MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH
PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

JAHRGANG 1891.

BERLIN, 1891.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

INHALT.

Inhalt.

13,892

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT I.

JANUAR 1891.

BERLIN 1891.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung**. Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.

1. Algebraische Reduction der Schaaren quadratischer Formen.

Von L. Kronecker.

(Vorgetragen am 8. Januar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. II]: — ausgegeben am 15. Januar.)

IV.

Die Substitutionen, welche im vorigen Abschnitt zur Transformation der Schaar $(\mathfrak{G})$ in $(\mathfrak{L})$ geführt haben, sind mit Hülfe der Methode ermittelt, welche ich im art. IV meines im Monatsbericht vom Februar 1874 abgedruckten Aufsatzes angegeben habe. Um dies darzulegen, will ich hier die erwähnte Methode selbst sowie die Art ihrer Anwendung nochmals, und zwar in verbesserter Weise, auseinandersetzen.

Wenn man in der am Schlusse des art. I mit $(\mathfrak{G})$ bezeichneten Schaar:

$$(\mathfrak{G})\qquad \sum_h (u\mathfrak{x}_{h-1} + v\mathfrak{x}_h)\,\mathfrak{x}_{m+h} + \sum_{i,k} (u\mathfrak{a}_{ik} + v\mathfrak{b}_{ik})\,\mathfrak{x}_{m+i}\,\mathfrak{x}_{m+k}$$

$$(h=1,2,\ldots m)\qquad\qquad (i\leq k;\ i,k=1,2,3,\ldots m+\mathfrak{n})$$

an Stelle jeder von den m Variabeln:

$$\mathfrak{x}_{h-1}\qquad\qquad (h=1,2,\ldots m)$$

eine durch die Gleichung:

$$\frac{\partial^2(\mathfrak{G})}{\partial u\,\partial\mathfrak{x}_{m+h}} = \mathfrak{x}'_{h-1}\qquad\qquad (h=1,2,\ldots m)$$

definirte neue Variable $\mathfrak{x}'_{h-1}$, dann an Stelle von $\mathfrak{x}_m$ die mit $v\mathfrak{x}_{2m}$ multiplicirte lineare Function als neue Variable $\mathfrak{x}'_m$ einführt, und endlich die $\mathfrak{n}$ Variabeln:

$$\mathfrak{x}_{2m+1},\ \mathfrak{x}_{2m+2},\ \ldots\ \mathfrak{x}_{2m+\mathfrak{n}}$$

durch irgend welche homogene lineare Functionen derselben:

$$\mathfrak{x}'_{2m+1},\ \mathfrak{x}'_{2m+2},\ \ldots\ \mathfrak{x}'_{2m+\mathfrak{n}}$$

ersetzt, deren Coefficienten dem Rationalitätsbereich von $(\mathfrak{G})$ angehören, so resultirt ein Ausdruck:

$$(\mathfrak{G}')\qquad \sum_{h=1}^{h=m} (u\mathfrak{x}'_{h-1} + v\mathfrak{x}'_h)\,\mathfrak{x}_{m+h} + u\mathfrak{Q}^0 + v\mathfrak{Q}' + v\sum_{g=1}^{g=m-1} \mathfrak{L}^0_g\,\mathfrak{x}_{m+g} + v\sum_{g=1}^{g=m-1} \mathfrak{L}'_g\,\mathfrak{x}_{m+g},$$

in welchem $\mathfrak{Q}^0$ und $\mathfrak{Q}'$ quadratische Formen der $\mathfrak{n}$ Variabeln:

$$\mathfrak{x}'_{2m+1}, \mathfrak{x}'_{2m+2}, \ldots \mathfrak{x}'_{2m+\mathfrak{n}}$$

und $\mathfrak{L}^0_g$, $\mathfrak{L}'_g$ homogene lineare Functionen derselben $\mathfrak{n}$ Variabeln und der m Variabeln:

$$\mathfrak{x}_{m+1}, \mathfrak{x}_{m+2}, \ldots \mathfrak{x}_{2m}$$

bedeuten. Dabei sollen die Functionen $\mathfrak{L}^0_g$ aus der Gesammtheit der mit $\mathfrak{x}_{m+g}$ multiplicirten linearen Functionen so ausgesondert sein, dass sie nur Variable $\mathfrak{x}'$ enthalten, welche ausschliesslich in der quadratischen Form $\mathfrak{Q}^0$ vorkommen.[1] Alsdann können die linearen Functionen $\mathfrak{L}'_g$ nur die Variabeln $\mathfrak{x}_{m+1}, \mathfrak{x}_{m+2}, \ldots \mathfrak{x}_{2m}$ und solche Variabeln $\mathfrak{x}'$ enthalten, die in $\mathfrak{Q}'$ vorkommen. Denn wenn eine in $\mathfrak{L}'_g$ enthaltene Variable $\mathfrak{x}'$, z. B. $\mathfrak{x}'_p$, nicht in $\mathfrak{Q}'$ vorkäme, so würde zwischen den Ableitungen von $(\mathfrak{G}')$ die lineare homogene Relation bestehen:

$$v^{m-1}\frac{\partial(\mathfrak{G}')}{\partial \mathfrak{x}'_p} = \sum_{h=0}^{h=m-1}(-u)^h\, v^{m-h-1}\sum_{g=1}^{g=m-h}\frac{\partial \mathfrak{L}'_g}{\partial \mathfrak{x}'_p}\,\frac{\partial(\mathfrak{G}')}{\partial \mathfrak{x}'_{g+h}},$$

deren Coefficienten in Beziehung auf u und v, im Widerspruch mit der im art. I gemachten Voraussetzung, nur von der Dimension $m-1$ wären.

Die homogenen linearen Functionen von $\mathfrak{x}_{2m+1}, \mathfrak{x}_{2m+2}, \ldots \mathfrak{x}_{2m+\mathfrak{n}}$, welche mit:

$$\mathfrak{x}'_{2m+1}, \mathfrak{x}'_{2m+2}, \ldots \mathfrak{x}'_{2m+\mathfrak{n}}$$

bezeichnet worden sind, können als so gewählt vorausgesetzt werden, dass die quadratische Form $\mathfrak{Q}'$ jede dieser Variabeln $\mathfrak{x}'$ nur entweder mit sich selbst oder mit einer einzigen andern Variabeln $\mathfrak{x}'$ multiplicirt enthält.[2] Alsdann lässt sich, wie jetzt gezeigt werden soll, der letzte Theil des Ausdrucks $(\mathfrak{G}')$ durch lineare Transformation der

---

[1] In der hier bezeichneten Aussonderung der Functionen $\mathfrak{L}^0$ besteht die einzige sachliche Verbesserung jener Entwickelungen im art. IV meines citirten Aufsatzes vom Februar 1874. Diese Aussonderung findet sich dort nicht; sie wird aber durch die weiterhin angegebene Voraussetzung über die Wahl der quadratischen Form $\mathfrak{Q}'$ nothwendig bedingt, sobald die Determinante der Schaar $u\mathfrak{Q}^0 + v\mathfrak{Q}'$ identisch gleich Null ist. Denn in diesem Falle trifft die a. a. O. aufgestellte Behauptung, dass sich das Vorkommen von Functionen $\mathfrak{L}^0$ vermeiden lasse, nicht zu, wenn zugleich die zur Anwendung der Transformationsmethode erforderliche Eigenschaft der quadratischen Form $\mathfrak{Q}'$ festzuhalten ist.

[2] Man erlangt eine solche quadratische Form $\mathfrak{Q}'$ stets, wenn man nach einer ganz beliebigen Transformation der ursprünglichen Variabeln $\mathfrak{x}_{2m+1}, \mathfrak{x}_{2m+2}, \ldots \mathfrak{x}_{2m+\mathfrak{n}}$ diejenige anwendet, welche ich als »Jacobi'sche Transformation« bezeichnet und im §. 1 meiner im Monatsbericht vom April 1874 veröffentlichten Abhandlung »Über die congruenten Transformationen der bilinearen Formen« genau auseinandergesetzt habe. Man kann auch speciell die Variabeln $\mathfrak{x}'$ so wählen, dass $\mathfrak{Q}'$ gleich einem Aggregat von Quadraten derselben wird, und die Möglichkeit einer solchen speciellen Wahl ist schon oben in der Anmerkung zu art. II kurz dargelegt.

Variabeln $\mathfrak{x}'$ beseitigen. Nimmt man nämlich an, dass dieser letzte Theil schon bis auf die nur bis zu $g = l < m$ erstreckte Summe:

$$v \sum_{g=1}^{g=l} \mathfrak{L}'_g \mathfrak{x}_{m+g}$$

reducirt sei, so kann jedes einzelne der Glieder von $\mathfrak{L}'_l$:

$$\mathfrak{c}_{lp}\, \mathfrak{x}'_p \qquad\qquad (p > m)$$

dadurch weggeschafft werden, dass man erst, je nachdem in $\mathfrak{Q}'$ das Glied:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{x}'_p \mathfrak{x}'_p \text{ oder } \mathfrak{b}\mathfrak{x}'_p \mathfrak{x}'_q \qquad\qquad (p \gtrless q)$$

vorkommt, an Stelle von $\mathfrak{x}'_p$ oder $\mathfrak{x}'_q$ eine neue Variable $\mathfrak{x}''_p$ oder $\mathfrak{x}''_q$ mittels einer der Substitutionen:

$$(\mathfrak{M}) \qquad 2\mathfrak{a}\mathfrak{x}''_p = 2\mathfrak{a}\mathfrak{x}'_p + \mathfrak{c}_{lp}\mathfrak{x}_{m+l} \text{ oder } \mathfrak{b}\mathfrak{x}''_q = \mathfrak{b}\mathfrak{x}'_q + \mathfrak{c}_{lp}\mathfrak{x}_{m+l}$$

einführt und dann an Stelle von $\mathfrak{x}'_{l-1}$ eine neue Variable $\mathfrak{x}''_{l-1}$, welche gleich der gesammten mit $u\mathfrak{x}_{m+l}$ multiplicirten linearen Function der Variabeln $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}'$ zu nehmen ist. Vermöge der Substitution $(\mathfrak{M})$ fällt nämlich offenbar das Glied $v\mathfrak{c}_{lp}\mathfrak{x}'_p$ weg, und da der Voraussetzung nach die quadratische Form $\mathfrak{Q}'$ die von der Substitution afficirten Variabeln $\mathfrak{x}'_p$ oder $\mathfrak{x}'_q$ nur in dem einen Gliede enthält, so erleidet sie keine Veränderung als die, dass darin die Variable $\mathfrak{x}'_p$ oder $\mathfrak{x}'_q$ durch $\mathfrak{x}''_p$ oder $\mathfrak{x}''_q$ ersetzt wird. Aber der linearen Function $\mathfrak{L}'_l$ tritt bei der ersteren der beiden Substitutionen $(\mathfrak{M})$ ein Glied $\mathfrak{c}\mathfrak{x}_{m+l}$ hinzu, und bei beiden Substitutionen treten der quadratischen Form $\mathfrak{Q}^0$ Glieder hinzu, welche den Factor $\mathfrak{x}_{m+l}$ haben. Alle diese Glieder werden jedoch durch die Einführung der Variabeln $\mathfrak{x}''_{l-1}$ an Stelle von $\mathfrak{x}'_{l-1}$ wieder beseitigt, und es tritt nur, wenn das Glied $v\mathfrak{x}'_{l-1}\mathfrak{x}_{m+l-1}$ in dem ersten Theile von $(\mathfrak{G}')$, um dessen Form zu erhalten, durch $v\mathfrak{x}''_{l-1}\mathfrak{x}_{m+l-1}$ ersetzt wird, den mit $\mathfrak{L}^0_{l-1}$, $\mathfrak{L}'_{l-1}$ bezeichneten linearen Functionen der Ausdruck $\mathfrak{x}'_{l-1} - \mathfrak{x}''_{l-1}$ hinzu, welcher eine lineare Function von $\mathfrak{x}_{m+l}$ und den in $\mathfrak{Q}^0$ vorkommenden Variabeln $\mathfrak{x}'$ ist.

Nachdem auf die angegebene Weise die sämmtlichen Glieder von $\mathfrak{L}'_l$, welche die Variabeln $\mathfrak{x}'$ enthalten, beseitigt sind, können mittels genau desselben Verfahrens die etwa darin vorkommenden Glieder:

$$\mathfrak{c}_{lh}\, \mathfrak{x}_{m+h} \qquad\qquad (h = 1, 2, \ldots m)$$

weggeschafft werden,[1] indem zuerst an Stelle der im ersten Theile von $(\mathfrak{G}')$ mit $v\mathfrak{x}_{m+h}$ multiplicirten Variabeln $\mathfrak{x}'_h$ eine neue Variable $\mathfrak{x}''_h$ mittels der Substitution:

$$\mathfrak{x}''_h = \mathfrak{x}'_h + \mathfrak{c}_{lh}\mathfrak{x}_{m+l},$$

---

[1] Dabei ist $h \geqq l$ anzunehmen, da für $h < l$ das Glied dem Theile $\mathfrak{L}'_h \mathfrak{x}_{m+l}$ hinzugefügt werden kann.

und alsdann an Stelle von $\mathfrak{x}'_{l-1}$ eine neue Variable $\mathfrak{x}''_{l-1}$ mittels der Substitution:

$$\mathfrak{x}''_{l-1} = \mathfrak{x}'_{l-1} - \mathfrak{c}_{lh}\,\mathfrak{x}_{m+h+1}$$

eingeführt wird.

Der obige Ausdruck $(\mathfrak{G}')$ ist hiermit auf einen solchen reducirt, in welchem der letzte Theil fehlt, also auf einen Ausdruck:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \sum_{h=1}^{h=m}(u\bar{\mathfrak{x}}_{h-1} + v\bar{\mathfrak{x}}_h)\,\mathfrak{x}_{m+h} + u\bar{\mathfrak{Q}}^0 + v\bar{\mathfrak{Q}}' + v\sum_{g=1}^{g=m-1}\mathfrak{L}_g\,\mathfrak{x}_{m+g},$$

in welchem $\bar{\mathfrak{Q}}^0$ und $\mathfrak{Q}'$ quadratische Formen von $\mathfrak{n}$ Variabeln:

$$\bar{\mathfrak{x}}_{2m+1},\ \bar{\mathfrak{x}}_{2m+2},\ \dots\ \bar{\mathfrak{x}}_{2m+\mathfrak{n}}$$

und $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \dots \mathfrak{L}_{m-1}$ lineare homogene Functionen von denjenigen dieser $\mathfrak{n}$ Variabeln bedeuten, welche ausschliesslich in der quadratischen Form $\bar{\mathfrak{Q}}^0$ vorkommen.

Um nunmehr zu ersehen, in welcher Weise noch der letzte Theil des Ausdrucks $(\bar{\mathfrak{G}})$ weggeschafft werden kann, braucht man nur zu berücksichtigen, dass bei Vertauschung von:

$$\begin{array}{lll} u, & \bar{\mathfrak{x}}_k, & \mathfrak{x}_{m+h} \\ v, & \bar{\mathfrak{x}}_{m-k}, & \mathfrak{x}_{2m-h+1} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, \dots m \\ k = 0, 1, 2 \dots m \end{pmatrix}$$

mit:

der erste Theil, nämlich:

$$\sum_{h=1}^{h=m}(u\bar{\mathfrak{x}}_{h-1} + v\bar{\mathfrak{x}}_h)\,\mathfrak{x}_{m+h}$$

ungeändert bleibt, und dass in dem auf diese Weise resultirenden Ausdruck:

$$(\bar{\mathfrak{G}}_1) \qquad \sum_{h=1}^{h=m}(u\bar{\mathfrak{x}}_{h-1} + v\bar{\mathfrak{x}}_h)\,\mathfrak{x}_{m+h} + u\bar{\mathfrak{Q}}' + v\bar{\mathfrak{Q}}^0 + u\sum_{g=1}^{g=m-1}\mathfrak{L}_{m-g+1}\,\mathfrak{x}_{m+g}$$

an Stelle des letzten Theils mit dem Factor u ein solcher mit dem Factor v tritt, sobald man, genau so wie im Anfange dieses art. IV, an Stelle jeder von den $m-1$ Variabeln:

$$\bar{\mathfrak{x}}_{h-1} \qquad (h = 1, 2, \dots m-1)$$

eine durch die Gleichung:

$$\mathfrak{x}^0_{h-1} = \frac{\partial^2(\bar{\mathfrak{G}}_1)}{\partial u\,\partial\mathfrak{x}_{m+h}} = \bar{\mathfrak{x}}_{h-1} + \mathfrak{L}_{m-h+1} \qquad (h = 1, 2, \dots m-1)$$

definirte neue Variable $\mathfrak{x}^0_{h-1}$ einführt. Der Ausdruck $(\bar{\mathfrak{G}}_1)$ geht bei der angegebenen Substitution in folgenden über:

$$(\mathfrak{G}^0) \qquad \sum_{h=1}^{h=m}(u\mathfrak{x}^0_{h-1} + v\mathfrak{x}^0_h)\,\mathfrak{x}_{m+h} + u\bar{\mathfrak{Q}}' + v\bar{\mathfrak{Q}}^0 - v\sum_{g=1}^{g=m-2}\mathfrak{L}_{m-g}\,\mathfrak{x}_{m+g},$$

welcher nun in derselben Weise wie der oben mit ($\mathfrak{G}'$) bezeichnete Ausdruck zu behandeln ist, wenn die Voraussetzungen für das dort angegebene Verfahren auch hier erfüllt sind. Es muss also die quadratische Form $\overline{\mathfrak{O}}^0$ oder wenigstens derjenige Theil derselben, welcher die Variabeln der zuerst in ($\mathfrak{G}^0$) vorhandenen, sowie der durch die Operationen hinzutretenden linearen Functionen $\mathfrak{L}$ enthält, so beschaffen sein, dass jede dieser Variabeln überhaupt darin vorkommt, und zwar nur in einem einzigen Gliede, d. h. entweder mit sich selbst oder mit einer einzigen anderen Variabeln multiplicirt.

Diese Voraussetzung ist erfüllt, wenn die $m-2$ in dem letzten Theile von ($\mathfrak{G}^0$) vorkommenden linearen Functionen $\mathfrak{L}_{m-g}$ nur Variabeln ξ_u von reducirten Schaaren:[1]

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\mu} (u\xi_{\varkappa-1} + v\xi_\varkappa)\,\xi_{\mu+\varkappa}$$

enthält, und wenn μ nicht kleiner als m ist. Denn die oben auseinandergesetzte Methode führt alsdann behufs Wegschaffung eines Gliedes:

$$c\xi_u\mathfrak{x}_{m+l}$$

zu der Substitution:

$$\xi'_{2u} = \xi_{2u} + c\mathfrak{x}_{m+l}, \quad \mathfrak{y}'_{l-1} = \mathfrak{y}^0_{l-1} - c\xi_{u-1},$$

und hierbei tritt dem linearen Factor $\mathfrak{L}_{m-l+1}$ das Glied $-c\xi_{u-1}$ hinzu. Ebenso bringt das weitere Verfahren nach jener Methode an Stelle des Gliedes $-c\xi_{u-1}$ in $\mathfrak{L}_{m-l+1}$ das Glied $c\xi_{u-2}$ in $\mathfrak{L}_{m-l+2}$ hinzu u. s. f. und es schliesst, wenn $\mu \geqq l$ ist, mit der Wegschaffung von ξ_{u-l+1} aus $\mathfrak{L}_{m-1}$ vollständig ab. Die Ungleichheit $\mu \geqq l$ ist aber, da $m-2 \geqq l$ ist, eine Folge der obigen Annahme, dass μ nicht kleiner als m sei.

Genau nach der hier auseinandergesetzten Methode habe ich die im art. III unter No. 1, 2, 3 angegebenen Substitutionen erlangt und gemäss den dazu erforderlichen Voraussetzungen die vorbereitenden Entwickelungen im art. II ausgeführt.

V.

Nach dem am Schlusse des art. III entwickelten Resultat lässt sich jede beliebige Schaar quadratischer Formen:

$$\sum_{i,k} (ua_{ik} + vb_{ik})\,x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

[1] Vergl. art. II ($\mathfrak{K}$).

in folgende transformiren:

$$(\mathfrak{L})\qquad \sum_{g,h}(uA_{gh}+vB_{gh})X_gX_h+\sum_q\sum_p(uX_{p-1}^{(q)}+vX_p^{(q)})X_{p+M_q}^{(q)},$$
$$(g,h=1,2,\dots M)\qquad (p=1,2,\dots M_q;\ q=1,2,\dots L)$$

wobei die Determinante:

$$|uA_{gh}+vB_{gh}|\qquad (g,h=1,2,\dots M)$$

einen von Null verschiedenen Werth hat. Wählt man nun irgend eine ganze Zahl t, für welche die Determinante:

$$|A_{gh}-tB_{gh}|\qquad (g,h=1,2,\dots M)$$

von Null verschieden ist, so kann man nach §. 5 der Weierstrass'schen Abhandlung vom 18. Mai 1868[1] den Ausdruck:

$$(\mathfrak{N})\qquad w\sum_{g,h}(A_{gh}-tB_{gh})X_gX_h-\sum_{g,h}B_{gh}X_gX_h\qquad (g,h=1,2,\dots M),$$

in welchem w eine Variable bedeutet, und durch welchen daher eine Schaar quadratischer Formen repraesentirt wird, in folgenden transformiren:

$$(\overline{\mathfrak{N}})\qquad \sum_{\mu,\nu}\{(w-w^{(\nu)})\Phi_\mu^{(\nu)}-\Psi_\mu^{(\nu)}\}\qquad (\mu,\nu=1,2,\dots),$$

wobei $\Phi_\mu^{(\nu)},\Psi_\mu^{(\nu)}$ durch die Gleichungen:

$$(\mathfrak{P}^{(\nu)})\qquad \begin{aligned}\Phi_\mu^{(\nu)}&=\sum_{\varkappa,\lambda}X_{\varkappa\mu}^{(\nu)}X_{\lambda\mu}^{(\nu)}\qquad (\varkappa+\lambda=n^{(\nu)}-1;\ \varkappa=0,1,\dots n^{(\nu)}-1),\\ \Psi_\mu^{(\nu)}&=\sum_{\varkappa,\lambda}X_{\varkappa\mu}^{(\nu)}X_{\lambda\mu}^{(\nu)}\qquad (\varkappa+\lambda=n^{(\nu)}-2;\ \varkappa=0,1,\dots n^{(\nu)}-2)\end{aligned}$$

definirt sind.[2] Setzt man also in dem obigen Ausdruck $(\mathfrak{L})$:

$$u=w,\ v=-wt-1,$$

so verwandelt sich derselbe in folgenden:

$$(\overline{\mathfrak{L}})\qquad \sum_{\mu,\nu}\{(w-w^{(\nu)})\Phi_\mu^{(\nu)}-\Psi_\mu^{(\nu)}\}+\sum_q\sum_p\Big(w(X_{p-1}^{(q)}-tX_p^{(q)})-X_p^{(q)}\Big)X_{p+M_q}^{(q)}.$$
$$(\mu,\nu=1,2,\dots)\qquad (p=1,2,\dots M_q;\ q=1,2,\dots L)$$

Nach der Bemerkung, welche ich im art. II an die Behandlung des einfachsten Falles geknüpft habe, lassen sich die beiden Formen:

$$\sum_{p=1}^{p=M}(X_{p-1}-tX_p)X_{p+M},\qquad \sum_{p=1}^{p=M}\Big(-w^0X_{p-1}+(1+w^0t)X_p\Big)X_{p+M},$$

welche für eine unbestimmte Variable w^0 als Grundformen der Schaar:

$$\sum_{p=1}^{p=M}\Big(w(X_{p-1}-tX_p)-X_p\Big)X_{p+M}$$

[1] Monatsbericht vom Mai 1868.

[2] Im Falle $n^{(\nu)}=1$ fallen natürlich die Summen weg, bei denen der Summationsbuchstabe $\varkappa$ nur die Werthe $0,1,\dots n^{(\nu)}-2$ annehmen darf.

betrachtet werden können, mittels einer und derselben linearen Substitution in die beiden Formen:

$$\sum_{p=1}^{p=M} \overline{X}_{p-1} \overline{X}_{p+M}\,, \quad \sum_{p=1}^{p=M} \overline{X}_p \overline{X}_{p+M}$$

transformiren. Jede einzelne der L Schaaren, deren Aggregat den zweiten Theil des obigen Ausdrucks ($\mathfrak{L}$) bildet, nimmt hiernach die Gestalt an:

$$\sum_p \left((w - w^0) \overline{X}^{(q)}_{p-1} - \overline{X}^{(q)}_p\right) \overline{X}^{(q)}_{p+M_q} \qquad (p = 1, 2, \ldots M_q)$$

und verwandelt sich also, wenn:

$$M_q\,, \quad \overline{X}^{(q)}_{p-1} \qquad , \quad \overline{X}^{(q)}_{p+M_q}$$

durch:

$$m^0_\mu\,, \quad X^0_{2m^0_\mu - p+1,\mu}\,, \quad 2X^0_{p-1,\mu}$$

und dann der Summationsbuchstabe p durch $\varkappa+1$ ersetzt wird, in die Schaar:

$$2\sum_\varkappa \left((w - w^0) X^0_{2m^0_\mu - \varkappa,\mu} - X^0_{2m^0_\mu - \varkappa - 1,\mu}\right) X^0_{\varkappa,\mu} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots m^0_\mu - 1)$$

oder:

$$(w - w^0)\,\Phi^0_\mu - \Psi^0_\mu\,,$$

wenn Φ^0_μ, Ψ^0_μ durch die Gleichungen:

$$(\mathfrak{P}^0) \quad \begin{cases} \Phi^0_\mu = \sum\limits_{\varkappa,\lambda} X^0_{\varkappa\mu} X^0_{\lambda\mu} - \left(X^0_{m^0_\mu,\mu}\right)^2 & (\varkappa + \lambda = 2m^0_\mu\,;\ \varkappa = 0, 1, \ldots 2m^0_\mu), \\ \Psi^0_\mu = \sum\limits_{\varkappa,\lambda} X^0_{\varkappa\mu} X^0_{\lambda\mu} & (\varkappa + \lambda = 2m^0_\mu - 1\,;\ \varkappa = 0, 1, \ldots 2m^0_\mu - 1) \end{cases}$$

definirt sind.

Die beiden mit ($\mathfrak{P}^{(\nu)}$) und ($\mathfrak{P}^0$) bezeichneten Definitionsgleichungen können in folgender Weise zusammengefasst werden:

$$(\mathfrak{P}) \quad \Phi^{(\nu)}_\mu = \sum_{\varkappa,\lambda} X^{(\nu)}_{\varkappa\mu} X^{(\nu)}_{\lambda\mu} - \delta_{0\nu} (X^{(\nu)}_{\gamma\mu})^2, \quad \Psi^{(\nu)}_\mu = \sum_{\varkappa,\lambda} X^{(\nu)}_{\varkappa\mu} X^{(\nu)}_{\lambda\mu} \quad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix},$$

$$\left(\varkappa + \lambda = n^{(\nu)}_\mu - 1;\ 0 \leqq \varkappa < n^{(\nu)}_\mu;\ \gamma = \tfrac{1}{2}(n^{(\nu)}_\mu - 1)\right) \quad \left(\varkappa + \lambda = n^{(\nu)}_\mu - 2;\ 0 < \varkappa < n^{(\nu)}_\mu - 1\right)$$

wenn mit $\delta_{0\nu}$ in üblicher Weise Null oder Eins bezeichnet wird, je nachdem $\nu > 0$ oder $\nu = 0$ ist, und wenn für n^0_μ nur ungerade Zahlen genommen werden.

Bei der so erweiterten Bedeutung von $\Phi^{(\nu)}_\mu$, $\Psi^{(\nu)}_\mu$ lässt sich der ganze Ausdruck ($\mathfrak{L}$) einfach in der Form:

$$(\mathfrak{Q}) \qquad \sum_{\mu,\nu} \{(w - w^{(\nu)})\,\Phi^{(\nu)}_\mu - \Psi^{(\nu)}_\mu\} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

darstellen. Da nun eben dieser Ausdruck durch Transformation aus ($\mathfrak{Q}$) und dieser wiederum durch Transformation aus einer beliebigen Schaar:

$$\sum_{i,k} (ua_{ik} + vb_{ik})\, x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

bei Festsetzung der Gleichungen:

$$u = w, \quad v = -wt - 1,$$

hervorgegangen ist, so zeigt sich als Hauptresultat der vorstehenden Entwickelungen,

dass sich eine beliebige Schaar quadratischer Formen:

$$\sum_{i,k} (ua_{ik} + vb_{ik})\, x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

stets in eine Schaar:

$$(\mathfrak{R}) \qquad \sum_{\nu} \sum_{\mu} \{ U + Vw^{(\nu)})\, \Phi_\mu^{(\nu)} + V \Psi_\mu^{(\nu)} \} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

transformiren lässt, in welcher die auf ν bezügliche Summation von $\nu = 0$ oder von $\nu = 1$ anfängt, je nachdem die Determinante der Schaar gleich Null oder von Null verschieden ist, und welche füglich als eine »reducirte Schaar« bezeichnet werden kann.

Nun ist:

$$U = u, \; V = tu + v;$$

es zeigt sich also ferner,

dass sich ein beliebiges Paar quadratischer Formen:

$$\left[\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k, \; \sum_{i,k} b_{ik} x_i x_k \right] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

stets durch lineare Transformation der Variabeln in ein »reducirtes« Paar:

$$(\mathfrak{R}') \qquad \left[\sum_{\mu,\nu} \left((tw^{(\nu)} + 1)\, \Phi_\mu^{(\nu)} + t \Psi_\mu^{(\nu)} \right), \; \sum_{\mu,\nu} (w^{(\nu)} \Phi_\mu^{(\nu)} + \Psi_\mu^{(\nu)}) \right]$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots; \; \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

verwandeln lässt, in welchem aber nur dann die Summation auch auf $\nu = 0$ zu erstrecken ist, wenn die Determinante der aus den beiden Formen zu bildenden Schaar identisch gleich Null ist.

Hierbei sind $\Phi_\mu^{(\nu)}, \Psi_\mu^{(\nu)}$ gemäss der oben bei ($\mathfrak{P}$) festgesetzten Bedeutung, gewisse einfache quadratische Formen der mit:

$$X_\mu^{(\nu)} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots; \; \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

bezeichneten homogenen linearen Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, und die Coefficienten derselben gehören dem Rationalitätsbereich der Grössen:

$$a_{ik},\ b_{ik},\ w^{(\nu)} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

an. Ferner ist t irgend eine ganze Zahl, deren Wahl nur insoweit beschränkt ist, dass der Rang des Systems:

$$(a_{ik} - tb_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

nicht kleiner sein darf, als der Rang des Systems:

$$(ua_{ik} + vb_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Endlich ist w^0 eine unbestimmte Variable, und $w', w'', w''', \ldots$ sind die verschiedenen Nullwerthe der Determinante oder der verschiedenen Systeme von Subdeterminanten derselben Ordnung, welche aus dem System:

$$\left(wa_{ik} - (wt + 1)\,b_{ik}\right)$$

gebildet werden können. Da w^0 nur vorkommt, wenn die Determinante:

$$|\ ua_{ik} + vb_{ik}\ | \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

und also auch:

$$|\ w^0 a_{ik} - (w^0 t + 1)\,b_{ik}\ | \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

gleich Null ist, so hat auch w^0, als unbestimmte Variable, die Bedeutung eines Nullwerthes der Determinante:

$$|\ wa_{ik} - (wt + 1)\,b_{ik}\ | \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

und es sind daher alle Grössen:

$$w^0,\ w',\ w'',\ w''', \ldots$$

als Nullwerthe der Determinante oder der verschiedenen Systeme von Subdeterminanten des Systems:

$$|\ wa_{ik} - (wt + 1)\,b_{ik}\ | \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

zu charakterisiren.

(Fortsetzung folgt.)

2. Histologische Untersuchungen über das Nervensystem der Hirudineen.

Von Dr. Emil Rohde,
Privatdocenten in Breslau.

(Vorgelegt von Hrn. Schulze am 15. Januar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. III]; — ausgegeben am 22. Januar.)

Von den Hirudineen habe ich namentlich *Aulastomum* und *Pontobdella* auf ihr Nervensystem hin eingehender untersucht, und mich entgegen den bisher allgemein vertretenen Ansichten und meinen eigenen früheren Anschauungen[1] überzeugt, dass alle fibrillären Elemente im Innern der Nerven, Commissuren und Ganglien, ja selbst der Ganglienzellen, lediglich ein nicht nervöses Stützgewebe darstellen, und dass das eigentliche Nervöse eine homogene Substanz ist, welche die Räume zwischen den Fibrillen ausfüllt.

Da die Verhältnisse besonders klar bei *Pontobdella* liegen, so will ich mich in diesem kurzen Bericht auf die Beschreibung des Nervensystems dieser Gattung beschränken und hier nur bemerken, dass sie im Wesentlichen auch für *Aulastomum* gilt.

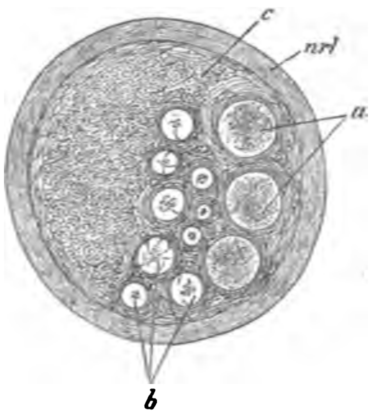
Verfolgt man einen das Ganglion verlassenden N e r v e n auf Querschnitten nach aussen (d. h. auf einer sagittal durch das Ganglion gelegten Längsschnittserie), so zeigt derselbe hier anfangs in seinem Innern ein Gemisch von Körnchen und diesen gleichstarken, bald längeren, bald kürzeren Fäserchen, welche wirr durcheinander ziehen, d. h. der Nerv besteht bei seinem Austritt aus dem Ganglion aus theils längs, theils quer oder schief verlaufenden Fibrillen. Diese liegen in einem so geringen Abstande von einander, dass die die Zwischenräume erfüllende Masse auf Schnitten nicht zur Beobachtung kommt. Die Fibrillen sollen fernerhin als Centralfäserchen (*cf*) und die ganze von ihnen eingenommene Partie des Nerven, d. h. die Fibrillen sammt ihrer Zwischenmasse, als Centralsubstanz (*c*) bezeichnet werden. In

[1] Vergl. Histologische Untersuchungen über das Nervensystem der Chaetopoden. Zoolog. Beitr. II, 1. Histologische Untersuchungen über das Nervensystem von *Amphioxus lanceolatus*. Zoolog. Beitr. II, 2.

der Centralsubstanz treten schon in den ersten Schnitten an einigen wenigen Stellen grössere rundliche feingranulirte Partien (*a*) hervor, es sind diess die Querschnitte von dicken Ganglienzellfortsätzen, welche das Ganglion durchsetzen, ohne sich aufzulösen, und direct in den Nerven übertreten.

Im weitern Verlauf des Nerven (Fig. 1) werden nun gewisse Partien (*b*) der Centralsubstanz dadurch zu röhrenartigen Kanälen umgewandelt, dass eine Anzahl Centralfäserchen ringförmig diese Partien umziehen und um dieselben dicke fasrige Scheidewände herstellen, so dass also in einiger Entfernung vom Ganglion der Nerv drei verschiedene, wenn ich so sagen darf, Nervenelemente aufweist, nämlich erstens die Zellfortsätze (*a*), welche, je weiter sie peripher ziehen, desto dicker und gleichzeitig heller werden und sich später theilen, zweitens die Centralsubstanz (*c*), deren Fäserchen zum überwiegenden Theil in die Längsrichtung umgebogen sind, drittens die Nervenröhren (*b*), deren Wand aus Ringfäserchen besteht, die nach aussen in die Fäserchen der Centralsubstanz übergehen. Auch die Wände der Zellfortsätze (*a*) werden durch circuläre der Centralsubstanz entstammende Fäserchen verstärkt. Die sehr verschieden dicken Nervenröhren (*b*) lassen in ihrem Innern deutlich eine homogene Substanz und in dieser einige wenige meist axial verlaufende Fäserchen erkennen, welche mit den Ringfäserchen der Wand oft in enger Verbindung stehen. Diese axialen Fäserchen waren ursprünglich Centralfäserchen, welche aber durch die Ringfäserchen gegen die Centralsubstanz abgeschlossen wurden, die homogene Substanz entspricht der Zwischensubstanz der Centralfäserchen, welche in der nur wenig Faserelemente enthaltenden Nervenröhre (*b*) deutlich zu Tage tritt.

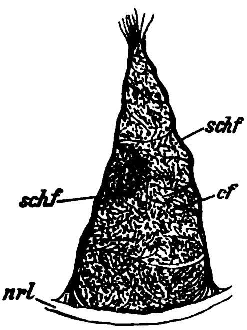
Fig. 1.



Querschnitt durch einen Nerven von *Pontobdella*.
a direct in den Nerven übergetretener Ganglienzellfortsatz.
b Nervenröhre.
c Centralsubstanz.
nrl Neurilemm.

Der aus dem Ganglion getretene Hauptnerv zerfällt später in kleinere Nerven, welche theils nur aus einer Summe von Nervenröhren (*b*), theils aus solchen und Zellfortsätzen (*a*), theils ausschliesslich aus Centralsubstanz (*c*) bestehen, theils aber auch, wie im Hauptnerven, die drei Nervenelemente (*a*) (*b*) (*c*) im verschiedensten Verhältniss gemischt erkennen lassen. Ja, die Nervenröhren (*b*) können sich auch einzeln ablösen und umhüllt von ihrer Ringfaserhülle als selbständige Nervenelemente verlaufen. Dasselbe gilt von *a*. (Vergl. auch Fig. 4 *N*.)

Fig. 2.



Zwischen zwei Scheidewänden liegender Theil eines Querschnittes durch eine Bauchmarkscommissur von *Pontobdella*.
cf Centralfäserchen.
schf Scheidewände.
nrl Neurilemm.

Da also die Centralfäserchen offenbar die Rolle eines Hüll- und Stützgewebes übernehmen können, insofern sie stellenweise zu den mächtig entwickelten Scheiden der Nervenelemente *b* und *a* verwendet werden, und ein anderer Theil von ihnen, wie ich hier nachträglich bemerken will, an der Peripherie des Nerven, nicht selten als ziemlich breite Schicht, ringförmig verläuft (Fig. 2), so wird schon durch dieses Verhalten wahrscheinlich gemacht, dass die fibrillären Elemente im Nerven nicht die eigentlich nervösen Bahnen vorstellen können. Das allein Nervöse ist vielmehr die homogene Substanz, in welche die Centralfäserchen eingebettet sind. Dieselbe ist gegen Farbstoffe sehr unempfindlich und daher auf Schnitten in der Centralsubstanz bei dem dichten Gefuge der Centralfäserchen kaum nachweisbar.

Die Nerven werden von einer Scheide umschlossen, welche aus einem homogenen, meist in Lamellen gespaltenen, Gewebe besteht (Neurilemm, *nrl*).

Die Commissuren (Fig. 2 und 5), welche die Ganglien unter einander verbinden, werden von einer grossen Anzahl radiärer Längsscheidewände (*schf*) durchsetzt, welche aus dicken Fasern bestehen, die durch Verfilzung feinerer von der Stärke der Centralfäserchen der Nerven entstanden sind. Diese Scheidewände dringen bis in die Mitte der Commissuren vor, lösen sich hier in die feineren Fäserchen auf und verbinden sich dann zu einem dicken axialen Faserstrange. Ebenso lösen sich die Scheidewände peripher pinselförmig auf, um durch bogenförmig verlaufende Fäserchen in Zusammenhang zu treten. Drittens gehen von den Scheidewänden seitlich Fäserchen ab, welche nach allen Richtungen wirr durch einander, stellenweise auch längs ziehen, sich vielfach theilen und so ein aus verschieden starken Fäserchen bestehendes Gerüst zwischen den Scheidewänden herstellen. Andere fasrige Elemente als die eben geschilderten gibt es in den Commissuren nicht. Auch hier sind also wie in den Nerven die Fibrillen, welche wieder Centralfäserchen genannt werden sollen, nur Stützfasern, da ein Theil von ihnen sich zu den keinesfalls nervösen Scheidewänden verfilzt, welche letzteren von den Autoren bei den Hirudineen auch stets nur in diesem Sinne, in der Regel als Neurilemm-Bildungen, aufgefasst und den zwischen ihnen liegenden, allgemein für nervös erklärten Fibrillen gegenüber gestellt worden sind. Das eigentlich nervöse Element liegt wieder als homogene, schwer färbbare Masse zwischen den Centralfäserchen und tritt an den Stellen, wo deren Gefüge lockerer wird, nach Behandlung mit P. Mayer'scher alkoholischer Carminfärbung deutlich auf Querschnitten als hellrosa Substanz hervor.

Wie die Nerven werden auch die Commissuren in ihrer ganzen Länge von dicken Ganglienzellfortsätzen durchzogen, welche auf Querschnitten durch ihren hellen, feingranulirten Inhalt auffallen: in jedem der beiden Commissurenstränge finden sich von denselben je zwei.

Die Commissuren werden ebenfalls von einem dicken, homogenen Neurilemm (*nrl*) umscheidet.

Jedes Ganglion zerfällt in die Centralsubstanz (*c*) und eine periphere Ganglienzellenschicht, welche letztere sowohl nach innen gegen erstere, als nach aussen gegen die Leibeshöhle je durch eine starke Neurilemmschicht abgegrenzt wird.

Die Centralsubstanz besteht aus einem äusserst engen Flechtwerk von Fäserchen, welche in ihrer Stärke etwa den Centralfäserchen der Commissuren gleichkommen, aber überall wirr durcheinander ziehen, und aus einer homogenen Zwischensubstanz.

Da aus dem Fasersystem der Centralsubstanz des Ganglions die Centralfäserchen der Commissuren und der Nerven ihren Ursprung nehmen, so folgt daraus schon a priori, dass die Centralfäserchen des Ganglions gleichfalls ein nicht nervöses Stützgerüst darstellen. Diess wird durch das Verhalten der Centralfäserchen im Ganglion selbst bestätigt. Denn wie in den Commissuren strahlen auch im Ganglion radiäre Scheidewände (*schf*) ins Innere, welche aus dicken, durch Verfilzung von Centralfäserchen entstandenen Fasern bestehen, aber nicht bis zum Centrum vordringen, sondern in geringerer oder weiterer Entfernung von demselben sich in die feineren Fäserchen auflösen. Auch noch anderwärts als in den Scheidewänden treten die Centralfäserchen zu gröberen Fasern zusammen, welche als solche (*cf'*) die Centralsubstanz des Ganglions nach allen Richtungen durchziehen, sich mit den Scheidewänden (*schf*) verbinden und so ein festeres, dickfaseriges Gerüst herstellen.

Alle diese starken Fasern heben sich im Ganglion (und ebenso in den Commissuren (Fig. 2 und 5 *schf*) nach Behandlung mit P. Mayer'scher Carminlösung durch dunkelrothe Farbe sehr scharf gegen die übrige Centralsubstanz ab, welche einen milchweissen Ton zeigt. Diese Erscheinung erklärt sich dadurch, dass in der letzteren die Centralfäserchen doch immer in gewissen Abständen von einander verlaufen, so dass die homogene, sich schwer färbende Substanz zwischen ihnen zu Tage tritt und diese Partien heller aussehen lässt, während in den dicken Fasern (*schf* und *cf'*) die

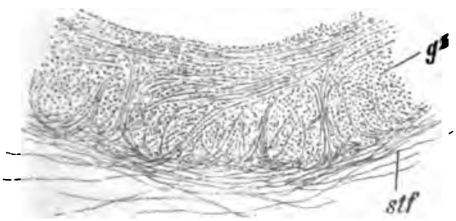
Centralfäserchen so eng verfilzen, dass die homogene Substanz hier vollständig zwischen ihnen verdrängt wird.

Die von mir für die Centralsubstanz der Ganglien, Commissuren und Nerven vertretene Auffassung der nervösen Substanz wird im vollsten Maasse durch die Structurverhältnisse der Ganglienzellenschicht des Ganglions gerechtfertigt. Diese besteht aus den Nervenzellen und einem Stützgewebe, in welches erstere eingebettet liegen.

Die Ganglienzellen zeigen in ihrem Innern ein ausserordentlich dichtes Gefüge von Fibrillen, welche zum Theil einen circulären Verlauf nehmen, meist aber regellos durch einander geflochten scheinen und in einer und derselben Zelle eine sehr verschiedene Stärke haben können.

Das Stützgewebe besteht aus den Centralfäserchen etwa gleichstarker Fibrillen, welche sich stellenweise in Körnchenreihen auflösen, andrerseits aber zu stärkeren Fasern zusammenfügen können. Dieses Stützgewebe (*stf*) bildet um die Ganglienzellen nicht nur mehr oder weniger starke Scheiden, sondern seine Fäserchen durchsetzen auch quer oder schief den Rand der Zellen und gehen allmählich in die Fibrillen derselben über. Es findet hier eine solche Vermischung von Ganglienzelle und Hüllgewebe statt, dass es unmöglich wird zu constatiren, wo die Stützfäserchen aufhören und die Ganglienzellfibrillen anfangen (Fig. 3). Diese Beobachtung ist nur dann zu verstehen, wenn man annimmt, dass, wie in den Nerven, Commissuren und Ganglien die Centralfäserchen, so auch in den Ganglienzellen die Fibrillen ein nicht nervöses Spongioplasma (Leydig) darstellen und das allein Nervöse auch hier das homogene, vom Spongioplasma umschlossene Hyaloplasma ist. (Vergl. Ausführlicheres über diesen Punkt am Schlusse.)

Fig. 3.



Randpartie einer Ganglienzelle von *Pontobdella*. Aus einem Querschnitt durch ein Bauchmarksganglion. *gz* Ganglienzellkörper. *stf* die Stützfasern der Hülle.

Nur unter dieser Voraussetzung lassen sich überhaupt alle folgenden Angaben über die Ganglienzellen verstehen.

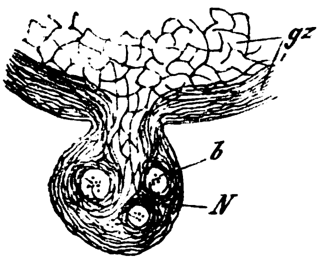
Die Ganglienzellen sind unipolar. Ihr Fortsatz besteht aus feinen Fibrillen, welche nach dem Eintritt in die Centralsubstanz allmählich gröber bis zur Stärke der Centralfäserchen werden und dann in diese übergehen. Gleich den Ganglienzellkörpern werden auch die Fortsätze von den Stützfasern umscheidet und nach allen Richtungen, besonders aber wieder am Rande durchzogen.

Von entscheidender Bedeutung in der behandelten Frage werden Structurverhältnisse, welche namentlich bei den grössten Ganglienzellen öfter zur Beobachtung kommen. Hier wird nämlich der feinfibrilläre Zellkörper stellenweise von Packeten bedeutend stärkerer Fasern durchsetzt, welche oft bis in die Nähe des Kernes reichen und deutlich aus den feinen Fibrillen der Zelle durch Zusammenfügen entstehen. Diese dicken Fasern treten auch in den Fortsatz der Ganglienzelle und mit diesem in die Centralsubstanz über, nicht selten in solcher Menge, dass sie fast ausschliesslich den Inhalt desselben bilden, und lassen sich dabei ohne Schwierigkeit an den verschiedensten Stellen im Zusammenhang theils mit den Stützfasern (*stf*) der Ganglienzellenschicht, theils mit den dicken dunkelrothen, allenthalben die Centralsubstanz des Ganglions durchziehenden Fasern *schf* und *cf'* (vergl. oben S. 24) nachweisen, mit denen sie in ihrem Aussehen und im Verhalten Farbestoffen gegenüber vollständig übereinstimmen. Da sie sich so einerseits mit offenbar nur einer Stützrolle im Nervensystem spielenden Faserelementen (*stf*, *schf*, *cf'*) verbinden, andererseits durch Theilung im Inneren der Ganglienzelle in deren feine Fibrillen übergehen, so können auch diese letzteren keine leitenden Nervenbahnen vorstellen.

Innerhalb mancher dieser grossen Ganglienzellen begegnet man ferner maschenartigen Hohlräumen, welche von dicken Fasern begrenzt werden und bis in die feinsten Details den maschenartigen Bildungen gleichen, die sich häufig in dem, die Ganglienzellen einhüllenden Stützgewebe *stf* finden. Da die Maschen im Inneren der Ganglienzellen rings von den feinfibrillären Partien derselben umschlossen werden und nirgends nach aussen münden, wie auf Schnittserien leicht nachgewiesen werden kann, also auch nicht als nur eingedrungenes Stützgewebe angesehen werden dürfen, so bleibt nur die Annahme übrig, dass sich die dicken, die Maschen bildenden Fasern aus den feinen Fibrillen des Ganglienzellkörpers herausgebildet haben, wodurch wiederum wahrscheinlich gemacht wird, dass die Fibrillen der Ganglienzellen und die umhüllenden Stützfasern histologisch gleichwerthige Bildungen sind.

Die Fasern des Stützgewebes der Ganglienzellenschicht sind die Ausläufer von Zellen, welche in den Ganglien in sehr beschränkter Zahl vorkommen und mit ihren fasrigen Ausläufern stets eine ganz bestimmte Menge von Nervenzellen umfassen. Dadurch werden die letzteren in jedem Ganglion in eine gleiche, kleine Anzahl von Packeten zerlegt, welche von einander in der Regel noch durch scheidewandartige Fortsätze des Neurilemms abgegrenzt werden. Diese Zellen sollen im Folgenden kurz »Stützzellen« (*stz*) heissen.

Fig. 4.



Randpartie einer peripheren Ganglienzelle. Querschnitt. Ein nervenartiger Fortsatz *N* tritt ab.
gz Ganglienzellkörper.

Ausser den centralen, innerhalb des Ganglions gelegenen Ganglienzellen finden sich noch ausserhalb desselben an bestimmten Stellen des Körpers periphere Ganglienzellen, welche sich in ihrem Bau und durch ihre Fortsätze wesentlich von jenen unterscheiden (Fig. 4). Während die centralen unipolar sind, treten von den stets kugelrunden peripheren Ganglienzellen, welche die grössten centralen noch an Durchmesser weit übertreffen und mit blossem Auge sichtbar sind, an der ganzen Peripherie Fortsätze (*N*) in grosser Zahl und von sehr verschiedener Stärke ab; während ferner die Fortsätze der centralen Ganglienzellen von den Nerven wesentlich verschieden sind, insofern sie aus feinen Fibrillen bestehen, die erst nach dem Eintritt in die Centralsubstanz des Ganglions nach und nach die Stärke der Centralfäserchen erlangen, stimmen die Fortsätze (*N*) der peripheren Ganglienzellen in ihrer Structur vollständig mit der Centralsubstanz der Nerven überein bis zu dem Maasse, dass in vielen von ihnen schon beim Abgange von der Zelle Nervenröhren (*b*) zur Differenzirung kommen, mit anderen Worten: während die centralen Ganglienzellen indirect, d. h. durch Vermittelung der Centralsubstanz des Ganglions in die Nerven übergehen,[1] nehmen von den peripheren die Nerven direct ihren Ursprung. Der Zellleib selbst setzt sich aus einem Gerüst von Fibrillen, die in der Stärke genau den Centralfäserchen der Nerven gleichkommen, und aus einer homogenen Zwischensubstanz zusammen. Die Fibrillen zeigen in den einzelnen Theilen des Zellkörpers ein sehr verschiedenes Gefüge, insofern sie central sich zu einem deutlich ausgebildeten Maschenwerk vereinigen, das oft von stärkeren circulären Fibrillen durchzogen wird, peripher dagegen in dicker Schicht concentrisch verlaufen. Die centralen Partien sind meist gegen die peripheren scharf abgesetzt, stellenweise gehen sie aber allmählich in diese über; an manchen Punkten dringen die letzteren in die ersteren ein und heben sich hier als dunklere Packete ab.

An den Stellen, wo die nervenartigen Fortsätze (*N*) sich abzweigen, treten die Fibrillen der Zelle direct als Centralfäserchen in dieselben über, der deutlichste Beweis, dass die Fibrillen der Ganglienzellen

---

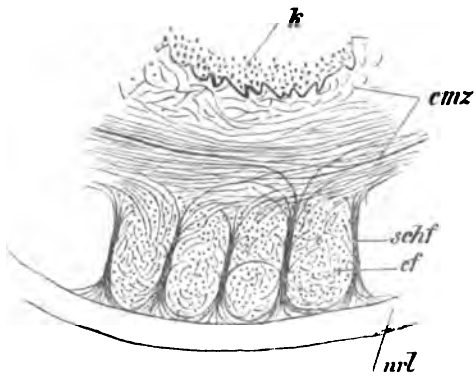
[1] Abgesehen von den verschwindend wenigen direct in den Nerven übertretenden Fortsätzen (*a*) centraler Ganglienzellen (vergl. den Anfang).

nicht die eigentlich nervösen Bahnen darstellen können, da die Centralfäserchen nur als Stützelemente anzusehen sind.

Die ersten peripheren Ganglienzellen trifft man bereits dicht neben dem Ganglion, bald nach Abgang der Nerven, mit denen je eine durch ihre Fortsätze in Verbindung steht.

Etwa in der Mitte zwischen je zwei Ganglien liegt in den diese verbindenden Commissuren und zwar in jedem der beiden Stränge central eine in ihrem Bau an die peripheren Ganglienzellen erinnernde sehr grosse Zelle, welche fast die ganze Höhlung der Commissuren ausfüllt und mit ihren Fibrillen unterschiedslos einerseits in die fasrigen radiären Scheidewände (*schf*), andererseits in die zwischen diesen liegenden Centralfäserchen (*cf*) übergeht (Fig. 5), wodurch wiederum die Identität beider Faserelemente ausser Zweifel gestellt wird. Hat man es in diesen Commissurenzellen (*cmz*) mit Ganglienzellen oder mit Stützzellen (*stz*) im Sinne derjenigen der Ganglienzellschicht (vgl. oben S. 27) zu thun? Diese Frage ist schwer zu entscheiden. In jedem der beiden Fälle sind sie für die Richtigkeit der von mir vertretenen Auffassung des Nervensystems beweisend. Denn gesetzt die erste Möglichkeit, dass sie nervöser Natur sind, so zeigen sie durch den innigen Zusammenhang ihrer Faserelemente mit den offenbar nicht nervösen Scheidewänden (*schf*), dass die Fibrillen der Ganglienzellen nicht die leitenden Bahnen sein können; stellen die Commissurenzellen aber nicht nervöse Stützzellen vor, so ergibt sich wieder, dass die Centralfäserchen (*cf*) der Commissuren, mit denen ihre Fibrillen eng verbunden sind, nur Stützelemente repraesentiren, was auch schon gleichzeitig im ersten Falle folgert. Auf Grund der grossen Übereinstimmung, welche die Commissurenzellen mit den peripheren Ganglienzellen nach mancher Richtung hin bei *Pontobdella* erkennen lassen und mit Rücksicht auf ihr durchaus ganglienzellähnliches Aussehen bei *Aulastomum* möchte ich sie für nervös erklären. Der Hauptunterschied zwischen ihnen und den peripheren Ganglienzellen würde denn darin bestehen, dass der Zellinhalt der letzteren (Fig. 4) nur an gewissen Stellen als

Fig. 5.



Theil eines Querschnittes durch eine Bauchmarkscommissur von *Pontobdella*. Aus der Gegend der Commissurenzelle.
cf Centralfäserchen der Commissuren.
cmz Zellkörper der Commissurenzelle.
k deren Kern.
nrl Neurilemm.
schf Scheidewände der Commissuren.

Centralsubstanz in nervenartige Fortsätze (N) austritt, während die Commissurenzellen an der ganzen Peripherie in die Centralsubstanz der Commissuren, welche derjenigen der Nerven ja im wesentlichen gleichgebaut ist, übergehen.

Das eigentlich Nervöse ist, wie ich schon öfter hervorgehoben habe, in allen Theilen des Nervensystems eine homogene schwer färbbare Substanz, welche deshalb auf Schnitten zwischen den dicht gefügten fibrillären Elementen der Centralsubstanz nur seltener zur deutlichen Beobachtung kommt. Um so leichter lässt sie sich am frischen Praeparat nachweisen. Schneidet man aus den Commissuren eines lebenden Aulastomum ein Stück heraus und betrachtet es in Lymphe unter dem Deckglase bei mässiger Vergrösserung, so bleibt in der ersten Minute die an der Schnittfläche hervorgerufene Wunde durch die Wirkung des wahrscheinlich elastischen Neurilemms geschlossen, so dass kein Inhalt heraustritt. Gleichzeitig erscheinen die in dem Neurilemm gelegenen, ausnahmslos längs verlaufenden Muskeln in lebhaften wellenförmigen Contractionen. Sobald diese aufhören, löst sich auch sofort der Verschluss und der homogene Inhalt strömt unter dem Drucke des Deckgläschens in der Form von sich überstürzenden Kügelchen der mannigfaltigsten Grösse, welche gleichzeitig in ihrem Innern von zertrümmerten Fibrillen herrührende Körnchen mit sich fortreissen, zur Schnittwunde heraus. Schon in weiter Entfernung von der Schnittfläche sieht man innerhalb des Nerven den homogenen Inhalt sich zwischen den Centralfäserchen zu Kügelchen coaguliren, welche dem Ausgange zueilen. Ähnliche Bilder erhält man von frischen Ganglien und Nerven. Auch bei frischen Ganglienzellen kann man nach wenig Minuten beobachten, wie unter dem Drucke des Deckglases allenthalben am Rande durch die Stützfaserhülle sich runde homogene Kugeln hervorpressen, oder wie der homogene Inhalt die Stützfaserhülle, wenn sie zu dicht ist und keinen Durchgang gewährt, zu langen fortsatzähnlichen Ausstülpungen vortreibt.

Zum Schluss noch ein paar allgemeine Bemerkungen. Bereits in meiner Arbeit über das Nervensystem der Polychaeten[1] habe ich den äusserst innigen Zusammenhang der Ganglienzellen mit dem einhüllenden Fasergewebe hervorgehoben, indem ich sagte (S. 28): »Am Rande der Zellen werden die dicht gefügten Körnchen und Fibrillen des Mitoms vielfach durchsetzt von stärkeren, dunkler gefärbten Fibrillen, welche nicht gekörnt erscheinen, sondern feste Formen zeigen. Sie gehen einerseits allmählich nach innen in die

[1] Zoologische Beiträge. II, 1.

gekörnten Fibrillen über, andrerseits dringen sie nach aussen in die Subcuticularfaserhülle[1] ein, in welcher sie meist aber nur auf kurze Strecken zu verfolgen sind, da sie durch ihre dunkle Färbung und Stärke die grösste Ähnlichkeit mit den die Hülle bildenden Fasern haben. Durch diese allenthalben austretenden Fasern erscheint der Zusammenhang zwischen Zelle und Hülle ein so inniger, dass es oft schwer fällt am Rande zu unterscheiden, wo die Zelle aufhört und die Hülle beginnt.« — »In manchen Fällen haben die Fibrillen des Mitoms, gleich den peripheren austretenden, überall im Zellleibe sehr feste Formen und keine Spur von körnigem Aussehen u. s. w.« Ich stand damals, da ich die Fibrillen im Nervensystem noch überall als das eigentlich Nervöse ansah, vor der mir immer und immer wieder über allen Zweifel deutlich zur Beobachtung kommenden Erscheinung vollständig rathlos. Ebenso gieng es Nansen, der in seiner grossen, bald nach der meinigen erschienenen Abhandlung[2] und später in einem kleinen, die Resultate seiner Untersuchungen noch einmal in deutscher Sprache zusammenfassenden Aufsatze[3] dieses Verhalten der Ganglienzellen gleichfalls beschreibt und sich hierüber in letzterer Arbeit (S. 162) folgendermaassen auslässt: »Bevor ich das Protoplasma der Ganglienzellen verlasse, will ich doch auf ein, wie ich glaube, sehr interessantes Verhältniss in ihrer Structur aufmerksam machen. In den Ganglienzellen des Hummers habe ich nämlich ein Netzwerk von spongioplasmatischen Fasern gefunden, und diese Fasern haben sogar das Aussehen, als ob sie von den Neurogliascheiden ausgehen könnten, da sie mit diesen so innig verbunden sind, dass es ganz unmöglich ist zu sagen, wo die einen aufhören und die anderen beginnen. Ein solches Netzwerk ist in den grossen Ganglienzellen sehr oft stark hervortretend, besonders treten hier oft sehr dicke und in's Auge fallende Fasern in den peripheren Partien des Protoplasma's auf. Wenn diese Fasern und dieses oft sehr complicirte Netzwerk wirklich ein Gebilde der Neurogliascheiden sein sollten, so haben wir also hier ein fremdes Gewebe oder Substanz, die in das Protoplasma der Ganglienzellen eingedrungen sein würde. Diese Annahme finde ich aber noch so gewagt, dass ich vorläufig dabei stehen bleibe, dass diese Fasern von dem Spongioplasma des Protoplasma's der Ganglienzellen gebildet sein können, und dass sie nur mit den Scheiden verwachsen sind; diese Verwachsung ist aber eine

[1] Entspricht der Stützfaserhülle der Ganglienzellen bei den Hirudineen.

[2] The Structure and Combination of the Histological Elements of the Central Nervous System. Bergens Museum 1887.

[3] Die Nervenelemente, ihre Structur und Verbindung im Centralnervensystem. Anatomischer Anzeiger 1888. S. 157.

so innige, dass der Übergang oft absolut nicht zu sehen ist. In Ganglienzellen von anderen Thieren, besonders Chaetopoden, habe ich ähnliche von den Scheiden ausgehende Fasern gefunden; sie waren aber nie so hervortretend und bildeten kein so complicirtes Netzwerk, wie beim Hummer.«[1]

LEYDIG[2] war der erste, der den engen Zusammenhang der Ganglienzellen mit dem umgebenden Gewebe[3] sah, und ist der einzige, der diese Beobachtung in ähnlichem Sinne deutet wie ich, insofern er das Spongioplasma der Ganglienzellen und der einhüllenden Zellen in einander übergehen lässt und das Spongioplasma in den Ganglienzellen wie in den Nerven und Nervencentren bei Wirbellosen und bei Wirbelthieren als eine Gerüstsubstanz ansieht, welche erst das eigentlich nervöse homogene Hyaloplasma enthält. LEYDIG steht aber insofern in schroffem Gegensatz zu mir, als er die Ganglienzellen mit echten Bindegewebszellen in organischem Zusammenhange stehen lässt und das Spongioplasma allgemein als rein bindgewebig anzunehmen scheint, während nach meiner Auffassung bei den Chaetopoden und Hirudineen das die Ganglienzellen umgebende Fasergerüst (und demnach auch die mit ihm in Verbindung stehenden Centralfäserchen der Ganglien, Commissuren und Nerven) ein dem Nervensystem durchaus eigenthümliches, ektodermales Gewebe repraesentirt, das bei den niedrigst stehenden Polychaeten (z. B. Sthenelais) stets überall mit der Subcuticule im engsten Zusammenhang bleibt und deshalb hier von mir als Subcuticularfasergewebe bezeichnet worden ist, während es bei den höheren Chaetopoden und allen Hirudineen diese Verbindung im ausgebildeten Thiere aufgibt. Die Stützzellen (*stz*, vgl. oben S. 27), welche die die Ganglienzellen einhüllenden Fasern aus sich bei Chaetopoden und Hirudineen hervorgehen lassen und bei beiden einen sehr ähnlichen Bau haben, würden dann gewissermaassen ein Mittelding zwischen den Epithelzellen des Ektoderms, aus welchem sich das Nervensystem entwickelt, und den Ganglienzellen darstellen.

So sehr ich im allgemeinen mit der LEYDIG'schen Schilderung des Spongioplasma in den einzelnen Theilen des Nervensystems übereinstimme, so wenig kann ich NANSEN's Auffassung theilen, nach

---

[1] Wenn NANSEN in Fortsetzung des eben gegebenen Citates schreibt: »zu bemerken ist, dass auch ROHDE, wie es scheint, ähnliche Fasern oder Fibrillen in den Ganglienzellen der Polychaeten beobachtet hat«, so glaube ich, dass bei der stellenweise wörtlichen Übereinstimmung seiner Schilderung mit der meinigen es mehr als wahrscheinlich ist, dass er nur dieselben Fasern wie ich gemeint haben kann.

[2] Zelle und Gewebe. Bonn 1885. Altes und Neues über Zellen und Gewebe. Zoologischer Anzeiger 1888 S. 309 ff.

[3] Bei sympathischen Ganglien von Säugethieren und in der grauen Substanz verschiedener höherer Wirbelthiere.

welcher die Nerven aller Thiere, von den Chaetopoden aufwärts, durchweg aus Röhren, im Sinne der Nervenröhren *b* der Hirudineen, und diese Röhren wiederum ebenso wie die Ganglienzellen aus feineren Röhrchen, sogenannten Primitivröhrchen, bestehen sollen. Ich habe gleich den Polychaeten und Hirudineen auch die Mollusken, Crustaceen und Insecten in Betreff ihres Nervensystems genau untersucht und im wesentlichen überall die bisher vorgetragene Auffassung gewonnen, worüber ich in ausführlichen Aufsätzen in nächster Zeit berichten werde. Bei dem niedersten Typus, welcher durch die Chaetopoden vertreten wird, bestehen die Nerven, ausgenommen verhältnissmässig wenige directe Ganglienzellfortsätze (= *a* der Hirudineen) durchweg aus Centralsubstanz *c*, wie sie oben von mir für die Hirudineen (und früher in gleicher Weise für die Polychaeten) beschrieben worden ist. Den Übergang von dem niedern Typus zu dem höhern stellen die Hirudineen und die tiefer stehenden Mollusken (*Helix*) dar, bei welchen Theile der Centralsubstanz *c* zu Nervenröhren *b* differenzirt werden. Bei dem höchsten Typus der Cephalopoden, Crustaceen und Insecten geht diese Umwandlung der Centralsubstanz in Nervenröhren in noch ausgedehnterm Maasse vor sich, doch bleibt auch hier oft neben diesen unveränderte Centralsubstanz erhalten. Von den Primitivröhrchen NANSEN's habe ich weder in der Centralsubstanz, noch in den Nervenröhren oder Ganglienzellen je etwas gesehen.[1]

Die von mir für die Nerven der Wirbellosen aufgestellten beiden Typen sind schon von WALDEYER[2] unterschieden worden, nur mit dem Unterschiede, dass derselbe seine Axenfibrillen (d. h. die Centralfäserchen) für die eigentlich leitenden Bahnen ansah, eine Ansicht, die auch ich in meinen ersten Arbeiten über das Nervensystem vertreten zu müssen glaubte.

[1] Vergl. meine Abhandlung über das Nervensystem von *Amphioxus* (Zoolog. Beitr. II, 2), wo die NANSEN'sche Auffassung ausführlicher erörtert und zurückgewiesen wird.

[2] Untersuchungen über den Ursprung und den Verlauf des Axencylinders. Zeitschr. f. ration. Med. 1863.

3. Algebraische Reduction der Schaaren quadratischer Formen.

Von L. Kronecker.

(Vorgetragen am 15. Januar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. III]: — ausgegeben am 22. Januar.)

VI.

Es ist oben im art. I und auch schon in der dort citirten Mittheilung vom 18. Mai 1868 gezeigt worden, wie jede Schaar quadratischer Formen:

$$u\phi(x_1, x_2, \ldots x_n) + v\psi(x_1, x_2, \ldots x_n),$$

deren Determinante gleich Null ist, in folgende transformirt werden kann:

$$(\mathfrak{G}) \qquad \sum_h (u\mathfrak{x}_{h-1} + v\mathfrak{x}_h)\,\mathfrak{x}_{m+h} + \sum_{i,k} (u\mathfrak{a}_{ik} + v\mathfrak{b}_{ik})\,\mathfrak{x}_{m+i}\,\mathfrak{x}_{m+k}\,.$$
$$(h = 1, 2, \ldots m) \qquad (i \leq k;\ i, k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Hier soll nun ferner gezeigt werden, wie man von dieser Schaar $(\mathfrak{G})$ unmittelbar und in höchst einfacher Weise zu derjenigen übergehen kann, welche im art. V als »Reducirte« bezeichnet worden ist.

Fasst man nämlich Alles, was mit $v\mathfrak{x}_{m+h}$ multiplicirt ist, zu einer neuen Variabeln $X^0_{2m-h,0}$ zusammen und ersetzt dann $\mathfrak{x}_{m+h}$ durch $2X^0_{h-1,0}$, so nimmt $(\mathfrak{G})$ folgende Gestalt an:

$$(\mathfrak{S}) \qquad u\Phi^0_0 + v\Psi^0_0 + u\sum_{h=0}^{h=m-1} f_h X^0_{h0} + u\Phi + v\Psi\,.$$

Dabei sind Φ^0_0, Ψ^0_0 durch die Gleichung:

$$u\Phi^0_0 + v\Psi^0_0 = 2\sum_h (uX^0_{2m-h,0} + vX^0_{2m-h-1,0})\,X^0_{h0} \qquad (h = 0, 1, \ldots m-1)$$

definirt, also auch, übereinstimmend mit der Definition bei $(\mathfrak{P})$ im art. V, durch die beiden Gleichungen:

$$\Phi^0_0 = \sum_h X^0_{h0} X^0_{2m-h,0} \qquad (h = 0, 1, \ldots m-1, m+1, m+2, \ldots 2m),$$

$$\Psi^0_0 = \sum_h X^0_{h0} X^0_{2m-h-1,0} \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots 2m-1).$$

Ferner sind $f_0, f_1, \ldots f_{m-1}$ homogene lineare Functionen der Variabeln:

$$X^0_{00}, X^0_{10}, \ldots X^0_{m-1,0}; \mathfrak{z}_{2m+1}, \mathfrak{z}_{2m+2}, \ldots,$$

und Φ, Ψ sind quadratische Formen der Variabeln $\mathfrak{z}_{2m+1}, \mathfrak{z}_{2m+2}, \ldots$. Da die »Schaar« $u\Phi + v\Psi$ weniger als n Variable enthält, so kann sie bereits als »reducirt« d. h. also in der im art. V mit $(\mathfrak{R})$ bezeichneten Gestalt angenommen werden. Wenn man nun überdies der Einfachheit halber, wie es offenbar zulässig ist, die beiden Grundformen der Schaar $u\phi + v\psi$ von vorn herein als so gewählt voraussetzt, dass für die beiden Systeme:

$$\left(\frac{\partial^2(u\phi + v\psi)}{\partial x_i \partial x_k}\right), \quad \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_k}\right) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

die Rangzahl dieselbe ist, so kann die im art. V a. a. O. mit t bezeichnete Zahl gleich Null und also $U = u$, $V = v$ angenommen werden. Man kann also oben in $(\mathfrak{S})$ die Schaar $u\Phi + v\Psi$ durch eine Reducirte:

$$(\mathfrak{R}^0) \qquad \sum_{\mu,\nu} \{(u + vw^{(\nu)})\Phi^{(\nu)}_\mu + v\Psi^{(\nu)}_\mu\} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \ldots\ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix}$$

mit den Variabeln:

$$X^{(\nu)}_{\varkappa,\mu} \qquad \begin{pmatrix}\varkappa = 0, 1, \ldots n^{(\nu)} - 1 \\ \mu = 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix}$$

ersetzen und eben diese Variabeln auch an Stelle der Variabeln $\mathfrak{z}_{2m+1}, \mathfrak{z}_{2m+2}, \ldots$ in den mit:

$$f_0, f_1, \ldots f_{m-1}$$

bezeichneten linearen Functionen einführen, so dass dieselben in lineare Functionen der Variabeln $X^{(\nu)}_{\varkappa\mu}$ und jener m Variabeln $X^0_{00}, X^0_{10}, \ldots X^0_{m-1,0}$ übergehen, welche entsprechend mit:

$$F_0, F_1, \ldots F_{m-1}$$

bezeichnet werden sollen. Wenn dies geschieht und endlich noch die im art. V mit w^0 bezeichnete unbestimmte Variable gleich Null gesetzt wird, so geht die Schaar $(\mathfrak{S})$ in folgende über:

$$(\mathfrak{S}') \qquad \sum_{\mu,\nu} \{(u + vw^{(\nu)})\Phi^{(\nu)}_\mu + v\Psi^{(\nu)}_\mu\} + u\sum_{k=0}^{k=m-1} F_k X^0_{k0} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wobei Φ^0_0, Ψ^0_0 dieselbe Bedeutung haben, wie oben, so dass, wenn dort die Zahl m durch m_0 ersetzt wird, die Functionen $\Phi^{(\nu)}_\mu$, $\Psi^{(\nu)}_\mu$ überhaupt für den Fall $\nu = 0$ durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\Phi^0_\mu &= \sum_{g,h} X^0_{g\mu} X^0_{h\mu} \\ \Psi^0_\mu &= \sum_{i,k} X^0_{i\mu} X^0_{k\mu}\end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} g + h = 2m_\mu = n^0_\mu - 1,\ i + k = 2m_\mu - 1 = n^0_\mu - 2 \\ g, h = 0, 1, \ldots m_\mu - 1, m_\mu + 1, \ldots 2m_\mu \\ i, k = 0, 1, \ldots 2m_\mu - 1 \end{pmatrix}$$

definirt werden, aber für $\nu > 0$, übereinstimmend mit der Definition ($\mathfrak{P}$) im art. V, durch die Gleichungen:

$$\Phi_\mu^{(\nu)} = \sum_{\varkappa,\lambda} X_{\varkappa\mu}^{(\nu)} X_{\lambda\mu}^{(\nu)} \qquad (\varkappa+\lambda = n_\mu^{(\nu)}-1;\ 0 \leqq \varkappa < n_\mu^{(\nu)}),$$

$$\Psi_\mu^{(\nu)} = \sum_{\varkappa,\lambda} X_{\varkappa\mu}^{(\nu)} X_{\lambda\mu}^{(\nu)} \qquad (\varkappa+\lambda = n_\mu^{(\nu)}-2;\ 0 \leqq \varkappa < n_\mu^{(\nu)}-1).$$

Um nun die Schaar ($\mathfrak{S}'$) in eine Reducirte zu verwandeln, braucht man nur durch geeignete Transformation der Variabeln den letzten Theil $\sum F_k X_{k0}^0$ zu beseitigen.

Zu diesem Zwecke hat man zuerst der Reihe nach aus:

$$F_0, F_1, F_2, \ldots F_{m-1}$$

alle diejenigen Variabeln wegzuschaffen, welche in den quadratischen Formen $\Phi_\mu^{(\nu)}$ vorkommen. Nimmt man dies als bereits für $F_0, F_1, \ldots F_{k-1}$ geschehen an, so wird irgend ein Glied von F_k:

$$2CX_{k0}^0 X_{\varkappa\mu}^{(\nu)}$$

nach der im art. IV auseinandergesetzten Methode dadurch beseitigt, dass mittels der Gleichung:

$$X_{\lambda\mu}^{(\nu)} + CX_{k0}^0 = \mathfrak{X}_{\lambda\mu}^{(\nu)} \qquad (\lambda = n_\mu^{(\nu)} - \varkappa - 1)$$

für $X_{\lambda\mu}^{(\nu)}$ die Variable $\mathfrak{X}_{\lambda\mu}^{(\nu)}$ substituirt und dann die mit $2vX_{k0}^0$ multiplicirte lineare Function der Variabeln X als eine neue Variable an Stelle von:

$$X_{2m_0-k-1,0}^0 \qquad (2m_0 = n_0^0 - 1)$$

eingeführt wird. Dabei tritt nur in dem Falle $\varkappa = \lambda$ zu der linearen Function F_k selbst noch ein Glied $-C^2 X_{k0}^0$ hinzu, welches man jedoch wiederum in der angegebenen Weise, indem man dabei X_{k0}^0 für $X_{\varkappa\mu}^{(\nu)}$ nimmt, beseitigen kann. Es treten ferner zu der linearen Function F_{k+1} stets neue Glieder hinzu, sobald $k < m-1$ ist. Wenn aber $k = m-1$ ist, so schliesst das angegebene Verfahren zur Wegschaffung der in den linearen Functionen F und zugleich in den quadratischen Formen $\Phi_\mu^{(\nu)}$ vorkommenden Variabeln vollständig ab. Alsdann enthalten daher die Functionen F nur noch diejenigen Variabeln, welche ausschliesslich in den quadratischen Formen Ψ_μ^0 vorkommen, und dies sind einzig und allein die Variabeln $X_{m_\mu,\mu}^0$, bei denen $\mu > 0$ ist.

Um nunmehr auch jedes einzelne der in dem letzten Theile des Ausdrucks ($\mathfrak{S}'$) etwa vorkommenden Glieder:

$$2uCX_{k0}^0 X_{m_\mu,\mu}^0$$

wegzuschaffen, hat man nach der im art. IV entwickelten Methode folgende Substitution anzuwenden:

$$\mathfrak{X}_{2m_0-h,0}^0 = X_{2m_0-h,0}^0 + CX_{m_\mu+k-h,\mu}^0 \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots k),$$

$$\mathfrak{X}_{m_\mu-i,\mu}^0 = X_{m_\mu-i,\mu}^0 - CX_{k-i,0}^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots k).$$

Dabei ist nöthig, dass $k < m_\mu$ sei; dies ist aber in der That der Fall, wenn, wie im art. I, vorausgesetzt wird, dass unter den zwischen den Ableitungen der Schaar $u\phi + v\psi$ bestehenden homogenen linearen Relationen keine von geringerer als $m_0$ter Dimension in u, v sei. Dann ist nämlich $m_0 \leqq m_\mu$, und da k nur die Werthe $0, 1, 2, \ldots m_0 - 1$ haben kann, so ist $k < m_0 \leqq m_\mu$.

Die im art. IV auseinandergesetzte Transformationsmethode hat hier, und zwar in höchst einfacher Weise, zum Ziele geführt. Die Möglichkeit ihrer Anwendung war dadurch gegeben, dass die dort vorausgesetzten Eigenschaften der beiden Grundformen der Schaar $u\mathfrak{Q}^0 + v\mathfrak{Q}'$ den beiden Grundformen der reducirten Schaar $(\mathfrak{R}^0)$, welche an Stelle der Schaar $u\Phi + v\Psi$ in $(\mathfrak{S})$ genommen worden ist, in der That zukommen. Die eine Grundform $\sum\limits_{\mu,\nu} \Phi_\mu^{(\nu)}$ hat nämlich offenbar die Eigenschaft, dass sie jede ihrer Variabeln nur entweder mit sich selbst oder mit einer einzigen andern Variabeln multiplicirt enthält; eben dieselbe Eigenschaft kommt aber auch dem Aggregat der Formen Ψ_μ^0 zu, und dieses Aggregat bildet, wenn man, wie es zulässig ist, $u^0 \doteq 0$ setzt, denjenigen Theil der andern Grundform der reducirten Schaar $(\mathfrak{R}^0)$, welcher allein die nicht in den Functionen Φ vorkommenden Variabeln enthält.

Wenn man bloss die algebraische Reduction der Schaaren quadratischer Formen im Auge hat, so genügt die in diesem art. VI dargelegte höchst einfache Weise des unmittelbaren Übergangs von einer Schaar $(\mathfrak{G})$ zu einer Reducirten $(\mathfrak{R})$, und ich habe mich auch in meinem vorigen Aufsatz bei den Schaaren bilinearer Formen, sowie im art. IV meines mehrfach citirten Aufsatzes[1] vom Februar 1874 auf die Darlegung eines solchen Transformationsverfahrens beschränkt. Aber die später auseinander zu setzende arithmetische Reduction der Schaaren quadratischer Formen erfordert jene andere in den artt. II und III angegebene Behandlungsweise, und diese erscheint nur deshalb etwas umständlicher, weil dabei die Theilschaaren, deren Determinante gleich Null ist, in einer anderen Gestalt auftreten und also auch ein anderes Transformationsverfahren nöthig machen als die Restschaar, deren Determinante von Null verschieden ist, während hier in der reducirten Form alle Schaaren einen gemeinsamen Typus haben, welcher die Anwendung eines und desselben Transformationsverfahrens gestattet.

---

[1] Der dortigen Entwickelung liegt ebenfalls die natürliche, nicht besonders erwähnte, Voraussetzung zu Grunde, dass die a. a. O. mit $u\Phi' + v\Psi'$ bezeichnete Schaar eine »Reducirte« sei. Den Ausdruck »reducirte Schaaren« hatte ich damals noch nicht adoptirt.

VII.

Um in voller Allgemeinheit für ein beliebiges Paar quadratischer Formen:

$$[\phi, \psi] \text{ oder } \left[\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k, \sum_{i,k} b_{ik} x_i x_k\right] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

das System der Invarianten aufstellen zu können, ist zuvörderst die Rangzahl des Systems:

$$(u a_{ik} + v b_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

zu ermitteln. Bezeichnet man dieselbe mit ρ, so bestehen zwischen den n partiellen Ableitungen von $u\phi + v\psi$ genau $n - \rho$ von einander linear unabhängige homogene lineare Relationen, und diese kann man sich so aufgestellt denken, dass ihre Coefficienten, als ganze homogene Functionen von u und v, von möglichst niedriger Dimension werden. Ist für genau $n - r$ von den $n - \rho$ Relationen die Dimension gleich Null, so lassen sich beide Formen, ϕ und ψ, als quadratische Formen von nur r homogenen linearen Functionen der n Variabeln x darstellen, und man kann deshalb die Zahl r füglich als den »Rang des Formenpaares $[\phi, \psi]$« bezeichnen. Nun seien für die übrigen $r - \rho$ Relationen die Dimensionszahlen, ihrer Grösse nach geordnet:

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^0_{\rho+1} - 1), \ \tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^0_{\rho+2} - 1), \ \tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^0_{\rho+3} - 1), \ \ldots \ \tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^0_r - 1),$$

so dass:

$$1 < \mathfrak{n}^0_{\rho+1} \leqq \mathfrak{n}^0_{\rho+2} \leqq \mathfrak{n}^0_{\rho+3} \leqq \ \ldots \ \leqq \mathfrak{n}^0_r$$

ist. Ferner sei w eine unbestimmte Variable und t irgend eine ganze Zahl, für welche der Rang des Systems:

$$\left(w a_{ik} - (tw + 1) b_{ik}\right) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

nicht kleiner als ρ und also gleich ρ ist. Alsdann gehen jene linearen Relationen in solche zwischen den verschiedenen partiellen Ableitungen von $w\phi - (tw + 1)\psi$ über, deren Coefficienten ganze Functionen von w von den Graden:

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^0_{\rho+1} - 1), \ \tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^0_{\rho+2} - 1), \ \ldots \ \tfrac{1}{2}(\mathfrak{n}^0_r - 1)$$

sind. Endlich sei für irgend eine Zahl $\varkappa \leqq \rho$ der grösste gemeinsame Theiler aller Subdeterminanten $\varkappa$ter Ordnung, welche aus dem System der Coefficienten von $w\phi - (tw + 1)\psi$ gebildet werden können, das Product:

$$\prod_\nu (w - \mathfrak{w}^{(\nu)})^{\mathfrak{l}^{(\nu)}_\varkappa} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

und aus den Zahlen $\mathfrak{l}$ seien die Zahlen $\mathfrak{n}$ durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{l}^{(\nu)}_1 = \mathfrak{n}^{(\nu)}_1, \ \mathfrak{l}^{(\nu)}_2 - \mathfrak{l}^{(\nu)}_1 = \mathfrak{n}^{(\nu)}_2, \ \mathfrak{l}^{(\nu)}_3 - \mathfrak{l}^{(\nu)}_2 = \mathfrak{n}^{(\nu)}_3, \ \ldots$$

bestimmt.

Alsdann ist das System der Invarianten des Formenpaars $[\phi, \psi]$ in folgendem Schema enthalten:

$$
(\mathfrak{S}^0)\qquad
\begin{array}{c|l}
w = & \\
\hline
\mathfrak{w}^0 & 0\,,\ 0\,,\ \ldots\ 0\,,\ \mathfrak{n}^0_{\varrho+1},\ \mathfrak{n}^0_{\varrho+2},\ \ldots\ \mathfrak{n}^0_r \\
\mathfrak{w}' & \mathfrak{n}'_1,\ \mathfrak{n}'_2,\ \ldots\ \mathfrak{n}'_\varrho, \\
\mathfrak{w}'' & \mathfrak{n}''_1,\ \mathfrak{n}''_2,\ \ldots\ \mathfrak{n}''_\varrho, \\
\vdots & \vdots\quad \vdots\quad \ldots\ \vdots \\
\end{array}
$$

wo w^0, wie oben im art. V, eine Unbestimmte bedeutet.

Dass zuvörderst die Grössen $\mathfrak{w}$ und die Zahlen $\mathfrak{n}$ für jedes durch lineare Transformation aus $[\phi, \psi]$ entstehende Formenpaar dieselben sind, geht aus deren Definition mit Evidenz hervor. Dass sie aber auch ein vollständiges Invariantensystem bilden, lässt sich daraus entnehmen, dass sie das zu $[\phi, \psi]$ oder

$$\Big[\sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, x_k\,,\ \sum_{i,k} b_{ik}\, x_i\, x_k\Big] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

gehörige, im art. V mit $(\mathfrak{R}')$ bezeichnete, reducirte Formenpaar:

$$(\mathfrak{R}')\qquad \Big[\sum_{\mu,\nu}\Big((tw^{(\nu)}+1)\,\Phi^{(\nu)}_\mu + t\Psi^{(\nu)}_\mu\Big)\,,\ \sum_{\mu,\nu}(w^{(\nu)}\,\Phi^{(\nu)}_\mu + \Psi^{(\nu)}_\mu)\Big]$$
$$(\mu = 1, 2, \ldots;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

vollständig bestimmen.

Die Functionen $\Phi^{(\nu)}_\mu$, $\Psi^{(\nu)}_\mu$ sind nämlich durch die Gleichungen $(\mathfrak{P})$ im art. V folgendermaassen definirt:

$$(\mathfrak{P})\qquad \Phi^{(\nu)}_\mu = \sum_{\varkappa,\lambda} X^{(\nu)}_{\varkappa\mu}\, X^{(\nu)}_{\lambda\mu} - \delta_{0\nu}\,(X^{(\nu)}_{\gamma\mu})^2, \qquad \Psi^{(\nu)}_\mu = \sum_{\varkappa,\lambda} X^{(\nu)}_{\varkappa\mu}\, X^{(\nu)}_{\lambda\mu} \quad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots\end{pmatrix},$$
$$\Big(\varkappa+\lambda = n^{(\nu)}_\mu - 1;\ 0 \leqq \varkappa < n^{(\nu)}_\mu;\ \gamma = \tfrac{1}{2}(n^{(\nu)}_\mu - 1)\Big) \qquad (\varkappa+\lambda = n^{(\nu)}_\mu - 2,\ 0 \leqq \varkappa < n^{(\nu)}_\mu - 1)$$

wo die Zahlen n mit dem oberen Index Null sämmtlich ungerade sind, und $\delta_{0\nu} = 0$ oder $\delta_{0\nu} = 1$ genommen werden muss, je nachdem $\nu > 0$ oder $\nu = 0$ ist. Es ist also jedes einzelne Formenpaar $[\Phi^{(\nu)}_\mu, \Psi^{(\nu)}_\mu]$ durch die zugehörige ganze Zahl $n^{(\nu)}_\mu$ und folglich jedes einzelne der Paare:

$$[(tw^{(\nu)}+1)\,\Phi^{(\nu)}_\mu + t\Psi^{(\nu)}_\mu,\ w^{(\nu)}\,\Phi^{(\nu)}_\mu + \Psi^{(\nu)}_\mu],$$

aus denen das reducirte Paar $(\mathfrak{R}')$ besteht, durch die Zahl $n^{(\nu)}_\mu$ und die Grösse $w^{(\nu)}$ vollkommen bestimmt. Der Nachweis für die obige Behauptung, dass das reducirte Paar $(\mathfrak{R}')$ durch das Invariantensystem $(\mathfrak{S}^0)$ vollkommen bestimmt sei, wird also erbracht, wenn gezeigt wird, dass die Grössen $w^{(\nu)}$ in dem reducirten Paar $(\mathfrak{R}')$ mit den Grössen $\mathfrak{w}^{(\nu)}$ im Schema $(\mathfrak{S}^0)$ übereinstimmen[1], und dass ferner die

[1] Für die Übereinstimmung von w^0 und $\mathfrak{w}^0$ bedarf es keines Nachweises, da beide als unbestimmte Variable einander gleich gesetzt werden können.

zu den Formenpaaren $[\Phi_\mu^{(\nu)}, \Psi_\mu^{(\nu)}]$ gehörigen Zahlen $n_\mu^{(\nu)}$ durch die in dem Schema $(\mathfrak{S}^0)$ enthaltenen Zahlen $\mathfrak{n}_\mu^{(\nu)}$ gegeben sind.

Um dies zu zeigen, bilde ich entsprechend der Schaar:

$$w\varphi - (tw + 1)\psi$$

die aus dem reducirten Formenpaar $(\mathfrak{R}')$ gebildete Schaar:

$$\sum_{\mu,\nu}\left\{w\left((tw^{(\nu)} + 1)\,\Phi_\mu^{(\nu)} + t\Psi_\mu^{(\nu)}\right) - (tw + 1)\,(w^{(\nu)}\,\Phi_\mu^{(\nu)} + \Psi_\mu^{(\nu)})\right\}$$

$$(\mu = 1, 2, \ldots;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

oder in einfacherer Gestalt:

$$(\mathfrak{T})\qquad \sum_{\mu,\nu}\left\{(w - w^{(\nu)})\,\Phi_\mu^{(\nu)} - \Psi_\mu^{(\nu)}\right\} \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \ldots\ldots \\ \nu = 0, 1, 2, \ldots\ldots\end{pmatrix},$$

und denke mir dabei die Bezeichnung $\mu = 1, 2, \ldots$ so gewählt, dass für jeden festen Werth von ν die Ungleichheitsbedingungen:

$$(\mathfrak{U})\qquad n_1^{(\nu)} \leqq n_2^{(\nu)} \leqq n_3^{(\nu)} \leqq \ldots \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

erfüllt sind.

Bezeichnet man nun zur Abkürzung den Ausdruck $(\mathfrak{T})$ mit F und seine nach einer Variabeln $X_{\varkappa\mu}^{(\nu)}$ genommene partielle Ableitung mit $F_{\varkappa\mu}^{(\nu)}$, so lassen sich alle zwischen denselben bestehenden homogenen linearen Relationen als homogene lineare Verbindungen der folgenden Relationen darstellen:

$$(\mathfrak{B}^0)\qquad \sum_{\varkappa,\lambda}(w - w^0)^\varkappa F_{\lambda\mu}^0 = 0 \qquad \left(\varkappa + \lambda = n_\mu^0 - 1;\ \varkappa = 0, 1, \ldots \tfrac{1}{2}(n_\mu^0 - 1)\right),$$

und zwar so, dass die Coefficienten ganze Functionen von $(w - w^0)$ sind. Denn da $F_{\lambda\mu}^0$ durch die Gleichungen gegeben ist:

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}F_{\lambda\mu}^0 &= (w - w^0)\,X_{\varkappa\mu}^0 - X_{\varkappa-1,\mu}^0 &&\left(\tfrac{1}{2}(n_\mu^0 - 1) < \lambda < n_\mu^0 - 1\right),\\
\tfrac{1}{2}F_{\lambda\mu}^0 &= (w - w^0)\,X_{\varkappa\mu}^0 &&(\lambda = n_\mu^0 - 1),\\
\tfrac{1}{2}F_{\lambda\mu}^0 &= -X_{\varkappa-1,\mu}^0 &&\left(\lambda = \tfrac{1}{2}(n_\mu^0 - 1)\right),
\end{aligned}$$

so muss jede zwischen den Ableitungen $F_{\lambda\mu}^0$ bestehende lineare Relation identisch erfüllt sein, wenn darin $F_{n_\mu^0 - 1,\mu}^0$ durch den Ausdruck:

$$-\sum_{\varkappa,\lambda}(w - w^0)^\varkappa F_{\lambda\mu}^0 \qquad \left(\varkappa + \lambda = n_\mu^0 - 1;\ \varkappa = 1, 2, \ldots \tfrac{1}{2}(n_\mu^0 - 1)\right)$$

ersetzt wird. Es können also in der That alle zwischen den Ableitungen $F_{\lambda\mu}^0$ bestehenden linearen Relationen in der Form:

$$(\mathfrak{B}')\qquad \sum_\mu G_\mu \sum_{\varkappa,\lambda}(w - w^0)^\varkappa F_{\lambda\mu}^0 = 0 \qquad \begin{pmatrix}\mu = 1, 2, \ldots \\ \varkappa + \lambda = n_\mu^0 - 1;\ \varkappa = 0, 1, \ldots \tfrac{1}{2}(n_\mu^0 - 1)\end{pmatrix}$$

dargestellt werden, wo G_μ ganze Functionen von $(w - w_0)$ bedeuten.

Hieraus lässt sich nachweisen, dass die Relationen $(\mathfrak{B}^0)$ ein System solcher $r - \rho$ Relationen bilden, welche von möglichst kleinem Grade in w sind. Denn da gemäss den Ungleichheiten ($\mathfrak{U}$):

$$n_1^0 \leq n_2^0 \leq n_3^0 \leq \dots$$

ist, so muss diejenige Relation von der Form ($\mathfrak{B}'$), welche von möglichst kleinem Grade in w ist, mindestens vom Grade $\frac{1}{2}(n_1^0 - 1)$ sein, und da sie auch von nicht höherem Grade sein darf, so kann sie nur ein Aggregat derjenigen Gleichungen ($\mathfrak{B}^0$) sein, für welche $n_\mu^0 = n_1^0$ ist. Da nun über die Reihenfolge derjenigen Relationen, welche von demselben Grade in w sind, nichts festgesetzt worden ist, so kann angenommen werden, dass jenes Aggregat die dem Werthe $\mu = 1$ entsprechende Relation ($\mathfrak{B}^0$) enthält. Alsdann kann aber diese Relation selbst an Stelle jenes Aggregats genommen werden, ohne die festgesetzten Eigenschaften des Systems der $r - \rho$ Relationen zu ändern. In der zweiten Relation von der Form ($\mathfrak{B}'$) muss nunmehr mindestens eine der Functionen G_2, G_3, .. von Null verschieden sein, und der Grad in w ist demnach nicht kleiner als $\frac{1}{2}(n_2^0 - 1)$. Da der Grad aber auch nicht grösser sein darf, so kann die Relation nur aus solchen Relationen ($\mathfrak{B}^0$) zusammengesetzt sein, bei welchen $n_\mu^0 \leq n_2^0$ ist, und es kann angenommen werden, dass die dem Werthe $\mu = 2$ entsprechende Relation ($\mathfrak{B}^0$) wirklich dabei vorkommt. Alsdann kann aber wiederum diese Relation selbst an Stelle jener zusammengesetzten genommen werden, ohne die Eigenschaften des Systems der Relationen zu ändern. Schliesst man so weiter, so gelangt man zu dem nachzuweisenden Resultat, dass die Relationen ($\mathfrak{B}^0$) ein System von $r - \rho$ Relationen möglichst niedrigen Grades bilden.

Die Gradzahlen eines solchen Systems sind oben mit:

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{n}_{\rho+\varkappa}^0 - 1) \qquad (\varkappa = 1, 2, \dots r - \rho)$$

bezeichnet, in den Relationen ($\mathfrak{B}^0$) sind sie durch:

$$\frac{1}{2}(n_\mu^0 - 1) \qquad (\mu = 1, 2, \dots)$$

gegeben; die Zahlen n_μ^0 und $\mathfrak{n}_{\rho+\varkappa}^0$ müssen also mit einander übereinstimmen, und da beide Zahlenreihen ihrer Grösse nach geordnet sind, so muss für jeden der Indices $\varkappa = 1, 2, \dots r - \rho$:

$$\mathfrak{n}_{\rho+\varkappa}^0 = n_\varkappa^0$$

sein.

Da ferner die Zahlen $n^{(\nu)}$, für welche $\nu > 0$ ist, für jeden bestimmten Werth von ν ebenfalls ihrer Grösse nach geordnet angenommen worden sind, so ist der grösste gemeinsame Theiler aller Subdeterminanten $\varkappa$ter Ordnung, welche aus dem System der Coefficienten der mit ($\mathfrak{T}$) bezeichneten quadratischen Form der Variabeln $X_{\varkappa\mu}^{(\nu)}$ gebildet werden können, gleich:

$$\prod_\nu (w - w^{(\nu)})^{n_1^{(\nu)} + n_2^{(\nu)} + \dots + n_\varkappa^{(\nu)}}.$$

Da andererseits derselbe grösste gemeinsame Theiler oben in der Form:

$$\prod_\nu (w - \mathfrak{w}^{(\nu)})^{\mathfrak{l}_\varkappa^{(\nu)}} \qquad (\mathfrak{l}_\varkappa^{(\nu)} = \mathfrak{n}_1^{(\nu)} + \mathfrak{n}_2^{(\nu)} + \ldots + \mathfrak{n}_\varkappa^{(\nu)})$$

dargestellt worden ist, so ergiebt sich, dass für jedes Paar von Werthen $\varkappa, \nu$:

$$w^{(\nu)} = \mathfrak{w}^{(\nu)} \text{ und } n_1^{(\nu)} + n_2^{(\nu)} + \ldots + n_\varkappa^{(\nu)} = \mathfrak{n}_1^{(\nu)} + \mathfrak{n}_2^{(\nu)} + \ldots + \mathfrak{n}_\varkappa^{(\nu)},$$

also in der That stets:

$$w^{(\nu)} = \mathfrak{w}^{(\nu)}, \; n_\varkappa^{(\nu)} = \mathfrak{n}_\varkappa^{(\nu)} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ \varkappa = 1, 2, \ldots \rho \end{pmatrix}$$

sein muss.

Hiermit ist die Vollständigkeit des Invariantensystems $(\mathfrak{S}^0)$ dargethan. Die Übereinstimmung der Zahlen $\mathfrak{n}$ und n, auf welche der Beweis gegründet worden ist, setzt zugleich zwei wesentliche Eigenschaften der Invarianten-Zahlen $\mathfrak{n}$ in Evidenz, nämlich erstens,

> dass die Summe aller Invarianten-Zahlen $\mathfrak{n}$ gleich der Rangzahl r des Formenpaars $[\phi, \psi]$ ist,

da die damit übereinstimmende Summe aller Zahlen $n_\mu^{(\nu)}$ die Gesammtanzahl aller in den verschiedenen quadratischen Formen $\Phi_\mu^{(\nu)}$, $\Psi_\mu^{(\nu)}$ enthaltenen Variabeln angiebt und daher mit der Rangzahl des reducirten Formenpaars $(\mathfrak{R}')$, also auch mit der des Formenpaars $[\phi, \psi]$ identisch ist, zweitens,

> dass, wie die Ungleichheiten $(\mathfrak{U})$ unter Berücksichtigung der nachgewiesenen Übereinstimmung von $\mathfrak{n}_\varkappa^{(\nu)}$ und $n_\varkappa^{(\nu)}$ zeigen, die in je einer Horizontalreihe stehenden Invariantenzahlen:
>
> $$\mathfrak{n}_1^{(\nu)}, \; \mathfrak{n}_2^{(\nu)}, \; \mathfrak{n}_3^{(\nu)}, \; \ldots \; \mathfrak{n}_\rho^{(\nu)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$
>
> ihrer Grösse nach auf einander folgen, d. h. dass:
>
> $$0 \leqq \mathfrak{n}_1^{(\nu)} \leqq \mathfrak{n}_2^{(\nu)} \leqq \ldots \leqq \mathfrak{n}_\rho^{(\nu)}$$
>
> und folglich für die oben definirten Exponenten $\mathfrak{l}_\varkappa^{(\nu)}$ die Grössenbedingung:
>
> $$\mathfrak{l}_{\varkappa-1} + \mathfrak{l}_{\varkappa+1} \geqq \tfrac{1}{2} \mathfrak{l}_\varkappa$$
>
> erfüllt ist.

Es ist schliesslich noch als ein wichtiger Punkt hervorzuheben, dass die zwischen den partiellen Ableitungen der quadratischen Form:

$$u\phi + v\psi \text{ oder } \sum_{i,k} (ua_{ik} + vb_{ik}) x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

bestehenden linearen Relationen nicht bloss in den Zahlen, welche ihre Dimension in Beziehung auf u und v angeben, sondern auch in ihren Coefficienten selbst Elemente zur Bildung von Invarianten für die lineare Transformation des Formenpaars:

$$[\phi, \psi] \text{ oder } \left[\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k, \sum_{i,k} b_{ik} x_i x_k\right] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

liefern. Dies soll im folgenden Abschnitt näher dargelegt werden.

VIII.

Bezeichnet man, wie im art. I, zur Abkürzung $u\phi - v\psi$ durch f und die nach x_k genommenen partiellen Ableitungen von f, ϕ, ψ durch f_k, ϕ_k, ψ_k, so wird:

$$f_k = u\phi_k - v\psi_k = 2\sum_{i=1}^{i=n}(ua_{ik} - vb_{ik})x_i \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Ist nun ferner eine der zwischen den verschiedenen Ableitungen f_k bestehenden linearen Relationen, wie im art. I ($\mathfrak{B}$):

$$\sum_{h,k} c_{hk} f_k u^h v^{m-h} = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = 0, 1, \ldots m \\ k = 1, 2, \ldots n \end{pmatrix},$$

und wird, wie a. a. O., ψ' als die aus ψ durch die Substitution:

$$x_k = \sum_{h=0}^{h=n-1} c_{hk} x'_h \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

hervorgehende quadratische Form:

$$\sum_{g,h}\sum_{i,k} b_{ik} c_{gi} c_{hk} x'_g x'_h \qquad \begin{pmatrix} g, h = 0, 1, \ldots n-1 \\ i, k = 1, 2, \ldots\ldots n \end{pmatrix}$$

definirt, so ist:

$$\psi'_h = \frac{\partial \psi'}{\partial x'_h} = 2\sum_g\sum_{i,k} b_{ik} c_{gi} c_{hk} x'_g \qquad \begin{pmatrix} g = 0, 1, \ldots n-1 \\ i, k = 1, 2, \ldots\ldots n \end{pmatrix}$$

und also, wenn hier an Stelle der Variabeln x' wieder die ursprünglichen Variabeln x eingeführt werden:

$$\psi'_h = 2\sum_{i,k} b_{ik} c_{hk} x_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Es sind nun diese homogenen linearen Functionen der n Variabeln x, welche für $h = 1, 2, \ldots m$ in dem mit ($\mathfrak{G}$) bezeichneten Schlussresultate des art. I als neue Variable $\mathfrak{x}_{m+h}$ eingeführt und im Anfange des art. VI durch $2X^0_{h-1,0}$ ersetzt worden sind. Demnach ist:

$$X^0_{h-1,0} = \sum_{i,k} b_{ik} c_{hk} x_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

und ebenso hat man für jede der verschiedenen $r - \rho$ von einander unabhängigen linearen Relationen:

$$\sum_{h,k} c^{(\mu)}_{hk} f_k u^h v^{m_\mu - h} = 0 \qquad \begin{pmatrix} h = 0, 1, \ldots m_\mu \\ k = 1, 2, \ldots n \\ \mu = 1, 2, \ldots r-\rho \end{pmatrix},$$

welche zwischen den Ableitungen von $u\phi - v\psi$ bestehen, und deren Coefficienten von höherer als *null*ter Dimension sind, die Gleichung:

$$(\mathfrak{W})\qquad X^0_{h-1,\mu} = \sum_{i,k} b_{ik}\, c^{(\mu)}_{hk}\, x_i \qquad \begin{pmatrix} i,k = 1,2,\dots n \\ h \;= 1,2,\dots m_\mu \\ \mu \;= 1,2,\dots r-\varrho \\ m_\mu = \frac{1}{2}(n^0_\mu - 1) \end{pmatrix}.$$

Diese Variabeln $X^0_{h-1,\mu}$ bleiben, wie ich schon im Monatsbericht vom Februar 1874 hervorgehoben habe, bei allen jenen Substitutionen unberührt, welche im art. VI angewendet worden sind, um aus dem mit $(\mathfrak{S}')$ bezeichneten Ausdruck den letzten Theil wegzuschaffen und damit zu der reducirten Schaar zu gelangen. Es zeigt sich also,

dass in dem am Ende des art. V mit $(\mathfrak{R}')$ bezeichneten, zu irgend einem Formenpaare:

$$\left[\sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k\,,\ \sum_{i,k} b_{ik} x_i x_k\right] \qquad (i,k = 1,2,\dots n)$$

gehörigen reducirten Paar:

$$(\mathfrak{R}')\qquad \left[\sum_{\mu,\nu}\left((tw^{(\nu)}+1)\Phi^{(\nu)}_\mu + t\Psi^{(\nu)}_\mu\right),\ \sum_{\mu,\nu}\left(w^{(\nu)}\Phi^{(\nu)}_\mu + \Psi^{(\nu)}_\mu\right)\right]$$
$$(\mu = 1,2,\dots;\ \nu = 0,1,2,\dots)$$

die in Φ^0_μ, Ψ^0_μ enthaltenen Variabeln $X^0_{h-1,\mu}$ durch die obige Gleichung $(\mathfrak{W})$:

$$X^0_{h-1,\mu} = \sum_{i,k} b_{ik}\, c^{(\mu)}_{hk}\, x_i \qquad \begin{pmatrix} i,k = 1,2,\dots n \\ h = 1,2,\dots m_\mu \end{pmatrix}$$

definirt sind.

Berücksichtigt man nun, dass die quadratischen Formen Φ^0_μ, Ψ^0_μ, wie im art. VI, durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Phi^0_\mu &= \sum_{g,h} X^0_{g\mu} X^0_{h\mu} \\ \Psi^0_\mu &= \sum_{i,k} X^0_{i\mu} X^0_{k\mu} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} g+h = 2m_\mu = n^0_\mu - 1,\ i+k = 2m_\mu - 1 = n^0_\mu - 2 \\ g,h = 0,1,\dots m_\mu - 1,\ m_\mu + 1,\dots 2m_\mu \\ i,k = 0,1,\dots 2m_\mu - 1 \end{pmatrix}$$

bestimmt sind, so sieht man,

dass $\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=r-\varrho} m_\mu$ von den $\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=r-\varrho}(2m_\mu+1)$ Variabeln X^0 des reducirten Formenpaars unmittelbar durch die Coëfficienten $c^{(\mu)}_{hk}$ jener linearen Relationen gegeben sind.

Nimmt man ferner an Stelle des Formenpaares:

$$\left[\sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, x_k\,,\ \sum_{i,k} b_{ik}\, x_i\, x_k\right] \qquad (i,k = 1,2,\dots n)$$

das zugehörige reducirte Paar, so reducirt sich die mit $(\mathfrak{W})$ bezeichnete lineare Function auf die eine Variable $X^0_{h-1,\mu}$ des reducirten Paares, und es zeigt sich also,

dass die linearen Functionen $(\mathfrak{W})$:

$$\sum_{i,k} b_{ik}\, c^{(\mu)}_{hk}\, x_i \qquad \begin{pmatrix} i,k = 1,2,\dots n \\ h = 1,2,\dots m_\mu \\ \mu = 1,2,\dots r-\varrho \end{pmatrix},$$

deren Anzahl gleich $\sum\limits_{\mu=1}^{\mu=r-\varrho} m_\mu$ ist, sämmtlich Covarianten für jede lineare Transformation des Formenpaares:

$$\left[\sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, x_k;\ \sum_{i,k} b_{ik}\, x_i\, x_k\right] \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

sind, oder, was dasselbe ist, Invarianten der Aequivalenz:

$$(\ldots a_{ik},\ \ldots b_{ik},\ \ldots x_i,\ \ldots) \backsim (\ldots a'_{ik},\ \ldots b'_{ik},\ \ldots x'_i,\ \ldots), \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

vorausgesetzt, dass man zwei solche Systeme als aequivalent betrachtet, wenn das eine aus dem anderen durch lineare Transformation des Formenpaares:

$$\left[\sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, x_k,\ \sum_{i,k} b_{ik}\, x_i\, x_k\right] \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

in:

$$\left[\sum_{i,k} a'_{ik}\, x'_i\, x'_k,\ \sum_{i,k} b'_{ik}\, x'_i\, x'_k\right] \qquad (i,k=1,2,\ldots n)$$

hervorgeht.

Die linearen Relationen, welche zwischen den Ableitungen einer Schaar quadratischer Formen, deren Determinante gleich Null ist, bestehen, bilden die Grundlage meiner ersten im Monatsbericht vom Mai 1868 veröffentlichten Untersuchungen über die vorher noch niemals behandelten Schaaren der bezeichneten Art. Darin, dass mit Hülfe der $r-\varrho$ linearen Relationen (von höherer als *null*ter Dimension) unmittelbar Σm_μ von den $\Sigma(2m_\mu+1)$ mit X^0 bezeichneten Variabeln des reducirten Formenpaars gegeben sind, ist der Grund zu finden, warum die Reduction derjenigen Schaaren quadratischer Formen, deren Determinante gleich Null ist, aus jenen meinen Untersuchungen vom Jahre 1868 in so einfacher Weise, wie oben im art. VI, zu entnehmen ist, während die Reduction, ohne Benutzung der linearen Relationen, bei der Transformation der Variabeln eine Sonderung derselben in gewisse Gruppen und damit ein ganz neues Princip erforderte, dessen Nothwendigkeit und Bedeutung ich im Monatsbericht vom März 1874 eingehend erörtert habe.

4. Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit.

Von Dr. Fritz Kötter
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Fuchs am 22. Januar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. IV]: — ausgegeben am 29. Januar.)

Zur völligen Bestimmung der Lage eines festen Körpers im Raum genügt bekanntlich die Angabe der Lage eines in dem Körper festen rechtwinkligen Coordinatensystems zu einem eben solchen im Raume festen Coordinatensystem. Wir bezeichnen wie gewöhnlich die in dem Körper festen Axen als X, Y, Z-Axen, die im Raume festen dagegen als Ξ, H, Z-Axen; es seien ξ, η, ζ die Coordinaten, welche der Anfangspunkt des erstern Systems im zweiten hat; die Bezeichnung der Richtungscosinus wird aus der folgenden Tabelle ersichtlich werden:

	Ξ	H	Z
X	α_1	β_1	γ_1
Y	α_2	β_2	γ_2
Z	α_3	β_3	γ_3.

Der augenblickliche Bewegungszustand des Körpers ist dann bestimmt durch die drei Geschwindigkeitscomponenten u, v, w des Anfangspunktes in Bezug auf die drei im Körper festen Axen und die drei Componenten der Rotationsgeschwindigkeit p, q, r nach denselben Axen.

Zwischen diesen 18 Grössen und der Zeit t gelten ganz allgemein die folgenden 12 Gleichungen:

$$1.\quad \begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= \alpha_3 q - \alpha_2 r, & \frac{d\beta_1}{dt} &= \beta_3 q - \beta_2 r, & \frac{d\gamma_1}{dt} &= \gamma_3 q - \gamma_2 r, \\ \frac{d\alpha_2}{dt} &= \alpha_1 r - \alpha_3 p, & \frac{d\beta_2}{dt} &= \beta_1 r - \beta_3 p, & \frac{d\gamma_2}{dt} &= \gamma_1 r - \gamma_3 p, \\ \frac{d\alpha_3}{dt} &= \alpha_2 p - \alpha_1 q, & \frac{d\beta_3}{dt} &= \beta_2 p - \beta_1 q, & \frac{d\gamma_3}{dt} &= \gamma_2 p - \gamma_1 q; \end{aligned}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w,$$

2. $$\frac{d\eta}{dt} = \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w,$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w.$$

Hierzu kommen sechs weitere Gleichungen, welche durch die Umstände bedingt sind, unter denen die Bewegung des Körpers erfolgt. Gustav Kirchhoff[1] hat diese Gleichungen aufgestellt für den Fall, dass der Körper sich in einer unbegrenzten, incompressibelen idealen Flüssigkeit bewegt, welche im Unendlichen ruht. Dabei ist wesentlich, dass die lebendige Kraft T des ganzen Systems eine ganze homogene quadratische Function zweiten Grades von u, v, w, p, q, r ist, deren Coefficienten constante durch die Gestalt und Massenvertheilung des festen Körpers und durch die Dichtigkeit der Flüssigkeit bedingte Grössen sind. Falls keine äusseren Kräfte wirken, lauten die fraglichen Gleichungen folgendermaassen:

3. $$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) &= q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v}, & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) &= v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) &= r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w}, & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) &= w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right) &= p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u}, & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Den augenblicklichen Bewegungszustand kann man hervorgebracht denken durch eine impulsive im Anfangspunkt des im Körper festen Coordinatensystems angreifende Kraft mit den Componenten $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$, $\frac{\partial T}{\partial w}$ und ein impulsives Moment mit den Componenten $\frac{\partial T}{\partial p}$, $\frac{\partial T}{\partial q}$, $\frac{\partial T}{\partial r}$; beide Zerlegungen beziehen sich auf die im Körper festen Axen. Dieser augenblickliche Impuls lässt sich darstellen durch eine impulsive Einzelkraft und durch ein impulsives Moment, dessen Axe mit der Wirkungslinie jener Kraft zusammenfällt. Die Gesammtheit der allgemeinen Integrale der 18 Gleichungen 1., 2., 3., welche ausser den allgemeinen Relationen zwischen den neun Richtungscosinus,

4. $$\begin{aligned}
\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1, & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 &= 0,\\
\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1, & \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 &= 0,\\
\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1, & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 &= 0,
\end{aligned}$$

[1] Journal für die reine und angewandte Mathematik LXXI, 237—262.

und der Gleichung der lebendigen Kraft,

$$2T = L, \tag{5.}$$

bekannt sind, bringen nichts anderes zum Ausdruck, als dass diese Darstellung des Impulses im Raum unabhängig von der Zeit ist. Lassen wir die Ξ Axe mit der Axe des Impulses zusammenfallen, bezeichnen wir mit J und J_1 die Intensität der impulsiven Einzelkraft und des Momentes, so lauten die Integrale, welche der Ausdruck dieser Thatsache sind, folgendermaassen:

$$\frac{\partial T}{\partial u} = J\alpha_1, \qquad \frac{\partial T}{\partial v} = J\alpha_2, \qquad \frac{\partial T}{\partial w} = J\alpha_3,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial p}\alpha_1 + \frac{\partial T}{\partial q}\alpha_2 + \frac{\partial T}{\partial r}\alpha_3 &= J_1, \\ \frac{\partial T}{\partial p}\beta_1 + \frac{\partial T}{\partial q}\beta_2 + \frac{\partial T}{\partial r}\beta_3 &= J\zeta, \\ \frac{\partial T}{\partial p}\gamma_1 + \frac{\partial T}{\partial q}\gamma_2 + \frac{\partial T}{\partial r}\gamma_3 &= -J\eta.\text{[1]} \end{aligned} \tag{6.}$$

Schon Kirchhoff hat nachgewiesen, dass die vollständige Integration des ganzen Systems sich auf Quadraturen zurückführen lässt, wenn die sechs Gleichungen 3., welche nur die sechs Grössen u, v, w, p, q, r enthalten, integrirt sind. Die oben angegebenen Integralgleichungen des ganzen Systems von Differentialgleichungen enthalten drei Gleichungen, welche als Integrale des Theilsystems angesehen werden können, nämlich die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 &= J, \\ \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial q} &= J\cdot J_1, \\ 2T &= L; \end{aligned} \tag{7.}$$

es fehlen also zur vollständigen Integration noch drei Gleichungen. Aber Clebsch[2] hat nachgewiesen, dass sobald nur noch ein weiteres von t freies Integral gefunden ist, der Multiplicator derjenigen Differentialgleichung sich bestimmen lässt, welche das fünfte von t freie Integral liefert; die Bestimmung der Zeit erfordert dann nur eine Quadratur. Es kommt also alles darauf an, zunächst ein viertes Integral aufzufinden. Ein solches existirt z. B. in dem von Kirchhoff durchgeführten Fall eines Rotationskörpers, in welchem die Componente der Rotationsgeschwindigkeit für die Axe des Körpers constant ist.

---

[1] Vergl. Minkowski: Über die Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit. Sitzungsberichte der Berl. Akademie 1888, S. 1095—1110.

[2] Mathematische Annalen III, 238—262.

Indem Clebsch die Frage zu beantworten suchte: wann ist das vierte Integral ebenfalls eine constant zu setzende homogene quadratische Function zweiten Grades der Grössen u, v, w, p, q, r, wurde er unter anderen auf den Fall geführt, dass die lebendige Kraft durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$8. \qquad 2T = A_1 u^2 + A_2 v^2 + A_3 w^2 + B_1 p^2 + B_2 q^2 + B_3 r^2,$$

in welcher zwischen den sechs Coefficienten die Beziehung

$$9. \qquad B_1\left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3}\right) + B_2\left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_1}\right) + B_3\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right) = 0$$

besteht. Multipliciren wir die Gleichungen 3. der Reihe nach mit

$$\frac{2}{A_2 A_3}\frac{\partial T}{\partial u}, \quad \frac{2}{A_3 A_1}\frac{\partial T}{\partial v}, \quad \frac{2}{A_1 A_2}\frac{\partial T}{\partial w}, \quad -\frac{2}{A_1 B_1}\frac{\partial T}{\partial p}, \quad -\frac{2}{A_2 B_2}\frac{\partial T}{\partial q}, \quad -\frac{2}{A_3 B_3}\frac{\partial T}{\partial r}$$

und addiren sie dann, so erhalten wir links

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{A_2 A_3}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{A_3 A_1}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 - \frac{1}{A_1 B_1}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2 - \frac{1}{A_2 B_2}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2 - \frac{1}{A_3 B_3}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2\right\}$$

Auf der rechten Seite ergibt sich der Ausdruck

$$\frac{2}{A_1 A_2 A_3}\begin{vmatrix} A_1\frac{\partial T}{\partial u}, & p, & \frac{\partial T}{\partial u} \\ A_2\frac{\partial T}{\partial v}, & q, & \frac{\partial T}{\partial v} \\ A_3\frac{\partial T}{\partial w}, & r, & \frac{\partial T}{\partial w} \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} \frac{1}{A_1 B_1}\frac{\partial T}{\partial p}, & p, & \frac{\partial T}{\partial p} \\ \frac{1}{A_2 B_2}\frac{\partial T}{\partial q}, & q, & \frac{\partial T}{\partial q} \\ \frac{1}{A_3 B_3}\frac{\partial T}{\partial r}, & r, & \frac{\partial T}{\partial r} \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} \frac{1}{A_1 B_1}\frac{\partial T}{\partial p}, & u, & \frac{\partial T}{\partial u} \\ \frac{1}{A_2 B_2}\frac{\partial T}{\partial q}, & v, & \frac{\partial T}{\partial v} \\ \frac{1}{A_3 B_3}\frac{\partial T}{\partial r}, & w, & \frac{\partial T}{\partial w} \end{vmatrix};$$

wegen der unter 8. angegebenen Form von T heben sich die erste und letzte dieser Determinanten auf, während die mittlere sich auf

$$pqr\left(B_1\left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3}\right) + B_2\left(\frac{1}{A_3} - \frac{1}{A_1}\right) + B_3\left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2}\right)\right)$$

reducirt, was wegen der Gleichung 9. gleich Null ist.

Es ergibt sich also in dem bezeichneten Falle als viertes Integral die Gleichung:

$$7a. \quad \frac{1}{A_2 A_3}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{A_3 A_1}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{A_1 A_2}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 - \frac{1}{A_1 B_1}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2 - \frac{1}{A_2 B_2}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2 - \frac{1}{A_3 B_3}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 = L$$

Clebsch hat die Lösung des Problems für den vorliegenden Fall soweit verfolgt, dass er das vollständige Differential zweier Veränderlichen aufstellte, dessen Integration das fünfte von t freie Integral liefert. Hr. H. Weber[1] hat dann später unter der Voraussetzung,

[1] Mathematische Annalen XIV, 173—206.

dass $J_1 = 0$ ist, oder anders gesprochen, dass der Impuls sich auf eine impulsive Einzelkraft reducirt, sämmtliche in Betracht kommenden Grössen durch Thetafunctionen zweier Veränderlichen dargestellt, deren Argumente lineare Functionen der Zeit sind; und zwar ergeben sich sowohl die neun Richtungscosinus als auch die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit in Bezug auf die im Körper und auf die im Raume festen Coordinatenaxen als Quotienten je zweier Thetafunctionen, deren Nenner bei allen derselbe ist.

Es ist leicht einzusehen, warum die erwähnte Voraussetzung eine derartige Darstellung ermöglicht oder wenigstens wesentlich erleichtert. Will man die beiden letzten der Gleichungen 7. und die Gleichung 7a. nach

10. $$y_1 = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad y_2 = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad y_3 = \frac{\partial T}{\partial r}$$

auflösen, so wird man im allgemeinen auf eine Gleichung vierten Grades geführt, welche sich, wenn J_1 gleich Null ist, auf quadratische Gleichungen reducirt. In Folge dessen lassen sich in dem von Hrn. Weber behandelten Falle verhältnissmässig leicht zwei Grössen s_1 und s_2 derart bestimmen, dass sich sowohl die Grössen

11. $$x_1 = \frac{\partial T}{\partial u}, \quad x_2 = \frac{\partial T}{\partial v}, \quad x_3 = \frac{\partial T}{\partial w},$$

welche durch die erste der Gleichungen 7. mit einander verbunden sind, als auch die Grössen y_1, y_2, y_3 als hyperelliptische Functionen von s_1 und s_2 darstellen lassen. Indem man aus den Differentialgleichungen die Ableitungen von s_1 und s_2 nach t ermittelt, wird man auf die oben erwähnte Darstellung der Grössen $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ und dann weiter zu Formeln für die übrigen Elemente der Bewegung geführt.

Auch in dem allgemeinen Falle, wo J_1 einen von Null verschiedenen Werth hat, kann man zunächst x_1, x_2, x_3 durch zwei Hülfsgrössen und dann auch y_1, y_2, y_3 als Functionen derselben darstellen. Durch ein Verfahren, dessen ich mich schon in meiner Abhandlung über die »Anwendung der Abel'schen Functionen auf die Statik biegsamer unausdehnbarer Flächen«[1] bedient habe, wird man nach einer allerdings ziemlich umständlichen Rechnung auf die von Frau von Kowalevski untersuchte specielle Art Abel'scher Integrale vom Range 3 geführt. Die Grössen $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3$ lassen sich danach hier durch Thetafunctionen dreier Argumente darstellen, von denen eines constant ist, während die beiden anderen lineare Functionen der Zeit sind. Die hier in Frage kommenden Thetareihen haben aber die

[1] Journal für die reine und angewandte Mathematik. CIII, 44—74.

merkwürdige Eigenschaft, dass sie sich in einfach unendliche Thetareihen des ersterwähnten constanten Elementes und in zweifach unendliche Thetareihen der beiden von der Zeit abhängenden Grössen zerfällen lassen. Man kann also sicher auch in dem allgemeinen Falle mindestens die Grössen x_λ, y_λ durch zweifach unendliche Thetareihen darstellen.

Die Schwierigkeiten, welche sich auf dem eben skizzirten, dem Verfasser von früher her geläufigen und naheliegendsten Wege der Erlangung übersichtlicher und einfacher Formeln entgegenstellten, zwangen ihn einen andern Weg einzuschlagen, auf welchen einige bei der Verfolgung des ersten Weges gewonnene Resultate ziemlich deutlich hinwiesen.

Dieses zweite Verfahren beruht auf der, nachdem man sie einmal erkannt hat, recht plausibelen Thatsache, dass man sich in dem allgemeinen Falle die mit der Voraussetzung $J_1 = 0$ verbundenen Vortheile verschaffen kann, indem man an Stelle jedes der drei Werthepaare x_λ, y_λ gewisse ganze, homogene, lineare Functionen $\xi_\lambda, \xi'_\lambda$ desselben einführt. Es gibt nämlich vier Systeme von linearen Functionen der Werthepaare x_λ, y_λ, welche durch $u_{\lambda,\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, 3, 4)$ bezeichnet werden mögen, von der Beschaffenheit, dass die vier Gleichungen

$$12. \qquad u_{1\varkappa}^2 + u_{2\varkappa}^2 + u_{3\varkappa}^2 = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

gelten, von denen selbstverständlich eine die nothwendige Folge der drei anderen ist. Setzt man nun, indem man mit $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ irgend zwei verschiedene der Zahlen 1, 2, 3, 4 bezeichnet,

$$\xi_\lambda = u_{\lambda\varkappa_1} + iu_{\lambda\varkappa_2} \quad \xi'_\lambda = u_{\lambda\varkappa_1} - iu_{\lambda\varkappa_2},$$

wo die willkürlichen Factoren, welche den vier Grössensystemen unbeschadet der Gültigkeit der Gleichungen 10. hinzugefügt werden können, passend zu wählen sind, so erhält man aus 10. folgende drei Gleichungen:

$$13. \qquad \begin{aligned} \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_1'^2 + \xi_2'^2 + \xi_3'^2 &= 0, \\ e_1\xi_1^2 + e_2\xi_2^2 + e_3\xi_3^2 + \frac{1}{e_1}\xi_1'^2 + \frac{1}{e_2}\xi_2'^2 + \frac{1}{e_3}\xi_3'^2 &= 0, \\ \xi_1\xi_1' + \xi_2\xi_2' + \xi_3\xi_3' &= 0. \end{aligned}$$

In Folge dieser Gleichungen lassen sich die sechs Grössen $\xi_\lambda, \xi'_\lambda$ als Producte eines allen gemeinsamen Factors S und je einer hyperelliptischen Function eines Werthepaares s_1, s_2 darstellen. Indem man dann irgend eine der Gleichungen 7. und 7a. oder besser noch eine in gewisser Weise von einem willkürlichen Parameter abhängende Combination dieser Gleichungen benutzt, erhält man auch S durch hyperelliptische Functionen von s_1 und s_2 dargestellt. Drückt man nun die Grössen x_λ, y_λ durch Thetafunctionen zweier Veränderlichen aus, so ergeben sich aus den am Schluss der Abhandlung angeführten drei Formeln und den Differentialgleichungen des vorliegenden Problems die Argumente als lineare Functionen der Zeit. Aus denselben Formeln folgt für die Geschwindigkeitscomponenten, welche sich von den Grössen x_λ, y_λ nur durch constante Factoren unterscheiden, eine für die weitere Behandlung des Problems günstigere Form; aus ihnen ergeben sich ferner leicht die Richtungscosinus $\beta_\lambda, \gamma_\lambda$ und die Coordinaten η und ζ, während die Richtungscosinus α_λ aus den drei ersten der Gleichungen 6. unmittelbar folgen. Die Bestimmung von ξ erfordert eine Quadratur, welche nach gewissen Umformungen des zu integrirenden Ausdrucks leicht zu bewerkstelligen ist. Der Charakter der auf diesem Wege gewonnenen Lösung, deren vollständige und ausführliche Ableitung wir uns für eine spätere Veröffentlichung vorbehalten, wird sich aus den nachstehend angegebenen Formeln erkennen lassen.

Wir bezeichnen durch $u_1', u_2', g_1, g_2, g_3, g_4, g_1', g_2', g_3', \tau_{11}, \tau_{12} = \tau_{21}, \tau_{22}$ constante Grössen, welche in gewisser Weise durch die Constanten der lebendigen Kraft und durch die vier Integrationsconstanten J, J_1, L, L_1 bestimmt sind; h_1, h_2, h_3, h_4 nennen wir vier andere Integrationsconstanten; die drei linearen Functionen von t

$$i(g_1 t + h_1),\quad i(g_2 t + h_2),\quad i(g_3 t + h_3)$$

bezeichnen wir durch u_1, u_2, u_3.

Zur Kennzeichnung der von uns gewählten Bezeichnung der Thetafunctionen mögen folgende Formeln dienen:

$$\vartheta(v_1, v_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{n_1=+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{n_2=+\infty} e^{\{n_1(2v_1 + n_1\tau_{11} + n_2\tau_{12}) + n_2(2v_2 + n_1\tau_{21} + n_2\tau_{22})\}\pi i}$$

$$\vartheta(v_1, v_2 \,|\, \nu_1, \nu_2) = \vartheta(v_1 + \nu_1\tau_{11} + \nu_2\tau_{12}, v_2 + \nu_1\tau_{21} + \nu_2\tau_{22})\, e^{\{\nu_1(2v_1 + \nu_1\tau_{11} + \nu_2\tau_{12}) + \nu_2(2v_2 + \nu_1\tau_{21} + \nu_2\tau_{22})\}\pi i}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta(v_1, v_2)_0 &= \vartheta(v_1 - \tfrac{1}{2}, v_2 - \tfrac{1}{2} \,|\, 0, 0)\\
\vartheta(v_1, v_2)_1 &= \vartheta(v_1 - \tfrac{1}{2}, v_2 - \tfrac{1}{2} \,|\, \tfrac{1}{2}, 0)\\
\vartheta(v_1, v_2)_2 &= \vartheta(v_1, v_2 - \tfrac{1}{2} \,|\, \tfrac{1}{2}, 0)\\
\vartheta(v_1, v_2)_3 &= \vartheta(v_1, v_2 - \tfrac{1}{2} \,|\, 0, \tfrac{1}{2})\\
\vartheta(v_1, v_2)_4 &= \vartheta(v_1, v_2 \,|\, 0, \tfrac{1}{2})\\
\vartheta(v_1, v_2)_\lambda &= \vartheta(v + \tfrac{1}{2}m_1^\lambda, v_2 + \tfrac{1}{2}m_2^\lambda \,|\, \tfrac{1}{2}n_1^\lambda, \tfrac{1}{2}n_2^\lambda) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, 3, 4).
\end{aligned}$$

Sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\varkappa$ mehrere der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, so sollen die folgenden Beziehungen gelten:

$$m_1^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varkappa} \equiv m_1^{\lambda_1} + m_1^{\lambda_2} + \ldots m_1^{\lambda_\varkappa} \text{ modulo } 2 \,,\; 0 \geqq m_1^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varkappa} \geqq -1 \,,$$

$$m_2^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varkappa} \equiv m_2^{\lambda_1} + m_2^{\lambda_2} + \ldots m_2^{\lambda_\varkappa} \text{ modulo } 2 \,,\; 0 \geqq m_2^{\lambda_2 \lambda_2 \ldots \lambda_\varkappa} \geqq -1 \,,$$

$$n_1^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varkappa} \equiv n_1^{\lambda_1} + n_2^{\lambda_2} + \ldots n_1^{\lambda_\varkappa} \text{ modulo } 2 \,,\; 0 \leqq n_1^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varkappa} \leqq 1 \,,$$

$$n_2^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varkappa} \equiv n_2^{\lambda_1} + n_2^{\lambda_2} + \ldots n_2^{\lambda_\varkappa} \text{ modulo } 2 \,,\; 0 \leqq n^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varkappa} \leqq 1 \,.$$

$$\vartheta(v_1, v_2)_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varkappa} = \vartheta\left(v_1 + \tfrac{1}{2} m_1^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varkappa},\, v_2 + \tfrac{1}{2} m_2^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varkappa} \,\middle|\, \tfrac{1}{2} n_1^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varkappa},\, \tfrac{1}{2} n_2^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\varkappa}\right),$$

wobei zu beachten, dass sich die aus mehr als zwei einfachen zusammengesetzten Indices immer auf einfache oder solche reduciren lassen, die aus zweien zusammengesetzt sind. Zur Abkürzung setzen wir ferner:

$$\Delta\, \vartheta(v_1, v_2)_\mu = \frac{\partial \vartheta(v_1, v_2)_\mu}{\partial v_1} g_1 + \frac{\partial \vartheta(v_1, v_2)_\mu}{\partial v_2} g_2 + \vartheta(v_1, v_2)_\mu g_3 \,,$$

$$\Delta'\, \vartheta(v_1, v_2)_\mu = \frac{\partial \vartheta(v_1, v_2)_\mu}{\partial v_1} g_1' + \frac{\partial \vartheta(v_1, v_2)_\mu}{\partial v_2} g_2' + \vartheta(v_1, v_2)_\mu g_3' \,;$$

die Werthe welche die Functionen für den Fall annehmen, dass beide Argumente verschwinden, bezeichnen wir, wie es üblich ist, durch das blosse Functionszeichen ohne die Argumente anzugeben. Bezeichnen nun α, β, γ, δ, ε die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 in einer durch die Grössenverhältnisse der Coefficienten A_λ, B_λ von T und der Integrationsconstanten J, J_1, L, L_1 bedingten Anordnung, i_α, i_β, i_γ, i_α', i_β', i_γ', $i_{\varepsilon\delta}$ gewisse Potenzen von i, so stellt sich die von uns gewonnene Lösung in folgender Form dar.

1. Die Ableitungen von T nach u, v, w, p, q, r.

$$\frac{\partial T}{\partial u} = i_\alpha \frac{\vartheta(u_1', u_2')_\alpha\, \vartheta(u_1, u_2)_{\alpha\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\alpha\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\alpha}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta\, \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\delta} J,$$

$$\frac{\partial T}{\partial v} = i_\beta \frac{\vartheta(u_1', u_2')_\beta\, \vartheta(u_1, u_2)_{\beta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\beta\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\beta}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta\, \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\delta} J,$$

$$\frac{\partial T}{\partial w} = i_\gamma \frac{\vartheta(u_1', u_2')_\gamma\, \vartheta(u_1, u_2)_{\gamma\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\gamma\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\gamma}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta\, \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\delta} J;$$

$$\frac{\partial T}{\partial p} = i_\alpha \frac{\Delta'\vartheta(u_1', u_2')_\alpha\, \vartheta(u_1, u_2)_{\alpha\varepsilon} - \Delta'\vartheta(u_1', u_2')_{\alpha\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\alpha}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta\, \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = i_\beta \frac{\Delta'\vartheta(u_1', u_2')_\beta\, \vartheta(u_1, u_2)_{\beta\varepsilon} - \Delta'\vartheta(u_1', u_2')_{\beta\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\beta}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta\, \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = i_\gamma \frac{\Delta'\vartheta(u_1', u_2')_\gamma\, \vartheta(u_1, u_2)_{\gamma\varepsilon} - \Delta'\vartheta(u_1', u_2')_{\gamma\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\gamma}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta\, \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\delta}.$$

2. Die Componenten der Geschwindigkeit nach den im Körper festen Axen:

$$p = i_\alpha \frac{\Delta\vartheta(u_1', u_2')_\alpha \vartheta(u_1, u_2)_{\alpha\varepsilon} - \Delta\vartheta(u_1', u_2')_{\alpha\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\alpha}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$q = i_\beta \frac{\Delta\vartheta(u_1', u_2')_\beta \vartheta(u_1, u_2)_{\beta\varepsilon} - \Delta\vartheta(u_1', u_2')_{\beta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\beta}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$r = i_\gamma \frac{\Delta\vartheta(u_1', u_2')_\gamma \vartheta(u_1, u_2)_{\gamma\varepsilon} - \Delta\vartheta(u_1', u_2')_{\gamma\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\gamma}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta};$$

$$u = \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial p}{\partial u_1'} g_1' + \frac{\partial p}{\partial u_2'} g_2' + \frac{\partial T}{\partial u} g_4\right\},$$

$$v = \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial q}{\partial u_1'} g_1' + \frac{\partial q}{\partial u_2'} g_2' + \frac{\partial T}{\partial v} g_4\right\},$$

$$w = \frac{1}{J}\left\{\frac{\partial r}{\partial u_1'} g_1' + \frac{\partial r}{\partial u_2'} g_2' + \frac{\partial T}{\partial w} g_4\right\}.$$

Bezüglich der drei zuletzt angeführten Grössen ist zu bemerken, dass sie in Folge der zwischen den vier Constanten u_1', u_2', g_1', g_2' bestehenden Relation

$$\vartheta(u_1', u_2')_\delta \, \Delta'\vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon} \, \Delta'\vartheta(u_1', u_2')_\delta = 0$$

den allen vorhergehenden Grössen gemeinschaftlichen Nenner auch einfach erhalten, und dass der Zähler bei jeder von ihnen ein lineares Aggregat derselben beiden Thetafunctionen ist, wie bei den entsprechenden Grössen der drei vorangehenden Gruppen.

3. Die neun Richtungscosinus.

$$\alpha_1 = i_\alpha \frac{\vartheta(u_1', u_2')_\alpha \vartheta(u_1, u_2)_{\alpha\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\alpha\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\alpha}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$\alpha_2 = i_\beta \frac{\vartheta(u_1', u_2')_\beta \vartheta(u_1, u_2)_{\beta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\beta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\beta}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$\alpha_3 = i_\gamma \frac{\vartheta(u_1', u_2')_\gamma \vartheta(u_1, u_2)_{\gamma\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\gamma\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\gamma}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta};$$

$$\beta_1 \pm i\gamma_1 = i_\alpha' \frac{(\pm 1)^{|\alpha|} \vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13\alpha\delta} \vartheta_{13\alpha\delta\varepsilon} - (\pm 1)^{|\alpha\varepsilon|} \vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13\alpha\delta\varepsilon} \vartheta_{13\alpha\delta}}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta} e^{\mp u_3},$$

$$\beta_2 \pm i\gamma_2 = i_\beta' \frac{(\pm 1)^{|\beta|} \vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13\beta\delta} \vartheta_{13\beta\delta\varepsilon} - (\pm 1)^{|\beta\varepsilon|} \vartheta(u_1' \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13\beta\delta\varepsilon} \vartheta_{13\beta\delta}}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta} e^{\mp u_3},$$

$$\beta_3 \pm i\gamma_3 = i_\gamma' \frac{(\pm 1)^{|\gamma|} \vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13\gamma\delta} \vartheta_{13\gamma\delta\varepsilon} - (\pm 1)^{|\gamma\varepsilon|} \vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13\gamma\delta\varepsilon} \vartheta_{13\gamma\delta}}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon} \vartheta(u_1, u_2)_\delta} e^{\mp u_3}.$$

(Die Grössen $|\mu|$ sind gleich 0 oder 1, je nachdem der Index μ grade oder ungrade ist.)

4. Die Componenten der Rotationsgeschwindigkeit nach den im Raume festen Axen.

$$p' = \frac{\Delta\vartheta(u_1', u_2')_\delta\, \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \Delta\vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\, \vartheta u_1, u_2)_\delta}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta\, \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$q' + ir' = \mp i_{\varepsilon\delta} \frac{(\pm 1)^{|\delta|}\, \vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13}\, \Delta\vartheta_{13\varepsilon} - (\pm 1)^{|\delta\varepsilon|}\, \vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13\varepsilon}\, \Delta\vartheta_{13}}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta\, \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\delta}\, e^{\mp \dots}$$

5. Die Coordinaten des Anfangspunktes des im Körper festen Systems.

$$\xi = g_4 t + h_4 - \frac{i}{J} \frac{\vartheta(u_1', u_2')_\delta\, \Delta'\vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\, \Delta'\vartheta(u_1, u_2)_\delta}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta\, \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\delta},$$

$$\eta + i\zeta = -\frac{i i_{\varepsilon\delta}}{J} \frac{(\pm 1)^{|\delta|}\, \vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13}\, \Delta'\vartheta_{13\varepsilon} - (\pm 1)^{|\delta\varepsilon|}\, \vartheta(u_1 \mp u_1', u_2 \mp u_2')_{13\varepsilon}\, \Delta'\vartheta_{13}}{\vartheta(u_1', u_2')_\delta\, \vartheta(u_1, u_2)_{\delta\varepsilon} - \vartheta(u_1', u_2')_{\delta\varepsilon}\, \vartheta(u_1, u_2)_\delta}\, e^{\mp \dots}$$

Die unter 3. angegebenen Ausdrücke für die neun Richtungscosinus genügen den sechs charakteristischen Relationen ohne Rücksicht auf die Bedeutung und den Werth der fünf Grössen $u_1, u_2, u_3, u_1', u_2'$, und es erscheint daher nicht ausgeschlossen, dass sie, wenn die fünf Grössen passend gewählten Functionen der Zeit gleichgesetzt werden, auch zur Lösung anderer Rotationsprobleme dienen können. Dass diese Ausdrücke das hier in Frage stehende hydrodynamische Problem lösen, beruht darauf, dass die Functionen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ der vier Grössen u_1, u_2, u_1', u_2' den folgenden Differentialgleichungen genügen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_\lambda} &= -i\left(\alpha_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_\lambda'} - \alpha_2 \frac{\partial \alpha_3}{\partial u_\lambda'}\right), \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_\lambda} &= -i\left(\alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial u_\lambda'} - \alpha_3 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_\lambda'}\right), \qquad (\lambda = 1, 2). \\ \frac{\partial \alpha_3}{\partial u_\lambda} &= -i\left(\alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial u_\lambda'} - \alpha_1 \frac{\partial \alpha_2}{\partial u_\lambda'}\right). \end{aligned}$$

5. Zur Kenntniss des Baues der Nemathelminthen.

Von Dr. Otto Hamann,
Privatdocenten der Zoologie in Göttingen.

(Vorgelegt von Hrn. Schulze am 22. Januar: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. IV]: — ausgegeben am 29. Januar.)

Nachdem ich bereits eine grosse Anzahl von einheimischen Echinorhynchen und Nematoden zu embryologischen wie anatomischen Untersuchungen zusammengebracht hatte, war mein grösster Wunsch, dieses Material durch Formen zu vervollständigen, die in der Adria und dem Mittelmeere leben. In den Monaten September und October vorigen Jahres konnte ich mich, durch die K. Akademie der Wissenschaften hierzu in Stand gesetzt, sowohl am adriatischen Meere, in Triest und Venedig, wie am mittelländischen, in Neapel und Castellamare aufhalten.

Durch Molin sind eine Anzahl von Rundwürmern beschrieben worden, die er aus Fischen der Adria (Venedig) erhalten hatte. Da die Faunen Venedigs und Triests wohl nur in für mich nebensächlichen Thieren abweichen, so wählte ich zunächst Triest, zumal ich in der zoologischen Station mit allen nöthigen Reagentien ausgerüstet ungestört zu arbeiten hoffen durfte.

Unter den Echinorhynchen, die Molin beschrieben hat, war es besonders *Ech. agilis*, in dessen Besitz ich mich zu setzen wünschte, da die Anzahl der Haken und ihre Anordnung so grosse Übereinstimmung mit *Ech. clavaeceps* zeigte, dass man annehmen durfte, es würde sich diese Übereinstimmung auf noch weitere Organe erstrecken. Die Ähnlichkeit zwischen beiden Arten ist nun auch, wie ich auf Grund der Untersuchung einer grösseren Anzahl sowohl lebender wie conservirter Individuen angeben kann, eine alle Organe betreffende.

Wie ich im ersten Heft der Monographie der Echinorhynchen bereits kurz angedeutet habe, haben wir *Ech. clavaeceps* Zed. als eine durch Paedogenesis entstandene Art anzusehen, indem sie auf einem Stadium geschlechtsreif geworden ist, das von den übrigen Echinorhynchen ziemlich früh durchlaufen wird. *Ech. agilis* ist ebenfalls eine Art, die, auf dem gleichen Stadium verblieben, die Geschlechtsreife erlangt hat. Die Veränderungen, die das Ei bis zu diesem Stadium durchläuft, sind kurz folgende. Nachdem auf eine reguläre Furchung das Gastrulastadium gefolgt ist, in dem der Keim aus einer centralen Zellmasse mit stark chromatinreichen Kernen besteht, dem Entoderm, und einer peripheren Zellmasse, Ektoderm, deren Kerne sich mit Farbstoffen nur noch schwach tingiren, sind an dem vordern Pole die Embryonalhaken aufgetreten, mit deren Hülfe sich der Embryo nach Übersiedelung in den definitiven Werth durch dessen Darmwand in die Leibeshöhle durchbohrt. Während nun aus dem centralen Zellenhaufen, dem Entoderm, ein Theil des Rüssels und seiner Scheide, die Geschlechtsorgane und das die als Spaltraum entstandene Leibeshöhle auskleidende Epithel hervorgehen, vergrössern sich einzelne Kerne im Ektoderm derart, dass an Stelle der Zellen mit ihren kleinen Kernen endlich ein Syncytium mit ungefähr 8—16 Riesenkernen vorhanden ist, von denen jeder einen Durchmesser von $0^{mm}.1$ erreichen kann. In diesem Stadium verharren die Larven von *Ech. clavaeceps* und *agilis* dauernd. Während bei den übrigen Arten diese Riesenkerne durch Abschnürung und Zerfall die Hautkerne liefern, besitzt die Haut, das Ektoderm, bei diesen beiden Arten dauernd solche Kerne, die sich durch ihr grosses Kernkörperchen auszeichnen. Die von der Haut her sich anlegenden Drüsen, die Lemnisken, die bei anderen Echinorhynchen den Bau der Haut mit ihren kleinen Kernen wiederholen, haben bei unseren zwei Arten ebenfalls nur Riesenkerne, und zwar zwei. Weiter ist die Rüsselscheide einfacher gebaut, indem sie sich nur aus einer einfachen Muskelschicht zusammensetzt, während wir sie sonst doppelwandig antreffen. Die Körpermusculatur ist gleichfalls auf der einfachsten Stufe stehen geblieben, indem die Muskelzellen der Vacuolisirung ermangeln und die Fibrillen in einer Reihe stehen. Auch im Bau des Ligamentes ist eine Vereinfachung zu constatiren, indem es sich direct in den Glockenrand fortsetzt.

Wenn ich nach diesen Befunden beide Arten als durch Paedogenie entstanden ansehe, so meine ich, ist diese Ansicht gut begründet. Wir haben damit diesen Arten im Kreise der Echinorhynchen eine gleiche Stellung eingeräumt, wie sie der *Archigetes Sieboldi* Leuckart unter den Cestoden einnimmt, der ebenfalls als eine durch Phylo-Paedogenie entstandene Art anzusehen ist. Dass durch Phylo-Paedogenie gute Arten entstanden sind, dafür können diese Fälle als Beweise dienen. Sie sind aber weiter geeignet auf viele Thierformen, die jetzt als ursprüngliche Formen betrachtet werden, ein neues Licht zu werfen. Thiere wie der *Amphioxus* und viele andere angeblich phylogenetisch älteste Formen werden uns in ihrer Organisation erst verständlich, wenn wir sie als geschlechtsreif gewordene Larven ansehen.

Ausser dieser *Echinorhynchus*-Art habe ich eine Anzahl von Arten gesammelt, die von dem Typus Abweichendes wenig bieten. Ich erwähne nur, dass die vier von MOLIN errichteten Arten, *Ech. incrassatus, flavus, de Visianii, solitarius,* die von vier Wirthen herrühren, zu einer Art zusammenzuziehen sind, mithin drei Artennamen einzuziehen sind.

Die Ausbeute an Nematoden war eine grosse, wie denn überhaupt diese Gruppe zahlreicher in den Seefischen vertreten ist als die vorige.

Die Hauptfrage, die ich mir neben dem Ziele, die gesammte Anatomie und Entwickelung der Nematoden zu erforschen, gestellt hatte, war die nach dem Bau des Nervensystems und vornehmlich des Excretionsgefässsystems. Unsere Kenntniss des Excretionssystems beschränkt sich auf die Constatirung zweier Längsgefässe, die den Körper in den Seitenlinien durchziehen. Beide Gefässe verbinden sich im vordern Körperabschnitt zu einem kurzen unpaaren Kanal, der die Körperwand durchbricht und durch einen Porus nach aussen mündet. Über das weitere Verhalten dieser Gefässe ist nichts bekannt, was vielleicht seinen Grund in den Schwierigkeiten hat, mit dem die Untersuchung dieser Wurmgruppe zu kämpfen hat, da ihre dicke chitinartige Cuticula der Zerlegung in Serienschnitte sehr hinderlich ist.

Unter den parasitären Nematoden der Adria war es besonders eine Art, die sich zur Untersuchung des Excretionsorgans eignete.

Es ist dies die bisher nur in wenigen Exemplaren bekannte von DIESING als *Lecanocephalus* beschriebene Gattung, die MOLIN trotz seiner langjährigen Untersuchungen nur in drei Individuen wiederfand. In einem Seebarsch (Pranzin der Chioggioten) glückte es mir über 100 dieser Würmer aufzufinden, die im Magen, in dessen Wandung angeheftet, lebten. Sie gleichen in ihrem Habitus Insectenlarven. Die Körperoberfläche ist mit Stacheln bedeckt, die in parallelen Reihen gürtelförmig angeordnet stehen.

Lecanocephalus besitzt nur ein Längsgefäss in der einen (rechten) Seitenlinie, das auf der Bauchseite unterhalb des Nervenringes durch einen schwer auffindbaren Porus nach aussen mündet. Dieses Längsgefäss lässt sich rückwärts nicht bis zum Körperende verfolgen, wie bei anderen Nematoden, sondern es reicht bis etwas über die Körpermitte. Situspraeparate wie Schnitte von in FLEMMING's Gemisch conservirten Thieren ergaben, dass das Gefäss sich in der Körpermitte unter mehrfachen Schlängelungen verschmächtigt und durch einen feinen Porus in die Leibeshöhle mündet. Ein *Glomerulus* ähnlicher Körper, bei dessen näherer Untersuchung ich begriffen bin, liegt dem Endtheil eng an. Ich fand ihn auch bei anderen Gattungen. Wir haben somit ein Excretionsorgan, das in einem Längsgefäss besteht, das sowohl mit der Leibeshöhle wie mit der Aussenwelt in Verbindung steht. Im Princip haben wir denselben Bau, wie ihn das Excretionsorgan beispielsweise bei den Anneliden zeigt. Während das Organ hier aber paarweise in den Segmenten sich wiederholt, besitzen die Nematoden nur eins oder höchstens zwei, die getrennt in die Leibeshöhle münden, wie ich unter andern für *Dochmius* gefunden habe.

Der Gedanke, das Excretionsorgan der Nematoden dem anderer Würmergruppen zu homologisiren, liegt wohl sehr nahe. Hat man doch das gleiche Organsystem der Plathelminthen mit der sogenannten Kopfniere homologisirt. Ich meine aber, dass gar kein Grund vorliegt, Ringel- und Rundwürmer in ein nahes Verwandtschaftsverhältniss zu bringen, denn es ist nicht abzusehen, warum nicht das Excretionsorgan in der typischen Form mehrmals unabhängig von einander entstanden sein kann. Ebenso wie das Sehorgan in den verschiedenen Thiergruppen sich in derselben typischen Weise ausgebildet hat, ebenso kann sich ein Kanal, der bestimmt war die Excrete aus dem Körper nach aussen zu schaffen, öfter unabhängig sich entwickelt haben. Es stimmt diese Ansicht mit der jetzt herrschenden allerdings nicht überein, die beispielsweise, weil bei den Holothurien *(Synapta)* Wimpertrichter in der Leibeshöhle vorkommen, sofort eine Verwandtschaft mit Anneliden hierauf begründet.

Unberücksichtigt lasse ich die Resultate, die den feinern Bau dieses Organsystems betreffen, da sie noch nicht abgeschlossen sind. Nur soviel möchte ich noch hinzufügen, dass bestimmte Zellen in den Seitenlinien sich finden, die in ähnlicher Weise wie die Zellen in den Wimpertrichtern bei Plattwürmern aufzufassen sind, wenn ihnen auch eine so leicht erkennbare Bewegungsart, wie die der Wimperflamme es ist, fehlt. Weiter ist bei den grossen Arten ein ausgebildetes System von Zufuhrkanälen vorhanden, die in die beiden Längsgefässe münden.

Wie das Excretionsorgan der frei lebenden Nematoden gebaut ist kann ich leider noch nicht angeben. Späteren am Mittelmeer und der Adria zu unternehmenden Untersuchungen ist diess vorbehalten.

Das Nervensystem der Nematoden beschäftigte mich besonders in seinen peripheren Verzweigungen und Sinnesorganen. Während bei den Echinorhynchen nur riesengrosse Ganglienzellen vorkommen, treffen wir solche neben kleinen Zellen bei allen bisher von mir untersuchten Arten. Besonders im überall vorhandenen Analganglion lagen grosse Zellen in immer gleicher symmetrischer Anzahl und Lagerung. Die Hautpapillen sind typische Sinnesorgane. Bei *Lecano-*

cephalus lassen sich die Nerven in ihrem Eintritt sehr gut verfolgen. Der Nerv schwillt zu einer grossen Ganglienzelle an, die sich in die Papille fortsetzt und hier einen complicirten Bau zeigt. Ein ferner verhältnissmässig langer Stift überragt die Papille, indem er in ihrer Mitte aufsitzt. Anhangsweise erwähne ich noch bewaffnete Trematoden, von denen besonders eine neue Art sich durch ihre Echinorhynchen-ähnliche Gestalt auszeichnet. Um das Kopfende stehen in zwei Reihen abwechselnd Haken, während der vordere Körperabschnitt mit kleineren Haken dicht bewaffnet ist. Über die Zahl der gesammelten Arten berichte ich in dem zweiten Heft der die Resultate wiedergebenden Arbeit. (Die Nemathelminthen. 1. Heft. Monographie der Echinorhynchen. 1. Hälfte mit 10 Tafeln. Jena. Fischer 1891.)

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

INHALTSVERZEICHNISS.

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich zuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehen des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug a Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNG

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissens in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern o fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch de Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen, und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres in heften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück wir Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellschaft Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständigen »Si berichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zus zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht zu

---

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissensch Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, nämlich die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,
» » » Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,
» » » October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach Fertig des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1890 nicht zugekommen sein sollten, werden hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Reclamationen Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1891 angebracht werd

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des buchhändlerisc zuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Georg Reimer in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFT

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 *M.*

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 *M.*

Georg Reimer's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sitzungsber oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Schriften von S der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselben in einz Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten zuzuse Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit der genan Buchhandlung in Verbindung setzen.

THEMATISCHE

UND

SSENSCHAFTLICHE

ITTHEILUNGEN

AUS DEN

BERICHTEN DER KÖNIGLICH

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT II.

FEBRUAR 1891.

MIT TAFEL I.

BERLIN 1891.

GLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königli Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es si an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgen Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer theilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und besonders beizugebenden Tafeln die volle erforder Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissensch liche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Aus des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in scher Sprache veröffentlicht sein oder werden. W der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaft Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentl beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedar dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besond Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tage

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitz berichte können bestimmte Kategorien wissenschaft Mittheilungen auch abgesondert in der Weise pub werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlau Paginirung versehen und mit besonderem Verkauf in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissens lichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält geltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweih zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu la sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden S tar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die tion und den Druck der in dem gleichen Stück nenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eig heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inh geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantw Für alle übrigen Theile derselben sind nach Richtung nur die Verfasser verantwortlich.

6. Über Ei-Ablage und Embryonalentwickelung der Krokodile.

Von Dr. A. Voeltzkow
in Majunga auf Madagaskar.

(Vorgelegt von Hrn. Möbius am 5. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. VII]; — ausgegeben am 12. Februar.)

Das Madagaskar-Krokodil, *Crocodilus niloticus* Laur., (*madagascariensis* Grandid.) ist nicht nur eins der gemeinsten Reptilien, sondern vielleicht das gemeinste Wirbelthier der Insel. In jeder Wasseransammlung, in jedem Teich und Fluss ist es in grosser Anzahl vertreten. Die Eingeborenen unterscheiden zwei Arten, eine (*Cr. niloticus*) mit längerm und eine andere mit kürzerm Kopf und grösserer Körperlänge; die letztere soll nur in den grossen Strömen im Urwald vorkommen, wird ganz besonders gefürchtet, da sie sehr wild sein soll, und dürfte wohl mit *Cr. robustus* Vaill. Grandid. identisch sein. Es ist mir bis jetzt nicht gelungen, ein Exemplar dieser zweiten Art zu erlangen; meine Beobachtungen erstrecken sich deshalb ausschliesslich auf *Cr. niloticus* Laur. (*madagascariensis* Grandid.).

Man trifft dieses in allen Grössen an, besonders zahlreich auf den Sandbänken des Betsibokaflusses, wo man im Verlauf einer Stunde, den Fluss hinabrudernd, mit Leichtigkeit hundert und mehr zu Gesicht bekommen kann. Das grösste bis jetzt von mir gemessene hatte eine Länge von 13 engl. Fuss, doch gibt es noch bedeutend grössere.

Die Ei-Ablage beginnt in den letzten Tagen des August und dauert bis gegen Ende September,[1] von wo an sämmtliche Eier Embryonen enthielten. Im Ganzen kamen etwas über 1000 Eier zur Untersuchung, die aus etwa 35 Gelegen stammten. Ganz genau liess sich in ein paar Fällen die Eierzahl der Gelege nicht mehr ermitteln. Die Anzahl der Eier eines Geleges schwankt zwischen 20 und 30 Stück.

Das Nest ist in den Erdboden gegraben und besteht aus einer etwa $1\frac{1}{2}$—2 Fuss tiefen Grube mit theilweise steilen Wänden. An

[1] Die Ei-Ablage scheint nicht überall zu derselben Zeit zu geschehen, denn Keller gibt für Nossi-Bé den Monat Januar an.

ihrem Grunde sind diese unterhöhlt und hier befinden sich die Eier. Da der Boden der Grube in der Mitte etwas erhöht ist, so rollen die Eier, wenn sie das Mutterthier ablegt, von selbst an die unterhöhlten Stellen. Höchst selten findet man ein paar Eier in der Mitte der Grube liegen, wohl ein Beweis dafür, dass das Mutterthier die Eier nicht selbst mit den Füssen an die unterhöhlten Stellen befördert, denn dann würden sich in der Mitte der Grube ja niemals welche vorfinden. Die Grube wird darauf zugescharrt und ist von aussen durch nichts kenntlich. Das alte Krokodil schläft auf dem Neste, daher finden die Eingeborenen die Eier, indem sie dessen Spuren vom Wasser aus nachgehen.

Die Gestalt der Eier ist äusserst verschieden, nicht einmal die desselben Geleges gleichen einander vollständig; manche sind elliptisch, andere cylindrisch mit abgerundeten Enden; zwei Eier waren an einem Ende in eine Spitze ausgezogen. Die Grösse variirt von $5\frac{1}{2}$ bis zu 9 Cm. Länge bei 4 bis 5 Cm. Breite. Die Schale ist weiss, dick und starr, manchmal rauh gekörnelt, manchmal glatt.

Fast sämmtliche Nester waren in den trockenen weissen Sand hineingegraben, einige in den humusreichen Boden, jedoch so, dass sie von der Feuchtigkeit nicht erreicht werden konnten. Ich muss das besonders betonen, da frisch abgelegte Eier ganz ungemein empfindlich gegen Nässe sind. Über die Hälfte der Eier, die in meinem Hof in Gruben untergebracht waren, giengen mir an Schimmelbildung zu Grunde, trotzdem sich im Sand nachher nur ganz minimale Mengen von Feuchtigkeit nachweisen liessen. Das frische Ei ist überhaupt eins der empfindlichsten Objecte, welches ich kenne. Auch eine geringe Erhöhung der Temperatur tödtete die jungen Embryonen unfehlbar, wenn die Eier nicht hoch genug mit Sand bedeckt waren. Ältere Eier sind dagegen um so widerstandsfähiger, können halb austrocknen, und tagelang ohne Bedeckung auf dem Tisch liegen, ohne dass der Embryo abstirbt.

Wie die Sakalava-Leute mir erzählten, scharrt zur Zeit, wenn die Eier zum Ausschlüpfen bereit sind, das alte Thier die Grube auf; hieran zu zweifeln hatte ich keinen Grund, da ich selbst zahlreiche Gruben, aus denen der Sand entfernt war und die die zerbrochenen Eischalen enthielten, besichtigt hatte. Es entstand nun die Frage, woher weiss das Mutterthier, dass die Eier weit genug entwickelt sind und es nun Zeit zum Aufscharren ist? Diess Räthsel hatte eine sehr einfache Lösung.

In dem Arbeitszimmer meines Hauses stehen einige mit Sand gefüllte Kisten, in ihnen Krokodil-Eier, um dieselben stets vor Augen zu haben und eventuell das Ausschlüpfen der jungen Thiere beobachten zu können. Eines Tages hörte ich in einer dieser Kisten Töne erschallen und kam auf die Vermuthung, dass eventuell ein junges Thier ausgekrochen sei und im Sand verborgen im Ersticken diese Laute von sich gäbe. Beim Nachgraben stellte sich nun die ganz überraschende Thatsache heraus, dass die Töne aus den unverletzten Eiern selbst erschallten. Die Töne sind so laut, dass, wenn die Eier frei liegen, man sie ganz deutlich im Nebenzimmer hört. Sind die Eier mit Sand bedeckt, wie es in der Natur der Fall ist, also etwa 2 Fuss hoch, so sind die Töne etwas gedämpfter, aber doch ohne Mühe deutlich auf die Entfernung einer Zimmerlänge vernehmbar. Das Rufen der Jungen im Ei kann man jederzeit anregen, wenn man mit starken Schritten an dem Ort, an dem sich die Eier befinden, vorübergeht, wenn man an die Kiste, die die Eier enthält, klopft, oder das Ei in die Hand nimmt und etwas bewegt, jede Erschütterung veranlasst die Jungen im Ei Töne von sich zu geben.

Da wie oben bemerkt das Mutterthier auf dem Nest schläft, wird es bei seinen Bewegungen, oder seinem Wandern vom Wasser zum Nest oder umgekehrt den Erdboden erschüttern und die Jungen im Ei, die weit genug entwickelt sind, zum Erzeugen von Tönen anregen. Das alte Thier scharrt dann den Sand aus der Grube und nach einiger Zeit schlüpfen die Jungen aus. Aus derartigen Eiern, die ausgegraben und frei aufbewahrt wurden, krochen nach drei Tagen die Jungen aus.

Die Thatsache, dass die Jungen im Ei Töne von sich geben, war allen Leuten hier unbekannt. Die Eingeborenen lachten mich aus, wenn ich davon sprach, bis sie sich durch Horchen eines Bessern belehrten. Die Töne werden mit geschlossenem Munde hervorgebracht, wie es scheint unter starker Contraction der Bauchmuskeln, ungefähr wie wir beim Schluckauf Töne erzeugen. Auch der Klang ist ähnlich.

Sind die jungen Thiere ausgeschlüpft, so wandert das alte Krokodil mit ihnen zum Wasser. Mein Praeparator, ein durchaus zuverlässiger Mann, der schon mit Dr. Fischer gereist ist, erzählte mir, er hätte vor kurzer Zeit ein grosses Krokodil mit einer Schaar von etwa 20 Jungen über eine Sandfläche zum Wasser wandern sehen. Das alte Thier sei auffällig wild gewesen. Dass die eben ausgeschlüpften jungen Thiere ohne Hülfe der Mutter im Stande sein sollten, die über ihnen befindliche Sandschicht zu durchbrechen, glaube ich nach meinen Erfahrungen auf das Bestimmteste verneinen zu dürfen. Von den Eiern, die mit einer etwa $1\frac{1}{2}$—2 Fuss hohen Sandschicht bedeckt waren, zeigten zwar einige schwache Versuche der Jungen auszuschlüpfen, indem die Schale an einer Stelle zerbrochen war, manchmal hatten die Jungen die Schnauzenspitze herausgestreckt, waren aber stets abgestorben, wahrscheinlich aus Mangel an Luft. Die nur schwach mit Sand bedeckten Eier bereiteten den jungen Thieren keine Schwierigkeiten beim Ausschlüpfen.

Dem Process des Auskriechens geht eine Drehung des Embryos mit theilweiser Zerreissung der Embryonalhäute vorher, so dass das junge Thier nun mit seiner Schnauzenspitze gegen das eine Ende des Eies anstösst, wenigstens war diess die Lage sämmtlicher zum Ausschlüpfen bereiter Embryonen. Das Durchbohren der Eischale wird durch mechanische Wirkung des Eizahnes, der sich ja auch bei jungen Vögeln findet, bewirkt. Derselbe legt sich schon sehr früh an, zur Zeit, wenn die jungen Krokodile anfangen ihre definitive Gestalt anzunehmen, also etwa $1\frac{1}{2}$—2 Monat alt sind. Er stellt beim eben ausgeschlüpften Jungen einen etwa $\frac{1}{2}$ — $\frac{3}{4}$ Mm. hohen Zahn dar, der in zwei Spitzen ausläuft und bei den Bewegungen des Thieres genau wie ein Bohrer wirkt. Bei 14 Tage alten Krokodilen war er noch deutlich erkennbar. Ist das Ei durchbohrt, so tritt durch austretende Embryonalflüssigkeit eine Erweichung der anliegenden Schalentheile ein und das Thier zwängt sich ruckweise durch den engen Spalt. Ein junges Thier, welches vom Augenblick an, wo es die Eischale durchbohrt hatte, beobachtet wurde, brauchte noch etwa zwei Stunden bis zum vollständigen Auskriechen. Beim Durchpressen durch den schmalen Spalt reissen an den Rändern der Öffnung die Embryonalhäute ab und bleiben im Ei zurück.

Die eben ausgeschlüpften Thiere haben eine ganz bedeutende Grösse, und begreift man nachher nicht recht, wie sie in dem Ei haben Platz finden können. So liess z. B. ein Ei von 8^{cm} Länge und 5^{cm} Breite ein Junges hervorgehen von 28^{cm}. Diese jungen Thiere sind schon sehr wild; sie beissen z. B. nach dem Finger, wenn man sie anfassen will u. s. w. Von ihnen hört man häufig Laute, besonders wenn sie hungrig sind. Diess Factum war mir schon seit längerer Zeit bekannt. Der Ton ist nicht so hoch, wie der, den die Jungen im Ei erzeugen. Er klingt ungefähr wie der Ruf unserer Feuerunke (*Bombinator igneus*), nur etwas lauter, wiederholt sich etwa 6—7 Mal, worauf eine Pause eintritt. Von jungen Krokodilen, die ich seit ungefähr 14 Tagen in einem Bassin lebend beobachte, habe ich in den letzten Tagen keine Laute mehr gehört. Ausserdem geben die Thiere fauchende Töne von sich, wenn man sie ärgert, z. B. am Schwanz hochhebt.

Das Auskriechen ist nicht direct abhängig vom Einsetzen der Regenzeit, und wird nicht veranlasst durch die vermehrte Feuchtigkeit des Bodens, denn die grössere Zahl der Gruben zeigte die leeren Eischalen ungefähr 14 Tage vor dem Eintritt des ersten Regenfalles. Die Entwickelung im Ei nimmt etwa drei Monat in Anspruch. Von den ersten frisch ausgeschlüpften Jungen, die beobachtet wurden, erhielt ich Kunde Mitte November.

Das eben abgelegte frische Ei lässt Folgendes erkennen.

Wie oben bemerkt hat das Ei bei wechselnder Gestalt und Grösse eine rauh gekörnelte harte Schale. Dicht darunter liegt die dicke zähe Schalenhaut, die so widerstandsfähig ist, dass das Ei nach Entfernung der Schale seine Form behält. Diese Schalenhaut besteht aus zwei Lagen, einer dickeren äusseren und einer zarteren inneren. Die äussere Schicht lässt sich in grossen Stücken bei einiger Vorsicht leicht von der inneren abziehen. S. F. CLARKE[1] schreibt, die Schalenhaut des Alligators sei in einer ringförmigen Zone in der Richtung des kleinern Durchmessers der Schale angeheftet, und erschiene das Ei schon von aussen von einer sich deutlich abhebenden weissen Zone umgeben. Hiervon ist bei vollkommen frischen Krokodil-Eiern nichts zu bemerken. Krokodil-Eier, die diese Erscheinung darboten, entwickelten sich später nicht weiter.

Das Eiweiss hat ungefähr die Consistenz von Gelée, schimmert manchmal grünlich und ist so zähe, dass man nach vorsichtiger Entfernung der Schalenhaut das ganze Ei in die Hand nehmen, hin und her rollen und von allen Seiten betrachten, selbst von einer Hand in die andere gleiten lassen kann, ohne dass es auseinander fliesst. Das Eigelb ist kugelförmig und so gross, dass es bis dicht an die langen Seiten der Schalenhaut heranreicht. Die Farbe ist etwas heller als bei Hühnereiern. Die Dotterhaut ist sehr fein, aber so zähe, dass es bei einiger Übung gelingt, das Eiweiss gänzlich abzupraepariren, bis man schliesslich nur noch das Eigelb in der Hand behält, welches dabei naturgemäss die Gestalt eines flachen runden Kuchens annimmt.

Ich muss S. F. CLARKE darin beistimmen, dass das Krokodil-Ei das zarteste und am schwierigsten zu behandelnde Object ist, welches man sich vorstellen kann, denn die eben beschriebenen Verhältnisse passen nur für ganz frische Eier, später gelingt es nur höchst selten, das Ei unverletzt zu praepariren. Ich habe mir nun so geholfen, dass ich erst die Hälfte der Eischale, dann die Hälfte der Schalenhaut entfernte, ohne das Eiweiss zu verletzen; dann suchte ich unter sanften Drehungen nach dem Embryo; war er gefunden, so öffnete ich durch einen raschen Scheerenschnitt Eiweiss und Eigelb, und liess nun den Embryo in ein Uhrschälchen langsam hineingleiten; nachher wurde die ganze Partie abgehoben und unter dem Praeparirmikroskop weiter behandelt. Trotz aller Vorsicht war in vielen Fällen jede Mühe vergeblich.

---

[1] F. C. CLARKE: The nest and eggs of the Alligator, *Alligator lucius* CUV. Zool. Anzeiger 1888 Nr. 290 p. 568.

S. F. Clarke gibt an, man könne die Lage des Embryos schon von aussen daran erkennen, dass an einer Stelle die oben besprochene ringförmige weisse Zone sich verbreitere. Für *Crocodilus niloticus* ist diess nicht zutreffend, da auch bei schlechten Eiern mit abgestorbenem Embryo eine Verbreiterung jener Zone stattfindet. Normal sich entwickelnde Eier zeigen bis zum Ausschlüpfen der Jungen in ihrem äussern Ansehen keine Spur einer Veränderung, sondern erscheinen rein weiss.

Schon jetzt eine Übersicht über den ganzen Verlauf der Embryonalentwickelung geben zu wollen, würde verfrüht sein, da meine Studien darüber durchaus noch nicht abgeschlossen sind und einer ergänzenden Untersuchung im nächsten Jahre bedürfen, denn ganz frisch abgelegte Eier sind mir leider nicht so reichlich zugegangen, wie es erwünscht gewesen wäre.

Die jüngsten beobachteten, etwa 6 Tage alten, Embryonen waren von hantelförmiger Gestalt und hatten eine Länge von 3^{mm}; das Amnion war noch nicht geschlossen. Leider ist das Object so zart, dass es mir bis jetzt nicht gelang diese Stadien unter dem Mikroskop zu untersuchen, und ich mich darauf beschränken musste, diese wie die vielleicht noch jüngeren Stadien in toto zu conserviren.

Soweit ich bis jetzt erkennen konnte, schliesst sich die Entwickelung der Krokodile eng an diejenige der Vögel an. Auffällig ist der schon sehr früh sehr lange Schwanz, der zuerst spiralig aufgerollt ist und dann später bei stärkerer Krümmung des Embryo um den Nacken geschlungen wird.

Dass der Eizahn sehr zeitig angelegt wird, wurde schon oben erwähnt.

Der Genitalhöcker legt sich schon an, wenn die Embryonen etwa 10^{mm} lang sind (in der Beugelage gemessen). Man bemerkt dann zwischen den Hinterbeinen ein stabförmiges Gebilde von etwa 1^{mm} Länge, welches aus der Kloake hervorsteht und mit dem vordern Rand derselben verwachsen ist. Zuerst liegt es der Mittellinie des Bauches parallel, wird dann später emporgerichtet und schliesslich ganz in die Kloakenöffnung hineingezogen. Erst wenn die Embryonen fast ganz ausgewachsen sind, nach etwa $2^1/_2$ Monaten, beginnt der Genitalhöcker ganz zu verschwinden, und ist nur noch sichtbar, wenn man die Lippen der Kloake auseinanderbreitet.

7. Neue Untersuchungen ostafrikanischer Schädel.

Von Rud. Virchow.

(Vorgetragen am 12. Februar: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. VIII]; — ausgegeben am 19. Februar.)

In der Sitzung vom 2. Mai 1889 konnte ich über 8 Schädel aus dem deutschen Schutzgebiete berichten, welche mir durch die Aufmerksamkeit des Dr. F. Stuhlmann zugegangen waren. Seit jener Zeit habe ich durch denselben Reisenden, der inzwischen als Lieutenant Emin Pascha's in das Seengebiet gezogen ist, eine neue Sendung von Schädeln erhalten. Von diesen stammen 5 von der Insel Zanzibar und der kleinen, nordwestlich davon gelegenen Nachbarinsel Tumbatu, 13 vom Festlande und zwar von deutschem Gebiet oder wenigstens aus der deutschen Interessensphaere.

Eine zweite grössere Sammlung hat ein anderer Reisender, Dr. Voeltzkow, eingesandt. Sie umfasst 4 Schädel von Somal und 6 von Galla, die weiter nördlich in Witu auf englischem Colonialgebiet gesammelt wurden.

Ich darf dann noch erwähnen, dass in der Zwischenzeit 5 Wadschagga vom Kilima Ndjaro in unserer Stadt weilten und dass der Führer derselben, Lieutenant Ehlers mir einen Schädel aus der Gegend von Moschi mitbrachte. Darüber habe ich seiner Zeit ausführlich berichtet.[1]

Auf diese Weise beginnt allmählich eine gewisse Kenntniss der kraniologischen Verhältnisse von Bevölkerungen, über welche wir bis dahin gar nichts wussten, und welche doch wegen des Aufeinanderstossens der verschiedensten Stämme von Süden, Westen und Norden her ein ganz besonderes Interesse gewähren. Unter den neueren Reisenden ist es vorzugsweise Johnston[2] gewesen, welcher der anthropologischen Frage ein näheres Interesse entgegengebracht und mit grosser Aufmerksamkeit die Geschichte der um den Kilima Ndjaro vorgegangenen und noch immer vorgehenden Völkerverschiebungen zu ermitteln versucht hat. Indess sind seine Erörterungen doch viel

[1] Verhandlungen der Berliner anthropologischen Gesellschaft 1889. S. 505 mit 3 Abbildungen.

[2] H. H. Johnston, Der Kilima Ndjaro. Aus dem Englischen von W. v. Freeden. Leipzig 1886. S. 372 fgd.

mehr auf linguistische und ethnographische Erwägungen gestützt, als auf eigentlich anthropologische; obwohl er die letzteren nicht vernachlässigt und manche, zum Theil recht feine Beobachtung mittheilt, so ist er doch, wie fast alle unsere Reisenden, in den anthropologischen Methoden nicht erfahren und man findet bei ihm, ausser einigen Angaben über Körperhöhen, keine Messung. In dieser Beziehung ist er über unseren, leider so früh verlorenen Reisenden, J. M. Hildebrandt, dessen Arbeiten ich in meiner früheren Abhandlung citirt habe, nicht erheblich hinausgekommen.

Immerhin kann man zugestehen, dass das Gesammtbild der in Betracht kommenden Stämme sich in erfreulicher Art klärt. Mehr und mehr grenzen sich gewisse grosse Völkerfamilien gegen einander ab, deren Verschiedenheiten freilich durch zahlreiche Vermischungen, namentlich durch die Verbindung mit Sklavinnen aus anderen Stämmen, stark getrübt werden, die sich jedoch noch immer in erkennbarer Weise auch da erhalten haben, wo die Mischung am stärksten war. Es handelt sich dabei vorzugsweise um 3 Stämme:

1. die Bantu. Sie sind fast über das ganze deutsch-ostafrikanische Gebiet verbreitet, bilden den Haupttheil seiner Bevölkerung, sind aber in zahlreiche kleine Stämmchen getheilt, deren Sitze häufig einen ganz beschränkten Bezirk umfassen und auf unseren Karten schwer zu ermitteln sind. Die Bantu gehören jener grossen ethnologischen Familie an, die vom indischen Meer bis zum atlantischen Ocean, von der Zanzibar-Küste bis Kamerun, und vom Aequator bis fast zur Südspitze Afrikas reicht. Viele Gründe sprechen dafür, dass das Seengebiet ihre Urheimath darstellt und dass sie sich von da aus nach allen Seiten, jedoch am weitesten nach Süden und Westen, ausgebreitet haben. An der Suaheli-Küste haben starke Vermischungen mit eingewanderten Arabern, geringere mit Persern und Indiern, stattgefunden; trotzdem ist ihre Sprache, das Kisuaheli, noch immer das Verständigungsmittel für weit auseinander gelegene Glieder.

2. die Massaï und die mit ihnen nahe verwandten Wakuafi, welche nach den sehr glaubwürdigen Darlegungen des Hrn. Johnston, womit auch Hr. Stuhlmann übereinstimmt, wohl nur als ein sesshaft gewordener Theil des sonst nomadisirenden Stammes anzusehen sind. Die Massaï haben sich vom Norden her, von der Gegend des oberen Nils, unter stetem Raub und Krieg südwärts geschoben und den Zusammenhang der Bantu zwischen dem Kilima Ndjaro und dem Victoria Nyanza soweit durchbrochen, dass sie jetzt westliche Nachbarn selbst von Usambara und Nguru geworden sind. Dabei haben sie aber nach den Ermittelungen des Hrn. Thomson ihr altes Gebiet im Norden festgehalten, und Hr. Johnston ist geneigt, ihre Verwandtschaft mit den

Latuka und selbst mit den Bari, also mit eigentlichen Nilstämmen, anzunehmen.

3. die Galla und Somal, anerkannt hamitische Stämme, in deren Adern noch südarabisches Blut fliesst, wenngleich stark verändert durch afrikanische Beimischungen. Die Galla gelten als Abkömmlinge früherer Einwanderer, die Somal als ein jüngerer Zuzug. Letztere nahmen lange Zeit die Küstengegenden um das Cap Gardafui bis zur Mündung des Juba ein, aber sie haben sich von da sowohl gegen das Innere vorgeschoben, als, namentlich in letzter Zeit, auch längs der Küste, so dass sie gegenwärtig schon am Tana erscheinen. Gegen Norden berühren sie sich mit den Abessiniern, gegen Westen stossen sie in harten Kämpfen auf die Galla, die gleichfalls mehr und mehr gegen den Tana vorrücken. Aber an keiner Stelle haben die Galla die Küste erreicht. Ihr Gebiet bildet einen langen Strich Landes, der im Nordosten bis in Abessinien hineinreicht und sich dann über viele Breitegrade zwischen Massaï und Somal hinzieht. Trotz aller Verwandtschaft besteht zwischen Galla und Somal Todfeindschaft.

Unsere Schädelsammlung bietet Beispiele für alle diese Stämme. Die Schädel haben den Vorzug, dass sie verhältnissmässig gut bestimmt sind, wenngleich nicht so sicher, dass jedes einzelne Stück über jeden Zweifel erhaben ist. Denn die Bestimmung beruht wesentlich auf der Angabe der Eingeborenen, zum Theil freilich auf der genaueren Kenntniss kriegerischer Zusammenstösse, bei denen die Eindringlinge erschlagen wurden. Letzterer Umstand hat leider in der Mehrzahl der betreffenden Fälle schwere Verletzungen und Zertrümmerungen zur Folge gehabt, so dass nothwendige Maasse fehlen und Restaurationen unmöglich sind. Auch den besser erhaltenen Stücken fehlen fast durchweg die Unterkiefer, weshalb der wichtige Gesichtsindex nicht berechnet werden kann. Das wird erst durch weitere Sammlungen ergänzt werden müssen.

Die Frage der Ureinwohner, welche durch die neueren Funde immer neuer Zwergvölker und zerstreuter Glieder derselben sehr gefördert worden ist, hat für das uns zunächst beschäftigende Gebiet eine geringere Bedeutung, obwohl darin gewisse Reste der alten Pygmäen nicht ganz zu fehlen scheinen. Ich möchte aber besonders bemerken, dass die in zwei Fällen, und zwar an einem Wakuafi (Nr. 4) und einem Galla (Nr. 2), nachgewiesene Nannocephalie mit der Zwergrasse schwerlich etwas zu thun hat. Hr. STUHLMANN hat für die Insel Zanzibar die Untersuchung über die Rückstände der Aboriginer praktisch aufgenommen, und ich will daher zunächst seine Mittheilungen darüber anführen.

Unter dem 24. December 1888 schrieb er mir aus Zanzibar: »Ich habe das Vergnügen, Ihnen mittheilen zu können, dass es mir gelungen ist, zwei, wenn auch sehr lädirte Schädel der Ureinwohner Zanzibars, der sogenannten »Wahadimu« zu erwerben, sowie eine Reihe von Knochen, als Unterkiefer, Bein- und Armknochen, eines dritten Individuums. Die Leute leben heutzutage noch in bedeutender Anzahl im östlichen Theile der Insel und unterscheiden sich wesentlich von den Wasuaheli, so dass einige geneigt sind, sie nicht einmal für Bantu-Neger zu halten. Die Männer, welche ich bis jetzt sah, sind recht hoch und schlank gewachsen, von dunkler, fast schwärzlicher Hautfarbe und länglich gebauten Gesichtern. Die Nase ist ganz bedeutend schlanker und schmaler, als die der Suaheli, und der Bartwuchs recht stark. Hoffentlich gelingt es mir später, Messungen an Lebenden, sowie Zeichnungen von Händen und Füssen, vielleicht auch Abgüsse, zu machen. Die von meinem Sammler, der von Hildebrandt ausgebildet ist und auch die 7 Sakalaven-Schädel gesammelt hat[1], ausgegrabenen Schädel lagen in rothem Lateritlehm, ziemlich weit vom Dorf entfernt. Nach Aussage der Leute müssen die betreffenden Gräber sehr alt sein. Es war fast nur die Schädelkapsel erhalten, doch ist wohl viel der Zerstörung den Witterungseinflüssen der Tropen zuzuschreiben. Die Bestattungsweise scheint mit der der Zanzibar-Neger übereinzustimmen, nämlich in freier Erde, aber mit einigen Brettern bedeckt.

»Die Wahadimu stehen im Ansehen von grossen Zauberern; sogar Seid Bargasch, der verstorbene Sultan, glaubte fest daran. Sie sollen sich und andere Menschen in Thiere (Panther und Katze), in Bäume und auch in die leichten, aus frischen Palmenblättern geflochtenen Körbe verwandeln können.

»Ihre Sprache weicht vom Kisuaheli ziemlich ab, stimmt aber nahezu mit dem Dialekt auf Tumbatu, Pemba und Mafia überein, so dass es sich wohl um einen Zweig des grossen Bantu-Stammes handelt, der die Inseln bewohnte und sich vielleicht mit asiatischen Fremdlingen (Persern?) vermischt hat.«

Bei der Absendung der gefundenen Gebeine an mich schrieb Hr. Stuhlmann unter dem 4. Mai 1889 aus Zanzibar: »In Betreff der Wahadimu kann ich meine früheren Mittheilungen noch dahin ergänzen, dass die Leute, besonders aber die Watumbatu (von einer kleinen Insel, direct an Zanzibar im Norden gelegen) von einer persischen Abstammung sprechen (Scherasi katka Ajim, arab. für Persien)

---

[1] Monatsberichte der K. Preuss. Akademie der Wiss. aus dem Jahre 1880. Berlin 1881. S. 995.

und dass auch seiner Zeit eine persische Einwanderung stattfand. Wenn so eine kleine Beimischung fremden Blutes vorhanden sein kann, so muss ich sie doch für Bantu-Neger halten. Ihre Sultane, die den Zanzibar-Sultanen ein bedeutendes Kopfgeld jährlich zahlen mussten, die sogenannten Muniem-ku's (d. h. Herr der Grösse der Suaheli), stammen nachweislich aus einer Scherifen-Familie aus Hadramaut, den Gemali-led-Baharum. Die beiden letzten waren die Brüder Hassan und Achmed, welch letzterer im Anfange der 60er Jahre starb und nur drei Töchter hinterliess, von denen die älteste an den Araber Mohammed-bin-Sef verheirathet ist, welcher jetzt den alten verfallenen Palast in Dunga (im Centrum der Insel) wiederherstellen lässt. Wahadimu-Sultane giebt es jetzt nicht mehr. — Dass die Leute wegen Zauberei und Kenntniss von Giften bekannt sind, schrieb ich Ihnen wohl schon. Dem Said Bargasch erschien ein Mhadimu in Gestalt einer Katze (!). Auf ein Gift (punju genannt) fahnde ich jetzt. Es wird aus einer Wurzel und »Chamaeleon-Leber« hergestellt. Wenn Leute daran riechen, bekommen sie Lungenkrankheiten, wenn sie nicht in 40 Tagen ein auch geheimes Gegengift gebrauchen. Der Genuss der geringsten Menge soll nach zwei Tagen unter furchtbaren Hustenanfällen zum Tode führen. Ich glaube, dass etwas Wahres daran ist«.

Die mir zugegangenen Knochen zerfallen nach den Aufschriften in die, von Hrn. Stuhlmann deutlich bezeichneten Ortsgruppen:

1. Wahadimu von der Insel Zanzibar selbst, gesammelt im December 1888.

Leider ist darunter eigentlich nur ein einziges, ganz unversehrtes Stück: ein offenbar männlicher Unterkiefer. Da derselbe nach dem Bericht mit den sonstigen Skeletknochen dem »dritten« Individuum angehört, so will ich darüber zunächst etwas sagen. Alle diese Knochen sind ungewöhnlich braun und verhältnissmässig gross. Wahrscheinlich gehört auch ein mit Dunga bezeichnetes Stück eines Parietale dazu, welches leider für die Bestimmung der Schädelform nichts ergiebt. Der Unterkiefer ist sehr eigenthümlich: er hat ein starkes und steiles Mittelstück mit wenig vortretendem, gerundetem Kinn und erheblich prognathem Alveolarfortsatz. Die Zähne sind gross, die Molares III scheinbar schon ausgefallen und ihre Alveolen verstrichen, die Kronen der anderen Backzähne abgeschliffen, der Molaris II links cariös. Die Seitentheile des Kiefers niedriger und schwächer, die Aeste niedrig und sehr schräg angesetzt, am unteren Rande kein erheblicher Vorsprung des Winkels. — Die übrigen Knochen, zwischen denen sich ein Bruchstück von der Rippe eines grösseren Säugethiers, anscheinend eines Rindes, befindet, bestehen hauptsächlich aus Extremitätenknochen, von denen kein einziger ganz unversehrt ist. An den meisten sind die Enden (frisch) abgebrochen und nur in Fragmenten vorhanden. Sie entsprechen nach Wuchs und Stärke den Knochen eines kräftigen Mannes. Der eine Oberschenkel misst, obwohl ihm Kopf und Condylen fehlen, noch 410^{mm}. Von den am besten erhaltenen Ulnae hat die eine, trotz des Mangels der Condylen, eine Länge von 285^{mm}. Am meisten Interesse bietet das eine Os humeri, dessen unteres Ende perforirt ist, und die Tibia, welche im höchsten Maasse platyknemisch ist: sie besitzt gar keine hintere Fläche. Dagegen sind alle anderen langen Knochen sehr gerundet, selbst die Fibula und die Vorderarmknochen ohne ausgeprägte Rinnen. Die Oberarmdiaphyse wenig gedreht.

Von den beiden Schädeldächern, welche anderen Individuen gehört haben, trägt das eine die Aufschrift: Mopopoe, östlicher Theil der Insel, December 1888. Es ist ziemlich vollständig in seinen oberen Theilen. Seine Länge beträgt 181, seine Breite 127^{mm}, woraus sich ein dolichocephaler Index von 70.2 berechnet. Es scheint einer jugendlichen Person angehört zu haben, ist sehr leicht, dünn und mit wohl ausgebildeten Tubera frontalia und parietalia ausgestattet. Es ist lang und niedrig und zeigt eine weit vortretende Oberschuppe am Hinterkopf, der durch eine um den unteren Theil der Squama herumlaufende flache Rinne wie eingedrückt erscheint. An der Spitze der Lambdanaht ein unregelmässiger Schaltknochen, der bis in die Sagittalis hineinreicht; ausserdem in dem rechten Schenkel der Lambdanaht ein grösserer Nahtknochen mit stark zackigen Rändern.

Das zweite Schädeldach, mit der Aufschrift: Tschorane bei Tschuaka, December 1888, ist weder vorn, noch hinten vollständig, hat aber noch eine gerade Länge von 180^{mm}. Es ist stark gebräunt, lang gestreckt und niedrig, mit vortretendem Hinterhaupt und zackigen Nähten.

So wenig sichere Merkmale sich aufstellen lassen, so gewinnt man doch den Eindruck, dass die Wahadimu einer dolichocephalen, prognathen, kräftigen Rasse angehört haben, bei der Platyknemie und Durchbohrung der Fossa olecrani vorkam.

2. Wa-Tumbatu von der kleineren Insel im Nordwesten von Zanzibar.

Hierhin gehören zwei, ziemlich gut erhaltene Schädel.

Nr. 1 (Nr. 25 des Verzeichnisses des Hrn. Stuhlmann) ist im September 1889 auf der Insel selbst gefunden worden. Er macht den Eindruck, dass er längere Zeit an der Luft gelegen hat, denn seine Oberfläche ist stark gebleicht, blättert vielfach ab, und seine Nähte sind stark gelockert. Trotzdem ist er noch gut messbar.

Er ist ein grosser, männlicher Schädel von 1520 ccm Capacität; sein horizontaler Umfang misst 530, der sagittale 396 mm. Seine Form ist hypsimesocephal (Längenbreitenindex 78.7, Längenhöhenindex 76.5), seine Oberfläche voll gerundet, namentlich hinten. Nur die Schläfen sind etwas enge. Die in ihren oberen Theilen stark gewölbte Stirn zeigt fast gar keine Wülste; sie hat eine mässige Breite (94 mm). Das Gesicht, dem leider der Unterkiefer fehlt, ist breit und verhältnissmässig niedrig. Die Orbitae gross und in der Diagonale stark ausgeweitet; ihr Index (89.7) hypsikonch. Die Nase hoch angesetzt, fast gerade, mesorrhin (47.9). Der Kiefer trotz geringer Grösse des Alveolarfortsatzes stark prognath. Der Gaumen breit und die Zahncurve hufeisenförmig; trotzdem der Index (66.6) leptostaphylin.

Nr. 2 (Nr. 26 des Verzeichnisses) gehörte einem M'Tumbatu an, dessen Körper am 1. November 1889 bei Pangani ausgegraben wurde. Manche Merkmale könnten dafür sprechen, dass es ein weiblicher Schädel sei; insbesondere fehlen die Wülste der Orbitalränder und des Nasenfortsatzes fast vollständig. Indess entscheidet hier in erster Linie die Anamnese. Die Knochen sind gelblichweiss, sehr brüchig, an der Oberfläche durch Pflanzenwurzeln vielfach erodirt, aber sie kleben nicht an der Zunge. An der Mitte der Stirn liegt eine Depression, deren Ansehen an Syphilis erinnert. Nähte wenig gezackt, nur die Coronaria über dem Stephanion mit längeren Zähnen besetzt. Beiderseits an den unteren Seitentheilen der Coronaria Synostose; auch an dem hinteren Abschnitt der Sagittalis, an welchem sehr schwache Emissarien liegen, beginnende Verwachsung. Die Capacität (1300 ccm) ist mässig; die Form orthomesocephal (Breitenindex 76.8, Höhenindex 74.0) und sehr regelmässig. Der Lambdawinkel flach, die Oberschuppe breit ausgelegt. Unterkiefer fehlt. Das Mittelgesicht ziemlich hoch (76 mm), der Jochbogen wenig abstehend (Distanz 124 mm). Orbitae hoch und in der Diagonale ausgeweitet, hyperhypsikonch (Index 94.7). Die Nase eingedrückt, trotzdem mesorrhin (Index 48.9). Der Alveolarfortsatz gross und sehr prognath. —

Abgesehen von der Verschiedenheit in der Grösse und in der Höhe zeigen beide Schädel sehr viel Übereinstimmung. Ich will in dieser Beziehung insbesondere auf die ganz ungewöhnliche Entwickelung des Hinterkopfes aufmerksam machen. Die horizontale Länge des letzteren beträgt bei Nr. 1 37.7, bei Nr. 2 30.9 der Gesammtlänge, — ein um so mehr auffälliges Verhältniss, als die basilare Länge, gemessen nach der Entfernung des äusseren Gehörganges von der Nasenwurzel, bei Nr. 1 nur 99, bei Nr. 2 101 mm beträgt und gegenüber der Mehrzahl der vorliegenden Schädel erheblich zurückbleibt. Ob damit eine Bestätigung der von Hrn. STUHLMANN erwähnten

Möglichkeit eines persischen Einflusses gegeben ist, mag vorläufig dahin gestellt bleiben. Jedenfalls scheint eine nähere Beziehung zu den Wahadimu kaum vorzuliegen. Auch findet sich, von anderen Merkmalen abgesehen, bei keinem der ausgemachten Bantu-Schädel eine Capacität, wie bei dem ersten M'Tumbatu, von 1520^{ccm}, und selbst der geringere Rauminhalt von 1300^{ccm} bei dem zweiten Individuum wird nur von einem Bantu unserer Reihe, dem M'Kamba Nr. 2, übertroffen.

Wenden wir uns nun zu den

Bantu-Schädeln.

Diese bieten ein besonderes Interesse dadurch, dass sie aus einem nicht allzu ausgedehntem Territorium gesammelt sind, und dass für einzelne Stämme eine Mehrzahl von Schädeln vorhanden ist. Zwei dieser Localitäten sind genügend bekannt. Es sind dies die Wohnsitze der Wa-Digo und der Wa-Bondeï, welche in dem niedrigeren Vorlande zu suchen sind, das sich von der Küste bis zu den Bergen von Usambara erstreckt.

Weniger sicher ist die Heimath der Wa-Kamba. Der gegenwärtige Hauptsitz dieses Stammes, das Land Ukambani, liegt ziemlich weit nördlich in der Nähe des Kenia am Asi-Flusse[1]. Indess giebt es auch Wa-Kamba in den Bergen von Nguru[2]. Waitz[3], der sie ausführlich erwähnt, setzt sie auf seiner ethnographischen Karte von Afrika zwischen die Wanika und die Tschaga in das Hinterland von Usambara, obwohl er sie zu Usambara in einen bestimmten Gegensatz stellt. Ob die Waschambaa, die neuerlich Hr. O. Baumann[4] erwähnt, etwas mit ihnen zu thun haben, weiss ich nicht. Jedenfalls werden wir die Schädel einer Gruppe des deutsch-ostafrikanischen Gebiets zuweisen müssen, da Hr. Stuhlmann auf einem derselben die bestimmte Erklärung »hinter Tanga« eingeschrieben hat. Künftige Forscher werden uns hoffentlich darüber aufklären, ob die nördlichen Wakamba oder Akamba am Kenia mit den uns hier beschäftigenden einen historischen Zusammenhang haben.

Leider fehlt es an jeder Angabe über den Stamm, zu dem die beiden Schädel von Pangani gehörten. Räumlich würden die Wabondei am nächsten stehen, indess zeigt der einzige, bestimmt constatirte Schädel eines M'Bondei nicht geringe Verschiedenheiten.

---

[1] Johnston a. a. O. S. 375. 407.

[2] Brix Förster, Deutsch-Ostafrika. Geographie und Geschichte der Colonie. Leipzig 1890. S. 144.

[3] Theodor Waitz, Anthropologie der Naturvölker. Leipzig 1860. II. 423.

[4] Verhandlungen der Gesellschaft für Erdkunde zu Berlin. 1891. XVIII. S. 80.

1. Der Schädel eines M'Bondei (Nr. 24).

Derselbe hat eine geringe Capacität (1240^{ccm}), macht aber trotzdem durch die Grobheit der Züge, namentlich des Gesichtes, einen grösseren Eindruck. Er hat sicher einem Manne angehört, wie der mächtige Nasenfortsatz und die starken, geradezu hyperostotsischen Orbitalwülste darthun. Die Form ist chamaedolichocephal (Breitenindex 72.6, Höhenindex 69.3), auch schon für die grobe Betrachtung lang und niedrig. Die Länge des Hinterhauptes (Index 30.1) trägt ersichtlich mit dazu bei, denn die ganze Hinterhauptsschuppe steht weit vor und die Lambdanaht ist mit zahlreichen Ossicula Wormiana durchsetzt. Die Oberschuppe bildet fast allein den vorspringenden Bogen, während die Unterschuppe beinahe horizontal gestellt ist. Grosse Plana temporalia. Gute Entwickelung der Schläfengegend. Das Gesicht ist hoch und breit; es gewinnt durch das Vorstehen der Wangenbeine und Jochbogen ein fast grönländisches Aussehen. Die Orbitae sind gross, nach aussen und unten ausgeweitet, mässig hypsikonch (86.8); die Fissura orbitalis inferior ausserordentlich weit. Die Nase ist ganz platt, die Nasenbeine oben fast gerade abgeschnitten, auf der Fläche sanft eingebogen, Index (51.0) mesorrhin, ziemlich hart an der Grenze der Platyrrhinie. Oberkiefer gross, voll, keine Fossae caninae, Alveolarfortsatz stark und prognath. Gaumen sehr tief, leptostaphylin (Index 69.6).

2. Die Schädel der Wadigo.

Nr. 1. (Verzeichniss Nr. 22), im Mai 1889 erworben, ist sehr defect, da ihm das ganze Gesicht fehlt. Er hat ausgesprochen weibliche Form; die niedrige gerade Stirn biegt schnell in die gestreckte Scheitelcurve über. Wahrscheinlich gehörte er einer alten Frau an, denn die Nähte sind fast durchweg verwachsen. Capacität gering (1205^{ccm}). Form chamaemesocephal (Breitenindex 79.8, Höhenindex 69.6). Es ist dabei zu bemerken, dass diess, ausser dem oben erwähnten M'Bondei, der einzige chamaecephale Schädel in der ganzen Sammlung, und dass auch sein Hinterhauptsindex (26.7) der zweitkleinste von allen ist.

Nr. 2 (Verzeichniss Nr. 23), schwer, männlich, mit starken Orbitalwülsten und sanft ansteigender Stirn. Capacität gering (1285^{ccm}). Form hypsidolichocephal (Breitenindex 71.3, Höhenindex 79.2), also gänzlich verschieden von der des weiblichen Schädels Nr. 1. Die ganze Oberfläche, namentlich an den muskelfreien Stellen, ist mit einer ausgedehnten Hyperostose überzogen, welche am stärksten an der Spitze der Hinterhauptsschuppe und den anstossenden Theilen der Parietalia ist. Rechts neben der Sagittalis darin ein Paar unebene vertiefte Stellen (Syphilis?). Das linke Emissarium parietale fehlt, das rechte ist vergrössert. Zahlreiche Bildungsanomalien: links an der Schläfe ein grosser trennender Processus frontalis squamae temporalis, rechts die Spitze der Ala sphenoidealis sehr schmal, so dass sich die Schläfenschuppe dem Stirnbein nähert. Am Hinterhaupt ein grosses Os triquetrum, dessen untere Naht fast bis in die Gegend der Sutura transversa reicht. Ausserdem im linken Schenkel der Lambdanaht ein grosser Schaltknochen. Das Mittelgesicht niedrig (66^{mm}) und verhältnissmässig breit (Jochbogendistanz 128^{mm}). Orbitae rundlich eckig, mesokonch (82.5). Nase sehr hoch, aber schwer verletzt, hyperplatyrrhin (Index 59.6). Grosser Alveolarfortsatz mit Prognathismus.

3. Die Schädel der Wakamba.

Es sind ihrer vier vorhanden, darunter vielleicht ein weiblicher. Sie bieten im Übrigen viel Übereinstimmendes dar.

Nr. 1 (Nr. 18) ist leider wegen einer starken Verletzung am Foramen magnum, wahrscheinlich einer Hiebwunde, nicht durchweg zu bestimmen. Er erscheint jedoch lang und niedrig, mit breitem niedrigem Hinterhaupt. Der Breitenindex ist mesocephal (76.9), der Ohrhöhenindex (64.3) deutet auf einen orthocephalen Längenhöhenindex. Ala sphenoidealis gross und viereckig. Laterale Synostose der Coronaria. Gesicht mässig hoch (70^{mm}). Orbitae sehr gross, gerundet, in der Diagonale etwas ausgeweitet, hyperhypsikonch (92.7). Nase sehr platt, die Nasenbeine ganz flach, wenig eingebogen, auch die Spitze wenig vortretend, fast gerundete Apertur, Index 56.0, hyperplatyrrhin. Gaumen kurz und breit, indess doch noch leptostaphylin (Index 78.0).

Nr. 2 (19), ein schwerer männlicher Schädel mit Orbitalwülsten, die freilich sehr flach sind, und starken, jedoch nicht hoch reichenden Plana temporalia. Capacität grösser, als bei den meisten: 1370^{ccm}, entsprechend der Weite des horizontalen Umfanges (522^{mm}). Form hypsimesocephal (Breitenindex 78.9, Höhenindex 76.7). Mässige Hinterhauptslänge (Index 29.4), aber grosses und breites Hinterhaupt. Stirn niedrig und fliehend. An jeder Schläfe ein schräg gestelltes Epiptericum mit starker Verschmälerung der Ala, so dass die Schläfenschuppe nur noch $4-5^{mm}$ von dem Stirnbein absteht. Weites Foramen magnum. Orbitae gross, in der Diagonale ausgeweitet, hyperhypsikonch (94.7). Nase gross, von der in Nr. 1 ganz verschieden; die Stirnnasennaht sehr hoch liegend, die Nasenbeine am Ansatz verdickt und verbreitert, im weiteren Verlaufe wenig eingebogen, aber allmählich vortretend, Apertur hoch, Index 48.2, mesorrhin. Starke Prognathie, grosser Alveolarfortsatz. Zwischen den mittleren Schneidezähnen ein grosses, scheinbar künstliches Trema.

Nr. 3 (20). Kleiner männlicher Schädel von nur 1225^{ccm} Capacität und 496^{mm} Horizontalumfang. Stirn unten breit (100^{mm}), oben schmal, die Mitte voll gewölbt, der hintere Theil des Stirnbeins langsam ansteigend zu einer langen Scheitelcurve. Form hypsimesocephal (Breiten- und Höhen-Index gleich, 73.7). Alae schmal. An der Spitze der Hinterhauptsschuppe ein grosses, abgetrenntes Os quadratum, das nach unten durch eine stark gezackte Naht begrenzt wird. — Orbitae gross, hoch, fast viereckig, indem nach oben und aussen eine Ecke gebildet ist; Index 100, ultrahypsikonch; sehr weite Orbitalfissuren. Nase sehr breit und flach, an der Längsnaht eine feine schwache Crista, die Knochen fast gar nicht eingebogen, Apertur gross und fast viereckig, Index 55.1, platyrrhin. Grosser Alveolarfortsatz mit starker Prognathie. Die Zahncurve unregelmässig, indem rechts in der Gegend des II Praemolaris eine Einbiegung nach innen stattfindet und hier ein ganz kleiner Zahn, fast wie ein Embolus, an Stelle des Praemolaris, steht. Gaumen gross und tief, leptostaphylin.

Nr. 4 (21), ein vielleicht weiblicher Schädel von sehr sanfter Form, länglich, gestreckt, die Stirn ziemlich gerade, klein, nur 87^{mm} breit, in der Mitte in kindlicher Weise vorgewölbt, ohne jede Spur von Wülsten. Die Weisheitszähne sind voll entwickelt. Die Capacität beträgt 1245^{ccm}, der Horizontalumfang 494^{mm}. Form orthodolichocephal (Breiten- und Höhen-Index 73.7). Auf dem linken Parietale eine grosse flache Exostosis eburnea. Mässige Stenokrotaphie. Orbitalindex 83.8, mesokonch. Nase breit, flach, gedrückt, nur wenig eingebogen, Apertur klein, unten fast gerade, nach oben gerundet; Index 61.9, ultraplatyrrhin. Schaufelförmige Prognathie, indem die Pars incisiva fast horizontal herausgestreckt ist und die Alveolen der Schneidezähne gerade nach vorn gerichtet sind. Übrigens ist der Alveolarfortsatz dünn und kurz. Von den Nasenlöchern her zieht sich eine Art von praenasalen Furchen darüber fort.

Möglicherweise ist die grosse Abweichung dieses weiblichen Schädels dadurch zu erklären, dass die einstige Trägerin desselben aus einem anderen Stamme entnommen war. Während die 3 Wakamba-Männer mesocephal und zugleich hypsicephal und hypsikonch waren, ist diese Frau orthodolichocephal und mesokonch gewesen. Ganz besonders auffällig ist aber die Prognathie dieses Schädels, welche weit über das Maass aller anderen Schädel dieses Gebietes hinauszugehen scheint.

4. Die Schädel von Pangani.

Sie sind ohne genauere Stammesbezeichnung, tragen nur das Datum vom 1. November 1889. Beide sehr gut erhalten, verhältnissmässig frisch. In Nr. 29 war noch eine reichliche Menge stinkender, angetrockneter Hirnmasse enthalten. Da ich nichts Genaueres über sie weiss, so beschränke ich mich auf einige allgemeine Angaben.

Nr. 1 (28). Sehr schön gebildeter männlicher Schädel ohne andere Abweichungen, als eine diffuse Hyperostose der muskelfreien Theile der Oberfläche. Geringe Stirnwülste. Hohe Plana temp. Niedriges Gesicht, auch niedrige Orbitae und Nase. Ziemlich entwickelter Prognathismus. Capacität 1320^{ccm}. Form des Schädels orthodolichocephal. Orbitae hypsikonch, Nase platyrrhin, Gaumen leptostaphylin.

Nr. 2 (29). In vielen Stücken ähnlich, kräftig, gross, nur die Schläfen etwas eng und die Schläfenschuppen abgeplattet, die Alae eingefaltet, in schmale Spitzen ausgezogen, daher die Schläfenschuppen den Stirnbeinen sehr genähert (Stenokrotaphie). Beginnende Synostose der Sagittalis; Emissarien klein und der Naht genähert, zum Theil mit elfenbeinernem Osteophyt bedeckt. Auch die Spitze der Lambdanaht beginnt zu verwachsen. Gewaltige Warzenfortsätze. Gesicht etwas niedrig, Orbitae hoch und gross, am oberen Orbitaldach Stellen mit grobporöser Hyperostose. Nase etwas schmal, stark eingebogen. Apertur unten weit. Kräftige Prognathie. Capacität 1370^{ccm}. Form des Schädels hypsidolichocephal. Orbitae hypsikonch, Nase mesorrhin, Gaumen leptostaphylin. —

Wir wenden uns dann zu den

Wakuafi-Schädeln.

Hr. Stuhlmann schrieb mir unter dem 4. Mai 1889 über die Erwerbung derselben Folgendes:

»Gestern Abend brachte mir mein früherer Führer 4 Schädel vom Festlande nach einer Abwesenheit von etwa 6 Monaten. Er behauptet mit absoluter Sicherheit, dass es Köpfe von Wakuafi seien. Einer (Nr. 17) hat eine von den anderen sehr abweichende Form und kommt mir etwas verdächtig vor; einer zeichnet sich durch offene Frontalnaht aus; zwei Exemplare sind arg verletzt. Die Wakuafi, von denen ich im Innern einige sah, wohnen zerstreut von den nordwestlichen Usegua-Gegenden an bis über den Baringo-See hinaus. Es sind schlanke Leute mit dünnen Nasen und Lippen, die auch in Kleidern, Schmuck u. A. von Bantu-Negern abweichen. In einem kleinen Bericht über meine Reise an die Hamburger geographische

Gesellschaft habe ich die Leute geschildert. Ich glaube, dass es sich um sesshaft gewordene, Ackerbau und Viehzucht treibende Massaï-Völker handelt, die vielleicht etwas Bantu-Beimischung hier und dort haben. Die von mir gesehenen Leute sprachen nur die Massaï-Sprache. Die Schädel sollen von einem Ort stammen, der eine Tagereise nördlich vom Kilindi Berg in Ost-Unguru liegt«.[1]

Wie das vorige Mal die Massaï, so stellen dieses Mal die Wakuafi den am wenigsten geeigneten Bestandtheil der Sammlung dar. Von den 4 Schädeln ist nur ein einziger so weit erhalten, dass er zur Vergleichung voll verwendet werden kann; von dem zweiten ist nur die eigentliche Schädelkapsel erhalten; bei den beiden anderen sind auch von dieser nur Fragmente vorhanden. Auch darin wiederholt sich die frühere Erfahrung, dass die Schädel vorzugsweise jugendlichen Personen angehört haben und dass sie durch Zartheit des Baus und sonstige Gestalt den Eindruck weiblicher Formen erregen. Eine weitere Vervollständigung des Materials wäre daher gerade in dieser Richtung höchst erwünscht.

Nr. 1 (14 des Verzeichnisses) gehörte nach meiner Auffassung einer jungen weiblichen Person an; die Zahnkronen sind noch ganz frisch. Der Schädel hat einige Zeit in feuchtem Busch gelegen, denn seine Basis ist ganz grün geworden. Bis auf die linke Schläfenschuppe und den Unterkiefer ist er ziemlich vollständig. Er hat die nicht unbeträchtliche Capacität von etwa 1342^{ccm}, jedoch geringere Umfangsmaasse. Seine Form ist hypsidolichocephal (Breitenindex 74.9, Höhenindex 77.2) bei beträchtlicher occipitaler Länge (Index 30.4). Er erscheint gestreckt, mit vollem Hinterhaupt, ziemlich regelmässig gebaut. Nirgends stärkere Wülste. Gesicht niedrig und zart, aber nicht schön. Orbitae mässig gross, durch diagonale Ausweitung ganz schief, Index 88.9, hypsikonch. Nase oben schmal, im Anfange eingebogen, ganz ohne Rücken, nach unten vortretend, die Nasenbeine am Ansatz stark verbreitert; Index 45.8, leptorrhin. Oberkiefer sehr prognath.

Nr. 2 (15) ist eine blosse Calvaria, die jedoch das Besondere darbietet, dass sie künstlich abgeschlagen ist, wahrscheinlich um als Trophäe oder Trinkschale zu dienen. Nachträglich ist noch die Hinterhauptsschuppe verloren gegangen. Das Stück stammt von

---

[1] Es ist mir ein Separatabdruck des Berichtes des Dr. Stuhlmann »über eine Reise durch Usegua und Ungúu (17. August — 6. October 1888)« aus den Mittheilungen der Geographischen Gesellschaft in Hamburg 1887/88 zugegangen, in welchem auf S. 25 die Lage des Berges Kilindi geschildert wird. Nach der beigegebenen Karte liegt derselbe hart am östlichen Ufer des Rukugura, ungefähr unter 5°30′ S. Breite und 37°33′ Ö. Länge.

einem jugendlichen Individuum, besitzt eine grösste Parietal-Breite von 131^{mm}, eine Sutura frontalis persistens und rechts ein Epiptericum; es hat eine leicht klinocephale Gestalt.

Nr. 3 (16) ist ein Theil einer kindlichen Calvaria, an welcher das rechte Parietale und die Squama fehlen. Über die Mitte der Stirn zieht eine schwache Crista. Links ein grosser Proc. front. squamae temp.

Nr. 4 (17), gleichfalls jugendlich und vielleicht weiblich, besteht aus der Schädelkapsel ohne Gesicht. Dieselbe ist nannocephal: Capacität 1140^{ccm}, Horizontalumfang 486, Sagittalumfang 336^{mm}. Form orthobrachycephal (Breitenindex 80.8, Höhenindex 74.9). Die Breite des Schädels wird vorzugsweise durch die vortretenden Tubera parietalia bedingt. Stirn ganz rundlich, die Mitte weit vorgewölbt, sehr platt. Links etwas Stenokrotaphie mit Vertiefung der Stelle, rechts sehr schmale Ala sphenoidealis. Grosses Os quadratum an der Spitze der Hinterhauptsschuppe. Starke Muskel- und Sehnenansätze an der Basis, namentlich um das grosse Hinterhauptsloch. —

Auch bei den Wakuafi-Schädeln tritt der grosse Gegensatz des Weiberschädels (Nr. 4) in auffälliger Weise hervor und es dürfte zweifelhaft erscheinen, ob dieser Schädel zu der ethnologischen Feststellung des Typus überhaupt verwendbar ist. Besonders ist zu erwähnen, dass dies der einzige brachycephale Schädel der Sammlung ist. Im Übrigen macht sich auch diesmal die ungewöhnliche Frequenz von Bildungsfehlern, sowohl in der Schläfengegend, als am Hinterhaupt, bemerkbar. Eine Vergleichung dieser Schädel mit den früher von Hrn. Stuhlmann geschickten Massaï ist wenig fruchtbar, da auch damals nur sehr defecte Stücke geliefert werden konnten. Geringe Capacität (1200^{ccm}), Dolichocephalie, Hypsikonchie, Prognathismus konnte auch damals festgestellt werden, dagegen ergab das einzige erhaltene Gesicht Platyrrhinie. Die Höhe variirte, doch fand sich in keinem Falle Hypsicephalie.

Es erübrigt jetzt noch die verhältnissmässig grosse Zahl von

Hamiten-Schädeln.

Die Mehrzahl derselben, nämlich 4 Somal und 6 Galla, verdanke ich Hrn. Voeltzkow, der sie in Wituland an bekannten Kampf- und Begräbniss-Plätzen 1889—90 hat sammeln lassen. Ihr Erhaltungszustand ist sehr verschieden. Die Somal-Schädel sind durchweg sehr verwittert und brüchig; sie machen den Eindruck, dass sie längere Zeit an der Luft gelegen haben. Die Galla-Schädel haben eine festere Beschaffenheit, aber leider zeigen auch sie eine Eigenschaft, die bei den Somal im höchsten Maasse hervortritt, dass nämlich die Zahnränder der Alveolarfortsätze tief abgerieben sind. Wie es scheint, ist dies bei dem Transport der Schädel zur Küste geschehen. Unterkiefer sind ein Paar bei den Somal vorhanden, wenn auch recht verletzt, aber nur einer passt etwas genauer. Von den Galla hat keiner einen Unterkiefer.

1. Die Somal.

Bei ihnen ist es schwer, die Geschlechter einigermaassen zu bestimmen, wie gleich der erste Fall lehren wird.

Fig. 1.

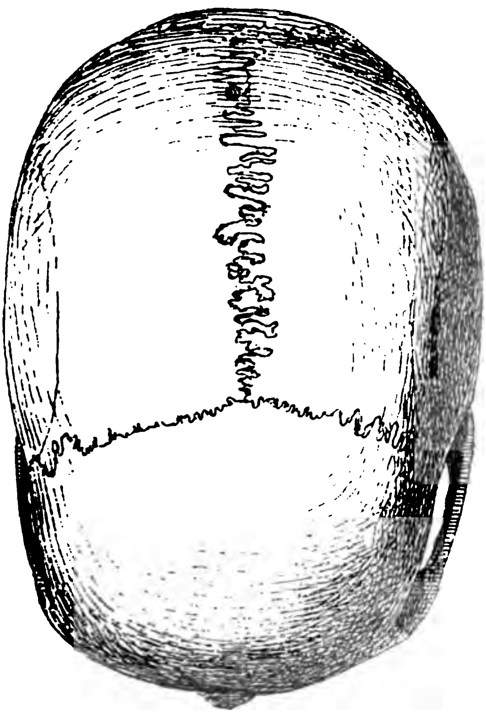
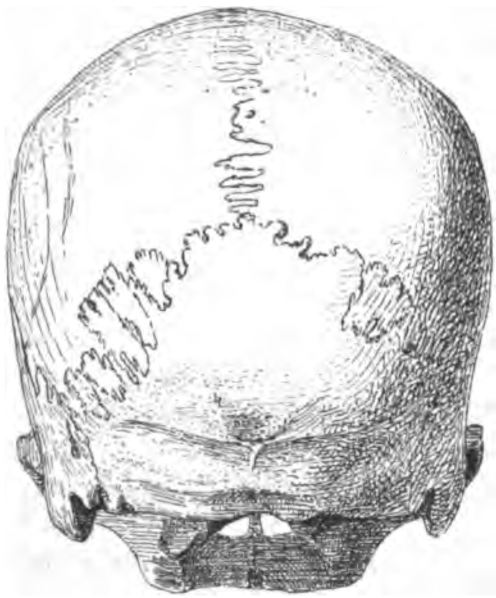
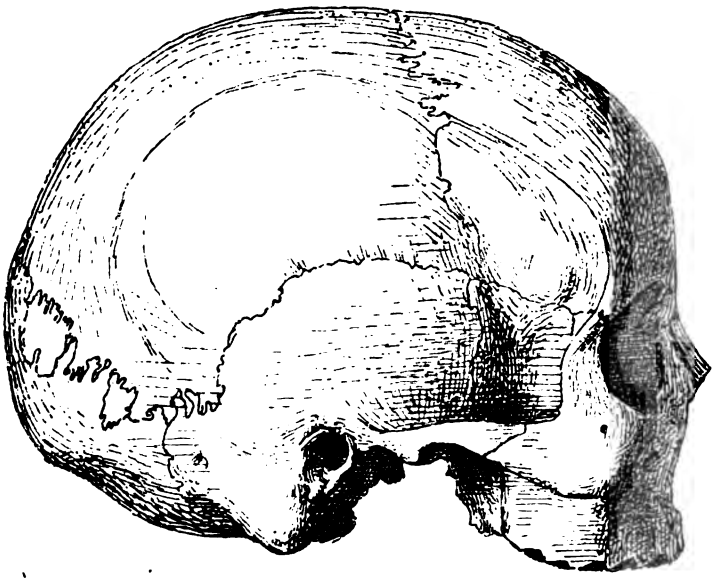


Fig. 3.



Nr. 1 (Fig. 1 — 3) ist nach meiner Meinung ein männlicher Schädel, obwohl fast gar keine Muskelansätze und Wülste von Bedeutung vorhanden sind. Aber die Formen sind überall stark, die Nähte grob gezackt, an den Hinterhauptsnähten starke Wormsche Beine (Fig. 2 u. 3), an Stelle der Protub. occip. ext. eine Grube. Plana temporalia hoch, die Tubera pariet. überragend, hinten bis an die Lambdanaht reichend. Alae gross. Stirn und Hinterhaupt voll. Capacität 1330^{ccm}. Horizontalumfang 531, Sagittalumfang 387^{mm}. Form (Fig. 1 u. 2) orthodolichocephal (Breitenindex 72.2, Höhenindex 74.4). Geringe Hinterhauptslänge: Index 27.2. Gesicht eher niedrig. Augenhöhlen gross, hoch und schmal, hypsikonch (89.7). Nase ganz europäisch, schmal, der Rücken vortretend, leicht gewölbt (Fig. 2), Index 47.2,

Fig. 2.



fast leptorrhin. Ganz kleiner, scheinbar orthognather Alveolarfortsatz. Dieser Schädel dürfte ungefähr als typisch anzusehen sein. Wegen des Unterkiefers vergl. Nr. 3.

Nr. 2 ist sehr ähnlich, aber sehr defect, gross und voll. Capacität 1480^{ccm}. Auch er hat keine eigentlichen Wülste, aber einen sehr starken Nasenfortsatz und ist wohl männlich. Form gleichfalls ortho-dolichocephal (Breitenindex 72.0, Höhenindex 75.1). Langer und voller Hinterkopf. Gesicht ziemlich hoch. Orbitae sehr hoch, hypsikonch (90.2). Nase gleichfalls hoch, ausgemacht leptorrhin (44.2). Etwas grösserer Alveolarfortsatz; Prognathie.

Nr. 3, gleichfalls ähnlich, aber von mehr weiblicher Form und jünger. Alle Zahnkronen noch intakt, gross. Gaumen sehr tief und breit. Capacität 1320^{ccm}, Index orthomesocephal, jedoch dicht an der Dolichocephalie (Breiteindex 75.6, Höhenindex 73.9). Am Hinterhaupt grössere Wormsche Schaltknochen. Ein Epiptericum in der hinteren Ecke der linken Schläfengrube. Gesicht niedrig, ebenso Orbitae hoch mit diagonaler Ausweitung, hypsikonch (87.8). Nase oben schmal, stark vortretender Rücken mit scharfem First, Index mesorrhin (50.0). Alveolarfortsatz stark, Zähne sehr gross, Gaumen tief. — Ein fraglicher Unterkiefer ist klein, das Kinn rundlich vortretend, fast progenaeisch, geringer Prognathismus des Zahnrandes, Äste niedrig, breit und schräg gestellt. Backzähne bis auf den Molaris III links sehr ausgeschliffen. (Vielleicht besser zu Nr. 1.)

Nr. 4, einem noch jugendlichen Individuum, scheinbar einem weiblichen, angehörig. Capacität 1375^{ccm}, Horizontalumfang 484^{mm}. Form hypsimesocephal (Breitenindex 77.6, Höhenindex 80.0). Stirn etwas schräg gestellt, wobei der ganze Nasenfortsatz abgeplattet aussieht. Links ein sehr feiner, aber ganz trennender Proc. front. squam. tempor., unter welchem die Spitze der Ala sphen. sehr verjüngt nach vorn endet; rechts ein grösseres querliegendes trennendes Epiptericum. In der Lambdanaht und dem anstossenden Abschnitt der Sagittalis zahlreiche kleine Schaltknochen. Gesicht nicht hoch, Orbitae hoch, gross, hypsikonch (88.9). Nase schmal, Rücken ziemlich stark vortretend, breit gewölbt, Nasenbeine zerbrochen, Apertur eng, Index mesorrhin (48.0). Alveolarfortsatz kurz, schwach prognath. Der Unterkiefer sehr defect, Äste verletzt, im Ganzen zart, Mitte niedrig, Kinn etwas vorgeschoben, Zahnfortsatz stark prognath, Seitentheile dick. Die Zähne gross, zum Theil mit abgeschliffenen, jedoch meist mit noch frischen Kronen.

2. Die Galla.

Sie zeigen ein verhältnissmässig homogenes Material. Von 6 Schädeln schätze ich 4 als männlich: von 2 scheint es wahrscheinlicher, dass sie weibliche sind.

Fig. 4.

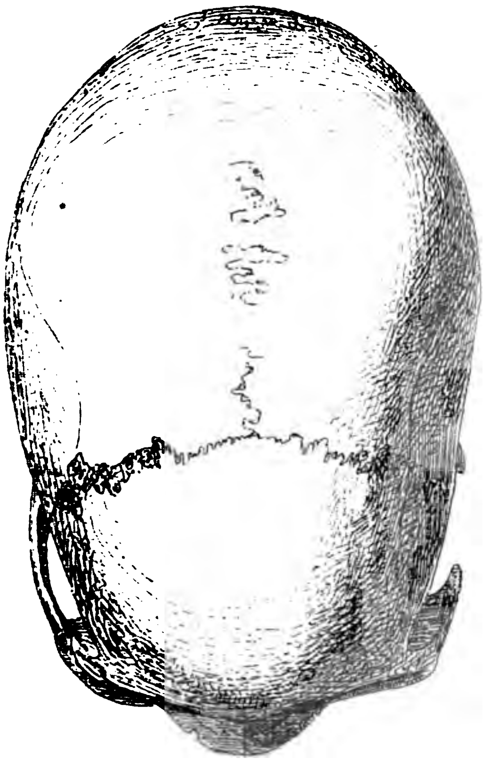
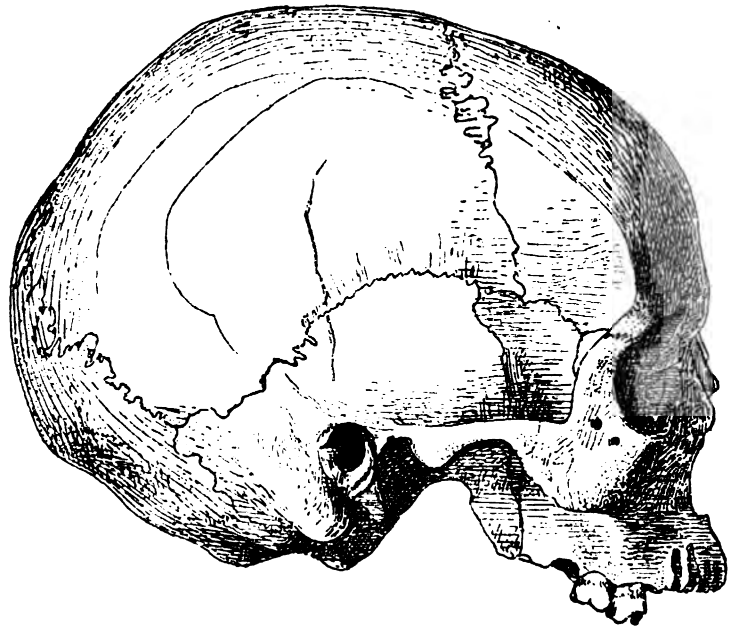


Fig. 6.

Fig. 5.



Nr. 1 (Fig. 4—6), am 12. Januar 1890 in Witu aufgelesen. Es ist ein männlicher Schädel von mässiger Grösse; seine Capacität beträgt 1360^{ccm}, sein horizontaler Umfang 506, sein verticaler 376^{mm}. Er ist fast hypsistenocephal, wozu vielleicht beigetragen hat, dass die Sagittalis an mehreren Stellen verwachsen ist (Fig. 4). Hier fehlen die Emissarien. Die Coronaria ist in ihren unteren Abschnitten ganz einfach (Fig. 5). Die Lambdanaht sehr unregelmässig, am oberen Ende mit grossen, verästelten Zacken, besonders nach rechts hin, besetzt (Fig. 6). Keine Protub. ext. Die Form ist hypsi-hyperdolichocephal (Breitenindex 67.4, Höhenindex 75.4); Hinterhauptsindex 28.3, also nicht beträchtlich. Die Oberschuppe steht vor und ist oben etwas verschmälert. Starke Apophysis basilaris. — Gesicht etwas höher, 70^{ccm}. Orbitae gedrückt, Index 78.0, also chamaekonch (der einzige Fall in dieser Sammlung). Stark vortretender Nasenfortsatz mit grosser Stirnhöhle; Nase tief angesetzt, schmal, Nasenbeine in einen scharfen, kantigen Rücken zusammentretend, an der Spitze abgebrochen, Apertur gross; Index 45.3, leptorrhin. Alveolarfortsatz niedrig, schwach prognath (Fig. 5). Backzähne stark abgeschliffen. Gaumen tief und lang.

Nr. 2 aus Padda in Witu, gesammelt am 25. November 1889. Ein sehr sonderbarer, scheinbar weiblicher Schädel. Seiner geringen Capacität nach (1190^{ccm}) ist er nannocephal; auch der horizontale Umfang mit 475, der sagittale mit 343^{mm} sind niedrig. Der grösste Theil der Coronaria und der Sagittalis ist synostotisch, namentlich der laterale Theil der Coronaria und die Sut.-sphenoparietalis; in Folge davon ist der Schädel vorn eng und zurückgelegt. Seine Tubera sind nicht entwickelt, auch das Hinterhaupt schmal. Die Form ist hypsidolichocephal (Breitenindex 72.0, Höhenindex 76.0); die horizontale Länge des Hinterhaupts beträgt nur 25.1 Procent der Gesammtlänge, während die basilare Länge 103^{mm} misst. Der Nasenfortsatz und zum Theil die Stirn sind durch grosse blasige Auftreibung der Stirnhöhlen vorgetrieben. — Das Gesicht niedrig und grob. Die Orbitae schief, oben enger, unten weiter, im Ganzen hypsikonch (90.0). Nase breit, mit schwachem, tief eingebogenem Rücken, nach unten breit ausgelegten Nasenbeinen und breiter, niedriger Apertur; Index 53.1, platyrrhin. Sehr tiefe Fossae caninae, so dass man den Daumen hineinlegen kann. Alveolarfortsatz gross und prognath. Die Schneidezähne scheinen vor langer Zeit ausgebrochen gewesen zu sein; ihre Alveolen sind verschwunden und der Fortsatz selbst ist zu einer dünnen Platte mit scharfem Rande reducirt.

Nr. 3. Inschrift auf dem Schädel: 13. Januar 1890, Witu, etwa 3 Jahre alt (soll wohl heissen: seit 3 Jahren todt); auf der Etiquette: Galla-Schädel aus einem Grab dicht bei dem Gallådorf. Schädel eines jungen Mannes mit geringer Capacität (1210^{ccm}); horizontaler Umfang 492, verticaler 356^{mm}. Index orthodolichocephal (Breiten- und Höhenindex je 71.7); Hinterhauptsindex 27.7, basilare Länge 106^{mm}. Die Nähte im Ganzen regelmässig, nur am Hinterkopfe ein, von gezackten Nähten umgebenes Os Incae, $4^{cm}.8$ hoch, dessen 9^{cm} breite Basis links ganz ordnungsmässig, rechts dagegen etwas zu hoch an die Lambdanaht sich inserirt. Tubera pariet. kräftig. Stirnwülste gross und hyperostotisch. — Das Gesicht niedrig und gedrückt: die Höhe des Mittelgesichts misst nur 61^{mm}. Orbitae ganz niedrig, förmlich abgeflacht, in der Diagonale ausgeweitet; Index 84.6, mesokonch. Nase tief angesetzt, oben schmal, mit etwas breitem Rücken, aber doch gewölbt und vortretend, Apertur weit: Index 57.8, platyrrhin. Alveolarfortsatz kurz, wenig prognath. Zähne noch mit frischen Kronen. Gaumen leptostaphylin.

Nr. 4. Schädel eines jungen Mannes von geringer Capacität (1250^{ccm}), hypsidolichocephal (Breitenindex 73.0, Höhenindex 78.7). Fast vollständige Synostose der Coronaria, beginnende der Sagittalis. Weit vortretende, aber sehr niedrige Oberschuppe, so dass fast die ganze Squama occipitalis zur Bildung der Unterschuppe verwendet ist. Die horizontale Länge des Hinterkopfes erreicht die beträchtliche Zahl von 33.9 Procent der Gesammtlänge; die basilare Länge misst nur 101^{mm}. Der horizontale Umfang ergiebt 499, der sagittale 363^{mm}. — Das Mittelgesicht hoch, 78^{mm}. Orbitae gleichfalls hoch, hypsikonch (92.9); der Eingang durch Zurückweichen des Wangenbeins ganz lateral gewendet. Nase hoch, mit langen Nasenbeinen, ganz scharfem Rücken und hoher Apertur; Index 41.5, hyperleptorrhin. Tiefe Fossae caninae. Grosser Alveolarfortsatz; Prognathie. Schöne Zähne mit frischen Kronen. Tiefer Gaumen.

Nr. 5. Männlicher Schädel von etwas grösserem Umfange (1330^{ccm} Capacität, 506^{mm} im horizontalen, 377 im verticalen Umfange), hypsihyperdolichocephal (Breitenindex 69.2, Höhenindex 76.8). Hinterhauptindex 28.1; Basilarlänge 110^{mm}. Synostose der Coronaria, sowie der Sutura sphenoparietalis und -frontalis links; rechts sind die Verhältnisse etwas undeutlich, jedoch erkennt man einen Processus frontalis sq. temp. und eine Synostosis sphenofrontalis. — Gesicht sehr defect, etwas breit, namentlich die Jochbogen vortretend. Orbitae gross und schief, Index 90.2, hypsikonch. Nase zerstört, Ansatz schmal und vortretend. Beschaffenheit des Alveolarfortsatzes undeutlich.

Nr. 6. Ein stark verletzter weiblicher Schädel, dem die ganze linke Schläfenschuppe fehlt und bei dem grosse Sprünge bis in das Dach hineinreichen. Alles an ihm ist zart und von weiblichem Habitus, die Backzähne etwas abgenutzt. Seine Form ist ultrahypsi-mesocephal (Breitenindex 76.5, Höhenindex 82.4), wobei vielleicht nachträgliche Verschiebungen der Theile etwas mitgewirkt haben. Stirn niedrig, gerade, breit, ohne Wülste, aber mit grossen Tubera und mit schneller Wendung in die Scheitelcurve. Volles Hinterhaupt mit grossen Wormschen Beinen um die Spitze und im rechten Schenkel der Lambdanaht. Orbitae gross, mehr gerundet, Index 82.0, mesokonch. Nasenbeine abgebrochen, oben schmal, dachförmig, Apertur unten gerundet, Index 50.0, mesorrhin. Sehr tiefe Fossae caninae. Trotz Kleinheit des Alveolarfortsatzes starker Prognathismus.

3. Abessinier und Massauaner.

Es liegt nahe, an dieser Stelle zweier Schädel kurz zu gedenken, welche ich durch freundliche Vermittelung des Hrn. Prof. Tizzoni in Bologna von der italiänischen Expedition nach Massaua erhalten habe. Sie repräsentiren das nördliche Element der hamitischen Bevölkerung.

1. Der Abessinier, stammt von einem der Schlachtfelder des letzten Krieges. Er ist ein ganz frisch gereinigter, wundervoll erhaltener, typischer Schädel eines sehr kräftigen Mannes, schwer und gross. Seine Capacität von 1520^{ccm} stellt ihn unmittelbar an die Seite des einen M'Tumbatu, der sonst recht verschieden von ihm ist. Seiner Form nach ist er orthodolichocephal (Breitenindex 73.9, Höhenindex 75.0). Die Stirn ist breit (96^{mm}), mit starken Orbitalwülsten aus-

gestattet, etwas schräg. Die Curve steigt langsam an bis zur Coronaria und geht hier in die lange Scheitelcurve über. An der Sagittalis nur ein Emissarium, und zwar ein sehr grosses, rechts. Grösste Breite an den Tubera pariet. Das Hinterhaupt dick, gerundet und so verlängert, dass die Lage des Foramen magnum an der Basis weit nach vorne verschoben zu sein scheint. Der Hinterhauptsindex beträgt 30.8. Dagegen misst die basilare Länge nur 105^{mm}. Die Schläfen eng, Alae wie eingedrückt, nach oben und hinten in Spitzen auslaufend, so dass die Schläfenschuppe dem Stirnbein etwas genähert ist. Rechts in der Sutura squamosa ein kleines Schaltbein. Am Foramen magnum gewaltige Gelenkhöcker. — Gesicht gross, leptoprosop (Index 90.5). Wangenbeine zierlich. Orbitae gross, hoch, mit sehr weiten Fissuren, Index hypsikonch (90.7). Nase stark, die Ossa nasi hoch angesetzt, gross, der vortretende Rücken breit und eingebogen, Apertur weit, Index mesorrhin (50.0). Spina nasi stark. Gesichtswinkel 65°. Fossae caninae tief. Alveolarfortsatz nicht stark, mässig prognath. Zähne stark. Gaumen gross, nach hinten breit, leptostaphylin (70.6). Unterkiefer stark. Kinn wenig entwickelt, Zahnrand leicht prognath. Seitentheile dick. Äste schräg angesetzt, breit und hoch; am Winkel kein Absatz.

2. Der aus einem mohammedanischen Grabe in der Nähe von **Massaua** entnommene jugendliche Schädel hat viele weibliche Züge an sich. Die Synchondrosis sphenooccip. ist noch offen, die Zahnkronen sehen durchweg frisch aus, die Weisheitszähne sind erst im Durchbrechen. Sein Aussehen erinnert etwas an das der Wakuafi-Schädel, nur ist das Gesicht sehr schmal (Jochbogen-Distanz 113^{mm}). Capacität mässig: 1300^{ccm}. Hinterhaupt stark vortretend, mit einem Schaltknochen links in der Lambdanaht; die Oberschuppe gross; Hinterhauptsindex 30.6. Foramen magnum weit nach vorn gestellt. Hohe Gelenkhöcker. Schädelform orthodolichocephal (Breitenindex 73.3, Höhenindex 75.0). An der linken Schläfe Stenokrotaphie: die Schläfenschuppe nach vorn verbreitert und mit einer vorgeschobenen Spitze versehen, so dass zwischen ihr und dem Stirnbein nur ein schmaler Zwischenraum bleibt; dabei ein tiefer Eindruck am Anfange der Schuppennaht. Rechts ist die Spitze der Ala ganz schmal; an der Spitze eine Vertiefung. — Orbitae hoch, Index hyperhypsikonch (97.3). Nase schmal, der Rücken vortretend, stark, wenig eingebogen, Apertur schmal, Index 46.0, leptorrhin. Fossae caninae wenig vertieft. Alveolarfortsatz mässig gross, schräg vortretend, jedoch fast orthognath. Zähne gross. Gaumen tief, leptostaphylin (78.7). —

Überblickt man die ganze Reihe der hamitischen Schädel, 12 an der Zahl, so ergiebt sich eine verhältnissmässig grosse Übereinstimmung der typischen Merkmale. Kein brachy- und kein chamaecephaler Schädel ist darunter. Der einzige chamaekonche darf wohl, bei der grossen Zahl pathologischer Erscheinungen an demselben, als eine individuelle Variation angesehen werden. Platyrrhinie wurde nur bei 2 Galla bemerkt; sie ist vielleicht als das Erbstück allophyler Mütter zu betrachten. Im Ganzen dominirt die Dolichocephalie, die Hypsikonchie, die Prognathie und die Leptostaphylie. Die Höhe variirt zwischen ausgemachter Hypsicephalie und Orthocephalie, der Nasenindex zwischen Leptorrhinie und Mesorrhinie.

Am meisten variirt die Grösse (Capacität) des Schädels, wie aus nachstehender Übersicht hervorgeht:

bis 1200 ccm	1 Galla
1201—1250 »	2 Galla
1251—1300 »	1 Massaua
1301—1400 »	3 Somal
	2 Galla
1401—1500 »	1 Somali
über 1500 »	1 Abessinier

Diese Variation betrifft vorzugsweise die Galla, während die Somal nur in geringerem Grade daran betheiligt sind. Eine Erklärung will ich nicht versuchen, da sie auf zu unsicheren Grundlagen beruhen würde. Es mag nur hervorgehoben werden, dass gerade bei einem so hoch organisirten Stamme, wie die Galla, Variationen der Grösse in bemerkenswerthem Grade hervortreten.

Für die Vergleichung der Hamiten mit den Bantu und den Wakuafi (Massaï) möge die nachstehende Übersicht der 4 Hauptindices einen Anhalt gewähren:

Stämme	Breitenindex			Höhenindex			Orbitalindex			Nasenindex		
	Dolichoc.	Mesoceph.	Brachyceph.	Chamaeceph.	Orthoceph.	Hypsiceph.	Chamaekonch	Mesokonch	Hypsikonch	Leptorrhin	Mesorrhin	Platyrrhin
Wa Tumbatu	—	2	—	—	1	1	—	—	2 !	—	2	—
M'Bondei	1	—	—	1	—	—	—	—	1	—	1	—
Wa Digo	1	1	—	1	—	1	—	1	—	—	—	1
Wa Kamba	1	3	—	—	1	2	—	1	3 !	—	1	3
Pangani	2	—	—	—	1	1	—	—	2	—	1	1
Wa Kuafi	1	—	1	—	1	1	—	—	1	1	—	—
Somal	2	2	—	—	2	2	—	—	4	2	2	—
Galla	5	1	—	—	1	5	1	2	3 !	2	1	2
Abessinier	1	—	—	—	1	—	—	—	1 !	—	1	—
Massaua	1	—	—	—	1	—	—	—	1 !	1	—	—

Daraus folgt, dass, abgesehen von dem einen brachycephalen Fall, dessen wahrscheinliche Allophylie ich schon besprochen habe, die Wakuafi sich den Hamiten am meisten nähern. Die Bantu entfernen sich von beiden in merkbarer Weise. Unter ihnen ist Mesocephalie häufig, namentlich bei den Wa Kamba und, wenn sie hierher gerechnet werden dürfen, bei den Watumbatu. In der Höhe zeigen sich die zwei grossen Ausnahmen von Chamaecephalie bei einem M'Digo und einem M'Bondei, zwei dicht benachbarten Küstenstämmen; im Übrigen herrscht Hypsicephalie vor. Kein Bantu ist leptorrhin, vielmehr ist, wenn man die Watumbatu abrechnet, Platyrrhinie vorwaltend. Die Orbitae sind auch hier, wie bei allen in Betracht gezogenen Schädeln, meist hypsikonch.

Was die Grösse der Schädel anbetrifft, so erhalten wir:

unter 1200 ccm	1 Wakuafi
1201—1250 »	1 M'Bondei
	1 M'Digo
	2 Wa-Kamba
1251—1300 »	1 M'Digo
	1 M'Tumbatu
1301—1400 »	1 M'Kamba
	2 Pangani
	1 Wakuafi
über 1500 »	1 M'Tumbatu.

Lassen wir auch hier die Watumbatu weg, so finden wir

unter 1300 ccm	1 Wakuafi,	4 Hamiten,	5 Bantu
über 1300 »	1 Wakuafi,	7 Hamiten,	3 Bantu.

Der Gegensatz ist grösser, als man ihn bei der blossen Betrachtung der Schädel erwarten sollte.

Hoffentlich gelingt es bald, mehr Material heranzubringen, um die Sicherheit dieser Schlussfolgerungen, bei denen ich mich für jetzt wesentlich auf die vorliegenden Reihen gestützt habe, genauer zu prüfen.

Schädel	Watumbatu 1 ♂ (25)	Watumbatu 2 ♂ (26)	M' Bondei ♂ (24)	Wadigo 1 ♀ (22)	Wadigo 2 ♂ (23)	Wakamba 1 ♂ (18)	Wakamba 2 ♂ (19)	Wakamba 3 ♂ (20)	Wakamba 4 ♀? (21)	Pangani 1 ♂ (28)
I. M										
Capacität	1520	1300	1240	1205	1285	—	1370	1225	1245	1320
Grösste horizontale Länge	183	181	179	168	178	182	180	169	175	180
Grösste Breite	144 pi	139 p	130 t	134 pt	127 p	140 Tp	142 t	131 p	129 p	131 p
Gerade Höhe	140	134	124	117	141	—	138	131	129	133
Ohrhöhe	117	110	107	102	113	117	113	114	110	113
Gerade Hinterhauptslänge	69	56	54	45	56	—	53	49	54	50
Entfernung des Ohrloches:										
von der Nasenwurzel	99	101	105	98	102	103	102	108	95	104
vom Nasenstachel	104	—	109	—	105	105	104	110	98	110
vom Oberkieferrande	111	115?	121	—	113	116	115 (Zahnrand 117)	118	108	113
Horizontalumfang	530	497	508	492	499	524	522	496	494	504
Verticalumfang	396	364	355	336	374	—	361	361	363	369
Minimale Stirnbreite	94	93	93	91	92	91	100	100	87	93
Gesichtshöhe A (Ophryon bis Kinn)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
» B (Ophryon bis Alveolarrand)	60	76	73	—	66	70	72	69	—	62
Gesichtsbreite a (jugal)	130	124	128	—	128	—	—	135	118	—
» b (malar)	100	95	91	—	94	—	—	98	92	90
» c (mandibular)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Orbita, Höhe	35	36	33	—	33	l. 38	l. 36	37	31	30
» Breite	39	38	38	—	40	41	38	37	37	34
Nase, Höhe	48	49?	51	—	47	50	52	49	42	48
» Breite	23	24	26	—	28	28	25	27	26	25
Gaumen, Länge	54	—	56	—	55	50	56	60?	53?	54
» Breite	36	—	39	—	36	39	39	41	36	39
Gesichtswinkel	68°	72°	65°	—	68°	68°	69°	74°	68°	69°
				Senil. Synost. univ.	Grosses Os triq. Proc. front. sin. Hyp. syph.	Sehr verletzt.	Epipt.	Grosses Os quadr.	Stenokrot. Praenas. Exost.	
II. Bere										
Längenbreiten-Index	78.7	76.8	72.6	79.8	71.3	76.9	78.9	77.5	73.7	72.7
Längenhöhen-Index	76.5	74.0	69.3	69.6	79.2	—	76.7	77.5	73.7	73.9
Ohrhöhen-Index	63.9	60.7	59.7	60.7	63.3	64.3	62.7	67.4	62.8	62.7
Hinterhaupts-Index	37.7	30.9	30.1	26.7	31.4	—	29.4	28.9	30.8	27.7
Gesichts-Index	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Orbital-Index	89.7	94.7	86.8	—	82.5	92.7	94.7	100.0	83.8	88.2
Nasen-Index	47.9	48.9?	51.0	—	59.6	56.0	48.2	55.1	61.9	52.0
Gaumen-Index	66.6	—	69.6	—	65.4	78.0	69.6	55.4?	67.9?	72.2

Wakuafi				Somal				Galla						Abessinier	Massaua
♀)	2 (15)	3 (16)	4 ♀? (17)	1 ♂	2 ♂?	3 ♀?	4 ♀?	1 ♂	2 ♀?	3 ♂	4 ♂	5 ♂	6 ♀	♂	♀?

ngen.

2?	—	—	1140	1330	1480	1320	1375	1360	1190	1210	1205	1330	—	1520	1300
1	—	—	167	180	189	176	170	187	175	180	174	185	170	188	176
p	131 p	—	135 Tp	130 pi	136 p	133 p	132 p	126 p	126 pt	129 p	127 p	128 pt	130 Tp	139 Tp	129 p
2	—	—	125	134	142	130	136	141	133	129	137	142	140	141	132
9	—	109	105	112	121	106	111	114	112	106	113	121	116	112	109
	—	—	46	49	59	48	50	53	44	50	59	52	54	58	54
0	—	89	103	108	107	105	98	107	103	106	101	110	92	105	98
5	—	—	—	108	107?	108?	105	112	106	109	99	—	86	109	104
0	—	—	—	110?	111?	116	—	—	—	118	—	—	95	115 (Kinn 129)	108
8	—	—	486	507	531	509	484	506	475	492	499	506	491	519	492
1	—	—	336	368	387	360	360	376	343	356	363	377	380	380	356
	—	89	94	92	99	95	86	85	89	94	94	88	89	96	88
	—	—	—	(108?)	—	(108?)	106	—	—	—	—	—	—	115	—
	—	—	—	67?	68?	67?	64?	70?	68?	61	78	—	65	71	69
	—	—	—	124	—	—	—	—	127	—	121	—	—	127	113
	—	—	—	99	—	92	—	91	93	92	80	—	85	99	90
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	89	—
	—	—	—	35	37	36	32	32	36	33	39	l. 37	32	39	36
	—	—	—	39	41	41	36	41	40	39	42	41	39	43	37
	—	—	—	53	52?	50?	50	53	49	45	53	51	50	54	52
	—	—	—	25	23?	25?	24	24	26	26	22	—	25	27	24
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	59	—	—	—	58	47
	—	—	—	39	29	40	35	35	—	37	32	—	31	41	37
	—	—	—	72°	—	—	68°	71°	68°	71°	76°	—	66°	65°	65°
ll	Sut. fr. pers.	Kind. Proc. front. sin.	Os quadrat.	Worm. Beine.	Sehr verletzt.	Jung.	Pr. front. links, Epipt. rechts.	Synost. sagitt. post.	Synost. cor. lat. et sph. par.	Os Incae. Jung.	Synost. fere univ. Jung.	Syn. cor. Proc. front. dext.	Worm. Beine. Sehr verletzt.		Jugendl. Stenokr. links.

te Indices.

)	—	—	80.8	72.2	72.0	75.6	77.6	67.4	72.0	71.7	73.0	69.2	76.5	73.9	73.3
	—	—	74.9	74.4	75.1	73.9	80.0	75.4	76.0	71.7	78.7	76.8	82.4	75.0	75.0
	—	—	62.8	62.2	64.0	60.2	65.2	60.9	64.0	58.8	64.9	65.4	68.2	59.5	61.9
	—	—	27.5	27.2	31.2	27.2	29.4	28.3	25.1	27.7	33.9	28.1	31.7	30.8	30.6
	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	90.5	—
)	—	—	—	89.7	90.2	87.8	88.9	78.0	90.0	84.6	92.9	90.7	82.0	90.7	97.3
;	—	—	—	47.2	44.2?	50.0?	48.0	45.3	53.1	57.8	41.5	—	50.0	50.0	46.0
)	—	—	—	—	—	—	—	—	—	62.7	—	—	—	70.6	78.7

8. Über die Linienspectren der Elemente der zweiten MENDELEJEFF'schen Gruppe.

Von Prof. H. KAYSER und Prof. C. RUNGE
in Hannover.

(Vorgelegt von Hrn. VON HELMHOLTZ am 19. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. X]; — ausgegeben am 26. Februar.)

Nachdem wir von den Elementen der ersten MENDELEJEFF'schen Gruppe die Alkalien in Bezug auf ihre Spectren untersucht und dieselben ganz gesetzmässig gebaut gefunden haben, sind wir zu den Elementen der zweiten Gruppe übergegangen, mit Ausschliessung des Beryllium. Auch hier ist es uns gelungen, ganz homologen Bau der Spectren zu finden. Während für die Alkalien Linienpaare charakteristisch waren, welche entweder variable Schwingungsdifferenz (Hauptserien) oder constante Schwingungsdifferenz (Nebenserien) zeigten, sind die Elemente der zweiten Gruppe durch Linientriplets charakterisirt. Jedes Element besitzt constante Schwingungsdifferenzen ν_1 und ν_2 zwischen der ersten und zweiten, oder zweiten und dritten Linie aller Triplets. Von den Triplets jedes Elementes ist ein Theil stärker und unschärfer; sie bilden eine Serie von Triplets, deren Linien sich durch unsere bei den Alkalien benutzte Gleichung $\lambda^{-1} = A - Bn^{-2} - Cn^{-4}$ mit grosser Genauigkeit darstellen lassen. Wir nennen sie erste Nebenserie. Die anderen Triplets sind schwächer, aber schärfer, verbreitert nur nach der Seite der längeren Wellen. Auch sie bilden eine Serie, unsere zweite Nebenserie. Für Mg, Ca, Zn, Cd, Hg haben wir die erste und zweite Serie gefunden, für Sr nur die erste, während wir für Ba keine Serie finden konnten.

Die Elemente zerfallen nach ihren Spectren in zwei Abtheilungen: Mg, Ca, Sr und Zn, Cd, Hg; namentlich die drei letzteren bieten noch verschiedene gemeinsame Erscheinungen dar, worauf an dieser Stelle nicht näher einzugehen ist. In jeder Abtheilung rücken mit wachsendem Atomgewicht die Serien nach der Seite der längeren Wellen, wie es auch bei den Alkalien war. Dabei ist aber die zweite Abtheilung gegen die erste nach der Seite der kürzeren Wellen verschoben.

Während bei den Alkalien alle Linien des Spectrums durch die Serien aufgenommen wurden, ist das hier nicht der Fall; etwa die Hälfte der beobachteten Linien bleibt in jedem Spectrum übrig. Auch für eine Anzahl dieser haben wir Regelmässigkeiten nachweisen können, indem sie Paare mit bestimmtem Abstand oder noch Triplets bilden; immerhin ist aber die Zahl der Linien, welche als scheinbar ganz gesetzlos über das Spectrum vertheilt übrig bleibt, eine ziemlich grosse.

Die gesetzmässige Verschiebung der Spectren von einem Element zum andern findet natürlich ihren Ausdruck in einer regelmässigen Veränderung der Constanten unserer Serienformel.

In einer ausführlichen Abhandlung werden wir die Ergebnisse unserer Untersuchungen im Einzelnen darlegen, von denen einige schon von Rydberg erhalten worden sind.

9. Zur Entwickelungsgeschichte der Holothurien.

Von Prof. Dr. HUBERT LUDWIG
in Bonn.

(Vorgelegt von Hrn. SCHULZE am 19. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. X]; — ausgegeben am 26. Februar.)

Die Königliche Akademie der Wissenschaften hat mich dadurch zu tiefem Danke verpflichtet, dass sie mir vor mehreren Jahren einen abermaligen[1] Aufenthalt in der zoologischen Station zu Neapel ermöglichte. Nach längerer Verhinderung konnte ich jedoch erst im vergangenen Frühling endlich die Reise ausführen, über deren Ergebnisse ich mich beehre im Folgenden zu berichten.

Als Hauptziel meiner Untersuchungen hatte ich mir vorgenommen, die Entwickelung einer Holothurie möglichst weit in das postembryonale und postlarvale Leben hinein zu verfolgen und wählte dazu die im Mittelmeer gemeine *Cucumaria planci*, weil sie nach den bisherigen Erfahrungen sich unter den mittelmeerischen Seewalzen am besten für eine längere Zucht in Aquarien zu eignen schien und allerseits als eine recht typische Holothurie betrachtet wird. Daneben betrieb ich die weitere Vorbereitung der von mir übernommenen monographischen Bearbeitung der mediterranen Echinodermen für die »Fauna und Flora des Golfes von Neapel« und benutzte zugleich die günstige Gelegenheit, die neuerdings aufgeworfene Frage nach der Function der Madreporenplatte der Echinodermen überhaupt einer Lösung näher zu führen. Das Ergebniss der auf diesen letzten Punkt gerichteten Beobachtungen habe ich vor einiger Zeit unter dem Titel: »Über die Function der Madreporenplatte und des Steinkanals der Echinodermen« im Zoologischen Anzeiger Nr. 339, 1890 veröffentlicht. Ein anderes Ergebniss meiner diesmaligen Neapler Studien ist die soeben erschienene[2]

[1] Die Hauptfrucht eines früheren Aufenthaltes war die Entwickelungsgeschichte der *Asterina gibbosa*, Zeitschr. f. wiss. Zoologie Bd. 37, 1882.

[2] *Ankyroderma musculus* (RISSO), eine Molpadiide des Mittelmeeres, nebst Bemerkungen zur Phylogenie und Systematik der Holothurien, Zeitschr. f. wiss. Zoologie Bd. 51, 1891, S. 569—612.

Beschreibung der wiederentdeckten Risso'schen *Molpadia musculus*, an welche ich Betrachtungen über die Phylogenie und Systematik der Holothurienklasse anknüpfte.

Um aber auf den oben angegebenen Hauptgegenstand meiner Untersuchungen zurückzukommen, sei zunächst erwähnt, dass es gelang die Jungen der *Cucumaria planci* viel länger zu züchten, als das bis jetzt mit dieser oder irgend einer anderen Holothurie geglückt ist, nämlich von mir selbst vom 16. März bis zum 17. April und dann weiter unter der Obhut des vortrefflichen Conservators Hrn. Lo Bianco bis zum 9. Juli, also zusammen auf eine Zeitdauer von 116 Tagen. Im Ganzen schreitet die Entwickelung, nachdem das tonnenförmige Stadium am 8. und 9. Tage überwunden ist, von da an nur sehr langsam vorwärts. Die Larven und jungen Thiere sind vollständig undurchsichtig und so reichlich mit Kalkkörpern erfüllt, dass der umständliche Weg der vorsichtigen Entkalkung und Zerlegung in lückenlose Schnittserien eingeschlagen werden musste, wobei geeignete Abtödtungs- und Conservirungsmethoden selbstverständlich in Anwendung kamen. Die Schnitte durften bei der Kleinheit der zelligen Elemente und der engen Zusammendrängung der verschiedenen Organanlagen durchgängig nicht dicker als 5—7.5 μ sein, falls sie sichere Resultate ergeben sollten. Durch diese Umstände und die Menge der zu einer eingehenden Darstellung nöthigen Abbildungen stellt die ganze Arbeit erhebliche Anforderungen an Zeit und Geduld. Die ausführliche Veröffentlichung wird deshalb noch einige Zeit auf sich warten lassen. Vorläufig möchte ich mich in der heutigen Mittheilung darauf beschränken, einige mir bemerkenswerth erscheinende Ergebnisse in aller Kürze darzulegen, indem ich zugleich auf meine soeben in Bronn's »Classen und Ordnungen des Thierreiches« veröffentlichte kritische Bearbeitung der einschlägigen Litteratur verweise.

Da ich damals keinen Anlass hatte an der Zuverlässigkeit der Angaben zu zweifeln, welche Selenka über die ersten Entwickelungsstadien der *Cucumaria planci* gemacht hat, so begann ich meine Untersuchungen erst am 8. Entwickelungstage. Nachträglich aber drängt sich mir die Überzeugung auf, dass ich in meinem Vertrauen zu weit gegangen bin. Auch die Stadien der 7 ersten Entwickelungstage müssen nochmals untersucht werden, und ich hoffe, dass es mir gelingen wird mir dieselben in diesem Frühling zu verschaffen. Die hier folgenden Beobachtungen beziehen sich demnach ausschliesslich auf Stadien, die älter sind als 7 Tage.

Die herkömmliche Auffassung, dass bei den Holothurien die Symmetrieebene des jungen Echinoderms mit derjenigen der Larve zusammenfalle, finde ich nicht bestätigt. Es ist vielmehr dieselbe

Schrägstellung dieser beiden Symmetrieebenen zu einander vorhanden, wie ich sie z. B. in der Entwicklung der *Asterina gibbosa* nachgewiesen habe. Im vorderen (oralen) Bezirke des aus der tonnenförmigen Larve in das junge Thier überleitenden Stadiums weicht die Symmetrieebene des jungen Thieres nach links, im hinteren Bezirke aber weicht sie nach rechts von derjenigen der Larve ab. Beide Symmetrieebenen schneiden sich also unter spitzen Winkeln. Dazu kommt, dass auch die Längsaxe der jungen Cucumaria nicht mit der Längsaxe der tonnenförmigen Larve identisch ist. Im vorderen Körpertheile weicht die Längsaxe der jungen Cucumaria ventralwärts, im hinteren Körpertheile dagegen dorsalwärts von der Längsaxe der Larve ab. Die besonderen Schwierigkeiten für die richtige Orientirung und das Verständniss der Querschnitte und Längsschnitte ergeben sich aus diesen Lagerungsverhältnissen von selbst.

Wassergefässsystem. Ringkanal und Radialkanäle sind am 8. Tage bereits in ihre bleibende Lagerung eingerückt. Die Stelle, an welcher der Ringkanal zum Schluss gekommen ist, lässt sich nicht mehr nachweisen. In seiner Gesammtheit liegt der Ringkanal, entsprechend den angegebenen Beziehungen der Symmetrieebene und der Längsaxe, so, dass er mit seinem ventralen Bezirke weiter nach hinten liegt als mit seinem dorsalen und zugleich mit seiner linken Hälfte ein wenig weiter nach hinten als mit seiner rechten Hälfte. Mit dem Vorderarm ist er nur lose durch einige feine, kurze Aufhängefädchen verbunden. Muskelfasern in der Wand des Ringkanals vermochte ich an keinem der untersuchten Jugendstadien zu erkennen. Die fünf Radialkanäle entspringen aus dem Ringkanal mit weitem Lumen ohne jede Einschnürung oder Ventilbildung. Der mediane ventrale Radialkanal reicht schon am 8. Tage nach hinten mit seinem blinden Ende etwas über die Abgangsstelle der beiden ersten aus ihm entspringenden und jetzt schon vorhandenen Füsschenkanäle hinaus. An den folgenden Tagen zeigt sich immer deutlicher, dass derselbe nicht nur an Länge, sondern auch an Querdurchmesser die vier anderen Radialkanäle übertrifft. Aber auch diese vier sind unter sich wieder ungleich, indem die beiden seitlichen ventralen kürzer und enger sind als die beiden seitlichen dorsalen. Dieser Unterschied zwischen den fünf Radialkanälen erhält sich weit in das Jugendleben des Thieres und wird erst spät durch nachträgliche Wachsthumsvorgänge der vier seitlichen Radialkanäle ausgeglichen. Auch in Bezug auf die Entstehung der Muskulatur in der Wand der Radialkanäle ist der mediane ventrale im Vorsprung vor den vier übrigen, und unter diesen wieder die beiden dorsalen vor den beiden ventralen. Während nämlich in der Wand des mittleren ventralen Radialkanals schon am 13. Tage die ersten deutlichen Muskelfasern auftreten, dauert es bis zum 17. Tage, bis auch die beiden seitlichen dorsalen Radialkanäle die ersten Muskelfasern erhalten, und noch weitere 3 Tage, bis ein Gleiches mit den beiden seitlichen ventralen Radialkanälen geschieht. Alle diese Muskelfasern beschränken sich auf denjenigen Abschnitt der Radialkanäle, welcher sich nach aussen und hinten von dem Kalkringe befindet. Dagegen an den kurzen Stücken der Radialkanäle, welche nach innen von den radialen Kalkringstücken zum Ringkanale ziehen, vermochte ich am 45. Entwickelungstage noch keine Spur von Muskelfasern zu entdecken. Sämmtliche Muskelfasern der Radialkanäle sind Längsfasern, werden von den Zellen der Hydrocoelepithels geliefert und finden sich (wie am erwachsenen Thiere) nur in derjenigen Wand der Radialkanäle, welche der Körperoberfläche zugekehrt ist, woselbst sie sich zu einer einfachen Schicht nebeneinander ordnen.

Von besonderem Interesse erweisen sich die Beziehungen, in welchen die jungen Fühler zu den Körperregionen und zum Wassergefässsystem stehen. Am 8. Entwicklungstage sind bereits fünf Fühler zur Ausbildung gelangt. Ihre Lagebeziehung zum Munde und namentlich zu den Wimperreifen der tonnenförmigen Larve ist eine andere als es Selenka dargestellt hat. Sie liegen in einem geräumigen Vorhofe des Mundes, in welchen sie vollständig zurückgezogen werden können; alsdann steht der Vorhof mit der Aussenwelt durch eine kreisförmige scharfrandige Öffnung in Verbindung. Sind aber die Fühler ausgestreckt, so hat sich der Mundvorhof gleichzeitig verflacht und jene lassen nunmehr erkennen, dass sie sich alle fünf vor dem zweiten Wimperreifen der Larve befinden (als ersten Wimperreifen zähle ich die Bewimperung des Kopfbuckels). Nach Selenka sind ferner die fünf ersten Fühler im ausgestreckten Zustande so angeordnet, dass man von vorn nach hinten ein erstes Paar, ein zweites Paar und zuletzt einen unpaaren Fühler unterscheiden kann. Gerade das Umgekehrte ist richtig: zu vorderst liegt ein unpaarer Fühler, dem die vier anderen als ein vorderes und ein hinteres Paar folgen. Ganz deutlich wird diese Anordnung erst dann, wenn man auf den bisher übersehenen Umstand Rücksicht nimmt, dass die Symmetrieebene der jungen Cucumarie vorne nach links und hinten nach rechts von der Symmetrieebene der Larve abweicht. Die eben angegebene Vertheilungsweise der Fühler bezieht sich genau genommen nur auf die Symmetrieebene der jungen Holothurie. In Bezug auf die Symmetrieebene der Larve sind dagegen die Fühler in asymmetrischer Weise so angeordnet, dass drei derselben der linken und die zwei anderen der rechten Körperhälfte der Larve angehören.

Nach KOWALEVSKY und SELENKA entspringen die Wasserkanäle der fünf ersten Fühler unmittelbar aus dem Ringkanal und zwar abwechselnd mit den Ursprüngen der Radialkanäle. Diese Angabe ist durchaus irrig. Die Fühlerkanäle entspringen vielmehr aus den jungen Radialkanälen. Soweit die SEMON'schen Speculationen über die Phylogenie der Echinodermen auf der Annahme beruhen, dass die Primärfühler bei allen Holothurien aus dem Ringkanal entstehen und ihrerseits die wahren Radien des Holothurienkörpers bestimmen, schweben sie sonach vollständig in der Luft. Vollends wird ihnen der thatsächliche Boden bei *Cucumaria* dadurch entzogen, dass die fünf ersten Fühlerkanäle überhaupt gar nicht in regelmässig strahliger Weise vertheilt sind. Wäre das der Fall, so würde von jedem der fünf Radialkanäle je ein Fühlerkanal abgegeben werden. Das ist aber thatsächlich anders. Die Vertheilung der fünf ersten Fühlerkanäle ist weder eine radiäre, noch eine bilateralsymmetrische, sondern in der Weise asymmetrisch, dass die beiden Fühler der beiden ventralen Interradien ihre Wasserkanäle vom mittleren ventralen Radialkanal erhalten, während der Fühler des mittleren dorsalen, sowie derjenige des linken dorsalen Interradius vom linken dorsalen Radialkanal und endlich der Fühler des rechten dorsalen Interradius vom rechten dorsalen Radialkanal versorgt werden. Es geben also der mittlere ventrale und der linke dorsale Radialkanal je zwei Fühlerkanäle, der rechte dorsale Radialkanal aber nur einen Fühlerkanal ab. Die Ursprungsstellen der beiden Fühlerkanäle des mittleren ventralen Radialkanals liegen einander genau gegenüber; ebenso die beiden Fühlerkanäle des linken dorsalen Radialkanals. Die beiden seitlichen ventralen Radialkanäle dagegen geben einstweilen, so lange überhaupt nur fünf Fühler vorhanden sind, gar keine Fühlerkanäle ab, bleiben also auch in diesem Punkte hinter den drei anderen Radialkanälen zurück. Äusserlich betrachtet ist es der vorderste unpaar stehende Fühler des 8. Entwickelungstages und sein linker Nachbar, welche zum linken dorsalen Radialkanal gehören; der rechte Nachbar des unpaaren gehört zum rechten dorsalen Radialkanal; die beiden Fühler des hinteren Paares aber sind diejenigen, welche vom mittleren ventralen Radialkanal geliefert werden.

Die soeben geschilderte Beziehung der Primärfühler zu den Radialkanälen ist eine ganz constante. Sie konnte, ohne dass eine einzige Ausnahme anzutreffen war, an allen den zahlreichen jungen Cucumarien der verschiedensten Altersstadien vom 8. bis zum 115. Tage in lückenlosen Quer- und Längsschnittserien nachgewiesen werden und darf deshalb als eine allerdings sehr eigenartige Gesetzmässigkeit betrachtet werden.

Erst am 116. Tage hat an einem Theile der jungen Thiere eine Vermehrung der Fühler stattgefunden, indem jetzt im Ganzen deren sieben vorhanden sind. Der sechste und siebente liegen in Bezug auf die Medianebene der Holothurie einander genau gegenüber und erhalten ihre Wasserkanäle von denjenigen beiden Radialkanälen, welche sich bis dahin an der Abgabe von Fühlerkanälen überhaupt noch nicht betheiligt hatten, nämlich von dem linken ventralen und dem rechten ventralen. Beide Radialkanäle entsenden den neuen Fühlerkanal in dorsaler Richtung, also in den linken, bez. rechten dorsalen Interradius. Vorher befand sich in einem jeden interradialen Bezirke der Mundumgebung nur ein einziger Fühler. Jetzt aber, nach Bildung des sechsten und siebenten Fühlers besitzen die beiden seitlichen dorsalen Interradien je zwei Fühler, während der mittlere dorsale und die beiden ventralen Interradien nach wie vor nur je einen Fühler beherbergen. Die sieben Fühler sind demnach auf die fünf Interradien genau in derselben Weise vertheilt, welche ich vor Jahren an siebenfühlerigen Jungen der lebendig gebärenden *Chiridota rotifera* festgestellt habe. Da an der erwachsenen, zehnfühlerigen *Cucumaria* jeder Radialkanal zwei Fühlerkanäle abgiebt, so lässt sich für die weitere Vermehrung der Fühler vermuthen, dass der achte an der linken (dorsalen) Seite des rechten dorsalen, der neunte und zehnte aber an der ventralen Seite des linken und des rechten ventralen Radialkanales entstehen und damit schliesslich eine genau radiäre Vertheilung der zehn Fühler des fertigen Thieres erreicht wird. — Bemerkenswerth dürfte in der angegebenen Reihenfolge der Fühlerentwickelung auch der Umstand sein, dass die beiden ventralen Fühler, obschon sie bei dem erwachsenen Thiere erheblich kleiner sind als die acht übrigen, nicht zu den fünf secundären, sondern zu den fünf primären Fühlern gehören.

Sämmtliche Fühlerkanäle entspringen aus den Radialkanälen mit einem anfänglich sehr kurzen, später sich verlängernden, engen Anfangsstück, welches in den erweiterten, im Fühler selbst gelegenen Abschnitt des Fühlerkanales durch Vermittelung eines Ventils einmündet. Diese Ventile sind trotz ihrer Kleinheit genau ebenso aus zwei Semilunarklappen aufgebaut, wie das von den *Synapta*-Fühlern bereits bekannt ist. Die engen Anfangsstücke der Fühlerkanäle, sowie die Ventile am distalen Ende dieser Anfangsstücke liegen nach innen von den schon am 8. Entwickelungstage vorhandenen Radialstücken des Kalkringes. Jenseits des Ventils buchtet sich der erweiterte Abschnitt des Fühlerkanals nach hinten zu einem kurzen Blindsacke aus, welcher sich auf die Aussenseite des jungen Kalkringes lagert und hier auf die Seitenarme zweier benachbarter Radialstücke desselben stützt. Dieser Blindsack ist die Anlage des von Hérouard am erwachsenen Thiere nachgewiesenen Homologons einer Fühlerampulle. Der enge Abschnitt des Fühlerkanals lässt auch bei den ältesten der untersuchten Jugendstadien keine Muskelfasern in seiner Wand erkennen. Dagegen treten in dem erweiterten Abschnitt des Fühlerkanals schon am 10. Tage deutliche Längsmuskelfasern (und nur solche) in einer einfachen Schicht auf, welche von den Zellen des Hydrocoelepithels geliefert werden. Bis zum 15. Tage sind die Fühler einfach cylindrisch mit abgerundeter Spitze, welche von den schon von Krohn und Selenka bemerkten glashellen winzigen Papillen besetzt ist. Am genannten Tage beginnt die spätere baumförmige Gestalt der Fühler sich dadurch einzuleiten, dass zunächst die Fühlerspitze sich gabelt. Diesen beiden Gabelästen folgen an den nächsten Tagen unterhalb der Spitze bald weitere Nebenäste. Sämmtliche Äste umschliessen von Anfang an einen Blindsack des Fühlerkanals.

Die beiden ersten Füsschen sind schon am 8. Tage angelegt. Sie liegen anfänglich versteckt in je einer grubenförmigen Vertiefung der Haut und haben, wenn sie aus dieser sich dann verflachenden Grube hervortreten, die Form einer kleinen halbkugeligen Vorwölbung. In den nächsten Tagen strecken sie sich immer mehr zu einem cylindrischen Schlauche und lassen bereits am 15. Tage eine wohlentwickelte Endscheibe erkennen. Beide primären Füsschen erhalten ihre Wasserkanäle, wie schon Selenka beobachtet hat, vom Endstücke des mittleren ventralen Radialkanales, aus welchem sie genau einander gegenüber entspringen. Dennoch sieht man vom 8. bis zum 18. Tage bei genauer Betrachtung, dass das rechte Füsschen ein wenig weiter nach vorn aus der Körperoberfläche hervortritt als das linke, was wiederum darauf zurückzuführen ist, dass die Symmetrieebene der Holothurie die erwähnte Schrägstellung zur Symmetrieebene der tonnenförmigen Larve einnimmt. Die Muskulatur der jungen Füsschen entsteht in unmittelbarer Verlängerung der Muskulatur des Radialkanales ausschliesslich in Gestalt von Längsmuskelfasern auf der Aussenfläche des Füsschenkanales und stammt ebenso wie die Muskeln der Radialkanäle und der Fühler von den Zellen des Hydrocoelepithels ab. Schon am 10. Tage (also noch vor dem Auftreten der Muskelfasern in dem zugehörigen Radialkanal) bilden die Längsmuskelfasern eine feine einschichtige Lage, welche nur demjenigen Bezirke des Füsschenkanales, der sehr viel später sich zur Füsschenampulle ausbuchtet, jetzt noch fehlt. Am Ursprunge des Füsschenkanales aus dem medianen ventralen Radialkanal ist eine Ventileinrichtung zwar vorhanden, aber doch viel schwächer ausgebildet als die ähnlichen Ventile der Fühlerkanäle.

Ein drittes Füsschen macht sich erst am 45. Tage bemerklich. Dasselbe entspringt vor den beiden primären, liegt stets links von der Medianebene und erhält seinen Wasserkanal ebenso wie jene vom mittleren ventralen Radialkanal, der demnach jetzt zwei linke und ein rechtes Füsschen versorgt. Unterdessen sind an den beiden ersten Füsschenkanälen ampullenförmige Ausweitungen ihres proximalen Abschnittes in die Leibeshöhle entstanden.

Am 84. Tage ist ein viertes Füsschen zur Ausbildung gelangt, welches ebenfalls seinen Wasserkanal aus dem medianen ventralen Radialkanal bezieht. Es liegt noch weiter nach vorn als das dritte, jedoch nicht links, sondern rechts.

Eine weitere Vermehrung der Füsschen findet erst um den 111. Tag statt. Das alsdann auftretende fünfte Füsschen gehört aber nicht mehr wie seine Vorgänger dem medianen ventralen Radialkanal, überhaupt nicht der Ventralseite an, sondern entspringt an der linken (= ventralen) Seite des linken dorsalen Radialkanales und zwar im Bereiche der vorderen Körperhälfte. Es sind also dieselben beiden Radialkanäle jetzt an der Füsschenbildung betheiligt, welche auch in der Fühlerbildung den übrigen Radialkanälen insofern vorausgingen, als sie zuerst ihre definitive Zahl von je zwei Fühlern lieferten.

Die Poli'sche Blase liegt im Gegensatze zu der Lage, welche ihr Selenka in seiner betreffenden Abbildung anweist, nicht in der rechten Körperhälfte, sondern ausnahmslos in der linken nnd zwar unabänderlich im linken dorsalen Interradius, also eben dort, wo auch Hérouard sie beim erwachsenen Thiere ganz constant antraf. An ihrer weiten Einmündung in den Ringkanal ist keinerlei Ventileinrichtung vorhanden. Vom 15. Tage an sind Ringmuskelfasern in ihrer Wandung zu erkennen, welche sich um einen dem blinden Ende der Blase entsprechenden Punkt concentrisch in einfacher Lage anordnen. An der Mündung der Blase in den Ringkanal hört die Muskelschicht auf. Ihrer Herkunft nach leitet auch sie sich von den Hydrocoelzellen ab, welche das innere Epithel des ganzen Wassergefässsystems darstellen.

Der junge Steinkanal besitzt eine von Selenka übersehene blasenförmige Erweiterung, deren Epithelauskleidung nur in der inneren (d. h. dem Körperinnern zugekehrten) Hälfte der Blase dieselbe Beschaffenheit wie im übrigen Steinkanal bewahrt, in der äusseren (d. h. der Körperoberfläche näher liegenden) Hälfte aber sich stark abflacht. Diese Erweiterung ist der erste Anfang zur Bildung des späteren Madreporenköpfchens des definitiven Steinkanales und mag deshalb als »Madreporenblase« bezeichnet werden. Sie ist bis jetzt nur von Bury gelegentlich bemerkt und als »vorderes

Enterocoel« gedeutet worden. Von Seiten des Mesenchyms wird sie von einer kalkigen, unvollständigen Gitterschale umhüllt, welche von anderen Holothurien schon länger bekannt ist. Das von Hérouard bei der erwachsenen Cucumarie vermuthete Ventil am Abgange des Steinkanals vom Ringkanal ist nicht vorhanden; das hohe Epithel des Steinkanals geht an dieser Stelle fast plötzlich in das niedrige Epithel des Ringkanals über. Das von der Madreporenblase zum Rückenporus führende Aussenende des primären Steinkanals liegt ebenso wie der später, um den 18.—24. Tag, obliterirende Rückenporus nicht in der durch das dorsale Mesenterium bezeichneten Medianebene der Holothurie, sondern rechts davon, was sich wiederum aus der schon mehrfach berührten Schrägstellung dieser Medianebene zu derjenigen der Larve erklärt. Aus demselben Grunde lässt sich vielleicht auch die Vorliebe erklären, welche der Steinkanal erwachsener Holothurien, namentlich aus der Familie der Aspidochiroten, für die rechte Körperhälfte zeigt. — An jungen Thieren des 98. Entwickelungstages hat sich die Madreporenblase an ihrer dünnwandigen Seite in die Leibeshöhle geöffnet und dadurch den bleibenden offenen Zusammenhang des Steinkanals mit der Leibeshöhle bewerkstelligt.

Nervensystem. Am 8. Entwickelungstage sind die centralen Theile des Nervensystems: Ringnerv und Radialnerven bereits angelegt. Sowohl der Ringnerv als auch die von ihm ausstrahlenden Radialnerven bestehen auf diesem Stadium ausschliesslich aus dicht gedrängten, in mehrfacher Lage übereinander geschichteten Zellen. Erst am folgenden Entwickelungstage wird unter den Zellen des Ringnerven eine sehr feinfaserige Schicht bemerklich, deren Fasern parallel mit der Längsaxe des Ringnerven verlaufen. Vom 13. Tage an sieht man zwischen diesen Fasern einzelne Zellen in regellos zerstreuter Anordnung. Damit ist der Bau des Ringnerven auf einer Stufe angelangt, auf welcher er weiterhin in allen von mir untersuchten späteren Jugendstadien verharrt. Er besteht also aus einer oberflächlichen (d. h. der Aussenwelt zugekehrten) Zellenschicht und darunter einer zerstreute Zellen beherbergenden Faserschicht. Die fünf Radialnerven verhalten sich insofern ähnlich wie die fünf von ihnen begleiteten Radialkanäle des Wassergefässsystems, als sie unter sich ungleich an Dicke und Länge sind und sich auch in histologischer Beziehung ungleich schnell entwickeln. Wie unter den Radialkanälen, so ist auch unter den Radialnerven der mediane ventrale gegen die vier übrigen im Vorsprung und unter diesen letzteren sind wiederum die zwei dorsalen den beiden ventralen voraus. Schon am 8. Tage reicht die Anlage des medianen ventralen Nerven bis hinter die Anlage der beiden ersten Füsschen und überragt hier nach hinten das blinde

Ende des mittleren ventralen Radialkanales um ein Weniges. Histologisch verhält sich der mittlere ventrale Radialnerv ähnlich wie der Ringnerv, indem er am 8. Tage nur aus Zellen, am 9. aber nur aus einer oberflächlichen Zellenschicht und einer darunter befindlichen feinen Längsfaserschicht besteht. Die Sonderung dieser Faserschicht beginnt im proximalen Theile des Nerven und schreitet von hier allmählich bis zum distalen Theile fort, doch bleibt das äusserste Ende des Nerven in den von mir untersuchten Jugendstadien stets rein zellig. Nur in einem Punkte bleibt der mediane ventrale Radialnerv zeitlich hinter den Ringnerven zurück, nämlich in Bezug auf das Auftreten von Zellen im Innern der Faserschicht. Zur selben Zeit (13. Tag), zu welcher man in der Faserschicht des Ringnerven Zellen antrifft, fehlen solche noch gänzlich in der Faserschicht des Radialnerven. Am 12. Tage lassen auch die beiden seitlichen dorsalen Radialnerven die Sonderung in äussere Zellen- und innere Faserschicht erkennen, während dieselbe Sonderung in den beiden seitlichen ventralen Radialnerven erst am 18. Tage bemerkbar wird. Anfänglich ist die Zellenschicht der Radialnerven zwei- bis dreischichtig, später aber nur einschichtig und stellt dann die von dem erwachsenen Thiere bekannten äusseren Randzellen des Nerven dar.

Vom Ringnerv gehen am 9. Tage fünf interradial entspringende Fühlernerven ab, welche sich der Muskelschicht der Fühlerkanäle an deren dem Munde zugekehrten Seite auflagern. Am 17. Tage sieht man vom hinteren Bezirke des medianen ventralen Radialnerv jederseits einen Nervenast zu dem primären Füsschen gehen.

Schon am 8. Entwickelungstage hat das junge Nervensystem nirgends mehr irgend einen Zusammenhang mit dem Ektoderm der Körperoberfläche oder des Mundvorhofes; überall ist es vom Ektoderm durch zwischengelagertes Mesenchym geschieden. Indessen grenzt die Aussenfläche des Ringnerven und der Radialnerven nicht unmittelbar an dieses Mesenchym, sondern ist davon durch einen Spaltraum getrennt, welcher sich durch das ganze spätere Leben am Ringnerv als Epineuralring und an den Radialnerven als Epineuralkanal erhält. Von Anfang an stehen Epineuralring und Epineuralkanäle mit einander in offenem Zusammenhang; diese sind nur Ausstrahlungen von jenem. Dagegen konnte eine Verbindung der epineuralen Räume mit irgend einem anderen Hohlraum des Körpers nicht nachgewiesen werden. Aus diesen Beobachtungen ergibt sich, dass Hérouard ganz im Recht ist, wenn er den Epineuralring und die Epineuralkanäle des erwachsenen Thieres als normale Gebilde betrachtet. Auch die Fühler- und Füsschennerven sind von epineuralen Räumen begleitet; diejenigen der Fühlernerven zweigen vom Epineuralring, diejenigen der Füsschennerven vom betreffenden radialen Epineuralkanal ab.

Bis zum 20. Tage liegen die jungen Radialnerven unmittelbar der Aussenwand der Radialkanäle auf. Erst an diesem Tage beginnt — und zunächst auch nur im mittleren ventralen Radius — ein sehr feiner Spalt zwischen der Innenseite des Radialnerven und der Aussenseite des Radialkanales sichtbar zu werden. Wahrscheinlich ist diese Spalte die Anlage des späteren radialen Pseudohaemalkanales. Sobald die Spalte gebildet ist, rücken von den Seitenrändern des Radialnerven herkommende Zellen an die Aussenwand der Spalte, um hier zu den inneren Randzellen des fertigen Radialnerven zu werden.

Dagegen vermochte ich auch in den spätesten der untersuchten Stadien weder die aufrechten Fasern, noch die quere Scheidewand, noch eine Andeutung der von den äusseren Randzellen gebildeten beiden Zellensäulen zu erkennen und glaube deshalb vermuthen zu dürfen, dass alle diese von den Radialnerven der erwachsenen Thiere bekannten Einrichtungen als secundäre Erwerbungen zu betrachten sind.

Nach Gehörorganen, die ich auf Grund allgemeiner Überlegungen zu finden hoffte, habe ich ganz vergebens gesucht. In keiner Form und in keinem Entwickelungsstadium, weder am Ringnerven noch an den Radialnerven vermochte ich irgend etwas derartiges zu entdecken.

Die Muskulatur der Körperwand wird von den Zellen des parietalen Enterocoels geliefert. Zuerst bildet sich der mittlere ventrale Längsmuskel, den man schon am 9. Tage als eine feine einfache Längsfaserschicht an der Innenseite des mittleren ventralen Radialkanals wahrnehmen kann. Am 13. Tage ist die Anlage dieses Muskels schon etwas breiter geworden als der Querdurchmesser des Radialkanales. Die einzelnen Fasern, aus denen der Muskel besteht, liegen enger zusammen als die Muskelfasern in der Aussenwand des Radialkanals, von denen sie sich später auch noch durch die mehr als doppelte Dicke der einzelnen Fasern unterscheiden. Vorne beginnt der junge Längsmuskel (wie beim Erwachsenen) an der Aussenseite des betreffenden Radialstückes des Kalkringes; hinten reicht er bis in die Gegend des Ursprunges der beiden ersten Füsschenkanäle.

Erst nachdem der mittlere ventrale Längsmuskel gebildet ist, bemerkt man am 15. Tage vereinzelte Quermuskelfasern auf der Aussenfläche des parietalen Enterocoels und am 18. Tage ist eine in den Radien unterbrochene Quermuskellage der Körperwand deutlich erkennbar. Am After rücken die Quermuskelfasern dichter zusammen und bilden in dessen Umkreis (45. Tag) einen Schliessmuskel.

Die vier Längsmuskeln der seitlichen Radien schliessen sich in der Reihenfolge ihres Auftretens und in ihrer anfänglich ungleichen Stärke an die Verhältnisse der Radialkanäle und Radialnerven an, indem auch unter ihnen die beiden seitlichen dorsalen den beiden seitlichen ventralen, sowohl zeitlich als auch in ihrer räumlichen Ausdehnung voran gehen. Jene bemerkt man zuerst am 17. Tage, diese erst am 45. Tage.

Sehr spät scheint die Abspaltung der Rückziehmuskeln von den Längsmuskeln zu erfolgen, da ich die erste Spur davon erst bei einigen Individuen des 111. Tages wahrnehmen konnte.

Die Kalkkörper der Haut treten bereits im tonnenförmigen Larvenstadium auf und werden sämmtlich in die junge Cucumarie mit hinübergenommen, so dass ein eigentliches, der Larve eigenthümliches Larvenskelett überhaupt nicht vorhanden ist. Jedes Kalkkörperchen hat anfänglich die Gestalt eines winzigen Stäbchens, welches sich durch wiederholte, stets unter einem Winkel von 120° stattfindende Vergabelungen seiner Enden und weiterhin durch Verwachsung der aufeinander stossenden Gabeläste zu einem kleinen Gitterplättchen entwickelt. Dabei lässt sich nachweisen, dass gleichzeitig ein Dickenwachsthum der Kalkstäbe durch Apposition stattfindet. Die Hérouard-sche Ansicht, wonach jeder Masche des Gitterplättchens nur eine einzige Bildungszelle entspricht, findet in meinen Beobachtungen keine Stütze; ich sehe vielmehr mit aller Bestimmtheit, dass in jeder Masche meistens mehrere, nämlich zwei bis sechs Bildungszellen liegen. Die fünf vordersten Gitterplättchen sind so angeordnet, dass ihre Längsaxen genau in die Richtung der Radien fallen. In ihrer Gesammtheit bilden diese fünf Plättchen eine fünfzackig vorspringende schützende Umgebung des Fühlerkranzes. Jeder Fühler entspricht seiner Stellung nach der Berührungslinie zweier Plättchen. An diese fünf oralen Gitterplättchen (= Pseudoralplatten) schliessen sich weiter nach hinten ähnlich geformte Plättchen an, welche anfänglich sich ebenso wenig berühren, wie das die oralen Plättchen bei ihrem ersten Auftreten thun. Bald aber werden sie grösser und zahlreicher, legen sich dicht zusammen und schieben sich nunmehr mit ihren Rändern in der Weise dachziegelig übereinander, dass ihr Vorderrand den Hinterrand des nächstvorhergehenden Plättchens überlagert. Auch in der Wand der Fühler und Füsschen treten sehr bald kleinere Gitterplättchen in grosser Menge auf. Gegen den 100. Entwickelungstag sieht man in der Rumpfhaut eine zweite Sorte von Kalkkörperchen auftreten, welche oberflächlicher liegt als die bisher allein vorhandenen Gitterplättchen. Sie zeichnet sich durch auffallende Kleinheit, Zierlichkeit und reiche Verästelung aus und hat eine derart gewölbte Gestalt, dass sie ihre concave Seite nach aussen, ihre convexe Seite nach innen richtet. Genaueres über die Form, Entstehung und Anordnung der Kalkkörper und ihre

Beziehung zu den Kalkkörpern des erwachsenen Thieres wird in der ausführlichen Abhandlung an der Hand von Abbildungen mitgetheilt werden. Ebendort wird auch der Nachweis erbracht werden, dass der Kalkring von der Körperwand aus gebildet wird und bemerkenswerthe Beziehungen seiner Radialstücke zu den Ambulacralstücken des Seestern-Skelettes erkennen lässt.

Haut und Mesenchym. Nicht ohne Interesse erscheint mir der Umstand, dass sich nach dem völligen Verschwinden der Wimperreifen der Larve eine scharfe Grenze weder zwischen dem Ektoderm und dem Gallertkern des Kopfbuckels (so lange dieser noch im Nacken der jungen Cucumarie vorhanden ist), noch auch zwischen dem Ektoderm und dem Mesenchym der Rumpfwand nachweisen lässt. Ektoderm und Mesenchym bilden bei den jungen Cucumarien ein einheitliches Gewebe, welches sich erst später in ein deutliches Epithel und eine darunter gelegene Bindegewebsschicht sondert.

Blutgefässsystem. Die Vermuthung, dass das Blutgefässsystem sich, ebenso wie ich das früher an einem Seesterne zuerst dargethan habe, auf Reste der Furchungshöhle oder doch auf Spalträume im Mesenchym werde zurückführen lassen, hat sich völlig bestätigt. Zwischen dem visceralen Blatte des Enterocoels und der Entodermwand des Mitteldarmes tritt am 13. Tage ein deutlicher Zwischenraum auf, welcher zum Theil sich zu den Randgefässen des fertigen Darmes ausbuchtet, zum anderen Theile zu den in der Dicke der fertigen Darmwand befindlichen Bluträumen wird. Schon am 17. und 18. Tage kann man die Ausbildung eines mesenterialen und eines antimesenterialen Randgefässes am Mitteldarm beobachten, zu welchen sich an den nächsten Tagen ein einfaches Quergefäss hinzugesellt.

In ähnlicher Weise wie zwischen dem visceralen Blatte des Enterocoels und dem Entoderm des Mitteldarms lacunäre Gefässe zur Ausbildung kommen, so auch zwischen dem parietalen Blatte des Enterocoels und dem Mesenchym der Körperwand. Da nur im Bereiche der Radien ein festes, inniges Verwachsen des parietalen Enterocoels mit der Körperwand erfolgt, so bleibt in den Zwischenräumen, also in den Interradien, zwischen dem Enterocoel und der Körperwand eine Lücke übrig, welche sich schon bei ganz jungen Entwickelungsstadien nachweisen lässt und mit der von Hérouard an dem erwachsenen Thiere beschriebenen grossen Lacune der Körperwand identisch ist.

Verdauungsorgane. Der schon erwähnte Mundvorhof ist von einem einschichtigen, sehr niedrigen Epithel ausgekleidet, welches sich unmittelbar in den äusseren Überzug der Fühler fortsetzt. Im Grunde des Mundvorhofes liegt die Mundöffnung, welche am 8. und 9. Entwickelungstage ausserordentlich eng ist und noch keine Nahrung aufnimmt. Die später so ausgeprägte Windung des Darmes ist schon am 9. Tage angedeutet und verläuft von Anfang an in derselben gesetzmässigen Richtung wie bei den erwachsenen Thieren. Der Vorderdarm verjüngt sich nach hinten und ist schon am 12. Tage durch feine radiäre Bindegewebsstränge an die Innenseite des jungen Kalkringes befestigt. Nicht minder deutlich und viel zahlreicher sind zur selben Zeit die Aufhängestränge, welche den Enddarm mit der Körperwand verbinden. Am 15. Tage hat sich der Mitteldarm bedeutend erweitert; der Vorderdarm setzt sich jetzt durch eine scharfe Einschnürung von demselben ab. Am 17. Tage konnte ich von aussen aufgenommene Nahrung (Diatomeen) im Mitteldarm bemerken, obschon zu dieser Zeit der im Gallertkern des Kopfbuckels aufgespeicherte Nahrungsvorrath noch nicht aufgebraucht ist. Jetzt sind auch Mund und Vorderdarm geräumiger als früher geworden und die Schleimhaut des letzteren lässt deutliche Längsfalten erkennen. Ferner besitzt der Vorderdarm nunmehr (18. Tag) eine Schicht von deutlichen Ringmuskelfasern, welche mir keineswegs von Mesenchymzellen, sondern von den dem Vorderdarm dicht aufliegenden Enterocoelzellen abzustammen scheinen. Vom Mitteldarm schnürt sich ein vorderstes Stück ab, welches zum Magen des fertigen Thieres wird, jetzt aber noch ebensowenig Muskelfasern in seiner Wand besitzt wie der übrige Mitteldarm. Auch in den späteren von mir untersuchten Stadien vermisse ich an Magen und Mitteldarm die Muskelfasern, während am Enddarme vom 45. Tage an Längsmuskelfasern deutlich zu erkennen sind.

10. Über die Bedeutung der Concentrationsänderungen des Meerwassers für das Leben der Algen.

Von Dr. Friedrich Oltmanns
in Rostock.

(Vorgelegt von Hrn. Pringsheim am 15. Januar; — gedruckt im Bericht vom 19. Februar [St. X]; — ausgegeben am 26. Februar.)

Hierzu Tafel I.

Seit einigen Jahren beschäftigen mich Versuche, welche darauf abzielen, die bisher vernachlässigte und doch für die Untersuchung so wichtige, ja häufig unerlässliche Cultur der Meeresalgen bez. der Algen überhaupt rationeller zu gestalten und sie von Zufälligkeiten aller Art, welchen sie unterworfen war, frei zu machen. Das ist bis zu einem gewissen Grade gelungen; bei geeigneter Herabsetzung und Regulirung der Temperatur, bei richtigem Zusatz frischen Wassers, durch Ausprobiren der für jede Species erforderlichen Helligkeit, die auch für die Vertheilung der Algen in der See eine ungemein grosse Rolle spielt, konnte ich einzelne Formen lange Zeit (bis zu zwei Jahren) ungestört zum Wachsen bringen. Darüber soll demnächst an anderer Stelle ausführlicher berichtet werden.

War auch die Feststellung der wichtigsten Regeln für die Culturtechnik Hauptaufgabe, so konnten dieselben doch nur unter genauer Berücksichtigung der Bedingungen, welchen die Algen im Freien unterworfen sind, gewonnen werden; und umgekehrt mussten auch die bei den Culturversuchen gemachten Erfahrungen wieder ein Licht auf die Ursachen der Verbreitung der Algen im Meer werfen. Von den in dieser Richtung erlangten Resultaten soll eins im Folgenden kurz besprochen werden.

Es ergab sich nämlich, dass den Concentrationsänderungen des Seewassers, sagen wir kurz dem Salzwechsel, eine nicht zu unterschätzende Bedeutung insofern zukommt, als eine rasche Veränderung des Salzgehaltes, besonders an Orten, an welchen sie zur Regel wird, eine bedeutende Verarmung der Flora herbeiführt, während Plätze mit relativ constantem Salzgehalt eine reiche Flora beherbergen.

Die Versuche, welche zu der eben ausgesprochenen Auffassung führten, waren folgende. Halb erwachsene Exemplare von *Fucus vesiculosus* waren am 1. October 1889 in Warnemünde in Glasgefässe mit dem nöthigen Wasser eingesetzt. Am 7. October wurden sie im Institut in anderes Wasser von gleicher Temperatur übertragen, das Tags zuvor aus der See geholt war. Am folgenden Morgen war das Wasser gebräunt; die oberen Theile der Pflanzen hatten sich scheinbar nicht verändert, zeigten aber im Verlauf einer Woche ein messbar verlangsamtes Wachsthum; die unteren Regionen waren kastanienbraun geworden, ohne damit völlig zu Grunde zu gehen. Diese Erscheinungen wiederholten sich bei *Fucus* regelmässig; die umgesetzten Exemplare wuchsen pro Tag $0^{mm}.1$, höchstens einmal $0^{mm}.2$, solche dagegen, welche das ursprüngliche Wasser behalten hatten, zeigten fast alle einen täglichen Zuwachs von $0^{mm}.3$.

Da bei Warnemünde der Salzgehalt des Seewassers sich oft erheblich verändert, so dass nach Ablauf von 8 Tagen häufig eine Vermehrung des Salzes z. B. von 1.0 Procent auf 1.5 Procent eintritt, lag es nahe, anzunehmen[1], dass auch zwischen dem 1. und 7. October bez. zwischen den folgenden Terminen, in welchen frisches Seewasser geholt worden war, Ähnliches erfolgt sei, dass demgemäss die im ersten Augenblick auffallende Schädigung der Pflanzen in der plötzlich veränderten Concentration ihren Grund habe. Bestimmt man nun in den Culturen den Salzgehalt durch Titriren des Chlor's[2] oder durch Ermittelung des specifischen Gewichts[3] und stellt sodann in einem Quantum Seewasser genau dieselbe Concentration her, so bemerkt man nach dem Umsatz der *Fuci* in dieses keine der genannten Störungen, die Pflanzen wachsen durchaus normal weiter.

Im Freien bleibt aber, wie schon angedeutet wurde, der Salzgehalt nicht constant, er wechselt erheblich; immerhin vollzieht sich der Wechsel in den meisten Fällen recht langsam. Verfährt man mit den Culturen dementsprechend, d. h. leitet man frisches Wasser tropfenweise in dieselben ein, so sind keinerlei Abnormitäten zu verzeichnen, man kann mit der nöthigen Vorsicht in Culturen mit 1.8 Procent Salz Seewasser von 1.0 Procent einführen, ohne die Pflanzen zu schädigen. Aber Vorsicht ist auch geboten; bei zu raschem Einleiten des frischen Wassers trat wieder Bräunung der Culturflüssigkeit, verbunden mit allen bekannten Krankheitssymptomen auf. Die Verlangsamung des Wachsthums geht aus der folgenden Tabelle hervor.

---

[1] Durch die von anderer Seite in Warnemünde gleichzeitig gemachten Aufzeichnungen wurde diess bestätigt. Ich selbst habe im Anfang den Salzgehalt nicht immer bestimmt, weil ich im ersten Augenblick nicht wusste, worauf es ankam. Die besprochenen Erscheinungen waren von den durch abnormes Licht hervorgerufenen zunächst schwer zu trennen.

[2] Vergl. Jacobsen, physikal.-chem. Unters. d. Pommerania-Exped. 1871.

[3] Karsten, Tabellen z. Berechnung der Beobacht. auf d. Küstenstationen.

Alle Culturen standen neben einander vor einem Fenster, sie waren am 19. October in Warnemünde eingesetzt, blieben alle bis zum 30. October in demselben Wasser, dann wurde in die in Tab. I genannten frisches Wasser von anderer Concentration eingeleitet, und zwar so, dass dasselbe aus einem Capillarrohr von mässigem Durchmesser in einem dünnen Strahl ausfloss. Die Pflanzen der Tab. II erhielten kein frisches Wasser.

I			II		
Spross Nr.	Täglicher Zuwachs		Spross Nr.	Täglicher Zuwachs	
	v. 20.—30. Oct.	v. 1.—20. Nov.		v. 20.—30. Oct.	v. 1.—20. Nov.
1	$0^{\text{mm}}.31$	$0^{\text{mm}}.19$	1	$0^{\text{mm}}.35$	$0^{\text{mm}}.38$
2	0.38	0.19	2	0.20	0.26
3	0.38	0.19	3	0.25	0.23
4	0.31	0.19	4	0.20	0.10 [1]
5	0.31	0.19	5	0.20	0.23
			6	0.20	0.23

An *Polysiphonia nigrescens* liessen sich bislang keine Messungen anstellen; alles was ohne diese an der Pflanze beobachtet werden konnte, stimmt mit den Erfahrungen an *Fucus vesiculosus* überein; z. B. vollzieht sich der Umsatz aus dem Culturwasser in ein Gemenge von Nord- und Ostseewasser, das vorher auf gleiche Concentration und Temperatur gebracht war, so glatt, dass nicht einmal die Entleerung und Keimung der sonst so empfindlichen Tetrasporen dadurch gestört wird. Plötzliche Überführung in abweichende Concentrationen, z. B. aus 1.50 Procent in 0.90 Procent ruft ausser einer gelbgrünen Verfärbung der ältesten Theile an den Vegetationspunkten papillenartige Vorwölbungen mit etwas verdickter Membran hervor, welche später zum Theil als normale Äste weiter wachsen. Ausserdem bilden sich an den nicht vergilbten Partien gut gedeihende Adventivsprosse. Langsames Einleiten beliebig starken Salzwassers stört auch hier in keiner Weise.

Wird eine Wiederholung der genannten Eingriffe vermieden, so erholen sich, bei richtiger Behandlung, *Fucus* und *Polysiphonia* vollständig; an den Exemplaren letzterer Art waren nach 4—5 Monaten alle Spuren der ursprünglichen Störung verwischt, an *Fucus*-Individuen noch viel früher.

Für die Züchtung der Algen ergeben sich aus dem Angeführten die Regeln von selbst. Man verwende übrigens aus Gründen, die später ausführlicher erörtert werden sollen, nur Glasröhren und Glashähne zum Einleiten frischen Wassers.

[1] Kleiner Seitenspross, der später Conceptakeln bildete.

Die Erscheinungen, welche wir kennen lernten, werden nur erklärlich, wenn wir den Turgor als die nächste und hauptsächlichste Ursache derselben ansehen. Es unterliegt keinem Zweifel, dass die Zellen ihren Turgor dem sie umgebenden Medium durch Steigerung oder Herabminderung innerhalb gewisser Grenzen anpassen können. Wenn im Meer oder in den Culturen die Concentration langsam verändert wird, so folgen die Algen diesen Schwankungen durch Veränderung des Druckes in ihren Zellen, ohne Schaden zu nehmen. Störungen treten aber sofort ein, wenn der Salzgehalt plötzlich oder doch sehr schnell steigt und sinkt, dann können die Zellen nicht oder nicht alle den an sie plötzlich gestellten Anforderungen gerecht werden. Sie werden geschädigt und zwar die älteren Theile mehr, als die iüngeren, was ohne weiteres durch die Bräunung angezeigt wird (die übrigens nicht mit Tödtung gleichbedeutend ist).

Diese Auffassung bestätigt Eschenhagen[1], welcher durch plasmolytische Versuche zeigte, dass die älteren Zellen von Schimmelpilzen ihren Turgor langsamer erhöhen, als die jüngeren, wenn sie in concentrirtere Lösungen überführt werden. Wie ich bei *Polysiphonia*, so konnte Eschenhagen bei den Schimmelpilzen an der Spitze der Fäden durch rasch veränderte Concentration Anschwellungen hervorrufen, welche später zu normalen Zweigen weiter wuchsen; wohl ein unzweideutiger Beweis dafür, dass hier gleichartige Erscheinungen vorliegen.

Gehen wir zu den Verhältnissen im Freien über, so wird es nach dem Ausfall der Versuche für viele Algen nicht auf die absolute Höhe des Salzgehaltes, nicht auf die Jahres- oder Monatsmittel, sondern auf den Salzwechsel ankommen. Bestimmte Arten werden nur dort gedeihen, wo sich der Wechsel der Concentration langsam vollzieht, sie werden verschwinden müssen, sobald häufige und rasche Veränderungen im Salzgehalt die Kräfte übermässig in Anspruch nehmen. Die eine Species wird in dieser Richtung leistungsfähiger sein als die andere, und so muss an jedem Punkt des Meeres sich das Bild der Flora abhängig erweisen von dem Salzwechsel.

Das lässt sich nun zunächst für einzelne Punkte ganz bestimmt nachweisen. Die bei Rostock etwa 1^{km} breite Unterwarnow erweitert sich mehr nördlich, vor Warnemünde, zu einem haffartigen Gebilde, dem Breitling, der durch Dünen gegen die Ostsee abgegrenzt ist;

[1] Eschenhagen, über den Einfluss von Lösungen verschiedener Concentration auf das Wachsthum von Schimmelpilzen. Stolp 1889.

nur ein ungefähr in süd-nördlicher Richtung verlaufender ca. 50^m breiter Kanal, der »Strom« verbindet den Breitling mit der Ostsee.[1] In demselben geht fast ständig eine Strömung, die in ihrer Richtung wechselt, bald führt sie Brackwasser in die See, bald umgekehrt Salzwasser in den Breitling. Nun ist schon jedem Schiffer und Fischer bekannt, dass diese Strömung stets die Westseite bevorzugt; sowohl bei ausgehendem wie bei eingehendem Strom ist derselbe auf der Westseite stärker als auf der Ostseite, besonders in den Theilen des Fahrwassers, welche der See zunächst liegen. Dort, wo der Kanal an den Breitling ansetzt, werden diese Unterschiede zwischen Ost- und Westseite verwischt. Sie werden einerseits durch die Bodengestaltung, andererseits durch die eigenartigen, hier nicht näher zu schildernden Krümmungen des fraglichen Wasserlaufes bedingt.

An der Mündung des »Stromes« in die See sind, um die Hafeneinfahrt zu sichern, beiderseits starke Steindämme, die Ost- und Westmole, aufgeführt. Durch beide werden mit der Küste Buchten gebildet, welche eine relativ reiche Algenflora beherbergen.

Die genannten Strömungen müssen nun täglich und stündlich den Salzgehalt an jedem Punkt verändern und zwar überall in verschiedener Weise. Je stärker die Strömung an einem Orte, um so rascher vollzieht sich natürlich auch der Wechsel der Concentration. Um hierüber an den genannten Örtlichkeiten einen etwas bestimmtern Ausdruck zu erhalten, als diess durch die einfache Strombeobachtung unter Berücksichtigung der Farbeänderungen des Wassers möglich ist, wurden 12 Stationen markirt, an welchen 8 Tage lang Morgens und Abends Proben geschöpft und auf ihr specifisches Gewicht untersucht wurden. Für eine kurze Übersicht kommen nur die Buchten im Westen (Stat. 1) und Osten (Stat. 2), das Nordende des Stroms mit Stat. 4 auf seiner Ost- und Stat. 5 auf seiner Westseite in Frage, sowie Stat. 11 im Südende des »Stromes« (Mitte) und Stat. 12 im Breitling, etwa 20^m östlich von der Mündung des Stromes in diesen.

Auf Stat. 1 und 2 war der Salzwechsel ein recht geringer, immerhin aber zeigte er sich im Osten etwas stärker als im Westen, was auch schon durch die mikroskopische Wahrnehmung angedeutet wurde, dass bei ausgehendem Strom zuweilen Brackwasser in die Ostbucht gelangt, während die Westbucht fast niemals in dieser Weise betroffen wird.

Ist der Strom längere Zeit ein- oder ausgegangen, so findet man auf den beiden Stationen 4 und 5 den gleichen Salzgehalt, beobachtet man aber kurze Zeit nach dem Umsetzen der Strömung, so ergibt Stat. 4 bei ausgehendem Strom einen höhern, bei eingehendem einen

[1] Vergl. die beigegebene Karte.

niedrigern Salzgehalt. Diess Verhalten wurde, bei 11 maliger Beobachtung in 6 Tagen, 6 mal wahrgenommen, 4 mal waren beide Stationen gleich, nachdem die Wasserbewegung längere Zeit die gleiche Richtung inne gehalten hatte, und nur einmal wurde auf 4 ein mindestens ebenso rascher Salzwechsel wahrgenommen, als auf 5. Aus dem Gesagten ergibt sich als Regel, dass der Salzgehalt auf der Westseite wesentlich rascher verändert wird — bei veränderter Stromrichtung — als auf der Ostseite. Dass auf eine Entfernung von 50^m solche Unterschiede vorhanden sind, kann nicht Wunder nehmen, fand ich doch an einer anderen Stelle des »Stroms« dicht am Ufer 0.94 Procent und zur selben Zeit etwa 3^m weiter nach der Mitte 1.01 Procent bei eingehender Strömung.

Bei Stat. 11 findet man einen ausserordentlich beschleunigten Salzwechsel im ganzen Querschnitt des Kanals; im Gegensatz dazu ist bei Stat. 12 in Zusammenhang mit schwacher Wasserbewegung ein sehr langsamer Concentrationswechsel nachweisbar.

Die eingehende Untersuchung der Algenflora, bei welcher ich mich, wie bei der Untersuchung des Wassers, auf die Oberfläche resp. 1—2 M. Tiefe beschränkte, weil sich das Licht, das bei den tiefer wachsenden Formen eine grosse Rolle spielt, schwer in Rechnung bringen lässt, ergab nun ein auffallendes örtliches Zusammentreffen des geringsten Salzwechsels mit der reicheren Flora, die uns gewiss auch die Ursache der Vertheilung offenbart.

Am reichsten ist die Vegetation in der Bucht an der Westmole entwickelt; manche Formen, welche hier in grosser Menge vorkommen, werden nicht immer in gleicher Üppigkeit an der Aussenseite der Ostmole (Stat. 2) gefunden, und besonders fällt es auf, dass *Fucus serratus* im Osten etwa $^1/_2{}^m$ tiefer steht, als im Westen, auch *Nemalion multifidum* ist bei niedrigem Wasserstand im Osten noch vom Wasser bedeckt, während es im Westen zu gleicher Zeit frei auf den Steinen liegt. Das kann nur in dem nachgewiesenen stärkeren Salzwechsel seinen Grund haben, der unmittelbar an der Oberfläche mehr bemerkbar wird, als in $^1/_2{}^m$ Tiefe. Man wird vielleicht einwenden, dass $^1/_2{}^m$ nichts ausmache, indess geht doch aus den vielen über den Salzgehalt der Ostsee angestellten Untersuchungen klar hervor, dass vielfach ganz erhebliche Veränderungen der Concentration an der Oberfläche eintreten, die schon in geringer Tiefe überhaupt nicht mehr wahrgenommen oder doch erheblich abgeschwächt werden.

Im Gegensatz zu der relativ üppigen Algenvegetation an der Aussenseite der Molen, ist dieselbe im Nordende des »Stromes« an der Westseite (bei Stat. 5 und Stat. 3) eine äusserst spärliche, obwohl hier ausgedehnte Steinflächen und Holzwerk zur Ansiedelung einladen. Hier werden im September fast nur Enteromorphen gefunden, und ebenso verhält sich der Durchstich vor dem Breitling (Stat. 11), auch hier ist fast alles mit diesen Proletariern bedeckt. Es muss sehr auffallen, dass diese beiden Plätze, welche sich im mittlern Salzgehalt unzweifelhaft erheblich unterscheiden, in ihrer Flora, wenigstens zu der Zeit wo ich untersuchte, so ausserordentlich ähnlich sind. Der starke Salzwechsel stellt beide gleich.

Ganz anders verhält sich die am Nordende der Stat. 5 gegenüber liegende Stat. 4. Dort wächst auf den vorhandenen Steinen *Fucus vesiculosus* in einem breiten Streifen, der nach Süden hin abnimmt, weil hier auch auf der Ostseite der Salzgehalt stärker wechselt. Die bei Stat. 4 unmittelbar am Ufer stehenden *Fucus*-Exemplare sind wesentlich grösser, als die nach der Mitte des »Stromes« zu wachsenden, offenbar deswegen, weil an den tieferen Stellen der Salzwechsel stärker ist; in der See kann man solche Unterschiede nicht wahrnehmen. Weiter nach dem Breitling zu kommen dann noch vereinzelte Exemplare des *Fucus* vor, welche sich mit Vorliebe an geschützte Stellen gleichsam verkriechen. Die Fahrrinne ist am Südende, nahe dem Breitling, wo ein rascher Strom geht, durch Balken und Bohlen eingefasst, das Wasser tritt aber durch Lücken in dem Holzwerk hinter dasselbe, hier kleine Tümpel und Streifen bildend. In diesen gedeihen die vereinzelten *Fucus*-Exemplare, ausserdem findet sich hier ziemlich reichlich *Ceramium tenuissimum* und *Ectocarpus confervoideus*, welche beide unmittelbar daneben im wechselreichen Fahrwasser fast ganz fehlen. Die beiden letzteren Formen fallen durch ihr massenhaftes Auftreten im Breitling an den Punkten auf, welche seitlich von der Mündung des »Stromes« in diesen liegen (Stat. 12). Hier bewohnen sie Steine und Pfähle am Ufer, ausserdem *Potamogeton pectinatus, Zostera marina, Zanichellia* u. a., welche übrigens auch, mit *Ceramium* bedeckt, im ganzen Strom vorkommen, an Stellen, wo nur mässiger Salzwechsel herrscht. Unter Verschweigung anderer Einzelheiten mag hier noch erwähnt sein, dass *Chorda Filum* sowohl westlich als östlich von den Molen in der See wächst, aber immer in einiger Entfernung von der Mündung des »Stromes«; im letztern selbst fand ich nur einige angeschwemmte Fäden, dagegen trifft man grosse Büsche der Pflanze in bedeutender Zahl im Breitling, aber wieder in bestimmter Distanz von der Strommündung.

Alle die vorgetragenen Thatsachen reden, wie mir scheint, eine deutliche Sprache; sie sind nur aus dem grössern oder geringern Salzwechsel erklärlich. Man wird aber nicht annehmen dürfen, dass ein einmaliger rascher Salzwechsel immer genügte, um den Pflanzen einen Standort zu verleiden; es kann sich wohl in den meisten Fällen nur um wiederholte Einwirkungen handeln.

Dadurch, dass im Breitling (mit etwa 0.4 Procent Salz) viele Pflanzen gut gedeihen, die im »Strom« fast fehlen, wird der Einwand beseitigt, dass im leztern das zulässige Minimum überschritten und deshalb die Algen getödtet würden. Der Breitling ist gewiss immer salzärmer als der Strom.

Weiter könnte man einwenden, dass die rasche Wasserbewegung an den fraglichen Punkten das Festheften der Keime verhinderte. Dagegen ist ausser manchem andern anzuführen, dass *Polysiphonia violacea* in der See, im »Strom« und im Breitling wächst, aber die Individuen, die z. B. bei Stat. 11 im rasch bewegten Wasser an den Pfählen festsitzen, sind völlig krüppelhaft und kaum zu erkennen. Also nicht das Festheften, sondern die Entwickelung wird gehemmt.

Ähnliche Vorkommnisse wie bei Warnemünde müssen sich auch an anderen Orten, besonders an Flussmündungen wiederholen, z. B. ist es mir sehr wahrscheinlich, dass die Algenflora bei Cuxhafen zum grossen Theil durch den raschen Salzwechsel ihren armseligen Charakter erhält.

Es ist mehrfach hervorgehoben worden, dass Algen, welche in der Nordsee an der Oberfläche vorkommen, in der Ostsee nur in einiger Tiefe gedeihen, z. B. wächst nach Reinke *Desmarestia aculeata* bei Kiel in 12^m Tiefe, bei Helgoland dagegen an der Oberfläche. Diese und viele andere Vorkommnisse sind immer auf den Salzgehalt geschoben worden, welcher nachweislich in der Tiefe höher ist, als an der Oberfläche. Indess wäre doch zu überlegen, ob nicht auch der Salzwechsel dabei eine Rolle spielt, der mit zunehmender Tiefe abgeschwächt wird. Wir hätten hier event. im Grossen dasselbe wie mit *Fucus serratus* und *Nemalion* bei Warnemünde im Kleinen, und müssten annehmen, dass die genannten Pflanzen den raschen Salzwechsel fliehen. Dass derartige Überlegungen nicht ganz von der Hand zu weisen sind, geht aus der folgenden Tabelle[1] hervor, welche deutlich zeigt, dass schon in 7^m Tiefe der Salzwechsel des Oberflächenwassers häufig nicht mehr verspürt wird.

1869 März	Friedrichsort			Forsteck	
	Oberfläche	$7^m.2$	$14^m.5$	Oberfläche	$7^m.2$
7.	2.19 Procent	2.20 Procent	2.20 Procent	2.12 Procent	2.15 Procent
8.	2.17 »	2.23 »	2.23 »	1.28 »	2.23 »
9.	1.43 »	2.17 »	2.20 »	1.85 »	2.20 »
10.	1.86 »	2.15 »	2.17 »	1.47 »	2.20 »
11.	2.12 »	2.15 »	2.17 »	1.61 »	2.17 »
12.	2.12 »	2.17 »	2.23 »	1.99 »	2.17 »

[1] Entnommen aus: H. A. Meyer, Untersuch. üb. d. physikal. Verhältnisse der westl. Ostsee.

In der Ostsee gibt es kaum eine Alge, welche nicht auch in der Nordsee vorkäme, und es ist kaum zweifelhaft, dass sämmtliche Algen der Ostsee durch Skagerrak und Kattegat aus der Nordsee einwanderten. Nun erscheint es ganz plausibel, anzunehmen, dass nur solche Arten aus dem salzreichern Wasser der Nordsee (etwa 3.5 Procent) eindrangen, welche auch in geringeren Concentrationen leben können, welche, nach dem von K. Moebius eingeführten Ausdruck, euryhalin sind, und es ist demnach kaum zu verwundern, dass in der westlichen salzreicheren Ostsee (1.7 Procent bei Sonderburg) sich die Flora sehr viel mannigfaltiger gestaltet, als z. B. im botnischen Meerbusen (mit 0.15 Procent Salz in den Schären von Haparanda), wo kaum noch Meeresalgen gefunden werden.

Die eben beschriebenen Wahrnehmungen leiten aber unwillkürlich hinüber zu der Vermuthung, dass die schwächere Entwickelung der Ostseeflora nicht allein auf Rechnung des abnehmenden Salzgehaltes zu setzen sei, sondern zum Theil auch zurückgeführt werden müsse auf den mit dieser Abnahme nothwendig verknüpften relativ grössern Salzwechsel.

Ganz abgesehen davon, dass die Schwankungen des Salzgehaltes beim Nordseewasser meistens in viel engeren Grenzen liegen, scheint mir das aus folgender Überlegung hervorzugehen. Wenn z. B. in der Nordsee die Concentration des Wassers von 3.00 Procent auf 3.25 Procent in 24 Stunden steigt, so bedeutet das eine Veränderung des Salzes um 8.25 Procent; finden wir in der Ostsee statt 1.00 Procent am nächsten Tage 1.25 Procent, so beträgt der Aufschlag 25 Procent. Mit den Concentrationsänderungen muss eine Steigerung oder Herabminderung des Turgors Hand in Hand gehen, falls die Pflanze gedeihen soll. Erfolgt nun die Turgoränderung auch nicht völlig proportional dem Salzwechsel[1], so ist doch klar, dass ein Turgorwechsel, welcher einer Concentrationsänderung von 8—10 Procent entspricht, leichter zu vollziehen ist, als ein solcher, welcher einer Veränderung von 25 Procent gerecht werden soll. Der erste Fall stellt, von relativ seltenen Annahmen abgesehen, die höchsten in der Nordsee vorkommenden Schwankungen dar, der zweite die in der Ostsee gewöhnlichen, aber keineswegs die grössten hier stattfindenden Veränderungen. Demnach ist die in der Ostsee durch den täglichen Salzwechsel geforderte und von den dort wachsenden Algen geleistete Arbeit schon unter normalen Verhältnissen eine wesentlich grössere als in der Nordsee; noch bedeutender muss aber die Adaption der Ostseealge sein, wenn eine Steigerung des Salzgehaltes von 1 Procent auf 1.5 Procent eintritt, was an vielen Orten nicht selten vorkommt.

---

[1] Vergl. Eschenhagen a. a. O.

Nach der vorgetragenen Auffassung müssten die in die Ostsee eingewanderten Arten nicht allein im Stande sein, ihren Turgor weit tiefer herabzusetzen, als das bei reinen Nordseealgen möglich ist. sondern sie müssten auch bezüglich des raschen Turgorwechsels leistungsfähiger sein. Die stenohalinen Arten können demnach ihren Turgor in kurzer Zeit nur um etwa 10 Procent erhöhen oder erniedrigen, die ausgeprägtesten euryhalinen dagegen sind im Stande, Turgorschwankungen von 30—50 Procent und noch mehr in derselben Zeit zu vollziehen. Ist diese Meinung richtig, so müsste es möglich sein, einige stenohaline Formen auch in Wasser von etwa 1 Procent Salz zum Wachsen zu bringen, wenn man die ursprüngliche concentrirte Lösung ganz langsam verdünnt.

Mit dem Gesagten gestaltet sich die Frage nach dem Salzbedürfniss der Meeresalgen immer bestimmter zu einer Turgorfrage. Ohne freilich experimentelle Belege beizubringen, hat auch Reinke[1] dieser Meinung Ausdruck gegeben. Die Sache hat manches für sich, wie folgende Überlegung zeigt. Ich sah *Potamogeton pectinatus, Myriophyllum, Spirogyren* u. a. bei Warnemünde an Orten wohl gedeihen, an welchen zur Zeit der Beobachtung der Salzgehalt etwa 1 Procent betrug; dass er dort auf mindestens 1.5 Procent zu anderen Zeiten steigen kann, ist zweifellos. Dieselben Species wachsen aber mit der gleichen Üppigkeit in Teichen und Seen des Binnenlandes, in welchen ihnen nur die im typischen Süss- und Brunnenwasser vorhandenen Salze geboten werden. Sie zeigen dadurch ganz unzweideutig, dass ihnen diese Salze als Nährstoffe genügen, dass das Salz des Meerwassers event. eine Zugabe ist, die sie vermuthlich deshalb ertragen, weil die Zellen im Stande sind, ihren Turgor entsprechend zu erhöhen und auch unter diesem erhöhten Druck zu arbeiten.

Berücksichtigt man nun weiter, dass in den Culturen die *Polysiphonia nigrescens* und der *Fucus* keine Unterschiede in ihrem Verhalten erkennen liessen, ob sie im Seewasser von 0.90 Procent oder von 1.70 Procent wuchsen, dass *Fucus vesiculosus, serratus* und viele andere an günstigen, vor Salzwechsel möglichst geschützten Stellen der Ostsee nicht kleiner sind, als in der Nordsee, dass sie hier wie dort gleich gut fructificiren und Keimlinge hervorbringen, so wird man zugestehen müssen, dass hier ein Überschuss von Salz sicher vorhanden ist, der als Nahrung nicht verwerthet wird und dessen event. schädliche Wirkung durch den erhöhten Turgor paralysirt wird. Für die typischen Salzpflanzen ist aber, nach dem, was wir heute wissen, ein gewisser minimaler Salzgehalt erforderlich. Ist

[1] Reinke, Algenflora der westlichen Ostsee. S. 15.

diess Minimum nun nothwendig als Nährmaterial? Wenn man bedenkt, dass die Pflanze auch Salze, die in ganz geringen Spuren in der Umgebung vorhanden sind, in sich aufspeichert, so ist es schwer vorstellbar, dass irgendwelche Salze des Meerwassers in mehreren Procenten vorhanden sein müssten, wenn sie nur Nährstoffe darstellen. Viel einfacher wird die Sache, wenn man annimmt, dass auch das Minimum des erforderlichen Salzgehaltes mit dem Turgor zusammenhängt. Als Gegengewicht gegen den äussern Salzgehalt hätte sich dann die Zelle eine erhöhte Turgorkraft angeeignet, und wäre nun nicht mehr im Stande diesen Turgor unter ein Minimum herabzusetzen.

Weitere Entscheidungen über die vorgetragene Auffassung müssen Experimente liefern, die ich anzustellen im Begriff bin. Sie werden uns event. auch darüber zu belehren haben, inwieweit der sehr hohe Kohlensäuregehalt des Seewassers die Pflanzen an diess Medium bindet.

Figurenerklärung.

Der beigegebene Plan ist die Copie eines Theils einer Karte, welche mir von Hrn. Hafenbaudirector Kerner in Rostock gefälligst zur Verfügung gestellt wurde.

Die Zahlen und die Punkte neben denselben bezeichnen die auf S. 197 genannten Stationen. Auch betreffs der übrigen Bezeichnungen vergleiche man S. 197.

11. Vorläufiger Bericht über die von Prof. Gustav Fritsch angestellten neuen Untersuchungen an elektrischen Fischen.

Von E. du Bois-Reymond.

(Vorgetragen am 26. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XII]; — ausgegeben am 5. März.)

Hr. Prof. Fritsch hat sich mit Unterstützung der Akademie wiederum nach Aegypten begeben, um seine im Herbst 1881 dort begonnenen Untersuchungen am Malopterurus und an den verschiedenen Arten von Mormyrus fortzusetzen. Am 4. Februar Nachts von Berlin aufgebrochen, erreichte er am 11. Alexandrien, wo er sowohl von dem deutschen Consul, Hrn. Hellwig, wie auch von dem Vertreter des Hauses Planta & Co., Hrn. Tschudi, der ihm schon bei jener früheren Gelegenheit sehr nützlich gewesen war, auf das Zuvorkommendste empfangen wurde. Hr. Tschudi nahm ihn mit einer Gastfreiheit, welche Hr. Fritsch nicht hoch genug rühmen kann, in dem directorialen Wohnhause seiner Baumwollenfabrik in Kafr-ez-Sayat auf, einem Ort im Delta, den Hr. Fritsch bei seinem früheren Aufenthalt als eine geeignete Station erkannt hatte. So sehr bewährte sich dieser Plan, dass er schon am 15. d., elf Tage nachdem er Berlin verlassen hatte, sieben Mormyriden, einen Hyperopisus (Mormyrus) dorsalis und sechs M. cyprinoides lebend in einer Wanne vor sich hatte, und im Stande war, uns unter demselben Datum folgendes wichtige Ergebniss zu melden.

Als Pacini'sche Regel bezeichnet man bekanntlich die von Pacini zuerst hervorgehobene Beziehung zwischen den Nervenendigungen im elektrischen Organ und der Richtung des Schlages, wonach die Fläche der elektrischen Platten, in welche sich die Nervenendigungen versenken, im Augenblick des Schlages negativ, die andere Fläche positiv wird. Diese Regel war dem Gymnotus- und dem Torpedo-Organ entnommen, da bei Gymnotus der Schlag im Organ vom Schwanz zum Kopfe geht, und die Nerven an der caudalen Fläche der Platten enden, bei Torpedo der Schlag vom Bauch zum Rücken geht, und die Nerven zur ventralen Fläche der Platten sich begeben. Auf diese

Regel sich stützend, hatte Bilharz vorhergesagt, dass bei Malopterurus, um dessen Kentniss er so hohe Verdienste hat, der Schlag wie bei Gymnotus gerichtet sein würde, da nämlich die zahllosen Verzweigungen der einzigen riesigen Nervenfaser, welche hier das Organ versieht, wie bei Gymnotus in die caudale Fläche der Platten überzugehen schienen. Eine sehr versteckt gebliebene Notiz des in Aegypten seiner Gesundheit halber sich aufhaltenden Florentiner Chirurgen Ranzi hatte aber schon gelehrt, dass Bilharz' Vorhersage nicht zutreffe, und der erste Versuch, den ich selber 1857 hier in Berlin an einem durch Goodsir aus Edinburgh mitgebrachten westafrikanischen Malopterurus anstellte und an demselben Tage der Akademie mittheilte, bestätigte vollauf diese Abweichung von der Pacini'schen Regel. Mittlerweile wandte sich die Aufmerksamkeit der Forscher dem einst von Stark entdeckten Organ im Schwanze der gemeinen Rochen zu, dessen Bau dem eines elektrischen Organs im Wesentlichen entspricht. Max Schultze sagte aus der Pacini'schen Regel vorher, dass, wenn dies Organ nach Art eines elektrischen Organs einen Schlag ertheile, die Richtung des Schlages dieselbe sein werde, wie am Malopterurus-Organ, also umgekehrt, wie bei Gymnotus. Doch war es lange Jahre nicht gelungen, solche Wirkungen des Organs nachzuweisen, obschon sich Joh. Müller selber auf Helgoland mittels des Multiplicators, Matteucci mittels des stromprüfenden Froschschenkels darum bemühten. Seitdem sind Charles Robin und Hr. Babuchin glücklicher gewesen, und neuerlich haben Prof. Burdon Sanderson und Mr. Gotch die Richtung des Schlages wirklich so gefunden, wie Schultze es vorhergesagt hatte, so dass in diesem dritten Beispiel die Pacini'sche Regel sich wieder bewährte, und dass nur der Malopterurus-Schlag ihr entzogen blieb.[1]

Ausser am gemeinen Rochen hatten sich nun aber auch an verschiedenen Fischen der süssen Gewässer Afrika's, bei dem Gymnarchus niloticus und bei der Schaar der Mormyriden, solche elektrischen Organen ähnliche Bildungen gefunden, denen man lange ebenso wenig wie dem Organ der Rochen elektromotorische Wirkungen hatte entlocken können. Nach vereinzelten Wahrnehmungen Hrn. Babuchin's war dies endlich Hrn. Fritsch bei seinem früheren Aufenthalt in Aegypten in unzweideutiger Weise geglückt, indem ein Mormyrus oxyrhynchus in seinen Händen binnen wenigen Stunden mindestens zwölf Schläge vier verschiedenen gebildeten Europäern ertheilte, welche sämmtlich mit der Wirkung elektrischer Apparate vertraut waren. Die Richtung

[1] Die Litteratur des Gegenstandes findet sich in meinen 'Gesammelten Abhandlungen zur allgemeinen Muskel- und Nervenphysik', Bd. II. S. 603. 604. 619—621, und im Archiv für Physiologie, 1889. S. 341.

des Schlages konnte Hr. Fritsch damals nicht bestimmen, da er keine Apparate bei sich hatte. Von hier ab erschien diese Bestimmung als eine der dringendsten Aufgaben in diesem Gebiete, um zu erfahren, ob der Mormyrus-Schlag der Pacini'schen Regel folge oder nicht.[1]

Zum Zweck dieser Ermittelung hat sich jetzt Hr. Fritsch mit den nöthigen Vorrichtungen aus dem physiologischen Institut versehen. Er hat bei sich das von mir einst als Museumsmultiplicator beschriebene Galvanoskop mit 4100 Windungen, welches schon Joh. Müller auf Helgoland zu seinen Versuchen am gemeinen Rochen angewendet hatte. Es schien vortheilhafter, zu diesen einfach auf die Bestimmung der Schlagrichtung abzielenden Versuchen sich solches Instrumentes zu bedienen, anstatt einer Bussole mit Spiegelablesung, deren Gebrauch viel umständlicher ist, und bei welcher es oft schwer hält, gleichzeitig zu beobachten und die nöthigen Handhabungen vorzunehmen.[2] Dem leichten und sehr parallelen Nadelspiel des Multiplicators war hier solche Astasie ertheilt worden, dass, um es auf dem Nullpunkt zu erhalten, eine kleine Stahlspitze zur Aufhebung der Ablenkungen durch die Drahtmassen angebracht werden musste. Die Empfindlichkeit war so gross, dass der Strom zwischen natürlichem Längsschnitt und künstlichem Querschnitt eines Froschmuskels die Nadel an die Hemmung warf und sie auf etwa 80° beständiger Ablenkung hielt. In Aegypten ausgepackt und aufgestellt zeigte das Instrument zwar etwas verminderte Astasie, die Empfindlichkeit war aber noch gross genug für die beabsichtigte Beobachtung, denn gleich der erste Schlag des etwa 30^{cm} langen Hyperopisus dorsalis warf die Nadel an die Hemmung, und die etwa nur zwei Drittel so langen M. cyprinoides gaben in derselben Richtung Ausschläge von 70—80°, während die nicht durch Kautschuk geschützten Finger die Entladung merklich spürten.

Die Richtung des Schlages war im Organ vom Schwanz zum Kopf. Da an den Mormyrusorganen die Nerven sich in die caudale Fläche der elektrischen Platten einsenken, gleichviel ob sie diese Fläche von hinten (M. cyprinoides), oder, indem sie die Platte erst durchbohren, von vorn (H. dorsalis) erreichen, so gehorcht also ihr Schlag, als viertes Beispiel, der Pacini'schen Regel.

Obschon der Erfolg am Galvanoskop als ein vollkommen sicherer erscheint, könnte man wünschen, ihn auf noch anderem Wege, durch

---

[1] Monatsberichte der Akademie. 1881. S. 1161—1164; — auch im Archiv für Physiologie, 1882. S. 71—74. — Vergl. auch Prof. Fritsch's grosses Werk über die elektrischen Fische, Erste Abtheilung, Malopterurus electricus. Leipzig 1887. Fol.

[2] Untersuchungen über thierische Elektricität. Bd. I. 1848. S. 202. — Über einige Vorzüge des alten Multiplicators mit Doppelnadel vor der Spiegelbussole s. Gesammelte Abhandlungen u. s. w. Bd. I. S. 145.

die Jodkalium-Elektrolyse, bestätigt zu sehen. Der bei diesem Verfahren unter gewissen Umständen, welche auch in den Zitterfisch-Versuchen stattfinden, auftretende secundäre Fleck macht den Versuch zu einem ziemlich umständlichen; um eine sichere Aussage über die Stromrichtung zu erhalten, bedarf man des sogenannten Froschunterbrechers.[1] Hr. Fritsch ist, neben dem Jodkalium-Elektrolysator, mit dem Unterbrecher und dem Froschwecker versehen, auch war er schon in den Besitz von Kröten als Ersatz für unsere Frösche gelangt. Es steht zu erwarten, dass er auch mit diesen Hülfsmitteln die gesetzmässige Richtung des Mormyrusschlages werde erkennen können.

Über sein Ergebniss sagt Hr. Fritsch wörtlich: »Da bei den »Mormyriden das nervöse Glied der Platte hinten liegt, so folgen sie »also der Pacini'schen Regel. Da der Aufbau ihrer Organe unzweifel»haft auf musculäre Abstammung hinweist, so ist die Stromrichtung »dieser Fische eine weitere Stütze für meine Behauptung, dass ab»weichende Stromrichtung wie bei Malopterurus erwiesen auch eine »abweichende Herkunft der Organe bekundet, die musculären aber in »der Stromrichtung unter sich vollkommen übereinstimmen, d. h. ent»gegengesetzt wie die adenoiden verlaufen.«

---

[1] Monatsberichte der Akademie. 1861. S. 1105 ff.; — Gesammelte Abhandlungen u.s.w. Bd.II. S.648 ff.; — Dr. Carl Sachs' Untersuchungen am Zitteraal u.s.w. Leipzig 1881. S. 163 ff.; — diese Berichte 1884. S. 201 ff.; — Archiv für Physiologie. 1885. S. 106 ff.

12. Über das analytische Problem der Rotation eines starren Körpers im Raume von vier Dimensionen.

Von Prof. F. Schottky
in Zürich.

(Vorgelegt von Hrn. von Helmholtz am 26. Februar; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XII]; — ausgegeben am 5. März.)

Die Aufgabe, die Bewegung eines starren Körpers im gewöhnlichen Raum zu bestimmen, für den Fall, dass keine Kräfte wirken, kommt bekanntlich zurück auf die Integration des folgenden Systems von 6 Differentialgleichungen:

$$(A_1 + A_2)\frac{dp_{12}}{dt} = (A_1 - A_2)\, p_{13} p_{23}$$

$$(A_2 + A_3)\frac{dp_{23}}{dt} = (A_2 - A_3)\, p_{21} p_{31}$$

$$(A_3 + A_1)\frac{dp_{31}}{dt} = (A_3 - A_1)\, p_{32} p_{12}$$

$$(p_{\alpha\beta} = -p_{\beta\alpha}\,,\; p_{\alpha\alpha} = 0)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{12} x_2 + p_{13} x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = p_{21} x_1 + p_{23} x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = p_{31} x_1 + p_{32} x_2$$

Um den Übergang zur höheren Dimension anzubahnen, sind hier die Bezeichnungen etwas anders gewählt als üblich ist. Der Schwerpunkt ist als fest angenommen; x_1, x_2, x_3 sind die Coordinaten eines willkürlichen, im Raume unveränderlichen Punktes, bezogen auf das im Raum bewegliche System der Hauptebenen des Körpers; p_{23}, p_{31}, p_{12} sind die Drehungsmomente für dieselben Ebenen. A_α ist die Constante $\Sigma m x_\alpha^2$, während für $\alpha \lessgtr \beta$: $\Sigma m x_\alpha x_\beta$ gleich o ist. Demnach bestimmen diese Gleichungen nicht direct die Bewegung des Körpers, sondern die scheinbare Bewegung des den Körper umgebenden Raums.

Wenn man die Voraussetzungen, die diesen Gleichungen zu Grunde liegen, auf den Raum von n Dimensionen ausdehnt, wenn man speciell einen starren Körper definirt durch die Bedingung, dass für je zwei Punkte die Relation

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (x_\alpha - x'_\alpha)^2 = \text{Const.}$$

bestehe, und wenn man das Princip von Lagrange ausdehnt zu der Formel:

$$\sum_m \left(\sum_{\alpha=1}^{n} m \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} \delta x_\alpha \right) = 0,$$

so kommt man zu einem im Wesentlichen schon von Hrn. Frahm (Math. Ann. Bd. 8) aufgestellten System von $\frac{n(n+1)}{2}$ Differentialgleichungen:

$$(A_\alpha + A_\beta) \frac{dp_{\alpha\beta}}{dt} = (A_\alpha - A_\beta) \sum_{\gamma=1}^{n} p_{\alpha\gamma} p_{\beta\gamma} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2 \dots n)$$

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = \sum_{\beta=1}^{n} p_{\alpha\beta} x_\beta \qquad (\alpha = 1, 2 \dots n).$$

Auch hier ist ein System von Hauptebenen im Körper für die Coordinaten gewählt; es ist:

$$\Sigma m x_\alpha^2 = A_\alpha \text{ und } \Sigma m x_\alpha x_\beta = 0 \text{ für } \alpha \lessgtr \beta,$$

und es sind $p_{12} = -p_{21}$, p_{13} etc., $x_1 \dots x_n$ die zu bestimmenden Functionen von t; sie haben ganz dieselbe Bedeutung wie im vorigen Falle.

Sobald n den Werth 4 übersteigt, scheint es sehr schwierig, die einzelnen $p_{\alpha\beta}$ und x_α als Functionen von t darzustellen. Auch für $n = 4$ ist der Weg hierzu erst vollständig klargelegt worden durch die scharfsinnige Arbeit von Hrn. Kötter, die am 22. Januar in dieser Akademie verlesen wurde. Hr. Kötter behandelt eine andere Aufgabe, nämlich die Bewegung eines Ellipsoids in einer Flüssigkeit. Indess in analytischer Beziehung decken sich beide Probleme, zwar nicht ganz, aber theilweise. Die wirkliche Darstellung der auftretenden Variabeln hat Hr. Kötter sich bei seinem Problem vorbehalten. Deshalb beschränkt sich der Verfasser der vorliegenden Untersuchung darauf, eine neue und einfache Art anzugeben, die Integrationen auf Quadraturen zurückzuführen. Die folgende Entwickelung ist ganz unabhängig von der Kötter'schen Arbeit und stammt aus einer Vorlesung über Probleme der Mechanik, die der Verfasser in diesem Winter am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich gehalten hat.

I. Der erste Schritt zur Lösung besteht darin, dass man statt $p_{\alpha\beta}$ die Producte

$$(A_\alpha + A_\beta)\; p_{\alpha\beta} = q_{\alpha\beta},$$

die ebenfalls alternirend sind, einführt. Dann hat man zunächst:

I.
$$\frac{dq_{12}}{dt} = (A_1^2 - A_2^2)\left\{\frac{q_{13}\,q_{23}}{(A_1+A_2)(A_1+A_3)(A_2+A_3)} + \frac{q_{14}\,q_{24}}{(A_1+A_2)(A_1+A_4)(A_2+A_4)}\right\},$$
$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{q_{12}\,x_2}{A_1+A_2} + \frac{q_{13}\,x_3}{A_1+A_3} + \frac{q_{14}\,x_4}{A_1+A_4}, \text{ etc.}$$

Nun lassen sich die hier auftretenden Coefficienten in folgender bemerkenswerther Weise ausdrücken. Man setze

$$A_\alpha^2 = a_\alpha;$$

ferner fasse man das symmetrische Product

$$(A_1 + A_2)\,(A_1 + A_3)\,\ldots\,(A_3 + A_4) = P$$

in's Auge. Dann ist:

$$\frac{1}{(A_1+A_2)(A_1+A_3)(A_2+A_3)} = \frac{(A_4+A_1)(A_4+A_2)(A_4+A_3)}{P}$$
$$= \frac{A_4^2(A_4+A_1+A_2+A_3) + A_4A_1A_2 + \text{etc.} + A_1A_2A_3}{P}.$$

Also ist:

$$\frac{1}{(A_1+A_2)(A_1+A_3)(A_2+A_3)} = ka_4 + l,$$

wo k, l zwei symmetrische Functionen der vier Trägheitsmomente bedeuten; nämlich:

$$k = \frac{A_1 + A_2 + \text{etc.}}{P}, \quad l = \frac{A_1A_2A_3 + \text{etc.}}{P}.$$

Ähnlich lässt sich der reciproke Werth von $A_1 + A_2$ darstellen. Denn multiplicirt man $ka_3 + l$ und $ka_4 + l$, so erhält man:

$$\frac{A_3 + A_4}{(A_1 + A_2)\,P}.$$

Wird hier $\frac{1}{P}$ hinzugefügt, so ergibt sich

$$\frac{k}{A_1 + A_2}.$$

Mithin ist:

$$\frac{1}{A_1 + A_2} = ka_3a_4 + l(a_3 + a_4) + m.$$

wo m eine dritte symmetrische Constante bedeutet, die durch die Gleichung

$$\frac{1}{P} = km - l^2$$

bestimmt ist.

II. Man setze nun:

$$kdt = du\,,\quad ldt = dv\,,\quad mdt = dw.$$

Dann sind u, v, w zunächst lineare Functionen von t. Aber das Gleichungssystem, das jetzt entsteht:

$$dq_{12} = (a_1 - a_2)\,(q_{13}\,q_{23}\,(a_4\,du + dv) + \ldots)$$
$$dx_1 = q_{12}x_2\,(a_3 a_4\,du + (a_3 + a_4)\,dv + dw) + \ldots \text{ etc.}$$

hat die Eigenthümlichkeit, dass es ein System totaler Differentialgleichungen darstellt, auch wenn u, v, w als ganz unabhängige Variabeln aufgefasst werden. Hierfür wäre allerdings der Beweis zu führen. Da er aber keine Schwierigkeit bietet, so möge er übergangen werden. Wir betrachten demnach von jetzt ab u, v, w als unabhängige Grössen und sehen die $q_{\alpha\beta}$ als zu bestimmende Functionen von u, v, die x_α als solche von u, v, w an. Zur Abkürzung mögen noch die linearen Ausdrücke

$$a_\alpha u + v\,,\quad a_\alpha a_\beta u + (a_\alpha + a_\beta)\,v + w$$

mit u_α, $u_{\alpha\beta}$ bezeichnet werden. Das System lautet dann:

$$2.\qquad dq_{12} = (a_1 - a_2)\,(q_{13}\,q_{23}\,du_4 + q_{14}\,q_{24}\,du_3),$$
$$3.\qquad dx_1 = q_{12}\,x_2\,du_{34} + q_{13}\,x_3\,du_{42} + q_{14}\,x_4\,du_{23},\ \text{etc.}$$

III. Für das System der sechs Gleichungen 2. lassen sich die fünf Integrale aufstellen:

$$4.\qquad \begin{cases} \dfrac{q_{12}^2}{a_1 - a_2} + \dfrac{q_{13}^2}{a_1 - a_3} + \dfrac{q_{14}^2}{a_1 - a_4} = C_1, \\[2ex] \dfrac{q_{21}^2}{a_2 - a_1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = C_2,\ \text{etc.,} \end{cases}$$

$$q_{23}\,q_{14} + q_{31}\,q_{24} + q_{12}\,q_{34} = C_0,$$

von denen aber nur vier unabhängig sind.

Indem man die Summe:

$$\sum_{\alpha=1}^{4} \left(\frac{C_\alpha}{a - a_\alpha}\right) + \frac{2\,C_0}{\sqrt{(a - a_1)\,(a - a_2)\,(a - a_3)\,(a - a_4)}} = \phi(a)$$

bildet, können die vier Gleichungen in die eine Formel zusammengefasst werden:

$$\left(\frac{q_{23}}{\sqrt{(a-a_2)(a-a_3)}}+\frac{q_{14}}{\sqrt{(a-a_1)(a-a_4)}}\right)^2+(.)^2+(.)^2=\phi(a),$$

die für einen willkürlichen Werth von a gilt.

Die vier Werthepaare, wofür $\phi(a)$ verschwindet, geben homogene Gleichungen zwischen den Grössen $q_{\alpha\beta}$. — Man sieht hier, dass alle Beziehungen zwischen diesen Grössen algebraische sind; dass demnach v und v Integralfunctionen dieses algebraischen Gebildes sind, deren vollständige Differentiale durch die Gleichungen 2. definirt werden.

IV. Geht man jetzt zu dem andern System:

$$dx_1=q_{12}x_2\,du_{34}+\ldots \text{ etc.}$$

über und betrachtet zunächst w allein als Veränderliche, so sind auch die $q_{\alpha\beta}$ Constanten, und man hat ein System linearer Gleichungen mit constanten Coefficienten:

$$\frac{\partial x_1}{\partial w}=q_{12}x_2+q_{13}x_3+q_{14}x_4, \text{ etc.}$$

Das allgemeine Integral hat demnach folgende Form:

$$x_\alpha=\xi_\alpha e^{i\kappa w}+\xi'_\alpha e^{i\kappa' w}+\text{ etc.},$$

wo κ, κ', κ'', κ''' die Wurzeln der Gleichung vierten Grades sind:

$$\begin{vmatrix} i\kappa & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & i\kappa & q_{23} & q_{42} \\ q_{31} & q_{32} & i\kappa & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & i\kappa \end{vmatrix}=0,$$

oder:

$$0=\kappa^4-\kappa^2(q_{12}^2+q_{13}^2+\ldots+q_{34}^2)+(q_{23}q_{14}+q_{31}q_{24}+q_{12}q_{34})^2.$$

Diese Wurzeln sind reell und paarweise entgegengesetzt; sie sind ausserdem nicht nur von w, sondern auch von u und v unabhängig. Die letztere Bemerkung hat schon Hr. FRAHM gemacht und sie bildet sogar den Hauptpunkt in der vorhin erwähnten Arbeit.

Ausserdem sind die Verhältnisse von $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ bestimmt durch die vier linearen Gleichungen:

$$i\kappa\xi_1=q_{12}\xi_2+q_{13}\xi_3+q_{14}\xi_4, \text{ etc.},$$

so dass zur vollständigen Bestimmung dieser particulären Integrale nur noch Quadraturen gehören. Ferner ist zu bemerken, dass, wenn man diese imaginären particulären Integrale, die den vier Wurzeln der Gleichung entsprechen, in ihre reellen Componenten zerlegt, diesen vier orthogonale Richtungen entsprechen, so dass der Übergang von der scheinbaren zur directen Bewegung ein leichter ist.

Will man nun zu dem ursprünglichen Problem zurückkehren, so hat man

$$u = kt, \quad v = lt, \quad w = mt$$

zu setzen.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

INHALTSVERZEICHNISS.

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE

aus den Jahren 1888, 1889, 1890.

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich zuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehenden des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug aus Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN
AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN
DER
KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwissen in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurde Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilunge und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis au heften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehör Stück wird Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen Gesellschaft Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständigen berichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zu zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht zu

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, nämlich
die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,
» » » Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,
» » » October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach Fertigstellung des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1890 nicht zugekommen sein sollten, werden hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Reclamationen Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1891 angebracht werden.

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des buchhändlerischen zuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Georg Reimer in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stücken:

SITZUNGSBERICHTE
DER
KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 *M.*

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN
AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN
DER
KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 *M.*

Georg Reimer's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sitzungsberichte« oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Schriften der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselben in Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit der Buchhandlung in Verbindung setzen.

92

MATHEMATISCHE

UND

RWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

ZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH
CHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT IV.

APRIL 1891.

BERLIN 1891.
KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch [illegible] zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.

15. Die LEGENDRE'sche Relation.

Von L. KRONECKER.

(Vorgetragen am 2. April; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XVIII]; — ausgegeben am 9. April.)

Die bilineare Gleichung, welche zwischen den vollständigen elliptischen Integralen erster und zweiter Gattung mit beliebigem Modul und denjenigen mit complementärem Modul besteht, wird von LEGENDRE im Cap. XII p. 60 des 1825 erschienenen ersten Bandes seines Werkes *Traité des fonctions elliptiques* zuvörderst auf Grund zweier im Cap. XI p. 59 entwickelten Gleichungen für die besonderen Moduln $\frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ hergeleitet und erst dann in höchst einfacher Weise auf den Fall beliebiger Moduln ausgedehnt, indem gezeigt wird, dass die Differentiation von:

$$FE' + F'E - FF'$$

nach einem der Moduln als Resultat Null ergiebt. Hieraus folgt nämlich offenbar, dass der angegebene Ausdruck, in welchem F, E die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für den einen Modul und F', E' diejenigen für den complementären Modul bedeuten, für **jedes** Paar zu einander complementärer Moduln eben denselben Werth $(\frac{1}{2}\pi)$ hat, welcher für das specielle Paar complementärer Moduln $\frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ ermittelt worden ist.

Dabei verdient hervorgehoben zu werden, dass schon in dem art. XVII, welcher den Schluss der zweiten Abhandlung LEGENDRE's »über die Integrationen durch Ellipsenbögen« bildet,[1] die Anfänge der Entwickelungen erkennbar sind, welche im XI. Capitel Nr. 43 seines Werkes über die elliptischen Functionen auf die Relation:

$$FE' + F'E - FF' = \frac{1}{2}\pi$$

für das Modulpaar $\frac{1}{2}\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$ führen. Ich möchte deshalb glauben, dass LEGENDRE schon bald nachher, also etwa vor einem Jahrhundert, die Relation gefunden hat. Eine Angabe über den Zeitpunkt der Auffindung hat LEGENDRE weder an der citirten Stelle seines *Traité*

[1] Second Mémoire sur les intégrations par arcs d'ellipse et sur la comparaison de ces arcs. Par M. LE GENDRE. Histoire de l'Académie Royale des Sciences. Année 1786 p. 679—683.

des fonctions elliptiques noch an der entsprechenden Stelle des ersten, im Jahre 1811 erschienenen Bandes seiner *Exercices de calcul intégral* gemacht, vielleicht aber in der 1794 erschienenen Abhandlung »*Mémoire sur les transcendantes elliptiques*«, welche ich nicht habe einsehen können, da sie in den hiesigen Bibliotheken nicht vorhanden ist. In den beiden angeführten Werken *Exercices de calcul intégral* (Tome I 1811) und *Traité des fonctions elliptiques* (Tome I 1825) sind die auf die Relation bezüglichen Entwickelungen fast gleichlautend, und selbst die Seitenzahlen stimmen dabei nahezu überein. So passt z. B. die Seitenangabe (p. 61) bei Jacobi's Citat der Legendre'schen Relation im art. 56 der Fundamenta sowohl auf den ersten, 1811 erschienenen Band der *Exercices* als auch auf den ersten, 1825 erschienenen Band des *Traité des fonctions elliptiques*.

Jacobi bezeichnet die Legendre'sche Relation an der angeführten Stelle im art. 56 der *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* als »theorema egregium Cl^i Legendre«, an einer anderen Stelle,[1] wo er angiebt, er habe dieselbe auf alle Abel'schen Integrale ausgedehnt, als »die berühmte, von Legendre entdeckte Relation zwischen den vollständigen Integralen der ersten und zweiten Gattung zweier elliptischer Integrale, deren Moduln Complemente zu einander sind«; sie ist in allen Werken und Lehrbüchern, in welchen die Theorie der elliptischen Functionen behandelt wird (in den neueren meist ohne Nennung Legendre's), aufgenommen und auf mannigfache Art bewiesen worden. Auch hat Jacobi's Darstellung des elliptischen Integrals zweiter Gattung durch die ϑ-Functionen, mittels deren er in seinen, im Wintersemester 1835/36 in Königsberg gehaltenen, durch Rosenhain's Nachschrift bekannten Vorlesungen die Legendre'sche Relation begründet,[2] über diese wie über die wenigen anderen, vor Abel und Jacobi bekannten Resultate der Theorie der elliptischen Integrale ein ganz neues Licht verbreitet. Aber in vollkommen be-

[1] Note von der geodaetischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution. Berichte der Akademie von 1839 S. 65 (Crelle's Journal Bd. 19. S. 312, Jacobi's Werke Bd. II. S. 62). Vergl. die Stelle in der Haedenkamp'schen Abhandlung »über die Transformation vielfacher Integrale« (Crelle's Journal Bd. 22. S. 187), welche sich auf die citirte Jacobi'sche Äusserung bezieht.

[2] Die bezügliche Vorlesung ist als die 44ste in der Rosenhain'schen Ausarbeitung, deren Original in der Bibliothek der Akademie ist, bezeichnet. Ich habe diese Ausarbeitung schon in meiner Mittheilung vom 14. März 1889 auf S. 214 der Sitzungsberichte erwähnt, aber dort nicht das Semester, in welchem Jacobi die Vorlesungen gehalten hat, angegeben, und ich füge bei dieser Gelegenheit die Notiz hinzu, dass die in der Anmerkung Nr. 60 auf S. 545 des I. Bandes von Jacobi's Werken erwähnten Vorlesungen »über elliptische Transcendenten«, welche Borchardt gehört hat, von Jacobi im Wintersemester 1839/40 in Königsberg gehalten worden sind.

friedigender Weise wird, wie mir scheint, der innere Grund der LEGENDRE'schen Relation erst durch die Betrachtung jener Reihe aufgedeckt, welche ich in meinen Mittheilungen vom 30. Jan., 6. Febr. und 13. März 1890 mit Ser. (u_0, u, v, w) oder:

$$\text{Ser.}\,(v\sigma_0 + w\tau_0,\ v\sigma + w\tau,\ v,\ w)$$

bezeichnet und dort eingehend discutirt habe.

Die erwähnte Reihe behält nämlich ihren Werth bei, wenn man die Grössen:

$$\sigma_0, \qquad \tau_0, \qquad \sigma, \qquad \tau, \qquad v, \qquad w$$

durch $\alpha\sigma_0+\beta\tau_0$, $\alpha'\sigma_0+\beta'\tau_0$, $\alpha\sigma+\beta\tau$, $\alpha'\sigma+\beta'\tau$, $\beta'v-\alpha'w$, $-\beta v+\alpha w$

ersetzt, wo $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ ganze Zahlen bedeuten, für welche $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$ ist. Wenn man nun den a. a. O. für die Reihe gefundenen Ausdruck:[1]

$$\frac{1}{v}\,e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}}\,\frac{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0+u}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)} \qquad \begin{pmatrix} u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0 \\ u = v\sigma + w\tau \end{pmatrix},$$

welcher dort zur Charakterisirung seiner Eigenschaft als Invariante ($\check{\alpha}\tau\rho o\pi o\varsigma$) mit:

$$\overline{\text{Atr}}\,(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$$

bezeichnet ist, nach steigenden Potenzen der Grössen $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau$ entwickelt, so hat natürlich jedes einzelne Aggregat von Gliedern einer und derselben Dimension für sich die angegebene Invarianteneigenschaft. Nun ist das Aggregat der Glieder erster Dimension:

$$(\mathfrak{A}) \qquad \left(v(\sigma+\varepsilon\sigma_0)+w(\tau+\varepsilon\tau_0)\right)\left(\frac{2\varepsilon\tau_0\pi i}{v^2\sigma_0+vw\tau_0}+\frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}\right),$$

wo ϑ' die erste und ϑ''' die dritte nach ζ genommene Ableitung der mit $\vartheta\left(\zeta,\frac{\varepsilon w}{v}\right)$ bezeichneten Reihe:

$$\sum_\nu e^{\frac{1}{4}\left(\nu^2\frac{\varepsilon w}{v}+4\nu\zeta-2\nu\right)\pi i} \qquad (\nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots)$$

bedeutet, und da der erste Factor jenes Products offenbar bei der angegebenen Substitution ungeändert bleibt, so kommt auch dem zweiten Factor:

[1] Vergl. S. 317 der Sitzungsberichte von 1889.

$$(\mathfrak{A}^0)\qquad \frac{2\varepsilon\tau_0\pi i}{v^2\sigma_0+vw\tau_0}+\frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

für sich allein jene Invarianteneigenschaft zu. Hiermit ist aber der innere Grund der LEGENDRE'schen Relation klar gelegt. Der Ausspruch,

> dass der Ausdruck ($\mathfrak{A}^0$) oder das mit ($\mathfrak{A}$) bezeichnete Aggregat der Glieder erster Dimension die angegebene Invarianteneigenschaft hat,

besagt genau dasselbe wie die LEGENDRE'sche Relation, und um dies zu erkennen braucht man nur die in der Relation vorkommenden elliptischen Integrale, wie jetzt geschehen soll, durch die ϑ-Function auszudrücken.

I.

Bedeuten, wie in meiner Mittheilung vom 13. März 1890, v und w zwei complexe Grössen, und ist ε das Vorzeichen des mit i multiplicirten Theils von $\frac{w}{v}$, so kann man in den Formeln von JACOBI's Fundamenta:

$$\frac{K'i}{K}=\frac{\varepsilon w}{v},\quad q=e^{\frac{\varepsilon w\pi i}{v}}$$

setzen. Alsdann bestehen für die im art. 48 der Fundamenta mit A bezeichnete Grösse die Gleichungen:[1]

$$(1)\qquad 12KE-4(2-\varkappa^2)K^2=\pi^2(1-24A),$$

$$(2)\qquad A=\sum_{m,n} ne^{\frac{2\varepsilon mn\pi i w}{v}}\qquad (m,n=1,2,3,\ldots),$$

wo E das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung mit dem Modul $\varkappa$ bedeutet. Es ist ferner gemäss der Formel (2) im art. 36 und der Formel (9) im art. 65 der Fundamenta:

$$\frac{\varepsilon w\pi i}{v}+12\sum_{n=1}^{n=\infty}\log\left(1-e^{\frac{2\varepsilon n w\pi i}{v}}\right)=4\log\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)-4\log 2\pi,$$

also, wenn nach w differentiirt wird:

[1] Vergl. S. 136 und 137 der Originalausgabe und S. 189 und 190 des I. Bandes von JACOBI's gesammelten Werken.

$$1 - 24\sum_{m,n} n e^{\frac{2\varepsilon m n \pi i w}{v}} = -\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)} \qquad (m,n=1,2,3,\ldots),$$

und hieraus folgt mit Hülfe der Gleichungen (1) und (2) das Resultat:

$$(3)\qquad 12KE - 4(2-\varkappa^2)K^2 = -\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

welches die Darstellung des Integrals zweiter Gattung E durch ϑ-Functionen enthält. Ersetzt man nämlich darin K und $\varkappa K$ durch ihre ϑ-Ausdrücke:

$$K = \tfrac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0) = \tfrac{1}{2}\pi e^{\frac{\varepsilon w\pi i}{2v}}\vartheta^2\left(\frac{\varepsilon w+v}{2v}\right),$$

$$\varkappa K = \tfrac{1}{2}\pi\vartheta_2^2(0) = \tfrac{1}{2}\pi\vartheta^2(\tfrac{1}{2}),$$

wobei der Einfachheit halber das zweite Argument der ϑ-Functionen $\left(\frac{\varepsilon w}{v}\right)$ überall weggelassen ist, so kommt:

$$(4)\qquad 6\pi\vartheta_3^2(0)E = 2\pi^2\vartheta_3^4(0) - \pi^2\vartheta_2^4(0) - \frac{\vartheta'''(0)}{\vartheta'(0)}$$

oder:

$$3\int_0^1\sqrt{\vartheta_3^4(0)-\vartheta_2^4(0)\sin^2\tfrac{1}{2}z\pi}\,dz = 2\vartheta_3^4(0) - \vartheta_2^4(0) - \frac{\vartheta'''(0)}{\pi^2\vartheta'(0)}.$$

Nimmt man in der Gleichung (3) an Stelle des Moduls $\varkappa$ den complementären Modul $\varkappa'$, so geht dieselbe in folgende über:

$$(5)\qquad 12K'E' - 4(2-\varkappa'^2)K'^2 = -\frac{\vartheta'''\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right)},$$

wo E' das Integral zweiter Gattung für den Modul $\varkappa'$ bedeutet; denn es ist nach den oben eingeführten Bezeichnungen:

$$\frac{K'i}{K} = \frac{\varepsilon w}{v}, \qquad \frac{Ki}{K'} = -\frac{\varepsilon v}{w}.$$

Wird nun die Gleichung (3) mit $-\frac{\varepsilon w i}{v}$ und die Gleichung (5) mit $\frac{\varepsilon v i}{w}$ multiplicirt, und alsdann die eine zu der andern addirt, so erhält man als Resultat:

$$12(K'E+KE'-KK') = \frac{\varepsilon w i}{v}\,\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)} - \frac{\varepsilon v i}{w}\,\frac{\vartheta'''\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right)},$$

und da die LEGENDRE'sche Relation in den hier gebrauchten JACOBI'schen Bezeichnungen folgendermaassen lautet:

$$K'E+KE'-KK' = \tfrac{1}{2}\pi,$$

so erscheint dieselbe bei Anwendung der ϑ-Functionen in der Gestalt:

$$(6)\qquad v^2\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right)} - w^2\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)} = 6\varepsilon v w\pi i.$$

Man kann aber diese Gleichung auch in folgender Weise darstellen:

$$(7)\qquad \frac{2\varepsilon\tau\pi i}{v(\sigma v+\tau w)} + \frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)} = \frac{-2\varepsilon\sigma\pi i}{w(\sigma v+\tau w)} + \frac{1}{3w^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right)};$$

ihr Inhalt kann also dahin formulirt werden, dass der Ausdruck:

$$\frac{2\varepsilon\tau\pi i}{v(\sigma v+\tau w)} + \frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

ungeändert bleibt, wenn man darin:

$$\sigma,\quad \tau,\qquad v,\quad w$$

durch

$$-\tau,\quad \sigma,\qquad -w,\quad v$$

ersetzt. Derselbe Ausdruck bleibt nun, wie die unmittelbar aus der Definition von ϑ resultirende Gleichung:

$$\vartheta\left(\zeta,\frac{\varepsilon w+v}{v}\right) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\,\vartheta\left(\zeta,\frac{\varepsilon w}{v}\right)$$

zeigt, auch ungeändert, wenn man:

$$\sigma\quad,\qquad \tau,\quad v,\quad w,$$

durch

$$\sigma-\varepsilon\tau,\quad \tau,\quad v,\quad w+\varepsilon v$$

ersetzt, und mittels einer Reihe von Substitutionen der beiden angegebenen Arten gelangt man zu jeder Substitution:

$$(8)\qquad \begin{aligned} \sigma' &= \alpha\sigma + \beta\tau, & v' &= \beta' v - \alpha' w \\ \tau' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau, & w' &= -\beta v + \alpha w \end{aligned} \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1),$$

in welcher $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, ganze Zahlen bedeuten; es zeigt sich also, dass in der That, wie in der Einleitung angekündigt worden ist, der Inhalt der LEGENDRE'schen Relation sich vollständig deckt mit dem Inhalte der Relation:

$$(9)\qquad \frac{2\varepsilon\tau\pi i}{v(\sigma v + \tau w)} + \frac{1}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = \frac{2\varepsilon'\tau'\pi i}{v'(\sigma' v' + \tau' w')} + \frac{1}{3v'^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon' w'}{v'}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon' w'}{v'}\right)},$$

durch welche der Ausdruck:

$$(\mathfrak{A}')\qquad \frac{2\varepsilon\tau\pi i}{v(\sigma v + \tau w)} + \frac{1}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

als Invariante der Aequivalenz:

$$(\mathrm{A})\qquad (\sigma, \tau, v, w) \sim (\alpha\sigma + \beta\tau, \alpha'\sigma + \beta'\tau, \beta' v - \alpha' w, -\beta v + \alpha w)$$

charakterisirt wird.

II.

Da $\sigma v + \tau w$ ebenfalls eine Invariante der Aequivalenz (A) ist, so deckt sich auch die Invarianteneigenschaft des Ausdrucks:

$$\frac{2\varepsilon\tau(\sigma v + \tau w)\pi i}{v} + \frac{(\sigma v + \tau w)^2}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

mit dem Inhalt der LEGENDRE'schen Relation. Dieser Ausdruck ist aber nur von dem Verhältniss $\frac{w}{v}$ abhängig und demnach eine Invariante der Aequivalenz:

$$\left(\sigma, \tau, \frac{w}{v}\right) \sim \left(\alpha\sigma + \beta\tau, \alpha'\sigma + \beta'\tau, \frac{\alpha w - \beta v}{-\alpha' w + \beta' v}\right).$$

Man kann daher $v = 1$ setzen und erhält alsdann in dem Ausdruck:

$$(\mathfrak{A}'')\qquad 2\varepsilon\tau(\sigma + \tau w)\pi i + \tfrac{1}{3}(\sigma + \tau w)^2 \cdot \frac{\vartheta'''(0, \varepsilon w)}{\vartheta'(0, \varepsilon w)}$$

eine Invariante der Aequivalenz:

$$\text{(A}'\text{)} \qquad (\sigma, \tau, w) \backsim \left(\alpha\sigma + \beta\tau, \alpha'\sigma + \beta'\tau, \frac{\alpha w - \beta}{-\alpha' w + \beta'}\right).$$

Die zwischen den beiden Quotienten:

$$\frac{\vartheta'''(o, \varepsilon w)}{\vartheta'(o, \varepsilon w)}, \qquad \frac{\vartheta'''(o, \varepsilon' w')}{\vartheta'(o, \varepsilon' w')} \qquad \left(w' = \frac{\alpha w - \beta}{-\alpha' w + \beta'}\right)$$

bestehende Transformationsgleichung muss sich hiernach direct dadurch ergeben, dass man den Ausdruck ($\mathfrak{A}''$) gleich demjenigen setzt, welcher durch die Substitution von:

$$\alpha\sigma + \beta\tau \;, \qquad \alpha'\sigma + \beta'\tau \;, \qquad \frac{\alpha w - \beta}{-\alpha' w + \beta'}$$

an Stelle von σ , τ , w

daraus hervorgeht. In der That erhält man dabei als Resultat die Transformationsgleichung:

$$(10) \qquad \frac{\vartheta'''(o, \varepsilon' w')}{\vartheta'(o, \varepsilon' w')} = (\alpha' w - \beta')^2 \cdot \frac{\vartheta'''(o, \varepsilon w)}{\vartheta'(o, \varepsilon w)} + 6\alpha'(\alpha' w - \beta')\, \varepsilon\pi i,$$

welche offenbar eine Verallgemeinerung der obigen, die LEGENDRE'sche Relation vertretenden Gleichung (6) ist und in diese übergeht, wenn:

$$\alpha = o\,, \quad \beta = -1\,, \quad \alpha' = 1\,, \quad \beta' = o$$

gesetzt wird.

Es muss noch hervorgehoben werden, dass die Invarianteneigenschaft des mit ($\mathfrak{A}''$) bezeichneten Ausdrucks:

$$2\varepsilon\tau(\sigma + \tau w)\pi i + \frac{1}{3}(\sigma + \tau w)^2 \cdot \frac{\vartheta'''(o, \varepsilon w)}{\vartheta'(o, \varepsilon w)}$$

in Evidenz tritt, wenn man denselben, gemäss den obigen einleitenden Auseinandersetzungen, als das Aggregat der Glieder zweiter Dimension auffasst, welche bei der Entwickelung von:

$$(11) \qquad \varepsilon u \lim_{u_0 = o} \left(-\frac{1}{u_0} + \overline{\text{Atr}}(\varepsilon u, u_0, 1, w)\right) \qquad (u = \sigma + \tau w)$$

nach steigenden Potenzen von σ und τ auftreten. Die Entwickelung von:

$$\overline{\text{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, w)$$

ist nämlich, bis zu den Gliedern erster Dimension einschliesslich, folgende:

$$\frac{1}{u_0} + \frac{\varepsilon}{u} + \frac{\varepsilon u + u_0}{uv} \cdot 2\varepsilon\tau\pi i + \frac{\varepsilon u + u_0}{3v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(o, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(o, \frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

und es kommt also bei der Entwickelung von (11), wenn dieselbe bis zu den Gliedern zweiter Dimension einschliesslich genommen wird:

$$(\mathfrak{A}_1'')\qquad 1+2\varepsilon\tau(\sigma+\tau w)\pi i+\frac{1}{3}(\sigma+\tau w)^2\frac{\vartheta'''(0,\varepsilon w)}{\vartheta'(0,\varepsilon w)}.$$

Dieser Ausdruck, welcher sich von $(\mathfrak{A}'')$ nur um 1 unterscheidet, kann daher an Stelle von $(\mathfrak{A}'')$ als Invariante der Aequivalenz:

$$(\mathrm{A}')\qquad (\sigma,\tau,w)\sim\left(\alpha\sigma+\beta\tau,\alpha'\sigma+\beta'\tau,\frac{\alpha w-\beta}{-\alpha' w+\beta'}\right)\qquad(\alpha\beta'-\alpha'\beta=1)$$

genommen werden, und seine Invarianteneigenschaft tritt unmittelbar in Evidenz, wenn man ihn auf Grund der Gleichung (L) im §. 10 meiner Mittheilung vom 13. März 1890 als das Aggregat der Glieder bis zur zweiten Dimension einschliesslich in der Entwickelung von:

$$(12)\qquad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{\sigma+\tau w}{m+nw}e^{(n\sigma-m\tau)2\varepsilon\pi i}$$

nach steigenden Potenzen von σ und τ auffasst. Dabei gelten für die Summation, wie a. a. O. dargelegt ist, die Bedingungen:

$$\begin{aligned}&m=\alpha m'+\beta n'\qquad\qquad, &&n=\alpha' m'+\beta' n',\\ &m'=\pm1,\pm2,\ldots\pm M, &&n'=\pm1,\pm2,\ldots\pm N,\end{aligned}$$

und für $\alpha,\beta,\alpha',\beta'$, können irgend welche, die Gleichung $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$ befriedigende ganze Zahlen genommen werden.

Wendet man, wie ich es in meinen Universitätsvorlesungen zu thun pflege, den Begriff der Modulsysteme, welchen ich in die Algebra eingeführt habe, auch in der Analysis an, so ist jene Reihe (12) als »dem Ausdruck $(\mathfrak{A}_1'')$ congruent *modulis* $\sigma^3,\sigma^2\tau,\sigma\tau^2,\tau^3$« zu bezeichnen. Alsdann lässt sich das oben entwickelte Resultat dahin formuliren, dass die Eigenschaft der Reihe:

$$\sum_m\sum_n\frac{\sigma+\tau w}{m+nw}e^{(n\sigma-m\tau)2\varepsilon\pi i}\qquad(m,n,=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots),$$

eine Invariante der Aequivalenz:

$$(\sigma,\tau,w)\sim\left(\alpha\sigma+\beta\tau,\alpha'\sigma+\beta'\tau,\frac{\alpha w-\beta}{-\alpha' w+\beta'}\right),\qquad(\alpha\beta'-\alpha'\beta=1)$$

im Sinne der Congruenz für das Modulsystem:

$$(\sigma^3,\sigma^2\tau,\sigma\tau^2,\tau^3)$$

zu sein, die Legendre'sche Relation ersetzt.

III.

Zu dem in der Gleichung (3) des art. I enthaltenen Ausdruck des vollständigen Integrals zweiter Gattung durch ϑ-Functionen gelangt man auch, indem man statt der Reihenentwickelungen der Fundamenta einige Formeln der im 36. Bande des Crelle'schen Journals publicirten Abhandlung Jacobi's über die Differentialgleichung der ϑ-Reihen benutzt.[1] Wenn man nämlich in dem Resultate der Addition der drei a. a. O. mit (4) bezeichneten Gleichungen:

$$\frac{d\log(AA_1A_2)^2}{d\log q} = AB + A_1B_1 - A_2B_2$$

für A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 die dort angegebenen Werthe:[2]

$$A = \frac{2}{\pi}K,\ A_1 = \frac{2}{\pi}\varkappa K,\ A_2 = \frac{2}{\pi}\varkappa' K,$$

$$B = \frac{2}{\pi}(E - \varkappa'^2 K),\ B_1 = \frac{2}{\varkappa\pi}E,\ B_2 = \frac{-2}{\varkappa'\pi}(E - K)$$

einsetzt, so ergiebt sich mit Berücksichtigung der schon oben benutzten Relation:

$$\pi\big(\vartheta'(0,w)\big)^2 = 8\varkappa\varkappa' K^3$$

ganz unmittelbar die Gleichung:

$$-\frac{d\log\vartheta'(0,w)}{dw}\pi i = 3KE - (2-\varkappa^2)K^2 \qquad (w\pi i = \log q),$$

welche mit der obigen Gleichung (3) zu identificiren ist, indem von der Relation:

$$\frac{d\vartheta'(0,w)}{dw} = \frac{1}{4\pi i}\vartheta'''(0,w)$$

Gebrauch gemacht und alsdann w durch $\frac{\varepsilon w}{v}$ ersetzt wird.

---

[1] Crelle's Journal, Bd. 36, S. 101 und Jacobi's Werke Bd. II, S. 178.
[2] Crelle's Journal, Bd. 36, S. 100 und Jacobi's Werke Bd. II, S. 176.

(Fortsetzung folgt.)

16. Die craspedoten Medusen der Plankton-Expedition.

Von Dr. Otto Maas
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Schulze am 2. April; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XVIII]; — ausgegeben am 9. April.)

Die craspedoten Medusen bilden einen verhältnissmässig nur geringen Theil des Materials, das die Plankton-Expedition aus dem Atlantischen Ocean zu Tage förderte, und werden demnach zur Klärung der allgemeinen Fragen, denen die Expedition gewidmet war, nur mit Berücksichtigung aller anderen Thiergruppen herangezogen werden können. Dennoch sind die Fänge, in denen Medusen sich fanden, an und für sich so zahlreich und an den meisten Stellen des durchfahrenen Meeres gemacht worden, dass sich für diese engere Gruppe selbst manches beachtenswerthe Ergebniss herausstellen wird. Namentlich dürften einige faunistische Resultate, wie sie sich aus einer einfachen Betrachtung eines später zu gebenden Katalogs zusammenstellen lassen, bei der grossen Wichtigkeit, die wir gegenwärtig der geographischen Verbreitung pelagischer Thiere beimessen, von Bedeutung sein.

So sehr in dieser Hinsicht unsere Kenntniss bei den Landthieren im Fortschreiten begriffen ist, so sind doch bei den meisten Gruppen der Wasserbewohner die bis jetzt gemachten Angaben und Zusammenstellungen recht gering an Zahl. Diess Gebiet der Wissenschaft ist ein sehr junges, und die Theorien in ihm sind noch sehr widersprechend. Ich glaube daher, dass in demselben jede auf Grund von Thatsachen gegebene Bereicherung von Nutzen sein kann, und habe noch vor einer ausführlichen Beschreibung neuer Arten einige faunistische Resultate hier vorläufig zusammengestellt.

Es liegt in der Natur der Sache, dass sich die bei der Plankton-Expedition erbeuteten Fänge zu dem im Meere vorhandenen Thierreichthum nur wie Stichproben verhalten. Doch liegen gerade hier einerseits die Fangstationen im Verhältniss zur durchfahrenen Meeresstrecke sehr nahe aneinander, weitaus näher als bei irgend einer vorangegangenen Expedition; andererseits ist durch die neue Methode, das Netz jedesmal aus einigen hundert Metern Tiefe genau vertical heraufzuziehen, eine viel grössere Sicherheit zur Erlangung der etwa auf- und absteigenden Formen gewonnen. Schlüsse auf die Fauna des nördlichen und mittlern Atlantischen Oceans dürften also wohl gerechtfertigt sein.

Wenn man auf einer Karte diejenigen Stellen, an denen craspedote Medusen gefischt wurden, mit verschiedenen Unterstreichungen hervorhebt, so zeigt es sich, dass dieselben sich im Grossen und Ganzen überall gefunden haben. Nur einzelne auffallende Lücken treten ein und zwar an drei Stellen: zwischen der Südspitze von Grönland und der Neufundlandbank, ferner südlich vom Bereich des Floridastroms im Beginn des Sargassomeers, und ausserdem westlich von Ascension. Auch nach wiederholter Prüfung des Materials scheinen diese Lücken nicht zufällig, sondern die Medusen in jenen Meeresabschnitten, wenn nicht gerade zu fehlen, so doch unverhältnissmässig selten zu sein. Ohne auf die Erörterung etwaiger Gründe einzugehen, sei nur auf das bei der sonstigen Allgemeinvertheilung doppelt Auffällige dieser Lücken zur eventuellen Nachuntersuchung hingewiesen.

Im Ganzen sind, ohne die eigentlichen Planktonfänge in Betracht zu ziehen, an etwa 75 Stellen Craspedotenfänge gemacht worden, die sich in ihrer Zusammensetzung nach Individuen und Species gemäss den Regionen sehr verschieden verhalten. Das altbekannte, für die gesammte Fauna geltende Gesetz, dass die Specieszahl gegen den Aequator hin zunimmt, zeigt sich auch bei der einzelnen Gruppe der Medusen. Im arktischen Ocean bildet meist nur eine Species, manchmal in ungeheuerer Menge den Inhalt des Medusenfangs; in der Nähe des Aequators brachte das Netz oft gleichzeitig eine Anzahl verschiedener Craspedoten von mehreren Familien zu Tage.

Trennt man einerseits die an gleicher Stelle gefundenen nach Species und andererseits die gleichen Species nach Fundstätten, so weist ein solcher Katalog einstweilen mindestens 170 Nummern auf, die nach Individuenzahl natürlich sehr ungleichartig sind und zu über 40 gut definirbaren Arten gehören. Die vier von Häckel aufgestellten Hauptgruppen der Craspedoten: Antho- und Leptomedusen sowohl, wie Trachy- und Narcomedusen sind darunter vertreten, wenn auch in sehr verschiedener Wichtigkeit. Von den darin angenommenen 16 Familien sind 11 repraesentirt, die Codoniden, Tiariden und Margeliden, die Eucopiden, Thaumantiaden und Cannotiden, die Aglauriden, Trachynemiden und Geryoniden, die Cunanthiden, Solmariden und vielleicht eine neu aufzustellende Familie.

Wie es bei der Art der Fänge, die fast durchweg auf hoher See und wenig in der Nähe von Küsten gemacht worden sind, vorauszusehen war, überwiegen die Trachylinen, also Trachy- und Narcomedusen ganz ausserordentlich gegenüber den Leptolinen, also Anthound Leptomedusen. Erstere sind die Gruppen mit directer Entwickelung durch Planulae und Actinulae, also Zeit ihres Lebens treibende Formen, letztere bedürfen zu ihrer Entwickelung eines festsitzenden Polypenstadiums, und einem solchen wird auf hohem Meer kaum Gelegenheit zur Existenz geboten sein. Wie gross die Übermacht der Formen mit directer Entwickelung ist, zeigt der Umstand, dass von den 170 Nummern etwa 150 Trachylinen und nur 18 Leptolinen sind; und auch diese 18 sind, wenn auch sehr verschiedenen Arten angehörig, doch an Individuenzahl gar nicht entfernt mit den anderen zu vergleichen. Die Fundstätten der Leptolinen zeigen meistens (jedoch nicht unbedingt) eine Beziehung zur Küste. Es wäre interessant und wird voraussichtlich möglich sein, an Formen aus anderen Thiergruppen, in deren Zeugungskreis sich ebenfalls ein sessiles Stadium findet, dieses Vordringen in's offene Meer zu controliren. (Die wenigen mir zugekommenen Hydroidpolypen stammen durchweg aus dem Sargassomeer und sind an den Blättern und Beeren der Pflanzen befestigt. Sie gehören sämmtlich zur Unterordnung der Calycoblasten [oder Thecophora]; gymnoblastische Hydroiden fanden sich nicht unter ihnen).

Dass diese letzteren Polypen aber auch hier nicht fehlen können, beweisen mehrere, ebenfalls in diesem Meerestheile gefischte zugehörige Medusenformen, einige Codoniden. Die Fundstellen der übrigen Anthomedusen ergibt die Karte, ebenso die der 12 Leptomedusen.

Das Gros der Fänge bilden nach Abzug der wenigen Narcomedusen die eigentlichen Trachymedusen und zwar die Familien der Aglauriden, Trachynemiden und Geryoniden. Sie umfassen zusammen über 140 Nummern des Katalogs und sind nicht nur durch die Orte des Vorkommens überhaupt, sondern ebenso durch Species- und namentlich Individuenzahl weitaus überwiegend. Unter ihnen befinden sich die Formen, die oft in ungeheueren Mengen auftreten und auf ganze Strecken einen wichtigen Bestandtheil der treibenden Organismenmasse zu bilden scheinen. Von den erwähnten 140 Nummern fallen gegen 40 auf die Aglauriden, über 40 auf die Trachynemiden und gegen 60 auf die Geryoniden. Von diesen drei Familien sind die in den betreffenden Meerestheilen bisher beschriebenen Arten fast sämmtlich gefunden worden, so dass ein Verzeichniss der Lücken leicht zu machen ist, und sich für diese Familien auch wohl einige allgemeinere Schlüsse ableiten lassen.

Man kann im allgemeinen folgende Sätze über die geographische Verbreitung dieser hauptsächlichsten Medusen des Planktons im Atlantischen Ocean aussprechen: 1. dass die Aglauriden besonders in dessen nördlichem Theil vorkommen; 2. dass dieselben im mittleren Theil durch die Trachynemiden geradezu ersetzt werden; 3. dass die Geryoniden erst südlich eines bestimmten Breitengrades auftreten und ihren tropischen oder subtropischen Charakter auch dadurch zu erkennen geben, dass sie gegen den Aequator hin an Species und Individuenzahl zunehmen. Im Einzelnen ergeben sich jedoch noch manche Modificationen.

Was die Aglauriden betrifft, so findet sich die als arktisch bekannte *Aglantha digitalis* von England ab bis gegen die grönländische Küste in grossen Massen, fast stets zu Hunderten in einem Fang. Die Form der americanischen Küste (von A. Agassiz beschrieben) tritt östlich von Neu-Fundland auf und scheint mir, wenn auch nahestehend, doch nicht die gleiche Art zu sein. Südlich vom Floridastrom hören diese Aglanthen mit einem Schlag auf, und es finden sich nur noch zerstreut an vielen Stellen des Gebiets, aber kaum in grösserer Menge Aglauraformen, und zwar die gleichen wie im Mittelländischen Meer.

Von eigentlichen Trachynemiden war, wie Häckel hervorhebt, aus dem nördlichen Theil des Atlantischen Oceans und an den entsprechenden amerikanischen Küsten bisher keine bekannt. In dieser Hinsicht ist es interessant, dass bei der Plankton-Expedition an drei nördlichen Stellen drei verschiedene, von dem Typischen etwas abweichende, aber doch unzweifelhafte Angehörige dieser Familie sich gefunden haben (keine Pectylliden). Im mittlern Theil dagegen kehren die Trachynemiden in fast allen Fängen wieder, mitunter in nicht geringer Individuenzahl. Bemerkenswerth ist das stete und häufige Vorkommen des mittelländischen *Rhopalonema velatum,* während andere, sowohl neue, wie bekannte Formen, mehr nebenhergehen.

Geryoniden finden sich im nördlichen Theil des Atlantischen Oceans überhaupt nicht; sobald sie aber südlich des Floridastroms auftreten, erscheinen auch unter dieser Familie sofort bekannte Formen aus dem Mittelmeer: *Liriope cerasiformis* und *eurybia.* Im tropischen Theil werden sie recht mannigfaltig, wenn auch immer nur in beschränkter Individuenzahl vorkommend, und fast jeder Fang bringt eine andere Art, mitunter gar mehrere zum Vorschein. Dennoch existiren auch hier bezüglich der Verbreitung gewisse Beschränkungen. Manche Arten, die im östlichen Theil sich finden, fehlen vollständig im Westen und umgekehrt. Die bekannte *Liriope catharinensis* fand sich nur wieder an der brasilianischen Küste.

Die (etwa fünfzehn) Katalognummern der Narcomedusen sind zu gering, um an und für sich zu faunistischen Schlüssen zu berechtigen. Sie sind überall zerstreut; ihre Fundstätten ergibt die Karte.

Schon aus dieser vorläufigen Zusammenstellung geht ohne Zweifel so viel hervor, dass es auch im Meer Bedingungen für die horizontale Verbreitung geben muss, die grössere Regionen ziemlich streng von einander scheiden. Es genügt also nicht, um das Verbreitungsgebiet einer Meduse anzugeben, dieselbe z. B. als atlantisch oder pacifisch zu bezeichnen, sondern es gibt innerhalb dieser grossen Gebiete wieder kleinere Verbreitungsbezirke mit charakteristischen Formen. Selbstverständlich soll diess nur von Medusen gesagt sein; denn um die Fauna eines Meerestheils mit der eines andern im Vergleich zu bringen, genügt es nicht, eine einzige Thiergruppe und sei dieselbe noch so charakteristisch, heranzuziehen. Dennoch seien ausser der obenerwähnten Dreitheilung des durchfahrenen Gebietes in ein nordatlantisches, mittleres und tropisches, noch einige andere Thatsachen hervorgehoben. Zunächst die besonders scharfe Grenze, die sich südlich des Floridastroms erkennen lässt, dann die Identität einiger Hauptformen des mittleren Gebiets mit solchen des Mittelmeers. Im südlichen Theil der durchfahrenen Strecke finden sich dagegen im allgemeinen wieder andere Arten. Ausserdem lässt sich hier ein östlicher Bezirk von einem westlichen oder mehr südwestlichen ziemlich gut trennen. Einzelne Formen haben dagegen eine recht weite Verbreitung und kommen an vielen Stellen zugleich des südlichen und des mittlern Gebiets vor. Es bleibt abzuwarten, in wie weit Befunde aus den anderen bearbeiteten Thiergruppen solche faunistischen Regionen bestätigen. Eine vollkommene Würdigung aller hierher gehörigen Thatsachen wird sich erst dann ergeben, wenn auch die Temperatur- und Strömungsverhältnisse genau ausgearbeitet worden sind.

Aus den quantitativen Bestimmungen, die über Gleichmässigkeit oder Ungleichmässigkeit der Vertheilung einigen Aufschluss geben können, sei eine Thatsache erwähnt, welch die im Sargassomeer vorkommenden Trachymedusen betrifft. In einem sich über 20 Längengrade ausbreitenden Gebiete, Station *a* 50° W. v. Greenw., Br. 30°, Station *r* 30° W. v. Greenw., Br. ungefähr 24°, fanden sich in 17 auf einander folgenden Verticalnetzfängen:

	Verticalnetzfang																
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*
Rhopalonema velatum	5	6	5	2	2	24	3	11	16	3	3	9	5	9	3	2	2
Liriope spec.	1	—	2	—	—	—	1	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—
Aglaura hemistoma	—	—	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Rhopalonema fehlte also auf der ganzen grossen Strecke in keinem Fang; in den Fängen, wo die Anzahl verhältnissmässig gross wird, befinden sich hauptsächlich Jugendstadien. Die anderen beiden Species scheinen seltener, so dass, wenn sie überhaupt gefangen wurden, stets nur ein Exemplar zu verzeichnen war. Eine vierte Species kommt in diesen Fängen überhaupt nicht vor.

Auf die complicirte Frage der verticalen Verbreitung einzugehen, behalte ich mir auf Grund des auch in dieser Hinsicht werthvollen Materials für später vor.

17. Die LEGENDRE'sche Relation.

Von L. KRONECKER.

(Gedruckt im Bericht vom 16. April [St. XX]; — ausgegeben am 23. April.)

(Fortsetzung der Mittheilung vom 2. April, XVIII.)

IV.

Die bilineare Function der vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung für zwei mit einander complementäre Moduln:

$$12\,(K'E + KE' - KK')$$

ist im art. I durch den ϑ-Ausdruck:

$$\frac{\varepsilon w i}{v}\,\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)} - \frac{\varepsilon v i}{w}\,\frac{\vartheta'''\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right)}$$

dargestellt worden. Dieser nimmt mit Hülfe der am Schlusse des art. III erwähnten Relation:

$$\frac{d\vartheta'(0,w)}{dw} = \frac{1}{4\pi i}\,\vartheta'''(0,w)$$

folgende Gestalt an:

$$4\pi w\left(\frac{d\log\vartheta'\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{dw} - \frac{d\log\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{dw}\right),$$

und die Integration führt daher zu der Gleichung:

$$\log\vartheta'\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right) = \log\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right) + \frac{3}{\pi}\int(K'E + KE' - KK')\,d\log w.$$

Macht man nun zuvörderst nur von dem einen LEGENDRE'schen Resultate Gebrauch, wonach der Werth des Ausdrucks $K'E+KE'-KK'$ vom Modul $\varkappa$ und also auch von w unabhängig ist, so kommt:

$$\vartheta'\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right) = (c^2 w)^{\frac{3}{\pi}(K'E+KE'-KK')}\,\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right),$$

wo c^2 die Integrationsconstante bedeutet, und wenn man hierin nach einander $w = \varepsilon v e^{\frac{1}{2}\pi i}$ und $w = \varepsilon v e^{\frac{2}{3}\pi i}$ setzt, so erhält man wegen der evidenten Gleichungen:

$$\vartheta'\left(0, -e^{\frac{4}{3}\pi i}\right) = \vartheta'\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i}+1\right) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\vartheta'\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)$$

die Bestimmungen:

$$K'E + KE' - KK' = \tfrac{1}{2}\pi, \quad c^3 \varepsilon v e^{\frac{3}{4}\pi i} = 1.$$

Die auf diese Weise resultirende Gleichung:

$$(13) \qquad \vartheta'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right) = \left(\sqrt{-\frac{\varepsilon w i}{v}}\right)^3 \vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)$$

ist also eine einfache Folge der Legendre'schen Relation. Da andererseits diese in der oben (art. I) angegebenen Form:

$$(6) \qquad v^2 \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)} - w^2 \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = 6\varepsilon v w \pi i$$

durch logarithmische Differentiation aus der Gleichung (13) hervorgeht, so erweist sich dieselbe als mit der Legendre'schen Relation aequivalent, und zwar auch dann, wenn die Relation nur in der Weise gefasst wird, dass der Werth von $K'E + KE' - KK'$ von x unabhängig ist.

Aber die Gleichung (13) ist wiederum als vollständig aequivalent mit der allgemeineren Transformationsgleichung:

$$(14) \qquad \vartheta\left(\frac{u}{w}, -\frac{\varepsilon v}{w}\right) = -\varepsilon i\left(\sqrt{-\frac{\varepsilon w i}{v}}\right) e^{\frac{\varepsilon u^2}{vw}\pi i}\,\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)$$

anzusehen. Denn einerseits geht offenbar die Gleichung (13) durch Differentiation aus der Gleichung (14) hervor; andererseits ist diese ebenso einfach aus jener zu erschliessen, da aus der Gleichung (13) in Verbindung mit der Fundamentaleigenschaft der ϑ-Reihe unmittelbar folgt, dass die Function der complexen Variabeln u, welche entsteht, wenn man die eine Seite der Gleichung (14) durch die andere dividirt, niemals unendlich wird und für $u = 0$ den Werth 1 hat.

Die Legendre'sche Relation erweist sich daher als vollständig aequivalent mit der Transformationsrelation (14), und hierin liegt wohl ihre hauptsächlichste Bedeutung.

Ich bemerke noch, dass man für den speciellen oben benutzten Werth $e^{\frac{2}{3}\pi i}$ des Quotienten $\frac{\varepsilon w}{v}$ das Quadrat des Moduls gleich $-e^{\frac{2}{3}\pi i}$

und aus der Gleichung (6) die Werthbestimmung:

$$\frac{\vartheta'''\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)}{\vartheta'\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)} = -2\left|\sqrt{3}\right|\pi$$

erhält, wenn man die Gleichungen:

$$\vartheta'\left(0, -e^{\frac{4}{3}\pi i}\right) = \vartheta'\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i}+1\right) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\vartheta'\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i}\right),$$

$$\vartheta'''\left(0, -e^{\frac{4}{3}\pi i}\right) = \vartheta'''\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i}+1\right) = e^{\frac{1}{4}\pi i}\vartheta'''\left(0, e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)$$

zu Hülfe nimmt. Für $\varkappa = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $w = \varepsilon v i$ ist:

$$\frac{\vartheta'''(0, i)}{\vartheta'(0, i)} = -3\pi,$$

wie unmittelbar aus der Gleichung (6) hervorgeht.

V.

Geht man bei der Entwickelung der Theorie der elliptischen Functionen, wie es JACOBI in seinen schon erwähnten Königsberger Universitätsvorlesungen gethan hat, von der ϑ-Function aus, so ist die Methode durch Differentiation der Transformationsgleichung (14) zu der LEGENDRE'schen Relation zu gelangen die einfachste und natürlichste. Sie ist auch von Hrn. SCHELLBACH in seinem 1864 erschienenen Buche »Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen« im § 121 benutzt worden. Aber JACOBI hat dies auffallender Weise weder in den Vorlesungen von 1835/36 noch in den von 1839/40 gethan, obgleich er schon in der 11. Vorlesung von 1835/36 die Transformationsgleichung für die ϑ-Function abgeleitet, die Wichtigkeit derselben lebhaft hervorgehoben[1] und dann in einer ganzen Reihe von etwa zehn Vorlesungen die Theorie der linearen Transformation der ϑ-Function eingehend behandelt hatte. Dagegen hat JACOBI schon im art. 56 der Fundamenta den entgegengesetzten Weg angegeben, auf welchem man von der LEGENDRE'schen Relation ausgehend zu der Transformationsgleichung für die ϑ-Function gelangt, allerdings nur soweit, dass noch die Bestimmung eines von dem ersten Argument der ϑ-Function unabhängigen Factors erübrigt.

[1] JACOBI sagt a. a. O. »Diese Transformation ist eine der wunderbarsten der ganzen Analysis, und sie giebt für specielle Werthe von q und z Gleichungen, die so auffallend sind, dass man sie ohne numerische Beispiele fast nicht glaubt.«

Um die Jacobi'sche Deduction hier kurz darzulegen, stelle ich zuvörderst die Beziehungen zwischen den Functionen Z und Θ der Fundamenta und der Function ϑ durch die beiden Gleichungen dar:

$$\Theta(2Ku) = e^{\frac{1}{4}(w+4u-2)\pi i}\,\vartheta(u+\tfrac{1}{2}w, w)$$

$$2KZ(2Ku) = \pi i + \frac{\vartheta'(u+\frac{1}{2}w, w)}{\vartheta(u+\frac{1}{2}w, w)} \qquad \left(w = \frac{K'i}{K}\right).$$

Alsdann ist nach der Definition der Zeta-Function Z im art. 47 der Fundamenta:

$$4uK(K-E) - 4\varkappa^2 K^2 \int_0^u \sin^2 \mathrm{am}\, 2Ku\, du = \pi i + \frac{\vartheta'(u+\frac{1}{2}w, w)}{\vartheta(u+\frac{1}{2}w, w)}.$$

Wird diese Gleichung nach u differentiirt und dabei im Anschluss an die von Jacobi in seinen Vorlesungen gebrauchten Bezeichnungen[1] zur Abkürzung:

$$\frac{\vartheta'(u, w)}{\vartheta(u, w)} = \chi(u, w), \qquad \frac{d\chi(u, w)}{du} = \chi'(u, w)$$

gesetzt, so kommt:

$$4K(K-E) - 4\varkappa^2 K^2 \sin^2 \mathrm{am}(2Ku, \varkappa) = \chi'(u+\tfrac{1}{2}w, w),$$

und wenn u durch $u-\frac{1}{2}w$ ersetzt wird:

$$(16) \qquad 4K(K-E) - \frac{4K^2}{\sin^2 \mathrm{am}(2Ku, \varkappa)} = \chi'(u, w).$$

Substituirt man:

$$\varkappa', \quad K', \quad E', \quad \frac{u}{w}$$

für:

$$\varkappa, \quad K, \quad E, \quad u$$

und macht alsdann von der Relation:

$$\sin^2 \mathrm{am}(2Kui, \varkappa') = -\operatorname{tg}^2 \mathrm{am}(2Ku, \varkappa)$$

Gebrauch, so erhält man die Gleichung:

$$(17) \qquad 4K'(K'-E') + \frac{4K'^2}{\operatorname{tg}^2 \mathrm{am}(2Ku, \varkappa)} = \chi'\left(\frac{u}{w}, -\frac{1}{w}\right),$$

und aus der Verbindung der Gleichungen (16) und (17) geht das Resultat hervor:

$$(18) \qquad -4i(K'E + KE' - KK') = w\chi'(u, w) - \frac{1}{w}\chi'\left(\frac{u}{w}, -\frac{1}{w}\right).$$

---

[1] In der Borchardt'schen Ausarbeitung, welche im I. Bande von Jacobi's Werken abgedruckt ist, findet sich der Buchstabe ζ an Stelle des im Vorlesungshefte gebrauchten Buchstaben χ.

Multiplicirt man diese Gleichung mit du und integrirt, so kommt:

$$\frac{\vartheta'\left(\frac{u}{w}, -\frac{1}{w}\right)}{w\vartheta\left(\frac{u}{w}, -\frac{1}{w}\right)} - \frac{\vartheta'(u, w)}{\vartheta(u, w)} = \frac{4ui}{w}(K'E + KE' - KK'),$$

da die Integrationsconstante sich gleich Null erweist, wenn man u mit $-u$ vertauscht. Wird nun auf Grund der LEGENDRE'schen Relation der Ausdruck auf der rechten Seite durch $\frac{2u\pi i}{w}$ ersetzt, dann auf beiden Seiten mit du multiplicirt und integrirt, so ergiebt sich die Transformationsgleichung:

$$\vartheta\left(\frac{u}{w}, -\frac{1}{w}\right) = Ce^{\frac{u^2\pi i}{w}}\vartheta(u, w),$$

in welcher C die Integrationsconstante bedeutet. Bestimmt man dieselbe durch den Werth $u = \frac{1}{2}w$, so erhält man die Formel:

$$\frac{\vartheta\left(\frac{u}{w}, -\frac{1}{w}\right)}{\vartheta\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{w}\right)} = e^{\frac{4u^2 - w^2}{4w}\pi i}\frac{\vartheta(u, w)}{\vartheta(\frac{1}{2}w, w)},$$

welche ihrem Inhalte nach mit der Formel (5) im art. 56 der Fundamenta übereinstimmt.

VI.

In seinen grundlegenden, aber selten citirten, auf ganz originalen Ideen beruhenden »Beiträgen zur Theorie der elliptischen Functionen«, welche 1847 im 35. Bande des CRELLE'schen Journals erschienen sind, hat EISENSTEIN, wie für die Theorie der ϑ-Function überhaupt, so insbesondere für die lineare Transformation derselben und implicite auch für die LEGENDRE'sche Relation wesentlich neue Gesichtspunkte aufgestellt.

EISENSTEIN geht in der sechsten seiner Reihe von Abhandlungen,[1] anknüpfend an die Productentwickelungen der Kreisfunctionen, von dem Doppelproducte aus:

$$\prod_{m,n}\left(1 - \frac{x}{\alpha m + \beta n + \gamma}\right) \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots),$$

[1] CRELLE's Journal Bd. 35, S. 153.

in welchem α, β, γ, x complexe Variabeln bedeuten. Ersetzt man hierin, im Anschluss an die obigen Bezeichnungen:

α durch v, β durch w, γ durch $v\sigma + w\tau$, $\gamma - x$ durch u_0 oder $v\sigma_0 + w\tau_0$,

wo $\sigma, \tau, \sigma_0, \tau_0$ reelle Variabeln sind, so nimmt das Eisenstein'sche Doppelproduct die Gestalt an:

$$(21)\qquad \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \prod_{n=-N}^{n=N} \prod_{m=-M}^{m=M} \frac{(\sigma_0 + m) v + (\tau_0 + n) w}{(\sigma + m) v + (\tau + n) w},$$

und man erhält alsdann durch Summation in Beziehung auf m und Benutzung der Formel:

$$\lim_{M=\infty} \prod_{m=-M}^{m=M} \frac{x+m}{y+m} = \frac{\sin x\pi}{\sin y\pi}$$

das einfache Product:

$$\lim_{n=\infty} \prod_{n=-N}^{n=N} \frac{\sin \left(v\sigma_0 + w(\tau_0 + n)\right) \frac{\pi}{v}}{\sin \left(v\sigma + w(\tau + n)\right) \frac{\pi}{v}}.$$

Der Werth desselben ist gleich:

$$\frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

und es ergiebt sich also die Gleichung:

$$(21^*)\qquad \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \prod_{m,n} \frac{(\sigma_0 + m) v + (\tau_0 + n) w}{(\sigma + m) v + (\tau + n) w} = \frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}.$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M;\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

Eisenstein untersucht nun a. a. O. die Werthänderung, welche das Doppelproduct (21) erfährt, wenn man darin:

$$\sigma',\ \tau',\ \sigma_0',\ \tau_0',\ v',\ w'$$

für:

$$\sigma,\ \tau,\ \sigma_0,\ \tau_0,\ v,\ w$$

substituirt, wobei $\sigma', \tau', \sigma_0', \tau_0', v', w'$ durch die Gleichungen:

$$(22)\qquad \begin{aligned} \sigma' &= \alpha\sigma + \beta\tau + \gamma, & \sigma_0' &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 + \gamma, & v' &= \beta' v - \alpha' w \\ \tau' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau + \gamma', & \tau_0' &= \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 + \gamma', & w' &= -\beta v + \alpha w \end{aligned}$$

definirt sind, und $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ irgend welche der Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ genügende ganze Zahlen bedeuten.

Diese Untersuchung gliedert sich in zwei deutlich unterschiedene Theile. Der erste enthält den Nachweis, dass die Differenz, welche verbleibt, wenn von dem Logarithmus des Doppelproducts (21), d. h. also von der Doppelsumme:

$$(23)\qquad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\log\left(1-\frac{(\sigma-\sigma_0)v+(\tau-\tau_0)w}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}\right),$$

die zweifach unendliche Reihe:

$$(24)\qquad -\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\left\{\sum_{m,n}\frac{(\sigma-\sigma_0)v+(\tau-\tau_0)w}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}+\frac{1}{2}\left(\frac{(\sigma-\sigma_0)v+(\tau-\tau_0)w}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}\right)^2\right\}$$
$$(-M\leqq m\leqq M,\ -N\leqq n\leqq N)$$

subtrahirt wird, bei der angegebenen Substitution ihren Werth behält, und im zweiten Theile wird alsdann die durch die Substitution bewirkte Werthänderung eben dieser Reihe (24) ermittelt. Dabei bleiben Glieder der Reihe, in endlicher Anzahl, ausser Betracht; der übrige Theil der Reihe tritt bei der Entwickelung der nach Potenzen von:

$$\frac{(\sigma-\sigma_0)v+(\tau-\tau_0)w}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}$$

entwickelbaren Logarithmen der Doppelsumme (23) auf und bildet darin das Aggregat der ersten beiden Glieder.

Bedeutet $\mathrm{En}(u_0, u, v, w)$ eine Function von

$$u_0, u, v, w \qquad \begin{pmatrix} u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0 \\ u = v\sigma + w\tau \end{pmatrix},$$

deren Logarithmus jene Differenz der beiden Doppelsummen (23) und (24) ist, welche sich nach der EISENSTEIN'schen Abhandlung als eine Invariante der Aequivalenz:

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w) \backsim (\sigma_0', \tau_0', \sigma', \tau', v', w')$$

in der oben bei (22) angegebenen Bedeutung von $\sigma_0', \tau_0', \sigma', \tau', v', w'$ erweist, so ist auch die Function $\mathrm{En}(u_0, u, v, w)$ selbst eine solche und soll deshalb als »EISENSTEIN'sche Invariante« bezeichnet werden.

Die EISENSTEIN'sche Invariante hängt nicht von ihren vier Argumenten selbst, sondern nur von deren Verhältnissen ab; ihre Beziehung zu dem ϑ-Quotienten in (21*) wird, wenn man zur Abkürzung:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{u+mv+nw}=f_1(u,v,w)$$
$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(u+mv+nw)^2}=f_2(u,v,w)\qquad \begin{pmatrix}-M\leqq m\leqq M\\ -N\leqq n\leqq N\end{pmatrix}$$

setzt, durch folgende Gleichung ausgedrückt:

$$(25)\qquad e^{-(u-u_0)f_1(u,v,w)-\frac{1}{2}(u-u_0)^2 f_2(u,v,w)}\,\mathrm{En}(u_0,u,v,w)=\frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}.$$

Der Nachweis der Invarianteneigenschaft von $\log \mathrm{En}(u_0, u, v, w)$ in dem ersteren der beiden oben unterschiedenen Theile der Eisenstein'schen Entwickelungen ist nach gewöhnlichen Methoden geführt, indem die absolute Convergenz der Reihe:

$$\sum_{l,m,n} \frac{c^{(l)}}{(u+mv+nw)^{l+2}} \qquad \left(\begin{matrix} l = 1, 2, 3, \ldots \\ m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{matrix}\right)$$

unter der Voraussetzung dargethan wird, dass die absoluten Werthe der Coefficienten $c^{(l)}$ unter einer bestimmten Grenze bleiben und dass, falls $u+mv+nw$ für ein Werthsystem m, n gleich Null ist, dieses bei der Summation ausgeschlossen wird. Aber die Bestimmung der Werthänderungen der hier mit $f_1(u, v, w)$, $f_2(u, v, w)$ bezeichneten Reihen bei der Substituirung von v', w' für v, w im zweiten Theile ist a. a. O. in eigenthümlicher, höchst sinnreicher Weise erfolgt; nur ist die Darstellung etwas weitläufig, und ich will deshalb hier die bezügliche Eisenstein'sche Deduction in wesentlich vereinfachter Form auseinandersetzen.

Gemäss der Definition von $f_1(u, v, w)$ und $f_2(u, v, w)$ ist für beide Werthe $r = 1$, $r = 2$:

$$(26) \qquad f_r(u+v, v, w) - f_r(u, v, w) = 0$$

und:

$$(27) \quad f_r(u+w,v,w)-f_r(u,v,w) = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\left\{\sum_{m=-M}^{m=M}\Big(u+mv+(N+1)w\Big)^{-r} - \sum_{m=-M}^{m=M}(u+mv-Nw)^{-}\right.$$

Werden hier die Summationen ausgeführt, und zwar mittels der Formeln:

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{m=M} (x+mv)^{-1} = -\frac{\varepsilon\pi i}{v} \cdot \frac{e^{-\frac{\varepsilon x\pi i}{v}} + e^{\frac{\varepsilon x\pi i}{v}}}{e^{-\frac{\varepsilon x\pi i}{v}} - e^{\frac{\varepsilon x\pi i}{v}}},$$

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{m=M} (x+mv)^{-2} = -\frac{4\pi^2}{v^2} \cdot \left(e^{\frac{\varepsilon x\pi i}{v}} - e^{-\frac{\varepsilon x\pi i}{v}}\right)^{-2},$$

wo ε das Vorzeichen des mit i multiplicirten Theils von $\frac{x}{v}$ bedeutet, so ergiebt die Gleichung (27) das Resultat:

$$f_1(u+w, v, w) - f_1(u, v, w) = -\frac{2\varepsilon\pi i}{v}, \quad f_2(u+w, v, w) - f_2(u, v, w) = 0,$$

folglich, wegen der Gleichung (26), für zwei beliebige ganze Zahlen g, h:

$$(28) \quad f_r(u+gv+hw, v, w) - f_r(u, v, w) = -\frac{2\varepsilon h\pi i}{v} \text{ oder } = 0,$$

je nachdem $r = 1$ oder $r = 2$ ist.

Setzt man nun:

$$gv + hw = -t,\ g' = \alpha g + \beta h,\ h' = \alpha' g + \beta' h$$

und wie oben:

$$v' = \beta' v - \alpha' w,\ w' = -\beta v + \alpha w,$$

wo $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze der Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ genügende Zahlen bedeuten, so ist:

$$(29) \qquad g'v' + h'w' = gv + hw = -t,\ hv' - h'v = \alpha' t$$

und gemäss der Gleichung (28):

$$(28^*)\ f_r(u + g'v' + h'w', v', w') - f_r(u, v', w') = -\frac{2\varepsilon h'\pi i}{v'} \text{ oder } = 0,$$

je nachdem $r = 1$ oder $r = 2$ ist. Die Gleichungen (28), (28*), (29) führen also zu dem Ergebniss:

$$(30)\ f_r(u-t, v', w') - f_r(u-t, v, w) - f_r(u, v', w') + f_r(u, v, w) = \frac{2\varepsilon\alpha' t\pi i}{vv'} \text{ oder } = 0,$$

je nachdem $r = 1$ oder $r = 2$ ist.

In den Entwickelungen der Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} &-\frac{1}{u} + f_1(u, v, w) + \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{u}{(mv + nw)^2} \\ &-\frac{1}{u^2} + f_2(u, v, w) - \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{1}{(mv + nw)^2} \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \\ n = \pm 1, \pm 2 \ldots \pm N \end{pmatrix}$$

nach steigenden Potenzen von u kommen nur Glieder vor, in welchen die dritte oder eine höhere Potenz von $(mv + nw)$ den Nenner bildet; beide Ausdrücke behalten also, nach den oben erwähnten EISENSTEIN'schen Ausführungen ihre Werthe, wenn v' für v und w' für w substituirt wird. Aus der Gleichung (30) geht demnach für $r = 1$ die folgende hervor:

$$(30^*) \qquad \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \left\{ \frac{1}{(mv' + nw')^2} - \frac{1}{(mv + nw)^2} \right\} = \frac{2\varepsilon\alpha'\pi i}{vv'},$$
$$(m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M;\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

und man erhält hieraus unmittelbar mit Hülfe der Gleichungen (28*) und (30) zur Bestimmung der Werthänderungen von f_1 und f_2 beim Übergange von u, v, w zu u', v', w' die Relationen:

$$(31) \qquad \begin{aligned} f_1(u', v', w') - f_1(u, v, w) &= -\frac{2\varepsilon\alpha' u\pi i}{vv'} - \frac{2\varepsilon\gamma'\pi i}{v'}, \\ f_2(u', v', w') - f_2(u, v, w) &= \frac{2\varepsilon\alpha'\pi i}{vv'}, \end{aligned}$$

unter den Bedingungen:

$$\begin{aligned} \sigma' &= \alpha\sigma + \beta\tau + \gamma, & v' &= \beta' v - \alpha' w, & u &= v\sigma + w\tau \\ \tau' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau + \gamma', & w' &= -\beta v + \alpha w, & u' &= v'\sigma' + w'\tau' \end{aligned} \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1).$$

Dabei ist $u' = u + \gamma v + \gamma' w$ und ε bedeutet das Vorzeichen des mit i multiplicirten Theiles von $\frac{w}{v}$.

Der Exponent von e auf der linken Seite der Gleichung (25) war:

$$-(u-u_0) f_1(u, v, w) - \tfrac{1}{2}(u-u_0)^2 f_2(u, v, w) \qquad \begin{pmatrix} u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0 \\ u \;= v\sigma \;+ w\tau \end{pmatrix}.$$

Wird hierin u_0, u, v, w durch u_0', u', v', w' ersetzt und von dem so resultirenden Ausdruck der ursprüngliche subtrahirt, so sind darauf die Relationen (31) anwendbar, da $u - u_0 = u' - u_0'$ ist, und es ergiebt sich das Resultat:

$$(u^2 - u_0^2)\frac{\varepsilon\alpha'\pi i}{v\,v'} + (u-u_0)\frac{2\varepsilon\gamma'\pi i}{v'}.$$

Aus der Gleichung (25) erhält man daher die Transformationsgleichung für die ϑ-Function:

$$(32) \qquad \frac{\vartheta\left(\frac{u_0'}{v'}, \frac{\varepsilon' w'}{v'}\right)}{\vartheta\left(\frac{u'}{v'}, \frac{\varepsilon' w'}{v'}\right)} = \frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{(u^2-u_0^2)\frac{\varepsilon\alpha'\pi i}{v\,v'} + (u-u_0)\frac{2\varepsilon\gamma'\pi i}{v'}}.$$

Setzt man hierin $\sigma = 0, \tau = 0, \gamma = 0, \gamma' = 0$, so wird $u = u' = 0$. $u_0 = u_0'$ und es kommt:

$$(33) \qquad v' \cdot \frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v'}, \frac{\varepsilon' w'}{v'}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon' w'}{v'}\right)} = v \cdot \frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\frac{-u_0^2}{v\,v'}\varepsilon\alpha'\pi i};$$

setzt man aber $\sigma = 0$, $\tau = \frac{1}{2}$, $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$, $\gamma = 0$, $\gamma' = 0$, so resultirt die oben im art. III mit (20) bezeichnete Transformationsgleichung, welche Jacobi im art. 56 der Fundamenta mit Hülfe der Legendre'schen Relation abgeleitet hat.

Die hier auseinandergesetzte Eisenstein'sche Methode der Ableitung der Transformationsgleichung für die ϑ-Function beruht ganz wesentlich auf der Erkenntniss, dass von dem Doppelproduct (21), welches den Ausgangspunkt seiner Untersuchungen bildet und seinem Werthe nach durch einen Quotienten zweier ϑ-Functionen dargestellt wird, ein Theil En (u_0, u, v, w) als Factor abgesondert werden kann, welcher bei der linearen Transformation der ϑ-Functionen seinen Werth behält. Dieser Theil, welchen ich als die Eisenstein'sche Invariante bezeichnet habe, war durch die Gleichung (25) in folgender Weise bestimmt:

$$\mathrm{En}\,(u_0,\, u,\, v,\, w) = \frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}\, e^{(u-u_0) f_1(u,v,w) + \frac{1}{2}(u-u_0)^2 f_2(u,v,w)}.$$

Nun erhält man für die hierbei vorkommenden Functionen f_1, f_2, wenn man in den Reihen, durch welche sie definirt sind, die Summation in Beziehung auf m ausführt, die Werthe:

$$v f_1(u, v, w) = \frac{\vartheta'\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = \chi\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)$$

$$-v^2 f_2(u,v,w) = \frac{\vartheta''\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} - \left(\frac{\vartheta'\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}\right)^2 = \chi'\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right).$$

Die EISENSTEIN'sche Invariante ist also auch einzig und allein durch ϑ-Functionen in folgender Weise darzustellen:

$$(34)\qquad \log \mathrm{En}\,(u_0, u, v, w) = \log \frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}\right)} - \left(\frac{u_0-u}{v}\right)\frac{\vartheta'\left(\frac{u}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}\right)} - \frac{1}{2}\left(\frac{u_0-u}{v}\right)^2 \left\{\frac{\vartheta''\left(\frac{u}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}\right)} - \left(\frac{\vartheta'\left(\frac{u}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}\right)}\right)^2\right\},$$

d. h. die EISENSTEIN'sche Invariante kann dadurch definirt werden, dass ihr Logarithmus gleich demjenigen Theile der Entwickelung von

$$\log \frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}\right)}$$

nach Potenzen von $u_0 - u$ ist, welcher erst mit der dritten Potenz anfängt.

Die EISENSTEIN'sche Invariante ist eine Invariante der Aequivalenz:

$$(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w) \backsim (\sigma_0', \tau_0', \sigma', \tau', v', w')$$

unter den Bedingungen:

$$\begin{aligned} \sigma_0' &= \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0 + \gamma, & \sigma' &= \alpha\sigma + \beta\tau + \gamma, & v' &= \beta' v - \alpha' w, \\ \tau_0' &= \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0 + \gamma', & \tau' &= \alpha'\sigma + \beta'\tau + \gamma', & w' &= -\beta v + \alpha w. \end{aligned}$$

$$(\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1)$$

Werden die Bedingungen aber auf die Werthe $\gamma = \gamma' = 0$ eingeschränkt. so stellen die mit u_0, u bezeichneten Ausdrücke:

$$v\sigma_0 + w\tau_0, \quad v\sigma + w\tau$$

und daher, nach den oben citirten EISENSTEIN'schen Darlegungen, auch die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} & f_1(u, v, w) + u \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} (mv + nw)^{-2} \\ & f_2(u, v, w) - \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} (mv + nw)^{-2} \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N \end{pmatrix}$$

Invarianten dar. Es entsteht daher in dem nunmehr beschränkteren Sinne auch eine Invariante, wenn man in der Definitionsgleichung (25) der EISENSTEIN'schen Invariante

$$f_1(u,v,w) \text{ durch } -u \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum (mv + nw)^{-2}.$$

$$f_2(u,v,w) \text{ durch } \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum (mv + nw)^{-2}$$

ersetzt. Die so entstehende Invariante ist:

$$(35) \qquad \frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\frac{1}{2}(u_0^2 - u^2)\,\Sigma\,(mv + nw)^{-2}},$$

und man hat hierbei unter der Summe $\Sigma\,(mv + nw)^{-2}$ im Exponenten den Grenzwerth:

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} (mv + nw)^{-2} \qquad \begin{pmatrix} m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N \end{pmatrix}$$

zu verstehen, welcher, wie unmittelbar aus der Definitionsgleichung von $f_2(u,v,w)$ hervorgeht, gleich dem folgenden ist:

$$\lim_{u=0} \left(-\frac{1}{u^2} + f_2(u,v,w) \right).$$

Benutzt man nun zur Bestimmung dieses Grenzwerths die obige Darstellung von f_2 durch ϑ-Functionen, so resultirt die Gleichung:

$$(36) \quad v^2 \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} (mv + nw)^{-2} = -\frac{1}{3} \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} \qquad \begin{pmatrix} m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \\ n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N \end{pmatrix},$$

und also für den Logarithmus der Invariante (35) die Bestimmung:

$$(37) \qquad \log \frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} + \frac{u^2 - u_0^2}{6v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}.$$

Auf eben dieselbe Invariante führt die Entwickelung nach steigenden Potenzen von u auf der rechten Seite der Gleichung (34). Denn diese ist bis auf Glieder, welche für $u = 0$ verschwinden:

$$-\log u + \frac{(u-u_0)(3u-u_0)}{2u^2} + \log \frac{v\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} - \frac{u_0^2}{6v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}.$$

Setzt man also:

$$(38) \qquad \log \frac{v\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} - \frac{u_0^2}{6v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = \log \overline{\mathrm{En}}\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right),$$

so bestimmt sich die Function $\overline{\mathrm{En}}\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)$ als Grenzwerth der allgemeineren Eisenstein'schen Invariante durch die Gleichung:

$$(39) \qquad \overline{\mathrm{En}}\left(\frac{u_0}{u}, \frac{\varepsilon w}{v}\right) = \lim_{u=0} u \, \mathrm{En}\,(u_0, u, v, w)\, e^{\frac{-(u-u_0)(3u-u_0)}{2u^2}};$$

sie ist selbst eine Invariante der beschränkteren, nur auf die Grössen v und w bezüglichen Aequivalenz:

$$(v, w) \sim (\beta' v - \alpha' w, -\beta v + \alpha w) \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1),$$

und die obige Invariante (35) ist in der Form:

$$\frac{\overline{\mathrm{En}}\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\overline{\mathrm{En}}\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

als Quotient zweier Invarianten $\overline{\mathrm{En}}$ darstellbar.

VII.

Durch die unendlichen Doppelproducte und Doppelsummen, welche Eisenstein seiner neuen Theorie der elliptischen Functionen zu Grunde gelegt hat, werden diese so zu sagen in ihre »Elemente« zerlegt. Die Legendre'sche Relation erscheint dabei zuerst in der allgemeinen Form:

$$(40) \qquad \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \left\{ \sum_{m,n} \frac{1}{(mv'+nw')^2} - \sum_{m,n} \frac{1}{(mv+nw)^2} \right\} = \frac{2\varepsilon\alpha'\pi i}{v v'},$$
$$(m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M; \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

aus welcher dann, wenn man in den Substitutionsgleichungen:

$$v' = \beta' v - \alpha' w, \quad w' = -\beta v + \alpha w \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1)$$

$\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$ annimmt, die speciellere Relation:

$$(41) \qquad \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \left\{ \sum_{m,n} \frac{1}{(mw + nv)^2} - \sum_{m,n} \frac{1}{(mv + nw)^2} \right\} = -\frac{2\varepsilon\pi i}{vw}$$

$$(m = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M; \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N)$$

hervorgeht. Diese speciellere Relation (41) zeigt sich als vollkommen identisch mit der LEGENDRE'schen Relation in der obigen Gestalt (6):

$$v^2 \frac{\vartheta'''\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)} - w^2 \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = 6\varepsilon vw\pi i,$$

wenn darin für den Quotienten $\frac{\vartheta'''}{\vartheta'}$ die Werthe aus der Gleichung (36) eingesetzt werden.[1]

Die allgemeinere Relation (40) entsteht einfach aus der zweiten der oben mit (31) bezeichneten Gleichungen, indem darin $\gamma' = 0$, also $u' = u$ und dann $u = 0$ gesetzt wird, und diese Gleichung ist es, auf welcher in der EISENSTEIN'schen Entwickelung die lineare Transformation der ϑ-Function beruht. Dies tritt besonders deutlich in der oben mit (38) bezeichneten Gleichung hervor. Denn da der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung ungeändert bleibt, wenn die Grössen v, w durch v', w' ersetzt werden, so ergiebt sich zuvörderst bei Anwendung der ihrem Inhalte nach mit der Relation (40) gleichbedeutenden Formel:

$$(40^*) \qquad \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right)}{v'^2 \vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right)} - \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{v^2 \vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = -\frac{6\varepsilon\alpha'\pi i}{vv'}$$

ganz unmittelbar das Resultat:

$$(42) \qquad \frac{v'\vartheta\left(\frac{u_0}{v'}, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right)} = \frac{v\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{-u_0^2 \frac{\varepsilon\alpha'\pi i}{vv'}},$$

---

[1] Eine andere Art der Ableitung der LEGENDRE'schen Relation aus den EISENSTEIN'schen Entwickelungen findet sich auf S. 27—29 der Inauguraldissertation des Hrn. ADOLF HURWITZ. (Leipzig 1881).

in genauer Übereinstimmung mit der obigen Gleichung (33). Ferner entsteht aus derselben Formel (40*) durch »exponentielle Integration« — wie EISENSTEIN treffend die der logarithmischen Differentiation entgegengesetzte Operation bezeichnet[1] — die Transformationsgleichung:

$$(42^*) \qquad \frac{C}{v'\sqrt{v'}}\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right) = \frac{1}{v\sqrt{v}}\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right),$$

wo C die Integrationsconstante bedeutet. Der Werth derselben erweist sich sowohl für den Fall:

$$\alpha = 1, \ \beta = -1, \ \alpha' = 0, \ \beta' = 1$$

bei beliebigen Grössen v, w, als auch für den Fall:

$$\alpha = 0, \ \beta = -1, \ \alpha' = 1, \ \beta' = 0,$$

wenn dabei $w = \varepsilon i v$ genommen wird, als eine achte Wurzel der Einheit, und da sich aus lauter Substitutionen der beiden angegebenen Arten jede Substitution:

$$v' = \beta' v - \alpha' w, \ w' = -\beta v + \alpha w$$

zusammensetzen lässt, so ist der Werth von C stets $e^{\frac{h\pi i}{4}}$, und die ganze Zahl h bestimmt sich durch die Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$.

Mit Hülfe der Gleichung (42*) und der angegebenen Bestimmung von C geht die Transformationsgleichung (42) in folgende über:

$$(43) \qquad \sqrt{v'}\,\vartheta\left(\frac{u_0}{v'}, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right) = \sqrt{v}\,\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right) e^{-u_0^2\frac{\varepsilon\alpha'\pi i}{vv'} + \frac{h\pi i}{4}},$$

und da andererseits die obige Formel (40*) oder die damit gleichbedeutende Relation (40) durch Differentiation aus der Transformationsgleichung (43) hervorgeht, so erweisen sich diese beiden Gleichungen als vollständig aequivalent. Es zeigen also auch die EISENSTEIN'schen Entwickelungen, und zwar mit besonderer Deutlichkeit, die inhaltliche Übereinstimmung der LEGENDRE'schen Relation mit derjenigen, welche zwischen linear transformirten ϑ-Functionen besteht.

Es verdient wohl noch hervorgehoben zu werden, dass sich gemäss der Bemerkung am Schlusse des art. IV für die dort angenommenen besonderen Werthe:

$$\varepsilon w = v e^{\frac{2}{3}\pi i}, \quad \varepsilon w = vi$$

aus der Gleichung (36) die beiden Formeln:

---

[1] CRELLE's Journal, Bd. 35, S. 226.

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(2m-n+ni|\sqrt{3}|)^2}=\frac{\pi}{2|\sqrt{3}|}\qquad\begin{pmatrix}m=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm M\\ n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \pm N\end{pmatrix}$$

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(m+ni)^2}=\pi$$

zur Bestimmung der EISENSTEIN'schen Doppelsummen $\sum (mv+nw)^{-2}$ ergeben.

(Fortsetzung folgt.)

---

18. Krystallographisch-optische Untersuchungen.

Über Construction und Verwendung von Drehapparaten zur optischen Untersuchung von Krystallen in Medien ähnlicher Brechbarkeit.

Von C. Klein.

(Vorgetragen am 30. April; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXIV]: — ausgegeben am 8. Mai.)

In zwei, im vorigen Jahre erschienenen Mittheilungen (vergl. diese Sitzungsberichte 1890 S. 347 und 703) habe ich die Bedeutung einer Methode hervorgehoben, nach welcher ganze Krystalle oder Bruchstücke derselben in Medien untersucht werden, deren Brechbarkeit nahezu gleich dem mittleren Brechungsverhältniss der betreffenden Krystalle ist.

Ich konnte zu jener Zeit (a. a. O. S. 348) nur eine bestimmte, durch die speciellen Verhältnisse jeweils gegebene Richtung in's Auge fassen, in der die Untersuchung stattzufinden hatte, stellte indessen schon damals (a. a. O. S. 710) die Herstellung eines besonderen Drehapparats zu ausgiebigeren Erforschungen in Aussicht.

Hr. Fuess hat nach mannigfachen Versuchen ein ebenso einfaches, als für die Zwecke der ersten Orientirung zweckmässiges Instrument ersonnen, dessen kurze Schilderung ich hier vorausschicke, um nachher eingehender bei seiner Anwendung zu verweilen.

Auf den Tisch eines Mikroskops oder, wenn es sich um Beobachtungen im convergenten, polarisirten Lichte allein handelt, auf den eines Nörrenberg'schen Polarisationsinstruments, wird eine kreisförmige Metallscheibe von 54^{mm} Durchmesser gelegt, die centrisch durchbohrt und mit einer Öffnung von 15^{mm} versehen ist, um eventuell den Condensorlinsen des Apparats[1] Annäherung, bez. Eintritt zu gestatten.

Auf der Scheibe erhebt sich am Rande der erwähnten Öffnung ein Cylinderabschnitt von 7^{mm} Höhe. Derselbe ist einseitig geöffnet und dazu bestimmt einem in ihn einzusetzenden cylindrischen Glasgefässe, das mit einem hohlen Stiele versehen ist, als Führung zu

[1] Dieselben müssen für diesen Zweck besonders construirt sein, da der Krystall weiter als sonst von der Frontlinse absteht. — Ein passender Linsensatz wird jedem Drehapparat beigegeben.

dienen. — Dieses Glasgefäss ist in zwei Ausführungen vorhanden, ein Mal in einer kleineren von 8^{mm} Höhe, hauptsächlich bestimmt zu den wissenschaftlichen Untersuchungen zu dienen; ein zweites, grösseres Gefäss von etwa 15^{mm} Höhe dient dazu bei der Untersuchung von grösseren Objecten, geschliffenen Steinen u. s. w. Verwendung zu finden. Beide Gefässe sind wie erwähnt nicht von reiner Cylinderform, sondern es besitzt ein jedes derselben einseitig eine sich von dem Gefässe ab kegelförmig erweiternde Ausmündungsröhre, deren Axe senkrecht zu der des cylinderförmigen Gefässes steht. In diese Röhre kann ein abgestumpfter Glaskegel eingesetzt werden, der wiederum hohl ist und in dieser Höhlung einen mit Gummi befestigten Glasstab besitzt.[1] Dieser ist an seinem Ende etwas verdickt und rauh und ragt in das cylindrische Gefäss fast bis zu dessen Mitte hinein. Das nach aussen zu gewandte Ende des Glaskegels ist mit einem Metallcylinder versehen, der eine Theilung trägt; dieselbe erlaubt es, an einer Marke der Glasröhre hingleitend, bei der Drehung von 5 zu 5 Graden abzulesen und einzelne Grade zu schätzen.

Auf dass die in das cylindrische Gefäss einzufüllenden Flüssigkeiten[2] nicht in die conische Röhre eindringen und durch Adhäsion den Gang der Drehvorrichtung beeinträchtigen, ist es zweckmässig den in jene einzuschiebenden Glasconus mit Fett einzureiben, in seiner Führung zu drehen und dann erst die Flüssigkeit in das Gefäss zu giessen. Um zu verhindern, dass bei der Drehung der Glasconus aus der Röhre gelange und die Flüssigkeit des Cylinders sich über den Tisch des Instrumentes ergiesse, hält ersteren an der an seinem Ende angebrachten Drehscheibe eine einzuhängende Feder fest, während andererseits eine Klemme und eine Schraube den ganzen Glasapparat mit der Unterlage von Metall fest verbinden.

In dieser Weise ist das äusserst einfache Instrument ausgeführt, welches es gestattet eine Fülle der interessantesten, vielfach sonst nicht ohne die grösste Mühe zur Wahrnehmung gelangenden Beobachtungen zu machen, und seines billigen Preises wegen wohl bald in den Händen aller Forscher sich befinden wird.

---

[1] In neuester Zeit werden Glaskegel und Glasstab wohl auch aus einem Stück gefertigt.

[2] Will man nicht die THOULET'sche Flüssigkeit gebrauchen, deren Brechungsverhältniss, wie bekannt, nach dem Concentrationsgrade von $n = 1.726$ ab variirt, oder hat man nicht genügende Mengen von Methylenjodid $n = 1.741$, das mit Xylol zu verdünnen ist, zur Verfügung und kommt es, wie es bei vielen Versuchen der Fall ist, nur auf eine Flüssigkeit an, die mit dem Krystalle ungefähr von gleicher Brechbarkeit ist, so leisten in den gewöhnlich vorkommenden Fällen: Olivenöl $n = 1.47$; Anisöl $n = 1.5725$, Cassiaöl $n = 1.6104$ und Monobromnaphtalin $n = 1.6585$ gute Dienste. Wegen anderer, besonders stark brechenden Flüssigkeiten wolle man die Zusammenstellung bei PULFRICH, das Totalreflectometer 1890 S. 64 u. f. vergleichen.

Selbstverständlich haften dieser einfachen Vorrichtung mehrere Mängel an. Einmal ist die Ablesung der Drehung nicht sehr genau, dann vermag man es nicht oder doch nicht ohne grosse Mühe in Strenge eine Fläche, von der man ausgehen will, genau horizontal zu stellen; auch bietet mitunter die genaue Einstellung des Krystalls selbst, z. B. mit einer seiner Kanten parallel der Drehaxe, Schwierigkeiten dar. Endlich fehlt, abgesehen von der Tischbewegung des Mikroskops und der in deren Ebene liegenden Drehbewegung des Apparats, die auf jener Ebene senkrecht stehende dritte Bewegung — allein alle diese Mängel lassen sich an dem kleinen Drehapparat nicht beseitigen, ohne ihn gleich viel complicirter und theuerer zu machen. Zunächst sollte der kleine Apparat auch nur als Hülfsvorrichtung bei vertical disponirten Instrumenten Anwendung finden und, da die Verwendung von Flüssigkeiten, die die Metalle angreifen, nicht ausgeschlossen war, so musste im Innern des Gefässes nur Glas mit der Flüssigkeit in Berührung kommen. Danach war die Anbringung von metallenen Drehvorrichtungen im Innern des Gefässes nicht möglich. —

Wie die nachfolgende Darlegung zeigen wird lässt sich schon mit der einfachen Vorrichtung sehr viel erreichen; um indessen feinere Beobachtungen, deren Nothwendigkeit sich auch herausstellt, gleichfalls vornehmen zu können, werde ich zum Schlusse die Disposition eines weitergehenden Anforderungen gerecht werdenden Instrumentes schildern.

1. Untersuchungen im convergenten polarisirten Lichte.

a. *Optisch einaxige Krystalle.*

Will man die Axenerscheinung suchen, so wird man, wenn keine äussere Krystallform da ist, die leitet, das betreffende Stück in einer beliebigen und danach in einer dazu senkrechten Richtung nach einander an den Träger ankleben, mit der passenden Flüssigkeit einhüllen und durch Drehen die Position der optischen Axe ermitteln. Natriumlicht leistet hierbei sehr gute Dienste.

Ist die Richtung dieser letzteren bekannt oder aus der äusseren Form des Krystalls zu entnehmen, so wird man denselben senkrecht zur optischen Axe am Stiele des Drehapparats befestigen und kann dann alle Erscheinungen, welche Platten senkrecht, geneigt oder parallel der Axe zeigen, mit einer Drehung um 90° sich nach einander vorführen und so besonders schön im Natriumlichte alle Übergänge der verschiedenen Curven in einander erkennen. Fernerhin ist es mit Zuhülfenahme der bekannten Mittel möglich den Charakter der Doppelbrechung studiren zu können u. s. w.[1]

Von besonderem Interesse ist es auch zeigen zu können, wie der Krystall die Erscheinungen von Platten, senkrecht, geneigt oder parallel zur Axe nachahmt, wenn diese auf dem Tisch des Mikroskops eine volle Umdrehung durch 360° erfahren.

In letzterer Hinsicht sind die Lagen, parallel zur Axe, in welchem Falle der Anfänger aus dem Curvensystem ein optisch-zweiaxiges Mineral zu erschliessen geneigt ist, wenn er eine nicht genügende Anzahl von Schnitten untersucht oder sich überzeugt, dass das Curvensystem rund um die Axe herum sich gleich bleibt, und der Fall, in welchem die Lage sehr schief zur Axe *c* liegt, so dass die Erscheinung im einaxigen Systeme für die eines zweiaxigen, schief zu einer Axe, genommen werden könnte, von erheblichem und lehrhaftem Interesse. Volle Klarheit kann leicht durch einfaches Drehen am Apparate geschaffen werden.

b. *Optisch zweiaxige Krystalle.*

Durch ein Verfahren, was dem bei den einaxigen Krystallen erörterten analog ist, kann hier die zweiaxige Natur des vorliegenden Körpers constatirt und er dann in den Richtungen senkrecht $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ nach einander untersucht werden. Die entsprechenden Curvensysteme kommen zur Darstellung und ihre Übergänge in einander werden besonders im Natriumlicht deutlich. Lagen, entsprechend Schnitten, schief zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ gelegen, Schnitten, mehr oder weniger senkrecht zu einer der optischen Axen, können durch Drehung des passend justirten Krystalls dargestellt und die dabei auftretenden Erscheinungen studirt werden.

2. Untersuchungen im parallelen polarisirten Lichte.

Abgesehen von dem Studium der etwa vorhandenen, besonderen optischen Structur auf den einzelnen Flächen (Feldertheilung u. s. w.) kann namentlich die Lage der Auslöschungsrichtungen auf denselben, d. h. in Positionen, die denselben entsprechen, ermittelt werden.

[1] Vom Standpunkt des Juweliers hat es besonderes Interesse von Rubin, Sapphir und Smaragd die Überzeugung zu erhalten, dass sie aus ächter Substanz bestehen und einheitlich gebildet sind. Ob diese Substanz ein Product der Natur oder der Kunst sei, entscheidet diese Methode nicht. — Vom Standpunkt des Petrographen wird es in dieser Abtheilung der Mineralien namentlich der Gesteinsquarz sein, der zu untersuchen wäre.

a. *Optisch einaxige Krystalle.*

Hier kommen die wohlbekannten Fälle senkrecht zu c, parallel mit c, einfach und doppelt schief zu c geneigt, zur Vorführung und bedürfen keiner besonderen Besprechung.

b. *Optisch zweiaxige Krystalle.*

Von ganz besonderem Interesse wird es hier bei den rhombischen Krystallen sein als Drehaxen die Axen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ zu nehmen. Es findet dann im allgemeinen auf den entsprechenden Prismen oder Domen orientirte Auslöschung senkrecht und parallel zur Drehaxe statt. Nur in dem Falle, in dem die Drehaxe die Axe $\mathfrak{b}$ ist, gibt es eine durch die Theorie vorausgesehene, interessante Ausnahme, indem dann, wenn die Ebene $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}$ vertical steht, viermal die Dunkelheit durch Helligkeit unterbrochen wird.

Man sieht ohne weiteres ein, dass dies jedesmal der Fall sein muss, wenn eine der beiden optischen Axen in die Axe des Beobachtungsinstrumentes fällt, und kann sich davon auch direct sofort überzeugen, wenn man das einfallende Licht convergent macht und das Mikroskop zum Axenaustritt einrichtet. Jene Thatsache ermöglicht uns aber die Aufgabe zu lösen: in einem rhombischen Krystalle die Lage der Axenebene zu bestimmen, ja sogar eine annähernde Schätzung der Grösse des Axenwinkels zu gewinnen, ohne ein Instrument zu besitzen, mit dem sonst diese Beobachtungen angestellt werden, also ein solches, was mit convergentem Lichte arbeitet.

Im Falle der monoklinen Krystalle wird die Zone der Orthodiagonale auch mit der neuen Methode sich durch Orientirung der Auslöschungsrichtungen senkrecht und parallel zur Axe b auszeichnen; es wird sich aber auch durch Anwendung des vorhin Mitgetheilten sofort zu erkennen geben, ob die Axen im Klinopinakoid liegen oder nicht und wie gross in ersterem Falle ihr Winkel sei. Auf den übrigen Lagen, die der Krystall annehmen kann und folglich auf den denselben entsprechenden Flächen, wird man die charakteristischen Schiefen darstellen und die Methode selbst beim Studium trikliner Krystalle mit Vortheil verwenden können.

In letzterer Hinsicht leistet sie Ausgezeichnetes, wenn es gilt die wechselnden Schiefen auf den Flächen einer Zone zur Darstellung zu bringen, Fälle, die schon im monoklinen Systeme in den Lagen der Flächen aus der Zone der Orthodiagonale zum Klinopinakoid von Bedeutung sind.

Wie bekannt war man vor den schönen Untersuchungen von A. Michel-Lévy,[1] die einem grösseren Publikum in dem Werke von F. Fouqué und A. Michel-Lévy, Minéralogie micrographique 1879, dargelegt wurden, vielfach nicht der richtigen Ansicht über die hier obwaltenden Verhältnisse. Erst durch besagte Arbeit wurde die nöthige Klarheit erbracht und in dem Werke von A. Michel-Lévy und Alf. Lacroix, Les Minéraux des Roches 1888, noch mehr vervollständigt.

Jeder, der die interessanten Darstellungen ansieht, wie sie, z. B. in letzterem Werke, über den Orthoklas und die Plagioklase statthaben, muss es mit Freuden begrüssen, dass es der Theorie gelungen ist, Licht in diese verwickelten Verhältnisse zu bringen, einem jedem Forscher wird aber auch der Wunsch nahetreten, das Mitgetheilte prüfen und die betreffenden Erscheinungen sich vorführen zu können.

Mag dies bei dem Orthoklas (Sanidin) noch durch anzufertigende Schliffe gehen, so ist dies doch schon beim Albit schwierig und beim Anorthit ganz unmöglich. Wer wollte sich getrauen einen auch schon ganz ansehnlich grossen Anorthit in die erforderliche Anzahl von Schliffen zu zerlegen? Keine Schleifkunst vermag dies und wer wollte überdies für die Richtigkeit der Lagen aufkommen, da ein kleiner Fehler hier schon einen sehr bedeutenden in der Auslöschung zur Folge haben kann (vergl. die Curve des Anorthits a. a. O. S. 202).

Hier tritt nun die Methode der Umhüllung, angewandt im Drehapparat, in ihr volles Recht ein. Man kann, eine Flüssigkeit von mittlerem Brechungsverhältniss zwischen den beiden in Betracht kommenden Extremen zunächst vorausgesetzt, für jede Lage des Krystalls gewissermaassen sich die horizontal liegende Fläche dargestellt denken, darauf die Auslöschungen bestimmen und danach in der betreffenden Lage im convergenten Lichte untersuchen.

Für den Sanidin (a. a. O. S. 188 Fig. 71) sieht man sehr schön, dass die Schiefen vom Klinopinakoid an langsam wachsen und erst nach 45° erheblich anschwellen, um im Orthopinakoid zur Orientirung zu gelangen.

Die interessantesten Verhältnisse zeigen sich bei den triklinen Feldspathen und namentlich beim Anorthit.

Hier stellen Lévy und Lacroix a. a. O. S. 201 in Fig. 88 die Änderungen dar, die sich in der Zone $P = 0P\,(001) : M = \infty\breve{P}\infty\,(010)$ abspielen, und zwar gehen alle Feldspathe vom Anorthit bis Albit, wenn von M ausgegangen und der spitze Winkel $P : M$ entgegengesetzt der Drehung eines Uhrzeigers durchlaufen wird, nach einem bestimmten Drehwinkel durch 0°, d. h. löschen parallel und

[1] Annales des Mines 1877, Bd. XII. p. 394.

senkrecht zur Kante $P:M$ aus. — Die betreffende Lage wird erhalten, wenn man einen Anorthit so anschleift, dass der Schliff parallel der Kante $P:M$ geht und im stumpfen Winkel $P:M$ gelegen etwa 40° gegen P geneigt ist. Es ist bemerkenswerth, dass bei derselben Lage im spitzen Winkel $P:M$ (Fig. 88 S. 201) das Maximum der Schiefe jener Zone auftritt. Letztere Lage ist diejenige, die etwa dem senkrechten Austritt der positiven Mittellinie entspricht, denn der eben angeführte Schliff trifft in einem Zwilling nach dem Albitgesetz das Zwillingsindividuum annähernd normal zur positiven Mittellinie. Dass danach auch Schnitte, senkrecht zur negativen Mittellinie gewonnen, Axenwinkel und mittlerer Brechungsexponent u. s. w. berechnet werden können, behalte ich mir für später zu zeigen vor. Hier sei nur bemerkt, dass man im Drehapparat die ganzen Variationen der Auslöschungsschiefen und den Axenaustritt auf das Beste verfolgen kann ohne irgendwie an dem Krystalle, der nur möglichst einheitlich sein muss, etwas schleifen zu müssen.

Sehr viel verwickelter liegen die Verhältnisse, wenn man einen Anorthit um die Normale auf M von einer Lage P' aus dreht, die definirt ist durch die Eigenschaft parallel $P:M$ und senkrecht auf M zu sein. Hier herrscht zu Anfang eine Schiefe von etwa 36°. Dieselbe nimmt aber nach der Theorie innerhalb des kleinen Drehwinkels von etwa 10° ab bis zu 0°, steigt bei weiterer Drehung von etwa 10° wieder um fast 30° und geht dann allmählich zu höheren Werthen, etwa 60°, um endlich wieder ziemlich rasch den Ausgangswerth von 36° in der zur Anfangslage parallelen Lage zu erreichen.

Wer könnte es unternehmen dies durch Schliffe darzustellen? Die Umhüllungsmethode und der Drehapparat zeigen aber sehr schön und ohne alle Mühe, dass der Curvenverlauf im grossen und ganzen so ist, und, wenn erst ein feineres Instrument vorliegt, können auch die Einzelwerthe genau festgelegt werden.

Jedenfalls lehrt aber die Betrachtung der Anorthitcurve schon jetzt, dass die Normalauslöschungswerthe dieses Feldspaths nur durch Schliffe von höchster Genauigkeit bezüglich der Lage erlangt werden können und dass ohne grosse Sorgfalt hergestellte Schliffe, die einer bestimmten Lage entsprechen sollen, unter einander sehr abweichende Werthe geben werden. Ist doch der Anorthit bekannt wegen der Inconstanz der optischen Eigenschaften bei so sehr constanten geometrischen! Gewiss wird diese mit Recht auffallende Thatsache durch das Vorstehende mit erklärt werden und die natürliche Deutung zulassen, dass die optische Anlage eine in sich gefestigte ist, dass aber bei geringer Änderung der Schlifflage, vornehmlich in der Nähe der Basis, leicht andere als die normalen Werthe gefunden werden. Wäre auf der Basis überdies auch nicht eine der beiden Axen annähernd senkrecht und so die Auslöschung unbestimmt, so würden nicht ganz correcte Schliffe zu noch viel grösseren Verwechselungen, besonders bei petrographischen Untersuchungen, führen, als sie dies vielleicht schon gethan haben. Die Zeit liegt nicht zu weit hinter uns, in der man alle orientirt zu Krystallelementen (Kanten, Zwillingsgrenzen u. s. w.) auslöschenden Feldspathpartien für monoklinen Feldspath nahm. — So auslöschende Partien können aber des öfteren selbst Anorthit sein; denn die grossen Schiefen dieses Feldspaths sinken in gewissen Lagen herab und er kann dann mit anderen verwechselt werden.

Es ergibt sich aber auch aus dem Vorgeführten, dass klare Spaltstückchen von Feldspathen in vielen Fällen, namentlich wenn sie frei von Zwillingslamellen oder wenig erfüllt damit sind, mit Vortheil zur Bestimmung der Art des vorliegenden Feldspaths benutzt werden können, ohne dass es nöthig wäre aus ihnen Schliffe zu fertigen. Die Curven der einzelnen Feldspatharten unterscheiden sich genugsam und ihre Lage gegen die mathematische x-Axe kommt krystallographisch durch — (für die meisten derselben) und + in bekannter Weise zum Ausdruck.

Bei anderen Mineralien wird man ähnlich verfahren können, so bei Hypersthen und Augit, worauf schon Hr. Dr. Küch die Aufmerksamkeit lenkte[1], rhombischem und monoklinem Humit u. s. w.

Selbstverständlich gestattet auch die Methode der Umhüllung der Krystalle mit Flüssigkeiten ähnlichen Brechungsverhältnisses und Drehen der Krystalle in diesen Flüssigkeiten die pleochroitischen und Absorptionserscheinungen der Krystalle zu untersuchen, die vorhandenen Einschlüsse zu studiren u. s. w. — Recht farblose Flüssigkeiten sind hierzu besonders erwünscht.

Kurz zusammengefasst kann man sagen: der Apparat und die Methode gestatten es Krystalle in dem angewandten Medium um eine Axe zu drehen und es werden mithin die optischen Verhältnisse im parallelen und convergenten Licht in jeder Richtung, senkrecht zur Drehaxe gesehen, nach einander zur Beobachtung kommen.

Der Apparat, wie er in einfachster Ausführung vorliegt, ist daher ein Mal als Suchvorrichtung zur vorläufigen Orientirung über die optischen Eigenschaften eines Krystalls oder geschliffenen Edelsteins (z. B. für Juweliere) geeignet, dann aber ist er namentlich auch zum Studium der allmählich wechselnden optischen Verhältnisse (Auslöschungscurven, pleochroitischen Erscheinungen, Absorptionsphäno-

---

[1] Neues Jahrbuch für Mineralogie u. s. w. 1886. Bd. I. S. 35—39.

mene, allmählichen Änderungen der Interferenzerscheinungen im convergenten polarisirten Lichte u. s. w.) auf allen Flächen beliebiger Zonen zu verwenden. — Seine Bedeutung für die Zwecke der Praxis tritt hierdurch gebührend zu Tage.

Will man ein genaueres Instrument haben, so muss man die horizontale Lage der Drehaxe verlassen und ein Mikroskrop in horizontaler Stellung mit dem Centrir- und Justirapparat eines vollkommenen Axenwinkelapparats verbinden, bei dem der Krystall um eine verticale Axe gedreht wird. —

Nehmen wir an die betreffenden Theile eines solchen: Theilkreis mit Nonius, Centrir- und Justirvorrichtung seien nebst dem Stativ, welches diese Theile trägt, gegeben,[1] so ist es nur nöthig den Krystall an einen Glasstab zu kleben, auf dass er in Strenge bezüglich einer Kante centrirt und justirt werden könne. Die volle Umdrehung durch 360° ist vermittelst der bekannten Drehvorrichtung am Kreise zu besorgen und sind dabei die Winkel bis auf Minuten abzulesen.

Anstatt der optischen Theile des Axenwinkelapparats werden in die Hülsen die optischen Theile eines Mikroskops gefügt, so dass die Frontlinsen von Objectiv und Condensorlinsensatz vor dem Polarisator einem Flüssigkeitsgefäss von möglichster Enge und mit dünnen, planparallelen Wänden versehen, bis zur Berührung nahe kommen. In dieses letztere taucht der sorgfältig eingestellte Krystall. Um eine Fläche desselben genau senkrecht zur optischen Axe des Instrumentes stellen zu können ist dasselbe mit einer Gauss'schen Spiegelvorrichtung versehen. Überdiess kann das Mikroskop zur Beobachtung des Axenaustritts eingerichtet werden und besitzt alle gebräuchlichen Nebentheile. — Der drehbare Tisch muss durch die Drehung der Nicols ersetzt werden, die gleichzeitig zu erfolgen hat und bei der man den Winkelwerth der Drehung auf einem um das Ocular herumgehend angebrachten Kreise abzulesen vermag. — Ein so hergestelltes Instrument erfüllt die meisten der Wünsche, die man an das einfachere noch zu stellen berechtigt war, ist aber auch erheblich theurer. — Es wird sich in der Folge beim Arbeiten mit demselben zeigen, ob es genügt die Flüssigkeit, welche den Krystall umgibt, von demjenigen mittleren Brechungsverhältniss zu wählen, welches für die zwei einer jeden Zone eines zweiaxigen Krystalls zukommenden Extreme gilt, oder ob man erheblich bessere Resultate erzielt, wenn man von der Stelle stärkster Brechung ausgeht, danach die Brechungsverhältnisse der Flüssigkeit einrichtet und während der Operation nach der Stelle schwächster Brechung hin jene successiv verdünnt. —

[1] Neues Jahrb. f. Mineralogie 1885, I. S. 180.

Wie bei der einfachen Drehvorrichtung ist auch hier von der Anbringung einer besonderen und ausgiebigen dritten Bewegung Abstand genommen worden. Sie hätte im vorliegendem Falle in der Verticalebene erfolgen müssen und würde, falls sie angebracht worden wäre, zur Folge gehabt haben, dass man bei den Arbeiten nur mit solchen Flüssigkeiten hätte operiren können, denen die Metalle nichts anhaben.

Da nun das Methylenjodid eine solche Flüssigkeit ist, so könnte man schon auf die hier fehlende dritte Drehvorrichtung noch Bedacht nehmen, wenn nicht in Folge der vermittelst derselben auszuführenden Drehbewegung das Flüssigkeitsgefäss unverhältnissmässig erweitert werden müsste, was wieder in anderer Hinsicht, so z. B. für die Darstellung der Axenbilder, störend wirkt. Danach scheint es auch hier am besten zu sein auf die dritte ausgiebige Drehung zu verzichten und die am Krystall anzustellenden Beobachtungen in zwei auf einander senkrechten Lagen nach einander vorzunehmen. — In ihrer Wirkung wird jene dritte Bewegung zum Theil durch den einen Justirschlitten des Einstellapparats ersetzt.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

INHALTSVERZEICHNISS.

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE
aus den Jahren 1888, 1889, 1890.

…hau: Indo-arabische Studien zur Aussprache und Geschichte des Indischen . . . . . . *M.* 4.50
…saecker: Die Urkunden der Approbation König Ruprecht's . . . . „ 4.00
…lze: Über die inneren Kiemen der Batrachierlarven. I. . . . . „ 7.50
…enbach: Über das Handbuch eines Inquisitors in der Kirchenbibliothek St. Nicolai in Greifswald . . . . „ 1.50
…us: Bruchstücke einer Rhizopodenfauna der Kieler Bucht . . . . „ 3.00
…deyer: Das Gorilla-Rückenmark . . . . „ 12.00
…er: Über den zweiten, grammatischen, Pârasîprakâça des Krishnadâsa . . . . „ 6.00
…elsberg: Über die chemische Natur der Glimmer . . . . „ 3.50
…ze: Über die Bezeichnung der Spongiennadeln . . . . „ 4.00
…au: Arabische Volkslieder aus Mesopotamien . . . . „ 6.00
…saecker: Rense als Wahlort . . . . „ 3.00
…dt: Die Urheimath der Indogermanen und das europäische Zahlsystem. . . . . „ 2.50
…elsberg: Über die chemische Natur der Turmaline . . . . „ 3.50

…ider: Über Eisen-Resorption in thierischen Organen und Geweben. . . . . „ 4.00
…n: Eleutherocercus, ein neuer Glyptodont aus Uruguay . . . . „ 2.00
…er und Runge: Die Spectren der Elemente . . . . „ 6.00
…el: Tafel der Bessel'schen Functionen I_k^0 und I_k^1 . . . . „ 2.00
…z: Zur antiken Topographie der Palmyrene . . . . „ 4.00
…er und Runge: Die Spectren der Elemente. II. Die Bandenspectra der Kohle . . . . . „ 4.50
…denfeld: Die Gattung Stelletta . . . . „ 8.00
…er und Runge: Die Spectren der Elemente. III. Über die Spectren der Alkalien. . . . „ 3.50
…us: Griechische Marmorstudien . . . . „ 4.00

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wiss[...] wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen [...] zuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher [...] des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein [...] Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITT[...]

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSC[...]

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem [...] Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Na[...] in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mit[...] fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. [...] Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, [...] und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf We[...] heften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige [...] Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, [...] Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollstän[...] berichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« [...] zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nach[...]

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Na[...] Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal,

die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,

» » » Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,

» » » October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich [...] des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1890 nicht zugekommen sein sollten, [...] hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger R[...] Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1891 [...]

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des [...] zuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT V.

MAI 1891.

BERLIN 1891.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.

19. Leibniz über die Determinanten.

Von K. I. Gerhardt.

(Vorgelegt am 23. April; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXII]; — ausgegeben am 8. Mai.)

Aus der Correspondenz Leibnizens mit Oldenburg ergibt sich, dass Leibniz, als er nach seinem ersten Besuch in London mit dem grössten Eifer dem Studium der höheren Mathematik in Paris sich widmete, auch der Algebra, namentlich der Auflösung der höheren Gleichungen, seine Aufmerksamkeit zuwandte. Das Problem, die allgemeine Auflösung der höheren Gleichungen zu finden, nahm in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts die Thätigkeit der Mathematiker besonders in Anspruch. Die Mittel, die man dazu aufwandte, wurden von der Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades entlehnt: Wegschaffung des zweiten oder mehrerer Glieder oder aller Glieder zwischen dem ersten und letzten, Zerlegung in Gleichungen niederen Grades u. s. w. Unter den Mathematikern, die sich mit diesem Problem beschäftigten, werden erwähnt der Schotte Jacob Gregory, besonders auch Ehrenfried Walther von Tschirnhaus. Letzterer hatte in Holland auf der Universität Leyden von 1668 bis 1675 unter den Schülern des Cartesius Mathematik studirt. Nach Vollendung seiner Studien trat er eine wissenschaftliche Reise an; er gieng zunächst von Holland nach England, wo er in London mit den Männern der Wissenschaft, namentlich mit Oldenburg, dem Secretär der Royal Society, verkehrte. Von diesem erhielt er Empfehlungen an Leibniz in Paris; im September 1675 traf er daselbst ein. Tschirnhaus wurde sehr bald mit Leibniz auf das innigste befreundet; beide in der schönsten Blüthe jugendlicher Kraft beseelte dieselbe Vorliebe für philosophische und mathematische Studien.[1]

In demselben Jahre (12. Jul. 1675) hatte Leibniz an Oldenburg gemeldet: Incidi nuper in methodum perelegantem, qua superioribus

[1] Quod Tschirnhausium ad nos misisti, schreibt Leibniz an Oldenburg, fecisti pro amico: multum enim ejus consuetudine delector, et ingenium agnosco in Juvene praeclarum, et magna promittens inventa mihi ostendit non pauca, Analytica et Geometrica, sane perelegantia.

Aequationibus omnium graduum (ad certam tamen formam redactis) accommodari possunt Radices Cardanicis similes. Idque sine sublatione omnium terminorum inter primum et penultimum mediorum, imo nullo termino sublato, modo certa sit inter terminos intermedios relatio. Id cum novam quandam lucem dare videatur huic negotio, vobis mox communicabo.[1] — Darauf antwortet Oldenburg (30. Sept. 1675): Hoc quod attinet, putat Collinius, affine id quodam modo esse Gregorii et Tschirnhausii (qui nuper Parisios hinc abiit et Te sine dubio jam salutavit) methodo generali. Utrumque quippe nunc in eandem circa hoc methodum incidiffe existimat speratque Collinius.

Aus Vorstehendem ersieht man, dass beide, Leibniz und Tschirnhaus, nach demselben Ziele strebten. Dass zwischen beiden ein Gedankenaustausch über ihre Studien in Betreff der allgemeinen Auflösung der Gleichungen, ja zuweilen ein gemeinsames Arbeiten stattgefunden haben wird, ist selbstverständlich, erhellt aber besonders aus der Correspondenz zwischen Leibniz und Tschirnhaus, als beide Paris verlassen hatten (November 1676). Tschirnhaus, etwas vorschnell in seinen Schlüssen, wie Leibniz ihn schildert, und leicht geneigt zur Aufstellung von Theoremen, die als allgemein gültig sich nicht bewährten, übersandte an Leibniz in einem längeren Schreiben, datirt Romae d. 10. Aprilis anno 1678, seine Methodus Generalis omnium aequationum radices exhibendi.[2] Das umfangreiche Antwortschreiben Leibnizens, datirt Ende Mai 1678 (Leibniz. Mathematische Schriften Bd. IV S. 451 ff.) ist von dem höchsten Interesse, insofern er darin über die wichtigsten Theile seiner mathematischen Studien während seines Aufenthalts in Paris berichtet. Von diesem Schreiben sind mehrere Entwürfe vorhanden; von dem bisher ungedruckten ersten, in dem Leibniz in Betreff seiner Studien über die allgemeine Auflösung der Gleichungen handelt, füge ich unter num. I eine Abschrift bei; aus einem zweiten Entwurf habe ich Ergänzungen beigegeben. Leibniz berichtet darin, dass er zuerst die Auflösung der höheren Gleichungen nach Art der Cardanischen Auflösung der cubischen Gleichungen versucht habe, indem er die Unbekannte durch

---

[1] Leibniz hat die Mittheilung unterlassen, wahrscheinlich weil er sich von der Unzuverlässigkeit seines Verfahrens später überzeugte.

[2] Leibniz hat auf dem Brief Tschirnhausens eine kurze Kritik dieser Methode bemerkt: Nihilominus erronea est. Res tota huc redit: dantur v. g. aequationes tres: x^4 aequ. a, xy aequ. b, xyz aequ. c. Ex his tribus aequationibus tres incognitae x, y, z
y^4 xz
z^4 yz
quaeruntur. Et sane haberentur, si ex datis reperiri posset $x^4 y^4 + x^4 z^4 + y^4 z^4$ aequ. ... uti habetur $y^4 + x^4 + z^4$ aequ. a, et uti habetur $x^4 y^4 z^4$ aequ. c^4. Sed has tres simul ex his datis ita haberi impossibile est.

eine Summe, z. B. $x = a + b + c$ ausdrückte. Da die Gleichungen zur Bestimmung von a, b, c auf einen viel höheren Grad stiegen, als die aufzulösende, so kam es zunächst darauf an, diese Gleichungen auf niedere Grade zu bringen; dies gelang ihm, indem er die Gleichungen des achten, neunten und zehnten Grades auf den siebenten reducirte. Ferner suchte er, um die Elimination zu erleichtern, solche Gleichungen herzustellen, in welchen nur Producte aus zwei Unbekannten vorkommen; für dergleichen Producte stellte er zur Erleichterung der Rechnung eine Tafel auf. Inventio Radicum — so äussert sich Leibnitz — eo reducta est, ut tantum res calculi sit, quam in rem Tabulas pulcherrimas condi curabo. Er setzt hinzu: Alias praescribam Tabulas, quarum ope facile ex pluribus aequationibus fieri poſſit una. Es ist möglich, dass Leibniz in dieser Andeutung auf seine zahlreich vorhandenen Studien in Betreff der Determinanten hinweist. Von diesen bisher ungedruckten Arbeiten füge ich unter num. II, III, IV Abschriften bei; ich halte die Zusammenstellung in num. II für die früheste, num. III und IV für später abgefasst.

Von seinen Arbeiten über Determinanten hat Leibniz nichts veröffentlicht. Ich kenne nur eine Mittheilung in einem Briefe an den Marquis de l'Hospital, datirt Hanover 28. April 1693, die zur Vergleichung hier folgen mag. Zugleich ergibt sich daraus das Jahr 1693, bis zu welchem Leibniz im Besitz dieser Lehre war; die folgenden Manuscripte sind nicht datirt.

Leibniz schreibt an den Marquis de l'Hospital: Pour vous, Monſieur, si j'avois beaucoup de lumieres, je prendrois le plus grand plaiſir du monde à les vous communiquer, car en y joignant les vostres vous pauvés porter les choſes plus loin que je n'aurois pû. C'est pourquoy je vous informeray volontiers de mes methodes tant pour le Tangentes renversées, que pour autres choſes. Puisque vous dites que vous avés de la peine à croire qu'il soit auſſi general et auſſi commode de se servir des nombres que des lettres, il faut que je ne me sois pas bien expliqué. On ne sçauroit douter de la generalité en conſiderant qu'il est permis de se servir de 2, 3 etc. comme d'a ou de b, pourveu qu'on conſidere que ce ne sont pas de nombres veritables. Ainſi $2 \cdot 3$ ne signifie point 6, mais autant qu'ab. Pour ce qui est de la commodité, il y en a des tres grandes, ce qui fait que je m'en sers souvent, sur tout dans les calculs longs et difficiles, où il est aiſé de se tromper. Car outre la commodité de l'epreuve par des nombres, et même par l'abjection du novenaire, j'y trouve un tres grand avantage même pour l'avancement de Analyſe. Comme c'est une ouverture aſſez extraordinaire, je n'en ay pas encor parlé à d'autres, mais voicy ce pue c'est. Lorsqu'on a beſoin de beaucoup de lettres, n'est il pas vray que ces lettres n'expriment point les rapports qu'il y a entre les grandeurs qu'elles signifient, au lieu qu'en me servant des nombres, je puis exprimer ce rapport. Par exemple soyent proposées trois equations simples pour deux inconnues à dessein d'oster ces deux inconnues, et cela par un canon general. Je suppose

$$10+11x+12y=0\,(1)\ \text{et}\ 20+21x+22y=0\,(2)\ \text{et}\ 30+31x+32y=0\,(3)$$

où le nombre feint estant de deux characteres, le premier me marque de quelle equation il est, le second me marque à quelle lettre il appartient. Ainsi en calculant on trouve par tout des harmonies qui non seulement nous servent de garans, mais encor nous font entrevoir d'abord des regles ou theoremes. Par exemple ostant premierement y par la premiere et la seconde equation, nous aurons:

$$\begin{matrix} +10.22+11.22x \\ -12.20-12.21\,.. \end{matrix} = 0\,(4)$$ et par la premiere et troisieme nous aurons: $$\begin{matrix} +10.32+11.32x \\ -12.30-12.31\,.. \end{matrix} = 0\,(5)$$ où il est aisé

de connoistre que ces deux equations ne different qu'en ce que le charactere antecedent 2 est changé au charactere 3. Du reste, dans un même terme d'une même equation les characteres antecedens sont les mêmes, et les characteres posterieurs font une même somme. Il reste maintenant d'oster la lettre x par la quatrieme et cinquieme equation, et pour cet effect nous aurons

$$\begin{matrix} 10.21.32 & & 10.22.31 \\ 11.22.30 & = & 11.20.32 \\ 12.20.31 & & 12.21.30 \end{matrix}$$ [1]

qui est la derniere equation delivrée des deux inconnues qu'on vouloit oster, et qui porte sa preuve avec soy par les harmonies qui se remarquent par tout, et qu'on auroit bien de la peine à decouvrir en employant des lettres a, b, c, sur tout lorsque le nombre des lettres et des equations est grand. Une partie du secret de l'analyse consiste dans la caracteristique, c'est à dire dans l'art de bien employer les notes dont on se sert, et vous voyés, Monsieur, par ce petit echantillon, que Viete et des Cartes n'en ont pas encor connu tous les mysteres. En poursuivant tant soit peu ce calcul on viendra à

[1] Leibniz scheint anfangs die zur Bezeichnung der Coefficienten gebrauchten Ziffern durch eine grössere und eine kleinere kenntlich gemacht zu haben; später hat er diese Bezeichnung aufgegeben, gebraucht sie indess noch zuweilen.

un theoreme general pour quelque nombre de lettres et d'equations simples qu'on puiſſe prendre. Le voicy comme je l'ay trouvé autres fois: **Datis aequationibus quotcunque sufficientibus ad tollendas quantitates, quae simplicem gradum non egrediuntur, pro aequatione prodeunte, primo sumendae sunt omnes combinationes poſſibiles, quas ingreditur una tantum coefficiens uniuscujusque aequationis; secundo, eae combinationes oppoſita habent signa, si in eodem aequationis prodeuntis latere ponantur, quae habent tot coefficientes communes, quot sunt unitates in numero quantitatum tollendarum unitate minuto; caeterae habent eadem signa.** J'avoue que dans ce cas des degrés simples on auroit peut estre decouvert le même theoreme en ne se servant que de lettres à l'ordinaire, mais non pas si aiſement, et ces adreſſes sont encor bien plus neceſſaires pour decouvrir des theoremes qui servent à oster les inconnues montées à des degrés plus hauts. Par exemple, pour oster la lettre x par le moyen de deux equations dont l'une est de trois degrés, l'autre de deux, je suppoſe $10x^3 + 11x^2 + 12x + 13 = 0$ et $20x^2 + 21x + 22 = 0$, où le caractère anterieur du coefficient marque l'equation et le caractère posterieur du coefficient marque le degré dont il est coefficient, en rempliſſant la loix des homogenes. Ce qui sert à les observer dans tout le progres de l'operation. Dans les equations plus hautes pour mieux s'aſſeurer du calcul, on peut au lieu du dernier terme prendre un nombre tel que l'equation donneroit en prenant x pour l'unité ou pour quelque nombre veritable, par exemple au lieu de $10x^3 + 11x^2 + 12x + 13 = 0$ on pourroit écrire $10x^3 + 11x^2 + 12x - 11220$, prenant x pour 10, pourveu qu'on se souvienne que 11220 signifie un solide ou une grandeur de trois dimenſions; ainſi le calcul se verifiera tousjours en nombres veritables, et se pourra même examiner à tout moment par abjection du novenaire, ou de l'ondenaire, et neantmoins les harmonies paroistront par tout substituant 13 pour -11220. En calculant ainſi on trouvera des theoremes et on dreſſera les tables que j'ay souhaittées. On voit auſſi par là une choſe que j'ay indiquée déja dans les occasions, c'est que la perfection de l'Algebre depend de l'art des Combinaiſons qui est proprement la Specieuſe Generale.

I.

Leibniz an Tschirnhaus.

Quanquam me Tibi nunc respondere vetueris diſceſſurus scilicet Roma, et metuens ne literae in alias veniant manus: respondeo tamen, literis ea conditione Romam miſſis, ut te digreſſo ad me redeant. Non possum non probare rationes quae TE consilio meo uti prohibuerunt: fatendum est enim, aulam utcunque egregiam libertati ac quieti philosophantis contrariam eſſe. Satis est me Tibi probare conatum esse voluntatem meam, neque unquam omiſſurum occaſionem qua testatum facere poſſim, quantum tibi tribuam. Iter tibi faustum et felix precor, et quam primum a te nuntium expecto.

Ad Mathematica venio: multa differis ut ostendas quadraturarum methodum superiori Epistola miſſam tibi uni propriam eſſe. Putabam TE curare veritatem, non autorem veritatis; sed inde intelligo (ignosce jocanti) verum eſſe quod ait Tacitus, etiam sapientibus gloriae cupiditas noviſſima exuitur. Neque vero opus habebas illa Apologia, nam etſi alii sciviſſent, non minus tute tibi inventor fuisti. Nam a me quidem TE habuiſſe, et postea tibi ascribere voluiſſe, abſit ut vel cogitem. Ego ſi bene genium tuum novi, illud notavi saepe, te et ingenio mire pollere, et ea quae in manibus habes profunde inspicere; sed ita plerumque praesentibus meditationibus eſſe deditum tantique eas facere, ut alia ab iis abeuntia ab alio allata parvi facias aut certe non attente conſideres. Unde nonnulla olim a me tibi propoſita neglexisti, quod alias methodos haberes quibus plus tribueres, donec postea experientia et inquirendi progreſſu edoctus, sponte tua incidisti in mea. Ita cum initio Pariſios veniens aequationum radices ex enumeratione formularum irrationalium ducere velles, spernebas methodum meam, qua quantitatem ignotam secabam in partes, et cujus ope specimina illa radicum altiorum binomiarum Cardanicis similium dederam primus tibique in scheda aliqua descriptum ostenderam.[1] Tu postea propriis meditationibus ad eandem methodum

[1] In einem zweiten Entwurf seiner Antwort erklärt Leibniz diese Methode ausführlicher: Poſito Radicem aequationis quaesitam habere partes aliquot, exempli cauſa $x+y$ vel $x+y+z$ etc. observaveram jam olim et fortaſſe primus, radices irrationales altiores exemplo Cardanicarum inveniri poſſe. Ex. cauſa sit aequatio

$$R^5+5pR^3+5p^2R \text{ aequ. } q. \text{ fit } R \text{ aequ. } \sqrt[5]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+p^5}}+\sqrt[5]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+p^5}}.$$

poſito R aequ. $x+y$; invenietur enim eſſe x aequ. $\sqrt[5]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+p^5}}$ et y aequ.

devenisti. Cumque postea Parisiis in methodo hac (radicis incognitae in partes sectae, ut x aequ. $a+b+c$) occupaveris et comparationes institueres, non satis placebat tibi observatio mea, qua ostendebam

---

$\sqrt[5]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + p^5}}$. Et harum aequationum hoc modo solubilium progressionem in scheda quadam descriptam olim cum Parisios venires Tibi ostendi. Sed radice in tres, quatuor aut plures partes secta, quod pro solutionibus aequationum plus quam cubicarum generalibus necesse est, major est difficultas. Ita autem me jam olim Parisiis processisse in schedis illic scriptis, in quarum nonnullis et manus tua est, reperi: sit R aequ. $x+y+z$ et aequatio data R^4 aequ. pR^2+qR+s, comparanda huic:

$$R^4 \text{ aequ. } \begin{array}{l} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{array} + \begin{array}{l} 4x^3y \\ x^3z \\ \text{etc.} \end{array} + \begin{array}{l} 6x^2y^2 \\ x^2z^2 \\ \text{etc.} \end{array} + 12x^2yz.$$

Hanc posteriorem autem comparationis gratia varie exprimi posse constabat, nunc per potestates nunc per rectangula, nunc ea invicem miscendo. Reperi autem rectangula universalissime et commodissime propter rationem mox dicendam adhiberi adeoque aequationem posteriorem sic resolvi:

$$R^4 \text{ aequ. } \overset{\aleph}{\ast\, 4\begin{array}{l} xy \\ xz \\ yz \end{array} R^2} - \overset{\beth}{8xyzR} + \overset{\underset{\frown}{\gimel}}{\begin{array}{l} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \\ -2x^2y^2\ \daleth \\ \quad x^2z^2 \\ \quad y^2z^2 \end{array}}$$

quoniam inde comparatione recte instituta ducebam has aequationes comparatitias $\begin{array}{l} xy \\ \text{etc.}\end{array}$ aequ. $\frac{p}{4}$, xyz aequ. $-\frac{q}{4}$ et $x^4+y^4+z^4$ aequ. $s+\frac{p^2}{8}$.

Comparatio autem recte instituenda est, ut id prodeat, id est non singuli termini singulis comparandi sunt Cartesiano more, sed aequatio ista px^2+qx+s $\overset{(1)}{\text{aequ.}}$ $4\aleph x^2 - 8\beth x + \begin{array}{l}\underset{\frown}{\gimel} \\ -2\daleth\end{array}$ divellenda est in duas: px^2 aequ. $4\aleph x^2$ $\left(\text{seu } \frac{p}{4} \overset{(2)}{\text{aequ.}}\ \aleph\right)$ et $qx+s$ $\overset{(3)}{\text{aequ.}}$ $-8\beth x + \begin{array}{l}\underset{\frown}{\gimel} \\ -2\daleth\end{array}$, et quoniam $\aleph$ aequ. $\frac{p}{4}$, erit $\aleph^2$ $\overset{(4)}{\text{aequ.}}$ $\frac{p^2}{16}$; est autem $\aleph^2$ $\overset{(5)}{\text{aequ.}}$ $\daleth + 2\beth x$ $\overset{(6)}{\text{aequ.}}$ $\frac{p^2}{16}$, ut calculo facile patet. Ergo et $12\beth x + 2\daleth$ $\overset{(7)}{\text{aequ.}}$ $\frac{p^2}{8}$; multiplicando aequationem 6 per numerum 2 et aequationem 7 componendo cum aequatione 3 fiet $\begin{array}{l} qx+s \\ +\frac{p^2}{8}\end{array}$ $\overset{(8)}{\text{aequ.}}$ $\begin{array}{l} -\ \ 8\beth x + \underset{\frown}{\gimel} \\ +12\beth x - 2\daleth \\ \qquad\quad +2\daleth \end{array}$ sive destructis destruendis $\begin{array}{l} qx+s \\ +\frac{p^2}{8}\end{array}$ $\overset{(9)}{\text{aequ.}}$ $4\beth x + \underset{\frown}{\gimel}$; quam rursus divellendo in duas, nempe hoc modo: (qx $\overset{(10)}{\text{aequ.}}$ $4\beth x$, sive) $\beth$ $\overset{(11)}{\text{aequ.}}$ $\frac{q}{4}$ et $\underset{\frown}{\gimel}$ $\overset{(12)}{\text{aequ.}}$ $\begin{array}{l} s \\ +\frac{p^2}{8}\end{array}$.

Unde ex aequ. 2. 11. 12 junctis, pro $\aleph . \beth . \underset{\frown}{\gimel}$ substituendo valores habebimus xy aequ. $\frac{p}{4}$ et xyz aequ. $-\frac{q}{4}$ et $\begin{array}{l} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{array}$ aequ. $\begin{array}{l} +s \\ +\frac{p^2}{8}\end{array}$. Eademque methodus etiam in altioribus procedit.

semper in comparando ad has aequationes comparatitias deveniri poſſe
ab aequ. . . ., abc aequ. . . ., a^4 aequ. . . ., et ipſis resolutis haberi poſſe a,
ac b^4
bc c^4

Unde intelligis, Divulſionem aequationis eſſe artificium longe generalius comparatione aequationum, eamque in se comprehendere. Est autem divulſio maximi uſus inprimis in problematis Diophanteis. Sed hoc obiter. Memini jam olim Pariſiis me tibi dicere semper perveniri poſſe ad mea rectangula (ut xy, xyz) et maximas potestates $\left(\text{ut } \begin{matrix} x^4 \\ y^4 \end{matrix}\right)$, sed tunc alias rationes sequi malebas. Porro manifestum erat, opus tantum eſſe, aequationes has: $\begin{matrix} xy \\ xz \\ yz \end{matrix}$ aequ. $\frac{p}{4}$, xyz aequ. $-\frac{q}{4}$ et $\begin{matrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{matrix}$ aequ. $s+\frac{p^2}{8}$

reduci ad has: $\begin{matrix} x^4y^4 \\ x^4z^4 \\ y^4z^4 \end{matrix}$ aequ. . . . . , $x^4y^4z^4$ aequ. $\frac{q^4}{256}$, $\begin{matrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{matrix}$ aequ. $s+\frac{p^2}{8}$

ita enim constabat ad inveniendam $v.\,g.\,x^4$ prodire aequationem

$$x^{12} + sx^8 + \ldots\ldots x^4 + \frac{q^4}{256} \text{ aequ. o}$$
$$+\frac{p^2}{8}$$

adeoque inveniri ipſam x^4 per aequ. cubicam.

Haec ratio procedendi mire mihi blandiebatur, quemadmodum nunc et Tibi. Primum enim hoc modo apparebat, quomodo certa progreſſione rediret aequatio quadrato-quadratica ad cub., aequ. quinti gradus ad qq. et ita porro, sequens semper ad inferiorem ope purae potentiae sui gradus. Unde etiam derivabam, quod saepe me tibi dicere memini, aequationes omnes gradus octavi, noni, decimi reduci ad aequationem gradus septimi, adeoque ut tertii et quarti gradus problemata ejusdem naturae cenſentur, ita etiam septimi, octavi, noni, decimi gradus problemata eadem eſſe. Mirifice etiam blandiebatur in hac methodo, quod ita efficeretur, ut NB. una radix gradus sequentis componatur quodammodo ex omnibus radicibus gradus praecedentis sibi invicem additis. Quod etiam pulchrum et ad progreſſionem facilius inveniendam peraptum videbatur. Et vero etiamnum in hac sum sententia et puto perveniendum eſſe in comparatione ad aequationes ultimas hujusmodi

$\begin{matrix} x^4y^4 \\ x^4z^4 \\ y^4z^4 \end{matrix}$ aequ. . . . . , $x^4y^4z^4$ aequ. . . . . , $x^4+y^4+z^4$ aequ. . . . . Verum ea methodo quam ego paulo ante descripſi et quam tu quoque (quanquam nonnihil diversam quoad calculandi modum) in tua Epistola exhibes, pro certo habeo eo perveniri non poſſe; vis enim in aequationibus his: $\begin{matrix} xy \\ xz \\ yz \end{matrix}$ aequ. . . . , xyz aequ. . . . , $\begin{matrix} x^4 \\ y^4 \\ z^4 \end{matrix}$ aequ. . . . perveniri ad illas.

Sed hoc fieri difficillimum, imo impoſſibile arbitror, et ſi vel uno in exemplo tentaſſes quod praescribis, ipſe difficultatem agnoviſſes. Unde vides etiam, quam utile sit non fidere contemplationibus generalibus (praesertim si prolixae sint et in longum productae, ubi facilis in uno lapſus) niſi vel in uno atque altero exemplo faciliore simus experti veritatem. Caeterum videre mihi videor methodum aliquam, qua ad illas ultimas aequationes exaltatas perveniri semper potest, verum est adhuc prolixior et foret immenſi laboris niſi adhiberetur Tabula formarum, cujus ope ducta forma in formam statim scio quid prodeat, sine calculo. Hanc tabulam autem coepi condere et facile in infinitum continuari poſſe arbitror.

b, c. Tu enim potius utebaris non rectangulis, sed potestatibus, aut nunc potestatibus nunc rectangulis ut $\begin{matrix}a^2\\ b^2\\ c^2\end{matrix}$ aequ...., abc aequ.... quoniam id tibi in quadrato-quadratico gradu ſucceſſerat. Ego vero generalia intuebar, et oſtendebam, ſi poſſet hoc modo per rectangula exitus reperiri, mira inde compendia proditura. Nam non opus fore calculo ad inveniendas ipſas a, b, c, ſi poſſent omnia ad eundem attolli gradum, ut $\begin{matrix}a^4\\ b^4\\ c^4\end{matrix}$ aequ. p^4 et $\begin{matrix}a^4 b^4\\ a^4 c^4\\ b^4 c^4\end{matrix}$ aequ. q^8 et $a^4 b^4 c^4$ aequ. r^{12}, quia ex communi Algebra notum et jam Vietae ac Carteſio observatum est, hinc fieri $a^{12} - p^4 a^8 + q^8 a^4 - r^{12}$ aequ. o. Et hoc est quod ego appellabam praeformationes, qua ita fingimus aequationes comparandas, ut comparationis calculo non ſit opus. Praeterea hinc ducebam neceſſario pro gradu quarto aſcendendum ad aequ. 12 graduum, pro gradu 5 ad aequ. 20 graduum, et ita porro. Quod tu etiam non admittebas, et depreſſiores gradus ſufficere putabas. Imo hinc etiam ducebam corollarium illud mirificum, quod quemadmodum omnes aequationes quarti gradus reduci possunt ad tertium, ita omnes aequationes octavi, noni et decimi gradus reduci poſſe ad ſeptimum. Item, quod omnes radices unius alicujus gradus simul additae dant formulam irrationalem similem uni radici gradus proxime altioris. His a me tunc saepe monitis animum non adhibebas, sed tuas methodos persequebaris: nunc vero gaudeo te ad meliora rediiſſe, quanquam facile credam te eorum quae tunc colloquebamur non amplius meminiſſe, nec dubitem, quia tua sponte in iſta denique incideris. Ne tamen putes iſta a me fingi, habeo adhuc ſchedas complures Pariſiis ſcriptas quae iſta continent, et nonnullas ex illis, in quibus reperitur tua manus. Certe quae ſcripſiſti et eleganter deduxiſti pulchriſque tabulis illuſtraſti in Epiſtola tua noviſſima, ea ſtatim intellexi et pauca reperi a me non obſervata, quod plurimis uti dixi ſchedis anno biennio et ultro abhinc ſcriptis oſtendere poſſum. Doctrinam de Formis (ut $\begin{matrix}a^2\\ b^2\\ c^2\end{matrix}$. $\begin{matrix}aba\\ b\end{matrix}$. et aliis omnibus in quibus literae ſe eodem modo habent) tractavi longe generalius et Tabulas jam anno abhinc per puerum aliquem quem mecum habebam condi curavi, ubi mirifica patent compendia et progreſſiones generales, ita ut cum forma una in aliam ducenda eſt, ſtatim ope tabulae productum reperiri poſſit. Cum ergo dudum notaſſem, poſita incognita x aequ. $a + b + c$ etc.

semper haberi poſſe a^4 aequ. f^4, ab aequ. g^2, abc aequ. h^3, et id unum
b^4 ac
c^4 bc

restare, ut loco aequationis $ab+ac+bc$ aequ. g^2 nanciscamur aequationem a^4b^4 aequ. cuidem cognitae. Hoc inquam cum notarem, jam triumphabam
a^4c^4
b^4c^4

et putabam habere me prorſus confectam radicum extractionem, quemadmodum te nunc putaſſe video, neque enim dubitabam, quin facile illa aequatio ope caeterarum ad hanc posset attolli. Sed postea rem oponione difficiliorem reperi, imo tandem demonstravi ca via quam tu quoque ingreſſus es, exitum eſſe impoſſibilem. Quod tute quoque deprehendiſſes, si vel unum exemplum (supra cubicum gradum, in quo solo res hoc modo procedit) calculare suscepiſſes. Sed tibi (quemadmodum olim et mihi) nimis blandiebatur ista pulchritudo et generalitas. Ais aequationes has $x^4+y^4+z^4$ aequ. a, $xy+xz+yz$ aequ. b, xyz aequ. c (poſitis x, y, z incognitis, a, b, c cognitis) poſſe reduci ad has: $x^4+y^4+z^4$ aequ. a, $x^4y^4+x^4z^4+y^4z^4$ aequ. ..., $x^4y^4z^4$ aequ. c^4. Id vero ego impoſſibile eſſe ajo, ut illa $x^4y^4+x^4z^4+y^4z^4$ aequ. ... cognitae ex dictis tribus assumtis inveniatur, niſi id fiat per aequationem aeque difficilem ac illa quae quaeritur. Mutatione quadam opus est, et oblique consequendum quod recta non licet, sed calculo multo prolixiore, qui ut contrahatur neceſſe est eam, de qua me scribere alias memini, formarum Tabulam absolvi. Quae alios maximos habet uſus, continet enim Algebrae totius arcana, Combinatoriae vero applicationem egregiam. Nam ego Combinatoriae subordinatam puto Algebram, quia combinatoriam non habeo pro arte inquirendi numeros poſſibiles variationum, sed pro arte formarum seu pro scientia generali de Simili et Diſſimili, cujus regulas Algebra ad magnitudinem in universum, Geometria ad figuras applicat. Atque eo sensu minime admitti potest, quod ais Combinatoriam eſſe Algebrae filiam, quod mei potiſſimum cauſa adjecisse videris, quem scis aliter sentire. Nescio quo infortunio factum sit, ut paucas mearum opinionum tibi persuadere potuerim, tametſi ni fallor plerisque eventus faverit. Ut mittam quae dixi de radicibus, velim te meminisse difficultatum de infinito, ubi putabas ex illis quae a Spinoſa ea de re didiceras omnes solvi posse, et tamen non raro expertus es, facilem eſſe in paralogismos lapſum, si quis infinito et indiviſibilibus utatur niſi tum demum admittat, quando demonstrationes Apagogicae dari poſſunt. Hoc multis illustribus exemplis subinde tibi ostendere memini, vix tamen profeci. Locutus tibi sum aliquando de quibusdam meis calculis peculiaribus circa tangentes et quadraturas: respondisti, tibi nova signa inutilia videri, nec nisi ad obscurandum facere, ut nunc quoque scribis; si exempla videre voluisses, antequam rejecisses, aliter sentires. Omnia enim illa theoremata Gregorii, Barrovii, Fermatii, Heuratii, Wallisii non nisi corollaria sunt facillima generalissimi illius calculi mei, per quem et saepissime ad methodum tangentium inversam aditus patet, et tangentes irrationalium aequationum exhiberi possunt sine reductione. Unde fit ut circa quadraturas nonnulla fuse atque eleganter a TE deducta et per se pulchra, a me tamen non nisi ut corollaria calculi generalis considerentur. Haec ideo scribo, mi amice, quia video ac doleo TE saepe plurimum laboris et temporis perdidisse, non alia de causa quam quod observationes quasdam meas candide propositas non satis audire voluisti. Certe quae nunc invenisti sane pulcherrima (si absolvantur) de radicibus aequationum, ea jam tum ex iis quae Parisiis proponebam, nullo negotio ducere potuisses et dudum rem totam ab eo tempore absolvisses. Ego libenter utor aliorum laboribus, neque enim satis nobis temporis est ad praestanda omnia per nosmet ipsos. Optarem tibi perspecta esse omnia illa quae immenso labore egi in his studiis, non dubitem a TE his qualibuscunque auxiliis sublevato praestari posse, quae in immensum transcenderent mea. Inventio Radicum eo reducta est ut tantum res calculi sit, quam in rem Tabulas pulcherrimas condi curabo: Alias praescribam Tabulas, quarum ope facile ex pluribus aequationibus fieri possit una; item Tabulas omnium quadraturarum pure analyticarum possibilium. Tria maxime desidero in abstracta Mathematica: solutionem problematum Diophanteorum; Methodum Tangentium inversam, qualem patitur natura problematis, et inventionem exponentium incognitorum. Methodum omnes quadraturas inveniendi per Logarithmos, omnium post homines natos repertarum ad praxin facillimam et generalissimam mittam Tibi, ubi certo sciam ubi sis. Linea Logarithmica semel descripta prope omnia problemata solvi possunt. Jam olim tibi (locutus sum) de methodo mea qua Geometrice describi potest Logarithmica aliaeque lineae transcendentes, ut quadratrix et aliae quae Cartesio Mechanicae videntur, quia eas per regulas quasdam motu continuo ab uno pendente describi posse nesciebat. Haec descriptio linearum transcendentium Geometrica inter potissima mea inventa habeo. Vere enim Geometriae pomoeria in immensum amplificat. Ut enim Cartesius ostendit curvas altiorum graduum in Geometriam recipiendas, quia uno tractu per solarum regularum motum ab uno pendentem describi possunt, et ita si instrumenta probe sint elaborata, exacte describi possunt, ita ego ostendam curvas transcendentes, id est quae nullius sunt certi gradus, sed de gradu in gradum procedunt sive indeterminatam habent in exponente, posse describi simili plane motus ratione, solis regulis mobilibus sese certa ratione ducentibus. Quare nihil est caufae, cur non in Geometriam nunc recipi debeant, quoniam et natura earum aequatione exprimitur et descriptio exacta in plano habetur, praesertim cum sint incredibilis ufus et mirificas habeant proprietates.

II.

$0 = 01 + 11a$

$0 = 01 + 11a + 21b$ $0 = 02 + 12a + 22b$	$0 = +01.12 + 11.22b$ $-02.11 - 12.21.$	
$0 = 01 + 11a + 21b \;\vdots\; + 31c$ $0 = 02 + 12a + 22b \;\vdots\; + 32c$ $0 = 03 + 13a + 23b \;\vdots\; + 33c$ Si tres sint aequationes, sed duae solum literae a, b, aberunt quae lineis punctatis seclufimus, et in aequatione ultima omnes literae erunt sublatae.	$0 = +01.12 + 11.22b \;\vdots\; + 11.32c$ $-02.21 - 12.21. \;\vdots\; - 12.31.$ $0 = +01.13 + 11.23b \;\vdots\; + 11.33c$ $-03.11 - 13.21. \;\vdots\; - 13.31.$ $0 = +02.13 + 12.23b \;\vdots\; + 12.33c$ $-03.12 - 13.22. \;\vdots\; - 13.32.$	$0 = +01.12.23 \;\vdots\; + 11.22.33c$ $-01.13.22 \;\vdots\; - 11.23.32.$ $-02.11.23 \;\vdots\; - 12.21.33.$ $+02.13.21 \;\vdots\; + 12.23.31.$ $+03.11.22 \;\vdots\; + 13.21.32.$ $-03.12.21 \;\vdots\; - 13.22.31.$

Si datae sint aequationes multiliterae simplices et aequatio quaeratur pauciorum literarum, habetur formatio univerfalis sequens.

Coefficientes in datis aequationibus defignentur per numeros fictitios duarum notarum, ex quibus dextrae (si placet) significent quota sit aequatio, sinistrae vero quota sit litera, cui coefficiens est ascriptus, ex. gr. 32 indicat, se esse coefficientem literae tertiae c in aequatione secunda data. Dextras notas licebit vocare aequationales et sinistras literales.

In aequatione pauciorum literarum hinc certo ordine formata est unus Terminus absolutus, et reliqui per suam quisque literam sunt affecti.

Ejusdem aequationis quivis terminus eundem habet numerum membrorum et quodlibet membrum eundem numerum coefficientium producentium.

Numeri Membrorum sunt 1, 2, 6, 24, 120 etc. prout datarum literarum numerus minutus est literis

rarum numerus minutus est literis	nulla	una	duabus	tribus	quatuor	etc.
		2	2.3	2.3.4	2.3.4.5	
At iisdem pofitis, numerus coefficientium producentium erit	1	2	3	4	5	

Ejusdem Aequationis eaedem sunt notae aequationales seu dextrae sed varie transpofitae.

Ejusdem Termini eaedem sunt notae literales seu sinistrae, et eodem ordine in omnibus membris; eaedem vero et notae aequationales seu dextrae, sed earum ordine omnibus modis poſſibilibus variato, scilicet in producentibus ejusdem membri collocandis constantem ordinem notarum (si placet) literalium servemus. Unde resultat etiam numerus membrorum idem scil. qui poſſibilium transpoſitionum.

Termini ejusdem aequationis differunt notis literalibus, et absolutus habet notas literales quarum literae in aequatione non adſunt, adeoque semper habet o, praeter reliquas. Terminus affectus habet easdem notas literales cum absoluto, niſi quod pro o habet notam literalem ejus literae qua est affectus.

Termini respondentes (seu eadem litera affecti) aequationum easdem literas habentium habent easdem notas literales (sequitur ex praecedenti), sed differunt notis aequationalibus, quarum numerus idem qui producentium membri, sit n. Erunt tot diverſae aequationes earundem literarum quot diverſis modis combinari poſſunt literae vel aequationes datae, secundum exponentem n, seu si numerus literarum vel aequationum sit m, erunt tot aequationes (modo nostro ordinatae) literarum $m - p = n$ (poſito p eſſe literarum sublatarum numerum) quot m rerum sunt n^{niones}.

Membra ejusdem aequationis eandem habentia dispoſitionem notarum aequationalium vel pari numero transpoſitionum variatam, habent eadem signa, variatam vero una transpoſitione vel numero transpoſitionum impare habent signa opposita, quia et in diverſis aequationibus earundem literarum, si duo membra dispoſitione notarum aequationalium convenientia acceptant idem signum, etiam reliqua ita convenientia idem signum habebunt.

Haec omnia vera sunt, etſi plures vel pauciores sunt aequationes quam literae.

III.

Inveni Canonem pro tollendis incognitis quotcunque aequationes non niſi simplici gradu ingredientibus, ponendo aequationum numerum excedere unitate numerum incognitarum. Id ita habet.

Fiant omnes combinationes poſſibiles literarum coefficientium ita ut nunquam concurrant plures coefficientes ejusdem incognitae et ejusdem aequationis. Hae combinationes affectae signis, ut mox sequetur, componantur simul, compoſitumque aequatum nihilo dabit aequationem omnibus incognitis carentem.

Lex signorum haec est. Uni ex combinationibus affignetur signum pro arbitrio, et caeterae combinationes quae ab hac differunt coefficientibus duabus, quatuor, sex etc. habebunt signum oppofitum ipfius signo; quae vero ab hac differunt coefficientibus tribus, quinque, septem etc. habebunt signum idem cum ipfius signo.

Ex. gr. sit $10 + 11x + 12y = 0$, $20 + 21x + 22y = 0$, $30 + 31x + 32y = 0$, fiet

$$\left.\begin{array}{l} +10.21.32 \\ -10.22.31 \\ -11.20.32 \\ +11.22.30 \\ +12.20.31 \\ -12.21.30 \end{array}\right\} = 0$$

coefficientibus eas literas computo, quae sunt nullius incognitarum, ut 10, 20, 30.

Ope hujus Canonis inveniri poterit alius Canon pro tollenda communi incognita ex duabus aequationibus gradus cujuscunque. Sunto aequationes binae ejusdem gradus $10 + 11x + 12xx + 13x^3 + 14x^4 = 0$ et $20 + 21x + 22xx + 23x^3 + 24x^4 = 0$. Multiplicetur unaquaeque per formulam affumtitiam uno gradu inferiorem, producta ambo componantur in unam aequationem, cujus quilibet terminus sit aequalis nihilo, habemus tot aequationes quot incognitas affumtitias, quae sunt formularum affumtitiarum coefficientes, et unam aequationem praeterea. Incognitae autem affumtitiae in simplice gradu consistunt, itaque canon superior applicari potest. Quodsi duae aequationes literam communem tollendam habentes non sint ejusdem gradus, coefficientes graduum superiorum in aequatione inferiore erunt aequales nihilo.

Veniamus ad exemplum:

$10 + 11x + 12xx = 0$ multiplicetur per $30 + 31x$

$20 + 21x + 22xx = 0$ multiplicetur per $40 + 41x$[1]

compofitum ex duobus productis erit

$$\left.\begin{array}{llll} 10.30 & +11.30x & +12.30xx & \\ & 10.31.. & 11.31.. & +12.31x^3 \\ 20.40 & +21.40.. & 22.40.. & \\ & 20.41.. & 21.41.. & +22.41... \end{array}\right\} = 0$$

ubi ut destruatur x, fient aequationes tres

$$10.30 + 20.40 = 0 \qquad \left.\begin{array}{r} 11.30 + 10.31 \\ 21.40 + 20.41 \end{array}\right\} = 0 \qquad \left.\begin{array}{r} 12.30 + 11.31 \\ 22.40 + 21.41 \end{array}\right\} = 0$$

nam quarta $12.31 + 22.41 = 0$ per se patet, posito $12, 31, 22 = 1$ et $41 = -1$. Harum trium aequationum ope tolli poffunt incognitae assumtitiae 30 et 40; coefficientes ipfius 30 sunt 10, 11, 12

40 sunt 20, 21, 22

[1] Leibniz hat bemerkt: ubi 12, 22, 31 poni poffunt $= 1$ et $41 = -1$.

Neutrius nempe ipſius 1 coefficientes sunt 0, 10 − 20, 11 − 21
seu compendio 0, 51 , 52

Habemus combinationes cum suis signis debitis et ex iis aequationem incognitis aſſumtitiis pariter ac litera x carentem

$$\left.\begin{array}{l} +10.21.52-10.22.51 \\ -11.20.52+12.20.51 \end{array}\right\} = 0 \qquad \begin{array}{l} \text{ubi } 12 \text{ et } 22 = 1 \\ \text{et } 51 = 10-20 \\ \text{et } 52 = 11-21. \end{array}$$

Unde fiet

$$\left.\begin{array}{l} +10.11.21-10.10.22 \\ -10.21.21+10.20.22 \\ -11.11.20+10.12.20 \\ +11.20.21-12.20.20 \end{array}\right\} = 0, \quad \text{posito si placet } 12 \text{ et } 22 = 1.$$

Si $10+11x+12xx+13x^3+14x^4$ multiplicetur per $30+31x+32xx+33x^3$
et $20+21x+22xx+23x^3+24x^4$ .... $40+41x+42xx+43x^3$
ubi 14, 24, 33 = 1 et 43 = − 1, componendo producta in unam aequationem fiet

$$\begin{array}{llllllll}
10.30 & +11.30x & +12.30xx & +13.30x^3 & +14.30x^4 & & & \\
 & 10.31 & 11.31 & 12.31 & 13.31 & +14.31x^5 & & \\
 & & 10.32 & 11.32 & 12.32 & 13.32 & +14.32x^6 & \\
 & & & 10.33 & 11.33 & 12.33 & 13.33 & +14.33x^7 \\
 & & & & & & & \\
20.40 & +21.40 & 22.40 & 23.40 & 24.40 & & & \\
 & 20.41 & 21.41 & 22.41 & 23.41 & 24.41 & & \\
 & & 20.42 & 21.42 & 22.42 & 23.42 & 24.42 & \\
 & & & 20.43 & 21.43 & 22.43 & 23.43 & 24.43.
\end{array}$$

Sunt septem aequationes, quibus tollendae sex literae 30, 31, 32, 40, 41, 42; nam 33 = 1 et 43 = − 1, unde, quia et 14 = 24 = 1, fit 14.33 + 24.43 = 0 per se.

Unitas habet coefficientes	0	0	0	10 − 20	11 − 21	12 − 22	13 − 23
seu 31_1 − 41 seu compendio	0	0	0	50	51	52	53
30 habet coefficientes	10	11	12	13	14	0	0
31	0	10	11	12	13	14	0
32	0	0	10	11	12	13	14
40 habet coefficientes	20	21	22	23	24	0	0
41	0	20	21	22	23	24	0
42	0	0	20	21	22	23	24.

Hinc cum 53 conjungantur omnes seniones ex coefficientibus, demta linea prima et columna ultima, cum 52 omnes seniones ex coefficientibus, demta linea 1 et col. penult. etc. Quilibet senio habet tres notas sinistras 1 et tres notas sinistras 2, summa notarum dextrarum est 9.

Cavendi seniones in 53 ubi in dextris occurrit 0 vel 1 vel 2 vel 3 plus quam ter, et 4 plus quam bis. At in 52 cavendi, ubi 0, 1, 2 plus quam ter, et 13, 14 plus quam bis; in 51 cavendi, ubi 0 et 1 plus quam ter et 2, 3, 4 plus quam bis; denique in 50 cavendi seniones, ubi 0 et 4 plus quam ter, et 1, 2, 3 plus quam bis.

IV.

$\overset{(1)}{0 = 12 + 11x + 10x^2}$, $\overset{(2)}{0 = 22 + 21x + 20x^2}$, illa mult. per $31 + 30x$, haec per $41 + 40x$ fiet

$$\left.\begin{array}{llll} +12.31 & +11.31x & +10.31x^2 & \\ & 12.30 & 11.30 & +10.30x^2 \\ -22.41 & -21.41 & -20.41 & \\ & 22.40 & 21.40 & -20.40 \end{array}\right\} = 0 \quad \left.\begin{array}{l} +10.30 + 0.31 - 20.40 - 0.41 = 0 \\ +11.30 + 10.31 - 21.40 - 20.41 = 0 \\ +12.30 + 11.31 - 22.40 - 21.41 = 0 \\ +0.30 + 12.31 - 0.40 - 22.41 = 0 \end{array}\right\} \text{pro} \left\{\begin{array}{l} 11a + 21b + 31c + 41d = 0 \\ 12a + 22b + 32c + 42d = 0 \\ 13a + 23b + 33c + 43d = 0 \\ 14a + 24b + 34c + 44d = 0 \end{array}\right.$$

aequationibus canonicis.

Ergo ad formandos coefficientes novos ex canonicis nota sinistra 1 et 2 mutatur in 1, nota vero sinistra 3 et 4 mutatur in 2. Nota canonica dextra d minuatur unitate et praeterea nota gradus literae cujus coefficiens ex ea formari debet, fiat $d - 1 - g$. At g nota gradus habetur ex nota canonica sinistra, quae in priore dichotomia minuenda est per 1, in posteriore per 3. Nempe nota canonica sinistra sit s, erit $g = s - 1$ in priore dichotomia, sed in posteriore dichotomia generaliter detrahi debet ab s numerus terminorum aequationis datae posterioris scil. inferioris, nisi pares sint, qui vocetur t, et g in posteriore dichotomia erit $s - t$. Itaque generaliter coefficiens canonicus sit sd, erit coefficiens novus $\left\{\begin{array}{c} 1.s-1 \\ -2.d-1-s+t \end{array}\right.$, vel quia $t - 1$ est e, maximus exponens aequationis posterioris, erit coefficiens novus $\left\{\begin{array}{l} 1.s-1 \\ 2.d-s+e \end{array}\right.$ ubi e est constans; praeter coefficientes dichotomiae posterioris recipiunt —. Ergo fit coefficiens novus $\left\{\begin{array}{l} +1;\overline{s-1} \\ -2;\overline{d-s+e} \end{array}\right.$.

Ex his ergo habebimus regulam generalem formandi aequationem factam ex sublata litera ope duarum aequationum eandem literam communem habentium. Sint datae duae aequationes ad eandem literam, una gradus r, altera gradus e; sumitur autem pro posteriore ea quae non sit major quam e. Et coefficientes earum defignentur prioris quidem per 10, 11, 12 etc. usque ad $1h$, posterioris per 20, 21, 22 etc. usque ad $2e$, ubi 10 vel 20 coefficientes sunt termini summi, 11 vel

21 secundi etc. $1h$ vel $1e$ termini ultimi. His poſitis adhibeatur canonicus calculus pro aequationibus multiliteris simplicibus numero $e+h$, in quibus coefficientes deſignantur numeris duarum notarum, quarum ſinistra deſignat, quota ſit litera cujus est coefficiens, dextra vero d deſignat, quota ſit aequatio in qua est coefficiens. Inde aequatio canonica quaeratur exhibens valorem ultimae literae, in quo neglecto numeratore solus sumatur nominator, qui constituere intelligatur aequationem, seu ponatur nihilo aequalis. Et ex hac aequatione fiet nostra aequatio quaesita, tantum pro coefficientibus canonicis ubique substituendo nostros, quod fiet mutando notam sinistram canonicam in sinistram novam, et dextram canonicam in dextram novam tali regula mutationis generali. Ante omnia fiat dichotomia notarum canonicarum sinistrarum, et prior quidem sectio continet notas 1, 2 etc. usque ad e, posterior sectio continet reliquas. In priore dichotomia res breviter expeditur, nam coefficientis novi nota sinistra semper est 1, at nota dextra est $s-1$ seu fit ex sinistra canonica unitate multata. Sed in posteriore dichotomia nota sinistra etiam semper eadem est, nempe 2, nota vero dextra fit, si dextrae canonicae addatur e et ex aggregato detrahatur nota canonica sinistra, adeoque nota dextra nova in posteriore dichotomia erit $d-s+e$. Denique coefficienti omni dichotomiae posterioris sic formato praefigendum est signum —, itaque coefficiens dichotomiae prioris erit $+1;\ \overline{\overline{s-1}}$. posterioris —; $2;\ \overline{\overline{d-s+e}}$. Quod ſi $d-s+e$ sit quantitas minor nihilo, coefficiens evanescit seu fit nihilo aequalis. Ergo omnia breviter complectar: si coefficiens canonicus sit sd, erit novus substituendus $\left\{\begin{array}{l} +;\ 1;\ \overline{\overline{s-1}} \\ \hline -;\ 2;\ d-s+e \end{array}\right.$. Cum autem Aequatio canonica unius ex literis (quae in aequationibus simplicibus occurrunt) valorem exhibens habeatur regula generali simpliciſſima, quam res capere potest, et nunc expoſitus sit modus generalis itidem simplex inde formandi aequationem nostram quaeſitam, poterimus tandem hinc ducere modum generalem fabricandi nostram quaeſitam per se, nullo amplius recurſu neceſſario ad aequationem canonicam ex multiliteris simplicibus ductam. Qua regula habita patebit et regula pro intermediis aequationibus, in quibus litera non est omnino sublata, sed solum ad pauciores gradus depreſſa, habebuntur et omnia in calculo maximi communis diviſoris, qui et ipſe huc redit. Utiles autem sunt aequationes intermediae, quia saepe contingit, ut in anteceſſum evanescant multa jam tum in intermediis.

---

20. Die Legendre'sche Relation.

Von L. Kronecker.

(Vorgetragen am 14. Mai; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXV.]; — ausgegeben am 28. Mai.)

(Fortsetzung der Mittheilung vom 2. April, XVIII, XX.)

VIII.

Die wahre Natur und Bedeutung der Eisenstein'schen, oben im art. VI mit $f_1(u, v, w)$ bezeichneten Doppelsumme $\sum\limits_{m,n}(u+mv+nw)^{-1}$, welche aus der logarithmischen Differentiation des Eisenstein'schen Doppelproductes entsteht und die logarithmische Ableitung der ϑ-Function darstellt, wird erst durch die in gewissem Sinne allgemeinere Doppelreihe $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ vollständig aufgeklärt. Ich werde dies in einer weiteren Mittheilung zur Theorie der elliptischen Functionen ausführlich darlegen und hier nur so weit darauf eingehen, als es für die Legendre'sche Relation von Wichtigkeit ist.

Die Doppelreihe $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ ist durch die Gleichung definirt:

$$(44)\qquad \mathrm{Ser}(u_0, u, v, w) = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w},$$
$$(u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0;\quad u = v\sigma + w\tau)$$

wobei die Summation auf alle ganzzahligen Werthe von m, n zu erstrecken ist, welche den Ungleichheitsbedingungen genügen:

$$|\alpha m + \beta n| \leq M,\quad |\alpha' m + \beta' n| \leq N,$$

vorausgesetzt, dass $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze Zahlen sind, für die $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ ist. Der Werth der Reihe $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ wird durch die Function $\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ dargestellt, welche folgendermaassen definirt ist:

$$(45)\qquad \overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = \frac{1}{v}e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}}\frac{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0 + u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{\varepsilon u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

oder:

$$(45^*)\qquad \overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w) = e^{(\sigma\tau_0 - \sigma_0\tau)\varepsilon\pi i}\frac{\mathrm{Atr}'(0, v, \varepsilon w)\ \mathrm{Atr}(\varepsilon u_0 + u, v, \varepsilon w)}{\mathrm{Atr}(\varepsilon u_0, v, \varepsilon w)\ \mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w)},$$

wenn von den Bezeichnungen Gebrauch gemacht wird:

$$(46)\qquad \mathrm{Atr}\,(u, v, \varepsilon w) = (2\pi)^{\frac{1}{3}}\left(\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\right)^{-\frac{1}{3}} \vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right) e^{\frac{u\tau\pi i}{v}},$$

$$(46^*)\qquad \mathrm{Atr}'\,(0, v, \varepsilon w) = \frac{1}{v}\,(2\pi)^{\frac{1}{3}}\left(\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\right)^{\frac{2}{3}},$$

welche ich im art. XX, § 8 meiner Mittheilungen zur Theorie der elliptischen Functionen eingeführt habe.

Die complexen Grössen u_0, u sind durch die complexen Grössen v, w und durch die reellen Grössen $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau$ vollkommen bestimmt, nämlich in der Weise, dass die Gleichungen zu erfüllen sind:

$$u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0\,, \quad u = v\sigma + w\tau,$$

und ε ist das Vorzeichen des mit i multiplicirten Theiles von $\frac{w}{v}$, also dadurch bestimmt, dass der reelle Theil von $\frac{\varepsilon wi}{v}$ negativ werden muss. Die Functionen $\mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w)$, $\overline{\mathrm{Atr}}\,(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ sind hiernach eigentlich Functionen der reellen Grössen $\sigma, \tau, \sigma_0, \tau_0$ und der beiden complexen Grössen v, w; die letztere der beiden Functionen, sowie die 12te Potenz der ersteren, behält ihren Werth, wenn:

$$\begin{array}{lcccccc} & \alpha\sigma_0+\beta\tau_0, & \alpha'\sigma_0+\beta'\tau_0, & \alpha\sigma+\beta\tau, & \alpha'\sigma+\beta'\tau, & \beta'v-\alpha'w, & -\beta v+\alpha w \\ \text{für:} & \sigma_0\,, & \tau_0\,, & \sigma\,, & \tau\,, & v\,, & w \end{array}$$

substituirt wird, vorausgesetzt, dass, wie oben, $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ ganze Zahlen sind, welche der Bedingung $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ genügen. Die Functionen $\left(\mathrm{Atr}\,(u, v, \varepsilon w)\right)^{12}$, $\overline{\mathrm{Atr}}\,(\varepsilon u_0, u, v, w)$ sind also Invarianten der ganzen Classe von Grössensystemen:

$$(\mathrm{S})\quad (\alpha\sigma_0+\beta\tau_0, \alpha'\sigma_0+\beta'\tau_0, \alpha\sigma+\beta\tau, \alpha'\sigma+\beta'\tau, \beta'v-\alpha'w, -\beta v+\alpha w),$$

welche durch die verschiedene Wahl der Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ entstehen,[1] und eben desshalb ist in der Bezeichnung Atr der griechische Ausdruck für Invariante »ἄτροπος« angedeutet. Mit Hinsicht auf diesen Ausdruck ist wohl auch passender Weise die Invarianteneigenschaft einer Function einfach als »Atropie« zu bezeichnen, und man kann auch sonst mit Vortheil neben den von dem treffenden Sylvester'schen Ausdruck »Invariante« hergeleiteten Wortbildungen solche benutzen, die dem Griechischen entlehnt sind, zumal diese sich für unsere Sprachformen fügsamer erweisen. So ist z. B. hierdurch leicht dem

[1] Vergl. art. XX §. 8 meiner Mittheilungen zur Theorie der elliptischen Functionen (Sitzungsbericht vom 30. Januar 1890).

in den vorliegenden Entwickelungen auftretenden Bedürfniss eines Ausdrucks zu genügen, durch welchen die gegenseitige Beziehung zweier Functionen mit invarianter oder »atroper« Differenz gekennzeichnet wird.

Um dies für den allgemeinen Fall darzulegen, knüpfe ich an meine Bemerkungen über Invarianten an, mit welchen ich die Auseinandersetzungen im art. XX meiner Mittheilungen zur Theorie der elliptischen Functionen[1] eingeleitet habe. Danach soll also für zwei Functionen von $\mathfrak{n}$ Grössen:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n), \quad \mathfrak{G}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n)$$

eine Gleichung bestehen:

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n) - \mathfrak{G}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n) = \mathfrak{J}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n),$$

in welcher $\mathfrak{J}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_n)$ eine Invariante der durch alle einander aequivalenten Systeme:

$$(\mathfrak{z}_1', \mathfrak{z}_2', \ldots \mathfrak{z}_n'), \quad (\mathfrak{z}_1'', \mathfrak{z}_2'', \ldots \mathfrak{z}_n''), \quad (\mathfrak{z}_1''', \mathfrak{z}_2''', \ldots \mathfrak{z}_n'''), \ldots$$

gebildeten Classe bedeutet. Da hiernach die beiden Functionen $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ beim Übergang von einem Grössensystem $(\mathfrak{z}')$ zu einem aequivalenten $(\mathfrak{z}'')$ eine und dieselbe Änderung erfahren, also »gleichändrig« sind, so können sie füglich im Anschluss an jene griechische Invariantenbezeichnung »isotrop« genannt werden.[2]

Schon oben in der Einleitung ist erwähnt worden, dass das Aggregat der Glieder erster Dimension in der Entwickelung der Function $\overline{\text{Atr}}\,(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ nach steigenden Potenzen von $\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau$, nämlich:

$$(u + \varepsilon u_0)\left[\frac{2\tau_0 \varepsilon\pi i}{u_0 v} + \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{3v^2\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}\right],$$

sowie dessen erster Factor $u + \varepsilon u_0$, und also auch der in Parenthesen eingeschlossene Ausdruck, invariant oder »atrop« ist. Nach der nunmehr eingeführten Terminologie ist daher:

$$(47) \qquad -\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} \text{ isotrop mit } \frac{6\tau_0\varepsilon\pi i}{u_0 v},$$

---

[1] Sitzungsbericht vom 30. Januar 1890.

[2] Die übliche physikalische Bedeutung des Wortes »isotrop« bildet offenbar kein Hinderniss für die hier vorgeschlagene andere Verwendung desselben Wortes innerhalb einer ganz anderen Ideensphaere.

und da zwischen den Grössen v, τ_0 und den transformirten v', τ_0', offenbar die Beziehung stattfindet:

$$\frac{\tau_0'}{v'} - \frac{\tau_0}{v} = \frac{\alpha' u_0}{vv'} \qquad \begin{pmatrix} v' = \beta' v - \alpha' w \\ \tau_0' = \alpha' \sigma_0 + \beta' \tau_0 \\ u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0 \end{pmatrix},$$

so folgt ganz unmittelbar die oben im art. VII mit (40*) bezeichnete Gleichung:

$$(40^*) \qquad \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right)}{v'^2 \vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w'}{v'}\right)} - \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{v^2 \vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = - \frac{6\varepsilon\alpha'\pi i}{vv'},$$

welche für $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$ die LEGENDRE'sche Relation in der Gestalt ergiebt, wie sie im art. I (6) entwickelt worden ist. Die Isotropie (47) repraesentirt also die LEGENDRE'sche Relation.

Aus derselben Isotropie folgt ferner, dass der Ausdruck:

$$\frac{1}{u^2} \log \frac{v\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} - \frac{1}{6v^2} \cdot \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

welcher gemäss der Gleichung (38) invariant ist, diese Eigenschaft behält, wenn der zweite Theil durch die damit isotrope Function $\frac{\tau_0 \varepsilon\pi i}{u_0 v}$ ersetzt wird. Der auf diese Weise entstehende Ausdruck:

$$\frac{\tau_0 \varepsilon \pi i}{u_0 v} + \frac{1}{u^2} \log \frac{v\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

ist also ebenfalls invariant, und folglich auch der Ausdruck:

$$(48) \qquad \frac{v\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\frac{u^2 \tau_0 \varepsilon \pi i}{u_0 v}} \qquad \begin{pmatrix} u = v\sigma + w\tau \\ u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0 \end{pmatrix},$$

sowie derjenige, welcher resultirt, wenn man darin τ für τ_0 und zugleich u für u_0 setzt, also:

$$(49) \qquad \frac{v\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\frac{u\tau\varepsilon\pi i}{v}} \qquad (u = v\sigma + w\tau)$$

Dieser letztere Ausdruck kann in folgender Weise dargestellt werden:

$$v(2\pi)^{-\frac{1}{3}}\left(\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\right)^{-\frac{2}{3}} \mathrm{Atr}\,(u, v, \varepsilon w),$$

und hierbei haben die beiden Theile, nämlich die Function Atr $(u, v, \varepsilon w)$ und der Factor, mit welchem sie multiplicirt ist, für sich die Eigenschaft, dass ihre 12te Potenz invariant ist.

Der Ausdruck (49), welcher, wenn darin $v\sigma + w\tau$ für u substituirt wird, die Form annimmt:

$$(49^*) \qquad \frac{v\vartheta\left(\sigma+\tau\frac{w}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\left(\sigma+\tau\frac{w}{v}\right)\tau\pi i},$$

hat genau dieselbe Invarianten-Eigenschaft wie jene im art. VI mit $\overline{\mathrm{En}}\left(\sigma+\tau\frac{w}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)$ bezeichnete Function, welche sich a. a. O. aus der EISENSTEIN'schen Invariante als ein Grenzwerth derselben ergeben hat. Es zeigt sich also, dass für den Zweck, den ϑ-Ausdruck:

$$\frac{v\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

invariant zu machen, an Stelle des oben im art. VI angewendeten Factors mit dem Exponenten:

$$-\frac{u^2}{6v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

der wesentlich einfachere Exponentialfactor:

$$e^{\left(\sigma+\tau\frac{w}{v}\right)\tau\pi i}$$

genügt, welcher das zweite Argument der ϑ-Function, nämlich $\frac{w}{v}$ im Exponenten nur linear enthält, während jener Exponent eine transcendente Function eben dieses Argumentes ist. Aber freilich bedurfte es, um den einfacheren Factor zu erlangen, der Zerlegung des ersten ϑ-Arguments u in seine Elemente $v\sigma$, $w\tau$, welche sich überhaupt als naturgemäss erwiesen und namentlich den weiteren Fortschritt von den EISENSTEIN'schen Doppelsummen zu der mit Ser (u_0, u, v, w) bezeichneten und deren Abgeleiteten ermöglicht hat.

Die Invarianten-Eigenschaft der Function (49^*) wird durch die Gleichung ausgedrückt:

$$
(50)\qquad \frac{v\vartheta\left(\sigma+\tau\frac{w}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}\,e^{\left(\sigma+\tau\cdot\frac{w}{v}\right)\tau\varepsilon\pi i}=\frac{v'\vartheta\left(\sigma'+\tau'\frac{w'}{v'},\frac{\varepsilon w'}{v'}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w'}{v'}\right)}\,e^{\left(\sigma'+\tau'\frac{w'}{v'}\right)\tau'\varepsilon\pi i},
$$

deren genaue Übereinstimmung mit der Transformationsgleichung (42) im art. VII evident wird, wenn man die Relation $v\tau'-v'\tau=\alpha'u$ in Betracht zieht.

Während also die Isotropie (47) die LEGENDRE'sche Relation repraesentirt, stellt die Atropie der Function (49^*) die Relation dar, welche zwischen linear transformirten ϑ-Functionen besteht, und da, wie mehrfach erwähnt worden, die erstere Relation selbstverständlich als eine Folge der letzteren aufgefasst werden kann, so wird durch die vorstehende Entwickelung, in welcher sich die Atropie der Function (49^*) als eine Folge der Isotropie (47) ergeben hat, wiederum der Nachweis der Aequivalenz der LEGENDRE'schen Relation und der linearen ϑ-Transformation vervollständigt.

Die Herleitung der Atropie der Function (49^*) aus der Isotropie (47) erfolgte dabei mit Hülfe der EISENSTEIN'schen Entwickelungen, aber man wird auch ganz direct auf eben diese Atropie geführt, wenn man, wie jetzt geschehen soll, von jenen Reihen ausgeht, die ich schon im art. XXII meiner Mittheilungen »zur Theorie der elliptischen Functionen« behandelt habe[1], und welche in Grenzfällen auf die EISENSTEIN'schen Doppelsummen führen.

IX.

Die Integration der Reihe $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ hat a. a. O. im art. XXII, § 1, ($\mathfrak{C}$) zu der Reihe geführt:

$$
(51)\qquad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n} e^{(n\sigma-m\tau)2\pi i}\log\frac{(\sigma_0'+m)v+(\tau_0'+n)w}{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w},
$$
$$
(m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm M;\; n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm N)
$$

deren Werth mit:

$$
\log\ \mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)
$$

bezeichnet werden soll. Dabei sind $\sigma, \tau, \sigma_0', \tau_0', \sigma_0, \tau_0$ reelle Grössen:

[1] Sitzungsbericht vom 31. Juli 1890, XL.

u, u_0', u_0 sind also, da das Verhältniss $v:w$ wesentlich complex ist, durch die Gleichungen:

$$u = v\sigma + w\tau\,,\ \ u_0' = v\sigma_0' + w\tau_0',\ \ u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0$$

vollkommen bestimmt, und ε hat die hier durchweg festgehaltene Bedeutung als Vorzeichen des mit i multiplicirten Theiles von $\frac{w}{v}$.

Die Reihe (51) geht, wenn $\sigma = \tau = 0$ gesetzt wird, in jene über:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\log\frac{(\sigma_0'+m)v+(\tau_0'+n)w}{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w}\qquad\begin{pmatrix}m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots \pm M\\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\dots \pm N\end{pmatrix},$$

welche EISENSTEIN, wie oben im art. VI erwähnt worden, eingehend untersucht hat. Es kann nun, nach EISENSTEIN's Vorgang, auch die allgemeinere Reihe (51) in folgende drei Theile zerlegt werden:

$$(52)\qquad -(u_0-u_0')\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma-m\tau)\,2\pi i}}{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w}\ \text{oder}\ -(u_0-u_0')\,\mathrm{Ser}\,(u,u_0,v,w),$$

$$(53)\qquad -\tfrac{1}{2}(u_0-u_0')^2\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma-m\tau)\,2\pi i}}{\big((\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w\big)^2}\ \text{oder}\ -\tfrac{1}{2}(u_0-u_0')^2\,\mathrm{Ser}_1\,(u,u_0,v,w),$$

$$(54)\qquad \sum_{m,n}e^{(n\sigma-m\tau)\,2\pi i}\left(\frac{u_0-u_0'}{u_0+mv+nw}+\frac{(u_0-u_0')^2}{2(u_0+mv+nw)^2}+\log\left(1-\frac{u_0-u_0'}{u_0+mv+nw}\right)\right).$$

Sondert man in diesem letzten Theile diejenigen Glieder ab, in denen:

$$|u_0+mv+nw|\leqq|u_0-u_0'|$$

ist, und welche offenbar nur in endlicher Anzahl vorhanden sind, so kann der Überrest, mittels Entwickelung der Logarithmen nach steigenden Potenzen von:

$$\frac{u_0-u_0'}{u_0+mv+nw},$$

durch die Reihe dargestellt werden:

$$-\sum_{\varrho=2}^{\varrho=\infty}\frac{(u_0-u_0')^{1+\varrho}}{1+\varrho}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma-m\tau)\,2\pi i}}{\big((\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w\big)^{1+\varrho}},$$

deren absolute Convergenz EISENSTEIN im art. VI, §. 2 seiner mehrfach citirten Abhandlung[1] nachgewiesen hat. Da nun durch die Substitution von:

$$\begin{array}{lcccccc} & \alpha\sigma+\beta\tau+\gamma, & \alpha'\sigma+\beta'\tau+\gamma', & \alpha\sigma_0+\beta\tau_0, & \alpha'\sigma_0+\beta'\tau_0, & \alpha\sigma_0'+\beta\tau_0', & \alpha'\sigma_0'+\beta'\tau_0' \\ \text{für:} & \sigma\ , & \tau\ , & \sigma_0\ , & \tau_0\ , & \sigma_0'\ , & \tau_0'\ , \end{array}$$

sowie von: $\beta'v-\alpha'w$ für v und $-\beta v+\alpha w$ für w $(\alpha\beta'-\alpha'\beta=1)$

[1] CRELLE's Journal, Bd. 35.

in der Reihe (54) nur eine Vertauschung der verschiedenen Glieder mit einander bewirkt wird, so ist der Werth dieser Reihe invariant. Eben dieselbe Eigenschaft habe ich für die Werthe der beiden Reihen Ser (u, u_0, v, w), Ser_1 (u, u_0, v, w) im art. XXI meiner Mittheilungen zur Theorie der elliptischen Functionen nachgewiesen. Hiernach ist der Gesammtwerth der drei Reihen (52), (53), (54), d. h. also der mit log atr $(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)$ bezeichnete Werth der Reihe (51) eine Invariante der ganzen Classe von Grössensystemen:

$$(\overline{\mathrm{S}}) \qquad \begin{pmatrix} \alpha\sigma+\beta\tau+\gamma, & \alpha\sigma_0+\beta\tau_0, & \alpha\sigma_0'+\beta\tau_0', & \beta'v-\alpha'w \\ \alpha'\sigma+\beta'\tau+\gamma', & \alpha'\sigma_0+\beta'\tau_0, & \alpha'\sigma_0'+\beta'\tau_0', & -\beta v+\alpha w \end{pmatrix},$$

welche durch die verschiedene Wahl der Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ mit der Bedingung $\alpha\beta'-\alpha'\beta = 1$ entstehen; die Function atr $(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)$ selbst ist daher ebenfalls für alle Grössensysteme $(\overline{\mathrm{S}})$ atrop.

Setzt man $u = 0$, so reducirt sich die Function atr$(\varepsilon u, u_0', u_0, v, w)$ auf das Product:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\prod_{m,n}\frac{(\sigma_0'+m)v+(\tau_0'+n)w}{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w} \qquad \begin{pmatrix} m=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm M \\ n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N \end{pmatrix},$$

und es ist also gemäss der Gleichung (21*) im art. VI:

$$(55) \qquad \mathrm{atr}(0, u_0', u_0, v, \varepsilon w) = \frac{\vartheta\left(\dfrac{u_0'}{v}, \dfrac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\dfrac{u_0}{v}, \dfrac{\varepsilon w}{v}\right)}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit u_0 und setzt dann $u_0 = 0$, so kommt, wenn noch der Einfachheit halber u für u_0' genommen wird:

$$(56) \qquad \lim_{u_0=0} u_0\, \mathrm{atr}(0, u, u_0, v, \varepsilon w) = \frac{\vartheta\left(\dfrac{u}{v}, \dfrac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \dfrac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

und es zeigt sich hierbei deutlich, in welcher Weise die Function atr$(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)$ eine Verallgemeinerung der ϑ-Function enthält.

Den Differentialquotienten:

$$\frac{\partial \log \mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0'}$$

kann man bilden, indem man die beiden Ausdrücke (52), (53) und dann die Reihe (54) gliedweise nach u_0' differentiirt. Man erhält auf diese Weise das Resultat:

$$(57) \qquad \frac{\partial \log \mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0'} = \mathrm{Ser}(u, u_0', v, w) \doteq \overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0', v, \varepsilon w)$$

und also die Reihenentwickelung:

$$(58)\quad \log \operatorname{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w) = -\sum_{n} \operatorname{Ser}_{n-1}(u, u_0, v, w)\frac{(u_0-u_0')^n}{n}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

oder:

$$(59)\quad \log \operatorname{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w) = \sum_{n} \frac{\partial^{(n-1)}\overline{\operatorname{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0^{n-1}} \frac{(u_0'-u_0)^n}{n!}.$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Um nun zum Grenzwerth für $\sigma = \tau = 0$ oder $u = 0$ überzugehen, ist zuvörderst der bezügliche Grenzwerth der Function:

$$\overline{\operatorname{Atr}}\,(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w) \text{ oder } \frac{1}{v}\, e^{\frac{2\tau u_0 \pi i}{v}} \frac{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{\varepsilon u + u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{\varepsilon u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

zu bestimmen. Derselbe wird durch die bemerkenswerthe Gleichung gegeben:

$$(60)\quad \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\left(-\frac{1}{\varepsilon u} + \overline{\operatorname{Atr}}\,(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)\right) = \frac{1}{v}\frac{\vartheta'\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} + 2\varepsilon\pi i \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \frac{u_0\tau}{uv},$$

welche gilt, wie man auch zu den Werthen $\sigma = 0$, $\tau = 0$ übergehen mag.

Setzt man $\alpha'\sigma + \beta'\tau$ für τ sowie zugleich $\beta' v - \alpha' w$ für v und $-\beta v + \alpha w$ für w, und nimmt für α, β, α', β' ganze Zahlen, für welche $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$ ist, so behält der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (60) seinen Werth, und es ist daher für alle verschiedenen Systeme $(\bar{S})$:

$$\frac{1}{v}\frac{\vartheta'\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} \text{ isotrop mit } -2\varepsilon\pi i \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \frac{u_0\tau}{uv}.$$

Dies ergiebt sich übrigens auch durch logarithmische Differentiation des obigen Ausdrucks (48), da hierbei die Atropie desselben offenbar erhalten bleibt.

Ersetzt man in der Gleichung (60) u_0 durch $u_0 - z$ und entwickelt dann auf beiden Seiten nach steigenden Potenzen von z, so erhält man die Relationen:

$$(61)\quad \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \frac{\partial\, \overline{\operatorname{Atr}}\,(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0} = \frac{\partial^2 \log \vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\partial u_0^2} + 2\varepsilon\pi i \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \frac{\tau}{uv},$$

$$(62)\qquad \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \frac{\partial^{(n-1)}\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0^{n-1}} = \frac{\partial^{(n)} \log \vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\partial u_0^n} \qquad (n=3,4,\ldots).$$

Benutzt man nun die Relationen (60), (61), (62) in der Gleichung (59), so geht dieselbe in folgende über:

$$(63)\qquad \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\left(\frac{\varepsilon(u_0-u_0')}{v\sigma+w\tau} + \log \mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)\right) = \log \frac{\vartheta\left(\frac{u_0'}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} + \frac{u_0'^2 - u_0^2}{v}\,\varepsilon\pi i \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \frac{\tau}{u};$$

man erhält also die Grenzwerthbestimmung:

$$(64)\qquad \lim e^{-\frac{\varepsilon(u_0'-u_0)}{v\sigma+w\tau}}\,\mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w) = \frac{\vartheta\left(\frac{u_0'}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}\, e^{\varepsilon\pi i \lim \frac{(u_0'^2 - u_0^2)\tau}{v(v\sigma+w\tau)}},$$

in welcher sich das Zeichen lim auf beiden Seiten auf die Werthe $\sigma=0$, $\tau=0$ bezieht, und die Gleichung (63) kann vermöge der Definition der Function atr auch so dargestellt werden:

$$(63^*)\qquad \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \frac{\varepsilon(u_0-u_0')}{v\sigma+w\tau} + \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n} e^{(n\sigma-m\tau)2\pi i} \log\frac{(\sigma_0'+m)v+(\tau_0'+n)w}{(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w}$$

$$= \log \frac{\vartheta\left(\frac{u_0'}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} + \frac{u_0'^2 - u_0^2}{v}\,\varepsilon\pi i \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \frac{\tau}{u}.$$

Multiplicirt man die Gleichung (64) auf beiden Seiten mit u_0 und setzt dann $u_0=0$, so kommt:

$$(65)\qquad \lim_{u_0=0}\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} u_0 e^{-\frac{\varepsilon(u_0'-u_0)}{v\sigma+w\tau}}\,\mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w) = v\frac{\vartheta\left(\frac{u_0'}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}\, e^{\varepsilon\pi i \lim \frac{u_0'^2\tau}{uv}},$$

wo das Zeichen lim rechts im Exponenten sich auf die Werthe $\sigma=0, \tau=0$ bezieht. Diese Gleichung (65) ist es nun, auf deren Herleitung die vorstehende Entwickelung abzielte; denn aus derselben folgt ganz direct die Atropie des oben bei (48) angegebenen Ausdrucks:

$$\frac{v\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}\, e^{\frac{u^2\tau_0\varepsilon\pi i}{u_0 v}} \qquad \begin{pmatrix} u = v\sigma + w\tau \\ u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0 \end{pmatrix},$$

und dieser Ausdruck ergiebt, wenn man darin u für u_0 und τ für τ_0

setzt, jene einfache Invariante:

$$\frac{v\vartheta\left(\sigma+\tau\frac{w}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\left(\sigma+\tau\frac{w}{v}\right)\tau\varepsilon\pi i},$$

welche oben bei (49) angegeben worden ist und mit den bei (46) und (46*) definirten Invarianten Atr $(u, v, \varepsilon w)$, Atr$'$ $(0, v, \varepsilon w)$ in der einfachen Beziehung steht:

$$v\cdot\frac{\vartheta\left(\sigma+\tau\frac{w}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\left(\sigma+\tau\frac{w}{v}\right)\tau\varepsilon\pi i} = \frac{\text{Atr}\,(u, v, \varepsilon w)}{\text{Atr}'(0, v, \varepsilon w)}.$$

Wie umfassend die Eigenschaften der Invariante atr $(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)$ sind, zeigt sich unter Anderem auch darin, dass aus der Entwickelung ihres Logarithmus nach steigenden Potenzen von σ, τ, σ_0, τ_0, σ_0', τ_0' unmittelbar die LEGENDRE'sche Relation hervorgeht. Das Aggregat der Glieder einer und derselben Dimension in der Entwickelung von $\log \text{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)$ ist nämlich offenbar für sich invariant, und es ist das Aggregat der Glieder zweiter Dimension, dessen Atropie die LEGENDRE'sche Relation ergiebt. Dieses Aggregat wird mittels der Gleichung (59) erhalten, wenn man sich in der Entwickelung des auf der rechten Seite stehenden Ausdrucks auf die beiden ersten Glieder beschränkt, da die übrigen keinen Beitrag dazu liefern. Es ist also nur das Aggregat der Glieder zweiter Dimension in der Entwickelung des folgenden Ausdrucks zu bilden:

$$(u_0'-u_0)\,\overline{\text{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w) + \tfrac{1}{2}(u_0'-u_0)^2\,\frac{\partial\,\overline{\text{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0}.$$

Dasselbe ist für den ersten Theil dieses Ausdrucks schon aus der Einleitung zu entnehmen, da dort bei ($\overline{\mathfrak{A}}$) das Aggregat der Glieder erster Dimension für $\overline{\text{Atr}}(\varepsilon u_0, u, v, \varepsilon w)$ angegeben ist. Dieses ist nämlich:

$$(\overline{\mathfrak{A}})\qquad \frac{2\varepsilon\tau\pi i}{uv} + \frac{1}{3v^2}\,\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}.$$

Genau denselben Ausdruck findet man aber als das Aggregat der Glieder nullter Dimension von:

$$\frac{\partial\,\overline{\text{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0},$$

und es bildet somit der Ausdruck:

$$(\overline{\mathfrak{A}_1}) \quad \tfrac{1}{2}(u_0', - u_0)(2\varepsilon u + u_0' + u_0)\left\{\frac{2\varepsilon\tau\pi i}{v(v\sigma + w\tau)} + \frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}\right\}$$

das gesuchte Aggregat der Glieder zweiter Dimension in der Entwickelung von $\log \mathrm{atr}(\varepsilon u, u_0', u_0, v, \varepsilon w)$ nach steigenden Potenzen von $\sigma, \tau, \sigma_0, \tau_0, \sigma_0', \tau_0'$.

Der Schluss von der Atropie des hier erlangten Ausdrucks $(\overline{\mathfrak{A}_1})$ auf die Legendre'sche Relation kann in folgender Weise formulirt werden. Die bezeichnete Atropie ist vollkommen gleichbedeutend mit der Isotropie der beiden Ausdrücke:

$$-\frac{2\varepsilon\tau\pi i}{v(v\sigma + w\tau)}, \quad \frac{1}{3v^2}\,\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)};$$

dieselben gehen, wenn man:

$$\sigma, \; \tau, \quad v, \; w$$

durch:

$$-\tau, \; \sigma, \; -w, \; v$$

ersetzt, über in:

$$\frac{2\varepsilon\sigma\pi i}{w(v\sigma + w\tau)}, \quad \frac{1}{3w^2}\,\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{-\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{-\varepsilon v}{w}\right)},$$

und da beide, als »isotrop«, bei diesem Übergange dieselbe Änderung erfahren müssen, so muss die Gleichung bestehen:

$$\frac{1}{3w^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{-\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{-\varepsilon v}{w}\right)} - \frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = 2\varepsilon\pi i\left(\frac{\sigma}{w(v\sigma + w\tau)} - \frac{\tau}{v(v\sigma + w\tau)}\right),$$

durch welche die Legendre'sche Relation genau in derselben Form wie im art. I (6) dargestellt wird.

Da sich oben der Ausdruck $(\overline{\mathfrak{A}})$ für das Aggegrat der Glieder nullter Dimension ergeben hat, welche in der Entwickelung von:

$$\frac{\partial\, \overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u_0}$$

oder, was dasselbe ist, von:

$$-\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma-m\tau)2\pi i}}{(u_0+mv+nw)^2}\qquad\begin{pmatrix}m=0,\pm 1,\pm 2,\dots\pm M\\ n=0,\pm 1,\pm 2,\dots\pm N\end{pmatrix}$$

nach steigenden Potenzen von $\sigma, \tau, \sigma_0, \tau_0$ vorkommen, so resultirt die Grenzwerthbestimmung:

$$66)\quad \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{\cos(n\sigma-m\tau)2\pi}{(mv+nw)^2}=-\frac{1}{3v^2}\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}-\frac{2\varepsilon\pi i}{v}\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\frac{\tau}{v\sigma+w\tau}.$$

$$(m=\pm 1,\pm 2,\dots\pm M;\ n=\pm 1,\pm 2,\dots\pm N)$$

Vergleicht man dieselbe mit derjenigen, welche im art. VI (36) angegeben ist, nämlich:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^2}=\frac{-1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}\qquad\begin{pmatrix}m=\pm 1,\pm 2,\dots\pm M\\ n=\pm 1,\pm 2,\dots\pm N\end{pmatrix},$$

so gelangt man zu der Relation:

$$\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{\cos(n\sigma-m\tau)2\pi}{(mv+nw)^2}=\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^2}-\frac{2\varepsilon\pi i}{v}\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\frac{\tau}{v\sigma+w\tau},$$

$$(m=\pm 1,\pm 2,\dots\pm M,\ n=\pm 1,\pm 2,\dots\pm N)$$

welche die Verschiedenheit der Resultate bei den verschiedenen Weisen des Grenzübergangs deutlich zeigt, da hiernach der Werth der Reihe:

$$\sum_{m,n}\frac{\cos(n\sigma-m\tau)2\pi}{(mv+nw)^2}\qquad\begin{pmatrix}m=\pm 1,\pm 2,\dots\pm M\\ n=\pm 1,\pm 2,\dots\pm N\end{pmatrix}$$

sich für die Grenzwerthfolge:

$$\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}$$

um den Betrag von:

$$\frac{2\varepsilon\pi i}{v}\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}\frac{\tau}{v\sigma+w\tau}$$

geringer erweist, als bei der Grenzwerthfolge:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}}.$$

Da ferner die Reihe auf der linken Seite der Relation (67) für die ganze Classe von Grössensystemen:

$$(\alpha\sigma+\beta\tau,\ \alpha'\sigma+\beta'\tau,\ \beta'v-\alpha'w,\ -\beta v+\alpha w)\qquad(\alpha\beta'-\alpha'\beta=1),$$

welche durch verschiedene Wahl der ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ entstehen, invariant oder atrop ist, so wird durch eben dieselbe Relation auch die Isotropie der beiden Ausdrücke:

$$\frac{2\varepsilon\pi i}{v}\cdot\frac{\tau}{v\sigma+w\tau},\quad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^2}\qquad\begin{pmatrix}m=\pm1,\pm2,\ldots\pm M\\ n=\pm1,\pm2,\ldots\pm N\end{pmatrix}$$

dargelegt, und aus dieser folgt wegen der Identität:

$$\frac{2\varepsilon\pi i}{\beta'v-\alpha'w}\cdot\frac{\alpha'\sigma+\beta'\tau}{v\sigma+w\tau}-\frac{2\varepsilon\pi i}{v}\cdot\frac{\tau}{v\sigma+w\tau}=\frac{2\varepsilon\alpha'\pi i}{v(\beta'v-\alpha'w)}$$

ganz unmittelbar die Legendre'sche Relation in jener allgemeinen Form, in welcher sie sich schon im art. VII (40) ergeben hat.

X.

Die Isotropie der beiden Ausdrücke:

$$\frac{2\varepsilon\pi i}{v}\cdot\frac{\tau}{v\sigma+w\tau},\quad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^2}\qquad\begin{pmatrix}m=\pm1,\pm2,\ldots\pm M\\ n=\pm1,\pm2,\ldots\pm N\end{pmatrix}$$

oder:

$$\frac{2\varepsilon\pi i}{v}\cdot\frac{\tau}{v\sigma+w\tau},\qquad -\frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

aus welcher die Legendre'sche Relation unmittelbar hervorgeht, ist ihrerseits, wie schon in der Einleitung erwähnt worden, eine unmittelbare Consequenz der Atropie von $\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)$, da der Ausdruck:

$$\frac{1}{3v^2}\cdot\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}+\frac{2\varepsilon\pi i}{v}\cdot\frac{\tau}{v\sigma+w\tau}$$

als Aggregat der Glieder nullter Dimension in der Entwickelung von:

$$\frac{\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)}{\varepsilon u+u_0}$$

nach steigenden Potenzen von σ, τ, σ_0, τ_0 erscheint. Nun ist zwar die Atropie der Function $\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)$ oder der mit $\mathrm{Ser}(u, u_0, v, w)$ bezeichneten Reihe:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma-m\tau)2\pi i}}{u_0+mv+nw}\qquad\begin{pmatrix}m=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm M\\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots\pm N\end{pmatrix}$$

im art. XXI meiner Mittheilungen zur Theorie der elliptischen Functionen in einfacher Weise und namentlich im letzten Paragraphen (§ 10) mittels weniger übersichtlicher Schlussfolgerungen dargethan worden, aber weder in der Form der Reihe noch in der Darstellung durch ϑ-Functionen:

$$\frac{1}{v}e^{\frac{2\tau u_0 \pi i}{v}}\frac{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{\varepsilon u+u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{\varepsilon u}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

tritt die Atropie der Function $\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)$ geradezu in Evidenz. Dies ist freilich bei jener schon oben im art. VIII (45*) erwähnten Darstellung durch die Invarianten $\mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w)$ der Fall, gemäss welcher $\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)$ durch den Ausdruck:

$$e^{(\sigma_0\tau-\sigma\tau_0)\varepsilon\pi i}\frac{\mathrm{Atr}'(0, v, \varepsilon w)\,\mathrm{Atr}(\varepsilon u+u_0, v, \varepsilon w)}{\mathrm{Atr}(\varepsilon u, v, \varepsilon w)\,\mathrm{Atr}(u_0, v, \varepsilon w)}$$

dargestellt wird, jedoch nur insofern dabei die Atropie der Function $\mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w)$ vorausgesetzt wird; diese beruht aber wegen der Gleichung:

$$\mathrm{Atr}(u, v, \varepsilon w) = (2\pi)^{\frac{1}{3}}\left(\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)\right)^{-\frac{1}{3}}\vartheta\left(\frac{u}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)e^{\frac{\tau u\varepsilon\pi i}{v}}$$

auf eben jener mit der LEGENDRE'schen aequivalenten Relation, welche zwischen linear transformirten ϑ-Functionen besteht.

Dem hier hervorgehobenen Mangel wird durch jene Darstellung des absoluten Werthes von $\vartheta'(0)$ abgeholfen, welche ich schon im art. III meiner Mittheilungen »zur Theorie der elliptischen Functionen« angegeben habe.[1] Setzt man, wie dort:

$$(68)\qquad w_1 = \frac{-b_0+i}{2c_0},\quad w_2 = \frac{b_0+i}{2c_0},\quad a_0 = \frac{b_0^2+1}{4c_0},$$

wo a_0, b_0, c_0 reelle Grössen bedeuten, so sind $w_1 i, w_2 i$ conjugirte complexe Grössen, und das Product $\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)$ ist also gleich dem Quadrate des absoluten Werthes jedes der beiden Factoren. Setzt man nun noch, wie a. a. O. zur Abkürzung:

$$(68^*)\qquad a_0m^2+b_0mn+c_0n^2 = f(m, n),$$

so besteht die Gleichung:

$$(69)\qquad \vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2) = 4\pi^2(\sqrt{c_0})^3\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}f(m, n)\,e^{-\pi f(m,n)},$$

in welcher die Summation rechts auf alle positiven und negativen ganzzahligen Werthe von m, n auszudehnen ist. Erhebt man auf

[1] Sitzungsbericht vom 19. April 1883. XX.

beiden Seiten zum Quadrat und ersetzt dann den reciproken Werth von c_0 durch $-i(w_1+w_2)$, so kommt:

$$(70)\quad (iw_1+iw_2)^3\big(\vartheta'(0,w_1)\vartheta'(0,w_2)\big)^2 = -16\pi^4\Big(\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}f(m,n)e^{-\pi f(m,n)}\Big)^2,$$

und die in dieser Gleichung vorkommenden Grössen können in folgender Weise definirt werden. Es ist erstens:

$$f(m,n) = a_0m^2 + b_0mn + c_0n^2,$$

wo a_0, b_0, c_0 irgend welche reelle, der Bedingung $4a_0c_0 - b_0^2 = 1$ genügende Grössen bedeuten. Zweitens sind w_1 und $-w_2$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$a_0 + b_0w + c_0w^2 = 0.$$

Nimmt man nun an Stelle von a_0, b_0, c_0 beziehungsweise die drei allgemeineren Ausdrücke:

$$a_0\alpha^2+b_0\alpha\alpha'+c_0\alpha'^2,\quad 2a_0\alpha\beta+b_0(\alpha\beta'+\alpha'\beta)+2c_0\alpha'\beta',\quad a_0\beta^2+b_0\beta\beta'+c_0\beta'^2,$$

in denen $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ beliebige, der Bedingung $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$ genügende ganze Zahlen bedeuten, so behält die Reihe auf der rechten Seite von (70) offenbar ihren Werth, während w_1 und $-w_2$ die Bedeutung als Wurzeln der allgemeineren Gleichung:

$$(71)\qquad a_0+b_0\frac{\alpha'+\beta'w}{\alpha+\beta w}+c_0\left(\frac{\alpha'+\beta'w}{\alpha+\beta w}\right)^2=0$$

erhalten, und es tritt also durch die Gleichung (70) die Atropie des Ausdrucks:

$$(iw_1+iw_2)^3\big(\vartheta'(0,w_1)\vartheta'(0,w_2)\big)^2$$

für die Wurzeln $w_1, -w_2$ aller der verschiedenen Gleichungen (71) in Evidenz.

Aus eben dieser Atropie folgt, wenn man das eine Mal:

$$\alpha=\beta'=1,\quad \alpha'=\beta=0,$$

das andere Mal:

$$\alpha=\beta'=0,\quad \alpha'=1,\quad \beta'=-1$$

nimmt, dass der absolute Werth des Ausdrucks:

$$(iw)^3\frac{\big(\vartheta'(0,w)\big)^2}{\Big(\vartheta'\Big(0,-\frac{1}{w}\Big)\Big)^2}$$

gleich Eins ist, und hieraus folgt ferner, dass das Quadrat des Ausdrucks selbst gleich Eins ist, d. h. dass die Gleichung besteht:

$$(72)\qquad \Big(\vartheta'\Big(0,-\frac{1}{w}\Big)\Big)^4 = -w^6\big(\vartheta'(0,w)\big)^4.$$

Denn wenn man eine Gleichung:

$$|\phi(x+yi)| = 1 \text{ oder } \phi(x+yi)\,\phi(x-yi) = 1$$

das eine Mal nach x, das andere Mal nach y logarithmisch differentiirt, so zeigt sich unmittelbar, dass $\phi(x+yi)$ constant und also, absolut genommen, gleich Eins sein muss. Dass endlich durch logarithmische Differentiation der Gleichung (72) die Legendre'sche Relation in der Form:

$$(73) \qquad w\,\frac{\vartheta'''(0,w)}{\vartheta'(0,w)} - \frac{1}{w}\,\frac{\vartheta'''\left(0,-\frac{1}{w}\right)}{\vartheta'\left(0,-\frac{1}{w}\right)} = -6\pi i$$

entsteht, ist schon oben im art. IV bemerkt worden.

Es erscheint aber von grösserem Interesse, dass die Gleichung (73) sich in ähnlicher Weise wie die Gleichung (72), aus welcher sie hier durch logarithmische Differentiation hergeleitet worden ist, auf directem Wege ergiebt, wenn man die Differentiation an der Gleichung (70) ausführt.

Um dies näher darzulegen, gehe ich von der Gleichung aus:

$$-e^{\tau^2(w_1+w_2)\pi i}\,\vartheta(\sigma+\tau w_1, w_1)\,\vartheta(\sigma-\tau w_2, w_2)$$
$$= |\sqrt{c_0}|\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}\,e^{-\pi f(m,n)+2(m\sigma+n\tau)\pi i},$$

aus welcher in dem oben erwähnten art. III meiner Mittheilungen zur Theorie der elliptischen Functionen jene Gleichung (69) hervorgegangen ist. Setzt man $\sigma = \tau = 0$, so kommt:

$$(74) \qquad \sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}\,e^{-\pi f(m,n)} = 0 \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

und diese Gleichung ist nun ebenso wie die obige Gleichung (70) nach w_1 und w_2 zu differentiiren. Ich stelle hierfür zuvörderst einige dazu nothwendige Relationen zusammen:

$$f(m,n) = c_0(n-mw_1)(n+mw_2),$$

$$\frac{\partial f(m,n)}{\partial w_1} = \frac{if^2}{(n-mw_1)^2}, \quad \frac{\partial f(m,n)}{\partial w_2} = \frac{if^2}{(n+mw_2)^2},$$

$$c_0(w_1+w_2) = i, \quad \frac{\partial c_0}{\partial w_1} = ic_0^2, \quad \frac{\partial^2 c_0}{\partial w_1\,\partial w_2} = -2c_0^3,$$

$$\frac{\partial^2 f(m,n)}{\partial w_1\,\partial w_2} = -2c_0^2 f(m,n), \quad \frac{\partial f(m,n)}{\partial w_1}\,\frac{\partial f(m,n)}{\partial w_2} = -c_0^2 f^2(m,n).$$

Mit Hülfe derselben erhält man als Resultat der Differentiation von (74) nach w_1 und w_2 die Gleichung:

$$(75) \quad \pi\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)} f^2(m,n)\,e^{-\pi f(m,n)} = 2\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)} f(m,n)\,e^{-\pi f(m,n)}.$$

Man findet ferner, wenn man die Reihe:

$$\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)} f(m, n)\, e^{-\pi f(m,n)}$$

nach w_1 und w_2 differentiirt, das Resultat:

$$c_0^2 \sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)} \left(-2f(m,n) + 4\pi f^2(m,n) - \pi^2 f^3(m,n)\right) e^{-\pi f(m,n)},$$

welches mittels der Gleichung (75) sich auf folgendes reducirt:

$$c_0^2 \sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)} \left(6f(m, n) - \pi^2 f^3(m, n)\right) e^{-\pi f(m,n)}.$$

Andererseits ergiebt die Differentiation des Ausdrucks:

$$c_0^{-\frac{3}{2}} \vartheta'(0, w_1)\, \vartheta'(0, w_2)$$

nach w_1 und w_2 das Resultat:

$$-\frac{9}{16\pi^2} \cdot c_0^{-\frac{3}{2}} \vartheta'(0, w_1)\, \vartheta'(0, w_2) \cdot c_0^2 \left[\left(\frac{\vartheta'''(0, w_1)}{3c_0 \vartheta'(0, w_1)} + 2\pi\right)\left(\frac{\vartheta'''(0, w_2)}{3c_0 \vartheta'(0, w_2)} + 2\pi\right) - \frac{8}{3}\pi^2\right]$$

und die Differentiation der Gleichung (69) nach w_1 und w_2 führt also zu dem Ergebniss, dass das Product:

$$(76) \qquad \left(\frac{\vartheta'''(0, w_1)}{3c_0 \vartheta'(0, w_1)} + 2\pi\right)\left(\frac{\vartheta'''(0, w_2)}{3c_0 \vartheta'(0, w_2)} + 2\pi\right),$$

oder, was dasselbe ist, das Quadrat des absoluten Werthes jedes der beiden Factoren in der Form:

$$(77) \qquad -8\pi^2 + \frac{16\pi^4}{9} \frac{\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)} f^3(m, n)\, e^{-\pi f(m,n)}}{\sum_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)} f(m, n)\, e^{-\pi f(m,n)}}$$

darstellbar ist, in welcher die Invarianteneigenschaft von:

$$(78) \qquad \left|\frac{\vartheta'''(0, w)}{3c_0 \vartheta'(0, w)} + 2\pi\right|^2$$

evident wird.

Da gemäss eben dieser Invarianteneigenschaft, für den Fall $b_0 = 0$ also $w = \frac{i}{2c_0}$, die Gleichung:

$$iw \frac{\vartheta'''(0, w)}{\vartheta'(0, w)} - 3\pi = \pm \left[\frac{1}{iw} \frac{\vartheta'''\left(0, -\frac{1}{w}\right)}{\vartheta'\left(0, -\frac{1}{w}\right)} - 3\pi\right]$$

bestehen und dabei das untere Zeichen gelten muss, weil sonst, wie die Integration ergiebt, das Product $\vartheta'(0,w)\vartheta'\left(0,-\frac{1}{w}\right)$ von w unabhängig sein müsste, so resultirt unmittelbar, zuvörderst nur für reelle Werthe von iw, die LEGENDRE'sche Relation in der obigen Form (73):

$$w\frac{\vartheta'''(0,w)}{\vartheta'(0,w)}-\frac{1}{w}\frac{\vartheta'''\left(0,-\frac{1}{w}\right)}{\vartheta'\left(0,-\frac{1}{w}\right)}=-6\pi i,$$

alsdann aber folgt in bekannter Weise, dass die Gleichung auch für complexe Werthe von iw gültig bleiben muss.

Nimmt man die Gleichung in der LEGENDRE'schen Form:

$$K'E+KE'-KK'=\tfrac{1}{2}\pi,$$

und setzt ihre Gültigkeit nur für den Fall reeller Werthe von x^2 und x'^2 voraus, so kann man auch die Entwickelung nach steigenden Potenzen von x^2 benutzen, um die Gültigkeit für complexe Werthe von x^2 zu erschliessen. Überhaupt kann in einer nach steigenden Potenzen einer Variabeln z fortschreitenden und für alle Werthe $|z|<1$ convergenten Reihe an Stelle von z eine ganze Function von n Variabeln $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ genommen und alsdann die Reihe im Sinne der Congruenz für ein Modulsystem $n$ter Stufe $(M', M'', M''', \ldots)$ betrachtet werden, sobald der absolute Werth der Resultante der $n+1$ oder mehr Functionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$f, M', M'', M''', \ldots,$$

der Convergenzbedingung gemäss, kleiner als Eins ist. Der bisher immer nur betrachtete Fall einer complexen Variabeln $z_1+z_2 i$ tritt ein, wenn sich das Modulsystem auf den einen Modul x_1^2+1 reducirt und für z die lineare Function $z_1+z_2 x_1$ genommen wird.

(Fortsetzung folgt.)

21. Untersuchungen über die sogenannten leuchtenden Wolken.

Von O. Jesse
in Steglitz.

(Vorgelegt von Hrn. von Bezold am 28. Mai; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXVI]; — ausgegeben am 4. Juni.

(Fortsetzung.)

Hinsichtlich der am Schlusse meines ersten Berichtes bereits in Kürze erwähnten Ergebnisse des Sommers 1890 habe ich zunächst eingehender mitzutheilen, dass es in der That mit Hülfe der vorjährigen Bewilligung der Akademie der Wissenschaften gelungen ist, während der vorjährigen Erscheinungszeit der Wolken ein sehr reiches Material an photographischen Aufnahmen derselben zu sammeln.

Die Wolken haben sich auch diesmal wieder ausschliesslich in der Zeit zwischen Ende Mai und Anfang August gezeigt und zwar zum ersten Mal am 26. Mai, zum letzten Mal, nur in ganz schwacher Spur, zu Anfang August, also innerhalb nahezu vier Wochen auf beiden Seiten der Sommer-Sonnenwende, jedoch etwas vorwaltend nach derselben.

Seit meinem vorjährigen Berichte sind mir auch weitere Bestätigungen darüber zugekommen, dass auf der Südhalbkugel die Erscheinungszeit entsprechend zur dortigen Sommer-Sonnenwende liegt. Leider fehlen aber immer noch genauere Orts-Bestimmungen u. s. w. von der Südhalbkugel.

In der Zeit vom 26. Mai bis 24. Juli 1890 sind uns in Steglitz, Rathenow, Nauen und auf der Sternwarte der Urania in Berlin zusammen 180 photographische Aufnahmen der leuchtenden Wolken gelungen. Von diesen sind etwa 75 zur Höhenbestimmung geeignet, insofern sie in identischen Zeitpunkten an mindestens zwei verschiedenen Beobachtungsorten erlangt sind. Weitere 30 Aufnahmen sind zu Bestimmungen der Geschwindigkeiten und Richtungen der Bewegungen der Wolken brauchbar, weil sie in geeigneten Zeiträumen aufeinander folgende Darstellungen der Wolken an einem und demselben Beobachtungsorte enthalten. Die übrigen Aufnahmen sind zu Untersuchungen über die räumlichen Ausdehnungen der Wolken und die Structur derselben brauchbar.

Die Helligkeit der Erscheinung war im Sommer 1890 wiederum gegen das Vorjahr deutlich vermindert. Nur bei einigen ausserordentlich durchsichtigen Luftzuständen trat eine Annäherung an den früheren Glanz hervor. Offenbar werden die Ansammlungen dieser Massentheilchen immer dünner, was man auch an dem deutlicheren Hervortreten gewisser Structurverhältnisse, wie der im vorigen Berichte bereits erwähnten Grat- und Rippen-Bildungen (Wellenbildungen) wahrnehmen kann. Früher waren dieselben durch die Fülle übereinander liegender und in einander übergehender ähnlicher Bildungen gewissermaassen verdeckt, jetzt treten die charakteristischen Linien der Configurationen bestehend in jenen Grat- und Rippen-Bildungen einfacher und gesonderter hervor.

Es ist nunmehr gelungen nachzuweisen, was in dem vorigen Berichte nur angedeutet werden konnte, dass die Grate oder Längenstreifen parallel der Bewegungsrichtung der ganzen Wolke, die Rippen oder Querstreifen nahezu rechtwinklig dazu liegen. Ferner sind mehrere Reihen von Messungen der Abstände der Rippen (Wellenkämme) von einander an verschiedenen Tagen ausgeführt worden. Es haben sich dabei folgende Gruppen von Resultaten ergeben:

Mittelwerth	aus	Abständen	von	9	Wellenkämmen	8^{km}.3
»	»	»	»	10	»	9.9
»	»	»	»	10	»	8.4
					durchschnittlich	8.9.

Besonders auffallend ist im letzten Sommer der Unterschied gewesen zwischen der Helligkeit, mit welcher die Wolken in den Morgenstunden auftreten und derjenigen Helligkeit, mit welcher sie in den entsprechenden Zeiten vor Mitternacht erscheinen.

Für die Höhe der leuchtenden Wolken hat sich im Sommer 1890, soweit die Messungen definitiv berechnet sind, der Mittelwerth von 82^{km} ergeben, fast genau übereinstimmend mit dem aus meinen Aufnahmen von 1889 abgeleiteten Werthe von nahezu 83^{km}.

Die hiermit zum ersten Male in hinreichender Strenge nachgewiesene Beständigkeit dieses Abstandes, also der Lage der Niveaufläche der Erscheinung von einem Jahr zum andern, dürfte allein schon eine wissenschaftliche Thatsache von grosser Bedeutung sein.

Was nun die Geschwindigkeiten und Richtungen der Bewegungen betrifft, so hat sich auch diesmal wieder gezeigt, dass die Haupt-Componente der Bewegung von Ost nach West gerichtet ist und nahezu 100^m in der Secunde beträgt, während die Drehungsgeschwindigkeit der bezüglichen Zone der Erde, über welcher die Wolken sich befanden, von West nach Ost sich auf etwa 240^m in der Secunde stellt.

Ausserdem ist eine kleinere und veränderliche Componente in der Richtung des Meridians vorhanden gewesen, welche an den Tagen und in den Tageszeiten, aus denen bis jetzt leidlich sichere Bewegungsbestimmungen vorliegen, von Nord nach Süd gerichtet gewesen ist.

Die Gesichtspunkte, von denen aus die Erscheinung der leuchtenden Wolken auf Grund der bisherigen Beobachtungen zu betrachten ist, sind bereits recht vielseitig. Gleichwohl bietet sich noch ein weites Forschungsgebiet dar, besonders in Bezug auf die Fragen, welche Kräfte es sind, die das vorwiegende Auftreten des Phaenomens in den Morgenstunden veranlassen, ferner welcher Art diejenigen Kräfte sind, durch welche die vorwiegende Bewegung der Wolken am Nordost und die Verschiebung von der nördlichen nach der südlichen Halbkugel der Erde und wieder zurück hervorgebracht wird. Dann ist die Frage über die Höhe des Phaenomens in verschiedenen Breiten der Erde eine für die Constitution unserer Atmosphaere wahrscheinlich hoch bedeutsame und nicht minder ist die Frage über die Stoffe, aus denen die leuchtenden Wolken sich zusammensetzen, von hohem Interesse. — Bedauerlicherweise ist die Antheilnahme der wissenschaftlichen Welt an diesem merkwürdigen Phaenomen im Allgemeinen eine so geringe, dass bei der voraussichtlich nur noch kurzen Dauer desselben kaum erwartet werden kann, für diese Fragen einigermaassen befriedigende Lösungen zu erhalten.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

INHALTSVERZEICHNISS.

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE

aus den Jahren 1888, 1889, 1890.

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissensch wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden zuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher ang des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Ausz Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEI

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAF

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebie Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturw in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitglied fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Au Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adr und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres heften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesell Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständigen berichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht

---

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Natur Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal,
die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,
» » » Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,
» » » October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1890 nicht zugekommen sein sollten, hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Recla Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1891 angebr

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des buch zuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Georg Reimer in Berlin erscheinen in wöchentlichen

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 *M.*

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEI

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTE

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 *M.*

Georg Reimer's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Sch der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, die Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstk Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mi Buchhandlung in Verbindung setzen.

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT VI.

JUNI 1891.

MIT TAFEL III UND IV.

BERLIN 1891.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.

22. Das Eisenspectrum als Vergleichsspectrum bei spectrographischen Aufnahmen zur Bestimmung der Bewegung der Sterne im Visionsradius.

Von H. C. Vogel
in Potsdam.

(Vorgelegt von Hrn. Auwers am 14. Mai; — gedruckt im Bericht vom 4. Juni [St. XXVIII]; — ausgegeben am 11. Juni.)

In den Sitzungsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften vom 15. März 1888 haben meine ersten Beobachtungen Aufnahme gefunden, durch welche die Möglichkeit dargethan war, für die Bewegung der Sterne im Visionsradius auf spectrographischem Wege Anhaltspunkte von grösserer Sicherheit zu gewinnen, als mit übrigens gleichen instrumentellen Mitteln durch directe Beobachtungen erreichbar war. Die Vermuthungen, welche nach diesen ersten Resultaten mit einem provisorisch zusammengesetzten Apparate über die zu erlangende Genauigkeit in der Bestimmung der Bewegung der Sterne gehegt wurden, sind im Laufe der Zeit nicht nur bestätigt, sondern in hohem Maasse übertroffen worden.

Die durch die spectrographischen Bestimmungen jetzt erlangte genauere Kenntniss der Bewegungen der helleren Sterne am nördlichen Himmel bestätigt die früheren, durch directe Beobachtungen erhaltenen Resultate im allgemeinen, soweit es sich um die Richtung der Bewegung handelt, hat aber zu einer wesentlichen Berichtigung der durch die früheren Bestimmungen erzeugten Vorstellung von der Grösse derselben geführt, welche durchschnittlich bei der directen Beobachtung sehr stark überschätzt worden ist.

Ich habe in den Astr. Nachrichten Nr. 2896 die Construction des Apparates, mit welchem definitive Bestimmungen ausgeführt worden sind, näher angegeben; daselbst ist auch eine Beschreibung der Methode der Ausmessung der Photogramme von Sternspectren, die der zweiten Classe angehören, gegeben worden. Es stellte sich nämlich bei der Fortführung der Untersuchungen sehr bald heraus, dass die Genauigkeit der Resultate von der Art und Weise, wie die Photogramme ausgemessen werden, sehr wesentlich abhängt, und ich habe in

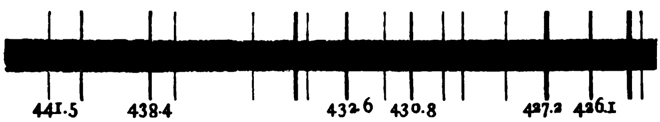
Folge dessen ganz besonderes Gewicht auf die Ermittelung der vortheilhaftesten Methode der Ausmessung gelegt. Grosse Schwierigkeiten boten anfänglich in dieser Hinsicht die Sterne der ersten Spectralclasse mit breiten Wasserstofflinien; doch gelang es auch hier durch ein sehr einfaches, von mir in den Astr. Nachr. Nr. 2995 bei Gelegenheit der Mittheilung der Beobachtungen von α Virginis beschriebenes Verfahren, welches gleichzeitig den Beobachter möglichst vor Voreingenommenheit schützt, den Messungen einen Genauigkeitsgrad zu geben, der dem bei den Sternen der zweiten Spectralclasse erreichbaren recht nahe kommt. Bei allen diesen Untersuchungen hat das Wasserstoffspectrum bez. die $H\gamma$-Linie als Ausgangspunkt der Messungen gedient.

Schon bei den ersten Aufnahmen mit dem neuen Spectrographen im Herbst des Jahres 1888 wurde der Versuch gemacht, ausser dem Wasserstoffspectrum ein anderes Vergleichsspectrum zu benutzen, und es lag nahe das leichtflüchtige Magnesium zu wählen, da in einer grossen Anzahl von Sternspectren die Mg-Linie (Wellenlänge 448 $\mu\mu$) sehr deutlich und scharf ausgeprägt ist und dieselbe nicht zu weit von der Mitte des in dem Spectrographen abgebildeten Theile des Spectrums liegt. Der Versuch fiel aber in sofern nicht befriedigend aus, als die künstlich erzeugte Mg-Linie beim Überschlagen des Funkens in freier Luft breit und verwaschen ist und sich zu einer genauen Messung nicht eignet. Die Versuche wurden zu Anfang dieses Jahres mit verschiedenen Modificationen wiederholt, aber mit demselben negativen Erfolge. Recht brauchbar als Vergleichsspectrum hat sich dagegen das Eisenspectrum gezeigt. Die Linien desselben sind scharf und in der Gegend der $H\gamma$-Linie und der Mg-Linie (448 $\mu\mu$) nicht zu zahlreich, so dass für Sterne, in deren Spectrum ausser der Wasserstofflinie nur die genannte Magnesiumlinie sichtbar ist, ein sicherer Anschluss einiger Fe-Linien an die Mg-Linie gewonnen werden kann. Bei den helleren Sternen der ersten Spectralclasse aber, bei welchen im Spectrum ausser der Wasserstofflinie noch eine grosse Anzahl feiner Linien sichtbar ist, die zumeist dem Eisen angehören, schien die Vermuthung berechtigt, durch Anschluss an eine Aufnahme des Eisenspectrums eine erhöhte Genauigkeit in der Ermittelung der Bewegung der Sterne im Visionsradius erzielen zu können. Hierzu ist eine Anordnung erforderlich, dass die Linien des Eisenspectrums das Sternspectrum nicht durchsetzen, wie ich diess bei der Wasserstofflinie für zweckmässig gefunden habe, sondern auf jeder Seite nur bis an den Rand des Sternspectrums reichen. Es lässt sich diess dadurch ermöglichen, dass man während der Aufnahme des Fe-Spectrums die Stelle des Spaltes, auf welche das Bild des Sterns fällt, durch einen schmalen Steg abdeckt. Im andern Falle steht zu befürchten, dass bei geringen Verschiebungen der Spectrallinien des Sterns gegen die Linien des künstlichen Spectrums die letzteren den feinen Linien im Sternspectrum zu nahe kommen oder sie gar überdecken, so dass eine sichere Messung ausgeschlossen ist.

Bei den hier gemachten Beobachtungen an Sirius befanden sich die Fe-Elektroden (Claviersaitendraht) in einem Abstande von 35^{cm} vom Spalt; dieselben waren so justirt, dass der Funke genau in der optischen Axe des Collimators auf geringe Entfernung (2^{mm} bis 3^{mm}) übersprang. Zur Elektricitätserregung diente ein grosser Ruhmkorff-scher Apparat mit 4 Leydener Flaschen. Eine Exposition von 25^{s} genügte, um die hauptsächlichsten Fe-Linien zu erhalten.

Es haben ferner die Punkte Berücksichtigung gefunden, welche zur Erreichung sicherer Messungen unerlässlich sind, und auf welche ich früher wiederholt aufmerksam gemacht habe, dass nämlich das Vergleichsspectrum in der Lage des Fernrohrs, welche das letztere auf den Stern gerichtet hat, aufzunehmen ist, und dass die Mittel aus den Expositionszeiten für Stern- und Metallspectrum möglichst zusammenfallen, um Veränderungen der Durchbiegung im Apparate und Veränderungen in der Dispersion durch Temperatur zu umgehen, bez. für die Messungen unschädlich zu machen.

Der folgende Holzschnitt gibt ein möglichst getreues Bild (Negativ) eines Theils des Siriusspectrums mit den Hauptlinien des Eisenspectrums nach den hier gemachten Beobachtungen vom 22. März 1891. Derselbe ist nach einer vergrösserten Copie der Originalaufnahme angefertigt worden. Ausser den Linien des Eisenspectrums ist noch die künstliche, das Sternspectrum durchschneidende Wasserstofflinie Hγ sichtbar. Alle Linien im Sternspectrum zeigen gegen die entsprechenden Linien des künstlich erzeugten Eisenspectrums eine geringe Verschiebung nach Roth.



Die Ausmessungen der Platten unter dem Mikroskop haben zu folgenden Resultaten geführt.

März 21 1891
Platte Nr. 246
Expos. Zeit für ✳ = 48^{m}
für Fe-Sp. = 25^{s}

λ	Δ
426.1	$0^{R}.070$ (1)
428.3	0.064 (1)
429.5	0.044 (2)

März 21 1891
Platte Nr. 247
Expos. Zeit für ✳ = 15^{m}
zwischen Wolken, für Fe-Sp. = 60^{s}

λ	Δ
428.3	$0^{R}.026$ (1)
429.5	0.044 (2)
430.0	0.037 (2)

März 22 1891
Platte Nr. 248
Expos. Zeit für ✳ = 36^{m}
für Fe-Sp. = 25^{s}

λ	Δ
426.1	$0^{R}.036$ (2)
427.2[1]	0.042: (2/3)
	0.036 (1)

430.8	0.056 (2)	430.8[3]	—	428.3	0.047 (1)
432.6	0.049 (2)	431.6	0.044 (2)	429.5	0.036 (2)
435.2[2]	0.039 (0)	436.8	0.035 (1)	430.0	0.026 (1)
438.4	0.044 (2)	437.6	0.045 (1)	430.8	0.019 (2)
440.5	0.033 (1)	438.4[4]	—	431.6	0.033: (2/3)
		440.5	0.040 (2)	432.6	0.024 (2)
		441.5	0.033 (1)	438.4	0.027 (2)
		442.3[5]	0.044 (1)	440.5	0.020 (1)
				441.5	0.024: (2/3)

[1] Doppellinie, die erste Componente sehr matt im Sternspectrum. [2] Fraglich, ob Stern- und Fe-Linien zu identificiren sind, Beobachtung deshalb ausgeschlossen. [3] Linie des Fe-Spectrums zu breit und stark für eine sichere Messung. [4] Linien im Fe-Spectrum zu breit und stark, im Stern verwaschen und nicht sicher aufzufassen. [5] Fe-Linie recht schwach.

Die erste Columne gibt die Wellenlänge in Milliontel Millimetern, die zweite die gemessenen Distanzen zwischen den Linien im Sternspectrum und den entsprechenden Linien des Vergleichsspectrums in Schraubenumdrehungen ($1^R = 0^{mm}.25$). Die auf je 4 Einstellungen beruhenden Mittelwerthe der Distanzmessungen haben das Gewicht 1 erhalten. Bei besonders gut zu bestimmenden Linien liegen zwei unabhängig von einander erhaltene Messungsreihen vor; dem Mittel aus diesen Messungen ist das Gewicht 2 beigelegt worden, während bei schwer aufzufassenden Linien den Beobachtungen das Gewicht 2/3 gegeben worden ist.

Bei den Aufnahmen am 21. März sind die Sternspectra schmal, und die Linien des Eisenspectrums reichen nicht bis an die Begrenzung des Sternspectrums. Man stellt daher beim Messen im Sternspectrum auf die Scheitelpunkte der gekrümmten Linien ein, während man im Eisenspectrum die Enden der über und unter dem Sternspectrum gelegenen Bogenstücke geradlinig verbindet, und es ist deshalb eine Correction an die Messungen anzubringen. Als Krümmungsradius der Spectrallinien ergab sich im Mittel aus mehreren Messungen in der Nähe der Hγ-Linie 266^R, und hiermit berechnet sich für den Abstand des Scheitelpunktes von der Mitte der Sehne von $4^R.0$ (Nr. 246) und $3^R.3$ (Nr. 247) Länge die Correction von $0^R.008$ bez. $0^R.005$, die, da der Scheitel nach dem rothen Ende des Spectrums zu gelegen ist und die Verschiebung der Linien im Sternspectrum gegen die Linien des Vergleichsspectrums nach derselben Seite erfolgt, so anzubringen ist, dass alle gemessenen Distanzen um diesen Betrag verkleinert werden. Bei der Aufnahme vom 22. März berühren die Linien des Eisenspectrums die Ränder des Sternspectrums. Es ist bei den Messungen auf die Berührungsstelle eingestellt worden und auf die Linien im Sternspectrum ebenfalls am Rande des Spectrums, so dass keine Correction an die Messungen anzubringen ist.

Der Betrag der linearen Verschiebung ist an den verschiedenen Stellen des prismatischen Spectrums ein anderer für einen gleichen

Wellenlängenunterschied, oder derselben Verschiebung entspricht ein anderer Betrag der Bewegung im Visionsradius. Für die hier in Frage kommenden Wellenlängen ist die Bewegung in geographischen Meilen aus dem folgenden Täfelchen zu entnehmen, welches auf zahlreichen Messungen an Aufnahmen vom Sonnenspectrum mit dem Spectrographen beruht:

$\lambda = 426\mu\mu$	$1^R = 27.5$ geogr. Mln.
428	28.1
430	28.7
432	29.4
434	30.2
436	30.9
438	31.7
440	32.5

Mit dieser Tabelle berechnet sich nach Anbringung der Correction wegen Krümmung der Linien die der Verschiebung entsprechende Bewegung des Sirius wie folgt:

λ	März 21 Nr. 246 Δ (geogr. Mln.)	März 21 Nr. 247 Δ (geogr. Mln.)	März 22 Nr. 248 Δ (geogr. Mln.)
426.1	1.71 (1)	—	0.99 (2)
427.2	—	—	{1.17 (2/3) 1.01 (1)
428.3	1.58 (1)	0.59 (1)	1.33 (1)
429.5	1.03 (2)	1.12 (2)	1.03 (2)
430.0	—	0.92 (2)	0.75 (1)
430.8	1.39 (2)	—	0.55 (2)
431.6	—	1.14 (2)	0.97 (2/3)
432.6	1.21 (2)	—	0.71 (2)
436.8	—	0.94 (1)	—
437.6	—	1.26 (1)	—
438.4	1.15 (2)	—	0.86 (2)
440.5	0.82 (1)	1.14 (2)	0.65 (1)
441.5	—	0.93 (1)	0.79 (2/3)
442.3	—	1.30 (1)	—
Mittel:	1.24	1.05	0.87

Im Mittel aus den drei als gleichwerthig anzusehenden Bestimmungen folgt 1.05 geogr. Meilen, um welchen Betrag sich der Stern in der Secunde, da die Verschiebung der Sternspectrallinien nach Roth erfolgte, von der Erde fort bewegte. Zur Zeit der Beobachtung betrug die Componente der Erdbewegung in der Richtung nach Sirius + 3.01 geogr. Meilen. Für die Bewegung des Sirius gegen die Sonne in der Secunde resultirt demnach 1891 März 22.0:

— 1.96 geogr. Meilen.

Ich lasse hier noch die mit dem Spectrographen erhaltenen Beobachtungen an Sirius, wie sie aus der Messung der Verschiebung in Bezug auf die Wasserstofflinie Hγ gefunden worden sind, folgen.

Tag			Beobachtete Verschiebung Schraub.-Umdr.	Bewegung Sir. gegen ♁ Geogr. Mln.	Red. auf ⊙ Geogr. Mln.	Bewegung Sir. gegen ⊙ Geogr. Mln.
1888	Dec.	1	−0.110	−3.32	+1.64	−1.68
	Dec.	13	−0.103	−3.11	+1.06	−2.05
	„	„	−0.101	−3.05		−1.99
1889	Febr.	10	+0.023	+0.69	−1.95	−1.26
1890	Jan.	29	−0.004	−0.12	−1.42	−1.54
	Febr.	12	+0.022	+0.66	−2.04	−1.38
	„	„	+0.006	+0.18		−1.86
1891	Febr.	7	+0.001	+0.03	−1.81	−1.78
	März	21	+0.032	+0.97	−3.00	−2.03
	März	22	+0.044	+1.33	−3.01	−1.68
					Mittel:	−1.73

Die Übereinstimmung dieses Mittels mit dem oben abgeleiteten Werthe ist eine jedenfalls sehr befriedigende, und ein Vortheil in der Anwendung des Eisenspectrums tritt in diesem Falle kaum hervor, zumal wenn man in Betracht zieht, dass die Beobachtung einen viel grössern Aufwand von physikalischem Apparat erfordert, und dass durch sorgfältige Justirung der Elektroden der Funke möglichst genau in der optischen Axe des Fernrohrs überschlagen muss, während die Befestigung der Geissler'schen Wasserstoffröhre rechtwinklig zur optischen Axe durchaus nicht mit äusserster Exactheit ausgeführt zu werden braucht, wenn der Röhre ausserdem die Stellung rechtwinklig auf die Richtung des Spaltes gegeben wird. Dass der Vortheil in der Anwendung des Eisenspectrums bei Sirius nicht so deutlich hervortritt ist wesentlich in dem Umstande begründet, dass die Linien im Siriusspectrum so überaus fein und zart sind, dass die Einstellung des Mikrometerfadens nicht mit der Sicherheit erfolgen kann, wie bei etwas breiteren und stärkeren Linien, und dass die Aufnahmen vom 21. und 22. März dieses Jahres in Bezug auf die feinen Linien gerade nicht zu den besten gehören, die bisher erhalten worden sind. Besser geeignet dürfte α Cygni sein, in dessen Spectrum die Fe-Linien kräftiger erscheinen.

Der nicht zu unterschätzende Vortheil der Methode besteht hauptsächlich darin, dass jede Linie, verglichen mit der entsprechenden des künstlichen Spectrums, eine Bewegungsbestimmung für sich gibt und dadurch die einzelne Platte mehr Werth erhält, indem man wie bei der Methode, die ich bei den Spectren der zweiten Spectralclasse angewandt habe, durch Messung an mehreren Linien frei wird von zufälligen Unregelmässigkeiten in der photographischen Schicht.

Auch für die Sterne des zweiten Spectraltypus dürfte es sich empfehlen das Eisenspectrum als Vergleichsspectrum zu benutzen, doch ist bei diesen linienreichen Spectren leichter eine Verwechselung zwischen Sternlinie und der entsprechenden künstlichen Linie denkbar als bei den Sternen der ersten Spectralclasse, die vorzugsweise nur

Eisenlinien zeigen, und es ist daher grosse Vorsicht bei der Wahl der Linien nöthig. Diese Vorsicht mag sich auch darauf erstrecken, zur Vergleichung nicht eng stehende Doppellinien von sehr ungleichen Componenten zu wählen, da ich gefunden habe, dass bei der photographischen Aufnahme von Emissionsspectren eine asymmetrische Verbreiterung bei sehr eng stehenden Doppellinien eintritt, in dem Sinne, dass bei längerer Exposition die Mitten der photographirten Linien weiter auseinander rücken, indem die Ausscheidung von Silber an den äusseren Rändern der Linien stärker ist als zwischen den Linien. Bei gleichen Componenten ist diese Eigenthümlichkeit der photographischen Platten unschädlich, wenn man die Messungen auf die Mitte der Doppellinien bezieht. Ein ganz ähnliches Verhalten, wie bei den Emissionsspectren, ist auch bei den Absorptionsspectren, vielleicht aber in geringerm Maasse zu erwarten, und in der That hat sich bei den sehr zahlreichen Messungen in den linienreichen Spectren der Sterne vom zweiten Typus gezeigt, dass stärkere Abweichungen am häufigsten bei engen Doppellinien von ungleichen Componenten anzutreffen sind, so dass bei der Messung immer möglichst isolirt stehende Linien benutzt worden sind.

Schliesslich bemerke ich noch, dass ich mit den hier beschriebenen Untersuchungen an Sirius meine spectrographischen Beobachtungen zur Ermittelung von Bewegungen der Sterne vorläufig abgeschlossen habe; doch hoffe ich dieselben mit kräftigeren optischen Hülfsmitteln bald wieder aufzunehmen im Stande zu sein.

23. Über die Hochgebirgsflora des tropischen Africa.

Von A. Engler.

(Vorgetragen am 11. Juni: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXX]; — ausgegeben am 18. Juni.)

Eine vergleichende Untersuchung der gesammten Hochgebirgspflanzen des abyssinischen Hochlandes, welche von Schimper und Steudner gesammelt wurden, der Flora des Massaihochlandes, der Flora des Kilimandscharo, gesammelt von Johnston, Dr. Hans Meyer, v. Höhnel und Dr. Ehlers, der Flora der Somaligebirge Ahl und Serrut, der Gebirge von Kamerun und Fernando-Po, sowie derjenigen Angolas hat zu folgenden Ergebnissen geführt:

Sämmtliche Hochgebirgsfloren des tropischen Africa zeigen theils Beziehungen zur Flora der unteren Regionen dieses Erdtheils, theils solche zur Flora Arabiens, Vorderindiens, Südafricas und des Mediterrangebiets, im geringen Grade auch solche zur Flora des Himalaya.

Nicht bloss die einzelnen Gebirge verhalten sich im Grade dieser verwandtschaftlichen Beziehungen verschieden, sondern auch die Pflanzen der einzelnen Formationen.

In Abyssinien tritt die Verwandtschaft mit der Hochgebirgsflora Arabiens so in den Vordergrund, dass man die Gebirge des südlichen Arabiens mit dem abyssinischen Hochland in ein Florengebiet vereinigen muss; ebenso schliesst sich die Flora des Massaihochlandes, der Somaligebirge und des Kilimandscharo eng an die abyssinische Hochgebirgsflora an, so dass das ganze von Nordabyssinien bis nach Südafrica reichende Hochland in floristischer Beziehung sich ähnlich verhält, wie die Europa durchquerenden Alpenländer, oder die Südamerica durchziehenden Anden. Die Verschiedenheiten in den einzelnen Theilen dieser ganzen Gebirgsmasse sind nur graduelle. In dem abyssinischen Hochland sind die Beziehungen zur Flora des Mediterrangebietes und des Himalaya stärker als in den übrigen africanischen Hochgebirgen. Auch im Kamerungebirge treten die verwandtschaftlichen Beziehungen zur Flora des Mediterrangebietes in den Vordergrund und zwar hat das Kamerungebirge die mediterranen Elemente nicht bloss mit der abyssinischen Hochgebirgsflora aufgenommen, sondern auch solche direct aus dem westlichen Mediterrangebiet empfangen. In dem Massaihochland treten mehrere südafricanische

Typen auf, welche in Abyssinien und merkwürdiger Weise auch am Kilimandscharo fehlen. In Folge der Verbindung Angolas mit dem ostafricanischen Hochland durch die Hochländer des Massaigebietes hat Angola noch eine sehr grosse Anzahl von Hochgebirgspflanzen mit Abyssinien gemein; anderseits ist es aber reich an südafricanischen Typen. Dagegen ist sowohl hier, wie überhaupt in den tropisch-africanischen Hochgebirgen das eigenthümliche Florenelement des südwestlichen Caplandes nur durch ganz vereinzelte Repräsentanten vertreten. Gänzlich fehlen die *Cunoniaceae*, *Bruniaceae*, *Penaeaceae*, *Verbenaceae-Stilbineae*, *Restionaceae*, *Rutaceae-Diosmeae* (excl. *Calodendron*), *Proteaceae* (excl. *Protea*, *Faurea* und *Leucospermum*), *Muraltia*, *Aspalathus*, *Cliffortia*, *Phylica*; die *Erica* und *Blaeria* sowie auch *Protea* sind aber auf den africanischen Gebirgen viel häufiger vertreten, als man bisher geglaubt hatte.

Ferner fehlen in Abyssinien vollständig die Typen der so charakteristischen mediterranen Gehölze, welche in der pliocänen Periode, zum Theil auch schon früher in Südeuropa ebenfalls vorhanden waren, es fehlen ferner auf allen tropisch-africanischen Hochgebirgen mehrere Familien und Gattungen, welche auf den meisten Gebirgen Eurasiens und Nordamericas, zum Theil auch auf dem Atlas, auf den Gebirgen des indischen Archipels, auf den centralen und südamericanischen Anden vertreten sind; nämlich die *Abietineae*, *Fagaceae*, *Betulaceae*, *Ericaceae* — *Rhododendroideae*, — *Vaccinioideae*, — *Piroloideae*, *Caprifoliaceae*, *Cornaceae*, *Rosaceae* — *Spiraeoideae*, — *Pomariae*, — *Amygdaloideae*, *Coriariaceae*, *Aceraceae*, *Juniperus* Sect. *Oxycedrus*, *Aconitum*, *Aquilegia*, *Draba*, *Evonymus*, *Gaura*, *Ribes*, *Chrysosplenium*, *Rhus* Sect. *Trichocarpae*, *Hieracium*, *Gentiana*, *Iris*, *Lilium*, *Fritillaria*, *Veratrum* u. a.

Die ausführlichen Erörterungen dieser Verhältnisse, sowie das Verzeichniss der africanischen Hochgebirgspflanzen nebst Angaben über ihre Standorte und Verbreitung sind für die Abhandlungen der Akademie bestimmt.

24. Calorimetrische Untersuchungen an Säugethieren.

Von Prof. I. Rosenthal
in Erlangen.

(Vorgelegt von Hrn. E. du Bois-Reymond am 25. Juni; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXII]; — ausgegeben am 2. Juli.)

Vierte Mittheilung.

I.

Die Bestimmung der Wärmeproduction eines Thieres mit Hülfe irgend eines Calorimeters ist, wie ich schon in meiner dritten Mittheilung[1] bemerkt habe, erschwert durch den Umstand, dass die Thiere zuweilen während ihres Aufenthalts im Calorimeter ihre Eigentemperatur ändern. Man misst in Wahrheit niemals die Wärmeproduction sondern nur die Wärmeabgabe. Und diese letztere hängt nicht, wie es bei einem einfachen, unbelebten Körper der Fall sein würde, nur von den Temperaturen des Körpers und des Calorimeters ab, sondern kann wesentlich verändert werden durch die wechselnden Zustände an der Oberfläche des Thieres, d. h. seiner Haut. Das Thier hat nicht, wie ein unbelebter Körper, eine von der Beschaffenheit seiner Oberfläche abhängige Emissionsconstante, sondern einen von vielen Umständen abhängigen und innerhalb gewisser Grenzen wechselnden Emissionscoëfficienten. Es kann daher vorkommen, dass trotz gleichbleibender Wärmeproduction und unveränderter Umgebungstemperatur die Wärmeausgabe sich ändert.

In diesem Falle muss nothwendiger Weise die Eigentemperatur des Thieres sich ändern. Es wäre falsch, wie es immer noch geschieht, hieraus ohne weiteres auf eine Änderung der Wärmeproduction zu schliessen. Dagegen muss es möglich sein, durch gleichzeitige Messung der Wärmeausgabe und der Veränderungen der Eigenwärme die wahre Wärmeproduction zu berechnen und damit auch über Änderungen des Emissionscoëfficienten etwas zu erfahren.

So einfach das erscheint, so wird es doch ungemein erschwert durch die Unmöglichkeit, die wahre Durchschnittstemperatur eines

[1] Diese Berichte. 1890. XX. S. 393.

lebenden Thieres einigermaassen genau zu messen. Die Temperatur ist nicht nur an verschiedenen Stellen des Körpers verschieden; diese Unterschiede sind auch nicht constant und sie wechseln gerade unter den Verhältnissen, welche mit Änderungen des Emissionscoëfficienten verbunden sind. Abkühlungen der Haut z. B. sind mit einer Temperatursteigerung in der Achselhöhle verbunden und täuschen so eine Temperaturzunahme vor, während in Wahrheit eine Abnahme des gesammten Wärmevorraths eingetreten ist.[1]

II.

Ich werde an anderer Stelle die besonderen Umstände, welche bei der physiologischen Calorimetrie in Betracht kommen, ausführlich besprechen. Hier möge es genügen zu bemerken, dass in allen den Fällen, wo eine Änderung des Emissionscoëfficienten des Thieres vorkommen kann, das von mir benutzte Luftcalorimeter, dessen Theorie ich im Archiv für Physiologie 1889 S. 1 ff. entwickelt habe, zuverlässiger ist als andere zu diesem Zweck benutzte Apparate. Unter den Fällen, für welche dieses zutrifft, steht obenan der Symptomencomplex, welchen man als Fieber bezeichnet. Die zahlreichen calorimetrischen Untersuchungen, welche über die physiologische Natur des Fiebers angestellt worden sind, verlieren angesichts der Kritik der angewandten Methoden zum Theil ihre Beweiskraft. Es war daher von Anfang an meine Absicht, das Fieber in den Kreis meiner Untersuchungen zu ziehen. Ich habe auch solche Untersuchungen gleich zum Beginn meiner calorimetrischen Arbeiten vorgenommen. Aber erst nachdem ich eine Reihe anderer, auf die normalen Verhältnisse bezüglicher Arbeiten erledigt hatte, bin ich zu jenen zurückgekehrt und will nun, was ich als hinreichend sichergestellt ansehe, hier mittheilen.

Die Litteratur über das Fieber ist so umfangreich, es sind so viele Meinungen und Anschauungen über dasselbe vorgetragen worden, dass Alles, was man über dasselbe sagen kann, in ähnlicher Weise schon irgendwo von irgendwem vorgetragen worden ist. Nicht neue Ansichten und Meinungen will ich daher bringen, sondern einige dieser Ansichten auf ihre Stichhaltigkeit prüfen. Nur einige wenige Punkte, welche sich mit den von mir benutzten Messungsmethoden bis zu einem gewissen Grade der Sicherheit erledigen lassen, will ich besprechen; andere Punkte werden sich wohl später zur Erledi-

[1] I. Rosenthal. Zur Kenntniss der Wärmeregulirung bei den warmblütigen Thieren. Erlangen 1872.

gung bringen lassen. Keineswegs aber ist es meine Absicht, eine abgerundete Theorie des Fiebers zu geben. Das überlasse ich den Pathologen vom Fach.

Die hervorstechendste Erscheinung beim »Fieber« ist die Steigerung der Eigentemperatur. Ein Theil der übrigen Symptome, die vermehrte Puls- und Athemfrequenz insbesondere, lassen sich ungezwungen als Folgen der erhöhten Temperatur deuten. Es entsteht deshalb die uns hier allein interessirende Frage, wie diese erhöhte Temperatur zu Stande kommt.

Die allgemein verbreitete Ansicht darüber ist, dass der fiebernde Organismus mehr Wärme producire. Zwar hat TRAUBE[1] die Hypothese aufgestellt, dass die Temperatursteigerung durch Wärmeretention, d. h. durch verminderte Abgabe, zu Stande komme, aber diese TRAUBE'sche Ansicht hat bei den Pathologen allgemeinen Widerspruch erfahren. Der Grund hierfür ist hauptsächlich in den Erfahrungen zu suchen, welche man über den Stoffwechsel der Fieberkranken gewonnen hat. Dieselben zeigen nämlich eine Vermehrung der Harnstoff- und Kohlensäureausscheidung, im Vergleich zu ähnlich ernährten gesunden Personen. Indem man hieraus auf eine gesteigerte Oxydation schloss, ergab sich die Annahme einer vermehrten Wärmeproduction als unabweisbare logische Folgerung. Dazu kam noch, dass die Anschauungen über den Vorgang der Wärmeregulirung, welche namentlich Hr. VON LIEBERMEISTER auf Grund seiner Versuche über die Wirkung kalter Bäder entwickelt hatte,[2] sowie die späteren Arbeiten von Hrn. PFLÜGER und mehreren seiner Schüler die Anschauung begründet hatten, dass auch im normalen, physiologischen Zustande jede Erhöhung der Eigenwärme als Beweis vermehrter Wärmeproduction angesehen werden müsse, namentlich weil sie mit vermehrter Ausscheidung von CO_2 und vermehrter Aufnahme von O verbunden zu sein pflegt.[3]

Allerdings fehlt es nicht an Versuchen, diese theoretisch erschlossenen Anschauungen auch auf calorimetrischem Wege zu stützen. Ein Theil dieser Versuche wurde am Menschen angestellt, wobei die während kurzer Zeit an ein Vollbad abgegebene Wärmemenge als calorimetrische Messung gelten sollte. Auf diese glaube ich schon darum nicht weiter eingehen zu sollen, weil die Versuchsfehler dabei

---

[1] Allg. med. Centralzeit. 1863 u. 1864. — Gesammelte Abhandlungen II. 637 und 679.

[2] Arch. f. Anat. u. Physiol. 1860. S. 520 u. 589. — 1861. S. 28. — 1862. S. 661.

[3] PFLÜGER. Arch. f. d. ges. Physiol. XII. 282 und 333. — XIV. 92 u. 450. — XV. 104. — XVIII. 247. — RÖHRIG und ZUNTZ. Ebenda IV. 57. — COLASANTI. Ebenda XIV. 92. — FINKLER. Ebenda XIV. 603. — ZUNTZ. Ebenda XII. 522. — FINKLER und OERTMANN. Ebenda XIV. 62. — VELTEN. Ebenda XXI. 361.

meistens grösser sind als die zu messenden Werthe. Mit einem Wassercalorimeter hat Hr. Leyden[1] die Wärmeabgabe eines Unterschenkels an Gesunden und Fiebernden gemessen und fand bei letzteren die Wärmeabgabe stets bedeutend vermehrt. An Thieren sind calorimetrische Versuche vorgenommen worden von Hrn. Senator[2] mit einem Wassercalorimeter. Derselbe fand keine vermehrte Wärmeproduction. Das Luftcalorimeter von Richet benutzte neuerdings Hr. Hildebrandt[3] und kam zu dem Schluss, dass im Fieber sowohl Wärmeretention als auch vermehrte Wärmeproduction stattfinde. Endlich glaubt Hr. Ugolino Mosso[4] aus seinen mit einem ähnlichen Apparat angestellten Versuchen schliessen zu dürfen, dass die Wärmeproduction stets der im Rectum gemessenen Temperatur parallel gehe. Doch beziehen sich die Versuche des Hrn. Mosso nicht auf eigentliches Fieber, sondern auf Temperatursteigerungen in Folge von operativen Eingriffen in das Nervensystem.

Meine eigenen Versuche wurden an Thieren (meistens Kaninchen, aber auch Hunden und Katzen) angestellt, welche zuerst im gesunden Zustand bei gleichmässiger Fütterung Tage lang calorimetrisch gemessen waren und dann, nach Erzeugung des Fiebers, wieder gemessen wurden unter steter Controle der Temperaturveränderungen im Rectum bis zum völligen Verschwinden des Fiebers oder bis zum Tode. Jede Messung umfasst zehn Stunden, zuweilen auch mehr, indem die Thiere Tag und Nacht im Calorimeter verblieben. So konnte der ganze Verlauf des Fiebers vom Beginn bis zum Ende verfolgt werden.

Zur Erzeugung des Fiebers dienten Injectionen von Krebsjauche, eitrigem und tuberculösem Sputum, Heuinfus und Pyocyanin, d. h. eine aus Reinculturen des Bacillus pyocyaneus, welcher den blauen Eiter verursacht, gewonnene, sterilisirte Flüssigkeit.[5] Alle diese Stoffe bewirken ein, je nach der angewandten Menge, höheres oder niederes Fieber, welches von einigen Stunden bis zu mehreren Tagen anhält, durch wiederholte Einspritzungen auch länger hingezogen werden kann und zuweilen zum Tode führt, meistens aber langsam abfallend wieder einer normalen oder auch subnormalen Temperatur Platz macht. Die Injection der fiebererzeugenden Stoffe wurde meistens subcutan vorgenommen; in einzelnen Fällen auch, um eine schnellere

---

[1] Deutsch. Arch. f. klin. Med. V. 273.
[2] Untersuchungen über den fieberhaften Process und seine Behandlung. Berlin 1873.
[3] Virchow's Arch. CXXI. 1.
[4] Arch. f. exper. Pathol. u. Pharmakologie XXVI. 326.
[5] Ich erhielt dieselbe von den HH. von Bergmann und Schimmelbusch, welche mit einer Untersuchung über die Wirkungsweise derselben beschäftigt sind.

Resorption zu erzielen, in die Bauchhöhle oder in die Lunge, oder in die mittlere Ohrvene, in welche man bei Kaninchen eine feine Canüle zuweilen ohne besondere Schwierigkeiten durch Einstich ohne Praeparation einzuführen vermag. Einige Male habe ich auch durch Injection des KOCH'schen Tuberculins bei vorher tuberculös gemachten Kaninchen Fieber erzeugt.

III.

Wenn auf irgend eine Weise Fieber erzeugt wird, so sieht man regelmässig die Temperatur des Calorimeters heruntergehen; die Wärmeausgabe des Thieres nimmt also ab. Diese Abnahme findet schon in der ersten Stunde nach der Injection des fiebererregenden Stoffes statt, während die Steigerung der Eigenwärme sich meistens erst etwas später bemerklich macht. Auch in den folgenden Stunden bleibt die Wärmeausgabe kleiner als sie vor der Injection beim gesunden Thier gewesen war, während die Eigentemperatur des Thieres andauernd steigt. Ist diese schliesslich auf ihrem Höhepunkt angelangt, so beginnt auch die Wärmeausgabe wieder zu steigen und gelangt nicht nur auf den ursprünglichen Werth, sondern kann auch sogar etwas über denselben hinausgehen.

Um aus diesem Verhalten der Wärmeausgabe auf die Wärmeproduction schliessen zu können, müssen wir die Änderung der Wärmeausgabe mit den gleichzeitigen Veränderungen der Eigentemperatur numerisch vergleichen. Ich will dies an der Hand einiger Beispiele aus der Zahl der von mir angestellten Versuche thun.

1. Ein kleines Kaninchen von 810^{g} Gewicht, welchem früher tuberculöses Sputum eingespritzt worden war, welches aber kein Fieber mehr hatte, da seine Temperatur im Rectum nur $37^{\circ}_{.}9$ betrug, gab in drei aufeinander folgenden Stunden aus

0.83 0.85 0.80

im Mittel: 0.83 sec. ca. = 2.988 St. Ca.

Nach Injection von 5^{mg} KOCH'schen Tuberculins stieg seine Temperatur langsam an und erreichte innerhalb 7 Stunden den Werth $38^{\circ}_{.}5$. In dieser Zeit gab es aus:

0.76 0.76 0.76 0.78

0.73 0,73 0.71

im Mittel: 0.747 sec. ca. = 2.6892 St. Ca.

Es hatte also weniger ausgegeben in der Stunde 0.299 Ca. und in den 7 Stunden zusammen rund 2 Ca. Dabei war seine Temperatur gestiegen um 0°6. Zur Erwärmung seiner Körpermasse um diesen Betrag wären erforderlich gewesen 0.3888 Ca.[1]

2. Eine Katze im Gewicht von 2650^{g} und der Temperatur 38.9 producirte 2.94 sec. ca. = 10.584 St. Ca. Nach Injection von 3.5$^{cm^2}$ einer fauligen Krebsjauche stieg ihre Temperatur innerhalb 9 Stunden auf 40.4, also um 1°5. Sie gab in dieser Zeit aus 2.9 sec. ca. = 10.44 St. Ca., also in 1 Stunde weniger: 0.144 und im ganzen in den 9 Stunden: 1.296 Ca. Um ihre Körpertemperatur, wie es geschehen, um 1°5 über den Anfangswerth zu steigern, wären erforderlich 3.18 Ca.

3. Ein Kaninchen im Gewicht von 2120^{g} gab bei einer Temperatur von 39°3 aus 2.56 sec. ca = 9.216 St. Ca. Nach Injection von 2$^{cm^2}$ Pyocyanin stieg seine Temperatur innerhalb 4 Stunden auf 40.6. In dieser Zeit gab es aus im Ganzen 32.96 Ca; gegen die ursprüngliche Wärmeausgabe weniger 3.9 Ca. Zur Erwärmung seiner Körpermasse wären erforderlich gewesen 2.2 Ca.

4. Ein Kaninchen von 2280^{g} mit einer Temperatur von 39.0 gab aus 2.92 sec. ca. = 10.5 St. Ca. Nach Injection von 2$^{cm^2}$ Heuinfus stieg die Temperatur innerhalb 4 Stunden auf 40°0. In dieser Zeit gab es aus 39.24 Ca, d. h. 2.76 Ca weniger. Zur Erwärmung der Körpermasse wären erforderlich gewesen 1.824 Ca.

Wir sehen also in allen Fällen eine Abnahme der Wärmeausgabe u. z. in etwas abgerundeten Zahlen pro Secunde:

von	2.99	auf	2.69	= 90	Procent
»	2.94	»	2.90	= 98.6	»
»	2.56	»	2.29	= 89.5	»
»	2.92	»	2.72	= 93.2	»

Sehen wir von dem zweiten Versuch (an der Katze) ab, so haben wir also eine Abnahme von rund 10 Procent in der Wärmeausgabe. Und in allen drei Fällen zeigte sich, dass diese verminderte Wärmeausgabe oder Wärmeretention mehr als ausreicht, um die Temperaturerhöhung des Körpers zu bewirken.

Nur in dem zweiten Beispiel war das letztere nicht der Fall. Die Abnahme der Wärmeausgabe war sehr gering und sie reicht nicht aus, die Temperatursteigerung um 1°5 zu decken. Nun ist aber dieser Fall der einzige seiner Art, welchen ich beobachtet habe. Ich habe ihn mit angeführt, um zu zeigen, dass es solche Fälle geben kann. Dass sie aber selten sind, kann ich mit Bestimmtheit behaupten, da mir eben trotz meiner zahlreichen Versuche kein zweiter

[1] Die durchschnittliche specifische Wärme des Thierkörpers habe ich auf Grund meiner früheren Bestimmungen = 0.8 angenommen. Vergl. Arch. f. Physiol. 1878. S. 215.

gleichartiger begegnet ist. Ich glaube auch nicht daran denken zu dürfen, dass etwa Katzen sich gegen die fiebererzeugende Ursache anders verhalten als andere Thiere. Denn wenn ich auch nur wenige Versuche mit Katzen gemacht habe, so steht dieser Fall doch auch unter den letzteren ganz allein. Ich glaube vielmehr, dass es sich dabei nur um eine zufällige Störung handelt. Die Katze war nach der Injection sehr unruhig; unmittelbar nach der Injection stieg die Wärmeausgabe ein wenig, von 2.94 auf 3.07 in der ersten Stunde, war in der zweiten Stunde 2.90 und fiel dann erst in der vierten Stunde auf 2.78. Es scheint mir daher durchaus gerechtfertigt anzunehmen, dass die Abnahme der Wärmeausgabe in diesem Falle nur durch die vermehrte Wärmeproduction in Folge der Unruhe zum Theil verdeckt worden sei, und dass ohne diese die Wärmeretention auch hier gross genug gewesen wäre, um die Temperaturzunahme zu decken.

Sehen wir also von diesem Einzelfalle ab und halten wir uns an die sämtlichen übrigen Versuche, welche unter sich vollkommen übereinstimmen, so kommen wir zu dem Schluss, dass in dem ersten Stadium des Fiebers von einer Steigerung der Wärmeproduction jedenfalls keine Rede sein kann. Ich glaube keinen zu grossen Nachdruck darauf legen zu sollen, dass sogar eine kleine Verminderung der Production herausgerechnet werden kann. Dazu sind unsere Berechnungen, die sich auf die Temperaturmessung im Rectum stützen, doch nicht genau genug, obgleich es sich um Messungen in längeren Zeiträumen handelt, bei denen die localen Temperaturänderungen weniger stören. Trotzdem begnüge ich mich vorläufig lieber mit dem vorsichtigeren Satz, den ich oben ausgesprochen habe.

In diesem Punkte stimmen nun meine Erfahrungen auch vollkommen mit denen des Hrn. Senator überein. Sie ergänzen dieselben, indem sie zeigen, dass dieses Verhältniss sogar ziemlich lange, bis zur 7. bis 9. Stunde nach der Injection und noch länger andauern kann. Somit kann ich wohl sagen, dass meine Versuche die Theorie von Traube bestätigen, indem sie zeigen, dass die Steigerung der Eigentemperatur im Initialstadium des Fiebers durch Wärmeretention ohne jede vermehrte Wärmeproduction zu Stande kommen kann und in den von mir untersuchten Fällen zu Stande kommt.

IV.

Ist die Fieberhöhe erreicht, so steigt die Wärmeausgabe, welche bis dahin unter dem normalen Durchschnittswerth sich gehalten hatte, wieder an, kann den Normalwerth erreichen, ja sogar denselben übersteigen. Da trotzdem in diesem Stadium die Eigentemperatur hoch bleibt, so werden wir zu untersuchen haben, ob etwa in diesem Stadium eine vermehrte Wärmeproduction wirklich vorhanden sei.

Von dieser vermehrten Wärmeausgabe darf man sich aber keine übertriebene Vorstellungen machen. Auch herrscht kein fester Zusammenhang zwischen der Höhe der Fiebertemperatur und der Wärmeausgabe, insofern die höchsten Werthe der letzteren nicht immer bei den höchsten Temperaturen beobachtet werden. Und wo dies etwa der Fall ist, da trifft es meistens mit vorübergehenden oder länger andauernden Temperatursenkungen zusammen, welcher Fall einer besonderen Betrachtung bedarf.

Wenn das Fieber Tage lang anhält, so geht die anfänglich vermehrte Wärmeausgabe in der Regel wieder auf die normale, ja sogar zuweilen unter diese hinunter, trotz hoher Temperatur. Und das geschieht nicht etwa, weil das Thier abmagert, denn das war bei meinen Thieren zuweilen gar nicht der Fall, sondern auch bei ungefähr gleichbleibendem Gewicht und guter Fresslust sank die Wärmeausgabe wieder ab.

Ich komme jetzt zur Besprechung des Fieberabfalls, der Rückkehr zur Normaltemperatur, doch kann ich mich dabei kurz fassen. Steile Temperaturabfälle, wie sie bei der Krise acuter Krankheiten beobachtet werden, kommen bei den künstlich erzeugten Fiebern, die ich untersucht habe, nicht vor. Wo aber immer ein bedeutenderer Temperaturabfall innerhalb der Versuchsdauer erfolgte, da war auch die Wärmeausgabe stets höher als gewöhnlich, so dass diese als Veranlassung jener angesehen werden musste.

Schnellere Temperaturabfälle konnte ich auf der Höhe des Fiebers durch Injection grosser Dosen von Antipyrin bewirken. In solchen Fällen war immer eine ausserordentlich grosse Zunahme der Wärmeausgabe zu beobachten. In einem Falle z. B., wo die durch Heuinfuseinspritzung bewirkte Fiebertemperatur von 39°9 innerhalb 2 Stunden nach Antipyrininjection auf 38°5 sank, war die Wärmeausgabe während dieser Zeit um 35 Procent höher als vor der Injection. In einem anderen Falle, wo die Temperatur von 39°9 auf 38°5 sank, betrug die Steigerung 33 Procent. Bei sehr grossen Antipyrindosen kommen sogar Steigerungen um 50 Procent vor.

Es scheint mir demnach, dass grosse und schnelle Temperaturabfälle stets durch einen plötzlichen Wärmeabfluss nach aussen bewirkt sind. Die Ursachen, welche die Wärmestauung im Fieberanfang veranlasst haben und wahrscheinlich auch noch auf der Höhe des Fiebers in Wirksamkeit waren, hören auf, der Emissionscoëfficient des Thieres nimmt zu und die Temperatur fällt, ohne dass wir daraus allein etwas über das Verhalten der Wärmeproduction schliessen dürfen. Über letztere erhalten wir annähernden Aufschluss, wenn wir die Mehrausgabe an Wärme mit dem gleichzeitigen Temperaturverlust vergleichen. Ich will der Berechnung das erste der oben mitgetheilten Beispiele zu Grunde legen: Das Thier zeigte einen Temperaturabfall von 39°9 auf 38°5. Es gab aus vor der Injection (auf 2 Stunden berechnet) 14.156 Ca., nach der Injection 19.202 Ca., also mehr 5 Ca. Die durch Abkühlung des Thieres verlorene Wärmemenge berechnet sich auf etwas mehr als 2.5 Ca. Es hat also vielleicht neben dem grösseren Wärmeverlust auch eine Minderproduction stattgefunden, was nach meinen Versuchen auch an gesunden Thieren nach Antipyrineinspritzungen vorkommt.

V.

Diejenigen, welche überzeugt waren, dass die Temperatursteigerung im Fieber durch vermehrte Wärmeproduction veranlasst sei, haben für die Stoffe, welche Fieber hervorrufen, den Namen: »pyrogene Stoffe« erfunden. Sie nahmen an, dass diese Stoffe entweder unmittelbar in den Geweben oder mittelbar durch das Nervensystem die Menge der in der Zeiteinheit zur Oxydation gelangenden Gewebsbestandtheile vermehren. Da aber nach unseren Versuchen im Anfangsstadium des Fiebers keine höhere Wärmebildung stattfindet, so haben wir vielmehr zu untersuchen, auf welche Weise diese Stoffe die sicher nachgewiesene Wärmeretention veranlassen.

Aus zahlreichen Beobachtungen über die Wärmeregulirung des gesunden Thieres wissen wir, welche Bedeutung die Blutbewegung für dieselbe hat. Wir können die Eigentemperatur eines Thieres erhöhen oder herabsetzen, je nachdem wir die Blutbewegung in den äusseren Körpertheilen, namentlich in der Haut, vermindern oder vermehren. Wir wissen auch, welchen Einfluss das Nervensystem auf diese Blutvertheilung ausübt. Es liegt daher nahe genug, die erste Wirkung der fiebererzeugenden Stoffe in einer solchen, wahrscheinlich durch das Nervensystem vermittelten Änderung der Blutvertheilung zu suchen. Waren es doch gerade die deutlichen Anzeichen solcher Änderungen, die kühle und blasse Haut und das subjective Kältegefühl im Anfangsstadium der acuten Fieber, welche TRAUBE zur Aufstellung seiner Theorie veranlassten. Und dass etwas Ähnliches auch bei dem künstlich erzeugten Fieber vorkommt, dafür giebt es deutliche Anzeichen. Namentlich bei Kaninchen ist die Verengerung der Ohrgefässe sehr deutlich zu beobachten, und es ist mehr als wahrscheinlich, dass sich die Gefässe der übrigen Haut gleich verhalten, obgleich es nicht so leicht festzustellen ist.[1]

Können wir demnach die Temperatursteigerung im Anfangsstadium des Fiebers auf diese Weise gut verstehen, so haben wir jetzt die oben offen gelassene Frage, ob auf der Höhe des Fiebers, wenn die Temperatur auf übernormaler Höhe andauernd verharrt und wenn dabei die Wärmeausgabe wieder gleich oder gar grösser ist als im normalen Zustand, die Wärmeproduction gesteigert sei, einer genaueren Prüfung zu unterziehen.

Wir können auf die Temperaturverhältnisse eines Thieres ganz dieselben Betrachtungen übertragen, welche unserem Calorimeter zu Grunde liegen. Nennen wir die Wärmeproduction in der Zeiteinheit n, den Überschuss der Temperatur des Thieres über die der Umgebung τ und den Emissionscoëfficienten des Thiers E, so muss

$$n = E \cdot \tau$$

sein. So lange n und E constant bleiben, bleibt auch τ constant, und wenn wir annehmen, dass die Temperatur der Umgebung dieselbe bleibt, ist auch die Temperatur des Thiers constant. Nun hat aber das Thier kein constantes E; dieser Werth, welcher die Summe aller der Einflüsse darstellt, von denen seine Wärmeverluste abhängen, ist in hohem Grade abhängig von dem Zustande der Hautgefässe und anderen, weniger wichtigen Umständen. Nehmen wir an, E werde kleiner, und nennen den jetzigen Werth E', so muss τ wachsen, den Werth τ' annehmen, bei welchem

$$E'\tau' = E \cdot \tau.$$

Ist dieser Zustand erreicht und bleibt τ' jetzt constant, so haben wir:

$$n' = E' \cdot \tau' = E \cdot \tau = n.$$

Das heisst also: Wenn die durch Verkleinerung von E erreichte höhere Temperatur constant bleibt, so muss die vorübergehend verringerte Wärmeausgabe wieder zu ihrem früheren Anfangswerth zurückkehren, ohne dass wir daraus auf eine vermehrte Wärmeproduction schliessen dürfen, so lange wir nichts über den Werth E auszusagen vermögen. Dazu haben wir aber kein Mittel.[2]

---

[1] Dass die Ohren bei Kaninchen wegen ihres Blutreichthums und der grossen Oberfläche des Organs bei sehr geringer Masse eine wichtige Rolle bei der Wärmeregulirung spielen, ist sicher, wenngleich mir manche Autoren diese Rolle überschätzt zu haben scheinen. Aber nichts spricht dafür, dass sie sich anders verhalten als andere Körpertheile, wenn es sich um die Innervation des vasomotorischen Apparates handelt.

[2] D. h. das Calorimeter kann uns darüber nichts lehren, weil es nur den Werth $E \cdot \tau$ misst. Versuche über die Wärmestrahlung der Haut könnten werthvolle Aufschlüsse geben, doch habe ich solche noch nicht anstellen können.

Statt also anzunehmen, durch die Einführung der fiebererzeugenden Stoffe werde plötzlich der Betrag der in der Zeiteinheit oxydirten Substanz vermehrt, bin ich eher geneigt einen Einfluss derselben auf die nervösen vasomotorischen Centren anzunehmen, durch welchen der Emissionscoëfficient des Thiers vermindert wird, und zwar glaube ich, dass dieser Einfluss auch während der Fieberhöhe andauert. Denn auch im Hitzestadium ist, wie Hr. SENATOR hervorhebt, der Gefässzustand der Haut eher einer verminderten als einer vermehrten Wärmeausgabe günstig. Und erst im Stadium der Defervescenz, wenn die Temperatur schnell absinkt, wird die Haut roth und warm und der dann reichlich ausbrechende Schweiss kann ausserdem erheblich zur Abkühlung beitragen. Diese Betrachtungen sind freilich von dem Fieber des Menschen abgeleitet, und wir können nicht wissen, wie weit sie auf das in unseren Versuchen erzeugte Fieber übertragbar sind. Aber da die Erscheinungen im wesentlichen in gleicher Weise verlaufen, ist es doch nicht zu gewagt, sie in gleicher Weise zu erklären. Die durch Antipyrin bewirkte Abkühlung aber ist um so eher als Folge einer Gefässerweiterung aufzufassen, da unter seinem Einfluss der Blutdruck stark absinkt.

Dennoch bin ich nicht geneigt zu behaupten, dass niemals während des Fiebers erhöhte Wärmeproduction zu Stande kommen könne. Nach den Untersuchungen der HH. SANDERS-EZN[1], PFLÜGER u. A.[2] wird bei Erhöhung der Eigentemperatur mehr Sauerstoff aufgenommen und mehr Kohlensäure ausgegeben. Wenn dies so zu deuten wäre, dass auch wirklich mehr Kohlensäure gebildet wird (was ich freilich für unbewiesen halte), dann müsste auch wohl mehr Wärme producirt werden. In diesem Falle hätten wir uns also den Fieberverlauf so vorzustellen: Durch Wärmeretention wird die Körpertemperatur erhöht; in Folge der Temperaturerhöhung werden die Oxydationsvorgänge gesteigert und noch mehr Wärme producirt, bis endlich die Temperatur so hoch gestiegen ist, dass trotz des verminderten Emissionscoëfficienten der Wärmeabfluss der jetzigen Production gleich ist.

Meine Versuche sprechen *nicht* für diese Annahme. Bei den unvermeidlichen Schwankungen, welche die Wärmeproduction auch im normalen Zustande aufweist, kann man die Frage nur auf so zu sagen statistischem Wege zu entscheiden versuchen. Ich habe z. B. an einem und demselben Thier 31 Messungen gemacht; davon fallen 14 auf den fieberlosen Zustand, 10 auf den Zustand gleichmässigen Fiebers und 7 sind gemischte, d. h. der Versuch wurde bei fieber-

[1] Ber. d. K. Sächs. Ges. der Wiss. Math.-physik. Cl. 1867. S. 58.
[2] S. o. S. 589. Anm.

losem Zustand begonnen und während des beginnenden Fiebers fortgesetzt. Nun sind die Mittelwerthe

aus allen Versuchen ohne Fieber	2,764	sec. ca
» » » mit »	2,729	» »
» » gemischten Versuchen	2,598	» »

Diese Zahlen zeigen zwar, dass in den gemischten Versuchen die Wärmeausgabe geringer ist, weil in ihnen das Stadium des Fieberanfangs mit enthalten ist. Zwischen den fieberlosen und den Fiebertagen aber ist der Unterschied so gering, dass er keine Bedeutung hat. Einer Correction, um aus der Wärmeausgabe auf die Wärmeproduction zu schliessen, bedarf es nicht, da in jedem einzelnen Versuch der beiden ersten Reihen die Eigentemperatur entweder gar nicht oder nur um 1—2 Zehntelgrade schwankte.

Ich komme daher zu dem Schluss: Bei den durch Injection von Jauche, Sputum, Heuinfus u. d. g. erzeugten Fiebern konnte eine Änderung der Wärmeproduction nicht nachgewiesen werden.

VI.

Soweit meine Versuche an Thieren. Da aber bei aller Ähnlichkeit der an diesen künstlich erzeugten Fieber dennoch die Verhältnisse beim Menschen nicht genau dieselben sind, auch der Verlauf der verschiedenen Fieber die Vermuthung nahe legt, dass nicht alle Arten desselben sich gleich verhalten möchten, so war es von vornherein mein Bestreben, auch an Fieberkranken calorimetrische Messungen vorzunehmen. Leider war es mir nicht möglich, ein Calorimeter von der Grösse zu bauen, dass es einen ganzen Menschen aufnehmen könnte. Ich beschloss daher nach dem Vorgange des Hrn. Leyden mich mit der sogenannten »partiellen Calorimetrie« zu begnügen. Während Hr. Leyden einen Unterschenkel in sein Wassercalorimeter einschloss, gab ich dem einen meiner Luftcalorimeter eine solche Form, dass es zur Aufnahme eines Arms geeignet war. Mit dem ersten derartigen Apparat hat schon mein Neffe Carl Rosenthal[1] einige Versuche auch an Fieberkranken angestellt und ich selbst habe seitdem eine ganze Reihe von Beobachtungen an verschiedenen Kranken gemacht. Trotzdem ist der Erfolg bis jetzt kein grosser. Zwar konnte mit Sicherheit nachgewiesen werden, dass der Fieberabfall in der Krise oder die Temperaturabnahme in Folge antipyretischer Mittel stets von einer sehr erheblichen Steigerung der Wärmeausgabe begleitet ist. Aber das, worauf es mir besonders ankam,

[1] Arch. f. Physiol. 1888. S. 1 ff.

die Vergleichung des fieberlosen mit dem fiebernden Zustand bei einem und demselben Menschen konnte ich bisher nur in einigen wenigen Fällen durchführen und zur Beobachtung des Fieberanfangs habe ich noch keine günstige Gelegenheit gefunden. Die Fieberkranken, welche wir in den Krankenhäusern beobachten können, kommen schon mit ausgebildetem Fieber dahin. Wir müssen uns begnügen, Messungen während der Fieberhöhe zu machen und nach Ablauf der Krankheit in der Reconvalescenz. Zuweilen gelingt es auch, gerade ein Stück der Krise, des Temperaturabfalls zu erhaschen. Denn wenn auch die Versuche für die Kranken ohne Beschwerde sind, so können wir ihnen doch nicht zumuthen, den Arm stundenlang still im Apparat zu lassen, können deshalb immer nur einzelne kurzdauernde Versuche anstellen.

Alle diese Schwierigkeiten wären leicht zu überwinden bei Kranken mit gut ausgesprochenem intermittirendem Fiebertypus. Bis jetzt ist es mir aber noch nicht gelungen, eines Kranken mit Intermittens- oder Recurrensfieber habhaft zu werden, da diese Krankheiten jetzt ausserordentlich selten geworden sind. Ich werde mich deshalb wohl entschliessen müssen, mit meinen Apparaten nach einem Lande zu gehen, wo intermittirende Fieber häufiger zu finden sind, nach Italien z. B.

Ich habe versucht, einen Ersatz für diesen Mangel in der Untersuchung von tuberculösen Kranken zu finden, denen durch Einspritzung des KOCH'schen Tuberculins künstliches Fieber erzeugt wurde. Zwei derartige Kranke habe ich untersucht und an dem einen zwei, an dem anderen fünf Messungen gemacht. Sie können zwar nicht ganz das leisten, was Messungen an Intermittenskranken lehren könnten, weil man nicht mit genügender Sicherheit die geeignete Zeit des Versuches innerhalb des langsam ansteigenden und langsam abfallenden Fiebers vorher zu bestimmen vermag. Sie sind aber immerhin lehrreich.

Was ich bis jetzt aus allen diesen Versuchen ableiten kann, ist etwa folgendes: In der Zeit des Fieberabfalls ist die Wärmeabgabe sehr gross, in der Zeit des Fieberanstiegs relativ klein, kleiner jedenfalls als auf der Fieberhöhe. Auf dieser aber war sie grösser als in den fieberfreien Zeiten und in der epikritischen Zeit nach der Genesung. Dieses letztere stimmt mit den Befunden des Hrn. LEYDEN, aber nicht mit den Thierversuchen.

Ob man daraus aber schliessen darf, dass bei den Fiebern des Menschen die Wärmeproduction gesteigert sei, was ich am Thier nicht constatiren konnte, das wage ich jetzt noch nicht zu entscheiden.

25. Zweiter Bericht über neuere Untersuchungen an elektrischen Fischen.

Von Prof. Gustav Fritsch.[1]

(Vorgelegt von Hrn. E. du Bois-Reymond am 25. Juni; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXII]; — ausgegeben am 2. Juli.)

Der Akademie erlaube ich mir hierdurch ganz ergebenst zu berichten, dass die zur weiteren Untersuchung vorbereiteten elektrischen Fische, besonders Mormyriden, glücklich in der Heimath angelangt sind und sich bei der weiteren Verarbeitung als sehr nutzbar erwiesen haben.

Ich hoffe in nächster Zeit bereits in der Lage zu sein eine gedrängte Übersicht der Hauptergebnisse vorlegen zu können, wenn auch die vollständigere Bearbeitung, welche »die schwach elektrischen Fische« überhaupt umfassen soll, mich noch die nächsten Jahre beschäftigen dürfte.

Von der Fülle neuer Thatsachen, die sich mir dabei aufdrängen, ohne dass es möglich wäre für dieselben schon jetzt annähernd brauchbare Erklärungen zu geben, möchte ich anführen, dass es mir nunmehr gelungen ist, die früher (1881)[2] von mir beschriebenen elektrischen Nerven der Mormyriden bis in ihre Ursprungstätten im Rückenmark zu verfolgen. Die Fasern entspringen, als vordere Wurzeln austretend, in Gestalt von auffallend breiten Axencylinderfortsätzen an mächtigen, multipolaren Zellen, welche denjenigen des elektrischen Lappens von *Torpedo* nur wenig an Grösse nachgeben, in ihrer Anordnung aber den Zellen des *Gymnotus*-Rückenmarkes ähnlich sind. Sie finden sich nur im Gebiet der austretenden elektrischen Nerven, d. h. an dem Schwanzabschnitt, wo normale Muskeln nicht vorhanden sind, da diese durch die elektrischen Organe ersetzt wurden.

Die Reste der verwandelten Muskeln finden sich bei manchen Arten noch ganz unverkennbar in der mittelsten von den drei Schichten der *Mormyrus*-Platte, nicht in der vordersten.

[1] S. oben S. 223.
[2] Diese Berichte, 1882, St. XXIII. 1. Hlbbd. S. 480.

Die vordere wie die hintere »nervöse« Schicht sind gekörnt und die Körnchen stehen an ersterer wie bei der *Torpedo*-Platte in Längsreihen senkrecht zur Plattenrichtung geordnet, an letzterer stellt die Körnchenanordnung nur eine undeutliche Strichelung des Randes dar.

Die elektrischen Organe endigen sowohl vorn wie hinten in ein eigenthümliches Gewebe, welches ich auch bei *Malopterurus* antraf und »taubes« elektrisches Gewebe nannte; es entspricht der Zwischensubstanz im Organ, doch fehlen die eingelagerten Platten.

Die sogenannten Zapfen an den arcadenförmigen Verzweigungen auf dem elektrischen Glied der Platte entsprechen der »Sohle« an motorischen Endplatten. Sie sind keine eigentlichen Nervenelemente, nehmen aber Fortsetzungen der Axencylinder als feine Fibrillen in sich auf, um sie der Platte zuzuführen.

Ausser den bereits bekannten zwei Endigungsweisen dieses Arcadensystems an der Platte, nämlich der directen Anfügung der hinten herantretenden Nerven, sowie der Anfügung an vorn hinzukommende Nerven mit Durchbohrung der Platte zur Gewinnung des Ansatzes an die hintere nervöse Seite, existirt noch eine dritte, höchst merkwürdige: Die Nerven und die mit ihnen verbundenen Zapfen liegen hinten an den Platten, die Verzweigungen der Zapfen durchbohren die Platten und kehren in kurzer Wendung, sie nochmals durchbohrend auf die hintere Seite zurück.

26. Zur Entwickelungsgeschichte der Holothurien.

Von Prof. Dr. Hubert Ludwig
in Bonn.

(Vorgelegt von Hrn. Schulze am 25. Juni; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXII]; — ausgegeben am 2. Juli.)

Zweite Mittheilung.

In meiner früheren Mittheilung über die Entwickelungsgeschichte der *Cucumaria planci*[1] habe ich die Zuverlässigkeit der Selenka'schen Angaben[2] über die ersten Entwickelungsstadien dieser Holothurien bezweifelt, und zwar auf Grund der Ergebnisse, zu welchen mich das Studium der späteren, mit dem achten Tage beginnenden Entwickelungsperiode geführt hat. Zur Beseitigung meiner Zweifel schien mir die Untersuchung der sieben ersten Entwickelungstage unerlässlich zu sein. Der damals ausgesprochenen Hoffnung, diese Untersuchung noch während dieses Jahres vornehmen zu können, kam die zoologische Station in Neapel in freundlichster Weise entgegen. Dieselbe liess mir in diesem Frühlinge durch ihren trefflichen Conservator Lo Bianco die Stadien der sieben ersten Entwickelungstage züchten und conserviren, und gab mir dadurch die erwünschte Möglichkeit, die Angaben Selenka's einer näheren Prüfung zu unterziehen. Dabei stellte sich heraus, wie auf den folgenden Blättern näher dargelegt werden soll, dass meine Zweifel nicht ohne Grund waren. Es erklärt sich das zum Theile aus dem Zustande, in welchem sich die Untersuchungstechnik vor sechszehn Jahren befand. Die von Selenka geübte Methode der Massen-Einbettung[3] giebt keine Sicherheit gegen mehr oder weniger willkürliche Auslegung und Combination von Schnittbildern. Auch lassen *in toto* aufgehellte Larven ihren Bau keineswegs mit solcher Deutlichkeit erkennen, wie man nach seinen Worten meinen

[1] Diese Sitzungsberichte 1891. Nr. X. (Gesammtsitzung vom 19. Februar s. S. 179.

[2] Zur Entwickelung der Holothurien. Zeitschr. f. wiss. Zool. Bd. 27, 1876, S. 165-174.

[3] Vgl. Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen, Sitzung vom 14. Juni 1875, S. 6.

könnte. Eine zuverlässige Feststellung der Thatsachen ist an diesem Objecte nur allein möglich durch sicher orientirte, lückenlose Serien möglichst dünner Quer- und Längsschnitte.

Selenka tödtete seine Larven mit Osmiumsäure oder mit einem Gemisch von Chromsäure und Osmiumsäure und führte sie dann in Alkohol über. Nach meinen Erfahrungen an älteren Stadien schien es mir aber auch für die ersten Entwickelungstage zweifelhaft, ob diesen Abtödtungsmethoden ein besonderer Vortheil vor einer vorsichtigen Alkoholbehandlung zukomme. Überdies war mir daran gelegen die ersten Anlagen der Kalkkörper zu studiren. So veranlasste ich denn die zoologische Station die diesjährige Brut nur mit 50 procentigem Alkohol zu tödten und dann in 70 procentigen Alkohol überzuführen. Die so conservirten Larven wurden *in toto* mit Boraxcarmin gefärbt und in Schnittserien von 5 μ Dicke zerlegt. Die Untersuchung ergab, dass die Anlagen das Wassergefässsystemes, Darmes, Coeloms und Nervensystemes sehr rasch und in enger Zusammendrängung auf einem kleinen Raume auftreten. Dabei sind die zelligen Elemente sehr klein und sehr ähnlich, und die Lumina aller späteren Hohlräume anfänglich viel enger als die Dicke der begrenzenden Wände. Dazu kommt die Undurchsichtigkeit der Larven, welche auch bei künstlicher Aufhellung der ganzen, gefärbten oder ungefärbten Objecte keinen ganz klaren Einblick gestattet. Aus diesen Gründen erweist sich die Entwickelung der *Cucumaria planci* überhaupt als ein recht schwieriger Gegenstand. Für manche Einzelfragen, z. B. nach der Schlussstelle der zum Ringkanal sich zusammenbiegenden Wassergefässanlage, sind jedenfalls andere Holothurien, die ihre Larvenzustände langsamer durchlaufen und dabei durchsichtiger sind, viel geeigneter. Man kann eben nicht jede Frage an jedem Objecte mit gleicher Aussicht auf Erfolg beantworten wollen.

Selenka hat nur einige wenige Zeitangaben der von ihm beobachteten Stadien mitgetheilt, da ihm seine darauf bezüglichen Notizen abhanden gekommen waren. Die jetzt von mir untersuchten Stadien der sieben ersten Tage sind alle rund einen Tag von einander entfernt. Für eine abermalige Untersuchung glaube ich aber darauf aufmerksam machen zu müssen, dass es besser wäre die Stadien in kürzeren Zeitabständen, etwa alle 12 oder alle 6 Stunden, zu conserviren. Namentlich dürfte sich das für den dritten und zweiten Entwickelungstag eignen.

Tag der Eiablage. Der von Selenka an den eben befruchteten Eiern in Abrede gestellte Kern (= erster Furchungskern) ist dennoch vorhanden; dagegen vermag ich von den von Selenka behaupteten »Kernkeimen« (im Sinne Götte's) nichts wahrzunehmen.

Ende des ersten Entwickelungstages. An der jetzt fertig ausgebildeten, freischwimmenden Blastula lässt sich nachweisen, dass die Substanz des »Gallertkernes« von den Blastodermzellen abgesondert wird. Dass sich die Blastula um $^1/_5$ ihres Durchmessers verkleinere (Selenka), vermag ich nicht zu bestätigen, ebensowenig, dass der sich nachher als Urdarm einstülpende Theil des Blastoderms sich durch eine grössere Dicke kenntlich mache. Ferner finde ich, dass nicht nur an der dem Fundus des späteren Urdarmes entsprechenden Stelle, sondern auch an den verschiedensten anderen Punkten ein Einwandern von Blastodermzellen in den »Gallertkern« und damit die Bildung des Mesenchyms stattfindet. Ein »Mesodermkeim« im Sinne Selenka's ist nicht vorhanden, wenn es auch richtig ist, dass der den Fundus des Urdarmes liefernde Theil des Blastoderms vorzugsweise an der Bildung der Mesenchymzellen betheiligt ist. Das Mesenchym entsteht also sowohl vom Ekto- als auch vom Entoderm und nicht von letzterem allein, wie Selenka behauptet. Die beginnende Einstülpung des Urdarmes, welche sich durch eine leichte Abflachung der kugligen Blastula zu erkennen giebt, geht bald dem ersten Auftreten der Mesenchymzellen voran, bald folgt sie demselben nach.

Ende des zweiten Entwickelungstages. Die Gastrula ist vollständig ausgebildet. Ein von Mesenchymzellen geliefertes Hautmuskelblatt im Sinne Selenka's kommt weder jetzt noch später zur Entwickelung, ebensowenig das von demselben Forscher behauptete mesenchymatöse Darmmuskelblatt. Der Urdarm liegt nicht seiner ganzen Länge genau in der Axe des jetzt kegelförmigen Larvenkörpers, sondern ist ein wenig nach der späteren Ventralseite gebeugt. Auch die Einstülpungsöffnung (Urmund) ist nicht genau terminal gelagert, sondern hat sich etwas nach der späteren Bauchseite verschoben. Selenka's Fig. 19 ist nicht von einer jüngeren Gastrula als seine Fig. 20, sondern stellt einen lateralen Sagittalschnitt durch ganz dasselbe Stadium vor, welches in Fig. 20 im Medianschnitt wiedergegeben ist.

Ende des dritten Entwickelungstages. Das Hydro-Enterocoel hat sich vom Urdarm abgeschnürt und in das Hydrocoel sowie in die beiden Enterocoel-Blasen zerlegt. Einzelne Larven sind etwas weniger weit in ihrer Entwickelung vorgeschritten und zeigen das Hydro-Enterocoel noch ungetheilt und im Zusammenhang mit dem Urdarme. Das Hydro-Enterocoel liegt nicht, wie Selenka angiebt, anfänglich, d. h. so lange es noch mit dem Urdarme zusammenhängt, dorsalwärts von diesem um erst nach seiner Abschnürung an dessen linke Seite zu rücken, sondern befindet sich von vornherein an dieser Seite. Nach der Abtrennung des Hydro-Enterocoels vom Urdarme und Zertheilung desselben in das Hydrocoel und in das linke und das rechte Enterocoel nehmen diese drei Blasen eine Lagerung ein, welche sich ohne Abbildung kaum verständlich machen lässt und deshalb an dieser Stelle nicht ausführlich geschildert werden soll. Das Hydrocoel tritt uns jetzt in Gestalt eines unregelmässigen Hufeisens entgegen, welches schief zur Längsaxe der Larve steht, mit seinem Bogen der Rückenseite der Larve zugekehrt ist, seinen kürzeren rechten Schenkel schräg nach vorn und unten in die rechte Larvenhälfte entsendet, dagegen seinen längeren linken Schenkel in gekrümmtem Verlaufe nach unten und hinten richtet. An dem mittleren Abschnitte dieses eigenthümlich gekrümmten Hydrocoels bemerkt man einige leichte Ausbuchtungen, welche wahrscheinlich die ersten Anlagen der Radialkanäle des Wassergefässsystemes darstellen. Zur genaueren Feststellung dieses Punktes sowie der Stelle, an welcher sich weiterhin die hufeisenförmige Hydrocoel-Anlage zu einem Ringe schliesst, müsste man Larven während des folgenden (vierten) Entwickelungstages in kürzeren (etwa 6 stündigen) Zeitabständen conserviren und in Schnittserien zerlegen. Leider stehen mir derartige Larven einstweilen nicht zu Gebote, sodass ich hier eine Lücke lassen muss, deren Ausfüllung wohl nicht zu lange wird auf sich warten lassen.

Der Kopfbuckel der Larve ist unterdessen zur Ausbildung gelangt und hat den grösseren Theil des Gallertkernes in sich aufgenommen. Unmittelbar hinter dem Kopfbuckel tritt an der Ventralseite der Larve eine Einbuchtung auf, welche sich bald in die Tiefe senkt und zum Vorhofe des Mundes wird. Aus dem Epithel dieser ektodermalen Einbuchtung der Mundbucht (Mundvorhof), entstehen die Epithelüberzüge der Fühler (sog. Fühlerkappen), sowie die Anlagen des Ringnerven und der Radialnerven, dagegen kann ich mich nicht davon überzeugen, dass daraus auch der Vorderdarm (Selenka) seine Entstehung nimmt. Im Beginne ihrer Bildung ist die Mundbucht an ihrem Rande von guirlandenförmigen Ektodermwülsten (Wimperwülsten) besetzt, welche sich in ihrer Gesammtheit mit der Wimperschnur einer *Auricularia* vergleichen lassen und so die schon früher von mir ausgesprochene Vermuthung bestätigen, dass sich bei *Cucumaria planci* Spuren eines der tonnenförmigen Larve vorausgehenden *Auricularia*-Stadiums erhalten haben.

Ende des vierten Entwickelungstages. Nach Selenka soll erst zu dieser Zeit (vergl. die Erklärung seiner Fig. 21) die Bildung und Abschnürung des Hydro-Enterocoels vom Urdarme vor sich gehen. Da aber an allen mir vorliegenden Larven diese Vorgänge schon am dritten Entwickelungstage sich abspielen, so muss ich annehmen, dass bei jener Zeitangabe Selenka's ein Irrthum untergelaufen sei. Meine Schnittserien beweisen, dass am Ende des vierten Tages die Entwickelung des Wassergefässsystemes ganz bedeutende und auffallend rasche Fortschritte gemacht hat: Der Ringkanal ist aus der Hufeisenform in die Ringform übergegangen, der junge Steinkanal, die Anlagen der fünf Radialkanäle und der von ihnen abzweigenden fünf primären Fühlerkanäle sind zur Ausbildung gelangt.

Die Stelle, an welcher die früher hufeisen- oder spangenförmige Anlage des Ringkanals sich zum Ringe schliesst, konnte ich, wie schon erwähnt, nicht mit aller wünschenswerthen Sicherheit feststellen. Immerhin lässt sich auch schon jetzt ein Indicien-Beweis dafür erbringen, dass jene Schlussstelle sich in der rechten Körperhälfte der Larve befindet. Die Poli'sche Blase tritt dagegen von Anfang an da auf, wo wir ihr auch in den späteren Entwickelungsstadien begegnet sind, nämlich im linken dorsalen Interradius, welcher seinerseits der linken Körperhälfte der Larve angehört. Es kann deshalb die herkömmliche, freilich nur auf Vermuthungen beruhende Ansicht, dass die Poli'sche Blase der Schlussstelle des Ringkanals entspreche, nicht richtig sein. Der eben gebildete Steinkanal lässt überall in seinem ganzen Verlaufe eine gleichmässig hohe Epithelauskleidung erkennen. Er entspringt dem mittleren ventralen Radialkanal gegenüber, also in der dorsalen Mitte des Ringkanales, aus dem hinteren Rande dieses letzteren. Eine Ventileinrichtung ist an dieser Ursprungsstelle jetzt ebensowenig vorhanden wie später.

Die Anlagen der fünf Radialkanäle sind Ausstülpungen aus dem vorderen Rande des Ringkanals, welche aber sofort nach aussen und hinten umbiegen. Die Anlage des mittleren ventralen Radialkanales unterscheidet sich alsbald durch schnelleres Wachsthum von den vier übrigen. In ihrem aboralen blinden Ende, welches bis dicht hinter die gleich zu erwähnenden Füsschenanlagen reicht, erweitert sich ihr Lumen und deutet damit die Gegend an, an welcher am folgenden Tage die jungen Füsschenkanäle auftreten.

Die Anlage der beiden ersten Füsschen geschieht gleichzeitig. Zunächst aber betheiligt sich das Wassergefässsystem noch nicht daran. Es wird vielmehr die Füsschenbildung eingeleitet von Seiten des Ektoderms, welcher rechts und links vom blinden Endstück des mittleren ventralen Radialkanales sich zu einer Grube einsenkt. Auf dem Boden der Grube liefern die Ektodermzellen durch rasche Vermehrung ein zelliges Polster, welches später zum äusseren Epithel des jungen Füsschens wird. Erst nach der Bildung dieser Füsschengruben beginnt, manchmal schon am Schlusse des vierten Entwickelungstages, der mediane ventrale Radialkanal jederseits eine Ausbuchtung zu entsenden, welche in den Boden der ektodermalen Füsschengrube eindringt und die dort befindliche Epithelwucherung vor sich her treibt.

Die fünf primären Fühlerkanäle erweisen sich von Anfang an als basale Ausstülpungen der Radialkanäle, während SELENKA sie früher als diese unmittelbar aus dem Ringkanal entstehen lässt. Ihre Lagerung und ihr rasches Wachsthum bringen es mit sich, dass sie leichter wahrzunehmen sind als die Radialkanäle selbst. Ihre Beziehung zu den einzelnen Radialkanälen lässt sich jetzt schon als genau dieselbe erkennen, welche ich in den späteren Entwickelungsstadien als ausnahmslose Regel erkannt habe: Der mittlere ventrale und der linke dorsale Radialkanal geben jederseits je einen, der rechte dorsale Radialkanal aber nur an seiner dorsalen Seite einen Fühlerkanal ab (vergl. meine erste Mittheilung). Auch darin kann ich SELENKA nicht beipflichten, dass zuerst nur drei Fühler und dann später noch zwei andere auftreten; wenigstens sind an allen von mir untersuchten Larven stets alle fünf Primärfühler gleichzeitig vorhanden. Die Fühlerkanäle senken sich nach vorn in die Fühlerkappen des Mundvorhofes ein und erhalten dadurch ihren Epithel-Überzug. Die so gebildeten jungen Fühler bleiben einstweilen vom Mundvorhofe umschlossen.

Aber nicht nur das Wassergefässsystem ist während des vierten Entwickelungstages ein gutes Stück vorgeschritten, auch die erste Anlage des Nervensystems lässt sich zu dieser Zeit nachweisen. Am Ende des vierten Tages bemerkt man auf dem Boden der Mundbucht einen aus Ektodermzellen gebildeten Ringwulst, welcher den Mittelpunkt des Bodens umkreist und an seiner äusseren Peripherie zwischen die fünf Fühlerkappen und zugleich in der Richtung der ebendort gelegenen jungen Radialkanäle fünf kurze, streifenartige Verlängerungen entsendet. Der Ringwulst ist die Anlage des Ringnerven, die fünf Verlängerungen die Anlagen der Radialnerven. Damit ist zum ersten Male der Nachweis erbracht, dass auch bei den füssigen Holothurien das centrale Nervensystem dem Ektoderm entstammt.

Auf dem Boden des Mundvorhofes erkennt man genau in der Mitte eine winzige Öffnung (Mund), mit welcher der Urdarm in den Vorhof durchgebrochen ist. An diese Öffnung schliesst sich der bis hinter den Ringkanal reichende Vorderdarm an, welcher ebenso wie der Enddarm in seiner ganzen Länge ein deutliches, wenn auch sehr enges Lumen erkennen lässt. Dagegen vermochte ich in dem mittleren Darmabschnitte kein deutliches Lumen wahrzunehmen; wie die zahlreichen Kerntheilungsfiguren beweisen, befinden sich die Entodermzellen des Mitteldarmes in einer Periode rascher Vermehrung. Dass der Vorderdarm im Gegensatze zum Mittel- und Enddarme nicht vom

Urdarme, sondern von einer besonderen ektodermalen, dem blinden Ende des Urdarmes entgegenwachsenden Einstülpung abzuleiten sei, muss ich bestreiten. Was als eine derartige Vorderdarm-Einstülpung gedeutet worden ist, ist nichts anderes als die zum Mundvorhof werdende Mundbucht. *Cucumaria planci* verhält sich in dieser Hinsicht ganz so wie *Synapta digitata*.

Das rechte und linke Enterocoel haben den Darm rings umfasst und sind an ihrer ventralen Berührungslinie ineinander durchgebrochen. Dorsal dagegen bleiben sie durch eine Mesenchymplatte von einander gesondert, welche die Anlage des Mesenteriums darstellt.

Ende des fünften Entwickelungstages. Zu dieser Zeit lenkt zunächst das weitere Schicksal der Anlage des centralen Nervensystemes die Aufmerksamkeit auf sich. Sowohl an der Anlage des Ringnerven als auch an denen der Radialnerven sondert sich die eigentliche Nervenanlage von einer oberflächlichsten Zellenlage. Letztere bildet von jetzt an den Boden des Mundvorhofes, während erstere in die Tiefe sinkt und sich von jener durch einen feinen Spaltraum abtrennt. Unterhalb jener oberflächlichen, auf dem Boden des Vorhofes verbleibenden und dessen Epithel darstellenden Zellenlage wuchert ferner eine Mesenchymschicht ein, welche ihrerseits dazu beiträgt, die Nervenanlage mitsammt dem ihr anliegenden Spaltraum immer mehr in die Tiefe zu drängen. Der Spaltraum ist, wie aus den folgenden Entwickelungsstadien mit unzweifelhafter Sicherheit hervorgeht, die erste Anlage des Epineuralringes und der radialen Epineuralkanäle. Wie man zuerst im Bereiche des mittleren ventralen Radius erkennt, wächst die von ihrem Epineuralkanal begleitete Anlage des Radialnerven zusammen mit dem zugehörigen Radialkanal des Wassergefässsystemes nach hinten. Dabei scheinen Radialnerv und Radialkanal des mittleren ventralen Radius mit ziemlich gleicher Schnelligkeit nach hinten vorzurücken, ja sogar der Nerv noch etwas rascher als der Wasserkanal, während umgekehrt in den vier anderen Radien, wie man am folgenden (sechsten) Tage wahrnimmt, der Radialkanal anfänglich schneller nach hinten wächst als die zugehörige Nervenanlage.

Der Steinkanal hat jetzt eine nach vorn gerichtete Ausbuchtung getrieben, deren Epithelauskleidung sich im Gegensatze zu dem hohen Epithel, welches im Übrigen den Steinkanal kennzeichnet, merklich abgeflacht hat. Diese Ausbuchtung ist die erste Anlage der von mir in meiner ersten Mittheilung beschriebenen Madreporenblase. Da sie erst secundär an dem jungen Steinkanal auftritt, so ist es mir unmöglich in ihrer Ausdeutung der Ansicht Bury's zu folgen, welcher in ihr den Rest eines »vorderen Enterocoels« erblicken will.

Die Poli'sche Blase tritt als eine kugelige Ausbuchtung am hinteren Rande des Ringkanales, zwischen den beiden linken Radialkanälen, also im linken dorsalen Interradius auf. Manchmal bemerkt man sie schon zu Ende des vorhergehenden (vierten) Tages.

Die beiden seitlichen Ausbuchtungen am hinteren Ende des mittleren ventralen Radialkanales sind länger geworden und geben sich nunmehr deutlich als die jungen Füsschenkanäle zu erkennen. Mitunter sieht man sie schon bei Larven vom Ende des vierten Tages. Sonach scheint es, dass sie bald zu Ende des vierten, bald zu Anfang des fünften Tages zur Ausbildung gelangen. In Schnittserien, welche genau quer zur Längsaxe der Larve liegen, trifft man, falls die Serie von vorn nach hinten fortschreitet, stets etwas früher auf den rechten Füsschenkanal als auf den linken, was den früher mitgetheilten Beobachtungen an älteren Stadien entspricht.

In Betreff der Stellung der fünf primären Fühler lässt sich jetzt mit noch grösserer Sicherheit als am vorhergehenden Tage feststellen, dass es stets der linke ventrale Primärfühler ist, welcher der Bauchmittellinie der Larve zunächst liegt. Überhaupt ist nunmehr die in meiner ersten Mittheilung erwähnte Schrägstellung der Symmetrieebene der zukünftigen Holothurie zur Symmetrieebene der Larve mit aller Schärfe zur Ausprägung gekommen.

Ende des sechsten Entwickelungstages. Bei einem Theile der Larven sind nunmehr die ersten kalkigen Skeletstücke angelegt; bei den übrigen geschieht das erst im Verlaufe des siebenten Tages. Die ersten Kalkgebilde entstehen zweifellos im Mesenchym. Sie haben die bekannte Gestalt eines winzigen Stäbchens, welches sich an den Enden vergabelt. Man bemerkt sie an drei verschiedenen Stellen: 1. am Steinkanal, 2. am Ringkanal, 3. an den Füsschenkanälchen.

1. Das am Steinkanal auftretende Kalkgebilde liegt in dem Mesenchym, welches an die Vorderwand der jungen Madreporenblase anstösst, und krümmt sich unter wiederholter Vergabelung so um deren Vorderfläche, dass daraus die Gestalt einer unvollständigen Gitterschale wird.

2. Am Ringkanal bemerkt man in dem Mesenchym, welches an die Aussenwand des Ringkanales angrenzt und selbst zum Mesenchym der Körperwand gehört, fünf kleine, stäbchenförmige, an den Enden vergabelte Kalkkörperchen. Die Längsaxe eines jeden Kalkkörperchens liegt tangential zu dem von dem Ringkanal beschriebenen Kreise. Unmittelbar vor einem jeden dieser Kalkkörperchen befindet sich die Stelle, an welcher ein Radialkanal aus dem Ringkanal austritt, um dann sofort nach aussen und hinten umzubiegen. Die Basis des Radialkanales reitet also gewissermaassen auf dem Kalkkörperchen,

dessen Längsaxe quer zur Längsaxe des Radialkanales gestellt ist und von dieser genau halbirt wird. Demgemäss sind, wie auch die späteren Stadien mit aller Gewissheit lehren, die fünf zuerst im Umkreis des Ringkanales auftretenden Kalkkörperchen die Anlagen der fünf Radialstücke des späteren Kalkringes. Damit ist der Nachweis erbracht, dass bei den füssigen Holothurien ebenso, wie wir das von den Synapten schon länger wissen, der Kalkring anfänglich nur aus den fünf Radialstücken besteht. Bemerkenswertherweise ist dasjenige junge Radialstück des Kalkringes, welches bei unserer *Cucumaria planci* an der Basis des mittleren (ventralen Radialkanales liegt, von Anfang an kräftiger entwickelt als die vier anderen.

3. An einzelnen Larven bemerkt man auch an jedem Füsschenkanälchen die Anlage eines Kalkkörperchens. Dasselbe ist ebenfalls in das Mesenchym eingelagert und befindet sich des Näheren unmittelbar nach innen von der Stelle, an welcher das junge Füsschenkanälchen nach aussen biegt um in den ektodermalen Theil der Füsschenanlage einzudringen.

Der Ringnerv lässt nunmehr in seiner tieferen Schicht mitunter schon eine sehr zarte Faserlage erkennen, welche ich bei den früher untersuchten Larven erst am neunten Tage bemerkt hatte. Es scheint demnach, dass die histologische Differenzirung des Ringnerven bei den einzelnen Individuen nicht mit gleicher Schnelligkeit vor sich geht.

Die Fühler werden auch jetzt noch nicht aus dem Vorhofe nach aussen hervorgestreckt. An ihrer Spitze ist noch keine Spur von den später vorhandenen glashellen kleinen Papillen zu bemerken. In der Wand des Fühlerkanales sind noch keine Muskelfasern zur Entwickelung gelangt. Dagegen bemerkt man an der Basis der Fühleranlagen besondere Ansammlungen von Zellen, welche in Zusammenhang mit dem Ringnerven auftreten und sich weiterhin zu den Fühlnerven ausbilden. An ihrer Ursprungsstelle sind die Fühlerkanäle verengt; indessen ist eine deutliche Ventilbildung an dieser Stelle noch nicht wahrzunehmen.

Das Mesenterium rückt schon am Steinkanal etwas nach links. Weiter nach hinten trifft man dasselbe zunächst am linken dorsalen, dann am linken ventralen und schliesslich am rechten ventralen Bezirk der Körperwand befestigt. Dieser Verlauf entspricht also jetzt schon derjenigen Anordnung des Mesenteriums, welche wir beim erwachsenen Thiere vorfinden. Durch diese Anordnung des Mesenteriums wird der Darm gezwungen sich in derselben Weise von links nach rechts zu krümmen. Um den eben angegebenen Verlauf des Mesenteriums zu ermöglichen, können die beiden Enterocoel-Blasen keine genau symmetrische Lage zur Symmetrieebene der Larve gehabt haben oder sie können eine solche Lage wenigstens nicht festgehalten haben. Das rechte Enterocoel umgreift nämlich mit seinem hinteren Abschnitte die linke Flanke des Darmes und rückt schliesslich mit seinem allerhintersten Theile auf die Bauchseite des Darmes. Dementsprechend schiebt sich das rechte Enterocoel mit seinem hinteren Abschnitte an die Bauchseite und mit seinem hintersten Bezirke an die rechte Flanke des Darmes.

Ende des siebenten Entwickelungstages. An einer besonders günstigen Längsschnittserie liess sich feststellen, dass jetzt auch schon am mittleren ventralen Radialnerv die Sonderung einer feinlängsfaserigen Schicht unterhalb der zelligen Schicht begonnen hat, also zwei Tage früher eintreten kann als ich früher gefunden hatte.

An den Spitzen der Fühler, welche nunmehr aus dem Eingang des Mundvorhofes hervorgestreckt werden können, sieht man die ersten glashellen Papillen als winzige, anscheinend rein cuticulare Erhebungen. Auch bemerkt man in der Wand der ausgestreckten Fühler die ersten Spuren der Längsmuskelfasern, welche von den Hydrocoelzellen des Fühlerkanals geliefert werden. Die Fühlerventile konnte ich an den beiden ventralen Fühlern schon am vorhergehenden Entwickelungstage wahrnehmen; jetzt sind sie an allen fünf Primärfühlern deutlich angelegt.

Bonn, 20. Juni 1891.

27. Über Saitenschwingungen.

Von O. Krigar-Menzel und A. Raps.

(Vorgelegt von Hrn. Kundt am 4. Juni: — gedruckt im Bericht vom 25. Juni [St. XXXII]; — ausgegeben am 2. Juli.)

Hierzu Taf. III und IV.

I. Gestrichene Saiten.

Die ersten wissenschaftlichen Untersuchungen über die Bewegungsform gestrichener Saiten rühren von Helmholtz[1] her, welcher das Vibrationsmikroskop zu seinen Beobachtungen benutzte. Er gelangte dadurch zur Kenntniss der Schwingungscurven, als deren Typus er die aus zwei gradlinigen Strecken zusammengesetzten Zickzackfiguren erkannte, welche mitunter durch Kräuselungen oder kleinere Zacken modificirt sind. Er gab eine analytische Darstellung der Saitenbewegung, die für den Fall, dass die Saite entweder nahe ihrem Ende oder genau im ersten Knoten eines Partialtones gestrichen wird, den Thatsachen vollkommen entspricht.

Später versuchte Clm. Neumann[2] eine graphische und mehrere subjective optische Methoden. Endlich hat einer von uns[3] die Helmholtz'schen Beobachtungen mit dem Vibrationsmikroskop fortgesetzt und viele der in der folgenden Arbeit objectiv festgestellten Figuren beobachtet und nachgezeichnet. Da die Arbeit nur als Dissertation gedruckt, also unzugänglich ist, soll auf dieselbe in Folgendem kein Bezug genommen werden.

Die in vorliegender Arbeit angewandte Methode Saitenschwingungen aufzuzeichnen, ist eine photographische. Das Wesentlichste derselben, die Erzeugung eines scharf begrenzten, sehr stark beleuchteten Punktes der Saite ohne jede Belastung derselben wurde bei Gelegenheit eines Versuches mit Hrn. Prof. Kundt aufgefunden.

---

[1] Die Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1862. 4. Auflage 1877. S. 137. Beilage VI.

[2] Wien. Ber. 61 II. S. 89. 1870.

[3] O. Krigar-Menzel. Über die Bewegungen gestrichener Saiten. Inaug. Diss. Berlin 1888, bei M. Niethe.

Spannt man nämlich quer vor einem von hinten stark erleuchteten Spalte[1] eine Saite aus und entwirft hiervon ein objectives Bild, so erscheint mitten im Spalte ein dunkler Punkt, welcher bei einer Erregung der Saite auf und abschwingt. Wird nun dieses Spaltbild auf eine, mit photographischem Papiere überzogene, gleichförmig schnell umlaufende Trommel geworfen, so entsteht nach der Entwickelung eine Curve (weiss auf schwarzem Grunde), welche die Excursionen eines Saitenpunktes als Function der Zeit darstellt.

Die Versuchsanordnung war die folgende: Der Lichtbogen einer elektrischen Lampe (von 22 Ampère) befindet sich im Brennpunkte eines Linsensystems, durch welches ein mikrometrisch verstellbarer Spalt beleuchtet wird. Von diesem entwirft eine zweite Linse (welche noch auf Vorschlag des Hrn. Hartmann angebracht wurde) ein reelles Bild in der Ebene, in welcher die Saite schwingt. Diese Anordnung wirkt ebenso, als ob die Saite sich genau in der Ebene des Spaltes bewege, wodurch ungleich schärfere Bilder entstehen, als wenn ohne Anwendung der zweiten Linse ein directes Bild des Spaltes mit der davor ausgespannten Saite auf dem photographischen Papiere erzeugt würde. Ausserdem kann man hierdurch die Grösse des kleinen Spaltbildes bequem verändern und eine grosse Lichtmenge in demselben vereinigen. Die elektrische Lampe ist durch eine Wand von dem Raume, in welchem die photographische Aufnahme erfolgen soll, gänzlich abgeschnitten. Nur kurze Zeit vor dem eigentlichen Versuche wird eine Klappe geöffnet und das reelle Spaltbild auf der Saite entworfen. Dieses Bild wird nun schliesslich durch eine dritte Linsencombination auf eine, durch ein Uhrwerk in Rotation versetzte Trommel projicirt. Die Trommel selbst ist zum Schutze gegen fremdes Licht ganz von einem Gehäuse umgeben, durch dessen hintere Thür sie eingesetzt bez. entfernt werden kann. In die der Saite zugekehrte Wand des Gehäuses ist ein Loch eingeschnitten, welches gewöhnlich durch einen elektrischen Momentverschluss geschlossen ist. Durch einen Druck auf einen Taster, welcher bequem zur Hand liegt, wird der Verschluss ausgelöst und die Öffnung des Momentverschlusses schnellt an derjenigen in der vorderen Kastenwand vorbei und lässt so eine kurze Belichtung der Trommel zu. Die Belichtungszeit kann durch Veränderung der Öffnung im Momentverschlusse beliebig variirt werden, so dass die Trommel gerade während einer Umdrehung Licht erhält. Dicht vor der Trommel war eine Blende

[1] In anderen Anordnungen wurden Spalte und Spaltbilder auch schon angewandt von L. Hermann, Pflüger's Archiv f. Physiol. XLV. 582 und v. Kries, Über ein neues Verfahren zur Beobachtung der Wellenbewegung des Blutes. du Bois Archiv f. Physiol. 1887 S. 254.

angebracht, welche das auf die Trommel geworfene Spaltbild noch eben durchliess. Hierdurch wird störendes Nebenlicht möglichst ausgeschlossen. Eine grosse, gleichförmige Umdrehungsgeschwindigkeit der Trommel wurde dadurch erzielt, dass als Windflügel des Uhrwerks ein kleines Papprädchen verwandt wurde. Dieses erzeugte bald nach der Auslösung des Uhrwerks einen deutlich wahrnehmbaren, hohen Ton. Sobald dieser Ton eine constante Höhe angenommen hatte, wurde die Aufnahme gemacht und so eine gleichförmige Umdrehungsgeschwindigkeit während der Belichtung erzielt.

Als photographisches Papier wurde das Bromsilber-Gelatine-Papier von Dr. Stolze verwendet, welches eine erstaunliche Empfindlichkeit besitzt. Entwickelt wurde dasselbe mittelst Hydrochinonlösung. Der ganze optische Apparat wurde sorgfältig centrirt und für eine gleichmässige Beleuchtung des Spaltes durch Heben und Senken der elektrischen Lampe Sorge getragen. Eine auf der Platte des Momentverschlusses angebrachte Marke gestattete jederzeit die richtige Lage des Spaltbildes zu erkennen. Vor jeder Versuchsreihe wurde die Schärfe des Bildes auf der Trommel geprüft. Zu diesem Zwecke wurde nach Entfernung der Trommel die matte Seite eines gefärbten Glasplättchens genau an die Stelle gebracht, welche das Bild auf der Trommel einnehmen sollte. Auf dieses Glasplättchen wurde dann das Bild des Saitenpunktes scharf eingestellt. Nach jeder Aufnahme wurde die Trommel um ein bestimmtes Stück gehoben und so auf einem Streifen photographischen Papieres etwa 6—8 Aufnahmen gemacht.

Als Saiten wurden zur Erreichung möglichst scharf gezeichneter Figuren sehr dünne Stahldrähte (etwa $0\overset{\text{mm}}{.}1$ Durchmesser) verwandt, welche in einem soliden Holzhalter abstimmbar ausgespannt wurden. Die Länge der Saite war $0\overset{\text{m}}{.}50$ bez. $0\overset{\text{m}}{.}80$. Dicke Saiten und solche aus anderem Material ergeben fast dieselben Resultate. Die Spaltbreite wurde meist gleich der Saitendicke genommen. Selbstverständlich kann jeder Saitenpunkt sowohl beobachtet wie angestrichen werden. Als besondere Vorzüge dieser Methode anderen gegenüber könnten, abgesehen von ihrer Objectivität, noch erstens der Umstand erwähnt werden, dass sie auch unregelmässige Zustände z. B. bei gezupften und geschlagenen Saiten mit gleicher Schärfe wie die regelmässigen, der Beobachtung zugänglich macht, und dass ferner die Tonhöhe der Saite gleichgiltig ist.

Zur leichteren Auffindung bestimmter Saitenpunkte war unter der Saite ein Maassstab angebracht, welcher die einfachsten rationalen Theilpunkte angab; ausserdem wurden die Beobachtungspunkte für die meisten zu Messungen verwendeten Figuren mit einem Meterstabe bis auf 0.001 der Saitenlänge genau bestimmt.

Für das richtige Treffen der gewünschten Streichstelle stellt sich nach einiger Übung als bester Führer das Ohr heraus, denn der Klang der Saite ist sehr verschieden und durchaus charakteristisch an verschiedenen Streichstellen. Die Messungen an den einfachsten, der analytischen Zerlegung zugänglichen Figuren wurde mittelst einer Bamberg'schen Theilmaschine ausgeführt.

Bevor wir zur Betrachtung der von uns photographirten Schwingungscurven und der daraus folgenden Form der Bewegung gestrichener Saiten übergehen, wollen wir eine allgemeine zusammenfassende Übersicht über die Art der möglichen Saitenbewegungen geben und dabei einige Bezeichnungen festsetzen, die uns nachher von Nutzen sein werden.

Jede aufgespannte Saite schwingt unter dem Einfluss einer Dämpfung, die zum allergrössten Theile davon herrührt, dass ihre Endpunkte nicht absolut fest liegen, sondern beim Schwingen deren Lager und die weiter damit zusammenhängenden Körper von verhältnissmässig sehr grosser Oberfläche mit in Bewegung setzen, wodurch dann erst eine ausgiebige Ableitung der Bewegung in die Luft als Schall entsteht. Soll daher eine gespannte Saite einen stationären Schwingungszustand behalten, wie ihn die gestrichenen Saiten thatsächlich zeigen, so muss das Verlorene durch die Arbeitsleistung einer äusseren Kraft ersetzt werden, und zwar ist dazu nur eine der Saitenbewegung isochrone periodische Kraft befähigt. Einer solchen muss die Wirkung des streichenden Bogens gleich sein. Die Theorie lehrt nun, dass die Eigentöne einer in der beschriebenen Weise gedämpften Saite nicht genau die Reihe der harmonischen Töne darstellen, sondern von denselben abweichen um Grössen, die um so mehr verschwinden, je fester die Enden sind. Bei den Violinsaiten und anderen auf standhaften, festgearbeiteten Haltern ausgespannten Saiten ist dieser Grenzfall so weit erreicht, dass das Ohr den Klang einer gezupften oder geschlagenen Saite — Fälle von frei verlaufenden Schwingungen, bei denen sicher nur die Eigentöne der Saite erklingen — als einen reinen, d. h. aus der Reihe der harmonischen Obertöne zusammengesetzten empfindet. Eine Bestätigung der theoretisch geforderten Abweichung scheinen indessen die Schwingungsfiguren gezupfter Saiten, deren Studium nächstens von uns angegriffen werden soll, zu liefern. Diese Figuren sind nämlich nicht genau periodisch, sondern zeigen von Welle zu Welle langsam fortschreitende Veränderungen, was darauf hindeutet, dass die die Bewegung zusammensetzenden Partialschwingungen nicht genau harmonisch sind. Die Bewegung der gestrichenen Saiten hingegen ist thatsächlich genau periodisch, kann daher nicht aus den freien Eigenschwingungen zusammengesetzt sein. Es genügt aber bekanntlich zur Erzeugung einer starken erzwungenen Schwingung, dass deren Periode einer natürlichen Periode sehr nahe kommt, und einen solchen Fall haben wir hier vor uns.

Es gestattet diese vollkommene Periodicität eine grosse Vereinfachung in der Betrachtung der Bewegung. Denn sobald wir nicht den Verbleib der Energie verfolgen, können wir von der Dämpfung ganz absehen und die gewöhnliche Theorie der Schwingungen von Saiten mit festen Enden anwenden. Die Wirkung des Bogens ist alsdann eine derartige, dass der angestrichene Saitenpunkt zu einer vorgeschriebenen Bewegung gezwungen ist, deren Periode gleich der der natürlichen Saitenschwingung ist.

Die allgemeinste mögliche Saitenbewegung ist dargestellt durch die Gleichung:

$$y = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\infty} \mathfrak{A}_{\mathfrak{a}} \sin \mathfrak{a}\pi \frac{x}{l} \cdot \sin \mathfrak{a} n (t - \tau_{\mathfrak{a}}). \qquad 1.$$

Hier bedeutet l die Länge der Saite, x den Abstand eines beobachteten Saitenpunktes vom Ende der Saite, y seine Entfernung aus der Ruhelage zur Zeit t, n ist die Zahl der in 2π Secunden ausgeführten Grundtonschwingungen und $\mathfrak{A}_{\mathfrak{a}}$ und $\tau_{\mathfrak{a}}$ sind zwei Reihen von Constanten.

Die photographirten Schwingungscurven geben für einen bestimmten Saitenpunkt x eine graphische Darstellung für y als periodische Function von t, deren Periode T gleich $\frac{2\pi}{n}$ zu setzen ist, um den willkürlichen, von der Drehungsgeschwindigkeit der Trommel abhängigen Abscissen-Maassstab der Figuren auf das allgemeine Zeitmaass zu reduciren. Diese periodischen Functionen von t lassen sich stets als Fourier'sche Reihen darstellen in der Form:

$$y = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\infty} A_{\mathfrak{a}} \cdot \sin \mathfrak{a} n (t - \tau_{\mathfrak{a}}). \qquad 2.$$

Die Coefficienten $A_{\mathfrak{a}}$ und Phasenconstanten $\tau_{\mathfrak{a}}$ lassen sich — wenigstens in der Idee — stets aus der geometrischen Gestalt der Figuren berechnen, sind also als bekannte Grössen anzusehen, und auf diese Weise giebt die Entwickelung einer einzigen Schwingungsfigur nach Gleichung 2. der allgemeinen Form 1. einen bestimmten Inhalt; die Relation zur Bestimmung der $\mathfrak{A}_{\mathfrak{a}}$ ergiebt sich durch Vergleich von 1. und 2. folgendermaassen:

$$A_{\mathfrak{a}} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{a}} \cdot \sin \mathfrak{a}\pi \frac{x}{l}. \qquad 3.$$

Die Grösse A_α misst die Amplitude, mit der die αte Partialschwingung den Punkt x erregt, ihre Grösse wird von der Lage des beobachteten Punktes abhängen, daher kein Maass für die Stärke der Partialschwingung sein. Ein solches haben wir erst in $\mathfrak{A}_\alpha$; wir wollen daher diese Grösse die Hauptamplitude der αten Partialschwingung nennen. Wir könnten dieselbe als absolute Grösse betrachten, so lange wir die Phasenconstante zur Verfügung haben und einen Zeichenwechsel leicht durch einen Zuschlag von $\pm\pi$ zum Argument des Sinus herstellen können. Der allergrösste Theil der gut gerathenen Figuren ist aber derart, dass bei passend gewähltem Anfangspunkt der Zeit sämmtliche τ_α verschwinden, nur sind wir dann genöthigt zur Herstellung des richtigen Vorzeichens der einzelnen Glieder der Summe die $\mathfrak{A}_\alpha$ als algebraische Grössen aufzufassen. Die Hauptamplitude des Grundtones, also $\mathfrak{A}_1$, setzen wir ein für alle Male positiv an. Dadurch wird der Anfangspunkt der Zeit in denjenigen Augenblick gelegt, in welchem die erste Partialschwingung, allein wirksam gedacht, sämmtliche Saitenpunkte nach der Seite der positiven y hin durch die Ruhelage führt. Zu demselben Zeitpunkt wird auch durch jede andere, einzeln wirkende Partialschwingung die ganze Saite durch die Ruhelage geführt, denn wenn $\sin nt = 0$ ist, so ist auch $\sin \alpha nt = 0$. Also wird auch bei der gleichzeitigen Wirkung aller Partialschwingungen die Saite zu diesem Zeitpunkt durch die Nulllage gehen. Durch diese Festsetzung des Vorzeichens von $\mathfrak{A}_1$ sind nun die Vorzeichen aller Hauptamplituden bestimmt. Nämlich $\mathfrak{A}_\alpha$ ist positiv, wenn die αte Partialschwingung zur Zeit $t = 0$ die Punkte der ersten, dritten u. s. w. Partialstrecke in positiver Richtung durch die Ruhelage führt; im entgegengesetzten Falle ist $\mathfrak{A}_\alpha$ negativ. Man kann den Schwingungsfiguren leicht ansehen, ob sie zu den soeben charakterisirten Bewegungen gehören, bei denen alle $\tau_\alpha = 0$ sind, deren Darstellung also die Form hat:

$$y = \sum_{\alpha=1}^{\infty} \mathfrak{A}_\alpha \cdot \sin \alpha\pi \frac{x}{l} \cdot \sin \alpha nt \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1^a.$$

Die Figuren zeigen in diesem Falle das Charakteristische aller der Curven, bei denen die Ordinate (y) eine ungerade Function der Abscisse (t) ist. Wenn man nämlich das Blatt, auf dem dieselben gezeichnet sind, auf den Kopf stellt, also die Figuren in ihrer eigenen Ebene um zwei Rechte dreht, so bieten dieselben den gleichen Anblick dar, wie vor der Drehung, sie lassen sich ohne weitere Drehung mit den in der ursprünglichen Lage gebliebenen zur Deckung bringen. Um Figuren dieser Art kurz bezeichnen zu können, wollen wir denselben den Namen »Kehrgleiche Figuren« beilegen. Ihre analytische Darstellung ist:

$$y = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\infty} A_{\mathfrak{a}} \cdot \sin \mathfrak{a}\, nt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2^{\text{a}}.$$

Wenn die Schwingungsfigur eines einzigen Saitenpunktes kehrgleich ist, so sind es zugleich alle übrigen.

Wir wollen noch die Figur, welche im Punkte x erscheint, mit derjenigen vergleichen, welche die Bewegung des Punktes $(l-x)$ darstellt. Zwei solche Saitenpunkte, die gleich weit vom Mittelpunkt der Saite abstehen, sollen »symmetrische Punkte« heissen. Auf Grund der Gleichung 1ª. erkennen wir, dass die Bewegung im Punkte $(l-x)$ gegeben ist durch:

$$y_1 = \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\infty} \left[\mathfrak{A}_{\mathfrak{a}} \cdot \sin \mathfrak{a}\, \pi \frac{l-x}{l} \right] \cdot \sin \mathfrak{a}\, nt$$

$$= \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\infty} \left[(-1)^{\mathfrak{a}-1} \cdot \mathfrak{A}_{\mathfrak{a}} \sin \mathfrak{a}\, \pi \frac{x}{l} \right] \cdot \sin \mathfrak{a}\, nt.$$

Eine einfache Überlegung zeigt, dass die durch diese Gleichung dargestellte Figur das Spiegelbild der im Punkte x auftretenden ist. (Unter Spiegelbild ist natürlich diejenige Figur verstanden, die aus der ursprünglichen durch Vertauschung von rechts und links unter Beibehaltung von oben und unten, oder auch durch Vertauschung von oben und unten, unter Beibehaltung von rechts und links entsteht.) Eine Figur geht ferner in ihr Spiegelbild über, wenn man die Streichstelle in den ihr symmetrischen Punkt verlegt, und endlich auch dann, wenn man ohne Änderung der Stelle die Richtung des Striches umkehrt. Diese beiden Fälle sind nur logisch verschieden von dem vorher besprochenen und lassen sich auf diesen zurückführen, wenn man bedenkt, dass die beiden Hälften der Saite wesensgleich sind. Es folgt aber daraus, dass zur eindeutigen Bestimmung der Figuren eine bestimmte Richtung des Striches angegeben sein muss. Als solche wurde diejenige angenommen, welche den Bogen in der Richtung der wachsenden y bewegt, also bei unserer Aufstellung des Apparates der Heraufstrich in verticaler Richtung. Die Figuren sind fast alle bei dieser Strichrichtung erzeugt; das Gegentheil ist sonst ausdrücklich bemerkt. Schliesslich ist in Bezug auf die richtige Auffassung der Figuren zu berücksichtigen, dass das photographische Objectiv umgekehrte Bilder entwirft, dass also beim Steigen des beobachteten Saitenpunktes sein Bild auf der rotirenden Walze sinkt, mithin oben und unten vertauscht ist. Die Richtung der fortschreitenden Zeit in den Figuren ist aber durch den Sinn der Walzendrehung fest bestimmt. Die Photographie giebt also nicht die Schwingungsfigur des beobachteten Saitenpunktes, sondern deren Spiegelbild, sie giebt also direct die Schwingungsfigur des zur Beobachtungsstelle symmetrisch gelegenen Punktes. Bei den photographischen Aufnahmen wurden die Beobachtungspunkte stets auf der vom Objectiv aus gesehen rechten Hälfte der Saite gewählt und ihre Abstände vom rechten Endpunkt gemessen, während die Streichstellen auf der linken Hälfte lagen und vom linken Ende aus gemessen wurden. Da wir nun bei der Auslegung der Figuren an Stelle des wirklich beobachteten Punktes den symmetrisch gelegenen setzen müssen, so denken wir uns einfach beide Abmessungen, sowohl des Beobachtungspunktes x wie der Streichstelle ξ vom linken Ende gemessen.

Wir können nun zur Betrachtung der Figuren selbst übergehen, von denen einige Proben auf den zwei diesem Aufsatz beigefügten Tafeln reproducirt sind. Von besonderem Interesse ist bei des Discussion der Figuren das Erkennen der Grösse der einzelnen Hauptamplituden, und man wird gut thun, zum Zweck der Beobachtung einzelner Partialschwingungen die Beobachtungsstelle möglichst in die Mitte eines Schwingungsbauches der betreffenden Partialschwingung zu legen. Für alle ungeradzahligen Componenten empfiehlt sich daher ganz besonders der Mittelpunkt der Saite zur Beobachtung, während ein für alle geradzahligen Componenten zugleich brauchbarer Beobachtungspunkt der Knoten des dritten Tones ist, Man erhält so eine erste Gruppe von Figuren, für die $x = \frac{l}{2}$ ist, während ξ alle möglichen Werthe von etwa $\frac{l}{20}$ bis $\frac{l}{2}$ durchläuft. Eine zweite Gruppe giebt die in $x = \frac{l}{3}$ beobachteten Figuren. Ein dritter Beobachtungspunkt, dessen Figuren von besonderem Interesse sind, ist irgend ein dem Ende der Saite möglichst nahe gelegener, weil dieser alle Partialschwingungen zugleich deutlich zeigt, und hier die Amplituden im Vorzeichen mit den Hauptamplituden übereinstimmen. Der einzige Übelstand dieses Beobachtungspunktes sind die kleinen Excursionen. Dieser Beobachtungspunkt liefert eine dritte Gruppe von Figuren. Ferner wurde eine grosse Reihe von Figuren aufgenommen, für welche $x = \xi$ ist, die also die Bewegung des angestrichenen Punktes selbst zeigen. Diese Figuren für alle möglichen Saitenpunkte gebildet, geben eine vierte Gruppe, zu der als verwandte Figuren noch die hinzukommen, bei denen ξ in einem Knoten eines mittleren Partialtons, etwa des fünften oder siebenten liegt, während x in einem anderen Knoten desselben Tones liegt. Endlich wurde eine fünfte Gruppe von Figuren beobachtet, bei denen die Streichstelle nahe dem Saitenende lag, wo die Geiger zu streichen pflegen. Ausserdem wurden noch zahlreiche Figuren fixirt, welche sich keiner der fünf Gruppen einreihen.

Bei blosser Betrachtung der Figuren fallen nun folgende Gesetzmässigkeiten in's Auge. Die Figuren der ersten, zweiten und dritten Gruppe bestätigen ausnahmslos, dass diejenigen Partialschwingungen, welche in der Nähe der Streichstelle einen Knoten haben, besonders stark ausgebildet sind, so dass sie als hohe Wellen von der dem Partialton entsprechenden Anzahl über jeder Periode der Figur lagern. (Bei Bezeichnung der den Knoten naheliegenden Streichstellen ist eine unbestimmt gelassene kleine Grösse ε benützt, deren Werth man sich etwa gleich $\frac{1}{20}$ denken mag.) Ferner sieht man, dass diejenigen beiden Figuren, die entstehen, wenn man zu beiden Seiten desselben Knotens streicht, sich durch das entgegengesetzte Vorzeichen der Amplitude der stark entwickelten Partialschwingung unterscheiden. Um dieses Vorzeichen beurtheilen zu können, muss man zunächst in den betreffenden Figuren den Anfangspunkt der Zeit unseren Festsetzungen entsprechend bestimmen. Alle Figuren zeigen in jeder Periode eine allgemeine einmalige Hebung und Senkung entsprechend der Grundtonschwingung. Jedem Punkt der Hebung entspricht wegen der Kehrgleichheit ein entgegengesetzt gleich gelegener Punkt der Senkung. In zweifelhaften Fällen sind der höchste und tiefste Punkt des Linienzuges bestimmt einander zugeordnet. Man verbinde nun einen wohlcharakterisierten Punkt der Senkung mit dem ihm entsprechenden Punkte der der Zeit nach darauf folgenden Hebung durch eine gerade Linie. Der Mittelpunkt dieser Strecke, welcher nothwendig auch ein Punkt der Curve ist, ist dann der gesuchte Anfangspunkt der Zeit. Die stark heraustretende Partialschwingung ist nun so deutlich in dem Linienzuge zu erkennen, dass man beurtheilen kann, ob sie im Anfangspunkte der Zeit in auf- oder absteigender Richtung durch die Ruhelage führt. Im ersten Falle ist die Amplitude positiv, im zweiten negativ. Um nun von dieser Amplitude auf die Hauptamplitude zu kommen, benützen wir die Gleichung 3. S. 617, welche für die ungeraden in $x = \frac{l}{2}$ beobachteten Töne giebt:

$\mathfrak{A}_\alpha = A_\alpha : \sin \frac{\alpha\pi}{2}$, für die geraden in $x = \frac{l}{3}$ beobachteten Töne aber $\mathfrak{A}_\alpha = A_\alpha : \sin \frac{\alpha\pi}{3}$. Aus dem Vorzeichen der hier vorkommenden Sinus ist zu entnehmen, ob $\mathfrak{A}_\alpha$ dasselbe oder das entgegengesetzte Zeichen hat, wie die aus der Figur zu erkennende Amplitude A_α. Bei den Figuren der dritten Gruppe hat $\mathfrak{A}_\alpha$ für alle wichtigen Töne bis zum zwölften dasselbe Vorzeichen, wie A_a. Es zeigt sich nun bei einer Betrachtung der Figuren in dieser Hinsicht als Ergänzung zu dem Gesetz über das starke Heraustreten folgendes Gesetz über das Vorzeichen:

Die stark ausgebildeten $\left\{\begin{matrix}\text{ungeradzahligen}\\ \text{geradzahligen}\end{matrix}\right\}$ Partialschwingungen haben $\left\{\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right\}$ Hauptamplituden, wenn die Streichstelle in der ersten, dritten, fünften ... Partialstrecke des starken Tones liegt, dagegen $\left\{\begin{matrix}\text{negative}\\ \text{positive}\end{matrix}\right\}$ Hauptamplituden, wenn die Streichstelle in der zweiten, vierten, ... Partialstrecke liegt.

Ein zweites allgemeines Gesetz ist folgendes: Wenn die Streichstelle aus der Nähe eines wichtigeren Knotens in diesen selbst rückt, so tritt eine Unstetigkeit in der Form der Saitenbewegung auf, indem die vorher besonders stark ausgebildete Partialschwingung plötzlich ausfällt, und dadurch Figuren von ganz anderem Aussehen erscheinen. Die Ausdehnung dieses den Knoten umgebenden Gebietes, innerhalb dessen der Partialton ausfällt, hängt von äusseren Umständen: Klebkraft des Bogens, Geschwindigkeit und Druck gegen die Saite ab, und ist im Allgemeinen um so breiter, je wichtiger der Partialton ist, kann indessen unter günstigen Bedingungen bis zum zehnten Tone wahrgenommen werden. In den nahe dem Saitenende beobachteten Figuren der dritten Gruppe kann man das Ausfallen der Obertöne beim Anstreichen in deren Knoten analytisch nachweisen. Die in diesen Fällen $\left(\xi = \frac{l}{7}, \frac{l}{6}, \frac{l}{5}, \frac{l}{4}, \frac{l}{3}, \frac{l}{2}\right)$ auftretenden treppenförmigen Figuren bestehen aus gleich langen horizontalen Strecken, die durch fast verticale Abhänge mit einander verbunden sind, und so eine regelmässige aufsteigende Treppe bilden, deren Stufenzahl gleich der Ordnungszahl des ausfallenden Tones ist. Auf die höchste Stufe folgt nach einem steilen Abfall wieder die tiefste. (Diese Figuren sind im Vibrations-Mikroskop schärfer zu sehen, als auf den Photographien, weil man dort bei der starken Vergrösserung den Beobachtungspunkt näher an das Ende der Saite verlegen kann. Sie sind aber auch hier wenigstens deutlich zu erkennen.) Diese Figuren erlauben nun in dem idealen Grenzfall vollkommen verticaler Abfälle eine sehr einfache analytische Berechnung der Coefficienten A_a der Fourier'schen Reihe, als deren Resultat sich die Entwickelung der aufsteigenden Treppe mit μ Stufen folgendermaassen ergiebt:

$$y = C \cdot \sum_{\substack{a=1 \\ a \text{ nicht} = \mu,\, 2\mu,\, 3\mu, \ldots}}^{\infty}{}' \frac{(-1)^{a-1}}{a} \sin a\, nt \qquad \text{4.}$$

Man sieht also, dass die μte, 2μte, 3μte, ... Partialschwingung fehlen. Die Amplituden der übrigen Töne $\pm \frac{C}{\mathfrak{a}}$ lassen eine Bestimmung der relativen Grösse der Hauptamplituden in diesen Fällen zu. Die Beobachtungsstelle x muss so nahe am Saitenende gedacht werden, dass man die x enthaltenden Sinus gleich ihren Arcus setzen kann. Man erhält dann aus Gleichung 3

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{a}} = (-1)^{\mathfrak{a}-1} \frac{C_1}{\mathfrak{a}^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5.$$

Die vorhandenen Hauptamplituden verhalten sich also wie die reciproken Quadrate ihrer Ordnungszahlen; die ungeradzahligen sind positiv, die geradzahligen negativ.

Wir kommen nun zur vierten Gruppe von Figuren, welche die Bewegung des angestrichenen Punktes selbst zeigen, und zwar ergiebt sich dabei, dass in allen Fällen eine mögliche und die einfachste vorkommende Saitenbewegung diejenige ist, bei der der angestrichene Saitenpunkt mit constanter Geschwindigkeit aufwärts und plötzlich umkehrend mit ebenfalls constanter aber grösserer Geschwindigkeit abwärts geht. Der Anblick der dadurch entstehenden Figur ist ein aus zwei Strecken gebildeter Zickzack. Diese regelmässigen Zickzackfiguren wurden sämmtlich gemessen, d. h. es wurde das Verhältniss der Projectionen beider Strecken bestimmt, was nichts anderes ist, als das Verhältniss der zu beiden Theilen der Bewegung gebrauchten Zeiten. In der folgenden Tabelle ist als Resultat der Messungen unter ω das Verhältniss der Projection der kürzeren (absteigenden) Strecke zur Länge der ganzen Periode angegeben, während unter ξ/l das Verhältniss des durch die Streichstelle abgeschnittenen kürzeren Saitenstückes zur Länge der ganzen Saite angeführt ist. Ein Blick auf diese Tabelle lehrt, dass das Verhältniss ω in ganz unregelmässiger Weise wechselt. Nur so lange $\xi/l < \frac{1}{7}$ ist, kann man beide als gleich ansehen, und ferner auch in den singulären Fällen, wo einer der ersten Knoten $l/6$, $l/5$, $l/4$, $l/3$ angestrichen wird. In allen anderen Fällen ist ω von ξ/l verschieden und zwar stets bedeutend kleiner. Eine regelmässige Grösse hat dieser kleinere Werth von ω noch für die Fälle, dass Knotenpunkte, wie $^2/_9$, $^2/_7$, $^3/_{10}$, $^3/_8$, $^2/_5$, $^3/_7$, $^4/_9$ angestrichen werden. Dort ist ω nämlich ein Bruch mit dem gleichen Nenner, aber stets mit dem Zähler 1. An den Stellen endlich, wo ξ/l kein einfacheres rationales Verhältniss ist, ist für ω kein Gesetz zu finden. Der Werth hält sich meistens unterhalb 0.1 oder in der Nähe dieser Grösse. Anhangsweise sind noch ein paar Zickzackfiguren angeführt, welche beim Streichen im ersten Knoten eines Tones in den anderen Knoten desselben Tones erscheinen.

Tabelle.

ξ/l	Näherungs-werth.	ω	Näherungs-werth.	ξ/l	Näherungs-werth.	ω	Näherungs-werth.
0.045		0.050		0.286	$^2/_7$	0.140	$^1/_7$
0.068		0.068		0.300	$^3/_{10}$	0.110	$^1/_{10}$
0.141	$^1/_7$	0.138	$^1/_7$	0.310		0.087	
0.166	$^1/_6$	0.160	$^1/_6$	0.320		0.051	
0.177		0.081		0.333	$^1/_3$	0.320	$^1/_3$
0.188		0.044		0.350		0.070	
0.200	$^1/_5$	0.199	$^1/_5$	0.375	$^3/_8$	0.120	$^1/_8$
0.211		0.078		0.390		0.147	
0.220	$^2/_9$	0.110	$^1/_9$	0.400	$^2/_5$	0.202	$^1/_5$
0.230		0.120		0.429	$^3/_7$	0.143	$^1/_7$
0.250	$^1/_4$	0.248	$^1/_4$	0.444	$^4/_9$	0.120	$^1/_9$
0.270		0.093					

Anhang.

ξ/l	Näherungs-werth.	x/l	Näherungs-werth.	ω	Näherungs-werth.
0.143	$^1/_7$	0.286	$^2/_7$	0.272	$^2/_7$
0.200	$^1/_5$	0.400	$^2/_5$	0.399	$^2/_5$
0.143	$^1/_7$	0.430	$^3/_7$	0.425	$^3/_7$

Diese Zickzackfiguren lassen nun eine analytische Zerlegung in Fourier'sche Reihen zu, und zwar ist für den Zickzack vom Verhältniss ω:

$$y = C \cdot \sum_{\mathfrak{a}=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mathfrak{a}-1}}{\mathfrak{a}^2} \cdot \sin \mathfrak{a}\pi\omega \cdot \sin \mathfrak{a}nt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6.$$

Die Amplituden sind nämlich $\mathfrak{A}_{\mathfrak{a}} = C \cdot \frac{(-1)^{\mathfrak{a}-1}}{\mathfrak{a}^2} \sin \mathfrak{a}\pi\omega$.

Wenn dieser Zickzack an der Streichstelle, also im Punkte ξ beobachtet ist, so folgen aus 3. die Hauptamplituden:

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{a}} = C \cdot \frac{(-1)^{\mathfrak{a}-1}}{\mathfrak{a}^2} \cdot \frac{\sin \mathfrak{a}\pi\omega}{\sin \mathfrak{a}\pi\xi/l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 6^a.$$

In dieser einen Formel unter Berücksichtigung der in der vorstehenden Tabelle gegebenen zusammengehörigen Werthe von ω und ξ/l, liegt nun die Bestätigung für sämmtliche Gesetze, die wir aus den complicirteren Figuren der ersten drei Gruppen herausgelesen haben.

Liegt nämlich erstens ξ in der Nähe eines Knotens, sagen wir bei einem Knoten des μten Tones, so sieht man, dass die im Nenner stehende Grösse $\sin a\pi\xi/l$ jedesmal sehr klein wird, sobald a gleich μ oder gleich einem Vielfachen von μ ist. Dadurch wird aber der Ausdruck für $\mathfrak{A}_a$ sehr gross, denn wenn wir für ω einen Durchschnittswerth, etwa $^1/_{12}$ setzen, so bleibt der Zähler $\sin a\pi\omega$ für alle wichtigeren Töne ein endlicher positiver Werth. Auch die gefundene Regel über das Vorzeichen findet ihre Bestätigung. Dasselbe wird nämlich bei den ungeradzahligen Hauptamplituden, für welche $(-1)^{a-1} = +1$ ist, mit dem Vorzeichen von $\sin a\pi\xi/l$ übereinstimmen, bei den geradzahligen aber demselben entgegengesetzt sein. Für die jenseits etwa des zwölften Tones gelegenen Töne würde allerdings der Zähler $\sin a\pi\omega$ einen Zeichenwechsel bedingen. Doch sind diese Töne im Allgemeinen so schwach entwickelt, dass sie schwer zu controliren sind. Man braucht daher hierin keinen Widerspruch gegen die Erfahrung zu sehen.

Für den Anstrich genau im ersten Knoten eines Tones, sagen wir des μten hatten wir aus der Tabelle das Gesetz entnommen $\omega = \xi/l$ also $\omega = 1/\mu$. Für alle nicht durch μ theilbaren a folgt somit aus Gleichung 6^a.

$$\mathfrak{A}_a = C\,\frac{(-1)^{a-1}}{a^2}, \quad a \text{ nicht } = \mu,\ 2\mu,\ 3\mu \ldots\ldots$$

(Man vergleiche dasselbe Resultat in Gleichung 5.)

Für die Amplituden $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{A}_{2\mu}$, ... können wir so nichts schliessen, da dieselben die unbestimmte Form $0/0$ annehmen. Aber aus der Gleichung 6. folgt direct:

$$A_\mu = A_{2\mu} = A_{3\mu} = \ldots\ldots = 0.$$

In dem Zickzack, den die Streichstelle zeigt, fehlt also die μte Schwingung nebst ihrem Anhang von Vielfachen. Diese werden also durch den Strich nicht erzeugt, könnten also auf der Saite zwar bestehen, müssten aber durch irgend eine Ursache erregt werden, und da wir ausser dem Strich des Bogens keine weitere Ursache annehmen, so werden diese Partialschwingungen eben nicht erregt, und wir haben

$$\mathfrak{A}_\mu = \mathfrak{A}_{2\mu} = \mathfrak{A}_{3\mu} = \ldots\ldots = 0.$$

In den Fällen, wo die Streichstelle nicht im ersten, sondern in einem der mittleren Knoten (im $i$ten) des μten Tones liegt, fanden wir ω nicht gleich ξ/l d. h. gleich i/μ, sondern stets gleich $1/\mu$. Dadurch wird ebenso wie vorher bewirkt, dass die Hauptamplituden der μten u. s. w. Partialschwingungen verschwinden, zugleich aber verhalten sich die vorhandenen Hauptamplituden nicht, wie vorher, sondern es wird das starke Heraustreten derjenigen tieferen Partialtöne erklärt, welche nahe bei diesen mittleren Knoten ebenfalls einen solchen besitzen, wie z. B. des vierten Tones beim Anstrich in $^2/_9$ und $^2/_7$, des dritten Tones bei $^3/_{10}$ und $^3/_8$, des fünften Tones bei $^3/_8$ und $^3/_7$, des zweiten Tones bei $^3/_7$, $^4/_9$ u. s. w.

Wir fanden in der mitgetheilten Tabelle für die Verhältnisse der an der Streichstelle beobachteten Zickzackfiguren eine Übereinstimmung zwischen ω und ξ/l für kleine Werthe von ξ, also für Streichstellen nahe dem Saitenende, wo die Saiten zum musikalischen Gebrauche gestrichen zu werden pflegen. In diesem Falle zeigen sämmtliche Saitenpunkte geradlinige Zickzacke als Schwingungsfiguren, deren Verhältnisse ω nach genauen Messungen mit dem Verhältnisse x/l übereinstimmen. Es ist auch eine theoretisch abzuleitende Nothwendigkeit, dass alle Saitenpunkte sich in der angegebenen Weise bewegen müssen, sobald nur an einem einzigen irrationalen Punkte x der Saite ein geradliniger Zickzack vom Verhältniss $\omega = x/l$ beobachtet ist. Es ist dieser Fall der Saitenbewegung von Helmholtz vollständig behandelt worden.

Die geradlinigen Zickzacke sind die einfachsten Figuren, welche der vom Bogen angestrichene Saitenpunkt zeigen kann. Dass sie nicht die einzig möglichen sind zeigen mehrere Figuren der Gruppe IV. Diese sind zwar complicirter, viele unter ihnen sind aber noch kehrgleich und ein grosser Theil derselben so einfach gebildet, dass sie eine Messung und analytische Berechnung der Amplituden zulassen. Die Ergebnisse liefern zwar etwas andere Grössenverhältnisse für die nicht besonders stark entwickelten Partialschwingungen, geben aber dieselben Gesetze über das starke Angeben oder das Ausfallen bestimmter einzelner Töne. Alle diese Figuren zeigen das Gemeinsame, dass sie aus geradlinigen Strecken von nur zwei Richtungen zusammengesetzt sind, von denen die aufsteigende Richtung weniger steil ist. Die absteigende Strecke dagegen zeigt das Bestreben möglichst steil zu stehen, und Figuren, in denen diese Strecke nothwendig einen langsameren Abfall haben muss, wie z. B. in den Zickzackfiguren für verhältnissmässig grosses ω, sind sehr schwer zu erhalten.

Es ist nun nach allem Gesagten klar, dass man sich über die mechanische Wirkung des Bogens in allen Fällen dieselbe Vorstellung machen muss, welche bereits Helmholtz beschrieben hat. Der angestrichene Punkt der Saite klebt an den harzigen Bogenhaaren, wird also mit der constanten Geschwindigkeit des Bogens aufwärts geführt. Diesem Zustand entsprechen die mässig ansteigenden Strecken in den Schwingungsfiguren der Streichstelle. Endlich wird dieser klebende Punkt durch die wachsende Spannung der Saite losgerissen und gleitet unter starker Reibung gegen den Bogen, daher mit einer constanten Maximalgeschwindigkeit abwärts, bis dasselbe Spiel von neuem beginnt. Findet dieser Rückgang ohne weiteren Zwischenfall statt, so haben wir das regelmässige Zickzack mit nur zwei Strecken. Mitunter aber bleibt der Saitenpunkt bei seinem Rückgang noch einmal oder mehrmals haften, wird von neuem ein Stück mitgenommen und reisst dann wieder los, Vorgänge, die auch sonst bei Bewegungen gegen den Widerstand einer klebrigen Reibung vorkommen. Wir haben also den Vorgang so aufzufassen, dass der Bogen dem angestrichenen Punkte eine vorgeschriebene Bewegung ertheilt, bei der eine Kraft disponibel ist, welche wohl hinreicht um im Allgemeinen jede Bewegung des angestrichenen Punktes zu erzwingen, wenn sie auch andere Saitenpunkte in stärkerer Weise bewegen sollte, als gerade die Streichstelle, welche aber doch endlich eine Grenze erreicht, und an gewissen Streichstellen (den wichtigeren Knoten) willkürliche Bewegungen nicht mehr aufrecht zu erhalten vermag, durch welche eine zu heftige Bewegung der übrigen Saitenpunkte erzeugt wird. In diesen Fällen können nur ganz speciell gewählte Schwingungsfiguren der Streichstelle bestehen, im einfachsten Falle nur Zickzacklinien von ganz bestimmten Verhältniss ω, in deren Zerlegung die Partialschwingungen fehlen, welche in der Streichstelle einen Knoten haben. Es kommt dazu noch der Übelstand, dass diese geforderten Verhältnisse ω grösser sind, als sie ein gewöhnlicher Bogenstrich liefert; deshalb ist es so schwer, die Saite in einem wichtigen Knoten gut anzustreichen. In den übrigen Fällen irrationaler Streichstellen hingegen scheint es auf die Grösse von ω oder die specielle Gestalt einer complicirten Schwingungsfigur der Streichstelle nicht anzukommen, die dadurch der ganzen Saite ertheilte Bewegung wird in allen Fällen aufrecht erhalten werden können. Wahrscheinlich schwanken alle diese Verhältnisse mit den Elementen der Bogenführung; es werden z. B. mehrfach für dieselbe Streichstelle verschiedene Verhältnisse ω gemessen. Die Saite pflegt aber an solchen Stellen stets gut anzusprechen.

Dass übrigens die Periode der erzwungenen Bewegung des angestrichenen Punktes gleich der natürlichen Periode des Grundtons der Saite ist, kann nicht Wunder nehmen. Denn jeder Theil der durch den Bogen einmal erzwungenen Bewegung wird nach den Gesetzen der fortschreitenden Wellen gegen die Enden der Saite laufen, von dort reflectirt zurückkehren, und bis auf die äusserst geringe durch die Dämpfung bewirkte Deformation nach Verlauf einer natürlichen Periode in der Streichstelle wieder ankommen, und dieselbe Bewegung reproduciren, die vor einer Periode der Bogen erzeugte, und der Bogen, dessen Bewegung an sich nichts periodisches an sich hat, thut diesmal zu der Bewegung garnichts hinzu, als dass er durch seinen klebrigen Zwang die Bewegung um ebenso unendlich wenig wieder zuschärft, wie sie durch Dämpfung bei der unvollkommenen Reflexion an den Enden abgestumpft wurde.

Erklärung der Abbildungen.

Die auf den folgenden zwei Tafeln wiedergegebenen Schwingungsfiguren wurden aus den 50 $^{\mathrm{cm}}$ langen Originalstreifen ausgeschnitten und sind in natürlicher Grösse durch Lichtdruck vervielfältigt. Des beschränkten Platzes wegen konnten nur wenige der aufgenommenen Figuren wiedergegeben werden; namentlich haben wir die für die Messungen besonders wichtigen Figuren der Gruppen IV und V wegen der Ähnlichkeit des Anblicks auf wenige Proben beschränkt.

Es folgt hier das Verzeichniss und die Charakteristik der mitgetheilten Figuren. Die Nummern entsprechen denen in den Figurentafeln. Die Beobachtungspunkte stehen unter x, die Streichstellen unter ξ; Saitenlänge = 1.

Nr.	x	ξ	Bemerkungen.	Nr.	x	ξ	Bemerkungen.
		Gruppe I.				Gruppe II.	
1.	$^1/_2$	$^1/_{10}$	Geradl. Zz. $\omega = {}^1/_2$	17.	$^1/_3$	$^{(1-\varepsilon)}/_4$	$\mathfrak{A}_4$ gross —
2.	»	$^{(1+\varepsilon)}/_5$	$\mathfrak{A}_5$ gross +	18.	»	$^{(1+\varepsilon)}/_4$	$\mathfrak{A}_4$ gross +, $\mathfrak{A}_7$ —
3.	»	$^{(1-\varepsilon)}/_5$	$\mathfrak{A}_5$ gross —	19.	»	$^{(3-\varepsilon)}/_8$	$\mathfrak{A}_8$ —
4.	»	$^{(2-\varepsilon)}/_7$	$\mathfrak{A}_7$ gross —	20.	»	$^{(2-\varepsilon)}/_5$	$\mathfrak{A}_5$ gross —
5.	»	$^{(2+\varepsilon)}/_7$	$\mathfrak{A}_7$ + und $\mathfrak{A}_3$ +	21.	»	$^{(1-\varepsilon)}/_2$	$\mathfrak{A}_2$ gross —, $\mathfrak{A}_4$ +
6.	»	$^{(1-\varepsilon)}/_3$	$\mathfrak{A}_3$ gross +	22.	»	$^1/_2$	$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_4 = 0$.
7.	»	$^1/_3$	$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_4 = 0$				
8.	»	$^{(1+\varepsilon)}/_3$	$\mathfrak{A}_3$ gross —			Gruppe III.	
9.	»	$^{(2-\varepsilon)}/_5$	$\mathfrak{A}_5$ gross —	23.	$^1/_{15}$	$^1/_{12}$	Geradl. Zz. $\omega = {}^1/_{15}$
10.	»	$^{(2+\varepsilon)}/_5$	$\mathfrak{A}_5$ gross +	24.	»	$^{(1+\varepsilon)}/_7$	$\mathfrak{A}_7$ —, $\mathfrak{A}_6$ —
11.	»	$^1/_9$	$\mathfrak{A}_7$ —	25.	»	$^1/_6$	6stufige Treppe
12.	»	$^{(1-\varepsilon)}/_2$	2stufige Treppe	26.	»	$^{(1-\varepsilon)}/_5$	$\mathfrak{A}_5$ +
13.	$^1/_4$	$^{(1-\varepsilon)}/_5$	$\mathfrak{A}_5$ gross +	27.	»	$^1/_5$	5stufige Treppe.
14.	»	$^{(1+\varepsilon)}/_5$	$\mathfrak{A}_5$ gross —	28.	»	$^{(1+\varepsilon)}/_5$	$\mathfrak{A}_5$ —, $\mathfrak{A}_4$ +
15.	»	$^{(1-\varepsilon)}/_3$	$\mathfrak{A}_3$ gross +	29.	»	$^2/_9$	$\mathfrak{A}_5$ —, $\mathfrak{A}_4$ —, 9 horiz. Strecken
16.	»	$^{(1+\varepsilon)}/_3$	$\mathfrak{A}_2$ +, $\mathfrak{A}_3$ —, $\mathfrak{A}_6$ —.				

Nr.	x	ξ	Bemerkungen.
30.	$^1/_{15}$	$^{(1-\varepsilon)}/_4$	$\mathfrak{A}_8$ gross +
31.	»	$^1/_4$	4stufige Treppe
32.	»	$^{(1+\varepsilon)}/_4$	$\mathfrak{A}_4$ +, $\mathfrak{A}_8$ —
33.	»	$^{(3-\varepsilon)}/_{11}$	$\mathfrak{A}_{11}$ +
34.	»	$^{(2-\varepsilon)}/_7$	$\mathfrak{A}_4$ +, $\mathfrak{A}_7$ —
35.	»	$^{(1-\varepsilon)}/_3$	$\mathfrak{A}_3$ +, $\mathfrak{A}_7$ +
36.	»	$^1/_3$	3stufige Treppe
37.	»	$^{(1+\varepsilon)}/_3$	$\mathfrak{A}_3$ —, $\mathfrak{A}_8$ —
38.	»	$^{(2-\varepsilon)}/_5$	$\mathfrak{A}_2$ —, $\mathfrak{A}_5$ —, $\mathfrak{A}_8$ +
39.	»	$^{(3+\varepsilon)}/_7$	$\mathfrak{A}_2$ —, $\mathfrak{A}_7$ —
40.	»	$^{(4-\varepsilon)}/_9$	$\mathfrak{A}_2$ —, $\mathfrak{A}_7$ —, $\mathfrak{A}_9$ —
41.	»	$^{(4+\varepsilon)}/_9$	$\mathfrak{A}_2$ —, $\mathfrak{A}_9$ +.

Gruppe IV.

Nr.	x	ξ	Bemerkungen.
42.		$^1/_6$	Zz. $\omega = {}^1/_6$
43.		$^{(1+\varepsilon)}/_5$	$\omega = {}^1/_{13}$
44.		$^2/_9$	$\omega = {}^1/_9$
45.		$^1/_4$	$\omega - {}^1/_4$
46.		$^2/_7$	$\omega = {}^1/_7$
47.		$^3/_{10}$	$\omega = {}^1/_{10}$
48.		$^{(1-\varepsilon)}/_3$	$\omega = {}^1/_{18}$

Nr.	x	ξ	Bemerkungen.
49.		$^1/_3$	$\omega = {}^1/_3$
50.		$^{(1+\varepsilon)}/_3$	$\omega = {}^1/_{14}$
51.		$^2/_5$	$\omega = {}^1/_5$
52.		$^3/_7$	$\omega = {}^1/_7$

53 und 54. Typen complicirterer Bewegungen der Streichstelle.

Gruppe IVa.

Nr.	x	ξ	Bemerkungen.
55.	$^3/_7$	$^1/_7$	Einf. Zz. $\omega = {}^3/_7$
56.	$^2/_7$	$^3/_7$	Doppelter Zz., $\mathfrak{A}_2$ gross —
57.	$^1/_7$	$^2/_7$	Dreifacher Zz. $\mathfrak{A}_3$ gross +.

Gruppe V.

Nr.	x	ξ	Bemerkungen.
58.	$^1/_{10}$	$^1/_{15}$	Geradl. Zz. $\omega = {}^1/_{10}$
59.	$^1/_7$	»	$\omega = {}^1/_7$
60.	$^1/_6$	»	$\omega = {}^1/_6$
61.	$^1/_4$	»	$\omega = {}^1/_4$
62.	$^2/_7$	»	$\omega = {}^2/_7$
63.	$^1/_3$	»	$\omega = {}^1/_3$
64.	$^1/_2$	»	$\omega = {}^1/_2$.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

INHALTSVERZEICHNISS.

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE

aus den Jahren 1888. 1889. 1890.

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wi
wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmunge
zuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn nä
des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird e
Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MIT

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem
Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden
in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren M
fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden
Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen
und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf
heften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörig
Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen,
Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollst
berichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilunge
zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat N

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und N
Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei
die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,
» » » Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,
» » » October bis December zu Anfang des nächsten Jahres soglei
des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1890 nicht zugekommen sein so
hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger
Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1891 a

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des
zuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Georg Reimer in Berlin erscheinen in wöchentlic

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 *M.*

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTE

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHA

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 *M.*

Georg Reimer's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern d
oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese
der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, d
Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selb
Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct
Buchhandlung in Verbindung setzen.

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH
PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT VII.

JULI 1891.

MIT TAFEL V.

BERLIN 1891.
VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.
IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.

28. Über die Zeit und die Art der Entstehung der Jacobi'schen Thetaformeln.

Von L. Kronecker.

(Vorgetragen am 9. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXV]; — ausgegeben am 16. Juli.)

Die Entdeckung der zwischen Producten von vier Thetareihen bestehenden Relation, welche durch die Formel (11) auf S. 506 des I. Bandes von Jacobi's gesammelten Werken:

$$\text{(A)}\quad \vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_3(y)\,\vartheta_3(z)+\vartheta_2(w)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_2(y)\,\vartheta_2(z) = \vartheta_3(w')\,\vartheta_3(x')\,\vartheta_3(y')\,\vartheta_3(z')+\vartheta_2(w')\,\vartheta_2(x')\,\vartheta_2(y')\,\vartheta_2(z')$$

$$\left(w'=\tfrac{1}{2}(w+x+y+z),\quad x'=\tfrac{1}{2}(w+x-y-z),\quad y'=\tfrac{1}{2}(w-x+y-z),\quad z'=\tfrac{1}{2}(w-x-y+z)\right)$$

dargestellt wird, bezeichnet eine Epoche in der Geschichte der Theorie der elliptischen Functionen; denn es ist damit für diese Theorie ein ganz neues Fundament gewonnen worden. Welche Bedeutung Jacobi selbst seiner Entdeckung beigemessen hat, erhellt schon aus der Überschrift des der Entwickelung jener Thetaformel[1] gewidmeten Abschnittes in den von Rosenhain ausgearbeiteten Universitätsvorlesungen, und noch deutlicher aus den Worten, mit welchen diese Entwickelung eingeleitet wird. Die Überschrift lautet: »Neues Fundamentaltheorem unserer Transcendenten«, und es heisst dann:

»Wir hatten:

$$\zeta(q,z)=\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} q^{i^2}z^i=\sum_i e^{i^2\log q+i\log z}=e^{-\frac{(\log z)^2}{4\log q}}\sum_i e^{\frac{(2i\log q+\log z)^2}{4\log q}},$$

oder $\zeta(q,z)$, multiplicirt mit $e^{\frac{(\log z)^2}{4\log q}}$, wurde dargestellt als die Summe von Potenzen von e, deren Exponenten die Quadrate der Glieder einer nach beiden Seiten in's Unendliche sich erstreckenden arithmetischen Progression sind. Multipliciren wir solche Ausdrücke, welche dasselbe $\log q$

[1] Jacobi hat, soviel ich weiss, die Formel in keiner der von ihm veröffentlichten Abhandlungen, sondern nur in seinen Universitätsvorlesungen mitgetheilt.

aber verschiedene $\log z$ haben, so werden die Exponenten unter dem Summenzeichen die Summen mehrerer Quadrate sein.

Multiplicirt man daher vier solche ζ, die denselben $\log q$ aber verschiedene $\log z$ haben, mit einander, so wird der Exponent die Summe von vier Quadraten. Diese Summe kann man bekanntlich auch auf andere Art als Summe von vier Quadraten darstellen, und wir erhalten durch diese einfache Operation ein allgemeines Theorem, aus dem als specielle Fälle sowohl die Verbindung unserer Transcendenten mit den elliptischen Functionen als auch alle Fundamentaltheoreme über die Addition der elliptischen Integrale der drei verschiedenen Gattungen folgen, auf die man durch künstliche und schwierige Integrationen gekommen war.«

Es erscheint hiernach von besonderem Interesse, dass sich der Gedankengang, welcher Jacobi zur Auffindung der Thetaformel geführt hat, verfolgen und auch der Zeitpunkt dieser Auffindung genau bestimmen lässt.

Ich habe schon in meinen »Bemerkungen über die Jacobi'schen Thetaformeln«[1] auf die Beziehungen hingewiesen, welche zwischen der oben citirten Thetaformel und den Formeln in Jacobi's Aufsatz[2] »Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales« bestehen. Unter diesen sind zwei als die wichtigsten herauszuheben, erstens die in dem citirten Aufsatz mit (4) bezeichnete Formel:

$$\text{(B)}\quad \begin{gathered}\sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b + \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a+b) - \sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)\\ = k^2 \sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)\sin\operatorname{am}(u+a+b).\end{gathered}$$

und zweitens die mit (12) bezeichnete:

$$\text{(C)}\quad \frac{\Theta(0)\,\Theta(u+a)\,\Theta(u+b)\,\Theta(a+b)}{\Theta(a)\,\Theta(b)\,\Theta(u)\,\Theta(u+a+b)} = 1 + k^2 \sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a+b).$$

Jacobi sagt von der ersteren Formel: »Quae est formula nova, maximi momenti per totam theoriam functionum ellipticarum«, und er leitet daraus zuvörderst eine mit der letzteren inhaltlich übereinstimmende Formel (9) ab, welche er als »formula nova fundamentalis« charakterisirt. Erst dann gelangt er durch Veränderung der Bezeichnungen zu der Formel (C) selbst. Nun geht aber auch umgekehrt die erstere Formel (B) aus der letzteren (C) hervor. Denn wenn man die Function von a, b, u, welche durch Subtraction des Ausdrucks auf der rechten

[1] Journal für Mathematik Bd. 102, S. 269.

[2] Journal für Mathematik Bd. 15, S. 199—204. Jacobi's Werke, Bd. I, S. 335—341.

Seite der Gleichung (B) von dem auf der linken Seite entsteht, mit $F(a, b, u)$ bezeichnet und diejenige Function von a, b, u, welche durch Subtraction des Ausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung (C) von dem auf der linken Seite entsteht, mit $\Phi(a, b, u)$, so findet die Identität statt:

$$F(a,b,u) = \sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+b)\,\Phi(a,b,u) - \sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}(u+a+b)\,\Phi(a,b,u+iK').$$

Die beiden Formeln (B) und (C) sind daher vollständig aequivalent.

Bei Anwendung der Bezeichnungen der Fundamenta nimmt die Gleichung (C) folgende Gestalt an:

$$(C')\quad \mathrm{H}(a)\mathrm{H}(b)\mathrm{H}(u)\mathrm{H}(u+a+b) + \Theta(a)\Theta(b)\Theta(u)\Theta(u+a+b) = \Theta(0)\Theta(u+a)\Theta(u+b)\Theta(a+b).$$

Nun ist es die Reihe:

$$\sum_n (-i)^n q^{\frac{1}{4}n^2} e^{\frac{nv\pi i}{2K}},$$

welche, je nachdem man für n alle positiven und negativen ungeraden Zahlen oder alle geraden Zahlen nimmt, die Function $\mathrm{H}(v)$ oder $\Theta(v)$ darstellt. Die Gleichung (C′) erscheint demnach bei Einsetzung der bezüglichen Reihen in der Form:

$$(C'')\quad \sum_{n_0, n_1, n_2, n_3} (-1)^{\frac{1}{2}(n_0+n_1+n_2+n_3)} q^{\frac{1}{4}(n_0^2+n_1^2+n_2^2+n_3^2)} e^{(n_0(u+a+b)+n_1 a+n_2 b+n_3 u)\frac{\pi i}{2K}} =$$

$$\sum_{m_0, m_1, m_2, m_3} (-1)^{m_0+m_1+m_2+m_3} q^{m_0^2+m_1^2+m_2^2+m_3^2} e^{(m_1(u+b)+m_2(u+a)+m_3(a+b))\frac{\pi i}{K}},$$

$$(m_0, m_1, m_2, m_3, n_0, n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ n_0 \equiv n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \pmod{2})$$

und Jacobi hat gewiss auch in dieser Form die Gleichung (C) sehr bald, nachdem er sie aus der Gleichung (A) abgeleitet hatte, direct verificirt. Die einfachste und natürlichste Methode, welche sich hierfür darbietet, besteht in der Vergleichung der Exponenten von:

$$-1,\ q,\ e^{\frac{a\pi i}{K}},\ e^{\frac{b\pi i}{K}},\ e^{\frac{u\pi i}{K}}$$

auf beiden Seiten der Gleichung (C″). Hiernach müssen die Relationen erfüllt sein:

$$n_0 + n_1 + n_2 + n_3 \equiv 2(m_0 + m_1 + m_2 + m_3) \pmod{4}$$
$$n_0^2 + n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 4(m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)$$
$$n_0 + n_1 = 2(m_2 + m_3),\quad n_0 + n_2 = 2(m_1 + m_3),\quad n_0 + n_3 = 2(m_1 + m_2),$$

oder also die folgenden:

$$\text{(D)}\qquad\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(-n_0+n_1+n_2+n_3)&=2\,m_0\,,\\ \tfrac{1}{2}(n_0-n_1+n_2+n_3)&=2\,m_1\,,\\ \tfrac{1}{2}(n_0+n_1-n_2+n_3)&=2\,m_2\,,\\ \tfrac{1}{2}(n_0+n_1+n_2-n_3)&=2\,m_3\,,\end{aligned}$$

in welchen die vier Ausdrücke links, wegen der Bedingung:

$$n_0\equiv n_1\equiv n_2\equiv n_3 \pmod{2}$$

entweder sämmtlich gerade oder sämmtlich ungerade sind. Es muss deshalb ferner für je zwei zu festen Werthen von:

$$n_0^2+n_1^2+n_2^2+n_3^2\,,\quad n_0+n_1\,,\quad n_0+n_2\,,\quad n_0+n_3$$

gehörige Systeme von Zahlen n_0, n_1, n_2, n_3, welchen keine ganzzahligen Werthe m_0, m_1, m_2, m_3 entsprechen, der Exponent von -1 auf der linken Seite der Gleichung (C''), nämlich:

$$\tfrac{1}{2}(n_0+n_1+n_2+n_3)\,,$$

das eine Mal gerade und das andere Mal ungerade sein. Dies ist nun in der That der Fall; denn je zwei dieser Systeme:

$$(n_0,\ n_1,\ n_2,\ n_3)\,,\quad (n_0',\ n_1',\ n_2',\ n_3')$$

sind durch die Relationen:

$$\text{(E)}\qquad\begin{aligned}\tfrac{1}{2}(n_0+n_1+n_2+n_3)&=n_0'\,,\\ \tfrac{1}{2}(n_0+n_1-n_2-n_3)&=n_1'\,,\\ \tfrac{1}{2}(n_0-n_1+n_2-n_3)&=n_2'\,,\\ \tfrac{1}{2}(n_0-n_1-n_2+n_3)&=n_3'\end{aligned}$$

mit einander verbunden. Die Differenz:

$$\tfrac{1}{2}(n_0+n_1+n_2+n_3)-\tfrac{1}{2}(n_0'+n_1'+n_2'+n_3')$$

ist hiernach gleich:

$$\tfrac{1}{2}(-n_0+n_1+n_2+n_3)$$

und also ungerade, sobald die Relationen (D) nicht durch ganzzahlige Werthe von m_0, m_1, m_2, m_3 befriedigt werden.

Die durch die Relationen (D) oder (E) gegebene Transformation der Summationsbuchstaben n_0, n_1, n_2, n_3, welche sich bei der hier dargelegten Verification der Formel (C) mit Nothwendigkeit ergiebt, legte Jacobi die oben angeführte, die Multiplication von vier Thetareihen betreffende Bemerkung, mit welcher er die Entwickelung des »neuen Fundamentaltheorems« in seinen Vorlesungen eingeleitet hat, sehr nahe. Denn die Transformation:

$$\begin{aligned} n_0 &= \tfrac{1}{2}(-n_0' + n_1' + n_2' + n_3'), \\ n_1 &= \tfrac{1}{2}(n_0' - n_1' + n_2' + n_3'), \\ n_2 &= \tfrac{1}{2}(n_0' + n_1' - n_2' + n_3'), \\ n_3 &= \tfrac{1}{2}(n_0' + n_1' + n_2' - n_3') \end{aligned}$$

bewirkt, dass der Ausdruck auf der ersten Seite der Gleichung (C''), wenn darin für $u+a+b$ eine neue Variable v gesetzt wird, in einen Ausdruck von genau derselben Form verwandelt wird, in welchem aber die linearen Verbindungen:

$$\tfrac{1}{2}(-a+b+u+v),\ \tfrac{1}{2}(a-b+u+v),\ \tfrac{1}{2}(a+b-u+v),\ \tfrac{1}{2}(a+b+u-v)$$

an Stelle der Variabeln a, b, u, v selbst erscheinen. Die hierbei resultirende Formel geht, wenn die Bezeichnungen:

$$\begin{matrix} a, & b, & u, & v \end{matrix}$$

mit: $\begin{matrix} -w, & x, & y, & z \end{matrix}$

vertauscht werden, in die Formel (4) auf S. 507 des I. Bandes von JACOBI's Werken über, nämlich:

$$\text{(F)}\quad \begin{aligned} &\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(z) - \vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(z) \\ &\qquad = \vartheta(w')\vartheta(x')\vartheta(y')\vartheta(z') - \vartheta_1(w')\vartheta_1(x')\vartheta_1(y')\vartheta_1(z'), \end{aligned}$$

$$\left(w' = \tfrac{1}{2}(w+x+y+z),\ x' = \tfrac{1}{2}(w+x-y-z),\ y' = \tfrac{1}{2}(w-x+y-z),\ z' = \tfrac{1}{2}(w-x-y+z)\right)$$

und diese Formel specialisirt sich wiederum für $z' = 0$ (oder $v = u+a+b$) zu derjenigen (C'), welche in der mehrfach citirten JACOBI'schen Arbeit im XV. Bande des CRELLE'schen Journals hergeleitet ist. Aber eben weil die zur Verification der specielleren Formel nothwendige Transformations-Methode zugleich für die allgemeinere ausreichend ist, bildete für JACOBI, wie ich schon in Nr. 8 meiner »Bemerkungen über die JACOBI'schen Thetaformeln« hervorgehoben habe[1], die speciellere »Fundamentalformel« (C') gewiss eine nützliche Vorstufe bei Auffindung des allgemeineren »Fundamentaltheorems«, welches durch die Gleichung (F) dargestellt wird. Dabei mag vielleicht noch der äusserliche Umstand, dass drei von den vier linearen Verbindungen der Argumente w, x, y, z, welche für die Transformation des Ausdrucks auf der linken Seite der Gleichung (F) einzuführen waren, nämlich:

$$\frac{1}{2}(w+x-y-z),\ \frac{1}{2}(w-x+y-z),\ \frac{1}{2}(w-x-y+z),$$

schon bei der von JACOBI mitgetheilten RICHELOT'schen Herleitung der specielleren Fundamentalformel auftraten, zur Auffindung der allgemeineren Formel (F) mitgewirkt haben. Einigen Anhalt hierfür bieten

[1] Journal für Mathematik Bd. 102, S. 270.

nämlich die Argument-Bezeichnungen (w, x, y, z) an der Stelle, wo die allgemeinen Thetaformeln abgeleitet werden, in den JACOBI'schen Vorlesungen, welche BORCHARDT gehört hat,[1] vorausgesetzt dass, wie ich annehmen möchte, die Wahl dieser Bezeichnungen schon aus der Zeit der ersten Auffindung der Thetaformeln stammt.[2]

Die vorstehenden Erwägungen führten mich schon vor vier Jahren, bei Abfassung meiner »Bemerkungen über die JACOBI'schen Thetaformeln« auf die Vermuthung, dass JACOBI sehr bald nach Vollendung seines der specielleren Fundamentalformel gewidmeten, vom 21. September 1835 datirten Aufsatzes[3] die allgemeinere gefunden haben möchte. Um darüber Gewissheit zu erlangen, wandte ich mich damals an Hrn. LINDEMANN in Königsberg mit der Bitte, mir aus den Akten der dortigen Universität ein Verzeichniss der von JACOBI gehaltenen Vorlesungen so wie Abschriften der Abgangszeugnisse von ROSENHAIN und BORCHARDT zu verschaffen. Hr. LINDEMANN erfüllte meine Bitte mit höchst dankenswerther Bereitwilligkeit, und es ergab sich nun:

> dass JACOBI die Vorlesungen über elliptische Functionen, welche ROSENHAIN ausgearbeitet hat, bereits im Wintersemester 1835/6, diejenigen, welche BORCHARDT gehört hat, erst im Wintersemester 1839/40 gehalten hat.

Da JACOBI schon beim Beginn der ersteren Vorlesungen, wie aus der ROSENHAIN'schen Ausarbeitung deutlich zu ersehen ist, das in dem obigen Citat besprochene »neue Fundamentaltheorem der Transcendenten θ« gehabt hat, so fällt dessen Entdeckung nothwendig in die Zeit zwischen dem 21. September 1835, welches Datum jener mehrfach erwähnte JACOBI'sche Aufsatz trägt, und dem Anfang der Wintervorlesungen. Man kann daher mit voller Sicherheit den Beginn der neuen, durch die Entdeckung der Thetaformel bezeichneten Epoche in der Entwickelung der Theorie der elliptischen Functionen vom Ende September oder Anfang October 1835 datiren.

Dabei ist noch hervorzuheben, dass auch die Einführung der vier Thetareihen und ihre Bezeichnung (ϑ, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3) aus den letzten

---

[1] Vergl. die schon im Anfang citirte Stelle S. 506 des I. Bandes von JACOBI's gesammelten Werken.

[2] Dass die Bezeichnungen in den früheren Vorlesungen, welche ROSENHAIN gehört hat, andere sind, spricht nicht gegen jene Annahme. Denn in diesen Vorlesungen entwickeln sich die Bezeichnungen in ganz natürlicher Weise aus einander, während in den späteren, von BORCHARDT ausgearbeiteten Vorlesungen bei Einführung der Bezeichnungen w, x, y, z gar kein Zusammenhang mit den vorhergehenden erkennbar ist.

[3] CRELLE's Journal, Bd. XV, S. 199—204; JACOBI's Werke, Bd. I., S. 335—341.

Monaten des Jahres 1835 stammt. Bis dahin hatte JACOBI stets die Functionen Θ, H der Fundamenta beibehalten. Aber in den ersten Vorlesungen im Wintersemester 1835/6 geht er von der Reihe aus:

$$\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} q^{i^2} z^i = 1 + 2q\cos x + 2q^4 \cos 2x + 2q^9 \cos 3x + \ldots \qquad (z = e^{x\sqrt{-1}}),$$

welche aus dem Θ der Fundamenta entsteht, wenn man darin $-q$ für q setzt. JACOBI bezeichnet diese Reihe mit $\zeta(q, z)$, definirt bald darauf eine Function $\eta(q, z)$ durch die Gleichung:

$$\eta(z) = q^{\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{2}} \zeta(q, z)$$

und führt erst nach Herleitung des »neuen Fundamentaltheorems«, in der 26sten von den im Ganzen 75 Vorlesungen, die vier Thetareihen $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ ein, welche seitdem fast allgemein beibehalten worden sind.

Auf Grund der oben erwähnten aus Königsberg erhaltenen Schriftstücke habe ich auch genau ermitteln können, zu welcher Zeit JACOBI die verschiedenen, von ROSENHAIN ausgearbeiteten Vorlesungen gehalten hat. Da die Akademie diese Ausarbeitungen im Original aus dem ROSENHAIN'schen Nachlass erworben hat, so führe ich dieselben hier mit den nunmehr fixirten Daten an:

1. Theorie der elliptischen Functionen. Wintersemester 1835/6.
2. Allgemeine Theorie der krummen Linien und Oberflächen. Sommersemester 1836.
3. Theorie der Zahlen. Wintersemester 1836/7.
4. Transformation und Integration der Grundgleichungen der Dynamik. Wintersemester 1837/8.
5. Variationsrechnung. Wintersemester 1837/8.

Von den in der Bibliothek der Akademie befindlichen, ebenfalls aus ROSENHAIN's Nachlass stammenden zwei Heften JACOBI'scher Vorlesungen über die elliptischen Transcendenten, welche von J. TH. SANIO ausgearbeitet sind, stammt das eine aus dem Wintersemester 1829/30, das andere wahrscheinlich aus dem Sommersemester 1831.

29. Entwickelung und Structur der Placenta bei Raubthieren.

Von Dr. A. Fleischmann
in Erlangen.

(Vorgelegt von Hrn. Waldeyer am 9. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXV]; — ausgegeben am 16. Juli.)

Als mich vor etlichen Jahren Beobachtungen bestimmten, die Richtigkeit der von Bischoff geäusserten Angaben über die Entwickelung der Hunde-Placenta zu bestätigen, hoffte ich nicht, schnellen Beifall zu finden; denn ich wusste, wie schwer es hält, gegen eine allgemein richtig betrachtete Darstellung zu kämpfen und die stärkere Beweiskraft einer anderen Meinung zu erhärten. In der Lehre über die Entstehung der Placenta war das um so schwieriger, als bis vor kurzer Zeit eigentlich nur die Bildung der menschlichen Placenta verfolgt und die vergleichende Betrachtung, welche allein Licht in die verwickelten Zustände thierischer Organisation werfen kann, fast gänzlich verabsäumt ward. Wer nun die Darstellung der Entwickelung einer scheibenförmigen Placenta als gesichert und bei dem Mangel weiterer Beobachtungen an anderen Thieren als Norm für alle Säuger betrachtete, konnte natürlich einer Beschreibung, wie ich sie über Raubthiere vorlegte, nicht beistimmen. Aber es handelt sich hier nicht um persönliche Ansichten, sondern um Thatsachen, die bewiesen werden können. Auf Grund meiner Untersuchungen entwarf ich folgendes Bild, wie sich die Placenta bei Fuchs und Katze allmählich ausbilde. Auf dem ektodermalen Chorion der Raubthierkeimblase, das innig der Oberfläche der Uterinschleimhaut anliegt, entstehen frühzeitig hohle Zotten. Sie dringen in die Mündungen der Uterindrüsen ein und wachsen während der Schwangerschaft bis zum Grunde derselben. Damit geht gleichzeitig eine Zerstörung des Epithels sowohl der Uterinschleimhaut wie der Drüsenschläuche einher. Deshalb kann man die Drüsenlumina als vorgebildete und während der Schwangerschaft sich erweiternde Höhlen ansehen, die von den Zotten durchwachsen werden, um eine innige Verflechtung kindlicher und mütterlicher Theile zu erreichen.

Diese Schilderung hat wenig Anerkennung gefunden, im Gegentheile man hat sich bemüht, die Unwahrscheinlichkeit derselben zu erweisen. Ich habe mich dem seither laut gewordenen Widerspruche um so weniger verschlossen, als ich mir sagte, wenn tüchtige Forscher, zu einer meinem Denken entgegenstehenden Ansicht gelangen, so müssen hierfür wirklich zwingende Gründe vorhanden sein. Darum habe ich im Laufe der letzten Jahre neben anderen Arbeiten immer wieder neue Praeparate über Entwickelung der Placente gemacht, um so die Ursache der Meinungsverschiedenheiten und damit die Lösung des Streites zu finden. Über den Erfolg meiner Bemühungen will ich jetzt der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, deren Unterstützung ich mich erfreute, übersichtlichen Bericht erstatten.

Etliche haben mir ohne genügenden Grund die Absicht unterschoben, als wollte ich das Einwachsen der Chorionzotten in Uterindrüsen als allgemeine Norm der Placentarbildung im Kreise der Säugethiere betrachten. Wenigstens haben sie nach Untersuchungen, die an anderen Thieren (Maulwurf, Fledermaus, Kaninchen) angestellt waren, meine Darstellung für Raubthiere höchst unwahrscheinlich bezeichnet. Aber ich war weit entfernt, einen so groben Fehler zu begehen. Ich will zwar gerne eingestehen, nachdem ich zum ersten Male das Eindringen der Chorionzotten auf Querschnitten klar erkannt hatte, suchte ich in der frohen Hoffnung, ein allgemeines Gesetz entdeckt zu haben, auch bei Säugethieren, die eine discoidale Placente entwickeln wie z. B. *Lepus*, *Cavia*, *Mus*, *Arvicola*, *Talpa*, *Erinaceus* und *Vespertilio*, ob ich nicht den homologen Vorgang finden könnte. Als jedoch meine Bemühungen vergeblich blieben, stiegen mir so schwere Zweifel an der Richtigkeit meiner Beobachtungen bei Raubthieren auf. dass ich fast zwei Jahre zögerte, dieselben zu veröffentlichen. Während dieser Zeit führten mich meine Praeparate, die ich in grösseren Zwischenräumen wiederholt studirte, zu der Überzeugung, dass die Beobachtungen bei Raubthieren richtig seien und ich trug endlich kein Bedenken mehr, sie erst in kurzer Form, später ausführlicher und begleitet von Abbildungen zu publiciren.

Wenn man nach den Beobachtungen, die über andere Säugethiere vorliegen, die Richtigkeit meiner Darstellung beurtheilt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Chorionzotten in Uterindrüsen wachsen, ausserordentlich gering. Trotzdem halte ich an meiner Behauptung fest, da die gegentheiligen Angaben mich noch nicht überzeugt haben. Hauptsächlich Strahl und Heinricius haben aus dem Studium von Placentapraeparaten des Hundes und der Katze andere Schlüsse abgeleitet. Ihre Meinungen sollen daher kurz resumirt und mit meiner Deutung verglichen werden.

Auf Querschnitten erkennt Strahl in der Uterinschleimhaut des Hundes zwei Arten von epithelial ausgekleideten Hohlräumen, die kleinen Bischoff'schen Krypten und lange gewundene Drüsenschläuche. Wenn sich das Ei an die Oberfläche der Schleimhaut anlegt, werden die Krypten durch Verschluss ihrer Eingangsöffnung in kleine Epithelblasen verwandelt, während bei einem »jedenfalls grösseren Theile« der Drüsen die Mündung erhalten und das Lumen ihres oberen Abschnittes erweitert wird. Dem abgeplatteten Uterusepithel schmiegt sich das Chorionektoderm an und senkt sich stempelartig in die offene Mündung der Drüsen, deren Epithel sich oben ebenfalls abplattet. Das Einwachsen der Chorionzotten findet aber nur in beschränktem Maasse statt, ihre grössere Zahl senkt sich neben den verschlossenen Krypten direct in die bindegewebige Grundlage der Schleimhaut. Dann erweitern sich die mittleren Abschnitte der Drüsen und bilden eine mittlere spongiöse Schichte der Placenta. Die verschlossenen Krypten werden kleine zackige Hohlräume, die den spongiösen Drüsenhöhlungen unmittelbar aufliegen. Sie verlängern sich während der dritten und vierten Woche der Schwangerschaft in die Tiefe, allmählich verlieren sie ihren Hohlraum und die säulenförmigen Zellreihen gehen ganz zu Grunde, wenn die Zotten weiter in der Schleimhaut vorwachsen. Endlich finden sich alle Zotten in den buchtig erweiterten Drüsenräumen. Strahl meint, ein Theil derselben ist direct in die Drüsen gewachsen, ein anderer Theil sei nach Zerstörung des zwischenliegenden Bindegewebes in die spongiösen Räume gelangt.

Heinricius giebt nach Beobachtungen an Hund und Katze an, dass die Chorionzotten von Anfang an nicht in die Uterindrüsen einwachsen. Nachdem die Keimblase der Innenfläche eines Fruchtsackes sich angelagert hat, verschwindet das Uterinepithel, so dass das oberflächliche Bindegewebe der mütterlichen Schleimhaut unmittelbar an die Ektodermlage des Chorion grenzt. In das freigelegte bindegewebige Gerüste wachsen die Zotten ein; nur ausnahmsweise kann eine Drüse beschritten werden, denn ihre Mündungen sind durch dünne Bindegewebslagen verschlossen worden. Sind die Zotten tiefer in die Schleimhaut eingedrungen, so brechen sie unter Zerstörung der Drüsenwand in die Höhlung der cystisch erweiterten Drüsen durch und bleiben bis zur Geburt in diesen Hohlräumen.

Wenn ich diese Darstellungen mit dem von mir entworfenen Bilde vergleiche, so muss ich ob des Widerspruches der beiden Forscher sehr erstaunen. Denn beide haben in vielen wesentlichen Punkten meine zuerst gegebene Beschreibung bestätigt. Wir stimmen in Folgendem wohl überein:

1. Das Uterinepithel schwindet nach Anlagerung des Eies.
2. Die Uterindrüsen treiben seitliche Ausbuchtungen und erweitern sich allmählich zu grossen Hohlräumen.

3. Das Epithel dieser Drüsen wuchert sehr stark, faltet sich gegen das Lumen vor und geht zu Grunde.
4. Das Bindegewebe der Schleimhaut erleidet eine tief greifende Umwandlung seiner Structur, indem die Fasern ganz verschwinden.
5. In späteren Stadien stecken alle Chorionzotten in den erweiterten Drüsenräumen.

Nur in der Beantwortung der Frage, auf welchem Wege die Chorionzotten in die Drüsen gelangen, haben wir uns noch nicht geeinigt und zwar aus dem Grunde, weil man den Vorgang nicht direct beobachten kann. Wir können eben nur möglichst viele, verschieden entwickelte Eikammern sammeln, Schnitte durch die erhärteten Objecte machen und aus den verschiedenen, im Praeparate fixirten Zwischenstadien einen Rückschluss auf den historischen Verlauf ziehen. Keiner von uns dreien hat nun gesehen, dass alle auf einem Schnitte getroffenen Zotten unzweifelhaft in Drüsen wachsen, aber ebensowenig kann man auf Grund der Praeparate behaupten, dass überhaupt keine Zotte in eine Drüsenmündung einrage. Wenn auch feststeht, in älteren Stadien liegen die Chorionzotten in Drüsenräumen, so wird doch die Aufgabe, wie die Schnittbilder jüngerer und älterer Eikammern logisch zu verbinden sind, von jedem von uns durch eine andere Vermuthung zu lösen gesucht. Unsere Meinungsdifferenz beruht also weniger auf Verschiedenheit der Praeparate oder Ungenauigkeit der Beobachtung, sondern nur in der abweichenden subjectiven Deutung eines gegebenen Querschnittsbildes. Dabei werden die von uns übereinstimmend beobachteten Thatsachen in verschiedener Weise combinirt und als Stütze persönlicher Auffassung verwerthet. Die am meisten entgegenstehenden Meinungen haben Heinricius und ich geäussert, während Strahl einer vermittelnden Ansicht huldigt. Weil man auf Querschnitten durch junge Placentaranlagen die Zotten nicht häufig in die Drüsenhöhlungen ragen sieht, nehmen Strahl und Heinricius an, dieselben könnten überhaupt nicht (Heinricius) oder nur in beschränktem Maasse (Strahl) in jene einwachsen. Beide meinen, sie dringen anfangs nur in das Bindegewebe der Schleimhaut ein, wenden sich später den verschlossenen und degenerirenden Drüsen zu, durchbrechen das die Drüsen umhüllende Gewebe und werden in die Drüsenhöhlen eingefügt, erst nachdem sie ungefähr die Mitte der Placenta erreicht haben. A priori lässt sich die Möglichkeit nicht bezweifeln, dass die Zotten einen derartigen Umweg machen, aber um ihr beizustimmen, fordere ich wenigstens eine genaue Darstellung, wie die Zotten, plötzlich vom Wege abgelenkt, bindegewebige Hülle und Drüsenwand durchbrechen. Das haben aber Heinricius und Strahl nicht geschildert.

Ich lege der Thatsache, dass später alle Zotten in erweiterten Drüsenräumen liegen, grösseres Gewicht bei und beantworte die Frage, wie sie hinein gekommen sein können, durch die, wie mir scheint, einfachere Vermuthung, die Zotten hätten von Anfang an den directen Weg gewählt und seien gleich in die Mündung der Drüsen eingebogen. Ich bin fest überzeugt durch diese Fassung nicht nur die einfachere, sondern auch die richtigere Erklärung des thatsächlichen Verlaufes gegeben zu haben, weil vielfache Beobachtung mir eine Reihe von Bildern gezeigt hat, die ich nur in diesem Sinne auffassen kann. Ich habe freilich in der langen Reihe von Jahren, während welcher ich diese Frage verfolgte, eine grosse Anzahl von Praeparaten gesehen, die gegen meine Ansicht zu sprechen schienen. Aber da ich in anderen Fällen ganz unzweifelhaft das Einwachsen in die Drüsen feststellen konnte, so habe ich die in dieser Hinsicht nicht beweiskräftigen Praeparate einfach als Trugbilder betrachtet, die durch schlechte Orientirung des Praeparates und ungünstige Führung der Schnittebene entstanden sein mögen. Auch würde ich nie gewagt haben, meine Meinung mit solcher Entschiedenheit auszusprechen, wenn nicht am Beginne meiner Studien über Entwickelung der Säugethiere ein günstiger Zufall mir Praeparate vom Fuchs in die Hand gespielt hätte, die auf den ersten Blick die in Drüsen vorgeschobenen Chorionzotten zeigten. Nachdem ich mich später an quer und längs gerichteten Totalserien durch eibergende Uterinkammern der Raubthiere über die allgemeinen morphologischen Beziehungen der Ei- und Placentatheile unterrichtet hatte, führte ich meine Studien über die histologische Entwickelung der Placenta ohne Rücksicht auf den Embryo und orientirte die eingebetteten Theile junger oder älterer Uterinkammern so lange im Mikrotom nach allen möglichen Richtungen, bis ich wirklich Schnitte erhielt, die solche Lagebeziehungen der Chorionzotten zum Drüsengewebe zeigten, dass man sie nur als die Folge eines directen Einwachsens deuten durfte. Diese Untersuchungsmethode hat mir an ein und derselben Uteruskammer Schnitte geliefert, die nur im Sinne von HEINRICIUS aufzufassen waren, aber nach anderer Orientirung auch solche, die zu Gunsten meiner Vermuthung sprachen. Bei der Anfertigung und Beurtheilung der Querschnitte einer jungen Eikammer muss man eben stets berücksichtigen, dass die Placentaranlage die Form eines Kugelmantels hat und dass Chorionzotten wie Drüsen radiär durchlaufen. Es gelingt nicht immer eine richtige Messerstellung zu geben, um Zotten und Drüsen in ganzer Länge zu treffen. Hat man durch vieles Probiren endlich eine günstige Stellung des Praeparates zur Messerebene gefunden, so reicht diese nicht für viele Schnitte aus; nach 10—12 Schnitten muss man wieder neu orientiren, sonst erhält man nur mehr oder weniger complicirte Tangential- und Schrägschnitte der Zotten und Drüsen.

Auf Grund eigener Erfahrung kann ich die Ursache der entgegenstehenden Behauptungen von Heinricius und Strahl wohl begreifen und räume gerne ein, dass ich Bilder, wie sie von beiden Forschern ihren Abhandlungen beigegeben wurden, auch häufig gesehen habe; aber ich muss gegen ihre Behauptungen den Einwand erheben, dass sie bei der logischen Verwerthung der ihnen vorliegenden Praeparate nicht alle störenden Fehlerquellen genügend scharf erwogen und zu eliminiren gesucht haben. Beide scheinen mir in der Combination der Schnittbilder nicht richtig zu verfahren, wenn sie neben einander liegende Theile ein und desselben Drüsenschlauches als nicht zusammengehörig betrachten, weil sie in dem betreffenden Schnitte nicht verbunden sind, während vielleicht schon der nächste Schnitt die Einheit beider erläutern könnte. Strahl scheint mir ganz besonders im Irrthume zu sein, wenn er angiebt, die Krypten würden als geschlossene Epithelblasen abgekapselt und würden dann unregelmässig in die Tiefe wachsen, ihr Lumen verlieren und unter Syncytiumbildung zu Grunde gehen. Denn ich kann in der Abbildung, welche er zum Beweise seiner Behauptung beigiebt, die von ihm als Krypten bezeichneten, epithelial ausgekleideten Hohlräume nicht anders denn als Tangentialschnittbilder der Seitentaschen verästelter Uterindrüsen auffassen. Ebensowenig als man die kleinen rundlichen neben und über einander liegenden Drüsenquerschnitte am Grunde der normalen Uterinschleimhaut als abgekapselte Drüsen betrachtet, sondern als Durchschnitte eines einfachen, gewundenen Schlauches, wird man die buchtigen Hohlräume in der Placenta eines mittleren Entwickelungsstadiums als abgekapselte Krypten ansehen dürfen, wenn nicht durch Reconstruction der Beweis geliefert wird, dass sie wirklich mit den Drüsen nicht zusammenhängen.

Wenn die Keimblase sich an die Uterinschleimheit anlegt, geht das Epithel derselben zu Grunde, wie Heinricius bei Hund und Katze, ich beim Fuchse fand. Früher habe ich mich bei der Katze davon nicht überzeugen können, aber neue Praeparate lehrten mich die Richtigkeit der Angabe von Heinricius auch für dieses Thier erkennen, und weitere Untersuchungen an anderen Raubthieren berechtigen, die Zerstörung des oberflächlichen Epithels für alle Raubthiere als Regel zu bezeichnen. Eine abweichende Deutung vertritt Strahl, der beim Hunde eine Epithellage des Uterus gegen das ektodermale Chorion ebenfalls nicht unterscheiden kann. Er meint nämlich, wir schlössen mit Unrecht daraus, dass sie überhaupt nicht vorhanden sei; er könne sich sehr wohl vorstellen, die ungemein verdünnte Zellenlage schmiege sich so dem Ektoderme an, dass man sie als getrennte Schicht nicht mehr erkenne. Diesem kann ich nicht zustimmen. Denn wenn ich eine früher deutliche Zellenlage sich erst abflachen sehe und dann nicht mehr unterscheiden kann, so folgere ich, dass sie zu Grunde ging. Natürlich stützt sich der Schluss nur auf gegenwärtige Beobachtungen und jeder wird die theoretische Möglichkeit zugeben, dass vielleicht neue Fortschritte der histologischen Technik oder Verbesserungen der Beobachtungsmethode uns später einmal befähigen mögen, etwas zu sehen, was heute noch unmöglich ist. Aber so lange der hypothetische Fortschritt nicht gemacht ist, glaube ich, haben HEINRICIUS und ich die Thatsachen richtig gedeutet, und wir dürfen trotz des Widerspruches von STRAHL auch seine Beobachtungen als Stütze unserer Auffassung betrachten.

Wie wir in diesem Punkte übereinstimmen, so haben HEINRICIUS und STRAHL auch die andere Angabe bestätigt, dass gleichzeitig dem Eindringen der Zotten das Epithel an den Mündungsabschnitten der Drüsen schwindet und dass allmählich das ganze Epithelkleid derselben zu Grunde geht, mit Ausnahme der in der Tiefe liegenden Drüsenendstücke. In natürlicher Folge wird das periacinöse Bindegewebe, seiner Epitheldecke beraubt, eine Höhle begrenzen: die früher von Drüsenzellen erfüllt war. Ihr Durchmesser ist natürlich viel grösser als das eigentliche Drüsenlumen. Verfolgt man einen Drüsenlängsschnitt von unten nach oben, so sieht man das cubische Epithel der tiefsten Seite allmählich in eine Lage übergehen, deren Elemente bei verschiedenen Species verschieden, entweder dichtgedrängte cylindrische, oder grosse kugelige oder abgeflachte Formen haben und endlich ganz schwinden, so dass die Bindegewebszellen frei in die Höhlung schauen. Der Rand des Epithellagers ist meist etwas in die Höhlung vorgewulstet, häufig liegen dort auch Zellenreste im Lumen der Drüse. In sehr früher Periode der Placentarentwickelung ist also in den oberflächlichen Schichten der Uterinschleimhaut jedes epitheliale Element vollkommen zerstört. Es ist darum unmöglich die Mündungsabschnitte der Drüsen an dem früheren charakteristischen Merkmale, den Drüsenzellen zu erkennen. Aber auf guten Längsschnitten kann man das Drüsenlumen durch die weite bindegewebige Höhle bis zur Chorionfläche verfolgen. Die Chorionzotten stecken nun in den des Epithels beraubten Anfangstheilen der Drüsen, sie sind allseitig vom freiliegenden Bindegewebe umgeben; erst unterhalb ihrer Spitze beginnt die Schicht der Drüsenzellen. Das lässt sich an guten Längsschnitten unzweifelhaft feststellen. Ich habe zum Beweise die Abbildung eines Praeparates aus der Fuchsplacenta gegeben, neuerdings habe ich auch bei der Katze und anderen Raubthieren die gleichen Bilder gefunden.

Wenn aber die Schnittebene gegen Zotten- und Drüsenachse in einem beliebigen Winkel geneigt ist, so dass man nur Tangential- oder Schrägschnitte beobachtet, dann erscheinen freilich die Zotten nicht in topographischer Beziehung zu den Drüsen zu stehen. Die letzteren täuschen, als wären sie abgeschlossene Hohlräume, bedeckt von bindegewebigen Deckeln und die allseitig in Bindegewebe liegenden Zotten spotten augenfällig gegen meine Darstellung. Nur die stete Berücksichtigung der Thatsache, dass die oberen Drüsenabschnitte nicht mehr durch Drüsenepithel ausgezeichnet sind, ermöglicht die Orientirung in dem trügerischen Bilde und führt zu der seit langem von mir verfochtenen Deutung. Mir scheint, Strahl und Heinricius, welche sie angreifen, haben hier nicht die genügende Kritik geübt.

Das Studium einer grösseren Anzahl von Raubthieren, wie Marder, Iltis, Fischotter, Wiesel, welche freundliche Vermittelung einer grossen Anzahl deutscher und österreichischer Jäger mir bot, zeigte, wie verbreitet die früher beschriebene Formwandlung der Drüsen des placentaren Schleimhautbezirkes sei. Aus einfachen gewunden in die Tiefe laufenden, unten wenig geknäuelten Schläuchen werden erweiterte Säcke mit grösseren oder kleineren Seitentaschen. Ihre Form zeigt in einzelnen Familien und Gattungen typische Verschiedenheiten, diese will ich in der ausführlichen Arbeit durch Abbildungen erläutern. Immer ist der obere Theil, der Drüsenhals weiter als der Fundus der Drüse, die Schläuche werden zwei bis dreitheilig gegabelt, ihre lateralen Äste verlaufen oft parallel zur ursprünglichen Axe, manchmal gehen sie in schräger Richtung ab. Neben den grossen finden sich häufig seichtere Ausbuchtungen. Die Epithellage bleibt nicht einfach, ihre Elemente drängen sich enger zusammen, das ganze Lager wulstet sich auf und wirft Falten, die auf Schnitten wie rundliche Knospen, lange Zapfen oder breite Kolben in das Lumen vorspringen. Ein Theil wird abgestossen und zerfällt im flüssigen Drüseninhalte.

Lange suchte ich vergebens nach analogen Processen im Säugethierkörper, bis die neulich erschienene Studie von G. Hauser über das Cylinderepithel-Carcinom des Magens und des Dickdarmes (Jena. Fischer 1890) mir zeigte, wie sehr die dort beschriebenen und durch schöne Abbildungen erläuterten degenerativen Vorgänge in der krebsartig erkrankten Darmschleimhaut mit dem histologischen Befunde der Placentarentwickelung sich decken. Als ich dann mit dem befreundeten Collegen Praeparate verglich, freuten wir uns beide über die auffallende Ähnlichkeit derselben. Die Formänderung der Uterindrüsen, besonders der Katze, entspricht fast ganz dem histologischen Bilde des adenomatösen Krebses. Damit sei aber nicht die Homologie beider Erscheinungen behauptet. Die Thatsache ist nur richtig, weil sie zeigt, dass ein histologischer Vorgang, der bisher ausschliesslich pathologischen Charakter zu besitzen schien, auch in physiologisch normalen Organen auftritt. Aber er ist nur den Raubthieren eigenhümlich, bei keinem anderen Säugethiere habe ich bisher etwas Ähnliches beobachtet.

Wie bei der atypischen Drüsenwucherung geht das Epithel der Uterindrüsen unter degenerativen Erscheinungen zu Grunde, seine Reste, amorphe Massen mit unregelmässigen Chromatinklumpen liegen unterhalb der Spitze der in periacinösen Bindegewebshöhlen liegenden Zotten. Dieses Umwandlungsproduct habe ich in meiner ersten Mittheilung einfach als Syncytium bezeichnet, um das regellose Zusammenliegen von Kern und Plasmaresten durch ein Wort anschaulich zu machen. Da ich jedoch bald einsah, dass dasselbe nicht genug prägnant ist und leicht Missverständnisse bedingt, so habe ich es in der ausführlichen Darstellung nicht gebraucht. Leider ist der Ausdruck seitdem vielfach verwendet und ein starkes Hinderniss der Verständigung, sowie neue Ursache von Unklarheiten geworden, deshalb will ich hier die Gründe auseinandersetzen, weshalb derselbe fallen muss.

Heinricius und Strahl bezeichnen als Syncytium »fein granulirte Plasmamassen mit eingestreuten Kernen« in der Placenta, die nach ihrer Meinung wichtigen Aufgaben, besonders der Ernährung des Embryos vorstehen. Beide führen mehrere Male mich an, als theilte ich ihre Meinung. Das trifft nicht zu, denn ich verstand unter dem gleichen Worte die zerfallenden epithelialen Elemente der Uterindrüsen und bedaure jetzt ausdrücklich, diesen Fehler begangen zu haben. Die Herkunft des Syncytiums leitet Heinricius für Hund und Katze aus Bindegewebszellen der mütterlichen Schleimhaut ab. Strahl's Angaben sind weniger bestimmt. Das Syncytium in der Placenta des Hundes soll vorwiegend durch Veränderungen der Epithel- und Drüsenzellen in eine vielkernige Plasmamasse entstehen, doch sollen auch Bindegewebszellen an der Umwandlung betheiligt sein.

Die Aufgabe und das spätere Schicksal des Syncytiums wird von beiden wieder verschieden beurtheilt. Heinricius meint, dasselbe diene bei der Katze theilweise als Nahrung des Embryos und schwinde in späterer Zeit der Schwangerschaft. Strahl hingegen glaubt, aus ihm werde bei der Katze ein zusammenhängender und vollständiger Überzug der Zotten gebildet, nur ein geringerer Theil gehe zu Grunde und werde wahrscheinlich von den Chorionzellen aufgenommen. Beide Forscher bezeichnen also mit dem gleichen Worte Bildungen ganz verschiedener Herkunft und Function, die nur in der äussern Form einander etwas ähnlich sind. Gegen ihre Angaben muss ich gestehen, dass ich bei dem vergleichenden Studium der Placenten aller einheimischen Raubthiere nichts gefunden habe, das entweder die eine oder die andere Angabe bestätigen könnte. Zum Beginn der Schwangerschaft verschwindet das normale Aussehen des Schleimhaut-Bindegewebes, die Fasern sind nicht mehr nachzuweisen, die fixen Zellen erhalten grösseren Plasmaleib. In dem grosszellig gewordenen Bindegewebe, das keine oder wenig Intercellularsubstanz besitzt, liegen zahllose Capillaren. Ähnliche Beschreibungen lieferten auch Strahl und Heinricius. Letzterer sieht nun in der Katzenplacenta statt der weit auseinander stehenden, oft durch Ausläufer anastomosirenden Zellen des oberflächlichen Bindegewebes das mütterliche Lager aus grossen Zellen zusammengesetzt, die vielfach nach Art eines Syncytiums verschmelzen. Hieraus geht hervor, dass Heinricius solche Stellen seines Praeparates, an denen die Zollgrenzen undeutlich waren, als beginnende Stadien einer Syncytialbildung deutete. Mir sind solche Bilder auch vorgekommen, aber ich hielt mich nicht berechtigt, von einem Syncytium zu sprechen, da andere Praeparate der Katze, die mit anderen Flüssigkeiten conservirt und verschieden gefärbt waren (hierzu empfiehlt sich Flemming's Chromosmiumessigsäure und nachfolgende Reduction durch rohen Holzessig) die Zellgrenzen des metamorphosirten Bindegewebes klar erkennen liessen. Deshalb bestreite ich entschieden die Bildung eines bindegewebigen Syncytiums. Aber ebensowenig ist den Angaben Strahl's beizupflichten. Das Epithel der Uterindrüsen geht unter den gewöhnlichen degenerativen Erscheinungen, über welche jedes Handbuch der pathologischen Anatomie genügenden Aufschluss giebt, zu Grunde. Unter keinen Umständen wird daraus eine neue die Zotten umhüllende Zellenlage gebildet.

In wenigen Wochen hoffe ich das Untersuchungsmaterial zur Entwickelung der discoidalen Placenta so vervollständigt zu haben, dass ich der Akademie einen übersichtlichen Bericht vorlegen kann. Daraus soll hervorgehen, dass Form und Structur der Placenta innerhalb des Säugerstammes keinem einheitlichen Typus unterthan sind. Wie die Zonoplacenta der Raubthiere aus morphologischen und histologischen Gründen abseits von der Discoplacenta zu stellen ist, so lassen sich im Baue des scheibenförmigen Mutterkuchens mehrere scharf von einander getrennte Grundtypen unterscheiden. Sie lassen interessante Beziehungen erkennen zu der verschiedenen Form und Lage der Embryonalhüllen, die ich im zweiten Hefte meiner embryologischen Untersuchungen zusammenfasste.

30. Über sehr flächenreiche, wahrscheinlich dem Jordanit angehörige Krystalle aus dem Binnenthal.

Von Dr. H. Baumhauer
in Lüdinghausen.

(Vorgelegt von Hrn. Klein am 25. Juni; — gedruckt im Bericht vom 9. Juli [St. XXXV]; — ausgegeben am 16. Juli.)

Im Jahre 1864 führte G. vom Rath[1] unter dem Namen Jordanit ein neues Mineral ein, von welchem er bemerkte, dass es von den drei rhombischen Schwefelverbindungen des Binnenthals (Jordanit, Dufrénoysit und Skleroklas) das seltenste sei. Nach ihm weist das Krystallsystem des Jordanit ein verticales rhombisches Prisma auf, dessen vordere Kante nicht sehr verschieden ist von 120°, und besitzt, wie so viele rhombische Systeme mit einem ähnlichen Prismenwinkel, eine grosse Neigung zur Zwillings- bez. Drillingsbildung nach ∞P. In der That waren die beiden einzigen, damals vom Rath bekannten Krystalle dieses Minerals Zwillingsbildungen. Einen der beiden Krystalle maass er und gelangte zu dem Axenverhältnisse:

$$a : b : c = 0.5375 : 1 : 2.0308.$$

Die Fundamentalwerthe waren:

$$c : \tfrac{1}{2}o\,(oP : \tfrac{1}{2}P) = 65^\circ\,0' \text{ (Normalenwinkel)}$$
$$\tfrac{1}{2}o : \tfrac{1}{2}o'(\tfrac{1}{2}P : \tfrac{1}{2}P') = 50^\circ\,49' \text{ (\quad » \quad)}.$$

G. vom Rath beobachtete ausser der Basis und dem Protoprisma neun Protopyramiden und eine gleiche Zahl von Brachydomen. Die letzteren ergänzen gewissermaassen die ersteren zu scheinbaren hexagonalen Pyramiden, indem zu je einem mP ein $2m\breve{P}\infty$ hinzutritt. Das Protoprisma besitzt einen vorderen Winkel von 56° 31′. Im übrigen bemerkt vom Rath noch Folgendes über die beiden (damals im Besitz des Hrn. Dr. Jordan befindlichen) Krystalle:

»Beide sind Zwillinge und mit Blende-Krystallen verwachsen, sitzen sie in kleinen Drusen des bekannten Dolomits. Der kleinere

[1] Poggendorff's Annalen u. s. w. 122, 387.

der Krystalle, 4^{mm} lang, 3^{mm} breit, besitzt vollkommen spiegelnde Flächen und wurde zur Messung vom Muttergestein heruntergenommen. — Die Flächen ∞P sind ausserordentlich schmal und geben keine Bilder. Der andere Krystall stellt sich dar als eine dicke sechsseitige Tafel, 6^{mm} in den beiden horizontalen, 5^{mm} in der verticalen Richtung messend. Zahllose feine Zwillingslinien verlaufen parallel der symmetrischen Diagonale (des Zwillings), sie sind sichtbar auf den nicht parallelen Tafelrändern, während sie weder auf der Endfläche oP, noch auf den parallelen Tafelrändern (Zone $\infty P : oP$) zu bemerken sind, was vollkommen der entwickelten Ansicht von der Natur jener Linien und Streifen entspricht«.

Die chemische Zusammensetzung des Jordanit konnte damals wegen Mangels an Analysenmaterial nicht festgestellt werden. Doch analysirte L. Sipöcz[1] im Jahre 1873 das Binnenthaler Mineral und ermittelte die Formel $4PbS \cdot As_2S_3$. In demselben Jahre beschrieb G. Tschermak[2] Krystalle von Jordanit von Nagyág, welche klein sind und stark gestreifte Flächen besitzen. Tschermak fügte zu den schon bekannten Formen zwei neue hinzu. Während L. Sipöcz in den Binnenthaler Krystallen nur 0.11 Procent Antimon gefunden hatte, wies E. Ludwig nach, dass die Krystalle von Nagyág 1.87 Procent Antimon enthalten.

G. vom Rath[3] theilte 1874 seine Beobachtungen an einem weiteren »ausgezeichneten Jordanitkrystall« aus der Schweiz mit. Dieser Krystall, dessen Länge 5^{mm}, Breite 3^{mm}, Dicke $1\frac{1}{2}^{mm}$ betrug, wurde von ihm »fast naturgetreu« abgebildet. Derselbe bietet ausser den schon bekannten Formen zwei früher nicht beobachtete Reihen dar: Brachypyramiden $m\breve{P}3$ und Makrodomen $m\bar{P}\infty$, von denen wiederum mehrere sich zu dihexaëderähnlichen Gestalten ergänzen können. Der Krystall, »wohl einer der flächenreichsten, welche bisher im rhombischen System beobachtet wurden«, zeigt im Ganzen 28 Formen. Jede Pyramide der Reihe mP wird durch ein Brachydoma $2m\breve{P}\infty$ zu einer dihexaëderähnlichen Gestalt ergänzt. In derselben Beziehung steht $\breve{P}3$ zu $\bar{P}\infty$, $\frac{1}{2}\breve{P}3$ zu $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$, indem sie ein Pseudodihexaëder anderer Ordnung darstellen. Der Krystall ist ein Zwilling nach ∞P, in welchem das eine Individuum über das andere vorherrscht. Dünne Zwillingslamellen sind ausserdem einem jeden der beiden Krystalltheile eingeschaltet und erscheinen als feine Linien. An diesem Krystalle fand vom Rath $oP : \frac{1}{2}P = 65^\circ 0'$ (ber. $65^\circ 0'$), $oP : \frac{1}{7}P = 31^\circ 32$

[1] Miner. Mitth. von G. Tschermak, 1873, S. 29.
[2] Ebenda, 1873, S. 215.
[3] Poggendorff's Annalen, Ergänzungsb. 6, 363.

(ber. $31^\circ 30'$). Der geschilderte Jordanitkrystall war »von bewunderns-werthem Flächenglanz«.

Einen weiteren Beitrag zur Kenntniss des Minerals (vom Binnenthal) lieferte W. J. Lewis;[1] er fand an einem Krystall noch fünf weitere neue Formen. Die Flächen von $^1/_2$P waren am grössten, weniger gross oP, alle anderen klein ausgebildet.

Nachdem durch H. A. Miers[2] und A. Krenner[3] ermittelt worden war, dass der Meneghinit ($4 PbS \cdot Sb_2 S_3$), welcher von vom Rath für monoklin gehalten wurde, rhombisch krystallisire, versuchten die ersteren wie auch A. Schmidt,[4] einen Isomorphismus zwischen Jordanit und Meneghinit, welcher ja nach der analogen Zusammensetzung beider zu erwarten war, nachzuweisen. A. Schmidt schloss seine Betrachtungen mit dem Ausspruche, dass die Isomorphie des Jordanit und Meneghinit als eine vollkommene angesehen werden müsse. Zu diesen Versuchen bemerkt C. Hintze[5]: »Eine ungezwungene krystallographische Gleichstellung des Meneghinit und Jordanit, etwa gegeben durch die natürliche Ausbildung ihrer Krystalle, ist nicht möglich. Ich bin vielmehr überzeugt, dass Meneghinit und Jordanit in den zur Zeit bekannten Formen nicht isomorph sind, sondern dass die Verbindungen $4 PbS \cdot Sb_2 S_3$ und $4 PbS \cdot As_2 S_3$ isodimorph sind, und uns von der isodimorphen Doppelgruppe noch zwei Glieder fehlen.«

Hr. G. Seligmann in Coblenz vertraute mir zwei lose, ziemlich kleine, dabei aber ganz vortrefflich ausgebildete und äusserst flächenreiche graue, stark metallglänzende Krystalle zur Untersuchung an, welche vom Erdboden bei Imfeld (Binnenthal) herstammen und von Hrn. Seligmann für ein dem Dufrénoysit nahestehendes Mineral gehalten wurden. Die beiden Krystalle sind annähernd gleich gross, Dimensionen ungefähr $3^{mm} : 3^{mm} : 2^1/_2{}^{mm}$. Eine genauere Betrachtung derselben führte mich alsbald zu der Annahme, dass es sich um Jordanit handele. Dazu brachte mich namentlich der scheinbare hexagonale Habitus, genau entsprechend den vom Rath'schen Abbildungen. Die Krystalle zeigen, wenn wir zunächst bei der vom Rath'schen Auffassung des Jordanit bleiben, die Basis vorherrschend, dazu eine grosse Reihe von meist in sehr schmalen Flächen auftretenden Protopyramiden und Brachydomen, ausserdem mehrere Pyramiden $m\breve{P}3$ und Makrodomen, der eine Krystall zudem noch ein paar Zonen, welche bisher am Jordanit noch nicht beobachtet wurden.

---

1 Zeitschr. f. Kryst. 2, 191.
2 Zeitschr. f. Kryst. 9, 291.
3 Ebenda 8, 622.
4 Ebenda 8, 613.
5 Ebenda 9, 294.

Die Krystalle sind im Folgenden mit I und II bezeichnet. Kr. I besteht aus zwei, nicht absolut genau parallelen Theilen, ungefähr Hälften, welche bei sonst gleicher krystallographischer Stellung so verwachsen sind, dass die beiden Basisflächen um einige Minuten in ihrer Lage differiren. Es zeigt sich dies auch durch eine Rinne, bez. einspringende Winkel, welche sich ungefähr parallel der Basis um die Mitte des Krystalles hinziehen. Die eine Basisfläche zeigt nun eine deutliche feine Streifung parallel der Brachydiagonale, die andere besitzt diese Streifung nur an einer der beiden zum Brachypinakoid parallelen Seiten. Die erstere Basisfläche giebt in Folge dessen ein mehrfaches Reflexbild. Dieser Kr. I ist flächenreicher als der andere II, welcher hingegen durchaus einheitlich gebildet ist und zum Theil noch bessere Messungsresultate ergab als I. Auch zeichnet sich II dadurch aus, dass er sehr feine aber doch deutlich erkennbare Zwillingslamellen nach ∞P eingeschaltet enthält. Der grosse Flächenreichthum verursacht in einzelnen Zonen bez. Zonentheilen eine solche Häufung der Reflexe, dass dieselben stellenweise eine ununterbrochene, nicht aufzulösende Reihe bilden. Abgesehen von der Basis und einzelnen anderen breiteren Flächen erscheinen die Krystalle in Folge dessen fast kugelig gerundet.

Während G. vom Rath den Prismenwinkel wie überhaupt die Winkel der Prismenzone nicht messen konnte, war dies bei den von mir untersuchten Krystallen möglich. Das Ergebniss der Durchmessung dieser Zone war ein überraschendes; es zeigte, dass die beiden Krystalle nicht dem rhombischen, sondern dem monoklinen System angehören. Die nach vom Rath als Basis aufgefasste Fläche entspricht dabei dem Klinopinakoid, das rhombische Brachypinakoid dem Orthopinakoid, das Makropinakoid der monoklinen Basis. An Kr. I fand ich u. a. folgende Werthe (die mit (†) bezeichneten sind als besonders gute, die weiterhin mit (cc.) bezeichneten als angenäherte zu betrachten):

$(001):(101) = 28^\circ\ 8'$	$(00\bar{1}):(\bar{1}0\bar{1}) =$ (†)$28^\circ\ 6^1/_2'$
$(101):(301) = 29^\circ\ 40'$	$(\bar{1}0\bar{1}):(\bar{3}0\bar{1}) = 29^\circ\ 38^1/_2'$
$(301):(100) = 31^\circ\ 39^1/_2'$	$(\bar{3}0\bar{1}):(\bar{1}00) = 31^\circ\ 41^1/_2'$
$(100):(30\bar{1}) = 32^\circ\ 0'$	$(\bar{1}00):(\bar{3}01) = 31^\circ\ 59^1/_2'$
$(30\bar{1}):(10\bar{1}) = 30^\circ\ 11'$	$(\bar{3}01):(\bar{1}01) = 30^\circ\ 12'$
$(10\bar{1}):(00\bar{1}) =$ (†)$28^\circ\ 23'$	$(\bar{1}01):(001) = 28^\circ\ 21'$

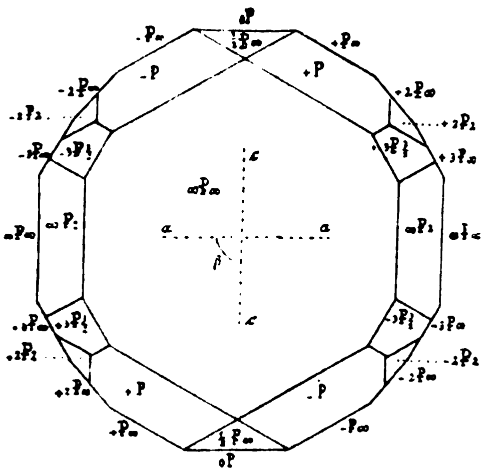
Bei Ermittelung dieser Zahlen wurde sorgfältig auf die Sonderung der von den beiden nicht genau parallelen Theilen des Krystalls herrührenden Reflexe geachtet.

Kr. II ergab folgende, mit Ausnahme der beiden ersten mit obigen gut übereinstimmende Zahlen (leider sind nicht alle Werthe von derselben Güte wie die bei I erhaltenen):

$(101):(301) = $ (cc.) $29^\circ\ 48\frac{3}{4}'$	$(10\bar{1}):(00\bar{1}) = 28^\circ\ 23\frac{1}{2}'$
$(301):(100) = $ (cc.) $31^\circ\ 29\frac{1}{4}'$	$(00\bar{1}):(\bar{1}0\bar{1}) = 28^\circ\ 4\frac{1}{2}'$
$(100):(30\bar{1}) = $ (cc.) $31^\circ\ 57\frac{3}{4}'$	$(\bar{1}0\bar{1}):(\bar{1}00) = 61^\circ\ 24'$ (Kr. I: $61^\circ\ 20'$)
$(30\bar{1}):(10\bar{1}) = $ (cc.) $30^\circ\ 13\frac{1}{2}'$	$(\bar{1}00):(\bar{1}01) = 62^\circ\ 9'$ (» $62^\circ\ 11\frac{1}{2}$)

$$(\bar{1}01):(101) = 56^\circ\ 29\frac{3}{4}' \left(\text{Kr. I}: \begin{cases} 56^\circ\ 29' \\ 56^\circ\ 29\frac{1}{2}' \end{cases}\right)$$

Die an I gewonnene, vollständige Winkelreihe lässt sehr gut erkennen, dass sich, dem monoklinen System gemäss, entsprechen die Werthe: 1 und 7, 2 und 8, 3 und 9 u. s. w. Der Winkel $(101):(\bar{1}01) = 56^\circ\ 29' - 29\frac{3}{4}'$ entspricht dem vom Rath'schen Prismenwinkel $56^\circ\ 31'$. Der $\measuredangle\beta$ ergab sich aus einer guten Messung: $(\bar{1}00):(10\bar{1}) = 89^\circ\ 26\frac{1}{2}'$, die Abweichung vom rhombischen System ist also eine verhältnissmässig geringe. Die auf dem Klinopinakoid, der scheinbaren rhombischen Basis, auftretende Streifung geht der Verticalaxe parallel.



Die beistehende Figur soll die Symmetrieverhältnisse, nicht aber den schwer darstellbaren Flächenreichthum der Krystalle veranschaulichen. Sie zeigt eine Projection auf das Klinopinakoid. Die scheinbaren rhombischen Protopyramiden werden zu den Hemipyramiden $\mp$ m P, die Brachydomen zu den Prismen ∞P̀ n und ∞ P n, die Makrodomen zu den Klinodomen m P ∞. Eine entsprechende Deutung erhalten die scheinbaren Brachypyramiden m P̆ 3. In die Figur ist nur je eine Form eingetragen. Die Flächen $\mp$ 2 P∞ gaben nur schwache Reflexe bez. Schimmer, welche jedoch zur Bestimmung der Formen hinreichten. Als Fundamentalwerth zur Berechnung des Axenverhältnisses diente ausser den schon angeführten $(00\bar{1}):(\bar{1}0\bar{1}) = 28^\circ\ 6\frac{1}{2}'$ und $\beta = 89^\circ\ 26\frac{1}{2}'$ der Winkel $(010):(250)$, welcher an II in zwei recht guten Messungen zu $38^\circ\ 58'$ und $38^\circ\ 58\frac{1}{2}'$, im Mittel zu $38^\circ\ 58\frac{1}{4}'$ gefunden wurde. Hieraus ergiebt sich:

$$\mathbf{a : b : c = 0.4944967 : 1 : 0.2655237}$$
$$\beta = \mathbf{89^\circ\ 26\frac{1}{2}'}$$

Es sei noch bemerkt, dass den vom Rath'schen Fundamentalwerthen oP : $\frac{1}{2}$P (rhombisch) $= 65^\circ\ 0'$ und $\frac{1}{2}$P : $\frac{1}{2}$P' $= 50^\circ\ 49'$ die nach obigem Axenverhältniss berechneten Winkel $-$ 2 P 2 : ∞P∞ $= 65^\circ\ 1'\ 0''$ und $-$ 2 P 2 : $+$ 2 P 2 $= 50^\circ\ 44'\ 36''$ entsprechen. Die vom Rath'sche Axe a entspricht der monoklinen Axe c, b der Axe a und c der monoklinen b.

Die Richtigkeit meiner Auffassung erhellt auch besonders schön aus der abweichenden Neigung je zweier, zusammen einer scheinbaren rhombischen Pyramide entsprechenden Hemipyramiden zum Klinopinakoid.

Die weiter unten folgende Winkeltabelle giebt eine lange Reihe von Beispielen. Hier seien nur ein paar angeführt:

	berechnet	gemessen (Kr. II, Beispiel)
$\infty P \infty : -3P3$	$= 55° \; 2' \; 57''$	(†) $55° \; 3\frac{1}{2}'$
$\infty P \infty : +3P3$	$= 54° \; 49' \; 49''$	(†) $54° \; 50'$
$\infty P \infty : -4P4$	$= 47° \; 1' \; 7''$	(†) $47° \; 1\frac{1}{4}'$
$\infty P \infty : +4P4$	$= 46° \; 47' \; 11''$	(†) $46° \; 47\frac{1}{4}'$
		(Kr. I, Beispiel)
$\infty P \infty : -3P$	$= 67° \; 18' \; 4''$	(†) $67° \; 18\frac{1}{2}'$
$\infty P \infty : +3P$	$= 67° \; 7' \; 21''$	$67° \; 6\frac{1}{2}'$
$\infty P \infty : -5P\,5/3$	$= 55° \; 7' \; 5''$	(†) $55° \; 7'$
$\infty P \infty : +5P\,5/3$	$= 54° \; 52' \; 59''$	(†) $54° \; 52'$.

Die von G. vom Rath angegebenen Neigungswinkel der Pyramidenflächen zur Basis entsprechen fast genau den von mir für die Neigung der betreffenden negativen Hemipyramiden zum Klinopinakoid berechneten, wie folgende Zusammenstellung zeigt:

Bezeichnung nach v. R.	berechnet (v. R.)	gemessen (v. R.)	berechnet für d. monokl. S.
$o : c$	$76° \; 52\frac{1}{2}'$	$76° \; 51'$	$76° \; 53' \; 7''$ ($-\;P \; : \infty P \infty$)
$\frac{1}{2}o : c$	$65° \; 0'$	$65° \; 0'$	$65° \; 1' \; 0''$ ($-\;2P2 \; : \infty P \infty$)
$\frac{1}{3}o : c$	$55° \; 2'$	$55° \; 3'$	$55° \; 2' \; 57''$ ($-\;3P3 \; : \infty P \infty$)
$\frac{2}{7}o : c$	$50° \; 47'$	$50° \; 46'$	$50° \; 48' \; 20''$ ($-\;7/2\,P\,7/2 \; : \infty P \infty$)
$\frac{1}{4}o : c$	$47° \; 0'$	$46° \; 58'$	$47° \; 1' \; 7''$ ($-\;4P4 \; : \infty P \infty$)
$\frac{1}{5}o : c$	$40° \; 37\frac{1}{2}'$	$40° \; 35'$	$40° \; 38' \; 40''$ ($-\;5P5 \; : \infty P \infty$)
$\frac{1}{6}o : c$	$35° \; 33\frac{1}{2}'$	$35° \; 33'$	$35° \; 34' \; 45''$ ($-\;6P6 \; : \infty P \infty$)
$\frac{1}{7}o : c$	$31° \; 30'$	$31° \; 30'$	$31° \; 30' \; 57''$ ($-\;7P7 \; : \infty P \infty$)
$\frac{1}{8}o : c$	$28° \; 12'$	—	$28° \; 12' \; 54''$ ($-\;8P8 \; : \infty P \infty$)

Die vom Rath'schen Brachydomen entsprechen den monoklinen vertikalen Prismen, z. B.:

$2f : c$	$76° \; 10'$	$75° \; 56'$	$76° \; 6' \; 46''$ ($\infty P2 \; : \infty P \infty$)
$f : c$	$63° \; 47'$	$63° \; 43'$	$63° \; 41' \; 20''$ ($\infty P \; : \infty P \infty$)
$\frac{2}{3}f : c$	$53° \; 33'$	$53° \; 32'$	$53° \; 26' \; 7''$ ($\infty P\,3/2 \; : \infty P \infty$)
$\frac{1}{2}f : c$	$45° \; 26'$	$45° \; 22'$	$45° \; 19' \; 6''$ ($\infty P2 \; : \infty P \infty$)
$\frac{2}{5}f : c$	$39° \; 5'$	$39° \; 6'$	$38° \; 58' \; 15''$ ($\infty P\,5/2 \; : \infty P \infty$)
$\frac{1}{3}f : c$	$34° \; 5\frac{1}{2}'$	$34° \; 0'$	$33° \; 59' \; 5''$ ($\infty P3 \; : \infty P \infty$)
$\frac{2}{7}f : c$	$30° \; 7'$	$30° \; 0'$	$30° \; 1' \; 12''$ ($\infty P\,7/2 \; : \infty P \infty$)
$\frac{1}{4}f : c$	$26° \; 55'$	—	$26° \; 49' \; 14''$ ($\infty P4 \; : \infty P \infty$)

Wie man sieht, stimmen die zuletzt aufgeführten, von vom Rath erhaltenen Messungsresultate unter 7 Fällen sogar in 5 mit den von mir berechneten Zahlen besser überein als mit den von jenem Forscher berechneten.

In seiner zweiten Mittheilung führt VOM RATH noch als weitere (bez. erneute) Messungen auf:

$^1/_4 o : c =$	$46^\circ\ 59'$	(von mir berechnet:	$47^\circ\ 1'\ 7'' = -4P4 : \infty P \infty$)
$^1/_5 o : c =$	$40^\circ\ 39'$	(» » »	: $40^\circ\ 38'\ 40'' = -5P5 : \infty P \infty$)
$^1/_7 o : c =$	$\begin{cases} 31^\circ\ 30' \\ 31^\circ\ 32' \end{cases}$	(» » »	: $31^\circ\ 30'\ 57'' = -7P7 : \infty P \infty$)

Ferner giebt er daselbst (wahrscheinlich nur berechnet) an:

$^1/_9 o : c =$	$25^\circ\ 29'$	(von mir berechnet:	$25^\circ\ 29'\ 50'' = -9P9 : \infty P \infty$)
$u : c =$	$82^\circ\ 4'$	(» » »	: $82^\circ\ 3'\ 45'' = -3P3 : \infty P \infty$)
$^1/_3 u : c =$	$67^\circ\ 18^2/_3{}'$	(» » »	: $67^\circ\ 18'\ 4'' = -3P : \infty P \infty$)
$^1/_4 u : c =$	$60^\circ\ 52'$	(» » »	: $60^\circ\ 51'\ 4'' = -4P^4/_3 : \infty P \infty$)
$^1/_6 u : c =$	$50^\circ\ 6'$	(» » »	: $50^\circ\ 5'\ 7'' = -6P2 : \infty P \infty$)

Bei der Betrachtung obiger Gegenüberstellungen kann man sich wohl kaum der Vermuthung erwehren, dass 1. die von VOM RATH gemessenen und die von mir untersuchten Krystalle gleicher Art seien, und 2. dass VOM RATH zufällig nur solche Pyramidenzonen gemessen habe, welche meinen negativen Hemipyramiden entsprechen. Diese letztere Ansicht gewinnt an Wahrscheinlichkeit, wenn man die Abbildung des ersten von VOM RATH gemessenen Krystalls (a. a. O. Taf. III, Fig. 6) betrachtet. VOM RATH sagt über diesen Krystall: »Derselbe lässt vier freie Seiten der sechsseitigen Zwillingstafel erkennen. Die nach vorn gewandten (dem abgebrochenen Ende gegenüberliegenden) Randflächen-Reihen $^1/_7 o'$ u. s. w. und $^1/_7 o$ sind zu einander symmetrisch ausgebildet.« Diese beiden Flächenreihen bez. Zonen sind aber in Folge der Zwillingsbildung auch bei Annahme des monoklinen Systems gleichartig, liefern also bei der Messung gleiche Resultate. Zudem boten sie sich wohl zuerst der Messung dar.

Betrachten wir kurz noch die von LEWIS a. a. O. mitgetheilten Messungsresultate. Er fand:

rhombisch	gemessen	berechnet (rhomb.)	monoklin	berechnet (monokl.)
(103) : (001)	$51^\circ\ 33'$	$51^\circ\ 33'$	(031) : (010)	$51^\circ\ 27'\ 41''$
(102) : (001)	$62^\circ\ 6'$	$62^\circ\ 6'$	(021) : (010)	$62^\circ\ 1'\ 51''$
(203) : (001)	$68^\circ\ 23'$	$68^\circ\ 21'$	(032) : (010)	$68^\circ\ 17'\ 3''$
(101) : (001)	$75^\circ\ 6'$	$75^\circ\ 10^1/_2{}'$	(011) : (010)	$75^\circ\ 7'\ 49''$
(132) : (001)	$74^\circ\ 15'$	$74^\circ\ 24^1/_2{}'$	$(32\bar{1})$: (010) (321) : (010)	$74^\circ\ 17'\ 19''$ $74^\circ\ 25'\ 7''$
(131) : (001)	$81^\circ\ 47'$	$82^\circ\ 3^1/_2{}'$	$(31\bar{1})$: (010) (311) : (010)	$81^\circ\ 59'\ 38''$ $82^\circ\ 3'\ 45''$

Die drei ersten Werthe stimmen genau bez. fast genau mit den von LEWIS berechneten überein, der vierte steht den von mir berechneten näher; die beiden letzten aber harmoniren nicht mit den für meine negativen Hemipyramiden (wie es bei VOM RATH der Fall ist) berechneten Werthen, sondern nähern sich mehr denjenigen, welche den betreffenden positiven Hemipyramiden entsprechen. Besonders auffallend ist dies bei dem vorletzten Winkel, wo die Beobachtung sich dem monoklinen $(32\bar{1}):(010)$, die Berechnung hingegen $(321):(010)$ nähert. Es wäre leicht möglich, dass Lewis hier in der That seine Messungen in der positiven Zone angestellt hat, wenngleich natürlich die wenigen Zahlen eine sichere Entscheidung nicht zulassen.

Immerhin muss zugegeben werden, dass ein Zweifel an der Identität der hier geschilderten Krystalle mit Jordanit bestehen bleiben kann. Es ist die Möglichkeit nicht ganz abzuweisen, dass beiderlei Krystalle zwei Modificationen einer dimorphen Substanz mit (bei verschiedenen Systemen) einander ausserordentlich nahestehenden Winkeln darstellen, oder dass die von mir gemessenen einem neuen, dem rhombischen Jordanit krystallographisch sehr nahe stehenden, aber chemisch davon verschiedenen Mineral angehören. Der letzte Zweifel an der Zugehörigkeit unserer Krystalle zum Jordanit könnte nur durch eine erneute Untersuchung der vom Rath'schen Originale gehoben werden. Es war mein lebhafter Wunsch, eine solche Untersuchung vornehmen zu können. Deshalb wandte ich mich an Hrn. Prof. Bücking in Strassburg mit der Bitte, mir die nach Prof. Groth's Angabe[1] in der dortigen Universitätssammlung befindlichen vom Rath'schen Originalkrystalle zum angegebenen Zwecke anvertrauen zu wollen. Hr. Bücking hatte die grosse Güte, mir sämmtliche aus der Jordan'schen Sammlung stammenden, in der Strassburger Sammlung befindlichen Jordanitstufen (vier Stücke) zu übersenden, fügte aber folgende Bemerkung hinzu: »Ich muss nach dem Aussehen der Stücke bezweifeln, dass dieselben wirklich die vom Rath'schen Originale sind; die G. vom Rath'schen Originale werden vielmehr von diesen oder anderen im Besitz von Jordan gewesenen Stufen entnommen sein. Lose Krystalle von Jordanit besitzen wir nicht.«

Ich kann der hier geäusserten Ansicht nur beipflichten. Die mir vorliegenden Stücke weisen Krystalle auf, welche mehr oder weniger matte Flächen zeigen; höchst wahrscheinlich rühren die von G. vom Rath gemessenen Krystalle, deren Flächenglanz er rühmt, von anderen Stufen her. Der grössere der Strassburger Krystalle zeigt die Entwickelung von Zwillingslamellen in hervorragendem Maasse. Die Anstellung von Messungen war mir, da die Krystalle sämmtlich auf ziemlich grossen Stufen sitzen, nicht möglich. Wenngleich also nach dem Mitgetheilten noch nicht mit absoluter Gewissheit auf die Identität der von mir untersuchten Krystalle mit Jordanit

[1] Mineraliensamml. der Univers. Strassburg, S. 69.

geschlossen werden kann, so darf ich doch wohl vorläufig, gestützt auf die mit den Winkeln des genannten Minerals fast genau übereinstimmenden Resultate meiner Messungen, sowie auf die Analogie der an den VOM RATH'schen Krystallen und den hier besprochenen auftretenden Formen, endlich auf die auch an einem der letzteren beobachtete Zwillingsbildung, jene Identität annehmen und die beiden in Rede stehenden Krystalle als sehr flächenreiche Vorkommnisse von Jordanit betrachten. Demgemäss habe ich im Folgenden die an den letzteren beobachteten monoklinen Formen, 88 an der Zahl, zusammengestellt und entsprechenden Falles die von VOM RATH und LEWIS beobachteten nebst der VOM RATH'schen Signatur und der rhombischen Bezeichnung hinzugefügt. Die von TSCHERMAK beobachteten Formen habe ich an meinen Krystallen nicht aufgefunden. Sämmtliche Formen habe ich mit neuer Signatur bezeichnet, und zwar nach folgendem Schema, welches es leicht ermöglicht, in Zukunft noch aufzufindende weitere Formen den hier aufgeführten einzureihen.

1. $\mp$ mh $= \mp$ mP∞
2. mk $=$ mP∞
3. ns $= \infty$Pn
4. nr $= \infty$Pn
5. $\mp$ mp $= \mp$ mP
6. $\mp$ nt $= \mp$ Pn
7. $\mp$ mu $= \mp$ mPm
8. $\mp$ mv $= \mp$ mP$\frac{m}{2}$
9. $\mp$ my $= \mp$ mP2m
10. $\mp$ mq $= \mp$ mPm
11. $\mp$ mz $= \mp$ mP$\frac{m}{2}$
12. $\mp$ mx $= \mp$ mP$\frac{m}{3}$
13. $\mp$ mw $= \mp$ mP3m

Die Formen lassen sich zweckmässig nach folgenden Zonen ordnen:

1. ∞P∞ : oP
2. ∞P∞ : ∞P∞
3. ∞P∞ : oP
4. ∞P∞ : $\mp$ P∞
5. ∞P∞ : $\mp$ 3P∞
6. ∞P∞ : $\mp$ 2P∞
7. ∞P∞ : $\mp$ $^1/_3$P∞

Die Flächen $\mp$ $^1/_3$P∞ wurden zwar nicht beobachtet, wohl aber mehrere unter 7. aufgeführte Formen mw, deren Flächen zwischen den Zonen ∞P∞ : oP und ∞P∞ : $\mp$ P∞ gelegen sind. Die unter 6. und 7. genannten Zonen wurden bisher am Jordanit überhaupt noch nicht beobachtet.

Um ein vollständiges Bild der von mir gewonnenen Messungsresultate zu geben, habe ich es vorgezogen, statt der Mittelwerthe die einzelnen erhaltenen Zahlen mitzutheilen. Demgemäss zeigt die Winkeltabelle ausser den berechneten Winkeln die an den beiden Krystallen beobachteten, und zwar getrennt, wobei wiederum die besonders guten Messungen mit (†), die nur angenäherten mit (cc.) bezeichnet sind.

Formentabelle.

Signatur	Symbol nach NAUMANN	Symbol nach MILLER	Signatur (VOM RATH)	Symbol nach NAUMANN	Symbol nach MILLER
a	∞P∞	(100)			
b	∞P∞	(010)	c	oP	(001)
c	oP	(001)			
— h	— P∞	(101)	m	∞P	(110)
+ h	+ P∞	(10$\bar{1}$)			
— 2h	— 2P∞	(201)			
+ 2h	+ 2P∞	(20$\bar{1}$)			
— 3h	— 3P∞	(301)	—	∞$\breve{P}$3	(130) L.
+ 3h	+ 3P∞	(30$\bar{1}$)			
8r	∞P8	(180)			
11/2r	∞P11/2	(2·11·0)			
5r	∞P5	(150)			
9/2r	∞P9/2	(290)	2/9f	2/9$\breve{P}$∞	(029)
49/12r	∞P49/12	(12·49·0)			
4r	∞P4	(140)	1/4f	1/4$\breve{P}$∞	(014)
32/9r	∞P32/9	(9·32·0)			
7/2r	∞P7/2	(270)	2/7f	2/7$\breve{P}$∞	(027)
24/7r	∞P24/7	(7·24·0)			
3r	∞P3	(130)	1/3f	1/3$\breve{P}$∞	(013)
11/4r	∞P11/4	(4·11·0)			
5/2r	∞P5/2	(250)	2/5f	2/5$\breve{P}$∞	(025)
7/3r	∞P7/3	(370)			
27/12r	∞P27/12	(12·27·0)			
2r	∞P2	(120)	1/2f	1/2$\breve{P}$∞	(012)
3/2r	∞P3/2	(230)	2/3f	2/3$\breve{P}$∞	(023)
5/4r	∞P5/4	(450)			
7/6r	∞P7/6	(670)			
r	∞P	(110)	f	$\breve{P}$∞	(011)
2s	∞P2	(210)	2f	2$\breve{P}$∞	(021)
4s	∞P4	(410)			
7/2k	7/2P∞	(072)			
3k	3P∞	(031)	1/3d	1/3$\bar{P}$∞	(103)
5/2k	5/2P∞	(052)	—	2/5$\bar{P}$∞	(205) L.
2k	2P∞	(021)	1/2d	1/2$\bar{P}$∞	(102)
3/2k	3/2P∞	(032)	—	2/3$\bar{P}$∞	(203) L.
k	P∞	(011)	d	$\bar{P}$∞	(101)
1/2k	1/2P∞	(012)			
+ 18q	+ 18P18	(1·18·$\bar{1}$)			
— 17q	— 17P17	(1·17·1)			
+ 12q	+ 12P12	(1·12·$\bar{1}$)			
— 10q	— 10P10	(1·10·1)			
+ 10q	+ 10P10	(1·10·$\bar{1}$)			
— 9q	— 9P9	(191)	1/9o	1/9P	(119)
+ 9q	+ 9P9	(19$\bar{1}$)			
— 8q	— 8P8	(181)	1/8o	1/8P	(118)
+ 8q	+ 8P8	(18$\bar{1}$)			
— 7q	— 7P7	(171)	1/7o	1/7P	(117)
+ 7q	+ 7P7	(17$\bar{1}$)			
— 6q	— 6P6	(161)	1/6o	1/6P	(116)
+ 6q	+ 6P6	(16$\bar{1}$)			

Signatur	Symbol nach Naumann	Symbol nach Miller	Signatur (vom Rath)	Symbol nach Naumann	Symbol nach Miller
− 5q	− 5P5	(151)	1/5o	1/5P	(115)
+ 5q	+ 5P5	(15$\bar{1}$)			
− 4q	− 4P4	(141)	1/4o	1/4P	(114)
+ 4q	+ 4P4	(14$\bar{1}$)			
− 7/2q	− 7/2P7/2	(272)	2/7o	2/7P	(227)
+ 7/2q	+ 7/2P7/2	(27$\bar{2}$)			
− 3q	− 3P3	(131)	1/3o	1/3P	(113)
+ 3q	+ 3P3	(13$\bar{1}$)			
− 2q	− 2P2	(121)	1/2o	1/2P	(112)
+ 2q	+ 2P2	(12$\bar{1}$)			
− p	− P	(111)	o	P	(111)
+ p	+ P	(11$\bar{1}$)			
− 2t	− P2	(212)			
+ 2t	+ P2	(21$\bar{2}$)			
+ 28/3t	+ P28/3	(28 · 3 · $\overline{28}$)			
− 6x	− 6P2	(361)	1/6u	1/2$\breve{P}$3	(136)
+ 6x	+ 6P2	(36$\bar{1}$)			
− 5x	− 5P5/3	(351)			
+ 5x	+ 5P5/3	(35$\bar{1}$)			
− 4x	− 4P4/3	(341)	1/4u	3/4$\breve{P}$3	(134)
+ 4x	+ 4P4/3	(34$\bar{1}$)			
− 3p	− 3P	(331)	1/3u	$\breve{P}$3	(133)
+ 3p	+ 3P	(33$\bar{1}$)			
− 3v	− 3P3/2	(321)	—	3/2$\breve{P}$3	(132) L.
+ 3v	+ 3P3/2	(32$\bar{1}$)			
− 3u	− 3P3	(311)	u	3$\breve{P}$3	(131)
+ 3u	+ 3P3	(31$\bar{1}$)			
+ 3z	+ 3P3/2	(23$\bar{1}$)			
+ 5/2z	+ 5/2P5/4	(45$\bar{2}$)			
− 2u	− 2P2	(211)			
+ 2u	+ 2P2	(21$\bar{1}$)			
− 2y	− 2P4	(412)			
+ 2y	+ 2P4	(41$\bar{2}$)			
− 7/3w	− 7/3P7	(173)			
+ 2w	+ 2P6	(16$\bar{3}$)			
− 5/3w	− 5/3P5	(153)			
+ 5/3w	+ 5/3P5	(15$\bar{3}$)			
+ 4/3w	+ 4/3P4	(14$\bar{3}$)			

Von den bisher am Jordanit beobachteten Formen fehlen in obiger Tabelle noch: $^2/_5$P, $^3/_2$P, 4P, $^4/_7\breve{P}\infty$ und $^3/_7\breve{P}3$. Dieselben würden unserer Zusammenstellung in folgender Weise einzuordnen sein:

Signatur	Symbol nach Naumann	Symbol nach Miller	Signatur (vom Rath)	Symbol nach Naumann	Symbol nach Miller
∓ 5/2q	∓ 5/2P5/2	(252) (25$\bar{2}$)	—	2/5P	(225) L.
∓ 3/2t	∓ P3/2	(323) (32$\bar{3}$)	—	3/2P	(332) T.
∓ 4t	∓ P4	(414) (41$\bar{4}$)	—	4P	(441) T.
7/4r	∞P7/4	(470)	4/7f	4/7$\breve{P}$	(047)
∓ 7x	∓ 7P7/3	(371) (37$\bar{1}$)	1/7u	3/7$\breve{P}$3	(137)

Winkeltabelle.

	berechnet	beobachtet Kr. I	beobachtet Kr. II
1. Zone: ∞P∞ : oP.			
(∞P∞ : oP) (100) : (001)	= 89° 26′ 30″	(†)89° 26 1/2′	89° 25 1/4′ 28 1/2′
(oP : —P∞) (001) : (101)	= 28° 6′ 30″	(†)28° 6 1/2′, 8′	28° 4 1/2′
(oP : +P∞) (001) : (10$\bar{1}$)	= 28° 21′ 30″	28° 21′, 23′	28° 23 1/2′
(—P∞ : —3P∞) (101) : (301)	= 29° 39′ 29″	29° 38 1/2′, 40′	(cc.) 29° 48 3/4′
(+P∞ : +3P∞) (10$\bar{1}$) : (30$\bar{1}$)	= 30° 12′ 50″	30° 11′, 12′	30° 13 1/2′
(∞P∞ : —2P∞) (100) : (201)	= 42° 41′ 58″	(cc.) 42° 48′	—
(∞P∞ : +2P∞) (100) : (20$\bar{1}$)	= 43° 13′ 5″	(cc.) 43° 12 1/2′	(cc.) 43° 19 1/2′
(—P∞ : +P∞) (101) : (10$\bar{1}$)	= 56° 28′ 0″	56° 29′, 29 1/2′	56° 28′, 29 3/4′
(∞P∞ : —3P∞) (100) : (301)	= 31° 49′ 31″	31° 39 1/2′ (†) 41 1/2′	(cc.) 31° 29 1/4′
(∞P∞ : +3P∞) (100) : (30$\bar{1}$)	= 31° 59′ 10″	31° 59 1/2; 32° 0′	(cc.) 31° 57 3/4′
2. Zone: ∞P∞ : ∞P∞.			
(∞P∞ : ∞P8) (010) : (180)	= 14° 11′ 13″	(cc.) 14° 8 1/2′	—
(∞P∞ : ∞P 11/2) (010) : (2·11·0)	= 20° 11′ 19″	—	20° 10 1/2′, (†) 12′
(∞P∞ : ∞P5) (010) : (150)	= 22° 1′ 19″	—	22° 1 1/2′, 3 1/2′
(∞P∞ : ∞P 9/2) (010) : (290)	= 24° 11′ 59″	24° 9 1/4′	24° 11 1/2′, 12 1/2′, 16 1/4′
(∞P∞ : ∞P 49/12) (010) : (12·49·0)	= 26° 20′ 52″	26° 22 1/4′	—
(∞P∞ : ∞P4) (010) : (140)	= 26° 49′ 14″	26° 49 1/4′	26° 46 3/4,′ 50′ 50′
(∞P∞ : ∞P 32/9) (010) : (9·32·0)	= 29° 37′ 50″	29° 37 1/2′	—
(∞P∞ : ∞P 7/2) (010) : (270)	= 30° 1′ 12″	30° 2 1/4′	(cc.) 29° 59′: 30° 1′, 2′
(∞P∞ : ∞P 24/7) (010) : (7·24·0)	= 30° 32′ 4″	30° 34 1/4′	—
(∞P∞ : ∞P3) (010) : (130)	= 33° 59′ 5″	33° 55 1/4, 59 3/4′	33° 58′, 59 1/2′, 59 1/2′; 34° 4 1/2′
(∞P∞ : ∞P 11/4) (010) : (4·11·0)	= 36° 19′ 51″	36° 17 3/4′	36° 16 1/4′
(∞P∞ : ∞P 5/2) (010) : (250)	= 38° 58′ 15″	38° 57′, 58 3/4′, 59′; 39° 0 3/4′	(†)38° 58′ 58′, (†) 58 1/2′, 58 3/4′
(∞P∞ : ∞P 7/3) (010) : (370)	= 40° 54′ 58″	40° 52 3/4′, (cc) 58 1/4′	—
(∞P∞ : ∞P 27/12) (010) : (12·27·0)	= 41° 57′ 0″	—	41° 57 1/4′
(∞P∞ : ∞P2) (010) : (120)	= 45° 19′ 6″	(†)45° 18 3/4′, (†) 19′, 19 1/4′, 20 3/4′	45° 19′, (†) 19 1/4′, 19 1/4′
(∞P∞ : ∞P 3/2) (010) : (230)	= 53° 26′ 7″	53° 24 1/4′, 25 1/4′, (†) 25 3/4′	(†) 53° 26′, 26 1/4′, 27′
(∞P∞ : ∞P 5/4) (010) : (450)	= 58° 16′ 48″	—	(†) 58° 16 1/2′
(∞P∞ : ∞P 7/6) (010) : (670)	= 60° 1′ 12″	60° 0′	(†) 60° 0 1/2′, (†) 0 3/4′
(∞P∞ : ∞P) (010) : (110)	= 63° 41′ 20″	63° 39 3/4′, 41′, (†) 41 1/2′	63° 40 1/4′, 42′, 43′, 44′
(∞P∞ : ∞P2) (010) : (210)	= 76° 6′ 46″	76° 6 1/2′	75° 59 1/2′; 76° 1′, 7′
(∞P∞ : ∞P4) (010) : (410)	= 82° 57′ 11″	82° 56 3/4, 57 1/4′	(cc) 83° 0 1/2′
(∞P∞ : ∞P∞) (010) : (100)	= 90° 0′ 0″	89° 57 3/4′; 90° 2′	89° 57 1/2′, 59′: 90° 1′
3. Zone: ∞P∞ : oP.			
(∞P∞ : 7/2 P∞) (010) : (072)	= 47° 5′ 57″	47° 4 1/2′	(cc.) 46° 57′, (cc.) 59 1/2′
(∞P∞ : 3P∞) (010) : (031)	= 51° 27′ 41″	51° 26 1/4′	(cc.) 51° 24′
(∞P∞ : 5/2 P∞) (010) : (052)	= 56° 25′ 29″	56° 24 1/2′	56° 22 1/2′, 25 1/4′, 26 1/2′
(∞P∞ : 2P∞) (010) : (021)	= 62° 1′ 51″	62° 1 1/2′	—
(∞P∞ : 3/2 P∞) (010) : (032)	= 68° 17′ 3″	68° 14′	68° 16′, 16 1/2′ 17′
(∞P∞ : P∞) (010) : (011)	= 75° 7′ 49″	75° 5 1/2′	(†)75° 7 1/2′, 8 1/2′, (cc.) 11 1/2′
(∞P∞ : 1/2 P∞) (010) : (012)	= 82° 26′ 16″	82° 24 1/2′	82° 23′, 26 1/2′, 27′
(∞P∞ : oP) (010) : (001)	= 90° 0′ 0″	90° 0 1/2′	89° 59 1/2′

4. Zonen: ∞P∞ : ∓P∞.	berechnet	beobachtet Kr. I	Kr. II
(∞P∞ : + 18P18) (010) : (1·18·1̄)	= 13° 18′ 27″	13° 17′	—
(∞P∞ : − 17P17) (010) : (1·17·1)	= 14° 10′ 13″	14° 14′	—
(∞P∞ : + 12P12) (010) : (1·12·1̄)	= 19° 32′ 4″	19° 29 1/2′	—
(∞P∞ : − 10P10) (010) : (1·10·1)	= 23° 13′ 49″	23° 9′, 13′	—
(∞P∞ : + 10P10) (010) : (1·10·1̄)	= 23° 3′ 43″	23° 6′	23° 6 1/2′
(∞P∞ : − 9P9) (010) : (191)	= 25° 29′ 50″	25° 28′, 30′	—
(∞P∞ : + 9P9) (010) : (191̄)	= 25° 19′ 1″	25° 12 1/2, 16 1/2″	25° 14 1/4′
(∞P∞ : − 8P8) (010) : (181)	= 28° 12′ 54″	28° 11 1/2′, 13 1/2′	28° 10′, 11 3/4′, (†) 13′
(∞P∞ : + 8P8) (010) : (181̄)	= 28° 1′ 18″	—	(†) 28° 1 1/4′, 2′, 3′
(∞P∞ : − 7P7) (010) : (171)	= 31° 30′ 57″	31° 30′, 31 1/2′	31° 31 1/4′, 32′
(∞P∞ : + 7P7) (010) : (171̄)	= 31° 18′ 32″	(cc.) 31° 16′	31° 17 3/4′, 19′
(∞P∞ : − 6P6) (010) : (161)	= 35° 34′ 45″	(cc.) 35° 30′, 32′	35° 35 1/2′, 37 3/4′
(∞P∞ : + 6P6) (010) : (161̄)	= 35° 21′ 33″	35° 20′	35° 19 1/2′, 20 1/2′, 21′
(∞P∞ : − 5P5) (010) : (151)	= 40° 38′ 40″	40° 38′	40° 39′, (†) 39 1/2′
(∞P∞ : + 5P5) (010) : (151̄)	= 40° 24′ 53″	40° 23 1/2′	40° 21′, (cc.) 23 1/2′, 24 1/2′, 26′
(∞P∞ : − 4P4) (010) : (141)	= 47° 1′ 7″	47° 2′	(†) 47° 0 1/2′, (†) 1 1/4′, (cc.) 2′
(∞P∞ : + 4P4) (010) : (141̄)	= 46° 47′ 11″	46° 46′	(†) 46° 46 1/2′, 47 1/4′, (†) 47 1/4′, 48′
(∞P∞ : − 7/2P7/2) (010) : (272)	= 50° 48′ 20″	—	50° 48 1/2′, 50′
(∞P∞ : + 7/2P7/2) (010) : (272̄)	= 50° 34′ 39″	—	50° 33 1/2′
(∞P∞ : − 3P3) (010) : (131)	= 55° 2′ 57″	55° 1′, (cc.) 4′	55° 1′, 3′, 3 1/4′, (†) 3 1/2′
(∞P∞ : + 3P3) (010) : (131̄)	= 54° 49′ 49″	54° 48′	54° 48 1/2′, 49 1/2′, (†) 50′, (†) 50 1/2′
(∞P∞ : − 2P2) (010) : (121)	= 65° 1′ 0″	64° 57′; 65° 0′	65° 0′, (†) 1′, (†) 1′, (†) 1 1/2′
∞P∞ : + 2P2) (010) : (121̄)	= 64° 50′ 17″	64° 48 1/2′	64° 45′, 48 1/2′, 49 1/2′
∞P∞ : − P) (010) : (111)	= 76° 53′ 7″	76° 48′	76° 51 3/4′, (†) 53 1/2′, 54′
∞P∞ : + P) (010) : (111̄)	= 76° 46′ 56″	76° 44 1/2′, (†) 45 1/4′	76° 47 1/2′, 48′, 49′
∞P∞ : − P2) (010) : (212)	= 83° 21′ 20″	83° 25 1/2′	83° 22 1/2′
∞P∞ : + P2) (010) : (212̄)	= 83° 18′ 7″	(cc.) 83° 16′, (†) 19 1/2′	83° 16 1/2, (†) 18 1/2, 26′
∞P∞ : + P28/3) (010) : (28·3·2̄8̄)	= 88° 33′ 30″	88° 33 1/2′	—
∞P∞ : − P∞) (010) : (101)	= 90° 0′ 0″	—	89° 58 3/4′, 59′; 90° 1′, 1 1/2′
∞P∞ : + P∞) (010) : (101̄)	= 90° 0′ 0″	89° 58 3/4′	(†) 89° 59′; 90° 0′, (†) 0 1/2′, 1 1/2′
5. Zonen: ∞P∞ : ∓3P∞.			
∞P∞ : − 6P2) (010) : (361)	= 50° 5′ 7″	50° 4 1/2′	50° 2 1/2′ 3′
∞P∞ : + 6P2) (010) : (361̄)	= 49° 50′ 20″	49° 49′, 50 1/2′	(cc.) 49° 46 1/2′, (cc.) 47′, 48 1/2′ (cc.) 48 3/4′
P∞ : − 5P5/3) (010) : (351)	= 55° 7′ 5″	55° 6′, (†) 7′	(cc.) 55° 2 1/2′, (cc.) 7′
P∞ : + 5P5/3) (010) : (351̄)	= 54° 52′ 59″	(†) 54° 52′, 53 1/2′	54° 51′, (cc.) 51′, 53′, 53 3/4′
P∞ : − 4P4/3) (010) : (341)	= 60° 51′ 4″	60° 49 1/2′	60° 48 1/2′
P∞ : + 4P4/3) (010) : (341̄)	= 60° 38′ 16″	60° 38 1/2′	60° 36 3/4′, 38′, (cc.) 41 1/2′
P∞ : − 3P) (010) : (331)	= 67° 18′ 4″	67° 16 1/2′, (†) 18 1/2′	(cc.) 67° 15′
P∞ : + 3P) (010) : (331̄)	= 67° 7′ 21″	(cc.) 67° 6 1/2′, 6 1/2′	(cc.) 67° 4 1/4′, (cc.) 5 1/2′, 7 3/4′
P∞ : − 3P3/2) (010) : (321)	= 74° 25′ 7″	74° 23 1/2′, (cc.) 24′	—
P∞ : + 3P3/2) (010) : (321̄)	= 74° 17′ 19″	(cc.) 74° 14 1/2′, 16′	(cc.) 74° 10′, 16 1/2′, 17, 18 1/2′

	berechnet	beobachtet Kr. I	beobachtet Kr. II
(∞P∞ : − 3P3) (010) : (311)	= 82° 3′ 45″	(cc.) 82° 0½′, 5½′	(cc.) 81° 57′
(∞P∞ : + 3P3) (010) : (31$\bar{1}$)	= 81° 59′ 38″	81° 58½′, 58½′	(cc.) 81° 53½, (cc.) 56′, 59′
(∞P∞ : − 3P∞) (010) : (301)	= 90° 0′ 0″	89° 59′; (†) 90° 0¼′	—
(∞P∞ : + 3P∞) (010) : (30$\bar{1}$)	= 90° 0′ 0″	89° 59′	(cc.) 89° 55′, (cc.) 57½′; (cc.) 90° 1½′
6. Zonen: ∞P∞ : ∓ 2P∞.			
(∞P∞ : + 3P3/2) (010) : (23$\bar{1}$)	= 61° 23′ 19″	61° 22½′	—
(∞P∞ : + 5/2P5/4) (010) : (45$\bar{2}$)	= 65° 33′ 19″	65° 33′	—
(∞P∞ : − 2P2) (010) : (211)	= 79° 47′ 33″	(cc.) 79° 45¼′, (cc.) 49½′	—
(∞P∞ : + 2P2) (010) : 21$\bar{1}$)	= 79° 41′ 41″	79° 41′	—
(∞P∞ : − 2P4) (010) : (412)	= 84° 51′ 19″	84° 49¼′, (cc.) 51′	—
(∞P∞ : + 2P4) (010) : (41$\bar{2}$)	= 84° 48′ 19″	84° 52′	—
7. Zonen: ∞P∞ : ∓ 1/3P∞.			
(∞P∞ : − 7/3P7) (010) : (173)	= 58° 40′ 11″	58° 38½′	—
(∞P∞ : + 2P6) (010) : (16$\bar{3}$)	= 62° 21′ 40″	(†) 62° 22½′	—
(∞P∞ : − 5/3P5) (010) : (153)	= 66° 30′ 0″	(cc.) 66° 36′	—
(∞P∞ : + 5/3P5) (010) : (15$\bar{3}$)	= 66° 25′ 28″	(†) 66° 24¾′	—
(∞P∞ : + 4/3P4) (010) : (14$\bar{3}$)	= 70° 45′ 21″	70° 46½′	—
(2P∞ : + 2P6) (021) : (16$\bar{3}$)	= 8° 57′ 50″	(†) 8° 59′	—
(5/2P∞ : − 7/2P7) (052) : (173)	= 8° 51′ 43″	8° 47¾′	—

Die vorstehenden Tabellen lehren, dass die beiden Krystalle von den bisher bekannt gewesenen 37 Formen des Jordanit 32, daneben eine grosse Zahl neuer Formen, darbieten. Ferner ergiebt sich, dass dieselben bei an sich entschieden monoklinen Winkelverhältnissen in der Regel die entsprechenden, sich paarweise zu einer scheinbaren rhombischen Pyramide ergänzenden positiven und negativen Hemipyramiden neben einander aufweisen, wodurch sie sich als pseudosymmetrische Krystalle von anscheinend rhombischem Habitus darstellen. In dieser Hinsicht zeigen sie eine grosse Ähnlichkeit mit gewissen mimetischen Krystallen, wie z. B. mit Leucit, welcher scheinbar reguläre Formen darbietet. Es liegt nahe, daran zu denken, dass diese Krystalle vielleicht ähnlich denen des Leucit unter gewissen Verhältnissen, etwa bei einer anderen Temperatur, die jetzt nur scheinbare höhere Symmetrie in Wirklichkeit annehmen können. Beachtenswerth ist auch, dass die Dimensionen der Krystalle, wie auch zum Theil ihr Habitus sich dem hexagonalen System nähern, so dass also bei wirklich vorhandener monokliner Symmetrie durch die Winkelverhältnisse und das Auftreten der Formen zunächst diejenige des rhombischen und dann, indem der Winkel des scheinbaren rhombischen

Protoprismas 56° 28′ (ber.) beträgt, diejenige des hexagonalen Systems, wenn auch in geringerem Grade, nachgeahmt wird. Hierdurch, sowie durch den ganz ungewöhnlichen Formen- und Flächenreichthum, zeichnen sich, wie mir scheint, die beiden beschriebenen Krystalle besonders aus und verdienen in hervorragendem Maasse das Interesse des Krystallographen.

Eine eigenthümliche Beleuchtung erhalten, nachdem nun für den Jordanit das monokline System mehr als wahrscheinlich gemacht worden ist, die Versuche, den analog zusammengesetzten Meneghinit, welcher früher für monoklin gehalten wurde, jetzt aber als rhombisch betrachtet wird, als isomorph mit dem Jordanit aufzufassen. Diese Versuche müssen jetzt, was sie, wie erwähnt, nach Hintze's Ansicht schon früher gethan, erst recht aussichtslos erscheinen.

31. Über einen sexuellen Gegensatz in der Chromatophilie der Keimsubstanzen,
nebst Bemerkungen zum Bau der Eier und Ovarien niederer Wirbelthiere.

Von Prof. Leopold Auerbach
in Breslau.

(Vorgelegt von Hrn. Waldeyer am 25. Juli; — gedruckt im Bericht vom 9. Juli [St. XXXV]; — ausgegeben am 16. Juli.)

Nach Auffindung der zweierlei chromatophilen Kernsubstanzen, welche ich als kyano- und erythrophile unterschieden habe,[1] war in mir der Gedanke aufgetaucht, es möchte vielleicht die Verschiedenheit und in gewissem Sinne Gegensätzlichkeit jener beiden Substanzen zur Geschlechtlichkeit in Beziehung stehen, derart dass eine derselben männliche, die andere weibliche Keimsubstanz darstelle. Ich sagte mir: wäre diese Vermuthung richtig, so würden die Kerne der meisten Zellen, da sie beide Substanzen enthalten, gewissermaassen hermaphroditischer Natur sein; hingegen wäre zu erwarten, dass in den Fortpflanzungszellen, besonders zur Zeit ihrer höchsten Reife eine Einseitigkeit, je in entgegengesetzter Richtung, sich herausstellen werde.

Im Anfange dieses Jahres gelangte ich dazu, bezügliche Untersuchungen zu beginnen, welche an den beiderlei Keimdrüsen, bez. deren Producten die Frage prüfen sollten. Schon einige an einzelnen Objecten angestellte Vorversuche schienen meine Vermuthung in frappirender Weise zu bestätigen, ohne mir jedoch als ganz einwurfsfrei gelten zu können. Wenn nämlich zwei Praeparate, sei es auch nach im Allgemeinen übereinstimmender Behandlungsweise, auffallende Färbungsdifferenzen zeigen, so kann doch auf diese ein voller Werth nur dann gelegt werden, wenn es ganz gewiss ist, dass beide Objecte genau den gleichen praeparatorischen Einflüssen, namentlich während der Tinction und der darauf folgenden Auswaschung ausgesetzt gewesen sind. Abweichungen können aber auch unbeachtet sich ein-

[1] Diese Sitzungsber., 26. Juni 1890, Heft XXXII.

finden. Eine nicht kleine Rolle spielen dabei gewisse auch an den einfachen, noch mehr aber an den combinirten Farbstofflösungen mit der Zeit von selbst eintretende und nicht ohne Weiteres bemerkbare Zersetzungen und andere Veränderungen. Unter diesen Umständen konnte und musste bei gesonderter Behandlung der zu vergleichenden Objecte ein Zweifel übrig bleiben, ob nicht beim besten Willen dennoch unbewusste Verschiedenheiten der Beeinflussung sich eingeschlichen haben möchten. Auch durfte dem Verdachte kein Raum bleiben, dass das Streben nach einem bestimmten Ziele zu kleinen zweckdienlichen Modificationen in der Behandlung der Gegenstücke verleitet habe. Ich sann deshalb auf ein durchgreifendes Gegenmittel und fand bald eines, das geeignet ist, mit einem Schlage alle jene Unsicherheiten abzuwenden und allen Einwendungen Stand zu halten, nämlich das folgende: Nachdem zwei, je einer männlichen und einer weiblichen Keimdrüse der nämlichen Species entnommene Stückchen gemeinschaftlich gehärtet und dann in Paraffin eingebettet waren, wurden Schnitte beider Objecte neben einander auf ein und dasselbe Objectglas geklebt und auf diesem zusammen allen weiteren Proceduren einschliesslich der tinctionellen unterworfen. Eventuell wurde kurz vor der Laichzeit neben den aufgeklebten, noch vom Paraffin durchtränkten Ovariumschnitten reifes Sperma auf den Objectträger gestrichen, dem es von selbst fest genug anhaftet, dann auf diesem gehärtet und mit jenen Schnitten zusammen allen weiteren Einwirkungen ausgesetzt. Das Wesentliche dabei ist gleiche Vorbehandlung und identisches Tinctionsverfahren. Diese Methode der Doppelpraeparate, wie sie im Folgenden heissen möge, bietet eine absolute Garantie für die Gleichheit der Bedingungen und Einflüsse, die vom Anfang bis zum letzten Ende der Behandlung auf die beiderlei zu vergleichenden Gebilde einwirken; und wenn trotzdem Unterschiede sich einfinden, so können deren Ursachen nur in den Objecten selbst liegen. Ich habe dieses Verfahren auf die Keimdrüsen, bez. deren Producte von sechs Vertebraten-Species, nämlich *Cyprinus Carpio*, *Esox lucius*, *Triton taeniatus*, *Rana temporaria*, *Lacerta agilis* und *Gallus domesticus* angewandt, das Material nur geschlechtsreifen Individuen kurz vor oder während der Brunstzeit entnehmend, und es hat mir überzeugende, in manchen Punkten meine Erwartungen übertreffende Praeparate geliefert. Ausserdem habe ich noch Schnitte des Kanincheneierstocks und andererseits das reife Sperma von *Triton cristatus*, vom Kaninchen und vom Menschen der Doppelfärbung mit entsprechenden Ergebnissen unterworfen.

Zur ersten Erhärtung bediente ich mich vorzugsweise folgender Mischung, die sich mir seit Jahren an verschiedenen histologischen Objecten besonders gut bewährt hat, nämlich: Sublimat 4 Theile, Alkohol 20 Theile, Wasser 76 Theile, und es wurden dann die Stücke in absolutem Alkohol ausgewaschen und nachgehärtet. Übrigens habe ich zur ersten Erhärtung auch absoluten Alkohol, höchst concentrirte wässerige Sublimatlösung, so wie Pikrinsäure für meine Objecte und Zwecke brauchbar gefunden. Es waren nach ihrer Anwendung die späteren tinctionellen Resultate sowohl unter sich, wie auch den nach der erstangeführten Behandlung eintretenden gleich, während hingegen bei meiner bevorzugten Erhärtungsflüssigkeit die geringsten Veränderungen der feineren Normalstructuren eintreten und zugleich eine übergrosse Härte der Objecte vermieden wird.

Anlangend die Tinctionen, so habe ich von vielfachen, an Mannigfaltigkeit meine früheren noch übertreffenden Combinationen blauer und rother Farbstoffe Gebrauch gemacht und zwar hauptsächlich folgender:

Blaue Reihe.	Rothe Reihe.
Methylgrün	Carmin
Smaragdgrün	Eosin
Victoriablau	Echtroth
Methylenblau	Fuchsin
(Haematoxylin)	Orange
	Orange mit Fuchsin
	Rosanilin.

Die in der linken Reihe als »Grün« bezeichneten Stoffe färben gleichwohl die meisten histologischen Objecte und so auch die uns hier beschäftigenden öfter rein blau als in Schattirungen nach Grün hin; sie dürfen deshalb mit den übrigen Blaufärbungsmitteln zusammengefasst werden, und es sollen in dem Folgenden unter Blaufärbung auch die grünlichen Töne mit inbegriffen sein. Andererseits ist das Orange, obwohl es an sich rein gelb färbt, in die rothe Reihe eingeordnet, nicht blos wegen der optischen Nachbarschaft, sondern auch wegen der thatsächlich sich ergebenden Übereinstimmung der Attractionsverhältnisse zu den Zellsubstanzen. Ich werde deshalb die Ausdrücke: Rothfärbung und Erythrophilie gelegentlich der Kürze halber als auch auf die Färbung durch Orange bezüglich gebrauchen, werde aber doch Veranlassung haben, besondere Differenzirungen zu erwähnen, welche der letztere Farbstoff unter den erythrophilen Substanzen zur Anschauung bringt.

Von den genannten Farbstoffen habe ich nun je einen der blauen und einen der rothen Reihe in fast allen möglichen Zusammenstellungen versucht, und zwar mit dem Erfolge, dass unter den meisten wesentlichen Bestandtheilen der Praeparate gewisse durchweg die rothe, gewisse andere immer die blaue Farbe annahmen und festhielten, während einige wenige Bestandtheile sich insofern als amphoter erweisen, als sie zwar gewöhnlich die rothe Farbe bevorzugen, in gewissen Combinationen jedoch, die ich noch angeben werde, einem blassen Blau anheimfallen. Ist Letzteres der Fall, so wird damit wieder eine qualitative Differenz kenntlich gemacht unter Substanzen, die sich sonst nur durch die Intensität der Rothfärbung unterscheiden.

Bei den meisten der genannten Farbstoffcombinationen kommt es auf ein genaues Mengenverhältniss der beiderlei tingirenden Substanzen nicht an. Ich verfuhr aber (einstweilen abgesehen vom Haematoxylin) gewöhnlich so, dass ich mir in zwei gleichweiten Glascylindern wässrige Lösungen der beiden Farbstoffe herstellte, wolche gegen das Fenster gehalten, als ungefähr gleich intensiv gefärbt zu schätzen waren, und diese Lösungen entweder zur successiven Tinction, meist mit vorangehendem Roth, benutzte oder gleiche Volumina von beiden zum Zwecke der simultanen Doppelfärbung zusammenmischte. Nur in seltenen Fällen erwies es sich durch die Erfahrung zwar nicht als nöthig, aber der lebhafteren Differenzirung wegen als zweckmässig, einen der beiden Farbstoffe durch einen Zuschuss zu verstärken. — Das Haematoxylin aber setzt durch seine Eigenheiten der vorliegenden Aufgabe grosse Schwierigkeiten entgegen. Es kann mit Vortheil nur nach vorangegangener Rothfärbung angewandt werden, und zwar am Besten in einfach alkoholischer Lösung mit folgender sehr vorsichtiger Auswaschung in verdünntem Alkohol und nachträglicher Beizung. Doch habe ich einige Male auch mit der Friedlaender'schen Haematoxylinlösung gelungene Praeparate erzielt. Hingegen sind natürlich solche Mischungen dieses Farbstoffes, die an sich leicht statt der blauen eine weinrothe Färbung herbeiführen, für unsern Zweck nicht brauchbar. Noch bemerke ich, dass der richtige Grad des Auswaschens des alkoholischen Haematoxylins nicht leicht zu treffen ist, bei ungenügender Extraction aber das in den erythrophilen Substanzen zurückgebliebene nach der Beizung nicht mehr zu beseitigen ist. Wegen dieser leicht eintretenden Unregelmässigkeiten habe ich das Haematoxylin nur eingeklammert in der obigen Reihe aufgenommen.

Ganz weggelassen habe ich aus dieser das in meiner vorigen Mittheilung mit erwähnte Anilinblau. Dieses liefert zwar in Verbindung mit einem der Rothstoffe zuweilen eine der sonst, und namentlich nach Combinationen mit Haematoxylin zu beobachtenden ganz entsprechende Farbenvertheilung. Indessen habe ich eine sichere

Methode, dies herbeizuführen, nicht ermitteln können. Im Ganzen aber eignet sich das Anilinblau nicht für die an den Doppelpraeparaten so sehr complicirte tinctionelle Aufgabe. Es sind bei seiner Anwendung grosse Unregelmässigkeiten und selbst widersprechende Färbungen homologer Theile eines und desselben Praeparats nicht zu vermeiden. Diese Misserfolge dürften in folgenden Eigenheiten des Stoffes ihre Ursachen haben. Er dringt nur sehr langsam in die Gewebssubstanzen ein, und zwar caeteris paribus wohl etwas früher in die auch sonst kyanophilen, allmählich aber doch auch in die anderen, aus denen er sogar einen vorher darin angesammelten rothen Farbstoff verdrängen (vielleicht in ihnen auch nur vollständig verdecken) kann, und haftet, einmal eingedrungen, dann sehr fest an allen. Die Geschwindigkeit aber, mit der die einzelnen Theilchen des Praeparats imprägnirt werden, hängt nicht allein von der Qualität ihrer Substanz sondern auch von ihrer Lage und ihren Dimensionen ab. Je oberflächlicher sie liegen und je dünner sie sind, desto früher werden sie von dem genannten Blaustoff erreicht und durchdrungen. So kann es bei Unterbrechung der Tinction unter Umständen sogar dazu kommen, dass sich stellenweise geradezu eine Umkehr des erwarteten Farbenbildes darbietet, die aber bei Wiedereintauchen des Objects in die combinirte Farblösung mit der Zeit verschwindet und einem durchgängigen, sehr haltbaren Blau Platz macht. Auf das Anilinblau sollen sich also die allgemeinen Ergebnisse dieser Arbeit nicht mit beziehen. Gleichwohl werde ich Einzelnes, was es gelegentlich besonders schön hervortreten macht, zu erwähnen haben. Ähnlich dem Anilinblau verhält sich auch das Chinablau.

Hier muss ich in Betreff meiner Terminologie noch einige Worte einschalten. Die jetzt erwähnten Thatsachen weisen von Neuem auf die nur relative Bedeutung hin, welche den Bezeichnungen kyanophil und erythrophil zukommen kann. Schon in meiner vorigen einschlägigen Abhandlung habe ich mich gegen die Beanspruchung einer absoluten und allgemeinen Gültigkeit derjenigen Regel, welcher jene Termini Ausdruck geben sollen, verwahrt, indem ich glaubte, nicht dem Gedanken Raum geben zu dürfen, dass eine optische Eigenschaft der Farbstoffe bestimmend sein sollte für ihre Attraction zu den organischen Substanzen. Andererseits hat sich aber jetzt an einer Anzahl neuer, d. h. früher nicht in dieser Richtung geprüfter rother und blauer Tinctionsmittel jene von mir betonte Regel bewährt. Ich glaube deshalb nach dem Grundsatze: »A potiori fit denominatio« die Bezeichnungen kyano- und erythrophil beibehalten zu dürfen, welche als praktische kurz zusammenfassende Ausdrücke für das Gemeinschaftliche einer Reihe von Thatsachen schwer zu ersetzen sein dürften. Nur in diesem Sinne möchte ich in dem Folgenden jene Benennungen verstanden wissen. Diejenigen Gewebstheile aber, welche bei der Doppelfärbung je nach Umständen bald eine rothe, bald eine blaue Farbe annehmen, werde ich als amphichromatische bezeichnen.

In der nun folgenden Darstellung meiner tinctionellen Befunde werde ich nicht umhin können, auch auf die Structur- und Entwickelungsverhältnisse der betreffenden Gebilde einigermaassen einzugehen, und ich werde dabei neben einigem bisher, wie mir scheint, nicht oder wenig Beachtetem und neben Streitigem auch Wohlbekanntes und Unbestrittenes, letzteres wenigstens in Kürze, berühren müssen. Es wird also manches betreffs der Structuren zu Erwähnende nur eine Bestätigung früherer Ermittelungen oder Anschluss an früher von anderer Seite ausgesprochene Ansichten darstellen; doch denke ich, dass der Leser auch in Hinsicht des Morphologischen einiges Ergänzende oder zu neuer Forschung Anregende finden wird. Betreffend die ersteren Fälle werde ich aber nur in einzelnen Punkten auf frühere Autoren hinweisen, dagegen in eine erschöpfende Discussion der Beziehungen alles Einzelnen zur bisherigen Litteratur an dieser Stelle nicht eintreten können.

Ich begann meine Untersuchungen an den Genitaldrüsen des Karpfens gegen Ende des Januar und etwas später an denjenigen des Hechts. Um diese Jahreszeit und bis in den April hinein erwiesen sich die genannten Organe als Objecte, welche für die mir gestellte Aufgabe in einer Beziehung besonders günstig waren, trotz gewisser Schwierigkeiten die das Ovarium, namentlich die reifen Eier durch ihre dicke Eihaut dem Eindringen des Paraffins und durch die Lockerheit des inneren Gefüges ihrer Dottersubstanz der Herstellung vollkommener Durchschnitte entgegensetzen. Es überwiegen im Ovarium ausserordentlich die ausgewachsenen, ihrer Reife sich nähernden Eier; diese sind dicht neben einander geordnet, indem die winzigen Ovula jüngerer Stadien nur in den Spalten zwischen jenen versteckt liegen. Der Hoden andererseits besteht seiner Masse nach so sehr überwiegend aus den in ihm gebildeten, zwar noch nicht sämmtlich ganz fertigen aber doch schon zum Theil beweglichen Spermien[1], dass die Reste des eigentlichen Hodenparemchyms und des Zwischengewebes gegen jene sehr zurücktreten.

Als ich nun in Ausführung meiner oben angegebenen Methode Schnitte des Ovariums und Hodens neben einander der identischen Doppelfärbung unterworfen hatte, wurde ich durch einen höchst überraschenden Anblick erfreut. Mit unbewaffnetem Auge betrachtet erscheinen die Schnitte des Ovariums ganz roth, eventuell gelb, diejenigen des Hodens hingegen ganz blau oder blaugrün. Am grellsten tritt dieser makroskopische Farbencontrast hervor nach Doppelfärbung durch Methylgrün mit Eosin, oder Orange oder Fuchsin, (so wie auch in gelungenen Praeparaten mit Anilinblau); doch ist er auch nach manchen anderen Zusammenstellungen auffallend genug. Erst die mikroskopische Untersuchung weist in den beiderlei Schnitten geringfügige Antheile von Substanzen der anderen Färbung nach und zeigt auch, worin die makroskopische Einfarbigkeit begründet ist.

Für die Hodenschnitte erklärt sich diese daraus, dass sie zum allergrössten Theile aus den Köpfen der Spermien bestehen, diese Köpfe aber gänzlich und intensiv blau sich färben. Die Gestalt und die Färbungsverhältnisse der Spermien kann man am besten am ganz reifen, zur Laichzeit aus dem Porus genitalis des Männchens ausgedrückten Sperma studiren. Es zeigt sich, dass die sehr kleinen Spermien einen kugelförmigen Kopf haben, welchem an einem Punkte ein abgerundet kegelförmiges Knötchen, das Mittelstück, aufsitzt, und an letzterem hängt der noch viel dünnere, äusserst fein fadenförmige Schwanz. Der Kopf nun färbt sich in allen Combinationen aus meinen obigen Farbstoffreihen unverbrüchlich, intensiv und sehr haltbar blau, das Mittelstück und der Schwanz hingegen roth, letzteres besonders glänzend nach Fuchsin, weniger intensiv, aber unter Benutzung ABBE'scher Beleuchtung doch deutlich genug auch nach den anderen Rothstoffen. In den Monaten, die der völligen Reife vorangehen, sind die Verhältnisse im Wesentlichen ähnlich, wie man an Tröpfchen des aus einer Schnittfläche des Hodens herausquellenden Saftes erkennen kann, mit dem Unterschiede jedoch, dass anfangs wohl das Mittelstück erkennbar ist, der Schwanz aber fehlt oder doch erheblich kürzer ist als im reifen Zustande. Es scheint demnach, dass der Schwanz aus dem Mittelstücke hervor-

[1] Ich erlaube mir zur Bezeichnung der Samenelemente statt der verschiedenen seit Aufgabe der ursprünglichen Benennung »Spermatozoen« aufgenommenen, theils zu schwerfälligen theils nicht allgemein zutreffenden Bezeichnungen das kurze Wort Spermium vorzuschlagen und in dieser Abhandlung zu gebrauchen.

wächst und sich auch nach dem Freiwerden der Spermien noch weiter verlängert. Jedenfalls aber gehört nach der tinctionellen Übereinstimmung das Mittelstück zum Schwanze und nicht zum Kopfe.

Die Hodenschnitte nun bestehen zu wenigstens neun Zehnteln oder mehr aus den Köpfen der Spermien. Man sieht eine blau gekörnte Fläche, nur durchsetzt von einem weitläufigen Netze schmaler rother Streifen, die aus Bindegewebe und Blutcapillaren bestehen und jederseits eingefasst sind von einer einfachen Lage ziemlich abgeplatteter, ebenfalls roth tingirter Hodenepithelien. Im Innern der so begrenzten grossen polygonalen Felder sind zwischen den blauen Kügelchen zerstreute rothe Pünktchen und Striche bemerkbar, die Mittelstücke und Schwanzfäden der Spermien. Durch zu lange Entfärbung können alle hier als roth geschilderten Theile ganz farblos werden, während die Spermienköpfe und die Kerne etwa vorhandener Blutkörperchen von ihrem Blau nicht leicht etwas abgeben.

Was nun die Ovarialschnitte anlangt, so ist zwar deren Structur eine erheblich complicirtere, hingegen ihr farbliches Aussehen auch unter dem Mikroskope gewöhnlich ein keineswegs buntes. Nach den meisten meiner Doppelfärbungen nämlich ist am Ovarium so gut wie alles roth, und Unterschiede sind nur in der Intensität der Farbe und in gewissen Schattirungen nach Gelb und Braun hin bemerkbar. Dies ist so sehr der Fall, dass ein skeptischer Besichtiger solcher Praeparate bei Benutzung mässiger Vergrösserungen vermuthlich nicht glauben würde, dass überhaupt ein Blaustoff mit eingewirkt hat, wenn nicht hier und da der Kern eines Blutkörperchens und an den Doppelpraeparaten die Hodenschnitte oder das aufgestrichene Sperma sehr lebhaftes und unantastbares Zeugniss ablegten.

Im Einzelnen ist zuerst hervorzuheben, dass mit einer intensiv rothen Farbe sämmtliche Nucleoli der Keimbläschen aus der Auswaschungsprocedur hervorgehen, und zwar in allen Stadien des Ei-Wachsthums, mit Ausnahme des höchsten Reifezustandes, in welchem sie, so lange überhaupt noch vorhanden, in einem matteren und zuweilen gelblichen Roth erscheinen. Demnächst werden gesättigt roth auch die feinen Kügelchen, die in der Grundsubstanz des Keimbläschens lagern, welche letztere selbst blass rosafarben sich darstellt. Die Nucleoli nehmen zwar während der Tinction selbst neben dem rothen auch den blauen Farbstoff begierig und in grosser Menge auf, so dass sie zunächst durch die Summirung beider sehr dunkel, fast schwarz aussehen können, und sie halten auch bei der nachfolgenden Entfärbung den Blaustoff am längsten fest. Schliesslich aber geben sie ihn doch gänzlich ab, während das Roth in ihnen in voller Kraft bestehen bleibt. Diese Abgabe des Blaustoffs an den Alkohol vollzieht sich in einzelnen Eiern und an einzelnen Nucleolis früher, an anderen später und im Allgemeinen an den kleineren eher als an den grösseren. Bei ungenügendem Auswaschen kann es deshalb vorkommen, dass hier und da einzelne Nucleoli noch die dunkle Mischfarbe an sich haben. Dass dies auf der erwähnten Ursache beruht, zeigt sich daran, dass öfters eine theilweise Entfärbung eines Nucleolus derart bemerkbar ist, dass eine peripherische Zone desselben schon schön roth oder gelb, das Centrum noch dunkelgrün ist, indem die Extraction natürlich von der Peripherie nach dem Centrum vorrückt. Stellt man ein solches Praeparat von Neuem in Alkohol, so kann man die Extraction des Blaustoffs fortschreiten sehen und in einiger Zeit die regelrechte Färbung sämmtlicher Nucleoli erreichen. Ich habe diesen Punkt in Rücksicht auf Nachprüfungen etwas ausführlicher besprechen zu müssen geglaubt, um so mehr, als all das eben Angegebene auch für die Praeparationen an anderen Thieren, wie solche weiter unten an die Reihe kommen, giltig ist. Es liegt darin zugleich ein erläuterndes Beispiel für meine früher gegebene Definition des Sinnes, in welchem die Erythro- und Kyanophilie zu verstehen sind.

Mehr von ihrem Roth giebt in Alkohol die Grundsubstanz des Keimbläschens ab, so dass sie dann durch ein lichtes Rosa absticht, und wenn Eosin zur Rothfärbung angewandt war, sogar in einen falben, gelbröthlichen Ton übergeht.

Hinsichtlich der Nucleoli möchte ich, unabhängig von der tinctionellen Seite der Sache, hier noch einige Bemerkungen einschalten. Ich habe auch diesmal die Ei-Nucleoli immer nur als isolirte, scharf begrenzte, oft genau kuglige Körper gesehen, sowohl an den Schnitten wie in gleich klarer Weise auch im frischen Zustande. Wenn eine netzförmige Verbindung der Nucleoli vorkommt, so kann dies meines Erachtens nur ein accessorisches, durch gelegentliche Umbildung entstandenes Verhalten sein. — Die Grössen- und Lageverhältnisse der Nucleoli habe ich an den kleineren, noch dotterfreien[1] Eiern im Allgemeinen wieder so gefunden, wie ich sie früher[2] beschrieben hatte; d. h. im Grossen und Ganzen betrachtet enthalten die kleinen Eier

[1] Unter Dotter verstehe ich in dieser Abhandlung immer nur die Gesammtheit derjenigen theils festen, theils bläschenartigen Körper, welche den »Nahrungsdotter«, das »Deutoplasma« E. VAN BENEDEN's ausmachen, wozu ich aber nicht diejenigen feinen dunkeln Körnchen rechne, welche schon in jungen Eiern, besonders in einer mehr centralen Zone ihres Zellenleibes angehäuft sind, weil ich nicht annehme, dass diese Vorstufen der späteren Dotterkörperchen seien. Der sogenannte »Bildungsdotter« fällt zusammen mit dem, was hier immer als Protoplasma bezeichnet ist.

[2] Organol. Studien, Heft I, Breslau 1874.

grössere, in geringerer Zahl vorhandene, mehr central gelagerte, die grösseren hingegen zahlreichere, kleinere und mehr peripherisch, schliesslich sämmtlich wandständig gelegene Nucleoli. Und dass hier, wie ich schon früher begründete, eine Theilung der Nucleoli im Spiele ist, habe ich diesmal durch ziemlich häufige elliptisch verlängerte und andere, nicht seltene, semmelförmig eingeschnürte Nucleolusformen bestätigt gefunden.[1] Allein nach so einfacher, beständiger Regel wie ich es früher angenommen hatte, gestalten sich doch die numerischen und Lagerungsverhältnisse der Nucleoli nicht. Wenigstens kommen im Einzelnen viele Unregelmässigkeiten vor. Es müssen offenbar mehrere die allgemeine Tendenz complicirende und modificirende Factoren hineinspielen. Zu diesen dürften folgende gehören, nämlich: erstens eine im Verhältniss zum Wachsthum des Zellenleibes bald beschleunigte bald retardirte Entwickelung des Keimbläschens, zweitens nach der Theilung eines Nucleolus erfolgendes Wachsen der Theilstücke, das übrigens nicht ganz gleichmässig eintreten und fortschreiten mag, und drittens successives Verschwinden einzelner Nucleoli. Letzteres dürfte, nach Analogien zu urtheilen, theilweise in körnigem Zerfall (Verstäubung) eines Nucleolus seine Ursache haben. — Die Lagerungsveränderungen der Nucleoli aber verlaufen, wie ich jetzt finde, in verschiedenen Zeitperioden in wechselnder Richtung. Im gänzlich unreifen Zustande nämlich, d. h. so lange im Zellenleibe noch keine eigentlichen Dotterkörperchen[2] abgelagert sind, herrscht die Tendenz der Nucleoli nach der Peripherie hin vor, und schliesslich liegen sie sämmtlich ganz wandständig und bleiben so für lange Zeit. Allein gegen das Ende der Reifung tritt eine rückläufige Bewegung der Nucleoli ein. Diese rücken wieder mehr und mehr in das Innere des Keimbläschens hinein, und in den der Reife nahen Eiern sind sie zu einem centralen Haufen dicht zusammengeschaart, und eben dann nehmen sie durch die Tinction nur eine blass gelblich-rothe Färbung an. In diesem letzteren Stadium ist von der Membran des Keimbläschen öfters nichts mehr zu sehen. Es sind dies offenbar schon Vorbereitungen zu dem bevorstehenden, vor der Befruchtung erfolgenden gänzlichen Untergang des Keimbläschens.

In früheren Stadien des Eies hingegen ist die Membran des Keimbläschens als ein zwar sehr dünnes aber doch distinctes Gebilde auch an Schnittpraeparaten leicht zu constatiren und kommt öfters

---

[1] In der Zwischenzeit hat Nussbaum (Arch. f. mikr. An. XVIII, 1880) Beobachtungen mitgetheilt über Heraussprossen kleiner Nucleoli aus grossen. Danach kommt also auch eine solche Art ungleicher Theilung vor.

[2] S. oben S. 721 Anm. 1.

sogar isolirt zur Anschauung. Es ist nämlich mit der zur Vorbehandlung gehörigen Erhärtung immer auch eine Schrumpfung des Ei-Inhalts verbunden, die vielfach, weil die festere Eihaut ihrem Inhalte nicht folgen kann, zu innerer Zerreissung führt,[1] und diese besteht selten in Ablösung des Inhalts von der Dotterhaut, öfter schon, und dies namentlich in kleineren Ovulis, in Lückenbildungen in der Zellsubstanz, am häufigsten jedoch in der Bildung eines oder mehrerer Spalträume in der Grenzgegend des Keimbläschens. Die Zellsubstanz zieht sich centrifugal, der Inhalt des Keimbläschens hingegen centripetal zusammen. Selten bleibt dabei die Membran des Keimbläschens an der Zellsubstanz haften, so dass der Spalt auf der inneren Seite der Membran seine Stelle hat. Letztere selbst wird dabei natürlich ausgedehnt und reisst auch meistens ein. In der Regel aber trennt sie sich von der umgebenden Zellsubstanz und folgt ihrem eigenen, sich nach innen contrahirenden Inhalte, wobei sie sich in viele Falten legt, die im Querschnittsbilde als sonderbare Ausbuchtungen des Keimbläschens erscheinen. Zuweilen aber, und nicht ganz selten, geschieht es, dass wenn diese runzlige Schrumpfung des Keimbläschens schon bis zu einem gewissen Grade gediehen ist, sein Inhalt in weiterer Zusammenziehung begriffen, sich seinerseits von der Membran ablöst, so an ihrer Innenseite einen zweiten Spaltraum erzeugend, in dem übrigens öfters einzelne peripherische Nucleoli liegen bleiben. Nicht immer sind beide Spalten ganz rings herum reichende. Jedenfalls aber wird dabei die Membran auf lange Strecken von beiden Seiten frei, und man kann sich jetzt überzeugen, dass dieses feine, etwa $^1/_2$ — $^3/_4\,\mu$ dicke Häutchen bei der Doppeltinction eine rothe Färbung erhalten hat. Letztere ist zuweilen intensiv, andere Male nur schwach, immer aber an gefalteten Stellen besonders deutlich zu erkennen.

Übergehend zum Zellenleibe, so haben wir hier verschiedene Wachsthumsstadien zu unterscheiden, jedoch hauptsächlich nur zwei Kategorien, nämlich die der Reife nahen Eier einerseits und die ganz unreifen, d. h. von Dottereinlagerungen noch ganz freien andererseits. Denn Mittelformen giebt es in den der Laichzeit vorangehenden Mo-

[1] Die hier geschilderten, durch das erhärtende Reagens verschuldeten Veränderungen treten, wie ich mich durch besondere Versuche überzeugt habe, nicht blos bei meiner meist geübten Vorbehandlung, sondern ganz ähnlich auch in anderen beliebten Fixirungsmitteln ein, so in concentrirten rein wässerigen Lösungen des Sublimat oder der Pikrinsäure in starkem Alkohol und in Chromsäurelösung von $^1/_4$ Procent. Vielleicht würde man diese Verunstaltungen durch allmähliche Erhärtung in steigenden Concentrationen vermeiden können; ob dabei jedoch auch alle anderen feineren Structuren ungeschädigt bleiben würden, müsste sich erst zeigen.

naten an den von mir untersuchten Fischen nur sehr vereinzelte.[1] Erst nach dem Ablaichen muss wieder an einer grösseren Anzahl der Ovula das Auftreten von Dotterkörperchen beginnen und an diesen allen die gesammte Reifung sich bis zur Zeit der nächstjährigen Fortpflanzung vollenden.

Die unreifen Eier sind nun freilich von sehr verschiedener Grösse. Ihr Zellenleib besteht aus einer blassen, theils kaum oder nur sehr fein, theils etwas gröber granulirt erscheinenden Substanz, die dem Protoplasma anderer Zellen entspricht. Eine Differenzirung dieser Substanz in zwei annähernd concentrische, verschieden aussehende Schichten finde ich an den grösseren der unreifen Eier folgendermaassen gestaltet. Unmittelbar um das Keimbläschen herum ist eine breite Lage dunkleren, scheinbar grobkörnigen Protoplasma's gelegen und um letztere herum eine in ihrem Ausmaass etwas veränderliche, jedoch im Mittel ungefähr eben so breite, bis an die Peripherie reichende Schicht sehr hellen oder doch nur schwach neblig getrübten Protoplasmas (Zonoidschicht).[2] Nicht immer haben diese beiden Theile die Gestalt regelmässiger concentrischer Sphaeren; vielmehr liegt nicht selten die innere sammt dem Keimbläschen etwas excentrisch im Eiraume. Es kommt aber auch vor, dass die dunklere innere Masse ellipsoidisch gestaltet ist und von zwei Seiten umfasst wird von im Querschnitt halbmondförmigen Kappen aus heller Zellsubstanz. Die gegenseitige Abgrenzung dieser beiden Schichten ist eine auffallend scharfe, jedoch ohne dass eine besondere continuirliche Linie sie trennte. Betrachte ich aber die dunkle Schicht mit der Immersionslinse genauer, so finde ich, dass die anscheinend groben Körner thatsächlich nur Aggregate kleiner, dunkler, durch feine lichte Zwischenräume getrennter Kügelchen und dass diese Haufen durch schmälere Züge ebenso aggregirter Körperchen mit einander verbunden sind. Es haben sich also gewisse im Protoplasma eingelagerte Kügelchen in netzförmig verbundenen Strängen zusammengeschaart. Hingegen finde ich keine Veranlassung, diese körnigen Streifen und Knoten als innerlich selbst

[1] Anders ist es bei den Amphibien, worauf ich weiter unten zurückkommen werde.

[2] In diesem Punkte stimmen meine Befunde mehr mit denen von Gegenbaur (Müller's Arch. 1861) und von His (Unt. ü. d. Ei u. die Eientw. bei Knochenfischen, Leipzig 1873) als mit denjenigen v. Bambeke's (Bulletin de l'Ac. d. sc. de Belgique, Sér. III t. VI, 1883) überein, welcher letztere Forscher bei seinen Beobachtungen an Seefischen eine der obigen entgegengesetzte Anordnung der beiden Schichten fand, was auf die Verschiedenheit der untersuchten Gattungen zu beziehen sein dürfte, falls nicht etwa auch im Laufe der Entwickelung sich vollziehende Verschiebungen mit eingreifen.

wieder netzförmig constituirt aufzufassen und das, was ich Kügelchen nannte und als solche sehe, für Umbiegungs- oder Confluenzstellen überaus feiner netzförmig verbundener Fädchen zu halten. Das breitere Netzwerk der Körnchenaggregate aber ist an dem äusseren Umfange der Schicht besonders engmaschig und dicht und dies eben bedingt die scharfe Abgrenzung gegen die Zonoidschicht. Hingegen wird nach innen hin das Netz allmählich weitläufiger und verliert sich sogar in einzelnen Fällen schon in einigem Abstande vom Keimbläschen, so dass hier eine Art innerer heller Zone entsteht, die schmal und gleichmässig feinkörnig ist und immerhin etwas dunkler schimmert als die Zonoidschicht. Noch sei hinzugefügt, dass wenn die mit der Erhärtung verbundene Schrumpfung im Protoplasma selbst Spaltungen verursacht, diese immer innerhalb der Zonoidschicht oder hart an deren Grenze gegen die dunkle erfolgen.

In allen ihren Theilen aber erscheint nach der Doppeltinction gewöhnlich die Zellsubstanz rosafarben; und zwar ist diejenige Schicht und es sind diejenigen Körnchen, welche schon im ungefärbten Zustande dunkler aussehen, auch etwas intensiver tingirt. Gewisse abweichende Fälle werde ich später besprechen.

Ganz das gleiche tinctionelle Verhalten zeigt nun aber auch an den reifen Eiern die protoplasmatische Zellsubstanz, sowohl da, wo sie nur in Form dünner Lamellen zwischen den Dotterkörperchen auftritt, wie im grössten Theile des Eiraumes, als auch in den dotterfreien Ansammlungen, nämlich einerseits der sehr schmalen Rindenschicht und andererseits der eine Zeit lang reichlicheren Anhäufung um das Keimbläschen. Wenn letzteres beim Herannahen der völligen Reife excentrisch zu liegen kommt, so ist die es umhüllende dotterfreie Substanz centralwärts viel breiter als an der der Peripherie zugewandten Seite und wegen der hineinragenden Dotterkörperchen zackig begrenzt, verliert aber mit der Zeit auf dieser Seite sehr an Ausdehnung. Das dieselbe mit der Rindenschicht verbindende protoplasmatische Wabenwerk, in dessen Fächern die Dotterkörperchen stecken, zeigt sich natürlich an Schnitten in Form eines Netzwerks, aus dessen Maschen auch stellenweise die Dotterkörper herausgefallen sein können. Gegen das Ende der Reifung scheint übrigens, vom Centrum nach der Peripherie hin fortschreitend eine Verflüssigung des Protoplasma einzutreten; denn man sieht dann an solchen Schnitten, die durch einen grössten Kreis der Eikugel gingen, in einer centralen Partie wohl die Dotterkörperchen aber keine Grundsubstanz zwischen ihnen, während diese in einer peripherischen Zone ganz deutlich ist und mit zackigen, nach innen ragenden Fortsätzen aufhört. Es wäre aber auch möglich, dass diese Erscheinung ihre Ursache hat in einer spontanen Zerreissung durch Contractionen, welche die Bestimmung haben mögen, das Protoplasma in der Gegend des Keimbläschens zur Bildung der künftigen Keimscheibe zu sammeln. Überall aber, wo es vorhanden ist, zeigt auch in den reifen Eiern dieses Protoplasma gewöhnlich dieselben blass rosigen bis falben Farbentöne wie in den benachbarten unreifen Ovulis.

Sehr hochgradig erythrophil hingegen sind sämmtliche feste Dotterkörperchen beider Arten von Knochenfischen. In combinirten Lösungen der Farbstoffe nehmen sie zuerst nur den aus der rothen Reihe und diesen schnell in grosser Quantität in sich auf, mit der Zeit dann auch den blauen, so dass eine violette, bez. bei Verbindung mit Orange grassgrüne Mischfarbe entsteht. Beim Auswaschen in Alkohol aber geben sie den Blaustoff wieder vollständig ab, während sie den Rothstoff so gänzlich festhalteu, das sie schliesslich als die am intensivsten roth oder gelb tingirten Bestandtheile des Ovariumpraeparats sich darstellen, nämlich an Sättigung der Farbe unter Umständen, z. B. bei Eosintinction, selbst die Nucleoli des Keimbläschens noch übertreffen. Sogar dem langsamen aber schliesslich überall siegreichen Vordringen des Anilinblau, wie ich es oben auf S. 717 schilderte, wiederstehen sie am längsten und können noch ihre rein rothe Farbe behalten haben, wenn alle anderen Bestandtheile des Praeparats schon überwältigt und sattkornblumenblau tingirt sind. Auch nach Vorfärbung mit einem der anderen Blaustoffe (ausser gebeiztem Haematoxylin) wird in einer Lösung eines der Rothstoffe das Blau wieder extrahirt und durch die rothe Substanz verdrängt, während daneben befindliche Spermatozoen oder Kerne der Blutkörperchen ihr Blau vollständig bewahren.

Innerhalb dieser so stark ausgesprochenen Erythrophilie der Dotterkörper zeigen sich aber doch Differenzen, wegen deren ich auch auf die Formverschiedenheiten dieser Gebilde eingehen muss. Ich finde an meinen Fischen drei Arten von Dotterkörpern, zwei von massiver Beschaffenheit und eine bläschenförmige. Die ersteren sind theils kuglig bis ellipsoidisch theils tafelförmig von quadratischem oder oblongem, die kleinsten von ovalem Umriss, sehr ähnlich denjenigen der Amphibieneier. Die bläschenförmigen enthalten in einem klaren Hohlraum einen festen kugligen Innenkörper, selten mehrere solche, und sie könnten an Schnittpraeparaten auch aufgefasst werden als weite Höhlungen, die sich um kleine Dotterkugeln gebildet haben und von einer verdichteten Grenzschicht der protoplasmatischen Grundsubstanz eingefasst sind. Allein ich finde in dem aus verletzten frischen Eiern ausfliessenden Dotter dieselben Gebilde als isolirt herumschwimmende, mit glatter Membran versehene Bläschen wieder. Sie gleichen sehr den Elementen des weissen Dotters des Vogeleies. Solche Bläschen finde ich jedoch bei beiden Species nur in einer schmalen, peripherischen Zone, in die Rindensubstanz theilweise hineinragend. — Im Hechtei sind auch ausserdem nur kuglige Dotterkörper enthalten, von sehr verschiedenem, bis 70 μ reichendem Durchmesser; und zwar sind die grossen von 40—70 μ Durchmesser so zahlreich, dass sie die kleineren wenn auch nicht der Zahl so doch der Masse nach überwiegen. Diese grösseren büssen übrigens bei der Erhärtung insofern etwas von ihrer normalen Gestalt ein, als sie an einer Stelle ihrer Oberfläche einen tiefen Ausschnitt, eine halbkugelförmige Vertiefung bekommen, oder auch mehrere solche kleinere, in welchem letzteren Falle sie im Querschnittsbilde gezackt erscheinen.[1] Auch im Innern zeigen sie an gehärteten Praeparaten gewisse Differenzirungen, nämlich eine dichtere, ziemlich breite, scharf begrenzte Schale und einen etwas heller tingirten Centralraum, in welchem weiterhin oftmals eine grosse Anzahl kleiner Höhlungen gebildet sind, die vor der Aufhellung durch Xylol wie Luftbläschen, nach derselben wie andere Vacuolen aussehen. An den kleineren kugligen Dotterelementen ist nichts von solchen Formveränderungen und inneren Differenzirungen zu erblicken. Alle diese Kugeln aber halten ausschliesslich die Farbstoffe aus der rothen Reihe fest. — Im Karpfenei hingegen sind neben den kugligen in noch grösserer Menge auch tafelförmige Dotterkörperchen enthalten. Erstere gleichen nur den kleineren des Hechtes und liegen sämmtlich peripherisch, während der übrige grosse Innenraum des Eies von Dottertäfelchen erfüllt ist.

Wenn man nun den Schnitten der reifenden Eier des Karpfens neben einem der Blaustoffe nur Orange oder nur einen der anderen Rothstoffe anbietet, so färben sich sämmtliche Dotterkörper rein gelb oder rein roth. Benutzt man hingegen die EHRLICH-BIONDI'sche Mischung, die neben Methylgrün und Orange noch Fuchsin enthält, so zeigen sich die Tafeln rein gelb, die Kugeln carmoisinroth tingirt, und es giebt sich so ausser der Formverschiedenheit auch eine substantielle Ungleichheit zu erkennen. — So ist die Sache, wenn die erste Erhärtung des Objects in Sublimat oder Alkohol erfolgt war; und es kommen unzweifelhaft die geschilderten Formen ganz dem natürlichen Zustande nahe, wofür auch die Untersuchung des frischen Eidotters Beweise liefert. Dagegen stellt sich eine sehr störende aber lehrreiche Abweichung destructiver Art an solchen Objecten heraus, deren erste Erhärtung durch concentrirte Pikrinsäure

[1] Es ist dies eine Schrumpfungsform, ganz ähnlich derjenigen, welche ich früher (im 1. Hefte meiner Organol. Studien) als an Zellkernen unter dem Einflusse verdünnter Reagentien auftretend beschrieben habe.

bewerkstelligt worden ist. Unter dem Einflusse dieses Reagens erhalten sich im Karpfenei zwar die kugligen Dotterelemente in ihrer natürlichen Verfassung, sämmtliche Täfelchen jedoch erfahren eine Art Schmelzung und fliessen gruppenweise zu grösseren unförmlichen Massen zusammen.[1] Und hiermit ist zugleich eine qualitative Änderung verbunden; denn jetzt nehmen in der Ehrlich-Biondi'schen Mischung diese verschmolzenen Massen nicht mehr eine hellgelbe, sondern eine feuer- bis scharlachrothe Farbe an. So lange sie aber ihre natürliche Form bewahren, gleichen die Täfelchen auch in ihrer Bevorzugung des Orange genannten Farbstoffs ganz denjenigen des Frosches, an dessen Larven sogar die in den ersten Tagen nach dem Ausschlüpfen in den Zellen noch enthaltenen Dottertafeln bei der genannten dreifachen Tinction immer durch ihre hellgelbe Färbung sich auszeichnen, während die übrigen Bestandtheile theils vom Fuchsin, theils vom Methylgrün impraegnirt sind.

Das eben geschilderte Verhalten der Dottertäfelchen bei Behandlung mit Pikrinsäure ist um so bemerkenswerther, als eine ganz ähnliche Schmelzung und Verschmelzung unter der nämlichen Bedingung auch am Keimbläschen, besonders an seinen Nucleolis sich zeigt. Letztere fliessen zu unregelmässigen Schollen zusammen, die durch ihre intensiv rothe Färbung sich abheben, und zuweilen ist der ganze Inhalt des Keimbläschens in eine einzige, feste, braunrothe Masse verwandelt.

Hieran kann ich nicht umhin folgende Bemerkungen zu knüpfen. Wir haben in Obigem mehrere Eigenschaften kennen gelernt, die den Nucleolis und den Dotterkörperchen gemeinsam sind, nämlich ausser der starken Lichtbrechung auch noch ihre heftige und standhafte Erythrophilie und ihre Schmelzung in Pikrinsäure. Dies weist auf eine chemische Verwandtschaft hin, mindestens auf etwas Gemeinschaftliches in der chemischen Zusammensetzung. Und dies stimmt wieder sehr gut zu dem, was wir im Allgemeinen vom Nuclein wissen. Bekanntlich ist diese von Miescher entdeckte Substanz einerseits in den Zellkernen, andererseits reichlich im Eidotter zu finden. Die obigen Ergebnisse aber legen es in bestimmter Weise nahe, dass es einerseits die Nucleoli, andererseits die Dotterkörperchen sind, welche das Nuclein in sich bergen, wenn sie auch nicht ganz und gar aus solchem bestehen mögen, was ich doch für unwahrscheinlich halte. Ferner aber dürfte, sofern mehrere Modificationen jener Substanz zu unterscheiden sind, etwa ein Nuclein und ein Paranuclein, bei der

---

[1] Es ist dies wieder ein Beweis für die Einschränkung, welche dem Glauben an die absolut conservirende Kraft der gebräuchlichen Fixirungsmittel Noth thut.

hypothetischen Vertheilung dieser Bezeichnungen auf histologisch getrennte und qualitativ unterscheidbare Bestandtheile das hier Mitgetheilte zu berücksichtigen sein, indem es höchst wahrscheinlich wird, dass diejenige Abart des Nuclein, welche der Eidotter liefert, auch in den erythrophilen Bestandtheilen der Kerne, die entgegengesetzte eventuell in den kyanophilen enthalten ist.

Zur Ergänzung des über das tinctionelle Verhalten der Dotterkörperchen Gesagten habe ich jetzt noch einige Worte hinzuzufügen. Im Hechtei nehmen in der Ehrlich-Biondi'schen Mischung die festen Dotterkugeln einen das Orange und Fuchsin gleichzeitig anzeigenden, feuerfarbenen Ton an, so dass ich vermuthen möchte, dass sie die beiden Dottersubstanzen in sich gemischt enthalten, die beim Karpfen auf zweierlei Formbestandtheile vertheilt sind. Sehr intensiv röthen sich auch bei beiden Fischarten die kugligen Innenkörper der peripherischen Bläschen, während die Membran der letzteren an dem Farbenton des Protoplasma's, wie ich ihn schon geschildert habe, nur in etwas dunklerer Schattirung betheiligt ist.

Anlangend die Dotterhaut, so ist eine solche an den kleinsten der unreifen Eier überhaupt nicht zu finden, wohl aber an den grösseren in Form einer dünnen Grenzschicht, die fast den Eindruck einer homogenen Zellmembran macht und zur Annahme einer primaeren Dotterhaut verleiten könnte, wenn sie eine regelmässige Erscheinung wäre. Ich werde später die Bedingungen angeben, die ihre Beobachtung erleichtern. Sie nimmt immer den Farbenton des Ei-Protoplasmas in etwas dunklerer Schattirung an. Das Gleiche gilt auch von der mächtigen Dotterhaut der reifen Eier, und zwar wird in den gewöhnlichen Fällen deren innere breite, radiär gestreifte Schicht rosafarben, die viel schmälere äussere weinroth bis rothbraun.

Indem ich nun zu der Umkleidung der Eier übergehe, werde ich gut thun, zuerst von den reifenden Eiern zu sprechen, d. h. von demjenigen Zustande, den ich in den Wintermonaten angetroffen habe, der jedoch später in den letzten Wochen vor dem Ablaichen erhebliche Veränderungen erleidet.

Die äussere Fläche des reifenden Eies ist umgeben von einer ihr dicht anliegenden Epithelschicht, aufgebaut aus sehr eigenthümlichen, in einfacher Lage vorhandenen Zellen. Waldeyer[1] beschreibt diese Zellen als cubisch bis kurz cylindrisch, und dies ist auch richtig, bedarf jedoch einer Ergänzung durch eine bemerkenswerthe Thatsache. Jede dieser Zellen besteht nämlich aus

[1] Waldeyer: Eierstock und Ei (Leipzig 1870) S. 80.

einem ungefähr cylindrischem Körper und von diesem ausgehenden, seitlichen Fortsätzen. Die auf der Dotterhaut senkrecht aufstehenden Körper sind beim Karpfen etwa $1\frac{1}{2}$ mal so hoch als breit und stellenweise nicht genau Cylinder, sondern abgestumpfte Kegel, indem ihre der Dotterhaut aufsitzende Fläche breiter ist als die entgegengesetzte. Diese Zellkörper sind aber in beträchtlichen Entfernungen von einander aufgepflanzt, derart, dass die Abstände namentlich zwischen den äusseren schmäleren Enden beinahe eben so weit sind als die Zellkörper selbst breit. Von der Mantelfläche jedes Zellkörpers aber gehen in radiärer Richtung fünf bis sechs flügelähnliche, ebenfalls senkrecht stehende, protoplasmatische Membranen aus, die mit ähnlichen ihnen von den benachbarten Zellen entgegenkommenden zusammenhängen und so eine entsprechende Anzahl kleiner, mit Flüssigkeit erfüllter Intercellularräume abgrenzen. In Folge dessen erscheint in der Flächenansicht dieser Epithellage jede ihrer Zellen sternförmig und der Gesammtanblick ist der eines Netzes mit sehr breiten rundlichen Knotenstellen, deren jede einen Zellkern einschliesst. In der Profilansicht aber sieht man nach starker Tingirung des Praeparats zwischen den Zellkörpern schleierähnliche Membranen ausgespannt, die sehr zart sind und die man nicht erkennen würde, wenn nicht viele derselben schon etwas oberhalb des Bodens der Zellschicht mit einem concaven Rande aufhörten. Zugleich bemerkt man, dass die Zellkerne in der vom Ei abgewandten Hälfte der Zelle, diese hier fast ganz ausfüllend, ihren Platz haben. Beim Hecht liegen sie sogar ganz am äussersten Zellende, meist quergelagert. Im Übrigen sind die entsprechenden Zellkörper beim Hechte schlanker als beim Karpfen und durch weniger breite Klüfte von einander getrennt, und ihre gegenseitige Verbindung ist durch dünne, theilweise verzweigte Fäden bewerkstelligt. Damit nähert sich das Bild demjenigen, das auch die Epidermiszellen der Salamanderlarven darbieten, von denen es durch Flemming[1] beschrieben ist, nur dass an unserem Object die von den Zellbrücken durchsetzten Klüfte doch breiter sind, und dass dieses Structurverhältniss ein Cylinderepithel betrifft. Übrigens hat etwas Ähnliches auch schon Brock[2] am Follikelepithel von Serranus hepatus beobachtet. Danach ist bei dieser Species die Dotterhaut wie bei Perca fluv. zunächst von einer Gallertschicht umhüllt, und auf dieser lagert eine das Follikelepithel repraesentirende Schicht sternförmiger, durch ihre Ausläufer verbundener Zellen.

---

[1] Flemming: Zellsubstanz, Kern und Zelltheilung, Leipzig 1882. S. 52 ff., wo auch die frühere einschlägige Litteratur angegeben ist, und Fig. 19.

[2] Brock, Morphol. Jahrb., Bd. IV, 1878.

Jedoch sind diese Zellen sehr platt und ihre Ausläufer, nach der Abbildung zu urtheilen, viel stärker als die von einer beim Karpfen und Hecht gesehenen.

Nach der Doppeltinction ist die Färbung der eben beschriebenen Schicht des Follikelepithels eine rosenrothe. Intensiv roth ist der grosse im Zellkerne enthaltene Nucleolus.

Diese Schicht stellt jedoch nicht das gesammte Follikelepithel dar. Vielmehr ist sie an ihrer Aussenseite noch bedeckt von einem äusserst dünnen, mit sehr flachen Kernen besetzten Häutchen, das ganz endothelähnliche Beschaffenheit hat, gleichwohl aber unzweifelhaft eine zweite Schicht des Follikelepithels ausmacht, was ausser vielen anderen Gründen schon deshalb angenommen werden muss, weil die zum Follikel gehörigen Blutgefässe an der Aussenseite dieses Häutchens verlaufen. Dies kann man mit dem Immersions-Objectiv selbst an Schnittpraeparaten, ausserdem aber auch noch auf andere, bald anzugebende Weise constatiren.

Diese Blutgefässchen bilden ein mässig reichliches, das Ei umspinnendes Netz, was man sehr gut nach Versilberung des frischen Objects bei Einstellung auf die obere Fläche eines reifen Eies, richtiger Follikels erkennen kann, indem hier die Gefässe als weisse Streifen die dunkle Färbung und Zeichnung des darunter liegenden endothelähnlichen Häutchens unterbrechen, dabei ihr eigenes, viel feineres und langgestrecktes Liniensystem zeigend. Diese Gefässchen sind so zart, dass sie an Schnittpraeparaten leicht übersehen werden könnten, wenn nicht die stellenweise in ihnen steckenden, bunt tingirten Blutkörperchen die Aufmerksamkeit auf sie lenkten. Die meisten sind capillare Röhrchen; die etwas stärkeren sind von ein Wenig adventitiellem Bindegewebe begleitet. Hierdurch allein ist letztere Gewebsformation vertreten; denn im Übrigen findet sich nichts von Bindegewebe in der Wandung des Follikels, welche nur durch die beiden Epithelschichten und das diese umspinnende Blutgefässnetz constituirt wird.

So wie ich oben die innere Schicht des Follikelepithels beschrieben habe, verhält sie sich während des grössten Theils der Reifungsperiode. Gegen das Ende der letzteren aber, d. h. in den letzten Wochen vor der Laichzeit erfährt sie eine wesentliche Umwandlung. Ihre Zellen werden nämlich allmählich niedriger, dann sehr abgeplattet, wobei auch ihre seitlichen Ausläufer und die Intercellularräume schwinden, so dass die Zellen sich zu einer continuirlichen Haut zusammenschliessen, deren Kerne nur noch um Weniges stärker als diejenigen der äusseren Schicht hervortreten. Und schliesslich habe ich an manchen der beinahe reifen, aber noch in der Wandung des Ovarialschlauches steckenden Eier überhaupt nichts mehr von Follikelepithel finden können. Jedenfalls gelangt die regressive Metamorphose des letzteren schon vor der Ausstossung der Eier aus dem Ovarialgewebe bis zu einem hohen Grade, und sie erfolgt nicht durch fettige Entartung, sondern in der Form einer einfachen Atrophie. Indem übrigens die vorher so vollsaftigen und hochgestalteten Zellen sich bis zur Membranform abplatten, kehren sie nur zu einem Zustande zurück, den sie in einer früheren Periode ihres Lebens schon einmal längere Zeit hindurch an sich hatten, worauf ich bald noch zurückkomme.

An die Aussenseite des das reife Ei umspinnenden Gefässnetzes, und in den Maschen des letzteren an die äussere Lage des Follikelepithels schmiegen sich streckenweise noch weitere endothelioide Membranen an, im Zusammenhange mit einem System eben solcher, zum Theil doppelschichtiger Häutchen,[1] die in den Zwischenräumen der reifen Eier scheinbar labyrinthisch sich hinziehen und, indem sie sich vielfach gegenseitig berühren und streckenweise zu zweien an einander liegen, doch auch zwischen sich theils kleine, theils grössere Räume freilassen. Unter den grösseren dieser Zwischenräume sind viele, die im Schnittbilde scheinbar geschlossene Kammern von sehr unregelmässiger Form darstellen. Ich werde sie auch im Folgenden der bequemeren Besprechung halber Kammern nennen, bemerke aber, dass diese meines Erachtens überall sowohl unter einander als auch mit der eigentlichen Eierstockshöhle communiciren dürften oder doch mindestens in einer früheren Entwickelungszeit communicirt haben und nur secundär theilweise abgesperrt sein mögen. Es liegt nämlich hier ein sehr complicirter und schwer verständlicher Bau vor, dessen Deutung ich jedoch glaube aus den analogen aber einfacheren und viel übersichtlicheren Verhältnissen am Amphibien-Ovarium gewonnen zu haben, über das ich weiter unten meine Beobachtung beibringen werde. Indem ich auf letztere hinweise, führe ich hier nur das an, was sich mir als Endergebniss der vergleichenden Untersuchung auch hinsichtlich des Fisch-Ovariums als wahrscheinlich aufgedrängt hat. Danach dürften all die zahllosen endothelioiden Häutchen, welche innerlich die Masse des Ovariums durchziehen nichts Anderes sein als Duplicaturen des peritonaealen Überzuges, des äusseren Oberflächen-Endo-

[1] Diese Häutchen erwähnt von der Barbe auch His (a. a. O. S. 17) mit folgenden Worten: »Aus denselben Elementen, wie die Follikelscheide bestehen auch die dünnen Platten des Stromagewebes, welche die Follikel von der Eierstockshöhle oder von einander scheiden.« Jedoch meldet His nichts davon, dass die Follikel an diesen Platten befestigt sind. Auch im Übrigen ist, wie sich aus dem Obigen ergeben wird, meine morphologische Auffassung dieser Platten und der durch sie abgegrenzten Räume von derjenigen von His abweichend.

theils des Organs, Einstülpungen, die allerdings sehr tief hineinreichen und mannigfache secundäre und tertiäre Ausbuchtungen entwickelt haben. Die endothelioiden Wandungen benachbarter Einstülpungen liegen vielfach auf längeren Strecken dicht aneinander, nur dass sich hier und da zwischen den beiden Blättchen ein Blutgefäss, von etwas Bindegewebe begleitet, hindurchdrängt, in einem von den auseinanderweichenden Blättchen begrenzten Canale von spindelförmigem Querschnitte verlaufend. Zum Theil geschieht letzteres auch in drei- bis vierkantigen Canälen. Wo nämlich mehrere Ausbuchtungen der endothelialen Häutchen einander nahe kommen, begrenzen sie theils kleine drei- bis vierkantige, theils grössere, sehr mannigfach gestaltete, jedoch meist auch zackig umrissene Zwischenräume. In den ersteren sind, wie gesagt, gefässführende Bindegewebsstränge enthalten. Auf solche schmale und sparsame Stränge ist meines Erachtens das eigentliche Stroma zwischen den Follikeln reducirt. Die grösseren auf ähnliche Art begrenzten Zwischenräume aber sind die vorhin unter der Bezeichnung »Kammern« erwähnten. Letztere sind dadurch wichtig, dass in ihnen die Ei-Follikel untergebracht sind, und zwar der Innenfläche der Kammerwandung anhaftend, welche nach Obigem zugleich der Innenfläche des Peritonaeal-Endothel's entspricht. Diese Kammern sind aber nur Nebenräume der eigentlichen Höhle des Ovarialschlauchs, und indem die Ei-Follikel mit dem grössten Theile ihrer Oberfläche frei in diese Räume hineinragen sind sie damit zugleich der Ovarialhöhle selbst zugewandt, wie das in viel einfacher Form im Ovarium der Amphibien später zu beschreiben sein wird. Indem bei den Fischen das Peritonaeal-Endothel weit reichende und complicirte Einstülpungen in den Ovarialraum hineinsendet, verengert es diese Höhlung und sondert in gewissem Grade von ihr die communicirenden Nebenkammern ab. His bezeichnet die Räume, in welchen die Eier oder Follikel enthalten sind, als Lymphräume. Sie sind nun sicherlich im Leben von einem Fluidum umspült, das wohl lymphähnlich sein und auch die Haupthöhle des Ovariums erfüllen mag; ich kann sie indessen nicht als zum Lymphgefässsystem gehörig ansehen, sondern nur in dem hier erläuterten Sinne auffassen.

Ihrer schon gegebenen allgemeinen Beschreibung möchte ich jetzt nur noch folgende Besonderheit hinzufügen. Unter den ihrem Umrisse nach so unregelmässig gestalteten Kammern sind gewisse besonders auffallend durch ihre Localisirung, ihre Formen und relative Kleinheit. Es sind dies nämlich Räume von ungefähr halbmondförmigem Querschnitt, dessen concave Seite sich dem Umfange eines grossen reifenden Ei-Follikels anschmiegt und gewöhnlich einen bis zwei Quadranten dieser Peripherie bedeckt. Zuweilen sind auch mehrere derartige

Kammern im Umkreise eines grossen Ei-Follikels neben einander angeordnet. Es sind dies offenbar Kammern, welche das während seiner Reifung mächtig wachsende Ei in dieser Weise eingebuchtet hat.

Selbst an Schnittpraeparaten sieht man in je einer Kammer meist mehrere junge Follikel von verschiedener Grösse. Diese selbst bestehen aber nur aus dem Ovulum, das umkleidet ist von einer ihm dicht anliegenden, endothelioiden Lage äusserst platter Zellen. An den kleinsten Ovulis ist beim Studium von Schnittpraeparaten diese feine Hülle manchmal kaum zu constatiren, wohl aber auch an diesen mittels der Silberbehandlung des frischen Objectes, wie sie schon His und später Brock angewandt haben, nachzuweisen. Ich kann auch hinsichtlich der stufenweisen Vermehrung dieser Belagzellen nach meinen eigenen Silberpraeparationen Brock's Angaben bestätigen. Gerade die grössere Anzahl der durch die Kerne verursachten Verdickungen gestattet an grösseren Ovulis selbst in Schnittpraeparaten die Constatirung des endothel-ähnlichen Überzuges, und noch leichter gelingt dies selbst an den kleinen bei Untersuchung ganz frischer, in physiologischer Kochsalzlösung schwimmender Ovula. Am gehärteten Object ist übrigens in Folge Schrumpfung der Zellsubstanz der Ueberzug nicht selten streckenweise oder ganz abgelöst. Dann hat man, beiläufig bemerkt, Gelegenheit, die Umrandung der Zellsubstanz selbst genauer zu beobachten und das, was ich schon angab, zu erkennen, nämlich dass an grossen Ovulis, und nur an solchen, ab und zu eine dunkle Umfassungslinie des Zellenleibes markirt ist, die man als Ausdruck einer von Protoplasma gelieferten Zellenmembran ansehen könnte, während freilich an anderen der Eier nichts davon zu finden ist.

Die Mehrzahl der so beschaffenen Follikel sieht man nun einem Endothel-Häutchen anliegen, theils nur mit einer Stelle des Umfangs, theils in einer Falte gleichsam eingeklemmt, also an zwei Punkten gestützt. Ein besonderes Befestigungsmittel an der Berührungsstelle sieht man in vielen Einzelfällen gar nicht, manchmal jedoch eine Verstärkung des Zusammenhalts durch einige hinzukommende dünne Zellplatten, die von dem seitlichen Umfange des Follikels schräg nach der Kammerwandung gerichtet in spitzem Winkel an diese sich anschliessen, im Durchschnittsbilde wie Aufhängebänder aussehend und neben dem Ei kleine dreieckige Intercellularräume abschneidend. Scheinbar liegen auch einzelne Follikel frei im Innern des Kammerraumes, indess sicherlich nur solche, aus denen die Schnittrichtung zufällig eine vom Anheftungspunkte entfernte Scheibe herausgenommen hat. Sonstiger sichtbarer Inhalt der Kammerräume ist nicht vorhanden. Es muss also ein sehr dünnes und klares Fluidum sein, welches sie im Leben neben den Follikeln erfüllt.

Da die unreifen Ovula immer nur eine ganz unscheinbare, endothelioide, einschichtige Zellbekleidung besitzen, so können diejenigen unter ihnen, welche in die nächste Fortpflanzungsperiode eintreten werden, erst nach dem diesmaligen Ablaichen zu ihrem späteren cylindrisch-sternförmigen Follikelepithel gelangen. Es kann dies kaum anders geschehen, als durch eine Umwandlung jener platten Umhüllungszellen, die denn auch thatsächlich BROCK in verschiedenen Abstufungen beobachtet hat. Wie diese Plättchen einst aus den saftigen Zellen des Keimepithels entstanden sind, so können sie auch unter den Anstössen einer neuen Fortpflanzungsperiode wieder zu hohen und vollen, vegetativ energischen Elementen auswachsen. Vielleicht leitet sich auch der oben am reifen Follikel geschilderte Zusammenhang der Epithelzellen durch seitliche Ausläufer von ihrer einstigen Vereinigung zu einem continuirlichen Häutchen her. Die Lebenskräfte endothelartiger Zellen sind eben lange Zeit hindurch unterschätzt worden, während neuerdings HEIDENHAIN auf Grund seiner Experimente sogar den Blutgefäss-Endothelien secretorische Functionen zuschreibt. — Die eben erörterte Umbildung der Epithelschicht ist vermuthlich der erste Schritt, der zur Reifung der Eier führt und eine Vorbedingung ihres so mächtigen Wachsthums. Umgekehrt sehen wir, wie ich oben schon erwähnte, wenn die durch das Follikelepithel vermittelte specifische Ernährung des reifenden Eies ihr Ziel erreicht hat, jene Zellen wieder in den nämlichen platten Zustand zurückverwandelt werden, den sie früher eine Zeit lang besessen hatten.

Nach diesen die Structur- und Entwickelungsverhältnisse betreffenden Bemerkungen habe ich zu meinem Hauptthema nur noch kurz anzuführen, dass bei der Doppelfärbung alle die erwähnten, endothelähnlichen Formationen durchweg eine blass röthliche Färbung annehmen, nur dass in den Kernen neben gesättigt rothen auch schöne und grosse blaue Nucleoli sichtbar werden.

Es sind also alle ovariale Formationen in hervorragender Weise überwiegend erythrophil.

Dennoch habe ich in Bezug auf zwei Bestandtheile der Eier selbst eine dann und wann vorkommende Abweichung zu erwähnen. Diese betrifft einerseits das Protoplasma, andererseits die Dotterhaut und dann zugleich auch die cylindrischen Follikelepithelzellen. Bei gewissen Farbstoffcombinationen geschieht es zwar nicht immer jedoch zuweilen, dass diese Bestandtheile aus der Auswaschung mit einer blassblauen oder blaugrünen Farbe hervorgehen. Ich habe diese Abweichung von dem gewöhnlichen Farbenbilde nur gefunden, wenn entweder Eosin als Rothstoff oder Haematoxylin als Blaustoff gedient hatte, im ersteren Falle auch nur dann, wenn das Eosin mit Methylenblau und nur ausnahmsweise, wenn es mit Methylgrün combinirt war. Es hängt das offenbar damit zusammen, dass das Protoplasma sich in Eosin überhaupt nur schwach färbt, wie oben besonders beschrieben wurde, also nur eine geringe Attraction zu diesem Farbstoffe besitzt und sich in dieser Hinsicht nahe dem Indifferenzpunkte befindet, was einen Umschlag nach der andern Seite begünstigt. Unter welchen besonderen Umständen dieser erfolgt, vermag ich nicht anzugeben. Übrigens ist in diesen Fällen die Bläue des Protoplasma's auch nur eine sehr blasse. Häufiger und stärker hervortretend ist sie nach Benutzung des Haematoxylins, combinirt mit irgend einem der Rothstoffe. Auch kommt hier zuweilen noch hinzu, dass die Grundsubstanz des Keimbläschens eine violette Mischfarbe annimmt, aus welcher die intensiv hochrothen Nucleoli glänzend sich abheben. In der peripherischen Schicht des Dotters betrifft die Blaufärbung auch die Membran der bläschenförmigen Dotterelemente, welche ja nur eine verdichtete Schicht der Grundsubstanz ist, während die in der Höhlung eingeschlossenen Kugeln wie alle Dotterkörper der rothen Farbe treu bleiben. Dem füge ich noch hinzu, dass in ausnahmsweise mit Anilinblau gelungenen, d. h. gut differenzirten Praeparaten die Farbenvertheilung ganz dieselbe ist wie nach Haematoxylin.

Auf Grund der eben dargelegten Thatsachen können das Protoplasma der Eier und die Dotterhaut als amphichromatische Bestandtheile bezeichnet werden; doch ist auch in ihnen die Attraction zu dem rothen Farbstoffe überwiegend.

Im Ganzen aber sind hinsichtlich des chromatischen Verhaltens die Hauptergebnisse dieser meiner Untersuchung an Knochenfischen folgende: An den reifen Spermien ist der Kopf aus absolut kyanophiler, der Schwanz aus erythrophiler Substanz gebildet An den Eiern hingegen bestehen die Keimbläschen und die Dotterkörper aus hochgradig erythrophilem, das Zellprotoplasma andererseits aus einem amphichromatischen jedoch mehr zur Erythrophilie neigendem Material.

Nach den Fischen nahm ich Amphibien in Angriff, indem ich im März und April Doppelpraeparate der beiderlei Keimdrüsen sowohl von *Triton taeniatus* als auch von *Rana temporaria* herstellte und später auch das reife Sperma der genannten Arten sowie dasjenige von *Triton cristatus* und von *Rana esculenta* der Doppelfärbung unterwarf. Ich werde meine Ergebnisse an diesen vier Species zusammenfassen, weil sowohl das tinctionelle Verhalten als auch andererseits die eigenthümlichen Ovavialstructuren so wesentlich übereinstimmende sind, dass eine gesonderte Besprechung zu vielen Wiederholungen führen würde.

Die reifen Spermien der Urodelen und besonders auch der Tritonen sind bekanntlich wegen ihrer colossalen Grösse besonders günstige Beobachtungsobjecte, und ihre merkwürdigen Formverhältnisse sind ja sehr gut bekannt. Ich will deshalb nur constatiren, dass nach allen Combinationen aus meinen beiden Farbstoffreihen der pfriemenförmige Kopf stets ganz und gar rein blau sich darstellt, hingegen das Mittelstück und der Schwanz rein roth, eventuell gelb. Die rothe Färbung ist besonders stark am Mittelstücke, an dessen Grenzlinie gegen den Kopf die beiden contrastirenden Farben, schroff und scharflinig gesondert, zusammenstossen. Weniger intensiv tingirt aber immerhin sehr deutlich roth erscheint der Schwanzfaden, während die gekräuselte Flosse nur an ihrem verdickten freien Rande als entsprechend gefärbt zu erkennen ist, am besten nach Benutzung von Fuchsin. Wegen der Länge des Schwanzes und der ihm angefügten Flosse sind die Verbreiterungsbereiche beider Farben ziemlich gleich grosse. Dies hat einen eigenthümlichen Einfluss auf das makroskopische Aussehen derartiger Praeparate. Zunächst scheinen sie nur roth gefärbt zu sein, so dass man erstaunt ist, unter dem Mikroskope das Bild zu finden, das ich eben geschildert habe. Hält man jedoch das Praeparat gegen das Fenster, so schillert es in sonderbarer Weise, indem es je nach dem Winkel des durchfallenden Lichtes bald roth, bald blau aussieht.

Die gegensätzliche Chromatophilie der Bestandtheile des Spermiums zeigt sich aber auch durch Vergleichung des Effectes gewisser einfacher Tinctionen. Ist Methyl- oder Smaragdgrün, Methylen- oder Victoriablau applicirt und darauf in Alkohol gewaschen worden, so erscheinen dann nur die Köpfe farbig, die Mittelstücke und Schwänze hingegen ganz farblos. Im Haematoxylin werden die letztgenannten Theile etwas mitgefärbt, jedoch viel schwächer als die Köpfe. Umgekehrt aber verhält es sich bei Tinction mit Fuchsin, von dem die Köpfe nur sehr wenig aufnehmen, während die Mittelstücke in granatrother Farbe leuchten und nicht viel weniger intensiv die Schwänze. Ähnlich verhält es sich nach Anwendung einer Lösung von carminsaurem Natron, nur dass dann der Unterschied in der Intensität der Färbung zwischen Kopf und Mittelstück geringer ist als nach Fuchsinfärbung. Noch geringer wird diese Differenz bei Behandlung mit gewöhnlicher Carminlösung, d. h. mit carminsaurem Ammoniak, und sie kann dabei sogar in einzelnen Spermien ganz verschwinden, während andererseits die Schwänze zwar nicht ganz farblos bleiben aber doch nur schwach angehaucht erscheinen, eine Betheiligung an der rothen Färbung, die besonders leicht da zu erkennen ist, wo zufällig mehrere bündelweise neben und über einander liegen. Stellt man nun aber ein derartiges, noch so stark tingirtes Carmin-Praeparat in wässrige Lösung eines Blaustoffs, z. B. Methylgrün ein, so ist schon nach 5—15 Minuten der Kopf intensiv blau geworden und bleibt so auch bei stundenlangem Aufenthalt in Alkohol, während die beiden anderen Glieder des Spermium's ihr rothes Aussehen beibehalten.

Hinzuzufügen habe ich noch etwas in Betreff derjenigen Spermien, welche noch nicht völlig reif sind, d. h. solcher, welche zur Laichzeit dem Hoden entnommen werden können und sich vereinzelt auch noch im obersten Theile des Vas deferens finden. Bei *Triton cristatus* sah ich an vielen einzelnen Spermien aus den genannten Örtlichkeiten Folgendes. Während an den ganz reifen der Kopf sich nach vorn continuirlich verdünnt und in eine unsäglich feine Spitze ausläuft, ist in einem etwas früheren Stadium die dünnste Stelle des Kopfes nicht sein Ende, sondern sie liegt etwa 8—10 μ dahinter. Vor diesem Punkte schwillt das fadige Vorderende des Kopfes wieder ein wenig an. Und dieser schlank keulenförmige Abschnitt hat nach der Doppeltinction eine röthliche Farbe. Dazu gesellte sich in einigen Fällen auch noch ein schmaler rother Saum an den Seitenrändern des Kopfes, eine freilich sehr feine Erscheinung. Diese Beobachtungen erwähne ich hier nur kurz, werde aber nach Mittheilung anderer einschlägiger Thatsachen auf sie zurückverweisen können.

Die viel kleineren und zarteren Spermien der Frösche zeigen nach Doppelfärbung ganz Analoges, indem der stabförmige Kopf unverbrüchlich blau, der fadige Anhang ebenso constant roth gefärbt erscheint, letzterer natürlich, wenn einzeln gesehen, wegen seiner Feinheit nur in äusserst schwachem Grade, deutlich hingegen, wo eine grössere Anzahl derselben zusammengehäuft sind.

An den Doppelpraeparaten vom Hoden und Eierstock vom *Triton taen.* und *Rana temp.*, die ich vor der Laichzeit anfertigte, sind in den Hodenschnitten die eben beschriebenen tinctionellen Verhältnisse auf früheren Entwickelungsstufen in schönsten Bildern wiederzufinden. Bei Betrachtung mit blossem Auge sehen auch nach der Doppelfärbung die Hodenschnitte fast eben so roth aus wie die daneben befindlichen vom Ovarium, zum Theil wieder wegen des grossen Antheils, den die in der Bildung begriffenen Schwanzabschnitte der Spermien an der Masse des Praeparats haben. Hierzu kommt aber noch, dass bei den Tritonen nur ein dem Abgange der Vasa efferentia benachbarter Theil des Hodens an der Samenbildung der jedesmaligen Brunstperiode betheiligt ist, während eine peripherische Schicht des Organs abwartend bleibt und in ihren Acinis nur Parenchymzellen in relativem Ruhezustande enthält, die sich sämmtlich, abgesehen von feinen intranucleären Körnchen, intensiv roth färben. Bei der Kleinheit des Organs fiel dieser ruhende Theil des Hodens mit in den Bereich meiner Schnitte. Ferner aber füllt bei den Fröschen den centralen Theil der Acini eine bei der Erhärtung körnig gerinnende Flüssigkeit aus, und dieses Gerinsel färbt sich auch kräftig roth. Bei diesem makroskopisch einfarbigen Aussehen der Schnitte ist dann um so frappirender das bunte Bild, das die mikroskopische Betrachtung enthüllt. Ich habe bei der grossen Menge von Schnitten, welche das Mikrotom so leicht hergiebt, Gelegenheit genommen, fast alle Combinationen aus meinen beiden Farbstoffreihen zu versuchen, und nach allen ergaben sich im Wesentlichen übereinstimmende Bilder. Die Bündel der Spermien-Köpfe, im Ganzen von etwa mandelförmigem Umriss und mit ihrer Spitze gegen die Wandung des Acinus gerichtet, prangen in ihrer Hauptmasse in blauer oder grüner Farbe. Nur an dem centrifugal gerichteten, einigermaassen zugespitzten Ende des Bündels ist ein kleiner Abschnitt intensiv roth gefärbt: Es bestehen also die in diesem Theile versammelten spitzen Enden der Köpfe jetzt noch aus erythrophiler Substanz, was meiner vorhin erwähnten Beobachtung an *Triton crist.* entspricht. Hingegen erscheinen die nach innen gerichteten, bei den Tritonen bogenförmig oder selbst schleifenförmig gekrümmten, zum Theil mehr aufgelockerten Bündel der Schwänze in ihrer ganzen Ausdehnung roth gefärbt.[1] Besondere Mittel-

---

[1] Aus den Tafeln zu dem Werke von BALBIANI: Leçons sur la génération des Vertébrés, Paris 1879, ist eine Thatsache zu entnehmen, welche mit meinem hier mitgetheilten Befunde im Allgemeinen übereinstimmt, während mehrere andere ebenda dargestellte sich mit meinen tinctionellen Erfahrungen nicht zusammenreimen lassen und die Meinung BALBIANI's über die Bedeutung der chromatischen Differenzirungen völlig von der meinigen abweicht. Übereinstimmend ist, dass auf Taf. II in einem Durchnitte des Hodens von *Scyllium Canicula* die Bündel der Spermienköpfe blau, diejenigen der Schwänze roth dargestellt sind, und zwar nach einem Praeparate, das erst mit Pikrocarmin und dann mit Methylgrün behandelt war. Hingegen sind auf Taf. V in einer ganzen Reihe von Abbildungen der Hodencanälchen der Ratte nur gewisse der Tunica propria anliegende kleine Zellen blau, die Säulchen der Samenbildungszellen roth und die Spermien selbst ganz farblos. Ferner sind auf Taf. V und VI Schnitte durch den Hoden einer neugeborenen Katze wiedergegeben, an denen das Epithel der Ausführungsgänge und ein Theil der Belagzellen in den jungen Anlagen der Hodenröhrchen, und zwar Zellenleib sammt Kern, blau, andere dazwischen befindliche, für Ureier erklärte, farblos mit rothem Kerne abgebildet sind. Auf Taf. I sind sogar gewisse kleine Zellen, die nach der Auffassung BALBIANI's aus einem zur Samenentwickelung gehörigen Urei hervorsprossen, blau, die eigentlichen Hodenzellen hingegen roth gefärbt. Die Tinctionsweise war überall die schon angegebene. BALBIANI hatte, wie das ja gewöhnlich geschieht, die Doppelfärbung nur zum Zwecke leichterer Unterscheidbarkeit der Bestandtheile der Praeparate ausgeführt. Betreffend seine Deutung der farblichen Differenzen finde ich nur folgende Aussprüche vor, die indess

stücke waren bei meiner ersten hierauf bezüglichen Untersuchung nicht zu unterscheiden, wohl aber zu einem späteren Zeitpunkte an aufgelockerten Bündeln, und sie zeigten sich hier besonders tief roth tingirt. Auch vorher aber ist die Wurzel des Schwanzes sein dickster Theil und dieser nur gegen den blauen Kopf durch eine geradlinige Grenze abgesetzt. Beide Abschnitte, Kopf und Schwanz, sind absolut genommen kleiner als im reifen Zustande. Je jünger aber das vorliegende Stadium ist, desto weniger übertrifft der Schwanz an Länge den Kopf. In der zweiten Hälfte des März waren im Hoden auch schon an den Schwänzen der Spermien die wellig gerandeten Flossen deutlichst erkennbar. Noch muss ich bemerken, dass in den Praeparaten der ersten Serie an mehreren Stellen die blauen Bündel der Köpfe von zahlreichen sehr feinen rothen Längslinien durchsetzt sind, die ich im Zusammenhange mit dem oben S. 738 Gemeldeten nur als den Ausdruck eines sehr dünnen Mantels erythrophiler Substanz ansehen kann, der in früheren Entwickelungsstadien die kyanophile Hauptmasse des Kopfes umgiebt und vorn mit der rothen Spitze, hinten mit dem Schwanze zusammenhängt.

Eine einfache Schicht ziemlich abgeplatteter Epithelialzellen bekleidet die dünne bindegewebige Wandung der Acini und ist sammt dieser bis auf gewisse kleine intranucleäre Körnchen roth tingirt.

In dem inactiven Theil des Hodens sind die Acini von einer Menge rundlicher Zellen ausgefüllt, deren Zellsubstanz intensiv roth gefärbt ist, während die Kerne, und dies besonders schön nach Combination von Eosin mit Methylgrün, neben einem bis zwei rothen Nucleolis einige kleinere blaue oder statt deren eine grössere Menge feiner blauer Körnchen enthalten.

---

genügend bestimmte Meinungsäusserungen des Verfassers enthalten: 1. S. 204: Le vert de méthyle possède, en effet, la propriété d'agir plus spécialement sur les éléments du tissu conjonctif et les éléments qui se rapprochent le plus du type embryonnaire. Sous l'influence successive du carmin et du vert du méthyle la portion glandulaire des canaux séminifères se colore en rose, la portion conductrice se colore en bleu ou en vert. 2. S. 246 und 247: Les petites cellules (in den Hodenröhrchen der Ratte) colorées en bleu ne sont qu'un stade moins avancé des grandes cellules, que nous venons de décrire. L'action élective, qu'exerce sur elles le vert de méthyle, suffirait déjà à les caractériser comme de jeunes éléments épithéliaux .... On constate aussi que leur pouvoir d'absorption pour le vert de méthyle diminue et que leur affinité pour le picrocarminate augmente en proportion de leur accroissement de volume. 3. S. 277: Ces cellules absorbent d'une manière intense le vert de méthyle comme toutes les cellules épithéliales à l'etat jeune. Balbiani schreibt also eine besonders starke Attraction zum Methylgrün einerseits dem Bindegewebe, andererseits den Jugendzuständen der Epithelialzellen zu. Dies stimmt weder zu dem, was mir meine früheren, noch zu dem, was mir meine diesmaligen Beobachtungen gezeigt haben. Übrigens habe ich das Pikrocarmin unzuverlässig und, complicirten Objecten gegenüber, zur Combination mit Blaustoffen wenig brauchbar gefunden, es deshalb auch nicht in meine Reihen aufgenommen. — An einen Parallelismus des sexuellen und des chromatischen Gegensatzes hat Balbiani nicht gedacht.

Die Ovarial-Gebilde der Amphibien verhalten sich, so viel ich sehe, in den wesentlichen Punkten so völlig gleich denjenigen der Knochenfische, und dies namentlich hinsichtlich der tinctionellen Ergebnisse, dass ich nach dieser Hinweisung mich in der Constatirung einiger Besonderheiten und sehr erwähnenswerthen Modificationen werde kurz fassen können, um dann noch eine theoretische Betrachtung hinzuzufügen. Gewisse Differenzen betreffen einige Structurverhältnisse.

In nicht wenigen Keimbläschen von *Triton. taen.* finde ich neben den gewöhnlichen Nucleolis noch einen, der sich besonders auszeichnet, nämlich durch grösseren Durchmesser und durch complicirten Bau. Er ist nämlich nicht gleichartig solide wie die übrigen, sondern enthält eine lichtere Höhle und in dieser einen centralen kugligen Innenkörper, einen Nucleololus. Alle seine Bestandtheile aber tingiren sich roth, wie die übrigen Nucleoli. Letztere sind so zahlreich, wie überall, der Grösse des Eies entsprechend, während der in angegebener Weise ausgezeichnete, insoweit Schnitte ein Urtheil erlauben, gewöhnlich nur in der Einzahl, in einem meiner Keimbläschen jedoch doppelt vorhanden ist. — An den reifen Eiern zeigt die Rindenschicht des Protoplasma's schon früh eine Einlagerung brauner Pigmentkörnchen. — Die Dotterelemente des reifen Eies sind durchweg Täfelchen. Es finden sich aber bei den Tritonen auch in den späteren Wintermonaten ziemlich viele Eier, die erst im Beginne oder doch in einem früheren Stadium der Reifung stehen und offenbar in der Vorbereitung für ein späteres, vielleicht das nächstjährige Fortpflanzungsgeschäft begriffen sind. An solchen hat man Gelegenheit zu constatiren, dass die Dotterkörperchen zuerst nahe der Peripherie des Eies als ein schmaler Kranz kleiner Kügelchen auftreten, die sich glänzend roth färben. Nach Allem, was ich sehe, möchte ich nicht glauben, dass sie aus den feinen Körnchen der protoplasmatischen Grundsubstanz sich herausbilden. Sie dürften ihre besondere Entstehungsgeschichte haben, die vielleicht mit dem sogenannten Dotterkern zusammenhängt, den ich bei *Rana temp.* vielfach finde, und zwar in Gestalt eines nahe der Peripherie gelagerten elliptischen Haufens dicht aggregirter, intensiv roth tingirter Kügelchen. Indem sie wachsen (durch Apposition?), gehen die Dotterkörperchen aus der kugligen allmählich in die bekannte eckige Tafelform über, und es haben deshalb die kleinsten der Täfelchen noch einen elliptischen Umriss.

Das Follikelepithel des reifenden Eies besteht aus zwei Schichten platter Zellen, deren innerste etwas stärker ist, während die äussere, obwohl nicht ganz so fein wie bei den Fischen, doch ebenfalls ganz endothelähnlich ist. Die unreifen Eier hingegen sind wieder nur mit einer einzigen endothelioiden Schicht bekleidet. Mittels dieses Zellenbelages haften sämmtliche Eier an der inneren Fläche der Wandung des Ovariums, also in einer einzigen Lage dieser angefügt, nur dass natürlich die einzelnen, je grösser sie sind, um so mehr in die Höhle des Ovarialschlauches hinein vorspringen. Höchst eigenthümlich aber ist dabei, dass diese Wandung des Ovariums an vielen Stellen und namentlich bei den Tritonen grossentheils nur aus dem der Leibeshöhle zugewandten Endothel-Überzuge des Organs besteht, welchem innen der gleichartige Zellenbelag der Ovula unmittelbar anliegt. Nur streifenweise hat diese Endothel-Hülle des Ovariums eine dünne Unterlage von Bindegewebe, die ein Blutgefäss einschliesst. Bei den Fröschen ist letzteres in etwas reichlicherem Maasse entwickelt, fehlt aber auch hier stellenweise. Die in so grosser Zahl vorhandenen unreifen Eier haben ausser ihrem endothelioiden Zellenbelage keine weitere Umhüllung, auch keine sie umspinnenden Capillargefässe; sie scheinen nur unmittelbar durch die sie umspülende, in der Höhle des Ovariums enthaltene Flüssigkeit ernährt zu werden. Erst in der Periode der Reifung scheinen von der Wandung des Ovariums aus sparsame zarte Blutgefässe um die Follikel herumzuwachsen. Diese Verhältnisse kann man am besten erkennen, wenn das Ovarium keine grossen, reifen oder der Reife nahen Eier enthält, also kurz vor der Laichzeit so wie eine längere Zeit hindurch nach dem Ablaichen. Querschnitte des Organs liefern dann ein höchst übersichtliches und einfaches Bild, zu dessen Beschreibung ich dem eben Angeführten nur noch Folgendes hinzuzufügen habe. Der Umriss ist ein im Ganzen elliptischer, jedoch mehrfach ein- und ausgebuchteter. Zuweilen finde ich, namentlich bei Fröschen in der geräumigen Höhlung des Organs noch eine kleine geschlossene, aus dem Durchschnitte eines endothelialen Häutchens gebildete Figur von verschiedentlichem Umriss, welche an ihrer äusseren Seite einige Ovula trägt. Letztere ragen also in ganz die nämliche Höhle hinein wie die peripherisch gelagerten. Diese Erscheinung kann ich nur so deuten, dass die dünne, die Eier tragende Wandung des Ovariums Einstülpungen, und zwar schräg auf- oder absteigende Einstülpungen in die Höhle des Ovariums hinein entwickelt hat, welche von dem Schnitte quer getroffen worden sind. Glücklich gelingende Längs- oder Schrägschnitte des Ovariums werden über die Richtigkeit dieser Annahme Aufschluss gewähren können[1]. Auch hier wiederholt es sich, was ich schon bei den Fischen zu erwähnen hatte, dass scheinbar einzelne grössere Eier frei in der Höhle des Ovariums liegen in Folge der Schnittrichtung, die

[1] Auf diese Einstülpungen habe ich bereits vorhin bei den Fischen hingewiesen, wo Ähnliches jedoch in viel complicirterer Form anzunehmen sein dürfte.

zufällig ihren Anheftungspunkt nicht mit getroffen hat, was nach dem eben von den Einstülpungen Gesagten um so häufiger wird vorkommen können. Aus Allem aber ergiebt sich, dass ein eigentliches Stroma des Eierstocks so gut wie gar nicht existirt, wenigstens nicht zwischen den Follikeln und auch auf der angehefteten Seite der letzteren nur fragmentarisch und nur in minimaler Quantität. So ist es, wie gesagt, in den letzten Wochen des Winters und im Frühjahre. Ob in späterer Jahreszeit mit dem mächtigen Wachsthum einer neuen Generation reifender Eier auch eine etwas stärkere Entwickelung des Bindegewebes verbunden sein mag, lasse ich dahingestellt. Jedenfalls aber scheinen mir die einfachen, im Frühjahr vorfindlichen Verhältnisse für die Auffassung des Baues des Organs besondere Berücksichtigung zu verdienen.

Besonders von Interesse erscheint mir die Art, wie zahlreiche Ovula mit ihrem einfachen endothelialen Belage unmittelbar an dem Oberflächen-Endothel des Ovariums haften, also an derjenigen Zellschicht, die nach der von Waldeyer begründeten Lehre im Embryo das Keimepithel und in dessen peripherischer Nachbarschaft das Peritonaeal-Epithel liefert. Man erhält so auch am erwachsenen Individuum fast unmittelbar den Eindruck, dass der Follikel sammt dem Ei sich nur von dieser oberflächlichen Zellschicht aus durch eine Wucherung derselben gebildet haben kann. Und überdies besteht bei der so geringen Quantität des Bindegewebes das ganze Organ fast nur aus solchen epithelialen Productionen.

Zu den letzteren gehören allerdings im Ovarium der Amphibien ausser den Follikeln und Eiern noch einige andere, bisher nicht erwähnte Gebilde, die aber auch ihrerseits die Wucherungsfähigkeit der oberflächlichen Zellenlage zur Anschauung bringen und zum Theil noch in besonderer Weise an das embryonale Keimepithel erinnern. Erstens nämlich haftet hier und da an der Innenseite des Oberflächenhäutchens ein ziemlich grosser Haufen polyedrischer Pigmentzellen, der meistens im Innern eine rundliche oder spaltförmige Höhlung hat. Aueh diese Nester von Pigmentzellen, welche übrigens das dunkel gefleckte Aussehen des Ovariums verursachen, ragen frei in die geräumige Höhlung des Ovarialschlauches hinein, wie die Follikel. Da nun sogar in den Eiern selbst während ihrer Reifung gelbe, braune und schwarze Pigmentkörnchen abgelagert werden, so braucht es uns um so weniger zu wundern, dass die eben erwähnten Pigmentzellen aus dem Keimepithel ihren Ursprung genommen haben; und es weist die Gesammtheit der Thatsachen darauf hin, dass jene Haufen umgewandelte Gruppen von Zellen des Keimepithels, gewissermaassen degenerirte Follikel sind. Überdies aber finden sich zweitens an den Frosch-Ovarien neben den Pigmentzellenhaufen und gleichfalls im Zusammenhange mit der oberflächlichen Zellschicht oder in diese eingefügt noch andere Nester, bestehend aus farblosen, grossentheils cylindrischen Zellen, die ebenfalls einer Höhlung des Nestes zugewandt sind. Manche dieser letzteren Zellenaggregate sitzen ebenfalls an der inneren, andere jedoch an der äusseren Oberfläche der Wandung des Ovariums und haben in letzterem Falle gewöhnlich eine langgestreckte, im Schnittbilde öfters zungenförmige Gestalt. Ob dies Durchschnitte von lappenförmigen Anhängseln oder von Schläuchen sind, ist nicht von Belang. Jedenfalls haben diese Bildungen Ähnlichkeit mit embryonalen Formationen des Keimepithels.

Noch einmal auf die Follikel selbst zurückblickend haben wir uns noch zu fragen, wie denn die reifenden Eier zu der zweiten Schicht ihres epithelialen Überzuges gelangen. Zn diesem Punkte habe ich einigen Anhalt für die Annahme, dass von der Anheftungsstelle aus eine Wucherung der endothelioiden Zellen beginnt und allmählich das Ei, richtiger die erste Belagschicht umwächst. Ich finde nämlich unter den grösseren der unreifen Eier einzelne, deren untere Hälfte schon von einer doppelten Reihe von Kernverdickungen eingefasst ist, während an ihrer oberen sich nur eine solche Reihe zeigt. Indessen habe ich eine deutliche scharfe Grenze der äusseren Belagschicht nicht constatiren können. Die Beobachtung ist in diesem Punkte wegen der Feinheit und dichten Anlagerung der Häutchen schwierig, und es wird zur Entscheidung der Frage noch weiterer Forschung bedürfen.

In tinctioneller Hinsicht aber habe ich noch anzugeben, dass nach der Doppelfärbung nur in den Kernen des Endothels und Bindegewebes neben rothen Nucleolis auch feine blaue Körnchen sichtbar sind, dass hingegen an den Eiern sich wiederum eine durchgängige, zum Theil hochgradige Erythrophilie aller Bestandtheile kundgiebt. Im geringsten Grade kommt letztere dem Ei-Protoplasma zu, dass sich wieder in gewissem Grade als amphichromatisch erweist, ganz so, wie ich dies bei den Fischen des Näheren angegeben habe.

Nach den ausführlicheren Darlegungen der Ergebnisse an Fischen und Amphibien werde ich über meine bezüglichen Befunde an Amnioten nur in Kürze berichten, hauptsächlich die Differenzen der Chromatophilie in's Auge fassend und nur wenige Punkte der Structur- und Entwickelungsverhältnisse hervorhebend.

Die reifen oder doch fast reifen Spermien von *Lacerta agilis* bekam ich in Tröpfchen des von Schnittflächen des Nebenhodens und Hodens abgestrichenen Saftes und an dem zu den Doppelpraeparaten gehörigen Schnitten beider Organtheile zu Gesicht, und zwar Anfangs Mai. Es waren, beiläufig bemerkt, die Spermien nur sparsam vorhanden. In den Querschnitten des Hodenröhrchen sind zahlreiche, rundliche, dunkelroth tingirte Zellen zu Säulchen angeordnet, die nach dem Centrum des Lumens convergiren, und von denen jedes einzelne nach derselben Richtung hin sich fortsetzt in eine beinahe traubenförmige Gruppe blass-rosa gefärbter Samenbildungszellen. Einzelne der letzteren sind noch wohl umgrenzt; die Mehrzahl jedoch ist in jeder Gruppe zu einer gemeinschaftlichen Masse verschmolzen. In den ersteren ist je ein Kopf eines eben gebildeten Spermiums als blauer bogenförmig gekrümmter Strich, dicht am Umfange der Zelle, etwa der Hälfte des letzteren anliegend sichtbar. In der aus den verschmolzenen Zellen gebildeten Grundsubstanz sind die Köpfe der Spermien schon gestreckt und zu mehreren neben einander gruppirt, ohne jedoch dichte und dicke Bündel zu bilden. Stellenweise sind die Spermien schon mit einem Theil ihrer Länge in das Lumen des Röhrchens hineinragend und andere schon frei im Lumen liegend zu finden. An allen fertigen Samenelementen aber ist der pfriemenförmige[1] und dabei leicht *s*-förmig gebogene Kopf total und intensiv blau, der Schwanzanhang rosa oder gelblich roth gefärbt. Indessen finde ich an einigen wenigen den blauen Kopf noch von einer dünnen, rothen Scheide umhüllt, mit einer etwas stärkeren Anhäufung über der Spitze des Kopfes; und es ist diese Beobachtung durch den Contrast gegen die daneben liegenden Individuen, denen diese Beigabe fehlt oder nur noch in Form eines Aufsatzes am Kopfende bemerkbar ist, um so gesicherter.

In den Ovariumschnitten ist an den Eiern jeder Grösse Alles gesättigt roth gefärbt, am intensivsten der Inhalt des Keimbläschens, welches niemals einen grösseren Nucleolus zeigt, sondern nur aus einer compacten, dicht gekörnten Inhaltsmasse und einer Hüllmembran besteht. Da kaum zu bezweifeln ist, dass diese Zellkerne früher einmal einen oder mehrere Nucleoli von der gewöhnlichen erheblicheren Grösse besessen haben, so dürfte der jetzige Zustand wohl

---

[1] Ich finde angegeben, bei *Lacerta* sei der Kopf des Spermiums cylindrisch. Das mag für andere Arten dieser Gattung zutreffend sein. Es gehört aber bei der Kleinheit des Gebildes eine gute Immersionslinse und beste Beleuchtung zur Erkennung der wahren Gestalt, um so mehr als auch an meinem Object die Zuspitzung erst in der vorderen Hälfte des Kopfes beginnt und der vor diesem Punkte liegende Theil sehr zart ist, so dass er leicht übersehen werden kann.

aus einem Zerfall der letzteren in kleine Körner zu erklären sein, wofür auch die überaus dichte Granulirung spricht. — An der Peripherie des Eies ist an mittelgrossen Eiern eine lichter gefärbte Zonoidschicht von verschwommen radiär gestreiftem Aussehen bemerkbar.[1] — Die kleinen und die grössten Eier haben eine sehr feine, die mittelgrossen jedoch eine ziemlich dicke zweischichtige, von Porencanälchen durchsetzte Dotterhaut, deren äussere Schicht eine rothbraune Färbung annimmt. — Lange Zeit hindurch besteht das Follikelepithel aus rundlich polyedrischen Zellen, die sich sammt ihren intranucleären Kügelchen tief roth färben und in den kleinen Ovulis in zwei Schichten, in den mittelgrossen jedoch in mehreren, bis sechs Schichten angeordnet sind. Es muss also in ungefähr der ersten Hälfte des Wachsthums des Eies eine bedeutende Vermehrung der Follikelepithelzellen stattfinden. Später ist dies nicht mehr der Fall, und der Druck des mächtig wachsenden Ei-Inhalts drängt die gegebene Anzahl von Zellen wieder zu einer zweischichtigen Anordnung und weiterhin gegen die Zeit der Reife zur Annahme einer abgeplatteten Gestalt, ähnlich wie ich dies im letzten Stadium bei den Fischen gefunden habe. An den fast reifen Eiern habe ich aber sogar ganz vergeblich nach dem Follikelepithel gesucht und kann nur annehmen, dass es wie bei den Fischen atrophisch verschwindet. Auch die eine Zeit lang ansehnliche Dotterhaut wird gleichzeitig wieder bis zu unmessbarer Feinheit verdünnt. — Umgeben ist das Follikelepithel und im letzten Stadium unmittelbar die Dotterhaut von einer aus fasrigem Bindegewebe und Gefässen bestehenden Follikelwandung, die continuirlich und ziemlich dick ist, was einen sehr auffallenden Unterschied gegen die bei den Anamnioten zu beobachtenden, oben beschriebenen Verhältnisse ausmacht. Mittels dieses Überzuges hängen die Follikel an bindegewebigen Platten oder Strängen, und zwar oft in Reihen von stufenweise abnehmendem Durchmesser geordnet, eine Reihenfolge, wie man sie in den Eierstocksschläuchen der Insecten zu sehen gewöhnt ist. — Die zahlreichen Kerne des Bindegewebes und der Gefässe enthalten massenhaft kyanophile Körnchen, und es entsteht dadurch ein buntes Bild des Stroma's, das lebhaft absticht gegen das durchgängige Roth der Eier und ihrer epithelialen Umhüllung.

Bei *Gallus domesticus* sind alle Verhältnisse überaus ähnlich den eben von der Eidechse geschilderten. Als Differenzen untergeordneter Art will ich nur hervorheben, dass der feine cylindrische Kopf der

[1] Vergl. S. 724.

Spermien nicht so zugespitzt ist wie bei *Lacerta agilis*, und ferner, dass im Eierstock das bindegewebige Stroma viel reichlicher entwickelt, auch zwischen den Eiern in grösseren Massen angesammelt ist. — Die tinctionellen Ergebnisse aber entsprechen ganz den bisher beschriebenen.

Im Eierstock des Kaninchens, dessen Structur ja sehr gut bekannt ist, habe ich nach der Doppelfärbung an dem Follikelepithel und den Eiern wieder alles intensiv roth tingirt gefunden, an den reifen Spermien hingegen den Kopf immer rein blau, den Schwanzanhang mehr oder weniger intensiv roth. An den aus der Epididymis und dem Hoden entnommenen Spermien aber zeigt der Kopf vielfach einen seine vordere Hälfte umfassenden, nach hinten zugeschärften rothen Saum, und an einzelnen, obwohl nicht häufigen Exemplaren ist eine solche aus erythrophiler Substanz bestehende Scheide um den ganzen Kopf herum sichtbar, indem sie hinten mit der Wurzel des Schwanzfadens zusammenhängt. Diese Thatsachen sind gerade an den genannten Säugethier-Spermien wegen der Breite der Kopfscheide noch viel deutlicher als an den erwähnten niederen Vertebraten zu erkennen, von denen ich ja oben Entsprechendes gemeldet habe. Dies alles in Betracht ziehend, glaube ich betreffs der Spermien der Vertebraten allgemein Folgendes annehmen zu müssen. Nach seiner ersten Ausbildung besteht das Spermium aus einer inneren kyanophilen Masse und einer diese ganz umschliessenden erythrophilen Hülle. Letztere ist oder wird an einem Punkte, dem hinteren, massiger, treibt aus sich den bewegenden Anhang hervor und gliedert sich meist in Mittelstück und Schwanz im engeren Sinne. Am Kopfe aber hat die erythrophile Hülle nur eine vorübergehende Existenz. Zu irgend einem, meist frühen, zuweilen jedoch verzögerten Zeitpunkte reisst sie in der mittleren Gegend des Kopfes ein und retrahirt sich nach beiden Seiten. Vorn bleibt sie noch eine Zeit lang als eine Art Kopfkappe aufsitzend; hinten mag sie durch Umstülpung oder einfache Contraction die schon früher vielfach an einzelnen Spermien wahrgenommene röhrenförmige oder mehr massige Umhüllung der Schwanzwurzel bilden. Dann aber, und an einzelnen Spermien erst ausserhalb des Hodens, werden beide Reste der Kopfscheide abgestreift. Es stimmt das ja grossentheils sehr wohl mit älteren, an ungefärbten Spermien gemachten Beobachtungen überein, wegen deren ich namentlich an KOELLIKER's Mittheilungen erinnere.[1] Dass jedoch die Summe der erythrophilen Theile des Spermiums den Zellenleib, und zwar den ganzen Zellenleib des Spermatoblasten, der kyanophile Theil des Kopfes den Kern und zwar den ganzen Kern jener Bildungszelle darstelle, möchte ich einstweilen nicht behaupten. Die Beziehungen der erwähnten, tinctionell verschiedenen Bestandtheile zur eigentlichen Entstehungsgeschichte des Spermiums, die noch immer einiger weiteren Aufklärung bedarf, werden erst durch weitere Forschungen ganz sichergestellt werden können; und es dürften combinirte Färbungen und die Berücksichtigung des in dieser Abhandlung Mitgetheilten dabei von einigem Nutzen sein.

Dem sei nur noch hinzugefügt, dass ich in ejaculirtem Sperma eines jungen Mannes, das ich Gelegenheit hatte zu untersuchen und einer Reihe verschiedener Doppelfärbungen zu unterwerfen, von den erythrophilen Resten am Kopfe der Spermien nichts mehr vorfand. Durchweg zeigte sich dieser total und intensiv blau, der Schwanzanhang hingegen mehr oder weniger intensiv roth tingirt.

Indem ich auf diejenigen oben mitgetheilten Befunde, welche gewisse Structurverhältnisse im Ovarium der Anamnioten betreffen, nicht noch einmal zurückkommen möchte, will ich jetzt nur in Bezug auf das Hauptthema dieser Abhandlung diejenigen allgemeinen Ergebnisse, welche aus den obigen Einzeldarstellungen hervorgehen, hier noch zusammenfassen. Sie betreffen vorläufig nur die Vertebraten und sind folgende:

1. Der Kopf der reifen Spermien besteht überall ganz aus kyanophiler, der Schwanz sammt dem Mittelstücke aus erythrophiler Substanz.

2. An den Eiern ist die Substanz des Keimbläschens entschieden erythrophiler Natur, in besonders hohem Maasse diejenige seiner Nucleoli, und ebenso hochgradig erythrophil sind alle eigentlichen Dotterkörperchen. Das Gleiche gilt von dem Zellenleibe der Follikelepithelzellen, welche dem Ei seinen Ernährungs- und Wachsthumsstoff liefern. Das Protoplasma des Eies selbst hingegen (und auch die äussere Schicht der Dotterhaut der Karpfenfische) besteht aus einer in gewissem Grade amphichromatischen Substanz, welche unter den meisten Tinctionsbedingungen eine schwachrothe, unter einigen anderen eine schwachblaue Färbung annimmt.

[1] Man vergl.: Koelliker, Handb. der Gewebelehre, 5. Aufl. S. 527 u. 531.

3. Da nun der Kopf der Spermien ihr wesentlichster, die Befruchtung bedingender Bestandtheil ist, ja vielleicht allein in das Protoplasma des Eies eintritt, und da es auf weiblicher Seite nach allen neueren Ermittelungen das Keimbläschen oder doch mindestens ein aus diesem stammendes Material ist, welches die Vereinigung mit der Substanz des Spermiums eingeht, so folgt weiter, dass die männliche Befruchtungssubstanz eine kyanophile, die weibliche Zeugungssubstanz eine erythrophile ist.

4. Da aber überdies die Dotterkörperchen, welche die Hauptmasse des reifen Eies ausmachen und das meiste Material für den Aufbau des Embryo hergeben, aus einem hochgradig erythrophilen Stoff bestehen, so ergiebt sich weiter, dass der mütterliche Organismus seinem Sprössling im Ei weit überwiegend erythrophile Substanz, der väterliche weit überwiegend, wenn nicht ausschliesslich kyanophile Substanz liefert, mit anderen Worten, dass das weibliche Keim-Material hauptsächlich erythrophil, das männliche hauptsächlich oder ausschliesslich kyanophil ist.

5. Nach Allem ist der sexuelle Gegensatz begründet auf zwei Substanzen, die sich qualitativ dadurch unterscheiden, das die männliche in dem von mir definirten Sinne kyanophiler, die weibliche erythrophiler Natur ist.

Zu einer weiteren Verallgemeinerung des hier aufgestellten Gesetzes würden noch entsprechende Beobachtungen an wirbellosen Thieren und auch an Pflanzen nöthig sein.

Eine sich anschliessende Frage wäre nun die schon im Eingange dieser Abhandlung berührte, nämlich die, ob die beiden in den meisten Zellkernen sich findenden, chromatisch in der gleichen Weise gegensätzlichen Substanzen[1] mit den beiden Sexualstoffen identisch sind. Diese Frage lässt sich natürlich vorläufig nicht beantworten Nehmen wir es mit Vorbehalt an, so würde damit die Anerkennung eines hermaphroditischen Charakters der meisten Zellkerne verbunden sein, und es wäre weiter zu schliessen, dass in den Keimzellen zu irgend einem Zeitpunkte eine einseitige Ausbildung des einen Bestandtheils, verbunden mit Eliminirung des anderen stattfinden dürfte. Einige Anhaltspunkte für letzteres haben auch meine Beobachtungen schon geliefert, wenigstens hinsichtlich der Sperma-Elemente. An den Eiern freilich und namentlich ihrem Zellkern müsste der supponirte Vorgang schon sehr früh, vielleicht schon in der Embryonalperiode sich

[1] S. meine Abhandlung: Zur Kenntniss der thierischen Zellen, (diese Berichte, Sitzung vom 26. Juni 1890).

ereignen, während er an den Spermien sichtlich während der jedesmaligen Samenbildung im erwachsenen Zustande des väterlichen Organismus stattfindet und sich gänzlich erst kurz vor der Entleerung des Sperma vollendet.

Ausserdem aber erwächst aus dem Ermittelten noch eine andere Aufgabe, nämlich die beiden tinctionell gegensätzlichen Substanzen auch in den beiden Pronucleis wiederzufinden, die im befruchteten Ei auftreten und verschmelzen.[1] Nach der von so vielen Seiten bestätigten und allgemein angenommenen Lehre O. Hertwig's ist nämlich zu erwarten, dass sich jedesmal der eine Pronucleus als kyano-, der andere als erythrophil herausstellen werde. Einige Versuche zur Erforschung des Thatsächlichen, die ich in dieser Richtung gemacht habe, sind an der Ungunst der mir zu Gebote stehenden Objecte gescheitert. Sollte es mir vergönnt sein, sie wieder aufzunehmen, so werde ich nicht verfehlen über die Ergebnisse Mittheilung zu machen.

Breslau, im Juni 1891.

[1] Dieser Vorgang ist, unabhängig von irgend einer früheren einschlägigen Beobachtung, zuerst von mir an *Ascaris nigrovenosa* festgestellt und im 2. Hefte meiner Organol. Studien (Breslau 1874) eingehend beschrieben, auch diese Verschmelzung ausdrücklich mit einer Conjugation verglichen worden. Auch habe ich eben da, lange vor Kultschitzky, die Nucleoli der Pronuclei beschrieben und abgebildet und überdies ihre Schicksale, wie sie am lebendigen Object zu verfolgen sind, ausführlich besprochen.

32. Über einige Salze der Unterphosphorsäure.

Von C. Rammelsberg.

(Vorgetragen am 16. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVI]; — ausgegeben am 23. Juli.)

Unterphosphorsaures Lithion.

I. Normales Salz.

Vermischt man die Lösungen von Chlorlithium und normalem Natronhypophosphat im Verhältniss von 2 : 1 Mol., d. h. von 1 Th. : 2.5 Th., so bildet sich beim Stehen, schneller beim Erwärmen, ein krystallinischer Niederschlag.

I. 0.9 gaben, geglüht, nach Behandlung mit Salpetersäure 0.589 klares geschmolzenes Glas.

II. 1.213 verloren bei 150° 0.403, bei 200° 0.418, bei 250° 0.428.

III. 1.923 verloren bei 200° 0.648; der Rest, mit Natroncarbonat geschmolzen etc., gab 1.353 $Mg^2P^2O^7$ = P 0.378.

IV. 1.403 wurden in Wasser unter Zusatz von etwas Essigsäure gelöst und mit Bleiacetat gefällt. Es resultirten 2.635 $PbPO^3$ = 0.728 PO^3. Das durch kohlensaures Ammon von Blei befreite Filtrat hinterliess nach dem Abdampfen mit Chlorwasserstoffsäure 0.705 LiCl = 0.116118 Li.

Es waren also gefunden

	I.	III.	IV.
Li	—	—	8.27
P	—	19.66	—
PO^3	—	—	50.61
$Li^4P^2O^7$	65.44	H^2O	(41.12)
			100

Es ist also $= 2\,Li^2PO^3 + 7\,aq$

$= Li^4P^2O^6 + 7\,aq$

4 Li	28 =	9.00	
2 P	62	19.87	50.61
6 O	96	30.74	
$7H^2O$	126	40.39	
	312	100	

Die Menge des Pyrophosphats muss 64.74 betragen, der Wasserverlust ist

bei 200° 6 Mol. = 34.61 gef. 34.46 II
33.70 III.

1 Th. des Salzes löst sich in 120 Th. Wasser von mittlerer Temperatur.

Die Lösung des aus Chlorlithium durch normales Natronsalz gefällten Salzes in Wasser und Essigsäure giebt beim Erkalten der durch Erwärmen concentrirten Flüssigkeit glänzende Krystalle, welche luftbeständig sind. 1.345, welche bei 200° 0.465 »verloren hatten«, schmolzen in der Glühhitze zu einem farblosen Glase, welches 0.877 wog. Dies wurde mit Natroncarbonat geglüht, die Masse in Wasser und Chlorwasserstoffsäure gelöst, und mit Ammoniak und Magnesiamischung versetzt. Der Niederschlag lieferte 0.973 $Mg^2P^2O^7$, welche 0.62233 P^2O^5 = 0.27176 P entsprechen, so dass in dem durch Schmelzung entstandenen Glase 0.25467 Li^2O = 0.11884 Li enthalten waren.

Somit enthalten 100 Th. des untersuchten Salzes

Lithium	8.83
Phosphor	20.20

welche in dem Atomverhältniss 2:1.1 d. h. 2:1 stehen, und einem Hypophosphat

$$2\,Li^2PO^3 + 7\,aq$$
$$= Li^4P^2O^6 + 7\,aq$$

entsprechen.

4 Li =	28 =	9.00
2 P	62	19.87
6 O	96	30.74
$7\,H^2O$	126	40.39
	312	100

Das Salz verliert bei 120° 5 Mol. Wasser = 28.85 Procent, gefunden 28.63, und bei 200° 6 Mol. = 34.61, gefunden 34.57 Procent. Es muss 64.74 Procent Lithionpyrophosphat $Li^4P^2O^3$ liefern, während der Versuch 65.20 gab.

Dasselbe Salz scheidet sich ab, wenn in freier Unterphosphorsäure soviel Lithioncarbonat gelöst wird, dass die Flüssigkeit noch stark sauer reagirt. Die Säure war aus frisch gefälltem Barytsalz durch Digestion mit (nicht überschüssiger) verdünnter Schwefelsäure dargestellt.

Um in einem Hypophosphat die Säure zu bestimmen, kann man sich der von H. ROSE für die phosphorige Säure empfohlenen Methode[1] bedienen, wie neuerlich AMAT[2] gefunden hat. Sie wurde bei dem in Rede stehenden Lithionsalz angewandt.

1.955 wurden mit Chlorwasserstoffsäure bis fast zur Trockenheit eingedampft. Die concentrirte Lösung, mit Quecksilberchlorid und etwas Säure anhaltend digerirt, lieferte 2.885 Hg^2Cl^2. Das durch H^2S vom Quecksilber befreite Filtrat hinterliess 1.29 Lithionpyrophosphat.

Da 471 Hg^2Cl^2 158 P^2O^6 entsprechen, so ist die gefundene Menge $= 0.9678 = 49.5$ Procent PO^3, während 1.29 $Li^4P^2D^7 = 0.1788 =$ 9.15 Procent Li sind.

Das Salz enthält also

			berechnet
	Li	9.15	9.0
	PO^3	49.50	50.6
also	H^2O	41.35	40.4
		100	100

Es ist also gleich dem zuvor beschriebenen

$$2\ Li^2PO^3 + 7\ aq = Li^4P^2O^6 + 7\ aq.$$

II. Saures Salz.

Die Flüssigkeit, welche nach Abscheidung des vorigen bleibt, liefert erst nach dem Verdunsten zur Syrupdicke Krystalle, welche jedoch nicht bestimmbar sind und an der Luft feucht werden.

Die zur Analyse benutzte Probe war über Chlorcalcium getrocknet.

2.445 gaben beim Glühen 2.022 eines klaren Glases. Dies lieferte nach dem Schmelzen mit Natroncarbonat u. s. w. 2.6 $Mg^2P^2O^7 = 1.663\ P^2O^5$.

Hiernach enthält das Salz

Li	6.79
P	29.70

Es ist also Li : P = 1 : 1 At.

Ein saures Salz

$$HLiPO^3 + aq$$

erfordert

[1] Hdb. d. anal. Ch. 2, 560.
[2] C. rend. 111, 676.

Li	7 =	6.66		
P	31	29.52		
3O	48	45.71		
H	1	0.95 =	H^2O	8.55
H^2O	18	17.16		17.16
	105	100		25.71

Es sollte 81.9 $LiPO^3$ geben. Die Probe hatte bei 200° 5.11 Procent Wasser verloren, d. h. $^1/_5$ der ganzen Menge.

Unterphosphorsaures Thallium.

I. Normales Salz.

Beim Neutralisiren einer heissen Lösung der Säure durch kohlensaures Thallium scheidet sich sofort ein grosser Theil des Salzes in seidenglänzenden sehr feinen Nadeln ab, welche getrocknet ein verfilztes asbestähnliches Ansehen haben.

Das sehr schwer lösliche Salz, im Wasserbad getrocknet, verliert bis 210° nichts am Gewicht.

2.05 in verdünnter Salpetersäure gelöst, mit Ammoniak übersättigt, mit Ammonhydrosulfür gefällt, gaben 2.118 Tl^2SO^4 = Tl 1.7145.

Es ist also

	Tl^2PO^3		Gefunden
2 Tl	408 =	83.78	83.64
P	31	6.37	
3O	48	9.85	
	487	100	

II. Saures Salz.

Zu der mit Thalliumcarbonat neutralisirten Säure fügt man die gleiche Menge derselben, wodurch in der Wärme eine vollständige Lösung entsteht, die beim Verdunsten kleine, starkglänzende Krystalle liefert.

2.93 verloren bis 110° nichts am Gewicht, waren aber zu einem Glase geschmolzen. Aus der Lösung desselben in verdünnter Salpetersäure wurde wie zuvor 2.82 Tl^2SO^4 = 2.2828 Tl erhalten, entsprechend 77.91 Procent.

Es ist also nicht $HTlPO^3$, welches nur 71.83 Tl enthält, sondern

$$\left\{\begin{matrix} 2\,HTlPO^3 \\ Tl^2PO^3 \end{matrix}\right\}$$

			Gefunden
4Tl	816 =	77.34	77.91
3P	93	8.81	
2H	2	0.20	
9O	144	13.65	
	1055	100	

Schon früher habe ich bei den Phosphaten des Thalliums und Lithiums ähnliche Verbindungen beschrieben.[1]

Unterphosphorsaurer Baryt.

Hier mögen nnr einige Bemerkungen über die Barytsalze Platz finden.

Das normale Salz $BaPO^3$ wird aus der Lösung in Säuren durch Ammoniak als solches gefällt.

Es enthält selbst nach dem Liegen im Exsiccator über Schwefelsäure noch etwas Wasser. In einem Versuch betrug dasselbe bei 200° 1.62 Procent, und da die Analyse 61.72 Ba gab, während $BaPO^3 = 63.42$ Ba ist, so war es noch nicht ganz wasserfrei.

Das saure Salz, zuletzt noch im Joly beschrieben[2], dessen Form FRESENIUS untersucht hat, krystallisirt aus der Lösung des normalen in Chlorwasserstoffsäure.

Eine Probe verlor bei 200° 11.2 Procent und gab 40.56 Procent Ba, während

$$H^2BaP^2O^6 + 2\,aq$$

Ba 41.14 H^2O 5.40 und aq 10.80 geben muss. Es ist also bei 200° wasserfrei.

Unterphosphorsaure Magnesia.

Normales Natronsalz giebt in der Lösung von Magnesiasulfat einen Niederschlag.

Die Fällung bei gewöhnlicher Temperatur wurde kalt gewaschen und an der Luft getrocknet. Sie bildete ein feinkrystallinisches Pulver.

Das magnesiahaltige Filtrat, zur Trockenheit verdampft, liess beim Behandeln mit Wasser nur eine geringe Menge unlöslichen Rückstandes.

[1] Diese Berichte, 1882.
[2] C. rend. 101 und 102.

1.74 lufttrocknes Salz verlor bei 140° 0.59 = 33.91 Procent, bei 200° 0.79 = 45.40 Procent. Durch Glühen wurden 0.91 erhalten, deren Gewicht nach Behandlung mit Salpetersäure unverändert blieb. Sie erwiesen sich als 52.3 Procent Pyrophosphat, in welchem Mg und P besonders bestimmt wurden.

Die Analyse zeigt, dass das Salz

$$MgPO^3 + 6\,aq$$

ist.

		Berechnet	Gefunden
P	31	= 14.69	14.62
Mg	24	11.37	11.28
3O	48	22.74	
$6H^2O$	108	51.20	
	211	100	

5.33 Mol. Wasser würden 45.5 Procent entsprechen; während der Verlust bei 140° 4 Mol. = 34.1 Procent ausmacht.

Ein saures Magnesiahypophosphat scheint nicht zu existiren.

Erhitzt man das normale mit Essigsäure, so löst sich nur wenig, und erst auf Zusatz von einigen Tropfen Chlorwasserstoffsäure entsteht eine klare Lösung, welche nach starkem Eindampfen undeutliche Krystalle liefert.

100 Theile des Salzes verloren bei 200° 33.3 Procent und hinterliessen nach dem Glühen 34.9 Procent Pyrophosphat, wie die Analyse desselben zeigte.

Hiernach ist es normales Salz mit dem doppelten Wassergehalt des gefällten.

$$MgPO^3 + 12\,aq.$$

		Berechnet	Gefunden
Mg	24	= 7.52	7.74
P	31	9.72	10.00
3O	48	15.05	
$12H^2O$	216	67.71	
	319	100	

Bei 200° verliert es die Hälfte des Wassers.

Unterphosphorsaure Beryllerde.

Beim Vermischen heisser Lösungen von Berylliumsulfat und normalem Natronsalz fällt ein reichlicher Niederschlag, und aus dem erkaltenden Filtrat scheidet sich noch etwas von dem Salze ab. Es ist getrocknet pulverig.

1.665 des bei 100° getrockneten Salzes verlor bei 250° 0.22 Wasser, beim Glühen blieben 1.405 = 84.39 Procent gesinterter Rückstand, welcher nach Behandlung mit Salpetersäure 1.41 Pyrophosphat gab.

Dieses wurde mit Kali-Natroncarbonat geschmolzen, und gab 1.049 P^2O^5, also 0.361 BeO.

Das Salz ist also

$$2\,BePO^3 + 3\,aq$$

			Gefunden
2P	= 62 =	27.00	27.51
2Be	18	7.83	7.80
6O	96	41.69	
$3H^2O$	54	23.48	
	230	100	

Hiernach sollte es 83.48 Procent Pyrophosphat liefern. Der Versuch hat 84.68 ergeben.

Der Wasserverlust bei 230—250° liegt zwischen 10.81 und 13.21 Procent, während die Hälfte des Wassers 11.74 betragen sollte.

Verhalten der Hypophosphate in höherer Temperatur.

Obwohl hierüber keine Erfahrungen vorliegen, lässt sich der Vorgang leicht errathen.

Die Hypophosphate $\overset{''}{R}PO^3$ unterscheiden sich von den Salzen der phosphorigen Säure $H\overset{''}{R}PO^3$ durch das Fehlen des Wasserstoffs. Letztere verwandeln sich, bei Luftausschluss erhitzt, in ein Gemenge von Pyrophosphat und Phosphormetall, während Wasserstoff entweicht.[1] Da dieser in den Hypophosphaten fehlt, so erfolgt die Umsetzung ohne Gewichtsveränderung:

$$7\overset{''}{R}PO^3 = 3\overset{''}{R}{}^2P^2O^7, RP.$$

Silbersalz Ag^2PO^3.

Das durch Fällung erhaltene weisse krystallinische Salz ist wasserfrei. Bei Luftausschluss erhitzt, hinterlässt es eine geschmolzene weisse Masse, ohne ein Sublimat oder eine Gasentwickelung zu zeigen. Ihr Gewicht ist das des Salzes.

---

[1] Monatsberichte 1866, S. 547.

Bleisalz $PbPO^3$.

Das bei 200° getrocknete Salz verwandelt sich beim Erhitzen in ein schwarzes Gemenge von $Pb^2P^2O^7$ und PbP, wobei zuweilen eine Feuererscheinung eintritt. In Folge von Spuren zurückgehaltenen Wassers erscheint ein geringes Sublimat von Phosphor, und ein schwacher Geruch von Phosphorwasserstoff.

Barytsalz $BaPO^3$.

Bei 200° hält es noch geringe Mengen Wasser zurück (s. o.). In Folge dessen treten auch bei ihm freier Phosphor und Phosphorwasserstoff als secundäre Producte auf. Der Rückstand von $Ba^2P^2O^7$ und BaP ist gelblich, wird aber beim Zutritt von Luft während des Abkühlens braunroth. Wegen dieser raschen Oxydation wurden in einem Versuch durch Behandlung mit Salpetersäure nicht 105.7 Procent Pyrophosphat, sondern nur 104.36 erhalten.

33. Schliemann's letzte Ausgrabung.

Von Rud. Virchow.

(Vorgetragen am 23. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 30. Juli.)

Schliemann beschäftigte sich, als er Anfang August v. J. von seiner langen Ausgrabungs-Campagne in der Troas nach Athen zurückgekehrt war, mit der Bebauung eines Rest-Grundstückes in der Universitätsstrasse, welches ihm nach Fertigstellung des Gebäudes für das deutsche archäologische Institut übrig geblieben war. Bei dieser Gelegenheit stiess er, fast am Fusse des Instituts, ganz zufällig auf alte Gräber.

Unter dem 27. September schrieb er mir: »In einem der, bei Abgrabung des Felsens hier gefundenen 11 Gräber waren 4 Skelette mit gut erhaltenen Schädeln, die ich Ihnen schicken kann, wenn Sie wünschen. Diess Grab, sowie 9 andere, stammt aus dem 4. Jahrhundert v. Chr., wie dies die zahlreichen bemalten Lekythoi über jeden Zweifel beweisen. Ein anderes Grab, aber nur eines, und bei Weitem das grösste von allen, — worin aber die Skelette vermodert waren — stammt aus dem 6. Jahrhundert[1].«

---

[1] Eine von Schliemann selbst herrührende Notiz in der Wiener Neuen Freien Presse lautet folgendermaassen: »Bei Abgrabung meines Grundstückes in der Universitätsstrasse in Athen behufs eines Hausbaues entdeckte ich 11 Gräber, wovon nach den Beigaben zu urtheilen 10 jedenfalls aus dem 4. Jahrhundert v. Chr. stammen müssen, während das elfte dem 6. Jahrhundert anzugehören scheint. Von dem Sarkophage des letzteren war keine Spur übrig geblieben und muss er aus Holz bestanden haben. Es fanden sich in diesem Grabe die Gerippe von zwei Menschen mit wohl bewahrten Schädeln und einige interessante Beigaben, bestehend in 4 wohl erhaltenen Frauenfiguren aus Thon von archaischem Typus und guter Arbeit; ferner einem kleinen Stuhl und 12 schwarzfigurigen Lekythoi (Ölkannen mit Henkel und dünnem Hals), wovon 4 mit Frauengestalten und 8 mit Blumen, schöner archaischer Malerei. Von den übrigen 10 Gräbern bestanden 2 aus Poros-, 1 aus Terracotta-, 6 aus Marmorplatten, und fand sich nur ein, aus einem einzigen Marmorblock hergestellter Sarkophag mit Deckel. Alle diese Gräber enthielten Menschenknochen, jedoch ist es mir nur geglückt, 4 Schädel heil herauszunehmen. Von den Beigaben verdienen besondere Erwähnung: 2 Becher, 1 Dreifussvase mit Deckel und 18 Lekythoi, fast alle mit rothfiguriger Bemalung schöner Kunst. Auf einem der Lekythoi sieht man einen Reiter zu Kameel. Eine solche Darstellung ist noch nie auf griechischen Vasen vorgekommen, ausgenommen auf einem rothfigurigen Gefäss aus Nola, dessen erster Herausgeber, Layard, die Scene als einen Triumphzug des Dionysos erklärte. Die meisten späteren Erklärer aber sind davon abgewichen.«

Auf mein Ersuchen um die erhaltenen Schädel sendete er dieselben Ende October ab, kurz bevor er selbst seinen letzten Gang nach Deutschland antrat. Sie haben die Reise ohne grössere Beschädigung trotz ihrer Brüchigkeit gut überstanden. Freilich erwiesen sie sich als sehr defect von der Ausgrabung her. Bei der immer noch grossen Seltenheit chronologisch gut bestimmter Schädel in Griechenland und in Erinnerung an den Geber möge hier eine kurze Beschreibung gestattet sein.

Leider ist nur bei einem Schädel (Nr. 1), den ich für einen weiblichen halte, das Gesicht erhalten und auch an diesem fehlt der Unterkiefer. Auch von den anderen drei ist der eine (Nr. 2) ein weiblicher; ein zweiter (Nr. 3) hat trotz mancher weiblichen Eigenschaften mehr männliche Merkmale, und auch der dritte (Nr. 4), bei welchem freilich zahlreiche Verletzungen eine genauere Bestimmung erschweren, ist nach Grösse und Form als männlicher anzusprechen. Alle vier haben erwachsenen Personen, wahrscheinlich in vorgerücktem Lebensalter, angehört. Der einzige erhaltene Zahn von Nr. 1, ein Molaris I der rechten Seite, ist tief abgeschliffen; ebenso finden sich in dem zu Nr. 4 gehörigen Oberkiefer 3 stark abgenutzte Backzähne hinter einander. Bei Nr. 1 und 2 sind die unteren lateralen Abschnitte der Coronaria im Verwachsen begriffen. Im Übrigen zeigen die Schädel, trotz mancher individueller und sexueller Verschiedenheiten, so viel übereinstimmende Züge, dass eine gemeinsame Abstammung vermuthet werden kann.

Die beiden weiblichen Schädel besitzen eine geringe Grösse. Nr. 1 hat eine Capacität von 1240^{ccm}; Nr. 2 erweist sich bei einem Rauminhalt von nur 1180^{ccm} sogar als nannocephal. Dem entspricht der geringe Umfang: der horizontale beträgt 488, bez. 496, der sagittale 358, bez. 364^{mm}. Dem gegenüber hat der männliche Schädel No. 3 eine Capacität von 1345^{ccm} bei einem Horizontalumfang von 511 und einem Sagittalumfang von 369^{mm}; bei Nr. 4, dessen Capacität nicht zu bestimmen ist, beträgt der Horizontalumfang annähernd 528^{mm}.

Berechnet man den procentualen Antheil der einzelnen Schädeldachknochen an der Bildung der Scheitelcurve, so erhält man folgende Zahlen:

	Nr. 1	Nr. 2	Nr. 3
Stirnbein	34.3	35.4	32.7
Parietalia	31.8	31.8	34.9
Squama occip.	33.7	32.7	32.2

Auch hier werden die sexuellen Verschiedenheiten leicht bemerklich. Bei den beiden Weibern ist die frontale Entwickelung überwiegend, während der Mittelkopf unverhältnissmässig zurücktritt; bei dem

Männerschädel ist umgekehrt der Mittelkopf vorzugsweise ausgebildet, während das Stirnbein nahezu dieselbe geringere Zahl ergiebt, wie der Hinterkopf. Auch der zweite Männerschädel, bei dem das Maass der Hinterhauptslänge nicht zu bestimmen ist, hat eine so grosse Länge des Mittelkopfes (136^{mm}), dass er noch um 7^{mm} das Maass von Nr. 3 überschreitet, während die Länge des Stirnbeins bei beiden fast gleich gross ist.

Die gerade basilare Länge ist viel weniger verschieden. Die Entfernung der Nasenwurzel von der Mitte des oberen Umfanges des äusseren Gehörganges zeigt bei dem männlichen Schädel Nr. 3 nur ein Mehr von 4, bez. 5^{mm} gegenüber den beiden weiblichen, welche fast dasselbe Maass haben; nur Nr. 4 geht um 11, bez. 12^{mm} über die weiblichen, jedoch auch um 7^{mm} über den anderen männlichen Schädel hinaus. Die Entfernung der Mitte des vorderen Umfanges des grossen Hinterhauptsloches von der Nasenwurzel ist bei Nr. 1—3 fast identisch und nur bei Nr. 4, wo eine nur approximative Bestimmung möglich ist, etwas beträchtlicher. Jedenfalls zeugen alle diese Maasse für eine günstige Entwickelung der basilaren Theile.

Ebenso ist die gerade occipitale Länge (horizontale Entfernung der Mitte des hinteren Umfanges des grossen Hinterhauptsloches von dem am meisten vorstehenden Punkte des Hinterhauptes) nahezu gleich bei Nr. 1—3. Sie beträgt ungefähr 30—31 Procent der Gesammtlänge des Schädels. Zusammengehalten mit den Procentzahlen für das Umfangsmaass der Hinterhauptsschuppe, beweisen diese Zahlen eine sehr gleichmässige, von Einflüssen des Geschlechts wenig beeinflusste Ausbildung der hinteren Abschnitte des Grosshirns und des ganzen Kleinhirns. Bei allen 4 Schädeln ist die Oberschuppe gross und vortretend, am stärksten bei den weiblichen; eine Protuberantia occipit. externa fehlt fast vollständig.

Wesentlich anders verhalten sich die gebräuchlichen Indices, welche vorzugsweise die Verhältnisse des Grosshirns wiedergeben. Sie zeigen weit mehr individuelle, als sexuelle Verschiedenheiten. Während der erste Weiberschädel eine hypsimesocephale Form besitzt, ist der andere orthodolichocephal. Die Männerschädel sind beide orthomesocephal, aber Nr. 4 mit einem Längenbreitenindex von 75.4 steht der Dolichocephalie sehr nahe. Aus so wenigen Schädeln Mittelzahlen zu berechnen, würde keine Bedeutung haben, indess kann man sagen, dass die Indices einer civilisirten Rasse entsprechen, bei welcher in Betreff der Breite mesocephale, in Betreff der Höhe orthocephale Formen vorherrschen. Betrachtet man nur die absoluten Zahlen für Länge, Breite und Höhe des Schädels, so zeigen sich für die Männer durchweg grössere Maasse, sowohl für die Länge, als namentlich für die Breite, dagegen ist die Höhe bei allen 4 Schädeln nicht auffallend verschieden. Daher sind auch die Zahlen für die Ohrhöhenindices durchweg fast identisch.

Die Nähte sind fast überall offen und an den meisten Stellen mässig gezackt. Die beginnende Synostose der unteren lateralen Abschnitte der Coronaria bei Nr. 1 und 2 ist schon erwähnt. Bei Nr. 2 liegt in dem rechten Schenkel der Lambdanaht, nahe dem Winkel, ein grosser zackiger Schaltknochen. Auch bei Nr. 3 ist die Lambdanaht rechts sehr zackig. Sonst habe ich keine nennenswerthen Abweichungen in der Nahtbildung bemerkt; insbesondere ist die Schläfengegend bei allen in ganz normaler Weise gestaltet.

Als Beispiel möge der Schädel Nr. 1 in seinen Einzelheiten aufgeführt werden:

Derselbe stammt, wie schon ausgeführt, von einer älteren Frau. Die Knochen haben eine gesättigt graugelbe, stellenweise gelbbraune Färbung; ihre Oberfläche ist etwas matt und uneben, hie und da leicht erodirt, wahrscheinlich durch Sickerwasser. Eine Reihe kleiner Verletzungen ist offenbar frischen Ursprungs: So sind beide Jochbogen in der Mitte gebrochen, es fehlt der rechte Warzenfortsatz nebst nächster Umgebung, am linken Parietale ist, dicht über der Schuppennaht, ein kleines Stück eingedrückt und am rechten Orbitalrande ist eine Stelle ausgesprungen. Glücklicherweise hindert keine dieser Verletzungen die Messung.

Die Capacität (1240^{ccm}) ist gering; der horizontale (488^{mm}) und der sagittale (358^{mm}) Umfang sind noch kleiner, als man sie nach dem Inhaltsmaasse erwarten sollte. Ganz besonders klein ist die horizontale Länge (170^{mm}), was umsomehr auffällt, als die tiefen Längenmaasse, insbesondere die basilare Länge und die horizontale Occipitallänge, wie schon erwähnt, von denen der anderen Schädel sich wenig unterscheiden. Die geringere horizontale Länge des Schädels wird ausgeglichen durch grössere Breite der unteren Parietalgegend (131^{mm}) und durch grössere Höhe (130^{mm}). Die Nähte sind sämmtlich ziemlich einfach, aber offen; nur die Coronaria zeigt innerhalb der Grenzen des Planum temporale Neigung zur Synostose.

Der hypsimesocephale Schädel[1] erscheint in der Seitenansicht (Fig. 1) wegen der starken Ausbildung des Hinterhauptes mehr gestreckt. Die Stirn ist niedrig, ziemlich gerade und biegt schnell in die Scheitelcurve um. Die Schläfen sind voll, und die breite Ala sphenoidealis ist stark eingebogen. Die Lineae temporales erreichen die Tubera parietalia, steigen aber an den vorderen Abschnitten nicht

---

[1] Die Abbildungen sind von Hrn. Emil Eyrich in geometrischer Weise in halber Grösse des Originals gezeichnet worden.

hoch herauf. Der hintere Abfall der Scheitelcurve geschieht langsam und wird bald durch das Vortreten der Oberschuppe unterbrochen. Die Unterschuppe ist mit geringer cerebellarer Ausbiegung schräg nach vorn und unten gerichtet. Der Warzenfortsatz (links, Fig. 3) lang, kräftig und etwas zugespitzt.

Fig. 1.

In allen übrigen Normen (Fig. 2 — 5) sieht man den Schädel etwas schief (plagiocephal). Die Verschiebung betrifft, wie namentlich die Norma basilaris (Fig. 3) ergiebt, hauptsächlich den Hinterkopf, der im Ganzen mehr nach rechts gedrängt ist. Jedoch beginnt die Ver-

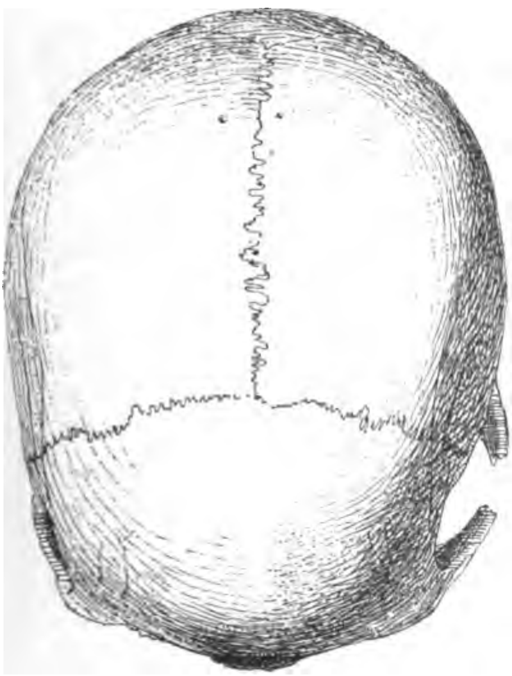


Fig. 2.

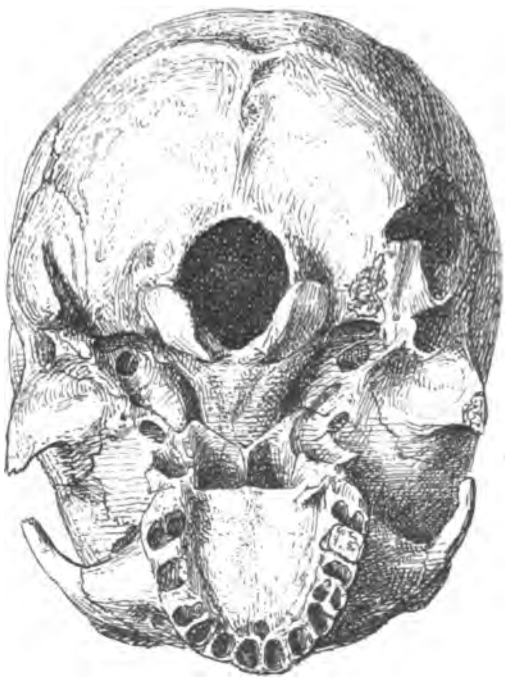


Fig. 3.

schiebung schon in der Gegend der (ganz geschlossenen) Synchondrosis spheno-occipitalis; sie äussert sich daher auch an der Apophysis basilaris und am Foramen magnum, dessen rechter Gelenkhöcker mehr nach vorn und aussen gerichtet ist. In der Norma verticalis (Fig. 2) steht der linke Jochbogen in deutlich phaenozyger Stellung, während der rechte kaum sichtbar ist. In der Unteransicht (Fig. 3) sieht man das etwas schiefe, rundliche Foramen magnum, dessen Durchmesser (32 auf 30) einen Index von 93.7 ergeben. Die breite Apophysis ist mit tiefen, gleichfalls schief gestellten Muskelfurchen besetzt. Es sind dies Abweichungen von mässiger Bedeutung, welche auf eine schiefe Haltung des Halses oder Nackens im Leben schliessen lassen.

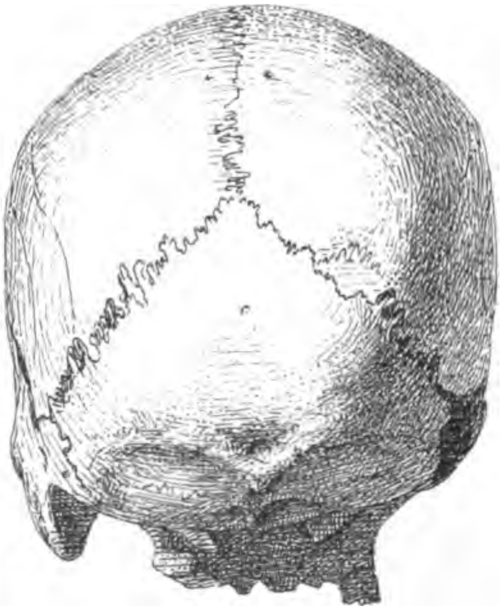


Fig. 4.

Fig. 5.

Die Hinteransicht (Fig. 4) zeigt eine hohe, leicht schiefe Rundung der Scheitelgegend und eine fast platte Gestalt der Seitentheile. Die Tubera parietalia wenig ausgesprochen, aber die ganze Gegend etwas ausgelegt. Die Sagittalis zwischen den sehr kleinen Emissarien mehr einfach. Der Lambda-Winkel hoch und spitz; die Schenkel der Naht in ihrer Mitte stärker gezackt und rechts ein in das Parietale übergreifender, gezackter Schaltknochen. Die Protuberantia externa schwach und nach rechts verschoben, die rechte Linea semicircularis occip. kürzer und höher, die linke mehr gestreckt und länger.

In der Vorderansicht (Fig. 5) erscheint der Umriss des Schädels flach gewölbt. Die Stirn ziemlich breit (94^{mm} in minimo), mit vertiefter Glabella und schwachen Tubera. Der Orbitalrand ziemlich glatt; nur über seinem medialen Ende schwache Andeutung von

Orbitalwülsten. Der Nasenfortsatz relativ breit, aber trotz der Existenz von Stirnhöhlen nicht vortretend. In seiner Mitte ein kurzer zackiger Rest der Stirnnaht. Die Stirnnasennaht winkelig nach oben ausspringend.

Das Gesicht zart, niedrig, aber ziemlich breit. Die Augenhöhlen gross, hoch, nach aussen (lateralwärts) weit, im Ganzen gerundet, wozu namentlich der nach aussen stärker vortretende und leicht überhängende obere Rand beiträgt; Index 87.1, hypsikonch. Die Nasenwurzel schmal, ohne tieferen Absatz gegen die Stirn (Fig. 1), der Rücken etwas eingebogen, aber die Enden der Nasenbeine abgebrochen, Apertur hoch und schmal, Index 44.4, leptorrhin. Kräftiger Nasenstachel. Gesichtswinkel nur 66°. Fossae caninae flach, Oberkiefer breit, gegen die kräftigen Wangenbeine ansteigend, Alveolarfortsatz kurz (16^{mm}) mit dentalem Prognathismus. Zahncurve (Fig. 3) weit, vorn mit grossen, leeren Alveolen, nach hinten leicht hufeisenförmig. Nur ein Zahn, der rechte Molaris I ist erhalten; seine Krone ist tief, und zwar vorzugsweise nach innen, abgeschliffen. Die Alveole des linken Molaris I ist obliterirt, ebenso die Alveolen beider Molares III. Der Gaumen mässig tief, der Ansatz des Alveolarfortsatzes fast senkrecht, der hintere Rand des Palatum fast gerade, ohne irgend einen Vorsprung. Gaumenindex 78.7, leptostaphylin. —

Zu dieser Beschreibung mag noch hinzugefügt werden, dass ein loses Stück der rechten Gesichtshälfte des Schädels Nr. 4, umfassend den Oberkiefer und das Wangenbein, vorhanden ist. Auch hier tritt das letztere stärker vor, jedoch ist die Fossa canina mehr vertieft. Der Alveolarfortsatz ganz kurz (10^{mm}), mit leicht dentalem Prognathismus, aber leider sehr zertrümmert. Die noch erhaltenen Molares I—III sind an den Kronen tief abgenutzt.

So fragmentarisch dieses Stück ist, so ergänzt es doch einigermaassen den Befund von Nr. 1. Insbesondere darf hingewiesen werden auf die, bei griechischen Sculpturen so bekannte Kleinheit des Alveolarfortsatzes (und der Oberlippe). Bei der relativen Grösse der Schneidezähne erklärt sich so das Vorschieben der vorderen Lamelle der Alveolarwände und damit der dentale Prognathismus. —

Obwohl ich nicht beabsichtige, bei dieser Gelegenheit über die altathenischen Schädel zu sprechen, so will ich doch hinweisen auf die Beschreibung zweier Schädel,[1] welche im Frühjahr 1871 in der Piraeusstrasse in Athen ausgegraben und für die hiesige anthropologische Gesellschaft durch Hrn. Gustav Hirschfeld erworben wurden.

---

[1] Zeitschrift für Ethnologie 1872. Bd. IV. — Verhandl. der Berliner anthropolog. Gesellsch. S. 147.

Der eine, welcher einer alten Frau Namens Glykera angehörte, stammt nach der Schrift aus makedonischer Zeit; in dem anderen Grabe, dem eines kräftigen Mannes, wurden zahlreiche Thongefässe ältesten Styls gefunden. Schon damals bemerkte ich: »Was am meisten überrascht, ist die geringe Capacität dieser Schädel, welche so sehr hinter dem Mittel der anderen Culturvölker zurücktritt, dass man nach der jetzt üblichen Betrachtungsweise eher an Glieder eines wilden Stammes zu denken geneigt sein könnte.« Seitdem ist allerdings auch unter den modernen Culturmenschen eine nicht kleine Zahl von Individuen gefunden worden, welche sich durch Kleinheit des Schädels und des Gehirns auszeichnen. Indess erhält sich doch der Eindruck des Ungewöhnlichen bei der Betrachtung der altathenischen Schädel, und zwar um so mehr, als die Zahl der kleinen Schädel zunimmt. Bleiben wir vor der Hand bei den aufgeführten Schädeln stehen, so erhalten wir folgendes Bild:

Gräber	Männer		Weiber	
1. der Universitätsstrasse	No. 1.	1240$^{\text{ccm}}$	Nr. 3.	1345$^{\text{ccm}}$
	No. 2.	1180 »		
2. der Piraeusstrasse	Glykera	1150 »	Mann	1280 »

Hier ergeben sich unter 3 Weiberschädeln 2 mit einer Capacität unter 1200$^{\text{ccm}}$, der von mir aufgestellten Grenze der *Nannocephalie*, und einer mit der gleichfalls sehr geringen Capacität von 1240$^{\text{ccm}}$. Unter den 2 Männerschädeln hat der sehr alte aus der Piraeusstrasse eine Capacität von 1260$^{\text{ccm}}$, die nur um 40$^{\text{ccm}}$ über die Capacität des Weiberschädels Nr. 1 hinausreicht; der nächstgrosse Männerschädel Nr. 3 übersteigt durch seine Capacität von 1345$^{\text{ccm}}$ die des Mannes aus der Piraeusstrasse um 65$^{\text{ccm}}$, tritt aber doch noch immer weit hinter dem Mittel der Culturschädel heutiger Zeit zurück. Man ersieht daraus, wie vorsichtig man in der Beurtheilung des Culturgrades eines Volkes nach der Grösse des Schädelraumes sein muss.

Der Schädel von Glykera ist *orthodolichocephal*, sehr nahestehend dem Schädel Nr. 2 aus der Universitätsstrasse. Der des Mannes aus der Piraeusstrasse hat *hypsimesocephale* Form, wie der Schädel der Frau Nr. 1 aus der Universitätsstrasse. Auch bei dieser Vergleichung wird die verhältnissmässig grosse Breite der Variation ersichtlich, welche schon vor mehr als 2000 Jahren in der Bevölkerung Athens bestand. —

Es ist in hohem Grade schmerzlich, dass nur aus einem unter den 11 oder genauer 10 Felsgräbern der Universitätsstrasse die Schädel gerettet wurden und auch diese nur in mehr oder weniger verletztem Zustande. Welche Fülle von Belehrung würde sich aus einer Vergleichung aller vorhandenen Schädel, namentlich wenn sie vollständig erhalten wären, haben schöpfen lassen! Indess auch so gewähren sie, im Zusammenhalte mit den fast 20 Jahre früher gesammelten Schädeln aus den Gräbern der Piraeusstrasse, ein Bild von der Kraniologie der alten Athener, und ich freue mich, durch die Beschreibung dieser letzten Gabe meines Freundes noch einmal die Erinnerung an den glücklichen Forscher erneuern zu können, dem wir so viel verdanken.

I. Messungen.

Altathenische Schädel	1. ♀	2. ♀	3. ♂	4. ♂
Capacität	1240 ccm	1180 ccm	1345 ccm	—
Grösste horizontale Länge	170 mm	178 mm	179 mm	187 mm
Grösste Breite	131 " p	128 " t	136 " t	141 " p
Gerade Höhe	130 "	126 "	128 "	132 "
Ohrhöhe	107 "	107 "	108 "	117 "
Gerade Hinterhauptslänge	53 "	54 "	53 " ?	—
Entfernung des Gehörganges:				
von der Nasenwurzel	102 "	101 "	106 "	113 "
vom Nasenstachel	106 "	—	—	—
vom Alveolarrande	111 "	—	—	—
Entfernung des For. magn.:				
von der Nasenwurzel	95 "	93 "	94 "	101 " ?
vom Nasenstachel	86 "	—	—	—
vom Alveolarrande	90 "	—	—	—
Horizontalumfang	488 "	496 "	511 "	528 " ?
Sagittalumfang:				
des Stirnbeins	123 "	129 "	121 "	122 "
der Parietalia	114 "	116 "	129 "	136 "
der Hinterhauptsschuppe	121 "	119 "	119 "	—
Ganzer Sagittalbogen	358 "	364 "	369 "	—
Minimale Stirnbreite	94 "	87 "	96 "	—
Schläfenbreite	109 "	105 "	113 "	—
Occipitalbreite	105 " ?	103 "	107 "	112 "
Mastoidealbreite: a) Spitze	—	—	106 "	103 "
b) Basis	—	—	123 "	128 "
Gesicht, Höhe B.	69 "	—	—	—
" Breite a	130 "	—	—	—
" " b	94 "	—	—	—
Orbita, Höhe	l. 34 "	—	—	—
" Breite	l. 39 "	—	—	—
Nase, Höhe	54 "	—	—	—
" Breite	24 "	—	—	—
Gaumen, Länge	47 "	—	—	—
" Breite	37 "	—	—	—
Gesichtswinkel	66 " °	—	—	—

II. Berechnete Indices.

Altathenische Schädel	1. ♀	2. ♀	3. ♂	4. ♂
Längenbreiten-Index	77.1	71.9	76.0	75.4
Längenhöhen-Index	76.5	70.8	71.5	70.6
Ohrhöhen-Index	62.9	60.1	60.3	62.6
Hinterhaupts-Index	31.1	30.3	29.6?	—
Orbital-Index	87.1	—	—	—
Nasen-Index	44.4	—	—	—
Gaumen-Index	78.7	—	—	—

34. Über die Entwickelung der Urethra und des Dammes beim Menschen.

Von Dr. W. Nagel
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Waldeyer am 23. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XXXVIII]; — ausgegeben am 30. Juli.)

Als ich vor etwa drei Jahren die Ergebnisse meiner Untersuchungen über die Entwickelung der äusseren Genitalien beim Menschen (siehe Sitzungsberichte von 1888) veröffentlichte, musste ich mehrere Fragen offen lassen, weil es mir damals an genügenden Embryonen einer bestimmten Entwickelungsperiode fehlte, innerhalb welcher sich die wichtigsten Bildungsvorgänge an der Urethra und dem Damme abspielen. Seitdem ist es mir nun durch die Freundlichkeit des Hrn. Prof. Gusserow gelungen, eine grössere Anzahl menschlicher Embryonen der erwähnten Entwickelungsstufe zu sammeln und für meine Zwecke zu verwerthen. Das Ergebniss dieser Untersuchungen, welche im I. anatomischen Institut zu Berlin ausgeführt worden sind, ist kurz folgendes: Bei Embryonen von 11—13^{mm} Länge sieht man bei Betrachtung des Schwanzendes durch die Loupe zunächst eine längsovale Grube, welche etwa von der Basis des Steisshöckers bis zur Spitze des Geschlechtshöckers sich erstreckt, und deren Ränder verdickt sind. In den meisten Fällen wird die Grube von dem spitz zulaufenden frei hervorragenden, 1—2^{mm} langen Steisshöcker überdeckt, so dass man diesen vorsichtig abtragen muss, will man die erwähnte Grube vollkommen überblicken. An sagittalen Längsschnitten durch solche Embryonen erhält man zunächst eine Bestätigung dieses Befundes: wir haben eine einzige Grube vor uns, welche etwa in der Mitte am tiefsten ist und, allmählich flacher und enger werdend, bis zur Spitze des Geschlechtshöckers reicht (Fig. 1, Cloake). In diese Grube münden hinten der Darm, vor diesem der Sinus Urogenitalis, oder Canalis urogenitalis, wie Rathke ihn besser benennt (Fig. 1, 2). Zwischen beiden befindet sich ein etwa 0^{mm}.3 dickes Septum (S). Da nun, wie ich früher (Über die Entwickelung des Uterus und der Vagina beim Menschen, s. diese Sitzungsberichte 1890), nachgewiesen habe, um diese Zeit der Geschlechtsstrang (die Wolff'schen und Müller'schen Gänge) hoch oben in den Canalis Urogenitalis einmündet (a, Fig. 1), so kommen der Geschlechtsstrang, bez. dessen beide Gänge, bei Beschreibung der Grube zunächst nicht in Betracht. Es münden also auf dieser Entwickelungsstufe nur zwei Kanäle (der Darm und der Canalis Urogenitalis) in die Grube ein, welche, wenn man die Verhältnisse beim Erwachsenen zum Vergleiche heranzieht, von dem hinteren Rande des Anus bis zum vorderen Rande der Urethralmündung (bez. bis zum Frenulum klitoridis; siehe unten) reichen würde. Die Grube verhält sich vollkommen gleich bei beiden Geschlechtern; an den äusseren Genitalien allein würde man also um diese Zeit (bei Embryonen von 11—13^{mm}) nicht unterscheiden können, ob man ein weibliches oder männliches Individuum vor sich hat.

Alsbald vollziehen sich aber an der erwähnten Grube (Cloake) merkliche Veränderungen, indem die epithelialen Wände ihres vorderen Theiles sich dicht aneinanderlegen und mit einander vollkommen verkleben. Hierbei kommt es zu einer gewissen Überproduction von Epithel, indem man äusserlich in der ganzen Ausdehnung der verklebten Stelle einen länglichen schmalen Wulst bemerkt (siehe auch: Tourneux sur le Développement et l'évolution du tubercule génital chez le foetus humain dans les deux sexes. Journal de l'Anatomie et de la Physiologie. Paris 1889), welcher in der Regel auf der Spitze des Geschlechtshöckers mit einem Epithelhörnchen endet. Zu den Figuren entspricht dieses Verklebungsgebiet der Strecke von dem Punkte y bis zur Spitze des Geschlechtshöckers. In Fig. 3 ist sie durch die Schraffirung angedeutet, in Fig. 1 und 2 ist die Schraffirung weggelassen.

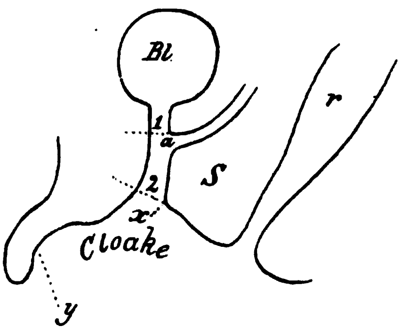


Fig. 1.

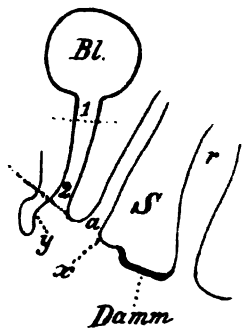


Fig. 2.

Dieser eben geschilderte Vorgang findet in gleicher Weise bei beiden Geschlechtern statt und, wie spätere Entwickelungsstufen lehren, wird der verklebte Theil der Grube zu demjenigen Abschnitte der Urethra, welcher innerhalb der Glans Penis, bez. — jedoch nur bis zu einer gewissen Entwickelungsstufe — innerhalb der Glans Klitoridis verläuft. Wir haben also um diese Zeit der Entwickelung, sowohl in der Anlage des Penis als in der Anlage der Klitoris ein mit einem soliden Epithelstrange ausgefülltes Rohr, welches an seiner ventralen Fläche einen Längsschlitz besitzt, durch welchen der im Rohre befindliche Epithelstrang mit dem äusseren Epithel in Verbindung steht.

Nur beim Manne entwickelt aber sich dieser Abschnitt weiter, indem es hier — bei Embryonen von 6—7^{cm} Rumpflänge — am Schlitz-Rande dieser epithelialen Furche zur Bildung einer Gewebsbrücke kommt, welche die Furche zu einem an beiden Enden offenen Rohre abschliesst. Beim Weibe bleibt diese Gewebsbildung aus, der Schlitz bleibt offen und verkleinert sich allmählich, um mit der Rückbildung der Glans Klitoridis, welche auf frühen Entwickelungsstufen der männlichen Glans an Grösse fast gleichkömmt, ganz zu verschwinden.

Da wo die Verklebung der Grube proximalwärts ein Ende hat, weichen die Ränder derselben auf kurzer Strecke auseinander und es besteht hier bei beiden Geschlechtern eine rautenförmige Erweiterung (y), welche ziemlich lange bestehen bleibt; spätere Entwickelungsstufen lehren, dass die rautenförmige Erweiterung an der Basis der Glans ihren Platz hat (s. unten).

Soweit wäre die Entwickelung der Grube (Cloake) bei beiden Geschlechtern gleich; von nun an tritt aber ein grosser Unterschied ein, indem die Grube (mit Ausnahme der oben erwähnten rautenförmigen Erweiterung) sich bei männlichen Individuen noch weiter schliesst. In Fig. 3 ist dieser weitere Verschluss wiederum durch Schraffirung angedeutet (auf der Strecke von y—x), und der dadurch gebildete Theil der Harnröhre (3) lehnt sich unmittelbar an den Eichel-Theil an; an der Grenze beider Theile (bei y) besteht zu dieser Zeit noch die ventralwärts sich öffnende rautenförmige Erweiterung.

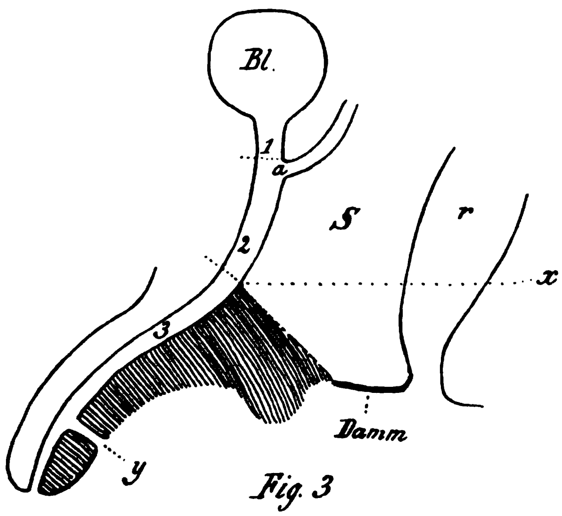


Fig. 3

Bei weiblichen Individuen bleibt hingegen dieser Theil der Cloakengrube offen.

Gleichzeitig treten bei weiblichen Embryonen in dem mittleren Theile der Grube erhebliche Änderungen ein, welche dadurch hervorgerufen werden, dass der distale Abschnitt des Geschlechtsstranges (die spätere Vagina) auffallend in die Länge wächst, wodurch der Canalis Urogenitalis, da er im Wachsthum zurückbleibt, allmählich kürzer wird; somit rückt der Geschlechtsstrang, genauer gesagt, der Müller'sche Gang mit seinen Wandungen (da der Wolff'sche Gang atrophirt und zurückbleibt), dem Boden der Grube stets näher, um schliesslich in dieselbe einzumünden, bei *a* in Fig. 2. Ist dieses geschehen, so sehen wir also beim Weibe (Fig. 2) drei Kanäle in die Grube einmünden, nämlich (von hinten nach vorne gezählt): Darm, Geschlechtsgang (Müller'scher Gang) Urethra. Hierbei muss man sich jedoch vergegenwärtigen, dass inzwischen die Grube im Ganzen flacher geworden ist und dass gleichzeitig in ihrem hinteren Theile die Dammbildung (s. unten) vor sich geht.

Beim Manne bleibt nur der hinterste Theil der Grube offen und bildet den Anus; im übrigen verschwindet die Grube. Das Verschwinden derselben wird in ihrem mittleren, der weiblichen Schamspalte entsprechenden Theile durch eine wirkliche mediane Verwachsung ihrer Wände bewirkt; in Folge dessen sieht man noch bei männlichen Embryonen von 7—8$^{\text{cm}}$ Rumpflänge eine deutliche mediane Scheidewand durch die Scrotalanlange und das corpus cavernosum urethrae hindurch bis zum Boden der Urethra sich erstrecken (s. Schraffirung in Fig. 3). Dieses Septum findet sich, wie ich ausdrücklich hervorheben will, nur in diesem genannten Theile der Grube, welcher, wie bemerkt, der Rima pudendalis entspricht; wir finden es nicht am Damm. Der Verschluss des Restes der Grube ist wieder bei beiden Geschlechtern derselbe und wird alsbald bei der Dammbildung besprochen werden.

Die vorhin erwähnte rautenförmige Erweiterung an der Basis der Glans (*y*, Fig. 3) ist beim Manne der letzte Abschnitt des Geschlechtsspaltes, welcher sich schliesst; der Epithelpfropf mit dem oben erwähnten Hörnchen, welcher bis dahin den Eichel-Theil der Urethra ausgefüllt hat, wird weggeschwemmt und das Uriniren geschieht jetzt auf natürlichem Wege; bleibt aus irgend einer Ursache die rautenförmige Erweiterung offen, so entsteht Hypospadie. Beim Weibe bleibt selbstredend die rautenförmige Erweiterung zeitlebens bestehen und bildet den zwischen Frenulum klitoridis und Orificium urethrae belegenen Theil des Vestibulum, welcher vielleicht passend mit dem Namen »Fossa navicularis anterior« belegt werden könnte (*y*, Fig. 2).

Die Entwickelung der Harnröhre beim Manne und Weibe bietet demnach Übereinstimmungen und Verschiedenheiten dar. Homolog sind bei der fertigen Harnröhre erwachsener Personen die proximalen zunächst der Blase gelegenen Abschnitte (1 in Fig. 1—3). Die Bildung dieses proximalen Abschnittes (1 in den Figuren) ist eng mit der Entwickelungsgeschichte der Harnblase verknüpft, auf welche ich, anlässlich der jüngsten Mittheilungen KEIBEL's (Anatomischer Anzeiger 1891), später ausführlich einzugehen gedenke. Der erwähnte Abschnitt der Harnröhre wird nämlich durch das Hinaufrücken der Ureterenmündung gebildet, welche, wie ich an einem anderen Orte (Über die Entwickelung des Urogenitalsystems des Menschen. Archiv f. mikroscopische Anatomie Bd. 34. 1889. S. 275, 280 u. 368) dargelegt habe, ursprünglich in gleicher Höhe mit den Mündungsstellen der WOLFF-schen Gänge liegen. Während aber beim Manne dieser Abschnitt sich vom folgenden durch eine scharfe Grenze — Mündungsstelle der ductus ejaculatorii — trennt, (bei *a* in Fig. 1 u. 3) verwischt sich beim Weibe diese Grenze, da die Mündung des Geschlechtskanales herabrückt, um später in das vestibulum auszumünden (*a* in Fig. 2).

Der folgende Abschnitt (2) ist anfangs bei beiden Geschlechtern gleich angelegt (s. Fig. 1); er umfasst beim erwachsenen Manne den distalen Theil der pars prostatica und die pars membranacea bis zum Eintritt der Harnröhre in das corpus cavernosum urethrae, beim Weibe den ganzen Rest der Röhre bis zur Mündung. Es ist dieser Theil der ursprüngliche canalis urogenitalis. Beim Manne behält er den Charakter als urogenitaler Kanal, beim Weibe verliert er ihn, indem ja, wie wiederholt bemerkt, der Geschlechtsgang während seines Herabrückens ganz aus dem Verbande mit der Harnröhre ausscheidet (s. Fig. 2).

Der dritte oder cavernöse Abschnitt der Harnröhre ist, wie wir sahen, ebenfalls bei beiden Geschlechtern in gleicher Weise angelegt, wenigstens in seinem vorderen glandulären Theile. Während er aber beim Weibe zeitig schwindet, entwickelt er sich beim Manne gleichen Schrittes mit der Ausbildung des Geschlechtsgliedes zum ansehnlichsten Theile des Kanales.

Zum Studium der Bildung des Dammes eignen sich am besten frontale Längsschnitte. An solchen von jüngeren Embryonen erkennt man im Bereiche des späteren Dammes die erwähnte Kloaken-Grube als eine $0^{mm}.16$—$0^{mm}.6$ tiefe Furche, deren schräg nach der Mitte zu abfallende Wände eine beträchtliche Verdickung ihres Epithels zeigen. Diese Verdickung betrifft jedoch nur die äussere epidermoidale Lage, deren cubische Zellen mehrfach geschichtet sind, während die tiefe, aus Cylinderzellen bestehende Lage einreihig bleibt. An einzelnen Stellen berühren die gegenüberliegenden Epithelverdickungen einander und da der obige Befund sich bei allen Embryonen in gleicher Weise wiederholt, so ist gewiss der Schluss berechtigt, dass die erwähnten Epithelwülste den Schluss der Grube herbeiführen indem sie mit einander verwachsen. Obwohl ich damit keineswegs für ausgeschlossen halte, dass ein Emporwachsen der tiefer liegenden Gewebe zur Abflachung der Grube beitrage, so bin ich doch der Meinung dass der Damm im engeren Sinne des Wortes (also die oberflächliche Schicht) durch Zusammenwachsung der beiden Seitenwände der Grube gebildet wird. Die Bildung des Perineums im weiteren Sinne des Wortes (also einschliesslich des Septum recto-urogenitale — so ist es in den frühen Stadien und später bei männlichen Embryonen zu nennen, *S*, in den Figuren — oder des Septum recto-vaginale bei älteren weiblichen Embryonen) geschieht also theils — und das ist die erste Entwickelungsstufe — durch Tieferwachsen des Septum recto-urogenitale, theils — und dies geschieht in etwas späteren Entwickelungsperioden — durch Zusammenwachsung zweier seitlicher Wülste. Ich schliesse mich also, was den Menschen betrifft, der Ansicht Rathke's über die Bildung des Dammes bei verschiedenen Wirbelthieren an, welche auch neuerdings — im Gegensatz zu Tourneux (sur le mode de formation du Perinée chez l'embryon du mouton par abaissement d'un repli périnéal unique. Journal des Sociétés scientifiques. 1890. No. 9. S. 84) — von Retterer (sur l'origine et l'evolution de la Région ano-genitale des mammifères. Journal de l'anatomie et de la Physiologie. Paris 1890), ebenfalls bei Thieren, bestätigt worden ist.

Dagegen vermag ich den von Reichel (die Entwickelung des Dammes und ihre Bedeutung für die Entstehungsweise gewisser Missbildungen. Zeitschrift für Geburtshülfe und Gynäkologie Bd. 14) benannten Analhöckern keine Bedeutung bei Bildung des Dammes beizumessen. Dieselben finden sich ziemlich regelmässig bei jüngeren Embryonen, theils sitzen sie aber zu weit hinten, theils sind sie noch deutlich vorhanden, nachdem der Damm längst fertig ist.

Beim Zusammenwachsen der beiden seitlichen Wülste findet, ähnlich wie im Bereich der Glans (s. oben), eine Überproduction von Gewebe statt, so dass man bei Betrachtung der Genitalgegend durch die Loupe nach Fertigstellung des Dammes anstatt der Furche eine deutliche Firste sieht, welche vom Anus bis zum Vestibulum, bez. über den Hodensack hinweg bis zur obenerwähnten rautenförmigen Grube hinzieht, und welche erst allmählich verschwindet.

Durch die hier geschilderten Entwickelungsvorgänge lassen sich ungezwungen alle vorkommende Missbildungen an den äusseren

Genitalien erklären, so auch die jüngst von FROMMEL (Zwei seltene Bildungsanomalien der weiblichen Genitalien. Münchener Medicinische Wochenschrift 1890. Nr. 15. S. 263) und SCHAUTA (Vollkommene Cloakenbildung bei gleichzeitiger regelmässiger Ausmündung des Darmes und der Harnröhre. Archiv f. Gynäkologie. Band 39. 1891. S. 484) beschriebenen. Bei der von SCHAUTA behandelten Patientin hat es sich offenbar um ein mangelhaftes Herabwachsen des distalen Abschnittes des Geschlechtsstranges (SCHAUTA stellte auch eine Atresia vaginae fest) gehandelt. In Folge dessen lag die Mündung der Urethra tiefer im Vestibulum als gewöhnlich; ausserdem hat im Bereiche des Geschlechtshöckers eine Verwachsung der Ränder des Geschlechtsspaltes stattgefunden, welches sonst nur beim männlichen Geschlecht geschieht, und dies zu Bildung einer kurzen Urethra distalwärts von der ursprünglichen Urethralmündung geführt. Die widernatürliche Verbindung zwischen Vestibulum und Rectum lässt sich dadurch erklären, dass nur in dem oberen Theile eine Verwachsung der beiden seitlichen Wülste stattgefunden hat, während die Grube in der Tiefe offen blieb, wozu noch das durch die mangelhafte Entwickelung der Vagina gehemmte Tieferwachsen des Septum recto-vaginale beigetragen hat.

35. Die Clausius'schen Coordinaten.

Von L. Kronecker.

(Vorgetragen am 30. Juli: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XL]: — ausgegeben am 20. August.)

Gegenüber der Gauss'schen Methode der Herleitung der Poisson'schen Potentialgleichung hat, wie ich bereits am Schlusse meiner im Monatsbericht vom März 1869 abgedruckten Mittheilung hervorgehoben habe, diejenige, welche von Clausius angegeben worden ist, den wesentlichen Vorzug, dass sie geringerer Voraussetzungen bezüglich der Dichtigkeits-Function bedarf.[1] Sie hat überdies den formalen Vorzug, dass sie sich besonderer Coordinaten bedient, welche der Natur der Aufgabe besser angepasst erscheinen, als die gewöhnlichen rechtwinkligen Raumcoordinaten. Ich habe diese Clausius'schen Coordinaten, aber etwas modificirt, schon bei meinen Untersuchungen im Winter 1868/9 auf die Behandlung von Potentialen n-facher Mannigfaltigkeiten und seitdem auch bei anderen Entwickelungen, z. B. bei meinem im Monatsbericht vom Juli 1880 gegebenen Beweise des Cauchy'schen Satzes, mit Erfolg angewendet, und ich will nun hier zeigen, wie einfach und natürlich sich bei Einführung der Clausius-schen Coordinaten die Herleitung der Poisson'schen Gleichung für Potentiale n-facher Mannigfaltigkeiten gestaltet. Die Übertragung von den gewöhnlichen Potentialen räumlicher Massen auf solche n-facher Mannigfaltigkeiten bietet nämlich einerseits keinerlei Schwierigkeiten, andererseits den Vortheil des Zwanges zu formalen Vereinfachungen, und dass dabei die räumliche Interpretation der analytischen Entwickelungen wegfällt, ist kein Nachtheil. Denn die Anschaulichkeit ist wohl höchst werthvoll beim Erforschen und beim Erlernen, nicht aber beim Erklären und beim Erweisen; ihr subjectives Element beeinträchtigt zuweilen die Gründlichkeit der Erklärungen und die Strenge der Beweise.

I.

Ich bezeichne, wie in meinem Aufsatze »über Potentiale n-facher Mannigfaltigkeiten«[2] zur Abkürzung mit:

[1] Clausius selbst hat bei seiner Herleitung der Poisson'schen Potentialgleichung keinerlei Bemerkung über den erwähnten Vorzug gemacht.

[2] In memoriam Dominici Chelini. Collectanea Mathematica 1881, p. 224.

$$\mathfrak{P}(z_1, z_2, \ldots z_n; \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)$$

oder noch einfacher mit:

$$\mathfrak{P}(z, \zeta)$$

das »elementare Potential« der Punkte (z) und (ζ) einer n-fachen Mannigfaltigkeit, und es ist hiernach:

$$\mathfrak{P}(z, \zeta) = \frac{1}{n-2}\left(\sum_k (z_k - \zeta_k)^2\right)^{-\frac{1}{2}(n-2)} \qquad (k = 1, 2, \ldots n).$$

Es ist ferner das über ein Gebiet $F_0(z_1, z_2, \ldots z_n) < 0$ erstreckte n-fache Integral:

$$\int \mathfrak{F}(z_1, z_2, \ldots z_n)\, \mathfrak{P}(z, \zeta)\, dv$$

das Potential der mit der Dichtigkeit $\mathfrak{F}$ erfüllten n-fachen Mannigfaltigkeit $F_0 < 0$ in Beziehung auf den Punkt (ζ), wenn — wie in meinem oben erwähnten Aufsatze vom März 1869 — das Element der n-fachen Mannigfaltigkeit $dz_1 dz_2 \ldots dz_n$ mit dv bezeichnet wird.

Dabei kann unbeschadet der Allgemeinheit angenommen werden, dass der Punkt (ζ) innerhalb des Gebietes $F_0 < 0$ liegt, dass also die Ungleichheit stattfindet:

$$F_0(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n) < 0;$$

denn anderenfalls könnte das Gebiet weiter ausgedehnt und die Dichtigkeitsfunction $\mathfrak{F}$ in dem hinzugenommenen Gebiete gleich Null angenommen werden.

Setzt man nun noch:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}(z, \zeta)}{\partial z_k} = \mathfrak{P}_k(z, \zeta) \qquad (k = 1, 2, \ldots n),$$

so ist:

$$\mathfrak{P}_k(z, \zeta) = -(z_k - \zeta_k)\left(\sum_h (z_h - \zeta_h)^2\right)^{-\frac{1}{2}n} \qquad (h, k = 1, 2, \ldots n)$$

und:

$$\frac{\partial \mathfrak{P}(z, \zeta)}{\partial \zeta_k} = -\mathfrak{P}_k(z, \zeta).$$

Die Integrale, welche den Attractionscomponenten entsprechen, sind hiernach:

$$-\int \mathfrak{F}(z_1, z_2, \ldots z_n)\, \mathfrak{P}_k(z, \zeta)\, dv \left(\text{über } F_0(z_1, z_2, \ldots z_n) < 0 \text{ erstreckt}\right),$$
$$(k = 1, 2, \ldots n),$$

und sie sollen zur Abkürzung mit:

$$\mathrm{Pot}_k(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n)$$

oder auch einfach mit Pot_k bezeichnet werden. Die POISSON'sche Potentialgleichung lässt sich alsdann folgendermaassen darstellen:

$$\text{(A)} \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \mathrm{Pot}_k}{\partial \zeta_k} = -\varpi \mathfrak{F}(\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n),$$

wo Pot_k durch die Gleichung:

$$\text{(B)} \qquad \mathrm{Pot}_k = -\int_{(F_0(z_1, z_2, \ldots z_n) < 0)} \mathfrak{F}(z_1, z_2, \ldots z_n)\, \mathfrak{P}_k(z, \zeta)\, dv \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

definirt ist und ϖ, wie in meinem citirten Aufsatz vom März 1869, den Inhalt der $(n-1)$-fachen, aus der n-fachen Mannigfaltigkeit $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ ausgeschiedenen sphaerischen Mannigfaltigkeit:

$$\sum_{k=1}^{k=n} z_k^2 = 1$$

bedeutet.

II.

Die Grösse ϖ ist schon von JACOBI bestimmt worden;[1] sie ergiebt sich aber auch in einfacher Weise aus der DIRICHLET'schen Integralformel:[2]

$$\Gamma\left(1 + \frac{m_1}{p_1} + \frac{m_2}{p_2} + \ldots + \frac{m_n}{p_n}\right) \cdot \int_{(k=1,2,\ldots n)} \prod_k z_k^{m_k - 1}\, dz_k = \prod_k \frac{a_k^{m_k}}{p_k} \Gamma \frac{m_k}{p_k},$$

in welcher die Integration über alle positiven, der Bedingung:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{z_k}{a_k}\right)^{p_k} < 1$$

genügenden Werthe von $z_1, z_2, \ldots z_n$ zu erstrecken ist.

Nimmt man nämlich für alle n Werthe des Index k:

$$a_k = 1, \quad m_k = 1, \quad p_k = 2,$$

so resultirt für das über die gesammte n-fache Mannigfaltigkeit $\sum_{k=1}^{k=n} z_k^2 < 1$ erstreckte Integral $\int dv$ einerseits aus der angeführten DIRICHLET'schen

---

[1] De binis quibuslibet functionibus homogeneis secundi ordinis per substitutiones lineares in alias binas transformandis, quae solis quadratis variabilium constant; una cum variis theorematis de transformatione et determinatione integralium multiplicium. CRELLE's Journal, Bd. XII, S. 60. JACOBI's gesammelte Werke, Bd. III, S. 257, 258.

[2] Über eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale. Abhandlungen der Akademie von 1839. G. LEJEUNE DIRICHLET's Werke, Bd. I, S. 393. Die Formel findet sich auf S. 399; ich habe aber die Bezeichnungen hier etwas verändert.

Formel der Werth:

$$\frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{n\,\Gamma\frac{1}{2}n},$$

andererseits ergiebt sich dafür mit Hülfe von Polarcoordinaten:

$$z_k = ru_k, \quad \sum_k u_k^2 = 1 \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

der Werth:

$$\frac{1}{n}\int\frac{du_1\,du_2\ldots du_{n-1}}{u_n} \text{ (erstreckt über } \sum_{k=1}^{k=n} u_k^2 = 1),$$

oder also, nach der obigen Bezeichnungsweise:

$$\frac{\varpi}{n}.$$

Man erhält also zur Bestimmung des Werthes der Grösse ϖ die Gleichung:

$$\varpi = \frac{2\pi^{\frac{1}{2}n}}{\Gamma\frac{1}{2}n},$$

und die Jacobi'sche Bestimmung geht hieraus hervor, wenn man für $\Gamma\frac{1}{2}n$ seinen Werth einsetzt.

III.

Bezeichnet man die der Gleichung $F_0 = 0$ genügenden Werthsysteme von $z_1, z_2, \ldots z_n$ mit:

$$z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0$$

und mit t eine unabhängige reelle Variable, so kann man mittels der n Gleichungen:

$$\text{(C)} \qquad z_k = z_k^0 - t\,(z_k^0 - \zeta_k) \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

an Stelle der n Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_n$ die $n+1$ Variabeln:

$$t, z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0$$

einführen, von denen die letzten n wegen der Gleichung:

$$F_0(z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0) = 0$$

nur die Stelle von $n-1$ Variabeln vertreten. Die $n+1$ Variabeln:

$$t, z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0$$

können also auf Grund der Gleichungen (C) als Coordinaten des bezüglichen Punktes $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ aufgefasst und nach dem, was ich in der Einleitung angeführt habe, als »Clausius'sche Coordinaten« bezeichnet werden.

Irgend ein n-faches Integral:

$$\int \Phi(z_1, z_2, \ldots z_n)\, dv \quad \left(\text{erstreckt über } F_0(z_1, z_2, \ldots z_n) < 0\right)$$

geht bei Einführung der Clausius'schen Coordinaten in folgendes über:

$$\text{(D)} \qquad \int_0^1 (1-t)^{n-1}\, \Phi\left(z_1^0 - t(z_1^0 - \zeta_1), \ldots\right) dt \int \sum_{k=1}^{k=n} (z_k^0 - \zeta_k) F_{0k} \frac{dw}{\mathfrak{S}},$$
$$(F_0(z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0) = 0)$$

und hier bedeutet — wie in meinem mehrfach erwähnten Aufsatz vom März 1868 — F_{0k} die Ableitung von F_0 nach z_k, ferner $\mathfrak{S}$ den absoluten Werth der Quadratwurzel aus der Summe:

$$\sum_{k=1}^{k=n} F_{0k}^2$$

und endlich dw das durch die Gleichung:

$$|F_{0n}|\, dw = \mathfrak{S} \cdot dz_1^0\, dz_2^0 \ldots dz_{n-1}^0$$

definirte Element der $(n-1)$-fachen Mannigfaltigkeit F_0. Dieses Element erhält man, wenn man für den Punkt $(z_1^0, z_2^0, \ldots z_n^0)$ und $n-1$ unendlich benachbarte Punkte der Mannigfaltigkeit $F_0 = 0$ irgend einen Punkt $(z_1, z_2, \ldots z_n)$ wählt, dessen »Entfernung« vom Punkte (z^0):

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{k=n} (z_k - z_k^0)^2}$$

dieselbe ist wie die von jedem der $n-1$ benachbarten Punkte, und wenn man alsdann den »Inhalt« des durch die $n+1$ Punkte bestimmten Prismatoids durch jene Entfernung dividirt.[1]

IV.

Führt man auf der rechten Seite der Gleichung (B) an Stelle der Integrationsvariabeln z die Clausius'schen Coordinaten ein, so erhält man mit Hülfe der allgemeinen Transformationsformel (D) und der aus (C) resultirenden Gleichung:

$$\mathfrak{P}_k(z, \zeta) = (1-t)^{1-n}\, \mathfrak{P}_k(z^0, \zeta)$$

das Resultat:

---

[1] Vergl. art. V meines im Monatsbericht vom März 1869 abgedruckten Aufsatzes. Dass dort der Punkt (z) in's Unendliche rückend angenommen wird, ist überflüssig.

$$(\mathrm{E})\qquad \mathrm{Pot}_k = -\int_0^1 \mathfrak{F}\left(z_1^0 - t\,(z_1^0 - \zeta_1), \ldots\right) dt \int \mathfrak{P}_k(z^0, \zeta) \sum_{i=1}^{i=n} (z_i^0 - \zeta_i)\, F_{0i} \frac{dw}{\mathfrak{S}},$$

$$\left(F_0(z_1^0, \ldots z_n^0) = 0\right)$$

welches sich, wenn zur Abkürzung:

$$\zeta_k - z_k^0 = \mathfrak{z}_k \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

und:

$$(\mathrm{F})\qquad \int_0^t \mathfrak{F}(z_1^0 + t\mathfrak{z}_1, \ldots)\, dt = \mathfrak{D}(\mathrm{t}, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n;\; z_1^0, \ldots z_n^0)$$

gesetzt wird, in folgender Weise darstellen lässt:

$$(\mathrm{E}')\qquad \mathrm{Pot}_k(\zeta_1, \ldots \zeta_n) = \int \mathfrak{D}(1, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n;\; z_1^0, \ldots z_n^0)\, \mathfrak{P}_k(z^0, \zeta) \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{z}_i F_{0i} \frac{dw}{\mathfrak{S}}.$$

$$\left(F_0(z_1^0, \ldots z_n^0) = 0\right)$$

Nun besteht für die mit $\mathfrak{D}$ bezeichnete Function die Relation:

$$(\mathrm{G})\qquad \mathfrak{D}(\mathrm{t}, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n;\; z_1^0, \ldots z_n^0) = \mathrm{t}\,\mathfrak{D}(1, \mathrm{t}\mathfrak{z}_1, \ldots \mathrm{t}\mathfrak{z}_n;\; z_1^0, \ldots z_n^0)$$

und also auch die folgende:

$$(\mathrm{G}')\qquad \frac{\partial \mathfrak{D}(\mathrm{t}, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; \ldots)}{\partial \mathrm{t}} = \mathfrak{D}(1, \mathrm{t}\mathfrak{z}_1, \ldots \mathrm{t}\mathfrak{z}_n; \ldots) + \mathrm{t} \sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{z}_k\, \mathfrak{D}_k(1, \mathrm{t}\mathfrak{z}_1, \ldots \mathrm{t}\mathfrak{z}_n; \ldots),$$

vorausgesetzt, dass partielle Ableitungen der Function $\mathfrak{D}(\mathrm{t}, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; \ldots)$ nach jeder der Variabeln $\mathfrak{z}$ existiren, und dass der nach t genommene Differentialquotient des Ausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung (G) auf die in (G′) angegebene Weise gebildet werden kann, d. h. also unter der Voraussetzung:

$$(\mathrm{H})\qquad \frac{\partial \mathfrak{D}(1, \mathrm{t}\mathfrak{z}_1, \ldots \mathrm{t}\mathfrak{z}_n; \ldots)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{z}_k\, \mathfrak{D}_k(1, \mathrm{t}\mathfrak{z}_1, \ldots \mathrm{t}\mathfrak{z}_n; \ldots),$$

wo die Function $\mathfrak{D}_k$ durch die Gleichung:

$$\frac{\partial \mathfrak{D}(\mathrm{t}, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; \ldots)}{\partial \mathfrak{z}_k} = \mathfrak{D}_k(\mathrm{t}, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; \ldots)$$

definirt ist.

Unter derselben Voraussetzung kommt, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung (G) einerseits nach t, andererseits nach $\mathfrak{z}_k$ differentiirt:

$$(\mathrm{H}')\qquad \mathfrak{D}_k(\mathrm{t}, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; \ldots) = \mathrm{t}^2\, \mathfrak{D}_k(1, \mathrm{t}\mathfrak{z}_1, \ldots \mathrm{t}\mathfrak{z}_n; \ldots),$$

$$(\mathrm{H}'')\qquad \frac{\partial \mathfrak{D}(\mathrm{t}, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; \ldots)}{\partial \mathrm{t}} = \mathfrak{D}(1, \mathrm{t}\mathfrak{z}_1, \ldots \mathrm{t}\mathfrak{z}_n; \ldots) + \mathrm{t} \sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{z}_k\, \mathfrak{D}_k(1, \mathrm{t}\mathfrak{z}_1, \ldots \mathrm{t}\mathfrak{z}_n; \ldots),$$

und mit Benutzung der drei Relationen (H), (H′), (H″) lässt sich die Gleichung (G′) in folgende transformiren:

$$\text{(K)}\qquad \sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{z}_k \mathfrak{D}_k(\mathfrak{t}, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; \ldots) = \mathfrak{t}\,\frac{\partial \mathfrak{D}(\mathfrak{t}, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; \ldots)}{\partial \mathfrak{t}} - \mathfrak{D}(\mathfrak{t}, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; \ldots).$$

Um den nach ζ_k genommenen partiellen Differentialquotienten der mit Pot_k bezeichneten Function der Grössen ζ zu bilden, kann man auf der rechten Seite der Gleichung (E′) unter dem Integralzeichen differentiiren, da die Elemente des über eine nur $(n-1)$-fache, den Punkt $(\zeta_1, \ldots \zeta_n)$ umschliessende Mannigfaltigkeit $F_0 = 0$ erstreckten Integrals durchweg endlich sind. Der Differentialquotient:

$$\frac{\partial\, \mathrm{Pot}_k}{\partial \zeta_k}$$

setzt sich hiernach aus folgenden drei Theilen zusammen:

$$(\mathrm{J}_1)\qquad \int \mathfrak{D}_k(1, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; z_1^0, \ldots z_n^0)\, \mathfrak{P}_k(z^0, \zeta) \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{z}_i F_{0i} \frac{dw}{\mathfrak{S}},$$

$$(\mathrm{J}_2)\qquad \int \mathfrak{D}(1, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; z_1^0, \ldots z_n^0)\, \mathfrak{P}_k(z^0, \zeta)\, F_{0k} \frac{dw}{\mathfrak{S}},$$

$$(\mathrm{J}_3)\qquad \int \mathfrak{D}(1, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; z_1^0, \ldots z_n^0) \frac{\partial \mathfrak{P}_k(z^0, \zeta)}{\partial \zeta_k} \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{z}_i F_{0i} \frac{dw}{\mathfrak{S}},$$

in welchen die Integrationen über die Mannigfaltigkeit $F_0(z_1^0, \ldots z_n^0) = 0$ zu erstrecken sind.

Summirt man über alle Werthe $k = 1, 2, \ldots n$, so fällt wegen der Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \mathfrak{P}_k(z^0, \zeta)}{\partial \zeta_k} = 0$$

das Aggregat der n Integrale (J_3) fort. Das Aggregat der n Integrale (J_1) lässt sich, mit Rücksicht auf die Bedeutung von $\mathfrak{z}_k$, d. h. also auf die Gleichung:

$$\mathfrak{z}_k = \zeta_k - z_k^0 \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

und die daraus hervorgehende Relation:

$$\mathfrak{z}_i \mathfrak{P}_k = \mathfrak{z}_k \mathfrak{P}_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots n),$$

zuvörderst in folgender Weise darstellen:

$$\int \sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{z}_k \mathfrak{D}_k(1, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; \ldots) \sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{P}_k(z^0, \zeta) F_{0k} \frac{dw}{\mathfrak{S}},$$
$$\big(F_0(z_1^0, \ldots z_n^0) = 0\big)$$

und dann, bei Anwendung der obigen Gleichung (K), als Differenz zweier Integrale $J' - J''$, wo:

$$J' = \int\left(\frac{\partial \mathfrak{D}(\mathrm{t}, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n, \ldots)}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\mathrm{t}=1} \sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{P}_k(z_0, \zeta) F_{0k} \frac{dw}{\mathfrak{S}},$$
$$\left(F_0(z_1^0, \ldots z_n^0) = 0\right)$$

$$J'' = \int \mathfrak{D}(1, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; \ldots) \sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{P}_k(z^0, \zeta) F_{0k} \frac{dw}{\mathfrak{S}}.$$
$$\left(F_0(z_1^0, \ldots z_n^0) = 0\right)$$

Das Aggregat der n Integrale (J_2) ist mit dem Integrale (J'') identisch. Somit ergiebt sich das einfache Resultat:

$$\text{(L)} \quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \mathrm{Pot}_k}{\partial \zeta_k} = \int\left(\frac{\partial \mathfrak{D}(\mathrm{t}, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; \ldots)}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\mathrm{t}=1} \sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{P}_k(z^0, \zeta) F_{0k} \frac{dw}{\mathfrak{S}},$$
$$\left(F_0(z_1^0, \ldots z_n^0) = 0\right)$$

welches sich, wegen der in der Gleichung (F) enthaltenen Definition der Function $\mathfrak{D}$ auch so darstellen lässt:

$$\text{(L')} \quad \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \mathrm{Pot}_k}{\partial \zeta_k} = \mathfrak{F}(\zeta_1, \ldots \zeta_n) \int \sum_{k=1}^{k=n} \mathfrak{P}_k(z^0, \zeta) F_{0k} \frac{dw}{\mathfrak{S}}.$$
$$\left(F_0(z_1^0, \ldots z_n^0) = 0\right)$$

Da bei dieser letzten Schlussfolgerung der nach t genommene Differentialquotient des Integrals:

$$\int_0^{\mathrm{t}} \mathfrak{F}\left((1-t) z_1^0 + t\zeta_1, \ldots (1-t) z_n^0 + t\zeta_n\right) dt,$$

für $\mathrm{t} = 1$, durch den Werth, welchen die zu integrirende Function für $t = 1$ annimmt, ersetzt werden ist, so muss die Dichtigkeitsfunction $\mathfrak{F}$ in dem Punkte (ζ) nach den verschiedenen Richtungen hin als stetig vorausgesetzt werden, wenigstens insoweit, dass die Ausnahmen auf das Resultat der $(n-1)$-fachen Integration auf der rechten Seite der Gleichung (L) keinen Einfluss haben.

V.

Um nunmehr noch die Übereinstimmung der Gleichung (L') mit der zu beweisenden Potentialgleichung (A) darzuthun, kann man das Gebiet $F_0 < 0$, auf welches die mit Pot_k bezeichneten Integrale:

$$\int \mathfrak{F}(z_1, \ldots z_n)\, \mathfrak{P}_k(z, \zeta)\, dv$$

zu erstrecken sind, in zwei, durch die beiden Ungleichheiten:

$$\sum_{k=1}^{k=n} (z_k - \zeta_k)^2 - \rho^2 < 0, \quad \sum_{k=1}^{k=n} (z_k - \zeta_k)^2 - \rho^2 > 0$$

charakterisirte Gebiete theilen und aber dabei ρ so klein wählen, dass für alle der Ungleichheit:

$$\sum_{k=1}^{k=n}(z_k-\zeta_k)^2-\rho^2<0$$

genügenden Grössen z auch die Ungleichheit $F_0(z_1,\ldots z_n)<0$ besteht.

Gemäss einer solchen Theilung des Gebietes $F_0<0$ sondert sich jedes Integral Pot_k in zwei andere:

$$\mathrm{Pot}_k^{(-)},\quad \mathrm{Pot}_k^{(+)},$$

von denen das erstere sich über das Gebiet:

$$\sum_{k=1}^{k=n}(z_k-\zeta_k)^2-\rho^2<0,$$

das letztere über das durch die beiden Ungleichheiten:

$$\sum_{k=1}^{k=n}(z_k-\zeta_k)^2-\rho^2>0,\quad F_0(z_1,\ldots z_n)<0$$

definirte Gebiet erstreckt. Da nun offenbar die Summe:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial\,\mathrm{Pot}_k^{(+)}}{\partial\zeta_k}$$

gleich Null ist, so kann in der Gleichung (L′) die Summe auf der linken Seite durch die Summe:

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{\partial\,\mathrm{Pot}_k^{(-)}}{\partial\zeta_n}$$

ersetzt werden. Deren Werth ist aber gemäss eben derselben Gleichung (L′), wenn darin an Stelle der Begrenzungsfunction F_0 die Function:

$$\sum_{k=1}^{k=n}(z_k-\zeta_k)^2-\rho^2$$

genommen wird, gleich $\mathfrak{J}(\zeta_1,\ldots\zeta_n)$, multiplicirt mit dem über die $(n-1)$-fache sphaerische Mannigfaltigkeit:

$$\sum_{k=1}^{k=n}(z_k-\zeta_k)^2-\rho^2=0$$

erstreckten Integral:

$$\int\sum_{k=1}^{k=n}\mathfrak{P}_k(z^0,\zeta)\,F_{0k}\frac{dw}{\mathfrak{S}},$$

und hier ist:

$$\mathfrak{P}_k(z^0,\zeta)=-\frac{z_k^0-\zeta_k}{\rho},\quad F_{0k}=2(z_k^0-\zeta_k),\quad \mathfrak{S}=2\rho.$$

Der Werth des mit $\mathfrak{F}(\zeta_1, \ldots \zeta_n)$ multiplicirten Integrals ist also gleich $-\varpi$, und es ergiebt sich daher in der That die Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \operatorname{Pot}_k^{(-)}}{\partial \zeta_k} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial \operatorname{Pot}_k}{\partial \zeta_k} = -\varpi \mathfrak{F}(\zeta_1, \ldots \zeta_n),$$

welche hergeleitet werden sollte.

Die Function $\mathfrak{D}(1, \mathfrak{z}_1, \ldots \mathfrak{z}_n; z_1^0, \ldots z_n^0)$ oder:

$$\int_0^1 F\big(z_1^0 - t(z_1^0 - \zeta_1), \ldots z_n - t(z_n^0 - \zeta_n)\big)\, dt,$$

deren Differentiirbarkeit nach den verschiedenen Variabeln ζ vorausgesetzt worden ist, kann — gemäss ihrer Bedeutung für den Fall $n = 3$ — als »die mittlere Dichtigkeit der vom Punkte (ζ) nach dem Punkte (z_0) gezogenen geraden Linie« bezeichnet werden. Da das Gebiet $F_0 < 0$ nur so, dass es den Punkt (ζ) enthält, im Übrigen aber ganz beliebig anzunehmen ist, so besteht die angegebene Voraussetzung nur darin, dass mindestens für e i n e Art der Umgebung des Punktes (ζ) die mittlere Dichtigkeit in den vom Punkte ausgehenden, bis zur Begrenzung der Umgebung gezogenen Strahlen differentiirbar sei, und diese Voraussetzung erscheint wesentlich geringer als die Gauss'sche, dass die Dichtigkeit im Punkte (ζ) selbst nach allen n Variabeln differentiirbar sein soll.

36. Die Grundform der Backzähne bei Säugethieren und die Homologie der einzelnen Höcker.

Von Dr. A. Fleischmann
in Erlangen.

(Vorgelegt von Hrn. Waldeyer am 30. Juli; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XL]; — ausgegeben am 20. August.)

Hierzu Taf. V.

Welche morphologischen Gesetze in dem Stamme der Säugethiere die Form der Backzähne beherrschen, ist trotz der grossen, von reich illustrirten Atlanten begleiteten Abhandlungen, die berühmte Odontologen in der Mitte dieses Jahrhunderts veröffentlicht haben, nicht hinreichend klar geworden. Erst vor kürzerer Zeit haben americanische Forscher begonnen, diese Frage eines genauen Studiums zu würdigen; der klare Blick des Palaeontologen Cope hat, unterstützt durch reichhaltiges fossiles Material die richtige Bahn gezeigt. Es dürfte wohl keinen Kenner dieser Fragen geben, der nicht die von Cope errungene Erkenntniss, dass der trituberculare Zahn des Oberkiefers eine verbreitete Grundform der Molaren darstelle, als einen ganz bedeutenden Fortschritt der vergleichend anatomischen Forschung bewundert. Später veröffentlicht Osborn phylogenetische Speculationen über die Entstehung des tritubercularen Zahnes, die von Cope angenommen und weiter verarbeitet wurden. Ihre Ansichten sind vor Jahresfrist durch einen zusammenfassenden Aufsatz von M. Schlosser den deutschen Forschern vermittelt worden. Veranlasst durch Untersuchungen, welche mehrere Zahnärzte unter meiner Leitung der Entwickelung und dem Baue des Gebisses einheimischer Nagethiere zuwandten, habe ich mich eingehend mit den Theorien der Palaeontologen beschäftigt und bin zu Anschauungen gelangt, die mir etliche Fehler ihrer Speculation zu beseitigen gestatten. Indem ich dieselben hier vorlege, hoffe ich Anregung zu erneuter Beschäftigung mit dem interessanten Thema zu geben. Doch zuvor will ich kurz Inhalt und Beweisgründe der älteren Theorien anführen. Cope beobachtete bei einigen 60 Arten placentaler Säugethiere der Puerco-Epoche die Form der oberen Molaren regelmässig als triangulär oder tritubercülär, auf der Kaufläche sitzen zwei äussere und ein innerer Höcker. Da der Typus unter den recenten Thieren verbreitet ist bei den insectivoren und carnivoren Beutelthieren, bei Creodonten, Carnivoren, Insectivoren und Chiropteren, so schloss er, dass die Form der oberen Molaren ursprünglich triangulär war und dass daraus der quadrituberculare Molar anderer Säugethiere durch Hinzufügung eines Höckers am hinteren inneren Rande entstanden sei. Übergangsstadien fand er bei einigen Periptychiden und Procyoniden. Die Molaren des Unterkiefers besitzen eine andere fünfhöckerige Form, welche Cope als tubercular-sectorial Typus bezeichnet. Der vordere Theil derselben hat eine scharfe, schneidende Kante, während der hintere Theil zwei oder drei spitze Höcker trägt. Man beobachtet ihn bei *Didelphis*, *Centetes*, *Talpa*, *Chiroptera* und den *Amblypoda*. Über die genetische Beziehung des pentatuberculären zum trituberculären Zahne wagte Cope keine Vermuthung auszusprechen.

Diese Lücke suchte Osborn auszufüllen. Der tritubercuIäre Zahn ward im Stamme der Säugethiere selbständig entwickelt aus einer Urform, die den Reptilienzähnen ähnlich war. Die schmelzbedeckte Krone war einfach kegelförmig, unter ihr verlängerte sich der Dentinkern des Zahnes in eine einfache konische Wurzel, wodurch jedes Element der homodonten Reihe im Kiefer befestigt war. Ein thatsächliches Beispiel dieses haplodonten Typus ist zwar nicht bekannt, jedoch nähern sich ihm die Zähne des in der americanischen *Trias* gefundenen Dromotherium, deren Krone an den lateralen Flächen des Hauptkonus kleine accessorische Zacken zeigt. Da anscheinend bei den Säugethieren die Thätigkeit der Zerkleinerung der Nahrung frühzeitig aus dem Magen in die Mundhöhle verlegt wurde, so mussten die Zähne der neuen Function, die Nahrungsbissen zu zerschneiden oder zu zerquetschen, durch Verbreiterung der schmelzbedeckten Krone sich anpassen. Dem primitiven einfachen Kegel wurden neue kleinere Kegel in ganz regelmässiger Weise angefügt. Beim einfachen triconodonten Typus treten zum centralen Kegel, der Protoconus genannt wird, zwei laterale Nebenkegel, der Paraconus an der mesialen, der Metaconus an der distalen Seite so, dass die drei Kegelachsen in einer einzigen sagittalen Ebene liegen. Beispiele giebt das mesozoische Triconodon, das nach dem Zahnwechsel als Beutelthier zu beurtheilen ist. Die entsprechenden Höcker der unteren Molaren werden als Protoconid, Paraconid und Metaconid unterschieden. Später werden die drei Höcker gegen einander verschoben und die ursprüngliche kammartige, in der queren Labial-Lingualaxe comprimirte Schmelzkrone dreieckig (Trituberculartypus). Am oberen

Molaren liegt der Protoconus an der Lingualseite, die beiden Nebenhöcker lateral; an den unteren Molaren ist die Stellung gerade umgekehrt, das Protoconid liegt auf Lateralseite, die zwei Nebenhöcker lingual. Um die Homologie der Höcker bei den oberen und unteren Molaren festhalten zu können, nehmen COPE und OSBORN an, das Para- und Metaconid eines unteren Molaren seien am vorderen und hinteren Rande des Protoconid entstanden und dann nach einwärts gedreht worden, aber sie lassen auch die Möglichkeit zu, dass die beiden Innenkegel von vorneherein an der Lingualseite entstanden seien. Dieser ursprüngliche Trituberculartypus wird in der Tertiärzeit noch weiter modificirt, da an den Punkten der oberen und unteren Molaren, welche bei der verticalen Bewegung der beiden Kiefer gegen einander stossen, neue kleine Höcker entstehen. Wo das Paraconid auf den Protoconus trifft, bildet sich an dem hinteren Innenrand des oberen Molaren der Hypoconus. Ferner erscheinen kleine Zwischenhöcker: zwischen dem Protoconus und dem Paraconus der Metaconulus, zwischen dem Metaconus und Hypoconus der Paraconulus. So erhält der obere Molar vier Haupthöcker und zwei Nebenhöcker; der untere Molar zeigt dagegen vier Haupthöcker, da den drei ursprünglichen Kegeln bloss ein neuer, das Entoconid zugefügt wird. Die entgegenwirkenden Molaren haben also verschiedene Muster ihres Kauflächenreliefs ausgebildet, die durch die Anpassung an verschiedenartige Nahrung und durch Variation der Kieferbewegung mannichfach differenzirt werden und die Fülle von Zahnformen erzeugen, welche im Kreise der Säugethiere uns entgegentreten.

Diese Ansichten suchte ich mit Hülfe des osteologischen Materiales der Münchener zoologischen und palaeontologischen Sammlung zu verstehen und zu prüfen. Den Directoren dieser Sammlungen, Hrn. Prof. Dr. R. HERTWIG und Hrn. Prof. Dr. VON ZITTEL bin ich zu innigem Danke verpflichtet, da sie mir die ganz unbeschränkte Benützung des reichen Materiales gütig erlaubten. Auch Hr. Dr. SCHLOSSER war so freundlich, mir während jener Zeit aus dem Schatze seiner Kenntnisse vielfache Belehrung zu Theil werden zu lassen. Bei dieser Untersuchung haben sich mir mehrere Bedenken gegen die Richtigkeit der eben geschilderten Theorien aufgedrängt.

COPE, OSBORN und SCHLOSSER gehen von der Annahme aus, dass den Vorfahren der Säugethiere ein reptilienartiges Gebiss zukam, etwa von der Gestalt, wie es heute noch die Walfische aufweisen. Bei dem jetzigen Stande unserer Kenntnisse muss Jeder, der die Richtigkeit der Entwickelungstheorie zugiebt, die Hypothese als sehr wahrscheinlich betrachten. Wenn überhaupt eine Ableitung der Säugermolaren von einfacheren Formen möglich ist, so müssen die Ausgangsglieder bei Reptilien gesucht werden. Aber die theoretisch geforderten Zwischenformen sind uns nicht genügend bekannt, und die systematische Stellung der fossilen Thiere, deren Zähne nach Cope und Osborn die Bindeglieder der Reptilien- und Säugethierzähne darstellen, ist wegen schlechter palaeontologischer Urkunden vollkommen in's Dunkle gehüllt. Deshalb ist der Versuch der beiden americanischen Forscher wohl als eine Hypothese zu achten, für welche die Wahrscheinlichkeit unserer modernen wissenschaftlichen Anschauungen spricht, jedoch fehlt ihm jeder exacte Beweis.

Auch die Annahme, dass alle Glieder des ursprünglichen Säugethiergebisses ganz gleichartig entwickelt waren, scheint mir solange nicht nothwendig aus den jetzt bekannten Thatsachen abgeleitet werden zu müssen, als nicht die gesammte Organisation der Thierwelt der Puercozeit eine einigermaassen sichere Verknüpfung mit den lebenden Säugern gestattet. Bis jetzt ist die Annahme, alle Zähne müssen von einer gleichen einfachen Urform stammen, nur begründet in unserem Bestreben, die mannichfachen Verhältnisse der Thierwelt, wie es eben geht, unter einen generellen Begriff zusammenzufassen. Wie einleuchtend auch das logische Princip der systematischen Einheit für jene Vermuthung sprechen mag, so kann die Naturforschung doch nur dann der lockenden Aussicht folgen, wenn genügende Beweisgründe die Speculation zu stützen vermögen.

Wie die Annahme eines ursprünglichen Kegelzahnes als Surrogat einer einstweilen fehlenden besseren Einsicht in den historischen Bildungsgang zu beurtheilen ist, so kann man sich auch die Umwandlung des triconodonten Zahnes in die trituberculäre Form nicht gut vorstellen. Man begreift zwar sehr leicht, dass dadurch den Thieren ein grosser Vortheil erwachsen sei, aber welche physiologischen Processe die Formänderung leiteten, ist jetzt noch gänzlich unklar. Cope und Osborn glauben, die beiden Seitenhöcker seien gegen den Protoconus verschoben worden. Das ist sicher die einfachste Hypothese; aber warum am oberen Molaren dieselben nach aussen, am unteren Backzahn nach innen gedreht worden seien, ist mir nicht klar geworden. Ferner habe ich von Osborn keinen Grund erfahren, der ihn berechtigt, die Höcker der oberen und unteren Zähne direct zu homologisiren. Wer bei Säugethieren verschiedener Ordnungen die Zähne der oberen und unteren Reihe genau betrachtet, wird häufig zu der Erkenntniss gelangen, dass die Seiten der Zähne einander im umgekehrten Sinne vergleichbar sind, d. h. dass der Innenseite eines oberen Molaren die Aussenseite des unteren und dem Vorderrande des oberen der Hinterrand des unteren Backzahnes entspreche. Diese Thatsache habe ich durch Mahn an den Molaren von *Arvicola* genauer besprechen lassen, ich habe mich auch an Vertretern anderer Gruppen von der Richtigkeit derselben überzeugt. Wenn man die eben geschilderte Lagebeziehung als allgemeines Gesetz für Säugerzähne betrachten darf, dann ist wohl die Annahme OSBORN's über die Stellung der drei Koni an entgegenwirkenden Zähnen (bezogen auf dieselbe Sagittalebene) richtig; aber um ganz consequent zu denken, dürfte man nicht die am oberen und unteren Molaren nach vorne stehenden Höcker als Paraconus bez. als Paraconid bezeichnen, man muss vielmehr den Paraconus im Oberkiefer homolog dem Metakonid des Unterkiefers setzen.

Die morphologische Analyse des schmelzhöckerigen Zahnes hat noch mit der anderen Schwierigkeit zu kämpfen, eine scharfe Praecisirung der einzelnen Bestandtheile einer höckerigen Kaufläche zu finden. Man spricht seit langem von Schmelzhöckern, Schmelzspitzen, Kämmen, Leisten u. s. w., damit verbindet aber jeder Odontologe eine ganz abweichende Formvorstellung, welche das Studium der Litteratur und die Vergleichung der Beschreibungen sehr erschwert, ja manchmal ganz unmöglich macht. Ich habe deshalb versucht in der Kaufläche der Backzähne bestimmte stereometrische Formen festzustellen und will nun die Resultate dieser Methode durch die Beschreibung des Gebisses eines Beutelthieres erläutern.

Betrachtet man die Kaufläche eines oberen Molaren von *Dasyurus Maugii,* so fällt zunächst deren dreieckige Form auf (Fig. 1). Sie stellt ein ungleichseitiges, rechtwinkeliges Dreieck dar. Der rechte Winkel liegt bei allen Molaren an der vorderen lateral-mesialen Ecke, ein spitzer Winkel liegt an der lingualen und der zweite spitze Winkel an der distalen Ecke. Die Kaufläche selbst zeigt in Bezug auf eine, dem harten Gaumen parallele Transversalebene des Schädels die besondere Eigenthümlichkeit, dass ein lingualer kleiner Theil niederer liegt, als ihr lateraler, grösserer Abschnitt. Das vorspringende Relief der Kaufläche ist sehr regelmässig bei den drei vorderen Molaren. Man kann drei spitzwinkelige lingual gerichtete Kämme unterscheiden; der Winkel jedes derselben springt stärker in die Höhe, die lateralen Enden der beiden lateralen Kämme sind durch einen kleineren Zacken ausgezeichnet. Form und Relief eines solchen Molaren ist schematisch in Fig. 2 wiedergegeben. Die Richtung des Pfeiles neben der Seite *AD* weist gegen die Mundöffnung, während der Ring der Linie neben der Seite *DF* lingualwärts zeigt. Die Linien *ACB*, *GED* und *CFE* illustriren den Verlauf der drei lingual gerichteten Schmelzkämme. Sie theilen die Kaufläche in drei anstossende ungleiche Figuren, das grosse Dreieck *ABC* und zwei kleine unregelmässige Vierecke *BGED* und *CGEF*. Der dunkle Ton des sphaerischen

Viereckes *CGEF* deutet an, dass dasselbe unter dem Niveau des Dreieckes *ABC* und des Viereckes *BDEG* liegt. An der lingualen Spitze der drei Figuren erheben sich drei durch Punktirung bezeichnete Höcker γ, ε, η, ausserdem liegen an der lateral-mesialen Ecke *B* und *D* der grösseren Figuren *ABC* und *BDEG* zwei Höcker β und δ. Im grossen Dreiecke *ABC* ist noch die hintere Ecke *A* in einen niedrigen Vorsprung α erhoben.

Vergleicht man nun den Molaren im Unterkiefer, so ist sofort ersichtlich, dass demselben ein wichtiger Theil, der beim oberen Molaren vorhanden ist, abgeht; denn seine Form ist nicht dreieckig, sondern nährt sich einem unregelmässigen Vierecke. Das Relief der Kaufläche springt nur in zwei spitzwinkeligen Kämmen vor, die im Vergleich zu denen der oberen Molaren gegen die Medianebene eine entgegengesetzte Lage einnehmen. Ihre Spitzen sehen lateral, während die Schenkel an der Lingualseite enden. Auch ihre Stellung zu einer mesial-distalen Axe ist gerade um 180° verschoben, denn der kleine laterale Kamm der oberen Molaren liegt mesial vor dem grossen Kamm, hingegen an den unteren Molaren liegt der grosse Kamm mesial vor dem kleinen. Ein Blick auf die schematische Zeichnung eines unteren Molaren, welche direct nach einer vergrösserten photographischen Aufnahme entworfen ist, wird das gewonnene Resultat der Vergleichung schnell erläutern. Es unterliegt keinem Zweifel, dass dem M. inf. das Viereck *CGEF* vollständig fehlt, während das Dreieck *ABC* und das Viereck *BDEG* ebenso schön ausgebildet sind wie bei M. sup. Die Höcker an den Ecken beider Figuren $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ sind noch stärker entwickelt, und auch der Höcker α stellt eine ansehnliche Spitze dar. Vgl. die Figuren 3 und 4. — Die Molaren der oberen und unteren Reihe lassen also den gleichen Bauplan erkennen und unterscheiden sich nur dadurch von einander, dass die oberen Molaren ein Stück mehr besitzen, nämlich das niedrige Viereck *CGEF*. Wollte man Namen für die drei Theile eines oberen Molaren erfinden, so könnte man den Grössen- und Lageunterschied derselben am einfachsten bezeichnen durch die Worte: Makromer für das grosse Dreieck *ABC*, Mikromer für das kleinere Viereck *BDEG*, Entomer für das innere, d. h. lingual gelegene Viereck *CGEF*. Der untere Molar besässe dann nur ein Makromer und ein Mikromer. Das Ergebniss unserer Betrachtung liesse sich nun kurz formuliren: die oberen Molaren haben trimere, die unteren bimere Form. Da jedem Theilstück je ein Wurzelast entspricht, so ist auch die Form der im Kiefer geborgenen Zahntheile durch die vorgeschlagenen Worte klar praecisirt. Der Umstand, dass die Kaufläche des oberen Molaren sich in lateral-medialer Richtung breiter ausdehnt, sowie dass sie sich durch den Besitz des Entomers auszeichnet, ist in Berücksichtigung seiner Befestigung im Oberkiefer und durch die gegenseitige Lagebeziehung der oberen und unteren Zahnreihe begreiflich. Denn ein grosser Zahn kann im breiten Oberkiefer besser eingewurzelt werden als im schmalen Unterkieferast. Da ferner bei den meisten Säugethieren der Unterkieferbogen schmäler ist als der breitere Oberkieferrand, also die untere Zahnreihe meist innerhalb der oberen eingreift, so kann die Zufügung eines neuen lingual gelegenen Theiles nur an den oberen Zähnen einen Vortheil bieten. Aber diese Überlegung erklärt uns keineswegs, warum und wie der Unterschied der opponirten Zähne zu Stande kam, denn sie ist nur der Ausdruck von thatsächlichen, topographischen Beziehungen, die direct zu beobachten sind, ohne dass ein Anhalt zu finden wäre, welches Verhältniss als das historisch frühere oder causale zu betrachten sei.

Die einzelnen Höcker mit besonderen Namen zu belegen, scheint mir nicht nothwendig, man kann sich mit Hülfe der griechischen Buchstaben ebenso gut und viel bequemer verständigen. Zum Beweise, wie verfehlt die von Osborn vorgeschlagene Nomenclatur sei, braucht nur folgendes angeführt zu werden: Er nennt am oberen Molaren-Höcker η Protoconus, γ Metaconus, ε Paraconus und setzt denselben homolog am unteren Molaren-Höcker γ = Protokonid, α = Parakonid, β = Metakonid; das Mikromer *BDEG* stellt nach seiner Meinung eine neue Zuthat zu den ursprünglichen drei Kegeln dar und wird als Hypoconus bezeichnet. Die Betrachtung der von mir gegebenen Figuren lässt eine solche Auffassung direct als hinfällig erscheinen.

Vom trimeren oberen Molaren kann man ohne Mühe die Formen ableiten, welche bei Raubthieren. Insectenfressern, Fledermäusen und den Halbaffen vorkommen. Eine Complication erfolgt häufig durch Hinzufügung eines vierten Bestandtheiles, des Metamer an den distalen Rand *CF* des Entomers. An den Molaren von *Phalangista Cookii Cuv.* (siehe die Figuren 5 und 6) liegt das Metamer im gleichen Niveau mit dem Entomer, d. h. niedriger als die lateralen Theile; es ist ebenfalls von einem spitzwinkeligen Kamme umrandet. In vielen Fällen wird das Entomer mächtiger, während das Mikromer undeutlich wird.

Hingegen unterliegen Makro- und Mikromer bei allen Placentalthieren einer Reduction, sie stellen dann nicht mehr je eine dreieckige oder viereckige lingual einspringende Fläche dar, wie bei den Beutelthieren. Die Entfernung des Randes *AD* von den lingualen Spitzen *C* und *E* wird geringer und schliesslich fallen die Seitenflächen *ABC* und *BDEG* jähe gegen den Kieferrand ab, ja es können sogar nur die Höcker γ und ε erhalten bleiben wie z. B. bei den Raubthieren.

Der untere Molar ist wesentlichen, den Form-Typus störenden Umbildungen weniger unterworfen, selbst bei den Raubthieren, wo das, gewöhnlich als Talon bezeichnete, Mikromer eine Mehrzahl kleinerer Höcker entwickelt, ist der ursprüngliche Bauplan noch deutlich erkennbar.

Im Allgemeinen lässt sich behaupten, dass Thiere carnivorer oder insectivorer Lebensweise den bei carnivoren Beutlern erkannten Typus ungetrübter zeigen, als die herbivoren Säuger. Am oberen Molaren der letzteren verschmilzt Höcker ε des Mikromers mit η des Entomers zu einem scharfen Kamme, ebenso Höcker γ des Makromers mit dem Metamer zu einem hinteren Kamme. So wird die ursprünglich dreieckige Form ganz verwischt. Am unteren Molaren werden ebenfalls Höcker β und γ, δ und ε zu zwei hinter einander stehenden Graten vereint und Höcker α geht meist verloren.

Cope hat die wesentlichen Umbildungen bereits erkannt, so dass es nicht nöthig ist, näher darauf einzugehen. Seine Darstellung wäre nur in wenigen Punkten durch eine strengere Homologisirung der einzelnen Höcker zu corrigiren. Einzelne Formenreihen in verschiedenen Abtheilungen der Säugethiere werde ich durch meine Schüler noch besser beschreiben lassen.

Zum Schlusse möchte ich noch einige Bemerkungen beifügen über die theoretischen Vorstellungen, welche man sich heutzutage von der historischen Entwickelung des Gebisses der Säugethiere bilden kann, weil die americanischen Forscher in solchen Speculationen mir über das Ziel hinauszusteuern scheinen. Was die Abtheilung der Backzähne von einfachen Reptilienzähnen betrifft, so habe ich bereits oben erwähnt, dass unsere Theorien uns zwar bestärken, in dieser Richtung die Urform zu suchen, dass aber durch die palaeontologische Forschung noch kein zwingender Beweis für eine derartige Annahme geliefert ward. Denn aus den spärlichen Resten der fossilen Thiere, welche Zähne des Triconodontentypus besassen, lässt sich nicht mit genügender Sicherheit entnehmen, in welcher phylogenetischen Beziehung sie zu den Beutlern und placentalen Säugethieren stehen. Wie aus dem flachen triconodonten Zahn die trimere Form entstanden, kann ebenfalls an thatsächlichen Beispielen nicht discutirt werden. Nur der trimere, bez. bimere Bauplan ist für eine grosse Zahl fossiler wie recenter Säugethiere festgestellt und Cope hat einleuchtend gezeigt, dass sich complicirte Zahnformen in einfacher ungezwungener Weise aus demselben ableiten lassen.

Wenn auch durch die neueren Forschungen der morphologische Leitfaden gefunden ward, der uns in der reichen Mannichfaltigkeit der Säugermolaren nur die Variationen einer einzigen Grundform erkennen lässt, so ist doch gänzlich unbekannt, wie die Grundform aus einfacheren Zuständen sich entwickelt und welche Ursachen die zahlreichen Variationen derselben hervorgerufen haben.

Cope und Ryder glauben diese Probleme durch mechanische Überlegungen einer Lösung näher zu führen. Beide sind der Meinung, dass der Gebrauch eines Organes die Structur desselben nicht nur beeinflusse, sondern geradezu erzeuge. Deshalb müssen gleiche mechanische Ursachen in verschiedenen Stämmen auch gleiche Structur entsprechender Organe entstehen lassen.

Cope stellt in diesem Sinne folgende Thesen auf:

1. Das Grössenwachsthum eines Zahnes oder eines Theiles desselben ist eine directe Folge des Gebrauches.

2. Durch den Gebrauch wird die Stellung eines Zahnes in der Richtung vom grössten zum kleinsten Widerstande gedreht.

3. Leisten auf der Kaufläche werden schneller abgeschliffen als Höcker.

4. Das Wachsthum der Cristen und Höcker nach jeder möglichen Richtung und die Faltung der Schmelzdecke ist direct eine Folge des Reizes, welchen das Kaugeschäft auf das Relief des Zahnes ausübt. Also ist die Zahnform entstanden durch ein Wechselspiel zwischen dem zerstörenden Einflusse der Thätigkeit und der ergänzenden Wirkung der Ernährung.

Z. B. der Eckzahn oder ähnlich geformte Schneidezähne bilden sich am vorderen bez. seitlichen Rande des Kiefers in Folge ihrer exponirten Stellung, welche sie besser als andere Gebisselemente befähigt, als Fangorgan oder als Vertheidigungswaffe zu dienen. Je mehr die functionellen Anforderungen an sie gesteigert werden, um so mehr wächst und stärkt sich der Zahn. »Die Canini des Wallrosses sind nur deshalb so mächtig geworden, weil das Thier mit ihnen sowohl dickes Eis zertrümmert, als sich aus dem Wasser auf die Eisfläche hinaufzieht.« Zähne der oberen Reihe sind stets stärker, da im festeren Gerüste des Schädels sie natürlich besser befestigt sind, als im schwächeren, zerbrechlichen Unterkiefer.

Wenn energischer Gebrauch die Grösse und Formentwickelung des Zahnes steigert, so muss das Gegentheil, die geringe Übung die Rückbildung und schliesslich den Schwund derselben hervorrufen. Aber es ist viel schwerer, dafür stichhaltige mechanische Gründe anzugeben. Cope kann nicht erläutern, warum bei so vielen Säugern z. B. die Schneidezähne rudimentär werden. Auch die progressive Formgestaltung lässt sich häufig nach seinen Principien nicht begreifen, er kennt z. B. keinen mechanischen Grund für die Entwickelung des triconodonten Zahnes aus dem einfachen Kegel. Hier nimmt er die

Möglichkeiten der Ernährung zu Hülfe und sucht die Entstehung der seitlichen Höcker daraus zu erklären, dass die Blutgefässe der Zahnpulpa an der Basis des ursprünglichen Conus mehr Bildungsstoff ablagern und die Ernährung kleiner Seitenzacken besser begünstigen, als an der Spitze. Sind aber die Nebenhöcker des triconodonten Zahnes einmal vorhanden, so macht sein mechanisches Princip die Entstehung des trituberculären Zahnes gut plausibel. Denn die Höckerchen, welche weniger widerstandsfähig gegen die abschleifenden Kaubewegungen sind, werden ihre Stellung leichter verändern als der centrale Protoconus und durch den Druck der entgegenstehenden Zähne eher nach aussen bez. innen gepresst werden können.

A. Ryder hat mit grösserem Nachdrucke auf die mit der verschiedenen Form des Kiefergelenkes zusammenhängenden Variationen der Kieferbewegungen hingewiesen und das mannichfaltige Relief der Kauflächen als direct von denselben beeinflusst dargestellt.

Gegen die Ansichten der americanischen Forscher, welche dadurch den Bildungsprocess des Gebisses unserem Verständnisse näher zu rücken glauben, lassen sich, wie mir scheint, triftige Einwände erheben. Jeder Naturforscher ist mit sich über die Thatsache klar, dass der Bau und die Thätigkeit eines Organes in den weitaus meisten Fällen wundervoll harmoniren, so dass das eine nicht ohne das andere gedacht werden kann. Wenn wenige Beispiele gegen dieses allgemeine Gesetz zu sprechen scheinen, so kann ja schlechte oder ungenügende Untersuchung unser Urtheil trüben und spätere Forschung die scheinbare Ausnahme als Beweis der strengen Regel erhärten. Die Zusammenfassung der Thatsachen in einen allgemeinen begrifflichen Ausdruck hängt aber wesentlich von dem Standpunkte des Beurtheilers ab und wird in Folge dessen verschiedene Gesichtspunkte der Speculation eröffnen. So lange die alte naturphilosophische Schule der Frage, wie die Thierformen entstanden seien, nicht näher getreten war und das Problem der Schöpfung unerörtert liess, konnte man nur die Thatsache feststellen, dass der Bau und die Aufgabe eines Organes, wie des ganzen Thierkörpers in wundervoller Weise zusammenstimmen. Die Ursache dieser Harmonie ward einfach in dem beabsichtigten Zwecke eines weisen Schöpfers erkannt, der allen lebenden Wesen eine bestimmte Aufgabe zugewiesen und sie mit den nothwendigen Werkzeugen zu deren Erfüllung ausgestattet hatte.

Die moderne Auffassung hingegen leitet aus der Idee, dass die Organismen in Blutsverwandtschaft stehen und sich in der Erdgeschichte langsam zu reich verästelten Stammbäumen entwickelt haben, die These ab, die complicirte Structur und Thätigkeit eines Organes sei nicht ursprünglich vorhanden gewesen, sie sei vielmehr etwas Gewordenes, das aus einfachen Anfängen zu höherer Vollkommenheit herausgearbeitet wurde. Als Motor solcher Umbildung erscheint in erster Linie die Wirkung des Gebrauches eines Organes. Wie anhaltende Übung unsere Organe zu besserer Kraftleistung und erhöhter Thätigkeit stärkt und häufig auch eine Volumzunahme derselben bedingt, so soll nach der modernen theoretischen Verallgemeinerung dieser Thatsache auch eine kleine Modification der ursprünglichen Function, wenn sie sich nur durch eine längere Reihe von Thiergenerationen wiederholt, die Umwandlung der ursprünglichen Form bedingen, welche besser den Verlauf der neuen Function garantirt.

Allein man sollte nicht vergessen, dass das Verhältniss der Übungsintensität zur Formgestaltung eines Organes uns bisher durch exacte Bestimmungen nicht bekannt geworden ist, und ferner, dass wir keinen physikalischen Anhalt haben, um uns eine Vorstellung zu bilden, wie sich die Gebrauchsintensität z. B. eines Zahnes umsetzen soll in eine andere Form der Arbeit, die morphologische Wirkungen äussern könnte. Solche Beziehungen sind ja nicht einmal bei rein mechanischen Constructionen bekannt. Wir kennen zwar in sehr vielen Fällen diejenige Form eines Maschinentheiles, welche bei einer genau bestimmten Kraft den grösstmöglichen Nutzeffect verbürgt und wir sind im Stande, mit Hülfe dieser Kenntnisse sogar neue Combinationen der Maschinentheile zu ersinnen, um andere Betriebsbedingungen möglichst rationell auszunützen. Dieses Wissen ist jedoch nur Sache der Erfahrung. Wie gut auch immer der mathematische Calcül uns gelehrt hat, dieselbe in kurzen allgemeinen Formeln auszudrücken, so ist sie doch nicht tiefer in das Wesen der Beziehungen eingedrungen und die Frage, warum gerade diese oder jene Form einer bestimmten Arbeitsleistung am meisten adaequat ist. kann jetzt bloss durch die negative Erfahrung beantwortet werden, dass eben keine andere Form das Entsprechende leistet.

Wenn nun die Physik über den Zusammenhang von Form und Function keinen Aufschluss geben kann, so ist die biologische Forschung ganz ausser Stande, befriedigende Resultate der gleichen Untersuchung an organischen Körpern zu erzielen. Das Einzige, was nachgewiesen werden kann, ist nur, dass bestimmte Theile des Thierkörpers, z. B. die Zähne, die einer von uns in allen Momenten begreifbaren mechanischen Function dienen, gerade so gebaut und bewegungsfähig sind, wie die theoretische Mechanik es fordern muss. Aus der vollkommenen Übereinstimmung von Form und Function, die wir an den recenten Thieren direct feststellen, an den fossilen Resten mit verschiedenem Grade der Sicherheit vermuthen können, lässt sich aber kein absoluter Maassstab ableiten, um das historische

Verhältniss beider zu ergründen und es ist eine rein willkürliche Annahme, die sich durch keine Thatsache beweisen lässt, wenn man mit Cope die Function in causale Verbindung mit der Form setzt. Um die Frage zu beantworten, auf welche Weise Zähne einfacheren Baues complicirte Structur-Eigenthümlichkeiten erwerben konnten, müssen experimentelle Untersuchungen angestellt werden, die uns wirklich den Process der Umwandlung vor Augen führen. Erst dann wird man die treibenden Ursachen der Formänderung verstehen, denn die morphologische Betrachtung allein gewährt keinen Einblick. Bei der Untersuchung der Zahnformen fällt zwar die Übereinstimmung morphologischer Gebilde auf und wir sind im Stande, aus einer grossen Reihe von Variationen das Gemeinsame auszuscheiden und als Princip einer morphologischen Systematik zu verwenden. Das Resultat der morphologischen Betrachtung wird dann gewöhnlich in Ausdrücken dargestellt, welche die verschiedenen Formzustände als Glieder einer vor- oder rückwärts schreitenden Reihe begreifen. Aber dadurch wird der Charakter einer rein systematischen Aufzählung nicht geändert und noch weniger bewiesen, dass eine Formenreihe wirklich das Product einer geschichtlichen Entwickelung sei. Man muss sich also jetzt mit der Erkenntniss begnügen, dass weder die teleologische noch die morphologisch-phylogenetische Denkweise die Ursachen organischer Entwickelung enträthseln kann.

Kurzer Litteraturnachweis.

E. D. Cope, the origin of the fittest. New York 1887.

— the mechanical causes of the development of the hard parts of the Mammalia. Journal of Morphology vol. III. 1889.

H. F. Osborn, the evolution of mammalian molars to and from the tritubercular type. American Naturalist 1888.

M. Schlosser, Die Differenzirung des Säugethiergebisses. Biolog. Centralblatt X. 1890.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Kaurelief des linken M_3 sup. von *Dasyurus Maugei.* $^4/_1$. Auf photographischem Wege vergrössert.

Fig. 1a. Kaurelief des linken M_2 sup. von *Dasyurus Maugei.* $^4/_1$.

Fig. 2. Schematische Darstellung des Kaureliefs eines oberen Molaren von *Dasyurus Maugei.*

Der Pfeil neben Seite AD giebt die Richtung gegen die Mundöffnung, der Ring der Linie neben DF die linguale Richtung an. ABC = Makromer. $BDEG$ = Mikromer. $CGEF$ = Entomer. $^7/_1$.

Fig. 3. Kaurelief des rechten M_2 inf. von *Dasyurus Maugei.* $^4/_1$.

Fig. 4. Schematische Darstellung des Kaureliefs eines unteren Molaren von *Dasyurus Maugei.* ABC = Makromer. $BDEG$ = Mikromer.

Fig. 5. Kaurelief der M_3 und M_2 sup. von *Phalangista Cookii.* $^3/_1$.

Fig. 6. Schematische Darstellung des Kaureliefs eines oberen Molaren von *Phalangista Cookii.* ABC = Makromer. $BDEG$ = Mikromer. $GENFK$ = Entomer. $ACGKIH$ = Metamer.

37. Die LEGENDRE'sche Relation.

Von L. KRONECKER.

(Vorgetragen am 30. Juli: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XL]; — ausgegeben am 20. August.)

(Fortsetzung der Mittheilung vom 2. April, XVIII, XX, XXV.)

XI.

Im art. VI ist dargelegt worden, wie aus den Entwickelungen im Abschnitt VI, 1—3 der citirten Abhandlung EISENSTEIN's[1] die LEGENDRE-sche Relation in der Gestalt hervorgeht:[2]

$$(41)\qquad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\left\{\sum_{m,n}\frac{1}{(mw+nv)^2}-\sum_{m,n}\frac{1}{(mv+nw)^2}\right\}=-\frac{2\varepsilon\pi i}{vw},$$
$$(m=\pm 1,\pm 2,\ldots \pm M;\quad n=\pm 1,\pm 2,\ldots \pm N)$$

welche, wenn man die Reihen durch ϑ-Functionen ausdrückt, sich in jene des art. I verwandelt:

$$(6)\qquad v^2\frac{\vartheta'''\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\vartheta'\left(0,-\frac{\varepsilon v}{w}\right)}-w^2\frac{\vartheta'''\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)}=6\varepsilon vw\pi i.$$

Nunmehr soll aber gezeigt werden, wie die Hauptresultate des §. 5 der EISENSTEIN'schen Abhandlung zur unmittelbaren Herleitung der Relation in der ursprünglichen LEGENDRE'schen Form benutzt werden können.

EISENSTEIN führt a. a. O. für die Reihen:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}(u+mv+nw)^{-h},\quad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}(mv+nw)^{-h}\qquad (h=1,2,3,\ldots)$$
$$\begin{pmatrix}m=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm M\\ n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \pm N\end{pmatrix}\qquad\qquad \begin{pmatrix}m=\pm 1,\pm 2,\ldots \pm M\\ n=\pm 1,\pm 2,\ldots \pm N\end{pmatrix}$$

die Bezeichnungen ein:

$$(h,u),\quad h^*,0)\qquad (h=1,2,3,\ldots)$$

und untersucht deren Eigenschaften und gegenseitige Beziehungen.

---

[1] Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen. CRELLE's Journal, Bd. XXXV.
[2] Vergl. die Bemerkungen im Anfange des art. VII.

Den »Hauptgegenstand« bildet dabei, wie er selbst ausdrücklich hervorhebt, die Herleitung der a. a. O. mit (5.) bezeichneten Differentialgleichung, welche zeigt, dass die von ihm »durch doppelte Erzeugung aus den rationalen Functionen erlangten Functionen wirklich elliptische Functionen« sind. Bestimmt man die dortige Constante c aus der mit (1.) bezeichneten Gleichung oder aus der Gleichung (5.) selbst, indem man die Variable x, nach Weglassung der negativen Potenzen, gleich Null setzt, und nimmt man dann u an Stelle von x, so erhält man die Gleichung in der Form:

$$(79)\quad (3, u)^2 = \big((2, u) - (2^*, 0)\big)^3 - 15\,(4^*, 0)\big((2, u) - (2^*, 0)\big) - 35\,(6^*, 0),$$

und wenn man die elliptische Function: $(2, u) - (2^*, 0)$, in Anknüpfung an den Namen Eisenstein's, in dessen Abhandlung sie zuerst vorkommt, und zugleich im Anschluss an die in der Theorie der elliptischen Functionen schon üblichen Bezeichnungen sn, cn, dn mit:

$$\mathrm{en}(u, v, w)$$

oder noch kürzer mit $\mathrm{en}\,u$ bezeichnet, so nimmt die Gleichung (79) die Gestalt an:

$$(80)\qquad \tfrac{1}{4}(\mathrm{en}'u)^2 = (\mathrm{en}\,u)^3 - 15\,(4^*, 0)\,\mathrm{en}\,u - 35\,(6^*, 0),$$

wo $\mathrm{en}'u$ die Ableitung von $\mathrm{en}\,u$ bedeutet.[1]

Benutzt man ferner die im art. VI eingeführten Bezeichnungen:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}(u+mv+nw)^{-1} &= f_1(u, v, w) \\ \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}(u+mv+nw)^{-2} &= f_2(u, v, w) \end{aligned}\right\} \quad \begin{pmatrix} -M \leqq m \leqq M \\ -N \leqq n \leqq N \end{pmatrix},$$

so ist:

$$(2, u) = f_2(u, v, w), \quad (2^*, 0) = \lim_{u_0=0}\left(-\frac{1}{u_0^2} + f_2(u_0, v, w)\right),$$

also:

$$\mathrm{en}\,u = \lim_{u_0=0}\left(f_2(u, v, w) - f_2(u_0, v, w) + \frac{1}{u_0^2}\right),$$

und setzt man noch, wie Eisenstein, zur Abkürzung:

$$(81)\qquad \begin{aligned} f_2(\tfrac{1}{2}v, v, w) &= a, \\ f_2(\tfrac{1}{2}(v+w), v, w) &= a', \\ f_2(\tfrac{1}{2}w, v, w) &= a'', \end{aligned}$$

so drücken sich die weiter von Eisenstein entwickelten Resultate in

[1] Die Eisenstein'sche elliptische Function $(2, u) - (2^*, 0)$, welche hier mit $\mathrm{en}\,u$ bezeichnet ist, wird in der Schwarz'schen Formelsammlung mit $\wp u$ bezeichnet.

folgender Weise aus:

$$(82)\qquad a + a' + a'' = 3\,(2^*, 0) = 3 \lim_{u_0 = 0} \left(-\frac{1}{u_0^2} + f_2(u_0, v, w) \right),$$

$$(83)\qquad \left(\frac{\partial f_2(u,v,w)}{\partial u} \right)^2 = 4 \left(f_2(u,v,w) - a \right) \left(f_2(u,v,w) - a' \right) \left(f_2(u,v,w) - a'' \right),$$

$$(84)\qquad u - u_0 = \int\limits_{f_2(u_0,v,w)}^{f_2(u,v,w)} \frac{dy}{2\sqrt{(y-a)(y-a')(y-a'')}},$$

$$(85)\qquad f_1(u_0,v,w) - f_1(u,v,w) = \int\limits_{f_2(u_0,v,w)}^{f_2(u,v,w)} \frac{y\,dy}{2\sqrt{(y-a)(y-a')(y-a'')}}.$$

Mittels der Substitution:

$$y = a' \sin^2\phi + a'' \cos^2\phi$$

erhält man die Transformationsrelation:

$$(86)\qquad \int \frac{y\,dy}{2\sqrt{(y-a)(y-a')(y-a'')}} = \frac{a}{\sqrt{a-a''}} \int \frac{d\phi}{\Delta\phi} - \sqrt{a-a''} \int \Delta\phi\, d\phi,$$

wo in üblicher Weise $\Delta\phi$ die Quadratwurzel aus:

$$1 - \frac{a' - a''}{a - a''} \sin^2\phi$$

bedeutet. Die Gleichung (85) geht hiernach für:

$$u_0 = \tfrac{1}{2} w, \quad u = \tfrac{1}{2}(v + w)$$

in folgende über:

$$(87)\quad f_1\left(\tfrac{1}{2} w, v, w\right) - f_1\left(\tfrac{1}{2}(v+w), v, w\right) = \frac{a}{\sqrt{a-a''}} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{\Delta\phi} - \sqrt{a-a''} \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \Delta\phi\, d\phi.$$

Nun ergiebt aber die directe Summation der mit f_1 bezeichneten Reihen die Werthbestimmungen:

$$f_1\left(\tfrac{1}{2} v, v, w\right) = 0,\quad f_1\left(\tfrac{1}{2} w, v, w\right) = -\frac{\varepsilon\pi i}{v},\quad f_1\left(\tfrac{1}{2}(v+w), v, w\right) = -\frac{\varepsilon\pi i}{v};$$

es ist sonach der Werth des mit dem EISENSTEIN'schen elliptischen Integral zweiter Gattung:

$$\int\limits_{a''}^{a'} \frac{y\,dy}{2\sqrt{(y-a)(y-a')(y-a'')}}$$

identischen Ausdrucks auf der rechten Seite der Gleichung (87) gleich Null, d. h. es wird:

$$(88)\qquad \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Delta\phi\, d\phi = \frac{a}{a-a''}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\phi}{\Delta\phi},$$

oder nach den JACOBI-LEGENDRE'schen Bezeichnungen, wenn noch:

$$\frac{a'-a''}{a-a''} = \varkappa^2$$

gesetzt wird:

$$(89)\qquad \frac{E}{K} - (1-\varkappa^2) = \frac{a'}{a-a''}.$$

Wendet man die Substitution $y = a' \sin^2\phi + a'' \cos^2\phi$ auf die Gleichung (84) an, so kommt für $u_0 = \frac{1}{2}w, u = \frac{1}{2}(v+w)$:

$$v\sqrt{a-a''} = 2K, \quad w\sqrt{a-a''} = 2K'i,$$

und, wenn man diese Werthe von v und w in der mit a' bezeichneten Reihe:

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{4}{\big((2m+1)v+(2n+1)w\big)^2} \qquad \begin{pmatrix}-M\leqq m\leqq M\\ -N\leqq n\leqq N\end{pmatrix}$$

einsetzt, so geht die Gleichung (89) in folgende über:

$$(90)\qquad \frac{E}{K} - (1-\varkappa^2) = \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{\big((2m+1)K+(2n+1)K'i\big)^2},$$
$$(-M\leqq m\leqq M, \quad -N\leqq n\leqq N)$$

oder nach der obigen Bezeichnungsweise:

$$(91)\qquad \frac{E}{K} - (1-\varkappa^2) = f_2(K+K'i,\ 2K,\ 2K'i).$$

Vertauscht man hierin $\varkappa^2$ mit $1-\varkappa^2$, so kommt:

$$(92)\qquad \frac{E'}{K'} - \varkappa^2 = -f_2(K+K'i,\ 2K'i,\ 2K),$$

und da gemäss der zweiten von den beiden Formeln (31) im art. VI die beiden Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (91) und (92) zusammen das Resultat $\frac{\pi}{2KK'}$ ergeben, so führt die additive Verbindung eben dieser beiden Gleichungen offenbar zu der LEGENDRE-schen Relation in ihrer ursprünglichen Gestalt: $K'E + KE' - KK' = \frac{1}{2}\pi$.

(Fortsetzung folgt.)

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

INHALTSVERZEICHNISS.

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE
aus den Jahren 1889, 1890, 1891.

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akad
wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden
zuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkrei
des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzu
Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAF

AUS DEN SITZUNGSBERICHT

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE D

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Ar
Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und
in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akade
fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufge
Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben un
und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« ers
heften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einen
Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeb
Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen un
berichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftli
zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch d

---

*Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Ma
Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr
die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des
» » » Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Mon
» » » October bis December zu Anfang des näc
des Registers.*

*Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1890 nicht
hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücks
Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende*

*Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräume
zuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.*

In Commission bei Georg Reimer in Berlin erschein

SITZUNGSBERIC

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE D

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgang

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAF

AUS DEN SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DE

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs

Georg Reimer's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenig
oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«,
der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zug
Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erst
Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen si
Buchhandlung in Verbindung setzen.

1892

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT VIII.

OCTOBER 1891.

BERLIN 1891.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich en Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

erscheinen in einzelnen Stücken in Gross- näissig Donnerstags acht Tage nach ıg. Die sämmtlichen zu einem Kalender- n Stücke bilden vorläufig einen Band mit Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ıe durch den Band ohne Unterschied der r Sitzungen fortlaufende römische Ordnungs- zwar die Berichte über Sitzungen der physi- ımatischen Classe allemal gerade, die über philosophisch-historischen Classe ungerade

§ 2.

Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über tzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mit- ıd über die zur Veröffentlichung geeigneten ı Angelegenheiten.

f folgen die den Sitzungsberichten über- senschaftlichen Arbeiten, und zwar in der die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, bergebenen, dann die, welche in früheren tgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehö- n nicht erscheinen konnten.

§ 4.

'erzeichniss der eingegangenen Druckschriften ihrlich ausgegeben.

§ 28.

zur Aufnahme in die Sitzungsberichte be- ıeilung muss in einer akademischen Sitzung vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, chtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes Einsendungen auswärtiger oder correspon- glieder, welche direct bei der Gesammt- er bei einer der Classen eingehen, hat der Secretar selber oder durch ein anderes Mit- 'ortrage zu bringen. Mittheilungen, deren r Akademie nicht angehören, hat er einem ignet scheinenden Mitgliede zu überweisen. llen Umständen hat die Gesammtakademie asse die Aufnahme der Mittheilung in die ı Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in r gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte igen. Mittheilungen von Verfassern, welche e nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses schränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist ısdrücklicher Zustimmung der Gesammtaka- der betreffenden Classe statthaft.

ıehen von einfachen in den Text einzuschal- schnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.

38. Adresse an Hrn. August Wilhelm von Hofmann zur Feier seines fünfzigjährigen Doctorjubiläums am 9. August 1891.

(Gesammtsitzung vom 22. October [St. XLI].)

Hochgeehrter Herr College!

Die Akademie der Wissenschaften gedenkt heute mit Freude des Tages, an welchem Ihnen vor fünfzig Jahren von der philosophischen Facultät der Universität Giessen die Doctorwürde verliehen wurde, und bittet Sie, zu dieser Feier die herzlichsten und wärmsten Glückwünsche entgegen zu nehmen.

Wenn wir im Gedächtnisse die gewaltige Reihe von Arbeiten vorüberziehen lassen, mit welchen Sie während diesen fünfzig Jahren die Wissenschaft beschenkten, so entwickelt sich ein Bild so mannigfaltiger Thätigkeit, wie es uns die Geschichte der Chemie bis jetzt selten vor Augen geführt hat. Nur in allgemeinen Umrissen ist es möglich, die wichtigsten Ihrer Leistungen hier anzudeuten, welche den verschiedensten Gebieten, hauptsächlich aber der organischen Chemie angehörend, nicht nur die reine Wissenschaft mächtig gefördert haben, sondern auch mehrfach auf den Wohlstand unserer Zeit von wesentlichem Einfluss geworden sind.

Ein günstiges Geschick hatte Sie schon im Jahre 1843 bei der ersten Jugendarbeit über die organischen Basen des Steinkohlentheeröles auf eine Substanz geführt, welche unter Ihren Händen von der grössten Bedeutung werden sollte. Es war das Anilin, ein Körper, der wie kein anderer sich als geeignet erwies, eine zu jener Zeit aufgetauchte und die damals noch herrschende elektrochemische Theorie tief berührende Frage zu verfolgen, nämlich die, in welcher Weise sich der chemische Charakter einer Verbindung ändert, wenn in derselben gewisse Atome durch andere Elemente oder zusammengesetzte Atomcomplexe substituirt werden. Durch zahlreiche, mehrere Jahre hindurch fortgesetzte Versuche zeigten Sie, dass nicht nur in dem basischen Anilin sondern auch direct im Ammoniak eine successive Ersetzung der Wasserstoffatome durch Alkoholradicale möglich ist, und es ergab sich zum ersten Male die systematisch durchgeführte Synthese einer grossen Reihe von Verbindungen ebenfalls basischer Natur, deren Constitution mit vollständiger Klarheit aus ihrer Bildungsweise hervorging. Unsere ganze jetzige Kenntniss der organischen Basen, die Eintheilung derselben in primäre, secundäre und tertiäre Monamine, Diamine und Triamine, sowie Ammoniumbasen beruht auf jenen Untersuchungen, welche dieses Gebiet zu einem der glänzendsten der organischen Chemie gemacht haben.

Das Anilin und seine Derivate gelangten aber noch in einer ganz anderen Richtung zu einer ungeahnten Wichtigkeit. Es hatte sich gezeigt, dass aus demselben Farbstoffe darstellbar sind, aber erst nachdem Sie diese Körper in die Hand genommen und durch wissenschaftliche Untersuchungen deren chemischen Charakter festgestellt hatten, trat Verständniss und Fortschritt auf diesem Gebiete ein. Von dem Jahre 1862 an, wo Sie zuerst das Rosanilin und die Substituirbarkeit von Wasserstoffatomen in demselben durch organische Radicale kennen lehrten, ist jene grossartige Theerfarben-Industrie zur Entwickelung gekommen, welcher gegenwärtig viele Tausende von Arbeitern das tägliche Brod verdanken. Ihre stillen Laboratoriumsarbeiten haben Früchte für das allgemeine Wohl getragen, wie sie schöner nicht erwartet werden konnten, und zuversichtlich sind noch viele weitere der Zukunft vorbehalten.

Das so ungemein klare System, welches heute die Chemie der Kohlenstoffverbindungen besitzt, stützt sich noch in vielen anderen Theilen auf Ihre Thätigkeit. Die Zahl der Körper und ganzen Körperklassen, welche Sie entweder neu entdeckten oder deren Kenntniss Sie erweiterten, ist eine so grosse, dass wir nur mit blossen Namen die wichtigsten derselben vorüberführen können. Wir erinnern an die schönen Arbeiten über die Phosphine, die Allylverbindungen und die Senföle, an die Anilide, die alkylirten Metamine, das Toluidin und Diphenylamin. Von folgenreicher Bedeutung waren Ihre Untersuchungen über die Bildung der Isocyanide aus den primären Aminen, die Isomerien in der Cyangruppe, sowie die Verwandlung der aromatischen Monamine in kohlenstoffreichere Säuren. Wir vergessen endlich nicht Ihrer Methode zur Bestimmung der Dampfdichte, welche zuerst die Möglichkeit an die Hand gab, auf einfache und genaue Weise zur Kenntniss des Moleculargewichtes flüchtiger Substanzen zu gelangen.

Ein weiterer Punkt, dem Sie lebhafte Aufmerksamkeit zuwandten, sind die Vorlesungsversuche. Jedem Fachgenossen ist die freudige

Überraschung im Gedächtniss, welche Ihre zuerst im Jahre 1866 erschienene »Einleitung in die moderne Chemie« hervorrief, denn eine neue Periode brach damit für die Vorlesungen über Experimental-Chemie an. Manche Fundamental-Thatsachen, wie namentlich die bei der Verbindung und Zersetzung gasförmiger Körper obwaltenden Volumverhältnisse, waren früher beim Unterrichte gänzlich ohne Demonstration geblieben. Durch die von Ihnen construirten Apparate, welche die betreffenden Versuche in leichter und eleganter Weise ausführen liessen, gelangten jene Beziehungen plötzlich in den Vordergrund, und alle Chemiker beeilten sich dieselben in ihren Lehrplan aufzunehmen. Noch viele andere Experimente haben Sie seitdem hinzugefügt, die ebenfalls zum Verständniss des Unterrichtes in hohem Grade beitragen.

Aber nicht allein durch Ihre Laboratoriumsarbeiten, sondern auch in anderer Weise haben Sie die Wissenschaft mächtig gefördert. Bald nach Beginn Ihrer Thätigkeit in Berlin gründeten Sie 1867 die Deutsche chemische Gesellschaft, welche innerhalb weniger Jahre mit beispiellosem Erfolge sich vergrössernd, heute über 3400 Mitglieder zählt, und deren Organ die umfangreichste und bedeutendste chemische Zeitschrift der Gegenwart geworden ist. Die Wirksamkeit dieser Gesellschaft hat sich allmählich sogar weit über die Gränzen Deutschlands hinaus erstreckt, Chemiker fast aller europäischer Staaten sowie Amerikas sind derselben beigetreten und bringen manche ihrer Arbeiten unter der Flagge deutscher Wissenschaft in die Öffentlichkeit. Diese Schöpfung, welche keinem Anderen gelungen wäre, bleibt ein Verdienst, für das Ihnen die chemische Welt stets grössten Dank schulden wird.

Noch einer weiteren eigenartigen Seite Ihrer Thätigkeit haben wir zu gedenken. Die deutsche chemische Gesellschaft hatte auf Ihre Veranlassung die schöne Sitte angenommen, in den Berichten eingehende Nekrologe der verstorbenen Mitglieder zu bringen. Im weitesten Umfange sind Sie selbst diesem Gebrauche gefolgt und haben zahlreichen Chemikern, welche einst auf kürzere oder längere Zeit Ihren Lebensweg theilten, bleibende Denkmäler gestiftet. Wer kennt nicht jene Erinnerungsblätter an vorangegangene Freunde, welche gleich ausgezeichnet sind durch die Anmuth der Sprache, wie durch das warme Interesse, mit welchem die Lebensverhältnisse und wissenschaftlichen Leistungen der Verstorbenen behandelt werden.

Auf diesen reichen Kranz von Schöpfungen blicken Sie, hochgeehrter Herr College, am Tage Ihres Jubiläums zurück. Der Werke sind schon längst weit mehr, als sonst die Kräfte eines Menschen zu leisten vermögen, aber trotzdem finden wir zu unserer Freude Ihre unvergleichliche Arbeitslust und Arbeitskraft in altgewohnter Weise erhalten. Wir sind der festen Überzeugung, dass dieseelbe noch lange Zeit der Wissenschaft zu Gute kommen wird und die Geschichte der Chemie einst eine noch grössere Dankesschuld zu verzeichnen hat, als diejenige ist, auf welche wir heute hinweisen konnten.

Die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften.

39. Über das Krystallsystem des Jordanits.

Von Dr. H. Baumhauer
in Lüdinghausen.

(Vorgelegt von Hrn. Klein am 22. October: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLI]: — ausgegeben am 29. October.)

In einer, der Königl. Akademie der Wissenschaften am 9. Juli d. J. vorgelegten Abhandlung »über sehr flächenreiche, wahrscheinlich dem Jordanit angehörige Krystalle aus dem Binnenthal« zeigte ich, dass das Krystallsystem des Jordanits höchst wahrscheinlich das monokline sei, und zwar mit Formen und Winkelverhältnissen, welche dem rhombischen System sehr nahe stehen. Das Axenverhältniss ermittelte ich zu:

$$a : b : c = 0.4944967 : 1 : 0.2655237$$
$$\beta = 89^\circ \; 26^1/_2{}'$$

Hr. Seligmann, dem ich auch die Überlassung der damals untersuchten Krystalle verdankte, erfreute mich nun bald darauf mit der Zusendung von fünf Jordanitkrystallen, deren Messung mich in Stand setzte, zu entscheiden:

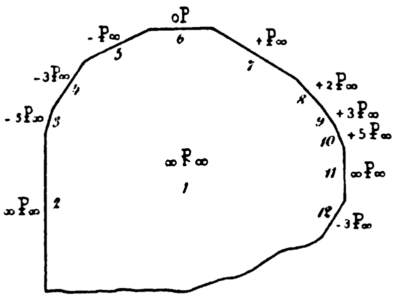
1. dass die früher gemessenen beiden flächenreichen Krystalle in der That dem Jordanit angehören, dass also
2. auch die älteren Vorkommnisse von Jordanitkrystallen in's monokline System einzureihen (somit definitiv aus dem rhombischen System zu streichen) sind.

Ausserdem war es mir möglich, noch einige interessante Beobachtungen über Zwillingsbildung am Jordanit zu machen, sowie ein paar neue bez. von mir bisher nicht gefundene Formen zu bestimmen, so dass die Zahl der von mir bisher beobachteten Formen des Jordanit von 88 auf 97 steigt.

Im Folgenden seien zunächst die an den einzelnen Krystallen gemachten Beobachtungen mitgetheilt.

Krystall I.

Derselbe wurde von Hrn. Seligmann im Jahre 1878 von dem bekannten Binnenthaler Mineraliensucher Thänisch erworben und stammt unzweifelhaft von dem alten Fundorte am Lengenbach bei Imfeld. Er ist tafelförmig nach dem Klinopinakoid (horizontale Dimensionen der Tafel etwa 5^{mm}, Dicke etwa 2^{mm}), die eine Klinopinakoidfläche sehr gut, die andere wenig vollkommen ausgebildet. Die Flächen sind im allgemeinen spiegelnd, diejenigen der Zone $\infty P \infty : oP$ jedoch matt. Beistehender Aufriss auf das Klinopinakoid zeigt die vorhandenen Zonen,



soweit dieselben eine sichere Bestimmung zuliessen; jedoch sind dieselben nicht alle so gut ausgebildet, um daran eingehendere Messungen machen zu können. Es wurden folgende Zonen durchgemessen:

1. $\infty P \infty : o P$ (100) : (001)
2. $\infty P \infty : \infty P \infty$ (010) : (100)
3. $\infty P \infty : -5 P \infty$ (010) : (501)
4. $\infty P \infty : -3 P \infty$ (010) : (301)
5. $\infty P \infty : -P \infty$ (010) : (101)
6. $\infty P \infty : +P \infty$ (010) : (10$\bar{1}$)

1. Zone $\infty P \infty : oP$ (in der Figur 2 : 6):

Es wurde gemessen:

		berechnet
$\infty P \infty (2) : -5 P \infty (3)$	= 20° 21′	20° 21′ 36″
$-5 P \infty (3) : -3 P \infty (4)$	= 11° 20′	11° 18′ 55″
$-3 P \infty (4) : -P \infty (5)$	= 29° 43′	29° 39′ 29″
$+2 P \infty (8) : +3 P \infty (9)$	= 11° 14′	11° 13′ 55″
$+3 P \infty (9) : +5 P \infty (10)$	= 11° 32′	11° 29′ 24″
$+5 P \infty (10) : \infty P \infty (11)$	= 20° 31 3/4′	20° 29′ 46″
$\infty P \infty (11) : -3 P \infty (12)$	= 31° 36 3/4′	31° 40′ 31″

Hieraus folgt noch:

$\infty P \infty (2) : -3 P \infty (4)$	= 31° 41′	31° 40′ 31″
$\infty P \infty (2) : -P \infty (5)$	= 61° 24′	61° 20′ 0″
$+3 P \infty (9) : \infty P \infty (11)$	= 32° 3 3/4′	31° 59′ 10″

2. Zone $\infty P \infty : \infty P \infty$ (i. d. F. 1 : 2 bez. 1 : 11):

	gefunden		berechnet
$\infty P \infty : \infty P 15/2$	= 15° 4′		15° 5′ 27″
" $: \infty P 11/2$	= 20° 9 1/2′		20° 11′ 19″
" $: \infty P 5$	= 22° 0′, 1′; M. 22° 0 1/2′		22° 1′ 19″
" $: \infty P 9/2$	= 24° 10′, 13 1/2′; M. 24° 11 3/4′		24° 11′ 59″
" $: \infty P 4$	= 26° 51′		26° 49′ 14″
" $: \infty P 7/2$	= 30° 0′, 2′; M. 30° 1′		30° 1′ 12″
" $: \infty P 3$	= 33° 57′, 34° 0 1/2′; M. 33° 58 3/4′		33° 59′ 5″
" $: \infty P 5/2$	= 38° 55′, 59 1/4′, 59 1/2′; 39° 2 1/2′;	M. 38° 59′ 4″	38° 58′ 15″
" $: \infty P 2$	= 45° 16 1/2′, 18′, 21′;	" 45° 18 1/2′	45° 19′ 6″
" $: \infty P 3/2$	= 53° 24′, 28 1/2′;	" 53° 26 1/4′	53° 26′ 7″
" $: \infty P$	= 63° 39′, 42′, 43 1/2′, 43 1/2′;	" 63° 42′	63° 41′ 20″
" $: \infty P 2$	= 76° 3′, 6′, 10′, 12′;	" 76° 7 3/4′	76° 6′ 46″
" $: \infty P \infty$	= 89° 53 1/2′; 90° 0′, 2′, 5′;	" 90° 0′ 7″.5	90° 0′ 0″

Interessant ist es auch, die direct gemessenen Prismenwinkel (falls eine Form mit allen oder doch zwei nicht parallelen Flächen auftrat) mit den berechneten zu vergleichen. So fand ich diesen Winkel für:

			berechnet
$\infty P 2$ =	$27^\circ 44', 45\frac{1}{2}'$;	M. $27^\circ 44\frac{3}{4}'$	$27^\circ 46' 28''$
∞P =	$52^\circ 36', 36\frac{1}{2}'$;	» $52^\circ 36\frac{1}{4}'$	$52^\circ 37' 20''$
$\infty P \frac{3}{2}$ =	$73^\circ 6'$		$73^\circ 7' 46''$
$\infty P 2$ =	$89^\circ 21'$		$89^\circ 21' 48''$
$\infty P \frac{5}{2}$ =	$101^\circ 59\frac{3}{4}'$; $102^\circ 4\frac{1}{2}'$;	» $102^\circ 2' 7''5$	$102^\circ 3' 30''$

3. Zone $\infty P \infty : -5 P \infty$ (i. d. F. 1 : 3):

Diese Zone ist für den Jordanit neu. Ich beobachtete ausser $-5 P \infty$ nur noch $-5 P \frac{5}{2}$.

	gefunden	berechnet
$\infty P \infty : -5 P \infty$ =	$89^\circ 57\frac{3}{4}'$	$90^\circ 0' 0''$
» $: -5 P \frac{5}{2}$ =	$79^\circ 32\frac{1}{2}'$, $33\frac{1}{2}'$; M. $79^\circ 33'$	$79^\circ 31' 55''$

Der Polkantenwinkel von $-5 P \frac{5}{2}$ wurde bei directer Messung zu $20^\circ 54'$ gefunden (ber. $20^\circ 56' 10''$).

4. Zone $\infty P \infty : -3 P \infty$ (i. d. F. 1 : 4):

	gefunden		berechnet	
$\infty P \infty : -8 P \frac{8}{3}$ =	$41^\circ 48'$, $52\frac{1}{2}'$;	M. $41^\circ 50\frac{1}{4}'$	$41^\circ 52' 36''$	(für $+8 P \frac{8}{3}$ $41^\circ 37' 42''$)
» $: -7 P \frac{7}{3}$ =	$45^\circ 35'$, $41\frac{1}{2}'$;	» $45^\circ 38\frac{1}{4}'$	$45^\circ 41' 45''$	(» $+7 P \frac{7}{3}$ $45^\circ 26' 45''$)
» $: -6 P 2$ =	$50^\circ 2\frac{1}{2}'$, $3\frac{1}{2}'$;	» $50^\circ 3'$	$50^\circ 5' 7''$	(» $+6 P 2$ $49^\circ 50' 20''$)
» $: -5 P \frac{5}{3}$ =	$55^\circ 2\frac{1}{2}'$		$55^\circ 7' 5''$	(» $+5 P \frac{5}{3}$ $54^\circ 52' 59''$)
» $: -4 P \frac{4}{3}$ =	$60^\circ 51'$, $52'$;	» $60^\circ 51\frac{1}{2}'$	$60^\circ 51' 4''$	(» $+4 P \frac{4}{3}$ $60^\circ 38' 16''$)
» $: -3 P$ =	$67^\circ 11'$, $15\frac{1}{2}'$;	» $67^\circ 13\frac{1}{4}'$	$67^\circ 18' 4''$	(» $+3 P$ $67^\circ 7' 21''$)
» $: -3 P \frac{3}{2}$ =	$74^\circ 24'$, $26\frac{1}{2}'$;	» $74^\circ 25\frac{1}{4}'$	$74^\circ 25' 7''$	(» $+3 P \frac{3}{2}$ $74^\circ 17' 19''$)
» $: -3 P 3$ =	$82^\circ 4\frac{1}{2}'$		$82^\circ 3' 45''$	(» $+3 P 3$ $81^\circ 59' 38''$)
» $: -3 P \infty$ =	$89^\circ 59'$; $90^\circ 1\frac{1}{2}'$;	» $90^\circ 0\frac{1}{4}'$	$90^\circ 0' 0''$	

Die beiden Klinopinakoidflächen ergaben in dieser Zone eine Neigung von $180^\circ 0\frac{1}{2}'$, können also als genau parallel betrachtet werden. Die beiden Formen $-8 P \frac{8}{3}$ und $-7 P \frac{7}{3}$ wurden von mir noch nicht beobachtet, doch ist nur die erstere für den Jordanit neu, während die zweite schon von vom Rath angegeben und dessen Auffassung gemäss mit $\frac{3}{7} P 3$ bezeichnet wurde.

Der Vergleich der beobachteten Winkel mit den für die negativen wie für die entsprechenden positiven Pyramiden berechneten Werthen ergibt fast durchgehends die deutliche Übereinstimmung mit den beiden früher von mir untersuchten Krystallen. Auch die direct gemessenen Polkantenwinkel geben meist gute Übereinstimmung; ich fand für:

$-3 P \frac{3}{2}$	$31^\circ 10'$	(ber. $31^\circ 9' 46''$)
$-3 P$	$45^\circ 34'$	(» $45^\circ 23' 52''$)
$-4 P \frac{4}{3}$	$58^\circ 17\frac{1}{2}'$	(» $58^\circ 17' 52''$)
$-6 P 2$	$79^\circ 54\frac{1}{2}'$	(» $79^\circ 49' 46''$)

5. Zone $\infty P \infty : -P\infty$ (i. d. F. 1 : 5):

Auch in dieser Zone ergaben die beiden Klinopinakoidflächen eine gegenseitige Neigung von 180° 0½′. Es wurden der Reihe nach von der grösseren zur kleineren Fläche $\infty P \infty$ folgende Winkel der in dieser Zone liegenden Pyramidenflächen zu dem entsprechenden Klinopinakoid gemessen:

		berechnet
1. — 10P10	= 23° 10½′	23° 13′ 49″
2. — 8P8	= 28° 9½′	28° 12′ 54″
3. — 7P7	= 31° 29½′	31° 30′ 57″
4. — 6P6	= 35° 34½′	35° 34′ 45″
5. — 5P5	= 40° 40′	40° 38′ 40″
6. — 4P4	= 46° 59′	47° 1′ 7″
7. ?	= 54° 57′	— 3P3 = 55° 2′ 57″ + 3P3 = 54° 49′ 49″
8. + 2P2	= 64° 46½′	64° 50′ 17″
9. + P	= 76° 46′	76° 46′ 56″
11. — P	= 76° 53½′	76° 53′ 7″
12. — 2P2	= 65° 1′	65° 1′ 0″
13. + 3P3	= 54° 50′	54° 49′ 49″
14. — 4P4	= 47° 2½′	47° 1′ 7″

(Nebenreflex auf 14 = 46° 51½′, für + 4P4 ber. 46° 47′ 11″)

Die hier aufgeführten Flächen 1—14 liegen unter sich und mit $\infty P \infty$ gut in einer Zone; jedenfalls sind etwaige Abweichungen äusserst gering. Während aber 1—6 höchstens eine Differenz von 3½′ gegen die berechneten Werthe zeigen, weist Fläche 7 einen Neigungswinkel auf, welcher fast genau das Mittel aus den Winkeln für — und + 3P3 (54° 56′ 23″) beträgt. Durch diese Fläche geht nun parallel zur Kante mit dem Klinopinakoid eine feine, unter dem Mikroskop deutlich wahrnehmbare Linie, deren Beobachtung mich auf den Gedanken brachte, es könne hier eine Zwillingsverwachsung vorliegen, derart, dass die Zone $\infty P \infty : -P\infty$ mit der Zone $\infty P \infty : +P\infty$ eines lamellar eingeschalteten Individuums, dessen Klinopinakoid mit dem des Stammindividuums parallel liegt, zusammenfalle. Die Fläche 8 entspricht denn auch besser + 2P2 als — 2P2 (ber. 65° 1′), desgleichen Fläche 9 der Form + P. Die nun folgende Fläche, welche jedoch in obiger Reihe nicht aufgeführt ist, also zwischen 9 und 10 liegt, gibt zwei nicht sehr scharfe Reflexe (89° 52′ und 89° 34½′). Obgleich keiner derselben genau für $\mp P\infty$ (90° 0′) passt, so ist die betreffende Fläche doch unzweifelhaft als Hemidoma aufzufassen. Sie erscheint nun wieder (ebenso wie 7) durch eine Linie getheilt: möglicherweise liegt also hier eine zweite Zwillingsgrenze vor. Dann folgen als 11 und 12 bestimmt — P und — 2P2, während 13 wieder eine Linie aufweist und ihr Reflex + 3P3 entspricht. Fläche 14 scheint in zwei ungleiche Abschnitte zu zerfallen, nämlich in einen schmalen, an 13 anliegenden Theil, welcher einen Nebenreflex (für $+4P4$ stimmend) liefert, und in einen breiteren, welchem der Hauptreflex für $-4P4$ angehört. Die Flächen 8, 11 und 12 sind einheitlich. Auffallend ist nur noch, dass auch 9 eine Linie zeigt; vielleicht besteht dieselbe aber aus einer feinen Doppellinie und entspricht dann einer sehr schmalen eingeschalteten Lamelle. Da die Flächen dieser, wie auch der übrigen Zonen sehr schmal sind, so ist die Beobachtung der hier geschilderten Verhältnisse immerhin eine schwierige. Zudem konnte ich etwas Ähnliches an keinem der übrigen Krystalle constatiren. Dennoch möchte ich die Annahme einer eigenartigen Zwillingsbildung in dem vorliegenden Falle als berechtigt betrachten.

Eine Verwachsung dieser Art, bei welcher die Zone $\infty P\infty : +P\infty$ des einen Individuums mit der Zone $\infty P\infty : -P\infty$ des andern zusammenfällt, ist nicht auf eine krystallonomisch mögliche Fläche als Zwillingsebene zurückführbar. Als Zwillingsebene könnte dabei nur eine Fläche fungiren, welche den Winkel $+P\infty : -P\infty$ entweder halbirt oder gerade abstumpft, also eine krystallographisch nicht mögliche Fläche. Beide Individuen haben nun das Klinopinakoid gemein, und das eine ist gegen das andere um die Orthodiagonale um einen Winkel von $56° 28'$ ($-P\infty : +P\infty$) gedreht. Tritt hierzu noch eine weitere Drehung um 180° um diejenige Zonenaxe $\infty P\infty : \mp P\infty$, welche in Folge der ersten Drehung bei beiden Individuen parallel läuft, so resultirt dieselbe gegenseitige Lage, welche erhalten würde, wenn eine der eben erwähnten als Krystallflächen nicht möglichen Flächen die Rolle der Zwillingsebene spielte. Dann würden auch, was natürlich in Folge der ersten Drehung noch nicht geschieht, die beiden Zonen $\infty P\infty : -P\infty$ und $\infty P\infty : +P\infty$ beider Individuen wechselweise zusammenfallen, die Verwachsung wäre also eine solche, welche die Symmetrie des rhombischen Systems möglichst nachahmte. Ob in Wirklichkeit diese gegenseitige Lage oder nur die durch die erstgenannte Drehung herbeigeführte erreicht wird, konnte ich nicht entscheiden, da die übrigen durchgemessenen Zonen des Krystalles keine Zwillungsbildung erkennen liessen, die letztere also nur auf verhältnissmässig kurze, in einer einzigen Zone zu verfolgende Lamellen beschränkt geblieben ist. Auf jeden Fall handelt es sich hier um eine ähnliche Verwachsung, wie sie von Brögger am Hydrargillit (fünftes Zwillingsgesetz desselben) und von mir am Kryolith beobachtet wurde. In der Zeitschrift für Krystallographie (**18**, 359) habe ich über diese Arten der Verbindung zweier Individuen im monoklinen System eine kurze Betrachtung mitgetheilt.

Von den oben aufgeführten Flächen durch eine breitere muschelige Bruchstelle getrennt, findet sich noch eine Fläche dieser Zone, welche direct an die kleinere Fläche $\infty P \infty$ anstösst und damit einen Winkel von $16^\circ\ 58^1/_2{}'$ bildet. Sie ist auf $-14 P 14$ zurückzuführen, eine neue Form, deren Neigung zum Klinopinakoid sich zu $17^\circ\ 2'\ 42''$ berechnet.

6. Zone: $\infty P \infty : + P \infty$ (i. d. Fig. 1 : 7).

In dieser Zone maass ich folgende Winkel:

	berechnet
$\infty P \infty : + 11 P 11 = 21^\circ\ 10'$	$21^\circ\ 9'\ 32''$
» $: + {}^{32}/_3 P\ {}^{32}/_3$ (neu!) $= 21^\circ\ 49'$	$21^\circ\ 45'\ 33''$
» $: + 10 P 10 = 23^\circ\ 3', 4^1/_2{}'$; M. $23^\circ\ 3\ 3/4'$	$23^\circ\ 3'\ 43''$
» $: + 9 P 9 = 25^\circ\ 23', 23'$; M. $25^\circ\ 23'$	$25^\circ\ 19'\ 1''$
» $: + 8 P 8 = 28^\circ\ 1^1/_2{}'$	$28^\circ\ 1'\ 18''$
» $: + 7 P 7 = 31^\circ\ 17^1/_2{}', 18'$; M. $31^\circ\ 17\ 3/4'$	$31^\circ\ 18'\ 32''$
» $: + 6 P 6 = 35^\circ\ 20'$	$35^\circ\ 21'\ 33''$
» $: + 5 P 5 = 40^\circ\ 25^1/_2{}'$	$40^\circ\ 24'\ 53''$
» $: + 3 P 3 = 54^\circ\ 47^1/_4{}'$	$54^\circ\ 49'\ 49''$
» $: + 2 P 2 = 64^\circ\ 46'$	$64^\circ\ 50'\ 17''$

Folgende Polkantenwinkel wurden direct bestimmt:

$+ 10 P 10 = 133^\circ\ 50^1/_2{}'$ (ber. $133^\circ\ 52'\ 34''$)
$+ 9 P 9 = 129^\circ\ 12^1/_2{}'$ (» $129^\circ\ 21'\ 58''$, für $- 9 P 9$ $129^\circ\ 0'\ 20''$)
$+ 7 P 7 = 117^\circ\ 23^1/_2{}'$ (» $117^\circ\ 22'\ 56''$)

Nur derjenige von $+ 9 P 9$ weicht beträchtlicher von dem berechneten ab, entfernt sich aber doch noch etwas mehr von dem für $- 9 P 9$ geforderten Werthe.

Die auf den Flächen der Prismenzone dieses Krystalles deutlich wahrnehmbaren Zwillingslamellen (nach dem vom Rath'schen Gesetze) verlaufen nur nach einer Richtung, nämlich parallel $+ P \infty$. Auch an dem früher von mir beschriebenen Krystalle (II) gehen die Zwillingslamellen dieser Fläche, nicht aber auch $- P \infty$, parallel. Bemerkenswerth ist, dass auch vom Rath in die Abbildungen der von ihm gemessenen Jordanitkrystalle stets nur Lamellen einer Richtung eingetragen hat, und nirgendwo bemerkt, dass die Zwillingsbildung nach beiden Flächen des rhombischen Prismas ∞P, als welches er ja unsere Formen $\pm P \infty$ auffasste, stattfinde. Dass es sich in der That hier nur um eine Zwillingsverwachsung nach $+ P \infty$ handelt, dafür sprechen auch ausnahmslos die an den folgenden Krystallen gemachten Wahrnehmungen.

Krystall II.

Dieser prächtig glänzende, tafelförmige, im grössten Durchmesser etwa 7^{mm} messende Krystall sitzt mit einem schönen, etwas grössern Blendekrystall und einem kleineren, klaren Quarz auf einem Stücke des bekannten Dolomits, welcher von feinen Schnüren von Blende und Schwefelkies durchzogen ist. Die sehr hübsche Stufe wurde von Hrn. Seligmann im Jahre 1875 von dem Pfarrer Walpen in Binn erworben; sie stammt, ebenso wie Krystall I, von dem alten Fundort am Lengenbache bei Imfeld. Die im Folgenden mitgetheilten Messungen wurden in der Weise ermöglicht, dass die ganze Stufe mit Hülfe eines zu dem Zwecke hergestellten grossen Tischchens auf das Goniometer aufgesetzt wurde. Doch konnte so wegen der Lage des Krystalles nur eine Zone vollständig und in einer zweiten nur ein Winkel gemessen werden. Im letztern Falle wirkten auch die zahlreichen, zum Theil ziemlich breiten, die betreffende Zone durchsetzenden Zwillingslamellen störend. Ich fand nun:

		berechnet
$\infty\bar{P}\infty : +14\bar{P}14$	$= 16^\circ\ 50'$	$16^\circ\ 54'\ 54''$
„ $: +10\bar{P}10$	$= 23^\circ\ 5^1/_4{}'$	$23^\circ\ 3'\ 43''$
„ $: +6\bar{P}6$	$= 35^\circ\ 25'$	$35^\circ\ 21'\ 33''$
„ $: +5\bar{P}5$	$= 40^\circ\ 16^1/_4{}'$	$40^\circ\ 24'\ 53''$
„ $: +4\bar{P}4$	$= 46^\circ\ 49^3/_4{}'$	$46^\circ\ 47'\ 11''$
„ $: +3\bar{P}3$	$= 54^\circ\ 49^1/_4{}'$	$54^\circ\ 49'\ 49''$
„ $: +2\bar{P}2$	$= 64^\circ\ 42^3/_4{}',\ 53^3/_4{}'$; M. $64^\circ\ 48^1/_4{}'$	$64^\circ\ 50'\ 17''$
„ $: +P$	$= 76^\circ\ 43^3/_4{}',\ 50^3/_4{}'$; „ $76^\circ\ 47^1/_4{}'$	$76^\circ\ 46'\ 56''$
„ $: +\bar{P}\infty$	$= 90^\circ\ 0^1/_4{}'$	$90^\circ\ 0'\ 0''$

Im allgemeinen ist die Übereinstimmung zwischen Messung und Rechnung eine befriedigende. Folgende Polkanten wurden direct gemessen:

$+P = 26^\circ\ 25^1/_2{}'$ (ber. $26^\circ\ 26'\ 8''$)
$+2\bar{P}2 = 50^\circ\ 23^1/_2{}'$ („ $50^\circ\ 19'\ 26''$)

In der zweiten, benachbarten Zone wurde nur gemessen:

$\infty\bar{P}\infty : -10\bar{P}10 = 23^\circ\ 14'$ (ber. $23^\circ\ 13'\ 49''$)

Die Zwillingslamellen, welche die letztere Zone durchschneiden, gehen der Fläche $+\bar{P}\infty$ parallel.

Krystall III.

Dieses dicktafelförmige Krystallfragment zeigt nur zwei, mehr oder weniger unverletzte Seiten mit meist schmalen Flächen, von welchen die eine der Prismenzone, die andere der positiven Pyramidenzone entspricht. Die beiden Flächen $\infty\bar{P}\infty$ bilden in der ersten Zone einen Winkel von $180^\circ\ 0^1/_4{}'$, in der zweiten einen solchen von $180^\circ\ 0'$, sind also genau parallel.

1. Zone $\infty\bar{P}\infty : \infty P\infty$

		berechnet
$\infty\bar{P}\infty : \infty\bar{P}3$	$= 33^\circ\ 57^1/_2{}'$	$33^\circ\ 59'\ 5''$
„ $: \infty\bar{P}2$	$= 45^\circ\ 20'$	$45^\circ\ 19'\ 6''$
„ $: \infty P$	$= 63^\circ\ 42^3/_4{}',\ 44^1/_4{}'$; M. $63^\circ\ 43^1/_2{}'$	$63^\circ\ 41'\ 20''$
„ $: \infty\bar{P}2$	$= 76^\circ\ 3^3/_4{}',\ 9^1/_2{}'$; „ $76^\circ\ 6'\ 37''.5$	$76^\circ\ 6'\ 46''$
„ $: \infty\bar{P}\infty$	$= 89^\circ\ 57^3/_4{}'$; $90^\circ\ 2^1/_2{}'$; „ $90^\circ\ 0'\ 7''.5$	$90^\circ\ 0'\ 0''$

Ich erhielt folgende Prismenwinkel:

∞P	= 52° 33 1/4′	(ber. 52° 37′ 20″)
∞P̀2	= 27° 47′	(„ 27° 46′ 28″)

2. Zone ∞P̀∞ : + P̀∞

		berechnet
∞P̀∞ : + 5P̀5	= 40° 22′	40° 24′ 53″
„ : + 3P̀3	= 54° 43′, 50 1/2′; M. 54° 46 3/4′	54° 49′ 49″
„ : + 2P̀2	= 64° 54′	64° 50′ 17″
„ : + P	= 76° 46 1/2′, 49′; „ 76° 47 3/4′	76° 46′ 56″
„ : + P̀∞	= 89° 57′; 90° 3′; „ 90° 0′	90° 0′ 0″

Es wurden folgende Polkantenwinkel erhalten:

+ 3P̀3	= 70° 26 1/2′	(ber. 70° 20′ 22″, für — 3P̀3 69° 54′ 6″)
+ P	= 26° 24 1/2′	(„ 26° 26′ 8″, „ — P 26° 13′ 46″)

Die Zwillingslamellen, welche auf den Flächen der Prismenzone deutlich auftreten und theilweise auch auf dem Klinopinakoid sichtbar sind, gehen auch hier dem Hemidoma + P̀∞ parallel.

Krystall IV.

An diesem Fragment erscheinen drei Seiten der scheinbar hexagonalen Tafel, welche der Prismenzone, sowie den Zonen ∞P̀∞ : — P̀∞ und ∞P̀∞ : + P̀∞ entsprechen. Die beiden Klinopinakoidflächen sind nicht genau parallel, sondern bilden in der Prismenzone gemessen — wobei die kleiner ausgebildete ∞P̀∞ nicht genau in der Zone erscheint — einen Winkel von 179° 50′. Bei den betreffenden Messungen wurde von der grösseren Klinopinakoidfläche ausgegangen. Ich fand folgende Neigungen zu derselben:

		berechnet
∞P̀4	= 26° 40′	26° 49′ 14″
∞P̀ 7/2	= 29° 49′	30° 1′ 12″
∞P̀3	= 33° 51 1/2′; 34° 8′; M. 33° 59 3/4′	33° 59′ 5″
∞P̀ 5/2	= 38° 51′; 39° 3 1/2′; M. 38° 57 1/4′	38° 58′ 15″
∞P̀2	= 45° 12′; 25 1/2′; M. 45° 18 3/4′	45° 19′ 6″
∞P̀ 3/2	= 53° 31 1/2′	53° 26′ 7″
∞P	= 63° 32′	63° 41′ 20″
∞P2	= 76° 1′	76° 6′ 46″
∞P̀∞	= 89° 56 1/2′	90° 0′ 0″

Folgende Prismenwinkel wurden direct beobachtet:

∞P̀2	= 89° 22 1/2′	(ber. 89° 21′ 48″)
∞P̀ 5/2	= 102° 5 1/2′	(„ 102° 3′ 30″)
∞P̀3	= 112° 0 1/2′	(„ 112° 1′ 50″)

2. Zone ∞P̀∞ : — P̀∞.

Hier liegen alle Flächen mit Ausnahme der grösseren ∞P̀∞, deren Hauptreflex ein wenig abweicht, genau in der Zone. Abgesehen von jener geringen Abweichung bilden die beiden Klinopinakoidflächen, in dieser Zone gemessen, einen Winkel von $180^\circ\ 0^1/_2'$, sind also soweit genau parallel. Geht man stets von der kleineren Fläche $\infty P \infty$ aus, so findet man folgende Neigungen zu derselben:

	berechnet
$-6P6 = 35^\circ\ 31^1/_2'$, $39'$; M. $35^\circ\ 35^1/_4'$	$35^\circ\ 34'\ 45''$
$-5P5 = 40^\circ\ 36'$	$40^\circ\ 38'\ 40''$
$-4P4 = 47^\circ\ 7^1/_2'$	$47^\circ\ 1'\ 7''$
$-3P3 = 55^\circ\ 1'$	$55^\circ\ 2'\ 57''$
$-2P2 = 64^\circ\ 56'$; $65^\circ\ 3'$; M. $64^\circ\ 59^1/_2'$	$65^\circ\ 1'\ 0''$
$-\ P = 76^\circ\ 47'$, $56^1/_2'$; M. $76^\circ\ 51^3/_4'$	$76^\circ\ 53'\ 7''$

Bei directer Messung erhielt ich folgende Polkantenwinkel:

$-P$	$= 26^\circ\ 16^1/_2'$	(ber. $26^\circ\ 13'\ 46''$, für $+P$ $26^\circ\ 26'\ 8''$)
$-2P2$	$= 50^\circ\ 1'$	(» $49^\circ\ 58'\ 0''$, » $+2P2$ $50^\circ\ 19'\ 26''$)
$-6P6$	$= 108^\circ\ 49^1/_2'$	(» $108^\circ\ 50'\ 30''$, » $+6P6$ $109^\circ\ 16'\ 54''$)

3. Zone $\infty P \infty : + P \infty$.

Da in dieser Zone die beiden Klinopinakoidflächen nicht genau parallel erscheinen, die grössere derselben überdies zwei fast gleich helle und einen dritten, weit schwächeren Reflex gab, so führe ich nur die direct gemessenen Polkantenwinkel an; es ergab sich:

$+P$	$= 26^\circ\ 32^1/_2'$	(ber. $26^\circ\ 26'\ 8''$, für $-P$ $26^\circ\ 13'\ 46''$)
$+3P3$	$= 70^\circ\ 24^1/_4'$	(» $70^\circ\ 20'\ 22''$, » $-3P3$ $69^\circ\ 54'\ 6''$)

Ich fand ferner:

	berechnet
$+3P3 : +P = 21^\circ\ 54'$, $57^3/_4'$; M. $21^\circ\ 55'\ 52''.5$	$21^\circ\ 57'\ 7''$
$+3P3 : +4P4 = 8^\circ\ 0^1/_2'$	$8^\circ\ 2'\ 38''$
$+3P3 : +6P6 = 19^\circ\ 27^3/_4'$	$19^\circ\ 28'\ 16''$

Die auf der Prismenzone sichtbaren Zwillingslamellen gehen auch hier parallel zu $+P\infty$.

Krystall V.

An diesem, etwa 9^{mm} grossen, mit einem schönen Blendekrystall verwachsenen Krystallbruchstück sind zwei Zonen ausgebildet, doch stellte ich nur in einer von beiden Messungen an. Die Flächen sind mit feinen, dichtgedrängten Vertiefungen (Ätzfiguren?) bedeckt. Die grössere Klinopinakoidfläche ist eigenthümlich schalig aufgesetzt, zur Messung nicht geeignet, die andere nur sehr klein ausgebildet. Nach der Lage der Zwillingslamellen zu urtheilen, gehört der Zone, in welcher die Messungen angestellt wurden, die Fläche $+P\infty$ an; es handelt sich also um positive Hemipyramiden. Ich fand:

	berechnet
$+2P2 : +2P'2 = 50^\circ\ 18^1/_2'$	$50^\circ\ 19'\ 26''$
$+2P2 : +P = 11^\circ\ 49^3/_4'$ (2. Refl. $11^\circ\ 54^1/_4'$)	$11^\circ\ 56'\ 39''$
$+2P2 : +{}^5/_2P{}^5/_2 = 5^\circ\ 19^1/_2'$ (2. Refl. $5^\circ\ 15'$)	$5^\circ\ 15'\ 33''$
$+{}^5/_2P{}^5/_2 : +3P3 = 4^\circ\ 40^3/_4'$	$4^\circ\ 44'\ 55''$
$+3P3 : +5P5 = 14^\circ\ 28^1/_2'$	$14^\circ\ 24'\ 56''$

$+ \frac{5}{2} P \frac{5}{2}$ wurde von mir früher noch nicht beobachtet, wohl aber von Lewis, welcher diese Form, dem rhombischen System entsprechend, als $\frac{2}{5}$ P auffasste.

Aus Vorstehendem ergibt sich wohl mit aller Bestimmtheit, dass die hier beschriebenen Jordanitkrystalle dem von mir ermittelten monoklinen Axenverhältnisse entsprechen, dass also in der That, wie ich vermuthete, die beiden früher von mir untersuchten, vorzüglich ausgebildeten Krystalle dem Jordanit angehören.

Als eine Thatsache von besonderem Interesse ist zu verzeichnen, dass die Zwillingsbildung, welche für den Jordanit so charakteristisch ist, stets nur nach $+ P\infty$, nicht aber nach $- P\infty$ stattfindet. Während also der Jordanit im übrigen sich so sehr dem rhombischen System nähert, dass selbst ein so ausgezeichneter Beobachter, wie vom Rath, seine Zugehörigkeit zum monoklinen System übersehen konnte, zeigt er durch diese, wenn ich sagen darf, einseitige Zwillingsbildung jene Zugehörigkeit auf das bestimmteste. Denkt man sich, der Jordanit sei, ursprünglich dem rhombischen System angehörend, in Folge irgend einer Veränderung äusserer Umstände (der Temperatur?) in das monokline System übergegangen, so muss man annehmen, dass die gewöhnliche lamellare Zwillingsbildung erst mit diesem Übergange eingetreten sei. Denn sonst wäre bestimmt zu erwarten, dass diese Zwillingsbildung nicht nur nach $+ P\infty$, sondern auch nach $- P\infty$ stattfände, da $\mp P\infty$ vorher ein rhombisches Prisma bildeten.

Die Thatsache dieser einseitigen Zwillingsbildung wirft nun auch auf den Umstand ein Licht, dass vom Rath nur die Neigungswinkel negativer Hemipyramiden zum Klinopinakoid angibt. Der erste von ihm[1] gemessene Krystall war ein sehr regelmässig gebauter Zwilling, dessen beide Individuen gleich stark entwickelt waren. Wie Fig. 6 Taf. III der betreffenden Abhandlung lehrt, musste der aufgewachsene Krystall an dem freien Ende zwei negative Pyramidenzonen zeigen, welche sich nun der Messung zuerst darboten. Denn die Zwillingsebene, parallel $+ P\infty$, liegt in der Richtung der beiden Seiten der Tafel, welche direct an das aufgewachsene Ende derselben anstossen; sie halbirt genau den Krystall, und die beiden das freie Ende bildenden Zonen sind in Folge der Zwillingsbildung gleichartig. So wird es zu erklären sein, dass vom Rath die dem monoklinen System entsprechende Verschiedenheit der beiden Pyramidenzonen übersah und demnach den Jordanit dem rhombischen System zuwies.

---

[1] Poggendorff's Annalen u. s. w. 122, 387.

Zu den von mir bisher schon beobachteten Formen des Jordanit treten nun nach den Ergebnissen der vorliegenden Untersuchung folgende hinzu (über die Signatur vergl. meine frühere Mittheilung):

$-5h = -5P\infty$	$-7x = -7P7/3$
$+5h = +5P\infty$	$-8x = -8P8/3$
$15/2r = \infty P15/2$	$-5v = -5P5/2$
$+5/2q = +5/2P5/2$	$-14q = -14P14$
$+3^2/3q = +3^2/3P3^2/3$	

Von diesen Formen wurde schon früher $-7P7/3$ von VOM RATH und $+5/2P5/2$ von LEWIS beobachtet und als $3/7\breve{P}3$ bez. $2/5P$ aufgefasst, die übrigen sind neu.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

INHALTSVERZEICHNISS.

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE

aus den Jahren 1889, 1890, 1891.

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissensch... wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden ... zuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher ang... des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Au... Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHE...

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHA...

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet... Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Natur... in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgl... fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. A... Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adre... und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weitere... heften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück... Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesell... Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständig... berichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« ... zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nach...

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Natur... Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal...
die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,
» » » Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,
» » » October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich ... des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1890 nicht zugekommen sein sollten, ... hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Re... Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1891 angebr...

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des ... zuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Georg Reimer in Berlin erscheinen in wöchentliche...

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSEN...

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 *M.*

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHE...

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFT...

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 *M.*

Georg Reimer's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern de... oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese S... der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, ... Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbs... Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct ... Buchhandlung in Verbindung setzen.

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT IX.

NOVEMBER 1891.

BERLIN 1891.

VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung **druckfertig** vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.

40. Weitere Beiträge zur Kenntniss der schwach elektrischen Fische.

Von Prof. Gustav Fritsch
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. du Bois-Reymond am 22. October: — gedruckt im Bericht vom 5. November [St. XLIV]; — ausgegeben am 3. December.)

Nachdem durch die früheren Untersuchungen die Arten der Gattung *Mormyrus* als unzweifelhaft elektrisch festgestellt waren, musste es von Wichtigkeit erscheinen, auch die Stromesrichtung bei ihnen zu bestimmen, um sie mit den anderen, bereits besser gekannten elektrischen Fischen in Vergleichung bringen zu können. Die Frage nach der Stromesrichtung bei den Mormyriden stand daher bei meiner letzten wissenschaftlichen Reise nach Aegypten an erster Stelle auf der Tagesordnung. Als die Beantwortung derselben durch ein Zusammentreffen glücklicher Umstände in verhältnissmässig kurzer Zeit gelungen war, berichtete ich über das Ergebniss der Untersuchung unverweilt in die Heimath und Hr. E. du Bois-Reymond hatte die Güte dasselbe zur öffentlichen Kenntniss zu bringen.[1] In dem Bericht wurden von ihm die wichtigsten Punkte der Vergleichung mit den andern elektrischen Fischen übersichtlich dargelegt, so dass ich in dieser Hinsicht auf die angeführte Mittheilung verweisen kann. Ebenso wurde auch der instrumentellen Ausrüstung gedacht, mit welcher ich die Untersuchungen unternahm und das Hauptergebniss mitgetheilt.

Es stellte sich heraus, dass bei den Mormyriden der elektrische Strom im Körper des Fisches vom Schwanz zum Kopf verläuft, d. h. also sich ebenso verhält wie bei *Torpedo* und *Gymnotus*, da die nervösen Glieder der elektrischen Platten hinten (caudalwärts) lagern, und somit wie bei den genannten Gattungen der Pacini'schen Regel folgt. Auch bei *Mormyrus* ist das Material für die Entwickelung der elektrischen Organe in gleicher Weise wie bei *Torpedo* und *Gymnotus* der Skeletmusculatur entnommen, der übereinstimmenden Anlage ent-

[1] Vorläufiger Bericht über die von Prof. Gustav Fritsch angestellten neuen Untersuchungen an elektrischen Fischen. Diese Berichte, 1891. XII. S. 223.

spricht die übereinstimmende Stromesrichtung. Bei *Malopterurus* gehört das elektrische Organ zum Hautsystem, wie ich bereits früher zu beweisen versucht habe und jetzt auf's Neue behaupte. gleichviel welche histologischen Elemente desselben das Material dazu lieferten: die ungleichartige Abstammung geht einher mit einer entgegengesetzten Richtung des elektrischen Stromes.

Ich hoffe, dass es mir durch weiteres auf der letzten Reise gewonnenes Material gelingen wird, der Entstehung des so räthselhaften *Malopterurus*-Organs näher auf die Spur zu kommen und will mich daher zur Zeit ausführlicherer Angaben enthalten, um die Verhältnisse bei *Mormyrus* zunächst in besseres Licht zu stellen.

Dabei ist es erforderlich den körperlichen Eigenthümlichkeiten und der Fangweise dieser sogenannten »Nilhechte« Rechnung zu tragen, weil diese Umstände einen sehr wesentlichen Einfluss auf die Ergebnisse der Untersuchungen ausüben.

Vorkommen und Lebensweise.

Die Mormyriden sind Bewohner des süssen Wassers und zwar leidlich warmen, wie es die Flüsse des subtropischen Africa führen: wo das Wasser durch Einfluss des nahen Meeres brackisch wird, z. B. im Menzaleh-See, fehlen sie durchaus, reichen aber bis dicht an die Mündungen der süsses Wasser haltenden Flussläufe.

Es sind überaus zarte Fische, welche sich im Gegensatz zu den bekannten, stark elektrischen durch grosse Lebendigkeit und Erregbarkeit auszeichnen. Der Lieblingsaufenthalt der kleineren Formen und jugendlichen Individuen sind die Seitencanäle der Nilarme, wie solche besonders im Delta das ganze Land der Bewässerung wegen durchziehen; zahlreiche zur Wasserregulirung angelegte Schleusen geben hier den Thieren Gelegenheit sich unterhalb ganz ihrer Neigung gemäss die passende Stromstärke auszusuchen, und diese Stellen zwischen Strom und Gegenstrom sind es, wo die Fischer ihre Beute am sichersten zu finden wissen. Die ganz grossen Exemplare von der Länge eines halben Meters und darüber habe ich dagegen nur aus dem grossen Nil selbst erhalten.

In den Seitencanälen wird wenig mit längeren, unseren sogenannten Waten entsprechenden Netzen gefischt; es ist hier ein Netz im Gebrauch, »Schabake« im Arabischen, welches mit geringen Abweichungen durch die ganze Welt verbreitet erscheint und auch bei uns in manchen Gegenden als »Wurfnetz« vorkommt.

Im Delta vereinigen sich gern zwei oder drei Fischer in Booten zur Ausübung dieses Fischfanges und werfen die Netze gleichzeitig um sich so die Fische gegenseitig zuzujagen. Die trichterförmig gestalteten Netze von etwa 1cm5—2cm0 Maschenweite werden so aus der rechten Hand geworfen, dass sich die untere, am Rande mit Bleistücken beschwerte Öffnung des Trichters in der Luft ausbreitet, während die linke Hand das an der Spitze befindliche Tau sich entrollen lässt. Beim Anziehen dieses Taues schliesst sich das Netz unten, sobald es von dem Boden des Wassers erhoben wird und hält die im Umkreis eingeschlossenen Fische in den unteren Aussackungen über den Bleistücken zurück.[1] Da das Netz auf den Boden der Kanäle sinkt, so hält es ausser den Fischen auch häufig leblose auf dem Grunde lagernde Gegenstände wie Steine und Baumzweige mit massenhaftem, daran sitzenden Nilschlamm fest. Die Fischer haben daher die Gewohnheit angenommen das emporgezogene Netz im zusammengefalteten Zustande mehrmals kräftig im Wasser auf und ab zu ziehen, um zunächst den Schlamm zu entfernen, bevor sie sich dabei machen den Fang zu sichern und die fremdartigen Gegenstände zu entfernen.

Dies Aufstauchen des Netzes nehmen die zarteren Fischchen schon sehr übel und zeigen, aus den Maschen gelöst, häufig sofort ein sterbendes Aussehen. Man muss die Fischer daher zu vorsichtiger Handhabung der Netze ermahnen, falls man unversehrte Fische erhalten will. Aber selbst bei der grössten Vorsicht habe ich es, persönlich beim Fang anwesend, erlebt, dass die soeben dem Netze entnommenen, in ein gläsernes Gefäss gesetzten Fische in anscheinend sterbendem Zustande den Bauch nach oben kehrten. Zu den Fährlichkeiten des Fanges kommen noch diejenigen des Transportes bis zum Laboratorium. Bei dem fast völligen Mangel an hölzernen Gefässen im Delta benutzten die Fischer zur Fortschaffung lebender Fische mit Vorliebe alte blecherne Petroleumkasten, welche sich auch dafür leidlich bewährten, falls nicht zu viel Thiere hineingesetzt wurden.

Durch gut instruirte, intelligente Fischer erhielt ich schliesslich Fische in ihrer vollkommenen, natürlichen Munterkeit und konnte sie so in einem grossen, flachen Gefäss von Kupfer zwei bis drei Tage erhalten; ein hölzernes Behältniss von gleicher Grösse existirte im Orte nicht. Trotz regelmässigen, täglich vorgenommenen Wasserwechsels starben die Fische früher oder später ab, ohne dass ich im Stande wäre den Grund dafür anzugeben. Es schien mir als seien die Mormyriden mehr als gewöhnlich von der Frische des Wassers abhängig, wie es ja bei unseren Forellen in ähnlicher Weise der Fall

[1] Durch Aufnahme einer Anzahl photographischer Augenblicksbilder versuchte ich die dabei vorkommenden Griffe und Bewegungen der Fischer darzustellen.

ist; vielleicht trägt auch Nahrungsmangel zu dem vorzeitigen Absterben bei.

Ich untersuchte daher den Mageninhalt einiger frisch eingelieferten Exemplare und fand den relativ kleinen Magen mit einer grünen, von schwarzen Körnchen durchsetzten Masse erfüllt. welche sich unter dem Mikroskop als deutlich pflanzlicher Natur erwies. Es waren chlorophyllhaltige Reste von Blättchen und schwarze Samenschalen von unbekannter Form; thierische Theile waren so spärlich, dass dieselben auch zufällig verschluckt sein konnten; sie schienen Larven von Wasserinsecten und Cyclopiden angehört zu haben.

Diese überraschende Thatsache lehrt, dass die Mormyriden im Gegensatz zu den anderen elektrischen Fischen, welche ausgeprägte. gefrässige Raubfische sind, ihre elektrischen Organe nur zur Abwehr gebrauchen: denn zur Bewältigung fast mikroskopischer Wasserthierchen hätten sie die Organe gewiss nicht nöthig. Die Zahnarmuth des engen Kiefergerüstes sprach allerdings schon an sich dagegen. dass die Mormyriden als Raubfische lebten. Um so mehr sollte der in der Zoologie für sie eingeführte deutsche Namen »Nilhechte« befremden und als nicht zutreffend bezeichnet werden.

Physiologische Beobachtungen.

Die angeführten Verhältnisse müssen berücksichtigt werden, wenn man die Ergebnisse der physiologischen Untersuchungen richtig würdigen will.

Die erste am 15. Februar in meine Hände gelangte Sendung lebender Mormyriden kam nach Kafr-ez-Sayat, wo ich mein Laboratorium aufgeschlagen hatte, von einem Dorfe der Nachbarschaft. Del-Ghamoun, an dem Canal Ba-gouria. Die sieben Fische (1 *Hyperopisus dorsalis* und 6 *Mormyrus cyprinoides*) waren mehr als mittelgross und hatten es auf dem etwa halbstündigen Transport jedenfalls etwas eng gehabt. Sie schwammen anfänglich meist auf dem Rücken, erholten sich aber grossentheils bald wieder und ergaben, mit dem Multiplicator in Verbindung gebracht, ganz regelmässig eine starke Ablenkung der Nadel im Sinne eines im Körper des Thieres vom Schwanz zum Kopf aufsteigenden Stromes, wie an der oben angeführten Stelle bereits mitgetheilt wurde.

Das Bild der Untersuchungen wurde ein anderes als mit der nächsten Sendung Fische eintrafen, welche durch die sehr vorsichtige Behandlung eines besonders geschickten Arabers von ihrer Frische gar Nichts eingebüsst hatten. An ihnen zeigte sich die erwähnte

Lebendigkeit und Erregbarkeit im höchsten Maasse und machte eine abweichende Anordnung des Versuches nothwendig.

Am Tage vorher hatte ich, auf meine früheren Erfahrungen gestützt, den Fisch mit Kupferelektroden, die nach Art von Pincetten zusammengekniffen waren, bei unterstütztem Kopfende sanft aus dem Wasser gehoben und dabei ebenso wie im Jahre 1881 den Fisch zum Schlagen gebracht.

Solche Behandlung duldeten aber die ganz frischen, äusserst beweglichen Fische gar nicht, sondern wichen den genäherten Elektroden mit grosser Gewandtheit aus, bis es endlich gelang sie mit erheblicher Gewalt fest zu nehmen. Sie waren alsdann in hohem Maasse erschreckt und offenbar stark angestrengt: wurden sie an den Multiplicator gebracht, so zeigte sich die Wirkung eines elektrischen Schlages, wie solcher noch Tags vorher die Nadel in kräftige Schwingungen versetzt hatte, selten in einiger Deutlichkeit. Meist wich die Nadel langsam und ohne deutliche Schwingungen in der entgegengesetzten Richtung bis auf 30° oder 40° aus und verblieb längere Zeit in solcher Ablenkung.

Diese auffallende Erscheinung konnte ich mir nur so deuten, dass die sehr erregbaren Fische bei meinen Bemühungen, sie gewaltsam zu dem Versuch zu benutzen, durch wiederholte heftige Entladungen ihrer Organe dieselben bis zu einem Grade erschöpften, dass eine der willkürlich erzeugten Stromesrichtung entgegengesetzte Polarisation in ihnen auftrat.

Zur Feststellung der thatsächlichen Erschöpfung leistete der Froschwecker, welcher bei dem unbehaglichen Kampf mit den widerstrebenden Thieren in Unordnung gerathen war, neu armirt gute Dienste und bestätigte meine Vermuthung in überraschender Weise. Nachdem die Fische sich ausgeruht hatten, genügte die Annäherung der eben in das Wasser eingetauchten Elektroden bis auf 20 ja 30^{cm} Entfernung, um die Glocke des Froschweckers zum schnell sich wiederholenden Ertönen zu bringen.

Es folgten 10 und mehr Schläge wie bei einem Eisenbahnsignal schnell auf einander, bevor noch der Körper eines dieser erregbaren Thiere berührt worden war. Wieviel mehr muss die gewaltsame Fesselung dieselben erschrecken und zur Abwehr herausfordern, wie ermüdet müssen sie sein, wenn sie endlich festgemacht sind.

Diese Beobachtungen nöthigten dazu eine Anordnung des Versuches zu wählen, bei welchem das Thier zunächst vorsichtig in ein flaches Porzellangefäss mit wenig Wasser gebracht wurde, wo ein seitliches Ausweichen nur in geringem Maasse möglich war. Die Elektroden des Froschweckers wurden in das Gefäss an passender

Stelle versenkt und nunmehr die Multiplicator-Elektroden, nachdem das Thier sich beruhigt hatte, dem Kopf- und Schwanzende langsam im Wasser genähert. Auch so bedurfte es nur der Annäherung und nicht der Berührung; bevor diese erfolgte, erklang die Glocke des Froschweckers und die Nadel zeigte die gewünschte, der aufsteigenden Stromesrichtung entsprechende Ablenkung.

Bei den starken elektrischen Fischen wurden derartige Polarisationserscheinungen in den Organen bisher nicht beobachtet, die Vermuthung liegt daher nahe, dass die schwachen, auch histologisch gleichsam noch unfertigen Organe der Mormyriden leichter ermüdet werden und alsdann die beschriebene Abweichung zeigen.

Die Schwäche der elektrischen Wirkung, so sicher sich die Entladungen auch durch den Multiplicator und den Froschwecker als thatsächlich vorhanden nachweisen lassen, ist jedenfalls der Grund, dass sie so lange übersehen wurde, und dass gewisse Untersuchungsmethoden, welche stärkeren Fischen gegenüber als leistungsfähig erprobt wurden, hier versagen.

Dazu gehört auch die Untersuchung des Stromes durch Jodkalium-Elektrolyse. Für die Anwendung derselben war Alles von Hause aus vorbereitet, obwohl ich mir von vornherein eben wegen der Schwäche des Schlages wenig Hoffnung auf das Gelingen des Versuches machen konnte. Bei diesem Apparat erzeugt bekanntlich die Elektrodenspitze, welche den positiven Strom auf das mit Jodkaliumlösung getränkte Fliesspapier überleitet, einen tiefbraunen Jodfleck, während die negative Spitze zunächst nichts Entsprechendes zeigt; nach einiger Zeit entwickelt sich aber auch an der negativen Elektrode durch Polarisation ein anderer schwächerer Fleck, welcher als der secundäre bezeichnet wird.[1]

Der Versuch bestätigte die Befürchtung, dass ein einmaliger Schlag sich nicht stark genug erweisen würde, um einen deutlichen primären Fleck auf dem Fliesspapier hervorzurufen. Das Ergebniss einer wiederholten Durchleitung des *Mormyrus*-Schlages musste aber aus doppeltem Grunde zweifelhaft erscheinen: Einmal konnte sich ein secundärer Fleck einstellen und die Stromesrichtung ohne weiteren Einfluss des Fisches fraglich machen; es konnte aber nach wiederholten Schlägen die beschriebene Übermüdung der Organe und abweichende Stromesrichtung eintreten und eine Beurtheilung der ursprünglichen vereiteln.

---

[1] Hr. E. du Bois-Reymond hat die physikalischen Bedingungen der Jodkalium-Elektrolyse in seinen Abhandlungen eingehend erörtert. Vergl. darüber: Ges. Abh. Bd. II. S. 648.

Gleichwohl versuchte ich auch mit der Jodkalium-Elektrolyse zu irgend welchen Ergebnissen zu kommen, doch habe ich keinen Einfluss der elektrischen Schläge auf das Jodkalium-Papier bemerken können und muss daher die ursprüngliche Vermuthung, dass sie zu gedachtem Zweck nicht genügend stark seien, für thatsächlich begründet halten. Den negativen Resultaten gegenüber verzichtete ich endlich auf die weitere Fortsetzung dieser Untersuchungen, zumal anatomische und histologische Fragen die Zeit dringend in Anspruch nahmen.

Die Innervation der elektrischen Organe.

Unter den anatomisch-histologischen Fragen, die bei der Behandlung dieses Gegenstandes auftauchen, interessirte mich begreiflicher Weise keine mehr als diejenige nach der Innervation der elektrischen Organe.

Hatten sich die eigenthümlichen Anlagen im Schwanz der Mormyriden durch den physiologischen Versuch als unzweifelhaft elektrischer Natur herausgestellt, so war nach Analogie der anderen elektrischen Fische mit Sicherheit anzunehmen, dass dieser besonderen, erhöhten Leistung auch ein besonders ausgebildetes nervöses Centrum vorstehen würde. Solche Annahme lag so nahe, dass ich zu ihr natürlich bereits im Jahre 1881, als ich zuerst persönlich die elektrische Entladung der Mormyriden verspürt hatte, gelangte und eifrig nach den vermutheten nervösen Centren der Organe suchte. Gleichwohl blieb damals die Untersuchung ohne ein greifbares Resultat; ich stellte nur durch die anatomische Praeparation fest, dass die Innervation der elektrischen Organe einer älteren Annahme entgegen nicht durch das Seitennervensystem erfolgt, sondern dass besondere elektrische Nerven vorhanden sind, welche als spinale Wurzeln den Rückenmarkscanal verlassen und dorsal wie ventral eine Art von Längsstamm in den Organen bilden.

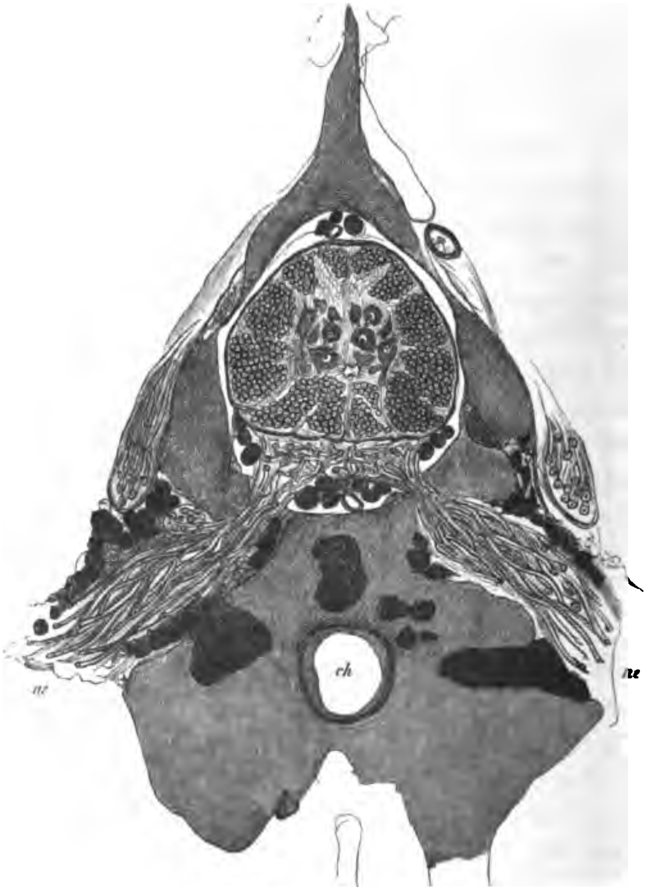
Vergeblich suchte ich unter Anwendung der bewährtesten Methoden die Nervenfasern im Rückenmark zu entsprechend stark entwickelten, gangliösen Elementen zurückzuführen. Die spärlichen grösseren Zellen, welche ich in dem besonders zarten Rückenmark antraf, waren ohne specifischen Charakter, eine Verbindung ihrer Fortsätze mit den Fasern der elektrischen Nerven liess sich nicht nachweisen. Derartige Befunde drängten zu der Vermuthung, dass die höchst auffallende Entwickelung des Kleinhirns bei diesen Fischen vielleicht doch die Innervation ohne weitere Einschaltung nervöser Zellen niederer Ordnung durch directe Faserbahnen im Rückenmark besorgte: eine Vermuthung, welche meinen Anschauungen über die

Beziehungen zwischen den Centren höchster Ordnung in den Hirnrinden und den peripherischen Organen vollkommen widersprach.

Ich nahm daher bei meinem letzten Aufenthalt in Aegypten die Frage nach der Innervation der elektrischen Organe unter Anwendung der vervollkommneten Methoden auf's Neue in Angriff und wurde durch Ergebnisse erfreut, welche nach meiner Überzeugung weit über die Grenzen des vorliegenden Gebietes hinaus allgemeineres Interesse beanspruchen dürften.

Es fand sich zunächst, dass die vermuthete Analogie der Mormyriden mit den anderen musculär-elektrischen Fischen, zumal mit dem *Gymnotus*, dessen Organe ja ebenfalls den Schwanz des Thieres einnehmen, thatsächlich besteht. Wie beim Zitteraal entspringen bei den Mormyriden die Fasern der elektrischen Nerven als breite, unverzweigte Axencylinderfortsätze von mächtigen Ganglienzellen, welche in bestimmten Strecken die

Fig. 1.



Querschnitt eines Schwanzwirbels von *Hyperopisus dorsalis*. Verg. 64.
ne = Elektrische Nerven. *ch* = Chorda.

graue Substanz des Rückenmarks gänzlich erfüllen, und verlassen das Centralorgan als vordere Wurzeln austretend. (Siehe Fig. 1).

Die Zellen sind multipolar, von beträchtlicher Grösse ($0^{mm}.05$ bis $0^{mm}.1$) und zeigen ein oder häufig auch zwei bläschenförmige Kerne mit Kernkörperchen (Gr. $0^{mm}.015$ und $0^{mm}.005$). Das Protoplasma der Zellen ist zart, leicht zerfliesslich zumal in der Peripherie und verlangt sehr kräftige Conservirungsmittel; am besten erhielt sie eine Mischung von Chrom-Essigsäure mit Sublimat oder Salpetersäure mit nachfolgender Osmiumbehandlung. Die Axencylinderfortsätze sind etwas stärker lichtbrechend, resistenter und umgeben sich, während sie in geschlängeltem Verlauf zur Bauchseite des Rückenmarks ziehen, schon innerhalb der grauen Substanz mit Mark, welches sich mit Osmiumsäure schwärzt.

Sie unterscheiden sich so leicht und sicher von den mächtigen Protoplasmafortsätzen der Zellen, welche, ebenfalls meist unverzweigt, den Zellkörper verlassen, um sich mit den Nachbarzellen in breiten Anastomosen zu verbinden. So bilden die elektrischen Ganglienzellen ein eng geschlossenes, wahres Gerüst, und erscheinen zu gemeinsamer Arbeit verbunden, während sie die unverzweigten Axencylinderfortsätze als Projections-System dritter Ordnung zur Peripherie senden. (Siehe Fig. 2). Sehr wahrscheinlich treten die nach aufwärts gewendeten Fortsätze in Faserbahnen ein, welche die Verbindung mit den Centren im Gehirn vermitteln. Dieser Befund giebt einen unumstösslichen Beweis, dass Protoplasmafortsätze dazu dienen, nervöse Elemente unter einander in Verbindung zu setzen und widerlegt die Behauptungen Golgi's und seiner Anhänger, dass nur der Axencylinderfortsatz »nervösen Charakter« zu beanspruchen habe. Man ist gewiss berechtigt anzunehmen, dass eine Anordnung der Elemente, welche sich im vorliegenden Falle

Fig. 2.

Graue Substanz des Rückenmarks von *Hyperopisus dorsalis*. Verg. 180.

ca. = Axencylinder
c. = Centralkanal
h. C. = hintere Commissur.

ganz typisch und offenkundig nach allen Richtungen herstellt, auch da, wo sich wegen der Feinheit der Verzweigungen die Verbindung nicht erweisen lässt, im Princip die gleiche sein wird, zumal auch bei höheren Thieren gelegentlich breite Verbindungen von Ganglienzellen durch Protoplasmafortsätze beobachtet werden (Carrière[1], Besser[2], Willigk[3]). Das System der »verkoppelten« Ganglienzellen reicht so weit als elektrische Nerven aus dem Rückenmark austreten, indem die Ansammlung der Zellen gegen die Mitte der Organe zu vom Kopfende her immer stärker wird, im mittleren Drittel die höchste Ausbildung erlangt und gegen das Schwanzende zu, wenn auch schwächer werdend, sich selbst über das caudale Ende der Organe hinaus noch nachweisen lässt. Diese auffallende Thatsache erklärt sich so, dass die Axencylinder der untersten (hintersten) Zellen sich vorwärts wenden und so den Anschluss an elektrische Nerven erreichen, welche mehrere Wirbel weiter vorn zum Austritt gelangen.

Auch sonst vollzieht sich der Austritt der Nerven nicht so einfach wie gewöhnlich, sondern die Nervenfasern sammeln sich, auf und abwärts steigend, in einem der Ventralseite des Rückenmarks anliegenden Bündel und verlassen diese Ansammlung an den Stellen, wo sie zum *Foramen intervertebrale* ziehen. Da die Wirbelkörper ziemlich lang sind, findet man auch Strecken, wo austretende Fasern überhaupt fehlen und an solchen Strecken vermisst man auch die elektrischen Zellen der grauen Substanz, so dass die letzteren also nicht wie eine geschlossene Zellsäule, sondern nesterweise dem Rückenmark einlagern.

Die ausgetretenen elektrischen Nerven spalten sich sofort am Wirbelkörper in einen dorsalen und einen ventralen Ast, welche beide den Neurapophysen und Haemapophysen eng anlagernd bleiben und in gewissem Abstande vom Wirbelkörper sowohl dorsal wie ventral eine dichte Fasermasse bilden, bevor sie in die Organe selbst eintreten.

Hierbei kommt wiederum ein besonderes, bisher gänzlich unbeachtet gebliebenes Verhältniss zur Beobachtung, welches vom physiologischen wie embryologischen Standpunkt aus betrachtet, weittragende Bedeutung erheischt. Der ganze Entwickelungsgang des bilateral symmetrischen Körpers bringt es mit sich, dass die Medianebene, in der die Antimeren der Anlage zusammenstossen, als eine scharfe Trennung von links und rechts bestehen bleibt, und wichtige Organe

[1] Über Anastomosen der Ganglienzellen in den Vorderhörnern des Rückenmarkes (vom Kalbe). Arch. f. mikrosk. Anat. XIV. S. 125.

[2] Virchow's Archiv Bd. 36 S. 134.

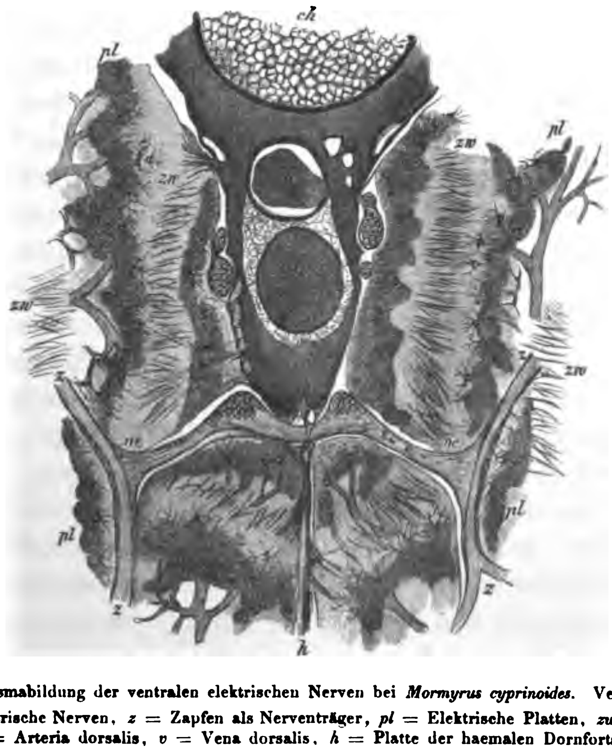
[3] Ebenda Bd. 64 S. 163.

dieselbe nicht durchbrechen, sondern, auch wo sie unpaar werden, aus zwei seitlich angelegten Hälften verschmolzen erscheinen.

Dies gilt natürlich auch vom Centralnervensystem, wo die für die Function nothwendigen Verbindungen der beiden Körperhälften als Commissuren und Durchkreuzungen bestimmter Nervenbahnen ganz allgemein in die axiale Anlage des Medullarrohres verwiesen wurden. So ist das *Chiasma nervorum opticorum,* welches man als gegentheiliges Beispiel anführen könnte, bekanntlich seiner Entstehung nach auch ein Theil des Centralorgans selbst, ebenso wie *N. opticus* und *Retina.*

Es muss daher ausserordentlich überraschen, dass bei den Mormyriden die elektrischen Nerven, nachdem sie den Rückenmarkscanal bereits verlassen haben und zu richtigen peripherischen Nerven geworden sind, durch partiellen Faseraustausch der beiderseitigen Bündel sowohl dorsal, die Platte der neutralen Dornfortsätze durchbohrend, als auch ventral vom Gefässcanal des Haemapophysenbogens unter Durchdringung der haemalen Dornfortsätze eine vollkommene Chiasmabildung eingehen. Es erhalten also die

Fig. 3.



Chiasmabildung der ventralen elektrischen Nerven bei *Mormyrus cyprinoides.* Verg. 40.
ne = Ventrale elektrische Nerven, *z* = Zapfen als Nerventräger, *pl* = Elektrische Platten, *zw* = Zwischenschicht, *a* = Arteria dorsalis, *v* = Vena dorsalis, *h* = Platte der haemalen Dornfortsätze.

linksseitigen Organe zur Innervation theilweise Fasern der rechten elektrischen Nerven und umgekehrt. (Siehe Fig. 3).

So vortheilhaft ein derartiger Faseraustausch für die schnelle und gleichmässige Function der beiderseitigen elektrischen Anlagen sein muss, so schwierig ist die Entstehungsweise der eigenthümlichen Einrichtung zu denken. Wenn sich die elektrischen Organe aus den Schwanzmuskeln herausgebildet haben, wie es keinem Zweifel unterliegt, so haben sie auch sicherlich einstmals motorische Nerven besessen, welche wie diejenigen anderer Wirbelthiere wohl im Centralorgan einen gekreuzten Ursprung zeigten, in der Peripherie aber, wo sie die besonderen Muskeln zu versorgen hatten, ihre beziehungsweisen Seiten als rechte und linke Muskelnerven streng einhielten.

Die Beobachtung von peripherischer Durchkreuzung an früheren motorischen Nerven giebt Kenntniss von einer ungeahnten Biegsamkeit der Natur zur Anpassung bestimmter Formen an veränderte Lebensbedingungen und erscheint daher für die Abstammungslehre von ganz hervorragender Wichtigkeit. Wird dadurch doch ein Grundprincip des Aufbaues im Wirbelthierkörper, nämlich die Selbständigkeit der beiderseitigen Antimeren auch in ihrer Nervenversorgung hinsichtlich seiner allgemeinen Gültigkeit in Frage gestellt. Durch den beschriebenen Faseraustausch von beiden Seiten her wird das Verfolgen der Elemente, welche als geschlossenes Bündel den Rückenmarkscanal verlassen, noch besonders erschwert. Gleichwohl kann es keinem Zweifel unterliegen, dass in dem Nervenwulst, welcher oben und unten auf den Dornfortsätzen entlang zieht, eine lebhafte Faservermehrung stattfindet, da die Gesammtsumme der zum Eintritt in die elektrischen Organe sich anschickenden Fasern um das Mehrfache beträchtlicher ist als diejenige der austretenden elektrischen Nerven. Die ganze Anlage dieses sonderbaren Wulstes entspricht daher offenbar den Bildungen, welche man an den Organen des Zitterrochen als Wagner'sche Büschel bezeichnet, nur dass die Anordnung der Theilfasern sich keineswegs so übersichtlich und regelmässig gestaltet. Es muss der Zukunft vorbehalten bleiben, den Theilungen genauer nachzugehen und zu versuchen, ob sich wie bei den Wagner'schen Büscheln ein gewisses System in die Anordnung bringen lässt.

Hier soll nur auf ein eigenthümliches histologisches Verhältniss hingewiesen werden, welches durch die Fasertheilungen bedingt erscheint. Der Faserquerschnitt in den zum Wulst tretenden Bündeln zeigt die sogenannten Sonnenbildchen nicht immer einfach, sondern es finden sich häufig Durchschnitte, wo der ringförmige Umriss der durchschnittenen Henle'schen Scheide der Faser zwei, seltener drei ganz ähnliche Faserindividuen umschliesst, welche ihrerseits wieder von einem zarteren Kreis, der durchschnittenen Schwann'schen Scheide, umzogen sind und im Innern derselben Markscheide und Axencylinder wie die übrigen einfachen Faserdurchschnitte enthalten. Nur sind die Elemente der einfachen Durchschnitte im Verhältniss grösser als diejenigen der zusammengesetzten.

Aus den vier Nervenwülsten, welche in die mediale Fläche der vier elektrischen Organe eingesenkt lagern, entwickeln sich mit grosser Regelmässigkeit der Anordnung dichte Büschel, deren gedrängte Masse zwischen die Platten eindringt, um die Verbindung mit deren nervösen Gliedern zu suchen. Zur Erleichterung dieser Verbindung hat sich an den *Mormyrus*-Organen eine eigenthümliche Verlängerung der Platten von kolbenförmiger, am Ende kegelförmig zugespitzter Gestalt gebildet, welche als Nerventräger functionirt.

Als ich in die Untersuchung der Histologie des *Mormyrus*-Organes eintrat, hatte ich es mir als eine Hauptaufgabe, an die ich mit einer gewissen Sorge dachte, hingestellt, nachzuweisen, dass diese Nerventräger oder sogenannten »Zapfen« mit ihren arcadenförmigen Verlängerungen auf den caudalen Flächen der Platten nicht selbst als Nerven oder auch Nervenendigungen, wie die meisten Autoren es beschrieben haben, bezeichnet werden dürfen. Beim tieferen Eindringen in den Organaufbau erscheint es mir nunmehr fast überflüssig, darüber, ob man diese auffallend groben, wie mit einem rohen Werkzeug zugeschnittenen, histologischen Gebilde Nerven nennen will oder nicht? viel Worte zu verlieren. Das thatsächliche Verhältniss lässt sich so klar darlegen, dass es ziemlich gleichgültig ist, ob Jemand derartige, wirklichen Nerven gänzlich unähnliche Gebilde, trotzdem als Fortsetzungen der elektrischen Nerven betrachten will oder nicht.

Die einfache, jeden Augenblick vorzuführende Thatsache, dass Büschel aus etwa fünfzig bis hundert wohl charakterisirten, einzelnen Nervenfasern gebildet sich an einen einzigen »Zapfen« ansetzen, lässt solche Auffassung als unhaltbar erscheinen. Welche von den fünfzig herantretenden Nervenfasern soll denn wohl in dem Zapfen ihre Fortsetzung finden? Oder wo kommt es sonst zur Beobachtung, dass peripherische Nerven, bevor sie ihrer Endigung zustreben, erst massenweise in einzelne histologisch scharf begrenzte Gebilde zusammenfliessen? Dagegen unterliegt es nunmehr keinem Zweifel, dass die Zapfen engste Verbindung mit dem hinzutretenden Büschel von Nervenfasern eingehen, und ein Übertritt feinster Elemente aus dem Axenraum der Fasern in das Innere der Zapfen stattfindet, um darin zur Platte weiter zu ziehen. Ich möchte daher diese Zapfen als »Nerventräger« auffassen und vergleiche sie zusammen mit ihren Ausbreitungen an der Platte der sogenannten »Sohle« an den motorischen Endplatten der Muskeln.

Die Histologie der elektrischen Platten.

Die hierbei zu erörternden Verhältnisse lassen sich nicht wohl ausser Zusammenhang mit der Betrachtung des Plattenaufbaues selbst erklären. Bei dem Studium desselben musste es sich darum handeln zunächst die feinsten Structuren am überlebenden Material zu untersuchen, und so die unerlässliche Vergleichung herzustellen zwischen den Ansichten, welche das frische Material bietet und den später am conservirten Material zu gewinnenden.

Zur Untersuchung eignen sich besonders die kleineren Arten der Mormyriden wie *M. bovei* und *Isidori* weil bei ihnen die einzelnen Elemente der Organe auffallend grob sind, während gleichzeitig die geringe Ausdehnung der Praeparate die Orientirung erleichtert. Zur Verfügung standen mir mehrere mikroskopische Systeme für homogene Immersion sowie das Zeiss'sche apochromatische von 1.3 Apertur mit den zugehörigen Ocularen 4, 8, 12.

Es war anzunehmen, dass diese so sehr vervollkommneten optischen Hülfsmittel weitere Aufschlüsse über den Aufbau der kleinsten Theilchen im elektrischen Organ gewähren würden, und in der That leistete das apochromatische System auch am frischen Material ausserordentlich gute Dienste. Das dem lebenden Thier entnommene, sofort in *Humor aqueus* untersuchte Object zeigt das verzweigte Röhrensystem der Platte, welches aus den Zapfen hervorgeht, grob punktirt. die darin befindlichen, zahlreichen Kerne erscheinen homogen, von mattgrauer Farbe; eine Scheide ist nur durch einen ganz zarten, doppelten Umriss angedeutet.

Fasst man bei der Untersuchung die sehr hellen, verbreiterten Ansätze der Bogengänge in's Auge, so meint man, dass der körnige Inhalt ganz regellos geordnet in die durchaus ähnliche, körnige Masse des nervösen Gliedes der Platte übergeht. Werden aber im mikroskopischen Bilde die bogenförmigen Röhren weiter gegen die Zapfen zu verfolgt, so erkennt man eine allmählich steigende Neigung der Körnchen sich zu Reihen in der Längsrichtung der Röhre zu ordnen.

Die Längsrichtung ist aber nicht genau eingehalten, sondern die Reihen verflechten sich in mannigfacher Weise. Schon an den verschmälerten Übergangsstücken der Röhren in die Zapfen imponirt die Anordnung deutlich als eine fibrilläre und in den mächtigen, keulenförmigen Zapfen des *M. bovei* ist der fibrilläre Bau des Inhaltes schon am frischen Material ganz unverkennbar; aber auch da, wo er am deutlichsten ist, findet man die Fibrillen nicht glatt, sondern wie aus Körnchen zusammengekittet, so dass ein solches Object an die Schnur eines Rosenkranzes erinnert.

Es hat also auch hier den Anschein, dass die Entwickelung der elektrischen Platte mit Quellungsvorgängen verknüpft ist, welche unter stärkerer Ausbildung einer klaren, homogenen Zwischensubstanz die festeren Theilchen der faserigen Gewebs-Bestandtheile in ihrer Verbindung lockert und endlich im »nervösen Glied« zu einer vollständigen Neuordnung führt.

Bei der beginnenden Gerinnung schliesst sich der körnige Inhalt wieder mehr zusammen und presst die homogene Substanz aus, welche alsdann den Inhalt wie eine breite Scheide umgiebt. Dies gilt besonders für die Zapfen, wo schon am frischen Praeparat in verschiedener Breite je nach den Arten ein homogener Saum um den ebenfalls fibrillär gestreiften, schmalen Inhalt zu sehen ist.

An dem mit Salpetersäure und Osmiumsäure oder mit Chromsäure behandelten Material wird die Streifung im Innern der Nerventräger besonders deutlich und erweckt berechtigte Hoffnungen den Zusammenhang der Fibrillen mit solchen des Axenraums der sich an die Zapfen ansetzenden Nervenfasern deutlich machen zu können. Diese Hoffnung erfüllt sich nicht in dem erwarteten Maasse, da verschiedene Gründe die Beobachtung erschweren; dazu gehört an den Osmiumpraeparaten die Schwarzfärbung des Nervenmarks, welches erst genau an der Stelle aufhört, wo der Übertritt in das Innere des Zapfens erfolgen muss und diesen selbst verdeckt. Aber auch an anderem Material ist es schwer die Fibrillen des Zapfens in die Nervenfasern hinein zu verfolgen, da die an dem System der Bogengänge überall verstreuten Kerne um die Zapfenoberfläche sich ganz dicht gruppiren und daher das Bild feiner, zwischen ihnen hindurch tretender Fäserchen leicht durch Interferenzen des Lichtes verwischt wird. Nach Ranvier's Methode mit Chlorgold und Ameisensäure behandeltes Material gab zuweilen leidliche Bilder von diesem Zusammenhang, am deutlichsten sah ich ihn jedoch bisher an ganz frischen Objecten, wo der leichte Druck des Deckgläschens zu einer Abplattung des Zapfens und gleichzeitig zum Auseinanderweichen der Kerne und der dazwischen hindurchtretenden Fäserchen führt. A n s o l c h e n P r a e p a r a t e n h a b e i c h m i c h t h a t s ä c h l i c h v o n d e m Z u s a m m e n h a n g d e r F i b r i l l e n i m I n n e r n d e s Z a p f e n s u n d A x e n f i b r i l l e n d e r z u t r e t e n d e n N e r v e n f a s e r n ü b e r z e u g t.

Die Theilchen dieser Fibrillen müssen sich gegen die Platte hin auflösen und zur Körnchenpunktirung werden, d. h. eine Ausbreitung faseriger Nervenelemente in der Platte selbst findet nicht statt.

Oben war bereits unter Vorbehalt der Ausdruck »nervöses Glied der Platte« im Sinne der Autoren gebraucht, wie ich ihn selbst auch früher ohne Bedenken anwandte. Es liegt dieser Bezeichnung die Anschauung zu Grunde, dass bei den musculär-elektrischen Fischen in den Organplatten zwei Hauptschichten vorhanden sind, von denen die hintere (untere), für den Nervenansatz bestimmt, die Bezeichnung »nervöses Glied« erhielt, während die vordere (obere) aus veränderter Muskelsubstanz entstanden gedacht und ersterer als musculäres (metasarkoblastisches, Babuchin) Glied angereiht wurde.

Die Untersuchung des Aufbaues der *Mormyrus*-Platte hat mir entgegen den Darstellungen Babuchin's und Anderer über diesen Gegenstand gezeigt, dass hier solche Auffassung unzulässig ist. Es finden sich nämlich bei den kleinen *Mormyrus*-Arten wie *M. Isidori, bovei* (vielleicht bei allen) nicht selten Verbindungen zwischen zwei aufeinander folgenden Platten, besonders gegen die Organoberfläche zu. Dabei geht ohne scharfe Grenze die vordere Schicht der einen Platte in die hintere der nächstfolgenden Platte über und umgekehrt, während die abgewandten beiden Schichten der communicirenden Platten glatt über die Verbindungsstelle hinwegziehen. Dieser überraschende Befund scheint mir unzweifelhaft darzuthun, dass beide Schichten ihrer Entstehung nach nicht wesentlich verschieden sein können, sondern die am entwickelten Organ thatsächlich vorhandene Verschiedenheit auf späterer, durch Anpassung an die Function entstandener Umwandlung beruht. Hieran schliesst sich eine weitere Beobachtung von mir, welche geeignet erscheint, im Verein mit der vorher angeführten über die abnormen Plattenverbindungen, mehr Licht über den Process der Umbildung von Muskeln in elektrisches Gewebe bei den *Mormyrus*-Arten zu verbreiten.

Getragen von der Überzeugung das vordere Glied der Platte sei musculären Ursprungs wird man in demselben am ehesten Spuren von Muskelstructur erwarten dürfen, und thatsächlich wird auch von manchen Autoren in ihm eine maeandrische Anordnung quergestreifter Fasern beschrieben, welche an ähnliche Bilder embryonaler *Torpedo*-Platten und weiterhin an quergestreifte Muskeln erinnert.

Da die Beschreibung meist nach Praeparaten gegeben wurde, welche Platten in Aufsicht zeigten, oder nach dem optischen Durchschnitt gefalteter Platten, so konnte die Orientirung der eigenthümlichen Zeichnung angefochten werden. Dies ist denn auch geschehen, indem der erfahrene Babuchin die maeandrische Liniirung nicht der Schicht selbst, sondern dem optischen Zusammenwirken mit einer besonderen, oben auflagernden Schicht zuschrieb.

Demgemäss nahm er in der *Mormyrus*-Platte mindestens drei Schichten an, was seine Berechtigung hat, obwohl es unrichtig ist die sonderbare Zeichnung auf die oberste Schicht zurückzuführen. Die frische Untersuchung allein, deren sich Babuchin fast ausschliesslich befleissigte, führt beim Studium der Schichtung in den Platten nicht zum Ziel, wie ich aus eigener, bereits vieljähriger Erfahrung über diesen Gegenstand behaupten darf. Hier sind äusserst feine ($0^{mm}.005$ etwa messende) Durchschnitte möglichst vollkommen conservirter Platten erforderlich, wie sie erst die moderne Technik herstellen lehrte.

An solchen Schnitten erkennt man ohne Schwierigkeit, dass es sich nicht um Zeichnungen handelt, welche an Muskeln erinnern, sondern dass in der *Mormyrus*-Platte ein Gewebe in wechselnder Mächtigkeit auftritt, an dem die complicirte Muskelquerstreifung in ausserordentlich vollkommener Weise erhalten blieb. Die bekannte Figuration erscheint stellenweise so deutlich, dass man versucht sein möchte, die Muskelstructur an diesem Theil des elektrischen Gewebes zu studiren; die quergestreiften Muskelbündel liegen aber nicht in der oberen Schicht, sondern bilden eine mittlere Lage von wechselnder Mächtigkeit.

Hält man die beiden soeben angeführten Beobachtungen, nämlich die Verbindungen von vorderen mit hinteren Schichten der Platten, sowie das Auftreten wechselnd erhaltener Muskelsubstanz zwischen denselben zusammen, so stellen sich die Platten in ihrer Entwickelung als abgeplattete Säcke dar, die im Innern die sich umwandelnde Muskelsubstanz umschliessen. Dieser durch die Thatsachen sich aufdrängenden Anschauung gemäss bildet die Scheide des Muskelprimitivbündels die histologische Unterlage sowohl für die vordere als auch die hintere Schicht; während aber die erstere die gelockerten Muskeltheilchen als elektrische Molekeln in neuer Anordnung in sich aufnimmt, verbreiten und vervielfältigen sich in der letzteren die Theilchen der eintretenden nervösen Elemente.

Die wirklich zu beobachtende Structur der genannten Schichten entspricht durchaus der eben gegebenen Darstellung. Die vordere Schicht zeigt unter einem feinen cuticularen Saum eine senkrecht zur Plattenrichtung gestellte Anordnung zarter, etwas stärker lichtbrechender Körnchen in undeutlichen Reihen, ähnlich wie ich es von der *Torpedo*-Platte beschrieben habe; bei der hinteren ist dies nicht in gleichem Maasse der Fall, doch sieht man an guten Querschnitten, dass die Körnchenpunktirung nicht ganz so regellos ist als die frische Untersuchung glauben machen könnte. Anschliessend an den auch hier vorhandenen cuticularen Saum ordnen sich die groben, durch Osmium ziemlich dunkel färbbaren Körnchen zu locker gestellten, kurzen und wenig deutlichen Reihen aus spärlichen Elementen gebildet, welche Bildung dem sogenannten »Palissadensaum« der *Torpedo*-Platte gleichwerthig sein dürfte. Ich wiederhole, dass wirkliche Fortsätze der Fibrillen des anschliessenden Bogensystems in der Schicht selbst nicht mehr kenntlich sind.

Die beschriebene Plattenstructur erweckt mehr als bei den anderen elektrischen Fischen die Hoffnung auch unvollständig entwickeltes elektrisches Gewebe zu finden, da es überhaupt noch solchen unfertigen, musculären Eindruck macht. Diese Hoffnung geht auch unzweifelhaft in Erfüllung. Die Organe sind keineswegs als eine gallertige Substanz in geschlossene fibröse Kapseln eingeschlossen, wie es zuweilen angegeben wird, sondern die Grenzen gegen die benachbarten Muskeln sind überhaupt nicht scharf, indem sich das gewucherte Bindegewebe derselben weit nach vorn zwischen die normalen Muskeln als dichte, weissliche Masse hineinzieht und die Bündel aus einander drängt. Vorn und hinten an den Organenden bleibt ein recht beträchtlicher Theil, der dem Schleimgewebe zwischen den Platten durchaus ähnlich ist, übrig, in welchem nur die Platten selbst fehlen. Ähnliche Verhältnisse liessen sich auch bei *Gymnotus* und *Malopterurus* an bestimmten Stellen der Organe nachweisen, und habe ich solche Substanz dort bereits als »taubes elektrisches Gewebe« beschrieben. Bei den *Mormyrus*-Arten ist es besonders am vorderen Organende stark entwickelt.

Hier finden sich auch eigenthümliche Muskelbündel, welche mir schon im Jahre 1881 als offenbar im Sinne einer Aufquellung verändert auffielen. In der That sind es vorwiegend die Scheiden, deren Quellung zu beobachten ist, während der quergestreifte Inhalt, den festen Ansatz verlierend, nicht mehr die straffe, regelmässige Anordnung der normalen benachbarten Primitivbündel zeigt. Am hintern Organende, wo das taube Gewebe auch nur als schmale Kappe aufliegt, wird nichts dergleichen gefunden, und man erhält so die Anschauung, dass die Organentwickelung von hinten nach vorn vorschreitet, vorn aber einen sichern Abschluss gar nicht erlangt hat.

Es macht sich so im Vergleich zur Entwickelung der *Torpedo*-Platten ein bemerkenswerther Unterschied geltend, indem bei dieser die Muskelprimitivbündel gar nicht erst zur vollen Ausbildung gelangen, sondern die Fibrillen bereits unter Kernvermehrung in die Plattenbildung übergehen, den gewucherten Scheidenelementen dagegen eine mehr passive Rolle zugewiesen wird.

Im Darwin'schen Sinne wäre der Vorgang etwa so zu deuten, dass bei der Umwandlung von Muskeln in elektrisches Gewebe an dem Zitterrochen die abgekürzte Vererbung einen höheren Grad erreicht hat als am Nilhecht, was wiederum für längere Andauer des Processes bei jenem sprechen sowie die erreichte höhere Stufe der Vollkommenheit erklärlicher machen würde.

Zur Vervollständigung der Reihe von Umbildungsformen wäre es erwünscht am *Mormyrus* auch Muskelprimitivbündel nachzuweisen, welche eine beginnende Abplattung von vorn nach hinten und verschieden hochgradige Anordnung in der queren Richtung erkennen liessen.

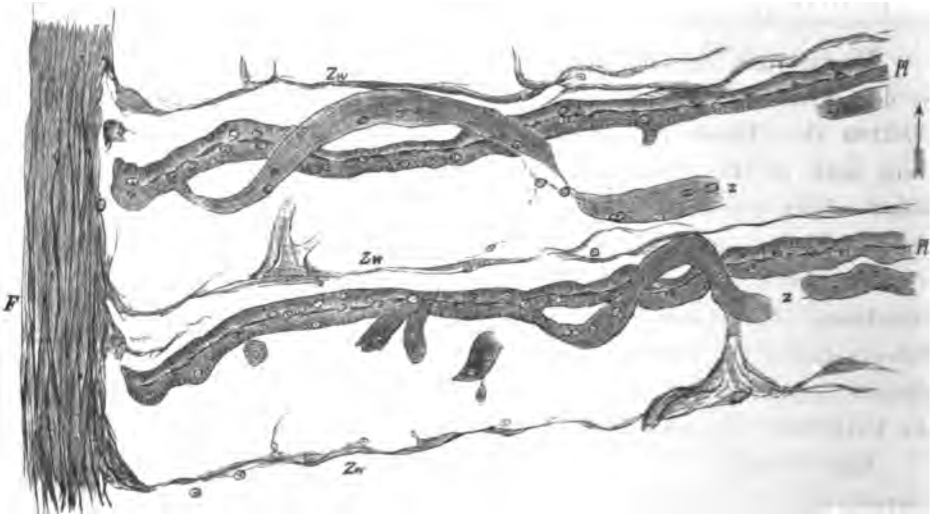
Solche Formen haben sich bisher durchaus nicht gefunden, und man muss daher annehmen, dass von dem gewissermaassen vorbereiteten Muskelmaterial schon im Embryo ein Theil zur Plattenbildung gelangt, ein anderer dies Ziel aus irgend welchem Grunde nicht erreicht. Bei diesem Plattenbildungsprocess muss das Gewebe einen sehr hohen Grad von Schmiegsamkeit haben, der dem flüssigen Zustand nicht fern steht. Nur so lässt sich die wechselvolle, höchst sonderbare Anfügung der Nerventräger an die Platte erklären, welche einen dreifach verschiedenen Typus bei den einzelnen Arten zeigt.

Wie erwähnt fügen sich die nervösen Elemente, die in den Nerventrägern verlaufen, stets der caudalen Seite der Platten an, die Zapfen aber, welche die Nervenfibrillen aus den markhaltigen Nervenfasern übernehmen, haben eine ganz ungleichartige Stellung. Das einfachste Verhalten ist, dass die von den Nervenbündeln umfassten Zapfen hinten an der Platte liegen, zu der sie gehören und, sich verzweigend, in die Bogensysteme übergehen, um mit der hinteren Plattenschicht zu verschmelzen. So findet man es bei den langrüssligen Arten wie *M. oxyrhynchus, cachiwe, longipinnis* u. s. w.

Oder die Zapfen lagern vor den zugehörigen Platten, durchbohren, leicht verschmälert, die Plattensubstanz, um alsdann schnell dichotomisch verzweigt ebenfalls von hintenher mit der Platte zusammenzufliessen. Um die Durchtrittstellen häuft sich die quergestreifte Substanz der mittleren Schicht wie eine Wulst an, während jenseits die Zapfen wie durch Strangulation Anschwellungen bilden, welche von Ecker sehr ungeeigneter Weise als »Ganglien« in Anspruch genommen wurden. Dies Verhalten zeigen die Arten ohne Rüssel wie *Hyperopisus dorsalis, Mormyrus cyprinoides, Mormyrops anguilloides.*

Endlich gelang es mir noch eine dritte Art der Anfügung nachzuweisen, bei welcher die Zapfen ebenfalls wie bei den langrüssligen Nilhechten auf der Hinterseite ihrer Platten lagern. Sie durchbohren, an ihrem Verbreitungsbezirk nahezu angelangt, die Platte wie bei den ungerüsselten, doch verzweigt sich der Zapfen nicht, sondern kehrt nach sofortiger Rückwärtskrümmung, nochmals die Substanz durchsetzend, auf die hintere vorschriftsmässige Seite zurück, um sich hier in der regelmässigen Weise anzufügen. Derartige Doppeldurchbohrung zeigten mir die abgeplatteten Arten mit abwärts gestellter Mundöffnung *M. Isidori* und *bovei.* (Siehe Fig. 4.)

Fig. 4.



Querschnitt zweier Organplatten, doppelt durchbohrt von den Zapfen. *Mormyrus Isidori.* Verg. 410.
pl = Elektrische Platten, *Zw* = Zwischenschicht, *F* = Äussere Organfascie, *z* = Zapfen.
Zwischen den Plattenschichten Reste quergestreifter Muskelsubstanz. Der Pfeil bezeichnet die Stromesrichtung.

Wenn man Angesichts der vollzogenen Thatsache bei diesem sonderbaren Verhältniss von »Durchbohrung« spricht, so bin ich gleichwohl fest überzeugt, dass der entwickelungsgeschichtliche Vorgang ein durchaus anderer ist, und dass die früh in ihrer besonderen Gestaltung angelegten Nervenverzweigungen auch die Form der Träger bestimmen, die Plattensubstanz aber sich an diesem System später in querer Richtung ausbreitet. Es wird alsdann auf die Wachsthumsverhältnisse der Nerven und ihrer Träger ankommen, wie stark sie sich krümmen, um eine einfache quere Ausbreitung der fast flüssigen Plattensubstanz zwischen ihnen zu ermöglichen oder bei stärkerer Krümmung ein Umfassen der Zapfen in einfacher oder doppelter Hinsicht nothwendig zu machen.

Da die Stromesrichtung bei allen bisher untersuchten Arten die gleiche ist, so ergiebt sich daraus, dass die Stellung der Nerven und ihrer Träger auf die Function einen bestimmenden Einfluss nicht haben kann, sondern dass es eben die kleinsten Elemente der Platte selbst in ihrer besonderen Anordnung sind, auf denen die Leistung des Organs beruht.

Zur genaueren Feststellung der Vorgänge wird man der embryologischen Untersuchung so wenig wie beim Zitterwels entrathen können: leider ist auch die Entwickelung des Nilhechtes noch ebenso unerforscht als die des Zitterwelses. Hier ist der Zukunft noch viel vorbehalten: sind doch sonderbarer Weise nicht einmal die Geschlechtsorgane der Mormyriden genügend bekannt.

Beobachtungen über den Bau der Geschlechtsorgane.

Wenn man die Häufigkeit der vielen, hierher gehörigen Arten in den Flüssen Africa's und ihr regelmässiges Erscheinen auf den Märkten des Landes berücksichtigt, so klingt es wie ein Märchen, wenn man in den Autoren liest: »Die Männchen dieser Fische wurden bisher nicht beobachtet.« Meist schweigt man sich über den Bau der Geschlechtsorgane vollständig aus.

Die Hoffnung später einmal an embryonales Material zu kommen veranlasste mich diese Organe an zahlreichen Individuen einer genauen Untersuchung zu unterwerfen. Dabei ergab sich zunächst die auffallende, sehr unbeachtet gebliebene Thatsache, dass die Ausbildung der Keimdrüse einen ganz einseitigen Charakter trägt.

Man findet in der linken Seite der Bauchhöhle einen länglichen Körper, der im unentwickelten Zustande bei manchen Arten (*M. cyprinoides*) einer kurzen, platten Schote gleicht, bei anderen (z. B. *H. dorsalis*) ist er mehr bohnenförmig, mit wulstigen Erhebungen, oder unregelmässig gelappt (*M. Isidori*, *M. bovei*).

Bei starker Entwickelung wird das Organ sackförmig, erfüllt die ganze, sonst auffallend leere Leibeshöhle und lässt schon mit unbewaffnetem Auge die darin enthaltenen Eier erkennen; es stellt sich also als ein einfach vorhandenes *Ovarium* dar. Noch im Februar fand es sich auch bei grösseren Fischen ausserordentlich unentwickelt und verleitete zu der Annahme, dass die Laichzeit sehr fern sein müsse. Aber schon Anfang März wurde zu Damiette ein *M. oxyrhynchus* von etwa 30^{cm} Länge gefangen, welcher einen etwa halb entwickelten Eierstock aufwies, mit Eiern vom Durchmesser des feinsten Schrotes. In der zweiten Hälfte des März ergab die Untersuchung eines recht grossen, 47^{cm} messenden Mormyrus derselben Art, der bei Cairo gefangen wurde, einen vollkommen ausgebildeten Eierstock mit Eiern von 1^{mm}.5 Durchmesser, welche der Reife jedenfalls sehr nahe standen.

Mit Rücksicht auf die wichtige embryonale Entwickelung wäre es doppelt erwünscht auch Fische mit reifen Samen-Elementen zu finden, dies hat aber bisher aus unaufgeklärten Gründen nicht glücken wollen. Zuweilen sieht man aber kleine, schmächtige Exemplare verschiedener Arten, in denen trotz des sorgfältigsten Suchens selbst das eine unentwickelte *Ovarium* vermisst wird. Diese allerdings viel selteneren Exemplare dürften die Männchen im nicht geschlechtsreifen Zustande sein. Die jedenfalls auch einseitige Anlage des Hodens ist nicht so leicht sicher festzustellen als ein unentwickeltes *Ovarium*, weil jeder mikroskopische Schnitt von solchem die unverkennbaren Primordialeier zeigt, der ruhende Hoden aber wenig Charakteristisches darbietet.

Gleichwohl glaube ich den Hoden an den eierstocklosen Individuen in der Nähe der Geschlechtsöffnungen zwischen dem Darm und den Ureteren eingeklemmt gefunden zu haben als einen ziemlich weiten aber kurzen Schlauch von gelbröthlicher Farbe, der im Innern wandständige, taschenartige Vertiefungen zeigte, ausgefüllt mit Zellen. welche ruhenden Samenzellen recht ähnlich sahen.

Wiederholte Untersuchung bei verschiedenen Arten und zu verschiedener Jahreszeit wird mehr Licht in diese noch dunkle Frage zu bringen vermögen. Auch wird das mitgebrachte Material mit Musse genauer zu durchmustern sein, wobei alsdann sich gewiss noch mancherlei neue Thatsachen ergeben werden, manches, was hier nur kurz angedeutet werden konnte, eingehender untersucht werden soll.

41. Der Basalt des Hohenberges bei Bühne in Westfalen.

Von Dr. F. Rinne
in Berlin.

(Vorgelegt von Hrn. Roth am 19. November: — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. XLVII]: — ausgegeben am 26. November.)

Hat man, von Osten kommend, die hochgelegene Ebene des Reinhardswaldes in der Höhe der Sababurg durchquert und den Wald, welcher das Buntsandsteingebirge in reicher Weise bedeckt, verlassen, so eröffnen sich dem Blick das malerische Esse- und Diemelthal, die sich hier parallel der Längsrichtung des Reinhardswaldes von Süden nach Norden der Art hinziehen, dass das Diemelthal die nördliche Fortsetzung des Essethales bildet. Unter den Bergen, welche die Thäler begrenzen, ziehen vereinzelte, aber bedeutende, basaltische Erhebungen das Auge auf sich. Im Süden erblickt man bei Hofgeismar die Kuppen des Schöneberges und Westberges, aus Feldspathbasalt und Melilith-Nephelinbasalt bestehend. Im Westen fallen die Feldspathbasaltkuppe des Deiselberges und der Hohenberg auf. Der letztere ist Gegenstand der folgenden Beschreibung.

Von dem gewählten Standpunkte aus führt der Weg durch das Diemelthal die westliche Berglehne hinan, deren obere Abhänge nicht wie die östliche aus Buntsandstein, sondern aus Muschelkalk bestehen. Fortschreitend gelangt man in die Keuperformation, welche der zu beschreibende Basalt durchbrochen hat. Vom Hohenberge aus überblickt man nach Westen zu eine stundenlange und -breite Keuperplatte, auf deren Ostrande man steht. Vereinzelte Basaltdurchbrüche sind auch hier wiederum zu verzeichnen. Vor allem fesselt der Desenberg bei Warburg durch seine schlanke Kegelform das Auge. Er besteht aus Limburgit. Die übrigen Basaltvorkommnisse auf der Keuperplatte sind weniger aus der Ferne auffallend. Zu erwähnen sind die des Hüssenberges bei Eissen (Nephelinbasalt), des Weissholzes bei Lütgeneder (Feldspath führender Limburgit), von Daseburg und des Eckensteins bei Daseburg (beide Limburgit).

Inmitten dieser im Obigen kurz gekennzeichneten Umgebung erhebt sich der Hohenberg als flache Kuppe. Dieselbe soll nach den Aussagen der Bewohner von Bühne früher wesentlich höher gewesen sein als jetzt. Alter, noch jetzt reger Steinbruchsbetrieb soll sie beträchtlich erniedrigt haben.

Die Art des Vorkommens des in Rede stehenden Basaltes ist eine zweifache, von denen die eine eine ungewöhnliche und merkwürdige ist. Zunächst gewahrt man in dem Steinbruche an der Westseite des Berges das Gestein in Massen anstehend, die zum Theil eine sehr grobe, säulenförmige Absonderung wahrnehmen lassen. Die einzelnen, kurz und dick säulenförmigen Theile haben Durchmesser von 6 und mehr Fuss. Ganz ähnlich ist das Vorkommen in einem zweiten, wie der erwähnte dem Baron Spiegel in Bühne gehörigen, benachbarten Steinbruche. Hingegen ist man bei Durchsuchungen des Berges nach Basalt, welche die Gemeinde Bühne anstellen liess, auf eigenthümliche, an der Oberfläche ungefähr kreisförmig einschneidende, kleine Basaltmassen gekommen. Die Durchmesser dieser Kreise betragen nicht mehr als etwa 3^m. Diese Basaltmassen liegen in Abständen von einigen Metern nebeneinander und sind durch Keupermergel von einander getrennt. Zwei dieser kleinen Vorkommnisse sind weiter verfolgt worden. Man erkennt nunmehr, dass der Basalt die Ausfüllung nach unten sich verengender Hohlräume im Keuper darstellte. Diese Hohlräume besitzen verhältnissmässig glatte Wände. Ihre Tiefe beträgt ungefähr 3^m. An dem erstuntersuchten dieser Vorkommnisse hat sich nach Aussage der Arbeiter der Basalt in den mittleren Theilen fest und compact erwiesen, während er nach dem Rande zu schlackig ausgebildet war. Der feste Basalt war zur Zeit meines Besuches aus dem Vorkommen entfernt. Einzelne Stücke lagen noch in der Nähe. Der schlackige Mantel war noch zum Theil zu beobachten. Ähnliche Verhältnisse liessen sich an einem zweiten Vorkommen feststellen. Das Loch ist hier im Querschnitte nicht kreisförmig, sondern ein wenig in die Länge gezogen. Die Mitte barg festen Basalt, der Randtheil war schlackig. Man konnte indess bemerken, dass auch eine Wechsellagerung von festem und löcherigem Basalt nahe dem Rande des Loches vorhanden ist. Es folgt hier auf festen Basalt nach aussen zu gerechnet eine etwa fussdicke Lage schlackigen Gesteins und hierauf wieder compacter Basalt.

Das Ungewöhnliche bei diesen letztbeschriebenen Vorkommnissen liegt nicht in der verschiedenen Structur des Basaltes auf so eng begrenztem Raume, denn es ist bekanntlich keine seltene Erscheinung, dass Basalt in der Contactnähe schlackig, weiter entfernt vom Nebengesteine fest erscheint. Eigenartig erscheint jedoch das Vorkommen von Basaltmassen in spitz napfförmigen Höhlungen, die jedenfalls vor Erguss des basaltischen Magmas bereits vorhanden waren. Die Zuspitzung der Hohlräume nach unten und das Vorhandensein schlackigen Basaltes auf dem Grunde der Höhlungen legt die Vermuthung nahe, dass in der That unten geschlossene Hohlräume vorlagen, in welche das Basaltmagma von oben hineinfloss, und nicht die oberen Theile von »Stielen« basaltischer Eruptionsmassen. Indess ist es erwünscht, diese wegen ihrer geringen Ausdehnung unter verhältnissmässig nur wenigen Schwierigkeiten zu untersuchenden Vorkommnisse durch Grabungen weiter zu erforschen, ein Vorgehen, das dem Verfasser zur Zeit nicht möglich war.

Der Basalt des Hohenberges beansprucht ein besonderes Interesse wegen seiner, in der Gegend des Habichtswaldes seltenen, petrographischen Ausbildungsart als Melilith-Nephelinbasalt, wegen der zahlreichen wie Fremdlinge in den Basalt eingebetteten Massen, sowie wegen reichlich vorhandener, zum Theil seltener Mineralien, die in den Hohlräumen des Gesteins sich vorfinden.

Das zu besprechende Material soll in folgenden Gruppen zur Betrachtung kommen.

1. Protogene Bildungen des Basaltes.
2. Wesentliche Bestandtheile des Basaltes.
3. Einschlüsse des Basaltes.

1. Protogene Bildungen des Basaltes.

Mit diesem Namen sollen die Massen bezeichnet werden, die als die ältesten Ausscheidungen des basaltischen Magmas aufgefasst werden können, jedoch nach Art der Einschlüsse in der Hauptmasse des Gesteins sich vorfinden. Solche Bildungen, bekanntermaassen keine seltene Erscheinungen bei Ergussgesteinen, sind von Sauer[1] »endogene Einschlüsse« genannt worden. Ich ziehe es vor, den Begriff der Einschlüsse auf die Massen zu beschränken, welche ihre Entstehung nicht dem Magma verdanken, dessen Verfestigungsproduct sie nunmehr umgibt, und welche mithin immer »exogen« sind.

Bei dem in Rede stehenden Basalt kommen an protogenen Bildungen besonders Olivin- und Feldspathmassen in Betracht.

a. Die protogenen Olivinmassen.

Das makroskopische Aussehen dieser Massen weicht vielfach von der typischen Ausbildungsweise der »Olivinknollen« ab, wie sie so

[1] A. Sauer: Erläuterungen z. geolog. Specialkarte d. Königr. Sachsen. Section Wiesenthal. S. 68. 1884.

häufig in Basalten gefunden werden. Nur wenige der gesammelten Stücke weisen den normalen Bestand von reichlichem Olivin, dunklem Bronzit, grünem Augit und Picotit auf. Abgesehen davon, dass das Mengenverhältniss dieser Substanzen in den einzelnen Knollen ein verschiedenes ist und auch die Korngrösse schwankt, fällt vor allem das häufige Vorkommen von violettgrauen bis schwärzlichen Flecken in den Olivinmassen auf. Die Flecke erscheinen als längliche und rundliche, bis $^1/_2{}^{cm}$ grosse, meist aber kleinere Durchschnitte auf den Bruchflächen durch die Knollen. Besonders auffällig sind ähnliche Flecke, aber von heller, violettweisslicher Farbe, in einem Bruchstücke, welches sich überdies durch die reichliche Anwesenheit etwa 1 – 2^{mm} grosser, tiefschwarzer Picotitkörner auszeichnet. Das betreffende Stück gewinnt durch die Anwesenheit der Flecke ein variolitisches Äussere.

Die mikroskopische Betrachtung der normalen, fleckenlosen Knollen bestätigt im wesentlichen die früheren Erfahrungen. Deutliche Krystallformen kommen nicht zur Beobachtung. Der Olivin stellt sich, abgesehen von Schaaren von Flüssigkeitseinschlüssen sowie Gasporen, welche meist auf gekrümmten Ebenen liegend sich durch die Krystalle hindurchziehen, als recht reine Substanz dar. Selten sind Picotiteinschlüsse in ihm wahrzunehmen. Bronzit und der monokline Augit hingegen führen ausser Flüssigkeits- und Gasporen auch die bekannten, beim rhombischen Augit mehr stäbchen-, beim monoklinen Augit mehr blättchenförmigen, bräunlich gelben Einschlüsse. Der nicht häufige Picotit bildet lappige Durchschnitte von licht kaffeebrauner Farbe.

Öfters ist nun das mikroskopische Bild ein wesentlich anderes. Es treten dann Umänderungen hervor, welche die Olivinmassen unter dem Einflusse des Magmas erlitten, als sie, aus der Tiefe mit diesem empordringend, unter andere Bedingungen kamen, als die waren, unter denen sie entstanden. Eingehende Untersuchungen über derartige Umänderungen von Olivinknollen hat vor allem Bleibtreu[1] gemacht. Es handelte sich bei den von ihm beschriebenen Fällen um die Einwirkung von Feldspathbasalt auf die Olivinknollen. Bei dem in Rede stehenden Gesteine vom Hohenberg hat man es mit einem Melilith-Nephelinbasalt zu thun. Nichtsdestoweniger sind mannigfache Übereinstimmungen in dem Umänderungsprocess zu verzeichnen. Besonderheiten sollen sofort hervorgehoben werden.

Die Einwirkung des Magmas auf die einzelnen Mineralien äussert sich folgendermaassen.

[1] K. Bleibtreu: Beiträge zur Kenntniss der Einschlüsse in den Basalten mit besonderer Berücksichtigung der Olivinfels-Einschlüsse. Zeitschr. d. deutsch. geol. Gesellsch. 1883. S. 489.

Olivin. Die deutlichen Veränderungen, welche der Olivin erleidet, kennzeichnen sich durch die Ausbildung eines Hofes von Olivinkörnern um die Kerne ursprünglicher Olivinsubstanz. Es lässt sich nicht verkennen, dass die Höfe durch randliche Umkrystallisation des Olivins zu Stande gekommen sind. Die einzelnen, rundlichen und länglichen Körner des Hofes lassen zum Theil Krystallformen wahrnehmen, im Gegensatz zu den ursprünglich vorliegenden Olivinmassen. Häufig zeigen sie allerlei Einbuchtungen und erinnern dadurch an die siebartig durchlöcherten und mit schlauchförmigen Einbiegungen ihrer Ränder versehenen Formen mancher Contactmineralien. Vielfach führen die Körner grosse Einschlüsse farblosen Glases, das oft eine der Längsrichtung des Wirthes sich anpassende, wurmförmige Gestalt besitzt. Fernerhin kommen kleine Picotitkryställchen als Einschlüsse in den neugebildeten Olivinen vor. Letztere sind zum Theil noch mit dem grossen Olivinkern, von dem sie stammen, parallel gelagert. Ist diess nicht mehr der Fall, so kann man doch häufig eine Parallellagerung der Kryställchen unter sich auf kleinen Bezirken feststellen. Zwischen sich lassen die kleinen Olivine nur geringfügige Lücken frei, die dann mit einer isotropen Substanz, die man für Glas halten kann, gefüllt sind.

Bronzit. Bei der Vereinigung von Olivin, Bronzit und monoklinem Augit in den Olivinknollen lässt sich bei eintretenden Veränderungen nicht immer mit Bestimmtheit sagen, welchem Mineral als Ursprungsmaterial die entstandenen Umwandlungsproducte zugehören, da letztere besonders an den Rändern der Körner sich zeigen, wo häufig verschiedene Mineralien aneinanderstossen. Die Beurtheilung wird erleichtert, wenn man von den Körnern ausgeht, welche einzeln im Basalte eingebettet liegen. Man findet nun im Basalt des Hohenberges nicht selten Augitmassen von Erbsen-, Wallnussgrösse und auch beträchtlicheren Dimensionen. Zum Theil sind dieselben rhombischer Augit. Derselbe hat ein glänzendes, glasartiges Äussere und eine grünlich braunschwarze Farbe. Umgeben sind die Körner von einem bis $2^1/_2{}^{mm}$ breiten, gelbgrünen Saume. Zerschlägt man ein solches Augitkorn, so bilden sich längliche Theilstücke, an denen man die orientirte Auslöschung in allen Richtungen senkrecht zur Längserstreckung und den charakteristischen Pleochroismus des Bronzits leicht feststellen kann. Im Dünnschliffe erhält man eine weitere Bestätigung der rhombischen Natur des Augits durch die niedrigen Polarisationstöne, welche den hierhergehörigen Mineralien eigen sind.

Die Substanz des Augites erweist sich frei von Mineraleinschlüssen. Auf gekrümmten Ebenen durchziehen ihn Flüssigkeits-, Luft- bez. leere Poren. Der Rand des Krystalls ist unregelmässig ausgezackt. In sein Inneres dringt die Substanz des Saumes mehr und minder tief ein. Dieser Saum besteht aus einer Schaar von klaren Körnern, die im allgemeinen an den dem Bronzit nahe gelegenen Stellen verhältnissmässig gross ausgebildet sind und einzeln liegen, nach aussen zu kleiner werden und gedrängt sich an einander legen. Die zwischen ihnen bestehenden Lücken füllt ein globulitisch gekörneltes, gelblich braunes Glas aus. Im Gegensatz zu dem schwach doppelbrechenden Bronzit besitzen die Körner seines Hofes eine sehr starke Doppelbrechung. Ihr Relief erscheint sehr hoch. Zuweilen sind deutliche Krystallformen an den grösseren Körnern zu erkennen. Dieselben weisen wie die erwähnten optischen Verhältnisse darauf hin, dass hier Olivin vorliegt. Besonders deutlich treten das charakteristische Doma $2P\breve{\infty}$ (021) und $\infty P\breve{\infty}$ (010) hervor. Die Kryställchen beherbergen reichlich rundliche und schlauchförmige Glaseinschlüsse.

Es liegt hiernach eine eigenthümliche Umänderung des Bronzits vor. Unter dem Einflusse des Magmas ist seine Randsubstanz geschmolzen und zum Theil wieder als Olivin auskrystallisirt. Der Rest erstarrte zu Glas.

Die Umgrenzung des Olivinsaumes wird auf einzelne Strecken durch hier reichlich vorhandenen, violettbräunlichen Augit des Basaltes bewirkt. An anderen Stellen hat sich Magneteisen in beträchtlicher Menge angesammelt.

In gleich deutlicher Weise wie bei den einzeln liegenden Bronziten sind die Umänderungen dieses Minerals in den Olivinknollen nicht häufig zu sehen. Meist besteht der Saum in der Umgebung des Bronzits aus so dicht gedrängten Körnern, dass ihre Natur schwer zu erkennen ist. In anderen Fällen lässt aber auch in den Dünnschliffen durch die Olivinknollen die Deutlichkeit der Erscheinung nichts zu wünschen übrig.

Die Umänderungen, welche die mit Becker[1] zu reden »angegriffenen« Bronzite erlitten haben, wurden von Bleibtreu (a. a. O.) dahin gedeutet, dass der rhombische Augit in monoklinen Pyroxen umgewandelt sei. Indess befähigten ihn die betreffenden, schwierigen Verhältnisse in den von ihm untersuchten Gesteinen nur dazu, eine Vermuthung über die mineralogische Natur des Umwandlungsproductes auszusprechen.

Monokliner Augit. Der monokline Augit scheint unter den Mineralien der Olivinknollen die für Contactwirkungen empfänglichste Substanz zu sein. Die Umänderungen, welche der Augit durch das basaltische Magma erlitten hat, lassen sich zunächst am geeignetsten an einzelnen Massen studiren, die gesondert von den Olivinknollen

[1] A. Becker: Über die Olivinknollen im Basalt. Zeitschr. d. Deutsch. geol. Gesellsch. 1881. S. 31.

im Basalt des Hohenberges gefunden werden. Es sind rundliche, zuweilen mehrere Centimeter grosse Körper, die in ihrer Masse verschieden gefärbt sind, insofern als in einem matten, etwas violett erscheinenden, bräunlichen Untergrunde einzelne, glasartig aussehende, schwärzlich braune Theile fleckenweise erscheinen. Beide Arten sind monokliner Augit, ja sogar Theile desselben Krystalles und nur durch das Vorhandensein einer grösseren oder geringeren Menge von Einschlüssen von einander verschieden.

Die mikroskopischen Verhältnisse sind folgende. Die glänzenden Theile des Augits erscheinen im Dünnschliffe als fast reine Substanz. Nur die bekannten, zu grossen Mengen vereinigten, auf gekrümmten Flächen liegenden Flüssigkeits- und Gasporen durchziehen die Masse. Hingegen sind die matten Theile des Krystalls, durch welche die Spaltrisse aus den klaren Partien ununterbrochen fortsetzen, und die mit letzteren zusammen auslöschen, also gleich orientirt sind, vollkommen durchsetzt von einer ausserordentlichen Menge dicht neben einander liegender Einschlüsse, die zum grössten Theile glasiger Natur sind. Doch fehlen in dem Gewirre auch nicht zahlreiche Gasporen. Die Gestalt dieser Einschlüsse ist eine rundliche, längliche oder auch verzweigt schlauchförmige. Besonders an den randlichen Stellen des Augites erscheint letztere Form als die vorherrschendere. Ausser den Glaseinschlüssen erblickt man in den Augiten eine beträchtliche Anzahl kleiner Körner von Olivin. Sie haben meist eine etwas längliche, doch vielfach mit Einbuchtungen versehene Gestalt. Zuweilen erkennt man an ihnen bei Durchschnitten nach $\infty P \bar{\infty}$ (100) die Formen $2 P \breve{\infty}$ (021) und $\infty P \breve{\infty}$ (010). Auch sie führen Glaseinschlüsse. Die Körner liegen unter einander theilweise parallel, obwohl sie nicht zusammenzuhängen scheinen.

Dort wo der Augit den Basalt berührt stellen sich noch weitere eigenthümliche Contactverhältnisse ein, die sich dadurch erklären lassen, dass hier ein Weiterwachsen des Augits im Magma stattfand. Man bemerkt nämlich um den im Dünnschliffe fast farblosen Kern des Augits einen Saum, gleichfalls von Augitsubstanz, indess von röthlich violetter Farbe. Diese Zone um den Augitkern kennzeichnet sich ferner durch das starke Zurücktreten der Einschlüsse. Nur spärlich kommen in ihr besonders Glaseinschlüsse, Magnetitkörner und Apatitnadeln zur Beobachtung. Nach dem Basalt zu bietet der Augitsaum keine regelmässig krystallographische Begrenzung dar. Dass dies indess nicht zu allen Zeiten so gewesen ist, beweist ein sehr charakteristischer Schliff, welcher inmitten des Augitsaumes eine krystallographische Formbegrenzung erkennen lässt, die sich durch eine reihenförmige Anordnung sehr kleiner Einschlüsse kennzeichnet. Über die einstmalige Grenzlinie setzt sich der Augitsaum noch weiter fort, und schliesslich endet er gegen den Basalt mit einer unregelmässigen fein gezähnelten Grenzlinie. Die Auslöschung des rothbraunen Augitsaumes ist mit der des Kernes im Groben die gleiche, doch ist ersterer durch eine ausgeprägte Zonarstructur ausgezeichnet, die im parallelen, polarisirten Lichte durch etwas von einander abweichende Auslöschungsrichtungen der einzelnen Zonen hervortritt, und die dem Augitkerne fehlt.

Die Basaltmasse biegt sich zuweilen buchtenförmig in den Augit hinein. Hier ist dann an einigen Stellen ein besonderer Reichthum des Gesteins an Nephelin zu verzeichnen.

Die Eigenthümlichkeiten der monoklinen Augite in den Olivinknollen lassen sich nun an der Hand der erworbenen Kenntnisse über die einzeln im Gesteine befindlichen Pyroxene leichter überschauen. Auch in den Olivinknollen hat der monokline Augit vielfach Umänderungen erfahren. Am bedeutendsten sind dieselben in den Knollen, welche durch die oben erwähnten, violettgrauen Flecke ausgezeichnet sind. Es sind die Olivinmassen, welche auch die beschriebenen Umänderungen am Olivin und Bronzit in besonders deutlicher Weise zeigen. Hin und wieder zwar entdeckt man auch in ihnen noch ein Stück normalen, monoklinen Augites, welches sich abgesehen von den auf gekrümmten Flächen liegenden Flüssigkeits- und Gaseinschlüssen als reine Substanz erweist. Diese unversehrten Kerne gehen dann aber nach aussen in eine Zone über, welche ausserordentlich zahlreiche Glaseinschlüsse führt. Man erkennt diese Ränder bereits bei makroskopischer Betrachtung des Dünnschliffes durch ihre matte, graugrüne Farbe. Es ist diese Verschlackung eine Erscheinung, die, wie erwähnt, auch bei den lose im Basalt liegenden Augiten in vorzüglicher Deutlichkeit auftritt. Gleicherweise wie bei letzteren kann man dann fernerhin auch wahrnehmen, wie dort, wo solche monoklinen Augite an die basaltische Masse stossen, ein Weiterwachsen stattgefunden hat. Man erkennt deutlich den röthlich braunen Augitsaum um den helleren Kern.

Hiermit ist das Maass der Umwandlung des monoklinen Augits indess noch nicht erschöpft. Es stellen nämlich, wie man durch Übergänge zuweilen erkennen kann, die erwähnten, violettgrauen Flecke ein weiteres, stärkeres Maass der Umänderung vor. Diese Partien werden im Dünnschliffe erst bei grosser Dünne des Praeparates durchsichtig. Man erkennt bei der mikroskopischen Untersuchung, dass die betreffenden Stellen aus einer Schaar von Augiten von licht röthlich brauner Farbe bestehen, die von einer ausserordentlich grossen Anzahl kleiner Picotitoktaeder durchsprenkelt sind. Die Augite liegen häufig zum Theil mit ihren Längsrichtungen parallel, stehen auch oft mit einander durch unregelmässige Äste in Verbindung und löschen dann zugleich aus. Zuweilen greifen mehrere solcher Systeme durcheinander. Die einzelnen Körner, die meist nur an ihren Längsseiten geradlinig begrenzt sind, lassen Lücken zwischen sich frei. Hin und wieder erkennt man in letzteren Olivinkörner, besonders dort, wo grosse Olivinkrystalle die Augitanhäufungen begrenzen. Andere Lücken erscheinen unausgefüllt. Nach aussen zu ist gewöhnlich der Rand der Flecke durch eine Schnur besonders grosser Picotitoktaeder bezeichnet. Zu erwähnen ist ferner, dass in verschiedenen der Flecke wohlbegrenzte Nephelinkrystalle besonders randlich zu bemerken sind. Sie sind wohl sicher dem basaltischen Magma zuzuschreiben, welches zum Theil in die fertigen Olivinknollen eindrang und dort als Nephelin erstarrte.

BLEIBTREU, welcher ähnliche Umwandlungen des monoklinen Augites wie die oben erörterten bei Olivinknollen aus Feldspathbasalt bespricht, schreibt die Umänderungen zum grossen Theile einer Durchtränkung der Knollen mit dem Magmarest zu, der später als Feldspath erstarrte. Ich habe bei vorliegendem Gesteine nicht die Überzeugung gewinnen können, dass die Contactwirkungen auf einer solchen Durchtränkung beruhen, denn auch mitten in den Knollen, wo nichts von Erstarrungsproducten eines solchen Magmarestes zu erkennen ist, und wohin keine Zufuhrkanäle reichen, haben die Umänderungen Platz gegriffen. Es scheint mir hier nur angebracht, zunächst auf den Einfluss einer wohl plötzlich, vielleicht bei Eintritt einer schnellen und massenhaften Krystallisation, erhöhten Temperatur zurückzukommen.

Im Anschluss an die erwähnten Contactwirkungen sei hier noch kurz der fast weisslichen Flecke gedacht, welche in einer an Spinell reichen Olivinknolle gefunden wurden. Nur ausserordentlich schwer werden sie beim Schleifen porcellanartig durchscheinend. Man erkennt hin und wieder eine faserige Structur in ihnen. Die Erscheinungsart dieser wohl auch secundären Flecke ist mir räthselhaft geblieben. Besonders erwähnt sei noch, dass der Spinell der Olivinknolle mit den soeben erörterten, variolitischen Partien im Dünnschliff nicht braun, sondern tief moosgrün erscheint. Der Spinell der übrigen Olivinknollen ist nach Art des Picotits braun durchscheinend.

b. Die protogenen Feldspathmassen.

Sehr eigenthümliche Feldspathmassen, die sich nicht selten im Basalt des Hohenberges eingebettet finden, halte ich wie die erwähnten Olivinknollen und die einzeln liegenden Bronzit- und Augitmassen für basaltogene Bildungen. Sie stehen mit den Olivinknollen in enger Verbindung. Es mag zunächst befremdlich erscheinen, Feldspathmassen als protogene Bildungen eines Nephelinbasaltes anzunehmen.

Es würde diess voraussetzen, dass ein basaltisches Magma in den ersten Perioden der Ausscheidung Massen verfestigen kann, deren Mineralien später zum Theil nicht mehr zur Entwicklung gelangen. Diese Annahme ist aber auch bei den Olivinknollen zu machen, wenn man sie als Urbildungen des basaltischen Magmas auffasst und auch durchaus nicht befremdlich. Im vorliegenden Falle fordert der Zusammenhang der in Rede stehenden Feldspathmassen mit den Olivinknollen die Annahme einer gleichen Art der Entstehung.

Das äussere Ansehen der Feldspathmassen wechselt mit der verschiedenen Art und Menge der den Feldspath begleitenden Mineralien. Da indess der grauweisse, glasartig glänzende Feldspath bei allen überwiegt, ist der herrschende Farbenton der dieses Hauptgemengtheils. Durch deutliche Zwillingsstreifung gibt sich der Feldspath bereits bei makroskopischer Betrachtung als Plagioklas kund. Krystallformen sind an ihm nicht zu erkennen. Die Krystalle liegen dicht aneinander. Eine zuckerkörnige Structur ist also nicht zu verzeichnen. Die einzelnen Körner erreichen zuweilen 1^{cm} in ihrer grössten Ausdehnung. Zwischen ihnen gewahrt man nun die dunkleren Gemengtheile in wechselnder Menge. In einzelnen, kleinen Knollen fehlen sie fast ganz. In anderen erkennt man reichlich kleine ($1-2^{mm}$ grosse), gleichmässig vertheilte, dunkelgrüne Augite. Im Gegensatz hierzu stehen die Massen, bei denen sich dieser Gemengtheil nur hier und da in der Feldspathmasse findet, aber dann zu cm grossen Nestern vereinigt. Schliesslich bemerkt man auch makroskopisch bereits in einzelnen Knollen Olivin. Besonders ein etwa 7^{cm} langes Stück zeigt ihn in schönen, gelben bis etwa $\frac{1}{2}^{cm}$ grossen Körnern. Dieses Stück wurde durch Hrn. Prof. Jannasch einer Analyse unterworfen. Sie ergab folgende Resultate:

SiO_2	47.72
TiO_2	0.24
Al_2O_3	18.49
Fe_2O_3	0.68
FeO	4.54
CaO	11.59
MgO	12.88
K_2O	0.41
Na_2O	2.81
P_2O_5	0.04
S	0.06
H_2O	1.30
	100.76

Ein Glühversuch (im Platintiegel) ergab 1.21 Procent Glühverlust, eine directe Wasserbestimmung 1.11 Procent H_2O. Es wurden Spuren von Mn, Sr, Li und Cl nachgewiesen. CO_2 konnte nicht ausgetrieben werden. Das specifische Gewicht bei 14° wurde = 2.916 gefunden. Das Gesteinspulver schmilzt im Platintiegel vor der Gebläseflamme etwas schwierig aber vollständig zu einem braunschwarzen, matten Glase zusammen. Die Schmelze des in Säuren unlöslichen Theiles (50.85 Procent) sieht hell olivenfarbig aus.

Das mikroskopische Bild des analysirten Stückes ist folgendes. Den wesentlichsten Antheil am Aufbau des Gesteins nimmt der klare Feldspath, der sich durchweg als Plagioklas erweist. Die Krystalle sind aufgebaut aus Lamellen nach dem Albitgesetz. Auch das Periklingesetz tritt mit letzterem verbunden nicht selten in Erscheinung. Die Auslöschungsschiefen sind sehr gross, und deshalb dürfte der Feldspath dem Anorthit nicht fern stehen. Er bildet gewissermaassen den Untergrund, in welchen die übrigen Gemengtheile eingebettet sind. Krystallformen sind an seinen Durchschnitten nicht zu erkennen. Mit unregelmässigem Rande greifen die einzelnen Körner ineinander. Ihre Substanz ist recht rein von mineralischen Einschlüssen. Nur selten wurden wohlumrandete Blättchen von braun durchsichtigem Titaneisen bemerkt. Um so reicher sind die Krystalle an anderen Einschlüssen. Zuweilen sind letztere sehr klein. Sie bilden dann feine Pünktchen, die in grosser Zahl den Feldspath erfüllen und ihn grau bestäubt erscheinen lassen, ähnlich wie es bei Gabbroplagioklasen nicht selten zu sehen ist. Bei anderen findet man Schaaren von Flüssigkeitseinschlüssen, die oft auf gekrümmten Flächen die Krystalle durchziehen. Sie haben mannigfache Formen. Zum Theil sind sie rundlich oder länglich, viele sind schlauchförmig verlängert und auch eigenartig verästelt. Zwischen den Flüssigkeitseinschlüssen bemerkt man ferner Einschlüsse, die wegen ihres sehr breiten Totalreflexionsrandes für Gasporen zu halten sind. Schliesslich kommen auch Glaseinschlüsse vor. Das Glas ist farblos. Die Feldspathe sind zum Theil der Art verschlackt, dass ihre ganze Masse durchschwärmt ist von den erwähnten Gästen, zum Theil kommen letztere indess nur auf bandartigen Zonen vor, die als lappige Gebilde die Krystalle durchziehen. Ich halte diese Anhäufungen von Glas für secundäre Bildungen, die wie die Glaseinschlüsse in den monoklinen Augiten der Olivinknollen durch die Einwirkung des Magmas in den Feldspathen entstanden sind.

Ein zweiter Gemengtheil des Gesteins ist monokliner Augit. Er hat eine schmutzig grünlich schwarze Farbe und ist in seinem äusseren Ansehen am besten mit gleichfarbigem Diallag mancher Gabbros zu vergleichen. Im Dünnschliffe erkennt man, dass seine Durchschnitte von sehr zahlreichen Einschlüssen erfüllt sind. Er erscheint hierdurch den verschlackten Augiten sehr ähnlich, die in den Olivinknollen zur Beobachtung gelangen. Mineraleinschlüsse wurden nicht bemerkt. Die Einschlüsse stellen sich vielmehr zum Theil als Gasporen, Flüssigkeitseinschlüsse und zumeist als Glaseinschlüsse dar. Man wird nicht fehl gehen, wenn man letztere als secundäre Erscheinungen bezeichnet. In gleicher Weise zu deuten ist eine gelegentliche Rothfärbung des Randes. Eine Zerstückelung der Augite in einzelne Körner wurde bei dem in Rede stehenden Gesteinsstücke nicht wahrgenommen.

Bronzit fehlt nicht. Jedoch sind seine Körner spärlich. Er ist in der Weise, wie es bei den Olivinknollen beschrieben ist, von einem Olivingrus umgeben, der jedenfalls auch hier aus ihm hervorgegangen ist.

Olivin tritt schon makroskopisch deutlich in Körnern hervor. Solche sind natürlich auch im Dünnschliffe zu erblicken. Sie haben in Bezug auf Gestalt und Einschlüsse ganz die Beschaffenheit, wie sie von dem Olivin der normalen Olivinknollen bekannt ist. Ausserdem findet sich nun aber der Olivin in dem Gesteine noch in zahlreichen Körnern, die zu rundlichen, länglichen, zuweilen auch im Dünnschliffe schnurartig erscheinenden Ansammlungen vereinigt sind. Meist sind Krystallformen an diesen Körnern nicht zu erkennen. Hin und wieder jedoch tritt die Olivinform in charakteristischer Weise durch $\infty P \breve{\infty} (010)$ und $2 P \breve{\infty} (021)$ deutlich heraus. Diese Olivinhaufen erinnern sofort an diejenigen, welche in den Olivinknollen zur Beobachtung gelangten. Beide sind wohl secundärer Natur. Ihr Ausgangsmaterial ist zum Theil Olivin selbst gewesen, der sich aus compacten Massen in Körnerhaufen umgelagert hat, zum Theil sind sie aus dem nur noch spärlich vorhandenen Bronzit entstanden. Schliesslich machen verschiedene Beobachtungen am monoklinen Augit es nicht unwahrscheinlich, dass seine Substanz unter Umständen gleicherweise fähig ist, einen Zerfall einzugehen und als ein Theilproduct Olivin zu bilden. Der Rest der ehemaligen Augitsubstanz wird in der isotropen Masse zu suchen sein, welche die Lücken zwischen den Olivinkörnern ausfüllt.

Als wesentlich am Aufbau der in Rede stehenden Feldspathknollen sind noch sehr eigenartige Massen zu erwähnen, die durch ihre Übergänge in den normalen Spinell sich ebenfalls als solche zu erkennen geben. Wie erwähnt fand sich in einer der Olivinknollen ein makroskopisch schwarz, im Dünnschliffe schön tief grün gefärbter Spinell vor. Seine grosse Härte und sein Isotropismus kennzeichnen ihn. Dasselbe Mineral erscheint nun auch wieder in den Feldspathmassen. Indess kommt es hier nur zum Theil wie in der Olivinknolle in grossen, compacten Durchschnitten zur Beobachtung. Zu allermeist sind die Massen eigenartig in einer Weise gelappt und schlauchförmig verzweigt, die sich am besten mit der eigenthümlichen Art der Ausgestaltung vieler Flüssigkeitseinschlüsse in Mineralien vergleichen lässt. In grosser Menge liegen die einzelnen, grünen, pseudopodienartigen Zweige nebeneinander. Sie verbreiten sich auf diese Weise massenhaft in anderen Mineralien, und zwar, wie es scheint, ganz besonders im Olivin. Die ausserordentliche Fülle, in der sie in dem Wirthe erscheinen, erschwert meist sehr die Erkenntniss der Natur des letzteren. Bemerkenswerther Weise kommen ganz ähnliche Gebilde von violblauer Farbe, selbst durch Übergänge mit den grünen Spinellmassen verbunden, vor. Violette Spinelle werden auch sonst hin und wieder bei Contactgesteinen angegeben.[1]

Das mikroskopische Bild der übrigen Feldspathmassen bietet keine in ihrem Wesen von der beschriebenen abweichende Erscheinungsweise dar. Es muss hervorgehoben werden, dass in ihnen gleichfalls die Umänderungen der Gemengtheile studirt werden können, und zwar bieten sie theils schwächere theils stärkere Umwandlungen dar, als sie in dem ausführlich beschriebenen Gesteinsstücke zur Beobachtung gelangten. Man kann unter ihnen z. B. Stücke finden, bei welchen die monoklinen Augite noch ihre ursprüngliche Frische zeigen und sich unverschlackt erweisen und wieder andere, in welchen die bei den Olivinknollen erwähnten, lockeren Anhäufungen von röthlichem Augit und von Olivin erscheinen, die hier wie dort wohl am besten als die Umwandlungsproducte der Augite gedeutet werden. Es fehlen auch nicht die starken Ansammlungen von Spinellkörnern. Sie machen hier in Folge ihrer schwarzen Farbe den Eindruck von Magnetit. In der Nähe dieser Spuren stärkster Umänderung zeigt auch der Plagioklas in hohem Maasse Structurabnormitäten insofern als er hier durch Verschlackung stark getrübt ist.

Es ist in Anbetracht der obigen Verhältnisse nicht zu verkennen, dass die Olivinmassen des Basaltes sowie die in gleicher Weise sich in ihm findenden, beschriebenen Plagioklasknollen eng mit einander verknüpft erscheinen. Wie in den Olivinknollen erscheinen Olivin, monokliner und rhombischer Augit und Spinelle in den Feldspathmassen, und die Art ihres Auftretens sowie ihre Veränderung unter dem Einflusse des basaltischen Magmas sind sehr ähnliche. Besonders bemerkenswerth ist der eigenthümliche, im Dünnschliffe grün erscheinende Spinell, der in der einen Olivinknolle so reichlich gefun-

[1] Vergl. J. ROTH: Allgem. u. chem. Geologie, Bd. III, Kapitel: Einschüsse in Eruptivgesteinen, S. 34.

den wurde, und der auch in den Feldspathmassen wiederkehrt. Man geht deshalb wohl nicht fehl, wenn man beiden Arten von Knollen die gleiche Art der Entstehung zuschreibt. Bezüglich der Olivinknollen herrscht bekanntlich Meinungsverschiedenheit bezüglich ihres Ursprungs. Die einen, besonders J. Roth und Rosenbusch, sehen sie als alte Ausscheidungen des Basaltes an, während die anderen, vor allem Sandberger, Becker und Bleibtreu sie für dem basaltischen Magma fremde Massen, also Einschlüsse, halten. In den oben geschilderten Verhältnissen scheint mir nun ein wesentliches Moment zu liegen, welches für die Ausscheidungsnatur der Olivinmassen spricht. Die Feldspathknollen machen durchaus den Eindruck eines eruptiven Gesteins, ohne anderseits vollständig im Aussehen mit einem Diorit oder Gabbro übereinzustimmen. Ihre fremdartige, vor allem ihre bezüglich des Mineralbestandes wechselnde Erscheinungsart lässt sich am besten mit der Annahme der besonderen Entstehungsart vereinigen, welche man protogenen Massen zuschreiben muss. Es werden Bruchstücke alter, in grosser Tiefe entstandener Ausscheidungen sein, die von dem empordringenden Magma mitgeführt wurden und in demselben sich wie Fremdkörper verhalten mussten. Sie erlitten die oben beschriebenen, charakteristischen Veränderungen als sie mit dem Magma unter andere Verhältnisse des Druckes und der Wärme kamen als die waren, unter denen sie entstanden. Da nun diese protogenen Massen eng mit den Olivinknollen des in Rede stehenden Basaltes verknüpft erscheinen, so ist es geboten, auch letzteren die Natur von alten Ausscheidungen und nicht von Einschlüssen zuzuschreiben.

2. Wesentliche Bestandtheile des Basaltes.

Der Anblick des normalen, festen Basaltes mit blossem Auge lässt in einer sehr feinen, körneligen, matt grauschwarzen Grundmasse zahlreiche, kleine, höchstens wenige Millimeter grosse Einsprenglinge von Olivin und Augit erkennen. Bei dem schlackig ausgebildeten Gesteine treten die Einsprenglinge bei der makroskopischen Betrachtung etwas mehr zurück.

Das Mikroskop lässt an Gemengtheilen folgende erkennen. Olivin, Augit, Nephelin, Melilith, Magnetit, Apatit, Perowskit, Picotit.

Olivin. Der Olivin, der in dem festen Gestein des Hauptsteinbruches von hervorragender Frische ist, bei den kleineren Vorkommnissen in den erwähnten, napfförmigen Vertiefungen eine Gelbfärbung durch Ausscheidung von Eisenverbindungen erlitten hat, stellt sich als Einsprengling im Gestein dar, und zwar sowohl in krystallographisch wohlumgrenzten Durchschnitten, als auch in unregelmässigen Körnern. Erstere weisen $\infty P\breve{\infty}(010)$; $\infty P(110)$ und $2P\breve{\infty}(021)$ als Hauptformen auf. Krystallographisch interessant ist das wenn auch spärliche Vorkommen von Zwillingen. Es finden sich solche nach $P\breve{\infty}(011)$ und $\frac{1}{2}P\breve{\infty}(012)$.

Ich bin der Überzeugung, dass ein grosser Theil der zur Beobachtung gelangenden Olivine des Basaltes aus den Olivinknollen stammt. Es sind natürlich besonders die hierauf hin in Betracht zu ziehen, bei denen die Umrandung eine unregelmässige ist. Vor allem erscheint mir die Annahme einer derartigen Herkunft bei denjenigen Olivinen begründet, welche Flüssigkeitseinschlüsse und Luftporen nach Art der Olivine der Knollen auf gekrümmten Flächen angeordnet führen. Bei einem solchen Durchschnitte wurde in einem Flüssigkeitseinschluss eine lebhaft tanzende Libelle gefunden. Manche der unregelmässigen Olivinkörner zeigen stark wellige Auslöschungen, wie es auch beim Olivin der Knollen vorkommt. Sie zeigen dadurch an, dass mechanische Kräfte eine innere Verschiebung oder selbst Zertrümmerung der Körner hervorgerufen haben.

Zuweilen erleichtert auch das Zusammenvorkommen monoklinen Augits, wie er in den Knollen vorkommt, mit Olivin die Untersuchung über den Ursprung des letzteren. So gelangte ein Olivindurchschnitt zur Beobachtung, an welchem seitlich ein Stück solchen Augits sich befand. Dort wo der Augit an den Basalt stiess, zeigt er den charakteristischen, röthlichen Contactstreifen zum Zeichen dafür, dass er hier in dem basaltischen Magma weiter wuchs und einen anders zusammengesetzten aber isomorphen Augit auf sich niederschlug.

An den Olivinen der Olivinknollen sind nicht selten Spuren der Umänderung zu finden, die unter dem Einfluss des Magmas zu Stande gekommen sind. Deutliche Anzeichen für ähnliche Bildungen sind bei den Olivinen des Basaltes selten. Doch findet man auch hier eine Auflösung grösserer Olivine in Körnerhaufen, die gleichfalls aus Olivin bestehen. Schliesslich kann dies zur Ausbildung richtiger »Olivinaugen« führen. Dann ist vom compacten Olivinkerne nichts mehr zu erkennen. Man bemerkt vielmehr im Dünnschliffe nur einen aus einzelnen, kleinen Olivinkörnern bestehenden Haufen, dessen Individuen zuweilen deutliche, krystallographische Begrenzung erkennen lassen. Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, dass in manchen dieser Fälle dennoch ein fester Olivinkern vorgelegen hat, der aber von der Schlifffläche nicht berührt wurde.

Augit. Der Augit des Gesteins kommt als Einsprengling und als Gemengtheil der Grundmasse vor. Beide Arten der Erscheinung gehen indess in einander über. Der Einsprenglingsaugit, der an Menge hinter dem Olivin zurücktritt, bildet im Dünnschliffe licht röthlich gelb erscheinende, zum Theil scharfe Krystalle, die in der Prismenzone durch $\infty P \overline{\infty}$ (100); ∞P (110) und $\infty P \grave{\infty}$ (010) begrenzt sind. Sie sind tafelförmig nach $\infty P \overline{\infty}$ (100). Die Begrenzungen an den Enden der c-Axe durch Pyramidenflächen ist selten erkennbar. Meist ist dieser Randtheil zerstückelt. Es kommt vor, dass auch hier eine scharfe Grenzlinie zu sehen ist, die durch einen etwas dunkleren Farbenton und kleine, schwarze Einschlüsse gekennzeichnet ist. Jedoch setzt sich dann über sie hinaus noch die Augitsubstanz fort, um zackig in den Basalt auszulaufen. Zu einer bestimmten Zeit besass mithin auch an den Enden der c-Axe der betreffende Augit eine krystallographische Form. Ein zerstückelter Rand findet sich übrigens auch oft rund um die Krystalle.

Zwillinge nach $\infty P \overline{\infty}$ (100) sind häufig. Oft ist diese Zwillingsbildung eine polysynthetische und an die der Plagioklase erinnernde. In einem Augit wurden 15 Lamellen gezählt.

Einzelne der Einsprenglingsaugite überschreiten die gewöhnliche Grösse. Sie erscheinen im Inneren heller als am röthlich gelb gefärbten Rande. Der Kern ist besonders reich an Glaseinschlüssen. Ich bin der Überzeugung, dass hier Augite aus den Olivinknollen vorliegen, die secundär mit Glaseinschlüssen gespickt wurden und in dem Magma weiterwuchsen.

Der Augit der Grundmasse hat die nämliche Farbe wie der Einsprenglingsaugit. Er bildet nadelförmige Krystalle, die in ihren Dimensionen oft sehr gering werden. Er ist ein Hauptgemengtheil des Basaltes. Zuweilen erkennt man Ansammlungen solcher Augite zu grösseren, rundlichen Haufen. Zum Theil sind diese »Augitaugen« auf die Einschmelzung von Quarz zurückzuführen. Sie sind dann hellgefärbt. Zum Theil stellen sie Concretionen dar.

Bei Gelegenheit der Erwähnung dieser mikroskopischen Augitconcretionen können sehr eigenartige Gebilde besprochen werden, die in der beträchtlichen Grösse von mehr als 10^{cm} Länge und einigen Centimetern Dicke beobachtet wurden und gleichfalls als Concretionen anzusehen sind Die Stücke kennzeichnen sich dadurch, dass in einer dunklen, etwas matter als der umgebende Basalt erscheinenden Masse mit reichlichen als weisse Flecke erscheinenden Infiltrationsproducten von zeolithischer Art und von Kalkspath sich dunkle Augite herausheben, die makroskopisch den Eindruck versteinerter, sich verästelnder, kleiner, parallel wachsender Farnkräuter machen. Die mikroskopische Betrachtung ergibt, dass, abgesehen von den Infiltrationsproducten auch die zwischen den Augitstrahlen befindliche Masse aus Augiten besteht, die aber viel kleiner sind als die schon makroskopisch zu erkennenden Augitzweige und von letzteren in Gestalt kleiner Nadeln abstrahlen.

Nephelin bildet die Ausfüllung der kleinen Räume zwischen den Augiten der Grundmasse. Im gewöhnlichen Lichte ist von Krystallformen wenig zu erkennen. Im polarisirten Lichte, besonders bei Anwendung eines Gypsblättchens vom Roth 1. Ordnung, lassen sich die Individuen in der gleichmässigen, klar durchsichtigen Masse erkennen.

Melilith hat in dem Gesteine eine ungleichmässige Vertheilung. Verhältnissmässig selten ist er im Basalte des Hauptsteinbruches. In den kleineren Vorkommnissen erscheint er häufiger. Er bildet längliche Durchschnitte mit gefasertem Rande. Seine Doppelbrechung ist ungefähr gleich der des Nephelins.

Hauyn theilt mit Melilith die ungleichmässige Vertheilung. Auch er befindet sich am zahlreichsten in den kleinen Basaltvorkommnissen. In dem schlackigen Gesteine erscheint er in grossen Mengen in bräunlich gelben Durchschnitten. Nach der Mitte seiner Krystalle zu zeigt sich oft der Farbenton heller, und zuweilen ist der centrale Theil der Durchschnitte ganz farblos oder auch von licht bläulichem Schimmer. Sein Rand weist häufig Einbuchtungen auf, welche wohl auf magmatische Corrosion zurückzuführen sind. Dieselbe ist zum Theil schon eine recht weitgehende gewesen, und man gewinnt den Eindruck, als sei der Hauyn einer vollständigen Resorption durch die eintretende Verfestigung des Magmas noch gerade entschlüpft. In den grösseren Gesteinsmassen des compacten Basaltes, die wohl längere Zeit zur Erstarrung gebrauchten als die schlackig ausgebildeten Gesteine der kleineren Vorkommnisse, ist der Hauyn in der That fast vollständig verschwunden, und seine einzelnen Körner haben wenig scharfe Begrenzungen und verschwimmen gewissermaassen in ihre Umgebung.

Magnetit bildet grosse Schaaren kleiner Krystalle.

Apatit findet sich in Gestalt kleiner Nadeln.

Picotit ist, abgesehen von den kleinen Oktaedern, die als Einschlüsse im Olivin vorkommen, in Gestalt vereinzelter, grösserer Körner vorhanden, die erst bei beträchtlicher Dünne des Schliffes kaffeebraun durchscheinen, sonst schwarz gefärbt sind. Sie stammen wohl aus Olivinknollen.

Perowskit wurde in Gestalt von kleinen, gelbbraunen Körnern hin und wieder beobachtet.

Der compacte Basalt aus dem Hauptsteinbruche des Hohenberges wurde von Hrn. BILTZ unter Leitung des Hrn. Prof. JANNASCH ausführlichen Analysen unterworfen. Dieselben ergaben folgende Resultate.

Bauschanalyse:

SiO_2	37.98
Fe_2O_3	5.96
FeO	5.86
Al_2O_3	9.30
MgO	17.13
CaO	10.38
K_2O	2.03
Na_2O	3.50
H_2O	2.74
CO_2	0.36
P_2O_5	0.31
Cl	0.09
S	0.09
TiO_2	2.02
X	2.40
	100.15

Unter X sind seltene Erden zu verstehen, deren Natur noch nicht erkannt werden konnte. Ihre grosse Menge in dem in Rede stehenden Basalte ist sehr bemerkenswerth.

Es wurde fernerhin eine Löslichkeitsbestimmung in der Art ausgeführt, dass äusserst fein gepulverter Basalt $1^1/_2$ Stunden lang in einem Becherglase zunächst mit verdünnter Salzsäure gekocht wurde. Das Ungelöste wurde in einem anderen Glase mit Natronhydrat $2^1/_2$ Stunden lang auf dem Wasserbad erwärmt, filtrirt und gewogen. Der unlösliche Theil betrug 33.35 Procent des Ganzen, der gelöste mithin 66.65 Procent. Die Analyse dieser beiden Theile ergaben folgende Resultate.

	Gelöst sind	auf 100 berechnet	Ungelöst sind	auf 100 berechnet
SiO_2	21.28	31.92	16.70	49.93
Fe_2O_3	4.10	6.15	1.86	5.56
FeO	5.86	8.79	—	—
Al_2O_3	8.32	12.48	1.02	3.35
MgO	12.81	19.21	4.32	12.91
CaO	2.63	3.96	7.75	23.17
K_2O	1.90	2.84	0.13	0.39
Na_2O	3.73	5.60	—	—
H_2O	2.74	4.12	—	—
CO_2	0.36	0.54	—	—
TiO_2	0.45	0.68	1.56	4.66
X	2.47	3.71	0.01	0.03
	66.65	100.00	33.35	100.00

Das specifische Gewicht des Basalt ergab sich bei 17° C vermittelst pyknometrischer Bestimmung zu 3.0723.

3. Einschlüsse des Basaltes.

Hin und wieder gelangten in dem Gesteine des Hauptsteinbruches Einschlüsse zur Beobachtung. Dieselben sind zum Theil granitischer Art. In diesem Falle kann man in ihnen weisslichen Feldspath und grauen Quarz erkennen. Glimmer wurde in ihnen nicht beobachtet. Auch deuten keine Glastheile auf seine einstige Gegenwart in den Gesteinsstücken hin. Der Erhaltungszustand der Bruchstücke ist für die mikroskopische Untersuchung kein günstiger, da vielfach Infiltrationsproducte sich in den Einschlüssen angesiedelt haben. Auffallend sind bei einigen schwärzliche Streifen. Diese dunkleren Stellen zeichnen sich durch grosse Härte aus, und unter dem Mikroskop erkennt man, dass ein tief violettblauer Spinell hier massenhaft angehäuft erscheint.

Nicht selten findet man im Basalt einzeln liegende Quarzbrocken. Dieselben haben zum Theil eine glatte, wie angeschmolzen erscheinende Aussenfläche. Zuweilen kann man auf ihr noch Schüppchen eines gelben Glases wahrnehmen. Auch beim Quarz kommen die stellenweisen Anhäufungen violettblauer Spinelle wieder vor.

Zwei Einschlüsse von Sandstein stellen weisslich graue Gesteine dar, die von reichlich vorhandenen, dunklen, violett oder schwarz erscheinenden Lagen durchzogen sind. Unter dem Mikroskop gewahrt man zahlreiche, eckige Quarzkörner eingebettet in ein zum Theil porzellanartig durchscheinendes, zum Theil aus einem globulitisch gekörnelten, bräunlichen Glase bestehendes Cement. Die dunklen Streifen des Gesteins verdanken ihre Farbe einer Anreicherung von schwarzem Eisenerz. In dem Cement liegen fernerhin länglich viereckige und regelmässig sechseckige Durchschnitte des im Dünnschliffe farblosen, schwach brechenden und doppelbrechenden Minerals, das von Zirkel[1] als Cordierit angesehen wird. Die optischen Beobachtungen, welche ich an den vorliegenden Sandsteinen machen konnte, stützen diese Bestimmung. Die länglich viereckigen Durchschnitte löschen orientirt zu ihren Umgrenzungslinien aus und sind in ihrer Längsrichtung optisch negativ. Die sechsseitigen Querschnitte lassen eine Sechsfeldertheilung in Folge einer Zwillingsbildung nach ∞P (110) erkennen. Die Auslöschungsrichtungen sind in jedem Felde zur äusseren Begrenzung (Kante oP (001): $\infty P \breve{\infty}$ (010) orientirt. Die Richtung dieser Begrenzungslinie ist optisch negativ. Es stimmen diese Verhältnisse mit denen bei Cordierit überein, bei dem $a = \mathfrak{b}$; $b = \mathfrak{c}$; $c = \mathfrak{a}$ ist.

---

[1] F. Zirkel: Cordieritbildung in verglasten Sandsteinen. N. Jahrb. f. Mineral. u. s. w. 1891. Bd. I. S. 109.

Einschlüsse von Keuper, welchen der Basalt durchbrochen hat, sind recht häufig in den randlichen Stellen der kleineren, oben erwähnten Vorkommnisse am Hohenberge. Besonders bemerkenswerthe Veränderungen sind in den Keupermergelstückchen durch den Basalt nicht hervorgerufen.

Schliesslich sei noch kurz der Verwitterungsproducte und Drusenmineralien gedacht.

Verwitterungserscheinungen sind im Basalte selbst nur spärlich festzustellen. Der Steinbruchsbetrieb hat die oberen Partien des Hauptbasaltvorkommens, die wohl verwittert waren, entfernt. Bei den kleineren Vorkommnissen sind solche Erscheinungen unschwer zu beobachten. Sie betreffen besonders den Olivin und den Melilith. Ersterer hat in solchen Fällen fein vertheiltes, gelbliches oder röthliches Eisenerz ausgeschieden, letzterer ist goldgelb gefärbt, und seine Durchschnitte wirken kaum noch auf das polarisirte Licht ein.

Die Drusenmineralien liegen in beträchtlicher Mannigfaltigkeit vor. Es wurden Augit, Nephelin, Melilith, Gismondin, Phillipsit, Chabasit, Kalkspath und Aragonit bemerkt. Gesteinsstücke mit silicatischen Drusenbildungen haben eine sehr grosse Ähnlichkeit mit den bekannten Vorkommnissen vom Capo di Bove, sodass eine Verwechselung sehr leicht möglich ist. Die mikroskopische Untersuchung des Gesteins weist indess den Unterschied leicht nach. Eine nähere Untersuchung der erwähnten Mineralien soll einer besonderen, krystallographischen Bearbeitung vorbehalten bleiben.

42. Zur Theorie der Lösungen.

Von Lothar Meyer.

(Vorgelegt am 12. November: — gedruckt im Bericht vom 26. November [St. XLVII]; — ausgegeben am 3. December.)

Nachdem die Chemie durch die Einführung des Begriffes des Moleculargewichts und die zu dessen Bestimmung ausgedachte Methode eine so wesentliche Förderung erfahren hatte, lag es nahe, diese zunächst nur auf gasförmige Stoffe anwendbare Methode zu erweitern und ihre Anwendung auf tropfbar flüssige und starre Stoffe zu versuchen. In der That ist dieser Fortschritt schon lange erstrebt worden, doch wurde die Lösung der Aufgabe, und zwar zunächst für flüssige Körper, erst kürzlich gefunden, obschon die Thatsachen, auf denen sie beruht, zum Theile schon seit geraumer Zeit bekannt sind, sogar schon länger als die, auf welche Avogadro's Lehre sich stützt. Während diese ein halbes Jahrhundert nach ihrer ersten Aufstellung zu allgemeiner Anerkennung gelangte, brauchte die ihr entsprechende jetzige Lehre vom flüssigen Zustande von ihren ersten Anfängen bis jetzt gerade die doppelte Zeit, ein volles Jahrhundert. Der Grund dieser langen Verzögerung liegt zum grossen Theile darin, dass man unglücklicherweise zuerst und hauptsächlich diejenigen Stoffe im flüssigen Zustande näher untersuchte, welche das unregelmässigste Verhalten zeigen, die Salze in wässriger Lösung. Es ist bemerkenswerth, dass sowohl die Avogadro'sche Gastheorie wie die jetzige Lehre von dem Zustande gemischter Flüssigkeiten erst zur vollen Entwickelung und Anerkennung kamen, nachdem sie auf die zahlreichen organischen Verbindungen Anwendung gefunden.

Es ist besonders die Erforschung des Überganges aus dem tropfbar-flüssigen in die beiden anderen Aggregatzustände der Erweiterung unserer Erkenntniss von Nutzen gewesen. Die Untersuchung der Abhängigkeit des Schmelzens und Verdunstens von der Temperatur, also die Bestimmung des Schmelzpunktes und des Siedpunktes oder, besser gesagt, der Dampfspannung hat aber bei reinen, unvermischten Stoffen meist nur innerhalb gewisser analog zusammengesetzter Gruppen und Reihen von Verbindungen Regelmässigkeiten erkennen lassen, während ein allgemeines das Schmelzen und Verdunsten aller Stoffe in seiner Abhängigkeit von der chemischen Natur darstellendes Gesetz bis jetzt nicht aufgefunden wurde. Dagegen gelang es, an flüssigen Gemischen, an Lösungen sehr allgemein geltende Beziehungen zwischen den Mengenverhältnissen der gemischten Stoffe und den Änderungen zu ermitteln, welche Schmelzpunkt und Dampfspannung erfahren, wenn geringe Mengen eines Stoffes in einer grossen Masse eines anderen aufgelöst werden. Diese Änderungen sind schon vor langer Zeit Gegenstand der Untersuchung gewesen; auch hat man stets getrachtet, ihre Abhängigkeit von der Concentration der Lösungen festzustellen; aber von weittragender Bedeutung sind sie erst geworden, als man sie zu den Moleculargewichten der gemischten Stoffe in Beziehung zu setzen versuchte.

Dass aufgelöste Substanzen sowohl das Gefrieren wie das Sieden des Wassers erschweren, also den Gefrierpunkt erniedrigen und den Siedepunkt erhöhen, galt schon im vorigen Jahrhundert für eine längst bekannte Thatsache, als Blagden[1] durch messende Versuche die Erniedrigung des Gefrierpunktes durch aufgelöste Stoffe sorgfältig bestimmte. Er fand das später nach ihm benannte Gesetz, dass die Erniedrigung des Gefrierpunktes der Concentration der Lösung nahezu proportional sei. Diese Regel wurde im wesentlichen bestätigt durch Versuche von Despretz[2], Dufour[3], Rüdorff[4], de Coppet[5], Raoult[6] u. A.

Rüdorff bewies durch seine umfangreichen Versuche, dass die von Blagden gefundene angenäherte Proportionalität für gewisse Salze sich nur dann ergibt, wenn man diese auch in der Lösung als mit Krystallwasser verbunden annimmt, in welchem Zustande auch von Blagden z. B. das Bittersalz und die Vitriole abgewogen wurden. Gleichzeitig und ohne Kenntniss von einander zeigten de Coppet[7] und ich[8], dass die durch stoechiometrisch aequivalente Mengen erzeugten Erniedrigungen des Gefrierpunktes für analog zusammengesetzte Verbindungen nahezu gleich sind und daher zu einer leidlich zuverlässigen, wenigstens relativen Bestimmung der Moleculargewichte benutzt werden können. Durch Ausdehnung der Untersuchung auf zahlreiche indifferente organische Stoffe lieferte F. M. Raoult den Nachweis, dass diese Me-

[1] Lond. Phil. Trans. f. 1788, **78**, 125 u. 277.

[2] Bull. Soc. Vaudoise des sc. nat. 1860 (mir nicht zugänglich).

[3] Compt. rend. 1837, **5**, 19.

[4] Pogg. Ann. 1861, **114**, 63; 1862, **116**, 55; 1864, **122**, 337.

[5] Ann. chim. phys. [4] 1871, **23**, 366; 1872 **25**, 502; **26**, 98; [5] 1875, **6**, 275.

[6] Ann. chim. phys. [5] 1883, **28**, 133; [6] 1884, **2**, 66; 1885, **4**, 401; 1886, **8**, 289 und versch. vorläuf. Mitth. i. d. Compt. rend.

[7] A. a. O. 1872, **25**, 502.

[8] Mod. Theor. d. Chemie, 2 Aufl. 1872, 233.

thode einer sehr weitgehenden Anwendung fähig ist. Für die der allgemeinen Regel nicht folgenden Salze zeigte er an vielen Beispielen, dass sich die durch sie bewirkte Erniedrigung des Gefrierpunktes in der Regel als die Summe zweier Constanten darstellen lasse, deren eine dem positiven, die andere dem negativen Bestandtheile des Salzes eigenthümlich sei.

Indem er neben dem Wasser noch eine Anzahl anderer Lösungsmittel anwandte, konnte er das Ergebniss der Beobachtungen zu dem Satze erweitern, dass die Erniedrigung des Gefrierpunktes eines Lösungsmittels vollkommen bestimmt werde durch das Verhältniss der in der Mischung enthaltenen Anzahl der Moleculargewichte des gelösten Körpers zu der Anzahl der Molekeln des Lösungsmittels, der Art, dass, wenn in dem hundertfachen Moleculargewichte des letzteren ein Moleculargewicht des ersteren aufgelöst werde, der Gefrierpunkt um ungefähr 0°62 C sinke, das Wasser allein als Lösungsmittel ausgenommen, das unter denselben Umständen eine Erniedrigung von ungefähr 1° C erleide.

Dass die Erniedrigung des Gefrierpunktes einer wässrigen Lösung ungefähr die Hälfte mehr beträgt als die anderer Lösungsmittel (0°9 bis 1° C für 1 Mol. Gew. in 100 Mol. Gew. H_2O oder 1800 Gew. Th.) wird durch die einleuchtende Hypothese erklärt, dass in der Nähe des Gefrierpunktes das Wasser ungefähr gleich viel Molekeln $H_2O = 18$ und $H_4O_2 = 36$ enthalte, im Mittel also 1 Mol. Gew. $= 27$ zu setzen sei, so dass erst 2700 Gew. Th. 100 Mol. Gew. darstellen würden, welche durch 1 Mol. Gew. gelöster Substanz die normale Erniedrigung erfahren.

Die darnach noch verbleibende Anomalie der Salze beseitigte Sv. ARRHENIUS[1] durch den Hinweis, dass diese sämmtlich Elektrolyte sind und daher nach der nur etwas erweiterten von R. CLAUSIUS[2] über das Wesen der Elektrolyse gebildeten Anschauung als ganz oder theilweise in ihre Jonten zerfallen angesehen werden können, so dass die von ihnen bewirkte grössere Erniedrigung des Gefrierpunktes sich erklärt aus der durch den Zerfall vergrösserten Anzahl ihrer Theilchen.

Einen ganz ähnlichen Gang hat die Entwickelung der Erkenntniss des Einflusses genommen, welchen in Flüssigkeiten gelöste Stoffe auf die Dampfspannung derselben ausüben. Auch hier ist längst bekannt, dass Stoffe, die selbst nicht flüchtig sind, die Dampfspannung der sie lösenden Flüssigkeit erheblich zu vermindern vermögen.

---

[1] Zeits. f. phys. Chem. 1887, **1**, 631.
[2] POGG. Ann. 1857, **101**, 338.

Nachdem VON BABO[1] und WÜLLNER[2] diesen Einfluss messend verfolgt und die Verminderung der Spannung der Concentration proportional gefunden hatten, machte GULDBERG[3] darauf aufmerksam, dass Gefrierpunktserniedrigung und Verminderung des Dampfdruckes einander und der aufgelösten Stoffmenge proportional sein müssten, welchen Satz RAOULT[4] experimentell prüfte und bestätigt fand.

Somit haben die Chemiker, die noch vor zwanzig Jahren die Moleculargewichte der Stoffe nur im Gaszustande zu messen verstanden, seither die Mittel gewonnen, auch in Flüssigkeiten Zahl und Masse der Molekeln wenigstens nach relativem Maasse zu bestimmen. Man hat nur nöthig, experimentell diejenige stoechiometrische Menge eines Stoffes aufzusuchen, welche in verdünnter Lösung nahezu dieselbe Erniedrigung des Gefrierpunktes oder der Dampfspannung des Lösungsmittels hervorbringt wie das schon anderweit bekannte Moleculargewicht irgend eines beliebigen anderen Stoffes. Dabei wird die allerdings noch nicht sicher bestätigte Voraussetzung gemacht, dass das Moleculargewicht im flüssigen Zustande wenigstens für die meisten leicht flüchtigen Stoffe dasselbe sei wie im Gaszustande, und nicht etwa ein Vielfaches des letzteren.

Statt einer bestimmten stoechiometrischen Quantität q kann man auch ein beliebiges Gewicht p in einem verhältnissmässig grossen Gewichte P des Lösungsmittels auflösen, die Erniedrigung E des Gefrierpunktes beobachten und, da sie der Concentration verdünnter Lösungen proportional veränderlich ist, die Erniedrigung E' berechnen, welche die Quantität q, im hundertfachen Moleculargewichte M des Lösungsmittels gelöst, erzeugen würde. Wir haben dann:

$$E : E' = \frac{p}{P} : \frac{q}{100\,M}$$

$$E' = \frac{E \cdot P \cdot q}{p \cdot 100\,M}$$

Ergibt sich nun nahezu $E' = 0{,}62$ C, so ist $q = m$, gleich dem gesuchten Moleculargewichte. Ist E' nur halb so gross, so ist

$$2q = m \text{ u. s. w.}$$

Es ist aber hier zu beachten, dass etwas verschiedene Rechnungsweisen beliebt worden sind. Zunächst hat man vielfach die Beobachtungszahlen nicht auf 100 Mol. Gew., sondern auf 100 Gew. Th.

---

[1] Über die Spannkraft des Wasserdampfes in Salzlösungen. Freiburg i. B. 1847.
[2] POGG. Ann. seit 1858, Bd. **103** in zahlreichen Abhandlungen.
[3] Compt. rend. 1870, **70**, 1349.
[4] Compt. rend. 1878, **87**, 167; Ann. chim. phys. [6] 1888, **15**, 375; 1890, **20**, 297.

des Lösungsmittels bezogen, indem man die durch 1 Gew. Th. des gelösten Stoffes in 100 Gew. Th. Lösungsmittel erzeugte Erniedrigung bestimmte und das Product dieser Grösse mit dem Moleculargewicht des gelösten Stoffes als die moleculare Erniedrigung bezeichnete. Diese Grösse hat natürlich für jedes Lösungsmittel einen anderen Werth. Sie ist im Mittel ungefähr:

für	Wasser	19°,	für	Benzol	49°,
»	Ameisensäure	29°,	»	Nitrobenzol	70°,
»	Essigsäure	39°,	»	Äthylenbromid	118°.

Die Benutzung dieser Grösse ist nicht unzulässig, aber sie ist umständlicher als die Berechnung auf je 1 Mol. Gew. auf 100 und hat zudem noch den Nachtheil, dass sie experimentell nicht realisirbar ist, weil sie hoch concentrirte Lösungen voraussetzt, für welche die Regel keine Geltung mehr hat.

Für wässrige Lösungen hat Raoult[1] darauf hingewiesen, dass man die moleculare Erniedrigung durch Wasser enthaltende Stoffe, Salze u. s. w., auch so ausrechnen kann, als wären sie wasserfrei in Lösung. Dies gilt jedoch nur für den Grenzwerth, welchem die Erniedrigung des Gefrierpunktes sich nähert, wenn die Concentration sehr klein wird. Raoult empfiehlt überhaupt die Benutzung des am besten durch graphische Interpolation zu ermittelnden Grenzwerthes der Erniedrigung für unendlich kleine Concentration, den er als die »Anfangserniedrigung (abaissement à l'origine)« bezeichnet. Das Product derselben mit dem Moleculargewicht nennt er »die wahre moleculare Erniedrigung (abaissement moléculaire vrai)«.

Eine gewisse Ungleichförmigkeit der theoretischen Betrachtung ist dadurch entstanden, dass Raoult die moleculare Erniedrigung des Gefrierpunktes für eine Mischung berechnet, welche das einfache oder mehrfache Moleculargewicht der zu untersuchenden Substanz in 100 Mol. Gew. des Lösungsmittels gelöst enthält, während er andererseits zeigt, dass für die Erniedrigung der Dampfspannung eine bessere Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung erzielt wird, wenn man berechnet, wie viel Moleculargewichte des gelösten Körpers in 100 Mol. Gew. der Mischung sich befinden. Für verdünnte Lösungen, welche nur 1 Mol. Gew. in 100 oder 99 Mol. Gew. gelöst enthalten, macht dies nur einen Unterschied von ungefähr 1 Procent, der kaum in Betracht kommt; für 6 oder 8 Mol. Gew. ist es jedoch sehr von Belang, ob sie in 100 oder in nur 94 oder 92 Mol. Gew.

[1] A. a. O., 8, 307. Die dort ausgeführte Rechnung ist in sofern nicht ganz correct, als in der dortigen Gleichung (3) nur auf der einen und nicht zugleich auf der anderen die Erniedrigung $C = 0$ gesetzt wird.

gelöst werden. Es dürfte sich wohl empfehlen, die beiden so nahe verwandten Erscheinungen einheitlich zu behandeln und zwar wohl am zweckmässigsten so, dass stets auf 100 Mol. Gew. der Mischung gerechnet wird.

Wie die Erniedrigung des Gefrierpunktes und der Dampfspannung haben sich auch noch andere Eigenschaften der Lösungen als abhängig von der Anzahl der mit einander gemischten Moleculargewichte erwiesen. Besonders haben neuere Beobachtungen der osmotischen Vorgänge lebhaftes Interesse erregt, weil sich herausgestellt hat, dass erstens der osmotische Druck nach PFEFFER's[1] Messungen der Concentration und demnach auch der Anzahl der gelösten Moleculargewichte und ausserdem der absoluten Temperatur proportional veränderlich ist, und dass zweitens nach DE VRIES[2] Lösungen, die »isoton« sind, d. h. an eine und dieselbe lebende Pflanzen- oder Thierzelle weder Wasser abgeben noch aus ihr aufnehmen, wenn sie mit ihr in Berührung gebracht werden, eine gleiche Anzahl von Moleculargewichten enthalten, und dass solche isotonische Lösungen auch nahezu gleiche Gefrierpunkte haben.

Diese beiden Entdeckungen haben Hrn. J. H. VAN'T HOFF[3] veranlasst, in die theoretische Betrachtung des Verhaltens der Lösungen an Stelle der Anzahl der gelösten Moleculargewichte eine dieser und der absoluten Temperatur proportional gesetzte Grösse, den »osmotischen Druck«, als Urvariabele einzuführen, von welcher alle in Betracht kommenden Erscheinungen abhängen sollen. Gegen diese zunächst mindestens unnöthige, aber auch ungeeignete Verwickelung der Betrachtung habe ich[4] Einsprache erhoben, weil meiner Ansicht nach dieser sogenannte Druck etwas ganz anderes ist als der wirkliche osmotische Druck. Dieser Einspruch ist aber von Hrn. VAN'T HOFF[5] als berechtigt nicht anerkannt worden. Wenn ich nun hier auf diesen Gegenstand zurückkomme, so geschieht es, weil ich wahrnehme, dass die VAN'T HOFF'sche Annahme in der neueren Literatur vielfach nicht als eine noch zu prüfende und zu erweisende Hypothese, sondern als ein bewiesenes Gesetz, das »VAN'T HOFF'sche Gesetz«, behandelt wird und schon zu ganz unhaltbaren Folgerungen geführt hat.

Da ich die Identität der von Hrn. VAN'T HOFF definirten Grösse mit dem wirklichen osmotischen Drucke nicht anzuerkennen vermag, so werde ich erstere hier als den VAN'T HOFF'schen Druck bezeichnen.

---

[1] Osmotische Untersuchungen, Leipzig 1877.
[2] Zeitschr. f. phys. Chem. 1888, **2**, 415, aus PRINGSHEIM's Jahrb.
[3] Daselbst 1887, **1**, 483 u. a. a. O.
[4] Daselbst 1890, **5**, 23.
[5] Daselbst S. 174.

Die Annahme desselben stützt sich auf die Wahrnehmung, dass der von PFEFFER[1] gemessene osmotische Druck, welcher in einer Zuckerlösung entsteht, wenn diese durch eine Membran aus Ferrocyankupfer mit reinem Wasser in Verbindung gebracht wird, so gross ist, wie bei gleicher Temperatur der Druck eines Gases sein würde, welches im gleichen Volumen ebenso viel Molekeln enthielte, wie sich in der Zuckerlösung Zuckertheilchen befinden. Aus dieser für Zuckerlösungen unzweifelhaft nachgewiesenen Gleichheit des osmotischen und des berechneten vermeintlichen Gasdruckes wird nun gefolgert, dass der osmotische Druck nicht vom Wasser, sondern nur vom Zucker ausgeübt werde, und dass demgemäss der Zucker sich in dem Wasser verhalte wie ein Gas in einem gleich grossen leeren Raume.

Ferner wird die Annahme gemacht, dass alle mit den untersuchten Zuckerlösungen isotonen und bei derselben Temperatur erstarrenden wässrigen Lösungen beliebiger Stoffe denselben osmotischen Druck erzeugen müssten, wenn sie durch eine aus beliebigem Material gebildete, aber nur für Wasser durchlässige Membran von reinem Wasser getrennt werden: dass also der osmotische Druck nur von der Anzahl der aufgelösten Moleculargewichte und weder von der chemischen Natur der gelösten Substanz noch von der der halbdurchlässigen Membran abhänge.

Endlich aber wird diese Lehre vom osmotischen Drucke dahin erweitert, dass dieser Druck auch da bestehe, wo keine Osmose stattfindet und gar kein Druck beobachtet wird. Die Hypothese erhält schliesslich durch Übertragung von den wässrigen auf andere Lösungen die ganz allgemeine Form, dass jeder beliebige in einer Flüssigkeit gelöste Stoff sich in dieser wie ein Gas im leeren Raume verhalte und denselben Druck ausübe, welchen er ausüben würde, wenn er als wirkliches Gas mit derselben Molekelzahl denselben Raum allein, ohne das Lösungsmittel, erfüllte. Diesen nicht wahrnehmbaren Druck zu messen wird natürlich nicht versucht, sondern statt seiner die Erniedrigung des Gefrierpunktes bestimmt und der hypothetische Druck dieser proportional gesetzt und so berechnet.

Wir wollen nun zunächst untersuchen, wie weit diese Hypothese in den vorhandenen Beobachtungen Bestätigung findet, und zu diesem Zwecke den wirklichen osmotischen Druck mit dem VAN'T HOFF'schen vergleichen. In den nachstehenden Tafeln sind zunächst die Beobachtungen PFEFFER's, so weit sie sich auf Stoffe von bekanntem Moleculargewichte beziehen, in der Art zusammengestellt, dass neben dem

[1] A. a. O. S. 85 u. 110.

beobachteten osmotischen Drucke (Osm. Dr.) auch der für ein Gas von gleicher Molekelzahl berechnete Druck (v. H. Dr.) angegeben ist. Da letzterer von dem erfüllten Raume abhängig ist, so mussten die vom Beobachter nach Gewichtsprocenten gemachten Angaben auf Volumina umgerechnet werden. Die zu dieser kleinen Rechnung benutzten specifischen Gewichte der Lösungen sind ebenfalls, und zwar in runden Zahlen, angegeben. Nur für die ganz verdünnten Lösungen habe ich die Dichte gleich der des Wassers gesetzt. Ferner ist (unter N) der in einem Liter Lösung enthaltene Bruchtheil des nach Grammen abgewogenen Moleculargewichtes und ausserdem die Temperatur der Beobachtung angegeben.

Ist d die Dichte, p der Procentgehalt[1] der Lösung, m das Moleculargewicht des gelösten Stoffes, so ergibt sich die Anzahl N der in 1 Liter enthaltenen Moleculargewichte aus der Gleichung:

$$N = \frac{10 \cdot d \cdot p}{m}$$

und der VAN'T HOFF'sche Druck wird in Centimetern Quecksilber:

$$= N \cdot 1697^{\mathrm{cm}} \cdot (1 + \alpha t),$$

wo t die Temperatur, α den Ausdehnungscoefficienten der Gase bezeichnet und 1697^{cm} den Druck darstellt, den das in Grammen abgewogene Moleculargewicht eines beliebigen Gases bei 0° ausüben würde, wenn es in den Raum eines Liters eingeschlossen wäre.

I. Rohrzucker in 1procentiger Lösung;

$$d = 1.004;\; m = C_{12}H_{22}O_{11} = 342;\; N = 0.0294$$

mit Ferrocyankupfermembran bei wechselnder Temperatur.

Temp.	Osm. Dr.	v. H. Dr.
6.8	$50^{\mathrm{cm}}.5$	$51^{\mathrm{cm}}.1$
13.7	52.5	52.3
14.2	51.0	52.4
15.5	52.0	52.7
22.0	54.8	53.8
32.0	54.4	55.7
36.0	56.7	56.4

[1] In der gleichen Rechnung hat Hr. VAN'T HOFF (Zeitschr. f. phys. Ch. 1, 492) irrthümlich die von PFEFFER angegebenen Gewichtsprocente der Lösungen für die in 100g Wasser gelösten Mengen genommen, während sie die in 100g Lösung enthaltenen bedeuten. Für verdünnte Lösungen macht dies aber keinen grossen Unterschied.

II. **Rohrzucker** verschiedener Concentration mit zwei verschiedenen Ferrocyankupfermembranen bei Mitteltemperatur:

Procent Geh.	*d*	*N*	Temp.	Osm. Dr.	v. H. Dr.
1	1.004	0.0294	13°.6	$53^{\text{cm}}.2$	$52^{\text{cm}}.3$
2	1.008	0.0590	14.0	106.6	105.2
2.74	1.011	0.0810	13.5	151.8	144.2
4	1.016	0.1189	13.8	208.2	211.8
6	1.024	0.1797	14.7	307.5	321.4
1	1.004	0.0294	16.1	47.2	52.8
6	1.024	0.1797	15.4	267.9	322.1

Die Betrachtung dieser beiden Tafeln zeigt, dass die Beobachtungen an Rohrzuckerlösungen mit Ferrocyankupfermembran, und zwar sowohl die mit wechselnder Temperatur wie die mit wechselnder Concentration angestellten, innerhalb der möglichen Beobachtungsfehler sehr gut mit den berechneten Werthen des VAN'T HOFF'schen Druckes übereinstimmen, mit alleiniger Ausnahme der 6procentigen Lösungen, für welche der berechnete Werth bedeutend grösser ist als der beobachtete.

III. Kalisalpeter mit Ferrocyankupfermembran. $m = KNO_3 = 101$.

Procent Geh.	*d*	*N*	Temp.	Osm. Dr.	v. H. Dr.
0.8	1.0051	0.0796	13.3	$130^{\text{cm}}.4$	$141^{\text{cm}}.7$
0.86	1.0055	0.0856	12.9	147.5	152.2
0.98	1.0063	0.0976	15.8	174.9	175.3
1.43	1.0091	0.1429	13.0	218.5	254.0
3.3	1.0212	0.3336	12.6	436.8	592.4

Kürzlich hat auch ADIE[1] mit denselben Stoffen bei 15°C Beobachtungen angestellt. Diese ergaben:

N	Osm. Dr.	v. H. Dr.
0.0125	0.466 Atm. = 35^{cm}	22^{cm}
0.025	0.89 » = 68	45
0.05	1.56 » = 119	90
0.1	2.39 » = 182	179
0.133	2.87 » = 215	239
0.2	4.50 » = 342	358

Aus diesen gut mit einander übereinstimmenden Beobachtungen beider Forscher ergibt sich eine fast vollständige Übereinstimmung

[1] Chem. Soc. Journ. Juni 1891, **49**, 344.

der Rechnung mit der Beobachtung, wenn im Liter etwa ein Zehntel des Moleculargewichtes, etwas mehr oder weniger, enthalten ist, das ist für etwa 1 procentige Lösungen. Enthält die Lösung erheblich weniger als 1 Procent, so ist der osmotische Druck merklich grösser, enthält sie dagegen mehr, so ist er kleiner als der VAN'T HOFF'sche. Die hier vorhandene theilweise Übereinstimmung ist aber nur eine scheinbare; denn nach den Beobachtungen von RÜDORFF und DE COPPET ist die Gefrierpunktserniedrigung auch der concentrirteren Lösungen etwa um die Hälfte zu gross, nach RAOULT sogar noch etwas mehr; wir müssen daher, nach der ARRHENIUS'schen Hypothese, den Kalisalpeter schon unter 0° als mindestens zur Hälfte in seine Jonten dissociirt annehmen und demgemäss auch den VAN'T HOFF'schen Druck für eine um die Hälfte grössere Molekelzahl berechnen. So erhalten wir:

N	0.0125	0.025	0.05	0.08	0.086	0.098	0.1	0.133	0.143	0.2	0.333
Osm. Dr. .	35	68	119	130	148	175	182	215	219	342	437
v. H. Dr. .	33	67	135	213	223	263	269	360	481	537	879

Angesichts dieser nur für die äussersten Verdünnungen stimmenden Zahlen bleibt uns nur die Wahl, entweder anzunehmen, dass der Kalisalpeter wohl bei 0°, nicht aber bei mittlerer Temperatur dissociirt sei, oder einzugestehen, dass die Hypothese durch die Beobachtung nicht bestätigt wird.[1]

IV. Kaliumsulfat mit Ferrocyankupfermembran. $m = K_2SO_4 = 174$:

Procent Geh.	N	Temp.	Osm. Dr.	v. H. Dr.
0.98	0.056	16°.1	$188^{\mathrm{cm}}.8$	101^{cm}

Ganz abweichend vom Nitrat zeigt das Sulfat Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung, wenn man eine bis fast zur Verdoppelung der Molekelzahl gehende Dissociation annimmt, wie sie auch von der starken Gefrierpunktserniedrigung gefordert wird.

---

[1] Von befreundeter Seite werde ich auf einen in der »Naturwissenschaftlichen Rundschau« vom 24. Oct. d. J. S. 557 erschienenen Bericht über die ADIE'sche Arbeit aufmerksam gemacht, welcher deutlich zeigt, welche Verwirrung die Hypothese VAN'T HOFF's anzurichten geeignet ist. Es wird dort als Einleitung eine kurze Darstellung seiner Theorie gegeben und dabei wörtlich gesagt:

»Verglich man aber den von einer Rohrzuckerlösung ausgeübten (osmotischen) »Druck mit demjenigen einer Salpeterlösung, so fand man den letzteren fast doppelt »so gross als den ersteren; es kann also die Anzahl der selbständigen kleinsten Theilchen »in beiden Lösungen nicht die gleiche sein.«

Hier wird das gerade Gegentheil von dem behauptet, was PFEFFER's und ADIE's Beobachtungen ergeben, lediglich weil die nicht angezweifelte Hypothese es behauptet!

V. Seignettesalz mit Ferrocyankupfermembran.

$m = KNaC_4H_4O_6, 4H_2O = 282$:

Procent Geh.	N	Temp.	Osm. Dr.	v. H. Dr.
0.6	0.0213	12°4	91cm6	37cm8
"	"	14.2	90.0	38.0
"	"	37.3	98.3	41.0
0.94	0.0333	13.3	147.6	59.3
"	"	36.6	156.4	64.2

Auch das Seignettesalz verhält sich ähnlich wie das Sulfat; doch muss man eine durch Dissociation fast verdreifachte Molekelzahl annehmen, während die moleculare Gefrierpunktserniedrigung, wenn sie der des neutralen Kalisalzes ungefähr gleich ist (= 36 nach Raoult), nur eine Dissociation bis nahe zur zweifachen Molekelzahl annehmen lässt.

VI. Zuckerchlornatrium mit Ferrocyankupfermembran.

$m = C_{12}H_{22}O_{11}NaCl = 400{,}4$:

Procent Geh.	N	Temp.	Osm. Dr.	v. H. Dr.
1.17	0.0293	14°5	67cm0	52cm1
"	"	15.0	65.9	52.4
"	"	37.9	67.1	56.5

Der van't Hoff'sche Druck ist hier berechnet unter der höchst unwahrscheinlichen Voraussetzung, dass Rohrzucker und Kochsalz auch in Lösung zu einer einzigen Molekel verbunden bleiben. Macht man die Annahme, dass sie sich bei der Auflösung trennen, so ergibt sich der van't Hoff'sche Druck zu 104cm und 113cm. Nehmen wir auch noch das Kochsalz in seine Jonten zerfallen an, so haben wir 156cm und 170cm statt des beobachteten Druckes von 67cm. Hier finden wir also keinerlei Übereinstimmung.

VII. Rohrzucker mit Ferrocyaneisenmembran.

$m = C_{12}H_{22}O_{11} = 342$:

Procent Geh.	N	Temp.	Osm. Dr.	v. H. Dr.
1	0.0294	13°2	37cm3	52cm1
"	"	13.9	40.0	52.3

VIII. Rohrzucker mit Calciumphosphatmembran.

$m = C_{12}H_{22}O_{11} = 342$:

Procent Geh.	N	Temp.	Osm. Dr.	v. H. Dr.
1	0.0294	15°2	36cm1	52cm6

In diesen Beobachtungen zeigt sich der osmotische Druck mit der Natur der Membran veränderlich; und zwar wurde er innerhalb von Membranen aus Berlinerblau oder Calciumphosphat nur ungefähr $^2/_3$ so gross beobachtet, wie er nach der Hypothese sein sollte. Die Anhänger der letzteren bestreiten aus theoretischen Gründen die Abhängigkeit der osmotischen Vorgänge von der Natur der Membran, sofern nur diese für den gelösten Stoff undurchlässig sei. Dies dürfte aber hier zutreffen, da Pfeffer ausdrücklich (a. a. O. S. 116) angibt, dass die Concentration der untersuchten Lösungen sich während der ganzen Versuchsdauer nicht geändert habe. Bis zu dem etwaigen Beweise des Gegentheils haben wir daher anzunehmen, dass der osmotische Druck von der Natur der Membran abhängt, was mit der van't Hoff'schen Theorie nicht vereinbar ist. Tritt man der sehr einleuchtenden Annahme Tammann's[1] bei, dass der Durchgang des Wassers durch eine Membran auf einer Art von Löslichkeit desselben in der Substanz der Membran beruhe, so sieht man nicht ein, warum alle halb durchlässigen Stoffe sich genau gleich verhalten sollten, wie es in der von van't Hoff entwickelten Theorie als selbstverständlich vorausgesetzt wird.

Mit Ferrocyankupfermembranen hat auch Adie[2] den osmotischen Druck einer Reihe von Salzen bestimmt und sein Verhältniss zu dem van't Hoff'schen Drucke berechnet. Dieses Verhältniss muss nach der van't Hoff'schen Theorie gleich sein dem aus der Gefrierpunktserniedrigung berechneten sogenannten Dissociationsfactor i, welcher angibt, in welchem Verhältniss die Anzahl der gelösten Theilchen, der Hypothese von Arrhenius zufolge, durch Dissociation vermehrt angenommen werden muss, damit die moleculare Gefrierpunktserniedrigung den normalen Werth erreiche. Wir erhalten diesen Faktor i, indem wir die beobachtete moleculare Erniedrigung der Salze u. s. w. dividiren durch die sogenannte normale, für organische nicht dissociirte Substanzen geltende Erniedrigung, welche Raoult zu 18°5 im Mittel annimmt (vergl. oben S. 995).

Die von Adie berechneten Werthe des Verhältnisses des osmotischen zum van't Hoff'schen Drucke zeigen sich ziemlich stark mit der Concentration veränderlich, indem sie wachsen, wenn diese abnimmt. Dies stimmt mit der Theorie überein, weil die Verdünnung die Dissociation befördern muss. Doch ist zu beachten, dass bei manchen Salzen selbst die allerverdünntesten Lösungen noch Werthe von i ergeben, die merklich kleiner sind als die aus den Gefrier-

[1] Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1891. Nr. 6 S. 222.
[2] A. a. O.

punkten berechneten, während doch bei 15°, wo die osmotischen Beobachtungen angestellt wurden, die Dissociation grösser sein muss als beim Gefrierpunkt. In nachstehender Tafel sind die von ADIE für 0.05 Mol. Gew. im Liter berechneten unter: Osm. : v. H. mit den aus den Gefrierpunkten hergeleiteten Werthen von i zusammengestellt:

Stoff	Formel	Diss. Factor i aus: Osm. : v. H	Mol. Ern. : 18.5
Kaliumnitrat	KNO_3	1.39	27 : 18.5 = 1.5
Natriumnitrat . . .	$NaNO_3$	1.51	31 : 18.5 = 1.7
Kaliumsulfat	K_2SO_4	1.50	39 : 18.5 = 2.0
"	"	1.96[1]	" "
Ammoniumsulfat . . .	$(NH_4)_2SO_4$	2.36	37 : 18.5 = 2.0
Calciumsulfat	$CaSO_4$	1.59[2]	—
Jodkalium	KJ	1.58	33 : 18.5 = 1.8
Monokaliumcarbonat .	$KHCO_3$	0.90	—
Dikaliumcarbonat . .	K_2CO_3	—	39 : 18.5 = 2.0
Dinatriumphosphat . .	Na_2HPO_4	1.62	37 : 18.5 = 2.0
Dinatriumcitrat . . .	$Na_2HC_6H_5O_7$	3.86	38 : 18.5 = 2.0
Ferrocyankalium . . .	$K_4FeC_6N_6$	3.07	46.3 : 18.5 = 2.5
Cobaltidcyankalium . .	$K_3CoC_6N_6$[3]	2.92	—
Brechweinstein . . .	$KSbOC_4H_4O_6$	1.20	18.4 : 18.5 = 1.0
Kalialaun	$K_2Al_2(SO_4)_4 24aq$	3.20[4]	—
Chromalaun	$K_2Cr_2(SO_4)_4 24aq$	3.85[5]	—

[1] andere Versuchsreihe. [2] 0.014 Mol. Gew. i. L. [3] ADIE verdoppelt die Formel. [4] 0.038 Mol. Gew. i. L. [5] 0.031 Mol. Gew. i. L.

Abgesehen davon, dass die aus der Osmose berechneten Werthe von i meist etwas kleiner sind als die aus der Gefrierpunktserniedrigung hergeleiteten, stimmen sie meist leidlich gut. Doch zeigen sich etliche auffallende Ausnahmen. Das Kaliumbicarbonat erscheint nach der Osmose gar nicht dissociirt, während das gesättigte Salz nach dem Gefrierpunkt seiner Lösung in zwei Jonten zerfallen anzunehmen ist. Diese Verschiedenheit wäre höchst merkwürdig und ist daher wenig wahrscheinlich. Während das Natriumphosphat in der Osmose weniger dissociirt zu sein scheint als nach dem Gefrierpunkte, ergibt sich für das ihm entsprechende Citrat aus der Osmose ein fast doppelt so grosser Werth von i als aus dem Gefrierpunkte.

Fassen wir alles zusammen, so kommen wir zu dem Schlusse, dass von den vorliegenden osmotischen Versuchen nur die mit Zucker und einer Ferrocyankupfermembran angestellten die VAN'T HOFF'sche Hypothese scharf zu bestätigen scheinen. Von den Salzen liefern einige eine leidliche Übereinstimmung, während andere ihr ganz entschieden widersprechen oder nur durch sehr unwahrscheinliche Annahmen ihr etwas näher gebracht werden können. Wird die Substanz der Membran gewechselt, so stimmt auch der Zucker nicht mehr mit der Forderung der Hypothese überein. Wir müssen daher sagen, dass von einer experimentellen Bestätigung der Hypothese bis jetzt noch nicht geredet werden kann, vielmehr noch viele Versuche nöthig sein werden, bevor wir den Vorgang der Osmose für völlig aufgeklärt ansehen dürfen.

Sehen wir uns nun aber die VAN'T HOFF'sche Theorie selbst mit etwas kritischen Augen an, so finden wir bald, dass sie auch dieser Prüfung nicht Stich hält.

Der osmotische Druck soll der des Zuckers und nicht des Wasser sein, obschon nicht nur zugestanden, sondern ausdrücklich angegeben wird, dass er durch Eintritt von Wasser entsteht und auch durch mechanisches Einpressen desselben oder durch Zusammendrücken der Lösung erzeugt werden kann. Denken wir uns nun diesen Druck auf die eine oder die andere Art in einer Zuckerlösung erzeugt, welche sich in einem ringsum geschlossenen, nur an einer Stelle mit einer halb durchlässigen Wand versehenen Gefässe befindet, so wird der Zustand der Lösung nicht geändert werden, wenn wir jetzt nachträglich die durchlässige Wand mit einem dicht schliessenden Metallschieber zudecken. Auch jetzt ist der Druck noch der des Zuckers. Pressen wir aber jetzt noch etwas mehr Wasser hinein, so ist der entstehende Zuwachs des Druckes ein Druck des Wassers, das nicht entweichen kann. Durch Pressen einer Zuckerlösung erzeugen wir also zunächst Zuckerdruck bis zur Höhe der osmotischen, dann aber Wasserdruck, auch da, wo zu osmotischen Vorgängen gar keine Gelegenheit geboten ist. Der Antheil des Zuckers am Drucke variirt natürlich mit der Concentration; ist nur Wasser vorhanden, so trägt dieses den ganzen Druck; enthält es aber Zucker gelöst, so gehört diesem der Druck und dem Wasser nur der etwaige Überschuss über den osmotischen; die Summe beider gibt den Gesammtdruck. Wie aber, wenn dieser kleiner ist als der osmotische? Ist dann etwa der Wasserdruck negativ? oder der Zuckerdruck beliebig kleiner als der VAN'T HOFF'sche Gasdruck? Credat Iudaeus Apella!

Die Theorie führt jeden Augenblick in Zweifel und Widersprüche. Von zwei miteinander gemischten Substanzen soll nur die eine den VAN'T HOFF'schen Druck ausüben; aber welche? Legt man ihn der in geringerer Menge vorhandenen bei, so hindert uns nichts, deren Masse zu vermehren und die andere in die Minderheit zu bringen, so dass ihr jetzt der Druck gehört. Wo ist aber der Punkt, in dem der Umschlag stattfindet?

Die Annahme, dass die Theilchen einer in geringer Menge einer anderen beigemengten Substanz sich innerhalb der flüssigen Mischung wie die Theilchen eines Gases verhalten, also dem BOYLE'schen Gesetze und dem von GAY-LUSSAC folgen sollten, hat wenig innere Wahrscheinlichkeit. Bekanntlich lehrt, in Übereinstimmung mit der Erfahrung, die kinetische Gastheorie, dass der Druck eines Gases nur so lange der Dichte proportional veränderlich ist, als die Zeit der Zusammenstösse seiner Theilchen sehr kurz ist im Vergleiche zu der, in welcher sie frei ihre geradlinigen Bahnen verfolgen. Wird der Raum so verengt, dass diese Bedingung nicht mehr erfüllt bleibt, so gilt auch das Gesetz BOYLE's nicht mehr. Eine Vermischung mit einem fremden Gase wirkt allerdings meist etwas weniger störend als eine Anhäufung gleichartiger Theilchen; aber das BOYLE'sche Gesetz hört in beiden Fällen auf zu gelten, lange bevor die Gase zu Flüssigkeiten verdichtet sind. Es wäre zum allermindesten sehr sonderbar, wenn es nach der völligen Verdichtung wieder gelten sollte, aber nur für einen Bestandtheil der Mischung.

Der VAN'T HOFF'sche Druck folgt aber auch gar nicht dem BOYLE'schen Gesetze, sobald man ihn für verschiedene Lösungsmittel berechnet. Wäre er ein Gasdruck und nur abhängig von der Anzahl der Molekeln des gelösten Stoffes, nicht aber des Lösungsmittels, so müsste er überall da gleich sein, wo gleich viel Molekeln bei gleicher Temperatur sich im gleichen Raume befinden. Er ist in der That auch schon in einer dieser Auffassung entsprechenden Art definirt worden.[1] Andererseits aber soll derselbe Druck der Erniedrigung des Gefrierpunktes und der Dampfspannung proportional sein, welche ihrerseits nicht von dem Raume, den das Gemisch erfüllt, sondern nur von seiner Zusammensetzung abhängen. Nach RAOULT wird der Gefrierpunkt um ungefähr 0°,62 C und die Dampfspannung um etwa 1 Procent erniedrigt, wenn ein Moleculargewicht eines geeigneten Stoffes mit 100 (oder 99) Mol. Gew. eines Lösungsmittels gemischt wird. Von letzterem braucht man demnach ein um so grösseres Volumen, je grösser sein Moleculargewicht und je kleiner seine Dichte ist. In nachstehender Tafel sind die hier in Frage kommenden Eigenschaften der am meisten benutzten Lösungsmittel in abgerundeten Zahlen zusammengestellt. Die Zahlenwerthe der Dichtigkeiten habe ich BEILSTEIN's Handbuche entnommen und, wo nöthig, durch Inter- oder Extrapolation den Werth ermittelt, welcher der flüssigen Substanz in der Nähe des Schmelzpunktes zukommt. Die Dichte des Äthers gilt für mittlere Temperatur.

[1] Z. B. von ARRHENIUS, Zeitschr. f. phys. Chem. 2, 493.

Stoff	Formel	Mol. Gew.	Dichte	Mol. Vol.	100 Mol. Vol.	Gasdruck
Wasser . . .	H_2O	18	1	18	1800	943^{cm}
» . . .	$\frac{1}{2}(H_2O + H_4O_2)$	27	1	27	2700	628
Ameisensäure .	CH_2O_2	46	1.24	37.10	3710	470
Essigsäure . .	$C_4H_4O_2$	60	1.054	56.93	5693	316
Äthylenbromid .	$C_2H_4Br_2$	188	2.190	85.86	8586	204
Benzol	C_6H_6	78	0.895	87.16	8716	199
Nitrobenzol . .	$C_6H_5NO_2$	123	1.195	102.90	10290	168
Äther	$C_4H_{10}O$	74	0.718	103.0	10300	174
Naphtalin . . .	$C_{10}H_8$	128	0.982	130.3	13030	168
Thymol . . .	$C_{10}H_{14}O$	150	0.948	158.2	15820	127

Die Volumina, in welchen ein Moleculargewicht enthalten sein muss, um die normale Gefrierpunkts- oder Spannungserniedrigung hervorzubringen, schwanken also vom Wasser bis zum Thymol von 1800 (oder 2700) bis 15820, d. i. wie 1 : 9 (oder 1 : 6). Ein Gramm-moleculargewicht, in diese nach Cubikcentimetern bemessenen Räume gebracht, würde, da es, in 1 Liter eingeschlossen, bei 0° einen Druck von 1697^{cm} zeigt, bei den Schmelzpunkten der Lösungsmittel (beim Äther bei 15° C) den in der letzten Spalte der Tafel angegebenen Druck ausüben, während doch sein Druck als der van't Hoff'sche überall gleich sein sollte, weil Gefrierpunkts- oder Spannungserniedrigung gleich sind.

Es geht wohl aus diesen Zusammenstellungen zur Genüge hervor, dass die van't Hoff'sche Theorie eine zu weit gehende und darum unhaltbare Verallgemeinerung verschiedener, an sich sehr werthvoller, Wahrnehmungen ist. »Intellectus humanus, ex proprietate sua, facile »supponit majorem ordinem et aequalitatem in rebus, quam invenit«, sagt schon Baco in seinen Aphorismis de interpretatione naturae. Auch Hr. van't Hoff hat eine grössere Ordnung und Gleichförmigkeit in den Verhältnissen der Lösungen angenommen, als sie in Wirklichkeit vorhanden ist. Er ist den Weg gegangen, von dem Baco sagt, dass man auf ihm von den Einzelheiten hinauffliege zu den allgemeinsten Lehrsätzen. »Gestit enim mens exsilire ad magis generalia, ut acquiescat, et post parvam moram fastidit experientiam«. Wir sollen aber den anderen gehen, der »ascendendo continenter et gradatim« von den einzelnen Beobachtungen zu allmählich erweiterten und erst ganz am Ende zu den umfassendsten Sätzen geleitet.

Um auf diesem Wege zu bleiben, müssen wir uns an die empirisch gefundene und wohl begründete Thatsache halten, dass viele Eigenschaften der Lösungen und flüssigen Mischungen in einem nahen Zusammenhange stehen mit dem Verhältniss, nach welchem die Moleculargewichte der Bestandtheile mit einander gemischt sind. Wir finden dabei, dass diese Eigenschaften sich meist in erster Annäherung als lineare Functionen dieses Mischungsverhältnisses darstellen lassen, folglich auch einander meist nahezu proportional sind. Aber diese Proportionalität gibt uns kein Recht, nun eine dieser Eigenschaften, eine Art des Verhaltens, den unter ganz bestimmten Bedingungen zur Beobachtung kommenden osmotischen Druck, als die Urvariabele zu behandeln, von der das ganze übrige Verhalten abhänge. Diese Rolle gehört unzweifelhaft jenem Verhältnisse der Moleculargewichte in der Mischung. Wir haben daher die Abhängigkeit der Erscheinungen von dieser wirklichen letzten Veränderlichen experimentell und theoretisch zu verfolgen, die Ausnahmen, wirkliche wie scheinbare, zu ermitteln und näher zu untersuchen; gehen wir vorsichtig schrittweise vorwärts, so wird zuletzt der eigentliche innere Zusammenhang aller dieser Dinge unserer Erkenntniss nicht ganz verborgen bleiben. Eine vorzeitige Verallgemeinerung ist nur ein Hinderniss auf diesem Wege, weil sie uns eine allgemeine Einsicht vortäuscht, die wir in Wirklichkeit noch nicht gewonnen haben.

Ich habe mich nur schwer entschlossen, diese Bemerkungen zu veröffentlichen. Aber da meine Hoffnung, dass mein erster, etwas zurückhaltender Einspruch als Warnung dienen werde, sich nicht erfüllt hat, ich vielmehr sehe, dass das vermeintliche VAN'T HOFF'sche »Gesetz« in zahlreichen Abhandlungen als ein unumstössliches Dogma behandelt und vielleicht mehr, als sein Urheber selbst es wünschen mag, angewandt wird, so glaube ich nicht länger schweigen zu sollen, damit nicht das hohe Ansehen, dessen sich mein verehrter Fachgenosse mit Recht erfreut, seine unhaltbare Theorie fast ohne Prüfung zu weiterer Verbreitung gelangen lasse.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

INHALTSVERZEICHNISS.

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE

aus den Jahren 1889, 1890, 1891.

Wattenbach: Über das Handbuch eines Inquisitors in der Kirchenbibliothek St. Nicolai in Greifswald	*M.* 1.50
Möbius: Bruchstücke einer Rhizopodenfauna der Kieler Bucht	» 3.00
Waldeyer: Das Gorilla-Rückenmark	» 12.00
Weber: Über den zweiten, grammatischen, Pârasiprakâça des Krishṇadâsa	» 6.00
Rammelsberg: Über die chemische Natur der Glimmer	» 3.50
Schulze: Über die Bezeichnung der Spongiennadeln	» 4.00
Sachau: Arabische Volkslieder aus Mesopotamien	» 6.00
Weizsaecker: Rense als Wahlort	» 3.00
Schmidt: Die Urheimath der Indogermanen und das europäische Zahlsystem	» 2.50
Rammelsberg: Über die chemische Natur der Turmaline	» 3.50
Nöldeke: Das arabische Mährchen vom Doctor und Garkoch	» 3.00

Meissel: Tafel der Bessel'schen Functionen I_k^0 und I_k^1	» 2.00
Moritz: Zur antiken Topographie der Palmyrene	» 4.00
Kayser und Runge: Die Spectren der Elemente. II. Die Bandenspectra der Kohle	» 4.50
Lendenfeld: Die Gattung Stelletta	» 8.00
Kayser und Runge: Die Spectren der Elemente. III. Über die Spectren der Alkalien	» 3.50
Lepsius: Griechische Marmorstudien	» 4.00
Kayser und Runge: Die Spectren der Elemente. IV.	» 4.80

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der W... wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen ... zuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn ... des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ... Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MIT...

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSEN...

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus ... Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden ... in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von ... fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden ... Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und Ertheilungen ... und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis ... heften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige ... Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen ... Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der ... berichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« ... zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat ...

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen ... Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, ...

die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai ...

» » » Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August ...

» » » October bis December zu Anfang des nächsten Jahres ...

des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1890 nicht zugekommen ... hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung ... Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres ...

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen ... zuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Georg Reimer in Berlin erscheinen ...

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER ...

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 ...

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission ...

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE ...

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER ...

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs ...

Georg Reimer's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen ... oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« ... der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zu ... Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Ersatz ... Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen ... Buchhandlung in Verbindung setzen.

MATHEMATISCHE

UND

NATURWISSENSCHAFTLICHE

MITTHEILUNGEN

AUS DEN

SITZUNGSBERICHTEN DER KÖNIGLICH
PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

HEFT X.

DECEMBER 1891.

T TITEL, INHALTSVERZEICHNISS, NAMEN- UND SACHREGISTER FÜR 1891.

BERLIN 1891.
VERLAG DER KÖNIGLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

IN COMMISSION BEI GEORG REIMER.

Anzeige.

Mit dem Decemberheft des Jahrganges 1881 haben die »Monatsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften« zu erscheinen aufgehört, und es sind an deren Stelle »Sitzungsberichte« getreten, für welche unter anderen folgende Bestimmungen gelten.

(Auszug aus dem Reglement für die Redaction der »Sitzungsberichte«.)

§ 1.

2. Diese erscheinen in einzelnen Stücken in Gross-Octav **regelmässig Donnerstags acht Tage nach jeder Sitzung.** Die sämmtlichen zu einem Kalenderjahr gehörigen Stücke bilden vorläufig einen Band mit fortlaufender Paginirung. Die einzelnen Stücke erhalten ausserdem eine durch den Band ohne Unterschied der Kategorien der Sitzungen fortlaufende römische Ordnungsnummer, und zwar die Berichte über Sitzungen der physikalisch-mathematischen Classe allemal gerade, die über Sitzungen der philosophisch-historischen Classe ungerade Nummern.

§ 2.

1. Jeden Sitzungsbericht eröffnet eine Übersicht über die in der Sitzung vorgetragenen wissenschaftlichen Mittheilungen und über die zur Veröffentlichung geeigneten geschäftlichen Angelegenheiten.

2. Darauf folgen die den Sitzungsberichten überwiesenen wissenschaftlichen Arbeiten, und zwar in der Regel zuerst die in der Sitzung, zu der das Stück gehört, druckfertig übergebenen, dann die, welche in früheren Sitzungen mitgetheilt, in den zu diesen Sitzungen gehörigen Stücken nicht erscheinen konnten.

§ 4.

2. Das Verzeichniss der eingegangenen Druckschriften wird vierteljährlich ausgegeben.

§ 28.

1. Die zur Aufnahme in die Sitzungsberichte bestimmte Mittheilung muss in einer akademischen Sitzung druckfertig vorgelegt werden. Abwesende Mitglieder, sowie alle Nichtmitglieder, haben hierzu die Vermittelung eines ihrem Fache angehörenden ordentlichen Mitgliedes zu benutzen. Einsendungen auswärtiger oder correspondirender Mitglieder, welche direct bei der Gesammtakademie oder bei einer der Classen eingehen, hat der vorsitzende Secretar selber oder durch ein anderes Mitglied zum Vortrage zu bringen. Mittheilungen, deren Verfasser der Akademie nicht angehören, hat er einem zunächst geeignet scheinenden Mitgliede zu überweisen.

Unter allen Umständen hat die Gesammtakademie oder die Classe die Aufnahme der Mittheilung in die akademischen Schriften ordnungsmässig zu beschliessen.

§ 6.

2. Der Umfang der Mittheilung darf 32 Seiten in Octav in der gewöhnlichen Schrift der Sitzungsberichte nicht übersteigen. Mittheilungen von Verfassern, welche der Akademie nicht angehören, sind auf die Hälfte dieses Umfanges beschränkt. Überschreitung dieser Grenzen ist nur nach ausdrücklicher Zustimmung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe statthaft.

3. Abgesehen von einfachen in den Text einzuschaltenden Holzschnitten sollen Abbildungen auf durchaus Nothwendiges beschränkt werden. Der Satz einer Mittheilung wird erst begonnen, wenn die Stöcke der in den Text einzuschaltenden Holzschnitte fertig sind und von besonders beizugebenden Tafeln die volle erforderliche Auflage eingeliefert ist.

§ 7.

Eine für die Sitzungsberichte bestimmte wissenschaftliche Mittheilung darf in keinem Falle vor der Ausgabe des betreffenden Stückes anderweitig, sei es auch nur auszugsweise oder auch in weiterer Ausführung, in deutscher Sprache veröffentlicht sein oder werden. Wenn der Verfasser einer aufgenommenen wissenschaftlichen Mittheilung diese anderweit früher zu veröffentlichen beabsichtigt, als ihm dies gesetzlich zusteht, bedarf er dazu der Einwilligung der Gesammtakademie oder der betreffenden Classe.

§ 8.

3. Auswärts werden Correcturen nur auf besonderes Verlangen verschickt. Die Verfasser verzichten damit auf Erscheinen ihrer Mittheilungen nach acht Tagen.

§ 9.

1. Neben der vollständigen Ausgabe der Sitzungsberichte können bestimmte Kategorien wissenschaftlicher Mittheilungen auch abgesondert in der Weise publicirt werden, dass dieselben mit Sondertitel und fortlaufender Paginirung versehen und mit besonderem Verkaufspreis in den Buchhandel gebracht werden.

§ 11.

1. Jeder Verfasser einer unter den »Wissenschaftlichen Mittheilungen« abgedruckten Arbeit erhält unentgeltlich fünfzig Sonderabdrücke mit einem Umschlag, auf welchem der Titel der Arbeit wiederholt wird.

2. Dem Verfasser steht frei, auf seine Kosten weitere gleiche Sonderabdrücke bis zur Zahl von noch zweihundert zu unentgeltlicher eigener Vertheilung abziehen zu lassen, sofern er hiervon rechtzeitig dem redigirenden Secretar Anzeige gemacht hat.

§ 5.

Den Bericht über jede einzelne Sitzung stellt der Secretar zusammen, welcher darin den Vorsitz hatte. Derselbe Secretar führt die Oberaufsicht über die Redaction und den Druck der in dem gleichen Stück erscheinenden wissenschaftlichen Arbeiten; in dieser Eigenschaft heisst er der redigirende Secretar.

§ 29.

1. Der redigirende Secretar ist für den Inhalt des geschäftlichen Theils der Sitzungsberichte verantwortlich. Für alle übrigen Theile derselben sind nach jeder Richtung nur die Verfasser verantwortlich.

43. Über die Ausbreitung elektrischer Schwingungen im Wasser.

Von Prof. E. Cohn
in Strassburg i. E.

(Vorgelegt von Hrn. Kundt am 3. December; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. L]: — ausgegeben am 10. December.)

Die Dielektricitätsconstante (D.C.) des Wassers ist von Arons und mir aus Kraftmessungen zu 76 bestimmt worden.[1] — Später konnte ich zeigen, dass aus der Beobachtung des zeitlichen Verlaufs von Condensator-Ladungen ein Werth für jene Grösse folgt, der mit dem obigen innerhalb der Fehlergrenzen übereinstimmt.[2] — Eine dritte unabhängige Methode, die D.C. zu messen, liefern die Hertz'schen Schwingungen: bestimmt man mittels derselben den Brechungsexponenten (n) eines Körpers von sehr geringem Leitungsvermögen für sehr lange Wellen, so folgt nach Maxwell's Theorie die D.C. (K) zum mindesten mit grosser Annäherung aus der Gleichung $K = n^2$, welche für unendlich lange Wellen und vollkommene Nichtleiter strenge Gültigkeit beansprucht. —

Es war aus zwei Gründen wünschenswerth, dass die D. C. des Wassers auch nach dieser Methode bestimmt würde. Einmal ist in keinem andern bekannten Fall die Maxwell'sche Beziehung in so schroffem Widerspruch zu den Thatsachen, sofern man n — wie das bis vor kurzem stets geschah — aus optischen Messungen extrapolirt. Andererseits war zu hoffen, dass einer solchen Untersuchung auch wässerige Lösungen von einigem Leitungsvermögen zugänglich sein würden, und dass es so möglich sein würde, eine Vorstellung endgültig zu beseitigen, die, obwohl durch manche Thatsachen widerlegt,[3] und durch keine gestützt, sich dennoch hartnäckig erhält: die Vorstellung, dass Leitungsvermögen und D.C. in gegenseitiger Abhängigkeit von einander stünden, dass die D.C. eines guten Leiters

[1] Wied. Ann. 33, S. 13. 1888.
[2] Diese Berichte 1889, S. 405.
[3] Cohn und Arons, Wied. Ann. 28, S. 455 und 474 ff. und 33, S. 24 f.

unendlich sei, und dass das Wasser seine hohe D. C. den Spuren gelöster Elektrolyte verdanke.[1]

Hertz'sche Schwingungen sind bereits mehrfach benutzt worden, um D. C. zu messen, mit gutem Erfolge besonders von Arons und Rubens.[2] Sie bestimmten die Brechungsexponenten elektrischer Wellen für eine Reihe gut isolirender flüssiger und fester Substanzen, und sie fanden ausnahmslos das Maxwell'sche Gesetz bestätigt, auch in den Fällen, wo die optischen Beobachtungen demselben zu widersprechen schienen. Sie lieferten damit für die von ihnen untersuchten Körper den Beweis, dass der anscheinende Widerspruch nicht der Maxwell'schen Lichttheorie zur Last fällt, sondern lediglich der unzulässigen Ausdehnung empirischer Dispersionsformeln entsprang.

Aber gerade dem Wasser gegenüber versagte die Methode von Arons und Rubens. Angaben in der Litteratur und eigene Erfahrungen liessen mich annehmen, dass das bezeichnete Ziel zu erreichen sein würde, wenn man dafür sorgte, dass die Reflexionen an den Grenzflächen des Wassers keine Störungen verursachen könnten. Eine Anordnung, welche dieser Forderung genügt, soll im Folgenden beschrieben werden. Mittels derselben hat sich bisher zeigen lassen:

a. Für Schwingungen, deren etwa 100 Millionen in der Secunde verlaufen, ist der Brechungsexponent des destillirten Wassers 8.6 bei 17° C. Daraus folgt nach Maxwell's Gesetz die D.C. 73.5.

b. Die Methode gestattet Messungen der D.C. wässeriger Salzlösungen noch bei einem Leitungsvermögen $\lambda = 500 \cdot 10^{-10}$, bezogen auf Quecksilber.

c. Die D.C. wächst mit zunehmendem Salzgehalt, aber äusserst langsam. Die Zunahme beträgt etwa 7 Procent, wenn man von destillirtem Wasser ($\lambda \cdot 10^{10} = 7.4$) zu einer Kochsalzlösung $\lambda \cdot 10^{10} = 455$ übergeht. Die beobachtete D.C. des destillirten Wassers ist folglich als innerhalb der Fehlergrenzen mit der D.C. des vollkommen reinen Wassers identisch anzunehmen.

d. Der Brechungsexponent des destillirten Wassers ist in ausserordentlich hohem Grade von der Temperatur abhängig. Die Abnahme beträgt etwa 7 Procent im Intervall 9° bis 35° C. Diese Veränderlichkeit ist in guter Übereinstimmung mit der von Lorentz[3] abgeleiteten Beziehung

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{1}{d} = \text{Const.},$$

---

[1] S. z. B. J. J. Thomson. Phil. Mag. (5) 31, S. 154 f. 1891.

[2] Wied. Ann. 42, S. 581 und 44, S. 206. 1891.

[3] Wied. Ann. 9, S. 641. 1880; vergl. hierzu die Rechnungen von Lebedew. Wied. Ann. 44, S. 307. 1891.

wo d die Dichte bezeichnet. Sie ist durchaus unverträglich mit den Formeln

$$\frac{n^2-1}{d} = \text{Const.}$$

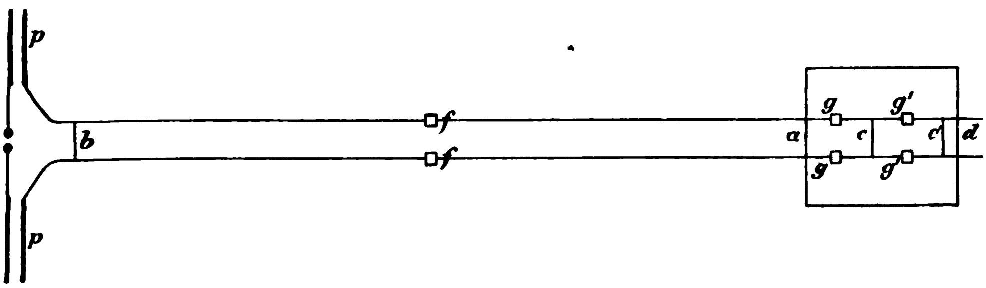
oder

$$\frac{n-1}{d} = \text{Const.},$$

welche in dem engen Bereich der optischen Brechungsexponenten oft gute Dienste geleistet haben.

Es wird die nächste Aufgabe sein, das neue Gebiet, welches jetzt für die Messung der D.C. auch im Bereich der Leiter gewonnen ist, genauer zu durchforschen. Wo aber erhöhtes Leitungsvermögen auch der Anwendung dieser Methode Grenzen zieht, da eröffnet sich gleichzeitig die Aussicht, die Dämpfung der Schwingungen messend zu verfolgen, und damit denjenigen Theil der MAXWELL'schen Theorie einer Prüfung zu unterziehen, über welchen bisher experimentelle Erfahrungen kaum vorliegen, welcher aber, wie ich an anderer Stelle gezeigt habe, auf allgemeine Gültigkeit sicher keinen Anspruch erheben kann.

Das Beobachtungsverfahren war das folgende. Die Schwingungen eines HERTZ'schen Oscillators werden von einem Paar gegenübergestellten Platten pp aufgenommen und an den beiden in 7^{cm} Abstand parallel ausgespannten Drähten bd entlang geleitet (vergl. die Figur). Die letzteren durchsetzen zwischen a und d eine Steingut-



wanne von 66^{cm} Länge und 39^{cm} Breite in einer Höhe von 10^{cm} über dem Boden. — Die Wanne wird bis zur Höhe von 20^{cm} mit Wasser gefüllt. Zwischen a und b können auf den Drähten ein paar kleine »Leydener Flaschen« ff (die unter sich in starrer Verbindung stehen), verschoben werden. Sie sind nach dem Vorgang von RUBENS[1] aus kurzen Glasröhrchen gebildet, die von einigen Windungen dünnen

[1] WIED. Ann. 42, S. 154. 1891.

Drahtes umgeben sind. Die Drähte führen zu einem RUBENS'schen Bolometer, welches die Energie der Schwingungen an der Stelle *ff* zu messen gestattet. — Ein zweites Paar »Flaschen« *gg* lässt sich zu gleichem Zweck innerhalb der Wanne verschieben. Dieses Paar besteht aus zwei dünnwandigen engen Glasröhren, deren jede einen der Paralleldrähte in $1^1/_2$ Windungen knapp umschliesst, die beiden offenen Enden vertical nach oben streckt und mit Quecksilber gefüllt ist. Kupferdrähte vermitteln die Verbindung mit dem Bolometer. — Bei a, im Wasser, aber hart an der Wand des Trogs, sind die Paralleldrähte von einem kurzen Querbügel überbrückt. Nachdem das Inductorium in Gang gesetzt ist, sucht man diejenige Stellung auf, die man einer zweiten Brücke b geben muss, damit die Flaschen *ff* ein Maximum der Energie anzeigen. An dieser Stelle wird die Brücke b fixirt. Es sind dann die Theile des schwingenden Systems, welche einerseits zwischen b und dem Oscillator, andererseits zwischen b und a liegen, in Resonanz. (Dass die Einstellung nicht beeinflusst war durch die Resonanzverhältnisse des Stückes ad, wurde durch willkürliche Veränderungen des letztern in besonderen Versuchen festgestellt.) — Nun werden die Flaschen *gg* mit dem Bolometer verbunden und es wird, während die Brücken a und b an ihrem Ort bleiben, die Lage einer dritten Brücke c bestimmt, für welche *gg* maximale Energie anzeigen. Dann sind auch die Theile ba und ac in Resonanz. Dass es die Resonanz des Unisono und nicht diejenige mit einem Obertone ist, davon überzeugt man sich, indem man die Flaschen je durch ihr Intervall wandern lässt; — oder indem man auf $^1/_2$, $^1/_3$ des Intervalls ab neue Brücken legt, wobei dann jede Spur von Resonanz verschwindet. — Die Entfernungen ba und ac geben aber noch nicht die Wellenlängen, die in den beiden Medien der gleichen Schwingungszahl zugehören. Vielmehr ist offenbar für jede der Brücken eine zunächst unbekannte Zusatzlänge in Anrechnung zu bringen. Um sie zu finden, wird die Brücke c gegen d hin verschoben (während *gg* an ihrer Stelle bleiben oder in die Lage $g'g'$ gebracht werden), und eine neue Stelle c' aufgesucht, für welche *gg* ein Maximum ergibt. Jetzt ist ac' mit ba in Resonanz; — aber diessmal ist es die Resonanz mit der Octave. Denn wenn man jetzt bei ruhendem c' die Flaschen *gg* von c' bis a verschiebt, so geht die Wirkung durch zwei Maxima (bei g' und bei g) und ein Minimum (bei c) hindurch. — Die Verschiebung cc' misst nun direct die Wellenlänge l_w im Wasser, frei von den Endcorrectionen; den Betrag der letzteren (δ) findet man zugleich, indem man die Differenz $\overline{cc'} - \overline{ac}$ bildet. — Dieser Werth von δ (er betrug $4^{\text{cm}}.6$) wurde als gültig auch für die Luftwelle ba angenommen, d. h. die Wellenlänge in Luft: $l_0 = \overline{ab} + \delta$ gesetzt. Dieselbe ist zwar 8 bis 9 mal so lang, als l_w; aber einerseits hatte eine frühere Untersuchung[1] gezeigt, dass die Endcorrection sich kaum merklich mit der Wellenlänge ändert, andererseits ist ein kleiner Fehler in δ, der gegenüber der kurzen Wasserwelle (etwa 34^{cm}) sehr in Betracht fallen würde, gegenüber der langen Luftwelle (fast 3^{m}) ohne Bedeutung.

Es erübrigt, die Beobachtungsdaten mitzutheilen, aus denen die oben bereits mitgetheilten Schlüsse folgen.

Tabelle I enthält eine Beobachtungsreihe über den Einfluss gelösten Salzes. Eine grössere Zahl älterer Beobachtungen, bei welchen die Methodik der Messungen noch weniger ausgebildet war, ist mit ihr in wesentlicher Übereinstimmung, für die Berechnung aber nicht benutzt worden.

Tabelle I.

$\lambda.10^{10}$	*ab*	*ac*	*ac'*	δ	l_0	l_w	*n*	*k*
7.4	287.8	29.5	63.6	4.6	292.4	34.1	8.57	73.5
132		29.2				33.8	8.65	74.8
455		28.4				33.0	8.86	78.5

Die erste Zeile der Tabelle bezieht sich auf destillirtes Wasser, die beiden folgenden auf Kochsalzlösungen. Die Temperaturen lagen bei allen Beobachtungen zwischen 16.8 und 17.2. Die erste Spalte enthält die Leitungsvermögen λ, bezogen auf Quecksilber; die folgenden drei Spalten geben die direct gemessenen Brückenabstände in Centimetern. Die Zahlen der weiteren Spalten folgen aus ihnen gemäss dem oben gesagten. Die Fehlergrenze für l_0 ist auf weniger als 2^{cm}, diejenige für l_w auf 0.2 bis $0^{cm}_{.}5$ zu schätzen. Die letztere steigt mit wachsendem Leitungsvermögen zuerst kaum merklich, dann schneller und schneller an, indem in Folge der wachsenden Dämpfung das Maximum immer weniger scharf hervortritt. Für Salzlösungen, deren λ beträchtlich über $500 \cdot 10^{-10}$ lag, waren Einstellungen von einiger Schärfe nicht mehr möglich. Aus der Gesammtheit der Beobachtungen ergibt sich, dass die Zunahme des Brechungsexponenten mit dem Salzgehalt sicher verbürgt ist, wenn auch der Zahlenwerth dieser Zunahme mit procentisch sehr grosser Unsicherheit behaftet ist.

Noch ist zu bemerken, dass die Beziehung $K = \left(\frac{l_0}{l_w}\right)^2$ in aller Strenge nur für vollkommene Nichtleiter gilt. MAXWELL's Theorie

[1] COHN und HEERWAGEN, Wied. Ann. 43, S. 365. 1891.

gibt aber auch die Correction für leitende Substanzen. Aus den Gleichungen Treatise II § 798 folgt durch eine einfache Rechnung

$$K = \left(\frac{l_0}{l_w}\right)^2 - (2\, C l_w V_0)^2$$

wo C das Leitungsvermögen in absolutem magnetischem Maass und V_0 die Lichtgeschwindigkeit im Vacuum bedeutet. Die numerische Ausrechnung ergibt, dass für die vorliegenden Verhältnisse der Betrag des Correctionsgliedes in die Fehlergrenzen fällt. —

Den Einfluss der Temperatur zeigt Tabelle II.

Tabelle II.

Θ	l_w	δl_w beobachtet	δl_w berechnet	n	K
9°5	33.5	—	—	8.73	76.2
10.5	33.7	0.2	0.0	8.68	75.3
16.8	34.1	0.6	0.4	8.57	73.5
19.8	34.3	0.8	0.6	8.53	72.7
27.2	34.7	1.2	1.4	8.43	71.0
31.7	35.3	1.8	1.9	8.28	68.6
35.3	35.7	2.2	2.5	8.19	67.1

Alle Beobachtungen dieser Reihe beziehen sich auf destillirtes Wasser, dessen Leitungsvermögen, bei 15° C. gemessen, $7 \cdot 10^{-10}$ bis $8 \cdot 10^{-10}$ betrug. Die erste Spalte enthält die Temperaturen Θ in Grad Celsius. Die zweite gibt in Centimetern die zugehörige Wellenlänge im Wasser: l_w; sie ist berechnet aus dem Brückenabstand ac und der Zusatzgrösse $\delta = 4.6$. (Die Wellenlänge in Luft ist stets dieselbe: 292.4.) Unter δl_w sind die Differenzen der Wellenlängen gegen diejenige bei 9°5 aufgeführt, und zwar erstens nach den Beobachtungen, zweitens nach der Lorentz'schen Formel. Die beiden anderen oben angeführten Formeln würden Differenzen verlangen, die in dem ganzen vorliegenden Intervall nur den Betrag 0.1 cm bez. 0.2 cm erreichen. Die letzten Spalten enthalten Brechungsexponenten und D.C.

Leibniz und Pascal.

Von C. I. Gerhardt.

(Vorgelegt am 26. November; — gedruckt im Bericht vom 10. December [St. LII]; — ausgegeben am 17. December.)

In der Geschichte der Mathematik wird allgemein angegeben, dass aus Cavalieri's Methodus indivisibilium (1635) die höhere Analysis hervorgegangen sei. Diese Behauptung ist, wenigstens was die Erfindung des Algorithmus der höheren Analysis durch Leibniz anlangt, irrig;[1] im Folgenden soll nachgewiesen werden, auf Grund der Leistungen der französischen Mathematiker des 17. Jahrhunderts und der Manuscripte Leibnizens, dass Leibniz speciell durch das Studium der Schriften Pascal's auf die Erfindung des Algorithmus der höheren Analysis geführt wurde. In Betreff der Leibnizischen Manuscripte sind die ersten Briefe aus der Correspondenz zwischen Leibniz und Tschirnhaus maſsgebend; sie enthalten die weitere Besprechung ihrer gemeinsamen Arbeiten während des Zusammenseins in Paris (September 1675 bis November 1676; bekanntlich fällt in diese Zeit die Entdeckung des Algorithmus der höheren Analysis durch Leibniz). Von diesen Briefen enthält ein bisher nicht gedruckter Brief Leibnizens, der den ersten Theil der Correspondenz zwischen Leibniz und Tschirnhaus abschliesst, die ausführlichste Darstellung über die Studien Leibnizens während seines Pariser Aufenthalts; sie ist ohnstreitig von der entschiedensten Wichtigkeit, da sie nur vier Jahre später abgefasst ist und die nähern Umstände am frischesten wiedergibt.

Zunächst sind die Arbeiten der französischen Mathematiker um die Mitte des 17. Jahrhunderts, besonders die Leistungen Pascal's, in Betracht zu ziehen. Wir wissen aus dem Leben Pascal's, dass der Vater desselben, als er 1631 seinen Wohnsitz nach Paris verlegte, in einen Verein von Mathematikern und Physikern[2] trat, von denen die Geschichte der Wissenschaft die Namen Mersenne, Roberval, Gassendi,

[1] Cum de Geometria indiviſibilium loquor, lauten Leibnizens Worte, longe aliquid Cavaleriana amplius intelligo, quae mihi non videtur eſſe niſi portio mediocris Archimedeae. Er bezeichnet Cavalieri's Methodus als rudis et limitata.

[2] Compagnie nannten sie sich; es entstand daraus 1666 die Académie des sciences.

Desargues, de Carcavi, Beaugrand, des Billettes und andere aufbewahrt hat. Sie standen namentlich durch Mersenne mit den ausserhalb Paris lebenden Mathematikern Descartes, Fermat, de Sluze in Verbindung, so dass um die Mitte des 17. Jahrhunderts die Höhe der mathematischen Wissenschaften in Paris sich concentrirte. In diesem Verein bewegte sich Pascal, kaum den Knabenjahren entwachsen, und erregte durch sein eminentes Talent Staunen und Bewunderung. Als ein hervorragender Zug in den Arbeiten der genannten Mathematiker stellt sich das Bestreben heraus, die jeder wissenschaftlichen Strenge entbehrende Cavalierische Methode zu verlassen und die Wissenschaft nach den Vorschriften der griechischen Mathematiker zu behandeln.[1] Vielleicht fanden dabei die Ideen Keppler's, die er in dem Supplementum Stereometriae Archimedeae[2] niedergelegt hatte, Berücksichtigung, indem Roberval und Pascal das Unendliche und Unendlichkleine in die Geometrie einführten.[3]

Was speciell die hierhergehörenden Arbeiten Pascal's betrifft, so sind besonders die Lösungen der von ihm 1658 unter dem angenommenen Namen Dettonville vorgelegten Aufgaben über die Cycloide zu erwähnen. Dadurch und durch die von ihm angewandte Methode überragte er alle gleichzeitigen Mathematiker und gewann den Ruhm als erster Geometer seiner Zeit.

Die Untersuchung der Eigenschaften der Cycloide hatte die berühmtesten Mathematiker des 17. Jahrhunderts beschäftigt. Es wird berichtet, dass zuerst, bereits vor 1599, Galilei in Folge von Construction von Brückenbogen auf diese Curve aufmerksam gemacht habe; er versuchte den Flächeninhalt derselben auf mechanische Weise, durch Wägung einer Bleiplatte von gleichförmiger Dicke, welche die Gestalt einer von einer Cycloide begränzten Ebene hatte, zu bestimmen, und fand, dass sie ohngefähr dreimal so gross als der Flächeninhalt des erzeugenden Kreises sei. Theoretisch ein Resultat zu begründen, gelang ihm nicht. 1615 wurde Merſenne auf die Entstehung der Cycloide durch ein rollendes Rad aufmerksam gemacht; er beschäftigte sich längere Jahre hindurch die Natur der Curve zu erforschen, aber

---

[1] Die betreffenden Stellen aus Roberval's und Pascal's Schriften sind in der Abhandlung: Leibniz in London, angeführt.

[2] Nova Stereometria Doliorum Vinariorum, inprimis Austriaci, figurae omnium aptiſſimae, et Uſus in eo Virgae Cubicae compendioſiſſimus et plane singularis. Acceſſit Epitome Stereometriae Archimedeae Supplementum. Lincii an. MDCXV. Siehe meine Geschichte der Mathematik in Deutschland S. 109 ff.

[3] Roberval in einem Briefe an den Astronomen Hevelke (Hevelius) in Danzig: Circa analyſin, meas delicias, multo plura habeo; nec pauciora circa doctrinam infiniti, quam nunc vocant doctrinam indiviſibilium ... Veröffentlicht in: Huygens et Roberval. Documents nouveaux. Par C. Henry, Leyde 1879.

ohne Erfolg, so dass er über die Schwierigkeiten, die sich ihm in Betreff dieser Curve ergaben, 1634 an Roberval Mittheilung machte. Dieser bewies mit Hülfe der von ihm verbesserten Cavalieri'schen Methode, dass der Flächeninhalt der Cycloide gleich dem Dreifachen des erzeugenden Kreises ist; er bestimmte ferner 1644 den Inhalt der Körper, die durch die Rotation der Cycloide um die Basis, um ihre Axe und um den Durchmesser des erzeugenden Kreises entstehen, sowie auch den Schwerpunkt der Fläche der Cycloide. Um in körperlichen Leiden, die ihm die Nachtruhe raubten, Zerstreuung zu suchen, nahm Pascal die weitere Untersuchung der Eigenschaften der Cycloïde nach 14jähriger Unterbrechung im Jahre 1658 wieder auf. Es waren noch zu finden der Flächenraum eines beliebigen Segments der Cycloide, der Schwerpunkt eines solchen Segments, die Volumina der Körper, welche ein solches Segment durch seine Umdrehung um die Ordinate oder Abscisse entweder durch eine vollständige oder durch eine halbe oder durch ein Viertel beschreibt. Da die Lösungen der bisher behandelten Probleme nicht durch eine allgemeine Methode, mehr durch specielle, künstliche Verfahrungsweisen bewirkt waren, so kam es besonders darauf an, eine allgemein anwendbare Behandlung zu schaffen. Pascal ging auf das Verfahren Archimed's zurück, mittelst des Gleichgewichts am Hebel die Quadratur der Parabel zu bestimmen; er verallgemeinerte dasselbe, indem er an die Stelle der geometrischen Figuren nicht bloss an den Endpunkten des Hebels (er sagt wie Archimedes, balance, Wagebalken), sondern in verschiedenen Entfernungen vom Unterstützungspunkt ungleiche Gewichte annahm, die er mittelst des von ihm aufgestellten triangle arithmétique summirte und den Schwerpunkt bestimmte. Durch seine Freunde wurde Pascal bestimmt, im Juni 1658 die von ihm gelösten Probleme über die Cycloide unter dem angenommenen Namen Dettonville den Mathematikern zur Lösung vorzulegen. Als Termin für die Einlieferung der Lösungen wurde der 1. October 1658 bestimmt. Einzelne der vorgelegten Aufgaben wurden bis zu dem angegebenen Termin von Huygens, de Sluze, Wren gelöst; es war jedoch nicht vollständig den Forderungen des Pascal'schen Programms genügt. Von de Carcavi aufgefordert machte Pascal in einem längeren Schreiben Anfangs October 1658 die oben erwähnte Methode zur Lösung der Aufgaben bekannt,[1] und fügte

[1] Das Schreiben an de Carcavi nebst den 5 Abhandlungen veröffentlichte Pascal im folgenden Jahre unter dem Titel: Lettres de A. Dettonville contenant quelquesunes de ses Inventions de Geometrie. Sçavoir, La Resolution de tous les Problemes touchant la Roulette qu'il avoit propoſez publiquement au mois de Juin 1658. L'Egalité entre les Lignes courbes de toutes sortes de Roulettes et des Lignes Elliptiques. L'Egalité entre les Lignes Spirale et Parabolique, demonstrée à la maniere des Anciens. La

drei weitere Aufgaben in Betreff der Cycloide hinzu. Mit diesem Schreiben sind 5 Abhandlungen verbunden, welche die Lösungen der Pascal'schen Aufgaben vorbereiten: 1. Traitté des Trilignes et de leurs Onglets.[1] In dieser Abhandlung wird die Bestimmung des Inhalts und der Schwerpunkte des triligne und double onglet auf die Summen der Ordinaten der Axe oder der Basis in einem triligne zurückgeführt: ebenso zeigt Pascal, dass die Bestimmung des Inhalts und des Schwerpunkts der krummen Oberfläche des double onglet durch die Summe der Sinus[2] der Axe ausgedrückt werden kann. — Die folgende Abhandlung 2. Propriétés des sommes simples, triangulaires et pyramidales ist ein Anhang zu der vorhergehenden. Mit Somme triangulaire bezeichnet Pascal die Summe einer Anzahl von Grössen, eine jede multiplicirt in der Reihenfolge mit der entsprechenden Zahl der natürlichen Zahlenreihe. Entsprechend bedeutet Somme pyramidale die Summe einer Anzahl von Grössen, eine jede multiplicirt in der Reihenfolge mit der entsprechenden Triangularzahl. — Hierauf folgt 3. Traitté des Sinus du quart de Cercle. In dieser Abhandlung beweist Pascal zuerst den Satz: Die Summe der Sinus irgend eines Bogens eines Kreisquadranten ist gleich dem Product aus dem Theil der Basis zwischen den Endpunkten der äussersten Sinus multiplicirt mit dem Radius des Kreises. Mit Hülfe dieses Satzes werden behandelt die Summe der Sinus eines Kreisquadranten, ihrer Quadrate

---

Dimenſion d'un Solide formé par le moyen d'une Spirale autour d'un Cone. La Dimenſion et le Centre de gravité des Triangles Cylindriques. La Dimenſion et le Centre de gravité de l'Escalier. Un Traitté des Trilignes et de leurs Onglets. Un Traitté des Sinus et des Arcs de Cercle. Un Traitté des Solides Circulaires. A Paris M. DC. LIX. In dieser Schrift sind die Abhandlungen Pascal's aus dem Jahre 1658 mit Zuschriften an Huygens, de Sluze und einen Ungenannten vereinigt. Aus dem Briefwechsel Huygens' in den Jahren 1658 und 1659, der in dem 2. Bande des wahrhaft grossartigen Werkes: Oeuvres complètes de Christiaan Huygens publiées de la Société Hollandaiſe des sciences abgedruckt ist, ersieht man, welche mächtige Bewegung unter den gleichzeitigen Mathematikern durch Pascal's Aufgaben, sowie durch die angeführte Druckschrift entstand. Leibniz äussert sich so: Jam deferbuerat haec contentio (in Betreff des P. Gregorius a S. Vincentio) cum ecce novi in Republica Geometrica motus per Galliam excitantur autore Blaſio Pascalio, summi ingenii Viro et quo ad Galilaei et Carteſii laudes nemo tunc propius acceſſit. — Diese Schrift Pascal's wurde Leibniz von Huygens zum Studium empfohlen.

[1] Unter Triligne versteht Pascal eine ebene Figur begränzt von zwei auf einander senkrecht stehenden Geraden und einer krummen Linie; die eine der Senkrechten heisst die Axe, die andere die Basis der Figur. Wenn über einer solchen Figur als Grundfläche ein senkrechter Körper errichtet und derselbe durch eine Ebene, die entweder durch die Axe oder Basis geht, geschnitten wird, so wird das abgeschnittene Körpersegment Onglet genannt. Ein double Onglet entsteht, wenn durch den unterhalb der Basis erweiterten Körper eine Ebene unter derselben Neigung gelegt wird.

[2] Unter Sinus versteht Pascal die Senkrechte multiplicirt mit dem unendlich kleinen Bogentheil.

und Cuben, der vierten Potenzen u. s. w., die Summe der Rechtecke aus jedem Sinus der Basis und dem Abstand von der Axe, die trianguläre und pyramidale Summe der Sinus der Basis u. s. w. — Die Abhandlung 4. Traitté des Sinus et des Arcs de Cercle enthält die Bestimmung der Summe aller Kreisbogen vom Scheitel des Quadranten bis zu jeder Ordinate der Axe, die Summe der Quadrate, der Cuben, die entsprechenden triangulären und pyramidalen Summen, die einfachen und triangulären Summen der Sectoren, die Summen von Körpern aus jedem Sector eines Quadranten und der Entfernung seines Schwerpunktes von der Basis u. s. w. — Zuletzt folgt die Abhandlung 5. Petit Traitté des Solides Circulaires. Darin wird untersucht die Lage des Schwerpunktes derjenigen Körper, welche durch die Rotation eines halben Kreisabschnitts um die Axe oder Basis entstehen, die Summe der vierten Potenzen der Ordinaten der Axe, der Cuben, die Lage des Schwerpunktes des durch Drehung um die Axe entstandenen halben Umdrehungskörpers u. s. w. — An diese 5 Abhandlungen schliesst sich noch Un Traitté general de la Roulette, contenant la Solution de tous les Problemes touchant la Roulette qu'il avoit proposez publiquement au mois de Juin 1658.

Alle diese Arbeiten Pascal's sind rein geometrisch nach dem Beispiel der Geometrie des Alterthums abgefasst; man findet nirgends eine Spur von der durch Descartes' eingeführten Behandlung geometrischer Probleme[1]. —

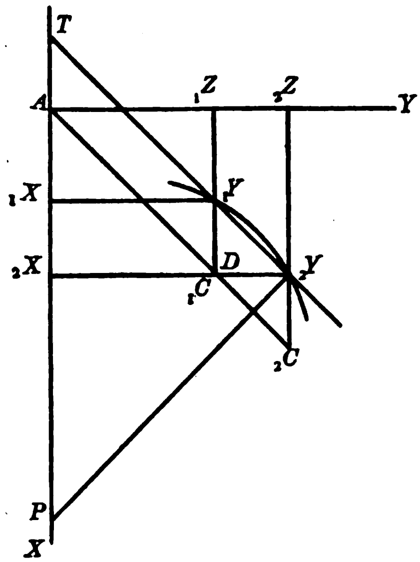
Es ist bekannt, dass Leibniz durch die Bekanntschaft mit Huygens, der in den Jahren 1666 bis 1681 in Paris lebte, zum Studium der höheren Mathematik angeregt wurde. Besonders empfahl er ihm die Briefe Pascal's. Bei verschiedenen Gelegenheiten hat Leibniz sich später übereinstimmend dahin ausgesprochen, dass er durch das Studium der Schriften Pascal's in die höhere Analysis eingeführt und seine Entdeckungen gemacht habe, zuerst in dem bisher ungedruckten Schreiben an Tschirnhaus aus dem Jahre 1679,

---

[1] Descartes hatte über Pascal's Essay pour les coniques abfällig geurtheilt. Vielleicht ist die schroffe Haltung Pascal's Descartes gegenüber darauf zurückzuführen. Die Nichte Pascal's, Marguerite Perier, schreibt: M. Pascal parlait peu de sciences; cependant, quand l'occasion s'en présentait, il disait son sentiment sur les choses dont on lui parlait. Par exemple, sur la philosophie de M. Descartes, il disait assez ce qu'il pensait. Il était de son sentiment sur l'automate, et n'en étoit point sur la matière subtile, dont il se moquait fort. Mais il ne pouvait souffrir sa manière d'expliquer la formation de toutes choses, et il disait très souvent: Je ne puis pardonner à Descartes; il aurait bien voulu, dans toute sa philosophie, pouvoir se passer de Dieu, mais il n'a pu s'empêcher de lui faire donner une chiquenaude pour mettre le monde en mouvement. Après cela, il n'a plus que faire de Dieu (Faugère, Lettres, Opuscules et Mémoires de Madame Perier et de Jacqueline, soeurs de Pascal, et de Marguerite Perier, sa nièce. Paris 1845, p. 458).

aus welchem die betreffende Stelle im Folgenden mitgetheilt wird, alsdann in einem Schreiben an den Marquis de l'Hospital aus dem Jahre 1694, ferner in einem Postscriptum eines Briefes an Jacob Bernoulli aus dem Jahre 1703, und zuletzt in der Abhandlung Historia et origo calculi differentialis aus seinen letzten Lebensjahren.[1]

Unter den Leibnizischen Manuscripten ist bisher ein sehr umfangreiches aufgefunden worden mit der Aufschrift: Ex Dettonvillaeno (?) seu Pascalii Geometricis excerpta: cum additamentis. Es ist nicht datirt; da es aber Leibnizens Studien im genauen Anschluss an das Schreiben Pascal's an de Carcavi enthält, so wird es unmittelbar nach der Begegnung mit Huygens (1673) entstanden sein. Dasselbe ist in seinem ganzen Umfange zur Mittheilung nicht geeignet; es folgt deshalb hier nur der Anfang davon (II). Eine besondere Aufmerksamkeit hat Leibniz den fünf Abhandlungen zugewandt, die auf das Schreiben Pascal's an de Carcavi folgen; er bemerkt, dass das Verfahren Pascal's zur Bestimmung der Oberfläche der Kugel, nach welchem die Oberfläche eines durch Rotation um eine Axe entstandenen Körpers auf eine proportionale ebene Figur zurückgeführt werden kann, ihm Veranlassung wurde, ein allgemeines auf alle krummlinig begränzten ebenen Figuren anwendbares Theorem aufzustellen. Von beiden Curvenpunkten ${}_1Y$ und ${}_2Y$ sind die Coordinaten ${}_1Y{}_1Z$, ${}_1Y{}_1X$ und ${}_2Y{}_2Z$, ${}_2Y{}_2X$ gefällt, in ${}_2Y$ ist die Tangente ${}_2YT$ angelegt, die mit der Curve ${}_1Y{}_2Y$ als zusammenfallend betrachtet wird, und die Senkrechte ${}_2YP$ errichtet. Wegen Ähnlichkeit der Dreiecke ${}_1YD{}_2Y$ und ${}_2Y{}_2XP$ ist ${}_2XP \cdot {}_1YD = {}_2Y{}_2X \cdot D{}_2Y$ d. h. die Subnormale (subperpendicularis) ${}_2XP$ als Ordintae auf der Axe AX zum Element der Axe ${}_1X{}_2X = {}_1YD$ ist gleich der Ordinate ${}_2Y{}_2X$ zu dem Element $D{}_2Y$.

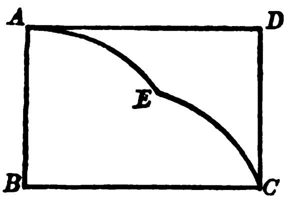


Sed Rectae, fährt Leibniz fort, inde a nihilo crescentes in sua Elementa ductae conficiunt triangulum. Esto enim semper $AZ = ZC$, fiet triangulum rectangulum AZC, quod est dimidium quadrati AZ, itaque figura orta ex subperpendicularibus ordinatim et perpendiculariter axi applicatis semper aequatur dimidio quadrato ordinatae. Et proinde, data figura quadranda, quaeritur figura cujus subperpendiculares aequentur ordinatis

[1] Unter I. ist das hier Erwähnte zusammengestellt.

figurae datae, ea erit figurae datae quadratrix. Atque ita ex hac facillima meditatione habemus reductionem ad quadraturas planas superficierum rotatione genitarum, et rectificationis curvarum; et simul ipſas figurarum quadraturas reducimus ad problema tangentium inverſum. Demnach musste es Leibniz darauf ankommen, ein allgemeines Verfahren zur Quadratur der Curven zu finden.

Dies alles erreichte Leibniz in dem ersten Jahre 1673/74 seiner mathematischen Studien in Betreff der höheren Analysis. Er hatte bis dahin in seinen Untersuchungen das rein geometrische Verfahren, wie er es in den Schriften Pascal's gefunden, beibehalten; auf Anweisung von Huygens machte er sich das Verfahren Descartes' zu eigen als für die Rechnung bequemer. Die grosse Abhandlung Leibnizens mit der Aufschrift: Analyſis Tetragonistica ex Centrobarycis, die datirt ist 25. October, 26. October, 29. October, 1. November 1675 [1], zeigt zunächst den Anschluss an die oben erwähnten Abhandlungen Pascal's, sodann aber auch den Fortschritt, den Leibniz in Folge des Studiums der Cartesianischen Geometrie gemacht hat. Leibniz beginnt mit Prospos. II aus Pascal's erster Abhandlung: Traitté



des Trilignes et de leurs Onglets, welche er so ausdrückt: Sit curva quaelibet AEC referenda ad angulum rectum BAD, sit $AB \sqcap DC \sqcap a$ et ultima $x \sqcap b$, et $BC \sqcap AD \sqcap y$ et ultima $y \sqcap c$. Patet

$$\text{omn. } \overline{yx \text{ ad } x} \overset{(1)}{\sqcap} \frac{b^2 c}{2} - \text{omn. } \overline{\frac{x^2}{2} \text{ ad } y}.$$

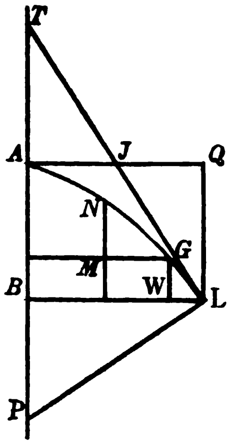
Nam momentum spatii $ABCEA$ ex AD fit ex rectangulis ex $BC \sqcap y$ in $AB \sqcap a$; at vero momentum spatii $ADCEA$ ex AD seu complementi prioris fit ex summa quadratorum DC, sive $\frac{x^2}{2}$, dimidiata, quod momentum, si auferatur a momento totius rectanguli $ABCD$ ex AD, id est ac in omn. x, sive $a\,\frac{cb^2}{2}$, restabit momentum spatii $ABCEA$. Unde habetur aequatio quam dixi, qua reformata sequitur

$$\text{omn. } \overline{yx \text{ ad } x} + \text{omn. } \overline{\frac{x^2}{2} \text{ ad } y} \sqcap \frac{b^2 c}{2},$$

adeoque harum duarum figurarum in unum junctarum semper haberi quadraturam. Qui est centrobarycae apex. — In der Fortsetzung den 29. October 1675 bringt Leibniz mit diesem Lehrsatz

[1] Diese Abhandlung ist vollständig abgedruckt in meiner Geschichte der Entdeckung der höheren Analysis.

das triangulum characteristicum, das bereits in dem Obigen erscheint, in Verbindung. Ist AGL eine Curve, $BL = y$, $WL = l$, $BP = p$, $AB = x$, $GW = a$, $y = \text{omn.}\, l$, so ist



$$\frac{l}{a} = \frac{p}{y} = \frac{p}{\overline{\text{omn.}\, l}}, \text{ mithin } p = \frac{\overline{\text{omn.}\, l}}{a}\, l.$$

Nun ist nach dem Obigen

$$\text{omn.}\, p = \frac{y^2}{2} = \frac{\overline{\text{omn.}\, l}\,\boxed{2}}{2} = \frac{\overline{\text{omn.}\, l}^2}{2}$$

$$\text{daher } \frac{\overline{\text{omn.}\, l}^2}{2} = \text{omn.}\, \overline{\overline{\text{omn.}\, l}\, \frac{l}{a}},$$

id est, setzt Leibniz hinzu, si omnes l ducantur in ultimam et aliae omnes l rurfus in suam ultimam, et ita quoties id fieri potest, summa horum omnium aequabitur dimidiae summae quadratorum, quorum latera sunt summae ipforum, seu omnes l. Pulcherrimum ac minime obvium theorema. Tale est etiam theorema:

$$\text{omn.}\, \overline{xl} \sqcap x \cdot \overline{\text{omn.}\, l} - \overline{\text{omn. omn.}\, l},$$

ponendo l effe terminum progreffionis et x effe numerum qui exprimit locum seu ordinem ipfius l respondentis, seu x esse numerum ordinalem, l rem ordinatam. Nota: in his calculis observari potest lex homogeneorum, nam si omn. praefigatur numero seu rationi, vel infinite parvo, fit linea; si lineae, fit superficies; si superficiei, fit corpus; et ita in infinitum etiam ad dimenfiones. Utile erit scribi $\int$ pro omn., ut $\int l$ pro omn. l, id est summa ipforum l. Itaque fiet

$$\frac{\overline{\int \overline{l}}^2}{2} \sqcap \int \overline{\int \overline{l}\, \frac{l}{a}} \text{ et } \int \overline{xl} = x \int \overline{l} - \int\int l. \text{ —}$$

Dies ist die erste Einführung des Algorithmus der höheren Analysis. Im Folgenden gewinnt Leibniz die ersten Lehrsätze der Integralrechnung: $\int x \sqcap \frac{x^2}{2}$, $\int x^2 \sqcap \frac{x^3}{3}$, und fügt hinzu: omnia haec theoremata vera de seriebus, in quibus differentiae terminorum ad terminos rationem habent minorem qualibet affignabili. Weiterhin bemerkt Leibniz: Satis haec nova et notabilia, cum novum genus calculi inducant. Datur l, relatio ad x, quaeritur $\int l$. Quod fiet jam contrario calculo, scilicet si sit $\int l \sqcap ya$, ponemus $l \sqcap \frac{ya}{d}$, nempe ut $\int$ augebit, ita d minuet dimenfiones, $\int$ autem significat summam, d differentiam. Ex dato y semper invenitur $\frac{ya}{d}$ sive l sive differentia ipforum y. In der Untersuchung mit der Aufschrift: Methodi tangentium inverſae exempla, datirt 11 Novembr. 1675, führt Leibniz an Stelle von $\frac{y}{d}$ die Bezeichnung dy ein.

Vorstehendes enthält die Einführung des Algorithmus der höheren Analyſis, so wie sie sich aus den vorhandenen Leibnizischen Manuscripten ergibt.

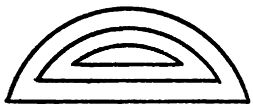
In Verbindung mit der früheren Abhandlung: Leibniz in London, ist der Nachweis geführt, dass irgend welche Einwirkung von aussen auf Leibniz in Betreff der Einführung des Algorithmus der höheren Analysis ausgeschlossen ist.

I.

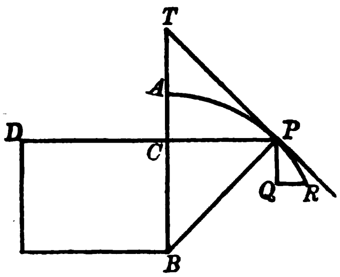
Aus dem Schreiben Leibnizens an Tschirnhaus.

1679.

Miraris Reginaldum circa superficiem Elliptici Sphaeroidis labi potuiſſe, cum intelligat methodum indiviſibilium, sed non videris satis conſideraſſe quam diverſae sint indiviſibilium methodi. Cavalerianam intelligit, sed ea tam arctis limitibus circumscribitur, ut pauca magni momenti praestare poſſit. Nimirum Cavalerius, Torricellius, Robervallius, Fermatius, imo quod sciam Itali omnes ignoravere uſum tangentium ad quadraturas, et ejus quod a me vocari solet Triangulum figurae characteristicum infinite parvum; imo nunc quoque in Gallia credo unum Hugenium eſſe qui haec intelligat. Ipſe Pascalius mirari satis non poterat artificium quo Hugenius invenerat superficiem conoidis parabolici. Sluſius quoque nullum dedit specimen, unde credam haec ipſi cognita. Haec cauſa etiam est, cur Hugenius et Gregorius talia demonstraverint per ambages lineares, analyſi suppreſſa, ne methodum tam facilem et foecundam vulgarent. Prima occasio qua inveni ego de meo methodum Trianguli characteristici aliaque id genus, fuit eo tempore quo vix aliquot menſes studio geometrico impenderam. Hugenius cum librum suum edidiſſet de pendulis, ejus mihi exemplum dedit. Eo tempore plane ignorabam Algebram Carteſianam, et methodum quoque indiviſibilium, imo nesciebam veram definitionem centri gravitatis; cum enim forte cum Hugenio colloquerer, credebam et ſignificabam me credere rectam per centrum gravitatis ductam secare figuram semper in duas partes aequales; cum enim id manifestum sit in quadrato, circulo, ellipſi aliisque figuris centrum magnitudinis habentibus, putabam idem contingere in aliis omnibus. Hugenius ridebat hoc audito, mihique dicebat nihil effe falfius. Ego hoc velut stimulo excitatus coepi applicare me ad Geometriam interiorem, cum tamen revera nondum Elementa legiffem. Sed deprehendi experientia, Elementorum cognitione careri poffe, modo quis paucas propofitiones teneat. Hugenius qui me meliorem Geometram credebat quam eram, dedit mihi legendas literas a Pascalio, Dettonvillaei nomine editas: ex his intellexi methodum indivifibilium et centrorum gravitatis, nempe vulgarem Cavalerii et Guldini. Ego vero statim, dum Pascalium legebam, de meo occurrentia conjiciebam in chartam, ex quibus nunc video nonnulla effe inepta, nonnulla vero etiamnum perplacent. Inter alia quaerebam novum quoddam centri



genus. Putabam enim si figurae cuilibet alia similis et similiter pofita inscriberetur, poffe punctum medium reperiri, in quo figura evanesceret, et hoc puncto dato haberi quadraturas. Sed postea animadverti, quid huic methodo obstet. Sed ut ad rem redeam, dicam quomodo inciderim in methodum Trianguli characteristici. Forte Pascalius demonstrabat ex Archimede superficiei sphaericae dimenfionem, seu momentum curvae circularis ex axe, ostendebatque radium axi applicatum dare hoc momentum. Ego demonstrationem attentius rimatus animadverti, ope trianguli characteristici infinite parvi demonstrari poffe hanc propofitionem

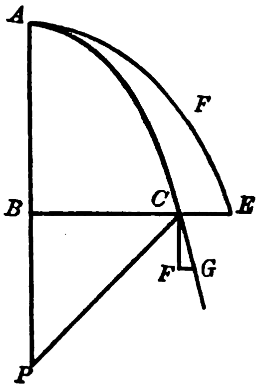


generalem pro qualibet curva: Sit curva quaecunque AP, ad cujus tangentem PT ducatur perpendicularis BP axi occurrens in B; sit ordinata PC, applicetur axi AC in puncto C recta perpendicularis CD aequalis ipfi PB. Quod fi jam curva ducatur per omnia puncta D, ea figuram faciet cujus area erit momentum curvae ex axe, seu ostendet modum superficiei curvae circa axem rotatae exhibendi circulum aequalem. Et quoniam in circulo recta PB semper est eadem, ubicunque in curva sumatur punctum P, hinc figura illa ex perpendicularibus axi applicatis nata est rectangulum, ac proinde facillimum est superficiem sphaericam redigere in planum. Cum ergo hoc modo methodum generalem reperiffem pro superficierum dimenfionibus, statim eam attuli Hugenio; is miratus et subridens faffus est, se eadem plane methodo ufum ad inveniendam superficiem conoidis parabolici circa axem. Nam curvam per omnia D transeuntem tunc etiam effe parabolam, ac proinde figuram effe quadrabilem. Ego cum vellem experiri an hoc verum effet de parabola, coepi quaerere modum exprimendi loca seu curvas per calculum, et tum primum intellexi ea quae Cartefius scribit. Nam antea solebam calculare meo more adhibitis non literis, sed nominibus linearum. Tum primum igitur Cartefium et Schotenium attente legi, hortante Hugenio qui mihi dicebat modum calculandi ab ipfis adhibitum effe commodiorem. Ego interea aperto semel characteristici Trianguli aditu facillime innumera theoremata inveniebam, quibus plurimas tunc chartas adimplevi; sed pleraque postea reperi etiam Heuratio, Gregorio et Barrovio innotuiffe. Haec omnia autem praestiti primo tirocinii mei Geometrici anno. Sed postea ad longe majora enixus sum, ad quae credo Gregorius et Barrovius ex suis methodis pervenire non poffent, Cavalerius autem et Fermatius multo minus. Circa eadem tempora cum viderem inventionem quadraturarum reduci ad inventionem summarum serierum, et contra inventionem tangentium reduci ad inventionem differentiarum, fundamenta jeci calculi mei novi, quem voco differentialem aut tetragonisticum, quo ea quae magno linearum apparatu vix ac ne vix quidem consequi licet, paucis lineolis praestare poffum. Animadverti autem generaliter summam alicujus seriei reperire nihil effe aliud quam invenire aliam seriem, cujus differentiae constituant seriem datam. Aliam autem illam seriem vocare soleo summatricem. De seriebus infinitis cogitandi occafionem dedere Wallifius et Mercator. Sed cum inventa eorum meis sociaffem, nova nullo negotio reperi. Tandem cum confiderarem problemata quadraturarum non effe certi gradus, poffe tamen revocari ad aequationes, in quibus exponentes potestatum incogniti sunt, nova mihi lux oborta est, coepique agnoscere praeter vulgarem analyfin dari aliam quamdam, Transcendentem a me appellatam, quia aequationibus utitur quae omnes gradus transcendant: eamque propemodum unicam video methodum determinandi, an problemata hujusmodi specialia sint poffibilia an non. Facile quidem demonstrare poffum per alias vias et per calculum imprimis differentialem impoffibilitatem quadraturae generalis, seu nullam poffe dari lineam algebraicam quadratricem circuli. Voco autem lineas Algebraicas, quas Cartefius Geometricas, et per quadratricas intelligo omnes quibus descriptis cujuslibet portionis circularis quadratura daretur. Sed modus inveniendi impoffibilitatem specialis cujusdam quadraturae, exempli caufa totius circuli, non nifi duplex mihi notus est, unus per calculum exponentium transcendentium, alter per novum quoddam genus calculi omnia complectentis, quod nemini hactenus ne per somnium quidem in mentem venit. Habes Historiam quarundam mearum meditationum . . . . . .

Aus dem Schreiben Leibnizens an den Marquis de l'Hospital.

1694.

Je reconnois que M. Barrow est allé bien avant, mais je puis vous aſſurer, Monsieur, que je n'ay tiré aucun secours pour mes methodes. Je ne connoiſſois au commencement que les indiviſibles de Cavalieri et les Ductus du P. Gregorie de S. Vincent avec la Synopsis Geometrica du P. Fabri et ce qui se peut tirer de ces auteurs ou leur semblables. Lorsque M. Hugens me presta les lettres de Dettonville ou de M. Pascal, j'examinay par hazard sa demonstration de la mesure de la superficie spherique et j'y trouvay une lumiere que l'auteur n'avoit point veue, car je remarquay generalement que par



la même raison, la perpendiculaire quelconque PC appliquée à l'axe ou transferée en BE donne une ligne FE telle que l'aire de la figure $FABEF$ fournit explanation de la surface faite par la rotation d'AE à l'entour d'AB. Mons. Hugens fut surpris quand je luy parlay de ce theoreme et m'avoua que c'estoit justement celuy dont il s'estoit servi pour la surface du conoide parabolique, mais comme cela me faisoit connoistre l'usage de ce que j'appelle le triangle caracteristique CFG composé des elemens des coordonnées et de la courbe, je trouvay comme dans un clin d'oeil presque tous les theoremes que je remarquay depuis chez Meſſieurs Gregory et Barrow sur ce sujet. Jusqu' alors je n'estois pas encor aſſez versé dans le calcul de M. des Cartes et ne me servois pas encor des equations pour expliquer la nature des lignes courbes, mais sur ce que M. Hugens m'en diſoit, je m'y mis et me n'en repentis point, car cela me donna moyen de trouver bientost mon calcul differentiel. Voicy comment. J'avois pris plaiſir long temps auparavant de chercher les sommes des series des nombres, et je m'estois servi pour cela des differences sur un theoreme aſſez connu qu'une serie decroiſſant à l'infini, son premier terme est egal à la somme de toutes les differences. Cela m'avoit donné ce que j'appellois le Triangle Harmonique, oppoſé au Triangle Arithmetique de M. Pascal, car M. Pascal avoit monstré comment on peut donner les sommes des nombres figurés, qui proviennent en cherchant les sommes et les sommes des sommes de la progreſſion arithmetique naturelle: et moy je trouvay que les fractions des nombres figurés sont les differences et les differences des differences etc. de la progreſſion harmonique naturelle (c'est à dire des fractions $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ etc.) et qu'ainſi on peut donner les sommes des series des fractions figurées, comme

$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$ etc. et $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}$ etc. Reconnoiſſant donc cette grande utilité des differences et voyant que par le calcul de M. des Cartes l'ordonnée de la courbe peut estre exprimée, je vis que trouver les quadratures ou les sommes des ordonnées n'est autre choſe que trouver une ordonnée (de la quadratrice) dont la difference est proportionnelle à l'ordonnée donnée. Je reconnus auſſi bientost que trouver les tangentes n'est autre choſe que differentier, et trouver les quadratures n'est autre choſe que sommer, pourvu qu'on ſuppoſe les differences incomparablement petites. Je vis auſſi que neceſſairement les grandeurs differentielles se trouvent hors de la fraction et hors du vinculum et qu'ainſi on peut donner les tangentes sans se mettre en peine des irrationnelles et des fractions. Et voila l'histoire de l'origine de ma methode. . . . . .

Die betreffende Stelle aus dem Briefe an Jacob Bernoulli im Jahre 1703 ist in der Abhandlung: Leibniz in London mitgetheilt.

In der Abhandlung: Historia et origo calculi differentialis, schreibt Leibniz in den letzten Lebensjahren Folgendes:

Reverſus ex Anglia in Galliam A. D. 1673 . . . . hortante Hugenio coepit (Leibnitius) tractare Analyſin Carteſii (antea vix eminus salutatam) et ut in Geometriam Quadraturarum introduceretur, Honorati Fabri Synopſin Geometricam, Gregorium a S. Vincentio et Dettonvillaei (id est Pascalii) libellum conſuluit. Porro ex uno quodam exemplo Dettonvillaei lux ei subito oborta est, quam ipſe Pascalius (quod mireris) inde non hauſerat. Nam dum ille demonstrat Theorema Archimedeum de superficie sphaerae aut ejus partium mensuranda, utitur methodo, qua omnis solidi rotatione circa axem aliquem descripti superficies ad proportionalem figuram planam revocari potest. Tale enim inde noster sibi paravit theorema generale: Rectae perpendicularis ad curvam portiones interceptae inter axem et curvam, ordinatim et normaliter applicatae ad axem, dant figuram momento curvae ex axe proportionalem. Id cum monstraſſet Hugenio, valde is probavit, faſſusque est, hujus ipſius theorematis ope se superficiem Conoidis parabolici aliarumque hujusmodi superficierum in opere de Horologio oscillatorio sine demonstatione poſitarum ante multos annos reperiſſe. His noster excitatus, animadverſa foecunditate harum meditationum, cum prius infinite parva tantum ut intervalla ordinatarum Cavalleriano more conſideraſſet, commentus est Triangulum, quod vocavit characteristicum . . . .

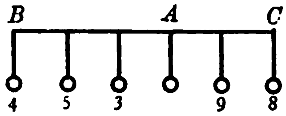
II.

Ex Dettonvillaeno (?) seu Pascalii Geometricis excerpta: cum additamentis.

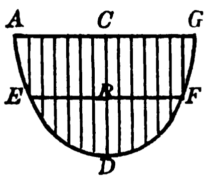
1	2	3	4
A	B	C	D
	B	C	D
		C	D
			D

Si quantitates sint A. B. C. D. summa eorum Triangularis incipiendo ab A est $1A$. $2B$. $3C$. $4D$.

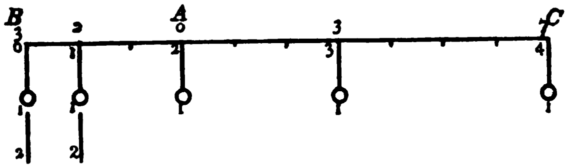
Recta quaecunque BC in partes aequales divisa quotcunque et ponderibus quibuscunque ex punctis divisionis suspensis aequalibus vel inaequalibus, sumtoque eorum puncto aequilibrii A, necesse est, summam Triangularem ponderum unius brachii



AB aequari summae Triangulari ponderum alterius brachii AC, incipiendo summam Triangularem utrobique a puncto interiore seu a latere A. Et ratio est, quia pondera gravant in composita ratione ex ratione ponderum et distantiarum a centro. Distantiae autem ob divisionem rectae seu jugi in partes aequales crescunt ut 1. 2. 3. etc. Haec Pascalius, quibus ego adjicio: etsi summae Triangulares ab utroque puncti latere non sint eaedem, seu etsi duo brachia non sint in aequilibrio, fore tamen semper momenta ad se invicem ut Triangulares; semper enim momenta sunt summis Triangularibus aequalia. Hinc regulam longe generaliorem: si sit recta BC quaecunque in partes aequales divisa, ponderibus onerata quibuscunque ex punctis divisionis suspensis, puncto quolibet divisionis assumto A, erunt momenta ponderum brachii BA unius ad momenta ponderum brachii alterius CA ut summae Triangulares incipiendo a pondere ipsi A proximo. Et cum figura qualibet, id est linea, superficie vel solido, ita locata, ut recta aliqua in ea assumta sit horizonti parallela, ista recta haberi potest pro libra, et omnia puncta aut rectae aut plana, punctis in recta assumtis horizontaliter supposita, seu in plana eorum punctorum horizonti perpendicularia incidentia, possunt haberi pro ponderibus, hinc si constet nobis de horum ponderum quantitate seu progressione, et per consequens de eorum summa Triangulari, hinc potest inveniri centrum aequilibrii non quidem in figura, attamen in recta figurae assumta. Centrum aequilibrii in ipsa figura ejus est naturae, ut recta per id transiens secet figuram in duas partes,



ita ut utrinque summae Triangulares punctorum, rectarum, solidorum horizontalium fiant aequales. Hinc centro gravitatis figurae totius reperto, centra gravitatis ejusmodi brachiorum extra figuram assumibilium haberi possunt; ponatur enim figura esse A, in qua centrum gravitatis B ponatur horizonti parallela et centrum gravitatis ejus super stylo horizontali locatum vel ex filo suspenſum intelligatur, manifestum est figuram fore in aequilibrio; at si in aequilibrio est, ergo recta CD ducta per centrum gravitatis eam figuram ita secabit, ut summae utrinque Triangulares sint aequales, si scilicet alia recta EF priori CD perpendicularis secta intelligatur in partes aequales infinitas per rectas infinitas ipſi CD parallelas, summa Triangularis rectangulorum infinitorum utrinque erit aequalis, quia ex praesuppoſitis ipſa EF velut libra rectangula velut pondera ex punctis diviſionis suspenſa judicari poſſunt (unde patet, pondera suspenſa non neceſſario horizonti perpendicularia intelligi debere, poſſe et eſſe parallela). His poſitis, mutetur situs figurae ex horizontali in perpendicularem fiatque libra AG, manifestum est punctum aequilibrii cadere in C, cum summae Triangulares rectangulorum ab utroque latere sunt ex hypotheſi aequales. Ergo dato centro gravitatis figurae cujusque, librae extra vel intra figuram aſſumtae, cui figura rigide affixa intelligitur, punctum aequilibrii haberi potest, si modo perpendicularis ex centro gravitatis ad libram ducatur, ea libram in puncto aequilibrii secabit. Contra si duarum librarum ejusdem figurae puncta aequilibrii dentur, inventum erit centrum gravitatis figurae (sive id sit extra sive intra figuram, cadit enim aliquando centrum gravitatis intra figuram (aliquando) ut in annularibus figuris, lineis curvis, aliisve incompletis) in puncto scilicet concurſus duarum perpendicularium ex duabus illis libris ad easdem partes ductarum, in eodem plano, ſi figura sit plana, aut ſi duae illae librae sint in eodem plano; quod ſi vero duae librae non sint in eodem plano, opus est tribus. Hoc examinandum. Imo sic potius; affigatur figura primum uni librae et planum per librae et horizonti perpendicularem ex puncto aequilibrii demiſſum figuram secet, postea affigatur alteri librae, et rurſus aliud planum demiſſum figuram secet, illorum duorum planorum intersectio dabit rectam, quae continebit centrum aequilibrii. Quodſi jam accedat tertia libra, seu tertium planum, punctum intersectionis omnium planorum seu punctum quo tertium planum lineam inventam secat, erit centrum aequilibrii. Quodſi autem figurae sunt planae, tunc sufficiunt duae librae duaeque perpendiculares, ergo etiam si sint lineae curvae in eodem plano manentes. Jam operae pretium est quaedam annotare de iis caſibus, in quibus libra non est secta in partes aequales; fieri enim potest, ut habeamus certo quodam modo summas ponderum earumque progreſſiones, sed ita ut ea librae applicata, eam dividat in partes inaequales; tunc investigenda progreſſio partium, in quas dividitur libra, ut ſi in partes continue crescentes ut quadrata aliterve dividatur. Ut ponamus pondera aequalia eſſe, libram autem dividi in partes



crescentes 1. 2. 3. 4. etc.; ut rem regula conplectamur, ita procedendum est. Ponatur punctum illud aequilibrii jam inventum et eſſe per exemplum 2, manifestum est a puncto illo 2 aſſumto velut centro, brachia fore numeris notanda, et punctum 1 notandum numero 2, punctum 0 numero 3, ab altero latere punctum 3 numero 3, punctum 4 numero 7, et jam ponderibus ſuppoſitis in suorum punctorum seu brachiorum numeros ductis neceſſe est productum fieri aequale; quodſi non ſit, aliud quaerendum est punctum (aut ponderibus aliquod addendum demendumve, ut hoc loco si pondera 2. 3 ponantur duplicata seu loco 1. 1. ipſis subscriptum 2. 2., utrobique eſſet aequilibrium 10). Sed ne opus sit ire per omnia puncta, compendium quaerendum eſſet; quodſi nullam certam progreſſionem servent partes librae et pondera, compendium erit impoſſibile; at ubi certa quaedam progreſſio haberi potest, tunc compendium inveniri potest, quatenus progreſſio illa patitur. Sed magna pars difficultatis ceſſat, quando omnia pondera intelliguntur aequalia. Imo inventa est regula Generalis simplex Pascalianae reciproca, nimirum punctum tale aſſumendum est, ut summa Triangularis numerorum utriusque lateris, semper incipiendo ab extremo usque ad medium sit aequalis . . . .

45. Kürzeste Linien im Farbensystem.

Von H. von Helmholtz.

(Vorgetragen am 17. December; — gedruckt im Bericht vom gleichen Tage [St. LIII]; — ausgegeben am 24. December.)

Wir wollen im Folgenden von einer geometrischen Darstellung des Farbensystems ausgehn, welche Lambert's Farbenpyramide entspricht, indem wir jede besondere Farbe als hergestellt durch die Vereinigung der passend abgemessenen Quanta dreier passend gewählter Grundfarben ansehen, und die Werthe dieser drei Quanta gleich setzen den drei positiven rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z. Dann ist jede Farbe durch einen Punkt innerhalb der dreikantigen Ecke vertreten, welche zwischen den positiven Coordinataxen eingeschlossen ist. Jede Ebene, welche die drei positiven Coordinataxen schneidet, kann dann als Farbentafel im Sinne der Newton'schen Anordnung der Farben gebraucht werden, indem die Quanta der verschiedenen Farben, wie sie in dieser Ebene vorkommen, als Einheitsquanta für die Abmessung der zu mischenden Farben entsprechender Art genommen werden. Innerhalb der Farbentafel findet man bekanntlich die Mischfarbe am Orte des Schwerpunkts der gemischten Farben und ihr Quantum ist der Summe der Quanta der gemischten Farben gleich zu setzen.

Wie Riemann gezeigt, lassen sich alle Eigenschaften einer besonderen Art des Raumes ableiten, wenn man den Werth der Entfernung zweier benachbarter Punkte durch die zugehörigen Differentiale der Coordinaten geben kann. Die Entfernung zweier Punkte eines festen Körpers aber ist eine Grösse, von der man verlangt, dass sie durch die Lage ihrer beiden Endpunkte vollkommen gegeben sei, und gleich bleibe bei allen möglichen Verschiebungen und Wendungen des festen Körpers, dem die Punkte angehören.

Die Farbenqualitäten sind nun Grössen, die dem Gebiet der Empfindungen angehören. Wenn eine der Entfernung analoge Grösse bei ihnen vorkommt, so muss dies ebenfalls ein in der Empfindung gegebenes Verhältniss sein, welches zwischen je zweien besteht, und durch die Beschaffenheit der zwei vollständig gegeben ist. In der That lässt sich ein solches entdecken, es ist nämlich die Deutlichkeit der Unterscheidung zwischen zwei nahestehenden Farben.

Einigermaassen bestimmte Angaben lassen sich über den Grad dieser Deutlichkeit freilich nur bei sehr kleinem Unterschiede der Farben machen, aber dies genügt in diesem Falle. Die ursprünglichen Versuche E. H. Weber's und Fechner's, welche zur Aufstellung des psychophysischen Gesetzes führten, bezogen sich allerdings nicht so wohl auf den Grad der Deutlichkeit, als vielmehr nur auf die Erkennbarkeit oder Nichterkennbarkeit des Unterschiedes. Aber die neueren Fortsetzungen dieser Messungen haben sowohl bei der Construction der Contrastphotometer als auch in den Versuchen von Hrn. Ebbinghaus über Abstufungen von Licht und Farbeneindrücken gelehrt, dass die Aussage darüber, ob von zwei sehr kleinen wahrnehmbaren Unterschieden der eine oder der andere grösser d. h. deutlicher sei, sogar noch bestimmter gegeben werden kann, als die früher geforderte Entscheidung über Sichtbarkeit oder Nichtsichtbarkeit.

Die Frage über die Deutlichkeit des Unterschiedes kann auch bei jeder beliebigen Art des letzteren gleich gut gestellt werden. Man kann sie ebenso gut in Bezug auf die Helligkeit qualitativ gleicher Farben, wie in Bezug auf den Farbenton gleich heller Lichter stellen, und beide miteinander vergleichen.

Ich habe nun in neuerer Zeit[1] versucht eine Formel aufzustellen, und mit den vorliegenden Beobachtungen zu vergleichen, welche, wenn sie sich weiter bestätigt, dieselbe Rolle für das Bereich der Farbenempfindungen spielen würde, wie die Formel für die Länge des Linienelements in der Geometrie. Ich habe darin versucht, den Grad der Deutlichkeit zweier Farben anzugeben, die sich gleichzeitig in den Quanten aller drei Grundfarben von einander unterscheiden, welche in ihre Zusammensetzung eingehn, also gleichzeitig sich in Helligkeit und in der Qualität unterscheiden können, während bisher nur diejenige Seite des Gesetzes durchgearbeitet war, welche sich auf Helligkeitsunterschiede allein, bei unveränderter Qualität bezieht.

Die auf Newton's Mischungsgesetz begründeten bisherigen Definitionen der Farben, definiren eigentlich nur diejenigen Mischungen objectiven Lichts, durch welche die besonderen einzelnen Empfindungen erregt werden können, und Newton's Gesetz selbst bestimmt nur die Verhältnisse der Aequivalenz verschiedener Mischungen objectiver Lichter in dieser Beziehung.

[1] H. v. Helmholtz, Versuch einer erweiterten Anwendung des Fechner'schen Gesetzes im Farbensystem. Zeitschrift für Psychologie und Physiologie d. Sinne v. Ebbinghaus u. König Bd. II. S. 1. 1891, und: Versuch das psychophysische Gesetz auf die Farbenunterschiede trichromatischer Augen anzuwenden, ebenda Bd. III. S. 1. 1891.

Auf dem hier einzuschlagenden neuen Wege würden wir dagegen zu einer Ausmessung des Systems der Farbenempfindungen gelangen, die nur auf die Unterschiede der Empfindungen gebaut ist. Dabei zeigt sich allerdings eine Übereinstimmung beider Arten der Ausmessung in den grossen Zügen, aber mit Vorbehalt kleinerer Differenzen in Einzelheiten, die auch schon zum Theil von den Beobachtern bemerkt waren.

Wie die Geometrie des Raumes mit dem Begriff der kürzesten Linie zwischen zwei Punkten beginnt, so werden wir durch die neue Grundformel in den Stand gesetzt, diejenigen Reihen von Übergangsfarben zwischen zwei gegebenen Endfarben von verschiedener Qualität und Quantität zu finden, für welche die Summe der wahrnehmbaren Unterschiede ein Minimum ist, welche Reihen also den kürzesten Linien im Farbensystem entsprechen würden. Ich werde mir erlauben für sie den Namen der kürzesten Farbenreihen zu brauchen.

Da eine vollständig genaue Formel für die Sichtbarkeit der reinen Helligkeitsunterschiede, wie sie annähernd Fechner's Gesetz gibt, noch nicht gefunden ist, will ich mich auf den Gebrauch der von Fechner selbst noch gegebenen späteren Formel beschränken, wonach die Deutlichkeit des Unterschiedes von dem Bruche $\frac{dJ}{A+J}$ abhängt, wenn J und $(J + dJ)$ die beiden zu vergleichenden objectiven Lichtmengen sind, A eine von der Qualität des Lichts abhängige Constante. Diese Formel entspricht den Beobachtungen in einem ausserordentlich ausgedehnten Theil der Scala der Helligkeiten. Für sehr kleine und sehr grosse Helligkeiten ist die Deutlichkeit aber etwas kleiner, als nach der Formel zu erwarten wäre.

Die von mir als wahrscheinliche Hypothese aufgestellte Formel für die Deutlichkeit des Unterschiedes zweier Farben, von denen die eine aus den Quantis der Urfarben x, y, z zusammengesetzt ist, die andere dagegen aus $(x + dx)$, $(y + dy)$, $(z + dz)$ lautet:

$$dE^2 = \left(\frac{dx}{a+x}\right)^2 + \left(\frac{dy}{b+y}\right)^2 + \left(\frac{dz}{c+z}\right)^2 \quad \ldots\ldots \Big\} \; 1.$$

Hierbei ist aber zu bemerken, dass die x, y, z den physiologischen Urfarben entsprechen müssen, und nicht, wie im Mischungsgesetz durch lineare Functionen derselben ersetzt werden können. In meiner letzten Arbeit[1] habe ich aus den von Hrn. Arthur König gemachten Messungen über die kleinsten wahrnehmbaren Unterschiede der Spec-

[1] Versuch das psychophysische Gesetz auf die Farbenunterschiede trichromatischer Augen anzuwenden in Zeitschr. für Psychologie u. Physiologie d. Sinnesorgane Bd. III. S. 10—12.

tralfarben einerseits, und der Zusammensetzung derselben aus drei willkürlich gewählten Grundfarben andererseits die Qualität der physiologischen Urfarben zu bestimmen gesucht. Diese Bestimmungen sind allerdings noch nicht sehr zuverlässig. Es ergibt sich, dass alle Spectralfarben, auch die Endfarben am rothen und violetten Ende ziemlich starke Quanta von allen drei Urfarben enthalten, dass diese letzteren im Farbenton etwa dem Carminroth, Ultramarinblau und dem Blattgrün entsprechen, aber erheblich gesättigter sein müssen, als diese.

Wenn man in Gleichung (1) andere Variabeln einführt, und setzt:

$$\left.\begin{array}{l} \log(a+x) = \xi \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \log(b+y) = \eta \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \log(c+z) = \zeta \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} 1^a.$$

so kann man die Gleichung (1) auch schreiben

$$dE^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2.$$

Construirt man also eine Farbenecke, in der man nicht mehr x, y, z sondern ξ, η, ζ als Coordinaten braucht, so wäre das dE direct proportional dem Linienelement zwischen den beiden durch ξ, η, ζ und $(\xi + d\xi)$, $(\eta + d\eta)$, $(\zeta + d\zeta)$ gegebenen Punkten. In diesem letzteren Coordinatensystem würden sämmtliche kürzeste Farbenreihen durch gerade Linien dargestellt werden müssen, die aber beim Übergang in das ursprüngliche Coordinatensystem der x, y, z im Allgemeinen gekrümmt werden würden.

Wenn wir den einen Endpunkt der Farbenreihe mit dem Index (1) bezeichnen, den andern mit (2), so würde man die Gleichung einer geraden Linie im Coordinatensystem der ξ, η, ζ auf die Form bringen können:

$$\left.\frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{\eta - \eta_1}{\eta_2 - \eta_1} = \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_2 - \zeta_1} \ldots\ldots\ldots\ldots \right\} 2.$$

Um die Gleichung dieser Linie in den x, y, z ausdrücken zu können, setzen wir zunächst zur kürzeren Bezeichnung:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \log \cdot \left[\dfrac{a + x_2}{a + x_1}\right] = \xi_2 - \xi_1 \ldots\ldots\ldots \\ \mu = \log \cdot \left[\dfrac{b + y_2}{b + y_1}\right] = \eta_2 - \eta_1 \ldots\ldots\ldots \\ \nu = \log \cdot \left[\dfrac{c + z_2}{c + z_1}\right] = \zeta_2 - \zeta_1 \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} 2^a.$$

Dann werden die Gleichungen (2):

$$\left.\left(\frac{a+x}{a+x_1}\right)^{\lambda} = \left(\frac{b+y}{b+y_1}\right)^{\mu} = \left(\frac{c+z}{c+z_1}\right)^{\nu} \ldots\ldots\ldots \right\} 2^b.$$

Wenn von den sechs Grössen, die in den Gleichungen 2^a unter dem Logarithmenzeichen vorkommen nicht je zwei im Nenner, oder je zwei im Zähler gleich Null werden, haben die Grössen λ, μ, ν endliche reelle positive oder negative Werthe, und die Punkte der Linie sind eindeutig bestimmt, da ihre Coordinaten nur positiv reell sein können. Da nun a, b, c (Farbencomponenten des Eigenlichts im Sinne von Fechner's Auffassung) nur positive Werthe haben können, und x, y, z für reelle Farben ebenfalls, so kommt für reelle Farben die oben bemerkte Ausnahme niemals vor, und zwischen jedem Paare von Punkten des reellen Farbengebiets gibt es also nur eine kürzeste Farbenlinie.

Da indessen die Punkte, in denen zwei von den Grössen $(a + x)$, $(b + y)$ und $(c + z)$ gleich Null werden, eine besondere Rolle bei den Constructionen spielen, mache ich hier darauf aufmerksam, dass alle drei Grössen gleich Null gesetzt den Nullpunkt allen Lichtes, Eigenlicht und objectives Licht zusammengenommen, bezeichnen, und wir diesen Punkt deshalb im Folgenden mit (o) bezeichnen wollen. Wenn nur zwei der genannten Grössen gleich Null sind, sind dadurch die Parallelen zu den Coordinataxen gegeben, welche durch den Punkt (o) gehen. Wenn von einem Punkte dieser Linien aus kürzeste Farbenreihen nach einem anderen festen Punkte zu construiren sind, so sind diese durch ihre Endpunkte nicht vollständig gegeben, sondern können in unendlicher Anzahl construirt werden.

Ebene Curven. Eben werden Curven, für welche einer der Exponenten λ, μ oder ν gleich Null ist, oder zwei derselben einander gleich.

Im ersteren Falle erhalten die drei Grössen, welche in 2_c einander gleichgesetzt sind, alle den Werth 1, was, wenn $\lambda = 0$, folgern lässt

$$b + y = b + y_1$$
$$c + z = c + z_1$$

d. h. die betreffenden kürzesten Farbenreihen liegen auf geraden Linien der x-Axe parallel.

Die Annahme $\mu = 0$ gibt eben solche Gerade der y-Axe parallel, und $\nu = 0$ der z-Axe parallel. Dieselben können übrigens durch jeden Punkt der Farbenpyramide gezogen werden.

Im zweiten Falle, wo zwei Exponenten einander gleich, erhalten wir entweder

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a + x_1}{a + x_2} = \frac{b + y_1}{b + y_2} \\ \text{oder}\quad &\frac{b + y_1}{b + y_2} = \frac{c + z_1}{c + z_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{oder}\quad &\frac{c + z_1}{c + z_2} = \frac{a + x_1}{a + x_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} 2^d.$$

Bezeichnen wir wieder den Punkt, dessen Coordinaten $(-a)$, $(-b)$, $(-c)$ sind, d. h. in welchen alle Lichtempfindung fehlt, auch die des Eigenlichts, mit dem Index 0, den Punkt $x = y = z = 0$, wo nur die Empfindung des Eigenlichts da ist, mit ε, so sagt die erste unserer Gleichungen aus, dass die Punkte 0, 1, 2, projicirt auf die xy-Ebene in gerader Linie liegen. Die Curve liegt also in einer Ebene, die der z-Axe parallel ist, und durch den Punkt 0, sowie die beiden Endpunkte der Curve geht.

Die zweite der Gleichungen 2^d würde sich auf solche Ebenen beziehen, die der x-Axe parallel durch den Punkt 0 gehen, die dritte auf Ebenen, die der y-Axe parallel durch denselben Punkt gehen.

Je zwei dieser Ebenen schneiden sich in geraden Linien, die dann nothwendig hinreichend verlängert durch den Punkt 0 gehen, und kürzesten Farbenreihen entsprechen.

Dagegen werden die Linien, welche gleicher Qualität des objectiven Lichts entsprechen, verlängert durch den Punkt ε gehen, wo $x = y = z = 0$. Nur eine von diesen, die gleichzeitig durch ε und 0 geht, wird einer kürzesten Farbenreihe entsprechen.

Nun liegt es im Wesen einer kürzesten Farbenreihe, dass unter solchen Farben, die von der einen Endfarbe gleich grossen Unterschied zeigen, die in der kürzesten Farbenreihe liegenden auch der andern Endfarbe ähnlicher als alle anderen benachbarten Farben erscheinen werden.

Fällt die Reihe der Farben gleicher Mischung mit der kürzesten Reihe zusammen, so werden ihre Glieder auch beim Übergang von schwacher zu hoher Lichtstärke keine Abweichung des Farbentons zeigen. Wohl aber wird dies der Fall sein, wenn die erstere Reihe keine kürzeste ist. Denn dann würde es Farben geben von anderer Mischung, durch welche man einen kürzeren Übergang von den dunkelsten zu den hellsten Tönen gleicher objectiver Qualität bahnen könnte.

Nun kommen in der That solche Unterschiede vor. Ich habe schon in meinen älteren Arbeiten[1] über Spectralfarben erwähnt, dass sie bei steigender Helligkeit alle dem Weiss, beziehlich Gelbweiss ähnlicher werden. Am schnellsten geht bei steigender Lichtstärke Grün in Gelb, Violett in Weissblau über. Höhere Helligkeiten sind nöthig, um spectrales Roth in Gelb und Blau in Weiss überzuführen. Es gibt nur eine Farbe, nämlich Gelbweiss, welche bei allen Intensitäten

[1] S. mein Handbuch d. Physiol. Optik neue Aufl. S. 284. S. auch H. Helmholtz »über die Theorie der zusammengesetzten Farben« in Poggd. Ann. Bd. LXXXVII. S. 45. 1852 und »über die Zusammensetzung von Spectralfarben« ebenda Bd. XCIV. S. 11 und 13.

merklich unverändert bleibt. Wir würden daraus zu schliessen haben, dass Gelbweiss dem Farbenton der geraden Linie entspricht, die durch die Punkte (o) und (ε) unseres Coordinatensystems geht. Wir wollen diese für unser heut vorliegendes Thema, als die Principallinie des Farbensystems bezeichnen. Im Sinne von Fechner's Hypothese wäre sie die Farbe des Eigenlichts der Netzhaut.

Nehmen wir dagegen eine andere Farbe z. B. Grün, welches bei Steigerung der Intensität und unveränderter Mischung, gelb wird. Offenbar müssten wir ein gesättigteres Grün höherer Helligkeit herzustellen versuchen, um unsere Farbenreihe mit dem dem unteren Ende ähnlichsten Farbentone abzuschliessen, d. h. wir müssten zu einer anderen Farbenmischung übergehen, um in einer Reihe möglichst wenig unterschiedener Farbentöne zu bleiben.

Gekrümmte Projectionslinien. Wenn wir von den drei in Gleichung (2^c) einander gleichgesetzten Grössen zwei, die nicht gleiche Exponenten haben, einander gleichsetzen, so sind die Curven verschieden, je nach dem die beiden Exponenten gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben.

A. Curven durch den Punkt o.

Im ersteren Falle, wenn z. B. die beiden Exponenten λ und μ gleiches Zeichen haben, würde $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$ positiv sein, und die Curve

$$\frac{a+x}{a+x_1} = \left(\frac{b+y}{b+y_1}\right)^{\frac{\mu}{\lambda}}$$

würde durch den Punkt o gehen, da dort $a + x = b + y = 0$ ist. Ist dabei $\frac{\mu}{\lambda} > 1$, so würde $(a + x)$ schneller steigen als $(b + y)$ die Curve ihre convexe Seite der Linie $b + y = 0$ zukehren.

Umgekehrt ist $\frac{\mu}{\lambda} < 1$, so würde die Curve ihre convexe Seite der Linie $a + x = 0$ zukehren.

Wenn wir die Punkte (1) und (2) sehr nahe an einander liegend wählen, und ihre Abstände als kleine Grössen behandeln

$$x_2 - x_1 = dx$$
$$y_2 - y_1 = dy$$
$$z_2 - z_1 = dz,$$

so wird

$$\lambda = -\frac{dx}{a + x_1}$$

$$\mu = -\frac{dy}{b + y_1}$$

$$\nu = -\frac{dz}{c + z_1};$$

schreiben wir dann

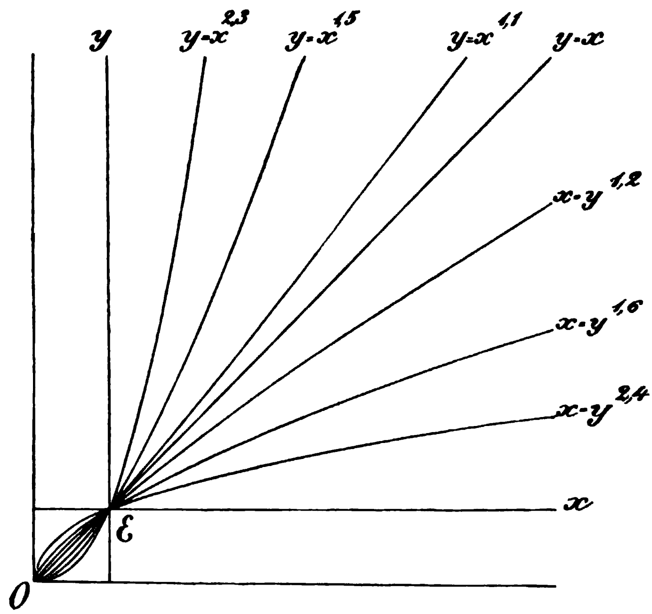
$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{tg} \phi$$

$$\frac{a + x_1}{b + y_1} = \operatorname{tg} f$$

so wird

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{\operatorname{tg} \phi}{\operatorname{tg} f}$$

Daraus ergibt sich, dass $\frac{\lambda}{\mu} > 1$ wenn $\operatorname{tg} \phi > \operatorname{tg} f$ oder $\phi > f$ d. h. wenn im Punkte 1 die Tangente der Curve einen grösseren Winkel mit der positiven y-Axe macht, als die Gerade (0, 1). Umgekehrt wenn $\frac{\mu}{\lambda} > 1$. Der entferntere Theil aller dieser Curven (1, ∞) ist convex, das Stück (0, 1) derselben dagegen concav gegen die Gerade (0, 1).



Die Grenze dieses Büschels von Curven sind die, wo $\frac{\mu}{\lambda} = 0$ oder $= \infty$. Es sind dies die schon oben erwähnten geraden Linien gezogen durch den Punkt 1, parallel den Axen der x und der y.

Die Fig. 1 stellt ein Bündel solcher Curven dar, welche alle durch denselben Punkt ε gehen und verschiedene Exponenten haben, deren Werthe (1 bis 2,4) am Rande angegeben sind.

B. Projections-Curven mit zwei Asymptoten.

Wenn die beiden Exponenten der Gleichung entgegengesetztes Zeichen haben, so können wir setzen

$$\frac{\mu}{\lambda} = -\rho.$$

Dann ist ρ eine positive Grösse und es wird

$$\frac{a+x}{a+x_1} = \left(\frac{b+y}{b+y_1}\right)^{-\varrho}.$$

Also wird für $a+x=0$ das $b+y=\infty$, und für $a+x=\infty$ das $b+y=0$ d. h. die durch den Punkt o den Coordinataxen parallel gezogenen Linien sind Asymptoten für die Curve, welche hyperbelähnlich mit zwei Enden in das Unendliche läuft. Aber diese in ∞ laufenden Enden der Curven liegen ausserhalb des Farbenfeldes, selbst ausserhalb des physiologisch möglichen, da dieses durch zwei gerade Linien begrenzt ist, die parallel den x und den y durch den Punkt ε gelegt sind. Das spectrale Farbenfeld ist noch enger durch einen spitzen Winkel begrenzt, dessen Scheitel ebenfalls im Punkte ε liegt, so dass von diesen hyperbelähnlichen Curven nur sehr kurze, fast gerade Stücke für kleine Lichtintensitäten, längere und gekrümmtere nur für grosse Intensitäten in Betracht kommen.

Wenn die oben mit ρ bezeichnete Constante den Werth $\rho = 1$ hat, so ist die Curve eine gleichseitige Hyperbel im strengen Sinne.

Da entweder zwei oder gar keines der Verhältnisse zwischen den Exponenten negativ ist, so können entweder zwei oder keine der Projectionscurven die hyperbelähnliche Form mit zwei Asymptoten haben. Eine von ihnen oder alle drei haben die parabelähnliche Form, und gehen durch den Punkt (o).

Farbenunterschiede bei gleicher Qualität und verschiedener Helligkeit. Die kürzesten Farbenreihen, welche durch den Punkt ε gehen, der dem Mangel alles objectiven Lichtes entspricht, geben drei parabelähnliche Projectionen, welche auch durch den Punkt (o) gehen wie Fig. 1 zeigt.

In der Mitte des Bündels liegt die als Principallinie bezeichnete Gerade, welche durch (o) und (ε) geht und die einzige Linie bildet, welche gleichzeitig einer kürzesten Farbenreihe und gleichbleibender objectiver Qualität der Farbe (gleichem Mischungsverhältnisse) entspricht.

In den drei Ebenen, welche durch diese Linie und die Coordinataxen gehen, liegen ebene Curven, welche der Principallinie ihre convexen Seiten zukehren.

Um Farben dieser Ebenen objectiv herzustellen, würde man entweder einzelne Urfarben mit der Principalfarbe zu mischen haben, oder solche Farben, die mit der entsprechenden Urfarbe gemischt die Principalfarbe geben. Ich will die letzteren principale Gegenfarben nennen. Sind Carminroth, Ultramarinblau und Blattgrün im Farbenton den Urfarben entsprechend, und Gelb die Principalfarbe, so wären etwa Spangrün, Gelb und Purpur die principalen Gegenfarben. Von sämmtlichen Mischungen aller sechs Farben mit dem principalen Gelbweiss würde zu erwarten sein, dass sie alle innerhalb der Reihe der Farbentöne bleiben, welche die entsprechenden Mischungen hervorbringen können, und nur das Verhältniss würde geändert erscheinen, indem die lichtschwachen Farben dieser Art gesättigter erscheinen würden, als die gleich zusammengesetzten lichtstarken; da die lichtstarken, die in derselben Farbencurve liegen, in der That sich dem Umfange der Farbenpyramide nähern, wo die gesättigteren Farben liegen.

So werden also lichtschwaches Ultramarin und Gelb einem lichtstarken weisslicheren Blau und Gelb entsprechen müssen. Die Zumischung von Weiss zum Blau wird relativ stärker sein als die zum Gelb, weil der gelbe Bestandtheil der Principalfarbe etwas Blau wegnimmt, und dafür noch etwas Weiss bildet, dem Gelb aber sich einfach hinzufügt.

Dagegen werden schwaches Urroth bis Purpur einerseits und Blattgrün bis Spangrün andererseits ihre entsprechenden lichtstarken Farben in etwas weisslicheren und gelblicheren Mischungen finden.

Dieses Gelblichwerden der rothen und grünen Farbentöne bei hoher Lichtstärke, das Weisswerden des Blau sind schon oben erwähnt.

E. Brücke's Gesetz. Die Spectralfarben sind im Allgemeinen einer Urfarbe oder Mischungen aus je zweien solchen sehr nahe in ihrem Farbentone. Wenn man die letzteren auf die Ebene der beiden Urfarben projicirt denkt, so werden kürzeste Farbenreihen, die in bestimmter Richtung vom Punkte (ε), dem Punkte der objectiven

Dunkelheit, auslaufen, wie in Fig. 1, alle convex gegen die Projection der Principallinie sein, und also im ferneren Verlaufe sich derjenigen Urfarbe nähern, von der sie durch die Principallinie nicht getrennt sind. Es werden also lichtschwache Farben, die der Mischung zweier Urfarben entsprechen, der auf gleicher Seite der Gegenfarbe liegenden Urfarbe sich nähern, wenn man nach den ähnlichsten gesättigteren lichtstärkeren Farben sucht.

Dies führt uns auf eine von E. Brücke[1] im Jahre 1878, Febr. 28., beschriebene Erscheinung. Er hat nämlich gefunden, dass aus einem gut gereinigten Spectrum von mässiger Länge, in dem man aber die stärkeren Fraunhofer'schen Linien noch gut sehen kann, bei allmäliger Abschwächung die gelben und die cyanblauen Farbentöne ganz verschwinden, und dass zwischen ihnen schliesslich nur drei Farben, Roth, Grün und Violettblau stehen bleiben. Der genannte Autor hat damals auch schon den Schluss gezogen, dass die genannten drei Farben die physiologischen Grundfarben sein müssen, indem er diejenigen Empfindungselemente einer gemischten Empfindung, die die Reizschwelle nicht überschreiten als unwirksam auch in der gemischten Empfindung betrachtet. Es ist dies eine Betrachtungsweise, die der hier eingeschlagenen wesentlich verwandt ist.

Mischungen mit Weiss. Ähnliche Abweichungen, wie die bisher besprochenen zwischen dem Farbentone einer lichtschwachen und lichtstarken Farbe von gleicher objectiver Qualität kommen auch zwischen denen einer isolirten gesättigten Farbe und deren Mischung mit sehr vielem Weiss vor.

Wenn Weiss und eine Mischung dieses Weiss mit einer kleinen Menge einer Spectralfarbe als gegeben nach ihrem Orte in der Farbenpyramide angesehen werden, so lässt sich die kürzeste Farbenreihe, die durch die beiden Punkte führt construiren. Diese wird gegen einen Theil der Oberfläche der Farbenpyramide hin gerichtet sein, an der die gesättigten Farben derselben Reihe liegen, als deren stark mit Weiss verdünnte Modification die gegebene Mischung erscheint.

Dabei ist zu bemerken, dass wenn man zu dem Weiss reine Urfarben hinzumischen könnte, die Verbindungslinie beider eine der entsprechenden Coordinataxe parallele Gerade werden würde, welche selbst eine kürzeste Farbenreihe ist und ihre Richtung nicht ändert. Die kürzeste Farbenreihe würde also mit der Mischungsreihe zusammenfallen, und keinerlei Farbenmischung entstehen.

[1] E. Brücke, über einige Empfindungen im Gebiete des Sehnerven. Wiener Sitzungsber. Abth. III. Bd. LXXVII.

Da aber die Spectralfarben immer als zusammengesetzte Farben anzusehen sind, in denen nur eine oder zwei der Urfarben merkliches Übergewicht haben, so werden dadurch Krümmungen der kürzesten Farbenreihen möglich.

Um die Form der betreffenden Farbenreihe vollständig übersehen zu können, wird man sich im Allgemeinen je zwei Projectionen auf Grenzflächen der Farbenpyramide entwerfen müssen.

Das Curvenbündel der Fig. 1 würde auch bei etwas abgeänderten Verhältnissen seinen Charakter behalten. Deuten wir es jetzt so, dass wir den Punkt ε als die Projection des Weiss auf eine der Coordinatebenen betrachten; εx sei die Coordinatrichtung für die eine Grundfarbe, die zum Weiss hinzugethan werden kann, εy für die andere. Beide Linien entsprechen kürzesten Farbenreihen. Dann wird noch die mit $y = x$ bezeichnete Grade sehr nahehin wenigstens eine kürzeste Farbenlinie sein. Die Gleichung der letzteren, die in diese Richtung fällt, würde allerdings streng genommen, nicht $x = y$, sondern $a + x = b + y$ sein. Wenn aber die Coordinaten des Weiss so gross sind, dass die des Eigenlichts a, b dagegen verschwinden, wird der Unterschied unerheblich.

Nun sieht man, dass alle Curven, welche zwischen εx und $y = x$ liegen concav gegen x, die anderen concav gegen y sind. Verfolgt man sie von E aus, so nähern sie sich im Fortlauf der näheren Grundfarbe, und weisen auf gesättigtere Abstufungen von dieser hin. Wenn wir also die Art der eingemischten Farbe nach den ähnlichsten, vom Weiss weniger überdeckten Farbentönen beurtheilen, werden wir die Einmischung für ähnlicher der reinen Urfarbe x halten.

Spectrales Roth kann nach meinen neueren Bestimmungen als Urroth mit überwiegend grünlicher Einmischung betrachtet werden. In der Mischung mit Weiss würde das Grünliche mehr zurücktreten, die Farbe dem Urroth näher, also mehr rosenroth erscheinen, was in der That der Fall ist, und schon früher von Hrn. E. Hering angeführt wurde.

Violett, was aus gleichen Quantis Urroth und Urblau zusammengesetzt wäre, würde in der Projection auf die Blauroth-Ebene mit der Projection des Weiss fast dieselbe Richtung haben, und seine kürzeste Farbenreihe fast geradlinig sein. Es käme bei spectralem Violett nur in Betracht, dass es noch eine Einmischung von Grün hat, die in der Grünroth-Ebene, wie in der Grünblau-Ebene gegen das überwiegende Roth, bezüglich Blau mit steigender Entfernung vom Weiss schwinden würde. Dadurch würde die Farbe dem Complement des Grün, rosenroth ähnlicher gemacht.

Geht man zu bläulicheren violetten Einmischungen über, so würde neben dem stärkeren Blau der rothe Bestandtheil des Violett zu schwinden anfangen, was anfangs noch durch das stärkere Schwinden des Grüns compensirt würde. Ich fand, dass zwischen $\lambda = 450\,\mu$ bis $\lambda = 430\,\mu$ der Zusatz des spectralen Blau dem Weiss eine ziemlich deutlich rosenrothe Färbung gab; erst bei $\lambda = 470$ schwand dieser röthliche Ton.

Eine andere Reihe von scheinbaren Veränderungen der Farbe zeigt sich bei den kleinsten Lichtstärken, wo das letzte noch sichtbare Licht keine Farbenunterschiede mehr zeigt, sondern grau erscheint. Es ererklärt sich das nach der aufgestellten Theorie dadurch, dass zur Unterscheidung der Helligkeit nur die ganze vorhandene Lichtmenge von absoluter Dunkelheit unterschieden werden muss. Zur Unterscheidung einer kleinen Menge Weiss von einem farbigen Licht, müssen dagegen Verhältnisse von Lichtmengen zweier Grundfarben von einander unterschieden werden. So ist also z. B. nach meinen letzten Berechnungen in dem Quantum = 1 enthalten nach Einheiten gleichen Farbenwerthes gemessen:

	von spectralem Roth	von Weiss
Roth	0.6093	0.3333
Grün	0.1998	0.3333
Blau	0.1913	0.3333

Die Unterscheidung der beiden Farben setzt voraus, dass die Verhältnisse der horizontal neben einander stehendenden Zahlen vom Verhältniss 1 : 1 unterschieden werden können. Nach der Tabelle der HH. König und Brodhun[1] würde dies eine dort mit 0.02 bezeichnete Lichtstärke verlangen, während bei der Helligkeit 0.00072, die fast 30 mal kleiner ist, noch Licht von Dunkelheit unterschieden wird.

Es fügt sich also das ganze Gebiet dieser scheinbar unregelmässigen Erscheinungen leicht unter die erweiterte Formulirung des Fechner'schen Gesetzes.

[1] Sitzungsber. 27. Juni 1889. S. 643.

46. Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Function einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Product aus linearen Functionen derselben Veränderlichen.[1]

Von K. WEIERSTRASS.

(Vorgetragen am 21. Februar 1889; — gedruckt im Bericht vom 17. December 1891 [St. LIII]; — ausgegeben am 24. December.)

Obgleich wir gegenwärtig von dem in Rede stehenden Fundamentaltheoreme der Algebra eine Reihe strenger Beweise besitzen, so dürfte doch die Mittheilung der nachstehenden Begründung desselben, deren Eigenthümlichkeit hauptsächlich darin besteht, dass sie ohne Heranziehung von Hülfsmitteln und Begriffen, die der Algebra fremd sind, rein arithmetisch durchgeführt wird, vielen Mathematikern nicht unwillkommen sein.

1.

Bezeichnet man, unter $x, x_1, \ldots x_n$ unbestimmte Grössen verstehend, mit

$$(x_1, \ldots x_n)_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

die ganze Function von $x_1, \ldots x_n$, welche in der nach Potenzen von x ausgeführten Entwickelung des Products

$$(x - x_1) \ldots (x - x_n)$$

den Coefficienten von $x^{n-\nu}$ bildet, so lässt sich das Theorem, um das es sich handelt, folgendermaassen aussprechen:

[1] Ich habe bereits vor Jahren (vergl. die Monatsberichte v. J. 1859, S. 758, und v. J. 1868, S. 428) der Akademie einen Beweis dieses Satzes vorgelegt, der auf demselben Grundgedanken, wie der gegenwärtig mitgetheilte, beruhte, für mich aber aus dem Grunde, dass er nicht ganz frei von Stetigkeitsbetrachtungen war, etwas Unbefriedigendes hatte und deshalb nicht veröffentlicht worden ist.

Sind $C_1, \dots C_n$ irgend n gegebene Grössen, so existirt stets ein System bestimmter Werthe der Grössen $x_1, \dots x_n$, für welches die n Gleichungen

$$1. \qquad (x_1, \dots x_n)_\nu = C_\nu \qquad (\nu = 1, \dots n)$$

bestehen und somit, wenn

$$2. \qquad f(x) = x^n + C_1 x^{n-1} + \cdots + C_n$$

gesetzt wird, für jeden Werth von x

$$3. \qquad f(x) = \Pi_\nu (x - x_\nu) \qquad (\nu = 1, \dots n)$$

ist.

Der so formulirte Satz soll nun auf directeste Weise begründet werden durch Entwickelung eines Verfahrens, mittels dessen man, wenn $C_1, \dots C_n$ numerisch gegeben sind, n Zahlgrössen, die für $x_1, \dots x_n$ gesetzt die Gleichungen (1.) befriedigen, mit Sicherheit berechnen kann, und zwar ohne dass zuvor die Existenz solcher Grössen bewiesen zu sein braucht.

Es werde zunächst der (allgemeine) Fall betrachtet, wo die gegebene Function $f(x)$ und deren erste Derivirte keinen gemeinsamen Theiler besitzen, also die Discrimante[1] von $f(x)$ einen von Null verschiedenen Werth hat. Das Letztere gilt dann auch für jede Function

$$4. \qquad \phi(x) = x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n,$$

deren Coefficienten $(A_1, \dots A_n)$ so angenommen werden, dass jede der Differenzen

$$C_1 - A_1, \dots C_n - A_n$$

ihrem absoluten Betrage nach unter einer gewissen Grenze liegt. Um hierüber etwas Genaueres festzustellen, setze man

$$A_1 = C_1 - h_1, \dots A_n = C_n - h_n,$$

dann wird, wenn man die Discriminante der Function $\phi(x)$ mit

$$\Delta(A_1, \dots A_n)$$

bezeichnet,

$$5. \qquad \Delta(A_1, \dots A_n) = \Delta(C_1, \dots C_n) - \{h_1, \dots h_n, C_1, \dots C_n\},$$

wo der eingeklammerte Ausdruck dargestellt werden kann als eine Summe, in der jedes einzelne Glied ein Product aus ganzen positiven Potenzen der Grössen $h_1, \dots h_n$, $C_1, \dots C_n$ und einer (positiven oder negativen) Zahl ist. In jedem Gliede, wo diese Zahl negativ ist, verwandle man sie in die ihr entgegengesetzte positive; der Ausdruck,

[1] D. h. die Resultante der Functionen $f'(x)$, $f(x)$.

in den $\{h_1, \dots h_n, C_1, \dots C_n\}$ dadurch übergeht, werde mit

$$[h_1, \dots h_n, C_1, \dots C_n]$$

bezeichnet. Nimmt man sodann n positive Grössen $\overline{C}_1, \dots \overline{C}_n$ so an, dass die Bedingungen

$$6. \qquad |C_1| < \overline{C}_1, \dots |C_n| < \overline{C}_n$$

erfüllt werden, und ersetzt in dem vorstehenden Ausdrucke die Grössen $C_1, \dots C_n$ beziehlich durch $\overline{C}_1, \dots \overline{C}_n$, jede der Grössen $h_1, \dots h_n$ aber durch ein und dieselbe positive Grösse h, so ist

$$|\{h_1, \dots h_n, C_1, \dots C_n\}| \text{ stets kleiner als } [h, \dots h, \overline{C}_1, \dots \overline{C}_n],$$

wenn die absoluten Beträge von $h_1, \dots h_n$ sämmtlich kleiner als h sind. Es ist aber $[h, \dots h, \overline{C}_1, \dots \overline{C}_n]$, wofür jetzt kürzer $[h]$ geschrieben werde, eine ganze Function von h mit lauter positiven Coefficienten und ohne ein von h unabhängiges Glied; man kann also eine positive Grösse h_0 so bestimmen, dass für jeden Werth von h, der die Grenze h_0 nicht übersteigt, $[h]$ kleiner ist als eine willkürlich angenommene Grösse.

Nun sei D^* irgend eine positive Grösse, die kleiner ist als der absolute Betrag der Discriminante $\Delta(C_1, \dots C_n)$, und Δ_0 eine andere, die $< D^*$; dann kann man h_0 so annehmen, dass

$$7. \qquad \Delta_0 + [h_0] \leqq D^*$$

ist. Hieraus und aus Gleichung (5.) folgt nun

$$|\Delta(A_1, \dots A_n)| > D^* - [h_0],$$

wenn die absoluten Beträge der Differenzen $C_1 - A_1, \dots C_n - A_n$ sämmtlich kleiner als h_0 sind. Da nun $D^* - [h_0] = \Delta_0 + (D^* - \Delta_0 - [h_0])$ und $D^* - \Delta_0 - [h_0]$ nicht negativ ist, so ergibt sich

$$8. \qquad |\Delta(A_1, \dots A_n)| > \Delta_0$$

für jedes den Bedingungen

$$9. \qquad |C_1 - A_1| < h_0, \dots |C_n - A_n| < h_0$$

entsprechende Werthsystem $(A_1, \dots A_n)$.

Angenommen nun, man habe, nachdem ein der Bedingung (7.) genügendes Grössenpaar h_0, Δ_0 fixirt worden, ein System von n bestimmten Zahlgrössen $a_1, \dots a_n$ ermittelt, für welches, wenn

$$10. \qquad A_\nu = (a_1, \dots a_n)_\nu \qquad (\nu = 1, \dots n)$$

gesetzt wird, die Bedingungen (9.) erfüllt werden. Dann ist

$$|A_\nu| \leqq |C_\nu| + h_0, \qquad (\nu = 1, \dots n)$$

also sicher

$$|A_\nu| < \overline{C}_\nu + h_0,$$

und daher für jeden Werth der Veränderlichen x

$$\left|\sum_\nu \frac{A_\nu}{x^\nu}\right| < \sum_\nu \frac{\overline{C}_\nu + h_0}{|x|^\nu}.$$

Nimmt man also eine positive Grösse α so an, dass

11. $$\sum_\nu \frac{\overline{C}_\nu + h_0}{\alpha^\nu} \leq 1,$$

so hat man für jeden Werth von x, dessen absoluter Betrag grösser oder eben so gross als α ist,

$$\left|\sum_\nu \frac{A_\nu}{x^\nu}\right| < 1,$$

also, wenn

$$\phi(x) = \Pi_\nu (x - a_\nu) = x^n + \Sigma_\nu A_\nu x^{n-\nu}$$

gesetzt wird,

$$|\phi(x)| = \left| x^n \left\{ 1 + \sum_\nu \frac{A_\nu}{x^\nu} \right\} \right| > 0,$$

woraus sich

12. $$|a_\nu| < \alpha \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

ergibt.

Man hat ferner, wenn

13. $$\beta = n\alpha^{n-1} + \Sigma_\nu (n - \nu)(\overline{C}_\nu + h_0)\alpha^{n-\nu-1}$$

gesetzt wird,

14. $$|\phi'(a_\nu)| < \beta, \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

woraus weiter, da

$$\frac{1}{\phi'(a_\nu)} = \frac{\Pi'_\mu \phi'(a_\mu)}{\Delta(A_1, \ldots A_n)} \qquad (\mu \gtrless \nu)$$

ist,

15. $$\left|\frac{1}{\phi'(a_\nu)}\right| < \frac{\beta^{n-1}}{\Delta_0} \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

sich ergibt.

Man setze jetzt, unter $\xi_1, \ldots \xi_n$ zu bestimmende Grössen verstehend,

$$16.\quad\begin{cases} a'_\nu = a_\nu + \xi_\nu, & (\nu = 1, \dots n) \\ \phi_1(x) = \Pi_\nu(x - a'_\nu) = \Pi_\nu(x - a_\nu - \xi_\nu), \\ \psi(x) = f(x) - \phi(x) = \Sigma_\nu(C_\nu - A_\nu)x^{n-\nu}, \\ \psi_1(x) = f(x) - \phi_1(x) = \Sigma_\nu(C_\nu - A'_\nu)x^{n-\nu}, A'_\nu = (a'_1, \dots a'_n)_\nu, \\ \Delta = \Delta(A_1, \dots A_n). \end{cases}$$

Dann wird

$$17.\quad \begin{aligned} \psi_1(x) &= f(x) - \phi(x) - \big(\phi_1(x) - \phi(x)\big) \\ &= f(x) - \phi(x) + \sum_\nu \frac{\phi(x)}{x - a_\nu}\xi_\nu + \sum_\mu [\xi_1, \dots \xi_n]_\mu x^{n-\mu}, \\ &\qquad (\mu = 2, \dots n) \end{aligned}$$

wo $[\xi_1, \dots \xi_n]_\mu$ eine homogene ganze Function μter Ordnung von $\xi_1, \dots \xi_n$ bedeutet. Nimmt man nun

$$18.\quad \xi_\nu = -\frac{f(a_\nu)}{\phi'(a_\nu)} = -\frac{\psi(a_\nu)}{\phi'(a_\nu)}, \text{ also } a'_\nu = a_\nu - \frac{f(a_\nu)}{\phi'(a_\nu)},$$

so hat man

$$f(x) - \phi(x) + \sum_\nu \frac{\phi(x)}{x - a_\nu}\xi_\nu = \psi(x) - \sum_\nu \frac{\phi(x)}{x - a_\nu}\frac{\psi(a_\nu)}{\phi'(a_\nu)} = 0$$

für jeden Werth von x, und es ergibt sich aus (17.)

$$19.\quad \psi_1(x) = \sum_\mu \left[-\frac{\psi(a_1)}{\phi'(a_1)}, \dots -\frac{\psi(a_n)}{\phi'(a_n)}\right]_\mu x^{n-\mu} \qquad (\mu = 2, \dots n).$$

Es ist aber nach (17.)

$$\Sigma_\mu [\xi_1, \dots \xi_n]_\mu x^{n-\mu} = -\Pi_\nu(x - a_\nu - \xi_\nu) + \Pi_\nu(x - a_\nu) - \sum_\nu \frac{\phi(x)}{x - a_\nu}\xi_\nu,$$

also, da $\Delta = \Pi_\nu \phi'(a_\nu)$,

$$\begin{aligned} \Delta \sum_\mu \left[\frac{-\psi(a_1)}{\phi'(a_1)}, \dots \frac{-\psi(a_n)}{\phi'(a_n)}\right]_\mu x^{n-\mu} = {} & -\Pi_\nu\big((x - a_\nu)\phi'(a_\nu) + \psi(a_\nu)\big) + \Pi_\nu\big((x - a_\nu)\phi'(a_\nu)\big) \\ & + (x - a_2)\dots(x - a_n)\phi'(a_2)\dots\phi'(a_n)\psi(a_1) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + (x - a_1)\dots(x - a_{n-1})\phi'(a_1)\dots\phi'(a_{n-1})\psi(a_n). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass $\Delta\psi_1(x)$ die Gestalt

$$21.\quad \Delta\psi_1(x) = \Sigma_\mu \{a_1, \dots a_n;\ \psi(a_1), \dots \psi(a_n)\}_\mu x^{n-\mu} \qquad (\mu = 2, \dots n)$$

hat, wo $\{a_1, \dots a_n;\ \psi(a_1), \dots \psi(a_n)\}_\mu$ eine ganze Function von $a_1, \dots a_n$ und $\psi(a_1), \dots \psi(a_n)$ bezeichnet, welche in Beziehung auf die Grössen $\psi(a_1), \dots \psi(a_n)$ homogen und von der zweiten Ordnung ist. Hiernach hat man

$$22.\quad C_1 - A'_1 = 0\,,\quad C_\mu - A'_\mu = \frac{1}{\Delta}\{a_1, \ldots a_n;\ \psi(a_1), \ldots \psi(a_n)\}_\mu$$

$(\mu = 2, \ldots n).$

Bezeichnet man nun von den absoluten Beträgen der Differenzen $C_1 - A_1, \ldots C_n - A_n$ den grössten mit δ und setzt

$$23.\qquad \gamma = \Sigma_\nu \alpha^{n-\nu},$$

so ist (nach 16.)

$$24.\qquad |\psi(a_\nu)| = |\Sigma_\nu (C_\nu - A_\nu) a_\nu^{n-\nu}| < \gamma\delta.$$

Aus den Gleichungen (20.), (14.), (24.) erhellt dann, dass (für $\mu = 2, \ldots n$)

$$25.\qquad |\{a_1, \ldots a_n,\ \psi(a_1), \ldots \psi(a_n)\}_\mu|$$

kleiner ist, als der Coefficient von $x^{n-\mu}$ in der nach Potenzen von x ausgeführten Entwickelung des Ausdrucks

$$\big(\beta(x+\alpha) + \gamma\delta\big)^n - \beta(x+\alpha)^n - n\beta^{n-1}\gamma\delta(x+\alpha)^{n-1}.$$

Dieser Coefficient ist eine durch δ^2 theilbare ganze Function von δ mit lauter positiven Coefficienten, die mit $\delta^2(\alpha, \beta, \gamma;\ \delta)_\mu$ bezeichnet werde. Aus Gleichung (22.) ergibt sich dann, da $\Delta > \Delta_0$ ist,

$$C_1 - A'_1 = 0\,,\ |C_\mu - A'_\mu| < \frac{\delta^2(\alpha, \beta, \gamma;\ \delta)_\mu}{\Delta_0}.$$

Nun verstehe man unter d_0 eine bestimmte positive Grösse, für welche die Bedingungen

$$26.\qquad d_0 \leqq h_0,\ d_0(\alpha, \beta, \gamma;\ d_0)_\mu \leqq \Delta_0 \qquad (\mu = 2, \ldots n)$$

erfüllt werden, und unterwerfe die Grössen $a_1, \ldots a_n$ der Beschränkung, dass die absoluten Beträge der Differenzen

$$C_1 - A_1, \ldots C_n - A_n$$

sämmtlich kleiner als d_0 sein sollen, so dass man

$$\delta = \varepsilon d_0$$

setzen kann, wo ε eine positive Grösse, die kleiner als 1 ist, bezeichnet. Dann ist

$$\delta^2(\alpha, \beta, \gamma;\ \delta)_\mu = \varepsilon^2 d_0 \cdot d_0(\alpha, \beta, \gamma;\ \varepsilon d_0)_\mu < \varepsilon^2 d_0 \Delta_0\,,$$

und man hat daher, wenn man von den absoluten Beträgen der Differenzen

$$C_1 - A'_1, \ldots C_n - A'_n$$

den grössten mit

$$\varepsilon' d_0$$

bezeichnet,

27. $$\varepsilon' < \varepsilon^2.$$

Aus dem im Vorstehenden Bewiesenen ergibt sich nun, da die Grösse $\varepsilon' d_0$ in Bezug auf das System $(a'_1, \ldots a'_n)$ dieselbe Bedeutung hat, wie εd_0 in Bezug auf $(a_1, \ldots a_n)$, ohne Weiteres Folgendes: Angenommen es sei ein den Bedingungen

28. $$|C_\nu - (a_1, \ldots a_n)_\nu| < d_0 \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

entsprechendes System von Zahlgrössen $a_1, \ldots a_n$ gegeben, und es werde aus demselben nach dem in den nachstehenden Gleichungen ausgesprochenen Gesetze eine Reihe anderer Systeme

$$(a'_1, \ldots a'_n),\ (a''_1, \ldots a''_n),\ (a'''_1, \ldots a'''_n) \text{ u. s. w.}$$

abgeleitet:

29. $$\begin{aligned} a'_\nu &= a_\nu - \frac{f(a_\nu)}{\Pi_\mu(a_\nu - a_\mu)}, \\ a''_\nu &= a'_\nu - \frac{f(a'_\nu)}{\Pi_\mu(a'_\nu - a'_\mu)}, \\ a'''_\nu &= a''_\nu - \frac{f(a''_\nu)}{\Pi_\mu(a''_\nu - a''_\mu)}, \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned} \qquad (\nu = 1, \ldots n;\ \mu \gtrless \nu)$$

Die so definirten Grössen

$$a_\nu^{(\lambda)} \qquad (\nu = 1, \ldots n;\ \lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

haben dann sämmtlich bestimmte endliche Werthe, und es ist, wenn man für jeden bestimmten Index λ

30. $$A_\nu^{(\lambda)} = (a_1^{(\lambda)}, \ldots a_n^{(\lambda)})_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

setzt und von den absoluten Beträgen der Differenzen

$$C_1 - A_1^{(\lambda)}, \ldots C_n - A_n^{(\lambda)}$$

den grössten mit $\varepsilon^{(\lambda)} d_0$ bezeichnet,

31. $$\varepsilon' < \varepsilon\varepsilon,\ \varepsilon'' < \varepsilon'\varepsilon' < \varepsilon^4,\ \varepsilon''' < \varepsilon''\varepsilon'' < \varepsilon^8, \ldots,$$

also allgemein

32. $$\varepsilon^{(\lambda)} < (\varepsilon)^{2^\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Setzt man nun

33. $$\begin{aligned} \phi_\lambda(x) &= \Pi_\nu(x - a_\nu^{(\lambda)}), \\ \psi_\lambda(x) &= f(x) - \phi_\lambda(x) = \Sigma_\nu(C_\nu - A_\nu^{(\lambda)})x^{n-\nu}, \end{aligned} \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

so ist

34. $$|f(a_\nu^{(\lambda)})| = |\psi_\lambda(a_\nu^{(\lambda)})| < \gamma d_0 \varepsilon^{(\lambda)},$$

wobei zu bemerken, dass jede der Grössen $a_\nu^{(\lambda)}$, ebenso wie $a_1, \ldots a_n$, ihrem absoluten Betrage nach kleiner ist, als die oben mit α bezeichnete Grösse. Man hat ferner, wenn $\Delta^{(\lambda)}$ die Discriminante der Function $\phi_\lambda(x)$ bedeutet,

35. $$\frac{1}{\phi'_\lambda(a_\nu^{(\lambda)})} = \frac{1}{\Delta^{(\lambda)}} \cdot \Pi_\mu \phi'_\lambda(a_\mu^{(\lambda)}) \qquad (\mu \gtrless \nu)$$

und somit, da $|\Delta^{(\lambda)}| > \Delta_0$ und (nach 14.) $|\phi'_\mu(a_\mu^{(\lambda)})| < \beta$ ist,

36. $$\left|\frac{1}{\phi'_\lambda(a_\nu^{(\lambda)})}\right| < \frac{\beta^{n-1}}{\Delta_0}, \quad \left|-\frac{f(a_\nu^{(\lambda)})}{\phi'_\lambda(a_\nu^{(\lambda)})}\right| < \frac{\gamma\beta^{n-1} d_0}{\Delta_0} \cdot (\varepsilon)^{2^\lambda}.$$

Hiernach sind, wenn man

37. $$x_\nu = a_\nu - \sum_{0}^{\infty}{}_\lambda \frac{f(a_\nu^{(\lambda)})}{\phi'_\lambda(a_\nu^{(\lambda)})} \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

setzt, $x_1, \ldots x_n$ wohldefinirte endliche Zahlgrössen, indem jedes Glied der Reihe, durch welche sie dargestellt sind, seinem absoluten Betrage nach kleiner ist, als das entsprechende Glied der Summe

$$\sum_{1}^{\infty}{}_\lambda \frac{\gamma\beta^{n-1} d_0}{\Delta_0} (\varepsilon)^{2^\lambda},$$

welche einen endlichen Werth hat. Man hat aber, wenn r irgend eine der Zahlen 1, 2, ... bedeutet, nach (27.)

38. $$a_\nu^{(r)} = a_\nu - \sum_{0}^{r-1}{}_\lambda \frac{f(a_\nu^{(\lambda)})}{\phi'_\lambda(a_\nu^{(\lambda)})},$$

also

39. $$|x_\nu - a_\nu^{(r)}| < \frac{\gamma\beta^{n-1} d_0}{\Delta_0} \sum_{r}^{\infty}{}_\lambda (\varepsilon)^{2^\lambda},$$

und es werden demnach die absoluten Beträge der Differenzen

$$x_\nu - a_\nu^{(r)}$$

sämmtlich kleiner als eine beliebig angenommene Grösse, sobald r eine bestimmte Grenze überschreitet. Dasselbe gilt dann aber auch von den absoluten Beträgen der Differenzen

$$(x_1, \ldots x_n)_\nu - A_\nu^{(r)}, \ C_\nu - A_\nu^{(r)},$$

woraus sich, da

$$|(x_1, \ldots x_n)_\nu - C_\nu| \leqq |(x_1, \ldots x_n)_\nu - A_\nu^{(r)}| + |A_\nu^{(r)} - C_\nu|$$

ist, und $(x_1, \ldots x_n)_\nu - C_\nu$ einen von r unabhängigen Werth hat,

$$40. \qquad (x_1, \dots x_n)_\nu = C_\nu, \qquad (\nu = 1, \dots n)$$

$$41. \qquad f(x) = \Pi_\nu (x - x_\nu)$$

ergibt.

Es lässt sich also in der That jede Function $f(x)$ von der vorausgesetzten Beschaffenheit als ein Product aus ganzen linearen Functionen der Veränderlichen x darstellen, wofern man ein den oben angegebenen Bedingungen entsprechendes Grössensystem $(a_1, \dots a_n)$ ermitteln kann. Dies ist aber stets möglich, wie nun gezeigt werden soll.

2.

Zunächst sind zwei Hülfssätze zu beweisen.

Es seien $f_0(x)$, $f_1(x)$ zwei Functionen der Veränderlichen x von derselben Form und Beschaffenheit wie die im Vorhergehenden mit $f(x)$ bezeichnete:

$$1. \qquad \begin{cases} f_0(x) = x^n + \Sigma_\nu C_\nu^{(0)} x^{n-\nu}, \\ f_1(x) = x^n + \Sigma_\nu C_\nu^{(1)} x^{n-\nu}. \end{cases}$$

Setzt man dann, unter z einen veränderlichen Parameter verstehend,

$$2. \qquad f(x; z) = (1 - z) f_0(x) + z f_1(x),$$

so hat $f(x; z)$, als Function von x betrachtet, eine Discriminante $D(z)$, welche eine ganze Function von z ist und der Annahme nach, sowohl für $z = 0$ als für $z = 1$ einen von Null verschiedenen Werth hat, also sicher nicht identisch, sondern nur für eine endliche Anzahl von Werthen der Grösse z verschwindet. Setzt man nun, unter s, t reelle Veränderliche verstehend,

$$3. \qquad z = \frac{1 + si}{t + si},$$

so entspricht jedem Werthe von z, mit Ausnahme der Werthe 0, 1, ein Werthepaar (s, t), und es kann daher nur eine endliche Anzahl von Werthepaaren (s, t) geben, für die

$$D\left(\frac{1 + si}{t + si}\right)$$

gleich Null wird. Gibt man also der Grösse s irgend einen bestimmten, in keinem dieser Paare vorkommenden Werth k, so ist

$$D\left(\frac{1 + ki}{t + ki}\right)$$

eine Function von t, die für keinen (reellen) Werth dieser Veränderlichen verschwindet. Es handelt sich nun darum, ein Verfahren anzugeben, durch das man einen der gestellten Bedingung entsprechenden Werth k wirklich bestimmen kann, ohne von den Werthen der Grösse z, für die $D(z)$ verschwindet, irgend welche Kenntniss zu haben.

Man bringe $D(z)$ auf die Form

$$4. \qquad D(z) = \Sigma_\mu (\alpha_\mu + \beta_\mu i)\, z^{m-\mu}, \qquad (\mu = 0, \ldots m)$$

wo m den Grad der Function bezeichnet und unter α_μ, β_μ reelle Constanten zu verstehen sind. Dann hat man

$$D\left(\frac{1+si}{t+si}\right) = \frac{1}{(t+si)^m} \cdot \Sigma_\mu (\alpha_\mu + \beta_\mu i)\,(1+si)^{m-\mu}(t+si)^\mu, \qquad (\mu = 0, \ldots m)$$

und kann also setzen

$$5. \qquad D\left(\frac{1+si}{t+si}\right) = \frac{G(t,s) + iH(t,s)}{(t+si)^m},$$

wo $G(t,s)$, $H(t,s)$ ganze Functionen von t, s bezeichnen. Gibt man nun der Grösse s irgend einen bestimmten endlichen Werth k, so kann die Function $D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right)$ nur in dem Falle verschwinden, wo für einen bestimmten (ebenfalls endlichen) Werth von t die Functionen $G(t,k)$, $H(t,k)$ beide verschwinden. Denn es ist $G(t,k) + iH(t,k)$ eine ganze Function $m$ten Grades von t, in welcher der Coefficent des höchsten Gliedes, nämlich $\alpha_m + \beta_m i = D(0)$, einen von Null verschiedenen Werth besitzt, und man hat daher, wenn unter $\overline{D}$ irgend eine bestimmte positive Grösse, die kleiner als $|D(0)|$ ist, verstanden wird,

$$\left| D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right) \right| > \overline{D}$$

für jeden Werth von t, dessen absoluter Betrag eine gewisse Grenze (t_0) überschreitet. Für die übrigen Werthe von t ist aber $\frac{1}{t+ki}$ dem absoluten Betrage nach niemals kleiner als $\frac{1}{t_0+ki}$; es kann also $D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right)$ nur dann verschwinden, wenn es in dem Intervall $(-t_0 \ldots t_0)$ Werthe von t gibt, für welche $G(t,k)$, $H(t,k)$ beide gleich Null sind. In diesem Falle ist aber die aus den Gleichungen

$$6. \qquad G(t,s) = 0, \quad H(t,s) = 0$$

durch Elimination der Grösse t hervorgehende Resultante, welche eine ganze Function von s ist und mit $R(s)$ bezeichnet werden soll.

für $s = k$ nothwendig gleich Null. Hiernach braucht man, unter der Voraussetzung, dass $R(s)$ nicht identisch gleich Null sei, bei der Wahl der Constante k nur diejenigen Werthe, für welche $R(k) = 0$ ist, auszuschliessen, dann ist

$$D\left(\frac{1+ki}{t+ki}\right)$$

stets eine Function von t, die für keinen (reellen) Werth dieser Veränderlichen verschwindet, wie auch der Werth von k angenommen werden möge.

Es lässt sich aber zeigen, dass die in Betreff der Function $R(s)$ gemachte Voraussetzung, stets zutrifft, wozu zwei Bedingungen erfüllt sein müssen: es dürfen die Coefficienten von t^m in $G(t, s)$ und $H(t, s)$ nicht beide gleich Null sein und diese Functionen nicht für jeden Werth von s einen gemeinsamen Theiler haben.

Man bezeichne die aus den Gleichungen (6.) durch Elimination der Grösse s hervorgehende Resultante, welche eine ganze Function von t ist, mit $R_1(t)$. Von derselben ist leicht zu zeigen, dass sie nicht identisch verschwindet.

Nach (5.) hat man, wenn

$$7. \qquad i^m \Sigma_\mu(\alpha_\mu + \beta_\mu i) = \alpha + \beta i, \quad (-i)^m \Sigma_\mu(\alpha_\mu - \beta_\mu i) = \alpha - \beta i$$

gesetzt wird,

$$8. \qquad \begin{cases} G(t, s) = \alpha s^m + \mathfrak{G}_1(t)s^{m-1} + \cdots + \mathfrak{G}_m(t), \\ H(t, s) = \beta s^m + \mathfrak{H}_1(t)s^{m-1} + \cdots + \mathfrak{H}_m(t), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{G}_1(t)$, $\mathfrak{H}_1(t)$ u. s. w. ganze Functionen von t bedeuten. Da $\alpha + \beta i = i^m D(1)$, so sind α, β niemals beide gleich Null, und es könnte daher $R_1(t)$ nur dann identisch gleich Null sein, wenn $G(t, s)$, $H(t, s)$, als Functionen von s betrachtet, für jeden Werth von t einen gemeinsamen Theiler besässen. Nun ist aber für $t = 1$

$$9. \qquad \begin{cases} G(1, s) + iH(1, s) = (\alpha + \beta i)(s - i)^m, \\ G(1, s) - iH(1, s) = (\alpha - \beta i)(s + i)^m, \end{cases}$$

und aus diesen Gleichungen erhellt unmittelbar, dass $G(1, s)$, $H(1, s)$ keinen gemeinsamen Theiler haben. Folglich ist $R_1(t)$ für $t = 1$ nicht gleich Null und verschwindet also niemals identisch.

Hieraus folgt nun weiter, das sich zwei ganze Functionen von t, s

$$G_1(t, s), \; H_1(t, s)$$

bestimmen lassen, welche die Gleichung

$$10. \qquad G_1(t, s)G(t, s) + H_1(t, s)H(t, s) = R_1(t)$$

befriedigen. Aus dieser Gleichung kann nun gefolgert werden, dass

$G(t, s)$, $H(t, s)$, als Functionen von t betrachtet, nicht für jeden Werth von s einen gemeinsamen Theiler besitzen.

Existirt nämlich für einen bestimmten Werth von s ein gemeinsamer Theiler von $G(t, s)$, $H(t, s)$, so ist er auch ein gemeinsamer Theiler der Functionen

$$R_1(t) \text{ und } G(t, s) + iH(t, s) = \Sigma_\mu\big(\mathfrak{G}_\mu(t) + i\mathfrak{H}_\mu(t)\big)s^{m-\mu},$$

wo man $\mathfrak{G}_0(t) = \alpha$, $\mathfrak{H}_0(t) = \beta$ zu nehmen hat. Nun kann aber $G(t, s) + iH(t, s)$ nicht für jeden Werth von s mit der von s unabhängigen Function $R_1(t)$ einen Theiler gemein haben; denn dazu wäre nach einem bekannten Satze zunächst erforderlich, dass ein gemeinsamer Theiler sämmtlicher Functionen $\mathfrak{G}_\mu(t) + i\mathfrak{H}_\mu(t)$ existirte, was nicht der Fall ist, wie schon daraus erhellt, dass $\mathfrak{G}_0(t) + i\mathfrak{H}_0(t)$ eine von Null verschiedene Constante ist.

Zieht man nun noch in Betracht, dass in dem Ausdrucke

$$G(t, s) + iH(t, s),$$

der von s unabhängige Coefficient von t^m, nämlich $\alpha_m + \beta_m i$, einen von Null verschiedenen Werth hat, in $G(t, s)$, $H(t, s)$ also die Coefficienten von t^m niemals beide gleich Null sind, so ist durch das Vorstehende bewiesen, dass unter den gemachten Voraussetzungen $R(s)$ in der That niemals identisch verschwindet. Man braucht also, um eine Function $D\left(\dfrac{1 + ki}{t + ki}\right)$ von der verlangten Beschaffenheit zu erhalten, die Constante k nur so zu wählen, dass $R(k)$ nicht gleich Null ist.

Nach Fixirung eines Werthes von k lässt sich nun auch auf mannigfaltige Weise eine positive Grösse bestimmen, welche kleiner ist als jeder Werth, den der absolute Betrag von $D\left(\dfrac{1 + ki}{t + ki}\right)$ annehmen kann. Für das Folgende genügt es aber, eine Grösse zu ermitteln, die für jeden dem Intervall $(1 \ldots + \infty)$ angehörigen Werth von t der angegebenen Bedingung genügt.

Man bilde, was immer möglich ist, zwei ganze Functionen von t, s

$$G_2(t, k),\; H_2(t, k),$$

welche der Gleichung

$$11. \qquad G_2(t, k)\, G(t, k) + H_2(t, k)\, H(t, k) = t^{2m-1} R(k)$$

genügen und in Beziehung auf t von nicht höherem als dem $(m-1)$ten Grade sind. Setzt man dann

$$12. \qquad t = \frac{1}{\tau},\; G(t, k) = \tau^{-m}\phi(\tau, k), \quad H(t, k) = \tau^{-m}\psi(\tau, k),$$

$$G_2(t, k) = \tau^{-m+1}\phi_1(\tau, k),\; H_2(t, k) = \tau^{-m+1}\psi_1(t, k),$$

so bedeutet τ eine reelle Veränderliche, die jeden dem Intervall $(0 \ldots 1)$ angehörigen Werth annehmen kann, und

$$\phi(\tau, k), \quad \psi(\tau, k), \quad \phi_1(\tau, k), \quad \psi_1(\tau, k)$$

sind ganze Functionen von τ, welche der Gleichung

13. $$\phi_1(\tau, k)\,\phi(\tau, k) + \psi_1(\tau, k)\,\psi(\tau, k) = R(k)$$

genügen. Dann hat man

14. $$D\left(\frac{(1+ki)\tau}{1+k\tau i}\right) = \frac{\phi(\tau, k) + i\psi(\tau, k)}{(1+k\tau i)^m},$$

und es folgt, da

15. $$\left(\phi_1^2(\tau, k) + \psi_1^2(\tau, k)\right)\left(\phi^2(\tau, k) + \psi^2(\tau, k)\right) \geqq \left(\phi_1(\tau, k)\,\phi(\tau, k) + \psi_1(\tau, k)\,\psi(\tau, k)\right)^2$$

ist,

16. $$\left|D\left(\frac{(1+ki)\tau}{1+k\tau i}\right)\right|^2 > \frac{R^2(k)}{(1+k^2\tau^2)^m \cdot \left(\phi_1^2(\tau, k) + \psi_1^2(\tau, k)\right)}.$$

Bestimmt man also, was ohne Schwierigkeit geschehen kann, eine positive Grösse K so, dass für jeden der betrachteten Werthe von t

17. $$K > \phi_1^2(\tau, k) + \psi_1^2(\tau, k),$$

so ergibt sich

18. $$\left|D\left(\frac{(1+ki)\tau}{1+k\tau i}\right)\right|^2 > \frac{R^2(k)}{(1+k^2)^m K}.$$

Hiernach ist also $f\left(x; \frac{(1+ki)\tau}{1+k\tau i}\right)$, wofür fortan kürzer $f(x;\tau)$ geschrieben werden soll, eine Function von x, deren Discriminante für jeden dem Intervalle $(0 \ldots 1)$ angehörigen Werth von τ ihrem absoluten Betrag nach grösser ist als eine angebbare positive Grösse.

Eine solche Grösse — sie möge mit D^* bezeichnet werden — lässt sich mit Sicherheit bestimmen, wenn sämmtliche Coefficienten der Functionen $f_0(x), f_1(x)$, wie von jetzt an angenommen werden soll, (reelle oder complexe) rationale Grössen sind.

Ferner kann man dann, wenn

19. $$f(x;\tau) = x^n + \Sigma_\nu C_\nu^{(\tau)} x^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

gesetzt wird, wo

20. $$C_\nu^{(\tau)} = \frac{(1-\tau)C_\nu^{(0)} + (1+ki)\tau C_\nu^{(1)}}{1+k\tau i},$$

mit Leichtigkeit n positive rationale Grössen $\overline{C}_1, \ldots \overline{C}_n$ ermitteln, welche für jeden der in Betracht kommenden Werthe von τ den Bedingungen

21. $$\overline{C}_1 > |C_1^{(\tau)}|, \ldots \overline{C}_n > |C_n^{(\tau)}|$$

genügen. Bildet man dann für unbestimmte Werthe von $C_1, \ldots C_n$ und $h_1, \ldots h_n$ die im § 1 mit

$$\{h_1, \ldots h_n, C_1, \ldots C_n\}, \; [h_1, \ldots h_n, C_1, \ldots C_n]$$

bezeichneten Ausdrücke, und setzt, unter h wie a. a. O. eine positive Veränderliche verstehend,

$$[h, \ldots h, \overline{C}_1, \ldots \overline{C}_n] = [h],$$

so ist jetzt für jeden Werth von τ

$$|\{h_1, \ldots h_n, C_1^{(\tau)}, \ldots C_n^{(\tau)}\}| < [h],$$

wenn die absoluten Beträge von $h_1, \ldots h_n$ sämmtlich kleiner als h sind. Nimmt man also zwei bestimmte positive Grössen Δ_0, h_0 der Bedingung

$$\Delta_0 + [h_0] \leqq D^*$$

entsprechend an und versteht unter

$$\alpha, \beta, \gamma, d_0$$

die im § 1 ebenso bezeichneten Grössen, wobei zu beachten ist, dass die letzteren nur von Δ_0, h_0, $\overline{C}_1, \ldots \overline{C}_n$, nicht aber von den Werthen der bloss den Bedingungen

$$\overline{C}_1 > |C_1|, \ldots \overline{C}_n > |C_n|$$

unterworfenen Coefficienten der Function $f(x)$ abhangen, so ist ohne Weiteres klar, dass die jetzt definirte Grösse d_0 für jede Function $f(x;\tau)$ dieselbe Bedeutung hat, wie im § 1 die dort ebenso bezeichnete für $f(x)$. Wenn also für irgend einen bestimmten Werth von τ sich ein den Bedingungen

$$|C_\nu^{(\tau)} - (a_1, \ldots a_n)_\nu| < d_0 \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

genügendes Grössensystem $(a_1, \ldots a_n)$ finden lässt, so kann aus demselben mittels der Formeln (§ 1, Nr. 29.), in denen dann $f(x) = f(x;\tau)$ zu nehmen ist, ein anderes $(\overline{a}_1, \ldots \overline{a}_n)$ abgeleitet werden, für welches die absoluten Beträge der Differenzen

$$C_\nu^{(\tau)} - (\overline{a}_1, \ldots \overline{a}_n)_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

sämmtlich kleiner sind als eine willkürlich angenommene, noch so kleine Grösse.

3.

Nach Begründung der beiden vorstehenden Hülfssätze lässt sich nunmehr das am Schlusse des § 1 Behauptete folgendermaassen beweisen.

Man nehme n von einander verschiedene rationale Grössen $a_1^{(0)}, \ldots a_n^{(0)}$ willkürlich an und setze

$$1. \qquad f_0(x) = \Pi_\nu (x - a_\nu^{(0)}) = x^n + \Sigma_\nu C_\nu^{(0)} x^{n-\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots n),$$

Ferner sei, wie im Vorhergehenden,

2. $$f_1(x) = x^n + \Sigma_\nu C_\nu^{(1)} x^{n-\nu}, \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

unter der Annahme, dass jeder der Coefficienten $C_\nu^{(1)}$ eine rationale Grösse sei und die Discriminante der Function einen von Null verschiedenen Werth habe.

Gibt man sodann, mit g eine ganze positive Zahl bezeichnend, der Grösse τ die Werthe

$$0, \frac{1}{g}, \frac{2}{g}, \ldots \frac{g-1}{g}, 1,$$

so ist leicht zu zeigen, dass man, vorausgesetzt, es sei g hinlänglich gross angenommen, g Systeme von je n rationalen Grössen

$$(a_{1,1}, \ldots a_{1,n}), (a_{2,1}, \ldots a_{2,n}), \ldots (a_{g,1}, \ldots a_{g,n})$$

berechnen kann, für welche, wenn man die Bezeichnung des vorhergehenden Paragraphen beibehält, die absoluten Beträge der Differenzen

3. $$C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)} - (a_{\lambda,1}, \ldots a_{\lambda,n})_\nu \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, \ldots g \\ \nu = 1, \ldots n \end{pmatrix}$$

sämmtlich kleiner als d_0 sind.

Man hat nämlich nach Formel (20.) des vorhergehenden Paragraphen

$$C_\nu^{\left(\frac{\lambda+1}{g}\right)} - C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)} = \frac{1+ki}{g\left(1+\frac{(\lambda+1)ki}{g}\right)\left(1+\frac{\lambda ki}{g}\right)} (C_\nu^{(1)} - C_\nu^{(0)}); \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, \ldots g-1 \\ \nu = 1, \ldots n \end{pmatrix}$$

nimmt man also g so gross an, dass

4. $$\left|(1+ki)(C_\nu^{(1)} - C_\nu^{(0)})\right| < g d_0 \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

ist, so hat man

5. $$\left|C_\nu^{\left(\frac{\lambda+1}{g}\right)} - C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)}\right| < d_0 \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, \ldots g-1 \\ \nu = 1, \ldots n \end{pmatrix}.$$

Daraus lässt sich nun das Behauptete leicht folgern.

Da

6. $$f(x; 0) = f_0(x) = \Pi_\nu (x - a_\nu^{(0)}),\ C_\nu^{(0)} = (a_1^{(0)}, \ldots a_n^{(0)})_\nu, \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

so werden zunächst die Bedingungen

7. $$\left|C_\nu^{\left(\frac{1}{g}\right)} - (a_{1,1}, \ldots a_{1,n})_\nu\right| < d_0 \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

erfüllt, wenn man

8. $$a_{1,1} = a_1^{(0)}, \ldots a_{1,n} = a_n^{(0)}$$

setzt. Angenommen nun, es sei für irgend einen bestimmten, zwischen 0 und g liegenden Werth von λ, ein den Bedingungen

9. $$C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)} - (a_{\lambda,1}, \ldots a_{\lambda,n})_\nu < d_0 \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

genügendes System rationaler Grössen

$$a_{\lambda,1}, \ldots a_{\lambda,n}$$

gefunden worden, so führt das oben (§ 1, Nr. 29.) beschriebene Verfahren, wenn man in den dortigen Formeln

$$f\left(x;\frac{\lambda}{g}\right) \text{ für } f(x), \text{ und } a_{\lambda,1}, \ldots a_{\lambda,n} \text{ für } a_1, \ldots a_n$$

setzt, nothwendig zu einem neuen System rationaler Grössen

$$a_{\lambda+1,1}, \ldots a_{\lambda+1,n},$$

für welches die absoluten Beträge der Differenzen

10. $$C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)} - (a_{\lambda+1,1}, \ldots a_{\lambda+1,n})_\nu \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

sämmtlich kleiner sind als eine beliebig angenommene, noch so kleine Grösse $\bar{\delta}$. Dann hat man

11. $$\begin{aligned}\left|C_\nu^{\left(\frac{\lambda+1}{g}\right)} - (a_{\lambda+1,1}, \ldots a_{\lambda+1,n})_\nu\right| &= \left|C_\nu^{\left(\frac{\lambda+1}{g}\right)} - C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)} + \left(C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)} - (a_{\lambda+1,1}, \ldots a_{\lambda+1,n})_\nu\right)\right| \\ &< \left|C_\nu^{\left(\frac{\lambda+1}{g}\right)} - C_\nu^{\left(\frac{\lambda}{g}\right)}\right| + \bar{\delta}, \qquad (\nu = 1, \ldots n)\end{aligned}$$

also (nach 5.) für einen hinlänglich kleinen Werth von $\bar{\delta}$ auch

12. $$\left|C_\nu^{\left(\frac{\lambda+1}{g}\right)} - (a_{\lambda+1,1}, \ldots a_{\lambda+1,n})_\nu\right| < d_0 \qquad (\nu = 1, \ldots n).$$

Damit ist, wenn man $\lambda = 1, 2, \ldots g-1$ setzt, das am Schlusse des § 1 Behauptete zunächst für den Fall, wo die Coefficienten der Function $f(x)$ sämmtlich rationale Grössen sind, so dass man $f_1(x) = f(x)$ nehmen kann, bewiesen und zugleich ein Weg gezeigt, auf dem man durch eine endliche Anzahl arithmetischer Operationen mit Sicherheit zu einem System von n rationalen Grössen

$$\bar{a}_1 = a_{g,1}, \ldots \bar{a}_n = a_{g,n}$$

gelangen kann, für welches die absoluten Beträge der Differenzen

$$C_1 - (\bar{a}_1, \ldots \bar{a}_n)_1, \ldots C_n - (\bar{a}_1, \ldots \bar{a}_n)_n$$

sämmtlich kleiner als d_0 sind.

In dem Falle, wo die Coefficienten der Function $f(x)$ beliebige Zahlgrössen sind, kann man immer eine Function $f_1(x)$ mit lauter rationalen Coefficienten ermitteln, von denen ein jeder von dem gleichstelligen der Function $f(x)$ so wenig abweicht, als man will; es ist also stets möglich, mittels einer endlichen Anzahl arithmetischer Operationen ein den Bedingungen

13. $$|C_\nu - (\bar{a}_1, \ldots \bar{a}_n)_\nu| < d_0 \qquad (\nu = 1, \ldots n)$$

entsprechendes System rationaler Grössen $\bar{a}_1, \ldots \bar{a}_n$ zu berechnen.

Von einem solchen System ausgehend kann man nun mittels des im § 1 beschriebenen Verfahrens zu einem System wohldefinirter Grössen $x_1, \dots x_n$ gelangen, für das die Gleichungen

14. $$(x_1, \dots x_n)_\nu = C_\nu \qquad (\nu = 1, \dots n)$$

bestehen und somit

15. $$f(x) = \Pi_\nu (x - x_\nu) \qquad (\nu = 1, \dots n)$$

ist.

Damit ist zunächst unter der Bedingung, dass die Discriminante der gegebenen Function $f(x)$ nicht gleich Null sei, das oben (im Anfange des § 1) ausgesprochene Theorem bewiesen.

Wenn aber die angegebene Bedingung nicht erfüllt ist, so lässt sich $f(x)$ mittels rationaler Operationen umwandeln in ein Product aus mehreren anderen ganzen Functionen derselben Veränderlichen, von denen jede einzelne eine von Null verschiedene Discriminante besitzt, also als Product ganzer linearer Functionen von x darstellbar ist. Das in Rede stehende Theorem ist demnach allgemein gültig.[1]

[1] Einige Zusätze und Bemerkungen zu der vorstehenden Abhandlung werden in einer folgenden Notiz ihren Platz finden.

NAMENREGISTER.

SACHREGISTER.

Berlin, gedruckt in der Reichsdruckerei.

INHALTSVERZEICHNISS.

ABHANDLUNGEN DER AKADEMIE
aus den Jahren 1889, 1890, 1891.

ANZEIGE.

Seit dem 1. Januar 1882 gibt die Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften zu ... wöchentliche »Sitzungsberichte« heraus. Die dafür geltenden Bestimmungen finden sich ... zuge auf der zweiten Seite dieses Umschlages abgedruckt.

Um dem mathematisch-naturwissenschaftlichen Leserkreise den ihn näher angehenden ... des Stoffes der »Sitzungsberichte« in bequemerer Form darzubieten, wird ein Auszug aus ... Berichten unter dem Titel:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUNGEN

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN

herausgegeben. Diese Sonderausgabe enthält sämmtliche Arbeiten aus dem Gebiet der Mathematik wie aus dem der theoretischen, experimentellen und beobachtenden Naturwiss... in vollständigem Abdruck, welche in Sitzungen der Akademie von deren Mitgliedern ... fremden Verfassern mitgetheilt in die »Sitzungsberichte« aufgenommen wurden. Auch d... Gebiet angehörige geschäftliche Berichte, Preis-Aufgaben und -Ertheilungen, Adressen und dergl. mehr, finden darin Platz. Die »Mittheilungen« erscheinen bis auf Weiteres i... heften, welche jährlich einen Band ausmachen. Das zu einem Monat gehörige Stück w... Regel am zweiten Donnerstag des folgenden Monats ausgegeben. Personen, Gesellsch... Institute, welche bisher die »Monatsberichte« empfiengen und statt der vollständigen ... berichte« fortan die »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen« sich ... zu lassen vorziehen, werden ersucht, von diesem Wunsch dem Secretariat Nachricht ...

Die Akademie versendet ihre »Sitzungsberichte« oder die »Mathematischen und Naturwiss... Mittheilungen« an diejenigen Stellen, mit denen sie im Schriftenverkehr steht, jährlich drei Mal, n...
die Stücke von Januar bis April in der ersten Hälfte des Monats Mai,
„ „ „ Mai bis Juli in der ersten Hälfte des Monats August,
„ „ „ October bis December zu Anfang des nächsten Jahres sogleich nach ... des Registers.

Diejenigen Empfänger, welchen Theile des Jahrgangs 1891 nicht zugekommen sein sollten, w... hiervon baldigst bei der Akademie Anzeige zu machen, da eine Berücksichtigung etwaiger Reclama... Aussicht gestellt werden kann, wenn dieselben spätestens bis zum Ende des Jahres 1892 angebrach...

Wegen etwa gewünschter Zusendung in kürzeren Zwischenräumen sowie wegen des buchh... zuges der »Sitzungsberichte« u. s. w. siehe unten.

In Commission bei Georg Reimer in Berlin erscheinen in wöchentlichen Stü...

SITZUNGSBERICHTE

DER

KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHA...

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 12 *M.*

Getrennt von denselben erscheinen ausserdem, ebenda in Commission, in Monatsheften:

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE MITTHEILUN...

AUS DEN SITZUNGSBERICHTEN

DER

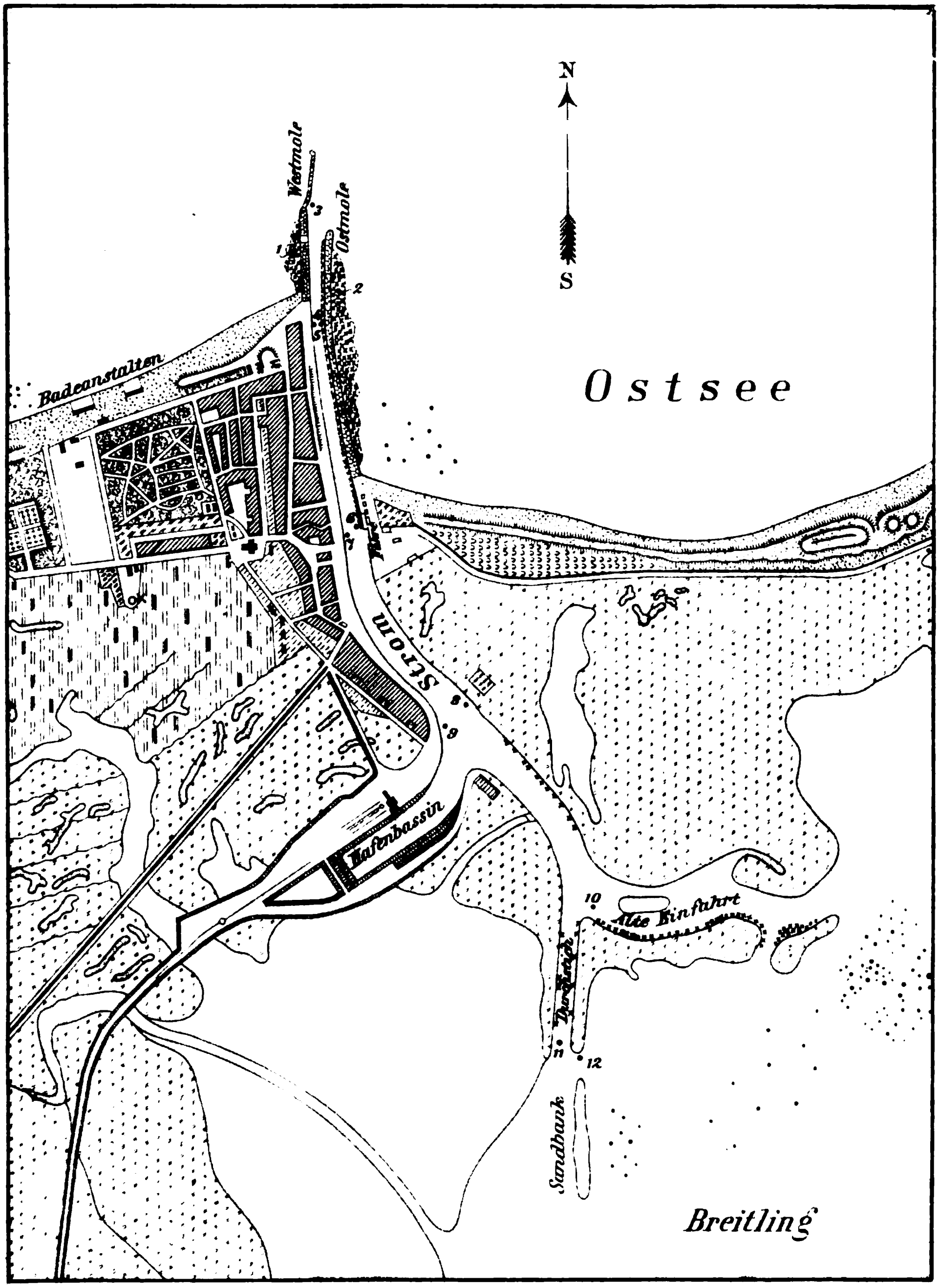
KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

ZU BERLIN.

gr. 8. Geheftet. Preis des Jahrgangs 8 *M.*

Georg Reimer's Verlagsbuchhandlung erbietet sich ferner denjenigen Empfängern der »Sitz... oder der »Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Mittheilungen«, welchen diese Schrift... der Akademie, jedoch nur in längeren Zwischenräumen gesammelt zugesandt werden, dieselbe... Stücken sogleich nach deren Ausgabe durch die Post, gegen Erstattung der Selbstkosten... Diejenigen Empfänger, welche diese Bezugsart vorziehen, wollen sich deshalb direct mit d... Buchhandlung in Verbindung setzen.

PLAN VON WARNEMÜNDE.



Fucus vesiculosus
Chorda Filum

Oltmanns, Bedeutung des Salzwechsels für die Algen.

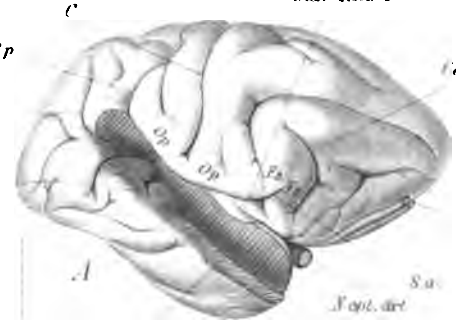


Fig. 1.

Gibbon I, rechte S. Insel

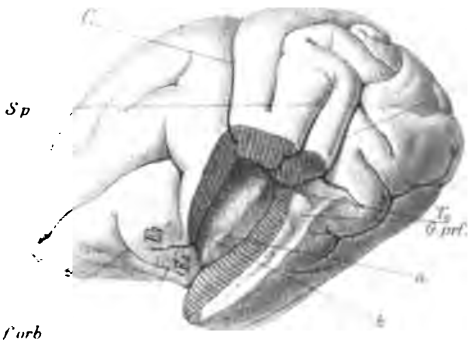


Fig. 2

Gibbon II, linke S. Insel

Fig. 3

Gibbon III, linke S. Insel

Waldeyer: Sylvische Furche und Reil'sche Insel des Genus Hylobates

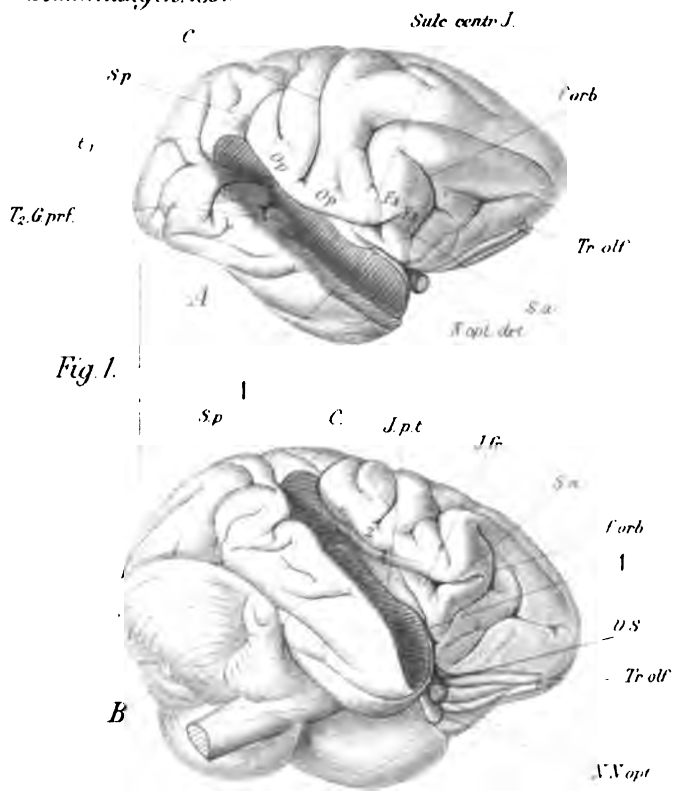


Fig. 1.

Gibbon I, rechte S. Insel

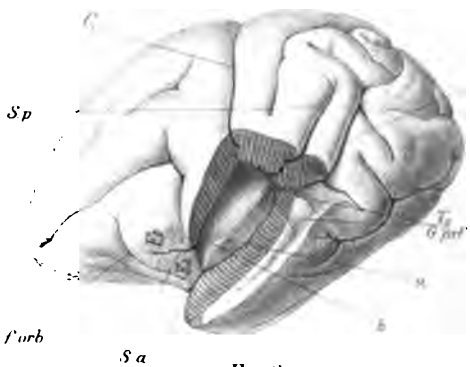


Fig. 2

Gibbon II, linke S. Insel

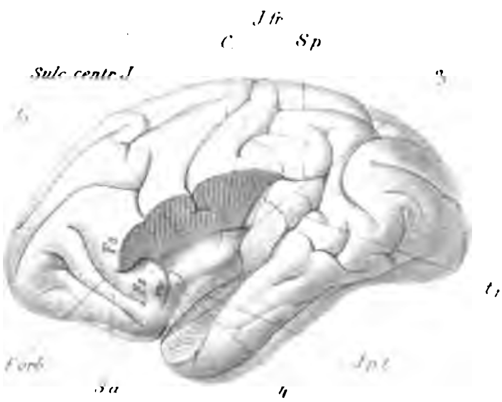


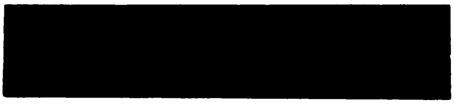
Fig. 3

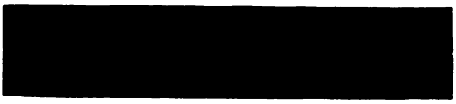
Gibbon III, linke S. Insel

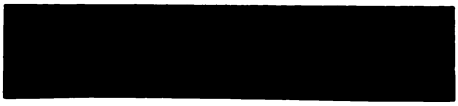
1.


2.


3.


4.


5.


6.


7.


8.


9.

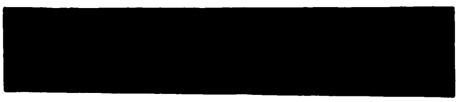

10.


11.


12.

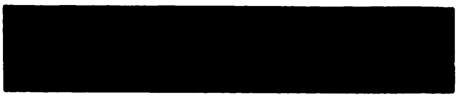

13.

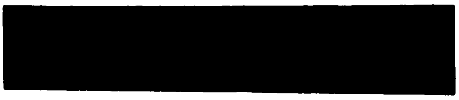

14.


15.


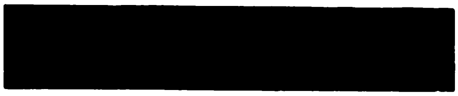
16.


17.


18.


19.


20.


21.


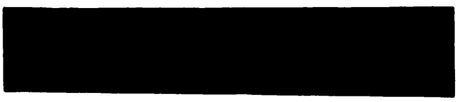
22.


23.


24.


25.


26.

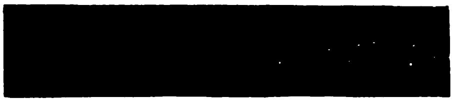
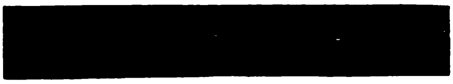
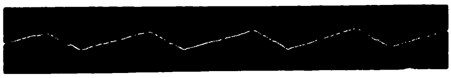
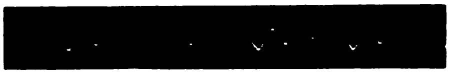
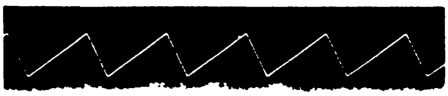
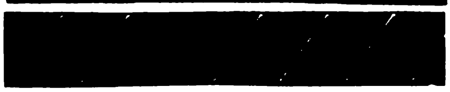

27.


28.


29.


30.


O. Krigar-Menzel und A. Raps: Über Saitenschwingungen.

31. 
32. 
33. 
34. 
35. 
36. 
37. 
38. 
39. 
40. 
41. 
42. 
43. 
44. 
45. 
46. 
47. 
48. 
49. 
50. 
51. 
52. 
53. 
54. 
55. 
56. 
57. 
58. 
59. 
60. 
61. 
62. 
63. 
64. 

O. Krigar-Menzel und A. Raps: Über Saitenschwingungen.

Fig. 2.

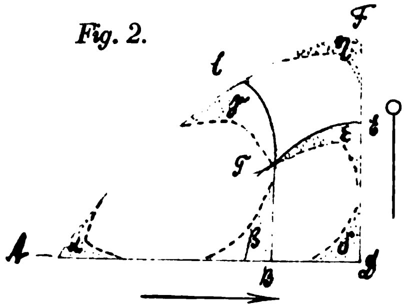


Fig. 1.

Fig. 1 a.

Fig. 4.

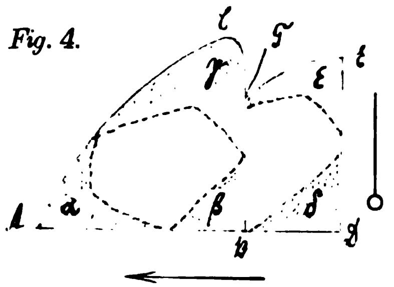


Fig. 3.

Fig. 6.

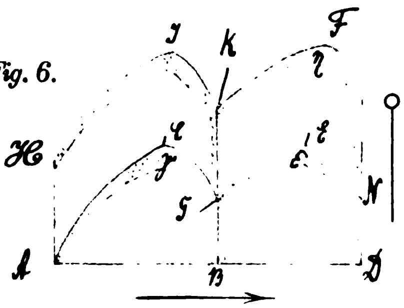


Fig. 5.

Fleischmann: Die Grundform der Backzähne bei Säugethieren und die Homologie der einzelnen Höcker.

Date Due

DEC. 1969