partial \lambda_{m+j}} = \left(\frac{\partial y_{n+i}}{\partial \lambda_{m+j}}\right)^0 = 0$$

mentre

$$\frac{\partial y_{n+i}}{\partial \lambda_{n+i}} = \left(\frac{\partial y_{n+i}}{\partial \lambda_{n+i}}\right)^0 = 1.$$

Perciò, sottraendo dagli elementi della $2n+m+i^{ma}$ linea quelli della $n+i^{ma}$, (per $i=1, 2, \dots m$) il determinante si riduce (a meno del segno) a

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial c_1} & \dots & \dfrac{\partial y_1}{\partial \lambda_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial c_1} & \dots & \dfrac{\partial y_n}{\partial \lambda_m} \\ \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial c_1}\right)^0 & \dots & \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial \lambda_m}\right)^0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\dfrac{\partial y_n}{\partial c_1}\right)^0 & \dots & \left(\dfrac{\partial y_n}{\partial \lambda_m}\right)^0 \\ \dfrac{\partial y_{n+1}}{\partial c_1} - \left(\dfrac{\partial y_{n+1}}{\partial c_1}\right)^0 & \dots & \dfrac{\partial y_{n+1}}{\partial \lambda_m} - \left(\dfrac{\partial y_{n+1}}{\partial \lambda_m}\right)^0 \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

In quanto alla forma quadratica, essendo evidentemente

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_{n+i} \, \partial y'_{n+j}} = 0$$

essa diventa

$$W = \sum_{ij} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y'_i \, \partial y'_j} \zeta_i \zeta_j$$

dove ij hanno solo i valori $1, 2, \ldots n$, e dove le ζ dovrebbero essere assoggettate alle condizioni

$$\sum_{i=1}^{n+m} \frac{\partial \varphi_h}{\partial y'_i} \zeta_i = 0$$

che diventano nel nostro caso

$$\sum_1^n \frac{\partial \varphi_h}{\partial y'_i} \zeta_i - \zeta_{n+h} = 0.$$

Ma poichè nella forma quadratica non entrano più le ζ_{n+h}, e poichè queste in fondo non fanno che limitare la variabilità solo di ζ_{n+h} rispetto a quella delle $\zeta_1 \ldots \zeta_n$, così queste ultime restano arbitrarie, e abbiamo infine il risultato:

Nel problema degli isoperimetri ha luogo effettivamente un massimo o minimo se per ogni x fra i limiti d'integrazione il determinante Δ è sempre diverso da zero, e se la forma quadratica W non muta mai di segno al variare arbitrario delle ζ.

§ 26. — Legge di reciprocità di Mayer per i problemi di isoperimetri.

Conserviamo le notazioni del paragrafo precedente e supponiamo che il valore massimo o minimo ottenuto per l'integrale I sia l.

Proponiamoci allora quest'altro problema;

Rendere l'altro integrale I_1 massimo o minimo mentre gli integrali $I\, I_2 \ldots I_m$ debbano avere i valori $l\, l_2 \ldots l_m$.

Si può dimostrare che *per I_1 esisterà un massimo o minimo se esiste per I, e inoltre che tale massimo o minimo è precisamente l_1.*

È in ciò che consiste la legge di reciprocità formulata da Mayer. (*Math. Ann.* Vol. XIII, pagina 60.)

La dimostrazione del teorema è semplice.

In primo luogo le equazioni differenziali del problema sono le medesime nei due casi, e propriamente

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y_i} - \frac{d}{d x} \frac{\partial \Omega}{\partial y'_i} = 0$$

essendo

$$\Omega = F + \lambda_1 F_1 + \ldots + \lambda_m F_m$$

o anche, introducendo costanti omogenee,

$$\mu \Omega = \mu F + \mu_1 F_1 + \ldots + \mu_m F_m = \Phi$$

e osservando allora che le equazioni precedenti possono anche scriversi (essendo μ una costante)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_i} - \frac{d}{d x} \frac{\partial \Phi}{\partial y'_i} = 0.$$

Inoltre si può far vedere che i due determinanti Δ e le due forme quadratiche W corrispondenti ai due problemi, non differiscono che per fattori costanti. Non ci fermeremo però su questa dimostrazione, e rimandiamo all'opera citata di Mayer.

Come applicazione si ricava p. es. che sapendo (v. § 34) che *la curva di data lunghezza fra due punti, la quale ha il centro di gravità più basso possibile, è la catenaria*, se ne ricava:

La curva che ha gli estremi in due punti fissi, che ha il centro di gravità ad una determinata altezza, e che ha la minima lunghezza possibile è una catenaria.

Si vede così che il principio di reciprocità può servire utilmente per ricavare dei teoremi nuovi da altri teoremi noti del calcolo delle variazioni.

§ 27. — Variazione degli integrali multipli. Bibliografia.

La variazione di un integrale multiplo era stata considerata sin dai tempi di Eulero e Lagrange, ma fu Gauss il primo che discusse un problema riferentesi alla variazione di un integrale multiplo *con limiti d'integrazione variabili.* (Gauss, *Prin-*

cipia generalia Theoriae Figurae Fluidorum in statu Aequilibrii. Comm. Soc. Gott. Vol. VII) (1833).

Il problema propostosi dal Gauss era il seguente:

Determinare la forma d'equilibrio di un liquido contenuto in un vaso di forma data; si giunge al risultato che per risolvere il problema occorre rendere *minimo* un certo integrale doppio a limiti variabili.

Dopo Gauss comparve sullo stesso argomento una Memoria di Poisson (*Memoires de l'Acad.* Vol. XII, (1833)) e dopo una Memoria di Ostrogradsky. (*Acad. St. Petersbourg* (1834); *Crelle.* Volume XV, pag. 332.) Nello stesso volume XV del *Giorn. di Crelle* si trova poi anche una Memoria di Pagani (*Résolution d'un problème rélatif au calcul des variations*, pag. 84.) in cui si tratta il problema già considerato da Gauss.

Un concorso bandito nel 1842 dall'Accademia di Parigi dette origine ai due lavori di Sarrus (*Recherches sur le calcul des variations.* Mem. des Sav. Etrang. 1846) e di Delaunay. (*Journ. de l'Éc. Polyt.* Cah. XXIX (1843).)

Il problema che si proponevano questi Autori era di trasformare la variazione dell'integrale multiplo e ridurla ad una forma analoga a quella che si adopera per gli integrali semplici.

La Memoria di Delaunay contiene anche le prime considerazioni sui criterii per distinguere i massimi dai minimi negli integrali multipli; sul quale soggetto era già comparso anche il lavoro di Brunacci (*Mem. dell'Ist. Naz. Ital.* Parte 2.ª Vol. II, Bologna 1810, pag. 121) in cui si estendevano le considerazioni di Legendre, di cui abbiamo discorso al § 18.

I risultati di Sarrus furono esposti poi diversamente da CAUCHY. (*Mém. sur le calcul des variations.* Exerc. d'analyse. Vol. III, pag. 50.)

Altri lavori sulla variazione degli integrali multipli sono i seguenti:

BJORLING, *Calculi Variationum Integralium Duplicium Exercitationes.* Upsal, 1842;

STRAUCH, *Anw. der sogenn. Variationscalculs auf 2. und 3. fache Integrale.* Wien, 1859;

CLEBSCH, *Ueber die zweite Variation vielfacher Integrale.* Crelle. Vol. LVI, pag. 122 (1859);

LINDELÖFF, *Comptes Rendus.* Vol. L, pag. 85 (1860);

SABININE, *Sur la méthode de distinguer les maxima et les minima des intégrales définies multiples.* Bull. de St. Petersbourg. Vol. XV, pag. 70 (1870);

SABININE, *Développements analyt. pour servir à compléter la discussion de la variation seconde des intégrales définies multiples.* Bulletin des sciences math. 1878, pag. 100.

SABININE, *Sulla trasformazione della variazione degli integrali definiti* (in russo). Raccolta matem. di Mosca. Vol. XV, pag. 99 (in questo lavoro si estende agli integrali multipli un metodo adoperato da Clebsch per gli integrali semplici).

SABININE, *Sulla Memoria di Sarrus* (in russo). Id. Vol. XIV, pag. 451 (1890). In questo lavoro l'autore si occupa specialmente del problema: Trovare una superficie di data area racchiudente il massimo volume; problema di cui si era già occupato Sarrus.

A questo lavoro fa seguito il seguente che vi fa alcune correzioni ed aggiunte:

ZIMMERMANN, *Sulla distinzione fra il massimo e il minimo degli integrali definiti* (in russo). Id. Vol. XVII, pag. 229 (1893).

L'applicazione di un metodo di Weierstrass agli integrali multipli si trova in due recenti lavori di

KOBB, *Sur les maxima et les minima des integrales doubles.* Acta math. Vol. XVI, pag. 65; Vol. XVII, pag. 321 (1893).

§ 28. Formola di Ostrogradsky per la prima variazione degli integrali multipli.

Sia z funzione delle due variabili x, y. Per fissare le idee supponiamo che una tal funzione possa rappresentarsi coi punti di una superficie; diamo a tali punti degli spostamenti arbitrarii ma infinitesimi, cioè supponiamo una nuova superficie che abbia o no la stessa curva limite della prima, e i cui punti si facciano corrispondere univocamente ai punti della prima, e le distanze fra due punti corrispondenti sieno delle quantità tendenti a zero contemporaneamente.

Sieno $x\,y\,z$ le coordinate di un punto dell'antica superficie, di equazione $z = f(x\,y)$ (cfr. il § 1).

La nuova superficie abbia per equazione

$$z_1 = f(x_1\,y_1) + \lambda(x_1\,y_1)\,\delta\,\alpha$$

dove $x_1\, y_1\, z_1$ sieno le coordinate del punto corrispondente a quello di coordinate $x\, y\, z$, e $\delta\,\alpha$ sia una quantità che tenda a zero.

Allora la variazione di z sarà l'assieme dei termini di ordine più basso in $z_1 - z$, cioè in

$$[f(x_1\, y_1) - f(x\, y)] + \lambda\,(x_1\, y_1)\,\delta\,\alpha.$$

Ed essendo

$$f(x_1\, y_1) - f(x\, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\delta\,x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta\,y + \omega$$

$$\lambda\,(x_1\, y_1)\,\delta\,\alpha = \lambda\,(x\, y)\,\delta\,\alpha + \omega'$$

(dove $\omega\ \omega'$ sono infinitesimi di ordine superiore rispetto a $\delta\,\alpha$, $\delta\,x$, $\delta\,y$ che si possono supporre tutti del medesimo ordine) si ha infine

$$\delta\,z = \lambda\,(x, y)\,\delta\,\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\delta\,x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\delta y\right)$$

formola analoga a quella del § 1. Possiamo osservare che la prima parte del secondo membro può considerarsi come la variazione di z nell'ipotesi particolare in cui x, y non variino, il che si vede immediatamente dalla formola sopra stabilita.

Con un metodo simile possiamo ricavare la formola per le variazioni delle derivate parziali di z. Si ha

$$\delta\,\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\,\lambda\,(x\, y)}{\partial x}\,\delta\,\alpha + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2}\,\delta\,x + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,\delta\,y\right)$$

ecc. ecc.

dalle quali formole appare sempre la proprietà: che la variazione totale è eguale alla somma della variazione nell'ipotesi che x y sieno invariate, più la parte dipendente dalle sole variazioni di x e y.

Se si ha poi una funzione di x, y, z, e delle derivate parziali di z, è facile, coi soli principii del calcolo differenziale, trovare la variazione di essa. Si ha

$$\delta F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \dots\right) =$$

$$= \frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z + \frac{\partial F}{\partial \frac{\partial z}{\partial x}} \delta \frac{\partial z}{\partial x} + \dots$$

Passiamo ora alla variazione di un integrale doppio definito.

Se il campo d'integrazione è fisso, per modo che *invariabili* possono considerarsi le x e y, allora è facile trovare la formola per la variazione dell'integrale, e si potrà procedere cogli stessi principii adoperati per gli integrali semplici.

Si troverà che la variazione dell'integrale si ottiene semplicemente sostituendo alla funzione F sotto il segno, la sua variazione δF.

Non è più lo stesso se il campo d'integrazione è variabile. Seguiremo un metodo analogo a quello seguito per gli integrali semplici (v. § 2 e JORDAN, *Analyse.* Vol. III, pag. 534) e il quale però, se può dirsi esatto quando si tratti delle funzioni più ordinarie, è molto lungi dal presentare quel rigore e quella precisione che è desiderabile nei procedimenti analitici così fondamentali.

Si abbia l'integrale doppio

$$I = \int\int F\,d\,x\,d\,y.$$

In F, alla funzione z e alle sue derivate $z'\,z''\ldots$ sostituiamo $z + \Delta\,z$, $z' + \Delta\,z', \ldots$ dove $\Delta\,z$ $\Delta\,z'\ldots$ sono gli incrementi che subiscono $z\,z'\ldots$ per effetto delle variazioni $\delta\,x$, $\delta\,y$ delle variabili indipendenti, e della variazione propria della funzione z.

Mutiamo poi anche il campo d'integrazione, in modo che ad ogni punto x, y dell'antico campo corrisponda un punto $x + \delta\,x$, $y + \delta\,y$ del nuovo, e quindi ad un punto $x_0\,y_0$ del contorno dell'antico corrisponda il punto $x_0 + \delta\,x_0$, $y_0 + \delta\,y_0$ del contorno del nuovo, e formiamo la differenza fra l'integrale così modificato e quello antico. Possiamo nel primo di tali integrali eseguire un cangiamento di variabili indipendenti in maniera da ridurlo un integrale definito nello *stesso* campo d'integrazione del secondo.

In effetti poniamo in esso

$$x = u + \delta\,u$$
$$y = v + \delta\,v$$

dove $\delta\,u$, $\delta\,v$ sieno funzioni di u, v colle condizioni di ridursi a $\delta\,x_0$, $\delta\,y_0$ quando u, v diventano rispettivamente x_0, y_0 (si noti che quì con x_0, y_0 si intendono genericamente le coordinate di un qualunque punto del contorno dell'antico campo d'integrazione, e quindi sono *infinite* le condizioni cui assoggettiamo le funzioni arbitrarie δu, δv, di due variabili.)

La funzione sotto il segno (supposto naturalmente anche in $z\, z' \dots$ sostituite in luogo di $x\ y$ le quantità $u + \delta u$, $v + \delta v$) diventa una funzione di tali quantità, che chiameremo

$$\Phi(u + \delta u,\ v + \delta v) =$$
$$= \Phi(u\, v) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\delta v\right) + \dots$$

e il campo d'integrazione diventa l'antico.

Per trasformare l'integrale bisogna moltiplicare la funzione sotto il segno per l'Jacobiano delle antiche variabili rispetto allo nuove, cioè per

$$\begin{vmatrix} 1 + \dfrac{\partial(\delta u)}{\partial u} & \dfrac{\partial(\delta u)}{\partial v} \\ \dfrac{\partial(\delta v)}{\partial u} & 1 + \dfrac{\partial(\delta v)}{\partial v} \end{vmatrix} = 1 + \left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial u} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial v}\right) + \dots$$

L'integrale trasformato diventa allora

$$\iint \Phi(u\, v)\, d\, u\, d\, v +$$
$$\iint\left[\frac{\partial \Phi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\delta v + \Phi\frac{\partial(\delta u)}{\partial u} + \Phi\frac{\partial(\delta v)}{\partial v}\right] du dv + \text{ecc.}$$

cioè, mutando nome alle variabili $u\ v$ e chiamandole daccapo $x\ y$:

$$\iint \Phi(x\,y)\,dx\,dy + \iint \frac{d}{dx}(\Phi\,\delta x)\,dx\,dy +$$
$$+ \iint \frac{d}{dy}(\Phi\,\delta y)\,dx\,dy + \text{ecc.}$$

Esaminiamo ora la funzione Φ; essa è

$$F(x,\ y,\ z+\Delta z,\ z'+\Delta z', \ldots)$$

cioè

$$\Phi(x\,y) = F(x\,y\,z\,z'\ldots) +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\Delta z + \frac{\partial F}{\partial z'}\Delta z' + \ldots\right) + \ldots$$

ed essendo

$$\Delta z = \delta z + \omega$$
$$\Delta z' = \delta z' + \omega'$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

si ha infine

$$\Phi = F + \delta F + \Omega$$

essendo δF la variazione di F nell'ipotesi che variino solo la funzione z e le sue derivate ed essendo Ω un infinitesimo di ordine superiore.

Sostituendo nell'espressione precedente dell'integrale, sottraendone il valore dell'integrale primitivo

$$\iint F\,dx\,dy$$

e supponendo che l' integrale

$$\iint \left\{ \Omega + \frac{\partial}{\partial x} [(\delta F + \Omega) \delta x] + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y} [(\delta F + \Omega) \delta y] \right\} d x d y$$

possa effettivamente considerarsi di ordine superiore rispetto all' integrale degli altri termini, si ha

$$\delta I = \iint \delta F d x d y +$$
$$+ \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} (F \delta x) + \frac{\partial}{\partial y} (F \delta y) \right] d x d y .$$

Questa è la formola di Ostrogradsky la quale è la estensione di quella da noi trovata al § 2 per gli integrali semplici.

È facile intendere in che modo resta generalizzata questa formola quando in luogo di un integrale doppio si tratti in generale di un multiplo.

Per un'altra dimostrazione di questa formola di Ostrogradsky si può vedere il citato lavoro di Lindelöf (1860).

§ 29. — Trasformazione della variazione dell'integrale multiplo. Formola di Delaunay.

Nello studio della variazione prima degli integrali semplici è importante quella trasformazione per mezzo della quale si cerca di fare sparire sotto il segno integrale le variazioni delle derivate delle funzioni incognite, in modo da ottenere sotto il segno una espressione lineare nelle variazioni delle sole funzioni incognite e non delle loro derivate.

Ciò ha per iscopo di ridurre la espressione sotto il segno a contenere variazioni che possano reputarsi fra loro *indipendenti.*

Una considerazione simile si può fare naturalmente anche per gli integrali multipli. Si ha allora una formola cui accennava già Ostrogradsky alla fine della sua Memoria citata, ma che può chiamarsi *formola di Delaunay* perchè di essa si occupò esplicitamente quest'autore nella prima parte della sua Memoria.

Per fissare le idee e per semplicità supponiamo che si abbia una sola funzione z e che compariscano solo le *prime* derivate parziali di z, che chiameremo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z_2.$$

Poniamo per δF il suo valore nella formola del paragrafo precedente e indi ordiniamo i vari termini nella seguente maniera

$$\iint \frac{\partial F}{\partial z} \delta z \, d x \, d y +$$

$$+ \iint \left[\frac{\partial F}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{\partial}{\partial x}(F \delta x)\right] d x \, d y +$$

$$+ \iint \left[\frac{\partial F}{\partial z_2} \delta z_2 + \frac{\partial}{\partial y}(F \delta y)\right] d x \, d y.$$

I due ultimi integrali li possiamo trasformare con integrazioni per parti.

Giacchè (essendo

$$\delta z_1 = \delta \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d \delta z}{d x}$$

nell'ipotesi che qui appunto si fa, che $x \; y$ restino invariate) si ha:

$$\int \left[\frac{\partial F}{\partial z_1} \delta z_1 + \frac{d}{d x}(F \delta x)\right] d x =$$

$$= \left[\frac{\partial F}{\partial z_1} \delta z + F \delta x\right] - \int \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z_1} \delta z \, d x.$$

Dato un valore ad y l'integrazione rispetto ad x si farà fra limiti che sono funzioni di y, e che rappresentano le ascisse dei punti in cui la parallela all'asse x, avente la data ordinata incontra la curva contorno dell'area d'integrazione.

Supposto che questa curva chiusa è incontrata in *due* punti di ascissa x' x'' funzioni di y, è fra tali due valori che bisogna estendere le integrazioni sussegnate, e inoltre in luogo del primo termine del secondo membro bisogna intendere la espressione

$$\left[\frac{\partial F}{\partial z_1}\delta z + F\delta x\right]_{x=x''} - \left[\frac{\partial F}{\partial z_1}\delta z + F\delta x\right]_{x=x'}$$

Eseguiamo ora a primo e secondo membro una seconda integrazione rispetto ad y, e abbiamo

$$\int dy\left[\frac{\partial F}{\partial z_1}\delta z + F\delta x\right]_{x'}^{x''} - \iint \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_1}\delta z \,.\, dx\, dy$$

dove la prima integrazione è semplice e si estende fra i due valori di y che rappresentano le ordinate della più alta e della più bassa retta tangente alla curva, contorno dell'area, e la seconda integrazione è doppia e si estende a tutta la data area piana.

È facile riconoscere che la prima integrazione è quella della quantità

$$\frac{\partial F}{\partial z_1}\delta z + F\delta x$$

estesa a tutto il *contorno* dell'area; immaginiamo infatti in questa espressione le variabili x e y legate fra loro dalla equazione del contorno, assumiamo y per variabile indipendente e integriamo; otteniamo allora precisamente la espressione superiore.

Il ragionamento che occorre fare per rischiarare questo punto è identico a quello che abbiamo già fatto nel *Calcolo integrale* a proposito della formola di Green, e perciò ci dispensiamo dal ripeterlo. Prendendo s (l'arco) per variabile indipendente e ponendo $d\,y = d\,s\,.\cos\omega$ dove ω è l'angolo che la normale alla curva fa coll'asse di x, il primo termine della precedente formola può scriversi

$$\int d\,s \cos\omega \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}\delta z + F\,\delta x\right).$$

Analogamente possiamo scrivere che

$$\int\int\left[\frac{\partial F}{\partial z_2}\delta z_2 + \frac{\partial}{\partial y}(F\,\delta y)\right]d\,x\,d\,y =$$
$$= \int d\,s \operatorname{sen}\omega\left(\frac{\partial F}{\partial z_2}\delta z + F\,\delta y\right) -$$
$$- \int\int \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z_2}\delta z\,.\,d\,x\,d\,y$$

e quindi infine

$$\delta I = \int d\,s\left\{\left(\cos\omega\frac{\partial F}{\partial z_1} + \operatorname{sen}\omega\frac{\partial F}{\partial z_2}\right)\delta z + \right.$$
$$\left. + F\cos\omega\,\delta x + F\operatorname{sen}\omega\,\delta y\right\} +$$
$$+ \int\int d\,x\,d\,y\left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z_2}\right]\delta z.$$

Se in F comparissero anche le derivate di ordine superiore di z allora, eseguendo due volte le integrazioni per parti, si otterrebbero sotto il secondo integrale ancora i termini

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial z_{11}}.\delta z,\qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial F}{\partial z_{22}}.\delta z,\ \text{ecc. ecc.}$$

dove

$$z_{11}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\qquad z_{22}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ldots;$$

e così se F oltre che contenere solo *una* funzione z, ne contenesse delle altre, comparirebbero altri termini relativi a queste altre funzioni e dello stesso tipo di quelli scritti; e se infine si trattasse di un integrale multiplo, anzichè doppio, si potrebbe anche seguire lo stesso procedimento. In tutti questi casi più generali, in fondo non si incontrano difficoltà nuove, ma solo si incontra una maggiore complicazione di calcoli, e formole più complesse; perciò ci pare inutile soffermarci su di essi.

Ridotta la variazione a questa forma, è facile vedere che, cogli stessi metodi adoperati per gli integrali semplici, si giunge ai medesimi risultati relativamente all'annullarsi identico della variazione stessa, annullarsi che al solito è necessario perchè l'integrale abbia un massimo o un minimo. Le considerazioni che qui occorrerebbe fare sarebbero le medesime, *mutatis mutandis*, di quelle fatte in altro luogo, e perciò ci dispensiamo di farle.

Il primo degli integrali cui si è ridotta la variazione di I è un integrale semplice; esso è esteso al contorno dell'area; se quindi fossero fissi i limiti d'integrazione e assegnati anche i valori di z, allora δx, δy, δz in tali punti dovrebbero considerarsi come zero, e quindi il primo integrale va a zero; e resta solo l'integrale doppio.

Si ha allora una formola semplicissima che si trova già contenuta nei lavori di Lagrange. (V. p. es. la trattazione fatta da Lagrange del problema delle superficie minime nei *Miscell. Tau.* Vol. II, e l'ultima lezione del Calcolo delle funzioni.)

§ 30. — Problema di Newton.

Solido rotondo di minima resistenza.

Il problema che storicamente, può dirsi il primo di *calcolo di variazioni* presentatosi alla considerazione dei geometri (senza tener conto di certi facili problemi trattati dai geometri antichi), fu quello trattato da Newton e che può enunciarsi così: *Cercare la curva passante per due punti dati e che rotando intorno ad un asse dato genera il solido che immergendosi in un liquido nella direzione del suo asse, incontri una resistenza minima.*

Questo problema si trova in Newton, *Principia math.* ecc. (Londra, 1686, lib. II, sez. VII, prop. 34, sch.); egli dette senza dimostrazione l'equazione differenziale della curva richiesta.

Dopo di lui si occuparono dello stesso problema:
De l'Hôpital, *Acta Erud.* Agosto 1699.
Joh. Bernoulli, *Acta Erud.* Novembre 1699.
Bouguer, *Mem. de Paris.* 1733.

EULERO, *Methodus inveniendi*, etc. 1744, art. 36.

SAINT-JACQUES DE SILVABELLE, *Mem. de Paris.* Tom. III, 1760.

LEGENDRE, *Mem. de Paris.* 1786, § VI.

Relativamente al problema che ci occupa il lavoro di Legendre ha una grande importanza perchè in esso si trova messa in relazione la risolubilità del problema colla natura della curva che noi vogliamo immaginare curva meridiana, osservazione che era già stata fatta da Silvabelle. Se si immagina che la curva meridiana debba essere una curva a tangente continua allora si ha la soluzione data da Newton; ma questa non corrisponde più ad un minimo se fra le specie di curve che possono risolvere il problema noi comprendiamo anche quelle a tangenti discontinue.

Possiamo citare vari altri lavori relativi a questo soggetto:

TARLETON, *Phil. Magaz.* 4.ª ser. Vol. XXXIV (1867).

(Qui si si studia il problema nell'ipotesi che non sieno dati i due punti estremi della curva meridiana, ma sieno assegnate di questi solo le ordinate e sia dato il volume del corpo.)

WALTON, *Quart. Journ.* Vol. X, pagina 344 (1870);

TODHUNTER, *Researches in the calculus of variations.* London, 1871. Cap. IX e X, pag. 167 e 196;

STARKOFF, *Società di Odessa.* Vol. V e VI (in russo); e *Bulletin de la Société math. de France.* Vol. XIII, 1884-85, pag. 132;

AUGUST, *Ueber die Rotationsfläche kleinsten*

Widerstandes, etc. Crelle. Vol. CIII (1888), pagina 1.

Le considerazioni di Starkoff sono erronee. (Vedi perciò l'ultima pagina del citato lavoro di August e le osservazioni che noi faremo più sotto.)

Non possiamo trattenerci molto sulla discussione del problema e solo ci basterà di indicarne per sommi capi la soluzione.

Si introduce, come fa Newton, l'ipotesi che la resistenza che il corpo di rotazione incontra nell'immergersi nella direzione del suo asse nel fluido, sia proporzionale al quadrato della velocità proiettata sulla normale alla superficie e sia diretta secondo la normale stessa.

Allora se l'asse di x è l'asse di rotazione del corpo, considerando che tutti i punti hanno la stessa velocità, la spinta che un punto della superficie riceverà, sarà proporzionale a $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$. Inoltre poichè il corpo non potrà spostarsi che lungo l'asse, così scomponendo la spinta secondo due direzioni, quella dell'asse x e quella perpendicolare, la componente perpendicolare ad x, sarà distrutta, e restano a considerare solo le componenti parallele ad x, le quali si ottengono moltiplicando la spinta ancora per $\frac{dy}{ds}$. Per ogni zona di ampiezza ds e perpendicolare all'asse x si ha una spinta totale eguale a

$$k \, . \, y \left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds$$

e quindi per tutta la superficie la spinta o la resistenza sarà

$$k \int y \left(\frac{d\,y}{d\,s}\right)^3 d\,s\,.$$

È questo l'integrale che si deve rendere minimo.

Introduciamo la x per variabile indipendente e l'integrale diventa

$$\int \frac{y\,y'^3}{1+y'^2}\,d\,x.$$

Indicando al solito con F la funzione sotto il segno abbiamo

$$F = \frac{y\,y'^3}{1+y'^2}$$

$$M = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y'^3}{1+y'^2}\,,$$

$$M' = \frac{\partial F}{\partial y'} = y\,y'^2\,\frac{3+y'^2}{(1+y'^2)^2}\,.$$

Dobbiamo ora integrare l'equazione differenziale

$$M - \frac{d\,M'}{d\,x} = 0$$

ovvero

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{d\,x}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Osserviamo che poichè la F non contiene esplicitamente la x, la sua derivata totale rispetto ad x sarà identicamente

$$\frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' = \frac{d F}{d x}.$$

Eliminando $\frac{\partial F}{\partial y}$ colla relazione precedente, si ha la relazione identica

$$\frac{\partial F}{\partial y'} y'' + y' \frac{d}{d x} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{d F}{d x} = 0$$

ovvero

$$\frac{d}{d x}\left[F - y' \frac{\partial F}{\partial y'}\right] = 0.$$

Può quindi immediatamente eseguirsi una prima integrazione la quale dà

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{costante} = a$$

cioè, risolvendo rispetto ad y

$$y = \frac{a(1 + y'^2)^2}{y'^3} \quad \textit{(soluzione di Newton).}$$

Possiamo trovare anche x in funzione di y', nel seguente modo:

Da

$$dx = \frac{dy}{y'}$$

si ha

$$x = \int \frac{dy}{y'} = \frac{y}{y'} + \int \frac{y\,dy'}{y'^2}$$

e, sostituendo per y il valore trovato, si ha

$$x = \frac{a(1+y'^2)^2}{y'^4} + a\int \frac{(1+y'^2)^2}{y'^5}\,dy' =$$
$$= a\left(\frac{3}{4\,y'^4} + \frac{1}{y'^2} + \log y'\right) + b.$$

In tal maniera restano trovate le coordinate x y di un punto della curva espresse in funzione di un parametro y'.

La curva che si viene ad ottenere ha una cuspide nel punto in cui $y' = \sqrt{3}$.

Calcolando la seconda derivata di F rispetto ad y' si trova

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = \frac{2\,y\,y'(3 - y'^2)}{(1+y'^2)^2},$$

la quale espressione è positiva per

$$y'^2 < 3$$

ed è negativa per

$$y'^2 > 3.$$

Si ricava quindi che uno dei rami della curva, a cominciare dalla cuspide, corrisponde ad un minimo di resistenza e l' altro corrisponde ad un massimo.

Su questo risultato bisogna fare alcune osservazioni assai importanti. (V. Legendre cit.)

Il problema che ci siamo proposti è il seguente:

Dati due punti A, B far passare per essi una curva, in modo che l'integrale

$$\int y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 ds$$

sia minimo. Applicando il metodo delle variazioni noi dobbiamo supporre che non solo la y ma anche la y' sia una funzione continua di x; per modo che implicitamente veniamo ad escludere dalle soluzioni tutte quelle che corrispondono a curve a tangenti discontinue, p. es. una linea spezzata. In effetti è facile mostrare che possiamo fra A, B disegnare una linea spezzata in modo che l' integrale soprascritto sia di valore piccolo per quanto si vuole.

Basta condurre per A, B due rette che formino coll'asse di x il medesimo angolo, e che si incontrino in un punto P. Consideriamo la curva spezzata APB. Poichè $\frac{dy}{ds}$ corrisponde al seno dell'angolo ω che le due rette fanno coll' asse di x, si ha che per ogni punto della spezzata, $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2$ ha il medesimo valore ($=\operatorname{sen}^2\omega$); quindi l' integrale si riduce a

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \int_A^B y\,dy = \operatorname{sen}^2\omega \left(\frac{1}{2}\,y^2\right)_A^B$$

$$= \operatorname{sen}^2\omega\,\frac{y_B^2 - y_A^2}{2}$$

indicando con y_A, y_B le ordinate dei due punti A, B fissati. Da questa formola appare subito che, potendosi impiccolire a piacere $\operatorname{sen}^2\omega$, l'integrale può diventare piccolo finchè ci piace.

Come si vede, se noi fra le possibili curve che devono risolvere il problema, comprendiamo anche le spezzate, allora il problema non ammette propriamente soluzione.

Recentemente il sig. Starkoff, nei lavori sopracitati, ha preso in nuovo esame la quistione e ha creduto di risolvere questo problema insieme a tutti gli altri della medesima natura, assumendo per variabile indipendente non la x ma l'arco s, in modo da non adoperare l'ipotesi che ds sia eguale a $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Egli giunge ad una curva che era stata già trovata da Legendre come una curva di minimo assoluto quando però nel problema si aggiunge la condizione che debba avere un dato valore l'arco della curva intercetto fra i due punti A, B.

Lo Starkoff non si accorge che se egli assumendo s come variabile indipendente, e applicando le formole del calcolo delle variazioni ottiene un risultato diverso, ciò dipende unicamente dal fatto che, così facendo, o si cambia la natura del problema, ovvero si giunge ad un risultato illusorio; giacchè se si pon mente ai *limiti* dell'integrazione rispetto ad s (cosa che quell'autore non ha fatto) si vede che se tali limiti si fissano come costanti, allora il risultato che si ottiene si riferisce precisamente a quel problema già considerato da Legendre nel quale si suppone fissata la lunghezza dell'arco che deve essere intercetto fra i due punti A, B; e se invece si vogliono supporre variabili i limiti dell'integrale s_0 s_1, allora, ripetendo lo stesso ragionamento da noi sopra riprodotto e che è di Legendre, si riconosce che quell'integrale non ha un minimo quando fra le linee si vogliano includere anche le spezzate. Del resto in questo caso è facile convincersi, dal calcolo di Starkoff, che la soluzione del problema è illusoria; perchè essendo in tal caso le variazioni

$$\delta s_0 \quad \delta s_1$$

diverse da zero, perchè sia zero la variazione dell'integrale è necessario che

$$\left[y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3\right]_0 \qquad \left[y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3\right]_1$$

(i quali sono i coefficienti di δs_0, δs_1 nell'espressione della variazione dell'integrale) sieno zero per il punto A e per il punto B; invece quell'autore trova che la curva avrebbe per equazione (vedi più sotto)

$$y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 = c_1$$

con c_1 diverso naturalmente da zero. (V. *Bulletin de la Société mathématique de France.* Vol. XIII, pag. 138.)

Osservazioni di questo genere relative alle considerazioni di Starkoff sono state già fatte da Sonine, *Sopra un problema di calcolo di variazioni.* Società di Odessa Vol. VI, pag. 1 e pag. 93 e da August. (*Crelle,* Vol. 103, pag. 22.)

Prima di terminare queste considerazioni vogliamo aggiungere qualche cosa sul modo di trattare facilmente l'altro problema cui abbiamo già accennato, quello nel quale si aggiunge come condizione che l'arco s fra i due punti sia assegnato. Si ha allora un problema della natura degli isoperimetri, ma che può essere trattato anche come un problema di massimo assoluto, se noi prendiamo s come variabile indipendente cosa che ci riesce agevole perchè nello speciale integrale che trattiamo non entra esplicitamente la x. Allora possiamo applicare il metodo ordinario delle variazioni e otteniamo

$$F = y \left(\frac{d\,y}{d\,s}\right)^3$$

$$M = \frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{d\,y}{d\,s}\right)^3$$

$$M' = \frac{\partial F}{\partial \frac{d\,y}{d\,s}} = 3\,y \left(\frac{d\,y}{d\,s}\right)^2$$

e quindi

$$M - \frac{d}{ds} M' = \left(\frac{dy}{ds}\right)^3 - 3\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 - 6y \frac{dy}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} =$$

$$= -2\frac{dy}{ds}\left(\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + 3y\frac{d^2y}{ds^2}\right).$$

Eguagliando a zero questa espressione si ha o la soluzione

$$\frac{dy}{ds} = 0$$

che rappresenta una retta parallela all'asse x, e che quindi non rappresenta in generale una curva che può passare per i dati A, B, ovvero si ha

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + 3y\frac{d^2y}{ds^2} = 0$$

che ha per integrale

$$y\left(\frac{dy}{ds}\right)^3 = \text{costante} = c_1 .$$

Sostituendo a ds il suo valore

$$ds = dy\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'} \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

si ha

$$y = c_1 \frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y'^3} .$$

Così resta espressa y in funzione di y'; e per ottenere x potrebbe adoperarsi lo stesso metodo adoperato sopra in una circostanza simile.

La differenza fra questo risultato e quello di Newton sta in ciò che il numeratore del secondo membro anzichè avere per esponente 2, ha per esponente $\frac{3}{2}$.

§ 31. Il problema della brachistocrona.

Si può dire che sia stato questo il problema che dette luogo al calcolo delle variazioni, inquantochè il problema di Newton non avea in modo speciale attirato l'attenzione degli analisti; si può anzi dire che la storia del problema della *brachistocrona* si confonda colla storia stessa dei primordii del calcolo delle variazioni.

Questo problema fu proposto da Giovanni Bernoulli (negli *Acta Erud.* giugno, 1696, pag. 269; *Programma edit. Groningae* 1697) e di cui egli stesso dette una soluzione (negli *Acta Erud.* maggio 1697, pag. 206). (Per questi lavori si può vedere il n. 46 della raccolta *Ostwald's Klassiker*, etc. Leipzig, 1894.)

Nello stesso volume degli *Acta Erud.* a p. 211 comparve l'altra soluzione dello stesso problema proposta da Giacomo Bernoulli, il quale a sua volta propose dei problemi di natura più generale che furono poi raccolti sotto la denominazione comune di problemi degli *isoperimetri*.

Un lavoro destinato a risolvere questi problemi di natura più generale fu quello di Giovanni Bernoulli (*Recueil de Paris*; 1706) ma tal lavoro fu erroneo e peccò contro i principii del calcolo differenziale.

Più importante fu il lavoro di Giacomo Bernoulli (*Analysis magni problematis isoperimetrici; Atti di Lipsia.* 1701), cui seguì la soluzione di Taylor nel suo *Methodus incrementorum*, poi ancora quella di Giovanni Bernoulli (*Académie des Sciences*, 1718) e di Eulero (*Comm. Acad. Petrop.* t. VI, 1732-33). Indi quest'ultimo Autore passò a studiare il caso di un moto che si effettui in un mezzo resistente e del problema corrispondente dette una soluzione inesatta. (*Comm Petrop.* t. VII. 1734-35; *Mechanica*, etc. Vol. II, Petersburg. 1736; *Comm. Petrop.* t. VIII. 1736.) Ma il primo lavoro veramente importante sull'argomento fu quello di Eulero: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.* (Lausannae et Genevae 1744; nel § 34 si tratta il problema della brachistocrona.)

Possiamo infine aggiungere che il problema della brachistocrona formò anche il principale esempio trattato da Lagrange nella celebre Memoria: *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégr. déf.* (*Miscell. Taurinensia*, t. II, 1760-61), e che lo stesso problema fu trattato nuovamente nel t. IV della stessa raccolta nell'ipotesi che non sieno assegnati i punti estremi, ma due curve nel medesimo piano su cui debbano trovarsi tali estremi

(V. Opere. Vol. II pag. 58), e che finalmente, a proposito di una nuova esposizione del metodo delle variazioni, Lagrange trattò ancora il problema della linea di più breve discesa, ma in un mezzo resistente come una qualunque funzione della velocità. (*Leçons sur le calcul des fonctions.* Leçon 22.e; *Opere.* Vol. X, pag. 440.)

Il problema fu poi anche trattato da

BORDA, *Acc. de Paris*, 1768.

LEGENDRE, *Idem*, 1786, § 9.

Per una discussione del problema nei casi di discontinuità si può vedere

TODHUNTER, *Researches,* etc. London, 1871, capitolo VII, pag. 126.

Il problema della brachistocrona è il seguente:

Quale cammino deve seguire un mobile animato da una velocità iniziale v_0, assoggettato alla sola forza della gravità, per trasportarsi, nel minimo tempo possibile, da un punto di coordinate $x_0\, y_0\, z_0$ ad un altro punto di coordinate $x_1\, y_1\, z_1$, supposto che il mezzo dentro cui si effettua il moto, o sia il vuoto, ovvero sia un mezzo che offre una resistenza funzione della velocità del mobile stesso?

Supposto che l'asse x sia verticale, e indicando con g al solito la costante di gravità, per i principii di meccanica si ha che il quadrato della velocità che il mobile avrà in un momento qualunque diminuito del quadrato della velocità iniziale sarà proporzionale all'altezza di caduta, cioè propriamente

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2\,g\,(x_0 - x)}.$$

Intanto da

$$v = \frac{d\,s}{d\,t}$$

si ricava

$$t = \int \frac{d\,s}{v} = \int \frac{d\,s}{\sqrt{v_0^2 + 2\,g\,(x_0 - x)}}$$

Il problema si riduce dunque, a rendere minimo l' integrale del secondo membro.

Introducendo x per variabile indipendente si ha

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}{\sqrt{v_0^2 + 2\,g\,(x_0 - x)}}\, d\,x$$

dove y', z' sono le derivate di y, z rispetto ad x.

Indicando al solito con $M M'$ le derivate della funzione sotto il segno rispetto a y, y', e analogamente con $N N'$ quelle rispetto a z, z', si ha

$$M = 0$$

$$N = 0$$

$$M' = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,\sqrt{v_0^2 + 2\,g\,(x_0 - x)}}$$

$$N' = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,\sqrt{v_0^2 + 2\,g\,(x_0 - x)}}$$

e quindi essendo

$$H_1 = M - \frac{d\,M'}{d\,x}$$

$$H_2 = N - \frac{d\,N'}{d\,x}$$

$$K_1 = M'$$

$$K_2 = N'$$

si ha

$$H_1 = -\frac{d}{d\,x}\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}\sqrt{(v_0^2+2\,g\cdot x_0-x))}}$$

$$H_2 = -\frac{d}{d\,x}\frac{z'}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}\sqrt{(v_0^2+2\,g\,(x_0-x))}}$$

$$K_1 = \frac{y'}{\sqrt{\text{idem}}}$$

$$K_2 = \frac{z'}{\sqrt{\text{idem}}}$$

La variazione dell'integrale è allora

$$\delta\,t = \Big[F\delta\,x + K_1\,\delta y + K_2\,\delta\,z\Big]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}(H_1\,\delta\,y + H_2\delta z)\,dx$$

e per determinare le funzioni y e z si hanno le due equazioni differenziali

$$H_1 = 0$$

$$H_2 = 0$$

le quali danno

$$\frac{y'}{\sqrt{}} = \text{cost.} = c_1$$

$$\frac{z'}{\sqrt{}} = \text{cost.} = c_2$$

donde

$$\frac{y'}{z'} = \text{cost} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$y' = \frac{c_1}{c_2} z'$$

e integrando si ha

$$y = \frac{c_1}{c_2} z + c.$$

Questa equazione fa vedere che la curva richiesta si troverà in un piano verticale.

Prendiamo per piano delle $x\,y$ tal piano verticale, la cui equazione dovrà allora ridursi a $z = 0$, che si ottiene dalla precedente ponendo semplicemente $c_2 = 0$. Ponendo tal valore di z nell'equazione

$$\frac{y'}{\sqrt{}} = c_1$$

e risolvendo rispetto ad y' si ha

$$y' = \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}$$

dove

$$a = x_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

$$b = \frac{1}{2g\,c_1^2} - x_0 - \frac{v_0^2}{2g}.$$

Ponendo

$$x = \frac{a-b}{2} - \frac{a+b}{2}\cos t$$

si ha

$$y' = \frac{a+b}{2}(1-\cos t)$$

$$y = \frac{a+b}{2}(t - \operatorname{sen} t) + c.$$

Si hanno allora le coordinate $x\,y$ della curva espresse in funzione di t

$$x + b = \frac{a+b}{2}(1-\cos t)$$

$$y - c = \frac{a+b}{2}(t - \operatorname{sen} t)$$

le quali mostrano che la curva è una *cicloide colla base orizzontale.*

Se sono fissati i due punti estremi della curva allora le variazioni corrispondenti delle tre coordinate $x\, y\, z$ sono zero, e quindi la prima parte dell'espressione di δt è zero identicamente, e le due costanti $c\, c_1$ che entrano nelle equazioni trovate si determinano colla condizione che la curva passi per tali due punti.

Supponiamo che sia assegnato solo il punto iniziale e sia stabilito che l'altro debba trovarsi su una curva situata in un piano verticale. Prendendo questo piano per piano delle $y\, x$ la equazione della curva sia $\varphi = 0$.

Le variazioni δz_0, δz_1, δx_0, δy_0 sono zero, mentre $\delta x_1\ \delta y_1$ debbono soddisfare la relazione

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_1 \delta x_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_1 (y_1' \,\delta x_1 + \delta y_1) = 0.$$

Intanto la prima parte dell'espressione della variazione dell'integrale eguagliata a zero dà

$$(F)_1\, \delta x_1 + (M')_1\, \delta y_1 = 0$$

che colla precedente, ponendo anche $z = 0$, e sostituendo per F e M' i loro valori, dà

$$\begin{vmatrix} \sqrt{1 + y_1'^2} & \dfrac{y_1'}{\sqrt{1 + y_1'^2}} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1} y_1' & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1} \end{vmatrix} = 0.$$

Questo determinante si riduce facilmente a

$$\begin{vmatrix} 1 & y_1' \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} \end{vmatrix} = 0$$

esprimente la proprietà che la curva di più veloce discesa incontra *ortogonalmente* la curva data φ.

Questa relazione insieme con $\varphi = 0$ determina il punto $x_1\, y_1$, conosciuto il quale, e tenendo poi anche conto del dato punto iniziale si determinano le due costanti d'integrazione.

Se non è dato il punto iniziale $x_0\, y_0\, z_0$, ma è stabilito che esso debba trovarsi su di una curva data ψ, può farsi un'analisi simile; però c'è allora da tener conto del fatto che il parametro x_0 che compare nella F non è più da considerarsi come una quantità fissa, ma variabile, insieme alla variazione della funzione y di x. (V. § 2.) Se invece facciamo che v_0 sia variabile e propriamente tale che

$$v_0^2 + 2\, g\, x_0$$

sia una quantità costante, p. es. zero, cioè che la velocità iniziale sia proporzionale alla radice quadrata dell'altezza di caduta, (in altri termini facciamo che la velocità iniziale sia quella che il corpo avrebbe cadendo liberamente e verticalmente dall'asse delle y sino al punto $x_0\, y_0$, allora in F non più comparirà la quantità x_0 come variabile. In tal caso si potrebbe procedere come sopra e si troverebbe che la traiettoria del mobile deve essere ortogonale sia alla curva ψ, che alla curva φ.

È questo un punto sul quale Lagrange cadde in errore. (§ 4 della sua Memoria nei *Miscell. Taurin.* Vol. II.) Fu il Borda che per il primo si accorse della svista e la corresse (*Mém. de Paris.* 1768); in un lavoro posteriore poi, lo stesso Lagrange (*Miscell. Taurin.* Vol. IV, § 8.) dette del problema la soluzione esatta.

Per il caso che il mobile si debba muovere in un mezzo resistente come una funzione della velocità del mobile stesso, si può vedere la trattazione fattane da Lagrange nelle sue *Lezioni sul calcolo delle funzioni* (*Opere.* Vol. X, pag. 440), e così si potrebbe trattare il caso che sia assegnata una superficie su cui debba giacere la traiettoria.

§ 32. Il problema della curva di minima lunghezza. Geodetiche sulle superficie.

Questo problema è il più facile fra quelli cui può applicarsi il calcolo delle variazioni.

Le condizioni del problema possono variarsi in moltissimi modi; può immaginarsi che sieno assegnati i punti estremi della curva, oppure che questi debbano trovarsi su di curve o superficie assegnate mentre tutta la linea sia del resto libera nello spazio, e può infine chiedersi che la linea debba essere tutta giacente su di una assegnata superficie. In questo ultimo caso (che è il caso più rimarchevole) si hanno le cosidette *linee geodetiche* delle superficie, che sono quelle linee, tracciate sulle superficie, le quali hanno la proprietà di essere della minima lunghezza fra tutte quelle giacenti sulla superficie medesima e che congiungono due dei suoi punti. Nella geometria differenziale le linee geodetiche si definiscono diversamente come *quelle linee tali che in ogni loro punto la normale principale coincida colla normale alla superficie.* Questa costituisce una delle più importanti proprietà delle geodetiche.

Il problema della linea più breve dal punto di vista della teoria delle variazioni, si trova nelle opere dei primi inventori del calcolo delle variazioni; esso forma il § 33 della celebre Memoria di Eulero *Methodus inveniendi*, etc., e si trova estesamente trattato nella lezione 22.ª del *Calcolo delle funzioni* di Lagrange.

Ultimamente il Du Bois Reymond (*Math. Ann.* Vol. XV) volendo studiare i metodi del calcolo delle variazioni da un punto di vista rigoroso, per esaminare sino a che punto tali metodi possono reggere alla critica, scelse come esempio il problema della linea più breve, e su questo problema svolse tutte le considerazioni della Memoria.

L'integrale che rappresenta la lunghezza di una linea nella spazio è

$$\int \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, d\,x.$$

Si ha dunque

$$F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

$$M_1' = \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}$$

$$M_2' = \frac{\partial F}{\partial z_1} = \frac{z'}{\sqrt{\quad \text{idem} \quad}}.$$

Dunque applicando le formole solite abbiamo le due equazioni differenziali

$$\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{\quad\quad}} = 0$$

$$\frac{d}{dx} \frac{z'}{\sqrt{\quad\quad}} = 0$$

donde

$$\frac{y'}{\quad\quad} = \text{cost}; \qquad \frac{z'}{\sqrt{\quad\quad}} = \text{cost}$$

e quindi

$$y' = \text{cost}, \qquad z' = \text{cost}.$$

Queste equazioni, integrate, danno

$$y = c\,x + c' \qquad z = c_1\,x + c'_1$$

che sono le equazioni di una retta nello spazio.

Se sono assegnati i punti estremi della linea, le quattro costanti si determineranno colle condizioni che tali equazioni sieno soddisfatte da

$$x = x_0 \qquad y = y_0 \qquad z = z_0$$

ovvero

$$x = x_1 \qquad y = y_1 \qquad z = z_1.$$

Se il primo punto è dato, ma il secondo debba trovarsi su di una superficie di equazione

$$\varphi(x\,y\,z) = 0;$$

allora δx_0 δy_0 δz_0 sono ancora zero, ma non lo sono più δx_1 δy_1 δz_1. Tali variazioni sono legate dalla relazione

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(\delta y_1 + y_1'\delta x_1) + \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}(\delta z_1 + z_1'\delta x_1) = 0.$$

La prima parte della variazione dell'integrale, giusta le formole generali, è

$$(F)_1\,\delta x_1 + (M_1')_1\,\delta y_1 + (M_2')_1\,\delta z_1$$

che deve annullarsi quando le δx_1 δy_1 δz_1 sono solo legate dalla precedente relazione.

Moltiplicando quest'ultima espressione per

$$\sqrt{1 + y_1'^2 + z_1'^2}$$

e eguagliando a zero si ha

$$(1 + y_1'^2 + z_1'^2)\,\delta x_1 + y_1'\,\delta y_1 + z_1'\,\delta z_1 = 0$$

ovvero

$$1 \, . \, \delta x_1 + y_1'(\delta y_1 + y_1' \delta x_1) + z_1'(\delta z_1 + z_1' \delta x_1) = 0.$$

Dovendo questa relazione coesistere coll'altra precedentemente scritta si ha che i minori della matrice

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} \\ 1 & y_1' & z_1' \end{matrix} \right\|$$

devono essere zero. Ciò si interpreta geometricamente dicendo che la retta incontra *normalmente* la superficie φ.

Proponiamoci ora quest'altro problema:

Fra due punti di una superficie data

$$\varphi(x \, y \, z) = 0$$

condurre una linea, tutta situata sulla superficie, e che abbia la minima lunghezza.

Questo è un problema della specie degli isoperimetri; per risolverlo dobbiamo dunque (giusta la regola di Eulero) rendere minimo l'integrale

$$\int \left[\sqrt{1 + y'^2 + z'^2} + \lambda \varphi(x \, y \, z) \right] d \, x$$

dove λ è costante indeterminata.

Possiamo eseguire gli stessi calcoli del caso precedente, e otteniamo come seconda parte della variazione dell' integrale la espressione

$$\int\left[\left(M_1-\frac{d\,M_1'}{d\,x}\right)\delta\,y+\left(M_2-\frac{d\,M_2'}{d\,x}\right)\delta\,z\right]d\,x=$$

$$=\int\left\{\left[-\frac{d}{d\,x}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right]\delta\,y+\right.$$

$$\left.+\left[-\frac{d}{d\,x}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]\delta\,z\right\}d\,x$$

e quindi

$$-\frac{d}{d\,x}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$$

$$-\frac{d}{d\,x}\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0.$$

Queste relazioni possono porsi sotto la seguente forma

$$-d\,.\frac{d\,y}{d\,s}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}d\,x=0$$

$$-d\,.\frac{d\,z}{d\,s}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}d\,x=0.$$

Moltiplicando la prima per $d\,y$ la seconda per $d\,z$ e sommando e tenendo conto delle relazioni identiche

$$d\,x\,d\,.\frac{d\,x}{d\,s}+d\,y\,d\,.\frac{d\,y}{d\,s}+d\,z\,d\,.\frac{d\,z}{d\,s}=0$$

$$d\,x\frac{\partial\varphi}{\partial x}+d\,y\frac{\partial\varphi}{\partial y}+d\,z\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

si ha l'altra relazione

$$- d \,.\, \frac{dx}{ds} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = 0.$$

Da questa relazione e dalle sue analoghe si ricava che

$$d \,.\, \frac{dx}{ds}, \qquad d \,.\, \frac{dy}{ds}, \qquad d \,.\, \frac{dz}{ds}$$

sono proporzionali a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

i quali sono proporzionali ai coseni di direzione della normale alla superficie φ, mentre

$$d \frac{dx}{ds}, \quad d \frac{dy}{ds}, \quad d \,.\, \frac{dz}{ds}$$

sono invece proporzionali ai coseni di direzione della normale principale alla curva (V. *Calcolo differenziale,* pag. 296, 301); dunque la curva di minima lunghezza sulla superficie ha la proprietà che la sua normale principale coincide colla normale alla superficie.

Tali curve si chiamano *geodetiche della superficie,* e lo studio di esse appartiene alla geometria differenziale.

Per il loro studio dal punto di vista della teoria delle variazioni, vedi:

Bertrand, *Sulla minima distanza fra due punti di una superficie.* Vol. II, della *Mecc. anal.* di Lagrange (1855).

Bonnet, *Comptes rendus.* Vol. XL-XLI (1855).

§ 33. Le superficie ad area minima.

Se si esclude un caso molto particolare trattato già da Eulero nel suo *Methodus*, etc. fu Lagrange il primo che in una Memoria da noi più volte avanti menzionata (*Misc. Taur.* Vol. II) applicò per la prima volta il calcolo delle variazioni allo studio del problema delle superficie di minima area contenuta in un contorno dato, e stabilì per tali superficie l'equazione a derivate parziali.

I lavori numerosissimi posteriori fatti sullo stesso soggetto non appartengono più propriamente al calcolo delle variazioni, perchè si aggirano sui metodi per integrare tale equazione differenziale, e sulle proprietà delle superficie minime.

Lo studio di quella equazione differenziale ha formato l'oggetto dei lavori successivi di Meusnier (1776), Monge (1784), Legendre (1787), Ampère (1820). Dopo di questi i lavori sulle superficie minime sono stati numerosissimi, e noi ci dispensiamo dal citarli perchè, come abbiamo detto, essi non possono propriamente considerarsi come lavori di calcolo di variazioni; ci basti rimandare il lettore alle indicazioni contenute in una Memoria di Beltrami (*Accad. di Bologna*, Vol. VII, 1868), ad una di Schwarz (*Crelle.* Vol. LXXX [1875]), al libro di Darboux (*Théorie des surfaces*, Vol. I, Paris. 1887) alla Diss. di W. Howe (Berlin. 1887) e finalmente al recente libro di Bianchi (*Geom. diff.* Pisa. 1894).

L'area di una superficie è data da

$$I = \int\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, d\,y\, d\,y.$$

Si deve eguagliare a zero la variazione di questo integrale nell'ipotesi che i limiti d'integrazione sieno fissi.

Indicando con $p\ q$ le due derivate di z, e considerando che quì i limiti sono fissi, e quindi il primo dei due integrali della formola che abbiamo chiamato di Delaunay (Vedi § 29) è zero, si ha semplicemente

$$\delta I = \int\int d\,x\,d\,y \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial q}\right]\delta z = 0$$

donde

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0$$

che è l'equazione a derivate parziali della superficie minima.

Questa equazione mostra una proprietà singolare di tali superficie, ed è che i raggi principali di curvatura sono eguali e di segno contrario (Meusnier). Se dell'equazione precedente si cercano le soluzioni di una delle tre forme

$$z = f(x^2 + y^2)$$

$$z = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$z = f(x) + f(y)$$

si hanno tre speciali superficie minime chiamate rispettivamente la *catenoide*, l'*elicoide rigata* (Meusnier), e la *superficie di traslazione* (Scherk [1834]).

Se non è data una parte del contorno, ma questo, o una sua parte, è solo assoggettato a trovarsi su di una data superficie, si trova allora il risultato che la superficie minima incontrerà la superficie data ad angolo retto; questa proprietà può considerarsi come la estensione di quella relativa alle curve di lunghezza minima che da un punto possono condursi ad una superficie data.

§ 34. Problemi vari di calcolo di variazioni.

Raccoglieremo in questo paragrafo alcuni dei più comuni problemi di calcolo delle variazioni con qualche indicazione relativa a ciascuno di essi.

La maggior parte di tali problemi si trovano già nell'opera celebre di Eulero, il quale ne raccolse e discusse un numero grandissimo.

Dopo il problema della brachistocrona di cui abbiamo discorso nel § 31 furono storicamente famosi i problemi degli *isoperimetri*, cosidetti perchè si trattava di trovare fra tutte le curve aventi il medesimo perimetro quelle che possedevano in massimo o minimo grado una certa determinata proprietà.

Il primo che ne trattò fu Giacomo Bernoulli, (*Acta Erudit.* maggio, 1697) il quale, nella Memoria in cui risolveva in altro modo il problema della brachistocrona del fratello Giovanni, sul finire, citò alcuni facili problemi di isoperimetri come p. es. fra tutte le curve di dato perimetro trovare quella racchiudente massima area, ovvero, fra tutte le curve di dato perimetro trovare quella avente il centro di gravità dell'area o della linea, più distante dalla base (problemi già risoluti, il primo fin dai geometri greci, il secondo da Giovanni Bernoulli, *Opere*, t. III, pag. 497) e finì col proporre il seguente problema che disse d'aver risoluto, e che noi riporteremo quì come il primo dei problemi dell'elenco che vogliamo dare in questo paragrafo.

1. *Costruire una curva di data lunghezza, passante per due punti dati, tale che, costrutta fra i medesimi estremi un'altra curva di cui le ordinate sieno una potenza o una radice delle corrispondenti ordinate della prima curva, ovvero dei corrispondenti archi della medesima, l'area della seconda sia un massimo.* Per un caso particolare di questo problema quando cioè l'ordinata della seconda curva deve essere eguale all'arco corrispondente dell'antica, si ottiene una *catenaria*. Si può vedere l'opera di Momsen, *Elementa calculi Variationum* etc. Altona, 1833, pag. 45 e Todhunter, *Researches*, etc. London, 1871, pag. 220.

2. *Sia proposto di trovare fra tutti i poligoni chiusi che hanno per lati dei segmenti dati, qual'è quello di massima area.*

Si dimostra che è quello iscritto in un cerchio; di questo problema trattò col calcolo delle variazioni Lagrange nella seconda appendice della Memoria *Nouvelle methode*, etc. *Miscell. Taur.* Volume II); ne avea già trattato per via sintetica Cramer (*Accad. di Berlino*, 1752).

Per il problema analogo relativo ai poliedri di data superficie e massimo volume. (Vedi Lindelöf, *Math. Ann.* Vol. II, pag. 150).

Se invece di un poligono si tratti di una curva di dato perimetro, si ottiene un cerchio, teorema dimostrato già da Zenodoro e tramandatoci da Pappo. (Vedi Cantor, *Geschichte der Math.* Vol. I, 308.) Nel § 8 della Memoria di Legendre (*Acad. de Paris.* 1786) si studia questo problema con dettaglio dal punto di vista del calcolo delle variazioni. Esso si trova ancora in Eulero, *Methodus inveniendi*, etc. Cap. V, § 41. Su problemi di questo genere, nel piano, sulla sfera, e nello spazio, ma da un punto di vista completamente geometrico, esiste una voluminosa Memoria di Steiner. (*Crelle*, Vol. XXIV, pag. 93 e pag. 189; Liouville, Vol. VI.)

3. *Fra due punti dati o due curve date costruire una curva tale che per essa discendendo un grave, la velocità acquistata alla fine della caduta sia massima.*

Ne tratta Lagrange alla fine dell'ultima lezione del calcolo delle funzioni. (*Opere*, Vol. X, pagina 448.) Se i punti estremi devono trovarsi sopra due curve date si trova che le tangenti a tali due curve in tali punti estremi, devono essere parallele, risultato analogo ad un altro che si trova per la brachistocrona.

4. *Fra tutte le curve di egual perimetro aventi per estremi due punti dati, trovare quella nella quale il centro di gravità della linea è più distante dalla base.*

Questo problema era stato risoluto erroneamente da Galilei (1638), il quale avea creduto che la curva fosse una parabola; fu trattato indi dai due fratelli Bernoulli (Giovanni e Giacomo) da Huyghens e Leibnitz (*Acta Erudit.* 1690-1692); si trova che la curva richiesta è una *catenaria*, cioè una curva in cui il raggio di curvatura è eguale alla lunghezza della normale compresa fra la curva e l'asse di x, ma è situato dalla parte opposta di tale normale.

Se a è una costante indeterminata bisogna rendere massimo l'integrale

$$\int (y + a)\, d\, s$$

giacchè $\frac{1}{s}\int y\, d\, s$ è, come si sa dalla Meccanica, eguale all'ordinata del centro di gravità della linea.

Di questo problema trattò anche Legendre nel § 7 della Mem. del 1786 (Accad. di Parigi). Vedi anche Mayer, *Math. Ann.* Vol. XIII, p. 65.

I seguenti problemi (dal n. 5 al 11) si trovano tutti trattati e risoluti nella celebre Memoria di Eulero (*Methodus inveniendi*, etc.) più volte citata.

5. *Per due punti far passare una curva tale che l'area compresa fra essa, la sua evoluta, e le normali negli estremi sia la minima possibile.*

Si trova che la curva è un ramo di cicloide (Eulero cit. Cap. II, § 51). Per questo problema si può vedere anche JELLETT, *Variationsrech.* (trad. tedesca) (Braunschweig 1860, pag. 191 e 422) e TODHUNTER, *Researches*, etc. London, 1871, pag. 250.

6. *Fra tutte le curve che congiungono due punti e che rotando intorno ad un asse generano superficie della stessa area, trovare quella per la quale una tal superficie racchiuda il massimo volume.* (Eulero, Cap. V, § 44.)

Questo problema ha dato luogo a molte controversie. (V. MOIGNO-LINDELÖF, *Calcul des variations*, pagina 218 e GREVE, *Ein Problem aus der Variationsrech.* Gött. Dissert. 1875.)

7. *Fra tutte le curve passanti per punti e racchiudenti la stessa area, trovare quelle che rotando intorno ad un asse generano la superficie di minima area.* (Eulero, Cap. V, § 45.)

Si ottiene una curva di terz'ordine con un punto doppio.

8. *Fra tutte le curve dello stesso perimetro e passanti per due punti trovare quelle che rotando intorno ad un asse generano il corpo di massimo volume.* (Eulero, Cap. V, 46.)

Si ottiene la cosiddetta *curva elastica*, avente la proprietà che il suo raggio di curvatura è inversamente proporzionale all'ascissa.

9. *Trovare la curva che, fra tutte le altre dello stesso perimetro, ha la proprietà di generare*

colla rotazione intorno ad un asse, una superficie di massima o minima area. (Idem, Cap. V, § 47.)

Si trova la *catenaria*. La superficie ottenuta si chiama *catenoide* (*Plateau*). Vedi GOLDSCHMIDT, *Determinatio superf. min.*, etc. Göttingen. 1831. LINDELÖFF, *Sur les limites entre lesquelles la caténoide est une surface minime.* Math. Ann. Volume II, pag. 160 (1870.)

10. *Fra tutte le curve dello stesso perimetro e racchiudenti la medesima area, trovare quelle che rotando intorno ad un asse generano una superficie racchiudente il massimo o minimo volume.* (Eulero. Cap. VI, § 22.) Si trova la curva *elastica.*

11. *Fra tutte le curve di medesime ascisse, racchiudenti la medesima area, e che rotando intorno all' asse danno superficie racchiudenti lo stesso volume, trovare quelle di cui il centro di gravità è più basso o più alto.* (Idem. Cap. VI, § 23.) Si trova la linea retta.

12. *Dati due piani paralleli e un punto in uno di essi, condurre da questo punto all'altro piano una linea di lunghezza data, tale che l'area della superficie cilindrica che si ottiene conducendo dai diversi punti della linea delle perpendicolari ai due piani e terminate a questi, sia massima.*

Si ottiene l'*elica*. (Vedi MOIGNO, *Calcul des Variations*. Paris. 1861, pag. 299, e STARKOFF, *Rend. di Palermo*. Vol. II, pag. 116.) In quanto a quest'ultimo lavoro si tengano però presenti le osservazioni da noi fatte al § 30 relative ad un altro lavoro del medesimo autore.

13. *Fissate due ordinate condurre da un punto della prima ad uno della seconda una curva tale*

che la figura determinata dall'asse delle ascisse dalle due ordinate e dalla curva abbia perimetro assegnato e area massima. (Vedi CHALLIS, *On the solution of three problems*, etc. Phil. Maz. 1872.)

14. *Trovare una superficie di data area e che racchiuda il massimo volume.* (V. SARRUS, *Mem. des sav. etrans.* Vol. X. 1846; SABININE, *Raccolta mat. di Mosca.* Vol. XIV, pag. 451 (1890).)

15. *Trovare una curva, di prima curvatura costante, i cui estremi sieno situati sopra due date curve o superficie, e la cui lunghezza sia massima o minima.*

Questo problema fu trattato prima da Delaunay, poi da Jellett e Todhunter. Un lavoro recente su questo soggetto è la dissertazione di laurea di Venske, Göttingen. 1891.

16. *Determinare una curva che abbia il minimo o massimo momento d'inerzia rispetto ad un punto dato.*

Questo problema fu trattato da Eulero erroneamente; la soluzione esatta fu data da OSSIAN BONNET, *Liouville* T. IX, pag. 97 (1844.)

Per un problema analogo, vedi anche DE LA GOUPILLIERE, *Sur le minimum du potentiel de l'arc. Ass. Franc. Besançon.* Vol. XXII, pag. 164 (1893.)

Per altri problemi di calcolo di variazioni citiamo:

MINDING, *Crelle.* V (1830);

SPITZER, *Grunert's Archiv.* Vol. XXIII, pagina 125 (1854);

SCHELLBACH, *Probleme der Variationsr.* Crelle. Vol. XLI, pag. 293 (1851);

WALTON, *On a problem in the calculus of variations.* Quart. Journ. X, pag. 72 (1869);

BORCHARDT, *Ueber das Ellipsoid von kleinstem Volumen bei gegebenen Flächeninhalte einer Anzahl von Centralschnitten.* Berl. Monatsb. 1872, pag. 505;

ID., *Berl. Abh.* 1866 (Probl. del tetraedro);

WILKINSON, *Two probleme in the calculus of variations.* Messenger, 2.ª Serie. Vol. I, pag. 175 (1872);

KORKINE et ZOLOTAREFF, *Sur un certain minimum.* Nouv. Ann. 2.ª Ser. Vol. XII, pag. 337 (1873);

SCHURINGA, *Les trajectoires minima.* Archives Néerl. Vol. VIII, pag. 1 (1173);

MINDING, *Ueber einige isoperimetrische Aufgaben.* Bull. de St. Pétersb. Vol. XXIV (1877);

ID., *Théorie des courbes du plus petit perimètre sur des surfaces courbes.* Bull. de St. Pétersb. Vol. XXI e XXV (1876-78);

D'OCAGNE, *Sur certaines figures minima.* Bull. de la Soc. Math. Vol. XII, pag. 168;

POSSE, *Quelques remarques sur une certaine question de minimum.* M. A. Vol. XXVI, pagina 593 (1886);

MARKOFF, *Einige Beispiele der Lösung besonderer Aufgaben über Max. und Min.* (in russo). Soc. Math. in Charkow. 2.ª Ser. Volume I, pagina 250.

§ 35. Applicazioni del calcolo delle variazioni all'analisi. Condizioni di integrabilità.

Il problema che ci proponiamo ora e che ha il più intimo legame col calcolo delle variazioni è il seguente:

Sia data una funzione di x, y e delle derivate di y rispetto ad x. Sia

$$F\,x\,y\,y'\,y''\ldots y^{(n)}).$$

Vogliamo ricercare quando l'integrale

$$\int F(x\,y\,y'\ldots y^{(n)})\,dx$$

si può calcolare senza la previa conoscenza della funzione y di x, e quindi delle sue derivate, in altri termini quando la funzione F è la derivata esatta di una funzione φ di $x\,y\,y'\ldots y^{(n-1)}$. Quando ciò può farsi noi diremo che la funzione *F è integrabile;* ma è chiaro quale significato noi intendiamo qui dare alla parola *integrabile;* noi vogliamo intendere che la F possa integrarsi indipendentemente dalla conoscenza di y.

Supponiamo che ciò possa farsi e che esista la funzione φ. Si avrà identicamente

$$F - \frac{d\varphi}{dx} = 0$$

e quindi, integrando fra due qualunque limiti, calcolando la variazione dell'integrale e ponendola eguale a zero si ha

$$\delta \int_{x'}^{x''} \left(F - \frac{d\,\varphi}{d\,x}\right) d\,x = 0 = \delta \int_{x'}^{x''} F\,d\,x - \delta \Big[\varphi\Big]_{x'}^{x''}$$

Calcoliamo questa variazione e trasformiamola colla solita formola. (V. § 3.)

Si ha

$$\Big[F\,\delta\,x + K\,\delta\,y + K'\,\delta y' + \ldots\Big]_{x'}^{x''} - \delta\Big[\varphi\Big]_{x'}^{x''} -$$

$$- \int_{x'}^{x''} \left[M - \frac{d\,M'}{d\,x} + \frac{d^2\,M''}{d\,x^2} - \ldots\right] \delta\,y\,d\,x.$$

Perchè questa variazione sia zero indipendentemente da y, sappiamo che deve essere zero la parte sotto il segno integrale e quindi si ha la condizione

$$M - \frac{d\,M'}{d\,x} + \frac{d^2\,M''}{d\,x^2} - \ldots = 0$$

dove

$$M = \frac{\partial\,F}{\partial\,y}$$

$$M' = \frac{\partial\,F}{\partial\,y'}.$$

Questa è la condizione d'integrabilità che quì ci si presenta come una condizione *necessaria;* si può subito mostrare che essa è anche sufficiente.

Per $n = 1$ la condizione

$$M - \frac{dM'}{dx} = 0$$

cioè

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

è sufficiente perchè F sia integrabile.

Giacchè sviluppando si ha

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' - \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' = 0$$

e poichè i primi tre termini non contengono y'', così deve essere necessariamente

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$$

cioè F della forma

$$F = Py' + Q$$

dove P e Q non contengono y'.

Se ora costruiamo la funzione

$$\varphi = \int P\,dy$$

dove intendiamo che in P sia considerata solo la y come variabile, φ sarà una funzione di x e y

di cui la derivata parziale rispetto ad y è P, e quindi

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' = Py' + R$$

dove R non contiene y'. Quindi

$$F - \frac{d\varphi}{dx} = Q - R$$

non contiene y'; e inoltre non conterrà neanche y, giacchè, soddisfacendo F per ipotesi alla condizione

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

e soddisfacendovi anche $\frac{d\varphi}{dx}$, essendo questa una derivata esatta, vi soddisfarà anche la loro differenza; ma y' non è contenuto nella loro differenza, dunque resterà

$$\frac{\partial (Q - R)}{\partial y} = 0$$

donde si ricava che $Q - R$ non contiene y.

Questa differenza sarà dunque una funzione di sola x, $\psi(x)$, che può sempre porsi sotto la forma della derivata di un'altra funzione di x sola

$$\int \psi(x)\, dx,$$

e quindi si ha

$$F = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d}{dx}\int \psi(x)\,dx$$

cioè F resta espressa come la derivata esatta di una funzione di x e y.

Il teorema dunque è vero per $n = 1$. Possiamo mostrare che se è vero sino all'indice $n - 1$, è vero anche per l'indice n.

Se

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} - \ldots \pm \frac{d^n}{dx^n}\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} = 0$$

sviluppando, e osservando che tutti i termini, meno uno, non contengono mai $y^{(2n)}$, ne ricaviamo che il coefficiente di $y^{(2n)}$ deve essere zero, cioè

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^{(n)2}} = 0$$

e perciò deve essere F della forma

$$F = P\,y^{(n)} + Q$$

dove P e Q non contengono $y^{(n)}$.

Se ora costruiamo

$$\varphi = \int P\,d\,y^{(n-1)}$$

dove in P intendiamo variabile solo $y^{(n-1)}$, e fisse tutte le altre quantità che vi compariscono, la derivata di φ rispetto a $y^{(n-1)}$ è P.

Quindi si ha

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y' + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)}$$
$$= P y^{(n)} + R$$

dove R non contiene $y^{(n)}$.

Perciò

$$F - \frac{d\varphi}{dx} = Q - R$$

non conterrà $y^{(n)}$, e soddisferà a condizioni simili a quelle cui soddisfa F, perchè nel primo membro vi soddisfanno F e la derivata esatta $\frac{d\varphi}{dx}$. Per la ipotesi fatta, $(Q - R)$ sarà perciò la derivata esatta di una funzione di $x\, y\, y' \ldots y^{(n-2)}$. Indicandola con $\frac{d\psi}{dx}$ abbiamo perciò

$$F = \frac{d(\varphi + \psi)}{dx}$$

dove $\varphi + \psi$ è una funzione di $x\, y\, y' \ldots y^{(n-1)}$.

Con ciò il teorema è dimostrato.

Considerazioni analoghe potrebbero farsi se F anzichè contenere solo y, contenesse altre funzioni z, u, v, ecc.

Applicando k volte di seguito questo criterio si possono trovare le condizioni perchè una funzione della specie considerata sia k volte integrabile (V. JELLETT, *Variat.*, etc. pag. 370) e similmente possono applicarsi questi stessi procedimenti agli integrali multipli anzichè semplici.

Se F è una funzione di k variabili, di funzioni di queste variabili e delle derivate di tali funzioni, la condizione necessaria e sufficiente perchè l'integrale k^{plo} di F possa ridursi ad un integrale $(k-1)^{plo}$ indipendentemente dalla conoscenza delle funzioni che entrano in F, è che la parte sotto il segno d'integrale k^{plo} nella formola di Delaunay (V. § 29) *sia identicamente zero.*

Non ci estendiamo su queste considerazioni, e termineremo con qualche indicazione sulla storia e sulla bibliografia di questo argomento.

Il teorema dell'integrabilità è di Eulero il quale lo fece conoscere per la prima volta nel X Vol. dei *Novi Comment. Petrop.* (1764) in una Memoria intitolata *Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum.*

In questa Memoria però Eulero non fece che enunciare il teorema, e fu il marchese di Condorcet il primo che ne dette una dimostrazione diretta (*Acad. de Paris*, 1765, pag. 54-55).

Dopo pochi anni comparvero due Memorie di Lexell (*Novi Comment. Petropol.* Vol. XV, XVI, 1771-72) in cui quest'autore si propose di dimostrare il teorema in tutta la sua integrità, cioè non solo la necessità ma anche la sufficienza delle note condizioni. Le dimostrazioni di quest'autore sono però sempre parse molto complicate, e parvero tali anche a Lagrange, il quale nelle sue *Lezioni sul calcolo delle funzioni* (pag. 409, Paris, 1806) si occupò di questo teorema.

Altri lavori sull'argomento sono in ordine di tempo:

Sarrus, *Ann. de Gergonne.* Vol. XIV, pagina 197 (1824);

M. B. D. C., *Ann. de Gergonne.* Vol. XIV, pagina 319;

Poisson, *Mém. de l'Acad.* Vol. XII (1833), pagina 223;

Sarrus, *Comptes Rendus.* Vol. I (1835), pagina 115;

Dirksen, *Accad. di Berlino.* 1838;

Bertrand, *Journ. de l'Éc. Polyt.* Cah. XXVIII (1841), pag. 249;

Raabe, *Crelle.* Vol. XXXI, pag. 181 (1844);

Joachmistahl, *Crelle.* Vol. XXXIII, pag. 95 (1846). In questo lavoro l'autore comincia col contestare al precedente la priorità di alcuni teoremi.

Bruun, *Bulletin Phys.-math. de l'Acad. de St. Pétersbourg.* Vol. VII (1848);

Bertrand, *Journal de Liouville.* Vol. XIV, pag. 123 (1849);

Sarrus, *Idem*, pag. 131;

Minich, *Ann. di Tortolini.* Vol. I (1850), pagina 321;

De Morgan, *Cambridge Phil. Society.* Volume IX, 2.ª parte (1851).

PARTE II.

Calcolo diretto e cenni sul calcolo inverso delle differenze finite.

INTRODUZIONE.

Il calcolo delle differenze finite può considerarsi come un'appendice dell'algebra superiore, e come un' utile introduzione al calcolo infinitesimale.

Quasi tutte le formole e i problemi del calcolo infinitesimale trovano i loro analoghi, e alle volte anche sotto forma più generale, nel calcolo delle differenze finite, il quale però d' altra parte, non facendo uso mai di concetti di infinitesimi e di limiti, e, considerando sempre la quantità e le differenze delle quantità sotto forma finita, rientra nei concetti generali dell'algebra superiore.

Per quanto collocato fra l' algebra e il calcolo infinitesimale, pure non credo che il calcolo delle differenze finite possa, dal punto di vista didattico, rappresentare utilmente un passaggio dall'una all'altra di quelle due discipline; inquantochè mi pare che molti dei procedimenti che esso adopera, e dei problemi che si propone, non potrebbero essere intesi in tutta la loro estensione da chi ignorasse i principii del calcolo infinitesimale, e d' altra parte tutti quelli altri problemi che di questi non abbisognano, non possono formare, presi insieme, qualcosa da richiamare in modo speciale l' interesse degli studiosi.

È perciò che il calcolo delle differenze finite è stato quasi sempre, negli antichi trattati, considerato come un'ultima appendice del calcolo infinitesimale; nei trattati più recenti poi esso è scomparso del tutto, forse perchè si dovea dar posto ad altri problemi, ad altri soggetti e ad altre discussioni nelle quali il calcolo infinitesimale è venuto man mano allargandosi.

Ciononostante anche il calcolo delle differenze finite, ha la sua non piccola importanza, e ricordando che per esempio il problema dell' interpolazione rappresenta il problema più generale di quello che nel calcolo infinitesimale è il problema della formola di Taylor, problema che può considerarsi come il cuore di tutto il calcolo, e che inoltre (per non citare altro) il problema dell' integrazione alle differenze ha il più intimo rapporto colla teoria algebrica delle serie, si deve ammettere che l'ostracismo dato negli ultimi tempi al calcolo delle differenze finite è per lo meno ingiustificato.

Per quistioni di spazio non ho potuto estendermi sul calcolo inverso alle differenze, di cui non ho potuto che fare solo un cenno, estendendomi invece molto dippiù sul calcolo diretto; ma ci vorrebbe un libro intero per potere diffusamente trattare p. es. solo delle equazioni alle differenze finite, che rappresentano un problema assai difficile, forse anche più difficile del problema delle equazioni differenziali.

Terminerò questa introduzione coll'elenco dei principali libri che hanno specialmente trattato del calcolo delle differenze finite.

NICOLE, *Traité du calcul des différences finies.* Paris, 1717;

PRONY, *Méthode directe et inverse des différences, etc.* Paris, 1799;

LACROIX, *Traité des différences et des séries.* Paris, 1800;

HERSCHELL, *Collection of Examples of the Applications of the Calculus of finite Differences.* 1820;

SCHLÖMILCH, *Theorie der Differenzen und Summen.* 1848;

BOOLE, *Treatise on the calculus of finite differences.* Cambridge-London, 1860;

STURM, *Cours d'analyse.* Vol. II. Paris, 1868;

HEYMANN, *Studien über die Transformation und Integration der differential- und differenzenrechnung.* Leipzig, 1891;

MARKOFF, *Differenzenrechnung.* Pietroburgo, 1891 (in russo), e tradotto da FRISENDORFF e PRÜMM, Leipzig, 1896.

§ 1. — Differenze di una funzione.

Sia $f(x)$ una funzione di x e immaginiamo assegnati ad x una successione di valori

$$x_0 \, x_1 \, x_2 \ldots,$$

tali che il precedente sia sempre minore del seguente.

Formiamo le differenze

$$f(x_1) - f(x_0)$$
$$f(x_2) - f(x_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Queste le indicheremo rispettivamente coi simboli

$$\Delta f(x_0), \ \Delta f(x_1), \ldots$$

e le chiameremo *differenze prime* della funzione f.

Operando similmente sulle differenze prime, cioè formando le differenze

$$\Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)$$
$$\Delta f(x_2) - \Delta f(x_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

si ottengono le differenze seconde che si indicheranno coi simboli

$$\Delta^2 f(x_0), \ \Delta^2 f(x_1), \ldots;$$

e così di seguito.

Una immediata proprietà che si presenta è la seguente: *La differenza* $(\alpha + \beta)^{ma}$ *di una funzione* *in un punto* x_0, *è eguale alla differenza* α^{ma} *della espressione rappresentata da* $\Delta^\beta f(x_0)$, *cioè in simboli*

$$\Delta^{\alpha+\beta} f(x_0) = \Delta^\alpha (\Delta^\beta f(x_0)).$$

In effetti, per definizione,

$$\Delta^{\beta+1} f(x_0)$$

non è altro che la differenza

$$\Delta^\beta f(x_1) - \Delta^\beta f(x_0)$$

cioè la differenza prima calcolata per la successione di valori

$$\Delta^\beta f(x_0),\ \Delta^\beta f(x_1),\ \Delta^\beta f(x_2), \ldots.$$

Perciò:

$$\Delta^{\beta+1} f(x_0) = \Delta (\Delta^\beta f(x_0)).$$

Similmente sarà

$$\Delta^{\beta+2} f(x_0) = \Delta (\Delta^{\beta+1} f(x_0)) = $$
$$= \Delta^2 (\Delta^\beta f(x_0))$$

e così, continuando, appare infine la verità dell'assunto.

In seguito, si supporrà spesso che le prime differenze dei valori della variabile indipendente x sieno *costanti*, cioè che sia

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots$$

e per semplicità spesso un tal valore costante lo prenderemo eguale ad 1.

§ 2. — Primi teoremi sulle differenze.

Per le differenze possono dimostrarsi teoremi analoghi a quelli noti per le differenziali o le derivate di una funzione.

Sono evidenti i due teoremi:

La differenza di una funzione del tipo

$$c\, f(x),$$

dove c è costante, è eguale al prodotto di c per la differenza di f.

La differenza di una somma algebrica di funzioni è eguale alla somma algebrica delle differenze delle funzioni stesse.

Egualmente semplice è la dimostrazione di quest'altro teorema:

La differenza del prodotto

$$\varphi(x)\,\psi(x)$$

di due funzioni, è data dalla formola

$$\Delta\,[\varphi(x_0)\,\psi(x_0)] = \varphi(x_1)\,\Delta\,\psi(x_0) + \psi(x_0)\,\Delta\,\varphi(x_0)$$

In effetti tale differenza è

$$\varphi(x_1)\,\psi(x_1) - \varphi(x_0)\,\varphi(x_0)$$

e aggiungendo e togliendo il termine

$$\varphi(x_1)\,\psi(x_0)$$

e raccogliendo opportunamente i termini si ha la formola di sopra.

La differenza del quoziente di due funzioni

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

è data dalla formola

$$\Delta\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}=\frac{\psi(x_0)\,\Delta\,\varphi(x_0)-\varphi(x_0)\,\Delta\,\psi(x_0)}{\psi(x_0)\,\psi(x_1)}\,.$$

In effetti, tale differenza è

$$\frac{\varphi(x_1)}{\psi(x_1)}-\frac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}=$$

$$=\frac{\varphi(x_1)\,\psi(x_0)-\varphi(x_0)\,\psi(x_1)}{\psi(x_0)\,\psi(x_1)}\,,$$

e aggiungendo e togliendo al numeratore il termine

$$\varphi(x_0)\,\psi(x_0)$$

e raggruppando convenientemente i termini, si ha la formola superiormente scritta.

§ 3. — Espressione della differenza n^{ma} di una funzione.

È facile trovare una formola che dà la espressione di $\Delta^n f$ per mezzo di $f(x_0)$, $f(x_1)\ldots$

La formola che si ottiene è anche notevole per il fatto che essa può porsi sotto una certa opportuna forma simbolica assai semplice.

Cominciamo a considerare la differenza seconda

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x_0) &= \Delta f(x_1) - \Delta f(x_0)\\ &= [f(x_2) - f(x_1)] - [f(x_1) - f(x_0)]\\ &= f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0).\end{aligned}$$

Il secondo membro di questa espressione può scriversi simbolicamente

$$[f(x_1) - 1]^2$$

intendendo che nello sviluppo della potenza si sostituisca sempre alla potenza simbolica

$$[f(x)]^i$$

la espressione

$$f(x_i)$$

e quindi a

$$[f(x)]^0$$

la

$$f(x_0).$$

Dimostriamo che si ha in generale simbolicamente

$$\Delta^n f(x_0) = [f(x) - 1]^n.$$

Supponiamo che questa formola sia verificata sino alla differenza $n - 1^{ma}$, e allora la differenza n^{ma} sarà data da

$$\Delta^n f(x_1) = \Delta^{n-1} f(x_1) - \Delta^{n-1} f(x_0) =$$
$$= f(x_n) - (n-1)_1 f(x_{n-1}) + (n-1)_2 f(x_{n-2}) - \dots$$
$$- \qquad f(x_{n-1}) + (n-1)_1 f(x_{n-2}) - \dots$$

Ed essendo in generale

$$(n-1)_k + (n-1)_{k-1} = (n)_k$$

si ha

$$\Delta^n f(x_0) = f(x_n) - (n)_1 f(x_{n-1}) + (n)_2 f(x_{n-2}) - \dots$$

che è la formola richiesta.

§ 4. — Espressione del valore della funzione nel punto x_n mediante le differenze successive nel punto x_0.

Con eguale facilità può trovarsi l'espressione di $f(x_n)$ mediante le differenze successive nel punto x_0.

In effetti

$$f(x_1) = f(x_0) + \Delta f(x_0)$$
$$f(x_2) = f(x_1) + \Delta f(x_1)$$
$$= f(x_1) + \Delta f(x_0) + \Delta^2 f(x_0)$$
$$= f(x_0) + 2\Delta f(x_0) + \Delta^2 f(x_0).$$

Il secondo membro può porsi sotto la forma simbolica

$$(1+\Delta)^2 f(x_0)$$

e si può far vedere che in generale

$$f(x_n) = (1+\Delta)^n f(x_0).$$

Giacchè se per ipotesi si ha:

$$f(x_{n-1}) = (1+\Delta)^{n-1} f(x_0),$$

formando le differenze, si ha

$$\Delta f(x_{n-1}) = \Delta\left[(1+\Delta)^{n-1} f(x_0)\right].$$

Intanto

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + \Delta f(x_{n-1})$$

dunque

$$\begin{aligned} f(x_n) &= f(x_{n-1}) + \Delta\left[(1+\Delta)^{n-1} f(x_0)\right] \\ &= (1+\Delta)^{n-1} f(x_0) + \Delta\left[(1+\Delta)^{n-1} f(x_0)\right]. \end{aligned}$$

E sviluppando i simboli si ha

$$\begin{aligned} & f(x_0) + (n-1)_1 \Delta f(x_0) + (n-1)_2 \Delta^2 f(x_0) + \dots \\ + & \qquad\qquad \Delta f(x_0) + (n-1)_1 \Delta^2 f(x_0) + \dots \end{aligned}$$

e per la solita relazione fra i coefficienti binomiali di cui ci siamo già serviti nel paragrafo precedente, questa espressione diventa

$$f(x_0) + (n)_1 \Delta f(x_0) + (n)_2 \Delta^2 f(x_0) + \dots$$

che simbolicamente non è altro che

$$(1+\Delta)^n f(x_0).$$

§ 5. — Altre formole più generali relative alle espressioni delle differenze di ordine superiore.

Le formole di cui vogliamo qui trattare sono contenute in una Nota di Studnicka (*Beitrage zum Operationscalcul.* Prag. Berichte 2. Abth. 1871, pag. 39), riprodotta nel vol. X, pag. 76 del *Giorn. di Battaglini.*

Dalla formola

$$\Delta^{m+1} f(a_h) = \Delta^m f(a_{h+1}) - \Delta^m f(a_h)$$

otteniamo

$$\Delta^m f(a_{h+1}) = (1 + \Delta)\, \Delta^m f(a_h). \qquad (1)$$

Ponendo inoltre simbolicamente

$$f(a_{h+1}) = f(a_h)\, f(a)$$

abbiamo dalla medesima formola, simbolicamente

$$\Delta^{m+1} f(a_h) = \Delta^m f(a_h)\,[f(a) - 1]. \qquad (2)$$

Ponendo in (1) in luogo di h, successivamente

$$h + 1,\ h + 2, \ldots h + n$$

otterremo

$$\Delta^m f(a_{h+i}) = (1 + \Delta)\, \Delta^m f(a_{h+i-1}),\ (i = 1, 2, \ldots n)$$

le quali moltiplicate fra loro, soppressi i fattori comuni ai due membri, ci danno

$$\Delta^m f(a_{h+n}) = (1 + \Delta)^n \Delta^m f(a_h) \qquad (3)$$

cioè

$$\Delta^m f(a_{h+n}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^{m+i} f(a_h).$$

Come si vede, questa formola resta così ricavata, considerando Δ non come un simbolo d'operazione, ma come una quantità, e applicandovi quindi i procedimenti ordinarii del calcolo. Il metodo non è rigoroso almenochè non si dimostri prima che effettivamente Δ può essere sottoposto a tali procedimenti; non sarebbe però affatto difficile dimostrare in modo rigoroso la precedente formola; noi però non insisteremo su tale dimostrazione e ci contenteremo di siffatte dimostrazioni basate sul calcolo di operazioni, dimostrazioni che se lasciano a desiderare qualcosa in quanto a rigore, (almenochè non si premetta tutta una teoria sul calcolo delle operazioni, teoria che ci porterebbe troppo lontani dal nostro scopo) pure offrono il vantaggio di grande semplicità ed eleganza.

Dalla formola precedente per $m = 0$ $n = 0$ otteniamo una formola già trovata nei paragrafi precedenti.

Nella (2) ponendo per m successivamente

$$m + 1, \; m + 2, \ldots m + n$$

avremo $n + 1$ equazioni della forma

$$\Delta^{m+i} f(a_h) = \Delta^{m+i-1} f(a_h) \, [f(a) - 1]$$

che moltiplicate fra loro danno

$$\Delta^{m+n} f(a_h) = \Delta_m{}' f'(a_h)\,[f(a) - 1]^n \tag{4}$$

cioè

$$\Delta^{m+n} f(a_h) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \Delta^m f(a_{h+n-i}).$$

Per $m = 0$ e $h = 0$ abbiamo una formola dei paragrafi precedenti.

Nella (3) poniamo per n i valori

$$0,\ 1,\ 2, \ldots n - 1$$

e sommiamo tutte le equazioni così ottenute.

Si ha

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} \Delta^m f(a_{h+i}) = \Delta^m f(a_h) \frac{(1+\Delta)^n - 1}{} \tag{5}$$

cioè

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta^m f(a_{h+i}) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} \Delta^{m+i} f\,(a_h).$$

Per $m = 0$ $h = 0$ abbiamo

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} \Delta^i f(a_0).$$

§ 6. — Differenze delle funzioni più semplici.

Passiamo a calcolare le differenze delle più semplici funzioni, e prima delle funzioni intere.

Supponiamo che le differenze fra i valori consecutivi della variabile indipendente x sieno costanti e sieno eguali ad h.

Si abbia la funzione

$$f(x) = x^m.$$

Si avrà

$$\begin{aligned} \Delta f(x_0) &= (x_0 + h)^m - x_0^m \\ &= m\, x_0^{m-1} h + (m)_2\, x_0^{m-2} h^2 + \dots \end{aligned}$$

cioè un polinomio intero in x di grado $m - 1$.

Se $f(x)$ è in generale un polinomio in x di grado m, allora su ciascuno dei suoi termini potrà applicarsi il precedente procedimento, e *si otterrà in complesso un polinomio intero in x di grado $m - 1$, il cui primo termine ha per coefficiente quello del primo termine del polinomio dato moltiplicato per h e per il grado m.*

Riapplicando un'altra volta lo stesso processo si ha evidentemente un polinomio intero in x di grado $m - 2$, il cui primo termine ha per coefficiente quello del primo termine del polinomio dato moltiplicato per h^2 e per $m(m - 1)$.

Così continuando, si vede che la differenza m^{ma}

del polinomio di grado m, sarà eguale a

$$h^m \,.\, 1 \,.\, 2 \ldots m \,.\, a_0$$

se a_0 è il coefficiente della più alta potenza di x nel polinomio dato; tale differenza m^{ma} è una quantità indipendente da x_0, dal punto cioè in cui si vuol considerare la differenza; essa è perciò la medesima per ogni x; abbiamo dunque il risultato:

Le differenze m^{me} di un polinomio di grado m, sono costanti, cioè indipendenti dal punto x, e sono eguali (a meno della quantità $h^m a_0$) al fattoriale del numero m.

Così p. es. consideriamo le potenze terze dei consecutivi numeri interi naturali. Ciò corrisponde a considerare la funzione x^3, e $x_0\, x_1\, x_2 \ldots$ eguali rispettivamente a 1, 2, 3, ... ($h = 1$).

Si ha il seguente quadro

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125 \ldots \\
& 7 & & 19 & & 37 & & 61 & \ldots \\
& & 12 & & 18 & & 24 & \ldots & \\
& & & 6 & & 6 & \ldots & &
\end{array}$$

Si vede che le differenze 3.^{e} sono tutte eguali a 6 che è il fattoriale di 3.

Questa proprietà può servire a costruire, con semplici addizioni, le tavole dei cubi, delle quarte potenze, ecc. dei numeri naturali.

Sia $f(x) = e^x$. Allora

$$\Delta f(x) = e^{x+h} - e^x =$$
$$= e^x (e^h - 1).$$

Ripetendo n volte questa operazione si ha evidentemente

$$\Delta^n f(x) = e^x (e^h - 1)^n .$$

Sia

$$f(x) = \frac{1}{x} .$$

Si ha

$$\Delta f(x) = \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = - \frac{h}{x(x+h)}$$

$$\Delta^2 f(x) = - \frac{h}{(x+h)(x+2h)} + \frac{h}{x(x+h)} =$$

$$= \frac{2h^2}{x(x+h)(x+2h)} .$$

In generale si ha la formola

$$\Delta^n f(x) = \frac{(-1)^n n!\, h^n}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)} .$$

Giacchè supposto che

$$\Delta^{n-1} f(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!\, h^{n-1}}{x(x+h)(x+2h)\ldots(x+(n-1)h)},$$

si ha

$$\Delta^n f(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,h^{n-1}\left[\frac{1}{(x+h)(x+2h)\ldots(x+nh)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+(n-1)h)}\right]$$

$$= -(-1)^{n-1}(n-1)!\,h^{n-1}\,\frac{nh}{x(x+h)\ldots(x+nh)}$$

$$= (-1)^n\, n!\, h^n\, \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+nh)}\,.$$

Sia $f(x) = \operatorname{sen} x$.
Si avrà

$$\Delta \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x$$

$$= 2 \operatorname{sen}\frac{h}{2}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Similmente

$$\Delta \cos x = -2\operatorname{sen}\frac{h}{2}\operatorname{sen}\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

Più generalmente

$$\Delta \operatorname{sen}(ax+b) = 2\operatorname{sen}\frac{ah}{2}\cos\left(ax+b+\frac{ah}{2}\right)$$

$$\Delta \cos(ax+b) = -2\operatorname{sen}\frac{ah}{2}\operatorname{sen}\left(ax+b+\frac{ah}{2}\right)$$

Queste formole danno in particolare

$$\Delta \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = -2 \operatorname{sen} \frac{h}{2} \operatorname{sen} (x + h)$$

e quindi

$$\Delta^2 \operatorname{sen} x = -4 \operatorname{sen}^2 \frac{h}{2} \operatorname{sen} (x + h).$$

E similmente

$$\Delta^2 \cos x = -4 \operatorname{sen}^2 \frac{h}{2} \cos (x + h).$$

Così continuando si ha

$$\Delta^3 \operatorname{sen} x = -2^3 \operatorname{sen}^3 \frac{h}{2} \cos\left(x + \frac{3h}{2}\right)$$

$$\Delta^3 \cos x = -2^3 \operatorname{sen}^3 \frac{h}{2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{3h}{2}\right).$$

e così di seguito.

§ 7. — La funzione espressa mediante le differenze successive di essa nel punto iniziale. Formola di Newton come estensione della formola di Taylor.

Dal calcolo differenziale si sa che il valore di una funzione in un punto, può, sotto certe condizioni, esprimersi mediante le derivate successive della funzione nel punto iniziale; la formola corrispondente si chiama la formola generale del valore medio ovvero la formola di Taylor. Vediamo ora qual'è la formola analoga a questa nel calcolo delle differenze finite.

Nel § 4 abbiamo trovato il valore della funzione in un punto speciale x_n espresso mediante le differenze nel punto x_0; la formola che vogliamo ora trovare è di altra natura; essa ci deve esprimere non solo il valore della funzione in uno speciale punto, ma in *qualunque* punto x dell'intervallo $x_0\, x_n$.

Consideriamo la funzione

$$\varphi(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} \Delta f(x_0) +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h)}{2!\, h^2} \Delta^2 f(x_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h) \ldots (x - x_0 - (n-1)\, h)}{n!\, h^n} \Delta^n f(x_0)$$

che è un polinomio in x di grado n.

Per $x = x_0$ si ha

$$\varphi(x_0) = f(x_0);$$

per $x = x_1 = x_0 + h$ si annullano tutti i termini a cominciare dal terzo, e resta

$$f(x_0) + \Delta f(x_0)$$

che è eguale a $f(x_0 + h)$; in generale per

$$x = x_i = x_0 + i\, h$$

(essendo $i \leqq n$) si ha

$$f(x_0) + (i)_1 \Delta f(x_0) + (i)_2 \Delta^2 f(x_0) + \ldots + \Delta^i f(x_0)$$

che, per effetto della formola del § 4, è esattamente eguale a $f(x_0 + i h)$; dunque ricaviamo che la funzione φ ha nei punti

$$x_0, \; x_0 + h, \; x_0 + 2h, \ldots x_0 + n h$$

i medesimi valori che la funzione f.

Se quindi noi vogliamo supporre che la funzione f sia una funzione *intera*, allora essa non può che coincidere col polinomio φ, perchè la equazione $f - \varphi = 0$ di grado n avrebbe $n + 1$ radici.

Supponiamo ora in generale che f *non* sia una funzione intera, ma una funzione qualunque continua e finita insieme alle sue derivate.

Formiamo allora una funzione $\Phi(x)$ definita come segue

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_0 - h) \ldots (x - x_0 - n h)}{(n-1)!\, h^{n+1}} \Omega(x')$$

dove $\Omega(x')$ sia una espressione ancora indeterminata dipendente da un punto qualunque x' oltrechè da x_0 e da $x_0 + i h$ $(i = 1, \ldots n)$.

La funzione $\Phi(x)$ evidentemente ha, come la $\varphi(x)$, la proprietà che nei punti

$$x_0, \; x_0 + h, \ldots x_0 + n h$$

acquista gli stessi valori di f, perchè l'ultimo termine in tali punti si annulla identicamente.

Si voglia ora determinare il valore della funzione f nel punto x'.

Eguagliamo il valore della funzione f in x' al valore di Φ in x' il che può sempre farsi perchè basta determinare Ω in modo che $\Omega(x')$ soddisfi alla condizione $f(x') - \Phi(x') = 0$.

Allora la funzione

$$f(x) - \Phi(x)$$

ha per punti zero i punti x, $x_0 + h, \dots x_0 + n\,h$ e x' in numero di $n + 2$; quindi, per il teorema di Rolle, la sua derivata prima si annulla per $n + 1$ punti compresi negli $n + 1$ intervalli limitati da quei punti; similmente la derivata seconda si annullerà certamente in n punti compresi negli n intervalli limitati dagli ultimi $n + 1$ punti indicati. Così continuando si giunge al risultato che la derivata $n + 1^{ma}$ di

$$f(x) - \Phi(x)$$

deve certamente annullarsi per un certo punto ξ compreso nell'intervallo limitato fra il minimo e il massimo dei tre punti

$$x_0,\ x_0 + n\,h,\ x'.$$

Possiamo dunque porre

$$f^{(n+1)}(\xi) - \Phi^{n+1}(\xi) = 0;$$

ma evidentemente

$$\Phi^{(n+1)}(x) = \frac{\Omega(x')}{h^{n+1}}$$

dunque otteniamo

$$\frac{\Omega(x')}{h^{n+1}} = f^{n+1}(\xi).$$

Essendo stata Ω determinata in modo che

$$f - \Phi$$

si annulli in x', si ha quindi

$$f(x') = \varphi(x') + \frac{(x'-x_0)\dots(x'-x_0-nh)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)$$

ovvero, sostituendo ancora x ad x':

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{h} \Delta f(x_0) + \dots +$$
$$+ \frac{(x-x_0)\dots(x-x_0-(n-1)h)}{n!\,h^n} \Delta^n f(x_0) +$$
$$+ \frac{(x-x_0)\dots(x-x_0-nh)}{(n+1)!} f^{n+1}(\xi)$$

dove ξ è un punto compreso fra il minimo e il massimo dei tre valori

$$x_0,\ x_0 + nh,\ x$$

Per ogni x si ha adunque uno sviluppo di questa specie, dove variando x varia naturalmente la quantità ξ. Come si vede, siamo giunti ad una formola da reputarsi come analoga a quella, cosiddetta *del valor medio generalizzato*, che si adopera nel calcolo differenziale.

Questa formola la chiameremo la *formola di Newton* e l'ultimo termine lo chiameremo il *resto* della formola.

È importante osservare che $f - \varphi$ ha sempre per punti zero i punti

$$x_0, \ldots x_0 + n\,h;$$

quindi applicando nel solito modo il teorema di Rolle si ha che $f^{(n)} - \varphi^{(n)}$ deve avere almeno un punto zero compreso fra x_0 e $x_0 + n\,h$.

Se η è tale punto si ha che

$$f^{(n)}(\eta) - \frac{1}{h^n}\,\Delta^n f(x_0)$$

deve essere zero; cioè la differenza n^{ma} potrà sempre esprimersi colla formola

$$\Delta^n f(x_0) = h^n f^{(n)}(\eta)$$

dove η è compreso fra x_0 e $x_0 + n\,h$.

Questo teorema è da considerarsi come estensione di quello cosiddetto del *valor medio*, che si ricava da esso per $n = 1$.

Su questo argomento si può vedere anche:

Genocchi, *Grunert Archiv.* Vol. XLIX, p. 342 (1869); *Nouv. Annales*, 2.^{e} Ser. Vol. VIII, pagina 385 (1869).

§ 8. La derivata m^{ma} della funzione espressa mediante le differenze successive della funzione stessa.

Collo stesso procedimento del paragrafo precedente possiamo trovare una formola che esprima la derivata m^{ma} di una funzione espressa mediante le differenze della funzione nel punto iniziale.

Consideriamo la stessa funzione $\Phi(x)$ del § precedente e deriviamola m volte rispetto ad x.

Si ha

$$\Phi^{(m)}(x) = \frac{1}{h^m} \Delta^m f(x_0) + \frac{d^m}{d x^m} \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_0-mh)}{m+1!\, h^{m+1}} \Delta^{m+1} f(x_0)$$

$$+ \ldots + \frac{d^m}{d x^m} \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_0-(n-1)h)}{n!\, h^n} \Delta^n f(x_0)$$

$$+ \frac{d^m}{d x^m} \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_0-nh)}{n+1!\, h^{n+1}} \Omega(x').$$

Determinando $\Omega(x')$ in modo che

$$f^m(x) - \Phi^m(x)$$

si annulli per $x = x'$ si ha che la equazione

$$f^m(x) - \Phi^m(x) = 0$$

avrà certamente $n - m + 2$ radici di cui una è x' e le altre $n - m + 1$ sono comprese fra

$$x_0, \quad x_0 + nh.$$

Quindi, per il teorema di Rolle ripetutamente applicato vi sarà certamente fra il minimo e il massimo dei tre numeri x_0, $x_0 + n\,h$, x' almeno un punto in cui la derivata $(n - m + 1)^{ma}$ di tale espressione si annulla.

Ora tale derivata di ordine $n - m + 1$ è

$$f^{n+1}(x) - \frac{\Omega(x')}{h^{n+1}};$$

dunque abbiamo

$$\frac{\Omega(x')}{h^{n+1}} = f^{n+1}(\xi)$$

e perciò esprimendo che

$$f^m(x') - \Phi^m(x') = 0$$

e mutando poi x' in x si ha la formola

$$f^{m)}(x) = \frac{1}{h^m}\Delta^m f(x_0) + \frac{d^m}{d\,x^m}\frac{(x-x_0)\dots(x-x_0-m\,h)}{m+1!\,h^{m+1}}\Delta^{m+1} f(x_0) +$$

$$\dots + \frac{d^m}{d\,x^m}\frac{(x-x_0)\dots(x-x_0-(n-1)\,h)}{n!\,h^n}\Delta^n f(x_0) +$$

$$+ \frac{d^m}{d\,x^m}\frac{(x-x_0)\dots(x-x_0-n\,h)}{n+1!} f^{n+1}(\xi).$$

analoga a quella del paragrafo precedente.

È importante trovare la formola della derivata prima nel punto speciale $x = x_0$.

Invece di ricavarla dalla formola quì trovata la ricaviamo assai facilmente dalla formola contenuta nel paragrafo precedente, trasportando in essa $f(x_0)$ al primo membro, poi dividendo per

$$x - x_0,$$

e infine facendo convergere x ad x_0. Si ha allora

$$f'(x_0) = \frac{\Delta f(x_0)}{1 \,.\, h} - \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2 \,.\, h^2} + \frac{\Delta^3 f(x_0)}{3 \,.\, h^3} - \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{\Delta^n f(x_0)}{n \,.\, h^n} + (-1)^n \frac{1}{n+1 \,.\, h^{n+1}} f^{n+1}(\xi).$$

Se l'ultimo termine del secondo membro tende a zero per $n = \infty$, allora simbolicamente il secondo membro, e quindi il valore di $f'(x_0)$ potrà scriversi

$$\log\left(1 + \frac{\varDelta}{h}\right) f(x_0)$$

intendendo che nello sviluppo le potenze di $\varDelta$ debbano rappresentare *ordini* di differenze.

Per l'argomento di questo paragrafo si può vedere fra gli altri:

Tisserand, *Sur un point du calcul des differences*. Comptes Rendus. Vol. LXX, pag. 678 (1870).

§ 9. La differenza m^{ma} della funzione in un punto qualunque, espressa mediante le derivate della funzione stessa nel punto iniziale.

In modo simile possiamo procedere per la ricerca della differenza m^{ma} espressa mediante le derivate della funzione.

Consideriamo la funzione

$$\Psi(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1!} \omega(x')$$

dove $\omega(x')$ sia un'espressione ancora indeterminata dipendente oltre che da x_0, anche da un altro punto x'.

Assegnata la quantità h come differenza costante dei valori della variabile indipendente x, possiamo calcolare la differenza m^{ma} del polinomio $\Psi(x)$ nel punto $x = x'$, e determinare $\omega(x')$ in modo che

$$\Delta^m f(x') - \Delta^m \Psi(x')$$

sia zero. Vediamo come resta allora definito $\omega(x')$.

Indicando con $V(x)$ la funzione

$$V(x) = f(x) - \Psi(x)$$

si ha intanto, applicando un risultato contenuto alla fine del § 7, che

$$\Delta^m \, V(x')$$

potrà esprimersi colla forma

$$h^m \, V^{(m)}(\xi)$$

dove ξ è un punto compreso fra x' e $x' + m\,h$; cioè

$$\Delta^m f(x') - \Delta^m \Psi(x') = h^m \left[f^{(m)}(\xi) - \Psi^{(m)}(\xi)\right].$$

Ma

$$\Psi^{(m)}(\xi) = f^{(m)}(x_0) + \frac{\xi - x_0}{1} f^{m+1}(x_0) + \ldots +$$
$$+ \frac{(\xi - x_0)^{n-m}}{n - m!} f^n(x_0) + \frac{(\xi - x_0)^{n-m+1}}{n - m + 1!} \omega(x')$$

e

$$f^m(\xi) = f^m(x_0) + \frac{\xi - x_0}{1} f^{m+1}(x_0) + \ldots +$$
$$+ \frac{(\zeta - x_0)^{n-m}}{n - m!} f^n(x_0) + \frac{(\xi - x_0)^{n-m+1}}{n - m + 1!} f^{n+1}(\eta)$$

dove η rappresenta un punto compreso fra x_0 e ξ, quindi

$$\Delta^m f(x') - \Delta^m \Psi(x') =$$
$$= h^m \frac{(\xi - x_0)^{n-m+1}}{n - m + 1!} \left[f^{n+1}(\eta) - \omega(x')\right]$$

e se questa espressione deve essere zero, si ha

$$f^{n+1}(\eta) = \omega(x')$$

colla qual formola resta calcolata la quantità $\omega(x')$ tale che le differenze m^{me} di f e Ψ nel punto x' sieno eguali.

Sostituendo questo valore nella formola

$$\Delta^m f(x') - \Delta^m \Psi(x') = 0$$

e ponendo poi x in luogo di x', il che non può più generare confusione, resta (tenendo conto che le differenze m^{me} dei primi m termini di Ψ sono zero)

$$\Delta^m f(x) = \frac{\Delta^m (x - x_0)^m}{m!} f^m(x_0) + \ldots +$$

$$+ \frac{\Delta^m (x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \frac{\Delta^m (x - x_0)^{n+1}}{n+1!} f^{n+1}(\eta)$$

dove η è un numero compreso fra il minimo e il massimo dei tre numeri

$$x_0,\ x,\ x + mh.$$

Questa è la formola che volevamo cercare, e che ha un'intima relazione d'analogia con quella del paragrafo precedente.

§ 10. Applicazioni varie delle formole precedenti. Differenze di 0^n.

Consideriamo le n^{me} potenze dei numeri naturali; e formiamone le differenze successive relative al primo elemento 0^n.

Tali differenze godono di proprietà speciali che passeremo ora ad esaminare.

Dimostriamo prima la seguente formola

$$\Delta^m 0^{n+1} = m\,(\Delta^m 0^n + \Delta^{m-1} 0^n).$$

In effetti da una formola del § 3 si ha

$$\Delta^m 0^n = m^n - (m)_1 (m-1)^n + \ldots + \\ + (-1)^{m-1} (m)_{m-1} 1^n.$$

Mutando m in $m-1$ e sommando la formola ottenuta colla precedente si ha

$$\Delta^m 0^n + \Delta^{m-1} 0^n = \\ = m^n - (m)_1 (m-1)^n + \ldots + (-1)^{m-1} \quad (m)_{m-1} 1^n + \\ + (m-1)^n - \ldots + (-1)^{m-2} (m-1)_{m-2} 1^n = \\ = m^n - (m-1)_1 (m-1)^n + (m-1)_2 (m-2)^n - \ldots + \\ + (-1)^{m-1}.$$

Moltiplicando il secondo membro per m si ha

$$m^{n+1} - (m)_1 (m-1)^{n+1} + (m)_2 (m-2)^{n+1} - \ldots + \\ + (-1)^{m-1} (m)_{m-1} 1^{n+1}$$

che, per la stessa formola sopra citata, è eguale a

$$\Delta^m 0^{n+1};$$

resta con ciò dimostrata la formola sopraindicata.

Si sa che in generale $\Delta^m x^m = m!$ donde

$$\Delta^m 0^m = m!$$

Di qui abbiamo la formola

$$m! = m^m - (m)_1 (m-1)^m + (m)_2 (m-2)^m - \ldots + \\ + (-1)^{m-1} (m)_{m-1}.$$

Le differenze di 0^n che abbiamo considerate sono quelle calcolate nell'ipotesi che la differenza fra i valori successivi della variabile indipendente sia costante ed eguale ad 1. Supponiamo invece che tali differenze sieno costanti ed eguali ad h.

Allora indicando con $\Delta^m (0 . h)^n$ le differenze corrispondenti, si ha

$$\Delta^m (0\,h)^n = h^n \Delta^m 0^n$$

giacchè tutti i termini che compongono le varie differenze restano moltiplicati per h^n.

L'ultima formola del paragrafo precedente facendovi $x = x_0$ (il che equivale a calcolare la differenza della funzione nel punto x_0), e osservando che ivi le differenze si suppongono di base h, dà per risultato

$$\Delta^m f(x_0) = h^m \frac{\Delta^m 0^m}{m!} f^m(x_0) + \ldots +$$

$$+ h^n \frac{\Delta^m 0^n}{n!} f^n(x_0) + h^{n+1} \frac{\Delta^m 0^{n+1}}{n+1!} f^{n+1}(\eta)$$

dove η è un numero compreso fra

$$x_0 \text{ e } x_0 + nh,$$

e le $\Delta^m 0^p$ si suppongono di base 1.

Questa formola esprime la differenza m^{ma} di una fùnzione in un punto mediante le derivate nel medesimo punto.

Possiamo ora stabilire una formola notevole per l'espressione di

$$\Delta^m 0^n \qquad (n > m).$$

Sappiamo che

$$\Delta^m e^x = e^x (e^h - 1)^m$$

Intanto applicando la precedente formola per $x_0 = x$ si ha

$$\Delta^m e^x = \left[\frac{\Delta^m 0^m}{m!} h^m + \ldots + \frac{\Delta^m 0^n}{n!} h^n\right] e^x +$$

$$+ \frac{\Delta^m 0^{n+1}}{n+1!} h^{n+1} e^{x+\theta n h}$$

ponendo il numero η sotto la forma $x + \theta n h$, ed essendo θ compreso fra 0 e 1.

Sostituendo al primo membro il suo valore, sopprimendo il fattore comune e^x, e ponendo x in luogo di h si ha

$$(e^x - 1)^m = \frac{\Delta^m 0^m}{m!} x^m + \ldots + \frac{\Delta^m 0^n}{n!} x^n + \\ + \frac{\Delta^m 0^{n+1}}{n+1!} x^{n+1} e^{\theta n x}.$$

Intanto

$$(e^x - 1)^m = \left[x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right]^m.$$

Paragonando dunque il coefficiente di x^n al primo e secondo membro abbiamo

$$\frac{\Delta^m 0^n}{n!} = \Sigma \frac{1}{r_1! \, r_2! \ldots r_m!}$$

dove $r_1 \, r_2 \ldots r_m$ sono m numeri positivi tali che la loro somma sia eguale ad n, ed il sommatorio si estende a tutte le possibili combinazioni di tali numeri.

Per riconoscere che il secondo membro ha effettivamente la forma indicata, si consideri la potenza m^{ma} di

$$\left[x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right]$$

come il prodotto di m fattori eguali, e allora per avere un termine in x^n, bisognerà moltiplicare un termine del primo fattore, per uno del secondo e così di seguito, e la somma degli esponenti di x in questi termini scelti deve sempre essere eguale ad n.

§ 11. I NUMERI BERNOULLIANI ESPRESSI MEDIANTE LE DIFFERENZE DI 0^n.

I numeri di Bernoulli sono i coefficienti dello sviluppo in serie della funzione

$$\frac{x\,e^x}{e^x - 1}.$$

Propriamente ponendo tale sviluppo in serie sotto la forma

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{B_2 x^2}{1.2} - \frac{B_4 x^4}{1.2.3.4} + \ldots$$

i numeri $B_2 B_4 \ldots$ si chiamano i numeri Bernoulliani. La funzione soprascritta si chiama perciò *la funzione generatrice dei numeri di Bernoulli*, ed è facile vedere che in essa i termini in $x^3\, x^5 \ldots$ sono zero.

Dividendo numeratore e denominatore di quella funzione per e^x si ha

$$\frac{x}{1 - e^{-x}}$$

e mutando x in $-x$, si vede che lo sviluppo di

$$\frac{x}{e^x - 1}$$

sarà similmente

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{B_2 x^2}{2!} - \frac{B_4 x^4}{4!} + \dots$$

Per le relazioni fra le funzioni esponenziali e le trigonometriche si potrebbe mostrare che i coefficienti dello sviluppo in serie della *tangente* si possono semplicemente esprimere mediante i numeri di Bernoulli.

Propriamente si trova

$$\operatorname{tg} x = \sum_{1}^{\infty} \beta_{2m} \frac{x^{2m-1}}{2\,m - 1!}$$

dove

$$\beta_{2m} = \frac{2^{2m}\,(2^{2m} - 1)}{2\,m} B_{2m}$$

rappresentando le B i numeri di Bernoulli. (Vedi Pascal, *Determinanti*. Milano. 1896, pag. 176.)

Possiamo esprimere tali numeri mediante le differenze di 0^n nel seguente modo. (Boole, *Finite diff*. London. 1860, pag. 82-83.)

Poniamo

$$e^x - 1 = t$$

donde

$$x = \log(1+t) =$$

$$\frac{x}{e^x - 1} = \frac{\log(1+t)}{t} =$$

$$= 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} + \dots$$

$$= 1 - \frac{e^x - 1}{2} + \frac{(e^x - 1)^2}{3} - \frac{(e^x - 1)^3}{4} + \dots$$

Intanto nel paragrafo precedente abbiamo già trovato

$$(e^x - 1)^m = \frac{\Delta^m 0^m}{m!} x^m + \frac{\Delta^m 0^{m+1}}{m+1!} x^{m+1} + \dots;$$

dunque sostituendo si ha per coefficiente di x^m nello sviluppo totale di $\frac{x}{e^x - 1}$ la espressione

$$\frac{1}{m!}\left[0^m - \frac{1}{2}\Delta 0^m + \frac{1}{3}\Delta^2 0^m - \dots + \frac{(-1)^m}{m+1}\Delta^m 0^m\right].$$

Paragonando allora coll'altro sviluppo avanti ottenuto si ha che questa espressione è eguale a

$$\left(-1\right)^{\frac{m}{2}-1} B_m$$

m essendo sempre un numero pari.

Così i numeri bernoulliani restano espressi colla formola desiderata.

I numeri bernouilliani hanno i seguenti valori:

$$B_2 = \frac{1}{6} \qquad B_{10} = \frac{5}{66}$$

$$B_4 = \frac{1}{30} \qquad B_{12} = \frac{691}{2730}$$

$$B_6 = \frac{1}{42} \qquad B_{14} = \frac{7}{6}$$

$$B_8 = \frac{1}{30} \qquad B_{16} = \frac{3617}{510}$$

. . . .

Per le tavole di tali numeri si possono vedere i seguenti lavori:

M. Ohhm, *Crelle.* Vol. XX, pag. 11;

Glaisher, *Trans. of Cambridge.* Vol. XII, 1, pag. 384 (1873);

Adams, *Tables of the values of the first sixty two numbers of Bernoulli.* (Crelle. Vol. LXXXV (1878), pag. 269.)

§ 12. Funzioni interpolari. Formola di Ampère.

Le funzioni interpolari sono definite nel seguente modo:

Poniamo

$$f_1(x_0\, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$f(x_0\, x_1\, x_2) = \frac{f(x_0\, x_2) - f(x_0\, x_1)}{x_2 - x_1}$$

. . . .

Le espressioni

$$f_1(x_0\, x_1) \quad , \quad f_2(x_0\, x_1\, x_2), \ldots$$

si chiamano funzioni interpolari rispett. di 1.°, 2.°,... ordine.

La prima proprietà che si può dimostrare riguardo a tali funzioni è la seguente: *Esse sono simmetriche rispetto a tutte le variabili che contengono.*

Per le funzioni interpolari di 1.° ordine la cosa è evidente; scambiando fra loro $x_0\, x_1$, si vede che $f_1(x_0\, x_1)$ resta inalterata.

Per dimostrare la cosa in generale dimostriamo una formola cosiddetta di Ampère che dà la trasformazione di una funzione interpolare.

È evidente che si ha identicamente

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}.$$

Similmente la funzione interpolare di 2.° ordine può scriversi

$$(x_0\, x_1\, x_2) = \frac{f_1(x_0\, x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f_1(x_0\, x_2)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_1 - x_2)(x_0 - x_1)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} +$$

$$+ \frac{f(x_0)}{(x_2 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} =$$

$$= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} +$$

$$+ \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

la quale ultima espressione mostra che $f_2(x_0\, x_1\, x_2)$ è simmetrica in $x_0\, x_1\, x_2$.

Dimostreremo che in generale ogni funzione interpolare può trasformarsi con una formola analoga a quella ora scritta. (Ampère, *Ann. de Gergonne*. Vol. XVI, pag. 329 (1826.)

In effetti supponiamo che

$$f_{n\ 1}(x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_{n-1})$$

si possa trasformare in

$$\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_{n-1})}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)\dots(x_1-x_{n-1})}+\dots$$
$$+\frac{f(x_{n-1})}{(x_{n-1}-x_0)\dots(x_{n-1}-x_{n-2})}.$$

Allora

$$f_n(x_0\dots x_{n-1}\,x_n)=\frac{f_{n-1}(x_0\dots x_{n-2}x_{n-1})-f_{n-1}(x_0\dots x_{n-2}x_n)}{x_{n-1}-x_n}$$

si trasformerà in

$$\frac{1}{x_{n-1}-x_n}\left[\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_{n-2})(x_0-x_{n-1})}+\right.$$
$$+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)\dots(x_1-x_{n-2})(x_1-x_{n-1})}+\dots$$
$$\left.+\frac{f(x_{n-1})}{(x_{n-1}-x_0)\dots(x_{n-1}-x_{n-2})}\right]+$$
$$+\frac{1}{x_n-x_{n-1}}\left[\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_{n-2})(x_0-x_n)}+\right.$$
$$+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)\dots(x_1-x_{n-2})(x_1-x_n)}+\dots$$
$$\left.+\frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-2})}\right].$$

Intanto le due frazioni aventi per numeratore $f(x_0)$ si riducono a

$$\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_{n-2})(x_{n-1}-x_n)}\left\{\frac{1}{x_0-x_{n-1}}-\frac{1}{x_0-x_n}\right.$$

cioè

$$\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_{n-2})(x_0 - x_{n-1})(x_0 - x_n)}$$

e similmente le altre due frazioni aventi per numeratore $f(x_1)$, ovvero $f(x_2)$, ecc.

Si vede allora che f_n si esprime colla formola analoga a quella con cui si esprime f_{n-1}; cioè se la formola di Ampère vale per l'indice $n-1$ varrà per l'indice n; essendo essa valida per l'indice 1, sarà valida sempre.

Si può ottenere una relazione rimarchevole fra tre funzioni interpolari del medesimo ordine.

In effetti possiamo scrivere

$$f_{n+1}(x_0 x_1 x_2 x_3 \ldots) = \frac{f_n(x_0 x_2 x_3 \ldots) - f_n(x_1 x_2 x_3 \ldots)}{x_0 - x_1}$$

$$= \frac{f_n(x_0 x_1 x_3 \ldots) - f_n(x_0 x_2 x_3 \ldots)}{x_1 - x_2}$$

donde si ricava subito

$$f_n(x_1 x_2 x_3 \ldots)(x_1 - x_2) + f_n(x_2 x_0 x_3 \ldots)(x_2 - x_0) +$$
$$+ f_n(x_0 x_1 x_3 \ldots)(x_0 - x_1) = 0.$$

Prima di proseguire in queste ricerche sulle funzioni interpolari diamo qualche cenno storico sulla loro teoria.

Il primo che ne abbia fatto oggetto di una Memoria speciale fu Ampère (*Annales de Gergonne.*

Vol. XVI, pag. 329, 1826). Dopo di Ampère se ne occupò il Cauchy (*Comptes Rendus.* Vol. XI, pag. 776, 835. 1840); indi Bellavitis (*Ist. Veneto*, 22 giugno 1856, 17 giugno 1860) e Genocchi (*Accad. Torino.* Vol. XIII, pag. 716. 1878), il quale si occupò di esprimere le funzioni interpolari mediante integrali multipli.

Altri lavori sul medesimo argomento sono:

Genocchi, *Sopra una proprietà delle funzioni interpolari.* Accad. di Torino. Vol. XVI, pag. 269 (1881);

Schwarz, *Démonstration élémentaire d'une propriété des fonctions interpolaires.* Accad. di Torino. Vol. XVII, pag. 740 (1882);

Peano, *Sulle funzioni interpolari.* Accademia di Torino. Vol. XVIII, pag. 573 (1883).

§ 13. Relazioni fra le funzioni interpolari ad elementi equidistanti e le differenze, e fra le stesse funzioni interpolari e le derivate.

Supponiamo che le differenze fra i valori successivi della variabile x, cioè le differenze fra i valori

$$x_0 \, x_1 \, x_2 \ldots$$

sieno costanti ed eguali ad h.

Si ha evidentemente

$$\Delta\, f(x_0) = h\, f_1(x_0, x_0 + h)$$
$$\Delta^2 f(x_0) = h\, \Delta\, f_1(x_0, x_0 + h) =$$
$$= h\, [f_1(x_0 + h, x_0 + 2h) - f_1(x_0, x_0 + h)]$$
$$= 2\, h^2 f_2(x_0, x_0 + h, x_0 + 2\, h).$$

Si può mostrare che in generale

$$\Delta^n f(x_0) = n!\, h^n f_n(x_0, x_0 + h, \dots x_0 + n\, h).$$

In effetti se questa formola sussiste sino all'indice $n - 1$, cioè se

$$\Delta^{n-1} f(x_0) = n - 1!\, h^{n-1} f_{n-1}(x_0, \dots, x_0 + (n-1)\, h),$$

applicando ancora l'operazione Δ si ha

$$\Delta^n f(x_0) = n - 1!\, h^{n-1}\, \Delta\, f_{n-1}(x_0, \dots, x_0 + (n-1)\, h) =$$
$$= n - 1!\, h^{n-1} [f_{n-1}(x_0 + h, \dots x_0 + n\, h) -$$
$$- f_{n-1}(x_0 \dots x_0 + (n-1)\, h)].$$

Ma la differenza racchiusa in parentesi non è altro che il numeratore di una funzione interpolare di ordine n, il cui denominatore è la differenza fra $x_0 + n\, h$, e x_0, cioè $n\, h$; dunque la differenza in parentesi è eguale a

$$f_n(x_0 \dots x_0 + n\, h)\, .\, n\, h;$$

donde si ha la formola richiesta.

Stabilita tale formola è facile ricavarne la relazione fra le funzioni interpolari e le derivate del medesimo ordine. Basta perciò ricordare la relazione

$$\Delta^n f(x_0) = h^n f^n(\xi)\,; \qquad x_0 \leqq \xi \leqq x_0 + n\,h$$

da noi già dimostrata nel § 7 e si conchiude

$$f_n(x_0, x_0 + h, \ldots x_0 + n\,h) = \frac{f^n(\xi)}{n!}\,.$$

In un paragrafo seguente generalizzeremo questa formola al caso di una funzione interpolare qualunque.

§ 14. Relazioni fra le funzioni interpolari qualunque e gli integrali.

Le formole di questo paragrafo sono contenute nella prima delle citate note di Genocchi.

Formando l'integrale

$$\int_0^1 f'(x_0 + (x_1 - x_0)\,t)\,d\,t$$

si ha

$$\frac{1}{x_1 - x_0}\Big[f(x_0 + (x_1 - x_0)\,t)\Big]_0^1$$

cioè

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,.$$

Abbiamo così che la prima funzione interpolare si esprime colla formola

$$f_1(x_0\,x_1) = \int_0^1 f'(x_0 + (x_1 - x_0)\,t)\,d\,t.$$

Analogamente

$$f_2(x_0\,x_1\,x_2) = \int_0^1 \frac{f'(x_0 + (x_2 - x_0)\,t) - f'(x_0 + (x_1 - x_0)\,t)}{x_2 - x_1}\,d\,t =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 t\,f''(x_0 + (x_1 - x_0)\,t + (x_2 - x_1)\,t\,u)\,d\,t\,d\,u.$$

In generale

$$f_n(x_0\,x_1 \ldots x_n) =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 t_1^{n-1}\,t_2^{n-3} \ldots t_{n-1} \times$$

$$\times\ f^{(n)}\Big(x_0 + (x_1 - x_0)\,t_1 + (x_2 - x_1)\,t_1\,t_2 + \ldots +$$

$$+ (x_n - x_{n-1})\,t_1\,t_2 \ldots t_n\Big)\,d\,t_1 \ldots d\,t_n\,.$$

Si possono dare integrali di forma diversa da questi, ma che rappresentino le medesime funzioni interpolari; ma su questo si può vedere la citata nota di Genocchi.

§ 15. Formola generale di Newton o di Gauss. Relazione fra le funzioni interpolari qualunque e le derivate. Limite di una funzione interpolare quando tutti gli elementi coincidono.

Nel § 7 abbiamo trovato la cosiddetta formola di Newton, nella quale si suppongano equidistanti i valori della variabile indipendente, cioè i valori $x_0\, x_1\, x_2 \ldots$

Ora vogliamo trovare una formola più generale nella quale tali elementi si suppongono qualunque, e che si riduca in particolare a quella trovata al § 7 quando gli elementi si suppongono equidistanti. Le espressioni mediante cui possiamo stabilire una siffatta formola sono appunto le funzioni interpolari.

Osserviamo che

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, f_1(x_0\, x)$$

$$f_1(x_0\, x) = f_1(x_0\, x_1) + (x - x_1)\, f_2(x_0\, x_1\, x)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$f_{n-1}(x_0\, x_1 \ldots x_{n-2}\, x) = f_{n-1}(x_0\, x_1 \ldots x_{n-2}\, x_{n-1}) + \\ + (x - x_{n-1})\, f_n(x_0\, x_1 \ldots x_{n-1}\, x)$$

$$f_n(x_0\, x_1 \ldots x_{n-1}\, x) = f_n(x_0\, x_1 \ldots x_{n-1}\, x_n) + \\ + (x - x_n)\, f_{n+1}(x_0\, x_1 \ldots x_n\, x)$$

e quindi, moltiplicando la seconda di queste relazioni per $(x - x_0)$, la terza per $(x - x_0)(x - x_1)$, e così di seguito, indi sommando, e riducendo, otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ (x - x_0) f_1(x_0 x_1) + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1) f_2(x_0 x_1 x_2) + \ldots + \\ &+ (x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) f_n(x_0 x_1 \ldots x_{n-1} x_n) + \\ &+ (x - x_0) \ldots (x - x_n) f_{n+1}(x_0 x_1 \ldots x_n x). \end{aligned}$$

Esaminiamo come si può trasformare l'ultimo termine; per ciò fare occorre trovare l'espressione di una funzione interpolare a elementi *non* equidistanti mediante le derivate della funzione; una formola cioè che risulta come estensione di quella da noi già trovata in un paragrafo precedente, ma per il caso particolare degli elementi equidistanti.

Consideriamo la funzione formata coi soli primi $n + 1$ termini della formola superiore; essa è un polinomio di grado n in x che chiameremo $\varphi(x)$. È facile vedere che

$$f(x) - \varphi(x)$$

è una funzione che si annulla per

$$x = x_0,\ x = x_1 \ldots x = x_n;$$

ciò potrebbe vedersi dalla stessa formola di sopra, osservando che

$$f(x) - \varphi(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n) f_{n+1}(x_0 x_1 \ldots x_n x)$$

e che

$$f_{n+1}(x_0\, x_1 \ldots x_n\, x)$$

non diventa infinita per

$$x = x_0, \text{ ovvero } x = x_1 \ldots;$$

però si può evitare la considerazione del limite cui tende la funzione interpolare f_{n+1} quando due elementi diventano eguali, e ciò si ottiene operando come segue.

Nello stesso modo col quale si è ottenuto la formola di sopra si possono ottenere le altre

$$\begin{aligned}
&f(x_0) = f(x_0)\\
&f(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0) f_1(x_0\, x_1)\\
&f(x_2) = f(x_0) + (x_2 - x_0) f_1(x_0\, x_1) +\\
&\qquad + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) f_2\, x_0\, x_1\, x_2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ora la $\varphi(x)$ per $x = x_0$, $x = x_1$, $x = x_2, \ldots$ diventa appunto le quantità rappresentate dai secondi membri di queste equazioni, dunque $f - \varphi$ diventa zero.

Ciò stabilito, colla successiva applicazione del teorema di Rolle, cioè collo stesso procedimento adoperato varie volte nei paragrafi precedenti, si ricava che esisterà certamente un punto ξ nel massimo intervallo limitato dai punti $x_0 \ldots x_n$, per il quale la derivata n^{ma} di $f - \varphi$ è zero: ma la derivata n^{ma} di φ è

$$n!\, f_n(x_0 \ldots x_n);$$

dunque

$$f^{(n)}(\xi) - n!\, f_n(x_0 \ldots x_n) = 0$$

donde si ha che la funzione interpolare generale f_n resta espressa dalla formola

$$f_n(x_0 \ldots x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Da questa formola risulta che la funzione interpolare

$$f_{n+1}(x_0 x_1 \ldots x_n x)$$

è eguale similmente a

$$\frac{1}{n+1!} f^{(n+1)}(\xi)$$

dove ξ è un valore compreso fra il minimo e il massimo dei valori $x_0 x_1 \ldots x_n x$, e quindi, sostituendo, si ha la formola generale di Newton, (che suol chiamarsi anche formola di Gauss)

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) &+ (x - x_0) f_1(x_0 x_1) + \\ &+ (x - x_0)(x - x_1) f_2(x_0 x_1 x_2) + \ldots + \\ &+ \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)}{n+1!} f^{n+1}(\xi). \end{aligned}$$

Se gli intervalli $x_0 x_1$, $x_1 x_2 \ldots$ si suppongono tutti eguali ad h allora le funzioni interpolari diventano le *differenze* successive di $f(x_0)$ (V. § 13) e da questa formola si passa a quella del § 7.

Se invece i punti $x_0\, x_1 \ldots x_n$ si riuniscono tutti nel punto x_0, allora anche ξ vi coinciderà e da una formola sopra dimostrata risulta che la funzione interpolare diventa eguale a

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0);$$

e quindi si giunge allora alla formola di Taylor.

§ 16. Interpolazione. Formola di Lagrange.

Una delle formole fondamentali del calcolo differenziale è la cosiddetta formola di Taylor, per mezzo della quale assegnati i valori delle derivate di una funzione in un punto si può, sotto certe condizioni, costruire la funzione stessa.

I primi $n+1$ termini della formola che si ottiene costituiscono un polinomio di grado n, e il problema si riduce a determinare sotto che forma, per un certo x, può porsi la differenza fra la funzione data e tal polinomio (che potrebbe chiamarsi il polinomio di Taylor); dallo studio di tal differenza ne risulta poi la possibilità o meno dello sviluppo della funzione in una serie indefinita. Si può osservare che il polinomio di Taylor ha le sue derivate sino all'ordine n, nel punto iniziale, rispettivamente eguali a quelle della funzione data.

Il problema d'interpolazione si può intendere come un'estensione di quello di Taylor.

Supponiamo assegnati i valori della funzione in un numero indefinito di punti; come si potrà determinare la funzione?

Incominciamo col supporre $n+1$ il numero dei punti; allora si potrà costruire in modo unico un polinomio di grado n che abbia nei dati punti gli assegnati valori.

Tal polinomio lo chiameremo il *polinomio di interpolazione.*

Il problema che possiamo proporci è il seguente: *come può esprimersi la differenza fra la funzione data e il polinomio d'interpolazione?*

Si presenta quindi la quistione di esprimere la funzione mediante il polinomio d'interpolazione di grado n, e un altro termine che chiameremo *Resto* e la cui natura è legata colla natura della funzione data.

La formola di Newton, sviluppata nel paragrafo precedente, risolve questo problema, ed è perciò che i varii coefficienti che in essa figurano sono stati chiamati *funzioni interpolari.* Nella formola di Newton il polinomio d'interpolazione ha una forma ben determinata.

Ora benchè tal polinomio d'interpolazione sia unicamente determinato, assegnati che sieno i valori della funzione in $n+1$ punti, pure potrà essere, nei casi speciali, più opportuno dare ad esso una forma piuttosto che un'altra. È conveniente perciò far cenno di un'altra formola che si chiama formola d'interpolazione di Lagrange (*Opere*, Volume VII) e che appunto non differisce da quella di Newton che per la diversa forma che si dà al polinomio d'interpolazione.

Essa potrebbe ricavarsi direttamente; ma n
preferiremo di ricavarla dalla già nota formola d
Newton.

Consideriamo il polinomio d'interpolazione com
compare nella formola di Newton; ad ogni fun
zione interpolare sostituiamo il suo valore dat
dalla formola di Ampère, e raccogliamo tutti
termini contenenti $f(x_0)$, tutti quelli contenent
$f(x_1)$, ecc.

Si ha

$$\begin{aligned}
& f(x_0)\left[1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\dots\right.\\
+\, & f(x_1)\left[\quad+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\dots\right.\\
+\, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
+\, & f(x_n)\left[\qquad\qquad\qquad+\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\dots(x_n-x_{n-1})}\right.
\end{aligned}$$

Il coefficiente di $f(x_0)$ può ridursi ad avere pe
denominatore la quantità

$$(x_0-x_1)\ (x_0-x_2)\dots(x_0-x_n).$$

Il numeratore deve essere allora un polinomi
di grado n in x, in cui il coefficiente della pi
alta potenza di x è 1, e inoltre è facile veder
che per $x=x_1,\ x=x_2\dots x=x_n$ tal polinomi
deve annullarsi; giacchè per tali valori il polino
mio d'interpolazione di Newton, diventa rispetti
vamente $f(x_1)\ f(x_2)\dots f(x_n)$, e quindi nella for
mola precedente deve per tali valori sempre scom
parire il termine contenente $f(x_0)$. Il coefficient

di $f(x_0)$ sarà dunque

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}.$$

Similmente si troverebbero i coefficienti di

$$f(x_1),\ f(x_2)\dots$$

Il polinomio d'interpolazione si trasforma dunque in

$$\sum_{i=0}^{i=n} f(x_i)\frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Si ha così la formola di Lagrange

$$f(x)=\Sigma+R$$

essendo R il resto della formola, cui può darsi la stessa forma che gli abbiamo dato nel caso della formola di Newton.

Il polinomio Σ può anche scriversi nel seguente modo. Poniamo

$$\varphi(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n).$$

Allora evidentemente il coefficiente di $f(x_i)$ sarà

$$\frac{\varphi(x)}{x-x_i}\cdot\frac{1}{\varphi'(x_i)}.$$

Quindi la formola di Lagrange diventa

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)}\,\frac{\varphi(x)}{x-x_i}+R.$$

§ 17. Problema d'interpolazione più generale di Hermite. Letteratura sull'interpolazione.

Possiamo proporci un problema in certo senso più generale di quello del paragrafo precedente; nel problema della formola di Taylor noi supponiamo assegnati i valori delle prime n derivate della funzione nel punto x_0 (essendo n un numero che può poi crescere all'infinito), e invece nelle formole di Newton e di Lagrange noi supponiamo assegnati i valori della funzione in $n+1$ punti.

Il secondo caso si riduce al primo quando gli $n+1$ punti si suppongano infinitamente vicini.

Ora possiamo proporci il problema di determinare una funzione quando sieno noti i valori di essa e delle sue prime r_0 derivate in un punto x_0; poi i valori di essa e delle sue prime r_1 derivate in un altro punto x_1 e così di seguito, i valori di essa e delle sue prime r_n derivate in un punto x_n. Questo problema è stato trattato da Hermite. (*Crelle.* Vol. LXXXIV, pag. 70.)

Coi dati del problema resta allora determinato un polinomio d'interpolazione di grado

$$(r_0+1)+(r_1+1)+\ldots+(r_n+1)=$$
$$=r_0+r_1+\ldots+r_n+n+1.$$

La quistione si riduce a determinare la differenza fra un tale polinomio e la funzione, cioè, al solito, a determinare la forma che può darsi al *resto* della formola d'interpolazione corrispondente a questo caso.

L'Hermite esprime questo resto mediante un integrale multiplo, il che ha relazione anche col fatto noto che una funzione interpolare può esprimersi mediante un integrale multiplo, come noi abbiamo fatto vedere in un paragrafo precedente, seguendo una nota di Genocchi, originato appunto dal succitato lavoro di Hermite.

È evidente che dovendo annullarsi per $x = x_0$ non solo la differenza $f - \varphi$ (indicando con φ il polinomio d'interpolazione), ma anche tutte le sue derivate sino all'ordine r_0, il resto deve avere per fattore $(x - x_0)^{r_0+1}$; e così analogamente deve avere per fattore $(x - x_1)^{r_1+1}$, ecc.; in tutto avrà per fattore

$$(x - x_0)^{r_0+1} (x - x_1)^{r_1+1} \dots (x - x_n)^{r_n+1}.$$

Altri lavori sull'interpolazione, oltre quelli già citati sulle funzioni interpolari, sono i seguenti:

GAUSS, *Opere.* Vol. III;

LAGRANGE, *Opere.* Vol. VII;

GENOCCHI, *Intorno ad alcune formole sommatorie.* Ann. di Tortolini. Vol. VI, pag. 78 (1855);

TCHÉBYCHEFF, *Acad. de St. Pétersbourg,* 1859;

NELL, *Ueber Interpolation.* Grunert Archiv. Volume LXI, pag. 185 (1877);

GENOCCHI, *Comptes Rendus.* Vol. LXXXVI, pagina 466 (1878);

Frobenius, *Ueber die Entwickelung*, etc. Crelle. Vol. LXXIII;

Cazzaniga, *Espressione di una funzione trascendente intera che prende valori dati in punti arbitrariamente dati.* Annali di mat. t. X (1881);

Meray, *Observations sur la légitimité de l'interpolation.* Ann. de l'École norm. 3.e Série. Volume I, pag. 165 (1884);

Fouret, *Comptes Rendus.* Vol. XCIX, pag. 963, 1011, 1062 (1884).

In questi lavori l'Autore tratta di formole di interpolazione formate con funzioni trigonometriche.

Bendixson, *Sur la formule de Lagrange*, etc. Comptes Rendus. Volume CI, pag. 1050 e 1129 (1885);

Teixeira, *Nouv. Annales*, 3.e Série. Vol. IV, pag. 351; *Crelle.* Vol. C, pag. 83;

Eneström, *Note historique sur une série dont le terme générale est de la forme*

$$A(x-a_1)\ldots(x-a_n).$$

Comptes Rendus. Vol. CIII, pag. 523 (1886);

Bendixson, *Sur une extension all'infini de la formule d'intérpolation de Gauss.* Acta math. Volume IX, pag. 1 (1886);

Possè, *Acad. de St. Pétersbourg*, 1886;

Carvallo, *Formules d'interpolation.* Comptes Rendus. Vol. CVI, pag. 346 (1888);

Pincherle, *Sui sistemi ricorrenti*, etc. Rendiconti Lincei, t. V, fasc. 1 e fasc. 5 (1889);

Diestel, *Beiträge zu der Interpolationsrechn.* Diss. Göttingen, 1890;

Williot, *Bull. de Darboux* (2). Vol. XIV, pagina 218;

Laisant, *Sur l'interpolation successive.* Société math. de France. Vol. XIX, pag. 44 e 121;

Radau, *Études sur les formules d'interpolation.* Paris, Gauthier-Villars, 1891;

Echols, *On some forms of Lagrange's interpolation formula.* Annals of math. Vol. VIII, pagina 22 (1893);

Netto, *Zur Cauchy'schen Interpolationsaufgabe.* Math. Ann. Vol. XLII, pag. 453 (1893).

Pincherle, *Sull'interpolazione.* Accad. di Bologna, t. III (1893);

Markoff, *Differenzenrech.*, capitolo I. Leipzig, 1896;

§ 18. Formole approssimate di quadrature. Formola di Simpson.

Come lo sviluppo in serie di Taylor di una funzione può servire a calcolare l'integrale definito approssimato della funzione stessa, così più generalmente una formola generale d'interpolazione può servire allo stesso scopo.

Tutta la quistione si riduce ad esaminare qual'è il modo più opportuno per adattare convenientemente la formola d'interpolazione al calcolo approssimato delle quadrature.

Se noi partiamo dalla formola di Lagrange, e integriamo termine a termine, l'integrale del resto è della forma

$$\int_a^b \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_n)}{n+1!} f^{(n+1)}(\xi)\, dx$$

essendo ξ un punto intermedio fra i punti

$$x_0\, x_1 \ldots x_n \text{ ed } x.$$

Se la quantità $(x-x_0)\ldots(x-x_n)$ è sempre del medesimo segno per ogni x compresa nell'intervallo d'integrazione, allora per un teorema di calcolo integrale, l'espressione superiore sarà uguale a

$$\frac{f^{n+1}(\eta)}{n+1!} \int_a^b (x-x_0)\ldots(x-x_n)\, dx$$

essendo η un valore intermedio fra

$$x_0 \ldots x_n,\ a,\ b.$$

Supponiamo ora $n=2$, e

$$x_0 = a,$$
$$x_1 = \frac{a+b}{2}$$
$$x_2 = b.$$

I tre primi termini della formola di Lagrange sono

$$\frac{f(a)}{\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)(a-b)}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)+$$

$$+\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)}(x-a)(x-b)+$$

$$+\frac{f(b)}{(b-a)\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)}(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right).$$

Gli integrali definiti di questi tre termini sono

$$\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx = \frac{1}{12}(b-a)^3$$

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{1}{6}(b-a)^3$$

$$\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)dx = \frac{1}{12}(b-a)^3,$$

e quindi, tenendo conto solo dei primi tre termini della formola di Lagrange, si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= \frac{b-a}{6}\left\{f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right\}+\int_a^b R\,dx$$

dove

$$\int_a^b R\,dx = \frac{1}{6}\int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,f'''(\xi)\,dx.$$

La quantità che moltiplica $f'''(\xi)$, sotto il segno integrale, non ha segno fisso per ogni x fra a e b, perchè il binomio $x - \frac{a+b}{2}$ per $x = a$ e $x = b$ acquista segni contrarii. Non possiamo perciò applicare il teorema pel quale f''' può trasportarsi fuori del segno d'integrale.

Però possiamo vedere che R può porsi sotto un'altra forma più opportuna al caso nostro.

Chiamiamo $\varphi(x)$ l'assieme tre primi termini della formola di Lagrange, e poniamo

$$\Phi(x) = \varphi(x) + \Omega(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b).$$

Per ogni valore di Ω indipendente da x, si ha sempre

$$\begin{aligned} f(a) &= \Phi(a) \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \Phi\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ f(b) &= \Phi(b). \end{aligned}$$

Scegliamo Ω in modo che sia anche

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = \Phi'\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Poniamo allora

$$f(x) = \Phi(x) + (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)\, T$$

essendo T una funzione finita di x, ancora indeterminata; il fattore di T mostra appunto che $f - \Phi$ si annulla nei tre punti a, $\frac{a+b}{2}$, b, e inoltre che la sua derivata si annulla in $\frac{a+b}{2}$.

Colla solita applicazione del teorema di Rolle, possiamo allora ricavare che per un punto x, sarà

$$T = \frac{1}{4!} f^{\text{IV}}(\xi)$$

dove ξ è un punto compreso fra

$$a, \quad \frac{a+b}{2}, \quad b, \quad x.$$

Considerando che $\frac{a+b}{2}$ è certamente compreso fra a e b, possiamo più semplicemente dire che ξ è compreso fra a, b, x.

Integrando, abbiamo dunque

$$\int_a^b R\,dx = \Omega \int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{4!}\int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b) f^{\text{IV}}(\xi)\,dx$$

dove però ora nel secondo integrale si può applicare il principio generale indicato al principio di questo paragrafo, perchè la funzione che moltiplica $f^{\text{IV}}(\xi)$ non cambia di segno per un x compresa fra a e b.

Essendo poi $\left(\text{posto } x - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} \cdot t\right)$

$$\int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)\,dx =$$

$$= \frac{(a-b)^4}{16}\int_{+1}^{-1} t\,(t^2-1)\,dt = 0$$

resta solo

$$\int_a^b R\,dx = \frac{(a-b)^5}{4!\,32} f^{\mathrm{IV}}(\eta)\int_{+1}^{-1} t^2\,(t^2-1)\,dt =$$

$$= -\frac{4}{15}\,\frac{1}{4!\,32}(a-b)^5 f^{\mathrm{IV}}(\eta) = R'$$

essendo η un valore compreso fra a e b.

Questa espressione del *Resto* tende a zero con a tendente a b; vediamo se possiamo ottenere una forma approssimata di quadratura, dividendo l'integrale totale in tanti integrali parziali e applicando a ciascuno di essi la formola superiore.

Dividiamo l'intervallo d'integrazione $b-a$ in n parti eguali, ciascuno di ampiezza

$$\frac{b-a}{n}.$$

Poniamo

$$\int_a^b = \int_a^{a+\frac{b-a}{n}} + \int_{a+\frac{b-a}{n}}^{a+2\frac{b-a}{n}} + \ldots + \int_{a+(n-1)\frac{b-a}{n}}^{b} \quad .$$

Applicando a ciascuno di questi la formola superiore si ha

$$= \frac{b-a}{6n}\left\{f(a) + 4f\left(a + \frac{b-a}{2n}\right) + f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \right.$$

$$f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + 4f\left(a + 3\frac{b-a}{2n}\right) + f\left(a + 2\frac{b-a}{n}\right) +$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left. f\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right) + 4f\left(a + (2n-1)\frac{b-a}{n}\right) + f(b)\right\} + R'$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left\{f(a) + 4f\left(a + \frac{b-a}{2n}\right) + 2f\left(a + 2\frac{b-a}{2n}\right) + \right.$$

$$4f\left(a + 3\frac{b-a}{2n}\right) + 2f\left(a + 4\frac{b-a}{2n}\right) + 4f\left(a + 5\frac{b-a}{2n}\right) +$$

$$\left. + \ldots + f(b)\right\} + R'.$$

La legge di formazione degli argomenti contenuti sotto il simbolo f nella parentesi, è chiara; essi si accrescono successivamente di $\dfrac{b-a}{2n}$; la legge dei coefficienti è anche semplice; meno il primo e l'ultimo, che sono eguali ad 1, gli altri sono alternativamente 4 e 2.

Il resto R' ha la forma

$$R' = -\frac{4}{15}\,\frac{1}{4!\,32}\,\frac{(a-b)^5}{n^5}\,[f^{\mathrm{IV}}(\eta_1) + f^{\mathrm{IV}}(\eta_2)\ldots]$$

dove $\eta_1\,\eta_2\ldots$ sono valori contenuti negli intervalli parziali. Ammettendo che f^{IV} è sempre una funzione finita e continua, la espressione

$$\frac{f^{IV}(\eta_1) + f^{IV}(\eta_2) \ldots}{n}$$

avrà un valore compreso fra il massimo e il minimo del valore di f^{IV} in tutto l'intervallo, e quindi vi sarà un punto η fra a e b in cui

$$f^{IV}(\eta) = \frac{f^{IV}(\eta_1) + f^{IV}(\eta_2) + \ldots}{n}.$$

Onde il resto prende la forma

$$R' = -\frac{1}{15}\frac{1}{8 \cdot 4!}\frac{(b-a)^5}{n^4} f^{IV}(\eta).$$

Come si vede R' diminuisce nella ragione di $\frac{1}{n^4}$; quindi per n abbastanza grande si può rendere R' minore di qualunque quantità assegnabile, e nella formola soprascritta si ottiene allora una formola approssimata di quadratura. Questa formola si chiama la formola di Simpson.

Per la letteratura sulla formola di Simpson si può vedere il § 20.

§ 19. Formola di Cotes.

Integriamo termine a termine la formola di Lagrange.

Si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - x_i}\,dx + \int_a^b R\,dx$$

essendo

$$\varphi(x) = (x - x_0)\,(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$

Scegliamo i punti $x_0\, x_1 \ldots x_n$ nel seguente modo:

$$x_0 = a$$

$$x_1 = a + \frac{b-a}{n}$$

$$x_2 = a + 2\,\frac{b-a}{n}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = a + n\,\frac{b-a}{n} = b$$

e allora la espressione

$$\frac{1}{\varphi'(x_i)}$$

diventa

$$\frac{1}{\left(+i\frac{b-a}{n}\right)\left((i-1)\frac{b-a}{n}\right)\left((i-2)\frac{b-a}{n}\right)\cdots\left(+1.\frac{b-a}{n}\right)\left(-1.\frac{b-a}{n}\right)\cdots\left(-(n-i)\frac{b-a}{n}\right)}$$

$$=(-1)^{n-i}\frac{n^n}{(b-a)^n}\frac{1}{i!\,\overline{n-i}!}.$$

Indicando con

$$h_n^{(i)}$$

i coefficienti

$$h_n^{(i)}=(-1)^{n-i}\frac{n^n}{(b-a)^{n+1}}\frac{1}{i!\,\overline{n-i}!}\int_a^b\frac{\varphi(x)}{x-x_i}\,dx$$

si può vedere che tali coefficienti non dipendono più dai limiti a e b. In effetti poniamo

$$x-a=\frac{b-a}{n}t$$

$$dx=\frac{b-a}{n}dt$$

e quell'integrale diventa

$$h_n^{(i)}=(-1)^{n-i}\frac{n^n}{(b-a)^{n+1}}\frac{1}{i!\,\overline{n-i}!}\times$$

$$\times\int_0^n\frac{(b-a)^{n+1}}{n^{n+1}}t.(t-1)\ldots(t-i+1)(t-i-1)\ldots(t-n)\,dt=$$

$$=(-1)^{n-i}\frac{1}{n.\,i!\,\overline{n-i}!}\int_0^n t(t-1)\ldots(t-i+1)(t-i-1)\ldots(t-n)\,dt$$

che non più dipende dai limiti a, b.

La formola diventa allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\sum_{i=0}^{n} h_n^{(i)} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) + R'$$

e questa è la cosiddetta formola di Cotes, a cui si devono delle tabelle in cui sono calcolati i valori numerici dei coefficienti h per diversi valori degli indici n e i.

Per esempio

$$h_2^{(o)} = h_2^{(1)} = \frac{1}{2}$$

$$h_3^{(o)} = h_3^{(2)} = \frac{1}{6}, \quad h_3^{(1)} = \frac{2}{3}$$

$$h_4^{(o)} = h_4^{(3)} = \frac{1}{8}, \quad h_4^{(1)} = h_4^{(2)} = \frac{3}{8}$$

. . . .

§ 20. Formola di quadratura di Gauss.

Passiamo ora a trattare della ingegnosa formola di quadratura data da Gauss. (*Opere*. Volume III.)

Lo scopo di tale formola è il seguente; fare in modo che la formola che si ottiene sia *esatta* se $f(x)$ è una funzione intera di un grado più alto che quello che sarebbe immediatamente determinato dal numero dei punti in cui si suppongono assegnati i valori di f; propriamente si ottiene una formola che è esatta se f è una funzione intera di grado *non maggiore* di $2n+1$, se al solito $n+1$ (cioè $x_0\, x_1 \ldots x_n$) sono i punti in cui si suppongono assegnati i valori di f.

In questa maniera, nel calcolo dell'integrale di una funzione qualunque, non intera, ma che non diventa naturalmente infinita fra i limiti d'integrazione, si riesce ad avere un'approssimazione maggiore che coi metodi precedenti.

La formola di Gauss si ottiene scegliendo in modo opportuno i punti $x_0\, x_1 \ldots x_n$ in cui si suppongono noti i valori della funzione.

Anche qui partiamo dalla formola di Lagrange e poniamo

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - x_i}\, dx + R'.$$

Tutta la quistione si ridurrà a scegliere in modo opportuno i punti x_i, ovvero il polinomio

$$\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Poniamo

$$\varphi(x) = \frac{d^{n+1}}{d\, x^{n+1}} \left[(x-a)^{n+1} (x-b)^{n+1}\right].$$

Un tale polinomio di grado $n+1$, si suol chiamare una *funzione di Legendre*: i numeri $x_0 \ldots x_n$ sono allora le radici di una funzione di Legendre di grado $n+1$.

Se $f(x)$ è un polinomio di grado n, nella formola superiore $R' = 0$, e la formola di quadratura resta una formola *esatta.*

Mostriamo che scegliendo le x_i come le radici del polinomio di Legendre, la formola è esatta anche per un polinomio di grado $2n+1$, cioè anche per tal polinomio è $R' = 0$.

Sia $\psi(x)$ un qualunque polinomio di grado $n+1$ (o inferiore ad $n+1$), e formiamo il polinomio $f(x)\,\psi(x)$ di grado $2n+1$ (o inferiore a $2n+1$).

Se scegliamo, oltre i già fissati punti $x_0 \ldots x_n$, altri $n+1$ punti $x_{n+1} \ldots x_{2n+1}$, noi possiamo scrivere la formola *esatta*

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,d\,x = \sum_0^{2n+1} \frac{f(x_i)\,\psi(x_i)}{\Phi'(x_i)} \int_a^b \frac{\Phi(x)}{x - x_i}\,d\,x$$

dove

$$\Phi(x) = \varphi(x)(x - x_{n+1})(x - x_{n+2}) \ldots (x - x_{2n+1}) = \\ = \varphi(x)\,\Omega(x).$$

Ora faremo vedere che in questa formola

1. Tutti i termini corrispondenti ad

$$i = n+1,\ n+2, \ldots 2n+1$$

si annullano.

2. La funzione Φ può essere surrogata dalla funzione φ.

Dimostrate che avremo queste due proprietà, risulterà che dalla formola scompare ogni traccia degli elementi indeterminati

$$x_{n+1}\; x_{n+2} \ldots x_{2n+1},$$

e si ha una formola che dipende unicamente dagli elementi $x_0\, x_1 \ldots x_n$.

In quanto ai termini corrispondenti ad

$$i = n + k, \quad (k = 1,\, 2, \ldots n + 1)$$

è facile vedere che essi sono zero.

Perchè essi contengono per fattore l'integrale

$$\int_a^b \varphi(x)(x - x_{n+1}) \ldots (x - x_{n+k-1})(x - x_{n+k+1}) \ldots (x - x_{2n+1})$$

Ordinando il polinomio

$$(x - x_{n+1}) \ldots (x - x_{n+k-1})\,(x - x_{n+k+1}) \ldots (x - x_{2n+1})$$

secondo le potenze di x, questo integrale si scinde in tanti altri ognuno della forma

$$\int_a^b \varphi\,(x)\, x^h\, d\, x \qquad (h = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

Questo integrale, integrato per parti, dà

$$\int_a^b \varphi\,(x)\, x^h\, d\, x = \left[x^h \int \varphi\,(x)\, d\, x\right]_a^b - h \int_a^b x^{h-1} \int \varphi\,(x)$$

e, tenendo conto della forma speciale di φ, e quindi che

$$\int \varphi\,(x)\, d\, x = \frac{n + 1\,!}{2\, n + 2\,!}\, \frac{d^n}{d\, x^n}\, [(x - a)^{n+1}\, (x - b)^{n+1}$$

che si annulla per $x = a$ e per $x = b$ (perchè eseguendo la derivata n^{ma} sul prodotto

$$(x - a)^{n+1} (x - b)^{n+1},$$

il risultato conterrà certamente per fattore

$$(x - a) (x - b)),$$

si ha, riducendo

$$\int_a^b x^h \frac{d^{n+1}}{d x^{n+1}} [(x - a)^{n+1} (x - b)^{n+1}] \, d x =$$

$$= - h \int_a^b x^{h-1} \frac{d^n}{d x^n} [(x - a)^{n+1} (x - b)^{n+1}] \, d x.$$

Riapplicando un'altra volta il medesimo procedimento, si ottiene l'integrale

$$\int_a^b x^{h-2} \frac{d^{n-1}}{d x^{n-1}} [(x - a)^{n+1} (x - b)^{n+1}] \, d x,$$

e così seguitando, si giunge infine a (notando che $h \leqq n$)

$$\int_a^b \frac{d^{n-h+1}}{d x^{n-h+1}} [(x - a)^{n+1} (x - b)^{n+1}] \, d x$$

che è eguale a

$$\frac{d^{n-h}}{d x^{n-h}} [(x - a)^{n+1} (x - b)^{n+1}]$$

che, per la solita ragione, è zero per $x = a$ e per $x = b$.

Concludiamo dunque che

$$\int_a^b \varphi(x)\, x^h\, d\,x = 0, \qquad h \leq n.$$

Di qui ricaviamo più generalmente:

$$\int_a^b \varphi(x)\, \Omega(x)\, d\,x = 0$$

dove $\Omega(x)$ rappresenta una qualunque funzione *intera* di grado eguale o minore ad n.

Resta con ciò dimostrata la prima parte della tesi suindicata.

In quanto alla seconda parte basterà mostrare che per $i \leq n$ si ha sempre

$$\frac{1}{\Phi'(x_i)} \int_a^b \frac{\Phi(x)}{x - x_i}\, d\,x =$$

$$= \frac{1}{\varphi'(x_i)} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - x_i}\, d\,x.$$

Ed in effetti osservando che

$$\Phi'(x) = \varphi(x)\, \Omega'(x) + \varphi'(x)\, \Omega(x)$$

donde per $x = x_i$ $(i \leq n)$ si ha

$$\Phi'(x_i) = \varphi'(x_i)\, \Omega(x_i),$$

la precedente relazione diventa

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)\,\Omega(x)}{x - x_i}\,d\,x = \Omega(x_i)\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - x_i}\,d\,x$$

e perciò

$$\int_a^b \varphi(x)\,\frac{[\Omega(x) - \Omega(x_i)]}{x - x_i}\,d\,x = 0.$$

Ora essendo

$$\frac{\Omega(x) - \Omega(x_i)}{x - x_i}$$

una funzione *intera* di x di grado n, in forza del principio sopra dimostrato, l'integrale superiore è effettivamente zero. Con ciò resta dimostrata anche la seconda parte della nostra tesi.

Possiamo dunque affermare che la formola (di Gauss)

$$\int_a^b f(x)\,d\,x = \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\varphi'(x_i)}\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - x_i}\,d\,x,$$

dove le x_i sono le radici di un polinomio di Legendre, è una formola *esatta* anche che f sia una funzione *intera* di grado superiore ad $n + 1$, ma non maggiore di $2\,n + 1$.

Per ogni altra funzione, questa formola ha un grado d'approssimazione maggiore di altre formole di quadrature, appunto in virtù della proprietà indicata.

Per la letteratura sull'argomento del calcolo approssimato delle quadrature si può vedere:

GAUSS, *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi.* Opere, III pag. 163, 202;

JACOBI, *Ueber Gauss' neue Methode.* Crelle, Vol. I, pag. 301, (1826);

CHRISTOFFEL, *Crelle.* Vol. LV (1858), pag. 61 e 82;

TISSERAND, *Sur l'interpolation.* Comptes Rendus. Vol. LXVIII, pag. 1101 (1869);

STEEN, *Zeuthen Tinskr.* 3.ª Ser. Vol. I, pagina 90 (1870);

CHEVILLIET, *Sur le degré d'exactitude de la formule de Simpson.* Comptes Rendus. Vol. LXXVIII, pag. 1841 (1874);

TCHEBISCHEFF, *Sur les quadratures.* Journ. de Liouville. 2.ᵉ Série. Volume XIX, pagina 19 (1874);

CHEVILLIET, *Sur l'erreur de la formule de Poncelet relative à l'évaluations des aires.* Comptes Rendus. Vol. LXXX, pag. 823 (1875);

PARMENTIER, *Semplification de la méthode de Simpson.* Nouv. Ann. 2.ᵉ Sér. Vol. XV, pag. 241 (1876);

LIGOWSKI, *Grunert Archiv.* Vol. LX, pag. 336 (1877);

HALL, *Analyst.* Vol. III, pag. 1 (1877);

PUJET, *Comptes Rendus.* Vol. LXXXIV, pagina 1071;

CALLANDREAU, *Sur la formule de Gauss.* Comptes Rendus. Vol. LXXXIV, pag. 1225 (1877); Vol. XC, pag. 1067 (1880);

Radau, *Liouville.* 2.^e^ Série. Vol. VI, pag. 283 (1880); *Comptes Rendus*, Vol. XC, pag. 520; e pagina 913 (1880);

Catalan, *Nouv. corresp. math.* Vol. VI, pagina 396; *Mém. de Belgique.* Vol. XLIII;

August, *Grunert Archiv.* Vol. LXVI, pag. 72 (1880);

Stieltjes, *Comptes Rendus.* Vol. XCVII, pagina 740; Vol. XCVIII, pag. 798;

Tchebischeff, *Mém. de St. Pétersbourg.* Volume XLVII (1883);

Posse, *Bulletin de Darboux.* 2.^e^ Sér. Vol. VII, pag. 214;

Stieltjes, *Ann. de l'Éc. norm.* 3.^e^ Sér. Vol. I, pag. 409 (1884); Comptes Rendus. Vol. XCIX, pag. 850;

Mansion, *Soc. scient. Bruxelles.* Vol. VIII, B., pagina 11 (1884);

Hočevar, *Wiener Berichte.* Vol. XC, pag. 908 (1884);

Schellbach, *Ueber mechanische Quadratur.* Berlin, Mayer und Müller, 1884;

Markoff, *Math. Ann.* Vol. XXV, pagina 427 (1885);

Mansion, *Acad. de Belgique.* 1886 (3). Vol. XI, pag. 270; Comptes Rendus. Vol. CII, pag. 412; Vol. CIV, pag. 488; Mathesis. Vol. VII.

Deruyts, *Bull. Belgique* (3). Vol. XI, pag. 307; *Soc. math. France.* Vol. XIV, pag. 151 (1886);

Tchebischeff, *Mem. di Pietroburgo.* Vol. LX, pag. 1;

Mansion, *Soc. scient. Bruxelles.* Vol. XII A, pag. 63, Vol. XV A, pag. 57;

Sonin, *Mem. di Pietroburgo*. Vol. LXIX, pagina 1 (1892);
Peano, *Generalizzazione della formola di Simpson*. Accad. di Torino. Vol. XXVII (1892).

§ 21. Calcolo inverso delle differenze. Generalità.

Il problema del *calcolo inverso delle differenze* è l'analogo del problema del calcolo integrale; si voglia trovare una funzione $F(x)$ tale che le differenze di F in un punto x qualunque, quando si suppone fissata una quantità h, differenza costante fra i valori consecutivi della variabile indipendente, sia eguale al valore della funzione f nel medesimo punto. Una tal funzione F si chiamerà l'*integrale indefinito alle differenze della funzione f*, e si indicherà col simbolo

$$F(x) = \Sigma f(x),$$

il quale simbolo sarà giustificato di quì a poco da una proprietà fondamentale di F.

Trovata che sia la funzione F, se ad essa aggiungiamo una costante è chiaro che la nuova funzione che si viene ad ottenere, soddisfa anche alla proprietà cui soddisfa F, perchè per ogni punto x la differenza della costante è sempre zero.

Ma più generalmente, è chiaro che si otterrà ancora un'altra funzione soddisfacente alla stessa proprietà cui soddisfa F, se aggiungiamo ad F una funzione la cui differenza, per incrementi h, sia zero, o, come si dice, una funzione *periodica*, che acquista cioè valori eguali ogni volta che la variabile indipendente si accresce di h.

Una funzione di tale specie è p. es.

$$\varphi\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{h}, \quad \cos\frac{2\pi x}{h}\right).$$

Ricaviamo quindi che il problema della determinazione di F è a tutto rigore un problema indeterminato, però *due funzioni che hanno la stessa proprietà di F non possono differire fra loro che per una funzione, di cui la differenza sia costante.*

Vediamo ora che cosa è l'*integrale definito alle differenze.*

Consideriamo la somma dei valori di f in n punti equidistanti fra loro per la quantità h; è facile vedere che tale somma si può esprimere subito mediante due valori della funzione F (integrale indefinito). Giacchè dalle relazioni

$$F(x+h) - F(x) = f(x)$$
$$F(x+2h) - F(x+h) = f(x+h)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(x+nh) - F(x+(n-1)h) = f(x+(n-1)h)$$

si ricava

$$F(x+nh) - F(x) = f(x) + f(x+h) + \ldots + \\ + f(x+(n-1)h).$$

La somma del secondo membro si può indicare col simbolo

$$\sum_{x}^{x+nh} f(x)$$

e per analogia si chiamerà *l' integrale definito alle differenze da* x *ad* $x+nh$; dalla formola superiore si ricava allora che *conosciuto l' integrale indefinito cioè la funzione* F, *per ricavare l' integrale definito da* $x=a$ *ad* $x=b=a+nh$ *basta fare la differenza dei due valori di* F *per* $x=a$ *e* $x=b$. È chiaro che nel formare una tal differenza, sparisce sempre ogni traccia di una qualunque altra funzione, di differenza zero, che insieme ad F, entra nella formazione dell' integrale indefinito.

Se il limite superiore dell' integrale alle differenze è l' infinito, si ha una serie. Supposto che questa sia convergente, per calcolarne il valore basterebbe conoscere l' integrale *indefinito* alle differenze corrispondenti al termine generale della serie stessa. È da questo punto di vista che l' integrazione finita trova una grande applicazione nella teoria della serie.

È evidente ancora che per siffatte integrazioni finite sussistono i teoremi elementari delle integrazioni ordinarie, cioè:

L' integrale della somma algebrica di più funzioni è eguale alla somma algebrica degli integrali delle funzioni stesse;

L' integrale del prodotto di una costante per una funzione è eguale al prodotto della costante per l' integrale della funzione.

§ 22. Integrazione per parti.

Vogliamo notare una formola simile a quella che sussiste nel calcolo integrale, e che porta lo stesso titolo di questo paragrafo.

Sappiamo che

$$\Delta [\varphi(x)\psi(x)] = \varphi(x)\Delta\psi(x) + \psi(x+h)\Delta\varphi(x).$$

Di qui otteniamo

$$\Sigma\varphi(x)\Delta\varphi(x) = \varphi(x)\psi(x) - \Sigma\psi(x+h)\Delta\varphi(x)$$

e definendo l'integrazione da a sino a $b = a + n h$, si ha

$$\sum_a^b \varphi(x)\Delta\psi(x) = \varphi(b)\psi(b) - \varphi(a)\psi(a) - \sum_a^b \psi(x+h)\Delta\varphi(x).$$

§ 23. Integrazione delle funzioni intere.

Sappiamo che la differenza di una funzione intera di grado n, è una funzione intera di grado $n-1$; di quì si ricava che l'integrale finito di una funzione intera di grado m sarà un'altra funzione intera di grado $m+1$. I coefficienti di questa funzione intera si possono ricavare in modo facile ricercando delle formole di ricorrenza.

Sia

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m$$

e poniamo

$$F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{m+1} x^{m+1}.$$

Allora formando la differenza di F, e paragonandone i coefficienti con quelli di f, si hanno le formole

$$\begin{aligned}
(m+1)_1 c_{m+1} h &= b_m \\
(m+1)_2 c_{m+1} h^2 + (m)_1 c_m h &= b_{m-1} \\
(m+1)_3 c_{m+1} h^3 + (m)_2 c_m h^2 + (m-1)_1 c_{m-1} h &= b_{m-2} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}$$

di cui la legge di formazione è evidente, e che possono servire a determinare le c.

Supponiamo p. es. che

$$f(x) = x^m$$

cioè che

$$b_m = 1,\ b_{m-1} = b_{m-2} = \ldots = b_0 = 0;$$

le equazioni precedenti diventano (per $h = 1$)

$$\begin{aligned}
(m+1)_1 c_{m+1} &= 1 \\
(m+1)_2 c_{m+1} + (m)_1 c_m &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}$$

donde

$$c_{m+1} = \frac{1}{m+1}$$

$$c_m = -\frac{1}{2}$$

$$c_{m-1} = \frac{m}{12}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

Di qui potrebbe trovarsi l' espressione della somma delle m^{me} potenze dei primi n numeri naturali, cioè

$$\Sigma x^m = \frac{1}{m+1} x^{m+1} - \frac{1}{2} x^m + \frac{1}{12} m x^{m-1} - \ldots$$

e limitando l' integrale fra $x = 0$ e $x = n + 1$, il primo membro diventa

$$1^m + 2^m + \ldots + n^m$$

e il secondo diventa

$$\frac{1}{m+1}(n+1)^{m+1} - \frac{1}{2}(n+1)^m + \frac{1}{12} m (n+1)^{m-1} - \ldots$$

Per $m = 1, 2, 3, \ldots$ si hanno le formole

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

In riguardo a queste formole è bene osservare che *la somma dei cubi dei primi n numeri naturali è eguale al quadrato della somma dei numeri stessi.*

Su questo soggetto vedi:

GLAISHER, *Note on the formula*, etc. Messenger, 2.ª Ser. Vol. V, pag. 168 (1875);

SEITZ and GANDER, *The analyst.* Vol. VI, pagina 58 (1879). In questo lavoro si dimostra che

$$\sum_1^n x^9 = \frac{1}{5}(6s^5 - 20s^4 + 12s^3 - 3s^2)$$

essendo

$$s = \sum_1^n x$$

DOSTOR, *Grunert Archiv.* Vol. LXIII, pag. 435, Vol. LXIV, pag. 310; *Nouv. Annales.* 2.ᵉ Série, Vol. XVIII, pag. 459 e 513 (1879);

CESÀRO, *Mathesis.* Vol. V, pag. 55 (1885);

APPELL, *Sur les polinômes qui expriment la somme des puissances p^{me} des premiers nombres entiers.* Nouv. Ann. (3). Vol. VI, pag. 312 (1887);

DUPORCQ, *Nouv. Ann.* (3). Vol. IX, pag. 594 (1889);

GLASER, *Hoppe Archiv.* (2). Vol. XIII, pagina 106 (1894).

§ 24. Integrazione di altre funzioni.

Se

$$f(x) = c^x \varphi(x)$$

dove $\varphi(x)$ è una funzione *intera* di $m-1^{mo}$ grado, adoperando l'integrazione per parti, può trovarsi (Markoff, *Diff.* pag. 103.)

$$\Sigma c^x \varphi(x) = \frac{c^x}{c^h - 1} \left\{ \varphi(x) - \frac{c^h}{c^h - 1} \Delta \varphi(x) + \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^m \left(\frac{c^h}{c^h - 1} \right)^m \Delta^m (x) \right\}.$$

Di quì può trovarsi una formola per il calcolo della serie

$$c^x \varphi(x) + c^{x+h} \varphi(x+h) + c^{x+2h} \varphi(x+2h) + \ldots$$

per $c < 1$.

Ponendo

$$c = \rho (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) \qquad \rho < 1$$

e posto $\varphi(x) = 1$, si hanno le formole (per $\rho = 1$):

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos(n-1)\alpha = \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen} \frac{2n-1}{2} \alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

$$\alpha + \operatorname{sen} 2\alpha + \ldots + \operatorname{sen}(n-1)\alpha = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{2n-1}{2} \alpha}{2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$$

Per $\rho < 1$, e passando al limite per $n = \infty$ si ha

$$1 + \rho \cos\alpha + \rho^2 \cos 2\alpha + \ldots = \frac{1 - \rho\cos\alpha}{1 - 2\rho\cos\alpha + \rho^2}$$

$$\rho \operatorname{sen}\alpha + \rho^2 \operatorname{sen} 2\alpha + \ldots = \frac{\rho \operatorname{sen}\alpha}{1 - 2\rho\cos\alpha + \rho^2}$$

Per l'integrazione alle differenze di altre funzioni si possono vedere i seguenti lavori:

Abel, *Les fonctions trascendantes* $\Sigma \frac{1}{a^2}, \Sigma \frac{1}{a^3}, \ldots$ Opere. Vol. II;

Idem, *Sommation de la série*

$$\varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \ldots$$

Opere. Vol. II;

Idem, *L'intégrale finie* $\Sigma^{(n)}\varphi(x)$, etc. Opere. Vol. II;

Minding, *Eine Anwendung der Differenzenrech.* Bull. de St. Pétersb. Vol. XXV (1879);

Russell, *On the calculus of finite differences.* Messenger. 2.ª Ser. Vol. XI, pag. 33;

Guichard, *Ann. Éc. norm.* (3). Vol. IV, pagina 361 (1887).

Non vogliamo tralasciare di notare che per gli integrali alle differenze si potrebbe proporsi problemi simili a quelli che il calcolo delle variazioni studia in riguardo agli integrali definiti ordinari.

A ciò si riferiscono i due seguenti lavori, giovanili ed imperfetti, di Abel:

Abel, *Sur les max. et min. des intégrales aux différences.* Opere (ediz. di Holmboe del 1839). Vol. II, pag. 1;

Abel, *Sur les conditions nécessaire pour qu'une fonction de plusieurs variables et de leurs différences soit une différence complète.* Idem, pag. 9, di cui il secondo tratta un problema simile a quello trattato nel § 35 del *Calcolo delle variazioni.*

Questi due lavori furono soppressi nella nuova edizione delle opere di Abel.

§ 25. Differenza fra l'integrale definito ordinario di una funzione e l'integrale definito alle differenze. Formola di Eulero.

Supponiamo data una funzione $f(x)$, e calcoliamone l'integrale definito fra due limiti a e b; calcoliamone poi ancora l'integrale alle differenze fra gli stessi limiti; viene spontanea la domanda come si può esprimere l'uno di questi integrali mediante l'altro? La formola che esprime uno di questi integrali mediante l'altro è la cosiddetta formola di Eulero.

Partiamo dalla formola di Taylor applicata alla funzione

$$\int f(x)\,dx.$$

Si ha

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = h\,f(a) + \frac{h^2}{2!} f'(a) + \frac{h^3}{3!} f''(a) + \ldots +$$

$$\int_{a+h}^{a+2h} f(x)\,dx = h\,f(a+h) + \frac{h^2}{2!} f'(a+h) \frac{h^3}{3!} f''(a+h) + \ldots +$$

. . . .

donde, sommando, si ha (supposto $b = a + n\,h$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = h \sum_a^b f(x) + \frac{h^2}{2!} \sum_a^b f'(x) + \ldots + R.$$

Partiamo ora, anzichè dalla funzione

$$\int f(x)\,dx,$$

dalle consecutive derivate cioè $f(x)$, $f'(x) \ldots$
Si ha allora

$$\Big[f(x)\Big]_a^b = h \sum_a^b f'(x) + \frac{h^2}{2!} \sum_a^b f''(x) + \ldots + R'$$

$$\Big[f'(x)\Big]_a^b = h \sum_a^b f''(x) + \frac{h^2}{2!} \sum_a^b f'''(x) + \ldots + R''$$

. . . .

E sommando queste relazioni, dopo averle moltiplicate rispettivamente per

$$1,\ A\,h,\ B\,h^2,\ C\,h^3, \ldots$$

si ha

$$\int_a^b f(x)\,dx + A\,h\Big[f(x)\Big]_a^b + B\,h^2\Big[f'(x)\Big]_a^b + \ldots =$$

$$= h\sum_a^b f(x) + h^2\left(\frac{1}{2\,!} + A\right)\sum_a^b f'(x) +$$

$$+ h^3\left(\frac{1}{3\,!} + \frac{A}{2\,!} + B\right)\sum_a^b f''(x) + \ldots + (\text{resto}).$$

Possiamo determinare i numeri, finora indeterminati A, $B, \ldots$ in modo che sieno zero tutti i coefficienti numerici del secondo membro, meno il primo; cioè che si abbiano le relazioni ricorrenti

$$\frac{1}{2\,!} + A = 0$$

$$\frac{1}{3\,!} + \frac{A}{2\,!} + B = 0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Allora resta la formola (di Eulero)

$$h\sum_a^b f(x) - \int_a^b f(x)\,dx =$$

$$= A\,h\Big[f(x)\Big]_a^b + B\,h^2\Big[f'(x)\Big]_a^b + \ldots + (\text{resto})$$

in cui resta ancora a determinare i coefficienti A, $B, \ldots$

Per determinarli poniamo $f(x) = e^x$; allora

$$\int_a^b e^x\,d\,x = e^b - e^a$$

$$\sum_a^b e^x = \frac{e^b - e^a}{e^h - 1}$$

$$\Big[f(x)\Big]_a^b = \Big[f'(x)\Big]_a^b = \Big[f''(x)\Big]_a^b = \ldots = e^b - e^a$$

e quindi resta, soppresso un fattore comune,

$$\frac{h}{e^h - 1} = 1 + A\,h + B\,h^2 + C\,h^3 + \ldots$$

Paragonando questo risultato, con quelli del § 11 si vede che i numeri A, B, $C\ldots$ non sono altro, salvo dei fattori costanti, che i cosiddetti numeri di Bernoulli; propriamente

$$A = -\frac{1}{2}$$

e inoltre

$$B = \frac{B_2}{2\,!}$$

$$C = 0$$

$$D = -\frac{B_4}{4\,!}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

essendo $B_2\,B_4\ldots$ i numeri di Bernoulli.

Le opere di Eulero che si riferiscono all'argomento di questo paragrafo e dei precedenti sono le seguenti:

Methodus generalis summandi progressiones (Comm. Ac. Petropolit. Vol. VI, 1732-33). *Inventio summae*, etc. (Id. Vol. VIII). *Methodus universalis series summandi*, etc. (Id. Vol. VIII).

Vedi poi anche:

Malmsten, *Sur la formule*, etc. Acta Math. Vol. V, pag. 1 (1884);

Sonin, *Ann. Éc. norm.* (3). Vol. VI, pag. 257, *Comptes Rendus*. Vol. CVIII, pag. 725 (1889).

§ 26. Equazioni alle differenze finite.

Generalità.

Il punto di partenza per lo studio delle equazioni alle differenze finite è lo stesso di quello relativo alle equazioni differenziali.

Si supponga y funzione di x e si abbia una relazione fra x, y, e le differenze successive di y, cioè $\Delta y, \Delta^2 y, \ldots \Delta^m y$. Una tale relazione si chiamerà *un'equazione alle differenze finite di ordine m.*

Possiamo presentare una siffatta equazione sotto una forma diversa. In effetti si sa che la differenza k^{ma} di y può esprimersi linearmente mediante i valori che la y riceve nei punti

$$x,\ x+h,\ x+2h, \ldots x+kh.$$

Sostituendo tali espressioni, *la equazione alle differenze di ordine m* resta allora espressa come una relazione fra

$$x, y(x), \; y(x+h), \ldots y(x+mh).$$

Viceversa da una siffatta relazione può subito passarsi a quella sotto l'altra forma, perchè si sa che, viceversa, i valori che la funzione riceve nei punti indicati, possono esprimersi linearmente mediante le differenze successive della funzione nel punto x.

In quanto alla genesi di un'equazione alle differenze finite, possiamo immaginare un procedimento simile a quello che si adopera per le equazioni differenziali. Si abbia una funzione y di x, e se ne calcoli la differenza Δy; se la funzione y contiene una costante arbitraria, o anche una funzione la cui differenza sia zero (vedi § 21), cioè una funzione *periodica*, allora fra y e Δy eliminando questa costante o questa funzione periodica si ha una equazione alle differenze di 1.° ordine. In modo simile si otterrebbe un'equazione di m^{mo} ordine da una funzione contenente m funzioni periodiche.

Questa funzione si chiama l' *integrale generale* dell'equazione di m^{mo} ordine.

P. es. si abbia

$$y = c\,a^x + c'\,b^x$$

Per $h = 1$ le differenze, prima e seconda, sono:

$$\Delta\, y = c\,a^x(a-1) + c'\,b^x(b-1)$$
$$\Delta^2 y = c\,a^x(a-1)^2 + c'\,b^x(b-1)^2$$

ed eliminando c, c', si ha

$$\begin{vmatrix} y & 1 & 1 \\ \Delta y & a-1 & b-1 \\ \Delta^2 y & (a-1)^2 & (b-1)^2 \end{vmatrix} = 0$$

equazione alle differenze di 2.° ordine.

Invece di operare in tal maniera si potrebbe anche procedere in altro modo, giovandosi della osservazione fatta sul principio di questo paragrafo.

Si potrebbe cercare di ottenere non la relazione fra x, y, Δy, $\Delta' y$, ma quella fra

$$x,\ y(x)\ y(x+1)\ y(x+2),$$

e che deve essere equivalente alla prima.

Dalla relazione

$$y(x) = c\,a^x + c'\,b^x$$

si ha

$$y(x+1) = c\,a^{x+1} + c'\,b^{x+1}$$
$$y(x+2) = c\,a^{x+2} + c'\,b^{x+2}$$

donde, eliminando $c\,c'$, si ha

$$\begin{vmatrix} y(x) & 1 & 1 \\ y(x+1) & a & b \\ y(x+2) & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = 0.$$

È utile la seguente osservazione: alle volte la equazione alle differenze può *apparire* di ordine superiore a quello cui può con una facile trasformazione ridursi.

Per esempio si abbia la seguente equazione

$$2\,y + 3\,\Delta\,y - \Delta^3\,y = x$$

che pare di 3.° ordine. Trasformiamola, come abbiamo sopra indicato, in modo da farvi comparire i valori di y in quattro punti

$$x,\ x+1,\ x+2,\ x+3;$$

si ottiene

$$3\,y\,(x+2) - y\,(x+3) = x$$

che, ponendo $x - 2$ in luogo di x, diventa

$$3\,y\,(x) - y\,(x+1) = x - 2.$$

Si ha cioè un' equazione di 1.° ordine e non più di 3.°

Posto

$$y\,(x+1) = \Delta\,y + y$$

si ha

$$2\,y - \Delta\,y = x - 2$$

equazione che dovrà essere equivalente alla data.

Bisogna infine osservare che naturalmente anche qui occorrono come per le equazioni differenziali, le distinzioni fra *integrali generali* e *integrali particolari*, intendendo per questi quelle soluzioni che si ricavano dall' integrale generale dando alle *funzioni periodiche* valori particolari.

§ 27. Equazioni lineari alle differenze.

Una classe di equazioni alle differenze assai importante è quella cosiddetta delle equazioni lineari.

La forma generale di una siffatta equazione è (per $h=1$)

$$A \,.\, y(x+m) + By(x+m-1) + \ldots + My(x) = N$$

dove A, $B, \ldots$ M, N sono delle funzioni di x.

Gli ordinari teoremi del calcolo integrale relativi alle equazioni differenziali lineari, si conservano inalterati anche per le equazioni lineari alle differenze, e se noi qui volessimo dimostrarli non avremmo che a ripetere, con lievi modificazioni, le considerazioni già sviluppate nel calcolo integrale.

Ci limiteremo perciò ad enunciarli. Per la loro dimostrazione si può vedere il Cap. XI della più volte citata opera di Markoff (*Differenzenrech.*, 1896).

Distinguiamo il caso in cui $N=0$ (equazione omogenea) da quello in cui ciò non si verifica (equazione completa).

1. *Nel caso dell'equazione omogenea, se* y_1 *è una soluzione particolare, lo sarà anche* $c_1 y_1$ *dove* c_1 *è funzione periodica.*

2. *Nel medesimo caso, se* $y_1\, y_2$ *sono due soluzioni particolari, lo sarà anche* $c_1 y_1 + c_2 y_2$.

3. *La soluzione generale dell'equazione omogenea può sempre porsi sotto la forma*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_m y_m$$

dove le c sono funzioni periodiche, $y_1\, y_2 \ldots y_m$ *sono soluzioni particolari colla condizione che il determinante*

$$D = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_m(x) \\ y_1(x+1) & y_2(x+1) & \ldots & y_m(x+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1(x+m-1) & y_2(x+m=1) & \ldots & y_m(x+m-1) \end{vmatrix}$$

sia diverso da zero.

4. *Se ad una soluzione particolare dell'equazione completa si aggiunge la soluzione generale dell'equazione omogenea corrispondente, si ha la soluzione generale dell'equazione completa.*

5. *La risoluzione dell'equazione completa può ridursi (a meno di un' integrazione finita) alla risoluzione dell'equazione omogenea corrispondente.*

Un integrale dell'equazione lineare si dirà *integrale distinto* quando ha la proprietà che il suo rapporto con ogni altro integrale della stessa equazione tende a zero per $x = \infty$. (Vedi PINCHERLE, *Delle funzioni ipergeometriche.* Giornale di Batt. Vol. XXXII, § 13.) Un tale integrale particolare (se esiste) sarà certamente unico in forza della sua stessa definizione. Si può far vedere che *per le equazioni di 2.° ordine, condizione necessaria e sufficiente perchè l'integrale*

$$c_1 y_1 + c_2 y_2$$

(dove $y_2\, y_2$ sono i due integrali particolari fondamentali) sia un integrale DISTINTO *è che il rapporto*

$$\frac{y_1}{y_2}$$

ammetta un limite per $x = \infty$. (PINCHERLE, cit., § 15.)

Prima di terminare queste considerazioni generali vogliamo notare che lo studio delle equazioni alle differenze, si rannoda con quello cosiddetto dei *sistemi ricorrenti*. Ed in effetti ogni equazione alle differenze, stabilendo una relazione fra i valori

$$y(x), \quad y(x+1), \quad y(x+2) \ldots$$

di una medesima funzione y per valori successivi ed equidistanti della variabile indipendente, si può interpretare come una relazione *ricorrente* stabilita fra tali valori, per la quale, conosciuti i valori della funzione in certi punti, per es. nei punti 0, 1, 2,... si possono ricavare i valori della funzione negli altri punti rappresentati da numeri interi. Quando l'equazione alle differenze è *lineare*, si ha un *sistema ricorrente lineare di ordine eguale a quello dell'equazione.*

È da questo punto di vista che alcuni autori hanno studiato le equazioni alle differenze; vedi per es. i lavori di Pincherle, già citati, e quelli altri dello stesso Autore, che citeremo alla fine del § 34.

§ 28. Equazioni lineari di 1.° ordine.

Sarà istruttivo il caso particolare in cui l'equazione lineare è di 1.° ordine.

La sua forma generale è

$$y(x+1) - Py(x) = Q.$$

Poniamo (come si fa nel corrispondente caso delle equazioni differenziali)

$$y(x) = u(x)\, v(x)$$

e quindi

$$u(x+1)\, v(x+1) - P u(x)\, v(x) = Q.$$

Aggiungendo e togliendo la quantità

$$u(x+1)\, v(x),$$

e raccogliendo opportunamente i termini, si ha

$$u(x+1)\,[v(x+1) - v(x)] +$$
$$+ v(x)\,[u(x+1) - P u(x)] = Q.$$

Poniamo

$$u(x+1) - P\, u(x) = 0$$

cioè

$$\Delta u + u(1-P) = 0.$$

Questa è anche un'equazione lineare di 1.° ordine, ma omogenea. È facile vedere che la sua soluzione è (se con x_0 si rappresenta un qualunque valore minore di x, e da x differente per numeri interi)

$$u(x) = P(x_0)\, P(x_0 + 1) \dots P(x - 1).$$

In effetti di quì si ha

$$u(x + 1) = P(x_0)\, P(x_0 + 1) \dots P(x - 1)\, P(x)$$

e quindi

$$u(x + 1) - P(x)\, u(x) = 0.$$

Con questa determinazione di u, la equazione data diventa

$$\Delta\, v(x) = \frac{Q}{u(x + 1)}$$

donde si ha

$$v(x) = \Sigma \frac{Q}{u(x + 1)} + \text{cost.}$$

intendendo al solito che in luogo della costante potrebbe anche aggiungersi una funzione periodica. Così abbiamo trovata la soluzione generale della equazione data.

§ 29. Equazioni lineari omogenee alle differenze con coefficienti costanti.

Immaginiamo un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti del tipo

$$a_m y(x+m) + a_{m-1} y(x+m-1) + \ldots + \\ + a_1 y(x+1) + a_0 y(x) = 0$$

dove le $a_0\, a_1 \ldots$ sono costanti.

Anche qui i risultati che si hanno sono assai analoghi a quelli relativi alle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

Consideriamo l'equazione *(caratteristica)*

$$a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_0 = 0$$

e sia

$$z = \alpha$$

una radice di moltiplicità r di questa equazione.

Allora si può far vedere che

$$\alpha^x,\ x\,\alpha^x,\ \frac{x(x-1)}{2!}\alpha^x, \ldots, \\ \frac{x(x-1)\ldots(x-r+2)}{r-1!}\alpha^x$$

sono tutte soluzioni particolari della data equazione alle differenze. *

Giacchè se

$$y(x) = \alpha^x, \; y(x+1) = \alpha \,.\, \alpha^x, \; y(x+2) = \alpha^2 \,.\, \alpha^x, \ldots$$

sostituendo, e sopprimendo il fattore α^x, resta una espressione identicamente zero, in virtù della proprietà del numero α, di annullare cioè l'equazione caratteristica.

Se inoltre poniamo

$$y(x) = x \, \alpha^x$$

si ha

$$\begin{aligned} y(x+1) &= x \, \alpha^x \,.\, \alpha + \alpha^{a+1} \\ y(x+2) &= x \,.\, \alpha^x \,.\, \alpha^2 + 2 \, \alpha^{x+1} \,.\, \alpha \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y(x+m) &= x \,.\, \alpha^x \,.\, \alpha^m + m \, \alpha^{x+1} \,.\, \alpha^{m-1} \end{aligned}$$

e sostituendo, si vede che $x \, \alpha^a$ è appunto una soluzione dell'equazione data, tenuto conto che α, come radice multipla, annulla anche la prima derivata del primo membro dell'equazione caratteristica.

Poniamo ora ancora

$$y(x) = \frac{x(x-1)}{2\,!} \, \alpha^x .$$

---

* Notiamo che potremmo porre come moltiplicatori di αx, funzioni qualunque di gradi rispettivamente 1.°, 2.°, etc.; poniamo invece quelle speciali funzioni di tali gradi perchè, come si sa, fra le funzioni intere, esse si comportano più semplicemente dal punto di vista, della teoria delle differenze.

Si avrà

$$y(x+1) = \frac{(x+1)\,x}{2\,!}\,\alpha^{x+1} = \frac{x(x-1)}{2\,!}\,\alpha^{x}\,.\,\alpha + \Delta\left(\frac{x(x-1)}{2\,!}\right).$$

$$y(x+2) = \frac{(x+2)(x+1)}{2\,!}\,\alpha^{x+2} =$$

$$= \frac{x(x-1)}{2\,!}\,\alpha^{x}\,.\,\alpha^{2} + 2\,\Delta\left(\frac{x(x-1)}{2\,!}\right)\alpha^{x+1}\,.\,\alpha + \Delta^{2}\left(\frac{x(x-1)}{2\,!}\right)$$

. . . .

$$y(x+m) = \frac{(x+m)(x+m-1)}{2\,!}\,\alpha^{x+m} =$$

$$= \frac{x(x-1)}{2\,!}\,\alpha^{x}\,.\,\alpha^{m} + (m)_1\,\Delta\left(\frac{x(x-1)}{2\,!}\right)\alpha^{x+1}\,.$$

$$+ (m)_2\,\Delta^{2}\left(\frac{x(x-1)}{2\,!}\right)\alpha^{x+2}\,.\,\alpha$$

tenendo conto della relazione ridotta

$$\frac{(x+s)(x+s-1)}{2\,!} = \frac{x(x-1)}{2\,!} + (s)_1\,\Delta\left(\frac{x(x-1)}{2\,!}\right)$$

$$+ (s)_2\,\Delta^{2}\left(\frac{x(x-}{2\,!}\right.$$

giacchè gli altri termini seguenti, contenenti le differenze di ordine superiore al 2.°, si annullano essendo $x(x-1)$ una funzione di 2.° grado.

Sostituendo i precedenti valori, e osservando che α annulla il primo membro dell'equazione caratteristica, la sua prima derivata, e la sua seconda derivata, si riconosce che

$$\frac{x(x-1)}{2!}\alpha^x$$

è una soluzione della data equazione alle differenze. Così si procederebbe per gli altri casi.

Da ogni radice, di moltiplicità r, dell'equazione caratteristica, si formano così r integrali distinti; perciò se $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_i$ sono le radici distinte della equazione caratteristica, colle moltiplicità

$$r_1 r_2 \ldots r_i \quad (\text{dove } r_1 + r_2 + \ldots + r_i = m)$$

si formeranno $r_1 + r_2 + \ldots + r_i$, cioè m, integrali particolari, i quali, come poi si può riconoscere senza difficoltà, hanno anche la proprietà di non annullare il determinante di cui si è trattato nel § precedente, cioè sono, come si dice, m integrali costituenti un sistema fondamentale; con una combinazione lineare di essi, si forma perciò l'integrale generale dell'equazione data.

§ 30. Sul determinante analogo al determinante di Wronski. Ricerche di Casorati.

Si sa dal calcolo differenziale come è formato il determinante di Wronski (v. *Calcolo differenziale*, pag. 220; *Calcolo integrale*, pag. 287-288); gli elementi della prima linea sono m funzioni date, e gli elementi delle altre linee si formano derivando successivamente quelli della prima.

Questo determinante ha due proprietà importanti, cioè 1.° la sua derivata rispetto ad x si forma semplicemente sostituendo agli elementi dell' ultima linea, le loro rispettive derivate; 2.° il suo annullarsi rappresenta la condizione necessaria e sufficiente perchè le m funzioni sieno legate da una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti. Nello studio delle equazioni differenziali lineari di ordine m, entra in considerazione un siffatto determinante formato colle m soluzioni particolari linearmente indipendenti dell'equazione differenziale stessa, ed esso si esprime mediante una combinazione dei coefficienti dell' equazione stessa (formola di Liouville, v. *Calcolo integr.*, pag. 289). Ora è importante notare che si può studiare un determinante analogo a quello di Wronski, e avente proprietà analoghe.

Sieno $y_1(x)\ y_2(x) \ldots y_m(x)$, m funzioni di x, e formiamo il determinante:

$$D = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_m(x) \\ y_1(x+1) & \ldots & y_m(x+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1(x+m-1) & \ldots & y_m(x+m-1) \end{vmatrix}.$$

È evidente prima di tutto, che un siffatto determinante può scriversi sotto l'altra forma

$$D = \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_m(x) \\ \Delta y_1(x) & \ldots & \Delta y_m(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \Delta^{m-1} y_1(x) & \ldots & \Delta^{m-1} y_m(x) \end{vmatrix}$$

formato colle *differenze successive* delle m funzioni date, come il determinante di Wronski è formato colle *derivate successive.* Giacchè in D, sotto la prima forma, sottraendo dagli elementi della seconda linea quelli della prima, si ha

$$D = \begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_m(x) \\ \Delta y_1(x) & \dots & \Delta y_m(x) \\ y_1(x+2) & \dots & y_m(x+2) \\ \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ y_1(x+m-1) & \dots & y_m(x+m-1) \end{vmatrix}.$$

Se ora dagli elementi della 3.ª linea sottragghiamo gli elementi della prima linea, e quelli della seconda moltiplicati per 2, al posto degli elementi della 3.ª linea si hanno le quantità

$$\Delta^2 y_1(x) \dots \Delta^2 y_m(x)$$

perchè

$$y(x+2) = y(x) + 2\Delta y(x) + \Delta^2 y(x).$$

Così continuando, si riconosce infine che i due determinanti sono diversi solo per la forma.

Ora si può dimostrare per il determinante D il seguente *teorema di Casorati (Il calcolo delle differenze finite* etc. Mem. Acc. Lincei. Volume V (1880)):

L'annullarsi del determinante D è condizione necessaria e sufficiente perchè le m funzioni

$$y_1 \dots y_m$$

sieno fra loro legate da una relazione lineare omogenea, a coefficienti periodici (cioè a coefficienti che sono funzioni di x e che riprendono i medesimi valori quando la variabile si aumenta di 1).

Ed in effetti se le m funzioni sono legate da una siffatta relazione, sussisteranno allora identicamente le equazioni

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_m y_m(x) &= 0 \\ c_1 y_1(x+1) + c_2 y_2(x+1) + \dots + c_m y_m(x+1) &= 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 y_1(x+m-1) + c_2 y_2(x+m-1) + \dots + c_m y_m(x+m-1) &= 0 \end{aligned}$$

e quindi deve essere zero il determinante di questo sistema di equazioni lineari.

Dimostriamo ora che la condizione è sufficiente. Per $m = 2$ si ha

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1(x+1) & y_2(x+1) \end{vmatrix} = 0$$

donde

$$\frac{y_2(x+1)}{y_1(x+1)} = \frac{y_2(x)}{y_1(x)}.$$

Dovendo questa relazione sussistere per qualunque x, si ricava che la funzione

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)}$$

è una funzione *periodica* nel senso anzidetto; posta quindi eguale a $-\mu$ dove μ sia funzione periodica, risulta

$$y_2(x) + \mu\, y_1(x) = 0$$

formola che dimostra il teorema pel caso di $m = 2$.

Si può ora provare che se esso sussiste per l'indice $m - 1$ sussisterà anche per l'indice m.

Giacchè se dagli elementi della 1.ª, 2.ª... linea moltiplicati rispettivamente per

$$y_1(x+1), \qquad y_1(x+2), \ldots$$

si sottraggono quelli della 2.ª, 3.ª, ... linea moltiplicati rispettivamente per

$$y_1(x), \quad y_1(x+1), \quad y_1(x+2), \ldots$$

il determinante D si trasforma in

$$\frac{1}{y_1(x+1)\ldots y_1(x+m-2)} \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1,m-1} \\ \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{2,m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m-1,1} & \ldots & \alpha_{m-1,m-1} \end{vmatrix}.$$

dove

$$j = y_{j+1}(x+i-1)\, y_1(x+i) - y_1(x+i-1)\, y_{j+1}(x+i)$$

Supponendo che la funzione $y_1(x)$ non sia mai infinita e che D sia zero, sarà zero il determinante che compare in questa formola; esso è intanto un determinante formato come D, ma relativo alle $m-1$ funzioni

$$\varphi_1(x) = y_2(x)\,y_1(x+1) - y_1(x)\,y_2(x+1)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi_{m-1}(x) = y_m(x)\,y_1(x+1) - y_1(x)\,y_m(x+1).$$

Supposto vero il teorema sino al caso di $m-1$ funzioni, si ricava che fra queste sussiste una relazione lineare omogenea a coefficienti periodici, cioè che si ha identicamente

$$c_2\,\varphi_1(x) + c_3\,\varphi_2(x) + \dots + c_m\,\varphi_{m-1}(x) = 0.$$

Questa relazione, sostituendo alle φ i loro valori, può scriversi

$$\begin{vmatrix} y_1(x), & c_2 y_2(x) + \dots + c_m y_m(x) \\ y_1(x+1), & c_2 y_2(x+1) + \dots + c_m y_m(x+1) \end{vmatrix} = 0.$$

Ma questo determinante non è altro che un determinante D relativo alle *due* funzioni

$$y_1(x), \qquad [c_2\,y_2(x) + \dots + c_m\,y_m(x)].$$

Quindi fra queste sussisterà una relazione lineare a coefficienti periodici, e il teorema resta così dimostrato.

§ 31. Equazioni riducibili al tipo delle equazioni lineari a coefficienti costanti.

Si abbia l'equazione *lineare*

$$y(x+n)+A_1\varphi(x)\,y(x+n-1)+$$
$$+A_2\varphi(x)\,\varphi(x-1)\,y(x+n-2)+\ldots=\Phi(x)$$

dove $A_1\,A_2\ldots$ sono costanti.

Poniamo

$$y(x)=\varphi(x-n)\,\varphi(x-n-1)\ldots\varphi(x_0)\,u(x)$$

dove con x_0 si intende un numero costante minore di $x-n$ e differente da x per numeri *interi*.

Si avrà

$$(x+n)\quad=\varphi(x)\varphi(x-1)\ldots\varphi(x-n)\ldots\varphi(x_0)\,u(x+n)$$
$$(x+n-1)=\varphi(x-1)\ldots\varphi(x-n)\ldots\varphi(x_0)\,u(x+n-1)$$
. . . .

e quindi, sostituendo e dividendo pel fattore comune

$$\varphi(x)\,\varphi(x-1)\ldots\varphi(x_0)$$

resta un'equazione il cui primo membro è a coefficienti costanti, e il secondo membro è

$$\frac{\Phi(x)}{\varphi(x)\,\varphi(x-1)\ldots\varphi(x_0)}\,.$$

Si abbia un'equazione del tipo

$$y(x+n) + A_1 a^x y(x+n-1) +$$
$$+ A_2 a^{2x} y(x+n-2) + \ldots = \Phi(x).$$

Ponendo

$$\varphi(x) = a^x$$

si ha

$$\varphi(x)\,\varphi(x-1) = \frac{a^{2x}}{a}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

e quindi ci riduciamo facilmente al tipo precedente.

Si abbia un'equazione *non lineare* di 1.° ordine del tipo

$$y(x+1)\,y(x) + \varphi(x)\,y(x+1) + \psi(x)\,y(x) = \chi(x).$$

Poniamo

$$y(x) = \frac{z(x+1)}{z(x)} - \varphi(x)$$

donde si ha

$$y(x+1)\,[y(x) + \varphi(x)] =$$
$$= \left[\frac{z(x+2)}{z(x+1)} - \varphi(x+1)\right]\frac{z(x+1)}{z(x)} =$$
$$= \frac{z(x+2)}{z(x)} - \varphi(x+1)\,\frac{z(x+1)}{z(x)}\,.$$

Sostituendo e riducendo si ha

$$z(x+2)-[\varphi(x+1)-\psi(x)]\,z(x+1)-$$
$$-[\psi(x)\,\varphi(x)+\chi(x)]\,z(x)=0.$$

In questa maniera l'equazione *non lineare* data è stata ridotta ad una *lineare*, ma di 2.° ordine.

Se i coefficienti di questa equazione sono costanti, ovvero riducibili rispettivamente alle forme

$$A_1\,\Phi(x),\qquad A_2\,\Phi(x)\,\Phi(x-1),$$

allora, essa potrà trasformarsi a sua volta in un'altra a coefficienti costanti.

Le considerazioni di questo § sono prese dalla citata Opera di Boole.

§ 32. Esempi vari di equazioni alle differenze.

Raccoglieremo in questo paragrafo, colle rispettive soluzioni, alcuni esempi di equazioni alle differenze, per mostrare quali sono gli artifizi che generalmente riescono a integrare l'equazione nei casi più semplici. Anche qui naturalmente, come nella teoria delle equazioni differenziali, princìpi generali se ne possono stabilire pochi, e anzi in generale si può osservare che la teoria delle equazioni alle differenze, è più difficile, e del resto anche meno studiata, di quella delle equazioni differenziali, colla quale presenta così grandi analogie.

Gli esempi che svilupperemo in questo e nei seguenti paragrafi sono presi dall'opera di Boole, ma avvertiamo che quest'Autore, come gran parte degli autori inglesi, fa molto spesso uso, senza sufficienti giustificazioni, di calcoli simbolici, i quali se in qualche caso fanno raggiungere il risultato finale, non sono da consigliarsi a chi sia desideroso del più elementare rigore analitico, almenochè non si trovi il modo di giustificare rigorosamente i passaggi simbolici da una formola ad un'altra. Noi cercheremo di risolvere tutti gli esempi escludendo nel modo più assoluto i procedimenti simbolici.

1.

$$y(x+1)\,y(x) - X[y(x+1) - y(x)] + 1 = 0$$

dove X sia una funzione di x.

Ponendo

$$y(x) = \operatorname{tg} z(x)$$

si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{X} &= \frac{\operatorname{tg} z(x+1) - \operatorname{tg} z(x)}{1 + \operatorname{tg} z(x+1)\operatorname{tg} z(x)}\\ &= \operatorname{tg}[z(x+1) - z(x)]\\ &= \operatorname{tg} \Delta z(x)\end{aligned}$$

donde

$$\Delta z(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{X}$$

$$z(x) = \Sigma \operatorname{arctg} \frac{1}{X} + \text{cost.}$$

$$y(x) = \operatorname{tg} \left[\Sigma \operatorname{arctg} \frac{1}{X} + \text{cost.}\right].$$

2.

$$y(x+1)y(x)+\sqrt{\{1-y^2(x+1)\}\{1-y^2(x)\}}=X.$$

Poniamo

$$y(x)=\cos z(x).$$

Si ha

$$X=\cos z(x+1)\cos z(x)+\operatorname{sen} z(x+1)\operatorname{sen} z(x)$$
$$=\cos[z(x+1)-z(x)]\cos\Delta z(x)$$

e quindi finalmente

$$y(x)=\cos[\text{Cost.}+\Sigma\,\text{arc}\cos X].$$

3.

$$y=x\,\Delta y+(\Delta y)^2.$$

Formiamo la differenza prima di ambo i membri, e si ha: *

$$\Delta y=\Delta y+x\,\Delta^2 y+\Delta^2 y+2\,\Delta y\,\Delta^2 y+(\Delta^2 y)^2$$

---

* Per calcolare questa differenza possiamo procedere nel seguente modo. Indichiamo con $y_x\, y_{x+1}\ldots$; valori di y per i valori $x, x+1,\ldots$ della variabile; allora si ha

$$y_{x+1}=(x+1)\,\Delta y_{x+1}+(\Delta y_{x+1})^2$$
$$y_x\;=x\,\Delta y_x+(\Delta y_x)^2$$

donde, sottraendo l'una dall'altra, si ha

$$\Delta y_x=\Delta y_{x+1}+x\,\Delta^2 y_x+\Delta^2 y_x(\Delta y_{x+1}+\Delta y_x)$$

e ponendo

$$\Delta y_{x+1}=\Delta y_x+\Delta^2 y_x$$

si ha la formola del testo.

donde

$$\Delta^2 y\,(\Delta^2 y + 2\,\Delta\, y + x + 1) = 0.$$

Ponendo

$$\Delta^2 y = 0$$

si ha

$$\Delta\, y = \text{cost.}$$
$$y = c\,x + c'$$

valore di y che sostituito nell'equazione data dà

$$c' = c^2$$

e quindi si ha la soluzione

$$y = c\,x + c^2.$$

Se invece poniamo

$$\Delta^2 y + 2\,\Delta\, y + x + 1 = 0,$$

si ha

$$\Delta\, y = C\,(-1)^x - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

perchè infatti da questa formola si ha

$$\Delta^2 y = -2\,C\,(-1)^x - \frac{1}{2}$$

e sostituendo nell'equazione, questa resta verificata.

Di qui si ha che un'altra soluzione dell' equazione data (la quale, essendo di 2.° grado in $\Delta\, y$, si può scindere nel prodotto di due fattori lineari, ognuno dei quali ha una soluzione per conto proprio) è

$$y = \left\{ C(-1)^x - \frac{1}{4} \right\}^2 - \frac{x^2}{4}.$$

§ 33. Sistemi di equazioni simultanee.

Se sono assegnate più equazioni alle differenze contenenti altrettante funzioni incognite e le differenze di esse, si ha *un sistema di equazioni simultanee.*

Per risolvere un tal sistema si cercherà di eliminare una delle funzioni e le sue differenze, in modo da ridursi ad una sola equazione con una sola funzione incognita.

Mostreremo su alcuni esempi semplici il procedimento che si può seguire in alcuni casi.

Sieno date le due equazioni

$$y(x+1) - a^2 x\, z(x) = 0$$
$$z(x+1) - x\, y(x) = 0.$$

dalle quali dobbiamo ricavare i valori delle due funzioni incognite

$$y(x), \quad z(x).$$

Dalla prima di esse si ha

$$y(x+2) - a^2(x+1)\, z(x+1) = 0$$

e quindi, eliminando z colla seconda, resta

$$y(x+2)-a^2 x(x+1)\,y(x)=0.$$

Ponendo

$$y(x)=(x-1)(x-2)\ldots x_0\,.\,u(x)$$

si ha

$$y(x+2)=(x+1)\,x\,(x-1)(x-2)\ldots x_0\,.\,u(x+2)$$

e quindi sostituendo, e sopprimendo il fattore comune, resta l'equazione lineare a coefficienti costanti

$$u(x+2)-a^2 u(x)=0$$

il cui integrale generale è

$$c_1 a^x+c_2(-a)^x.$$

Il valore di y è perciò

$$y(x)=(x-1)(x-2)\ldots x_0\,(c_1 a^x+c_2(-a)^x).$$

Il valore di z si otterrà allora dalla prima delle due equazioni date:

$$z(x)=\frac{y(x+1)}{a^2 x}=\frac{(x-1)(x-2)\ldots x_0}{a^2}\,(c_1 a^{x+1}+c_2(-a)^{x}$$

Un secondo esempio è

$$\begin{aligned}y(x+2)+2z(x+1)-8y(x)&=0\\ z(x+2)+y(x+1)\;-2z(x)&=0.\end{aligned}$$

Dalla prima si ha:

$$y(x+4)+2z(x+3)-8y(x+2)=0$$

e dalla seconda

$$z(x+3) - y(x+2) - 2z(x+1) = 0.$$

Eliminando allora fra la prima delle date e queste due, le espressioni

$$z(x+1), \qquad z(x+3),$$

resta un'equazione in sola y, cioè

$$y(x+4) - 8y(x+2) + 16y(x) = 0.$$

Questa è un'equazione lineare *omogenea;* l'equazione caratteristica corrispondente è

$$t^4 - 8t^2 + 16 = 0 = (t^2 - 4)^2$$

che ha per radici *doppie*

$$t = \pm 2,$$

quindi la soluzione generale è data da

$$y(x) = (c_0 + c_1 x) 2^x + (c_2 + c_3 x)(-2)^x.$$

Sostituendo questo valore nella prima delle date si ha:

$$z(x) = [(c_0 - 3c_1) + c_1 x] 2^x - [(c_2 - 3c_3) + c_3 x](-2)^x.$$

§ 34. Sulle equazioni a differenze parziali.

Se z è una funzione di due variabili x, y si possono formare *le differenze parziali di* z, formando le differenze

$$\Delta_x z = z(x + \Delta x, y) - z(x y)$$
$$\Delta_y z = z(x, y + \Delta y) - z(x y).$$

Le quantità Δx e Δy si suppongono da ora in poi eguali fra loro, ed eguali ad 1.

Si possono allora immaginare delle equazioni a differenze parziali, le quali compiano nel calcolo delle differenze lo stesso ufficio che nel calcolo infinitesimale compiono le equazioni a derivate parziali.

Nell'impossibilità di stabilire delle teorie generali, noi dobbiamo limitarci a dare qui qualche esempio per far vedere come si possono trattare siffatte equazioni.

Incominciamo coll'osservare che anche qui le equazioni si possono presentare sotto varie forme; può immaginarsi che si abbia una relazione fra x, y, z, $\Delta_x z$, $\Delta_y z, \ldots$, e può immaginarsi che le differenze Δ sieno state sostituite dai secondi membri delle formole note che esprimono le differenze mediante i valori della funzione per valori successivi della variabile; può poi immaginarsi che questa sostituzione sia stata fatta solo relativamente alle differenze di indice x, e non relativamente alle differenze di indice y, o viceversa; si vede quindi che in tutto per una funzione z di *due* variabili, un'equazione a differenze parziali può presentarsi sotto quattro forme diverse.

Consideriamo l'equazione semplicissima

$$z(x+1, y) - z(x, y+1) = 0.$$

Espressa mediante le differenze, questa equazione diventa

$$\Delta_x z - \Delta_y z = 0.$$

È evidente che la funzione

$$z = y + x$$

soddisfa la equazione proposta; ma si può dire ancora dippiù; cioè, una qualunque *funzione arbitraria* di $y + x$ soddisfa anche l'equazione; perchè una tale funzione arbitraria del binomio

$$(y + x)$$

ha appunto la proprietà che deve avere la funzione integrale, di aumentare cioè della medesima quantità sia che si accresca x di 1, sia che si accresca di 1 la y, perchè in ambo i casi l'argomento $y + x$ si accresce sempre della medesima quantità. Concludiamo dunque che l'integrale dell'equazione data si presenta sotto la forma

$$z = \varphi(x + y)$$

essendo φ il simbolo di una *funzione arbitraria*.

Si vede così che si presenta qui un fatto analogo a quello che si presenta nella teoria delle equazioni a derivate parziali, il cui integrale non contiene solo delle *costanti arbitrarie*, ma delle *funzioni arbitrarie.*

Consideriamo ancora l'equazione

$$z(x+1, y+1) - z(xy) = 0$$

che espressa mediante le differenze è

$$\Delta_x \Delta_y z + \Delta_x z + \Delta_y z = 0.$$

La funzione $y - x$ soddisfa l'equazione data, come si riconosce immediatamente, perchè resta inalterata accrescendo di 1 sia x che y; ricaviamo perciò che la funzione *arbitraria*

$$z = \varphi(y - x)$$

sarà l'integrale dell'equazione.

Consideriamo ora la seguente equazione

$$\Delta^2_x z(x, y+1) - \Delta^2_y z(x+1, y) = 0.$$

Introducendo le differenze di z prese tutte per i medesimi valori delle variabili x, y, si ha l'equazione

$$(\Delta^2_x + \Delta^2_x \Delta_y - \Delta^2_y - \Delta^2_y \Delta_x) z(xy) = 0$$

che può scriversi

$$(\Delta_x \Delta_y + \Delta_x + \Delta_y)(\Delta_x - \Delta_y) z(xy) = 0.$$

Osserviamo allora che se si soddisfa l'equazione

$$(\Delta_x - \Delta_y) z = 0$$

resterà identicamente soddisfatta anche l'equazione data, perchè per comporre il primo membro di tale equazione, bisogna eseguire una serie di operazioni Δ sopra una quantità che da sè stessa è zero, e quindi il risultato non può essere che zero.

Intanto la

$$(\Delta_x - \Delta_y) z = 0$$

si risolve con

$$z = \varphi(x + y),$$

essendo φ il simbolo di una funzione *arbitraria,* dunque possiamo intanto conchiudere che

$$z = \varphi(x + y)$$

è un integrale dell'equazione data.

Ma ora osserviamo che se ad un tale z, aggiungiamo una funzione, la quale sia integrale dell'equazione rappresentata da

$$(\Delta_x \Delta_y + \Delta_x + \Delta_y) z = 0,$$

cioè una funzione del tipo

$$\psi(x - y),$$

(dove ψ è arbitraria) abbiamo ancora una funzione che soddisfa l'equazione data.

Ed infatti noi possiamo scrivere l'equazione data sotto ciascuna delle due forme

$$(\Delta_x \Delta_y + \Delta_x + \Delta_y)(\Delta_x - \Delta_y) z = 0$$

ovvero

$$(\Delta_x - \Delta_y)(\Delta_x \Delta_y + \Delta_x + \Delta_y)\, z = 0.$$

Ora se formiamo

$$z = \varphi(x + y) + \psi(x - y),$$

e vogliamo esaminare se questa funzione soddisfa l'equazione, possiamo applicare al primo termine le operazioni Δ nell'ordine dato dalla prima forma, e al secondo termine le operazioni Δ nell'ordine rappresentato dalla seconda forma, ed in ambo i casi si ha per risultato zero; e così si riconosce che z è effettivamente l'integrale dell'equazione data. In tal maniera l'integrale resta espresso mediante *due funzioni arbitrarie.*

Sia data l'equazione

$$z(x + 1, y + 1) - x\, y\, (x, y) = 0.$$

Incominciamo coll'osservare che una funzione arbitraria di $x - y$, resta inalterata, quando ambedue gli argomenti si accrescono di un'unità. Quindi se poniamo

$$z = \varphi(x - y)$$

abbiamo che

$$z(x + 1, y + 1) = z(x, y).$$

Se possiamo trovare una funzione di x tale che il prodotto di essa per $\varphi(x + y)$, resti moltiplicato per x quando x si accresce di 1, abbiamo risoluto l'equazione data.

Posto

$$z = \psi(x)\,\varphi(x-y),$$

dove φ è funzione arbitraria, e ψ funzione da determinare, si ha

$$\begin{aligned} z(x+1, y+1) &= \psi(x+1)\,\varphi(x-y) \\ z(x, y) &= \psi(x)\qquad \varphi(x-y) \end{aligned}$$

e perchè ψ sia tale che l'equazione data debba essere risoluta, risulta

$$\psi(x+1) = x\,\psi(x)$$

donde (v. equazioni lineari di 1.° ordine, § 28)

$$\psi(x) = (x-1)(x-2)\ldots x_0$$

(essendo x_0 un valore fisso e differente per numeri interi dal valore di x). Abbiamo dunque come soluzione dell'equazione a differenze parziali proposta, la funzione

$$z = (x-1)(x-2)\ldots x_0\,\varphi(x-y),$$

dove φ è il simbolo di una funzione arbitraria.

Con un metodo simile risolveremo l'altra equazione

$$z(x+1, y+1) - p\,z(x+2, y) - (1-p)\,z(x, y+2) = 0.$$

In primo luogo osserviamo che la funzione

$$x + y$$

resta invariata, se aumentiamo ambo gli argomenti di 1, ovvero solo uno di essi lo accresciamo di 2.

Quindi posto

$$z = \varphi(x + y) \,.\, \psi(x)$$

e sostituendo nell'equazione data, abbiamo in tutti i termini il fattore comune

$$\varphi(x + y + 2);$$

e, soppresso questo fattore, resta

$$\psi(x + 1) - p\,\psi(x + 2) - (1 - p)\,\psi(x) = 0$$

che è un'equazione lineare, ad una variabile, a coefficienti costanti.

Le radici dell'equazione *caratteristica* corrispondente

$$p\,t^2 - t + (1 - p) = 0$$

sono

$$t = 1$$

$$t = \frac{1 - p}{p}$$

e perciò due integrali particolari di quell'equazione sono

$$\psi(x) = 1, \quad \psi(x) = \left(\frac{1 - p}{p}\right)^x.$$

Se moltiplichiamo ciascuno di questi due integrali particolari, per una funzione arbitraria di $(x + y)$, abbiamo due integrali particolari dell'equazione proposta, e tenuto conto dell'omogeneità di tale equazione, possiamo anche dire che la somma di tali due integrali particolari è anche un integrale dell'equazione. Abbiamo così l'espressione

$$z = \varphi(x+y) + \left(\frac{1-p}{p}\right)^x \varphi_1(x+y)$$

dove φ, φ_1 sono i simboli di due funzioni arbitrarie e fra loro indipendenti. Questo integrale contiene così *due* funzioni arbitrarie, e lo considereremo come l'integrale generale dell'equazione data che è di 2.° ordine.

Termineremo le poche considerazioni che abbiamo potuto fare sulle equazioni alle differenze finite, col porre una lista dei lavori che si riferiscono a questo argomento.

BRASSINE, Nota III al *Cours d'analyse* di Sturm, 3.ª ed. (1868);

THOMAE, *Integration der Differenzengleich.* etc. Schlömilch Zeitschr. Vol. XVI, pag. 146 e 428 (1871);

COMBESCURE, *Sur quelques points du calcul inverse des différences.* Comptes Rendus. Volume LXXIV, pag. 454 (1872);

LE PAIGE, *Sur une équation aux différences finies.* Nouv. Corresp. Math. Vol. II, pagina 301 (1876), Vol. III, pag. 47 (1877);

SYLVESTER, *Note on an equation in finite differences.* Phil. Magaz. 1879.

In questo lavoro l'autore tratta dell'equazione

$$u(x) = \frac{u(x-1)}{x} + u(x-2);$$

CASORATI, *Mem. Lincei* (3). Vol. V (1880);

SYLVESTER, *On the solutions of a certain cl[illegible] of difference or differential equations.* Americ[illegible] Journal. Vol. IV, pag. 260 (1881);

SYLVESTER, *American Journal.* Vol. IV, pa[illegible]na 321 (1882);

MUIR, *Phil. Magaz.* 5.ª Ser. Vol. XVII, pag[illegible]na 115 (1884);

CESÀRO, *Sur une équation aux différences m[illegible]lées.* Nouv. Ann. 3.ª Ser. Vol. V, pag. 36 (1885);

PINCHERLE, *Rendic. Istit. Lomb.* Vol. XIX, pagina 559 (1886);

MELLIN, *Acta math.* Vol. IX, pag. 137 (1886);

GUICHARD, *Ann. Éc. norm.* (3). Vol. IV, pagina 361 (1887);

SYLVESTER, *Messenger* (2). Vol. XVIII, pag. 113;

LERCH, *Aufl. einiger Differenzengleich.* Casopis. Vol. XXI, pag. 69 (1892);

PINCHERLE, *Rend. Accad. Lincei.* Vol. III, pagina 12 e pag. 99 (1894); Vol. IV, pag. 228; Accad. di Bologna (5). T. IV (1894); T. V (1895);

VIVANTI, *Journal de Teixeira.* Vol. XI, pag. 167;

TAGIURI, *Giorn. di Batt.* Vol. XXXI, pag. 95;

FLOQUET, *Ann. Éc. norm.* Vol. VIII (2);

TORELLI, *Acc. di Napoli.* 1895 e 1896.

Possono poi anche vedersi il II e III capitolo del lavoro di PINCHERLE, *Delle funzioni ipergeometriche*, ecc. Giorn. di Batt. Vol. XXXII.

FINE.

ERRATA-CORRIGE.

			Errata.	Corrige.
P. 115	riga	7	-1	$-\binom{m}{1}$
„	„	8	$+1-\binom{m}{3}\binom{4}{2}+\ldots$	$+\binom{m}{2}-\binom{m}{3}\binom{3}{2}+\ldots$
„	„	11	$-\frac{d}{dx}(b^{(m-1)}z)+$	$-\frac{d}{dx}\left(\binom{m}{1}b^{(m-1)}z\right)$
„	„	12	$+\frac{d^2}{dx^2}(b^{(m-2)}z)-\ldots$	$+\frac{d^2}{dx^2}\left(\binom{m}{2}b^{(m-2)}z\right)-\ldots$
„	„	15	$-\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(b^{(m-1}z)+\ldots$	$-\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\left(\binom{m}{1}b^{m-1}z\right)+\ldots$
P. 178	„	7	$x=\frac{a-b}{2}-\frac{a+b}{2}\cos t$	$x=\frac{a-b}{2}+\frac{a+b}{2}\cos t$
„	„	13	$1-\cos t$	$1+\cos t$
„ 185	„	4	scritta si ha	scritta, e delle tre variazioni $\partial x_1\ \partial y_1\ \partial z_1$ essendovene una arbitraria, si ha
„	„	15	degli isoperimetri	dei minimi relativi
„	„	17	Eulero	Lagrange
„	„	19	λ è costante indeterminata	λ è funzione indeterminata.

CATALOGO DEI 500 MANUALI HOEPLI

Pubblicati sino al 1° Maggio 1897

	L. c.
Abitazioni animali domestici, di *U. Barpi*, 168 illustr.	4 —
Acetilene (L'), del dott. *Luigi Castellani*	2 —
Acido solforico, nitrico, sodico, muriatico, del dottor *V. Vender*. (In lavoro).	
Acque (Le) minerali e termali del Regno d'Italia, di *Luigi Tioli*	5 50
Adulterazione e falsificazione degli alimenti, del dott. prof. *L. Gabba*.	2 —
Agronomia, del prof. *Carega di Muricce*	1 50
Alcool, di *F. Cantamessa*, con 24 illustrazioni . . .	3 —
Algebra complementare, del prof. *S. Pincherle*:	
Parte I. Analisi algebrica	1 50
Parte II. Teoria delle equazioni con 4 figure . . .	1 50
Algebra elementare, del prof. *S. Pincherle*	1 50
Alimentazione, di *G. Strafforello*	2 —
Alimentazione del bestiame, di *T. Poggi*. (In lavoro).	
Alpi (Le), di *J. Ball.*, trad. del prof. *I. Cremona* . .	1 50
Amatore (L') di maioliche e porcellane, di *L. De Mauri*, con 2900 marche. (In lavoro).	
Amatore (L') di oggetti d'arte e di curiosità, di *L. De Mauri*, con numerose illustrazioni.	6 50
Analisi del vino, del dott. *M. Barth*, con 7 illustr. .	2 —
Analisi volumetrica, di *P. E. Alessandri*, con 52 illus.	4 50
Anatomia e fisiologia comparata, del prof. *R. Besta* .	1 50
Anatomia microscopica (Tecnica di), di *D. Carazzi* .	1 50
Anatomia pittorica, di *A. Lombardini*. (In ristampa).	
Anatomia topografica (Compendio di), di *C. Falcone*.	3 —
Anatomia vegetale, di *A. Tognini*, con 141 illustr. .	3 —
Animali da cortile, del prof. *P. Bonizzi*, con 39 illus.	2 —
Animali parassiti dell'uomo, di *F. Mercanti*, con 33 inc.	1 50
Antichità private dei romani, del prof. *W. Kopp* . .	1 50
Antropologia, del prof. *G. Canestrini*, con 23 illustr.	1 50
Apicoltura, del prof. *G. Canestrini*, con 43 illustrazioni	2 —
Arabo volgare (Manuale di), di *De Sterlich* e *Dib Khaddag*. (In ristampa).	

Araldica (Grammatica), di *F. Tribolati,* con 96 illus. 2
Archeologia dell'arte, del prof. *I. Gentile:*
Parte I. Storia dell'arte greca (esaurita).
» Atlante per l'opera suddetta, 149 tavole . 4 —
Parte II. Storia dell'arte etrusca e romana . . . . 2 —
» Atlante per l'opera suddetta, 79 tavole . . 2 —
Architettura italiana, dell'arch. *A. Melani,* con 46 tavole e 113 illustrazioni . . . . 6 —
Aritmetica pratica, del prof. dott. *F. Panizza*. . . 1 5
Aritmetica razionale, del prof. dott. *F. Panizza* . . 1 5
Armonia (Manuale di), del prof. *G. Bernardi* . . . 3 5
Arte del dire (L'), del prof. *D. Ferrari* 1 5
Arte mineraria, del prof. *V. Zoppetti,* con 112 illustr. 2 —
Arti (Le) grafiche fotomeccaniche, con illustraz. e tav. 2 —
Asfalto (L'), dell'ing. *E. Righetti,* con 22 illustrazioni 2 —
Assicurazione sulla vita, di *C. Pagani* 1 5
Assistenza degli infermi nell'Ospedale ed in famiglia, del dott. *C. Calliano,* con 7 tavole 4 5
Astronomia, di *J. N. Lockyer* e *G. Celoria,* con 51 ill. 1 50
Astronomia nautica, del prof. *G. Naccari.* (In lavoro).
Atlante geografico-storico dell'Italia, del dott. prof. *G. Garollo*, con 24 tavole. . . . . 2 —
Atlante geografico universale, di *Kiepert-Garollo* . . 2 —
Attrezzatura, manovra delle navi e segnalazioni marittime, di *F. Imperato,* con molte tavole e ill. (In rist.).
Bachi da seta, del prof. *T. Nenci.* (In ristampa).
Batteriologia, dei professori *G.* e *R. Canestrini* . . 1 50
Bestiame (Il) e l'agricoltura in Italia, del prof. *F. Alberti*, con 22 illustrazioni 2 50
Bibbia (Manuale della), del prof. *G. M. Zampini* . . 2 50
Bibliografia, di *G. Ottino,* con 17 illustrazioni . . . 2 —
Bibliotecario (Manuale del), di *Petzholdt,* traduzione di *G. Biagi* e *G. Fumagalli* 7 50
Biliardo (Il giuoco del), di *J. Gelli,* con 79 illustrazioni 2 50
Botanica, del prof. *I. De Hooker,* con 68 illustrazioni 1 50
Cacciatore (Manuale del), di *G. Franceschi*, con 10 tav. 2 50
Calci e cementi (Impiego delle), dell'ing. *L. Mazzocchi,* con 49 illustrazioni . . . . 2 —
Calcolo infinitesimale, del prof. *E. Pascal:*
Parte I. Calcolo differenziale, con 10 illustrazioni . 3 —
» II. Calcolo integrale, con 15 illustrazioni . . 3 —
» III. Calcolo delle variazioni e delle differ. finite. 3 —

Calligrafia (Manuale di), del prof. *R. Percossi*, con 69 tavole e 35 fac-simili di scritture . . . . 3 —
Calore (Il), del dott. *E. Jones*, con 98 illustrazioni. . 3 —
Cane (Manuale dell'amatore ed allevatore del), di *Angelo Vecchio*, con 51 tavole e 129 illustrazioni . . 6 50
Canottaggio (Il), del cap. *G. Croppi*. (In lavoro).
Cantante (Manuale del), di *L. Mastrigli* . . . . . 2 —
Cantiniere, di *A. Strucchi*, con 30 illustrazioni . . . 2 —
Cartografia (Manuale teorico-pratico della), del prof. *E. Gelcich*, con 37 illustrazioni . . . . 2 —
Caseificio, di *L. Manetti*, con 34 illustrazioni. . . . 2 —
Catasto (Il nuovo) italiano, dell'avv. *E. Bruni* . . . 3 —
Cavallo (Il), del colonn. *C. Volpini*, con 8 tavole . . 2 50
Cavi telegrafici sottomarini, dell'ing. *E. Jona*, con 188 illustrazioni e 1 carta delle com. teleg. sottomarine 5 50
Celerimensura (Manuale pratico di), dell'ing. *F. Borletti* 3 50
Celerimensura (Tavole di), dell'ing. *G. Orlandi*. . . 18 —
Chimica, del prof. *H. E. Roscoe*, con 36 illustrazioni . 1 50
Chimica agraria, del prof. dott. *A. Aducco* 2 50
Chimico (Manuale del) e dell'industriale, del dott. prof. *L. Gabba*. (In ristampa).
Ciclista (Manuale del), di *A. Galante*. (In ristampa).
Climatologia, del dott. *L. De Marchi* 1 50
Codici e leggi usuali d'Italia, del prof. avv. *L. Franchi*. (Due volumi). Volume I. I Codici 7 50
Volume II. Conterrà le leggi usuali. (In lavoro).
Codice civile d'Italia, del prof. avv. *L. Franchi* . . 1 50
Codice di procedura civile, di *L. Franchi* 1 50
Codice di commercio, di *L. Franchi* 1 50
Codice penale e di procedura penale, di *L. Franchi* . 1 50
Codice di Marina Mercantile, di *L. Franchi* 1 50
Codice penale per l'esercito e penale militare marittimo, di *L. Franchi* 1 50
Codice cavalleresco italiano (Tecnica del duello), del comm. *J. Gelli*. 2 50
Codice doganale italiano, di *E. Bruni*, con 4 incisioni. 6 50
Cognac (Fabbricazione del) e dello spirito di vino e distillazione delle fecce e delle vinacce, di *Dal Piaz*. 2 —
Coleotteri italiani, del dott. *A. Griffini*, con 215 illus. 3 —
Colombi domestici e colombicoltura, del prof. *P. Bonizzi* . . . . 2 —
Colori e la pittura (La scienza dei), di *L. Guaita* . . 2 —

	L. c.
Diritto costituzionale, di *F. P. Contuzzi*	3 —
Diritto ecclesiastico, di *C. Olmo*	3 —
Diritto internazionale privato, del prof. *F. P. Contuzzi*.	3 —
Diritto internazionale pubblico, dell'avv. prof. *F. P. Contuzzi*	3 —
Diritto penale, dell'avv. *A. Stoppato*	1 50
Diritto romano, del prof. *C. Ferrini*.	1 50
Disegnatore meccanico, di *V. Goffi*, con 363 illustr. .	5 —
Disegno (I principi del), del prof. *C. Boito*, con 61 silog.	2 —
Disegno assonometrico, del prof. *P. Paoloni*, con 21 tavole e 23 illustrazioni	2 —
Disegno geometrico, del prof. *A. Antilli*, con 6 illustrazioni e 27 tavole litografate	2 —
Disegno industriale, di *E. Giorli*, con 261 illustrazioni	2 —
Disegno di proiezioni ortogonali, del prof. *D. Landi*, con 132 illustrazioni	2 —
Disegno topografico, di *G. Bertelli*, con tav. e illustr.	2 —
Disegno, taglio e confezione di biancheria, di *Emilia Bonetti*, 2ª ediz., con 50 tavole illustrate	3 —
Ditteri italiani, di *Paolo Lioy*, con 227 illustrazioni .	3 —
Dizionario alpino italiano. Parte I, di *E. Bignami-Sormani*; Parte II, di *C. Scolari*	3 50
Dizionario bibliografico, di *C. Arlia*	1 50
Dizionario Eritreo (Piccolo) Italiano-arabo-amarico, di *A. Allori*	2 50
Dizionario filatelico, del comm. *J. Gelli*	4 50
Dizionario fotografico, di *L. Gioppi*, con 95 illustr. .	7 50
Dizionario geografico universale, del prof. dott. *G. Garollo*. Nuova ed. in lavoro, uscirà nell'autunno del 1897.	
Dizionario milanese-italiano e repertorio italiano-milanese, di *Cletto Arrighi*.	8 50
Dizionario tascabile (Nuovo) italiano-tedesco e tedesco-italiano, di *A. Fiori*	3 50
Dizionario tascabile (Nuovo) italiano-tedesco e tedesco-italiano, del prof. *G. Locella*	3 —
Dizionario tecnico, in quattro lingue, dell'ingegnere *E. Webber*, quattro volumi:	
Vol. I. Italiano-Tedesco-Francese-Inglese	4 —
» II. Deutsch-Italienisch-Franzős -Englisch . . .	4 —
» III. Français-Italien-Allemand-Anglais. (In lav.).	
» IV. English-Italian-German-French. (In lavoro).	
Dizionario termini delle corse, di *G. Volpini*. . . .	1 —

Geometria metrica o trigonometrica, del prof. *S. Pincherle*, con 47 illustrazioni. 1 50
Geometria pratica, di *G. Erede*, con 124 illustrazioni. 2 —
Geometria projettiva del piano e della stella, del professore *F. Aschieri*, con 86 illustrazioni. 1 50
Geometria projettiva dello spazio, di *F. Aschieri* . . 1 50
Geometria pura elementare, di *S. Pincherle* 1 50
Giardino (Il) infantile, del prof. *P. Conti*, con 27 tavole 3 —
Ginnastica (Storia della), di *F. Valletti*. 1 50
Ginnastica femminile, di *F. Valletti*, con 67 illustraz. 2 —
Ginnastica maschile, con 216 illustrazioni . . . . . 2 —
Gioielleria, oreficeria, oro, argento e platino, di *E. Boselli*, con 125 illustrazioni . . . . 4 —
Giuochi ginnastici per la gioventù delle scuole e del popolo, di *F. Gabrielli*, con 24 tavole illustrate . . 2 50
Glottologia, del prof. *G. De Gregorio* . . . . . . 3 —
Gnomonica, di *B. M. La Leta* con 19 figure . . . 2 —
Grafologia, di *C. Lombroso*, con 470 fac-simili . . . 3 50
Grammatica albanese, di *V. Librandi*. (In lavoro).
Grammatica ed esercizi pratici della lingua ebraica, del prof. *I. Levi*. (In lavoro).
Grammatica francese, del prof. *G. Prat* 1 50
Grammatica e dizionario della lingua dei Galla, (oromonica), del prof. *E. Viterbo*:
Volume I. Galla-Italiano 2 50
" II. Italiano-Galla 2 50
Grammatica greca, del prof. *V. Inama*. 1 50
Grammatica della lingua greca moderna, di *R. Lovera* 1 50
Grammatica della lingua svedese, del prof. *E. Pároli* (In lavoro).
Grammatica inglese, del prof. *L. Pavia* 1 50
Grammatica italiana, del prof. *T. Concari* 1 50
Grammatica latina, del prof. *L. Valmaggi* 1 50
Grammatica olandese, di *M. Morgana* . . . . 3 —
Grammatica e vocabolario della lingua rumena, del prof. *R. Lovera* 1 50
Grammatica della lingua russa, di *Voinovich* . . . . 3 —
Grammatica spagnuola, del prof. *L. Pavia* 1 50
Grammatica tedesca, del prof. *L. Pavia* 1 50
Gravitazione, di sir *G. B. Airy*, con 50 illustrazioni . 1 50
Humus (L'), **la fertilità e l'igiene dei terreni culturali**, del prof. *A. Casali* . . . . 2 —

Lavori in terra, di *B. Leoni*, con 38 illustrazioni . . 3 —
Legatore di libri, di *L. Marocchino*. (In lavoro).
Legge (La nuova) comunale e provinciale, dell'avvocato *E. Mazzoccolo* 4 50
Legge comunale (Appendice alla) del 22 e 23 luglio 1894, dell'avv. *E. Mazzoccolo* . . . . 2 —
Leggi usuali (Raccolta delle). (In lavoro).
Leghe metalliche, del prof. *I. Ghersi*. (In lavoro).
Legislazione rurale, dell'avv. *E. Bruni* . . . . . . 3 —
Lepidotteri italiani, del dott. *A. Griffini* 1 50
Letteratura albanese, di *A. Straticò* . . . . 3 —
Letteratura americana, di *G. Strafforello* 1 50
Letteratura ebraica, del prof. *A. Revel* . . . . . . 3 —
Letteratura egiziana, di *L. Brigiuti*. (In lavoro).
Letteratura francese, del prof. *E. Marcillac*. . . . 1 50
Letteratura greca, del prof. *V. Inama*. 1 50
Letteratura indiana, del prof. *A. De Gubernatis* . . 1 50
Letteratura inglese, del prof. *E. Solazzi* 1 50
Letteratura islandese, di *S. Ambrosoli*. (In lavoro).
Letteratura italiana, del prof. *C. Fenini* 1 50
Letteratura norvegiana, del prof. *S. Consoli*. . . . 1 50
Letteratura persiana, del prof. *I. Pizzi* 1 50
Letteratura provenzale, del prof. *A. Restori*. . . . 1 50
Letteratura romana, del prof. *F. Ramorino* 1 50
Letteratura spagnuola e portoghese, del professore *L. Cappelletti* 1 50
Letteratura tedesca, del prof. *O. Lange* 1 50
Letteratura ungherese, del dott. *Zigàny Arpàd* . . 1 50
Letterature elleniche seriori, di *A. Pasdera*. (In lav.).
Letterature slave, del prof. *D. Ciàmpoli*, 2 volumi:
Vol. I. Bulgari, Serbo-Croati, Yugo-Russi 1 50
" II. Russi, Polacchi, Boemi 1 50
Lingua gotica, del prof. *S. Friedmann* . . . . . . 3 —
Lingue dell'Africa, di *R. Cust* 1 50
Lingue neo-latine, del dott. *E. Gorra* 1 50
Lingue straniere (Studio delle), di *C. Marcel*. . . . 1 50
Liquorista. (In lavoro).
Litografia, di *C. Doyen*, con 8 tavole e 40 illustraz. . 4 —
Logaritmi (Tavole di), con 5 decimali di *O. Müller* . 1 50
Logica, di *W. Stanley Jevons*, con 16 illustrazioni . 1 50
Logica matematica, del prof. *Burali-Forti* 1 50
Logismografia, del prof. *C. Chiesa* 1 50

Luce e colori, del prof. *Bellotti*, con 21 ill. e 1 tavola 1 50
Luce e suono, di *E. Jones*, con 121 illustrazioni. . . 3 —
Macchinista e fuochista, di *G. Gautero*, con 24 illustr. 2 —
Macchinista navale, di *M. Lignarolo*, con 164 illustr. 5 50
Macchine agricole, di *A. Cencelli-Perti*, con 68 illustr. 2 —
Macchine per cucire e ricamare, dell'ing. *Alfredo Galassini*, con 100 illustrazioni 2 50
Magnetismo ed elettricità, del dott. *G. Poloni*, con 136 illustrazioni e 2 tavole 3 50
Maiale (Il), del prof. *E. Marchi*, con 190 illustrazioni. 6 50
Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate, del dott. *R. Wolf*, con 50 illustrazioni . . . 2 —
Malattie ed alterazioni dei vini, del prof. *S. Cettolini*. con 13 illustrazioni . . . . 2 —
Mandato commerciale, del prof. *E. Vidari* 1 50
Mare (Il), del prof. *V. Bellio*, con 6 tavole a colori . 1 50
Marine (Le) da guerra del mondo al 1897, di *L. D'Adda*, con 77 illustrazioni 4 50
Marino (Manuale del) militare e mercantile, del contr'ammiraglio *De Amezaga*, con 18 illustrazioni. . 5 —
Marmista (Manuale del), di *A. Ricci*, con 47 illustr. . 2 —
Materia medica moderna (Man. di), dott. *G. Malacrida* 7 50
Meccanica, del prof. *R. Stawell Ball*, con 89 illustr. . 1 50
Meccanico, di *E. Giorli*, con 130 illustrazioni. . . . 2 —
Meccanismi (500), dell'ing. *F. Cerruti*, con 500 illustr. 2 50
Medicatura antisettica, del dott. *A. Zambler* con 6 ill. 1 50
Metalli preziosi, di *G. Gorini*, con 9 illustrazioni . . 2 —
Meteorologia generale, del dott. *L. De Marchi*, con 8 tav. 1 50
Metrica dei greci e dei romani, di *L. Müller*. (In rist.).
Metrologia Universale ed il Codice Metrico Internazionale, dell'ing. *A. Tacchini* 6 50
Mezzeria (Manuale pratico della), dell'avv. *A. Rabbeno* 1 50
Microscopio (Il), del prof. *Camillo Acqua*, con 81 ill. 1 50
Mineralogia generale, del prof. *L. Bombicci*, con 183 ill. 1 50
Mineralogia descrittiva, del prof. *L. Bombicci*, con 119 illustrazioni . . . . 3 —
Mitologia comparata, di *A. De Gubernatis*. (Esaurito).
Mitologia greca, di *A. Foresti*:
Volume I. Divinità 1 50
» II. Eroi 1 50
Mitologia romana, di *A. Foresti*. (In lavoro).
Modellatore meccanico, falegname ed ebanista, del professore *G. Mina*, con 293 illustrazioni. 5 50

Saggiatore (Manuale del), di *F. Buttari*, con 28 illustr. 2 50
Sanscrito (Avviamento allo studio del), del professore *F. G. Fumi* . . . . 3 —
Scacchi (Manuale del giuoco degli), di *A. Seghieri*, con 191 illustrazioni. (In lavoro).
Scherma italiana (Manuale di), di *J. Gelli*, con 66 tav. 2 50
Scienza delle finanze, del dott. *T. Carnevali* 1 50
Scoltura, di *A. Melani*, con 56 tavole e 26 illustrazioni 4 —
Scritture d'affari (Precetti ed esempi di), del professore *D. Maffioli* 1 50
Selvicoltura, di *A. Santilli*, con 46 illustrazioni . . . 2 —
Semeiotica, del dott. *U. Gabbi*, con 11 illustrazioni . 2 50
Shakespeare, di *Dowden-Balzani* 1 50
Siderurgia (Manuale di), di *V. Zoppetti*, con 220 illust. 5 50
Sismologia, del capit. *L. Gatta*, con 16 illustrazioni . 1 50
Socialismo, dell'avv. *G. Biraghi* . . . . 3 —
Soccorsi d'urgenza, del dott. *C Calliano*, con 6 tav. lit. 3 —
Società di mutuo soccorso (Manuale tecnico per le), del dott. *G. Gardenghi* 1 50
Sordomuto (Il) e la sua istruzione, del prof. *P. Fornari* 2 —
Spettroscopio (Lo) e le sue applicazioni, di *R. A. Proctor* 1 50
Statica (Principi di) e loro applicazione alla teoria e costruzione degli strumenti metrici, dell'ing. *E. Bagnoli*, con 192 illustrazioni 3 50
Statistica, del prof. *F. Virgilii* 1 50
Stenografia, di *G. Giorgetti*. . . . . 3 —
Stenografia (Guida per lo studio della), di *A. Nicoletti* 1 50
Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi e alla loro costruzione in carta, del prof. *A. Rivelli*, con 92 illustrazioni e 41 tavole . . . . 2 —
Stilistica, del prof. *F. Capello* 1 50
Storia antica. Vol. I. L'Oriente Antico, di *I. Gentile*. 1 50
Vol. II. La Grecia, del prof. *G. Toniazzo* 1 50
Storia dell'arte militare antica e moderna, del capitano *V. Rossetto*, con 17 tavole illustrative. . . . 5 50
Storia d'Italia (Breve), di *P. Orsi* 1 50
Storia e cronologia medioevale e moderna, del professore *V. Casagrandi*. 1 50
Storia italiana (Manuale di), di *C. Cantù* 1 50
Storia della musica, del dott. *A. Untersteiner* . . . . 3 —
Strumentazione (Manuale di), di *E. Prout* 2 50
Strumenti ad arco (Gli) e la musica da camera, del duca di *Caffarelli F.* 2 50

Tabacco, del prof. *G. Cantoni*, con 6 illustrazioni . . 2 —
Tecnica protistologica, di *L. Maggi* . . . . 3 —
Tecnologia e terminologia monetaria, di *G. Sacchetti*. 2 —
Telefono, di *D. V. Piccoli*, con 38 illustrazioni . . . 2 —
Telegrafia, del prof. *R. Ferrini*, con 95 illustrazioni . 2 —
Telemetria, misura delle distanze in guerra, del capit. *G. Bertelli*, con 12 illustrazioni . . . . 2 —
Tempera e cementazione, dell'ing. *Fadda*, con 20 ill. 2 —
Teoria dei numeri (Primi elementi della), di *U. Scarpis* 1 50
Teoria delle ombre, del prof. *E. Bonci*, con XXVI tavole e 62 figure . . . . 2 —
Termodinamica, del prof. *C. Cattaneo*, con 4 illustr. . 1 50
Tessitore (Manuale del), di *P. Pinchetti*, con illustraz. 3 50
Testamenti (Manuale dei), del dott. *G. Serina* . . . 2 50
Tigrè-italiano (Manuale del), del capit. *M. Camperio* . 2 50
Tintore (Manuale del), di *R. Lepetit*, con 14 illustraz. 4 —
Tintura della seta, di *T. Pascal*. . . . . 5 —
Tipografia (Volume I, *Guida*), di *S. Landi*. 2 50
Tipografia (Volume II, *Lezioni*), di *S. Landi*. . . . 2 50
Topografia di Roma antica, di *L. Borsari* con 7 tav. 4 50
Tornitore meccanico, di *S. Dinaro*. . . . . 2 —
Trasporti, tariffe, reclami ferroviari ed operazioni doganali, per *A. G. Bianchi* . . . . 2 —
Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali, dell'ing. *O. Jacoangeli*, con 32 illustr. 7 50
Ufficiale (Manuale per l'), di *U. Morini* 3 50
Unità assolute, dell'ing. *G. Bertolini* 2 50
Uve da tavola, del dott. *D. Tamaro*, con 57 illustraz. 4 —
Valori pubblici (Manuale per l'apprezzamento dei), del dott. *F. Piccinelli*. (In lavoro).
Veleni ed avvelenamenti, di *C. Ferraris*. 2 50
Verbi greci anomali (I), del prof. *P. Spagnotti* . . . 1 50
Verbi latini di forma particolare nel perfetto e nel supino, di *A. F. Pavanello* 1 50
Vernici, lacche, mastici, inchiostri da stampa, ceralacche e prodotti affini (Fabbr. delle), di *U. Fornari* 2 —
Vini bianchi, del barone *G. Prato*. (In lavoro).
Vino (Il), di *G. Grassi-Soncini* . . . . 2 —
Viticoltura, di *O. Ottavi* e *A. Strucchi* 4ª ed. con 22 ill. 2 —
Vocabolarietto pei numismatici (in 7 lingue), del dott. *S. Ambrosoli* 1 50
Vocabolario araldico ad uso degli italiani, del conte *G. Guelfi*, con 356 illustrazioni. 3 50

Vocabolario della lingua russa, del prof. *Voinovich*. 3 —
Vocabolario tipografico, di *S. Landi*. (In lavoro).
Volapük (**Dizionario italiano-volapük**), di *C. Mattei* . . 2 50
Volapük (**Dizionario volapük-italiano**), di *C. Mattei*. . 2 50
Volapük (**Manuale di conversazione**), di *R. Tommasi* e *A. Zambelli* 2 50
Vulcanismo, del capit. *L. Gatta*, con 28 illustrazioni . 1 50
Zoologia, dei proff. *E. H. Giglioli* e *G. Gavanna:*
I. Invertebrati, con 45 illustrazioni. 1 50
II. Vertebrati. Parte I. Generalità, Ittiopsidi (Pesci ed Anfibi), con 33 illustrazioni 1 50
III. Vertebrati. Parte II. Sauropsidi, Teriopsidi, (Rettili, Uccelli, Mammiferi) 1 50
Zoonosi, del dott. *B. Galli Valerio*. 1 50
Zootecnia, del prof. *G. Tampelini*, con 52 illustraz. . 2 50