MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN

MIT UNTERSTÜTZUNG
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER
KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS UND JULIUS KÖNIG

REDIGIERT VON

JOSEF KÜRSCHÁK UND FRANZ SCHAFARZIK
MITGLIEDER DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

26

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND · 1908
MIT 1 TAFEL

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

[IN WIEN BEI KARL GRAESER & K^IE.]

INHALT DES XXVI. BANDES.

Pt. 1

1.

QUADRATURE DES SURFACES COURBES.

Par ZOÁRD DE GEÖCZE.

Introduction.

Il y a quatre quantités géometriques dont les mesures sont importantes en pratique: ce sont l'aire des figures planes, le volume des corps, la longueur des lignes courbes et l'aire des surfaces courbes.

En pratique ces quantités sont suffisamment connues. Au point de vue mathématique on ne peut affirmer qu'il en soit ainsi que pour les trois premières.

Tandis que dans les trois premiers cas nos connaissances dépassent le domaine du calcul différentiel et intégral, dans le quatrième elles lui sont intimement liées.

On peut diviser les définitions données jusqu'au commencement de ce siècle, pour l'aire des surfaces courbes, en quatre groupes.

1. On inscrit dans la surface une série de polyèdres à faces triangulaires, en assujetissant ces polyèdres et ces faces à satisfaire à certaines conditions. Ces conditions, qui varient avec les auteurs, sont étroitement liées à la régularité de la surface. La limite vers laquelle tend l'aire de ces polyèdres, lorsque le nombre de leurs faces croît indéfiniment, est representée par une intégrale double, et cette limite est définie comme l'aire de la surface courbe.

2. On partage arbitrairement la surface courbe en un nombre fini de portions et on transporte, sans déformation, chacun de ces éléments dans une position arbitraire. Soit U la somme des

aires* des projections orthogonales de ces portions sur un plan invariable. On définit la limite supérieure de tous les U possibles comme l'aire de la surface courbe.

3. On décrit des sphères ayant pour centre les points de la surface et comme rayon une longueur r. Soit V le volume de la figure formée par les points intérieurs au moins à l'une de ces sphères. L'aire de la surface courbe sera définie comme la limite de la quantité $\frac{V}{2r}$ quand r tend vers zéro, si toutefois cette limite existe.

4. Divisons la surface considerée, d'une manière arbitraire, en un nombre fini de portions et ajoutons à chacun de ces éléments un polygone plan qui sera en générale un parallélogramme. Soit S la somme des aires de ces polygones; faisons tendre vers zéro les dimensions linéaires des portions de la surface. On définit son aire comme la limite de S.

Il arrive quelquefois, et c'est en particulier le cas pour les surfaces de révolution, qu'au lieu de polygones plans, on emploie des portions de surfaces courbes dont l'aire peut être défini comme nous l'avons fait en premier lieu.

Quelquefois même, au lieu de polygones plans, on ajoute une aire plane limitée par une seule courbe fermée.

Chacune de ces définitions a ses avantages. Mais, ou on ne peut employer ces définitions que pour les surfaces régulières, ou, comme la troisième définition, elles ne furent employés jusqu'ici qu'à de telles surfaces.

Le but de ce travail, est de donner de l'aire une définition que l'on puisse appliquer à toutes les surfaces, d'achever la quadrature de deux classes de la surface $z = f(x, y)$ d'après la définition donnée, et de préparer la quadrature de la surface générale $z = f(x, y)$.**

---

* Ou plus exactement la somme des mesures intérieurs dans le sens de M. Jordan. Cours d'analyse (2), Paris 1893, 1, p. 28.

** Dans sa thèse de doctorat Über einige stetige Kurven, über Bogenlänge, linearen Inhalt nnd Flächeninhalt (Königsberg, 1907), M. Janzen donne une nouvelle définition pour l'aire; il me paraît que cette définition soit équivalente avec celle de l'invariant du Chap. XII, d'ailleurs M. Janzen ne

Chapitre I.

Définition de l'aire d'une surface courbe.

Toutes les figures dont nous allons parler sont situées dans l'espace d'EUCLIDE à trois dimensions. Nous prendrons pour unité d'aire des polygones plans celle du carré dont le côté est égal à l'unité de longueur, cette dernière étant choisie d'ailleurs arbitrairement.

Soient x, y, z, les coordonnées rectangulaires courantes, et soient

$$f^{(h)}(x, y), \quad (h = 1, 2, 3),$$

des fonctions bornées, uniformes et continues définies dans le rectangle $(0, a;\ 0, b)$ — P — du plan xy.*

Considérons un nouveau système d'axes de coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ.

Envisageons la figure formée par les points dont les coordonnées ξ, η, ζ sont égaux à

$$f^{(1)}(x, y), \ f^{(2)}(x, y), \ f^{(3)}(x, y).$$

On peut regarder cette figure sous deux points de vue différents. Premièrement, on la regarde comme un ensemble des points, les fonctions $f^{(h)} (h = 1, 2, 3)$ ne servant qu'à construire la figure; deuxièmement, on la regarde aussi comme un ensemble des points, mais on tient toujours compte des fonctions $f^{(h)}$.

Nous conservons ce deuxième point de vue et nous l'interprétons de la manière suivante:

„En donnant un point ξ, η, ζ, de la figure, nous donnons aussi un procédé, tel qu'il désigne au moins une couple des valeurs x, y, pour laquelle on ait

$$\xi = f^{(1)}(x, y), \quad \eta = f^{(2)}(x, y), \quad \zeta = f^{(3)}(x, y).\text{“}$$

---

démontre que, lorsque $p = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées et continues, sa définition conduit à la valeur de

$$\iint (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}} \, dx \, dy.$$

* En écrivant $(x_1, x_2;\ y_1, y_2)$, nous supposons que $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$. $(x_1, x_2;\ y_1;\ y_2)$ désigne le rectangle formé par les lignes $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, $y = y_2$, dans le plan xy.

Sous ce point de vue nous disons que la figure est une surface; nous la désignerons par R.

Soit $w_s \geqq 0$, $(s = 1, 2, \cdots)$, $\lim_{s=\infty} w_s = 0$, et soient

$$f_s^{(h)}(x, y), \quad (h = 1, 2, 3; \; s = 1, 2, \ldots)$$

des fonctions bornées, uniformes et continues au domaine P, et telles que

$$|f^{(h)}(x, y) - f_s^{(h)}(x, y)| \leqq w_s.$$

Les équations

$$\xi = f_s^{(1)}(x, y), \quad \eta = f_s^{(2)}(x, y), \quad \zeta = f_s^{(3)}(x, y),$$

définissent donc une surface R_s.

Soit $\delta_s > 0$, $\lim_{s=\infty} \delta_s = 0$. Inscrivons dans la surface $z = f_s^{(3)}(x, y)$ une surface polyédrale $\varDelta_s^{(3)}$ qui, formée de faces triangulaires en nombre fini, ait les proprietés suivantes:

1. Elle est simplement connexe. Son contour se déduit de celui de $z = f_s^{(3)}(x, y)$ par une déformation continue, de manière que les points pendant le mouvement ne s'éloignent jamais plus loin que δ_s du contour de $z = f_s^{(3)}(x, y)$.

2. Ses arêtes sont toutes plus petites que δ_s.

On voit qu'on obtient $\varDelta_s^{(3)}$ par une déformation continue de $z = f_s^{(3)}(x, y)$ le contour se déformant selon la manière décrite.

Inscrivons dans R_s le polyèdre correspondant $\varDelta_s$. C'est à dire que, le point $A_i^{(3)}$ dont les coordonnées x, y, sont $x^{(i)}, y^{(i)}$, étant un sommet de $\varDelta_s^{(3)}$, $\varDelta_s$ aura le sommet A_i dont les coordonnées sont

$$\xi = f_s^{(1)}(x^{(i)}, y^{(i)}), \quad \eta = f_s^{(2)}(x^{(i)}, y^{(i)}), \quad \zeta = f_s^{(3)}(x^{(i)}, y^{(i)}),$$

et A_j étant un autre sommet de $\varDelta_s$ (correspondant au sommet $A_j^{(3)}$ de $\varDelta_s^{(3)}$), $\overline{A_i A_j}$ sera une arête de $\varDelta_s$ lorsque $\overline{A_i^{(3)} A_j^{(3)}}$ est une arête de $\varDelta_s^{(3)}$ — et il ne la sera que dans ce cas.

On sait qu'on peut trouver des fonctions

$$F_s^{(h)}(x, y) \quad (h = 1, 2, 3; \; s = 1, 2, \ldots),$$

bornées, uniformes et continues au domaine P, telles que la figure

$$\xi = F_s^{(1)}(x, y), \quad \eta = F_s^{(2)}(x, y), \quad \zeta = F_s^{(3)}(x, y),$$

coïncide avec Δ_s.

Soit $\lambda_s^{(h)}$, la limite supérieure de

$$|f^{(h)} - F_s^{(h)}|.$$

Il est évident que quelque soit la choix des fonctions $F_s^{(h)}$, on a en général

$$\lim_{s=\infty} \lambda_s^{(h)} \neq 0.$$

Considérons tous les suites w_s, δ_s qui peuvent exister ($\lim w_s = \lim \delta_s = 0$ $(s = \infty)$), et considérons tous les suites Δ_s qu'on peut construire.

Soit I l'ensemble dont les éléments sont les suites Δ_s. Cet ensemble contient plusieurs autres ensembles qui sont moins étendus.

Le plus remarquable est celui, où l'on peut choisir les $F_s^{(h)}$ de sorte que pour chaque élément on ait

$$\lim_{s=\infty} \lambda_s^{(h)} = 0.$$

Nous désignerons cet ensemble par II.

Soit III l'ensemble, dont les éléments sont characterisés par

$$w_s = 0.$$

IV désigne l'ensemble qui est la partie commune de II et III. Soit V l'ensemble contenu dans IV et tel que les $\Delta_s^{(3)}$ de chacun de ces éléments n'ont pas des faces qui se coupent. Enfin soit VI l'ensemble contenu dans IV et tel que $\Delta_s^{(3)}$ n'est coupé qu'en un seul point par une droite normale au plan xy.

Désignons par $\Delta_s t$ l'aire de Δ_s.

On sait que pour chacun de ces ensembles, il existe au moins un élément, tel que pour cet élément $\lim\limits_{s=\infty} \Delta_s t$ soit déterminée, et entre ces limites déterminées il existe un minimum.

Désignons par T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6 ces plus petites des limites.

On prouve facilement que

$$T_2 = T_1.$$

Ainsi III étant compris dans I

$$T_2 < T_3.$$

IV étant compris dans III, V dans IV, VI dans V, on obtient enfin

$$T_1 = T_2 < T_3 < T_4 < T_5 < T_6.$$

De telle sorte, quoique peu probable, il n'est pas impossible que pour certaines surfaces on ait $T_3 = +\infty$, tandis que T_2 ait une valeur finie.

La quantité T_2 fut définie comme l'aire d'une surface courbe par M. LEBESGUE en 1902.* L'auteur, ne connaissant pas les travaux de M. LEBESGUE, choisissait T_3 en 1906.

En adoptant l'une quelconque des valeurs $T_1, \ldots, T_6$ comme définition de l'aire on peut poser trois questions.

I. Quelles sont les surfaces à aire finie?

II. Comment obtient-on la valeur de l'aire, à l'aide des fonctions $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$?

III. Comment doit-on construire la suite $\varDelta_s$, pour que $\lim\limits_{s=\infty} \varDelta_s t$ soit égale à l'aire? (quadrature).

Note. En adoptant T_3 pour définition, il est très probable qu'étant donné un ensemble dénombrable de points situés sur R, la suite $\varDelta_s$, pour laquelle $\lim \varDelta_s t = T_3$, peut être telle qu'il existe pour chaque point de cet ensemble un nombre entier k (fini mais accidentellement assez grand) de manière que ce point soit un sommet de chacun des $\varDelta_s$, si $s \geqq k$.

Considérons la surface

$$\xi = x, \quad \eta = y, \quad \zeta = f^{(3)}(x, y),$$

que nous désignerons couramment par $z = f(x, y)$.

Nous indiquerons sans démonstration les conditions nécessaires et suffisantes, pour que l'aire $(T_1, \ldots, T_6)$ de f soit finie, et nous achèverons la quadrature de deux classes de la surface $z = f(x, y)$.

La première d'entre elles jouit de la propriété suivante: les longueurs des sections $x =$ const. $y =$ const. sont toutes inférieures à une limite finie que nous désignerons par $\overline{S}$, et il existe un

---

* Thèse. Intégrale, Longueur, Aire. p. 71 et 72.

nombre positif G tel que, $y_1 - y$ étant différent de zéro, on ait

$$\left|\frac{f(x, y_1) - f(x, y)}{y_1 - y}\right| < G.*$$

La définition de la deuxième classe sera donnée dans la suite de cette étude, et l'aire sera, dans ce cas, représentée par une intégrale double.

Dans ces deux cas nous aurons

$$T_1 = T_6 = t$$

t étant une certaine quantité (voir Chap. VI) facile à former.

Après cela nous décrirons brièvement la quadrature de la surface générale $z = f(x, y)$, mais nous remarquons, que nous n'avons pu démontrer autre chose que l'équation

$$T_1 = T_4 = t.$$

Enfin nous indiquerons la quadrature de la surface rectifiable; chez cette classe des R on a

$$T_1 = T_6.$$

Dans le Chapitre II nous allons expliquer l'emploi de quelques notations, dont l'usage nous paraît être de grand utilité.

Chapitre II.

Division de l'intervalle et du rectangle. Formation des limites. Suite de divisions à quotient fini.

1. Nous dirons que les points

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_l = a$$

forment une division X_l de l'intervalle $(0, a)$, le nombre l étant, bien entendu, fini. Les points x_i sont les points diviseurs de la division, les intervalles (x_i, x_{i+1}) en sont les intervalles.

2. Nous dirons qu'une suite de divisions $X_{l_1}, X_{l_2}, \ldots X_{l_r}, \ldots$ est une suite de première espèce, lorsque les points de X_{l_r} se trouvent parmi les points de $X_{l_{r+1}}$ $(r = 1, 2, \ldots)$.

3. Etant donnée une suite de divisions, de première espèce ou non, $X_{l_1}, X_{l_2}, \ldots$, nous supposerons qu'il corresponde à chaque

---

* Il résulte de cette condition, connue sous le nom de condition de Lipschitz, que les longueurs des sections $x = \text{const.}$ sont plus petites que $(1 + G^2)^{\frac{1}{2}} \cdot b$.

nombre $\lambda > 0$ un nombre entier positif k, tel que si $r > k$, les longueurs des intervalles de X_{l_r} soient plus petites que λ.

4. Etant donnée une division X_l, nous ferons correspondre à chaque intervall (x_i, x_{i+1}) de X_l une valeur $[i]$. La somme de ces valeurs, en nombre l, sera désignée par $X_l[i]$.

5. Etant donnée une suite de divisions X_{l_r}, nous désignerons $\lim\limits_{r=\infty} X_{l_r}[i]$ par $X_{l_\infty}[i]$, et, si $X_{l_\infty}[i]$ est indépendant de la suite des divisions, nous désignerons cette quantité par $X[i]$.

6. Soit $0 \leqq u < v \leqq a$ et soit ${}^uX_{l_r}^{v'}[i]$ la somme des $[i]$, dont les intervalles correspondants (x_i, x_{i+1}) sont contenus dans (u, v), et ${}^uX_{l_r}^{v''}[i]$ la somme des $[i]$ dont les intervalles correspondants ont au moins un point commun avec (u, v).

Lorsque

$$\lim_{r=\infty} {}^uX_{l_r}^{v'}[i] = \lim_{r=\infty} {}^uX_{l_r}^{v''}[i]$$

nous désignerons cette valeur par ${}^uX_{l_\infty}^{v}[i]$, et lorsque ${}^uX_{l_\infty}^{v}[i]$ sera indépendante de la suite de divisions, nous la désignerons simplement par ${}^uX^v[i]$.

7. Nous dirons qu'une division de $(0, a)$ a le quotient (égal ou supérieur à) u, lorsque le quotient des longueurs de deux intervalles quelconques de la division est plus grand que u. Ces quotients sont donc tous plus petits que $\frac{1}{u}$, et u est nécessairement $\leqq 1$.

8. Nous dirons que la suite de divisions X_{l_r} $(r = 1, 2, \ldots)$ a un quotient fini, lorsqu'il existe un nombre $u > 0$, tel que chaque division de la suite ait un quotient u.

9. Etant donné un ensemble X de points, en nombre fini, situés sur $(0, a)$, on peut former une suite de divisions de première espèce X_{l_r}, ayant le quotient $\frac{1}{2}$, de manière que X_{l_1} contienne X — c'est à dire que les points de X se trouvent parmi les points de X_{l_1}.

Partageons l'intervalle $(0, a)$ en parties égales, de manière qu'entre deux points quelconques voisins de X, il y ait au moins cinq parties égales. Les points de X_{l_1} seront les points de X et les extrémités des intervalles égaux, sauf celles qui sont voisines des points de X. X_{l_2} se construit de la même manière à l'aide des points de X_{l_1}.

10. Soit $\frac{1}{2}$ le quotient de $X_{l'}$. Prenons dans chacun des intervalles (x_2, x_3), $(x_4, x_5) \ldots (x_{2s}, x_{2s+1})$ $(2s+1 \leqq l-1 < 2s+2)$ de X_l un point d'ailleurs arbitraire. La division formée par ces points aura le quotient $\frac{1}{6}$.

11. Etant donnée une division X_n de $(0, a)$ si nous formons une division $X_{l'}$, au quotient $\frac{1}{2}$ et contenant X_n (No. 9), et si de $X_{l'}$ nous déduisons la division X_l au quotient $\frac{1}{6}$ et contenant X_n (No. 10), le quotient $\frac{l}{l'}$ sera plus grand que $\frac{1}{4}$ et le quotient $\frac{n+1}{l}$ sera plus petit qu'un nombre arbitraire donné à l'avance. Il suffit pour cela de prendre le nombre l' assez grand.

12. Soit X_l une division du côté $(0, a)$ et Y_m une division du côté $(0, b)$ de $(0, a; 0, b)$. Les points de Y_m étant

$$0 = y_0 < \cdots < y_j < y_{j+1} < \cdots < y_m = b,$$

les lignes $x = x_i$, $y = y_j$, partagent $(0, a; 0, b)$ en lm rectangles.

Nous nommerons cette figure une division (rectangulaire) de $(0, a; 0, b)$. Les lignes $x = x_i$, $y = y_j$ en sont les lignes diviseurs, leurs points communs sont les sommets de la division, les rectangles $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ en sont les rectangles. Le symbole de la division est $X_l Y_m$.

13. $X_{l_r} Y_{m_r}$ $(r = 1, 2 \ldots)$ étant une suite de divisions, nous supposerons que la suite X_{l_r} et la suite Y_{m_r} ont la propriété désignée dans le No. 3.

La suite $X_{l_r} Y_{m_r}$ est de première espèce si les suites X_{l_r} et Y_{m_r} le sont aussi.

14. Nous ferons correspondre une valeur $[i, j]$ à chacun des $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$. Soit $X_l Y_m [i, j]$ la somme de ces valeurs en nombre lm.

15. Si
$$\lim_{r=\infty} X_{l_r} Y_{m_r} [i, j]$$
est déterminé, son symbole sera

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} [i, j],$$

et si cette dernière valeur est indépendante de la suite $X_{l_r} Y_{m_r}$, son symbole sera simplement

$$XY[i, j].$$

16. Si les suites X_{l_r} et Y_{m_r} ont un quotient finie u et si de plus

$$\frac{x_{i+1}-x_i}{y_{j+1}-y_j} \text{ et } \frac{y_{j+1}-y_j}{x_{i+1}-x_i},$$

$$(i=0,1\ldots l_r-1;\ j=0,1,\ldots m_r-1;\ r=1,2\ldots)$$

sont $\geqq u$, nous dirons que la suite $X_{l_r}\,Y_{m_r}$ a un quotient fini u.

Il est aisé de voir qu'il existe deux constantes U et V indépendantes de r, telles que

$$+\infty > U \geqq 1 \geqq V > 0,$$

et telles que, pour un certain nombre entier q_r — qui varie (en croissant) avec r, on ait:

$$l_r = L_r\cdot q_r,\ m_r = M_r\cdot q_r,\ x_{i+1}-x_i = \frac{A_r^{(i)}}{q_r},$$

$$y_{j+1}-y_j = \frac{B_r^{(j)}}{q_r},\ (x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j) = \frac{P_r^{(i,j)}}{q_r^2},$$

L_r, M_r, $A_r^{(i)}$, $B_r^{(j)}$, $P_r^{(i,j)}$ étant compris entre U et V et étant variables avec r, i et j. On peut prendre $q_r = l_r$.

17. Les signes Y et ${}^uY^v$ ont une signification analogue à celle des signes X et ${}^uX^v$. (No. 5. 6).

Il est aisé de voir que les signes X_l et Y_m sont employés à la place du signe connu Σ et qu'ils en ont les mêmes propriétés. Par exemple:

$$X_l Y_m[i,j] = X_l[Y_m[i,j]] = Y_m[X_l[i,j]].$$

18. Dans ce que suit l'expression »suite de divisions« désignera toujours une suite de divisions de première espéce.

Dans le chapitre suivant, nous décrirons quelques propriétés de la fonction semicontinue, et nous désignerons une grande partie des quantités géométriques, qui se présentent pour la surface

$$z = f(x, y).$$

Chapitre III.

Fonction semicontinue. Intégrale par défaut. Oscillation, longueur et autres quantités.

1. Soit la fonction réelle $z=\psi(x)$ définie pour toutes les valeurs de x, comprises dans $(0, a)$. Soient ε et η deux quan-

tités positives, et soit $g^{\psi}(x-\varepsilon, x+\eta)$ la limite inférieure des valeurs de z, dont l'argument x se trouve à la fois dans $(x-\varepsilon, x+\eta)$ et dans $(0, a)$.

Si la fonction ψ est telle que pour chaque x de $(0, a)$ on ait

$$\psi(x) = \lim_{\varepsilon+\eta=0} g^{\psi}(x-\varepsilon, x+\eta),$$

nous dirons que ψ est une fonction semicontinue (inférieurement).*

La fonction semicontinue est uniforme par définition pour chaque valeur de x.

Si $\psi(x') = +\infty$, il existe pour chaque nombre K donné à l'avance, deux valeurs positives ε, η, telles que $\psi(x) > K$ pour chaque point x de $(x'-\varepsilon, x'+\eta)$.

Dans chaque intervalle partiel de $(0, a)$, par exemple dans l'intervalle (u, v), il existe au moins un point x', tel que $\psi(x') = g^{\psi}(u, v)$; c'est à dire que $\psi(x)$ a un minimum dans chaque intervalle.

L'ensemble des valeurs des minima de $\psi(x)$ est dénombrable. L'ensemble des points x' pour lesquels il existe un intervalle $(x'-\varepsilon, x'+\eta)$, $(\varepsilon > 0, \eta > 0)$, de manière que, pour les $x \neq x'$ de l'intervalle, on ait $\psi(x) > \psi(x')$, est dénombrable. C'est à dire que l'ensemble des minima essentiels est dénombrable.

On peut trouver un ensemble dénombrable de points partout dense dans $(0, a)$, et tel qu'en désignant par $g'^{\psi}(x-\varepsilon, x+\eta)$ la limite inférieure des valeurs de $\psi(x)$, pour les points de l'ensemble qui se trouvent dans $(x-\varepsilon, x+\eta)$, on ait pour chaque point x de $(0, a)$

$$\psi(x) = \lim_{\varepsilon+\eta=0} g'^{\psi}(x-\varepsilon, x+\eta).$$

Etant donné une constante d, l'ensemble des x pour lesquels $\psi(x) \leqq d$ est relativement parfait (fermé).

Soit δ un nombre positif, donné à l'avance. On peut trouver pour chaque x' un voisinage $(x'-\varepsilon, x'+\eta)$, tel que, pour les x

* Les propriétés de la fonction semicontinue décrites dans ce No. sont dues (sauf peut-être celles sur les minima) à M. Baire. Voir: Sur les fonctions de variables réelles. Thèse, 1899. P. 6 et suiv.

de ce voisinage on ait

$$\psi(x') - \psi(x) < \delta^*.$$

Et inversement une fonction uniforme, montrant la propriété précédente est semicontinue.

La fonction semicontinue générale, même dans le cas, où ses valeurs sont toutes comprises entre des limites finies, n'est intégrable dans aucun intervalle partiel de $(0, a)$.

Une telle fonction a une expression analytique. Si la fonction est bornée inférieurement, on a

$$\psi(x) = \varphi_0(x) + \sum_1^\infty {}_h \varphi_h(x),$$

φ_0 et φ_h étant des fonctions continues, et $\varphi_h \geqq 0$. Inversement, la somme d'une telle série est toujours une fonction semicontinue, bornée inférieurement.

Dans chaque intervalle $(0, a)$ il y a des points x pour lesquels $\psi(x)$ est continue.

La somme de plusieurs fonctions semicontinues est aussi une fonction semicontinue.

L'ensemble des fonctions semicontinues a la même puissance que le continu.

2. Soit $z = \varphi(x)$ une fonction quelconque, définie pour les points de $(0, a)$. Son intégrale par défaut est la quantité

$$Xg^\varphi(x_i, x_{i+1}) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Le symbole de l'intégrale par défaut est

$$\underset{0}{\overset{a}{\underline{\int}}} \varphi(x) dx^{**}.$$

Nous remarquons qu'il-y-a des fonctions semicontinues $\psi(x)$, bornées inférieurement, telles que, dans chaque intervalle partiel de $(0, a)$, il ait des points x' pour lesquels $\psi(x') = +\infty$, et

* On doit prendre

$$+\infty - \psi(x) = \frac{1}{\psi(x)}, \quad \frac{1}{+\infty} = 0.$$

** Darboux. Mémoire sur les fonctions discontinues. Annales de l'Ecole Normale 1875.

$$\frac{\int_0^\alpha \psi(x)\,dx}{}$$

a néanmoins une valeur finie. Soit K un nombre positif donné à l'avance. L'ensemble des x pour lesquels $\psi(x) > K$, est formé de points, intérieurs à une infinité dénombrable d'intervalles (u_h, v_h) $(u_h \leqq v_h)$, n'ayant aucun point intérieur commun.

$$\frac{\int_0^\alpha \psi(x)\,dx}{}$$

ayant une valeur finie, en prenant K assez grand, les quantités

$$\sum_1^\infty{}_h (v_h - u_h),\quad K\sum_1^\infty{}_h (v_h - u_h),\quad \sum_1^\infty{}_h \int_{u_h}^{v_h} \psi(x)\,dx$$

sont aussi petites que l'on veut.

3. Soit $J_y(x, y)$ l'oscillation de la section $x = \text{const.}$ de la surface $z = f(x, y)$ dans l'intervalle $(0, y)$, c'est à dire la quantité

$${}^0Y^y\,|f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)|,$$

et soit

$$J_x(x, y) = {}^0X^x\,|f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y)|.$$

Soit de plus $S_y(x, y)$ la longueur de la section $x = \text{const.}$ dans $(0, y)$, c'est à dire

$$S_y(x, y) = {}^0Y^y[(y_{j+1} - y_j)^2 + (f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j))^2]^{\frac{1}{2}},$$

et de même

$$S_x(x, y) = {}^0X^x[(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y))^2]^{\frac{1}{2}}.$$

On a $y \geqq S_y(x, y) - J_y(x, y) > 0.$*

4. Posons

$$Y_{m_r}[(y_{j+1} - y_j)^2 + (f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j))^2]^{\frac{1}{2}} = m_r(x),$$

$$X_{l_r}[(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y))^2]^{\frac{1}{2}} = l_r(x).$$

On a $m_{r+1}(x) \geqq m_r(x)$. Il est évident que les fonctions $m_r(x)$ et $l_r(y)$ sont des fonctions bornées et continues.

* SCHEEFFER. Allgemeine Untersuchungen über die Rectifikation der Kurven. Acta Mathematica. T. V. 1884. JORDAN, Cours d'anal. 2. éd. 1. Paris 1893, p. 100.

5. Posons

$$J_y(x, b) = J(x),\ J_x(a, y) = J(y),\ S_y(x, b) = S(x),\ S_x(a, y) = S(y).$$

On a
$$S(x) \geqq m_r(x),\quad S(y) \geqq l_r(y),$$
$$S(x) = \lim_{r=\infty} m_r(x),\quad S(y) = \lim_{r=\infty} l_r(y).$$

Pour notre surface on aura
$$J(x) < G\,b,\ S(x) < (1 + G^2)^{\frac{1}{2}} b,$$
G étant le nombre défini à la fin du Chap. I.

6. $J(x)$ et $S(x)$ sont à la fois finies ou infinies. Il en est de même pour $J(y)$ et $S(y)$.

7. Soit $y'' > y'$, on aura
$$S_y(x, y'') - S_y(x, y') \geqq y'' - y',\ J_y(x, y'') - J_y(x, y') \geqq 0.$$

Les premiers membres de ces inégalités sont des fonctions semicontinues de x.

Remarque 1. On se persuade aisément que $S(x)$ est une fonction semicontinue*. Les lignes courbes $z = \frac{b}{n} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ont la même longueur dans $(0, b)$, et elles peuvent évidemment former les sections $x = \frac{a}{n}$ d'une surface. La section $x = 0$ est évidemment l'axe des y et sa longueur est b, tandis que la longueur des lignes décrites est $> b \cdot 5^{\frac{1}{2}}$.

J'ai démontré, dans un de mes travaux publiés en langue hongroise que, $\psi(x)$ étant une fonction semicontinue bornée, et telle que $\psi(x) \geqq b$, il existe une surface $z = f(x, y)$ pour laquelle $S(x) = \psi(x)$. Nous devons donc considérer $S(x)$ comme une fonction semicontinue générale.

Remarque 2. $S(x)$ et $J(x)$ sont des fonctions ponctuellement discontinues; elles ont donc dans chaque intervalle des points de continuité communs. Là, où $S(x)$ est continue, $J(x)$ l'est aussi, mais la réciproque n'est pas vraie.

Lorsque $S_y(x, y)$ est continue pour $x = x'$, $y = y'$, elle est aussi continue pour $x = x'$, $y \leq y'$. De même pour $J_y(x, y)$. La fonction $J_y(x, y)$ montre plus de généralité que $S_y(x, y)$.

---

* Lebesgue, Thése, p. 114.

8. Soit $f_{i,j}$ la portion de la surface $z = f(x, y)$, située sur $(x_i, x_{i+1};\ y_j, y_{j+1})$. Désignons par A, B, C, D, les points de $f_{i,j}$ dont les coordonnées x et y sont respectivement

$$x_i,\ y_j,\quad x_i,\ y_{j+1},\quad x_{i+1},\ y_{j+1},\quad x_{i+1},\ y_j,$$

et soient A_1, B_1, C_1, D_1, les projections orthogonales de ces points sur le plan xy, A_2, B_2, C_2, D_2, leurs projections sur le plan xz et A_3, B_3, C_3, D_3 leurs projections sur le plan yz.

9. Soit $\alpha_{i,j} = (x_{i+1} - x_i) \cdot (y_{j+1} - y_j)$ l'aire de $(x_i,\ x_{i+1};\ y_j, y_{j+1})$, et posons

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)|\, dx = \beta_{i,j},\quad \int_{y_j}^{y_{j+1}} |f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y)|\, dy = \gamma_{i,j}.$$

Il est aisé de voir, par exemple que $\beta_{i,j}$ est l'aire limitée par la projection du contour de $f_{i,j}$.

10. Soit $$[\alpha_{i,j}^2 + \beta_{i,j}^2 + \gamma_{i,j}^2]^{\frac{1}{2}} = \tau_{i,j}.$$

11. Soient

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (J_y(x, y_{j+1}) - J_y(x, y_j))\, dx = \bar{\beta}_{i,j},$$

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} (J_x(x_{i+1}, y) - J_x(x_i, y))\, dy = \bar{\gamma}_{i,j}.$$

12. Soit $$[\alpha_{i,j}^2 + \bar{\beta}_{i,j}^2 + \bar{\gamma}_{i,j}^2]^{\frac{1}{2}} = \tau'_{i,j}.$$

13. Soient les distances positives

$$\overline{AB} = d^y_{i,j},\quad \overline{BC} = d^x_{i,j+1},\quad \overline{CD} = d^y_{i+1\,j},\quad \overline{AD} = d^x_{i,j}.$$

Considérons la figure constituée par les lignes

$$\overline{A_2B_2},\quad \overline{B_2C_2},\quad \overline{C_2D_2},\quad \overline{D_2A_2},$$

Cette figure peut être 1°. une ligne, 2°. un triangle, 3°. un parallélogramme, 4°. un trapèz, 5°. un quadrilatère dont les côtés $\overline{A_2B_2}$, $\overline{C_2D_2}$ étant comme toujours parallèles sont différents de zéro et dont les côtés $\overline{A_2D_2}$ $\overline{B_2C_2}$ se coupent en un point O_2.

Soit $b_{i,j}$ l'aire limitée par le contour $A_2B_2C_2D_2$. Dans les quatre premiers cas on a

$$b_{i,j} = \tfrac{1}{2}\,(x_{i+1} - x_i) \cdot (\overline{A_2B_2} + \overline{C_2D_2}).$$

Dans le 5ième cas, $b_{i,j}$ est égal à la somme des aires des deux triangles $A_2 B_2 O_2$ et $O_2 C_2 D_2$. Les aires de ces triangles sont, bien entendu, positives.

L'aire limitée d'une manière analogue par le contour $A_3\ B_3\ C_3\ D_3$ est désignée par $c_{i,j}$.

15. Soit

$$[\alpha^2_{i,j} + b^2_{i,j} + c^2_{i,j}]^{\frac{1}{2}} = n_{i,j}.$$

16. Soient

$$\tfrac{1}{2}(x_{i+1} - x_i) \cdot (\overline{A_2 B_2} + \overline{C_2 D_2}) = b'_{i,j},$$
$$\tfrac{1}{2}(y_{j+i} - y_j) \cdot (\overline{A_3 D_3} + \overline{B_3 C_3}) = c'_{i,j},$$
$$[\alpha^2_{i,j} + b'^2_{i,j} + c'^2_{i,j}]^{\frac{1}{2}} = n'_{i,j}.$$

17. Soit dans la section $x_i = \text{const.}$, $\theta^y_{i,j}$ l'aire limitée par la corde $\overline{AB}$ et par l'arc $\widehat{AB}$; on aura

$$\theta^y_{i,j} = \int_{y_j}^{y_{j+1}} \left| f(x_i, y) - \frac{f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_j)}{y_{j+1} - y_j}(y - y_j) - f(x_i, y_j) \right| dy.$$

Soit $\theta^y_{i+1,j}$ l'aire limitée par $\overline{CD}$ et $\widehat{CD}$. Soit, dans la section $y_j = \text{const.}$, $\theta^x_{i,j}$ l'aire limitée par $\overline{AD}$ et $\widehat{AD}$, et soit de même $\theta^x_{i,j+1}$ l'aire limitée par $\overline{BC}$ et $\widehat{BC}$.

Inégalités entre les quantités définies ci-dessus.

On obtient, par l'emploi des considérations géométriques simples, et par l'emploi de quelques-unes des inégalités du Chapitre qui va suivre, les inégalités suivantes.

$$|b_{i,j} - \beta_{i,j}| \leq \theta^x_{i,j} + \theta^x_{i,j+1}, \quad |c_{i,j} - \gamma_{i,j}| \leq \theta^y_{i,j} + \theta^y_{i+1,j}.$$
$$\tau_{i,j} \leq \alpha_{i,j} + \beta_{i,j} + \gamma_{i,j}, \quad n_{i,j} \leq \alpha_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j},$$
$$|\tau_{i,j} - n_{i,j}| \leq \theta^x_{i,j} + \theta^x_{i,j+1} + \theta^y_{i,j} + \theta^y_{i+1,j},$$
$$n_{i,j} \leq n'_{i,j} \leq ABC + ADC.$$

18. Soient

$$S_y(x_i, y_{j+1}) - S_y(x_i, y_j) = s^y_{i,j},$$
$$S_x(x_{i+1}, y_j) - S_x(x_i, y_j) = s^x_{i,j}.$$

19.

$$s^y_{i,j} - d^y_{i,j} = \delta^y_{i,j}, \quad s^x_{i,j} - d^x_{i,j} = \delta^x_{i,j}.$$

On a évidemment

$$\delta^y_{i,j} \geq 0, \quad \delta^x_{i,j} \geq 0.$$

20. $\theta^x_{i,j}$ est au plus égal à l'aire d'une ellipse, dont la distance focale est $d^x_{i,j}$, et dont la grand axe est

$$s^x_{i,j} = d^x_{i,j} + \delta^x_{i,j}.$$

Si $\theta^x_{i,j}$ était plus grand que l'aire de l'ellipse, $\widehat{AD}$ aurait des points P à l'exterieur de cette ellipse (dont la distance focale coïncide avec $\overline{AD}$ et qui est située dans le plan $y = y_j$), on aurait donc

$$\overline{AP} + \overline{PD} > s^x_{i,j},$$

ce qui est impossible; on a, en effet, d'après la définition de la longueur

$$\overline{AP} + \overline{PD} \leqq s^x_{i,j}.$$

On trouve que

$$\theta^x_{i,j} \leqq \frac{2^{\frac{1}{2}}\pi}{4} s^{x^{\frac{3}{2}}}_{i,j} \delta^{x^{\frac{1}{2}}}_{i,j}.$$

Et par des considérations analogues, rélatives à un rectangle et à un cercle on trouve

$$\theta^x_{i,j} \leqq (x_{i+1} - x_i) s^x_{i,j}, \quad \theta^x_{i,j} \leqq \pi (s^x_{i,j})^2.$$

Soit AB la longueur finie d'une courbe à double courbure et soient A et B ses extremités.

Joignons les points de l'arc $\widehat{AB}$ par des distances rectilignes à des points quelconques de $\overline{AB}$.

Projetons la figure orthogonalement sur un plan quelconque. La mesure extérieure* de cette figure ou son aire (lorsqu'elle existe) est au plus égale à

$$\frac{2^{\frac{1}{2}}\pi}{4} \widehat{AB}^{\frac{3}{2}} (\widehat{AB} - \overline{AB})^{\frac{1}{2}}$$

Car la figure est à l'intérieur d'un ellipsoide de revolution autour de l'axe $\overline{AB}$, ayant pour méridienne l'ellipse, dont les foyers sont A et B, et dont la grand axe est égal à $\widehat{AB}$, et la projection orthogonale de l'ellipsoide de revolution sur un plan quelconque a une aire au plus égale à celle de sa méridienne.

---

* Dans le sens déjà cité de M. Jordan.

Chapitre IV.
Inégalités arithmétiques.

Voici, sans démonstration, parmi les quelques inégalités dont nous aurons besoin, celles qui ne sont pas d'une évidence immédiate:

Dans ce chapitre chaque lettre désigne une quantité non négative.

1. $[(A-a)^2+(B-b)^2+(C-c)^2]^{\frac{1}{2}} \geqq [A^2+B^2+C^2]^{\frac{1}{2}}-a-b-c.$

2. $$[A^2+B^2+C^2]^{\frac{1}{2}}+b+c \geqq [A^2+(B+b)^2+(C+c)^2]^{\frac{1}{2}} \geqq [A^2+B^2+C^2]^{\frac{1}{2}}.$$

3. Étant
$$A \leqq \sum_1^n{}_h a_h, \quad B \leqq \sum_1^n{}_h b_h, \quad C \leqq \sum_1^n{}_h c_h,$$
on a
$$[A^2+B^2+C^2]^{\frac{1}{2}} \leqq \sum_1^n{}_h [a_h^2+b_h^2+c_h^2]^{\frac{1}{2}} \leqq \sum_1^n{}_h (a_h+b_h+c_h).$$

4. Soit $C_1+C_2 \geqq \varepsilon$ et
$$[A_1^2+B_1^2+C_1^2]^{\frac{1}{2}}+[A_2^2+B_2^2+C_2^2]^{\frac{1}{2}} = [(A_1+A_2)^2+(B_1+B_2)^2+(C_1+C_2-\varepsilon)^2]^{\frac{1}{2}}+\lambda,$$
λ est nécessairement $\geqq 0$ et
$$|A_1B_2-A_2B_1|$$
$$\leqq 2[A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2]^{\frac{1}{2}}[(A_1+A_2)^2+(B_1+B_2)^2+(C_1+C_2)^2]^{\frac{1}{4}}\lambda^{\frac{1}{2}}$$
$$+\{2[A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2]^{\frac{1}{2}}+[(A_1+A_2)^2+(B_1+B_2)^2+(C_1+C_2)^2]^{\frac{1}{2}}\}\lambda+\lambda^2.$$

Soit de plus D au moins égal à la plus grande des
$$A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2,$$
alors
$$|A_1B_2-A_2B_1| \leqq 10.(D^{\frac{3}{2}}\lambda^{\frac{1}{2}}+D\lambda+\lambda^2).$$

5. Si
$$\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_q \leqq \delta,$$
on aura
$$\delta_1^{\frac{1}{2}}+\delta_2^{\frac{1}{2}}+\cdots+\delta_q^{\frac{1}{2}} \leqq q^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}}.$$

Chapitre V.

Indication des surfaces ayant une aire finie.

1. $\underline{\int_0^a} J(x)dx$ et $\underline{\int_0^a} S(x)dx$ sont toutes à la fois finies ou infinies.

2.
$$\underline{\int_0^a} J(x)dx = Y_{m_r}\Big(\underline{\int_0^a}(J_y(x, y_{j+1}) - J_y(x, y_j))\, dx\Big)$$
$$= Y\Big(\int_0^a |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)|\, dx\Big) = XY\beta_{i,j}.$$

3. Soit
$$XY\tau_{i,j} = XY\tau'_{i,j} = t.$$
t et la somme des deux intégrales par défaut
$$\underline{\int_0^a} J(x)\, dx, \underline{\int_0^b} J(y)\, dy$$
sont à la fois finies ou infinies.*

4. Les surfaces qui ont une aire $(T_1, \ldots, T_6)$ finie, sont celles pour lesquelles t est fini. De même, si l'aire est finie, t est aussi fini.

5. Il existe pour chaque surface, ayant une aire infinie, un ensemble de points situé sur elle et relativement parfait, tel que l'aire d'une portion de la surface soit finie ou infinie, suivant que cette portion ne contient aucun point de l'ensemble, ou renferme au moins un point de cet ensemble. Si nous donnons un ensemble relativement parfait, situé dans $(0, a;\ 0, b)$ il y a des surfaces sur $(0, a;\ 0, b)$ pour lesquelles l'ensemble décrit ci dessus a comme projection sur le plan xy l'ensemble donné.

Il y a en particulier des surfaces, dont l'aire est infinie pour chaque portion arbitraire de la surface.

Remarque. On a un théorème analogue pour la longueur d'une ligne courbe $z = \varrho(x)$, ϱ étant une fonction uniforme, bornée et continue de x.

---

* Voir: Z. de Geöcze: A $z = f(x, y)$ felület quadraturája. Elsö rész. 1906. Ungvár. Comptes Rendus 1907, fév. 14.

6. En admettant ces théorèmes que nous donnons sans démonstrations, il résulte des No. 3., 4. et de la fin du Chap. I que l'aire de notre première surface est finie.

Chapitre VI

Pour notre surface $XY\tau_{ij}$ existe, et $\lim\limits_{s=\infty} \Delta_s t \geqq t$.

1. Pour notre surface t est fini et déterminé, c'est à dire que $XY\tau_{i,j}$ existe et a une valeur finie.

Pour démontrer ce fait, nous remarquerons que

$$Y_{m_r}\beta_{i,j} = Y_{m_r}\int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)|\, dx$$

$$= \int_{x_i}^{x_{i+1}} Y_{m_r} |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)|\, dx < \bar{S}(x_{i+1} - x_i)^*,$$

et de même

$$X_{l_r}\gamma_{i,j} < \bar{S}(y_{j+1} - y_j).$$

Désignons de plus par ε_r la limite supérieure des valeurs de

$$|f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)|, \quad |f(x_{i+1}, y) - f(x_i, y)|,$$

nous aurons $\lim\limits_{r=\infty} \varepsilon_r = 0$ — la surface étant continue.

On aura

$$X_{l_r}\beta_{i,j} < a\,\varepsilon_r, \quad Y_{m_r}\gamma_{i,j} < b\,\varepsilon_r$$

et de plus

$$X_{l_r} Y_{m_r}\beta_{i,j} < \bar{S}a, \quad X_{l_r} Y_{m_r}\gamma_{i,j} < \bar{S}b.$$

De la signification géometrique des $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$ on conclura qu'en partageant le rectangle $\alpha_{i,j}$ en plusieurs autres (n'impiétant l'un sur l'autre et remplissant $\alpha_{i,j}$) les quantités analogues à $\alpha_{i,j}$ ont pour somme $\alpha_{i,j}$, les quantités analogues à $\beta_{i,j}$ ont pour somme une valeur $\geqq \beta_{i,j}$, et de même pour les quantités analogues à $\gamma_{i,j}$.

Donc, si $X_{l_r} Y_{m_r}$ est une suite de divisions, il résulte du No. 3 du Chap. IV que la suite des valeurs de $X_{l_r} Y_{m_r}\tau_{i,j}$ est une suite de valeurs non décroissantes.

---

* Car on a

$$Y_{m_r} |f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)| \leqq J(x) < \bar{S}.$$

Dans tout ce que suit on pourrait prendre au lieu de $\bar{S}$ un J, tel que $J(x) < J$, $J(y) < J$.

Et on a

$$\tau_{i,j} \leqq \alpha_{i,j} + \beta_{i,j} + \gamma_{i,j}.$$

Donc

$$X_{l_r} Y_{m_r} \tau_{i,j} \leqq ab + \bar{S}(a+b),$$

et ainsi

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \tau_{i,j}$$

existe et a une valeur finie.

De plus, $X_{l'_r} Y_{m'_r}$ étant une suite quelconque de divisions (de première espèce ou non), les valeurs limites de la suite des valeurs $X_{l'_r} Y_{m'_r} \tau_{i,j}$ coïncident avec $X_{l\infty} Y_{m\infty} \tau_{i,j}$.

Ce théorème s'établit de la même manière que celle qui fut employée par L. SCHEEFFER, pour démontrer l'existence de la longueur d'une courbe, c'est à dire à l'aide de la superposition des divisions des deux suites, et de la continuité, ce principe étant exprimé par les quatre premières inégalités.

Donc $XY\tau_{i,j}$ existe et a une valeur finie.

2. $\varDelta_s$, ($s = 1, 2, \ldots$) étant une suite de polyèdres, telle que celles que nous avons décrites au Chap. I, nous allons démontrer que

$$\lim_{s=\infty} \varDelta_s t \geqq t.$$

Désignons par $\varDelta_s^{i,j}$ la partie de $\varDelta_s$ qui est située au-dessus de l'intérieur de $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ et au-dessus de $\overline{A_1B_1}\ \overline{A_1D_1}$.*

Soit $\varDelta_s^{i,j} t$ son aire. Nous prendrons s assez grand de façon que $\varDelta_s^{i,j}$ existe pour chaque i et j.

Soient $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ les aires des figures qu'on obtient en projetant orthogonalement les points de $\varDelta_s^{i,j}$ sur les plans xy, xz, yz. On voit qu'en prenant s assez grand, on aura ou $A_{i,j} = \alpha_{i,j}$, ou $|A_{i,j} - \alpha_{i,j}|$ aussi petit qu'on le veut, ou bien $B_{i,j} \geqq \beta_{i,j}$, ou $\beta_{i,j} - B_{i,j}$ aussi petit qu'on le veut; il en est de même pour $C_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$.

Mais d'après la géométrie élémentaire:

$$\varDelta_s^{i,j} t \geqq \left(A_{i,j}^2 + B_{i,j}^2 + C_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

ou, d'après ce qui précède:

* Il convient de remarquer qu'une ligne droite normale au plan xy peut couper $\varDelta_s$ en plusieurs points, et de plus que $\varDelta_s$ peut avoir des faces normales au plan xy de manière que $\varDelta_s^{i,j}$ peut être constitué par plusieurs portions, lignes polygonales et points isolés.

$$\Delta_s^{i,j} t \geqq \left(\alpha_{i,j}^2 + \beta_{i,j}^2 + \gamma_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}} - \lambda_{i,j},$$

en désignant par $\lambda_{i,j}$ une quantité positive telle, que la somme de tous les $\lambda_{i,j}$ soit plus petite que η_r, η_r étant une quantité positive donnée à l'avance.

On aura enfin, en faisant la somme pour tous les $\Delta_s^{i,j}$:

$$\Delta_s t \geqq X_{l_r} Y_{m_r} \tau_{i,j} - \eta_r,$$

et à la limite

$$\lim_{s=\infty} \Delta_s t \geqq t.$$

On démontre de la même manière que $X_{l_\infty} Y_{m_\infty} n_{i,j}$ et à fortiori $X_{l_\infty} Y_{m_\infty} n'_{i,j}$ sont au moins égaux à t, en supposant, bien entendu, qu'ils existent.

Remarquons que les deux théorèmes que nous venons de démontrer s'appliquent aussi à la surface générale $z = f(x, y)$.

Remarque. Ayant

$$ABC + ADC \geqq n'_{i,j} \geqq n_{i,j},$$

si l'on veut que pour notre première surface, pour une suite $X_{l_r} Y_{m_r}$, on ait

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} (ABC + ADC) = t,$$

on doit avoir

$$X_{l_\infty} Y_{m_\infty} n_{i,j} = t.$$

Dans le Chapitre suivant nous allons former une suite de divisions. Dans le Chap. VIII nous démontrerons que pour cette suite la condition signalée est remplie.

Chapitre VII.

Approximation des $S(x)$ par $m_r(x)$. Formation de certaines suites de divisions à quotient fini et ne dépendant que de la surface.

1. Soit δ une quantité positive donnée à l'avance. Soit g la valeur finie du minimum de $S(x)$ dans (x', x'') et soit $Y_{m_1}, Y_{m_2}, \ldots$, une suite de divisions.

Il existe alors un nombre entier s', tel que dans (x', x''),

$$g - m_s(x) < \delta,$$

si $s \geqq s'$.

Soit par exemple $S(x') = g$. Si k est assez grand, on aura $g - m_k(x') < \frac{\delta}{2}$, et $m_k(x)$ est continu. Par suite, ou bien on aura $g - m_k(x) < \delta$ dans l'intervalle total (x', x''), ou bien il existera un point x_1, situé à l'intérieur de (x', x''), tel que l'on ait $g - m_k(x) < \delta$ dans (x', x_1), mais $g - m_k(x_1) = \delta$. Mais, pour un certain $k_1 > k$, on a $g - m_{k_1}(x_1) < \frac{\delta}{2}\cdot$ Car

$$\lim_{k=\infty} m_k(x) = S(x) \geqq g.$$

Ou bien dans (x', x'') on a $g - m_{k_1}(x) < \delta$, ou bien il existe un x_2 et un k_2, étant en même relation avec x_1, comme x_1 et k_1 l'était avec x'.

Si, en continuant ce procédé, nous atteignons x'' à l'aide des points $x_1, x_2, \ldots$, en nombre fini, le théorème sera démontré, en prenant s' plus grand que le dernier des $k_1, k_2, \ldots$ Mais les points $x_1 < x_2 < \cdots < x_r < \cdots$, sont nécessairement en nombre fini*, car s'il n'en était pas ainsi, on aurait:

$$\lim_{r=\infty} x_r = \xi \leqq x''.$$

Soit $\xi < x''$; alors dans (x', ξ) et dans chaque voisinage de ξ, il y-aurait des points x tels que

$$g - m_s(x) \geqq \delta,$$

pour chaque nombre entier s. Mais il existe un nombre p, tel que

$$g - m_p(\xi) < \frac{\delta}{2}, \text{ car } S(\xi) \geqq g,$$

et comme $m_p(x)$ est continu, il existe pour ξ un voisinage pour lequel $g - m_p(x) < \delta$. Ainsi $\xi < x''$ est impossible, et l'on démontre de la même manière que $\xi = x''$ est aussi impossible.

On voit de plus aisément que, si δ est un nombre positif donné à l'avance, et X_l une division, on peut trouver un nombre entier s', tel que l'on ait si, $s \geqq s'$, pour chaque point x de (x_i, x_{i+1})

$$g^S(x_i, x_{i+1}) - m_s(x) < \delta, \quad (i = 0,1 \ldots, l-1).$$

2. Soit c et d respectivement la limite inférieure et supérieure des valeurs de $S(x)$ et soit d fini, comme pour notre surface.

---

* On peut démontrer le théorème à l'aide d'un théorème de M. Borel, généralisé par M. Lebesgue. Voir: Lebesgue. Leçons sur l'intégration. p. 105.

Soient δ et η des nombres positifs, donnés à l'avance, et soit $Y_{m_1}, Y_{m_2}, \ldots Y_{m_s}, \ldots$, une suite de divisions de $(0, b)$, d'ailleurs arbitraire.

Soit encore X_n une division de $(0, a)$.

Théorème. Il existe un nombre s' entier, positif, fini, et une division X_l de $(0, a)$ qui a pour quotient $\frac{1}{6}$, et qui contient X_n, de manière que, e étant le nombre des points diviseurs de X_l qui ne satisfont pas à l'inégalité

$$S(x_i) - m_s(x_i) < \delta,$$

on ait pour chaque $s \geqq s'$ l'inégalité

$$e < l \cdot \eta.$$

Démonstration.

a) Soit k un nombre assez grand pour qu'en partageant l'intervalle (c, d) en k parties égales, ces parties soient toutes moindres que $\frac{\delta}{2}$. Soient

$$c = c_0 < c_1 < \cdots < c_h < \cdots < c_k = d,$$

les extrémités de ces intervalles et soit S_1 l'ensemble de ces x pour lesquels $S(x) \leqq c_1$.

Cet ensemble existe, et il est relativement parfait (No. 1. Chap. III).

Soit d_1 sa mesure* qui peut être aussi égale à zéro.

Renfermons S_1 dans des intervalles en nombre fini, situés sur $(0, a)$ et ayant $d_1 + \varepsilon_1$ pour somme de leurs longueurs. Soit d_1' le nom collectif de ces intervalles. Si $d_1 < a$, on prend $\varepsilon_1 > 0$, mais $d_1 + \varepsilon_1 < a$.

Lorsque $d_1 < a$, les extrémités des d_1' sont prises de façon qu'elles ne soient pas des points de S_1, sauf peut être les points 0 et a.

Lorsque $d_1 < a$, soit S_2 l'ensemble qui n'a pas de points à

---

* La mesure (extérieure et linéaire) d'un ensemble situé sur $(0, a)$ est la quantité $X[i]$, $[i]$ étant égal à $x_{i+1} - x_i$ lorsque (x_i, x_{i+1}) contient au moins un point de l'ensemble, à 0 dans le cas contraire. On a $a \geqq X[i] \gtreqqless 0$. Il est impossible de renfermer l'ensemble dans un nombre limité d'intervalles, dont la somme des longueurs serait plus petite que d. Voir: Jordan, Cours d'analyse (2), Paris 1893, 1, p. 28.

l'intérieur des d_1' et dont les points 0 et a ne font pas partie quand ils appartiennent à des d_1', et dont les points satisfont à la condition $S(x) \leqq c_2$. Ces points satisfont aussi à la condition $S(x) > c_1$.

S_2 n'existe pas nécessairement. Mais lorsqu'il existe, il est relativement parfait, soit d_2 sa mesure ($d_2 \geqq 0$).

Renfermons S_2 dans des intervalles du nom collectif d_2', situés sur $(0, a)$ en nombre fini, n'ayant aucun point intérieur commun avec les d_1', et ayant $d_2 + \varepsilon_2$ pour somme de leurs longueurs.

Lorsque $d_1 + \varepsilon_1 + d_2 < a$, nous prenons $\varepsilon_2 > 0$, mais $d_1 + \varepsilon_1 + d_2 + \varepsilon_2 < a$; de plus les extrémités des d_2', sauf peut-être les points 0, a, et les extrémités des d_1', ne seront pas des points de S_2.

Dans le cas où S_2 n'existe pas, les d_2' peuvent être, si l'on veut, des intervalles arbitraires, mais ayant toutes les propriétés signalées ci-dessus ($d_2 = 0$!).

Lorsque $d_1 + \varepsilon_1 + d_2 < a$, soit S_3 l'ensemble des points x de $(0, a)$ qui ne sont situés ni à l'intérieur des intervalles d_1', d_2' ni aux extrémités communes des d_1', d_2', et dont les points 0 et a ne font pas partie, quand ils appartiennent à des d_1' ou à des d_2', et qui satisfont à la condition $S(x) \leqq c_3$.

Si S_3 existe il est aussi relativement parfait. Pour S_3 on aura $S(x) > c_2$. Soit d_3 la mesure de S_3.

Renfermons S_3 dans des intervalles, nommés d_3', en nombre fini, situés sur $(0, a)$, n'ayant aucun point intérieur commun avec les d_1' et d_2'. Les extrémités des d_3' qui ne sont pas des extrémités de $(0, a)$ et des d_1', d_2', ne doivent pas être des points de S_3.

Soit $d_3 + \varepsilon_3$ la somme des longueurs des d_3'. Si $d_1 + \varepsilon_1 + d_2 + \varepsilon_2 + d_3 < a$ on prendra $\varepsilon_3 > 0$, mais $d_1 + \varepsilon_1 + d_2 + \varepsilon_2 + d_3 + \varepsilon_3 < a$.

Lorsque S_3 n'existe pas, les d_3' peuvent être, si l'on veut, des intervalles arbitraires, ayant d'ailleurs les propriétés déjà signalées ($d_3 = 0$!). Et ainsi de suite.

Nous obtiendrons un nombre entier positif $p \leqq k - 1$, tel que

$$(d_1 + \varepsilon_1) + (d_2 + \varepsilon_2) + \cdots + (d_p + \varepsilon_p) + d_{p+1} = a,$$
$$\varepsilon_1 > 0 \ldots \varepsilon_p > 0.$$

Les extrémités des d_h' forment évidemment une division.

Donc, d'après le No. 1, il existe un nombre entier s', tel que pour les $s \geqq s'$, et tel que pour chaque point de d_h' on ait:

$$g_{d'_h} - m_s(x) < \frac{\delta}{2}, \quad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

en désignant par $g_{d'_h}$ la limite inférieure des valeurs de $S(x)$ pour les points de l'intervalle d_h' considéré. Bien entendu, $g_{d'_h}$ varie avec h, et même h étant invariable, $g_{d'_h}$ varie de l'un à l'autre des d_h'.

b) Soit X_l la division formée par les points de X_n et par les extrémités des d_h'. Formons une division $X_{l'}$ qui la contienne et qui ait pour quotient $\frac{1}{2}$ (No. 9. Chap. II).

La longueur de chaque intervalle de $X_{l'}$ est plus grande que $\frac{a}{2l'}$. Car s'il en existait un de longueur moindre, la longueur de chacun des autres ne pourrait être plus grande que $2 \cdot \frac{a}{2l'}$, la division ayant le quotient $\frac{1}{2}$ et

$$\frac{a}{2l'} + (l' - 1)\frac{a}{l'} < a.$$

Soit e_h' le nombre des intervalles de $X_{l'}$, situés dans les intervalles d_h', et dans lesquels on ne peut trouver aucun point satisfaisant à la condition

$$S(x) - m_s(x) < \delta.$$

Je dis que $e_h' \cdot \frac{a}{2l'} > \varepsilon_h$ est impossible.

Pour les points de S_h

$$S(x) - g_{d'_h} < \frac{\delta}{2}.$$

Car pour S_h on a

$$c_{h-1} < S(x) \leqq c_h, \quad c_{h-1} < g_{d'_h} \leqq c_h, \quad c_h - c_{h-1} < \frac{\delta}{2},$$

et dans les d_h' nous avons de plus

$$g_{d'_h} - m_s(x) < \frac{\delta}{2}$$

pour chaque x. C'est à dire que pour les points de S_h

$$S(x) - m_s(x) < \delta.$$

Donc S_h ne peut avoir de points dans les intervalles qui sont au nombre de e_h'.

Donc la mesure de S_h serait ainsi évidemment plus petite que

$$d_h + \varepsilon_h - e_h' \cdot \frac{a}{2\,l'} < d_h,$$

ce qui est impossible, la mesure de S_h étant d_h.

Donc

$$e_h' \cdot \frac{a}{2\,l'} \leqq \varepsilon_h, \quad \frac{e_h'}{l'} \leqq \frac{2\,\varepsilon_h}{a}.$$

Posons

$$e_1' + e_2' + \cdots + e_p' = e'.$$

c) Dans chaque intervalle de $X_{l'}$ qui n'a pas pour extrémité un point de X_n, nous choisirons un point qui, si cela est possible, satisfasse à la condition

$$S(x) - m_s(x) < \delta.$$

D'après ce qui précède, on ne trouve que e' points ne satisfaisant pas à cette inégalité.

Formons à l'aide de ces points une division X_l, ayant le quotient $\frac{1}{6}$ et contenant X_n (No. 10. Chap. II).

Nous aurons (e étant le nombre désigné dans le théorème du début)

$$e \leqq e' + n + 1,$$

car ces points en nombre e ne peuvent être que points des intervalles (en nombre e') désignés ci-dessus et des points de X_n.

Mais, lorsque l' est assez grand, nous aurons

$$l \geqq \frac{l'}{4}, \quad \text{(No. 11. Ch. II).}$$

Donc

$$\frac{e}{l} \leqq \frac{4e'}{l'} + \frac{4(n+1)}{l'} \leqq \frac{8(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_p)}{a} + \frac{4(n+1)}{l'},$$

en prenant donc

$$\varepsilon_h < \frac{a \cdot \eta}{16\,k}, \quad l' > \frac{8\,(n+1)}{\eta}$$

nous aurons

$$e < l \cdot \eta.$$

Le théorème est donc démontré.

2 bis. On voit que, dans le cas où $S(y)$ reste inférieur à une limite finie, on a le théorème correspondant.

Soit $X_{l_1}, \ldots X_{l_s}, \ldots$ une suite de divisions et soit Y_0 une division quelconque de $(0, b)$, donnée à l'avance. On peut former une division Y_m qui, ayant le quotient $\frac{1}{6}$, contienne Y_0 et dont les points, lorsque s est plus grand qu'une certaine s', satisfont à l'inégalité

$$S(y_j) - l_s(y_j) < \delta,$$

à l'exception de f points, avec $f < m \cdot \eta$.

Pour la construction de Y_m soient D_h', Y_{II}, $Y_{m'}$, les analogues des d_h', X_I et de $X_{l'}$ respectivement.

3. En prenant dans le No. 2 $X_l \equiv X_{l_1}$ au lieu de X_n, nous obtiendrons un X_{l_2} et ainsi de suite.

Théorème. Il existe donc une suite de divisions X_{l_r}, ayant le quotient $\frac{1}{6}$. X_{l_1} contient X_n. En prenant s assez grand, on a

$$S(x_i) - m_s(x_i) < \delta$$

pour les points de (chaque) X_{l_r}, à l'exception des points en nombre e_r, avec $e_r < l_r \cdot \eta$.

3bis. Si Y_0 est une division donnée, et si X_{l_1}, $X_{l_2}, \ldots$ $X_{l_s}, \ldots$ est une suite arbitraire de divisions il existe une suite de divisions $Y_{m_1}, \ldots Y_{m_r}, \ldots$ Cette suite a le quotient $\frac{1}{6}$, et Y_{m_1} contient Y_0. En prenant s assez grand, on a l'inégalité

$$S(y_j) - l_s(y_j) < \delta$$

pour les points de (chaque) Y_{m_r}, à l'exception de f_r points, avec $f_r < m_r \cdot \eta$.

4. Il est aisé de voir qu'on peut prendre la suite Y_{m_r} du No. 3bis au lieu de la suite Y_{m_s} du No. 2. De même, la suite X_{l_r} du No. 3 peut être prise au lieu de la suite X_{l_s} du No. 2bis.

Or en prenant r assez grand, la division Y_{m_r} du No. 3bis peut remplacer la division Y_{m_s} du théorème du No. 2, et de même la division X_{l_r}, du No. 3 peut remplacer la division X_{l_s} du No. 2bis.

A plus forte raison les divisions qui contiennent respectivement Y_{m_r} et X_{l_r} peuvent respectivement remplacer les divisions Y_{m_s} du No. 2 et X_{l_s} du No. 2bis.

5. Prenons donc X_{l_r} (3) au lieu de X_n (2) et Y_{m_r} (3bis) au lieu de Y_0 (2bis). Formons X_I (2b)) et Y_{II} (2bis). Par l'adjonction de quelques points elles seront «semblables».

On peut donc prendre $m' = l'$.
Formons X_l (2) et Y_m (2bis).
Alors.
a) X_l contient X_n (No. 2).
Y_m contient Y_0 (No. 2bis).
b) Pour les points de X_l on a

$$S(x_i) - m(x_i) < \delta,$$

à l'exception des points en nombre e, avec $e < l \cdot \eta$.

c) Pour les points de Y_m on a

$$S(y_j) - l(y_j) < \delta,$$

à l'exception des points en nombre f, avec $f < m \cdot \eta$.

d) La division $X_l Y_m$ a pour quotient la plus petite des deux quantités $\frac{b}{144a}$, $\frac{a}{144b}$.

Soit par exemple $b < a$. L'intervalle le plus petit de Y_m est $\geqq \frac{b}{6m-5}$, car Y_m a le quotient $\frac{1}{6}$ et

$$\frac{b}{6m-5} + (m-1) \cdot 6 \cdot \frac{b}{6m-5} = b.$$

De même, l'intervalle le plus grand de X_l est $\leqq \frac{6a}{l+5}$.
Mais

$$l' \geqq l \geqq \frac{l'}{4}, \quad m' \geqq m \geqq \frac{m'}{4}, \quad m' = l'.$$

Donc:

$$\frac{b}{6m-5} : \frac{6a}{l+5} = \frac{b}{6a} \cdot \frac{l+5}{6m-5} \geqq \frac{b}{6a} \frac{\frac{l'}{4}}{6l'} = \frac{1}{144} \cdot \frac{b}{a}.$$

6. On obtient enfin le théorème fondamental:
Soient δ_r, η_r positifs et soit

$$\lim \delta_r = 0, \quad \lim \eta_r = 0, \quad (r = \infty).$$

Il existe une suite de divisions $X_{l_r} Y_{m_r}$ à quotient fini, telle que les points de X_{l_r}, à l'exception de quelques-uns qui sont en nombre e_r, satisfont à la condition

$$S(x_i) - m_r(x_i) < \delta_r$$

et

$$e_r < l_r \cdot \eta_r.$$

Les points de Y_{m_r}, à l'exception de quelques-uns qui sont en nombre f_r, satisfont à la condition

$$S(y_j) - l_r(y_j) < \delta_r$$

et

$$f_r < m_r \cdot \eta_r.$$

De plus X_{l_r} et Y_{m_r} peuvent respectivement contenir une division X_{n_r}, Y_{0_r}, donnée à l'avance.*

On peut, si l'on veut, prendre $\eta_r = \delta_r$.

Nous ferons ce choix, et nous supposerons de plus

$$\delta_r > \delta_{r+1}, \quad \delta_1 < 1.$$

7. Si dans la démonstration du No. 2 on fait abstraction de la surface et si on ne considère $S(x)$ que comme une fonction semicontinue, on voit qu'en prenant δ assez petit et l' assez grand,

$$\tfrac{1}{2} X_l (S(x_i) + S(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i)$$

diffère aussi peu que l'on veut de

$$\underline{\int_0^a} S(x)\, dx.$$

On peut donc former certaines suites de divisions (à quotient fini), telles que l'on ait pour une fonction $\psi(x)$ bornée et semicontinue

$$\tfrac{1}{2} X_{l\infty} (\psi(x_i) + \psi(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) = \underline{\int_0^a} \psi(x)\, dx.$$

Remarquons que le théorème précédent est également vrai pour la fonction semicontinue non bornée supérieurement, mais bornée inférieurement et telle que

$$\psi(0) < +\infty, \quad \psi(a) < +\infty, \quad \underline{\int_0^a} \psi(x)\, dx < +\infty.$$

8. Pour arriver au théorème du No. 6, nous pouvons appliquer aussi la méthode suivante qui est plus méthodique.

a) On démontre le théorème du No. 7.

* Voir la note du Chap. I. et la fin du Chap. IX.

b) Soit $\psi(x)$ une fontion semicontinue bornée et non négative, et soit X_{l_r} une suite de divisions telle que l'on ait

$$\tfrac{1}{2} X_{l\infty}(\psi(x_i) + \psi(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) = \underline{\int_0^a} \psi(x)dx.$$

Soit λ un nombre positif, donné à l'avance. Soit A un ensemble dénombrable et partout dense des points dans $(0, a)$.

On peut choisir un nombre limité de points de A, tel que si x' et $x'' > x'$ en sont deux points quelconques voisins $x'' - x'$ est plus petit qu'un nombre positif donné à l'avance, et tel que pour les points de X_{l_r}, contenus dans (x', x''), pour les r assez grands, on ait

$$\psi(x_i) - g^{\psi}(x', x'') < \lambda,$$

à l'exception de certains d'entre eux.

Pour ces points exceptionnels la valeur de

$$d \cdot \sum (x_{i+1} - x_{i-1}) \quad (x_{-1} = 0,\ x_{l_r+1} = a)^*$$

est plus petite qu λ, — la somme étant étendue à tous les intervalles (x', x'') et à tous les points exceptionnels — d étant la limite supérieure des valeurs de $\psi(x)$.

c) On démontre le théorème du No. 9 du Chap. X, et on conclut par là que si l'on avait pour une suite X_{l_r}

$$\tfrac{1}{2} X_{l\infty}(\psi(x_i) + \varphi(x_i) + \psi(x_{i+1}) + \varphi(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i)$$
$$= \underline{\int_0^a} [\psi(x) + \varphi(x)]dx$$

on aurait

$$\tfrac{1}{2} X_{l\infty}[\psi(x_i) + \psi(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i) = \underline{\int_0^a} \psi(x)dx,$$

$$\tfrac{1}{2} X_{l\infty}[\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1})](x_{i+1} - x_i) = \underline{\int_0^a} \varphi(x)dx.$$

---

* Désignons par e le nombre des points exceptionnels. La suite X_{l_r} a un quotient fini. Il existe donc une constante positive C, telle que

$$(x_{i-1} - x_{i-1}) > \frac{C}{l_r} \cdot$$

Par là

$$d \cdot e \cdot \frac{C}{l_r} < \lambda,\ e < l_r \eta,\ \eta = \frac{\lambda}{d \cdot C} \cdot$$

d) En appliquant les théorèmes a) c) et b) à la fonction

$$S_y(x, b) + S_x\left(a, \frac{b}{a} \cdot x\right),$$

et en faisant usage du théorème du No. 1, on obtient le théorème du No. 6, en prenant $m_r = l_r$, $y_j = \frac{b}{a} \cdot x_j$.

e) On obtient, par des considérations analogues sur les fonctions semicontinues bornées inférieurement, le théorème suivant:

Soit l'aire de $z = f(x, y)$ finie, et soit de plus la longueur de son contour finie.

Soient $\varepsilon > 0$ et $\delta_r > 0$, avec $\lim\limits_{r=\infty} \delta_r = 0$, des nombres donnés à l'avance.

On peut construire une suite de divisions à quotient fini $X_{l_r} Y_{m_r}$, telle que, K étant une constante choisie arbitrairement au delà d'une certaine limite ne dépendant que de ε, on ait pour les points x_i de X_{l_r} vérifiant $S(x_i) \leqq K$,

$$S(x_i) - m_r(x_i) < \delta_r$$

à l'exception de certains d'entre eux et on a comme dans b) $K \sum (x_{i+1} - x_{i-1}) < \delta_r$.

Pour les points diviseurs pour lesquels $S(x_i) > K$ la somme des valeurs

$$S(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}),$$

est plus petite que ε.

Des relations analogues subsistent pour les points de Y_{m_r}.

On observe que la somme des aires des rectangles de $X_{l_r} Y_{m_r}$ pour lesquels l'une des côtés est une ligne diviseure x_i ou y_j pour laquelle on ait $S(x_i) > K$ ou $S(y_j) > K$, est plus petite que 2ε.

f) Étant données des surfaces $f^1, f^2, \ldots$ en nombre limité, on peut construire une suite de divisions $X_{l_r} Y_{m_r}$ ayant respectivement les propriétés de e) ou celle du théorème du No. 6. De plus, étant données de fonctions semicontinues bornées $s_y(x)$ et $s_x(y)$, définies respectivement dans $(0, a)$ et dans $(0, b)$, X_{l_r} et Y_{m_r} peuvent respectivement satisfaire au théorème 7), relativement à $s_y(x)$, $s_x(y)$.

9. Une propriété nouvelle et générale des fonctions d'une variable.

Soit $z = \varphi(x)$ une fonction bornée, uniforme ou non, et soit $\varphi(x) \geqq 0$.

Il est évident que, par l'addition d'une constante positive suffisamment grande, on pourra imposer à chaque fonction bornée les propriétés de φ.

Soit g_i et G_i les limites inférieure et supérieure des valeurs de φ pour les points de (x_i, x_{i+1}) et soit

$$g(x) = {}^0X^x g_i \cdot (x_{i+1} - x_i), \quad G(x) = {}^0X^x G_i \cdot (x_{i+1} - x_i),$$
$$g(0) = 0, \qquad G(0) = 0.$$

On aura $$g(x) \leqq G(x)$$

et $g(x)$, $G(x)$ sont des fonctions (uniformes) bornées, continues, non décroissantes — ce sont les intégrales par défaut et par excès de $\varphi(x)$, d'après la définition de M. DARBOUX.

Si, pour une certaine suite X_{l_r}, l'expression

$$\tfrac{1}{2}{}^0X^x(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i)$$

existe pour chaque x dans $(0, a)$ (faisant un choix ou non entre les valeurs de $\varphi(x_i)$ lorsque la fonction n'est pas uniforme) cette quantité est nécessairement comprise entre $g(x)$ et $G(x)$.

Et si $x_1 > x$, on a

$$0 \leqq g(x_1) - g(x) \leqq \tfrac{1}{2}{}^xX^{x_1}(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1}))(x_{i+i} - x_i) \leqq G(x_1) - G(x).$$

Soit $\mu(x)$ une fonction continue, avec $\mu(0) = 0$, et telle que pour chaque x_1 et x $(x_1 > x)$ on ait

$$g(x_1) - g(x) \leqq \mu(x_1) - \mu(x) \leqq G(x_1) - G(x).$$

Théorème. Il existe, dans ces conditions, une suite de divisions (de première espèce) X_{l_r} pour laquelle

$$\tfrac{1}{2}{}^0X^x_{l\infty}(\varphi(x_i) + \varphi(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) = \mu(x),$$

mais on doit remarquer que le choix de la valeur de $\varphi(x_i)$, lorsque φ n'est pas uniforme pour $x = x_i$, n'est pas arbitraire.

Remarque. μ est une fonction dont les nombres dérivés sont bornés.

En étendant ces discussions à certaines fonctions non bornées, μ pourra être non seulement une fonction continue à nombres dérivés non bornés mais de plus une fonction discontinue.

Chapitre VIII.

Quadrature à l'aide des quadrilatères gauches.

1. Nous emploierons fréquemment, dans ce qui va suivre, les signes $\overset{m}{=}$, $\overset{m}{<}$, $\overset{m}{>}$, dont la signification est la suivante. Soit posée par exemple l'inégalité affectée du signe m

$$a - b \overset{m}{<} c.$$

On doit multiplier — l'une des quantités, b par exemple, par un certain facteur B pour obtenir une inégalité ordinaire et exacte

$$a - B \cdot b < c.$$

L'inégalité dénuée du signe m

$$a - b < c$$

pourra en soi être inexacte.

Dans les cas que nous allons rencontrer, nous saurons toujours quelles sont les quantités que l'on doit multiplier et de plus nous verrons que, quoique la valeur du facteur varie d'une inégalité à l'autre, tous ces facteurs sont compris entre deux limites U et V, telles que

$$+\infty > U \geqq 1 \geqq V > 0.$$

On pourrait même déterminer la valeur de chacun de ces facteurs et de U et V, mais cela est inutile. Dans les conclusions que nous aurons à tirer, il suffira de savoir que U n'est pas égal à $+\infty$ et que V n'est pas égal à 0.

Nous éviterons ainsi la détermination effective et l'écriture de certaines valeurs, ce qui donnera plus de brièveté.

2. Nous écrirons, par exemple, pour la division du No. 6 du Chap. VII qui a un quotient fini,

$$l_r \overset{m}{=} m_r \overset{m}{=} q_r, \quad x_{i+1} - x_i \overset{m}{=} \frac{1}{q_r} \overset{m}{=} y_{j+1} - y_j, \quad \alpha_{i,j} \overset{m}{=} \frac{1}{q_r^2}.$$

(voir No. 16 Chap. II)

Pour notre surface on a, à cause de la condition relative à G:

$$s_{i,j}^y \overset{m}{=} \frac{1}{q_r}, \quad d_{i,j}^y \overset{m}{=} \frac{1}{q_r}, \quad b_{i,j} \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2},$$

$$\beta_{i,j} \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2}, \quad A_2 B_2 C_2 + A_2 D_2 C_2 \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2}.$$

Mais on doit écrire

$$s^x_{i,j} \overset{m}{\geqq} \frac{1}{q_r}, \quad d^x_{i,j} \overset{m}{\geqq} \frac{1}{q_r}, \quad c_{i,j} \overset{m}{\gtreqless} \frac{1}{q_r^2},$$

$$\gamma_{i,j} \overset{m}{\gtreqless} \frac{1}{q_r^2}, \quad A_3 B_3 C_3 + A_3 D_3 C_3 \overset{m}{\gtreqless} \frac{1}{q_r^2},$$

car par exemple $c_{i,j} \cdot q_r^2$, peut avoir une valeur positive quelconque.

3. Nour supposerons dans ce qui suit, qu'il existe pour la surface $z = f(x, y)$ une constante $\overline{S}$, telle que

$$S(x) < \overline{S}, \quad S(y) < \overline{S}.$$

La suite $X_{l_r} Y_{m_r}$ sera toujours, dans ce qui suit, celle du No. 6 du Chap. VII.

Choisissons un nombre positif entier $p < r$, et divisons les rectangles de $X_{l_r} Y_{m_r}$ en deux classes.

La première classe contiendra ceux où les arcs

$$\widehat{AB}, \ \widehat{BC}, \ \widehat{CD}, \ \widehat{DA}$$

sont plus petits que $\frac{1}{q_r \cdot \delta_p}$.

La deuxième classe contiendra le reste, c'est-à-dire les rectangles où l'un au moins des arcs

$$\widehat{AB}, \ \widehat{BC}, \ \widehat{CD}, \ \widehat{DA}$$

n'est pas plus petit que $\frac{1}{q_r \cdot \delta_p}$.

Soit pour les rectangles de la première classe $\lambda_{i,j} = 1$, pour la deuxième $\lambda_{i,j} = 0$, et soit

$$\lambda_{i,j} + \varepsilon_{i,j} = 1.$$

Nous allons montrer que, lorsque p croît indéfiniment de manière que

$$\lim_{p=\infty} \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

nous aurons:

A) $X_{l\infty} Y_{m\infty} \varepsilon_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} = 0,$

B) $X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} (\theta^x_{i,j} + \theta^x_{i,j+1} + \theta^y_{i,j} + \theta^y_{i+1,j}) = 0,$

C) $X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} \left| \tau_{i,j} - n_{i,j} \right| = 0,$

D) $X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} \left| t_{i,j} - n_{i,j} \right| = 0,$

et pour notre surface caracterisée par G:

E) $X_{l\infty} Y_{m\infty} (\theta^y_{i,j} + \theta^y_{i+1,j}) = 0,$

F) $X_{l\infty} Y_{m\infty} | \tau_{i,j} - n_{i,j} | = 0,$

G) $X_{l\infty} Y_{m\infty} | t_{i,j} - n_{i,j} | = 0,$

H) $X_{l\infty} Y_{m\infty} n_{i,j} = t.$

Démonstrations.

A) Supposons que la section $x_i =$ const. contienne des $s^y_{i,j}$ en nombre de E_i, tels que $s^y_{i,j} \geqq \frac{1}{q_r \cdot \delta_p}\cdot$ On a évidemment

$$E_i \cdot \frac{1}{q_r \cdot \delta_p} \leqq S(x_i) < \bar{S},$$

donc

$$E_i \overset{m}{\leqq} q_r \cdot \delta_p .$$

Le nombre des sections $x_i =$ const. est $l_r + 1 \overset{m}{=} q_r$ et chacun des $s^y_{i,j}$ appartient à deux rectangles (excepté les arcs sur $x_i = 0$ et sur $x_i = a$).

Donc le nombre des rectangles auxquels appartient au moins un

$$s^y_{i,j} \geqq \frac{1}{q_r \cdot \delta_p} \quad \text{est} \quad \overset{m}{\leqq} 2 \cdot q_r^2 \cdot \delta_p \overset{m}{=} q_r^2 \cdot \delta_p .$$

De même le nombre des rectangles auxquels appartient au moins un

$$s^x_{i,j} \geqq \frac{1}{q_r \cdot \delta_p} \quad \text{est} \quad \overset{m}{\leqq} q_r^2 \cdot \delta_p .$$

Ainsi le nombre des rectangles où

$$\varepsilon_{i,j} = 1 \quad \text{est} \quad \overset{m}{\leqq} q_r^2 \cdot \delta_p .$$

Mais $\alpha_{i,j} \overset{m}{=} \frac{1}{q_r^2}\cdot$ Donc

$$X_{l_r} Y_{m_r} \varepsilon_{i,j} \cdot \alpha_{i,j} \overset{m}{\leqq} \delta_p ,$$

et on a

$$\lim_{r=\infty} \delta_p = 0 .$$

B) Il suffit de démontrer que

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} \cdot \theta^x_{i,j} = 0 .$$

On a évidemment

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} \cdot \theta^x_{i,j} = Y_{m_r} (X_{l_r} \cdot \lambda_{i,j} \cdot \theta^x_{i,j}).$$

Les sections $y_j =$ const. sont de deux espèces, selon qu'elles satisfont ou non à l'inégalité

$$S(y_j) - l_r(y_j) < \delta_r, \quad \text{(No. 6 Chap. VII)}.$$

D'après le No. 20 du Chap. III on aura, pour la première espèce:

$$X_{l_r} \lambda_{i,j} \cdot \theta^x_{i,j} \overset{m}{\leqq} X_{l_r} \cdot \lambda_{i,j} \frac{1}{q_r^{\frac{3}{2}} \cdot \delta_p^{\frac{3}{2}}} \left(\delta^x_{i,j}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{q_r^{\frac{3}{2}} \cdot \delta_p^{\frac{3}{2}}} \cdot X_{l_r} \cdot \lambda_{i,j} \cdot \left(\delta^x_{i,j}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \frac{1}{q_r^{\frac{3}{2}} \cdot \delta_p^{\frac{3}{2}}} \cdot q_r^{\frac{1}{2}} \cdot \delta_r^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{q_r} \cdot \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}},$$

(voir encore No. 5 Chap. IV).

Le nombre de ces sections étant $m_r + 1 - f_r \overset{m}{=} q_r$, la contribution de ces sections à

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} \theta^x_{i,j} \text{ est } \overset{m}{\leqq} \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}}.*$$

Le nombre des sections de la deuxième espèce est f_r, et on a pour ces sections, d'après le No. 20 du Chap. III:

$$X_{l_r} \lambda_{i,j} \theta^x_{i,j} < X_{l_r} \lambda_{i,j} (x_{i+1} - x_i)\, s^x_{i,j} \overset{m}{\leqq} X_{l_r} \lambda_{i,j} \cdot \frac{1}{q_r}\, s^x_{i,j}$$

$$\overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r} X_{l_r} \lambda_{i,j} s^x_{i,j} \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r} \cdot \overline{S} \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r}.$$

Donc la contribution des sections est $\overset{m}{\leqq} \frac{f_r}{q_r} < \delta_r$. En considérant que $\delta_r < \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}}$, on aura

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} \theta^x_{i,j} \overset{m}{<} \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}},$$

et par hypothèse

$$\lim_{\substack{p=\infty \\ r=\infty}} \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

C) On a d'après le No. 17 du Chap. III:

$$|\tau_{i,j} - n_{i,j}| \leqq \theta^x_{i,j} + \theta^x_{i,j+1} + \theta^y_{i,j} + \theta^y_{i+1,j}.$$

---

* En employant l'inégalité $\theta^x_{i,j} < \pi \left(s^x_{i,j}\right)^2$ on trouve que cette contribution est

$$\overset{m}{\leqq} f_r \cdot q_r \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_p^2} = \frac{f_r}{q_r} \cdot \frac{1}{\delta_p^2} < \frac{\delta_r}{\delta_p^2} < \frac{\delta_r}{\delta_p^3} < \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} | \tau_{i,j} - n_{i,j} | \overset{m}{\leq} \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}}.$$

Et ainsi

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} | \tau_{i,j} - n_{i,j} | = 0.$$

D) On a, d'après le Chap. VI:

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} (t_{i,j} - \tau_{i,j}) = 0$$

et à plus forte raison

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} (t_{i,j} - \tau_{i,j}) = 0,$$

donc après C)

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} | t_{i,j} - n_{i,j} | = 0.$$

E) Cela est évident d'après B), car ayant

$$s_{i,j}^y \overset{m}{=} \frac{1}{q_r},$$

on aura, si p dépasse une certaine limite,

$$s_{i,j}^y < \frac{1}{q_r \cdot \delta_p}$$

F), G), H) Il suffit de démontrer que

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \varepsilon_{i,j} | \tau_{i,j} - n_{i,j} | = 0$$

On a

$$\gamma_{i,j} < \tau_{i,j} \leq \alpha_{i,j} + \beta_{i,j} + \gamma_{i,j},$$
$$c_{i,j} < n_{i,j} \leq \alpha_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j},$$

et (voir No. 17 Chap. III)

$$| c_{i,j} - \gamma_{i,j} | \leq \theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y.$$

Ainsi $\tau_{i,j}$ et $n_{i,j}$ sont compris entre

$$\gamma_{i,j} - \theta_{i,j}^y - \theta_{i+1,j}^y$$

et

$$\alpha_{i,j} + b_{i,j} + \beta_{i,j} + \gamma_{i,j} + \theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y.$$

Donc

$$| \tau_{i,j} - n_{i,j} | \leq \alpha_{i,j} + b_{i,j} + \beta_{i,j} + 2 (\theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y).$$

Mais pour notre surface

$$\alpha_{i,j} \overset{m}{\geqq} b_{i,j}, \quad \alpha_{i,j} \overset{m}{>} \beta_{i,j}.$$

Donc

$$X_{l_r} Y_{m_r} \varepsilon_{i,j} | \tau_{i,j} - n_{i,j} | \overset{m}{\leq} X_{l_r} Y_{m_r} \varepsilon_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}$$
$$+ 2 X_{l_r} Y_{m_r} \varepsilon_{i,j} (\theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y),$$

mais d'après A) et E) les deux termes du second membre tendent vers zéro pour $r=\infty$.

L'équation

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} n_{i,j} = t$$

exprime que la quadrature de notre surface est obtenue à l'aide des quadrilatères gauches. (Voir le remarque du Chap. VI).

Chapitre IX.

Quadrature.

Dans ce que suit nous imposerons à la surface $z=f(x,y)$ l'unique condition suivante: Il existe un nombre positif fini $\overline{S}$ tel que

$$S(x) < \overline{S}, \quad S(y) < \overline{S}.$$

Nous indiquerons le moment où nous allons revenir à notre première surface.

1. Il est évident qu'en omettant certains termes de la suite du No. 6 du Chap. VII, on peut obtenir une autre suite (nous la désignerons aussi par $X_{l_r} Y_{m_r}$), telle que l'on ait

$$\frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}} < \delta_{r-1}^8 \text{*}$$

et

$$X_{l_r} Y_{m_r} (t_{i,j} - \tau_{i,j}) < \delta_{r-1}^8.$$

Le but de ce Chapitre est de démontrer que pour cette suite

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} |t_{i,j} - (ABC + ADC)| = 0, \quad (p = r-1),$$

et pour notre première surface

$$X_{l\infty} Y_{\infty} (ABC + ADC) = t,$$

ABC et ADC désignant les aires des triangles dont les sommets sont respectivement A, B, C et A, D, C, du No. 8 du Chap. III.

Nous devons, pour démontrer ces théorèmes, faire des discussions assez longues.

---

* On voit que la condition $\lim\limits_{p=\infty} \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_p^{\frac{3}{2}}} = 0$, du No. 3 du Chap. VIII, est remplie pour $p = r - 1$.

Pour chaque division de la suite nous prendrons q_r (No. 16. Chap. II) de sorte que q_r, quoique choisi arbitrairement entre ses limites de variations, ait toujours la même valeur, une fois ce choix fait. On peut prendre $q_r = l_r$.

Nous partagerons les rectangles de $X_{l_r} Y_{m_r}$ où $\lambda_{i,j} = 1$ en cinq groupes:

Le premier groupe contient tous les rectangles pour lesquels

$$(t_{i\,j} - \tau_{i,j}) + (\theta^x_{i,j} + \theta^x_{i,j+1} + \theta^y_{i,j} + \theta^y_{i+1,j}) \geqq \frac{1}{q_r^2}\,\delta^6_{r-1}.$$

En désignant par L_r le nombre de ces rectangles, on aura

$$\frac{L_r}{q_r^2} \overset{m}{<} \delta^2_{r-1}.$$

On a

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} \cdot (t_{i,j} - \tau_{i,j}) < \delta^8_{r-1},$$

et d'après le Chap. VIII

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} (\theta^x_{i,j} + \theta^x_{i,j+1} + \theta^y_{i,j} + \theta^y_{i+1,j}) \overset{m}{<} \frac{\delta_r^{\frac{1}{2}}}{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}} < \delta^8_{r-1}.$$

Nous aurons

$$L_r \cdot \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta^6_{r-1}$$
$$< X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j}((t_{i,j} - \tau_{i,j}) + (\theta^x_{i,j} + \theta^x_{i,j+1} + \theta^y_{i,j} + \theta^y_{i+1,j})) \overset{m}{<} \delta^8_{r-1},$$

ou enfin

$$\frac{L_r}{q_r^2} \overset{m}{<} \delta^2_{r-1}.$$

Le deuxième groupe contient les rectangles pour lesquels

$$q_r^2 \cdot b_{i,j} > \delta_{r-1}, \quad q_r^2 \cdot c_{i,j} > \delta_{r-1}.$$

Le troisième, ceux pour lesquels

$$q_r^2 \cdot b_{i,j} > \delta_{r-1}, \quad q_r^2 \cdot c_{i,j} \leqq \delta_{r-1}.$$

Le quatrième, ceux pour lesquels

$$q_r^2 \cdot b_{i,j} \leqq \delta_{r-1}, \quad q_r^2 \cdot c_{i,j} > \delta_{r-1}.$$

Et enfin le cinquième, ceux qui restent et pour lesquels

$$q_r^2 \cdot b_{i,j} \leqq \delta_{r-1}, \quad q_r^2 \cdot c_{i,j} \leqq \delta_{r-1}.$$

Chaque rectangle n'appartient, bien entendu, qu'à un seul de ces groupes. Quelquefois quelques-uns de ces groupes n'existent pas, et le nombre des rectangles de chacun des quatre derniers groupes est $\overset{m}{\leqq} q_r^2$.

2. Lorsque r est assez grand, les lignes $\overline{A_2 D_2}$ et $\overline{B_2 C_2}$ ne se coupent pas pour les groupes second et troisième, c'est à dire que $A_2 B_2 C_2 D_2$ est un trapèze ou un parallélogramme (Voir Chap. III).

Supposons que le lignes $\overline{A_2 D_2}$ et $\overline{B_2 C_2}$ se coupent en un point O_2.

Supposons par exemple que la distance de O_2 de $\overline{A_2 B_2}$ soit au plus égale à la distance de O_2 de $\overline{C_2 D_2}$.

Soit x' la coordonnée x de O_2. La ligne $x = x'$, $z = 0$ partage le rectangle $A_1 B_1 C_1 D_1$ en deux autres.

Celui de ces rectangles qui a un sommet en C_1 a évidemment une aire égale ou supérieure à $\frac{\alpha_{i,j}}{2}$.

Pour ce rectangle la valeur formée à la manière de $t_{i,j} - \tau_{i,j}$ est plus petite que

$$\frac{1}{q_r^2} \cdot \delta^2_{r-1}.\,^*$$

Partageons ce rectangle en deux parties égales à l'aide d'une droite parallèle à l'axe y.

Soient, pour ces deux rectangles, α, β_1, γ_1 et α, β_2, γ_2 les valeurs respectivement formées à la manière des $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,j}$, $\gamma_{i,j}$, β_1, γ_1, appartiennent au rectangle qui est plus près de l'axe y.

Les valeurs analogues pour le rectangle divisé en deux parties égales sont alors 2α, $\beta_1 + \beta_2$, $\gamma_1 + \gamma_2 - \varepsilon$, $(\gamma_1 + \gamma_2 \geqq \varepsilon)$.

Dans l'équation

$$[\alpha^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2]^{\frac{1}{2}} + [\alpha^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2]^{\frac{1}{2}} = [4\alpha^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2 + (\gamma_1 + \gamma_2 - \varepsilon)^2]^{\frac{1}{2}} + \lambda,$$

λ n'est pas négatif (Chap. IV) et

---

* Car d'après le No. 1 la valeur de $t_{i,j} - \tau_{i,j}$, pour $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ est $< \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta^6_{r-1}$. Et l'on a vu, dans le Chap. VI, qu'en partageant un rectangle en plusieurs autres, la somme des $t_{i,j} - \tau_{i,j}$ pour ces rectangles n'est pas plus grande que pour le rectangle total.

$$\lambda < \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6 .\text{*}$$

D'après le No. 4 du Chap. IV, et en remarquant que $\alpha \overset{m}{=} \frac{1}{q_r^2}$ et que chacune de quantités $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ est $\overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r \cdot \delta_{r-1}}$, **

---

* Désignons par t' et t'' les valeurs de $t_{i,j}$ pour les deux rectangles, les analogues de $\tau_{i,j}$ sont les radicaux (τ', τ'') du premier membre de l'équation, et pour le rectangle total $t_{i,j}$ est $t' + t''$ et $\tau_{i,j}$ le radical du second membre τ. On a, d'après la note précédente:

$$t_{i,j} - \tau_{i,j} \geqq (t' + t'') - \tau \geqq t' - \tau' + t'' - \tau'' \geqq 0.$$

Donc

$$t_{i,j} - \tau_{i,j} \geqq (t' + t'') - \tau - [t' - \tau' + t'' - \tau''] = \tau' + \tau'' - \tau = \lambda$$

et on a

$$t_{i,j} - \tau_{i,j} < \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6 .$$

** D'après le Chap. VI les β_1, β_2, γ_1, γ_2, sont plus petits que $t_{i,j}$.

Mais

$$t_{i,j} = \tau_{i,j} + (t_{i,j} - \tau_{i,j}), \quad \tau_{i,j} \leqq n_{i,j} + \theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x + \theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y ,$$

$$n_{i,j} \leqq \alpha_{i,j} = b_{i,j} + c_{i,j} .$$

Donc

$$t_{i,j} \leqq \alpha_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j} + (t_{i,j} - \tau_{i,j}) + (\theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x + \theta_{i,j}^y + \theta_{i+1,j}^y).$$

Mais

$$b_{i,j} \leqq \tfrac{1}{2}(\overline{A_2 B_2} + \overline{D_2 C_2})(x_{i+1} - x_i) \leqq \tfrac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{DC})(x_{i+1} - x_i)$$

$$\overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r \cdot \delta_{r-1}} \cdot \frac{1}{q_r} + \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_{r-1}}$$

et de même

$$c_{i,j} \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_{r-1}} .$$

Donc encore d'après le No. 1

$$t_{i,j} \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2} + \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_{r-1}} + \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6 \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_{r-1}} ,$$

et ainsi β_1, β_2, γ_1, γ_2 sont $\overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_{r-1}}$.

on obtient $$|\beta_2 - \beta_1| \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.*$$

Mais par des considérations géometriques simples

$$\beta_2 \geqq \tfrac{3}{4} O_2 C_2 D_2 - \theta_{i,j}^x - \theta_{i,j+1}^x,$$

$$\beta_1 \leqq \tfrac{1}{4} O_2 C_2 D_2 + \theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x,$$

$$O_2 C_2 D_2 \overset{m}{\geqq} \frac{\delta_{r-1}}{q_r^2},$$

et comme toujours

$$\theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x < \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6,$$

on aura pour des valeurs de r assez grands

$$\beta_2 \geqq \tfrac{3}{4} O_2 C_2 D_2 - \theta_{i,j}^x - \theta_{i,j+1}^x \geqq \tfrac{1}{4} O_2 C_2 D_2 + \theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x \geqq \beta_1.$$

C'est à dire

$$0 \leqq \tfrac{1}{2} O_2 C_2 D_2 - 2(\theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x) < \beta_2 - \beta_1 \leqq \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}},$$

ou

$$\frac{\delta_{r-1}}{q_r^2} - \frac{\delta_{r-1}^6}{q_r^2} \overset{m}{\leqq} \frac{\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}}{q_r^2},$$

ou encore

$$\delta_{r-1} \overset{m}{\leqq} \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}},$$

mais cela est impossible pour un r assez grand.

Or, dans ce cas, $\overline{A_2 D_2}$ et $\overline{B_2 C_2}$ ne peuvent pas se couper. De même, lorsque $q_r{}^2 \cdot c_{i,j} > \delta_{r-1}$, $\overline{A_3 B_3}$ et $\overline{C_3 D_3}$ ne peuvent pas se couper.

3) Soient K, P, Q, R, S les valeurs des sommes des

$$(ABC + ADC) - n_{i,j}$$

formées pour les rectangles des cinq groupes du No. 1.

---

* En posant dans l'inégalité 4 du Chap. IV

$$D \overset{m}{=} \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_{r-1}}, \quad \lambda \leqq \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^6,$$

on trouve que le premier membre est

$$\overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^4} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

Le premier membre étant $|\alpha\beta_2 - \alpha\beta_1|$ si l'on divise par $\alpha \overset{m}{=} \frac{1}{q_r^2}$, on obtient l'inégalité ci-dessus.

Nous allons démontrer que K, P, Q, R, S sont

$$\overset{m}{\leqq} \delta_{r-1}.$$

a) On a

$$K \overset{m}{\leqq} \delta_{r-1}.$$

Car pour le premier groupe même la somme des valeurs

$$(ABC + ADC), \quad n_{i,j}$$

est

$$\overset{m}{\leqq} \delta^2_{r-1}.$$

Le nombre des rectangles du premier groupe est

$$L_r \overset{m}{<} q_r^{\,2} \cdot \delta^2_{r-1},$$

et on trouve que

$$ABC + ADC \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_{r-1}}, \quad n_{i,j} \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2 \cdot \delta_{r-1}}.$$

Donc les deux sommes en question sont

$$\overset{m}{\leqq} \delta_{r-1}.$$

b) Pour le deuxième groupe on a

$$P \overset{m}{\leqq} \delta^{\frac{3}{2}}_{r-1}.$$

Dans ce cas $\overline{A_2 D_2}$ et $\overline{B_2 C_2}$ et de même, $\overline{A_3 B_3}$ et $\overline{C_3 D_3}$ ne se coupent pas (No. 2).

On a

$$(A_2 B_2 C_2 D_2) = b_{i,j} > \frac{\delta_{r-1}}{q_r^2}.$$

De l'expression de l'aire du trapèze $A_2 B_2 C_2 D_2$ on déduit

$$\overline{A_2 B_2} + \overline{C_2 D_2} \overset{m}{\geqq} \frac{\delta_{r-1}}{q_r}.$$

Soit E_2 le milieu de $\overline{A_2 D_2}$, F_2 le milieu de $\overline{B_2 C_2}$. En employant l'inégalité

$$\beta_2 - \beta_1 \overset{m}{<} \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta^{\frac{3}{2}}_{r-1}$$

du No. 2* on obtient:

* On ne doit que répéter les considérations du No. 2 en les appliquant au rectangle $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ découpé par la ligne $x = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ en deux parties égales $(x' = x_i)$.

$$|(A_2B_2F_2E_2) - (E_2F_2C_2D_2)| \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.^*$$

Mais en considérant l'expression des aires des trapèzes $A_2B_2F_2E_2$ et $E_2F_2C_2D_2$, et en se rappelant que

$$\frac{x_{i+1} - x_i}{4} \overset{m}{=} \frac{1}{q_r},$$

on obtient

$$|\overline{A_2B_2} - \overline{C_2D_2}| \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

A l'aide de

$$\overline{A_2B_2} + \overline{C_2D_2} \overset{m}{\geqq} \frac{\delta_{r-1}}{q_r} > \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}},$$

on obtient

$$\overline{A_2B_2} + \overline{C_2D_2} \overset{m}{\geqq} 2\,\overline{A_2B_2} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} > 0,$$

$$\overline{A_2B_2} + \overline{C_2D_2} \overset{m}{\geqq} 2\,\overline{C_2D_2} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} > 0.$$

Et de même, lorsque $q_r^2 \cdot c_{i,j} > \delta_{r-1}$,

$$\overline{A_3D_3} + \overline{B_3C_3} \overset{m}{\geqq} 2\,\overline{A_3D_3} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} > 0,$$

$$\overline{A_3D_3} + \overline{B_3C_3} \overset{m}{\geqq} 2\,\overline{B_3C_3} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} > 0.$$

Il est évident que pour obtenir une inégalité ordinaire, on doit multiplier seulement $\frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}$, c'est à dire que pour les rectangles du deuxième groupe on a:

$$n_{i,j} = \left[\alpha_{i,j}^2 + \left(\tfrac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(\overline{A_2B_2} + \overline{C_2D_2})\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}(y_{j+1} - y_j)(\overline{A_3D_3} + \overline{B_3C_3})\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$n_{i,j} \overset{m}{\geqq} \left[\alpha_{i,j}^2 + \left(\tfrac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)\left(2\,\overline{A_2B_2} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}\right)\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}(y_{j+1} - y_j)\left(2\,\overline{B_3C_3} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

* On a, par des considérations géométriques:

$$|(A_2B_2F_2E_2) - (E_2F_2C_2D_2)| \leqq |\beta_2 - \beta_1| + \theta_{i,j}^x + \theta_{i,j+1}^x$$
$$\overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{6} \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

$$n_{i,j} \geqq [\alpha_{i,j}^2 + ((x_{i+1} - x_i)\overline{A_2 B_2})^2 + ((y_{j+1} - y_j)\overline{B_3 C_3})^2]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}},\text{*}$$

$$n_{i,j} \overset{m}{\geqq} 2ABC - \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}$$

et de même

$$n_{i,j} \overset{m}{\geqq} 2ADC - \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

Donc

$$n_{i,j} \overset{m}{\geqq} (ABC + ADC) - \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}$$

et l'on doit multiplier seulement

$$\frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

Mais on a

$$n_{i,j} \leqq ABC + ADC.$$

Donc

$$(ABC + ADC) - n_{i,j} \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

Le nombre des rectangles étant $\overset{m}{\leqq} q_r^2$, on aura

$$P \overset{m}{\leqq} \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} \overset{m}{<} \delta_{r-1}.$$

c) Dans le troisième groupe nous aurons

$$Q \overset{m}{<} \delta_{r-1}.$$

Pour ce groupe on a $q_r^2 \cdot b_{i,j} > \delta_{r-1}$, $q_r^2 \cdot c_{i,j} \leqq \delta_{r-1}$. Or $\overline{A_2 D_2}$ et $\overline{B_2 C_2}$ ne se coupent pas et on a comme précédemment

$$\overline{A_2 B_2} + \overline{C_2 D_2} \overset{m}{\geqq} 2\,\overline{A_2 B_2} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} > 0,$$

$$\overline{A_2 B_2} + \overline{C_2 D_2} \overset{m}{\geqq} 2\,\overline{C_2 D_2} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}} > 0.$$

Les droites (limitées) $\overline{A_3 B_3}$, $\overline{C_3 D_3}$ peuvent se couper ou non. Lorsqu'elles ne se coupent pas, on a

$$c_{i,j} = \frac{\overline{A_3 D_3} + \overline{B_3 C_3}}{2}(y_{j+1} - y_j) \overset{m}{=} (\overline{A_3 D_3} + \overline{B_3 C_3}) \cdot \frac{1}{q_r} \overset{m}{\leqq} \frac{\delta_{r-1}}{q_r^{\,2}},$$

donc

$$\overline{A_3 D_3} \overset{m}{\leqq} \frac{\delta_{r-1}}{q_r}, \quad \overline{B_3 C_3} \overset{m}{\leqq} \frac{\delta_{r-1}}{q_r}.$$

Lorsque les droites $\overline{A_3 B_3}$, $\overline{C_3 D_3}$ se coupent en un point

* Voir Chap. IV No. 1.

O_3, soient d_1 et d_2 les distances (positives) respectives de O_3 à $\overline{A_3 D_3}$ et à $\overline{B_3 C_3}$. Soit $d_1 \geqq d_2$. On a $d_1 \overset{m}{=} \frac{1}{q_r}$.

Comme

$$c_{i,j} = \frac{\overline{A_3 D_3} \cdot d_1 + \overline{B_3 C_3} \cdot d_2}{2} \leqq \frac{\delta_{r-1}}{q_r^2},$$

on aura $\overline{A_3 D_3} \overset{m}{\leqq} \frac{\delta_{r-1}}{q_r}$, et les triangles $O_3 A_3 D_3$ et $O_3 C_3 B_3$ étant semblables on déduit $\overline{B_3 C_3} \overset{m}{\leqq} \frac{\delta_{r-1}}{q_r^2}$.

Or

$$n_{i,j} \geqq [\alpha_{i,j}^2 + b_{i,j}^2]^{\frac{1}{2}} = [\alpha_{i,j}^2 + (\tfrac{1}{2}(x_{i+1} - x_i).(\overline{A_2 B_2} + \overline{C_2 D_2}))^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$n_{i,j} \overset{m}{\geqq} \left[\alpha_{i,j}^2 + \left(\tfrac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)(2\,\overline{A_2 B_2} - \frac{1}{q_r} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}})\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$n_{i,j} \overset{m}{\geqq} [\alpha_{i,j}^2 + ((x_{i+1} - x_i)\,\overline{A_2 B_2})^2]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}},$$

$$n_{i,j} \overset{m}{\geqq} [\alpha_{i,j}^2 + ((x_{i+1} - x_i)\,\overline{A_2 B_2})^2]^{\frac{1}{2}} + (y_{j+1} - y_j)\,\overline{B_3 C_3} - \frac{1}{q_r} \cdot \frac{\delta_{r-1}}{q_r} - \frac{1}{q_r^2}\,\delta_{r-1}^{\frac{3}{2}},$$

$$n_{i,j} \overset{m}{\geqq} [\alpha_{i,j}^2 + ((x_{i+1} - x_i)\,\overline{A_2 B_2})^2 + ((y_{j+1} - y_j)\,\overline{B_3 C_3})^2]^{\frac{1}{2}} - \frac{\delta_{r-1}}{q_r^{\,2}},$$

$$n_{i,j} \overset{m}{\geqq} 2\,ABC - \frac{\delta_{r-1}}{q_r^2}$$

et de même

$$n_{i,j} \overset{m}{\geqq} 2\,ADC - \frac{\delta_{r-1}}{q_r^2},$$

on ne doit multiplier que δ_{r-1} et on conclut, comme pour P, que

$$Q \overset{m}{\leqq} \delta_{r-1}.$$

d) On a de même dans le quatrième groupe

$$R \overset{m}{\leqq} \delta_{r-1}.$$

e) Dans le cinquième

$$S \overset{m}{\leqq} \delta_{r-1}.$$

De a) b) c) d) e) on déduit

$$K + P + Q + R + S \overset{m}{\leqq} \delta_{r-1}.$$

Donc pour $\lim r = \infty$ on aura

$$X_{l\infty}\, Y_{m\infty}\, \lambda_{i,j}((ABC + ADC) - n_{i\,j}) = 0,$$

et comme

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} \left| t_{i,j} - n_{i,j} \right| = 0,$$

on obtient enfin

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} \left| t_{i,j} - (ABC + ADC) \right| = 0.$$

4. Soit B' l'intersection de la droite $x = x_i$, $y = y_{j+1}$ avec le plan du triangle ABD, on voit que B' est le sommet opposé à D pour le parallélogramme $AB'CD$.

On conclut, en s'appuyant sur a) b) c) d) e) du No. précédent, que

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} (ABB' + BB'C) = 0.$$

On a, par exemple, pour le deuxième groupe

$$BB'C = \tfrac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)\overline{BB'} = \tfrac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)\left|\overline{A_2B_2} - \overline{D_2C_2}\right| \leqq \frac{m}{q_r^2} \cdot \delta_{r-1}^{\frac{3}{2}}.$$

En considérant le tétraëdre dont les sommets sont A, B, C, B', on obtient:

$$\left|(ABC + ADC) - (AB'CD)\right| \leqq ABB' + BB'C.$$

Donc

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} \left|(ABC + ADC) - (AB'CD)\right| = 0,$$

et à l'aide de

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} \left| t_{i,j} - (ABC + ADC) \right| = 0$$

on aura

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} \left| t_{i,j} - (AB'CD) \right| = 0.$$

Désignons par $\theta'^{x}_{i,j+1}$ la valeur absolue de l'aire limitée par $\widehat{BC}$, $\overline{BB'}$, $\overline{B'C}$, et par $\theta'^{y}_{i,j}$ la valeur absolue de l'aire limitée par $\widehat{AB}$, $\overline{BB'}$, $\overline{B'A}$, on aura

$$\left|\theta^{x}_{i,j+1} - \theta'^{x}_{i,j+1}\right| \leqq BB'C, \quad \left|\theta^{y}_{i,j} - \theta'^{y}_{i,j}\right| \leqq ABB'.$$

Nous aurons donc (voir le No. 3B) du Chap. VIII)

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} (\theta'^{x}_{i,j+1} + \theta'^{y}_{i,j}) = 0.$$

5. Revenons à notre surface caractérisée par la propriété relative à G.

On a

$$\overline{A_2B_2} < (y_{j+1} - y_j) \cdot G, \quad \overline{D_2C_2} < (y_{j+1} - y_j) \cdot G,$$

et $X_{l_r} Y_{m_r}$ a un quotient fini.

On voit, à l'aide de ces remarques, qu'il existe une constante K positive, indépendante de r, telle que, lorsque

$$\overline{A_3 D_3} > K \cdot (x_{i+1} - x_i),$$

$\overline{A_3 B_3}$ et $\overline{D_3 C_3}$ ne se coupent pas. On a $K \overset{m}{=} 1$. Divisons les rectangles pour lesquels $\varepsilon_{i,j} = 1$ en deux classes, la première contiendra ceux où

$$\overline{A_3 D_3} \leqq K \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

la seconde, le reste.

On a toujours

$$ABC + ADC \leqq (A_1 B_1 C_1 + A_1 D_1 C_1) + (A_2 B_2 C_2 + A_2 D_2 C_2) \\ + (A_3 B_3 C_3 + A_3 D_3 C_3).$$

Donc pour la première classe

$$ABC + ADC \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2} + \frac{1}{q_r^2} + \frac{1}{q_r^2} \overset{m}{=} \frac{1}{q_r^2},$$

et aussi

$$n_{i,j} \overset{m}{=} \frac{1}{q_r^2},$$

ainsi pour la première classe

$$(ABC + ADC) - n_{i,j} \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2}.$$

Pour la deuxième classe $A_3 B_3 C_3 D_3$ est un trapèze (ou un parallélogramme) et

$$ABC + ADC \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2} + \frac{1}{q_r^2} + c_{i,j} \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2} + n_{i,j},$$

mais on doit multiplier seulement $\frac{1}{q_r^2}$, donc pour les rectangles où $\varepsilon_{i,j} = 1$

$$(ABC + ADC) - n_{i,j} \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r^2}.$$

C'est à dire que (voir No. 3 A du Chap. VIII).

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \varepsilon_{i,j} ((ABC + ADC) - n_{i,j}) = 0.$$

Nous avons encore

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} ((ABC + ADC) - n_{i,j}) = 0$$

et, à l'aide du Nr. 3 G, du Chap. VIII, on conclut que

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \left| t_{i,j} - (ABC + ADC) \right| = 0$$

et à plus forte raison

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} (t_{i,j} - (ABC + ADC)) = 0.$$

C'est à dire que

$$X_{l\infty} Y_{m\infty}(ABC + ADC) = X_{l\infty} Y_{m\infty} t_{i,j} = t,$$

la quadrature de notre surface est achevée, on a pour l'aire

$$T_1 = T_6 = t.$$

Remarque. On a encore (voir Chap. VI),

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} n'_{i,j} = t,$$

$$X_{l\infty} Y_{m\infty}(AB'CD) = t$$

(voir Introduction definition 4).

Chapitre X.

Variation des aires des surfaces formant un système continu. Cas où l'aire est donnée par une intégrale double.

1. Soit $z = f(x, y, \mu)$ une fonction bornée et continue des variables x, y, μ, x et y variant respectivement dans $(0, a)$ et $(0, b)$ et μ variant de $-\infty$ à $+\infty$. En donnant à μ une valeur constante, $z = f(x, y, \mu)$ sera donc l'équation d'une surface, et toutes ces surfaces forment évidemment un système continu.

Nous supposerons que pour chaque μ il existe deux nombres $\overline{S}(\mu)$ et $G(\mu)$ finis et positifs, tels que les longueurs des sections $x =$ const. $y =$ const. de $z = f(x, y, \mu)$ soient plus petites que $\overline{S}(\mu)$ et que, si $y_1 - y \neq 0$

$$\left|\frac{f(x, y_1, \mu) - f(x, y, \mu)}{y_1 - y}\right| < G(\mu).$$

Quoique chaque $\overline{S}(\mu)$ soit fini, il est possible que la limite supérieure de tous les $\overline{S}(\mu)$ peut être infinie. De même pour les $G(\mu)$.

Soit $T(\mu)$ l'aire $(T_1 = T_6)$ de la surface $z = f(x, y, \mu)$. Nous allons démontrer que $T(\mu)$ est une fonction semicontinue.

Soient $\tau_{i,j}(\mu)$, $\beta_{i,j}(\mu)$, $\gamma_{i,j}(\mu)$ les valeurs de $\tau_{i,j}$, $\beta_{i,j}$ $\gamma_{i,j}$, pour la surface $z = f(x, y, \mu)$. Prenons une division $X_l\, Y_m$ telle que

$$T(\mu) - X_l\, Y_m \tau_{i,j}(\mu)$$

soit aussi petit que l'on veut.

Soit μ_1 assez voisin de μ. On voit aisément, par des considérations géometriques, que les différences

$$|\beta_{i,j}(\mu) - \beta_{i,j}(\mu_1)|, \quad |\gamma_{i,j}(\mu) - \gamma_{i,j}(\mu_1)|$$

sont aussi petites que l'on veut.

Ainsi en considérant les expressions de $\tau_{i,j}(\mu)$ et de $\tau_{i,j}(\mu_1)$ (Chap. III), on conclut, à l'aide des inégalités du Chap. IV, que

$$|\tau_{i,j}(\mu) - \tau_{i,j}(\mu_1)|$$

est aussi petit que l'on veut.

C'est à dire que

$$|X_l Y_m \tau_{i,j}(\mu) - X_l Y_m \tau_{i,j}(\mu_1)|$$

est aussi petit que l'on veut.

Donc $$|T(\mu) - X_l Y_m \tau_{i,j}(\mu_1)|$$

est aussi petit que l'on veut.

Mais $$T(\mu_1) \geqq X_l Y_m \tau_{i,j}(\mu_1),$$

ainsi la différence

$$T(\mu) - T(\mu_1),$$

qui est ou négative ou positive est dans ce dernier cas aussi petite que l'on veut. $T(\mu)$ est une fonction uniforme de μ; elle sera donc semicontinue. (No. 1 Chap. III).*

2. Soit $z = \varphi(x, y)$ une fonction bornée, définie dans $(0, a; 0, b)$. Soit $G^{\varphi}_{i,j}$ et $g^{\varphi}_{i,j}$ les limites supérieure et inférieure de ses valeurs pour les points de $(x_i, x_{i+1};\ y_j, y_{j+1})$.

Les quantités

$$X Y G^{\varphi}_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}, \quad X Y g^{\varphi}_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}$$

existent et elles sont finies. Si elles sont égales, nous dirons que φ est intégrable et nous donnerons à

$$X Y G^{\varphi}_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}, \quad X Y g^{\varphi}_{i,j} \cdot \alpha_{i,j}$$

le nom d'intégrale double de φ. (Définition de Riemann.)

Son symbole est

$$\int_0^a \int_0^b \varphi(x, y)\, dx\, dy.$$

Pour qu'elle existe il faut et il suffit que

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \left(G^{\varphi}_{i,j} - g^{\varphi}_{i,j}\right) \cdot \alpha_{i,j}$$

---

* Ce théorème à été démontré par M. Lebesgue (la définition de l'aire étant T_2) pour une famille continue d'ailleurs quelconque de surfaces. Thèse, p. 114.

soit égal à 0, pour une suite de divisions. — Et de plus, dans la détermination de $G_{i,j}$ et $g_{i,j}$, on peut rejeter les valeurs de la fonction **bornée** φ pour les points du contour de $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$.

En désignant par $x_{i,j}$, $y_{i,j}$ les coordonnées d'un point quelconque de $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$, on aura

$$\int_0^a\int_0^b \varphi(x, y)\,dx\,dy = XY\varphi(x_{i,j}, y_{i,j})\cdot\alpha_{i,j}.$$

Soient $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ deux fonctions intégrables, alors

$$[1 + (\varphi(x, y))^2 + (\psi(x, y))^2]^{\frac{1}{2}}$$

est aussi integrable et on a

$$XY\left(1 + (g_{i,j}^{|\varphi|})^2 + (g_{i,j}^{|\psi|})^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\alpha_{i,j}$$

$$= XY\left(1 + (G_{i,j}^{|\varphi|})^2 + (G_{i,j}^{|\psi|})^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\alpha_{i,j}$$

$$= \int_0^a\int_0^b [1 + (\varphi(x, y))^2 + (\psi(x, y))^2]^{\frac{1}{2}}\,dx\,dy,$$

en remarquant qu'on peut négliger les valeurs de φ et ψ sur le contour de $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$.

3. Soit $z = \varphi(x)$ une fonction bornée et continue, x variant dans $(0, a)$.

Soit x un point intérieur à $(0, a)$. Soit

$$u > 0 \text{ et } x - u \geqq 0, \quad x + u \leqq a.$$

Lorsque h varie, en prenant toutes les valeurs telles que

$$0 < h \leqq u,$$

soit $\begin{matrix} L(x, x+u) \\ l(x, x+u) \end{matrix}$ la limite $\begin{matrix}\text{supérieure}\\ \text{inférieure}\end{matrix}$ des valeurs de

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}.$$

Et soit de même $\begin{matrix} L'(x-u, x) \\ l'(x-u, x) \end{matrix}$ la limite $\begin{matrix}\text{supérieure}\\ \text{inférieure}\end{matrix}$ des valeurs de

$$\frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{-h}.$$

Les limites de $L(x, x+u)$, $l(x, x+u)$, $L'(x-u, x)$, $l'(x-u, x)$ pour $u=0$ sont déterminées*; désignons les par

$$\Lambda(x),\ \lambda(x),\ \Lambda'(x),\ \lambda'(x).$$

On voit que les fonctions $\Lambda(x)$ et $\lambda(x)$ sont bien définies et uniformes pour chaque $x \neq a$, ainsi que les fonctions $\Lambda'(x)$ et $\lambda'(x)$ pour chaque $x \neq 0$.

Si nous prenons $\Lambda(a) = \Lambda'(a)$, $\lambda(a) = \lambda'(a)$, $\Lambda'(0) = \Lambda(0)$, $\lambda'(0) = \lambda(0)$, les $\Lambda(x)$, $\lambda(x)$, $\Lambda'(x)$, $\lambda'(x)$ seront définies dans $(0, a)$.

Ces quantités sont ce que l'on appelle les quatres dérivées de φ pour le point x considerée. Ils ont été définis et étudiés par P. du Bois Reymond et Dini.

Nous allons énoncer quelques propriétés de ces dérivées:

a) Lorsque $h > 0$ est assez petit, la valeur de

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h}$$

est comprise entre $\Lambda(x) + \varepsilon$ et $\lambda(x) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, et est aussi petite que l'on veut.

b) Les quatre dérivées ont la même limite supérieure dans chaque intervalle (v, w) de $(0, a)$. Il en est de même pour la limite inférieure**.

Si $x' \neq x''$ et si x', x'' sont points de (v, w) la limite supérieure des valeurs de

$$\frac{\varphi(x'') - \varphi(x')}{x'' - x'}$$

est égale à la limite supérieure des quatre dérivées dans (v, w). Il en est de même pour la limite inférieure.

c) Là, où l'une des quatres dérivées est continue pour une point x, les trois autres le sont aussi, et leurs valeurs sont égales***.

En ce cas, φ y est différentiable et le quotient différentiel, dérivée dans le sens ordinaire, est la valeur commune des quatre dérivées.

4. Pour $y = \text{const.}$, $z = f(x, y)$ est une fonction de x. On

---

* Par exemple $L(x, x+u)$ ne croît pas lorsque u décroît.

** Ayant comme toujours $v < w$, on doit prendre $\Lambda(w) = \Lambda'(w)$, $\lambda(w) = \lambda'(w)$, $\Lambda'(v) = \Lambda(v)$, $\lambda'(v) = \lambda(v)$.

*** Le théorème est vrai même lorsque la valeur de la dérivée est $+\infty$ ou $-\infty$, mais on doit alors élargir la définition de la continuité.

peut former ses quatre dérivées. Désignons les par $\Lambda_x(x, y)$, $\lambda_x(x, y)$, $\Lambda_x'(x, y)$, $\lambda_x'(x, y)$. Quand y varie, elles sont donc des fonctions uniformes sur $(0, a;\ 0, b)$.

De même pour $x = \text{const.}$ $z = f(x, y)$ est une fonction de y. On peut former quatre dérivées pour la variable y, en faisant varier x; elles sont des fonctions bien définies et uniformes sur $(0, a;\ 0, b)$. Désignons les par $\Lambda_y(x, y)$, $\lambda_y(x, y)$, $\Lambda_y'(x, y)$, $\lambda_y'(x, y)$. On démontre très simplement que les quatre dérivées par rapport à x ont les mêmes limites supérieure et inférieure, dans chaque rectangle $(x', x'';\ y', y'')$ de $(0, a;\ 0, b)$. Il en est de même pour les quatre dérivées par rapport à y*.

5. Supposons que, pour la surface $z = f(x, y)$, il existe un nombre G fini et positif, tel que, si

$$(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 \neq 0,$$

$$\left| \frac{f(x_1, y_1) - f(x, y)}{[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]^{\frac{1}{2}}} \right| < G.$$

Pour cette surface, les dérivées sont toutes comprises entre $+G$ et $-G$.

On démontre aisément, à l'aide des N[ros] 4 et 2, que lorsque l'une des dérivées relatives à x est deux fois intégrable, les trois autres le sont aussi, et que les quatre intégrales doubles sont égales. Il en est de même pour les dérivées relatives à y.

Désignons respectivement par λ_x et par λ_y l'une des dérivées par rapport à x et l'une des dérivées par rapport à y.

Lorsque λ_x et λ_y sont intégrables

$$(1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}}$$

l'est aussi et les 16 fonctions — λ_x désigne quatre fonctions λ_y aussi — ont la même intégrale.

6. Théorème. Dans ce cas on a

$$t = \int_0^a\!\!\int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy$$

* Mais sur le contour de $(x', x'';\ y', y'')$ on doit changer les valeurs des dérivées. Par exemple sur la ligne $x = x''$ on doit prendre
$\Lambda_x(x'', y) = \Lambda_x'(x'', y)$, etc.

et, $X_{l_r} Y_{m_r}$ étant une suite arbitraire de divisions de première espèce ou non, on aura

$$t = X_{l\infty} Y_{m\infty}(ABC + ADC) = X_{l\infty} Y_{m\infty}(AB'CD),$$

c'est à dire que

$$t = XY(ABC + ADC) = XY(AB'CD) = T_6 = T_1.$$

Démonstration. Pour la suite de divisions du Chap. IX on a

$$t = X_{l\infty} Y_{m\infty}(ABC + ADC).$$

Mais on a

$$ABC = \left[1 + \left(\frac{\overline{A_2 B_2}}{y_{j+1} - y_j}\right)^2 + \left(\frac{\overline{B_3 C_3}}{x_{i+1} - x_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha_{i,j}}{2}$$

et

$$g_{i,j}^{|\lambda_y|} \leqq \frac{\overline{A_2 B_2}}{y_{j+1} - y_j} \leqq G_{i,j}^{|\lambda_y|}, \quad g_{i,j}^{|\lambda_x|} \leqq \frac{\overline{B_3 C_3}}{x_{i+1} - x_i} \leqq G_{i,j}^{|\lambda_x|}.$$

Donc

$$\left[1 + \left(g_{i,j}^{|\lambda_y|}\right)^2 + \left(g_{i,j}^{|\lambda_x|}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha_{i,j}}{2} \leqq ABC \leqq \left[1 + \left(G_{i,j}^{\lambda_y}\right)^2 + \left(G_{i,j}^{|\lambda_x|}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\alpha_{i,j}}{2}$$

et ADC est aussi compris entre les mêmes limites.

Ainsi

$$\begin{aligned} X_{l_r} Y_{m_r}\left[1 + \left(g_{i,j}^{|\lambda_y|}\right)^2 + \left(g_{i,j}^{|\lambda_x|}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha_{i,j} &\leqq X_{l_r} Y_{m_r}(ABC + ADC) \\ &\leqq X_{l_r} Y_{m_r}\left[1 + \left(G_{i,j}^{|\lambda_y|}\right)^2 + \left(G_{i,j}^{|\lambda_x|}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha_{i,j} \end{aligned} \tag{A}$$

et on peut remplacer le terme au milieu par

$$X_{l_r} Y_{m_r}(ADC + ADC) = X_{l_r} Y_{m_r}(AB'CD).$$

Pour $r = \infty$ les deux termes extrêmes sont égaux à

$$\int_0^a \int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx\, dy,$$

et ainsi

$$t = \int_0^a \int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx\, dy.$$

Soit maintenant $X_{l_r} Y_{m_r}$ une suite quelconque de divisions de première espèce ou non. L'inégalité (A) subsiste, et les limites des deux termes extrèmes étant égaux à l'intégrale, et ainsi à t, on aura

$$t = XY(ABC + ADC) = XY(AB'CD) = T_6 = T_1,$$

Lorsque $q = \frac{\partial f}{\partial y}$, $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ existent et sont deux fois intégrables, on obtient la formule connue

$$\int_0^a\int_0^b (1 + q^2 + p^2)^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy = T_6 = T_1 = t,$$

et comme précédemment

$$t = XY(ABC + ADC) = XY(AB'CD) = T_6 = T_1.$$

Nous allons maintenant traiter le cas le plus général, où l'aire est donnée par une intégrale double.

Nous énoncerons dans les N^ros 7—13 quelques théorèmes préliminaires.

7. Soient $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ deux fonctions quelconques de x dans $(0, a)$, on sait qu'on a en général

$$\int_0^a \psi(x)\,dx + \underline{\int_0^a} \varphi(x)\,dx \leqq \underline{\int_0^a} [\psi(x) + \varphi(x)]\,dx.$$

Mais, lorsque $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions semicontinues bornées inférieurement, on a

$$\underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx + \underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx = \underline{\int_0^x} [\psi(x) + \varphi(x)]\,dx.$$

Il est évident qu'on ne doit faire la démonstration que lorsque les deux intégrales par défaut du premier membre ont chacune une valeur finie — dans le cas contraire on aurait $+\infty = +\infty$.

Dans ce cas ces fonctions sont sommables, d'après les idées de M. Lebesgue; nous désignerons l'intégrale de $\psi(x)$ au sens de M. Lebesgue par

$$(L)\int_0^a \psi(x)\,dx.$$

On a, en général, $\psi(x)$ et $\varphi(x)$ étant des fonctions sommables:

$$(L)\int_0^a \psi(x)\,dx + (L)\int_0^a \varphi(x)\,dx = (L)\int_0^a [\psi(x) + \varphi(x)]\,dx.$$

Mais lorsque ψ est semicontinue on a

$$\int_0^a \psi(x)\,dx = (L)\int_0^a \psi(x)\,dx.$$

Donc (φ étant aussi semicontinue)

$$\underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx + \underline{\int_0^a} \varphi(x)\,dx = (L)\int_0^a \psi(x)\,dx + (L)\int_0^a \varphi(x)\,dx =$$

$$= (L)\int_0^a [\psi(x) + \varphi(x)]\,dx.$$

Mais on sait que ψ et φ étant semicontinues $\psi + \varphi$ l'est aussi, ainsi

$$(L)\int_0^a [\psi(x) + \varphi(x)]\,dx = \underline{\int_0^a} [\psi(x) + \varphi(x)]\,dx$$

et enfin

$$\underline{\int_0^a} \psi(x)\,dx + \underline{\int_0^a} \varphi(x)\,dx = \underline{\int_0^a} [\psi(x) + \varphi(x)]\,dx^{*}.$$

Théorème. Soit Q un ensemble de points situés sur $(0, a)$. Supposons qu'on puisse le renfermer à l'intérieur** de certains intervalles, dont la longueur pourra être rendue aussi petite que l'on veut, et dont le nombre, fini ou non, sera dans le dernier cas égal à la première puissance.

Nous supposerons de plus que la somme des longueurs de ces intervalles soit plus grande qu'une constante $d \geqq 0$ $(d < a)$, mais que par le choix convenable des intervalles, elle puisse être rendue plus petite que $d + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, d'ailleurs arbitraire.

Adjoignons à chaque point x de $(0, a)$ qui n'appartient pas à Q, un intervalle (u, v) qui le renferme**. Lorsque $u \leqq u_1 < x < v_1 \leqq v$ nous allons considérer (u_1, v_1) aussi comme adjoint à x.

Nous désignerons ces intervalles par I.

Soit λ un nombre positif donné à l'avance.

Alors il existe une division X_l de $(0, a)$, pour laquelle les

---

* Autrefois j'ai démontré ce théorème par une méthode qui semble plus longue que celle du texte, mais ne l'est pas en réalité, puisque elle ne suppose pas la connaissance de l'intégrale de M. Lebesgue. Mais comme les belles recherches de M. Lebesgue sont aujourd'hui suffisamment connues nous nous contentons d'indiquer un lemme qui rend aussi des grands services dans la quadrature de $z = f(x, y)$.

** Les points 0 et a exeptés, ils ne peuvent être que l'extrêmité d'un tel intervalle.

longueurs des intervalles sont plus petites que λ, de plus, la somme des longueurs des intervalles de X_l qui ne sont pas des intervalles I, est plus petite que $d+\lambda$.

Dans les applications nous avons eu $d=0$*.

8. Enonçons un autre théorème.

Désignons par $(0, c)$ un intervalle de la variable z, par Z_n une division de $(0, c)$, par (z_h, z_{h+1}) l'intervalle général de Z_n, etc. . . . .

Soit $\overline{Z}$ un ensemble de seconde catégorie** de $(0, c)$. Soit $\psi_r(\overline{Z})\,(r=1, 2, \ldots)$ une fonction uniforme bornée et positive, définie sur l'ensemble $\overline{Z}$; soit de plus ψ_r intégrable et

$$\psi_{r+1}(\overline{Z}) \geqq \psi_r(\overline{Z})\text{***}.$$

Ainsi pour chaque point $\overline{Z}$ de $\overline{Z}$

$$\lim_{r=\infty} \psi_r(\overline{Z})$$

est bien déterminée. En désignant cette valeur par $\Psi(\overline{Z})$, $\Psi(\overline{Z})$ sera une fonction uniforme et positive sur $\overline{Z}$. Supposons que Ψ soit une fonction semicontinue †. Alors on aura

* Le théorème est une généralisation formelle d'un théorème de M. Lebesgue. Je crois que M. Lebesgue l'emploie implicitement dans ses Leçons sur l'intégration, p. 62.

** C'est à dire que l'ensemble $(0, c)-\overline{Z}$ peut être renfermé, dans des intervalles, pour lesquels la somme de leurs longueurs est aussi petit que l'on veut. Cette définition est due à M. Baire.

*** Bien entendu, quoique chaque ψ_r soit bornée individuellement, la limite supérieure de ψ_r peut augmenter indéfiniment avec r. — Désignons par $G_h\,(g_h)$ la limite supérieure (inférieure) de $\psi_r(\overline{Z})$ pour les points de $\overline{Z}$ contenus dans (z_h, z_{h+1}). Nous dirons que $\psi_r(\overline{Z})$ est intégrable, lorsque l'on a

$$Z G_h(z_{h+1}-z_h) = Z g_h(z_{h+1}-z_h),$$

et nous désignerons cette valeur par

$$\int_0^c \psi_r(\overline{Z})\,dz.$$

† C'est à dire que pour chaque point $\overline{Z'}$ de $\overline{Z}$ on doit avoir

$$\Psi(\overline{Z'}) = \lim_{\varepsilon+\eta=0} g^{\Psi}(Z'-\varepsilon,\ Z'+\eta),$$

en désignant par $g^{\Psi}(\overline{Z'}-\varepsilon,\ \overline{Z'}+\eta)$ la limite inférieure des valeurs de Ψ pour les points de $\overline{Z}$ contenus dans $(Z'-\varepsilon,\ Z'+\eta)$.

$$\int_0^c \Psi(\overline{Z})\,dz = \lim_{r=\infty} \int_0^c \psi_r(\overline{Z})\,dz\,^*.$$

9. Revenons au théorème du No. 7. Désignons par ξ_i une valeur qui, comprise dans (x_i, x_{i+1}), soit telle que, pour une certaine suite de divisions X_{l_r}, nous ayons:

$$X_{l\infty}[\psi(\xi_i) + \varphi(\xi_i)](x_{i+1} - x_i) = \int_0^a [\psi(x) + \varphi(x)]\,dx^{**}.$$

Alors on aura

$$X_{l\infty}\,\psi(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_0^a \psi(x)\,dx,$$

$$X_{l\infty}\,\varphi(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_0^a \varphi(x)\,dx.$$

Nous supprimons la démonstration qui est de toute évidente.

Remarquons que le théorème s'étend aussi à la somme de plusieurs fonctions semicontinues, bornées inférieurement, dont l'intégrale par défaut a une valeur finie.

10. Soit $\psi(x) \geqq 0$ et semicontinue, et soit de plus

$$\psi(0) < +\infty, \quad \psi(a) < +\infty, \quad \int_0^a \psi(x)\,dx < +\infty.$$

Ayant $\int_0^a \psi(x)\,dx < +\infty$, il existe nécessairement dans chaque intervalle partiel de $(0, a)$ des points x pour lesquels $\psi(x) < +\infty$.

On doit remarquer que $\Psi(\overline{Z})$ n'a pas nécessairement des minima, comme la fonction semicontinue définie pour tous les points de $(0, a)$, (ou pour les points d'un ensemble relativement parfait). $\Psi(\overline{Z})$ est certainement semicontinue lorsque chaque $\psi_r(\overline{Z})$ est continu sur l'ensemble $\overline{Z}$.

* $$\int_0^c \Psi(\overline{Z})\,dz = Z g^{\Psi}(z_h, z_{h+1}) \cdot (z_{h+1} - z_h).$$

Si l'ensemble $\overline{Z}$ coïnciderait avec $(0, c)$ le théorème serait une conséquance de la condition 6. de M. Lebesgue. Leçons sur l'intégration p. 99. Cette remarque conduit à la démonstration.

** Par exemple on peut choisir ξ_i de telle manière qu'on ait
$$\psi(\xi_i) + \varphi(\xi_i) = g^{(\psi+\varphi)}(x_i, x_{i+1}).$$

On peut donc former une division X_l, telle que l'on ait, pour ses points diviseurs, $\psi(x) < +\infty$.

Soit X_{L_r} une suite de divisions à quotient fini. Choisissons dans chaque intervalle de X_{L_r}, ne contenant aucun point de X_l un point ξ_i, tel que nous ayons

$$\psi(\xi_i) = g^{\psi}(x_i, x_{i+1}).$$

Les points ξ_i et les points de X_l forment une division X_{l_r}.

Dès que r dépassera une certaine limite, nous aurons

$$X_{l_r}(\psi(x_i) + \psi(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) < 2H\int\limits_0^a \psi(x)dx,$$

H étant une constante qui ne dépend que du quotient de la suite X_{L_r}.

De plus, lorsque $\psi(x)$ est égal à la somme de plusieurs fonctions positives et semicontinues,

$$\psi(x) = \psi_1(x) + \cdots + \psi_h(x) + \cdots + \psi_n(x)$$

nous aurons, dès que r dépassera une certaine limite:

$$X_{l_r}(\psi_h(x_i) + \psi_h(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) < 2H\int\limits_0^a \psi_h(x)dx.$$

De plus (x', x'') étant un intervalle quelconque de $(0, a)$ on a:

$$^{x}X_{l_r}^{x'''}(\psi_h(x_i) + \psi_h(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) < 2H\int\limits_{x'}^{x''} \psi_h(x)dx.$$

11. Nous allons démontrer maintenant que

$$XY\beta_{i,j}$$

existe et que l'on a

$$XY\beta_{i,j} = \int\limits_0^a J(x)dx. \quad \text{(No. 2. Chap. V).}$$

Soit $X_{l_r}Y_{m_r}$ une suite de divisions. Posons

$$\overline{m}_r(x) = Y_{m_r}|f(x, y_{j+1}) - f(x, y_j)|,$$

$\overline{m}_r(x)$ est évidemment une fonction uniforme, bornée et continue de x, et on a

$$J(x) \geqq \overline{m}_{r+1}(x) \geqq \overline{m}_r(x), \quad J(x) = \lim_{r=\infty} \overline{m}_r(x),$$

$$X_{l_r}Y_{m_r}\beta_{i,j} = \int\limits_0^a \overline{m}_r(x)\,dx.$$

$J(x)$ est semicontinue et ainsi, d'après le théorème du No. 8

$$\lim_{r=\infty} \int_0^a \overline{m}_r(x)\,dx = \int_{\underline{0}}^{a} J(x)\,dx.$$

De plus

$$\lim_{r=\infty} \int_0^a \overline{m}_r(x)\,dx = X_{l\infty} Y_{m\infty} \beta_{i,j}.$$

On conclut

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \beta_{i,j} = \int_{\underline{0}}^{a} y(x)\,dx.$$

En considérant que

$$\int_0^a |f(x, y'') - f(x, y')|\,dx,$$

par suite de la continuité de la surface, tend vers 0 avec $|y''-y'|$, on démontre, à l'aide de la superposition des divisions, que $Y_{l'_r} Y_{m'_r}$ étant une suite quelconque de divisions (de première espèce ou non), les valeurs limites de la suite des valeurs

$$X_{l'_r} Y_{m'_r} \beta_{i,j}$$

coïncident avec $X_{l\infty} Y_{m\infty} \beta_{i,j}$.

Donc $XY\beta_{i,j}$ existe et est égal à $\int_{\underline{0}}^{a} J(x)\,dx.$

On démontre de même que

$$XY\gamma_{i,j} = \int_{\underline{0}}^{b} J(y)\,dy.$$

Soit Q un ensemble des points situés dans $(0, a;\ 0, b)$. Prenons $\varepsilon_{i,j} = 1$ lorsque $(x_i, x_{i+1};\ y_j, y_{j+1})$ contient au moins un point de Q, et soit $\varepsilon_{i,j} = 0$ dans le cas contraire.

On démontre aisément que, lorsque l'aire de f est finie,

$$XY\varepsilon_{i,j} \cdot \beta_{i,j}$$

existe. Soit de plus $\overline{\beta}_{i,j}$ la valeur qui est pour $(x_i, x_{i+1};\ y_j, y_{j+1})$ ce que $XY\beta_{i,j}$ est pour $(0, a;\ 0, b)$. On aura

$$XY\varepsilon_{i,j} \cdot \beta_{i,j} = XY\varepsilon_{i,j} \cdot \overline{\beta}_{i,j}.$$

Soit β_Q cette valeur, désignons par $\overline{\gamma}_{i,j}$, γ_Q des valeurs relatives au plan yz, et respectivement analogues à $\bar{\beta}_{i,j}$, β_Q, et soit

$$\alpha_Q = XY\varepsilon_{i,j} \cdot \alpha_{i,j};$$

α_Q est évidemment la mesure extérieure de Q.*

12. Soit $z = \varphi(x, y)$ une fonction uniforme dans $(0, a; 0, b)$ et soit x, y un point de $(0, a; 0, b)$. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_1, \eta_2$ positifs et soit $G(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_2; y - \eta_1, y + \eta_2)$ la limite supérieure des valeurs de φ, pour les points de $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_2; y - \eta_1, y + \eta_2)$, contenus dans $(0, a; 0, b)$.

On sait que la limite de cette quantité pour $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \eta_1 = \eta_2 = 0$ existe, et qu'elle est indépendante du mode de décroissance des $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \eta_1, \eta_2$. Soit $G(x, y)$ cette limite; désignons par $g(x, y)$ la valeur analogue obtenue à l'aide des limites inférieures.

On sait que l'ensemble des points où $G(x, y) = +\infty$ est relativement parfait et qu'il en est de même de l'ensemble des points pour lesquels $g(x, y) = -\infty$. L'ensemble somme est aussi relativement parfait. Désignons le par Q.

Supposons que $\alpha_Q = 0$ et que, lorsque $\varepsilon_{i,j} = 0$,

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

existe — c'est à dire que lorsque $\varepsilon_{i\,j} = 0$, φ soit bornée et intégrable dans $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$.

Posons $\lambda_{i,j} + \varepsilon_{i,j} = 1$ et, quelque soit le signe ω, posons $0 \cdot \omega = 0$.

Pour une suite $X_{l_r} Y_{m_r}$

$$X_{l\infty} Y_{m\infty} \lambda_{i,j} \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \varphi(x, y)\, dx\, dy$$

existe, et l'on démontre de plus que

---

* En désignant par Q_1 l'ensemble dérivé d'ordre quelconque (fini ou transfini) de Q ou aura

$$\alpha_{Q_1} = \alpha_Q, \quad \beta_{Q_1} = \beta_Q, \quad \gamma_{Q_1} = \gamma_Q.$$

Pour les ensembles de points situés sur une surface $z = f(x, y)$ à aire finie, on peut établir le théorème des mesures à l'aide des $\alpha_{i,j}$, $\bar{\beta}_{i,j}$, $\bar{\gamma}_{i,j}$, $t_{i,j}$.

$$XY\lambda_{i,j}\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}|\varphi(x,y)|\,dx\,dy$$

existe aussi.

Lorsque cette valeur a une valeur finie, la quantité

$$XY\lambda_{i,j}\cdot\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\varphi(x,y)\,dx\,dy$$

existe aussi et a une valeur finie.

Nous dirons dans ce cas que $\varphi(x, y)$ est intégrable et que la valeur ci-dessus est son intégrale; nous poserons

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^b\varphi(x,y)\,dx\,dy = XY\lambda_{i,j}\cdot\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}\varphi(x,y)\,dx\,dy. *$$

13. Soient λ_x et λ_y intégrables; alors

$$(1+\lambda_y^2+\lambda_x^2)^{\frac{1}{2}}$$

est aussi intégrable et l'on a, comme dans le No. 5, seize fonctions ayant la même intégrale.

Nous poserons

$$\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}}\int\limits_{y_j}^{y_{j+1}}(1+\lambda_y^2+\lambda_x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx\,dy = J_{i,j}$$

et nous désignerons aussi par Q l'ensemble relativement parfait des points pour lesquels $(1+\lambda_x^2+\lambda_y^2)^{\frac{1}{2}}$ se comporte comme $\varphi(x, y)$ pour Q.

14) Soient λ_y et λ_x intégrables, et soit de plus

$$X_{p_\infty}Y_{q_\infty}\varepsilon_{i,j}\cdot\beta_{i,j} = X_{p_\infty}Y_{q_\infty}\varepsilon_{i,j}\cdot\gamma_{i,j} = 0,$$

$X_{p_r}Y_{q_r}$ étant une suite déterminée de divisions de première espèce ou non.

On aura les théorèmes suivants.

I. $$t = \int\limits_0^a\int\limits_0^b(1+\lambda_y^2+\lambda_x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx\,dy.$$

* C'est un cas particulier des intégrales généralisées de M. Jordan, Cours d'Analyse, (2) 1894, T. II. p. 46 et suiv.

II. Lorsque le contour de la surface a une longueur finie, on peut trouver une suite de divisions $X_{l_r} Y_{m_r}$, telle que l'on ait

$$t = X_{l\infty} Y_{m\infty}(ABC + ADC) = T_6 = T_1.$$

III. Dans le cas contraire on a de même

$$t = X_{l\infty} Y_{m\infty}(ABC + ADC) = T_6 = T_1$$

mais on doit (de la somme et de la figure) rejeter les triangles qui ont un côté au-dessus du contour de $(0, a; 0, b)$. Il convient de remarquer qu'on ne les doit pas tous rejeter, par exemple lorsque $S_y(0, b) < +\infty$, on peut conserver ceux qui ont un côté dans le plan yz; même lorsque $S_y(0, b) = +\infty$ on peut conserver quelques-uns de ces derniers.

Démonstrations. A) Nous allons démontrer, que lorsque les conditions de ce No. sont remplies, on a

$$\underline{\int_0^a} J(x)dx < +\infty, \quad \underline{\int_0^b} J(y)dy < +\infty.$$

Considérons la suite $X_{p_r} Y_{q_r}$. Pour les rectangles de la division $X_{p_r} Y_{q_r}$, où $\lambda_{i,j} = 1$, la surface a la même propriété que la surface du No. 6.

Il en résulte que pour notre surface

$$t_{i,j} = J_{i,j} \quad (\lambda_{i,j} = 1).$$

Mais

$$t_{i,j} > \beta_{i,j}.$$

Or

$$J_{i,j} > \beta_{i,j} \quad (\lambda_{i,j} = 1),$$

$$X_{p_r} Y_{q_r} \lambda_{i,j} \cdot J_{i,j} > X_{p_r} Y_{q_r} \lambda_{i,j} \cdot \beta_{i,j},$$

$$X_{p_r} Y_{q_r} \lambda_{i,j} \cdot J_{i,j} + X_{p_r} Y_{q_r} \varepsilon_{i,j} \cdot \beta_{i,j} > X_{p_r} Y_{q_r} \beta_i \ .$$

Pour $r = \infty$ on aura

$$\int_0^a \int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx dy > \underline{\int_0^a} J(x)dx,$$

le théorème est donc démontré.

On aura de plus

$$\beta_Q = \gamma_Q = 0.$$

B) Dans ce qui suit nous supposerons que la longueur du contour de f soit finie.

On peut donc former une division $X_l Y_m$, nous désignerons ses points par x_i', y_j', de façon que

$$J(x_i') < +\infty, \quad J(y_j') < +\infty.$$

et que δ étant un nombre positif donné à l'avance, on ait:

$$0 \leq \int_0^a \int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx dy - X_l Y_m \lambda_{i,j} \cdot J_{i,j} < \delta \tag{1}$$

$$X_l Y_m \varepsilon_{i,j}(\alpha_{i,j} + \bar{\beta}_{i,j} + \bar{\gamma}_{i,j}) < \delta.* \tag{2}$$

Soit $X_{L_r} Y_{M_r}$ une suite de divisions à quotient fini; prenons r assez grand pour que les (x_i', x_{i+1}') (y_j', y_{j+1}') soient respectivement partagés en plusieurs autres intervalles, par les points de X_{L_r} et par les points de Y_{M_r}.

Dans chaque intervalle de X_{L_r} qui ne contient aucun point de X_l, nous choisirons un point ξ, tel que $J(\xi)$ soit égal au minimum de $J(x)$ dans l'intervalle considéré.

Les ξ et les points de X_l forment une division X_{l_r}.

Nous déterminerons de même une division Y_{m_r}. On observe que $X_{l_r} Y_{m_r}$ contient $X_l Y_m$.

C) Soit, pour un rectangle $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ de $X_{l_r} Y_{m_r}$ $\lambda'_{i,j} = \frac{1}{0}$, lorsque ce rectangle est compris dans un rectangle de $X_l Y_m$ pour lequel on avait $\lambda_{i,j} = \frac{1}{0}$.

Au-dessus des rectangles de $X_l Y_m$, où $\lambda_{i,j} = 1$, la surface a la même propriété que celle du Nr. 6.

Or, en prenant r assez grand, nous aurons

$$|X_{l_r} Y_{m_r} \lambda'_{i,j} \cdot J_{i,j} - X_{l_r} Y_{m_r} \lambda'_{i,j}(ABC + ADC)| < \delta. \tag{3}$$

Considérons maintenant les rectangles de $X_l Y_m$ où $\varepsilon_{i,j} = 1$, $(\lambda_{i,j} = 0)$. Le rectangle $(x_i', x_{i+1}'; y_j', y_{j+1}')$ est partagé par les lignes de $X_{l_r} Y_{m_r}$.

Soient

$$x_i' = \xi_0^{(i)} < \xi_1^{(i)} < \cdots < \xi_h^{(i)} < \cdots < \xi_{r_i}^{(i)} = x_{i+1}',$$

$$y_j' = \eta_0^{(j)} < \eta_1^{(j)} < \cdots < \eta_k^{(j)} < \cdots < \eta_{r_j}^{(j)} = y_{j+1}',$$

---

* Dans ce qui suit les $\alpha_{i,j}$, $\bar{\beta}_{i,j}$, $\bar{\gamma}_{i,j}$ appartiendront à $(x_i', x_{i+1}'; y_j', y_{j+1}')$.

les points de X_{l_r} et de Y_{m_r} qui partagent respectivement (x_i', x_{i+1}'), (y_j', y_{j+1}').

On a

$$ABC + ADC \leqq (A_1B_1C_1 + A_1D_1C_1) + (A_2B_2C_2 + A_2D_2C_2) + (A_3B_3C_3 + A_3D_3C_3),$$

$$A_2B_2C_2 = \tfrac{1}{2}\, f(\xi_h^{(i)}, \eta_{k+1}^{(j)}) - f(\xi_h^{(i)}, \eta_k^{(j)}) \cdot (\xi_{h+1}^{(i)} - \xi_h^{(i)}),$$

$$A_2D_2C_2 = \tfrac{1}{2}|f(\xi_{h+1}^{(i)}, \eta_{k+1}^{(j)}) - f(\xi_{h+1}^{(i)}, \eta_k^{(j)})| \cdot (\xi_{h+1}^{(i)} - \xi_h^{(i)}),$$

$$\sum_0^{r_j-1}{}^{k} |f(\xi_h^{(i)}, \eta_{k+1}^{(j)}) - f(\xi_h^{(i)}, \eta_k^{(j)})| \leqq J_y(\xi_h^{(i)}, y_{j+1}') - J_y(\xi_h^{(i)}, y_j'),$$

$$\sum_0^{r_j-1}{}^{k} |f(\xi_{h+1}^{(i)}, \eta_{k+1}^{(j)}) - f(\xi_{h+1}^{(i)}, \eta_k^{(j)})| \leqq J_y(\xi_{h+1}^{(i)}, y_{j+1}') - J_y(\xi_{h+1}^{(i)}, y_j')$$

et ainsi

$$\sum_0^{r_i-1} \sum_0^{r_j-1}{}^{k} (A_2B_2C_2 + A_2D_2C_2)$$

$$\leqq \tfrac{1}{2} \sum_0^{r_i-1}{}^{h} [J_y(\xi_h^{(i)}, y_{j+1}') - J_y(\xi_h^{(i)}, y_j') + J_y(\xi_{h+1}^{(i)}, y_{j+1}') - J_y(\xi_{h+1}^{(i)}, y_j')] (\xi_{h+1}^{(i)} - \xi_h^{(i)}).$$

La fonction semicontinue $J(x)$ est égale à la somme de m fonctions

$$J_y(x, y_{j+1}') - J_y(x, y_j'),$$

et ces fonctions sont aussi semicontinues. La suite $X_{L_r} Y_{M_r}$ a un quotient fini. Donc, d'après le No. 10, il existe une constante H, ne dépendant que du quotient de la suite et telle que, pour les r assez grands, le second membre de la dernière inégalité soit plus petit que

$$H \cdot \int_{x_i'}^{x_{i+1}'} (J_y(x, y_{j+1}') - J_y(x, y_j'))\,dx = H \cdot \bar{\beta}_{i,j}\text{*}$$

---

* D'après le théorème du No. 7 du Chap. VII on pourrait avoir, pour certaines suites, $H < 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ étant d'ailleurs arbitraire.

Donc

$$\sum_{0}^{r_i-1}{}^h \sum_{0}^{r_j-1}{}^k [A_2 B_2 C_2 + A_2 D_2 C_2] \leqq H \cdot \bar{\beta}_{i,j}$$

et de même en prenant, si cela est nécessaire, r encore plus grand,

$$\sum_{0}^{r_i-1}{}^h \sum_{0}^{r_j-1}{}^k [A_3 B_3 C_3 + A_3 D_3 C_3] \leqq H \cdot \bar{\gamma}_{i,j}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\sum_{0}^{r_i-1}{}^h \sum_{0}^{r_j-1}{}^k [ABC + ADC] &\leqq \alpha_{i,j} + H \cdot \bar{\beta}_{i,j} + \bar{\bar{H}} \cdot \gamma_{i,j} \\ &< H(\alpha_{i,j} + \bar{\beta}_{i,j} + \bar{\gamma}_{i,j}),\end{aligned}$$

car on peut supposer $H > 1$.

Nous aurons, à l'aide de (1) (2) (3)

$$\begin{aligned}\left| \int_0^a\!\!\int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx\,dy - X_{l_r} Y_{m_r}(ABC + ADC) \right| \\ < 2\delta + H \cdot \delta.\end{aligned} \tag{4}$$

D) On voit donc que si, au lieu de $X_l Y_m$, on prend le $X_{l_r} Y_{m_r}$ de (4), r étant aussi grand, on peut, au lieu de δ dans (1) (2) (3), prendre $\frac{\delta}{2}$ et en continuant le procedé de proche en proche, on aura pour une certaine suite de divisions que nous désignons par $X_{l_r} Y_{m_r}$:

$$X_{l\infty} Y_{m\infty}(ABC + ADC) = \int_0^a\!\!\int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx\,dy\,*.$$

E) Il reste à démontrer que

$$t = \int_0^a\!\!\int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} dx\,dy = T_6 = T_1.$$

T_1 ne peut être plus petit que l'intégrale. Soit $X_{l_r} Y_{m_r}$ une suite de divisions, et soit $\varDelta_s$ une suite de polyèdres, telle que celles du Chap. I. En prenant s assez grand, pour les rectangles d'une division de la suite nous aurons, d'après le Chap. VI et d'après le No. 6 de ce Chap.:

$$\varDelta_s^{i,j} \geqq J_{i,j} - \delta_{i,j}, \quad (\lambda_{i,j} = 1), \quad \delta_{i,j} \geqq 0,$$

---

* On a encore $X_{l\infty} Y_{m\infty}(ABC + ADC) = X_{l\infty} Y_{m\infty}(AB'CD)$.

et la somme de tous les $\delta_{i,j}$ est aussi petite que l'on veut. Ainsi

$$\varDelta_s t \geqq X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} \cdot J_{i,j} - \delta$$

— ici δ est aussi petit que l'on veut.

Donc pour $s = \infty$, $r = \infty$, $\delta = 0$,

$$\lim \varDelta_s t \geqq \int_0^a \int_0^b (1 + \lambda_y^2 + \lambda_x^2)^{\frac{1}{2}} \, dx \, dy.$$

Nous omettons les démonstrations faciles à trouver des théorèmes I et III.

Chapitre XI.
La définition de M. Peano.

1. Soit donnée une surface courbe et soit T_4 son aire. Décomposons-la en portions (1), (2), . . ., en nombre fini.

Nous supposons 1. Que le sens du mot portion de la surface soit défini*. 2. Que chacune des portions (1), (2), . . ., possède une aire (la définition étant T_4), $T_4^{(1)}$, $T_4^{(2)}$, . . ., et que

$$T_4 = T_4^{(1)} + T_4^{(2)} + \ldots \text{**}.$$

3. Que en projetant orthogonalement les points d'une portion (1), (2), . . ., sur un plan quelconque, cette projection possède une aire u_1, u_2, . . .,***.

Soit $\delta > 0$, d'ailleurs arbitraire. Soit de plus $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, . . ., une suite de polyèdres inscrits dans la portion (k), telle comme nous l'avons définies au Chap. I, en définissant l'ensemble IV. Soit $\varDelta_1' t$, $\varDelta_2' t$, . . ., la somme des aires des triangles qu'on obtient, lorsqu'on projette orthogonalement les triangles de $\varDelta_1$, $\varDelta_2$ . . ., sur le plan considéré.

Nous supposons 4. qu'on puisse démontrer, qu'en prenant s assez grand,

$$\varDelta_s' t \geqq u_k - \delta.$$

---

* Dans le cas de la surface $z = f(x, y)$, dont l'aire est finie la définition des portions sera donné tout de suite.

** M. Lebesgue démontre, la définition de l'aire étant T_2, qu'une telle décomposition est possible; Thèse p. 77.

*** Je crois pouvoir affirmer avec beaucoup de certitude qu'en général la projection d'une surface rectifiable sur un plan quelconque n'a pas d'aire.

On démontre ainsi que $T_4^{(k)} \geqq u_k$.

Je remarque que dans le cas de la surface $z = f(x, y)$ j'ai trouvé des déterminations très générales pour les portions satisfaisant aux conditions décrites. Les contours (ou mieux frontières) de ces portions ne sont pas des lignes courbes, mais des figures plus générales*.

Nous définissons comme portion de la surface $z = f(x, y)$, la surface qui est définie par l'équation $z = f(x, y)$, le point x, y variant dans une domaine renfermée par une ligne courbe à longueur finie, simplement fermée. Bien entendu, dans ce cas il n'importe qu'on considère les points de la ligne courbe comme appartenant ou non au domaine.

2. Décomposons la surface en portions en nombre fini. Séparons les portions, et transportons chacune d'elles, sans déformation, en une position finale arbitraire. Projetons orthogonalement les points de chacune de ces portions sur un plan fixe et soient $u_1, u_2, \ldots$, les aires de ces projections.

Soit
$$u_1 + u_2 + \cdots = U.$$

La limite supérieure de tous les U possibles est, pour nos surfaces, égale à T_6, c'est à dire à t.

* En désignant par Q la projection orthogonale de la frontière sur le plan xy, les conditions sont remplies lorsque l'on a (t étant fini)

$$\alpha_Q = \beta_Q = \gamma_Q = 0.$$

Soit s une ligne courbe à longueur finie, située dans le rectangle $(0, a;\ 0, b)$, on a (t étant fini)

$$\alpha_s = \beta_s = \gamma_s = 0.$$

Lorsque s est simplement fermé, la quantité t' analoque à t pour l'aire limitée par la courbe, et la quantité t'' pour le reste du rectangle $(0, a;\ 0, b)$ ont t pour somme, (t étant fini).

La ligne correspondante da la surface, est quarrable sur la surface, d'après la définition de M. Lebesgue, Thèse, p. 79.

Citons encore un théorème analogue. Désignons par z' la projection orthogonale de la section $z = \text{const.}$ sur le plan xy. L'ensemble des z pour lesquels $\alpha_{z'} > 0$, est (s'il existe) fini ou au plus dénombrable, la surface $z = f(x, y)$ étant d'ailleurs quelconque.

Pour la surface à aire finie, l'ensemble des z pour lesquels

$$\beta_{z'} + \gamma_{z'} > 0$$

est (s'il existe) fini ou dénombrable.

On a par hypothèse

$$u_1 \leqq T_4^{(1)},\ u_2 \leqq T_4^{(2)}, \ldots,$$

$$U = u_1 + u_2 + \cdots, \quad T_4 = T_4^{(1)} + T_4^{(2)} + \cdots,.$$

Ainsi $U \leqq T_4$, donc la limite supérieure U_1 des U est $\leqq T_4$. Considérons notre première surface. Soit $X_{l_r} Y_{m_r}$ une division de la suite du No. 1 du Chap. IX.

Lorsque $\lambda_{i,j} = 1$ (Chap. VIII), transportons $f_{i,j}$ (Chap. III) dans une position telle que $AB'CD$ (Chap. IX) soit parallèle au plan fixe. Désignons par $u_{i,j}$ l'aire de la projection de $f_{i,j}$ sur le plan fixe.

En considérant que $AB'CD$ est une figure plane et que la surface simplement connexe, formée par les cinq surfaces $f_{i,j}$, $\theta'^y_{i,j}$, $\theta^x_{i,j}$, $\theta'^x_{i,j+1}$, $\theta^y_{i+1,j}$ contient le contour de $AB'CD$, on obtient

$$(AB'CD) \leqq u_{i,j} + \theta'^y_{i,j} + \theta^x_{i,j} + \theta'^x_{i,j+1} + \theta^y_{i+1,j}.$$

Transportons le $f_{i,j}$ où $\lambda_{i,j} = 0$, dans une position telle qu'il occupe, par rapport au plan fixe, la même position que celle qu'il occupait (en faisant partie de la surface) par rapport au plan yz. On voit que

$$\gamma_{i,j} \leqq u_{i,j}.$$

Donc

$$X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} (ABC'D) + X_{l_r} Y_{m_r} \varepsilon_{i,j} \cdot \gamma_{i,j}$$
$$\leqq X_{l_r} Y_{m_r} u_{i,j} + X_{l_r} Y_{m_r} \lambda_{i,j} (\theta'^y_{i,j} + \theta^x_{i,j} + \theta'^x_{i,j+1} + \theta^y_{i+1,j}).$$

Mais, d'après le Chap. IX et VIII, pour $r = \infty$ le premier membre est égal à T_6 et le second terme du deuxième membre est égal à 0; de plus $X_{l_r} Y_{m_r} u_{i,j}$ est une valeur de U.

On aura donc

$$U_1 = T_4 = t = T_6.$$

On démontre de la même manière que pour notre deuxième surface

$$U_1 = T_4 = t = T_6.$$

Chapitre XII.

Sur l'invariant.

1. Je suppose qu'une figure dite ligne courbe et située sur une surface ait la propriété suivante: Il existe des portions qui la contiennent, et on peut varier chacune de ces portions de

manière que sa limite soit la ligne courbe et cette ligne seulement, de plus, que la limite de l'aire de la portion (la définition de l'aire étant T_4) soit égale à zéro*.

Pour la surface $z = f(x, y)$, dont l'aire est finie, ces conditions sont remplies, lorsque la projection orthogonale sur le plan xy de la ligne courbe est une ligne courbe ouverte, sans point double, à longueur finie.

2. Soit x', y', z' un système de coordonnées rectangulaires. Partageons la surface par des lignes courbes, et projetons orthogonalement les points de chaque portion sur les plans $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$. Ces projections, par hypothèse (No. 1, 4. Chap. XI), auront des aires. Soient α, β, γ les aires des trois projections d'une portion, et soit R la somme des toutes les valeurs

$$[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Nous partageons la surface, par des lignes toujours plus serrées, de manière que chaque portion diminue indéfiniment, c'est à dire que chaque distance qui existe entre deux points quelconques de chacune des portions, décroisse sans limite**.

Le nombre des portions, quoique restant toujours fini, croît évidemment sans limite.

Pour cette variation, $\lim R$ est déterminé et indépendant de la manière suivant laquelle la surface à été partagée.

Car, si nous diminuons les portions de manière que chacune d'entre elles soit divisée en plusieurs parties, au lieu d'un seul membre $[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2]^{\frac{1}{2}}$ nous en aurons plusieurs

$$[\alpha_1{}^2 + \beta_1{}^2 + \gamma_1{}^2]^{\frac{1}{2}}, \quad [\alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2 + \gamma_2{}^2]^{\frac{1}{2}}, \ldots,$$

dans la somme R.

Et on aura évidemment

$$\alpha \leqq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots, \quad \beta \leqq \beta_1 + \beta_2 + \cdots, \quad \gamma \leqq \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots,$$

---

* C'est la définition de M. LEBESGUE pour la ligne quarrable sur la surface — la définition de l'aire étant T_2.

Une ligne quarrable sur la surface pour T_4 est aussi quarrable pour T_2, la réciproque doit être démontrée.

** La possibilité d'une telle décomposition (la définition de l'aire étant T_2) a été démontré par M. LEBESGUE. Thèse, p. 77. 78.

Donc, d'après le Chap. IV, la suite des valeurs R est une suite non décroissante et ainsi pour chaque «suite de divisions» $\lim R$ est determiné.

On démontre, à l'aide du No. 1 et du No. 1. 4. du Chap. XI, que $\lim R$ est indépendant de la «suite des divisions de première espéce ou non».

Et d'après le Chap. XI, $\lim R \leqq T_4$.

3. Supposons que la surface $z = f(x, y)$ satisfasse à la condition de LIPSCHITZ*.

Nous démontrerons que $\lim R$ est indépendant du système de coordonnées rectangulaires et que sa valeur est $T_4 = T_6 = t$.

Prenons une suite des polyèdres $\varDelta$ constitués par des triangles ABC, ADC (Chap. IX).

Projetons les points de $f_{i,j}$ sur les plans $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$ de nouvelles coordonnées rectangulaires.

Soient $A_{i,j}$, $B_{i,j}$, $C_{i,j}$ les aires de ces projections. $AB'CD$ est une figure plane. La surface simplement connexe composée des cinq surfaces

$$f_{i,j},\ \theta'^{y}_{i,j},\ \theta^{x}_{i,j},\ \theta'^{x}_{i,j+1},\ \theta^{y}_{i+1,j}$$

contient la ligne $AB'CD$.

Il en résulte que

$$(AB'CD)_{z'} \leqq A_{i,j} + \theta'^{y}_{i,j} + \theta^{x}_{i,j} + \theta'^{x}_{i,j+1} + \theta^{y}_{i+1,j'},$$

$(AB'CD)_{z'}$ désignant l'aire de la projection de $AB'CD$ sur le plan $x'y'$).

Des relations analogues subsistent pour les projections sur les plans $x'z'$, $y'z'$.

En élévant au carré, ajoutant et extrayant la racine carrée, on aura

$$(AB'CD) \leqq [A^2_{i,j} + B^2_{i,j} + C^2_{i,j}]^{\frac{1}{2}} + 3(\theta^{x}_{i,j} + \theta'^{y}_{i,j} + \theta'^{x}_{i,j+1} + \theta^{y}_{i+1,j}).$$

En considérant que**)

---

* Savoir:

$$\left| \frac{f(x_1, y_1) - f(x, y)}{[(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2]^{\frac{1}{2}}} \right| < G \quad \text{pour} \quad (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 > 0.$$

** Dans ce cas on a pour chaque rectangle $\lambda_{i,j} = 1$.

$$X_{l\infty} Y_{m\infty}(AB'CD) = T_4 = t = T_6,$$

$$X_{l\infty} Y_{m\infty}[A^2_{i,j} + B^2_{i,j} + C^2_{i,j}]^{\frac{1}{2}} = \lim R,$$

$$X_{l\infty} Y_{m\infty}(\theta'^y_{i,j} + \theta^x_{i,j} + \theta'^x_{i,j+1} + \theta^y_{i+1,j}) = 0$$

on aura

$$T_4 \leqq \lim R.$$

C'est à dire

$$\lim R = T_4 = t = T_6.*$$

On démontre, d'une manière analogue, que le théorème s'applique aussi à notre deuxième surface.

Chapitre XIII.

Note sur la quadrature de la surface $z = f(x, y)$.

On conclut du No. 8 du Chap. VIII et des Chap. IX, XI, XII, qu'en choisissant une division convenable pour la plus grande partie des rectangles, les triangles ABC, ADC sont aptes à résoudre les trois problèmes suivantes.

I. Démontrer que $T_4 = t$. Chapitre IX.

II. Démontrer que $U_1 = T_4$. Chapitre XI.

III. Démontrer que $\lim R = T_4$. Chapitre XII.

Le Δ du Chap. I qui sert à résoudre ces trois problèmes est donc en partie définie.

Il reste donc à le définir au-dessus des rectangles exceptionnels, pour lesquels la somme de leurs aires peut être rendue aussi petite qu'on le veut.

Nous soumettrons ces rectangles à des subdivisions convenablement choisies, et nous obtiendrons, par le même procédé, de nouvelles portions de Δ, propres à résoudre les trois problèmes.

Mais en général, il reste de nouveau des rectangles exceptionnels, que l'on soumettra à de nouvelles subdivisions et l'on voit,

* Les théorèmes relatifs à la surface $z = f(x, y)$ et satisfaisant à la condition de Lipschitz furent publiés en 1906 en langue hongroise. Un extrait en a parue dans les Comptes Rendus, 1907 fév. 14.

qu'en général, après un nombre quelconque de subdivisions, il reste toujours des rectangles exceptionnels.*

On peut évidemment, continuer le procédé indéfiniment et de telle manière que l'ensemble relativement parfait Q des points, dont chacun est le point d'un rectangle exceptionnel, pour chacune des subdivisions, ait zéro pour mesure extérieure, dans le sens de M. JORDAN.

Je dis que l'on doit considérer Q, quoique ayant les propriétés décrites, comme arbitraire.

Quoique l'on puisse conclure du Chapitre VIII que les rectangles exceptionnels sont tels que pour certains points de leurs contours $|\lambda_x| + |\lambda_y|$ est très grand, et que, dans le voisinage d'un point quelconque de Q $|\lambda_x| + |\lambda_y|$ dépasse toute limite, on n'obtient par là aucun renseignement sur Q, car c'est pour la surface générale $z = f(x, y)$ la propriété d'un point quelconque.

De plus les divisions et les subdivisions se font entre de très larges limites arbitraires.

Or la quadrature de la surface $z = f(x, y)$ dépend de ses propriétés relativement à un ensemble Q, Q étant relativement parfait, à étendue 0 et situé dans $(0, a, 0, b)$.

Si l'on avait pour chaque Q

$$\beta_Q = \gamma_Q = 0,$$

on pourrait achever la quadrature (en poussant les subdivisions assez loin) par une dernière subdivision, et on démontrerait les théorèmes I, II, III comme pour notre deuxième surface.

Si l'on avait pour chaque Q

$$\beta_Q = 0, \quad \gamma_Q \text{ en général } > 0$$

on pourrait de même achever la quadrature par une dernière subdivision rectangulaire, mais on ne démontre que les théorèmes I et II comme pour notre première surface.

Nous allons citer une classe très générale de surfaces $z = f(x, y)$ pour lesquelles on a

$$\beta_Q = 0.$$

---

* Nous omettons la description de la manière dont on établie la connexion entre les portions de Δ, acquises pas à pas.

Soit $z = \varphi(y)$ une ligne courbe définie dans $(0, b)$.

Soit P un ensemble fermé à étendue linéaire 0, situé sur l'axe y. Renfermons le dans des intervalles en nombre fini, et soit d la somme de leurs longueurs. Soit s la somme des longueurs des arcs de $\varphi(y)$ qui correspondent à ces intervalles. On sait que

$$\lim_{d=0} s$$

est déterminé et indépendant du choix et du mode de décroissance des intervalles.

Lorsqu'il existe au moins un P, tel que l'on ait

$$\lim_{d=0} s > 0\,*,$$

je dis que la ligne courbe est une ligne courbe ordinaire.

Lorsque, $S(x)$ étant bornée ou non, l'aire de la surface est finie,** et l'ensemble des x, pour lesquels les sections $x =$ const. sont des lignes courbes ordinaires est un ensemble de première catégorie, on a toujours

$$\beta_Q = 0.$$

Une telle surface est, par exemple, celle pour laquelle la limite supérieure des $|\lambda_y|$ est égale à $+\infty$, et dont chaque section $x =$ const. satisfait à la condition de LIPSCHITZ.***

Mais, dans le cas général, on a

$$\beta_Q > 0, \quad \gamma_Q > 0.$$

Désignons par p les rectangles qu'on doit soumettre d'après la première division à des subdivisions.

Par le choix convenable de la première division, α_p est aussi petite que l'on veut, mais ce ne sera pas ainsi pour β_p, γ_p.

En considérant qu'on peut regarder dans un certain sens α_p, β_p, γ_p, comme la contribution des plans xy, xz, yz, pour l'aire par les portions de f situées au-dessus des rectangles p, et qu'il était possible de rendre par une division du plan xy, α_p aussi

---

* On a en général $\lim_{d=0} s = +\infty$.

** On au moins $\int_0^a S(x)dx < +\infty$.

*** On a pour les classes décrites de $z = f(x, y)$, $T_6 = t$.

petit que l'on veut, il est très naturel de songer à définir, au-dessus des p, de nouvelles portions de $\varDelta$, à l'aide des divisions rectangulaires du plan xz.

On peut espérer par là qu'on puisse définir de nouvelles portions de $\varDelta$, et que les portions de f, auxquelles, après ce procédé, n'appartiennent pas de portions de $\varDelta$, soient telles que seule leur contribution relative au plan yz, ait une valeur dont on doit tenir compte.

En traitant ces portions de la même manière relativement au plan yz, on obtient de nouvelles portions de $\varDelta$, et les portions de f, pour lesquelles le $\varDelta$ n'est pas encore défini, donnent des contributions de quantité négligeable à l'aire, relativement aux trois plans des coordonnées.

On achève l'inscription de $\varDelta$ par une subdivision du plan xy, et en établissant la connexion entre les diverses portions de $\varDelta$.*

Et l'on résolut les problèmes I. II. III.

Mais, pour procéder ainsi, on doit vaincre une difficulté assez grande.

On doit démontrer que les sections $x =$ const. $z =$ const. de la surface $z = f(x, y)$, dont l'aire est finie ont toutes les propriétés des sections $x =$ const., $y =$ const. qui facilitaient l'inscription des portions de $\varDelta$ par des divisions rectangulaires du plan xy.

Nous allons communiquer sans démonstrations les principaux théorèmes qui, en traitant la surface $z = f(x, y)$ par des divisions rectangulaires du plan xz, permettent d'obtenir des résultats analogues à ceux des Chapitres VIII, IX.

Pour donner une idée préliminaire, nous remarquons que nous remplacerons les portions de $z = f(x, y)$ par des portions $z = \varphi(x, y)$, telles que, lorsque $y_2 - y_1 \geqq 0$, on ait pour l'une de ces portions ou

$$\varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1) \geqq 0,$$

ou

$$\varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1) \leqq 0.$$

Théorème I. Soit s une ligne courbe simplement fermée à longueur finie, situé dans $(0, a; 0, b)$. Soit U l'aire

* Ces faces, qui établissent la connexion, ont une aire aussi petite que l'on veut — surtout à cause de la petitesse la quantité t correspondante.

renfermée par s, et soit t_U la quantité t pour U. Soit V l'aire qui complète U à $(0, a; 0, b)$, et désignons par t_V la quantité t pour V. On a (voir Chap. XI)

$$t_U + t_V = t.*$$

Théorème II. Soit f' la portion de $z = f(x, y)$ qui corresponde à U. Projetons les points de f' sur les plans des coordonnées. Ces projections possèdent des aires. Désignons-les par α, β, γ. On a

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{\frac{1}{2}} \leqq t_U.$$

De plus, les suppositions 3., 4. du Chap. XI sont exactes.

Prenons une division $X_l Y_m$, telle que $S(y_j) < +\infty$.**

Considérons la figure $\beta_{i,j}$.

Nous supposons $f(x, y) > 0$. Soit $(0, a; 0, c)$ un rectangle du plan xz, renfermant les projections orthogonales de $z = f(x, y)$ sur le plan xz.

Soit $X_L Z_N$ une division rectangulaire de $(0, a; 0, c)$.

Lorsque l'aire de $\beta_{i,j}$ est positive, en choisissant $X_L Z_N$ d'une manière convenable, quelques-uns de ses rectangles seront situés à l'intérieur de $\beta_{i,j}$.

Soit $(x_k, x_{k+1}; z_h, z_{h+1})$ un tel rectangle. Supposons que dans (x_k, x_{k+1}) on ait $f(x, y_{j+1}) > f(x, y_j)$.

Dans tous ce qui va suivre nous conservons cette supposition; on verra facilement les modifications causées par le cas contraire.

Nous désignons par h_1 et h_2 $(h_2 > h_1)$ les nombres entiers pour lesquels $(x_k, x_{k+1}; z_{h_1}, z_{h_2})$ est contenu dans $\beta_{i,j}$, mais $(x_k, x_{k+1}; z_{h_1-1}, z_{h_1})$ et $(x_k, x_{k+1}; z_{h_2}, z_{h_2+1})$ ont au moins un point qui n'est pas situé à l'intérieur de $\beta_{i,j}$.

Désignons par m, M, le minimum respectivement le maximum des valeurs de $z = f(x, y)$ dans $(x_k, x_{k+1}; y_j, y_{j+1})$. Soit $d > 0$.

Nous définissons dans $(x_k, x_{k+1}; y_j - d, y_{j+1} + d)$ une surface $z = \lambda(x, y)$ de la manière suivante.

---

* Dans tous ce qui suit nous supposons que t soit fini.

** Nous supposons $S_x(a, 0) < +\infty$, $S_x(a, b) < +\infty$.

Dans $(x_k, x_{k+1}; y_j - d, y_j)$, $z = \lambda(x, y)$ sera le conoïde dont l'une de ses directrices est la ligne droite

$$y = y_j - d, \quad z = m - d,$$

l'autre est la ligne courbe à longueur finie

$$y = y_j, \quad z = f(x, y_j),$$

et dont les génératrices sont parallèles au plan yz.

Au-dessus de $(x_k, x_{k+1}; y_j, y_{j+1})$ soit $\lambda(x, y) = f(x, y)$.

Au-dessus de $(x_k, x_{k+1}; y_{j+1}, y_{j+1} + d)$, $z = \lambda(x, y)$ sera le conoïde ayant pour directrices la ligne courbe à longueur finie:

$$y = y_{j+1}, \quad z = f(x, y_{j+1}),$$

et la ligne droite

$$y = y_{j+1} + d, \quad z = M + d,$$

et dont les génératrices sont parallèles au plan yz.

On prouve facilement que l'aire de la surface $z = \lambda(x, y)$ est finie.

Théorème III. On peut construire une surface $z = \lambda_1(x, y)$ au-dessus de $(x_k, x_{k+1}; y_j - d, y_{j+1} + d)$ ayant les propriétés suivantes.

1. $m - d \leq \lambda_1(x, y) \leq M + d$.

2. Ses sections $z = m - d$, $z = M + d$ se confondent avec celles de $z = \lambda(x, y)$.

3. Chacune de ses sections $z =$ const. est d'un seul tenant.*

4. Lorsque la mesure extérieure et plane de sa section $z =$ const. est égale à zéro, cette section est située sur $z = \lambda(x, y)$.

5. La quantité t pour λ_1 est au plus égale à celle de λ.

Théorème IV. Il existe un ensemble de seconde catégorie $\overline{Z}$ de $(m - d, M + d)$, tel que la section $z = \overline{Z} =$ const. ($\overline{Z}$ désigne aussi un point de l'ensemble $\overline{Z}$) de λ_1 est com-

* Nous disons qu'une figure est d'un seul tenant, lorsqu'elle est parfait, et lorsque, pour chaque couple A, B de ses points et pour chaque $\delta > 0$, il existe une ligne polygonale allant de A à B, dont les côtés sont plus petits que δ et dont les sommets sont des points de la figure, Jordan, Cours d'Analyse T. I.

posée d'une seule ligne courbe $U(\overline{Z})$ à longueur finie.* Cette ligne courbe n'a pas des points doubles, et en partant d'un point du plan $x=x_k$ elle va jusqu' à $x=x_{k+1}$.

Un plan normale à l'axe des x peut couper la courbe en une infinité de points.

Ayant $\overline{Z}_1 < \overline{Z}_2$, la courbe $U(\overline{Z}_1)$ a des points plus près du plan xz, que la courbe $U(Z_2)$.

Désignons aussi par $U(\overline{Z})$ la longueur de $U(\overline{Z})$. $U(\overline{Z})$ est une fonction semicontinue sur l'ensemble $\overline{Z}$ et

$$\int\limits_{m-d}^{M+d} U(\overline{Z}) \cdot dz < +\infty.^{**}$$

L'ensemble $\overline{Z}$ étant partout dense dans $(m-d, M+d)$, on peut choisir deux z_h'', z_{h+1}', $(z_h'' < z_{h+1}')$ de ses points, tels que (z_h'', z_{h+1}') soit compris dans (z_h, z_{h+1}) et que $z_h''-z_h$, $z_{h+1}-z_{h+1}'$, soient aussi petites que l'on veut.***

Désignons aussi par $U(\overline{Z})$ la projection de $U(\overline{Z})$ sur le plan xy.

Considérons le domaine du plan xy qui est renfermée par les lignes droites

$$x=x_k, \quad x=x_{k+1},$$

et par les lignes courbes $U(z_h'')$, $U(z_{h+1}')$.

Nous désignerons ce domaine par $(x_k, x_{k+1}; U(z_h''), U(z_{h+1}'))$ et nous emploierons dans de cas semblables la notation analogue.

Ce domaine est contenu dans $(x_k, x_{k+1}; y_j, y_{j+1})$, de plus les courbes $U(Z)$ de la portion de $z=\lambda_1(x,y)$ qui est située au-dessus du domaine, sont situées sur $z=f(x,y)$. La projection sur le plan xz de la portion considérée de $z=\lambda_1(x,y)$ est évidemment $(x_k, x_{k+1}; z_h'', z_{h+1}')$.

Prenons une division rectangulaire I de $(x_k, x_{k+1}; z_h'', z_{h+1}')$

---

* M. Lebesgue démontre (Thèse p. 77) que pour certaines valeurs de x, la section $x=$ const. d'une surface quelconque, mais à aire T_2 finie, contient une ligne courbe à longueur finie.

** Les démonstration furent communiquées à l'Académie hongroise, voir Mathem. és Term. tud. Értesitö, t. XXVI (1908) p. 475 et suiv. J'ai n'ajouté les théorèmes V—VIII qu'au mois de Mai 1909.

*** z_h'' et z_h' ne dépendent que de h.

de manière que les points diviseurs de (z''_h, z'_{h+1}) soient des points de l'ensemble $\overline{Z}$.

Soit $(x^I_k, x^I_{k+1}; z^I_h, z^I_{h+1})$ l'un des rectangles de I.

Dans tout ce qui suit nous parcourons les lignes courbes $U(\overline{Z})$ en partant de leur point situé sur $x = x_k$ vers leur point situé sur $x = x_{k+1}$.

On prouve facilement, qu'il existe au moins un arc $U_1(z^I_h)$ de $U(z^I_h)$ et un arc $U_1(z^I_{h+1})$ de $U(z^I_{h+1})$ tel que ces arcs sont compris dans la bande des lignes droites parallèles

$$x = x^I_k, \quad x = x^I_{k+1},$$

en les rejoignant.

De plus $U_1(z^I_h)$ a des points plus près de l'axe des x comme $U_1(z^I_{h+1})$, et dans le domaine $(x^I_k, x^I_{k+1}; U_1(x^I_h), U_1(x^I_{h+1}))$ ni $U(x^I_h)$ ni $U(x^I_{h+1})$ n'ont pas des arcs rejoignant les deux droites, enfin en parcourant $U(z^I_h)$, $U(z^I_{h+1})$ on arrive d'abord à l'extrémité de $U_1(z^I_h)$ respectivement de $U_1(z^I_{h+1})$ qui est situé sur $x = x^I_k$.

De plus $\overline{Z}$ étant un point de l'ensemble $\overline{Z}$, et tel que $z^I_h < \overline{Z} < z^I_{h+1}$, il existe dans $(x^I_k, x^I_{k+1}; U_1(z^I_h), U_1(z^I_{h+1}))$ un arc $U_1(\overline{Z})$ de $U(\overline{Z})$ étant en même relation à $U_1(z^I_h)$ comme $U_1(z^I_{h+1})$.

Désignons par $\varrho(x)$ l'ordonnée du point de $U_1(\overline{Z})$ qui est le plus près de l'axe des x sur la ligne droite $x =$ const. La fonction $\varrho(x)$ est donc définie dans (x^I_k, x^I_{k+1}) de plus elle est bornée et uniforme.

$\varrho(x-0)$ et $\varrho(x+0)$ existent et l'une de ces valeurs est égale à $\varrho(x)$. Les points $x, \varrho(x-0)$, et $x, \varrho(x+0)$ sont situés sur $U_1(\overline{Z})$. Considérons la figure formée par les points $x, \varrho(x)$ et par les distances rectilignes rejoignant les points $x, \varrho(x-0)$ et $x, \varrho(x+0)$. Cette figure est une ligne courbe. Chaque ligne droite $x =$ const. la coupe ou dans un seul point, ou dans un intervalle.

En parcourant la courbe dans le sens des x croissants on rencontre ceux de ses points qui ne sont pas à l'intérieur de ses intervalles parallèles à l'axe y, dans la même ordre qu'en parcourant $U_1(\overline{Z})$.

Désignons par $S(\overline{Z})$ cette ligne courbe et soit aussi $S(\overline{Z})$ sa longueur. On a $S(\overline{Z}) \leqq U_1(\overline{Z})$.

Nous désignerons dans ce qui va suivre aussi par $S(\overline{Z})$ la figure qui est situé dans le plan $z = \overline{Z}$ et dont la projection sur le plan xy est $S(\overline{Z})$.

Théorème V. On peut construire au-dessus de

$$(x_k^I,\ x_{k+1}^I;\ S(z_h^I),\ S(z_{h+1}^I))$$

une surface $z = \varphi(x, y)$ ayant les propriétés suivantes:

1. Pour $y_2 > y_1$ on aura $\varphi(x, y_2) - \varphi(x, y_1) \geqq 0$.

2. Il existe un ensemble de seconde catégorie $\overline{\overline{Z}}$ dans (z_h^I, z_{h+1}^I), partie de $\overline{Z}$, telle que la section $z = \overline{\overline{Z}}$ de $z = \varphi(x,y)$ est $S(Z)$

3. La longueur de $S(Z)$ est semicontinue sur l'ensemble $\overline{\overline{Z}}$ et

$$\int_{z_h^I}^{z_{h+1}^I} S(\overline{\overline{Z}})\, dz < +\infty.$$

4. L'aire de $z = \varphi(x, y)$ est finie.

La projection de $z = \varphi(x, y)$ sur le plan xz est évidemment $(x_h^I,\ x_{h+1}^I;\ z_h^I,\ z_{h+1}^I)$.

Soit II une division rectangulaire de $(x_h^I,\ x_{h+1}^I;\ z_h^I, z_{h+1}^I)$, et telle que les points diviseurs de $(z_h^I,\ x_{h+1}^I)$ soient des points de $\overline{\overline{Z}}$. Soit $(x_k^{II}, z_{k+1}^{II};\ z_h^{II},\ z_{h+1}^{II})$ l'un des rectangles de II.

Parcourons la ligne courbe $S(z_h^{II})$ (située dans le plan $z = z_h^{II}$) dans le sens des x croissants.

Soit A son dernier point dans le plan $x = x_k^{II}$, D son premier point dans le plan $x = x_{k+1}^{II}$.

Les points analogues dans les mêmes plans pour $S(z_{h+1}^{II})$ soient B et C. A, B, C, D, sont évidemment situés sur $z = f(x, y)$.

Théorème VII. On peut faire pour $z = \varphi(x, y)$ des recherches analogues à celles des Chapitres VIII et IX relatives au plan xz.

Remarque. On doit étendre les discussions du No. 8 du Chap. VII à des fonctions semicontinues définies sur un ensemble de seconde catégorie.

Nous désignerons par $\widehat{E_1 H_1}$ l'arc de $U_1(z_h^{II})$ qui dans la bande des lignes parallèles $x = x_k^{II}$, $x = x_{k+1}^{II}$ rejoint ces deux droites, et qui entre de telles arcs de $U_1(z_h^{II})$ a des points les plus près de l'axe des x.

Soit $\widehat{F_1 G_1}$ le même arc pour $U_1(z^{II}_{h+1})$.

Les lignes courbes correspondantes à $\widehat{E_1 H_1}$, $\widehat{F_1 G_1}$ sur $z = f(x, y)$ soient $\widehat{EH}$, $\widehat{FG}$.

L'ordre des points A, E, F, est toujours A, E, F, en parcourant la section $x = x^{II}_k$ dans le sens des y croissants.

Il peut arriver que l'ordre de A, B, E, F, respectivement de D, C, H, G, soit en même temps A, E, B, F, et D, H, C, G, en parcourant les sections $x = x^{II}_k$, $x = x^{II}_{k+1}$ dans le sens des y croissants.

Nous disons dans ce cas que la portion de $z = f(x, y)$ située au-dessus de $(x^{II}_k, x^{II}_{k+1}; \widehat{E_1 H_1}, \widehat{F_1 G_1})$ est une portion de seconde espèce f' (celles de première espèce sont les $f_{i,j}$).

Désignons par θ_1 l'aire renfermée par

$$\overline{AB},\ \overline{BF},\ \widehat{FE},\ \overline{EA},$$

dans le plan $x = x^{II}_k$.

Soit θ_2 l'aire renfermée par

$$\overline{BC},\ \overline{CG},\ \widehat{GF},\ \overline{FB},$$

dans le plan $z = z^{II}_{h+1}$.

Désignons par θ_3 l'aire renfermée par

$$\overline{CD},\ \overline{DH},\ \widehat{HG},\ \overline{GC}.$$

Soit θ_4 l'aire renfermée par

$$\overline{DA},\ \overline{AE},\ \widehat{EH},\ \overline{HD}.$$

Soit B' le sommet opposé à D dans le parallélogramme $AB'CD$. Les coordonnées x, z de B' sont x^{II}_k, z^{II}_{h+1}.

Soit θ_1' l'aire renfermée par $\overline{AB'}$, $\overline{B'F}$, $\widehat{FE}$, $\overline{EA}$.

Soit θ_2' l'aire renfermée par $\overline{B'C}$, $\overline{CG}$, $\widehat{GF}$, $\overline{FB'}$.

On a

$$\begin{gathered} |(ABC + ADC) - (AB'CD)| \leqq ABB' + BB'C, \\ |\theta_1 - \theta_1'| \leqq ABB', \quad |\theta_2 - \theta_2'| \leqq BB'C. \end{gathered} \tag{a}$$

Soit $[f']$ une certaine valeur formée pour f', et désignons par $\sum[f']$ la somme de tous les $[f']$, le nombre de ces $[f']$ étant par là égal à celui des f'.

Théorème VIII. Soit w un nombre positif donné à l'avance. On peut construire les divisions $X_l Y_m$, $X_L Z_N$, les z''_h, z'_{h+1}, les divisions I et les II de manière que pour certains des f' λ soit égal à 1, pour les autres à zéro et que l'on ait:

1. Les dimensions linéaires des f'' pour lesquels $\lambda = 1$, sont plus petites que w.

2. $\quad XY\beta_{i,j} - \sum \lambda \cdot (x^{II}_{k+1} - x^{II}_{k}) \cdot (z^{II}_{h+1} - z^{II}_{h}) < w.$

3. $\quad \sum \lambda \cdot (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) < w.$

4. $\quad \sum \lambda \cdot (ABB' + BB'C) < w.$

A l'aide du théorème II on obtient

$$(AB'CD) \leqq t' + (\theta_1' + \theta_2' + \theta_3 + \theta_4)$$

en désignant par t' la quantité t de f''.

Donc d'après (a)

$$ABC + ADC \leqq t' + (ABB' + BB'C) + (ABB' + BB'C) \\ + (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4),$$

enfin

$$\sum \lambda (ABC + ADC) \leqq \sum t' + 3w. \tag{b}$$

(b) et 3. prouvent que l'amas des triangles ABC, ADC $(\lambda = 1)$ est propre à résoudre le problème I, et 2. prouve que les portions de $z = f(x, y)$ extérieures des $f'(\lambda = 1)$, fournissent une contribution pour l'aire qui est plus petite que w relativement au plan xz. On prouve de même que cet amas est propre à résoudre les problèmes II et III.

Chapitre XIV.

Quadrature des surfaces rectifiables.

1. Soient

$$z = f^{(h)}(x, y), \ (h = 1, 2, 3)$$

trois surfaces définies au-dessus d'un carré $(0, a; 0, a)$.

Nous supposerons qu'elles satisfont à la condition de Lipschitz. Désignons par $S^{(h)}(x)$, $S^{(h)}(y)$ les fonctions $S(x)$, $S(y)$ (Chap. III) relatives à $f^{(h)}$.

Il résulte de la condition de Lipschitz, que ces six fonctions semicontinues sont bornées.

Considérons un nouveau système d'axes de coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ.

Les équations

$$\xi = f^{(1)}(x, y), \quad \eta = f^{(2)}(x, y), \quad \zeta = f^{(3)}(x, y),$$

définissent une surface nommée, par M. LEBESGUE. surface rectifiable. Désignons-la par R.

On démontre facilement que T_2 est finie*.

2. Désignons respectivement par $s_y(x)$ et par $s_x(y)$ la longueur des lignes courbes $x =$ const. $y =$ const. de R.

Il résulte de la condition de LIPSCHITZ, que les fonctions semicontinues $s_y(x)$, $s_x(y)$ sont bornées.

Nous supposons que

$$S^{(h)}(x), \quad S^{(h)}(y), \quad (h = 1, 2, 3), \quad s_y(x), \quad s_x(y)$$

sont des fonctions continues, en remarquant que ces restrictions ne sont point essentielles; les résultats que nous allons obtenir, seraient les mêmes si on laisserait à ces huit fonctions toute leur généralité.

Mais les préliminaires n'étant qu'énoncés dans le texte (No. 8f. Chap. VII), nous nous bornons à ce cas.

3. Désignons par A_0, B_0, C_0, D_0 les points de R qui correspondent aux points $x_i, y_j, x_i, y_{j+1}, x_{i+1}, y_{j+1}, x_{i+1}, y_j$ du plan xy.

Désignons par $R_{i,j}$ la portion de R qui correspond à

$$(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}).$$

Désignons par $\widehat{A_0B_0}$ l'arc qui correspond au côté $x = x_i$ de

$$(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1}).$$

Parcourons l'arc $\widehat{A_0B_0}$ de A_0 vers B_0 et parcourons la distance $\overline{A_0B_0}$ de A_0 vers B_0 de manière que les deux points partant en même temps de A_0, arrivent en même temps en B_0.

Joignons par une distance rectiligne, les positions occupées respectivement en même instant par les deux points en mouvement. Soit $\theta_{i,j}^{(1)}$ la surface réglée ainsi engendrée. Soient de plus $\theta_{i,j}^{(2)}$, $\theta_{i,j}^{(3)}$, $\theta_{i,j}^{(4)}$ les surfaces qu'on obtient de la même manière à l'aide des arcs $\widehat{B_0C_0}$, $\widehat{C_0D_0}$, $\widehat{D_0A_0}$.

Désignons par $\theta'_{i,j}$ la quantité

$$\frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} \widehat{A_0B_0}^{\frac{3}{2}} (\widehat{A_0B_0} - \overline{A_0B_0})^{\frac{1}{2}},$$

---

* Voir: LEBESGUE, Thèse, p. 85—87.

par $\theta''_{i,j}$, $\theta'''_{i,j}$, $\theta''''_{i,j}$ les quantités analogues relatives à

$$\widehat{B_0C_0},\ \widehat{C_0D_0},\ \widehat{D_0A_0}.$$

Désignons par $A^{(h)}$, $B^{(h)}$, $C^{(h)}$, $D^{(h)}$, $B^{(h)\prime}$, les points qui sont pour $f^{(h)}$ ce que A, B, C, D, B' étaient pour f dans le Chap. IX.

Soit B_0' le point dont les coordonnées ξ, η, ζ, sont les coordonnées z de $B^{(1)\prime}$, $B^{(2)\prime}$, $B^{(3)\prime}$.

$A_0B_0'C_0D_0$ est donc un parallèlogramme.

4. Soit $X_{q_r}Y_{q_r}$ une suite de divisions, telle que $(0, a; 0, a)$ soit décomposé par $X_{q_r}Y_{q_r}$ en q_r^2 carrés. On conclut aisément, que cette suite peut être telle qu'elle soit pour $f^{(h)}(h = 1, 2, 3)$ ce que la suite du Chap. IX était pour f, c'est à dire *qu'elle achéve la quadrature de ces trois surfaces.*

Elle peut de plus être telle que pour $\varepsilon_r > 0$, $\lim\limits_{r=\infty} \varepsilon_r = 0$.

$$\begin{array}{ll} s_y(x_i) - Y_{q_r}\overline{A_0B_0} < \varepsilon_r & (i = 0,\ 1, \ldots q_r - 1). \\ s_x(y_j) - X_{q_r}\overline{A_0D_0} < \varepsilon_r & (j = 0,\ 1, \ldots q_r - 1). \\ s_y(x_i) - Y_{q_r}\overline{D_0C_0} < \varepsilon_r & (i = 1,\ 2, \ldots q_r). \\ s_x(y_j) - X_{q_r}\overline{B_0C_0} < \varepsilon_r & (j = 1,\ 2, \ldots q_r). \end{array}$$

(Voir No. 8f. Chap, VII).

5. Pour cette suite on aura

$$X_{q\infty}Y_{q\infty}\,|(A_0B_0'C_0D_0) - (A_0B_0C_0 + A_0D_0C_0)| = 0.$$

En effet

$$(A_0B_0'C_0D_0) - (A_0B_0C_0 + A_0D_0C_0) = A_0B_0'C_0 - A_0B_0C_0.$$

En considérant le tetraèdre dont les sommets sont A_0, B_0, B_0', C_0, on obtient

$$\begin{aligned} |A_0B_0'C_0 - A_0B_0C_0| &\leq A_0B_0'B_0 + C_0B_0'B_0 \\ &\leq (\overline{A_0B_0} + \overline{C_0B_0}) \cdot \overline{B_0'B_0}. \end{aligned}$$

Mais $f^{(h)}$ satisfaisant à la condition de Lipschitz, on a:

$$A_0B_0 + C_0B_0 \overset{m}{\leq} \frac{1}{q_r},$$

d'ailleurs

$$\overline{B_0'B_0} \leq \overline{B^{(1)\prime}B^{(1)}} + \overline{B^{(2)\prime}B^{(2)}} + \overline{B^{(3)\prime}B^{(3)}},$$

et on a vu, dans le Chap. IX que

$$X_{q\infty}Y_{q\infty}\frac{1}{q_r} \cdot \overline{B^{(h)\prime}B^{(h)}} = 0.$$

6. Considérons un rectangle intérieur à $(x_i, x_{i+1};\ y_j, y_{j+1})$ et dont les côtés sont parallèles aux axes x, y. Considérons la

portion $\Delta_{i,j}^{(1)}$ du Δ_s (Chap. I) qui corresponde à la partie de $\Delta_s^{(3)}$, dont la projection, sur le plan xy, est le rectangle considéré.

Nous prendrons, dans ce qui suit, s aussi grand pour que les constructions que nous aurons à faire sur Δ_s soient légitimes.

La surface formée par $\theta_{i,j}^{(1)}$, $\theta_{i,j}^{(2)}$, $\theta_{i,j}^{(3)}$, $\theta_{i,j}^{(4)}$ et par $A_0B_0B_0'$, $B_0B_0'C_0$ a une connexion comme une zône de sphère. Le contour de $R_{i,j}$ et de $A_0B_0'C_0D_0$ sont ses contours.

On peut évidemment inscrire à cette surface une surface polyédrale $\Delta_{i,j}^{(2)}$ de la même connexion et telle que l'un de ses contours soit aussi près que l'on veut de celui de $R_{i,j}$, tandis que l'autre soit $A_0B_0'C_0D_0$.

De plus on peut construire $\Delta_{i,j}^{(2)}$ de telle manière qu'en le décomposant en six portions correspondantes à $\theta_{i,j}^{(1)}$ $\theta_{i,j}^{(2)}$, $\theta_{i,j}^{(3)}$, $\theta_{i,j}^{(4)}$, $A_0B_0B_0'$, $B_0B_0'C_0$, ces six portions se confondent presque respectivement avec leurs portions correspondantes.

On peut joindre $\Delta_{i,j}^{(1)}$ et $\Delta_{i,j}^{(2)}$ par certaines faces $\Delta_{i,j}^{(3)}$, telles que la surface polyédrale ainsi obtenue soit simplement connexe.

Considérons le polyèdre $\Delta_s^{(3)}$. Soit Δ' la portion située au-dessus du rectangle inscrit dans $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$.

Le polyèdre $\Delta_s^{(3)}$ est simplement connexe (Chap. I); donc, au voisinage de son seul contour, on peut mener sur lui une ligne, telle qu'elle découpe ce polyèdre en deux portions: l'une Δ'' qui contient le contour primitif a une connexion comme une zône de la sphére, l'autre est à connexion simple et contient Δ'.

Soit Δ''' la portion de $\Delta_s^{(3)}$ qui établit la connexion entre Δ' et Δ''.

On voit que $\Delta_{i,j}^{(1)}$, $\Delta_{i,j}^{(2)}$, sont équivalents à Δ', Δ'' au point de vue de la géométrie de situation; il existe donc un $\Delta_{i,j}^{(3)}$ qui corresponde, au point de vue de la géométrie de situation, à Δ''' et la réunion de $\Delta_{i,j}^{(1)}$, $\Delta_{i,j}^{(2)}$, $\Delta_{i,j}^{(3)}$ est une surface polyédrale simplement connexe ayant $A_0B_0'C_0D_0$ pour contour.

En prenant le contour du rectangle inscrit dans $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$ assez près de celui de $(x_i, x_{i+1}; y_j, y_{j+1})$, on peut construire $\Delta_{i,j}^{(3)}$ de telle manière qu'il soit contenu dans un voisinage aussi rapproché que l'on veut du contour de $R_{i,j}$*.

* Ce voisinage est formé par des sphères ayant pour rayon une longueur aussi petite que l'on veut, et pour centres les points du contour de $R_{i,j}$. La longueur de ce contour étant finie, la projection orthogonale de l'ensemble

Projetons orthogonalement les points de la surface polyédrale reunion de $\Delta^{(1)}_{i,j}$, $\Delta^{(2)}_{i,j}$, $\Delta^{(3)}_{i,j}$, sur le plan $A_0 B_0' C_0 D_0$.

Cette projection remplit évidemment l'aire de $A_0 B_0' C_0 D_0$. Mais la partie de la projection qui appartient aux points de $\Delta^{(1)}_{i,j}$ est au plus égale à l'aire $\Delta^{(1)}_{i,j} t$ de $\Delta^{(1)}_{i,j}$.

La partie de la projection qui appartient aux points de $\Delta^{(2)}_{i,j}$ et au plus égale à (voir No. 20 Chap. III).

$\theta'_{i,j} + \theta''_{i,j} + \theta'''_{i,j} + \theta''''_{i,j} + A_0 B_0' B_0 + B_0' B_0 C_0 +$ une quantité positive aussi petite que l'on veut.

La partie de la projection qui appartient aux points de $\Delta^{(3)}_{i,j}$ est aussi petite que l'on veut.

Donc

$$(A_0 B_0' C_0 D_0) \leqq \Delta^{(1)}_{i,j} t + \theta'_{i,j} + \theta''_{i,j} + \theta'''_{i,j} + \theta''''_{i,j} + A_0 B_0' B_0 + B_0' B_0 C_0 + \delta_{i,j}, \tag{A}$$

en désignant par $\delta_{i,j}$ une quantité positive aussi petite que l'on veut.

Mais

$$X_{q_r} Y_{q_r} \Delta^{(1)}_{i,j} t \leqq \Delta_s t.$$

$$\theta'_{i,j} = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot \pi}{4} \widehat{A_0 B_0}^{\frac{3}{2}} (\widehat{A_0 B_0} - \overline{A_0 B_0})^{\frac{1}{2}}, \quad \widehat{A_0 B_0} \overset{m}{\leqq} \frac{1}{q_r} \cdot$$

$$Y_{q_r} (\widehat{A_0 B_0} - \overline{A_0 B_0}) < \varepsilon_r.$$

Donc (voir Chap. VIII. IV).

$$X_{q_r} Y_{q_r} \theta'_{i,j} \overset{m}{\leqq} \varepsilon_r^{\frac{1}{2}}$$

et ainsi

$$X_{q_\infty} Y_{q_\infty} (\theta'_{i,j} + \theta''_{i,j} + \theta'''_{i,j} + \theta''''_{i,j}) = 0.$$

De plus (No. 5)

$$X_{q_\infty} Y_{q_\infty} (A_0 B_0' B_0 + B_0' B_0 C_0) = 0,$$

et

$$X_{p_\infty} Y_{q_\infty} \delta_{i,j} = 0.$$

Donc, d'aprês (A), les valeurs limites de la suite des valeurs

$$X_{q_r} Y_{q_r} (A_0 B_0' C_0 D_0),$$

ou, ce qui d'après le No. 5 revient au même, les valeurs limites de la suite de valeurs

$$X_{q_r} Y_{q_r} (A_0 B_0 C_0 + A_0 D_0 C_0)$$

---

de ces sphères sur un plan quelconque a une mesure extérieure aussi petite que l'on veut.

sont au plus égales à la plus petite des lim $\Delta_s t$ (la suite Δ_s pouvant être quelconque).

Mais la suite des polyèdres dont le r-ième est formé par les $2q_r^2$ faces $A_0B_0C_0$, $A_0D_0C_0$ est un élément de l'ensemble VI du Chap. I.

Donc

$$T_1 = T_6 = X_{q_\infty} Y_{q_\infty}(A_0B_0C_0 + A_0D_0C_0) = X_{q_\infty} Y_{q_\infty}(A_0B_0'C_0D_0).$$

Désignons par $\lambda_x^{(h)}$, $\lambda_y^{(h)}$ les nombres dérivés de $f^{(h)}$. Lorsque $\lambda_x^{(h)}$, $\lambda_y^{(h)}$, $(h = 1, 2, 3)$ sont intégrables on trouve, à l'aide de $A_0B_0'C_0D_0$ que

$$T_1 = T_6 = \int_0^a\int_0^a [(\lambda_x^{(1)} \cdot \lambda_y^{(2)} - \lambda_x^{(2)}\lambda_y^{(1)})^2 + (\lambda_x^{(1)}\lambda_y^{(3)} - \lambda_y^{(1)}\lambda_x^{(3)})^2 + (\lambda_x^{(2)}\lambda_y^{(3)} - \lambda_x^{(3)}\lambda_y^{(2)})^2]^{\frac{1}{2}} \cdot dx \cdot dy.$$

et on a 96 fonctions ayant l'aire pour intégrale.

On a encore

$$T_1 = T_6 = XY(A_0B_0C_0 + A_0D_0C_0) = XY(A_0B_0'C_0D_0).$$

On étend, facilement avec l'aide du No. 8f. du Chap. VII les résultats obtenus, à la surface rectifiable générale. On obtient dans un cas tout spécial (en changeant x et y en u et v) le théorème et la formule classique

$$T_1 = T_6 = XY(A_0B_0C_0 + A_0D_0C_0) = XY(A_0B_0'C_0D_0) = \int_0^a\int_0^b (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} \cdot du\, dv.$$

2.

EINFLUSS DES MEDIUMS AUF DIE REAKTIONSGESCHWINDIGKEIT UND DEN CHEMISCHEN GLEICHGEWICHTSZUSTAND.*

Von STEFAN BUGARSZKY.

I. Kapitel.

Literatur.

Durch die Anwendung des Massenwirkungsgesetzes und des Prinzipes der Superposition ist es möglich, das System der simultanen Differentialgleichungen aufzuschreiben, welches den zeitlichen Verlauf einer noch so komplizierten chemischen Umwandlung angibt. Wie bekannt, kommt in diesem Differentialgleichungssystem der Zusammenhang zum Ausdruck, welcher zur Zeit t zwischen der im Zeitelemente dt stattfindenden Konzentrationsänderung (dc) der an der Reaktion teilnehmenden Molekeln und der Konzentration der Molekeln (c, c_1, c_2) besteht. Doch sind die genannten Prinzipien bei irgend einer konkreten Umwandlung nicht genügend, um mittels derselben, bloß auf theoretischem Wege, ohne Versuche, den Zustand des in Umwandlung befindlichen chemischen Systems für ein gewisses Zeitelement voraus zu berechnen. Dies ist nicht einmal in dem Falle möglich, wenn der Wert sämtlicher Parameter, welche durch die Lösung des erwähnten Differentialgleichungssystems im erhaltenen Integralgleichungssystem auftreten, bekannt ist. Der Grund dafür liegt darin, daß uns die genannten Prinzipien, einerseits über gewisse im Differentialgleichungssystem

* Von der ungarischen Akademie der Wissenschaften auf der Generalversammlung im Jahre 1905 mit dem „Lukács Krisztina"-Preise ausgezeichnet. In der ungarischen Sprache erschienen in „Mathematikai és Természettudományi Értesitö", Bd. XXIII. S. 417—483. 1905.

als Exponenten auftretende einfache ganze Zahlen, sogenannte Molekelzahlen, andererseits über gewisse Proportionsfaktoren, welch' letztere man Geschwindigkeitskonstanten, spezifische Reaktionsgeschwindigkeiten oder kurz Reaktionsgeschwindigkeiten nennt, gänzlich im unklaren lassen. Die Molekelzahl und den Wert der Geschwindigkeitskonstanten muß man für jede chemische Umwandlung einzeln *durch Versuche* feststellen, und nur dann ist die Aufgabe als gelöst zu betrachten; aber nur für den Fall, daß sich das Medium, in welchem die reagierenden Molekeln aufgelöst sind, nicht verändert (und natürlich auch die Temperatur fortwährend konstant bleibt).

Die Erfahrung zeigt nämlich, daß, wenn man dieselben Stoffe in verschiedenen Lösungsmitteln aufeinander wirken läßt, sich auch die Reaktionsgeschwindigkeit verändert, obwohl sich die Lösungsmittel selbst an der chemischen Reaktion nachweisbar nicht beteiligen, also indifferent sind. In bezug auf den Zusammenhang zwischen der Natur des Mediums und der Reaktionsgeschwindigkeit, gibt uns derzeit die Theorie keine Aufklärung, so daß es bloß empirischer Natur ist, was die Forschungen auf diesem Gebiete erreicht haben.

MENSCHUTKIN* machte zuerst Versuche in dieser Richtung, indem er die Frage studierte, welchen Einfluß verschiedene indifferente Lösungsmittel auf den zeitlichen Verlauf der Reaktionen haben, die sich zwischen denselben organischen Verbindungen abspielen. Auf diese Weise erhielt MENSCHUTKIN eine beträchtliche Menge empirischer Daten, aus denen man aber auf keine allgemeingültige Regel folgern konnte; abgesehen davon, worauf — auf Grund MENSCHUTKINS Versuche — zuerst VAN'T HOFF** hinwies, daß im großen ganzen (da Ausnahmen eben nicht selten sind) die Geschwindigkeitskonstante mit der Dielektrizitätskonstante zusammen wächst.

Auf einen Zusammenhang der zwischen der Reaktionsgeschwindigkeit und der Lösungsmittel stattfindenden inneren Reibung folgerte BUCHBÖCK***, der die Geschwindigkeit der Zersetzung

* Zeitschr. f. physikal. Chemie **1**, 611, **6**, 41, **34**, 157.

** VAN'T HOFF: Vorlesungen über theoret. u. physikal. Chemie, I, 217.

*** Zeitschr. f. phsikal. Chemie **23**, 123 (1897).

des Carbonylsulfids in reinem Wasser und in wäßriger Lösung verschiedener Elektrolyten studierend, auf Grund seiner Messungen die Regel als erwiesen findet, daß: „die Reaktionsgeschwindigkeit ist in Lösungen, welche isosmotisch und betreffs des Thiokohlensäuregehalts im Gleichgewicht sind, mit der inneren Reibung umgekehrt proportional.“

De Hemptinne und Dekaert*, die Menschutkins Untersuchungen mit Lösungsmittelmischungen ausführten, kamen zu dem Ergebnis, daß auch hier nicht von einer allgemeingültigen Gesetzmäßigkeit die Rede sein kann, denn während sie bei einem Teil der Mischungen die Erfahrung machten, daß es aus den Reaktionsgeschwindigkeitswerten der Mischungskomponenten die Reaktionsgeschwindigkeit der Mischung einfach durch die Gesellschaftsregel zu berechnen gelang, belief sich bei anderen Mischungen der Unterschied zwischen den auf diese Weise berechneten und den wirklichen Werten oft bis zu 50% Unterschied.

Bald darauf kam De Hemptinne** bei seinen Forschungen über die Verseifung des Methylacetats in verschiedenen Medien auf das negative Ergebnis, wonach die Annahme, daß zwischen dem Einflusse des Mediums auf die Reaktionsgeschwindigkeit und irgend einer physikalischen Eigenschaft desselben ein Zusammenhang besteht, nicht begründet ist, sondern daß es eine heute noch unbekannte chemische Wirkung des Lösungsmittels ist, der hier eine wichtige Rolle zuteil wird.

Die eben kurz angeführten empirischen Daten standen Euler zur Verfügung, als er seine Studien über den Einfluß des Mediums auf die Reaktionsgeschwindigkeit, vom theoretischen Standpunkte aus, begann.***

Eulers Theorie geht von der Grundannahme auß, daß sich sämtliche chemische Umwandlungen durch die Vermittlung der mit elektrischer Ladung versehenen Molekeln — Ionen — abspielen. Diese Hypothese scheint tatsächlich zu erklären, weshalb die bisherigen Forschungen über den Einfluß des Mediums auf die Reaktionsgeschwindigkeit so geringen Erfolg hatten. Da

* Zeitschr. f. physikal. Chemie **31**, 41.

** Zeitschr. f. physikal. Chemie **28**, 225.

*** Loco cit. **36**, 641.

nämlich bei der Berechnung der Reaktionsgeschwindigkeit immer die Gesamtkonzentration der sich bei der Reaktion beteiligenden Molekeln als Grundlage angenommen wurde, während nach EULERS Hypothese nur die Ionen aktiv sind, also nur der dem Dissoziationsgrade entsprechende Bruchteil der genannten Konzentration zu berücksichtigen gewesen wäre; so ist es ganz natürlich, daß es nicht gelang, aus den auf die oben genannte Weise berechneten Reaktionsgeschwindigkeiten eine allgemeingültige Regel zu finden. Andererseits stimmt mit EULERS Hypothese die Erfahrungstatsache überein, daß in einem Medium mit größerer Dielektrizitätskonstante auch die Reaktionsgeschwindigkeit größer ist, weil — wie zuerst NERNST* zeigte — die Ionisierungsfähigkeit und die Dielektrizitätskonstante des Mediums parallele Eigenschaften sind. Ein großer Nachteil der EULERschen Hypothese ist, daß dieselbe uns betreffs der Konzentration der nach EULER allein aktiven Molekeln (der Ionen), gänzlich im Dunkeln läßt, wodurch die Untersuchung der Folgen seiner Theorie durch Messung unmöglich wird. Dies wäre kurz zusammengefaßt die Situation der Frage (am Ende des Jahres 1904), und so kann ich nun zur Besprechung des Zweckes der vorliegenden Arbeit übergehen.

Aus den in einer meiner früheren Arbeiten** mitgeteilten Messungen ging hervor, daß Brom und Aethylalkohol unter Bildung von Aethylacetat und Bromwasserstoff mit meßbarer Geschwindigkeit aufeinander wirken:

$$(1) \qquad 2\,C_2H_5OH + 2\,Br_2 \longrightarrow C_2H_3O_2C_2H_5 + 4\,HBr.$$

Da sich sowohl Brom als auch Aethylalkohol in verschiedenen, mit Wasser nicht mischbaren organischen Flüssigkeiten (z. B. in Kohlentetrachlorid, Schwefelkohlenstoff) ebenso wie in Wasser gut löst, versprach sich das Studium der Geschwindigkeit dieser Reaktion als dazu geeignet, um auf Grund der zu gewinnenden Messungsdaten darauf Folgerungen zu schließen, welchen Einfluß das Medium auf die Reaktionsgeschwindigkeit ausübt. Die untersuchte chemische Umwandlung gab aber auch Daten, bezüglich der Verschiebung des Gleichgewichts der durch die folgenden

* Zeitschr. f. physik. Chemie **13**, 531.

** Zeitschr. f. physik. Chemie **38**, 561.

$$HBr_3 \rightleftarrows Br_2 + HBr,$$

(2) $$(C_2H_5OH)_2 \rightleftarrows 2C_2H_5OH$$

Gleichungen dargestellten, umkehrbaren chemischen Reaktionen, woraus die Werte der Geschwindigkeitskonstanten zu berechnen waren. Auf diese Weise kam ich in den Besitz solcher Daten, aus denen ich auf den Einfluß folgern konnte, den das Medium auf den chemischen Gleichgewichtszustand ausübt.

II. Kapitel.

Der Verlauf der Reaktion in organischen Lösungsmitteln (in Kohlenstofftetrachlorid, Kohlenstoffdisulfid und Monobrombenzol) bei 25° C.

Als Lösungsmittel, in denen ich Brom und Aethylalkohol — in großen Verdünnungen — aufeinander wirken ließ, benutzte ich bei meinen Versuchen Kohlenstofftetrachlorid, Kohlenstoffdisulfid und Monobrombenzol. Auf diese ist Brom (bei 25°) wirkungslos, aber wie ich fand, nur wenn die genannten organischen Flüssigkeiten chemisch rein sind. Schon Spuren unbekannter Unreinigkeiten — besonders beim Monobrombenzol — können störende, mit Bildung von Bromsubstitutionsprodukten begleitete Nebenreaktionen veranlassen. Deshalb verwandte ich nur chemisch reine Präparate und achtete sorgfältig auf die Reinheit der bei der Bereitung der Reaktionsgemische benutzten Gefäße.

Um das im Handel befindliche Brom zu reinigen, wusch ich es wiederholt mit einer wässerigen Bromkalilösung, schüttelte es nachher mit konz. Schwefelsäure aus und trocknete es mittels Bariumoxyd, von dem ich es in einem nur aus Glasteilen zusammengestellten Apparat abdestillierte.

Den bei den Versuchen angewandten absoluten Alkohol stellte ich aus dem im Handel befindlichen ca. 96%igen Alkohol her, indem ich denselben etwa 8 Tage lang auf frisch gebranntem Kalk stehen ließ, dann auf das in einem anderen Gefäß in vorhinein bereitetes Bariumoxyd goß, von dem ich nach 3 Tagen den so absolut gewonnenen Alkohol abdestillierte. — Die Dichte des auf diese Weise gewonnenen Alkohols bestimmte ich mittels Pyknometer bei 25° und fand, daß dieselbe auf Wasser von 4°

als Einheit bezogen 0,7856 war, was* 99,9% Alkoholgehalt entspricht. Um die nach Volumen (bei 20° C) abgemessene Mengen dieses Alkohols in Molen auszudrücken, benutzte ich den Zusammenhang: „in 1 cm³ sind 0,790 g enthalten". Hieraus folgt, daß sich in 58,1 cm³ 20°igem absoluten Alkohol 46 g = 1 Mol Alkohol befindet, weiters daß 5 Vol.-% Alkohol (pro Liter) 0,860 Molgehalt entspricht.

Das zu meinen Versuchen angewandte Kohlenstofftetrachlorid stammte aus der chemischen Fabrik C. A. F. Kahlbaum in Berlin. Das ursprüngliche Präparat unterwarf ich behufs Reinigung einer fraktionierten Destillation, wobei als Dephlegmator eine Le-Bel-Henningersche Röhre mit 4 Kugeln benutzt wurde. Auf diese Weise gewann ich als mittlere Fraktion eine Flüssigkeit, die etwa den $^3/_4$ Teil des käuflichen Präparates ausmachte und einen konstanten Siedepunkt hatte, da sie bei einem Druck von 760 mm bei 76,80—76,85° C den Destillationsapparat verließ. Um mich noch genauer von der Reinheit des Kohlenstofftetrachlorids zu überzeugen, bestimmte ich noch seine folgenden physikalischen Konstanten: den Schmelzpunkt, das spezif. Gewicht (bei 0° C auf Wasser von 4° bezogen), den (relativ) optischen Brechungsindex auf die Linie *D* beziehentlich bei den Temperaturen von 25 und 11,1° C (aus welchen zwei Daten ich den bei 20° C gültigen Wert berechnete) und endlich die Dielektrizitätskonstante. Aus der untenstehenden Tabelle sind vergleichshalber ersichtlich: Einerseits die physikalischen Konstanten des von mir zu den Versuchen angewandten Kohlenstofftetrachlorids, andererseits die in der Literatur für chemisch reine Präparate angeführten Werte.

Die Dichte des Kohlenstofftetrachlorids habe ich mittels Pyknometer bestimmt. Zur Bestimmung des Schmelzpunktes benutzte ich einen Beckmannschen Gefrierapparat und einen geeichten, bis auf $^1/_{10}$ Grade eingeteilten Thermometer, als Kältemischung Alkohol und feste Kohlensäure benutzend. Den Brechungsindex stellte ich mittels des mit einer Einrichtung zur Erhaltung einer konstanten Temperatur versehenen Pulfrichschen Refraktometers fest. Die Dielektrizitätskonstante endlich erhielt ich — strenge

* Landolt-Börnsteinsche Tabellen, II. Auflage, 223.

die Kautelen einhaltend, die einem genauer Werte versichern* — mittels der NERNSTschen Einrichtung. Dabei wurde das zur Kalibrierung des kleinen Kondensators benutzte Benzol durch öfteres Gefrierenlassen gereinigt. Als Dielektrizitätskonstante des Benzols benutzte ich das Meßresultat von TURNERs genauen Bestimmungen, 2,288 (bei 18° C) und als Temperaturkoeffizient — 0,0007 pro Grad.

Tabelle I.

Die physikalischen Konstanten des Kohlenstofftetrachlorids.

Physikalische Konstante	Die vom Verfasser gefundenen Werte	Die Angaben in der Literatur
Schmelzpunkt	— 22,6° C	Nach TAMMANN — 23,8.
Siedepunkt	76,83° C	Nach GÜLDBERG 76,5 (Zeitschr. f. phys. Chemie 5,375). Nach RAMSAY und ARTON 77,0 (Zeitschr. f. phys. Chemie 15,90).
Dichte $d\,{}^0/_4$	1,63184	Nach THORPE 1,63195 (LANDOLT: Tabellen 173).
Brechungsindex ${}^nD$	1,45804 bei 25° C 1,36501 „ 11,1° „ 1,46054 „ 20° „	Nach HAAGEN bei 20° C 1,46072 (LANDOLT, 432).
Dielektrizitäts-konstante	2,241 bei 21,3° C	Nach TURNER bei 18° C 2,246 (Zeitschr. f. phys. Ch. 35,428), Temper.-Koeffizient: — 0,0008.

Behufs Reinigung des zu den Versuchen gebrauchten Schwefelkohlenstoffs ließ ich das im Handel befindliche „reine“ Präparat mehrere Tage hindurch auf gebranntem Kalk stehen und destillierte dann von dem gebrannten Kalk die Flüssigkeit ab. Das Destillat digerierte ich zuerst mit grobkörnigem Kaliumpermanganat-Pulver, bald mit Quecksilber und endlich mit trockenem Mercurichlorid, um es dann mit Benutzung eines LE-BEL-HENNINGERschen Dephlegmators einer fraktionierten Destillation zu unterwerfen. Bei der fraktionierten Destillation ging beinahe die ganze Flüssigkeit bei derselben Temperatur, nämlich nach der Angabe eines geeichten Thermometers und auf den normalen Luftdruck reduziert, bei 46,00° C (± 0,01°), hinüber. Die anderen physikalischen Konstanten dieser Fraktion mit konstantem Siede-

* Zeitschr. f. physik. Chemie **35**, 385.

punkt wiesen ebenfalls auf die vollständige Reinheit des Präparates hin, wie das aus der folgenden Tabelle ersichtlich ist.

Tabelle II.

Die physikalischen Konstanten des Schwefelkohlenstoffs.

Physikalische Konstante	Die vom Verfasser gefundenen Werte	Die Angaben in der Literatur
Siedepunkt (760 mm)	46,00	Nach THORPE 46,04 (Zeitschr. f. phys. Chemie 19,548).
Dichte	$1{,}29210^0/_4{}^0$ $1{,}25583^{25}/_4{}^0$ $1{,}26320^{20}/_4{}^0$	$1{,}29215^0/_4{}^0$ $1{,}2635^{20}/_4{}^0$ } Nach WÜLLNER (LANDOLT, 188).
Brechungsindex	1,62779 bei 21° C	Nach KETTELER bei 20° C 1,62761 (LANDOLT, 421).
Dielektrizitätskonstante	2,646 bei 21,5° C	Nach DRUDE bei 17° C 2,64 (Zeitschr. f. phys. Chemie 23,319).

Das Monobrombenzol, aus dem ich am Wege der fraktionierten Destillation das zu meinen Versuchen angewandte reine Präparat erhielt, wurde ebenfalls von der KAHLBAUMschen Fabrik angeschafft. Die einmalige Destillation und das Auffangen in separaten Anteilen war hier trotz der Benutzung des LE-BEL-HENNINGERschen Dephlegmators bei weitem nicht genügend, um eine dem bedeutendsten Teil des Originalpräparates entsprechende Fraktion mit genügend konstantem Siedepunkt zu gewinnen. Um dies zu erreichen, mußte ich die gebräuchliche Technik der fraktionierten Destillation anwenden und die bei den ersten Destillationen erhaltenen Fraktionen neuerdings einer fraktionierten Destillation unterwerfen. Auf diese Weise gewann ich eine Flüssigkeit mit einem zwischen 155,4—155,6° C wechselnden Siedepunkt, die etwa den $^3/_4$ Teil der Menge des Originalpräparates ausmachte, aus dessen sonstigen physikalischen Konstanten man auf die genügende Reinheit des Präparates folgern konnte, wie dies aus den Daten der Tabelle III hervorgeht.

Das bei den Versuchen angewandte Reaktionsgemisch wurde auf folgende Weise bereitet. Aus der im Volumverhältnis von 1:9 bereiteten Mischung des Broms und des betreffenden Lösungsmittels maß ich die die nötige Brommenge enthaltende Quantität mittels einer bis auf $^1/_{100}$ cm³ eingeteilten Pipette ab, löste sie in einer bestimmten (gewöhnlich mit 100 cm³ gleichen) Menge der

Tabelle III.

Die physikalischen Konstanten des Monobrombenzols.

Physikalische Konstante	Die vom Verfasser gefundenen Werte	Die Angaben in der Literatur
Schmelzpunkt	— 30,7° C	Nach Schneider — 30,5° C (Zeitschr. f. phys. Chemie 22, 227)
Siedepunkt	155,4—155,6° (760 mm)	Nach Mentschutkin bei 765 mm 165° (Zeitschr. f. phys. Chemie 6, 53) Nach Schröder bei 750 mm 154,5 bis 155,0° (ebendaselbst 11,457) Nach Teitler bei 755 mm 156,6 (ebendaselbst 4,69)
Dichte	1,52062 bei 0° C 1,48791 bei 25° C 1,4946 bei 20° C	Nach Brühl bei 20° C 1,4914 (Zeitschr. f. phys. Chemie 1, 313) Nach Schneider bei 20° C 1,4952 (ebendaselbst 11,457)
Brechungsindex	1,55997 bei 20° C	Nach Brühl bei 20° C 1,55977 (Landolt 429)
Dielektrizitätskonstante	5,66 bei 20° C	Nach Jahn bei 14° C 5,34 (Zeitschr. f. phys. Chemie 13,386)

betreffenden organischen Flüssigkeit auf, und erhielt so eine auf Brom nahezu $^1/_{10}$ n-Lösung. Die andere, zur Bereitung von Reaktionsmischungen benützte, Stammlösung enthielt 10 Volumpercent Alkohol. Die Bereitung der verschiedenen, Alkohol und Brom enthaltenden Reaktionsmischungen geschah nachher verhältnismäßig einfach. Zu diesem Zwecke wurde das brom-, das alkoholhaltige und das reine Lösungsmittel mittels sorgfältig kalibrierter Pipetten im erwünschten Verhältnis in einen mit eingeschliffenem Stöpsel versehenen Kolben von 100 cm³ gebracht und vermischt. Von der Bromlösung mußte ich immer 10 cm³ abmessen, von der Alkohollösung das vielfache der 10 cm³ und schließlich von dem reinen Lösungsmittel so viel, daß sich das Volum des Reaktionsgemisches auf 100 cm³ ergänze. Aus leicht einzusehenden experimentalen Vorteilen und weil dadurch zu den nötigen Folgerungen weniger Berechnungen notwendig waren, ließ ich das Brom immer auf eine stark überflüssige Menge Alkohol einwirken. So erleidet während der Umwandlung bloß die aktive Masse eines Stoffes, nämlich die des Broms eine Veränderung, hingegen ist die des Alkohols im Laufe der ganzen Reaktion praktisch als konstant anzusehen. Deshalb wird natürlich auch das sich auf den zeitlichen Verlauf der Reaktion beziehende Gesetz einfacher, als wenn sich während der Umwandlung auch die Konzentration des Alkohols verändert.

Wie bekannt, ist bei einer kinetischen Studie die erste Frage, die man auf dem Wege des Versuchs zu beantworten hat, mit welchen Molekelzahlen die einzelnen aktiven Stoffe an der Reaktion teilnehmen, da ja die Theorie in dieser Beziehung keine Aufklärung gibt. Bedeutet nämlich A die Konzentration des Alkohols (ausgedrückt mit der Anzahl der Grammmolekelgewichte, kurz sogenannter Molen pro Liter), B die Konzentration des Broms im Anfange der Reaktion, k die Reaktionsgeschwindigkeit (Geschwindigkeitskonstante) und x die seit dem Beginn der Reaktion in der Zeit t umgewandelte Brommenge (oder anders gesagt die Hälfte des entstandenen Bromwasserstoffs), selbstverständlich ebenfalls in Molen pro Liter ausgedrückt, so muß nach den Prinzipien der chemischen Kinetik der zeitliche Verlauf der Reaktion sich im Sinne der folgenden Differentialgleichung abspielen:

$$\frac{dx}{dt} = kA^n(B-x)^{n'},$$

wo die Exponenten n und n' vorläufig noch nicht bekannte ganze Zahlen sind, welche ausdrücken, mit wieviel Molekeln der Alkohol bzw. das Brom an dem Mechanismus der Reaktion teilnehmen. Die Integration der obigen Differentialgleichung ergibt, falls $n'=1$:

$$\frac{1}{t-t_0}\cdot l\,\frac{B-x_0}{B-x} = kA^n = k' = \text{Const.} \tag{1}$$

(l bedeutet den natürlichen Logarithmus). Wenn aber $n'>1$, so lautet die Formel:

$$\frac{1}{(n'-1)(t-t_0)}\left(\frac{1}{(B-x_0)^{n'-1}} - \frac{1}{(B-x)^{n'-1}}\right) = kA^n = k' = \text{Const.}$$

Wie die Erfahrung zeigt, ist die Molekelzahl selten größer als 2, weshalb wir annehmen können, daß n' entweder mit der Einheit gleich ist oder aber

$$n' = 2,$$

in welchem Falle die allgemeine Formel in die folgende übergeht:

$$\frac{1}{t-t_0}\cdot\frac{x-x_0}{(B-x_0)(B-x)} = kA^n = k' = \text{Const.} \tag{2}$$

In allen diesen Gleichungen bedeutet das bis jetzt nicht erklärte x_0 die seit dem Anfang der Reaktion (Zeit $t = 0$) bis zur ersten Brombestimmung in der Zeit $t = t_0$ umgewandelte Menge Brom, X dieselbe nach t Zeit. Aus den auf jodemetrischem Wege gewonnenen Titrierungsergebnissen und auf den Grund genauer Notierungen der Zeit ist es leicht, den Wert des linksstehenden Gliedes der in Betracht kommenden Gleichungen zu berechnen. Bedeutet nämlich T_0 die durch den Normalgehalt ausgedrückte und zur Zeit t_0 erhaltene Bromtitrierungsdate, S_0 die Menge des zu gleicher Zeit auf azidimetrischem Wege gefundenen Bromwasserstoffs (selbstverständlich gleichfalls durch den Normalgehalt ausgedrückt), weiters T den gefundenen Bromtiter zur Zeit t, so folgt, daß:

$$B - x_0 = \frac{T_0}{2},$$

$$B - x = \frac{T}{2},$$

$$x_0 = \frac{S_0}{2}.$$

Um nun auf grund der Formeln sub (1) bzw. (2) entscheiden zu können, ob n' mit der Einheit oder mit zwei gleich ist, muß man auf folgende Weise verfahren. — Mittels der Versuchsdaten berechnen wir zuerst den Wert des linksstehenden Gliedes der Gleichungen sub (1) und (2) und untersuchen nun, ob wir wohl im Falle (1) oder (2) von der Zeit unabhängige gleiche Werte erhalten, woraus wohl, was die Anteilnahme des Broms betrifft, der Verlauf nach dem mono- bzw. bimolekulären Typus folgen würde, und so wäre $n' = 1$ bzw. $= 2$ als gültiger Wert bestimmt.

Um so die Molekelzahl des Broms zu erhalten, ließ ich letzteres in jeder der drei Lösungen in einer nahezu $^1/_{100}$ n-Konzentration auf 0,344 mol. Alkohol einwirken. Das Reaktionsgemisch stand in einem genau auf 25° C eingestellten Thermostaten und das erstemal titrierte ich — die Zeit genau ablesend und notierend —, nachdem 10 Minuten seit der Fertigstellung der Lösung vergangen waren. Mit sorgfältig kalibrierten Pipetten entnahm ich aus der Lösung immer 10—10 cm³ und ließ dieselben in 10 cm³ einer etwa $^1/_{10}$ n. Jodkalilösung fließen und titrierte das nach wiederholtem starken Schütteln sich abgeschiedene Jod mit einer $^1/_{100}$ n. Thiosulfatlösung. Nach der ersten Bromtitrierung (zur Zeit t_0) bestimmte ich mittels $^1/_{40}$ n. Barytwasser (als Indikator Phenolphtalein benützend) auch die Menge des Bromwasserstoffs, wodurch es möglich wurde den Wert von x_0 und mit Hilfe dessen B, d. h. den Anfangsbromtiter zu berechnen.

Die gefundenen, sich auf alle drei Reaktionsmedien beziehenden Versuchsdaten und die Ergebnisse der Berechnungen sind aus folgenden drei Tabellen ersichtlich:

Die seit der ersten Titrierung verflossene Zeit in Minuten $t - t_0$	Die bei der Titrierung einer Flüssigkeitsmenge von 10 cm³ verbrauchte Menge $^1/_{100}$ n. Thiosulfatlösung in cm³ ausgedrückt. T'	$B - x$	$\frac{0{,}434}{t - t_0} l \cdot \frac{B - x_0}{B - x}$	$\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{x - x_0}{(B - x_0) \cdot (B - x)}$
		Tabelle IV.		
$A = 0{,}344$		Reaktionsmedium: CCl_4		$B = 0{,}00507$
0	10,04	0,00502	—	—
510	8,69	434	0,000123	0,0612
1320	7,23	361	108	590
1500	6,82	341	111	627
2760	5,41	270	97	620
3312	4,89	244	93	637
6192	3,22	0,00161	0,000078	0,0681
		Tabelle V.		
$A = 0{,}344$		Reaktionsmedium: CS_2		$B = 0{,}00484$
0	9,52	0,00476	—	
180	8,83	441	0,000185	—
360	8,25	412	173	0,093
540	7,72	386	169	94
1440	5,96	298	145	91
1800	5,40	270	137	87
2880	4,25	0,00212	0,000122	
		Tabelle VI.		
$A = 0{,}344$		Reaktionsmedium: C_6H_5Br		$B = 0{,}00484$
0	9,48	0,00474	—	—
360	7,06	353	0,000355	0,198
1440	4,24	212	242	0,180
1800	3,65	1825	223	0,187
2820	2,55	1275	192	0,204
4320	1,51	0,000755	0,000185	0,265

Wie aus den letzten zwei Rubriken der Tabellen ersichtlich ist, zeigt der für die mono- und bimolekuläre Umwandlung charakteristische Wert so große Schwankungen, daß man diese nicht den unvermeidlichen Versuchsfehlern anrechnen kann. Dieser Umstand läßt darauf schließen, daß zwischen den Originalstoffen und den Reaktionsprodukten irgend eine störende Nebenwirkung von statten gehen muß. Schon in einer früheren Arbeit*, die über die Wirkung des Broms auf 80 vol. $^0/_0$igen Alkohol handelt, konstatierte und untersuchte ich das Auftreten solch einer störenden Wirkung. Namentlich fand ich den Grund der störenden Wirkung darin, daß das Brom teilweise durch ein Reaktionsprodukt, durch den Bromwasserstoff als Wasserstofftribromid gebunden und dadurch inaktiviert wird:

$$Br_2 + HBr \rightleftarrows HBr_3,$$

weil Wasserstofftribromid auf Alkohol nicht einwirkt, sondern bloß der Teil des nicht gebundenen Broms (die Br_2 Molekeln). Es ist nun durch einen Analogieschluß anzunehmen, daß Wasserstoffbromid als lockerere Verbindung nicht nur in der Alkohol-Wasser-Mischung, sondern auch in anderen Lösungsmitteln vorkommt, so z. B. im CCl_4, CS_2 und auch im C_6H_5Br, in welchem Falle man — da die Konzentration des aktiven Broms schneller sinkt, als die Konzentration des durch Titrierung gefundenen gesamten Broms — auf den langsameren Verlauf der Reaktion bei dem monomolekulären Typus folgen könnte, wie wir ja das tatsächlich auch beobachten konnten (siehe die vorletzte Rubrik der Tabellen IV—VI).

Wenn nun die Reaktion, was die Beteiligung des Broms betrifft, tatsächlich monomolekulär ist und ihr zeitlicher Verlauf nur deshalb von dem Typus abweicht, weil die Konzentration des aktiven Broms, infolge der Entstehung von Wasserstofftribromid, schneller sinkt als die Konzentration des gesamten Broms, so muß man nach den Prinzipien der chemischen Mechanik auf folgende Weise verfahren. In die Differentialgleichung, die sich auf den Fall ohne störende Nebenwirkung bezieht, also in

---

* Zeitschr. für physikalische Chemie **38**, 561.

$$\frac{dx}{dt} = kA^n(B - x),$$

setze man einfach an die Stelle des Wertes, der die Gesamtkonzentration des Broms angibt, die Konzentration des aktiven Broms (vorausgesetzt, daß die Bildung und das Zerfallen auf die Komponenten des Wasserstofftribromids im Vergleich zur Geschwindigkeit der gegenseitigen Einwirkung des Broms und Alkohols mit unendlich großer Geschwindigkeit geschieht). Auf diese Weise erhält die obige Differentialgleichung diejenige Form, welche bei der in Rede stehenden störenden Nebenwirkung von Gültigkeit ist.*

Diese Differentialgleichung, die früher angenommenen Bezeichnungen enthaltend, lautet:

$$2 \cdot \frac{dx}{dt} = kA^n\Big\{-[2B + K - 3(B - x)] + \sqrt{[2B + K - 3(B - x)]^2 + 4K(B - x)}\Big\},$$

in welcher K die Dissoziationskonstante des Wasserstofftribromids ist. Die Integration ergibt:

$$\text{(I)} \qquad \frac{2B + K}{K} \, \mathrm{l} \cdot \frac{c_0}{c} - \frac{2B + {}^2/_3 K}{K} \, \mathrm{l} \cdot \frac{c_0 + \frac{K}{3}}{c + \frac{K}{3}} - \frac{2B + {}^2/_3 K}{3\left(c_0 + \frac{K}{3}\right)} \cdot \frac{c_0 - c}{c + \frac{K}{3}} = kA^n(t - t_0).$$

In dieser Gleichung bedeutet l — wie immer — den natürlichen Logarithmus und c_0 die Anfangskonzentration des aktiven Broms, die auf Grund der ersten zur Zeit t_0 gemachten Bromtitrierungsdate T_0 berechnet wurde. Der Wert dieser Anfangskonzentration ist:

$$c_0 = \frac{-[2B + K - 3(B - x_0)] + \sqrt{[2B + K - 3(B - x_0)]^2 + 4K(B - x_0)}}{2}.$$

Schließlich bedeutet c die Konzentration des zur Zeit t aktiven Broms:

$$c = \frac{-[2B + K - 3(B - x)] + \sqrt{[2B + K - 3(B - x)]^2 + 4K(B - x)}}{2}.$$

---

* Beweise siehe in der schon zitierten Arbeit des Verfassers, Zeitschr. für physikal. Chemie 38, 577—579.

Um die Gültigkeit der obigen sub (I) angeführten Gleichung auf den zeitlichen Verlauf der Reaktion untersuchen zu können, benötigen wir die auf die Reaktionsmedien Kohlenstofftetrachlorid, Schwefelkohlenstoff und Monobrombenzol bezogene Dissoziationskonstante des Wasserstofftribromids. Ich fand, daß diese im Wasser 0,0655* und in 80 vol. $^0/_0$igem Alkohol 0,00441** ist.

Zur Bestimmung des Wertes K konnte ich nicht dieselbe Methode in Anwendung bringen, die ich bei anderen Reaktionsmedien bei 80$^0/_0$ Alkohol und Wasser benützte, da sich der Bromwasserstoff in den als Reaktionsmedien gewählten drei organischen Flüssigkeiten so wenig löst, daß der Sättigungszustand des Bromwasserstoffs weit unter $^1/_{100}$ mol. Konzentration bleibt. Deshalb war es ausgeschlossen mittels Versuchen das zu verwirklichen, was beim Alkohol und Wasser ohne Schwierigkeiten möglich war, nämlich daß ich Brom auf Alkohol bei einer im Verhältnisse zum Brom verhältnismäßig sehr großen (50—100fachen) Konzentration des Bromwasserstoffs einwirken ließ.

So war ich nun gezwungen, eine sich auf langwierige und und mühsame Berechnungen stützende Methode zu verwenden, um zu dem Wert der sich auf die Medien: CCl_4, CS_2 und C_6H_5Br beziehenden Dissoziationskonstante zu kommen.

Zu diesem Zwecke löste ich durch wiederholtes Probieren, mich immer mehr dem genauen Werte des K nähernd, die folgende transzendente Gleichung:

$$\frac{1}{t_1 - t_0} \cdot \left[\frac{2B+K}{K} \mathrm{l} \cdot \frac{c_0}{c_1} - \frac{2B + {}^2/_3 K}{K} \mathrm{l} \cdot \frac{c_0 + \frac{K}{3}}{c_1 + \frac{K}{3}} - \frac{2B + {}^2/_3 K}{3\left(c_0 + \frac{K}{3}\right)} \cdot \frac{c_0 - c_1}{c_1 + \frac{K}{3}} \right]$$

$$= \frac{1}{t_2 - t_0} \cdot \left[\frac{2B+K}{K} \mathrm{l} \cdot \frac{c_0}{c_2} - \frac{2B + {}^2/_3 K}{K} \mathrm{l} \cdot \frac{c_0 + \frac{K}{3}}{c_2 + \frac{K}{3}} - \frac{2B + {}^2/_3 K}{3\left(c_0 + \frac{K}{3}\right)} \cdot \frac{c_0 - c_2}{c_2 + \frac{K}{3}} \right],$$

in welcher:

* Zeitschr. für physikal. Chemie **48**, 63 (1904).

** Ebendaselbst **39**, 587.

$$c_0 = \frac{-[2B + K - 3(B - x_0)] + \sqrt{[2B + K - 3(B - x_0)]^2 + 4K(B - x_0)}}{2},$$

$$c_1 = \frac{-[2B + K - 3(B - x)_1] + \sqrt{[2B + K - 3(B - x_1)]^2 + 4K(B - x_1)}}{2},$$

$$c_2 = \frac{-[2B - K - 3(B - x_2)] + \sqrt{[2B + K - 3(B - x_2)]^2 + 4K(B - x_2)}}{2},$$

Die bei diesen Berechnungen angewandten Versuchsdaten und die Ergebnisse der Berechnungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Tabelle VII.

Die Formel des Reaktionsmediums	Die Zeit in Minuten $t - t_0$	T'	$2B$	$B - x$	Die Dissoziationskonstante des Hydrogenbromid
CCl_4	2	10,04	0,01014	0,00502	0,00510
	1320	7,23		0,00361	
	6192	3,22		0,00161	
CS_2	0	9,52	0,00962	0,00476	0,00360
	540	7,72		0,00336	
	1800	5,40		0,00270	
C_6H_5Br	0	9,48	0,00968	0,00474	0,00265
	360	7,06		0,00353	
	1800	3,65		0,001825	

Daß der zeitliche Verlauf der Reaktion in allen drei Reaktionsmedien sich tatsächlich nach der Gleichung sub (I) abspielt, wird durch die letzten Kolumnen der folgenden drei Tabellen (VIII—X) genügend bewiesen. In der letzten Kolumne ist nämlich:

$$\frac{1}{t - t_0}\left[\frac{2B + K}{K}\,\mathrm{l}\cdot\frac{c_0}{c} - \frac{2B + {}^2/_3 K}{K}\,\mathrm{l}\cdot\frac{c_0 + \frac{K}{3}}{c + \frac{K}{3}} - \frac{2B + {}^2/_3 K}{3\left(c_0 + \frac{K}{3}\right)}\cdot\frac{c_0 - c}{c + \frac{K}{3}}\right] = kA^n = \text{Const.}$$

der Wert des linken Gliedes der Gleichung zu finden, welcher, wie das rechte Glied zeigt, unabhängig von der Zeit, konstant sein müßte und welcher, wie wir uns durch Besichtigung dieser Kolumne überzeugen können, tatsächlich auch keine größeren Schwankungen aufweist als solche, die wir unvermeidlichen Versuchsfehlern zuschreiben können.

$z - z_0$	T'	$\frac{T}{2}$	c	$k A^n$
		Tabelle VIII.		
$A = 0{,}344$		Reaktionsmedium: CCl_4		$2B = 0{,}01014$
0	10,04	0,00502	0,00497	—
510	8,69	434	373	0,000308
1320	7,23	361	262	297*
1500	6,82	341	236	309
2760	5,41	270	158	303
3212	4,89	244	134	307
6192	3,22	0,00161	0,00094	0,000297*
			Mittelwert	0,000303
		Tabelle IX.		
$A = 0{,}344$		Reaktionsmedium CS_2		$2B = 0{,}00962$
0	9,52	0,00476	0,00470	—
180	8,83	441	399	0,009462
360	8,25	412	345	460
540	7,72	386	300	463*
1440	5,96	298	177	467
1800	5,40	270	147	463*
2880	4,25	0,00212	0,00097	0,000465
			Mittelwert	0,000463
		Tabelle X.		
$A = 0{,}344$		Reaktionsmedium: C_6H_5Br		$2B = 0{,}00968$
0	9,48	0,00474	0,00461	—
360	7,06	353	231	0,001020*
1440	4,24	212	0748	1012
1800	3,65	182	0644	1020*
2820	2,55	127	0380	1030
4320	1,51	0,00755	0,00205	1,001004
			Mittelwert	0,001017

(Die Übereinstimmung der in der letzten Kolumne der obigen Tabellen mit Stern bezeichneten Wertpaare findet seine Erklärung darin, daß der Wert von k unter Benutzung der entsprechenden Versuchsdaten berechnet wurde.)

Um die Molekelzahl n des Alkohols und mittels dieser die Reaktionsgeschwindigkeit k berechnen zu können, da bis jetzt nur

$$k A^n = k'$$

bekannt ist, variierte ich den Wert des A, d. h. die Anfangskonzentration des Alkohols. Zu diesem Zwecke untersuchte ich den zeitlichen Verlauf der Reaktion in allen drei Reaktionsmedien, bei einer in Molen mit 0,172, 0,516, 0,688 und 0,860, in Volumprozenten 1, 3, 4 und 5 gleichen Konzentration.

Die Ergebnise meiner Versuche und Berechnungen sind in folgenden 12 Tabellen zusammengestellt.

$t - t_0$	T'	$\frac{T}{2}$	c	k'
		Tabelle XI.		
A = 0,172		Reaktionsmedium: CCl_4		$2B$ = 0,01030
0	10,10	0,00505	0,00495	—
1374	8,74	437	371	0,000114
1920	8,31	415	336	114
2820	7,70	385	290	112
3360	7,31	365	263	117
4260	6,81	0,00340	0,00231	0,000116
			Mittelwert:	0,000114
		Tabelle XII.		
A = 0,516		Reaktionsmedium: CCl_4		$2B$ = 0,1024
0	10,04	0,00502	0,00194	—
480	7,97	398	312	0,000555
1320	5,93	296	182	530
1560	5,48	274	160	532
2760	3,89	194	094	550
3300	3,30	0,00165	0,00075	0,000548
			Mittelwert:	0,000550
		Tabelle XIII.		
A = 0,688		Reaktionsmedium: CCl_4		$2B$ = 0,01018
0	10,18	0,00509	0,00509	—
234	9,49	429	364	0,000805
480	7,33	366	271	809
1380	4,75	237	133	753
1740	4,18	209	107	756
1920	3,90	195	095	773
2820	2,90	0,00145	0,00065	0,000762
			Mittelwert:	0,000778
		Tabelle XIV.		
A = 0,860		Reaktionsmedium: CCl_4		$2B$ = 0,01024
0	10,04	0,00502	0,00494	—
240	8,00	400	319	0,00105
480	6,60	330	220	110
1380	3,96	198	098	105
1920	4,04	157	068	104
2820	2,05	0,00102	0,00041	105
			Mittelwert:	0,00106

$t - t_0$	T'	$\frac{T}{2}$	c	k'
		Tabelle XV.		
$A = 0{,}172$		Reaktionsmedium: CS_2		$2B = 0{,}01008$
0	9,78	0,00489	0,00472	—
360	9,30	465	422	0,000152
1260	8,29	414	335	146
1500	8,10	405	313	150
1860	7,74	387	289	148
2760	7,08	0,00354	0,00235	0,000143
			Mittelwert:	0,000148
		Tabelle XVI.		
$A = 0{,}516$		Reaktionsmedium: CS_2		$2B = 0{,}00948$
0	9,18	0,00459	0,00441	—
240	7,59	379	299	0,000865
480	6,56	328	217	881
1440	4,30	215	101	830
1860	3,73	1865	081	810
2910	2,63	0,001315	0,000515	0,000800
			Mittelwert:	0,000836
		Tabelle XVII.		
$A = 0{,}688$		Reaktionsmedium: CS_2		$2B = 0{,}001003$
0	8,17	0,00408	0,00320	—
120	7,35	367	256	0,00119
240	6,64	332	208	123
360	6,13	306	177	120
1200	3,79	189	075	120
2760	1,95	0,00097	0,00032	0,00118
			Mittelwert:	0,00120
		Tabelle XVIII.		
$A = 0{,}860$		Reaktionsmedium: CS_2		$2B = 0{,}01019$
0	9,69	0,00484	0,00455	—
120	8,03	401	302	0,00185
180	7,48	374	260	177
312	6,44	322	196	170
335	6,38	319	187	170
3000	1,15	0,00057	0,00017	0,00175
			Mittelwert:	0,00175
		Tabelle XIX.		
$A = 0{,}172$		Reaktionsmedium: C_6H_5Br		$2B = 0{,}01009$
0	9,89	0,00494	0,00481	—
240	9,26	463	412	0,000269
372	8,90	449	384	265
480	8,79	0,00429	0,00364	0,000260
			Mittelwert:	0,000262

$t - t_0$	T'	$\frac{T}{2}$	c	k'
		Tabelle XX.		
$A = 0{,}516$		Reaktionsmedium: C_6H_5Br		$2B = 0{,}00988$
0	9,58	0,00479	0,00460	—
60	8,62	431	358	0,00192
120	7,85	392	286	194
220	6,86	343	209	193
300	6,28	314	172	192
378	5,62	0,00281	0,00136	0,00198
				Mittelwert: 0,00198
		Tabelle XXI.		
$A = 0{,}688$		Reaktiensmedium: C_6H_5Br		$2B = 0{,}00989$
0	9,69	0,00484	0,00472	—
60	8,31	415	328	0,00295
120	7,38	359	244	290
360	5,08	254	111	288
480	4,44	222	087	284
1380	2,03	0,00101	0,00027	0,00292
				Mittelwert: 0,00292
		Tabelle XXII.		
		Reaktionsmedium: C_6H_5Br		
0	9,58	0,00479	0,00460	—
60	7,81	390	284	0,00398
120	6,68	334	197	396
220	5,46	273	128	382
300	4,82	241	101	371
360	4,39	0,00219	0,00085	0,00371
				Mittelwert: 0,00382

Der leichteren Übersichtlichkeit halber teile ich in den Tabellen XXIII—XXV (siehe weiter unten) zusammengefaßt folgende Werte mit: den mit der Rektionsgeschwindigkeit proportionalen, bei verschiedener Alkoholkonzentration gefundenen Wert k', weiters in der 4. Kolumne der Tabellen den Wert, welcher — was die Beteiligung des Alkohols betrifft — bei dem monomolekulären, in der 5. Kolumne den, der bei dem bimolekulären Verlauf der Reaktion konstant wäre.

Aus der 4. und 5. Kolumne der Tabelle geht hervor, daß der mit der Reaktionsgeschwindigkeit proportionale Wert k' schneller wächst als die erste und langsamer als die zweite Potenz der Konzentration des Alkohols. Dies zeigt, daß der Alkohol in den

Alkoholkonzentration in Volumprozenten	Alkoholkonzentration in Molen pro Liter	k'	$\frac{k'}{A}$	$\frac{k'}{A^2}$
Tabelle XXIII. Reaktionsmedium: CCl_4				
1,00	0,172	0,000114	0,000663	0,00385
2,00	0,344	303	881	256
3,00	0,516	550	1065	207
4,00	0,688	778	1130	168
5,00	0,860	0,00106	0,001232	0,00143
Tabelle XXIV. Reaktionsmedium: CS_2				
1,00	0,172	0,000148	0,000861	0,00237
2,00	0,344	463	0,001347	391
3,00	0,516	836	1620	314
4,00	0,688	0,00120	1744	254
5,09	0,860	0,00175	0,00203	0,00237
Tabelle XXV. Reaktionsmedium: C_6H_5Br				
1,00	0,172	0,000262	0,00152	0,00885
2,00	0,344	0,001017	296	881
3,00	0,516	198	384	744
4,00	0,688	292	425	617
5,00	0,860	0,00382	0,00445	0,00517

als Lösungsmittel benutzten organischen Flüssigkeiten sich in einem solchen Molekulärzustand befindet, dem zufolge die Konzentration der aktiven Alkoholmolekeln unter Annahme des monomolekulären Typus schneller, unter des bimolekulären langsamer wächst als die Gesamtkonzentration des Alkohols.

Wie zuerst Baron Eőtvös in seinen Untersuchungen* zeigte, befindet sich der als assoziierende Flüssigkeiten bezeichnete Teil homogener Flüssigkeiten in einem solchen Molekulärzustand, demzufolge wir dieselben neben aus einer verhältnismäßig geringen Zahl einfacher Molekeln überwiegend aus doppelten Molekeln bestehend betrachten müssen. Solche assoziierende Flüssigkeiten sind im allgemeinen die Alkohole, unter anderen also auch der Athylalkohol. Weiters ist mittels der auf die moderne Lösungstheorie gegründeten Molekelgewichtsbestimmungsmethoden erforscht

* Wiedemanns Annalen der Physik u. Chemie 27, 452.

worden, daß in einem Teil gewisser Lösungsmittel (wie z. B. im Kohlenwasserstoff, Schwefelkohlenstoff, Chloroform) gelöste Stoffe, die im Wasser in derselben Verdünnung aus lauter einfachen Molekeln bestehend gefunden wurden. in den erwähnten Lösungsmitteln überwiegend aus doppelten Molekeln bestehen.* So fand dies z. B. BECKMANN für den Äthylalkohol in Benzollösung.**

All' diese Erfahrungen machen es nun sehr wahrscheinlich, daß die Annahme richtig ist, daß der sowohl vom mono- wie vom bimolekulären Typus abweichende Verlauf der untersuchten Reaktion daher stammt, daß der Molekularzustand des Alkohols sich mit der Konzentration ändert, so daß infolgedessen, ob nun die einfachen oder doppelten Molekeln mit dem Brom in Wirkung treten, die Gesamtkonzentration nicht proportional der Konzentration der aktiven Alkoholmolekeln ist. Wenn wir annehmen, daß der zwischen den einfachen und doppelten Molekeln bestehende Gleichgewichtszustand

$$(C_2H_5OH)_2 \rightleftarrows 2C_2H_5OH$$

sich gegenüber der Geschwindigkeit, mit welcher das Brom und der Alkohol aufeinander wirken, mit unendlich großer Geschwindigkeit einstellt, so können wir nach den Prinzipien der chemischen Mechanik bei der Berechnung der Reaktionsgeschwindigkeit folgendermaßen vorgehen. Wir ziehen einfach den zwischen den einfachen (A_1) und doppelten (A_2) Molekeln bestehenden Zusammenhang

$$K_a A_2 = A_1{}^2$$

in Betracht (wo K_a die Dissoziationskonstante des Alkohols bedeutet). Auf diese Weise ist der störende Einfluß, der durch den mit der Konzentration wechselnden Molekulärzustand verursacht wird, gehörig in Rechnung gestellt.

Zwischen der Konzentration der einfachen und doppelten Molekeln (A_1 und A_2) und der Gesamtkonzentration des Alkohols (A) besteht nun der folgende einfache Zusammenhang:

$$A_1 + 2A_2 = A,$$

falls die in A mitenthaltenen doppelten Molekeln ebenfalls als

* VAN'T HOFF: Vorlesungen, 1. Heft, 221.

** Zeitschr. f. physik. Chemie 2, 728.

einfache zum Ausdruck gebracht werden, wodurch der Wert von A am Wege des Versuchs unmittelbar zu erlangen ist.

Ob nun das Brom die doppelten oder die einfachen Molekeln angreift, ist a priori nicht sicher zu entscheiden. Ich halte es aber für wahrscheinlich, daß das Brom mit den Molekeln von einem größeren Molekulargewicht und infolgedessen einer verwickelteren Strukturformel, nicht aber mit den einfachen in Reaktion tritt. Wenn wir dies annehmen und wenn wir die sich auf die Wirkung der zwischen den doppelten Molekeln und dem Brom beziehende Reaktionsgeschwindigkeit mit k_2 bezeichnen, muß zwischen k_2 und dem bis jetzt mit k_1 bezeichneten Wert folgender Zusammenhang bestehen:

$$k_1 = k_2 A_2$$

oder in anderer Form

$$\frac{k_1}{A_2} = \text{Const.} = k_2 .$$

Wenn also unsere Hypothese der Wirklichkeit entspricht, so müssen wir — wenn wir die schon bekannten k_1-Werte mit den sich auf die doppelten Molekeln beziehenden Konzentrationswerten dividieren — einen konstanten Wert erhalten, der eben die sich auf doppelte Molekeln beziehende Reaktionsgeschwindigkeit gibt.*

* Nehmen wir die zweite Möglichkeit an, so werden wir finden, daß folgender Zusammenhang besteht:

$$\frac{k_1}{A_1^{\,2}} = \text{Const.} = k_1 .$$

In dieser Gleichung bedeutet k_1 die Geschwindigkeit der sich auf die einfachen Alkohol-Molekeln beziehenden Einwirkung. In Berücksichtigung des zwischen einfachen und doppelten Molekeln bestehenden Zusammenhangs:

$$A_1^{\,2} = K A_2 ,$$

können wir die Formel auch

$$\frac{k_1}{A_2} = K_a k_1 = \text{Const.}$$

schreiben, woraus folgt, daß, wenn die mittels der Benutzung der Versuchsdaten gemachten Berechnungen zeigen, daß der Ausdruck $\frac{k_1}{A_2}$ sich als konstant erweist, dies doch nicht entscheidet, welche von den zwei Möglichkeiten

$$(C_2H_5OH)_2 + Br_2 \longrightarrow$$

und

$$C_2H_5OH + Br_2 \longrightarrow$$

Um zu untersuchen, wie weit die Versuchsdaten die Richtigkeit dieser Annahme unterstützen, müssen wir vor allem die sich auf alle drei Lösungsmittel beziehende Dissoziationskonstante des Alkohols kennen.

Zur Berechnung des Wertes der Dissoziationskonstante genügt, wenn wir bei zwei verschiedenen Alkohol-Gesamtkonzentrationen bei A und B den Wert k (wir werden denselben mit k'_A bezw. k'_B bezeichnen) kennen. Aus den zwei Formeln

$$k'_A = k_2 A_1$$
$$k'_B = k_2 B_2$$

folgt nämlich, daß

(1) $$\frac{k'_B}{k'_A} = \frac{B_2}{A_2}$$

und andererseits

(2) $$K_a A_2 = (A - 2A_2)^2,$$

(3) $$K_a B_2 = (B - 2B_2)^2,$$

durch die Eliminierung des A_2 und B_2 aus diesen zwei Gleichungen gewinnen wir:

(4) $$K_a = \frac{2\left(\frac{k'_B}{k'_A} \cdot A - B\right)^2}{\left(B - A\sqrt{\frac{k'_B}{k'_A}}\right)\left(\frac{k'_B}{k'_A} - \sqrt{\frac{k'_B}{k'_A}}\right)^2}.$$

Diese (den Tabellen XXIII—XXV entnommenen) Versuchsdaten, wie auch die mittels derselben gewonnenen Werte von K_a sind aus folgender Tabelle ersichtlich.

Tabelle XXVI.

Die Formel des Reaktionsmediums	B	A	k'_B	k'_A	K_a
CCl_4	0,860	0,172	0,00106	0,000114	0,521
CS_2	0,860	0,172	0,00175	0,000148	1,225
C_6H_5Br	0,860	0,172	0,00382	0,000262	2,49

der Wirklichkeit entspricht. Zugleich können wir sehen, daß diese auf zwei verschiedene Weisen definierbare Geschwindigkeitskonstante im folgenden Zusammenhang zueinander steht:

$$K_a k_1 = k_2 .$$

Die Bedeutung der Dissoziationskonstante des Alkohols ist aus der Gleichung:

$$K_a \cdot \frac{A - A_1}{2} = A_1^2$$

leicht ablesbar. Wenn wir nämlich annehmen, daß

$$A_1 = \frac{A}{2}$$

ist, d. h. daß aus sämtlichen (in der Menge A enthaltenen) aufgelösten Molekeln sich gerade die Hälfte in Form von einfachen Molekeln in Lösung befindet (hingegen die andere Hälfte natürlich in Form von assoziierten doppelten Molekeln zugegen ist) und suchen, welcher wohl der A-Wert ist, der dann die Gleichung befriedigt, so stellt sich heraus, daß dieser Wert mit K_a gleich ist. Des Alkohols Dissoziationskonstante bedeutet daher jene (Molen) Konzentration des Alkohols, bei welcher von sämtlichen in Lösung gebrachten Molekeln die eine Hälfte als einfache, die andere als doppelte Molekeln in der Lösung existiert.

Da der Wert von K_a auf diese Weise nun bekannt geworden, können wir durch eine einfache Rechnung in Besitz all der Daten gelangen, die einerseits notwendig sind zur Untersuchung dessen, ob wohl die Formel

$$\frac{k'}{A_2} = \text{Const.} = k_2$$

tatsächlich besteht und andererseits dazu, um den Molekulärzustand des Alkohols als gut bekannt betrachten zu können. Wenn wir vor allem die quadratische Gleichung:

$$K_a A_2 = (A - 2\,A_2)^2$$

bezüglich des A_2 lösen, erhalten wir:

$$A_2 = \frac{K_a + 4\,A}{8} \pm \sqrt{\left(\frac{K_a + 4\,A}{8}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2},$$

aber bei der Lösung des Problems kann nur das vor der Quadratwurzel stehende Minuszeichen in Betracht kommen, da nämlich:

$$A_2 \leqq \frac{A}{2},$$

also

$$A_2 < \frac{K_a + 4\,A}{8},$$

so folgt, daß

Der Alkoholgehalt in Volum	Die Gesamtkonzentration des Alkohols in Molen	Die Konzentration der doppelten Alkoholmolekeln in Molen	k'	Reaktionsgeschwindigkeit $\left(\frac{k'}{A_2}\right)$	Die Konzentration der einfachen Alkoholmolekeln in Molen	Der Dissoziationsgrad des Alkohols	Der Assoziationsfaktor des Alkohols
%	A	A_2		k_2	A_1	α	Θ
			Tabelle XXVII. Reaktionsmedium: CCl_4				
1,00	0,172	0,0269	0,000114	0,00424*	0,118	0,686	1,186
2,00	0,344	0,0739	0,000303	0,00410	0,196	0,570	1,274
3,00	0,516	0,1286	0,000550	0,00428	0,259	0,502	1,331
4,00	0,688	0,1875	0,000778	0,00415	0,313	0,455	1,374
5,00	0,860	0,2497	0,001060	0,00424*	0,361	0,420	1,408
			Mittelwert: 0,00420				
			Tabelle XXVIII. Reaktionsmedium: CS_2				
1,00	0,172	0,0159	0,000148	0,00929*	0,140	0,814	1,105
2,00	0,344	0,0492	0,000463	0,00941	0,246	0,715	1,167
3,00	0,516	0,0910	0,000936	0,00940	0,334	0,647	1,214
4,00	0,688	0,1389	0,001200	0,00870	0,412	0,599	1,250
5,00	0,860	0,1892	0,001750	0,00929*	0,482	0,566	1,282
			Mittelwert: 0,00922				
			Tabelle XXIX. Reaktionsmedium: C_6H_5Br				
1,00	0,172	0,0094	0,000262	0,0278*	0,153	0,890	1,058
2,00	0,344	0,0315	0,00102	0,0324	6,281	0,817	1,100
3,00	0,516	0,0618	0,00198	0,0321	0,392	0,760	1,136
4,00	0,688	0,0975	0,00292	0,0299	0,493	0,716	1,165
5,00	0,860	0,1375	0,00382	0,0278*	0,585	0,680	1,190
			Mittelwert: 0,0300				

$$A_2 - \frac{K_\alpha + 4A}{8} < 0,$$

welche Bedingung nur dann erfüllt ist, wenn wir das vor der Quadratwurzel stehende negative Zeichen (und nicht das positive) behalten:

$$A_2 = \frac{K_\alpha + 4A}{8} - \sqrt{\left(\frac{K_\alpha + 4A}{8}\right)^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2}.$$

Da A_2 auf diese Weise bekannt geworden, ist der Wert des A_1 einfach

* Anmerkung. Die genaue Übereinstimmung der in den Tabellen XXVII—XXIX mit * bezeichneten Werte findet ihre Erklärung darin, daß ihre Berechnung mittels der mit ihnen in einer Zeile stehenden entsprechenden Datenpaaren geschah.

$$A_1 = A - 2A_2,$$

weiters der Dissoziationsgrad des Alkohols (α):

$$\alpha = \frac{A_1}{A},$$

und schließlich der sogenannte Assoziationsfaktor (Θ):

$$\Theta = \frac{2}{1 + \alpha}.$$

Die Ergebnisse meiner Berechnungen habe ich in folgenden drei Tabellen zusammengestellt:

Die Konstanz der Werte in der fünften Säule der Tabellen beweist die Richtigkeit der durch uns bezüglich des Molekulärzustandes des Alkohols aufgestellten Annahme; während aber beim Kohlentetrachlorid und beim Schwefelkohlenstoff die genannten Werte keine größeren Schwankungen zeigen, als welche durch unvermeidliche Versuchsfehler herrühren können, ist dies vom Monobrombenzol nicht zu sagen. In diesem Reaktionsmedium muß sich also irgend eine, in der auseinander gesetzten Theorie außeracht gelassene, störende Nebenwirkung abspielen, auf die ich im IV. Kapitel noch ausführlicher zurückkehren werde.

III. Kapitel.

Der Verlauf der Reaktion in wässeriger Lösung bei 25,0° C.

Da bei der Untersuchung des zeitlichen Verlaufs, der sich zwischen dem Brom und Äthylalkohol in wässeriger Lösung abspielenden Einwirkung leicht infolge der Flüchtigkeit des Broms, ein Verlust einstellen kann, benützte ich dieselbe Versuchseinrichtung, die ich bei der Untersuchung der Aufeinanderwirkung des Broms und Azetaldehyds in wässeriger Lösung anwandte, und die in einer anderen Arbeit* von mir ausführlich beschrieben ist.

Die Reaktionsmischungen bereitete ich in Mengen von 200 cm³ in der Weise, daß ich die zwei Stammlösungen, nämlich das 0,11 n. Bromwasser und die 20 vol. %ige Alkohollösung mit Wasser und gegenseitig im nötigen Verhältnisse mischte. Zum Titrieren nahm ich immer genau 20 cm³ und die zum Titrieren des Broms be-

* Zeitschr. f. physikal. Chemie, **48**, 64 (1904).

nützte Thiosulfatlösung war genau $^1/_{20}$ oder $^1/_{100}$ n., je nachdem die Konzentration des Broms mittelstark oder niedrig war. Zur Säurebestimmung verwandte ich $^1/_{20}$ n. Barytwasser.

Im ersten Versuche ließ ich das Brom in einer sehr niedrigen (0,005 Molen) Anfangskonzentration bei einem Gehalt von 1 vol. $^0/_0$ Alkohol wirken. Aus den so gewonnenen, auf den zeitlichen Verlauf bezüglichen Daten wurde es sogleich klar, daß in wässeriger Lösung die Reaktion infolge eines ganz anderen störenden Umstandes komplizierter abläuft, als den ich bei den untersuchten organischen Lösungsmitteln konstatierte. Diese Daten sind aus folgender Tabelle ersichtlich.

Tabelle XXX.

Zeit in Minuten $t - t_0$	Die bei der Titrierung von 20 cm^3 der Bromlösung verbrauchten Mengen der $^1/_{100}$ n. Thiosulfatlösung T'	Konzentration des Brom in Molen $B - x$	$\frac{1}{t - t_0} \log_{10} \frac{B - x_0}{B - x}$
0	21,05	0,00526	—
60	19,48	487	0,000572
120	17,36	434	697
150	16,38	409	726
280	12,45	311	807
360	10,54	264	834
420	9,23	231	852
546	6,96	0,00174	0,000878

Wie aus der letzten Säule dieser Tabelle ersichtlich ist, wächst der Ausdruck, der bei einem monomolekulären Verlauf ohne störende Einwirkungen konstant sein sollte, stets mit der Zeit. Dies kann nur daher kommen, daß die Geschwindigkeit der Umwandlung des Broms langsamer sinkt, als in welchem Verhältnisse die Konzentration des Broms infolge der Umwandlung abnimmt. Daraus läßt sich folgern, daß hier ein die Umwandlung des Broms beschleunigender Grund mitwirkt, der wieder von zweierlei Art sein kann. Derselbe könnte nämlich entweder von der katalytischen Wirkung irgend eines Reaktionsproduktes herrühren, oder aber liegt die Möglichkeit vor, daß ein (oder mehrere) Reaktionsprodukt mit dem Brom gleichfalls in Wirkung tritt, in welchem

Falle wir es mit einer Reaktion mit Folgewirkung zu tun haben.*

[Daß der für den bimolekulären Typus charakteristische Ausdruck

$$\frac{1}{t-t_0} \cdot \frac{(B-x_0)-(B-x)}{(B-x_0)(B-x)}$$

konstant sein soll, ist aus rechnerischen Gründen ausgeschlossen, denn der Wert dieses Ausdruckes wächst, bei denselben Werten $B-x$ und z mit dem Anwachsen des z noch schneller als der logarithmische Ausdruck

$$\frac{1}{t-t_0} \cdot \log_{10} \frac{B-x_0}{B-x}.$$

Aus diesem Grunde hielt ich dessen Berechnung und Aufnahme in die Tabelle für überflüssig.]

Um nun zu entscheiden, ob der unregelmäßige Verlauf der Bromumwandlung durch die katalytische Wirkung eines Reaktionsproduktes oder durch irgend eine Folgewirkung verursacht wird, mußte ich vor allem die Reaktionsprodukte genau kennen. Deshalb machte ich mehrere Versuche, in welchen ich Brom und Alkohol in verschiedenen Konzentrationen aufeinander wirken ließ. Nach dem Abschluß der Reaktion (wozu bei den angewandten Konzentrationsverhältnissen ein Zeitraum von 24 Stunden nötig war) bestimmte ich die Qualität und Quantität der Reaktionsprodukte. Durch die qualitative Untersuchung konnte ich folgende Stoffe als Reaktionsprodukte nachweisen: Aldehyd, Essigsäure und Bromwasserstoff. Quantitativ bestimmte ich in 20 cm^3 der Lösung durch Titrieren mittels $^1/_{20}$ n. Barytwasser die gesamte Säurenmenge, die Konzentration des Bromwasserstoffs nach Volhards Methode mittels $^1/_{20}$ n. Silbernitratlösung in 10 cm^3 der Lösung. Die sich am Beginn der Einwirkung in 20 cm^3 der Lösung befindliche Brommenge (Anfangskonzentration) bestimmte ich durch Titrieren mittels $^1/_{20}$ n. Thiosulfatlösung, und zwar entnahm ich die 20 cm^3 (mit einem Fehler von wenigen Sekunden) in dem Momente aus der Lösung, in welchem ich das Bromwasser

*) Ostwald, Lehrbuch d. allgem. Chemie, 2. Aufl., Bd. II, Teil I, 1, 277.

mit der Alkohollösung zusammenmischte. Die Menge des Aldehyd bestimmte ich nach ROCQUES* Methode mittels in 96% Alkohol gelöstem Natriumbisulfit, indem ich den überflüssigen Teil des letzteren mit einer $^{1}/_{100}$ n. Jodlösung zurücktitrierte. Um den Ablauf der Reaktion zu beschleunigen, ließ ich Natriumbisulfit in Überfluß bei einer Temperatur von 50° C 4—5 Stunden hindurch auf das Aldehyd einwirken.** Mit Rücksicht auf die etwas heikle Natur dieser Methode halte ich es für notwendig, das bei diesen Bestimmungen verfolgte Verfahren näher zu beschreiben. Stets machte ich drei Parallelbestimmungen nebeneinander: die erste lieferte den Aldehydgehalt der Reaktionsmischung, die zweite diejenige des aufgelösten absoluten Alkohols, die dritte diente bloß zu der Bestimmung der Konzentrationsveränderung, die das Natriumbisulfit allein infolge seiner Oxydation bei derselben Konzentration in derselben Zeit erleidet. Zu diesem Zwecke gab ich in einen von den drei mit genau eingeschliffenen Stöpseln versehenen Kolben 40 cm³ Wasser, 10 cm³ der Reaktionsmischung und eine abgemessene Menge (2,00 oder 4 cm³) des (nahezu 0,08 n.) Natriumbisulfit; in einem zweiten Kolben maß ich von der 20 vol. %igen Alkoholwasserlösung beim Versuch Nr. 1 10, bei den anderen drei Versuchen 5 cm³ ab und mischte diese zu den schon vorher abgemessenen 40 cm³ (bzw. bei Versuch Nr. 2—4 zu 54 cm³) Wasser und gab dazu 2 oder 4 cm³ der Natriumbisulfitlösung; endlich im dritten Kolben maß ich 50 cm³ Wasser und gab dazu wieder 2 oder 4 cm³ der Natriumbisulfitlösung. Nun verschloß ich die drei Kolben und tauchte sie in Wasser, das noch vor dem Versuch in großen Zylindergläsern auf 50° C erwärmt und auch weiter auf dieser Temperatur gehalten wurde. Nach 4—5 Stunden nahm ich alle drei Kolben aus dem warmen Wasser, ließ die Flüssigkeiten die Zimmertemperatur annehmen und titrierte dann, als Indikator Stärke benützend, den Überschuß des Natriumbisulfit zurück. Die Ergebnisse meiner quantitativen Bestimmungen sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

---

*) Comptes rendus de l'Acad. de sciences **127**, 524.

) Compt. rend. **127, 764—765.

Tabelle XXXI.

Versuch Nr.	Alkoholgehalt in Volum $^0/_0$ten	Die verbrauchten cm^3 einer $^1/_{20}$ n. Thiosulfatlösung auf 20 cm^3 der Bromlösung beim Beginn der Wirkung	Nach der Reaktion			
			die auf 10 cm^3 verbrauchte Menge $^1/_{20}$ n. Barytwasser in cm^3	die auf 10 cm^3 verbrauchte Menge $^1/_{20}$ n. $AgNO_3$ in cm^3	die abgemessene Menge der Natriumbisulfitlösung in cm^3	Die beim Rücktitrieren des Natriumbisulfit verbrauchte Menge einer $^1/_{100}$ n. Jodlösung in cm^3
1	10	22,88	13,60	11,42	4,00	17,00 22,20 32,54
2	5	20,96	12,85	10,52	2,00	7,88 10,66 16,32
3	5	10,78	13,11	11,00	2,00	8,24 10,76 16,27
4	2	9,80	11,80	9,68	2,00	12,83 10,71 16,20

Die nach den Daten dieser Tabelle berechneten und in Molen pro Liter ausgedrückten Werte der Konzentration des Broms und der Reaktionsprodukte, sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich.

Tabelle XXXII.

Versuch Nr.	Menge des umgewandelten Broms	Die entstandene Menge			Die Summe der doppelten Essigsäuremenge + der Konzentration des Aldehyd
		Bromhydrogen	Essigsäure	Aldehyd	
1	0,0286	0,0571	0,0109	0,00518	0,0268
2	0,0262	0,0528	0,0116	0,00278	0,0260
3	0,0135	0,0275	0,0503	0,00263	0,0132
4	0,0122	0,0242	0,0506	0,00112	0,0123

Aus den Daten dieser Tabelle ist erstens ersichtlich, daß sich eine dem umgewandelten Brom äquivalente Bromwasserstoffmenge bildet, zweitens, daß zwischen den anderen Reaktionsprodukten, dem Aldehyd und der Essigsäure, der Zusammenhang feststeht, daß der doppelte Wert der Essigsäuremenge, vergrößert durch die entstandene Menge Aldehyds, gerade den umgewandelten Molen

Brom gleich ist.* Dies beweist nun, daß das Brom allein in der mit Aldehyd und Essigsäurebildung einhergehenden Reaktion und an keiner anderen Anteil nimmt. Die eine Reaktionsgleichung, welche die Wirkung des Broms veranschaulicht, ist für jeden Fall die folgende:

$$C_2H_5OH + Br_2 \longrightarrow C_2H_4O + 2HBr.$$

Die Essigsäure kann entweder durch die unmittelbare Wirkung, welche das Brom auf Alkohol ausübt, entstehen:

$$C_2H_5OH + 2Br_2 + H_2O \longrightarrow C_2H_4O_2 + 4HBr,$$

oder durch die Oxydierung des Aldehyd zu Essigsäure, infolge der Einwirkung des Brom:

$$C_2H_4O + Br_2 + H_2O \longrightarrow C_2H_4O_2 + 2HBr.$$

Welche von den zwei Möglichkeiten die richtige ist, läßt sich leicht entscheiden. Ich bewies nämlich schon in einer früheren Arbeit**, daß durch das Brom in wässeriger Lösung das Azetaldehyd mit einer wohl experimentell noch verfolgbaren, aber verhältnismäßig großen Umwandlungsgeschwindigkeit, zu Essigsäure oxydiert. Da nun das Brom mit dem Alkohol bei einer relativ ge-

---

* Der in der letzten Säule der Tabelle XXXII mitgeteilte Wert ist im allgemeinen etwas kleiner, als der ganzen umgewandelten Brommenge entsprechen würde. Dieser Unterschied ist, wenn die Wirkung z. B. bei 10%igem Alkoholgehalt erfolgt, entschieden größer, als daß man denselben einem Versuchsfehler zuschreiben könnte. Als Ursache dieser Abweichung stellte sich bei einem späteren Versuche (s. S. 133) fest, daß neben Aldehyd und Essigsäure als Reaktionsprodukt auch Äthylazetat entsteht, jedoch nur in einer vernachlässigten minimalen Menge, wenn der Alkoholgehalt niedriger als 5% ist. Ich stellte nun weiter durch Versuche fest, daß im Falle das Brom auf Alkohol bei einer großen Konzentration (80 vol. %) des letzteren einwirkt, Äthylazetat das Hauptreaktionsprodukt ist. Man ist aber nach dem Gesetze von Eötvös berechtigt anzunehmen, daß in dem erwähnten Reaktionsmedium größtenteils doppelte Alkoholmolekeln vorhanden sind, und so würde all dies die Voraussetzung als sehr wahrscheinlich erscheinen lassen, daß das Brom auf die doppelten Molekeln unter Entstehung von Äthylazetat wirkt:

$$(C_2H_5OH)_2 + Br_2 \longrightarrow C_2H_3O_2C_2H_5 + 4HBr,$$

welche Umsetzung, als in organischen Lösungsmitteln vorherrschende, praktisch allein zu berücksichtigende Reaktion anzunehmen ist.

** Zeitschr. f. physikal. Chemie 48, 63 (1904).

ringeren Geschwindigkeit in Wirkung tritt, so ist es sehr wahrscheinlich, daß die Essigsäure durch die Umwandlung des Aldehyd, nicht aber direkt aus Alkohol entsteht. Entspricht aber andererseits die letztere Annahme der Wahrheit, so würde der aus den Versuchsdaten berechnete und auf den monomolekulären Verlauf charakteristische Wert nicht, wie wir es tatsächlich fanden, größer, sondern im Gegenteil kleiner werden. Eine mit experimentellen Daten vereinbare Erklärung ist deshalb diejenige, daß das Brom, während es zwischen fortwährender Bildung von Aldehyd auf Alkohol einwirkt:

$$(1) \qquad C_2H_5OH + Br_2 \longrightarrow C_2H_4O + 2BrH,$$

gleichzeitig auch auf das Alkohol eine Wirkung ausübt, infolge dessen sich nebenbei beständig Essigsäure bildet:

$$(2) \qquad C_2H_4O + Br_2 + H_2O \longrightarrow C_2H_4O_2 + 2HBr,$$

und neben diesen zwei simultanen chemischen Umwandlungen noch die folgende, mit unendlich großer Geschwindigkeit zum Gleichgewichtszustande führende, umkehrbare chemische Reaktion in Betracht zu nehmen ist:

$$(3) \qquad Br_2 + HBr \rightleftarrows HBr_3.$$

Bloß eine von der Zeit abhängige Veränderliche genügt bekanntlich nicht, um den Zustand solcher, von Folgewirkungen begleiteten, sich in Umwandlung befindlichen chemischen Systeme zu kennen, sondern es ist die Kenntnis von um so mehr Veränderlichen notwendig, je mehr Folgewirkungen die Hauptreaktion begleiten. In unserem Falle sind eigentlich zwei Folgewirkungen vorhanden. Aber durch unsere, auf die Geschwindigkeit der Einwirkung des Brom auf Bromwasserstoff bezügliche Annahme, kann die hieraus entstammende störende Wirkung anstatt mit einer Differentialgleichung, auch durch eine einfache Gleichgewichtsgleichung ausgedrückt werden. Es vereinfacht sich also das Problem, und es sind auf diese Weise zum genannten Zwecke bloß zwei Veränderliche, x und y, notwendig und auch hinreichend. Es bedeute von den zwei Veränderlichen x, wie viel Molen Brom sich bis zur Zeit t unter Entstehung von Aldehyd umgewandelt haben. Die zweite Veränderliche, y, bedeute, wieviel Molen Brom bis zu derselben Zeit durch die Aldehydmolekeln unter Essigsäurebildung in Anspruch genommen worden sind. Anders ausgedrückt bedeutet y die bis zur Zeit t gebildete Menge der Essigsäure (in Molen), so daß natürlicherweise $x-y$ die in bezug auf die Anfangskonzentration im Aldehydgehalt faktisch eingetretene Zunahme zur Zeit t gibt. Bedeutet weiters A die immer in Überschuß angewandte und deshalb während der ganzen Dauer der Reaktion konstante Alkoholkonzentration, die des Wassers D, die Anfangskonzentration des Brom B, endlich die des Aldehyd C, so muß nach den Prinzipien der chemischen Kinetik das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx}{dt} = k_1 A^{n_1} [\beta(B-x-y)]^{n_2}$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{dx}{dt} = k' D^{n_3} (C+x-y)^{n_4} [(B-x-y)]^{n_5}$$

für einen jeden Zeitmoment gültig sein. In diesem System bedeutet das noch nicht erklärte k_1 die sich auf die Aldehydbildung bezügliche Geschwindigkeitskonstante, β den Dissoziationsgrad des Broms [zeigt also an, der wievielte Teil der gesamten (titrierbaren) Brommenge nicht an Bromhydrogen gebunden ist]. Wenn wir die Dissoziationskonstante des Wasserstofftribromids mit K bezeichnen, so hat β den Wert

$$\beta = \frac{-[2B+K-3(B-x-y)] + \sqrt{2B+K-3(B-x-y)+4K(B-x-y)}}{2(B-x-y)}.$$

Von den Exponenten n_1, n_2, n_3, n_4 und n_5 bedeutet n_1 die Molekelzahl des Alkohols, n_2 die sich auf die Wirkung des Broms auf Alkohol beziehende Molekelzahl, n_3 die des Wassers, n_4 die des Aldehyds und endlich n_5 die sich auf die Einwirkung des Broms auf Aldehyd beziehende Molekelzahl. Bezüglich der Frage, wie Brom und Aldehyd in wässeriger Lösung aufeinander wirken, stellte ich in einer schon zitierten Arbeit* fest, daß:

$$n_4 = n_5 = 1 .$$

* Zeitschr. f. physik. Chemie 48, 63 (1904).

Da nun weiters in sämtlichen Versuchen die Konzentration des Wassers D immer denselben konstanten Wert hatte, ist es zweckmäßig statt $k' D^{n_3}$ bloß ein Zeichen zu benutzen, und so wählte ich zu diesem Zwecke den Buchstaben k. Im folgenden nenne ich

$$k' D^{n_3} = k$$

einfach die auf die gegenseitige Einwirkung des Broms auf Alkohol in wässeriger Lösung bezügliche Geschwindigkeitskonstante. Wenn wir nun all diese Werte in die zwei oben angeführten Differentialgleichungen einsetzen, erhalten wir dieselben in folgender einfachen Form:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 A^{n_1} [\beta(B - x - y)]^{n_2}$$

$$\frac{dx}{dt} = k(C + x - y)\,\beta(B - x - y).$$

Daß es nun möglich wird zu untersuchen, ob die in der Rede stehende chemische Umwandlung tatsächlich nach dem durch dieses Differentialgleichungssystem vorgeschriebenen Gesetz abläuft, müssen wir vor allem den Wert der Exponenten n_1 und n_2 feststellen. Zu diesem Zwecke ist es in diesem Falle am zweckmäßigsten, die zum erstenmal von VAN'T HOFF angewandte Methode* zu gebrauchen, mittels welcher wir die Molekelzahl aus den bei verschiedenen Anfangskonzentrationen festgestellten Anfangsgeschwindigkeiten berechnen können. Da bei der in Frage stehenden chemischen Umwandlung die Störung das eine Reaktionsprodukt verursacht, so kann weiter kein Zweifel darüber bestehen, daß diese Methode der Wirklichkeit naheliegende Werte geben muß. Denn beim Beginn der Reaktion, wenn von dem Reaktionsprodukte bloß noch wenig entstehen konnte, muß diese störende Einwirkung noch sehr gering sein. Die zwei Differentialgleichungen geben zum Beginn der Reaktion (auf $t = 0$ Zeit bezogen) den folgenden Zusammenhang:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = k_1 A^{n_1} B^{n_2},$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = kCB,$$

---

* Études de dynamique chimique, 107.

und durch Summierung erhalten wir:

$$\left[\frac{d(x+y)}{dt}\right]_{t=0} = k_1 A^{n_1} B^{n_2} + k C B.$$

Wenn nun der Alkoholgehalt am Anfange der Reaktion 0 ist, d. h. wenn wir das Reaktionsgemisch mit aldehydfreiem absoluten Alkohol bereitet hätten, so würde, da

$$C = 0$$

ist, in diesem Falle feststehen, daß:

$$\left[\frac{d(x+y)}{dt}\right]_{t=0} = k_1 A^{n_1} B^{n_2}.$$

Da aber der von mir angewandte absolute Alkohol nur einen geringen Aldehydgehalt hatte (0,15%), so blieb in diesem Falle der zuletzt genannte Zusammenhang nur annähernd gültig, was unserem Zwecke aber entspricht, da wir nur darüber entscheiden müssen, mit welchen einfachen ganzen Zahlen n_1 und n_2 gleich ist. Bezeichnen wir den experimentell festgestellten Wert der Anfangsgeschwindigkeit mit v, so folgt:

$$v \doteq k_1 A^{n_1} B^{n_2}.$$

Wenn wir nun die Anfangskonzentration des Broms verändern, die des Alkohols aber unverändert lassen, so erhalten wir mit Hilfe der obigen Gleichung für die auf die Wirkung des Broms auf Alkohol bezügliche Molekelzahl die Formel

$$n_2 = \frac{\log v_2 - \log v_1}{\log B_2 - \log B_1}.$$

Lassen wir aber umgekehrt die Konzentration des Broms unverändert und ändern die des Alkohols, so erhalten wir die Molekelzahl des Alkohols mit Hilfe der Gleichung

$$n_1 = \frac{\log v_2 - \log v_1}{\log A_2 - \log A_1}.$$

Um nun in den Besitz der zur Berechnung des n_1 und n_2 notwendigen Daten zu gelangen, machte ich drei Versuche. Die Daten der Versuche und die Resultate meiner Berechnungen sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Tabelle XXXIII.

Versuchs-Nr.	Alkoholgehalt in Molen A	Zeit in Minuten	Die bei der Titrierung von 20 cm³ des Reaktionsgemisches verbrauchten cm³ einer $^1/_2$ n. Thiosulfatlösung	Mittlere Bromkonzentration in Molen B	v	n_1	n_2
1	0,860	0 20	20,96 17,60	0,00241	0,0000210	1,11	
2	0,860	0 40	10,78 7,82	0,00116	0,0000093		0,94
3	0,344	0 40	9,80 8,55	0,00115	0,0000039		

Wie die letzten zwei Säulen dieser Tabelle zeigen, steht der annähernde Wert von n_1 zur Einheit sehr nahe, so daß wir schreiben können:

$$n_1 = n_2 = 1,$$

und infolgedessen nimmt das den zeitlichen Verlauf der Reaktion ausdrückende Simultangleichungssystem folgende einfache Form an:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 A \beta (B - x - y), \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = k(C + x - y)\beta(B - x - y), \tag{2}$$

in welcher β eine bekannte Funktion des x und y ist. Das Problem der Integration ist bei einem solchen Differentialgleichungssystem als gelöst zu betrachten, wenn es gelungen ist, x und y als Funktionen des unabhängigen veränderlichen t und zweier Integrationskonstanten so zu bestimmen, daß sie die vorgelegten Differentialgleichungen befriedigen. Diese Aufgabe ist in unserem Falle mit elementaren Funktionen ganz allgemein nicht zu lösen, dennoch ist es möglich die Gültigkeit des Differentialgleichungssystems zu prüfen, und zwar dadurch, daß wir die Integration für verschiedene Fälle, in welchen sie durch elementare Funktionen und in geschlossener Form durchführbar ist, vollziehen.

So folgt aus den obigen zwei Differentialgleichungen vor allem, was das Verhältnis der Geschwindigkeit der zwei Umwandlungen betrifft, daß

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{k(C + x - y)}{k_1 A}.$$

Wenn wir das konstante Verhältnis der zwei Reaktionsgeschwindigkeiten mit $\varkappa$ bezeichnen, also

$$\frac{k}{k_1} = \varkappa$$

setzen, so können wir auch schreiben:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{\varkappa}{A}(C + x - y).$$

Diese Differentialgleichung kann man durch folgenden, zwischen dem x und y bestehenden Zusammenhang befriedigen:

$$\text{(a)} \qquad y = ce^{-\frac{\varkappa}{A}x} + x - \frac{\varkappa}{A} + C,$$

in welcher c die Konstante der Integration ist. Kennen wir die zur Zeit $t = t_0$ gehörigen Werte

$$x = x_0, \quad y = y_0,$$

so läßt sich die Integrationskonstante c mittels der für $t = t_0$ bestehenden Gleichung

$$\text{(b)} \qquad y_0 = ce^{-\frac{\varkappa}{A}x} + x_0 - \frac{A}{\varkappa} + C$$

aus (a) eliminieren. Wir erhalten so:

$$y = x + \left\{\frac{A}{\varkappa} - [C + (x_0 - y_0)]\right\} e^{-\frac{\varkappa}{A}(x - x_0)} - \frac{A}{\varkappa} + C.$$

Beziehen sich x und y auf das vom Momente t_0 an umgewandelte Brom, so ist

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0,$$

und es nimmt der Zusammenhang zwischen x und y die folgende Form an:

$$\text{(Ia)} \qquad y = x - \left(\frac{A}{\varkappa} - C\right) e^{-\frac{\varkappa}{A}x} - \left(\frac{A}{\varkappa} - C\right).$$

oder anders geschrieben:

$$y = x - \left(\frac{A}{\varkappa} - C\right)\left(1 - e^{-\frac{\varkappa}{A}x}\right),$$

während den Wert des Verhältnisses der zwei Reaktionsgeschwindigkeiten uns die folgende Gleichung liefert:

$$\text{(Ib)} \qquad \left(\frac{dy}{dt}\right) : \left(\frac{dx}{dt}\right) = 1 - \left(1 - \frac{\varkappa C}{A}\right) e^{-\frac{\varkappa}{A}x}$$

In diesen Gleichungen bedeutet C die Aldehydkonzentration zur Zeit t_0; dieser Wert fällt aber natürlicherweise nur dann mit dem beim Beginn der Reaktion gültigen Wert zusammen, wenn der Beginn unserer Zeitrechnung mit dem Beginn der Reaktion zusammenfällt, d. h. wenn $t_0 = 0$ ist.

Da wir durch Bestimmung des Bromgehaltes und der gesamten Säuremenge sowohl den Wert von x als von y für jeden Augenblick der vorschreitenden Reaktion berechnen können, ist es auch möglich zu untersuchen, ob der zwischen dem x und y bestehende, durch die Gleichung sub (Ia) ausgedrückte Zusammenhang tatsächlich besteht oder nicht. Wenn nämlich T den in t, T_0 den in t_0 Zeitmomenten gefundenen Bromtiter, S bezw. S_0 den Gesamtsäuregehalt bedeutet, ausgedrückt mit der Zahl der im Liter enthaltenen Grammäquivalentengewichte, so ist

$$x + y = \tfrac{1}{2}(T_0 - T),$$
$$y = (S - S_0) - (T_0 - T),$$

also

$$x = \tfrac{3}{2}(T_0 - T) - (S_1 - S_0).$$

Zur Untersuchung, ob der in der Gleichung sub (Ia) zum Ausdruck gelangte Zusammenhang gültig ist, müssen wir den Wert des x kennen. Zu diesem gelangen wir am schnellsten, wenn wir in der Gleichung

$$\text{(Ic)} \qquad y = x - \left(\frac{\varkappa}{A} - C\right)\left(1 - e^{-\frac{\varkappa}{A}x}\right)$$

in Betracht ziehen, daß

$$\lim_{x=+\infty} e^{-\frac{\varkappa}{A}x} = 0$$

ist. Wir erhalten dann

$$\lim_{x=+\infty} (x - y) = \frac{A}{\varkappa} - C.$$

Es hat also $x - y$ für $x = +\infty$ einen bestimmten endlichen Grenzwert. Bezeichnen wir diesen Grenzwert mit $\varDelta$, so ist

$$\lim_{x=+\infty} (C + x - y) = \varDelta + C.$$

Haben wir also das Brom in genügend großer Anfangskonzentration angewandt, so wird sich bei großen Werten von x die Größe $C + x - y$, d. h. die Konzentration des Aldehyds nur mehr unmerklich ändern und kann praktisch der Konstante $\varDelta + C$ gleichgesetzt werden. Den Zusammenhang dieser Konstante mit den übrigen Konstanten des Problems können wir zufolge der Definitionsgleichung

$$\varDelta = \frac{\varkappa}{A} - C$$

auch so ausdrücken:

(Id) $$\varkappa = \frac{A}{C + \varDelta} = \frac{k}{k_1}.$$

Alles zusammengefaßt: Sobald die Konzentration des Aldehyds den Wert $C + \varDelta$ erreicht, der zur Konzentration des Alkohols gerade in demselben Verhältnisse steht wie die Reaktionsgeschwindigkeit des Aldehyds zu derjenigen des Alkohols, so schreiten die zwei Reaktionen weiter mit gleicher Geschwindigkeit vorwärts, infolgedessen bei gleicher Zeitdauer ebensoviel Alkohol zu Aldehyd wird als sich Aldehyd zu Essigsäure oxydiert.

Um nun durch Benutzung der Gleichung sub (Id) den Wert des Geschwindigkeitsverhältnisses $\varkappa$ berechnen zu können, ließ ich das Brom auf Alkohol mit 0,860 Molgehalt ungefähr in einer $^1/_{20}$ n. und auf Alkohol mit 0,344 Mol. in etwa einer $^1/_{10}$ n. Anfangskonzentration einwirken. Der zur Bereitung des Reaktionsgemisches gebrauchte absolute Alkohol hatte einen Alkoholgehalt von 0,028 Mol. Nach dem Verlauf der Reaktion, zu der in beiden Fällen 24 Stunden genügten, fand ich, daß der gesamte Aldehydgehalt im ersten Falle 0,00418, im zweiten Falle 0,00168 Mol. betrug (während der Endwert des x im ersten Falle gleich 0,051, im zweiten Falle gleich 0,0080 war).

Auf Grund der eben angeführten Daten folgt, daß der Wert des Geschwindigkeitsverhältnisses

$$\frac{0{,}860}{0{,}00417} = 206$$

und

$$\frac{0{,}344}{0{,}00168} = 205$$

ist. Diese aus zwei verschiedenen Versuchen gewonnenen, beinahe identischen Werte sind schon an sich wichtige Beweise dafür, daß die weiter oben erörterte Hypothese richtig ist, und es ist nun bloß eine kleine Korrektion notwendig, um auf Grund des obigen Wertes zum genauen Wert des Geschwindigkeitsverhältnisses zu kommen. In beiden Fällen war nämlich der Endwert des x noch nicht so groß, daß man $e^{-\frac{\varkappa}{A}x}$ mit einem nicht in Betracht kommenden Fehler neben 1 als Subtrahent hätte vernachlässigen können. Um die aus diesem Grunde notwendige Korrektion nicht außer Acht zu lassen, müssen wir — wie dies eine einfache Berechnung zeigt — von dem oben gefundenen Wert des Geschwindigkeitsverhältnisses rund 2% abziehen, und so wird der nun jetzt endgültig annehmbare Wert des Geschwindigkeitsverhältnisses:

$$\varkappa = 202.$$

Um die Richtigkeit der Gleichung sub (1a), die sich auf den Zusammenhang zwischen x und y bezieht, näher zu untersuchen, bestimmte ich, unter Veränderung der Werte der in der Gleichung vorkommenden Parameter A und C, sowie bei verschiedenen Anfangskonzentrationen, den Wert des x und y bei laufender Zeit. In folgenden Tabellen sind die Ergebnisse und Berechnungen zusammengestellt.

Wie aus den letzten zwei Säulen der Tabellen hervorgeht, stimmt die berechnete und durch den Versuch erhaltene Essigsäuremenge genügend überein, besonders wenn wir in Betracht nehmen, daß der beim Titrieren von Brom und Säure gemachte Fehler bei der Berechnung des x und y mehrfach zur Geltung gelangt.

Für das folgende Differentialgleichungssystem, welches den zeitlichen Verlauf der Reaktion für den Fall bestimmt, wenn der Dissoziationsgrad des Broms (β) durch x und y ausgedrückt ist:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 A\left\{\frac{-[2B+K-3(B-x-y)]}{2} + \frac{\sqrt{2B+K-3(B-x-y)+4K(B-x-y)}}{2}\right\},$$

$$\frac{dy}{dt} = k(C+x-y)\left\{\frac{-[2B+K-3(B-x-y)]}{2} + \frac{\sqrt{2B+K-3(B-x-y)+4K(B-x-y)}}{2}\right\},$$

haben wir auf diese Weise den zwischen x und y allein bestehenden Zusammenhang als tatsächlich gültig erwiesen; es bleibt noch

Die seit der ersten Titration verflossene Zeit in Minuten $t - t_0$	Die zu 20 cm³ der Lösung verbrauchten cm³ einer $^1/_{20}$ n. Thiosulfatlösung T'	Die verbrauchten cm³ des $^1/_{20}$ n. Barytwassers bei Titrierung von 20 cm³ der Lösung S'	Die zur Aldehydbildung verbrauchte Brommenge in Molen pro Liter x	Die zur Essigsäurebildung verbrauchte Brommenge in Molen pro Liter. Gefundener Wert des y	Berechnete Menge der Essigsäure. Berechneter Wert des y
		Tabelle XXXIV.			
$A = 0{,}860$					$C = 0{,}00150$
0	20,57	0,23	—	—	—
20	17,60	3,70	0,00245	0,00125	0,00125
40	14,93	6,90	0,0045	0,0026	0,0027
60	12,70	9,75	0,0059	0,0041	0,0039
100	9,38	13,80	0,0080	0,0059	0,0057
180	5,47	18,65	0,0106	0,0083	0,0081
301	2,52	22,39	0,0124	0,0101	0,0099
		Tabelle XXXV.			
$A = 0{,}860$					$C = 0{,}00150$
0	10,50	0,20	—	—	—
40	7,82	3,33	0,00222	0,00112	0,00110
60	6,62	4,76	0,00325	0,00170	0,00178
100	4,86	6,91	0,00438	0,00268	0,00261
140	3,54	8,50	0,00535	0,00335	0,00338
180	2,60	9,64	0,00602	0,00385	0,00394
310	1,00	11,64	0,00702	0,00485	0,00480
		Tabelle XXXVI.			
$A = 0{,}344$					$C = 0{,}00056$
0	9,70	0,12	—	—	—
40	8,55	1,44	0,00100	0,00042	0,00049
60	7,95	2,17	0,00142	0,00072	0,00078
120	6,36	4,15	0,00245	0,00172	0,00160
180	5,06	5,75	0,00332	0,00248	0;00234
300	3,23	7,95	0,00468	0,00340	0,00363
360	2,64	8,70	0.00502	0,00380	0,00396

übrig, den zwischen der Zeit als unabhängiger Veränderlichen und irgend einer der Größen x und y bestehenden funktionalen Zusammenhang festzustellen. Es würde die Lösung dieses Problems, da der unser Differentialgleichungssystem befriedigende Zusammenhang

$$y = x + \left(\frac{A}{\varkappa} - C\right)e^{-\frac{\varkappa}{A}x} - \left(\frac{A}{\varkappa} - C\right)$$

zwischen den x und y bekannt ist, nicht mit höheren mathematischen Schwierigkeiten verbunden sein. Wenn wir nämlich in der zweiten Differentialgleichung des Systems den durch obigen

Zusammenhang in expliziter Form gegebenen Wert von y einfach einsetzen, so wäre — da in der so entstehenden Differentialgleichung x und t separiert sind — die Lösung desselben durch eine Quadratur möglich. Die Quadratur ist aber in diesem Falle mit Hilfe von elementaren Funktionen im allgemeinen nicht ausführbar; durch eine experimentell leicht erfüllbare Bedingung kann man aber erreichen, daß die obige transzendente Gleichung die Form einer einfachen algebraischen Gleichung annimmt. Wenn sich nämlich die Bedingung

$$C = \frac{A}{\varkappa}$$

erfüllt, d. h. wenn wir die Anfanfangskonzentration des Aldehyd so wählen, daß die Konzentration des Alkohol genau $\varkappa$ mal größer sei, so ist

$$y = x, \tag{A}$$

und so geht unser letztes Differentialgleichungssystem in die Form über:

$$\frac{dx}{dt} = k_1 A \left\{ \frac{-\{2B + K - 3[B - (x+y)]\}}{2} \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{2B + K - 3[B - (x+y) + 4K[B - (x+y)]}}{2} \right\},$$

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot \frac{A}{\varkappa} \cdot \left\{ \frac{-\{2B + K - 3[B - (x+y)]\}}{2} \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{2B + K - 3[B - (x+y)] + 4K[B - (x+y)]}}{2} \right\}.$$

Nehmen wir in Betracht, daß

$$\varkappa = \frac{k}{k_1}$$

und summieren die auf derselben Seite stehenden Teile, so gewinnen wir:

$$\frac{d(x+y)}{dt} = 2k_1 A \cdot \left\{ \frac{-\{2B + K - 3[B - (x+y)]\}}{2} \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{2B + K - 3[B - (x+y)] + 4K[B - (x+y)]}}{2} \right\},$$

und wenn wir zur Abkürzung die Zahl sämtlicher umgewandelten Brommolen mit z bezeichnen:

$$x + y = z,$$

so nimmt die obige Differentialgleichung die folgende einfache Form an:

$$\frac{dz}{dt} = 2k_1 A \left\{ \frac{-[2B+K-3(B-z)]}{2} + \frac{\sqrt{2B+K-3(B-z)+4K(B-z)}}{2} \right\}.$$

Die Integration dieser Differentialgleichung ergibt:

$$\text{(B)} \qquad \frac{2B+K}{K} l \cdot \frac{c_0}{c} - \frac{2B+{}^2/_3 K}{K} l \cdot \frac{c_0 + \frac{K}{3}}{c + \frac{K}{3}} - \frac{2B + {}^2/_3 K}{3\left(c_0 + \frac{K}{3}\right)} \cdot \frac{c_0 - c}{c + \frac{K}{3}} = 2k_1 A (t - t_0),$$

wo

$$c_0 = \frac{-[2B+K-3(B-z_0)] + \sqrt{2B+K-3(B-z_0)+4K(B-z_0)}}{2},$$

und

$$c = \frac{-[2B+K-3(B-z)] + \sqrt{2B+K-3(B-z)+4K(B-z_0)}}{2},$$

In der folgenden Tabelle stelle ich nun die Versuchsergebnisse zusammen, welche sich auf die Einwirkung des Brom auf 0,860 Mol. Alkohol bei der Anwesenheit von 0,00427 Mol. Aldehyd beziehen, oder anders gesagt im Falle, da die Bedingung:

$$C = \frac{A}{\varkappa}$$

erfüllt worden ist. Die Daten der Tabelle XXXVII beweisen, wie wir uns durch Vergleichung der in den letzten zwei Säulen der Tabelle sichtbaren Werte überzeugen können, daß in derselben Zeit genau so viel Aldehyd entstanden ist, als wie viel sich zu Essigsäure oxydiert hat.

Es kommt hier, außerdem daß bei der Einwirkung des Brom auf Alkohol Aldehyd, auf Aldehyd Essigsäure entsteht — worauf schon meine früheren durch Analyse gewonnenen Daten hinwiesen (s. S. 133) — noch eine dritte, wahrscheinlich auf die doppelten Molekeln ausgeübte, mit Bildung von Äthylazetat einhergehende, Einwirkung von Brom zur Geltung:

$$(C_2H_5OH) + 2Br_2 \rightarrow C_2H_3O_2 - C_2H_5 + 4HBr.$$

Tabelle XXXVII.

Die seit der ersten Titrierung verflossene Zeit in Minuten $t - t_0$	Die auf 20 cm^3 der Lösung verbrauchten cm^3 einer $^1/_{20}$ n. Thiosulfatlösung T'	Die auf 20 cm^3 der Mischung bei der Titrierung verbrauchten cm^3 Barytwasser S'	Menge des zwischen Bildung von Aldehyd umgewandelten Brom in Molen x	Zwischen Entstehung von Essigsäure umgewandelte Menge Brom in Molen y
0	21,01	0,25	—	—
18	17,71	4,30	0,0019	0,0022
38	14,90	7,85	0,0039	0,0038
58	12,60	10,72	0,0053	0,0051
98	9,32	14,87	0,0073	0,0076
248	3,47	22,25	0,0108	0,0111
368	1,73	24,45	0,0118	0,0123

Trotzdem es infolge der genügenden Übereinstimmung der zwei letzten Säulen der vorigen Tabelle evident ist, daß diese Reaktion nur eine untergeordnete Bedeutung hat, fand ich es für notwendig, im Anschluß an den eben beschriebenen Versuch, nach der Beendigung der Einwirkung die gebildete Menge Esters durch Verseifung mittels Barytwassers auch direkt zu bestimmen.

Die durch die in 50 cm^3 des Reaktionsgemisches enthaltene Estermenge in Anspruch genommene Menge des $^1/_{20}$ n. Barytwassers machte 0,58 cm^3 aus, hingegen entsprach dem sich aus der ganzen Brommenge gebildeten Bromwasserstoff 53,4 cm^3 Barytwasser. Da im Sinne der obigen Reaktionsgleichung vier Molen Bromwasserstoff mit der Bildung von einer Mole Äthylazetat einhergehen, so folgt aus den eben angeführten Daten, daß bei einem Alkoholgehalt von 5 Vol. $^0/_0$ 4,5 $^0/_0$ des Brom zur Esterbildung verbraucht wird.

Auch die Gleichung sub (B), zu der die Theorie im Falle

$$\frac{A}{C} = \varkappa$$

führte, wurde also durch die Versuchsdaten gerechtfertigt, wie dies die Konstanz der aus diesen Daten berechneten und aus der letzten Säule der folgenden Tabelle ersichtlichen Werte zeigen. Bei der Berechnung des in der letzten Säule der Tabelle sichtbaren Wertes benützte ich als Dissoziationskonstante des Wasserstofftribromids

$$K = 0{,}065,$$

welchen Wert ich auf kinetischem Wege, nämlich bei Studium

Tabelle XXXVIII.

Die seit der ersten Titrierung vergangene Zeit in Minuten $t-t_0$	Die verbrauchten cm^3 einer $^1/_{20}$ n. Thiosulfatlöung auf 20 cm^3 der Mischung T'	Die gesamte Bromkonzentration in Molen pro Liter $\frac{T}{2}$	Die Konzentration des aktiven Brom in Molen pro Liter c	$2k_1A$
0	17,71	0,02213	0,02060	—
20	14,90	0,01862	0,01597	0,00977
40	12,60	0,01575	0,01262	0,00990
80	9,32	0,01165	0,00850	0,00980
230	3,47	0,00433	0,00270	0,00993
320	1,73	0,00216	0,00125	0,00994
			Mittelwert:	0,00989

der Umwandlung des Brom und Azetaldehyd in stark verdünnter Lösung* gewann und der mit dem von Boericke** mittels anderer Methoden neuerdings gefundenen

$$K = 0{,}0635$$

Wert recht gut übereinstimmt.

Der Mittelwert der in der letzten Säule der XXXVIII. Tabelle befindlichen Werte ist

$$2K_1A = 0{,}00989 .$$

Da $A = 0{,}860$, so erhalten wir hieraus für die Reaktionsgeschwindigkeit der Einwirkung des Broms auf Alkohol unter Bildung von Aldehyd den folgenden Wert:

$$k_1 = 0{,}00575 .$$

Da bereits bekannt, daß

$$\varkappa = \frac{k}{k_1} = 202 ,$$

so folgt hieraus

$$k = 1{,}16 .$$

Dieser Wert von k stimmt gut mit einem früher gefundenen überein, nämlich mit demjenigen, den ich erhielt, als ich zur Berechnung der in Rede stehenden Geschwindigkeitskonstante die Werte benützte, die sich bei dem Studium des zeitlichen Ver-

---

* Zeitschr. für physikal. Chemie **48**, 63 (1904).

** Zeitschrift für Elektrochemie **11**, 65.

laufes der Einwirkung des Brom bloß auf Aldehyd allein (und nicht, wie jetzt bei der gleichzeitigen Einwirkung des Brom auf Alkohol und Aldehyd) ergaben. Der vorerst erwähnte Wert war nämlich:

$$k = 1{,}20\,.$$

Diese Übereinstimmung ist gleichfalls ein wichtiger Beweis, daß die für den zeitlichen Verlauf der Reaktion aufgestellte Theorie der Wirklichkeit entspricht.

Wenn wir außer der Erfüllung des in der Gleichung

$$(\alpha) \qquad k_1 A = k C$$

zum Ausdruck gelangenden Zusammenhanges, auch noch dafür sorgen, daß das Brom bei einer so niedrigen Anfangskonzentration wirken soll, daß die beim Titrieren gefundene Gesamtmenge des Brom mit dem in Form von Br_2-Molekeln existierenden aktiven Brom als praktisch gleich betrachtet werden kann, wird das den zeitlichen Verlauf der Reaktion ausdrückende Gesetz noch einfacher. Die Bedingung, unter welcher dies der Fall ist, geht bei einer mit 0,005 Mol. gleichen Anfangskonzentration des Brom (mit einem Fehler unter $5\%_0$) in Erfüllung, worüber wir uns leicht durch eine einfache Berechnung überzeugen können. Da weiter in diesem Falle als Folge der Gleichung sub (α):

$$y = x$$

und

$$\beta = 1$$

ist, wird unser Differentialgleichungssystem (1) und (2) (S. 125) zu folgendem einfachen System:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = k_1 A\,[B - (x + y)],$$

woraus

$$\frac{d(x+y)}{dt} = 2kA\,[B - (x + y)],$$

oder, wenn wir der Kürze wegen schreiben:

$$x + y = z,$$

$$\frac{dz}{dt} = 2k_1 A\,(B - z).$$

Die Integration der letzten sehr einfachen Differentialgleichung ergibt:

Die seit der ersten Titrierung verflossene Zeit in Minuten $t - t_0$	Die verbrauchten cm³ einer $^1/_{20}$ n. Thiosulfatlösung auf 20 cm³ der Mischung T'	$\frac{1}{t - t_0} \log_{10} \frac{T_0'}{T'}$
	Tabelle XXXIX.	
$A = 0{,}860$	$B = 0{,}00523$	$C = 0{,}00427$
0	16,60	—
30	12,60	0,00400
70	8,77	0,00399
110	5,96	0,00404
130	5,03	0,00399
240	1,87	0,00395
		Mittelwert: 0,00400
	Tabelle XL.	
$A = 0{,}430$	$B = 0{,}00515$	$C = 0{,}00213$
0	20,58	—
90	13,65	0,00198
170	9,27	0,00204
200	7,95	0,00206
310	4,59	0,00210
440	2,45	0,00210
		Mittelwert: 0,00205

$$\frac{1}{t - t_0} l \cdot \frac{B - z_0}{B - z} = 2 k_1 A .$$

Da sich die bei der auf jodometrischem Wege durch Titrierung des Bromgehalts in gleichen Teilen der Reaktionsmischung gefundenen (T') Daten von der rationell ausgedrückten Bromkonzentration bloß durch einen konstanten Proportionalitätsfaktor unterscheiden:

$$\frac{B - z}{T'} = \text{Const.},$$

sind wir berechtigt, an Stelle der rationell ausgedrückten Bromkonzentration, die bei der Titrierung unmittelbar gefundenen Werte zu schreiben. Wenn wir nun noch statt der natürlichen Logarithmen die Briggsschen benützen, so folgt als Ausdruck der Theorie, daß:

$$\frac{1}{t - t_0} \log_{10} \frac{T_0'}{T} = \text{Const.},$$

das heißt, daß die Umwandlung nach dem monomolekulären Typus ablaufen muß, sobald die Anfangskonzentration des Alkohol und Aldehyd dem umgekehrten Verhältnis der Reaktionsgeschwindigkeiten gleichgesetzt wird, und wenn außerdem das Brom in einer so niedrigen Konzentration einwirkt, bei welcher die Gesamtkonzentration und die Konzentration des aktiven Broms gegenseitig praktisch gleich gesetzt werden kann. Wie aus den letzten Säulen der folgenden zwei Tabellen ersichtlich ist, bestätigen die Versuchsdaten diese Folge der Theorie.

IV. Kapitel.

Überblick und allgemeine Folgerungen.

Zur Erleichterung des Überblickes stelle ich die Ergebnisse meiner Messungen, die sich auf verschiedene Reaktionsmedien beziehenden Gleichgewichtskonstanten und Geschwindigkeitswerte, in der unten folgenden Tabelle zusammen. Außerdem teile ich in der zweiten und dritten Säule der Tabelle auch die Dielektrizitätskonstante und die innere Reibung* eines jeden Reaktionsmediums mit, da auf Grund der bisherigen Untersuchungen zwischen diesen physikalischen Eigenschaften und der Reaktionsgeschwindigkeit ein Zusammenhang zu folgern ist.

Tabelle XLI.

Chemisches Zeichen des Reaktionsmediums	Die Dielektrizitätskonstante (20° C). Beim Wasser nach TURNER, bei den anderen drei Medien auf grund der Messungen des Verfassers	Auf Wasser von 0° C als Einheit bezogene innere Reibung (25° C)	Die Dissoziationskonstante des Hydrogentribromid (25° C) K	Die Dissoziationskonstante des Alkohol (25° C) K_a	Die Geschwindigkeit der zwischen den einfachen (hydratisierten) Alkohol- und den Brommolekeln verlaufenden Einwirkung (25° C) k_1	Die Geschwindigkeit der zwischen den doppelten Alkohol- und den Brommolekeln verlaufenden Einwirkung (20° C) k_2
H_2O	81,2	49,9	0,0655	sehr groß	0,00575	—
CCl_4	2,246	52	0,0051	0,521	—	0,00420
CS_2	2,64	19,7	0,0036	1,225	—	0,00922
C_6H_5Br	5,66	63	0,00265	2,49	—	0,0300

Aus diesen Daten geht vor allem hervor, daß es kaum zu bezweifeln ist, daß, wenn wir zum Ausdruck der Konzentration die gewöhnlich gebrauchte Volumkonzentration benützen (obwohl das Reaktionsmedium eine Änderung erleidet), zwischen der auf diese

* Die Daten entnehme ich aus LANDOLTS „Tabellen“.

Weise ausgedrückten Gleichgewichtskonstante und der Reaktionsgeschwindigkeit und der Dielektrizitätskonstante des betreffenden Mediums ein gewisser Parallelismus besteht. So, wenn wir vom Wasser zu den organischen Lösungsmitteln übergehen, entspricht der sich im Wert der Dielektrizitätskonstante zeigende große Sprung (aus 81 wird 5,7 oder noch weniger) einer in der Dissoziationskonstante eintretenden, gleichfalls sehr großen Änderung (sie fällt im Wert von 0,065 auf 0,0051 oder noch tiefer). Ändert sich die Dielektrizitätskonstante, wie bei den drei organischen Flüssigkeiten, nicht sehr bedeutend, so variiert in den erwähnten organischen Lösungsmitteln — von dem einen zum anderen übergehend — auch die Dissoziationskonstante des Wasserstofftribromids nicht sehr.

Die Dissoziationskonstante des Alkohol schreitet noch ausgesprochener parallel mit der Dielektrizitätskonstante des Mediums. Den Zahlenwert der Dissoziationskonstante des Alkohol (wenn das Reaktionsmedium Wasser ist) konnte ich zwar nicht bestimmen, aber der Umstand, daß der Alkohol bei 5% Volum % (0,85 Mol.) Gehalt im Wasser als praktisch aus lauter einfachen Molekeln bestehend betrachtet werden konnte, zeigt zweifelsohne darauf hin, daß die Dissoziationskonstante des Alkohols, wenn das Reaktionsmedium Wasser ist, um vieles größer ist als der bezüglich des Monobrombenzols gefundene Wert, in welchem der Alkohol (bei einem Gehalt von 5%) schon zu 30% assoziiert ist.

Dies nicht außer acht gelassen, ist in den folgenden vier Reaktionsmedien: Wasser, Monobrombenzol, Schwefelkohlenstoff, Kohlenstofftetrachlorid die Dielektrizitätskonstante in derselben Reihenfolge:

81,2, 5,66, 2,64, 2,25

und die Dissoziationskonstante des Alkohol in derselben Reihenfolge:

sehr groß, 2,94, 1,225, 0,521,

und deshalb können wir die Regel aussprechen, daß sich der Alkohol (bei derselben Volumkonzentration) um so mehr in dem auf einfache Molekeln zerfallenen Zustande befindet, je größer die Dielektrizitätskonstante des betreffenden Lösungsmittels ist.

Weiter ist auch durch den Vergleich, der aus der zweiten und letzten Säule der Tabelle XLI ersichtlichen Werte, ein Parallelismus zwischen der Dielektrizitätskonstante des Mediums und der Reaktionsgeschwindigkeit zu konstatieren.

Zwischen der Reaktionsgeschwindigkeit und der inneren Reibung finden wir bei dieser Reaktion keinen Zusammenhang, denn während beim Monobrombenzol die innere Reibung und Reaktionsgeschwindigkeit am größten ist, zeigt sich bei den anderen zwei Lösungsmitteln, daß, sobald die innere Reibung kleiner, die Reaktionsgeschwindigkeit größer ist. So ist beim Schwefelkohlenstoff mit geringer innerer Reibung die Reaktionsgeschwindigkeit größer als wie beim Kohlenstofftetrachlorid, bei dem (im Verhältnis zu der beim Schwefelkohlenstoff) die innere Reibung größer ist.

Wie aus den letzten zwei Säulen der genannten Tabelle ersichtlich ist, finden wir keinen großen Unterschied zwischen der Geschwindigkeit, mit welcher das Brom mit den einfachen und jener anderen, mit welcher es mit doppelten Alkoholmolekeln in Wirkung tritt. Dennoch verlief die Reaktion in den organischen Lösungsmitteln mit einem solchen Mechanismus, in welchem die einfachen Molekeln keine Rolle erhielten, obwohl die Konzentration derselben mindestens so groß war, wie bei den doppelten Molekeln, meistens sogar noch größer. Die Erklärung kann nur darin zu finden sein, daß wir annehmen, daß das Brom in Wasser eigentlich nicht die einfachen C_2H_5OH-Molekeln angreift, sondern die hydratisierten und infolgedessen aktivierten Alkoholmolekeln:

$$C_2H_5OH + nH_2O \rightleftarrows C_2H_5OHnH_2O;$$

da sich aber solche Molekeln in organischen Lösungen nicht bilden können, unterblieb auch die entsprechende Wirkung.

Vom theoretischen Standpunkte aus kann man, die zum Ausdruck der aktiven Masse gewöhnlich gebrauchte Benennung der Konzentration, die sogenannte Volum- oder Raumkonzentration, nur dann als rationell betrachten, solange das Reaktionsmedium (das flüssige oder feste Lösungsmittel) dasselbe bleibt. Sobald wir auf ein anderes Lösungsmittel (Reaktionsmedium) übergehen, erleidet der Proportionalitätsfaktor, der mit der Konzentration multipliziert das Maß der aktiven Masse gibt, eine Änderung*, so daß wir die Konzentration an sich nicht für ein solches Maß der aktiven Masse betrachten können, nach dessen Kenntnis die auf verschiedene Lösungsmittel berechneten Reaktionsgeschwindigkeitswerte zwischen einander direkt vergleichbar wären. Zuerst wies VAN'T HOFF** darauf hin, wie wir zu solchen Konzentrationswerten kommen können, die der aktiven Masse der reagierenden Molekeln in verschiedenen Lösungsmitteln gleich anzunehmen sind. Zu diesem Zwecke setzen wir an Stelle der als Volumkonzentration definierten Konzentration die sogenannte Gleichgewichtskonzentration, zu deren Berechnung wir die für die verschiedenen Lösungsmittel gültigen Verteilungskoeffizienten (und bei schwerlöslichen Stoffen die Löslichkeit) der reagierenden Molekeln kennen müssen.

Um den Verteilungskoeffizienten der einfachen und doppelten Äthylalkohol-Molekeln zwischen Wasser und der 3. organischen Lösungsmittel berechnen zu können, mußte ich vor allem verschiedene Bestimmungen vornehmen. Mittels derselben bestimmte ich die Konzentration des Alkohols für den Fall des Gleichgewichts, erstens in der wässerigen Phase, zweitens in der Phase, die gebildet wird durch die Flüssigkeit, die sich mit Wasser nicht mischen läßt, d. h. sich unter demselben befindet.

Bedeute a die Gesamtkonzentration des Alkohols (in Molen per Liter) im Wasser, A in einem anderen, sich mit Wasser nicht mischenden Lösungsmittel, bedeute ferner a_1 und a_2 die Konzentration der einfachen bzw. der doppelten Molekeln in der wässerigen, A_1 und A_2 in der anderen flüssigen Phase, so müssen, vorausgesetzt, daß sich die zwei Phasen im Verteilungsgleichgewicht befinden, gleichzeitig die vier folgenden Gleichungen bestehen:

$$k_a a_2 = a_1^2, \qquad K_a A_2 = A_1^2,$$

$$\frac{A_1}{a_1} = \gamma_1, \qquad \frac{A_2}{a_2} = \gamma_2,$$

in welchen zwei letzten γ_1 der sich auf die einfachen, γ_2 der sich auf die doppelten Molekeln beziehende Verteilungskoeffizient ist.

* OSTWALD, Lehrbuch der allgem. Chemie. II. Aufl. Bd. II, Tabelle 2, 1, 597.

** Vorlesungen über allgem. und physikal. Chemie. Heft 218—221.

Da in den untereinander ins Gleichgewicht gebrachten Phasen experimentell nur die gesamte (die auf Wasser beziehentlich mit a, auf die andere Phase mit A zu bezeichnende) Alkoholkonzentration bestimmbar ist, welche in einem wohlbekannten Zusammenhange mit der Konzentration der einfachen und der doppelten Molekeln steht:

$$a_1 + 2a_2 = a, \qquad A_1 + 2A_2 = A,$$

so muß man, um die in den vier obigen Gleichungen auftretenden acht unbekannten (a_1, a_2, A_1, A_2, γ_1, γ_2, k, K) Werte bestimmen zu können, auch die letzten zwei einfachen linearen Zusammenhänge in Betracht nehmen, wodurch uns nun zur Lösung des Problems sechs Gleichungen zur Verfügung stehen. Weil diese sechs Gleichungen auch dann gültig sind, wenn sich a und A (zwischen gewissen ziemlich weiten Grenzen) ändert (in welchem Falle bloß der Wert a_1 und a_2, weiters A_1 und A_2 eine Änderung erfährt, während γ_1 und γ_2 wie auch k und K ihre früheren Werte behalten), so genügt es vom mathematischen Standpunkte, wenn wir die in dem Verteilungsgleichgewicht gefundenen zwei zusammengehörigen Wertpaare (a und A) experimentell bestimmen, um dann den Wert der vier Konstanten (γ_1, γ_2, k und K) berechnen zu können. Es stehen uns dann ebensoviele Gleichungen zur Verfügung, als die Zahl der Unbekannten ist, nämlich $8 + 4 = 12$.

Auf Grund der Erfahrungstatsache, daß sich der absolute Alkohol mit den hier in Rede stehenden drei organischen Lösungsmitteln in jedem Verhältnis mischt, sich also in denselben sehr gut löst, hätte man erwarten können, daß der Verteilungskoeffizient des Alkohols nicht weit von der Einheit entfernt ist. Doch zeigten schon die ersten zur Orientierung gemachten Messungen, daß dies in der Wirklichkeit nicht so ist, sondern daß sich der Alkohol im Wasser verhältnismäßig viel besser löst als in den genannten organischen Lösungsmitteln. Deshalb mußte ich auch den Alkohol in Wasser immer in einer ziemlich hohen Konzentration verwenden, damit in der anderen mit der wässerigen Lösung im Verteilungsgleichgewicht befindlichen Phase die Konzentration eine solche sei, deren genaue Bestimmung noch möglich ist. Wenn z. B. die Konzentration des Alkohols in Wasser nahezu ein Mol. pro Liter war, so ist die in der mit dieser im Gleichgewicht stehenden Schwefelkohlenstoff-Phase die Konzentration des Alkohols nur der $^1/_{70}$ Teil derselben gewesen.

Zur quantitativen Bestimmung des Alkohols benutzte ich die Methode, die ich eben aus dem Grunde ausarbeitete*, weil es mit den gebräuchlichen Methoden, so geringe Alkoholmengen, als hier in Rechenschaft kommen, zn bestimmen nicht möglich war. Bezüglich der Details dieser Methode verweise ich auf die zitierte Arbeit und teile hier nur soviel mit, daß die Methode darauf gegründet ist, daß Brom im Überschuß bei 80° (sogar in sehr verdünnter wässeriger Lösung) den Alkohol binnen zwei Stunden vollständig zu Essigsäure oxydiert und daß aus der Menge des entstandenen Bromwasserstoffs die Menge des Äthylalkohols berechenbar ist (da 4 Mol. Bromhydrogen 1 Mol. Alkohol entsprechen).

Um die Alkoholkonzentration in einer sich mit Wasser nicht mischbaren Phase zu bestimmen, entnahm ich der letzteren mit der Pipette 20 cm^3, schüttelte den darin gelösten Alkohol mit 40 cm^3 Wasser durch, gab 10 cm^3 dieser wässerigen Lösung in einen Kolben und, nachdem ich dieselbe auf nahezu 100 cm^3 verdünnte, pipettierte ich zur Oxydation des Alkohols 0,3 cm^3 Brom hinzu. Bei dieser Methode gelangen natürlich auch die Spuren des betreffenden organischen Lösungsmittels (Schwefelkohlenstoff) in das zum Anschütteln des Alkohols angewandte Wasser. Dies kann einen Fehler verursachen, wenn das Brom bei der genannten Temperatur von 80° C nicht nur den Alkohol zu Essigsäure oxydiert, sondern in der verdünnten wässerigen Lösung auch die genannten organischen Verbindungen angreift. Wie ich mich darüber durch besondere Versuche überzeugen konnte, ist dies beim Schwefelkohlenstoff auch der Fall, hingegen verursacht dieser Umstand bei den anderen zwei Lösungsmitteln (bei dem Kohlenstofftetrachlorid und Monobrombenzol) keinen besonderen Fehler. Aus diesem Grunde entfernte ich, bei den bezüglich des Schwefelkohlenstoffes gemachten Alkoholbestimmungen, zuerst den Kohlenstoffdisulfid und löste erst dann die zur Oxydierung des Alkohols gebräuchliche Brommenge von 0,3 cm^3 auf. Die Entfernung des

* Diese Berichte **23**, 35 (1905).

Kohlenstoffdisulfids geschah einfach durch Aufkochen. Um dabei einem Alkoholverlust vorzubeugen, verwandte ich auf die genannte Arbeit bloß soviel Zeit, als sich zur gänzlichen Verflüchtigung des Kohlenstoffdisulfids als notwendig erwies. Dieser Vorgang dauerte 7 Minuten (in einem Kolben von 100 cm³, bei einer Wassermenge von 90 cm³, zu welcher ich eine Messerspitze reines grobes Bimssteinpulver gab); 5 Minuten vergingen, bis die Flüssigkeit aufkochte, und 2 Minuten hindurch ließ ich sie lebhaft kochen. Bei diesem Verfahren verkochte vom Wasser weniger als 0,5 cm³, und da der Alkoholgehalt sehr gering war, nämlich weniger als 0,01 % hatte, so trat im Alkoholgehalt durch das Aufkochen auch kein in Betracht zu nehmender Verlust ein.

Um das Verteilungsgleichgewicht zwischen den zwei Phasen sicher zu erreichen, ließ ich dieselben, in einem auf 25° eingestellten Thermostat in Kolben mit eingeschliffenem Stöpsel, den Inhalt tagsüber alle halben Stunden stark aufschüttelnd, 24 Stunden lang in gegenseitiger Berührung.

Die beim Studium des Verteilungsgleichgewichtes des Alkohols erhaltenen Daten und die aus denselben berechneten Werte sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle XLII.

Die chemische Formel der mit der wässerigen Phase im Verteilungsgleichgewicht stehenden organischen Phase	In welcher Verdünnung der wässerigen Phase ist in 20 cm³ der Alkoholgehalt bestimmt worden?	Die durch 20 cm³ der nach den Angaben der vorigen Rubrik verdünnten wässerigen Phase verbrauchten cm³ einer $^1/_{10}$ n. $AgNO_3$-Lösung	Die Alkoholkonzentration in Molen in der wässerigen Phase	Die der in 5 cm³ des organischen Lösungsmittels enthaltenen Alkoholmenge entsprechenden cm³ einer $^1/_{10}$ n. $AgNO_3$-Lösung	Die Alkoholkonzentration in Molen pro Liter in der organischen Phase	Der sich auf die Gesamt-Alkoholkonzentration beziehende Verteilungskoeffizient $\frac{A}{a}$	Mittelwert
	50-fach	6,50	0,406	1,94	0,0097	0,0239	
CCl_4	100-fach	6,34	0,792	4,02	0,0201	0,0254	0,0244
	200-fach	5,91	1,477	7,06	0,0553	0,0239	
	50-fach	6,66	0,415	1,18	0,0059	0,0142	
CS_2	100-fach	6,42	0,802	2,21	0,0405	0,0138	0.0143
	200-fach	6,02	1,505	4,45	0,0222	0,0148	
	50-fach	6,41	0,401	3,14	0,0157	0,0392	
C_6H_5Br	100-fach	6,40	0,800	6,92	0,0296	0,0370	0,0385
	200-fach	5,90	1,480	11,66	0,0582	0,0394	

Aus der letzten Rubrik der Tabelle ist ersichtlich, daß der sich auf die Gesamtalkoholkonzentration beziehende Verteilungskoeffizient konstant ist

$$\frac{A}{a} = \text{const.}$$

Diese Erfahrungstatsache scheint im ersten Momente mit der Theorie im Gegensatze zu stehen, nach welcher doch die folgenden Gleichungen gültig sein müssen:

$$A_1 = \gamma_1 a_1 \qquad \text{und} \qquad A_2 = \gamma_2 a_2 \,,$$

da aber

$$a_1 + 2a_2 = a \qquad \text{und} \qquad A_1 + 2A_2 = A \,,$$

so folgt hieraus

$$A_1 + 2A_2 = A = \gamma_1 a_1 + 2\gamma_2 a_2 \,.$$

Demnach wird nur in dem Falle

$$\gamma_1 = \gamma_2$$

die Gleichung

$$A = \gamma_1(a_1 + 2a_2) = \gamma_1 a_1$$

das heißt

$$\frac{A}{a} = \text{const.}$$

eintreffen.

Der in der letzten Gleichung ausgedrückte und durch Versuche als gültig gefundene Zusammenhang läßt sich mit der Theorie nur in dem — a priori gerade nicht sehr wahrscheinlichen — Falle vereinbaren, wenn die auf die einfachen und doppelten Molekeln bezüglichen Verteilungskoeffizienten einander gleich sind. Schenken wir aber auch den anderen zwei Gleichungen — welche den zwischen der Konzentration der einfachen und doppelten Molekeln bestehenden Zusammenhang in beiden Phasen ausdrücken — Aufmerksamkeit, so können wir aus der Theorie folgern, daß bei gewissen, im gegenwärtigen Falle mit den Versuchstatsachen im vollen Einklang stehenden, Bedingungen das erwähnte Verhältnis auch dann nahezu konstant sein kann, wenn die Ungleichheit

$$\gamma_1 \neq \gamma_2$$

besteht. Angenommen nämlich, daß die Dissoziationskonstante des Alkohols k_a im Wasser viel größer ist als die Dissoziationskonstante des Alkohols in einem der angewandten Lösungsmittel K_a (wie dies auch tatsächlich der Fall ist); weiters (was ebenfalls mit der Wirklichkeit im vollen Einklang steht), daß der Alkohol sich in Wasser besser löst als in den in Frage stehenden organischen Flüssigkeiten, so ist es — wenn wir bei möglichst niederen Konzentrationswerten bleiben — klar, daß der Alkohol in beiden Phasen in nahezu dissoziiertem Zustande existieren muß, folglich die zweite Potenz der Konzentration der doppelten Molekeln jedenfalls zu vernachlässigen ist, wenn dieselbe neben der ersten Potenz als Summandglied auftritt.

Infolgedessen gewinnen wir aus den Gleichungen:

$$k_a a_2 = (a - 2a_2)^2 \quad \text{und} \quad K_a A_2 = (A - 2A_2)^2$$

mit genügender Genauigkeit:

(1) $$a_2 = \frac{a^2}{k_a + 4a}$$

und

(2) $$A_2 = \frac{A^2}{K_a + 4A},$$

andererseits, wenn wir sowohl den sich auf das Verteilungsgleichgewicht beziehenden, wie den zwischen den einfachen, doppelten und sämtlichen Molekeln bestehenden einfachen linearen Zusammenhang in Betracht nehmen, können wir auch schreiben:

$$A = \gamma_1 (a - 2a_2) + 2\gamma_2 a_2,$$

$$a = \frac{1}{\gamma_1}(A - 2A_2) + 2\frac{1}{\gamma_2} A_2.$$

Wenn wir auf Grund der Gleichungen sub (1) und (2) in den letzten zwei Gleichungen den sich auf die doppelten Molekeln beziehenden Konzentrationswert eliminieren, erhalten wir folgende Gleichungen:

$$A = \gamma_1 a + \frac{2(\gamma_2 - \gamma_1)}{k_a + 4a} \cdot a^2,$$

$$a = \frac{1}{\gamma_1} \cdot A - \frac{2(\gamma_2 - \gamma_1)}{\gamma_1 \gamma_2 (K_a + 4A)} \cdot A^2,$$

oder diese in anderer Form geschrieben:

$$\frac{A}{a} = \gamma_1 + 2 \cdot \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{k_a + 4a} \cdot a,$$

$$\frac{a}{A} = \frac{1}{\gamma_1}\left[1 - \frac{2(\gamma_2 - \gamma_1)}{\gamma_1 \gamma_2 (K_a + 4a)} \cdot A\right],$$

aus welchen tatsächlich folgt, daß, abgesehen von geringen Korrektionsgliedern, bei den oben umschriebenen Bedingungen, die Konzentration des gesamten Alkohols in den zwei Phasen zur Zeit des Gleichgewichts gegenseitig in konstantem Verhältnis sein muß.

Auf Grund des Erklärten können wir, mit geringem Fehler, den sich auf die Gesamtmenge des Alkohols beziehenden Verteilungskoeffizienten, dem sich auf die einfachen Molekeln beziehenden Verteilungskoeffizienten gleich setzen und können also (mit unbeträchtlichem Fehler) schreiben:

$$\frac{A}{a} = \gamma_1 .$$

Den sich auf die doppelten Molekeln beziehenden Wert des Verteilungskoeffizienten können wir aus den erhaltenen Daten nicht berechnen, weil der Wert des Verteilungskoeffizienten des Alkohols — wie aus der letzten Säule der Tabelle XLII ersichtlich — eine so geringe Schwankung aufweist, daß man die Berechnung des Wertes γ_2 nicht mit Sicherheit auf denselben gründen kann. Besonders erhellt dies, wenn wir bedenken, daß ja ein Teil der Schwankungen den unvermeidlichen Versuchsfehlern anzurechnen ist. Doch ist durch die Benützung eines zuerst von VAN'T HOFF bewiesenen Satzes* zwar nicht der absolute Zahlenwert des Verteilungskoeffizienten der doppelten Molekeln, wohl aber ein von diesem Koeffizienten — in den verschiedensten Reaktionsmedien — nur durch ein und denselben Proportionalitätsfaktor sich unterscheidender Wert zu berechnen. Dieser Satz gelangt in der folgenden Gleichung zum Ausdruck:

$$\gamma_2 = \frac{k_a}{K_a} \gamma_1^2$$

und ist aus den Gleichungen

$$A_1 = \gamma_1 a_1 , \qquad A_2 = \gamma_2 a_2 ,$$
$$k_a a_1 = a_1^2, \qquad K_a A_2 = A_1^2$$

sehr leicht abzuleiten.

Den Verteilungskoeffizienten des Brom zwischen Wasser und Schwefelkohlenstoff, weiters zwischen Wasser und Kohlentetra-

* Vorlesungen über allgemeine und physikalische Chemie Heft 1, 218—219.

chlorid kennen wir seit JAKOWKINS genauen Messungen.* Der sich, wie es in diesem Falle notwendig, auf eine starke Verdünnung beziehende Wert des ersteren ist: 79,6, des letzteren 27,0. Über den Verteilungskoeffizienten des Brom zwischen Wasser und Monobrombenzol fand ich in der Literatur keine Angaben, deshalb bestimmte ich denselben selbst. Ich nahm zu meinen Messungen das Brom (in Verteilungsgleichgewicht mit der wässerigen Phase) im Brombenzol mit den folgenden Werten: 0,1, 0,05 und 0,025 normal, und fand für den Verteilungskoeffizienten die respektiven Werte 78,8, 75,0 und 74,4. Von diesen Angaben ist hier die letzte in Betracht zu nehmen, da sie sich auf die stärkste Verdünnung bezieht (nämlich auf eine Verdünnung, in welcher beiläufig das Brom im Monobrombenzol auf den Alkohol gewirkt hat).

Um den Zusammenhang der Aufeinanderwirkung des Broms und Äthylalkohols in verschiedenen Medien, mit Hilfe der gewöhnlichen durch (Volum-)Konzentration definierten und der durch Benützung der Gleichgewichtskonzentration ausgedrückten Reaktionsgeschwindigkeit ableiten zu können, bezeichnen wir mit dx die Zahl der in dem Zeitelemente dt umgewandelten Brommolen, weiters bedeute A_2 und a_2 — wie bisher — die (Volum-)Konzentration der doppelten Molekeln in den betreffenden organischen Flüssigkeiten bzw. im Wasser, B und b die Konzentration des Broms. Außerdem soll γ_2 den Verteilungskoeffizienten der doppelten Alkohol-, γ_B den der Brommolekeln zwischen Wasser und dem anderen Reaktionsmedium bedeuten, so daß

$$\frac{A_2}{a_2} = \gamma_2, \quad \frac{B}{b} = \gamma_B.$$

In dem betreffenden Lösungsmittel wird der Wert der Geschwindigkeitskonstante (k_2) nach der gewöhnlichen Definition die Gleichung:

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx}{dt} = k_2 A_2 B$$

befriedigen. Schreiben wir in diese Gleichung an die Stelle von A_2 und B diejenigen Konzentrationswerte a_2 und b, welche in der

* Zeitschrift für physikalische Chemie 18, 758 und 759.

wässerigen Phase mit dem vorher genannten im Verteilungsgleichgewicht sind, so erhalten wir den mit Hilfe der Gleichgewichtskonzentration ausgedrückten Wert der Reaktionsgeschwindigkeit (χ_2) aus der Gleichung:

$$\frac{dx}{dt} = \chi_2 \cdot a_2 \cdot b\,,$$

oder — da der Wert der Verteilungskoeffizienten γ_2 und γ_B bekannt —,

$$\text{(II)} \qquad \frac{dx}{dt} = \chi_2 \cdot \frac{A_2}{\gamma_2} \cdot \frac{B}{\gamma_B}\,.$$

Aus der Kombination der Gleichungen sub (I) und (II) folgt, daß

$$\text{(III)} \qquad \chi_2 = k_2 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_B\,,$$

also, daß um die durch die gewöhnliche Volumkonzentration ausgedrückten Geschwindigkeitskonstanzwerte in Gleichgewichtskonzentration auszudrücken, wir dieselben einfach mit dem zwischen dem Wasser und dem betreffenden anderen Medium gültigen Werte von den Verteilungskoeffizienten des Brom bzw. der Alkoholmolekeln zu multiplizieren haben. Aus den Gleichungen:

$$\frac{A_2}{\gamma_2} = a_2 \quad \text{und} \quad \frac{B}{\gamma_B} = b$$

folgt, daß wenn

$$A_2 = \gamma_2 \quad \text{und} \quad B = \gamma_B\,,$$

so ist

$$a_2 = 1 \quad \text{und} \quad b = 1\,,$$

d. h. der Alkohol resp. das Brom ist (in diesen Einheiten ausgedrückt) in verschiedenen organischen Lösungsmitteln, dann mit dem Konzentrationswerte Eins vorhanden, wenn diese Lösungen mit der den Alkohol und das Brom gerade in der Volumkonzentration vom Werte Eins enthaltenden wässerigen Lösung im Verteilungsgleichgewicht stehen; zugleich ist selbstverständlich, daß, wenn das Reaktionsmedium das Wasser ist, so ist einfach:

$$\chi_2 = k_1\,.$$

Wenn wir weiter in die obige Gleichung sub (III) den zwischen den Verteilungskoeffizienten der doppelten und einfachen Molekeln gefundenen Zusammenhang:

$$\gamma_2 = \frac{k_a}{K_a} \cdot \gamma_1^2\,,$$

einsetzen, so erhalten wir

$$\chi_2 = k_2 \cdot \frac{k_a}{K_a} \cdot \gamma_1^2 \gamma_B \cdot$$

In der folgenden Tabelle sind alle zu dieser Rechnung nötigen Daten in übersichtlicher Zusammenstellung zu finden, einzig die auf Wasser bezügliche Dissoziationskonstante des Alkohol ausgenommen. Infolge des letzten Umstandes können wir zwar den Wert des χ_2 nicht berechnen, aber kommen betreffs der drei Reaktionsmedien zu solchen Werten, welche sich vom χ_2 bloß durch ein und denselben Proportionalitätsfaktor unterscheiden und so untereinander unmittelbar zu vergleichen sind.

Tabelle XLIII.

Chemisches Zeichen des Reaktionsmediums	Wert der Geschwindigkeitskonstante ausgedrückt in Volumkonzentration k_2	Dissoziationskonstante des Alkohol K_a	Der Verteilungskoeffizient des Alkohol γ_1	Der Verteilungskoeffizient des Brom γ_B	Wert der Geschwindigkeitskonstante ausgedrückt in Gleichgewichtskonzentration $\frac{1}{k_a} \cdot \chi_2$
CCl_4	0,00420	0,521	0,0244	27,0	0,000128
CS_2	0,0020	1,225	0,0143	79,6	0,000122
C_6H_5Br	0,0300	2,49	0,0385	74,4	0,00133

Aus der letzten Säule dieser Tabelle ist vor allem ersichtlich, daß die durch Gleichgewichtskonzentration ausgedrückte Reaktionsgeschwindigkeit im Schwefelkohlenstoff und Kohlentetrachlorid einander gleich ist, weil die Differenz zwischen diesen zwei Werten nicht größer ist, als welche von unvermeidlichen Versuchsfehlern herrühren kann. Die Reaktionsgeschwindigkeit der Aufeinanderwirkung von Brom und Äthylalkohol ist also gleich in solchen Lösungen des Schwefelkohlenstoffes und Kohlenstofftetrachlorids, welche sich mit ein und derselben wässerigen Phase im (Verteilungs-)Gleichgewicht befinden.

Erwiese sich diese Regel als allgemein gültig, so möchte dies die Grundlage zu einer solchen allgemein anwendbaren Untersuchungsmethode bilden, die uns zur Zeit noch gänzlich fehlt. Diese würde die Entscheidung der hochwichtigen Frage möglich machen, ob infolge der gegenseitigen Wirkung der Molekeln des Lösungsmittels und der gelösten Molekeln, in der Lösung ein kleinerer oder größerer Bruchteil der gelösten Molekeln in Form von, durch die Verbindung der letzteren und des Lösungsmittels entstehenden, komplexen (in wässeriger Lösung s. g. hydratisierten) Molekeln besteht, und wenn ja, wie groß dieser Bruchteil ist, wie weit derselbe von den chemischen und physikalischen Eigenschaften des Lösungsmittels und des gelösten Stoffes abhängt.

Der Umstand, daß der beim Monobrombenzol gefundene, in rationellen Einheiten ausgedrückte Wert der Geschwindigkeitskonstanten, im Vergleich zu den in den oben erwähnten Reaktionsmedien gefundenen, um vieles größer ist, spricht scheinbar gegen die Annahme, daß wir es hier mit einer allgemein gültigen Regel zu tun haben.

Meiner Ansicht nach schließt die genannte Tatsache nicht aus, daß die an zwei Reaktionsmedien, in Schwefelkohlenstoff und Kohlenstofftetrachlorid gefundene Übereinstimmung der Reaktionsgeschwindigkeit, sich in all den Fällen als gültig erweist, in denen sich die Molekeln des Lösungsmittels an der Reaktion tatsächlich nicht beteiligen. Beim Monobrombenzol ist der letzte Umstand gerade nicht wahrscheinlich, im Gegenteil, wir müssen annehmen, daß das Monobrombenzol sich in dem Mechanismus der Reaktion zwischen Brom- und Alkoholmolekeln auch selbst beteiligt. Darauf weist z. B. auch der Umstand hin, daß die unter Berücksichtigung des Molekularzustandes des Alkohol berechnete Geschwindigkeitskonstante keine solche Konstanz aufweist, als wie dies sich das, bezüglich des Schwefelkohlenstoffes und Kohlentetrachlorid erhaltenen Geschwindigkeitskonstante erwiesen hat, sondern im Gegenteil, es ergab sich, daß die Schwankungen im Werte derselben (siehe Tabelle XXIX) die Versuchsfehler bei weitem übertreffen. Doch erhielt ich auch auf analytischem Wege solche Belege, welche die Anteilnahme des Monobrombenzol an der Reaktion wahrscheinlich machen. Es entstand nämlich Bromwasserstoff nicht in einer mit dem umgewandelten Brom äquivalenten Menge, wie ich dies beim Kohlenstofftetrachlorid und Schwefelkohlenstoff erfuhr, sondern entschieden in geringerer Menge. So z. B. als das Brom bei 2 Volum % Alkoholgehalt wirkte und die umgewandelte Menge desselben sich als gleich 0,00242 Äquivalenten erwies, fand ich, daß die Menge des entstandenen Bromwasserstoff

0,00190 betrug; später entsprach der Menge von 0,00797 n. Brom 0,00740 n. Bromwasserstoff. Diese Versuchsergebnisse weisen zweifelsohne darauf hin, daß zwar weder das Brom auf das Monobrombenzol, noch letzteres auf das Alkohol einwirkt, dennoch die drei Stoffe zusammen eine solche Reihe von chemischen Umwandlungen veranlassen, während deren Verlauf sich auch Bromsubstitutionsprodukte bilden. Auf diese Weise verlaufen, wenn Alkohol und Brom in Monobrombenzol aufeinander wirken, nebenbei gleichzeitig auch andere, das Brom in Anspruch nehmende chemische Reaktionen, und dies erklärt, daß die bei diesem Reaktionsmedium gefundene Reaktionsgeschwindigkeit größer ist als die in zwei anderen Reaktionsmedien gefundene, bloß auf die gegenseitige Einwirkung des Brom und der doppelten Äthylalkoholmolekeln bezügliche Reaktionsgeschwindigkeit.

3.

BEMERKUNG ZU DER ALTTERTIÄREN FORAMINIFERENFAUNA UNGARNS.

(Mit Tafel I.)

Von korresp. Mitglied I. LŐRENTHEY.

Das Anpassungsvermögen der Foraminiferen an veränderte Lebensbedingungen geht auf Kosten ihres stratigraphischen Wertes und trotzdem ist es dem scharfen Auge M. v. HANTKENS gelungen die unteroligozänen Tone von dem äußerlich ähnlichen, mitteleozänen Operculinentegel und dem jüngeren Cyrenentegel gerade auf Grund der Foraminiferen zu trennen. Er nannte diesen unteroligozänen Ton „Kisceller Tegel" und faßte ihn mit dem liegenden Budaer Mergel als *„Clavulina-Szabói-Schichten"* zusammen.

Die Richtigkeit dieser Horizontierung wurde später auch durch die höheren Organismen bestätigt.

v. HANTKEN besagt in seiner Arbeit über die „Foraminiferen des Kisceller Tegels"* folgendes: „Zur sicheren Bestimmung des Kisceller Tegels ist die Kenntnis von nur sehr wenigen Foraminiferen nötig. *Wenn sich in einem Tegel eine derselben findet, kann mit Bestimmtheit angenommen werden, daß dies Kisceller Tegel ist.* Diese Foraminiferen sind die folgenden: *Haplophragmium acutidorsatum* HTK., *Gaudryina Reussi* HTK., *Gaudryina syphonella* RSS., *Gaudryina rugosa* RSS., *Clavulina Szabói* HTK., *Dentalina Hörnesi* HTK., *Dentalina contorta* HTK., *Rhabdogonium Szabói* HTK., *Cristellaria Behmi* RSS., *Cristellaria gladius* PHIL., *Cristellaria arcuata* PHIL., *Cristellaria arguta* RSS., und *Cristellaria Kubinyii* HTK." Später reduziert v. HANTKEN die Zahl dieser Arten selbst auf 12, indem er *Rhabdogonium Szabói* mit *Clavulina Szabói* zusammenzog.

---

* Arbeiten der Ungar. Geologischen Gesellschaft Bd. IV. S. 81. 1868 (ungar.).

Spätere Untersuchungen haben von den meisten dieser Arten nachgewiesen, daß sie viel langlebiger sind, als v. HANTKEN annahm. BRADY hat in seinem die wissenschaftlichen Ergebnisse der Challenger-Expedition* besprechenden Werk gezeigt, daß mehrere dieser Arten auch noch heute leben. Später haben RZEHAK** und FRANZENAU*** die Bestimmungen einiger Arten richtiggestellt und unsere Kenntnisse über die vertikale Verbreitung derselben teilweise modifiziert. So ist *Gaudryina siphonella* RSS. aus den Septarientonen Norddeutschlands bekannt, kommt jedoch wahrscheinlich auch im unteren Mediterran von Hidalmás vor. Im N- und S-lichen Teile des Atlantischen sowie auch des Stillen Ozeans lebt sie in einer Tiefe von 1828 bis 7223 m auch heute noch. *Gaudryina rugosa* d'ORB. kommt bereits in der französischen, deutschen, böhmischen und irischen Kreide, dann im deutschen Septarientone vor, und lebt auch heute noch. *Marginulina Behmi* HTK. sp. (= *Cristellaria Behmi* HTK.) ist sowohl in den unteren, als auch in den oberen Schichten von Hidalmás (Burdigalien) verbreitet.

Cristellaria arcuata PHIL. ist nach den Untersuchungen BRADYS mit *Cristellaria Wetherelli* JONES sp. identisch, welche Form aus dem London Clay, den Nummulitenkalken der bayerischen Alpen bekannt ist, und auch heute noch lebt.

Robulina Kubinyii HTK., sp. (= *Cristellaria Kubinyii* HTK.) lebte auch in den Schichten von Hidalmás, also noch während der Zeit des siebenbürgischen Untermediterrans.

Von *Cristellaria arguta* RSS. hat BRADY nachgewiesen, daß selbe mit *Cristellaria compressa* d'ORB. identisch ist; diese Art ist aus verschiedenen tertiären Bildungen Deutschlands, Österreichs und Ungarns bekannt und lebt im nördlichen Atlantischen Ozean (548—1828 m) auch heute noch.

Von *Haplophragmium acutidorsatum* HTK. haben die späteren

---

* Report of the Foraminifera collected by H. M. S. Challenger during the years 1873—76.

** Bemerkungen über einige Foraminiferen der Oligozänformation. Verh. d. naturforsch. Ver. in Brünn Bd. XXIII, 1886.

*** Über die Foraminiferenfauna des an der Budaeörser Straße aufgeschlossenen Mergels. Math. Naturw. Ber. a. Ung., Bd. VII.

Untersuchungen Rzehaks* gezeigt, daß diese Art mit *Nonionina placenta* Rss. identisch, jedoch kein Haplophragmium sondern eine *Cyclammina* ist, und demnach *Cyclammina placenta* Rss. sp. genannt werden muß. Ferner ist *Haplophragmium rotundidorsatum* Htk. mit *Cyclammina latidorsata* Born sp. identisch. Schon längst ist mir die große Ähnlichkeit zwischen der fossilen *Cyclammina placenta* Rss. sp. und der rezenten *Cyclammina cancellata* Brady aufgefallen, und beschloß ich deshalb die *Cyclammina placenta*-Exemplare und -Schliffe der v. Hantkenschen Sammlung eingehender zu untersuchen.

v. Hantken hebt in seiner Arbeit über die Foraminiferen der Clavulina Szabói-Schichten hervor, daß das Gehäuse dieser Art sehr zusammengedrückt, flach, der Dorsalrand gekielt ist, die letzte Windung die übrigen gänzlich bedeckt, aus 8—10 Kammern besteht, die Suturen zuweilen wellenförmg gebogen erscheinen.

Die Exemplare aus dem „Kisceller Tegel“ von Parád haben mich davon überzeugt, daß der Grad der Zusammengedrücktheit individuell sehr schwankend ist. Es gibt Exemplare, welche noch einmal so breit sind als das von Hantken auf Taf. I, Fig. 1 abgebildete Exemplar. Natürlich schwächte sich im selben Maße wie die Form bauchiger, breiter wird auch die Dorsalkante ab, und wird viel rundlicher. Auch die Anzahl der Kammern schwankt in größerem Maße als zwischen 8—10, indem z. B. das von Hantken abgebildete 11 Kammern aufweist, und jenes Exemplar von Parád, welches ich in Fig. 4 abbilden ließ, 13 Kammern besitzt.

Alle diese Abweichungen nähern *Cyclammina placenta* der rezenten *Cyctammina cancellata,* bei welcher die Zahl der Kammern auch nach Bradys Abbildungen geurteilt zwischen 11—16 schwankt; Fig. 10 auf Taf. XXXVII stellt nämlich ein Exemplar mit 11 Kammern, Fig. 9 hingegen ein solches mit 16 Kammern dar. Bei so beträchtlichen Schwankungen kann die Anzahl der Kammern überhaupt nicht berücksichtigt werden, da dieselbe mit dem Alter zunimmt, und demnach nicht als Artcharakter gelten kann, sondern nur Altersunterschiede angibt. Bezüglich der mehr rundlichen Dorsalkante stimmen die mehr gedrungenen Exemplare

* Bemerkungen über einige Foraminiferen d. Oligozänformation l. c. S. 128.

aus dem Kisceller Tegel von Parád vollständig mit den BRADYschen Abbildungen, besonders Fig. 9 überein. Der von HANTKEN betonte, wellenförmige Verlauf der Nähte ist auch in Fig. 8 und 9 bei BRADY deutlich wahrzunehmen. Mein in Fig. 4 abgebildeter Schliff aber stimmt auch betreff der Kammeranzahl mit BRADYS Fig. 12 überein. Es gibt unter meinen fossilen Exemplaren auch solche, deren Mündungsplatte seitwärts geschoben erscheint, die also gerade so unsymmetrisch sind, wie die von BRADY in Fig. 8b und 11 abgebildeten Exemplare. Daß *Cycl. placenta* nur 2·5 mm Größe erreicht, während *Cycl. cancellata* bis 6 mm groß wird, ist — da keine sonstigen Abweichungen wahrzunehmen sind — bloß auf verschiedene Lebensbedingungen zurückzuführen.

Das gesagte, sowie ein Vergleich meiner Fig. 4 mit der Fig. 12 und 14 BRADYS läßt es unzweifelhaft erscheinen, daß BRADYS Art mit unserer unteroligozänen *Cycl. placenta* identisch ist; da REUSS diese Art unter dem Namen *Nonionina placenta* aus dem deutschen Septarientone bereits 1851 beschrieben hat*, v. HANTKEN aber sein *Haplophragmium acutidorsatum* aus dem Kisceller Tegel erst 1868, und BRADY *Cyclamina cancellata* erst 1876**, so gebührt dem REUSSschen Artnamen die Priorität.

A. KOCH erwähnt „*Haplophragmium acutidorsatum* HTK.“ nach der Bestimmung J. STÜRZENBAUMS aus der unteren und oberen Partie der s. g. „Schichten von Hidalmás“ von Kettösmezö und anderweitigen Fundorten als sehr häufig, außerdem aus den oberen Partien auch *Hapl.* cfr. *acutidorsatum* HTK.***

Schon RZEHAK macht auf diese Ähnlichkeit aufmerksam (Bemerk. üb. einige Foraminif. d. Oligozänformation), indem er besagt: „Merkwürdig ist auch der Umstand, daß sich *Cyclammina placenta* RSS., *C. acutidorsata* HTK. und die rezente *C. cancellata* BRADY spezifisch kaum unterscheiden lassen.“

Cyclammina placenta lebt nach den Beobachtungen der Challenger-Expedition in der bathymetrical range zwischen 137 bis

* Über die fossilen Foraminiferen und Entomostraceen der Septarientone d. Umgeb. v. Berlin. Zeitschr. d. d. geol. Ges. Bd. III, S. 72, Taf. V, Fig. 33). ** Proc. Roy. Soc. Vol. XXV. S. 214. 1876.

*** Die Tertiärbildungen des siebenbürgischen Beckens. II. Neogene Abteilung. S. 48. Budapest 1900.

5303 m, ist jedoch zwischen 456—1828 m am häufigsten. Sie ist im nördlichen Atlantischen Ozean zwischen 137—4891 m, im Mittelländischen Meer bei 2193 m, im südlichen Atlantischen Ozean zwischen 182—2636 m, im südlichen Stillen Ozean zwischen 267 bis 2011 m, im südlichen Stillen Ozean um Japan herum bei etwa 5303 m verbreitet. Sie kann also nicht eine der charakteristischesten Formen der *Clavulina Szabói*-Schichten sein.

Wie aus der Benennung „*Clavulina Szabói*-Schichten“ zu sehen ist, wurde von Hantken die auffallend große und also leicht kenntliche *Clavulina Szabói* Htk. als am meisen bezeichnende Foraminifere dieser Schichtengruppe betrachtet. Nach unseren Kenntnissen ist diese Form für das ungarische Unteroligozän*, für jenes der Euganäen** und der Umgebung von Vizensa ferner das Südtiroler, das mährische*** und galizische Unteroligozän bezeichnend.

Indem er die Rolle dieser Art in Ungarn bespricht, besagt Schubert folgendes†: „Hantken hatte Recht, wenn er diese Clavulina als Leitfossil für dies Gebiet betrachtete. Zweifelhaft wird jedoch der stratigraphische Wert dieser Form, sobald wir außerungarische Verhältnisse ins Auge fassen . . . konnte ich 1902 feststellen, daß diese im soeben erwähnten Bereich anscheinend geologisch beschränkte und als Leitfossil brauchbare Foraminifere in Dalmatien in zweifellosem Mitteleozän vorkommt, und seither deren allgemeine Verbreitung im dalmatischen Mitteleozän nachweisen.“

Auf diese Mittelung Schuberts kann bemerkt werden, daß M. E. Vadász *Clavulina Szabói*, gerade in der Gegend, für deren Unteroligozän sie charaktistisch sein soll, d. i. im Bakony vor einigen

* Hantken: Die Fauna der Clavulina Szabói-Schichten. 1875.

** Hantken: Clavulina Szabói-Schichten im Gebiete der Euganeen usw. (Math. Naturw. Ber. a. Ungarn S. 167).

*** Die „Niemtschitzer Schichten“. Ein Beitrag z. Kennt. d. Karpath. Sandsteinzone Mährens; Verh. d. naturf. Ver. in Brünn. Bd. XXXIV. 1896.

K. Wójzik: Die unteroligozäne Fauna von Kruhel Maly bei Przemysl, die Clavulina Szabói-Schichten. I. Teil. Die Foraminiferen und Mollusken; Bull. de l'acad. de sc. de Cracovie 1903, S. 798).

† Schubert: Beiträge zu einer natürlichen Systematik der Foraminiferen; Neues Jahrb. f. Min usw. Beil. Bd. XXV, S. 233, 1908.

Jahren auch wahrscheinlich im Mitteleozän angetroffen hat und zwar in den *Nummulites (Gümbelia) spissa* Defr. (= *Numm. perforata*) führenden Schichten von Csernye. Hier kommt diese Form also in einer Bildung vor, welche nahezu gleich alt mit der dalmatischen von SCHUBERT ist, u. z. in großer Menge. Die Publizierung dieser interessanten Tatsache ist noch immer nicht erfolgt, obzwar ich längst auf die Wichtigkeit derselben aufmerksam machte.

Das Vorkommen von *Clavulina Szabói* bei Csernye deutet jedenfalls darauf hin, daß diese Art in Ungarn nicht mehr jene stratigraphische Wichtigkeit besitzt, welche ihr von HANTKEN beigemessen wurde, und welche ihr auf Grund unserer bisherigen Kenntnisse auch von SCHUBERT zugesprochen wird.

A. SILVESTRI* führt aus den wahrscheinlich aquitanischen Lepidocyclinenkalken von Castel-Madama (Rom) *Clavulina triquetra* Rss. an, welche er — wenn auch mit Vorbehalt — mit der rezenten *Clavulina angularis* d'ORB identifiziert (was übrigens BRADY bereits 1887 getan hat**, SILVESTRI geht jedoch noch weiter und erklärt, daß er auch die Abtrennung der *Clav. Szabói* von letztereer Art als unbegründet betrachtet. Demnach würde also diese für charakteristisch gehaltene Form vom Mitteleozän bis auf den heutigen Tag leben.

REUSS gibt in seiner Arbeit über „Oberoligozäne Korallen aus Ungarn"*** ebenfalls der Meinung Ausdruck, daß sich *Clavulina Szabói* nicht von seiner *Clav. triquetra* unterscheiden läßt. HANTKEN hebt dem gegenüber die Unterschiede hervor, auf Grund deren seine Art nach ihm aufrecht zu erhalten ist.† Demnach beträgt die größte Länge bei *Clav. triquetra* Rss. $1^1/_2$ mm, während *Clav. Szabói* bis 1—7 mm groß wird; die Mündung von *Clav. tri-*

* Notizie sommarie supre faumule del Lazio (Riv. Ital. di Pal., Bd. 11, S. 143, 1905).

** Rep. of the Foraminifera collected by H. M. S. Challenger during the years 1873—76. S. 396.

*** Sitzber. d. k. Akad. d. Wiss. Wien, Bd. 69.

† Die Fauna der an der Albrechtsstraße in Buda aufgeschlossenen Mergelschichten (Földt. Közl. Bd. I, S. 63. 1871; ungar.). Fauna d. *Clav. Szabói*-Schichten 1875.

quetra ist halbkreisförmig, während jene von *Clav. Szabói* rund ist; außerdem ist auch die Gestalt der Schale sowie die Anzahl der Kammern — soweit er dies nach den Abbildungen Reuss' beurteilen kann — bei den beiden Arten verschieden.

Wie aus den Abbildungen v. Hantkens ersichtlich, gibt es Exemplare von *Clav. Szabói* bei denen auf den unteren, triserialen Teil bloß eine einzige Kammer folgt (jugendliche Exemplare), bei mehr ausgewachsenen hingegen 6—8; die Kammeranzahl sowie die Größe wechselt also nach dem Alter, und den äußeren Verhältnissen, unter denen das Individuum lebt.

Abweichungen in der Kammerzahl, sowie Größenunterschiede können also nicht besonders in Betracht kommen, da diese — wie dies schon Schubert hervorgehoben hat — mit verschiedenen Lebensbedingungen erklärt werden können, deren natürliche Folge sie sind. Daß die Größenunterschiede nicht maßgebend sind, darauf weist schon der Umstand hin, daß das Material aus dem Szépvölgy der v. Hantkenschen Sammlung Exemplare bis höchstens 2 mm Größe enthält, während bei den Exemplaren von dem nahen Svábhegy (Balassascher Weingarten) eine Größe von 3—6 mm vorherrscht. Auch der geringe Unterschied in der Mündungsgestalt scheint mir nicht wesentlich zu sein, da solche Abweichungen bereits bei mehreren Arten bekannt sind, so bei *Bigenerina capreolus* d'Orb. sp., *Gaudryina pupoides* d'Orb. usw. Ja sogar selbst bei *Clavulina Szabói* wechselt nicht nur die Gestalt, sondern selbst auch die ganze Ausbildung der Mündung dermaßen, daß z. B. bei *Clavulina Szabói* Hantk. var. *Kruhelensis* Wójcik eine Mündungsröhre wie bei *Clav. Philippinica* Korr. gänzlich fehlt und innen von einer Siphonalröhre vertreten wird.

Auf Grund dessen ist Schubert geneigt, *Clavulina Szabói* als Varietät von *Clav. angularis (= triquetra)* zu betrachten, jedoch die eo-oligozäne *Clavulina Szabói* wegen der Reduktion des „Tritaxis"-artigen Teiles gegenüber dem einzeilig gekammerten Teile von der schlanken, oligozän-quartären *Clav. angularis* getrennt zu halten. Demnach wäre unsere eo-oligozäne Form als *Clavulina angularis* d'Orb. var. *Szabói* Htk. zu betrachten.

Es muß hier bemerkt werden, daß obzwar *Clavulina Szabói* im allgemeinen als kalkschalig betrachtet wird, die Hantkensche

Sammlung Exemplare von Parád enthält, an deren Dünnschliff in der Schale deutlich agglutinierte Quarzkörnchen vor Augen treten.

Auch betreff des Budaer Mergels hat sich der stratigraphische Wert der Foraminiferen nach den neueren Untersuchungen wesentlich geändert. HANTKEN behauptet nämlich in seiner Arbeit über die „Fauna der *Clavulina Szabói* Schichten", daß er *Clavulina cylindrica* in der oberen Sektion dieser Schichtengruppe, dem Kisceller Tegel nicht gefunden hat, so daß dies *die am meisten charakteristische Form der unteren Sektion der Clavulina Szabói Schichten ist.* HANTKEN erwähnt diese Form auch von Priabona, wo sie in den s. g. Bryzoenmergeln vorkommt. Nach P. S. PAVLOVIĆ kommt sie auch in Serbien im oberen Mediterran der Umgebung von Višnjica und Vilin Potok vor.* BRADY fand *Clavulina cylindrica* auch lebend, u. z. im nördlichen Teil des Atlantischen Ozeans nächst den Kanarischen Inseln bei 1133 m, bei den Bermuda-Inseln bei 795 m und nächst den Azoren bei 822 m; im südlichen Atlantischen Ozean (nächst Buenos Ayres bei 3475 m); dann im südlichen Teil des Stillen Ozeans (um Neu-Seeland herum bei 500 m, nächst den Fidschi-Inseln bei 383 m und in der Torres-Enge bei 282 m). So erscheint es also erwiesen, daß diese Art vom Unteroligozän bis heute lebt, und da sie auch im Budaer Mergel nicht in großer Menge auftritt, kann sie nicht einmal auf Grund ihres massenhaften Auftretens als charakteristisch bezeichnet werden.

*

M. v. HANTKEN stellt die am Svábhegy und überhaupt in der Umgebung von Budapest vorkommenden Num. (Brugueria) intermedia, Lithothamnien und Orthophragmina Pratti führenden Kalksteine, den Budaer Mergel und den Kisceller Tegel ins untere Oligozän.**

In einer späteren Arbeit*** schreibt er folgendes: „Die in den Kalken vorkommenden Foraminiferen stimmen ihrer Art nach

---

* Beitrag z. Kenntnis d. Foraminiferen aus den II. Mediterranschichten in Serbien (Ann. géol. de la peninsule Balkanique. Bd. VI, Heft 2, 1908).

** HÉBERTS und Munier-Chalmas Mitteilungen über die ungarischen, alttertiären Bildungen. *** Földt. Közl. Bd. X, S. 82.

mit denen des Ofener Mergels vollkommen überein, namentlich von den verhältnismäßig größeren Formen konnten in dem Orbitoiden- und Nummulitenkalken die folgenden Arten als sicher bestimmt werden: *Clavulina Szabói* HANTK., *Dentalina Verneuilli* d'ORB., *Robulina cultrata* d'ORB., *Schizophora haeringensis* GÜMB., *Rhynchospira irregularis* HANTK., *Truncatulina grosserugosa.* Unter den winzigen Foraminiferen sind die Globigerinen hervorzuheben, von denen zwei Arten sicher erkannt werden konnten: *Globigerina bulloides* d'ORB., *Glob. triloba* REUSS. Diese treten bereits in den Orbitoiden- und Nummulitenkalken auf, kommen aber im Ofener (Budaer) Mergel in größter Menge vor."

Später, in seiner Arbeit über die Fauna der *Clavulina Szabói*-Schichten* rechnet er nur noch den Budaer Mergel als untere und den Kisceller Tegel als obere Schicht hierher, während er vom Orbitoidenkalke nur als Liegendschicht spricht, welche allmählich in den die untere Sektion der *Clavulina Szabói*-Schichten darstellenden Budaer Mergel übergeht.

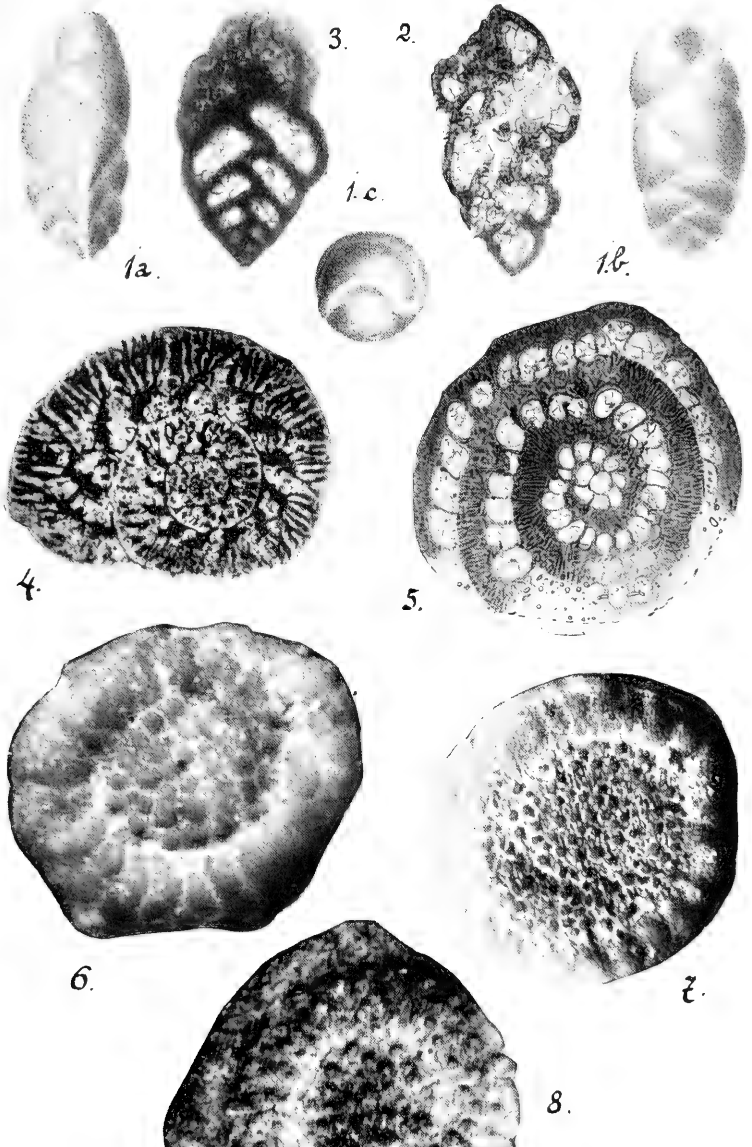
Daß v. HANTKEN die *Nummulites (Brugueria) intermedia* d'ARCH., *Orthophragmina Pratti* MICH. sp. (= Orbitoides papyracea) und Lithothamnien führenden Kalksteine der Umgebung von Budapest später von den *Clavulina-Szabói*-Schichten abtrennte, das dürfte seinen Grund darin finden, daß er — wie ich durch mündliche Mitteilungen v. HANTKENS erfuhr — in Schlämmungsrückständen einer in den Orbitoidenkalkstein eingelagerten Mergellinse reichliche Reste einer Foraminifere sammelte, welche sich als eine Gaudryina erwies, und auf welche v. HANTKEN jetzt auch jene Querschnitte im Kalksteine zurückführte, welche er früher als *Clavulina Szabói* deutete. So wie uns jetzt die vertikale Verbreitung dieser letzteren Foraminifere bekannt ist, dürften diese Querschnitte auch dann von *Clavulina Szabói* herrühren, wenn wir den Kalkstein als Eozän betrachten wollen.

Diese Gaudryinenart wurde auf Ansuchen v. HANTKENS von Dr. A. FRANZENAU gezeichnet und will ich seine Zeichnungen mit seiner freundlichen Erlaubnis hier publizieren (Taf. I, Fig. 1a—c).

Die Beschreibung dieser neuen Art gebe ich im folgenden:

---

* Mitteil. a. d. Jahrb. d. Kgl. ungar. Geol. Reichsanst., Bd. II.


1a.
3.
2.
1.c.
1.b.
4.
5.
6.
7.
8.

Gaudryina Hantkeni nov. sp.

(Taf. I, Fig. 1—3)

Das Gehäuse ist schlank zylindrisch, jugendlichere Exemplare (Fig. 3) sind gedrängt dreiseitig pyramidenförmig. Die im unteren Teile des Gehäuses dreizeilig angeordneten Kammern sind schneckenförmig gewunden, im oberen Teil sind die großen Kammern abwechselnd in zwei Reihen angeordnet. Die flachwandigen Kammern im unteren Teil des Gehäuses bilden drei scharfe Kanten, u. z. auf solche Weise, daß sie sich mit ihren den Kanten entsprechenden Partien abwärts meist mittels stachelförmigen Fortsätzen umfassen, wodurch die Kanten noch an Stärke gewinnen; die Seiten der so entstehenden dreiseitigen Pyramide sind flach oder ein wenig konkav. Der obere, zylindrische Teil besteht je nach dem Grade der Entwicklung aus 2—3 bis 4 abwechselnd geordneten großen, hohen Kammern mit gewölbten Wänden und schief verlaufender Naht. Ein oder zwei an den unteren Teil angrenzende Kammern dieses oberen Teils sind unten, nächst der Naht in eine kleine, nach unten gerichtete Stachel ausgezogen, und tragen so zur Stärkung der Kanten des unteren Teiles bei. Die letzte Kammer ist nach oben zu zugespitzt an der Innenseite in der Mitte eingesunken, in dieser Einsenkung befand sich wahrscheinlich die halbkreisförmige Mündung.

Maße	Höhe:	32 μ	39 μ	40 μ	48 μ	52 μ
	Breite:	23 μ	28 μ	22 μ	25 μ	23 μ.

Der obere Teil der meisten Exemplare ist zusammengedrückt, am unteren Teil aber sind die Nähte so verschwommen, daß die Kammern zumeist kaum oder gar nicht wahrzunehmen sind. Ich versuchte die Verfertigung von Dünnschliffen, doch gelang es infolge der Zerbrechlichkeit der Schale nicht. Soviel konnte immerhin festgestellt werden, daß der Höhendurchmesser der Mündung groß ist, woraus mit Recht geschlossen werden kann, daß die Mündung kreis-, d. i. halbkreisförmig war.

Diese Form stimmt mit keiner der mir bekannten Arten überein. Nächst verwandt ist ihr vielleicht noch die von STACHE aus dem Tertiär von Neuseeland beschriebene *Gaudryina obliquata*

Stache* und die sehr verbreitete *G. rugosa* d'Orb**. Auch bei diesen ist der untere Teil dreikantig; während jedoch die Nähte der Kammern im oberen Teile nahezu wagerecht sind, verlaufen dieselben bei *G. Hantkeni* sehr schief, weil die zweizeilig angeordneten Kammern einander auf einer großen Fläche bedecken; so läßt sich *G. Hantkeni* also auch von diesen beiden Arten leicht unterscheiden. Übrigens ist ein eingehender Vergleich unserer *Gaudryina* mit den bekannten Arten, um die Selbständigkeit derselben zu beweisen, wohl überflüssig, da ein Vergleich ihrer Abbildungen mit jenen der bekannten Arten die Unterschiede sofort vor Augen führt.

Diese Art sei dem Andenken des Entdeckers derselben, weil. meines Meisters Maximilian v. Hantken gewidmet.

Fundort: v. Hantken sammelte diese interessante Art in großer Menge aus den Mergellinsen, welche in den obereozänen (bartonischen) Kalkstein des Kissvábhegy eingelagert sind.

*

Nun möchte ich noch über eine interessante Form der unteroligozänen Schichten, über die von Hantken unter dem Namen „*Nummulites Madarászi*" beschriebene Art berichten.

v. Hantken besagt über diese Form, *daß ihr Äußeres nicht vermuten läßt, daß man es mit einem Nummuliten zu tun hat, ihre innere Struktur es hingegen unzweifelhaft erscheinen läßt, daß die Art in die Gruppe der ausgebreiteten Nummuliten* (*Nummulites explanatae* d'Arch.) gehört, und demnach eine *Assilina* ist.

Die angeführte Abbildung v. Hantkens deutet jedoch nicht nur betreffs des Äußeren auf keinen Nummuliten, sondern auch die innere Struktur weicht — soweit aus der Zeichnung zu urteilen ist — so sehr von jener einer Assilina ab, daß ich mich gerade mit der Beschreibung dieser Form als novum genus befaßte, als ich Boussacs „Développement et morphologie de quelques Foraminifères de Priabona" betitelte Arbeit zu Gesicht bekam, in welcher diese Form als „*Pellatispira*" beschrieben wird. So erübrigt es bloß einige Bemerkungen auf die Beschreibung von Boussac zu machen.

* Novara-Expedition. Neuseeland. Paläont. Abt. Foraminiferen. S. 172, Taf. XXI, Fig. 12.

** Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wiss. in Wien. Bd. XVIII, S. 244, Taf. VI, Fig. 61.

Boussacs Benennung „*Pellatispira*“ gründet sich auf jene Eigenart dieser Gattung, daß sich die Spirale der Kammern an der Oberfläche kielartig erhebt, wie er besagt „crête spirale“, während bei Assilina im Gegenteil die Wandung der Kammern von außen sichtbar ist, was auch an der Abbildung v. Hantkens sofort auffällt und von Boussac nicht genügend betont wird, indem er einfach bemerkt, daß sich Pellatispira von Assilina durch die mit Warzen bedeckte, erhabene Spira unterscheidet.

Boussac beschreibt außer *Pellatispira Madarászi* unter dem Namen *Pellatispira Douvillei* noch eine neue Art dieser Gattung und faßt die Unterschiede zwischen diesen beiden Formen im folgenden zusammen. Nach ihm ist *P. Madarászi* viel kleiner, 4 mm groß, während der Durchmesser von *F. Douvillei* 7 mm beträgt; die die Oberfläche bedeckende Granulation ist bei ersterer Art viel gröber und gleichmäßiger verteilt, als bei *P. Douvillei*, indem sich im zentralen Teile 6—7 Granulae befinden, die übrigen hingegen paarweise auf zwei Umgängen angeordnet sind; die letzten Paare verschmelzen, Querrippen bildend. Diese Charaktere sind jedoch nicht beständig, da z. B. aus der Abbildung v. Hantkens deutlich hervorgeht, daß die Oberfläche von Körnchen verschiedener Größe verziert wird, welche nicht so regelmäßig verteilt sind, wie dies Boussac besagt, indem außer den größeren Körnchenpaaren, welche die gewölbten Außenwände der Kammern verzieren, kleinere Körnchen u. z. in mehreren Reihen angeordnet, auch in den den Zwischenräumen der Kammerwindungen entsprechenden Furchen vorkommen. Übrigens ist auch die paarweise Anordnung der Hauptkörnchen nicht beständig, da z. B. dieselbe schon auf der Boussacschen Abbildung nicht mehr so regelmäßig ist, wie auf jener von Hantken; es liegen mir Exemplare vor, bei welchen nahezu die ganze Oberfläche mit Körnchen bestreut erscheint, so das in Fig. 6 abgebildete Exemplar. Übrigens ist die gedrängte Anordnung der Körnchen leicht verständlich, wenn man in Betracht zieht, daß die Anzahl der Windungen nicht immer 3, sondern zuweilen — wie dies an dem Dünnschliffe in Fig. 5 zu sehen ist — auch 4 beträgt. In diesem Falle stoßen die die Windungen bezeichnenden Körnchenreihen aneinander und bedecken die ganze Oberfläche.

Der Durchmesser meiner vom Fuße des Kissvábhegy (Kékgolyó-utca) entstammenden Exemplare schwankt zwischen 3 bis 5 mm; sie bestehen aus 3—4 Windungen, ihre Oberfläche aber erscheint in der mannigfaltigsten Weise von verschieden großen Körnchen verziert (Fig. 6—8) und sind die Umgänge in diesem Falle — mit Ausnahme des letzten — an der Oberfläche durch keine so tiefen Furchen voneinander abgetrennt, wie dies v. Hantken besagt, welcher die Hauptcharaktere der Art im folgenden zusammenfaßt:

Die Oberfläche ist mit ungleich großen Körnchen bestreut, welche auf der den inneren Windungen entsprechenden Spirale Platz nehmen. Die Windungen (3) werden durch Furchen abgetrennt. Die Anfangskammer ist verhältnismäßig groß, die Scheidewände gerade oder ein wenig gebogen. Der obere Teil der Kammern ist gewölbt. Die Dicke der die Kammern voneinander trennenden Schalenpartien entspricht der Höhe der Kammern. Durchmesser 3—4 mm.

Aus dem Bisherigen ist ersichtlich, daß alle jene Charaktere d. i. die Größe, die Kammerzahl und die Skulptur der Oberfläche, welche die Hantkensche Beschreibung modifizierend ergänzen, auf die Veränderlichkeit der Art hindeuten, und diese Formen aus der Umgebung von Budapest der *P. Douvillei* nähern, u. z. dermaßen, daß die beiden mit Betracht darauf, daß letztere Art gerade auf Abweichungen in der Größe und Skulptur begründet ist, nicht voneinander getrennt zu halten sind. Hiervon überzeugt ein Vergleich meiner Abbildungen mit den Hantkenschen und Boussacschen.

Es gibt sich höchstens darin eine gewisse Abweichung kund, daß die Dicke der die Windungen voneinander trennenden Schalenpartien nach v. Hantken der Höhe der Kammern entspricht, während diese Schalenteile bei *P. Douvillei* (Fig. 11 bei Boussac) dicker, nahezu zweimal so dick sind als die Höhe der Kammern. Dies findet jedoch seine Erklärung vielleicht in abweichenden Lebensumständen.

Das Hantkensche Original, eine Form vom einfachsten Typus und die von Boussac *P. Douvillei* genannte größere und reicher verzierte Form bilden zwei Extreme, welche durch die von mir abgebildeten Formen verbunden und zu einer einzigen Art vereinigt werden. Das Vereinigen der beiden Formen ist umso begründeter, als beide Typen sowohl in Priabona, als auch in der Umgebung von Budapest in dem durch Orthophragminen charakterisierten Unteroligozän vorkommen, — und ferner als bisher die Grenzen der Schwankungen und die Charaktere der Art *P. Madarászi* nicht vollständig bekannt waren.

Pellatispira Madarászi HANTK. sp.

(Taf. I, Fig. 5—8).

1875. *Nummulites Madarászi*, v. HANTKEN: Fauna d. Clavulina Szaboi-Schichten I. Teil: Foraminiferen S. 86, Taf. XVI, Fig. 7.

1901. *Assilina Madarászi* HTK. — OPPENHEIM: Die Priabonaschichten und ihre Fauna; Palaeontographica Bd. XLVII, S. 42.

1906. *Pellatispira Douvillei*, BOUSSAC: Développement et morphologie de quelques foraminifères de Priabona; Bull. Soc. Géol. d. France, Sér. 4, Bd. VI, S. 91, Taf. II, Fig. 10—13.

1906. *Pellatispira Madarászi* HTK. — BOUSSAC l. c. S. 92, Taf. II, Fig. 14.

Die Charaktere von *Pellatispira Madarászi* können auf Grund meiner Untersuchungen im folgenden zusammengefaßt werden. Das Gehäuse ist flach scheibenförmig, von 3—7 mm Durchmesser, 0,5—1 mm dick, gewöhnlich unregelmäßig, der rundliche Rand leicht gewellt, die Oberfläche mit zahlreichen feineren und gröberen Körnchen bestreut, welche den inneren Windungen entsprechend zumeist in einer Spirale angeordnet erscheinen. Das Gehäuse besteht aus 3—4 einander nicht umfassenden und an der Oberfläche gewölbt hervortretenden Windungen, die Zwischenräume zwischen den Kammern werden von einer von radialen, groben Porenkanälchen durchzogenen Kalksubstanz ausgefüllt, deren Dicke entweder der Höhe der Kammern entspricht oder nahezu das Doppelte beträgt. *Die Anfangskammer ist kugelig, verhältnismäßig groß.** Die Windungen werden durch Scheidewände, welche sich

* BOUSSAC bezeichnet die Anfangskammer als klein; ich will diese Abweichung nicht mit Dimorphismus erklären, und glaube vielmehr, daß

senkrecht oder nahezu senkrecht auf die früheren Umgänge stellen, in zahlreiche Kammern geteilt; diese Scheidewände treffen oben zusammen und wölben die Kammern ein; die Kammern kommunizieren unten, die Wölbung ist von feinen Porenkanälchen perforiert, und gerade durch diese kommunizieren die einzelnen Kammern miteinander. Die Poren der die Kammerzwischenräume ausfüllenden Kalksubstanz und der Kammerwandung läßt die Oberfläche siebartig perforiert erscheinen. (An tadellosen Oberflächen ist diese Perforation auch unter der Lupe zu beobachten). Die Windungen werden an der Oberfläche durch eine Furche getrennt, welche der die Windungen abteilenden Kalksubstanz entspricht.

Pellatispira Madarászi wird von Assilina durch die an Orthophragminen erinnernde Skulptur, ferner durch die Schalenstruktur scharf abgetrennt, indem statt dem verwickelten Kanalsystem von Nummulites und Assilina hier — insofern sich dies aus meinen Schliffen beurteilen läßt — einfache, radiale Porenkanäle vorhanden sind, welche an der Oberfläche bereits unter der Lupe deutlich vor Augen treten. Ein weiterer Unterschied gibt sich darin kund, daß, während bei Assilina die Wandung der Umgänge an der Oberfläche erhaben hervortritt, bei Pellatispira gerade diese furchenartig vertieft erscheint und dafür die Kammerreihen selbst erhaben, gewölbt sind.

Pellatispira Madarászi ist, soviel mir bekannt ist, bisher nur aus dem Unteroligozän von Budapest und Priabona bekannt.

Die Charaktere der Gattung Pellatispira können demnach im folgenden ergänzt werden: *Die Kammern kommunizieren unten miteinander, die gewölbten Kammerwände sind mit feinen, die zwischen den Umgängen befindliche Kalksubstanz hingegen mit groben Porenkanälen perforiert.* Als negativer Charakter kann angeführt werden, daß von einem solchen Kanalsystem, wie es die Nummuliten aufweisen, nach den bisherigen Untersuchungen hier keine Rede sein kann. In dieser Beziehung steht also *Pellatispira* in

---

die Anfangskammer in Fig. 11 von Boussac nur deshalb klein erscheint, weil der Schnitt kein zentraler ist, so daß der Innenteil der Anfangskammer zugunsten ihrer Wandung klein ist.

demselben Verhältnis zu *Assilina*, wie *Amphistegina* zu *Nummulites*.

*

Es liegt in der Natur der Sache, daß die einfacheren Organismen sich immer leichter an veränderte äußere Verhältnisse anpassen, als höhere Organismen, bei denen die der Korrelation unterstehenden Organe sich viel langsamer umgestalten. Der stratigraphische Wert der Foraminiferen wird demnach, wie dies aus dem hier Besprochenen und den neueren, an der vertikalen Verbreitung der Nummuliten gemachten Beobachtungen hervorgeht, natürlicherweise beständig geringer in demselben Verhältnis, wie sich unsere Kenntnisse über ihre vertikale Verbreitung ansammeln.

(Aus der Sitzung der III. Klasse der Ungar. Akademie der Wissenschaften am 14. Juni 1909.)

4.

ÜBER ARITHMETISCHE EIGENSCHAFTEN ALGEBRAISCHER KURVEN.

Von JULIUS v. SZ. NAGY.

I. Einleitung.

Das in der Überschrift bezeichnete Kapitel der Mathematik nimmt seinen Anfang wohl mit FERMAT, dessen einschlägige Untersuchungen, abgesehen von den in der BACHETschen Ausgabe der Arithmetik des DIOPHANT gemachten Randglossen*, größtenteils der Jesuit J. DE BILLY unter dem Titel „Doctrinae analyticae Inventum novum"** zusammengefaßt hat.

FERMAT gab außer mehreren einfacheren Aufgaben allgemein verwendbare Methoden zur Lösung der folgenden unbestimmten Gleichungen mit rationalen Koeffizienten:

$$(1)\qquad \begin{cases} y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3, \\ y^2 = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4, \end{cases}$$

$$(2)\qquad y^3 = a + bx + cx^2 + dx^3$$

mit rationalen Zahlen, oder mit anderen Worten: zur Aufsuchung der rationalen Punkte (Punkte mit rationalen Koordinaten) der

* In diesen Randglossen ist auch unter anderem der ebenfalls in diesen Gedankenkreis gehörige große FERMATsche Satz ausgesprochen, wonach es unmöglich ist, die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ in rationalen Zahlen zu lösen, wenn $n > 2$.

** Die Randglossen und das Inventum novum erschienen zuerst 5 Jahre nach dem Tode FERMATS in der von SAMUEL FERMAT (dem Sohne) veranstalteten Ausgabe der Arithmetik des DIOPHANT (1670). Die Werke von FERMAT gab neuerdings P. TANNERY (Oeuvres de FERMAT) heraus, woselbst im III. Bande (1896) die Randglossen S. 241—274, das Inventum novum S. 325—398 in französischer Sprache zu finden sind. Eine Neuausgabe des Inventum novum in lateinischem Original mit deutscher Übersetzung und Anmerkungen hat kürzlich P. v. SCHAEWEN veranstaltet (Berlin, Otto Salle, 1910).

algebraischen Kurven mit rationalen Koeffizienten (1) und (2), indem er von der Kenntnis eines rationalen Punktes oder einer damit äquivalenten Annahme ausging.

Dem Verfahren von FERMAT, das er auf die Aufsuchung der rationalen Punkte der Kurven (1) anwendet, gab EULER mathematische Form in seiner von der St. Petersburger Akademie erst 47 Jahre nach EULERS Tode, nämlich 1830 herausgegebenen 1., 6. und 7. Abhandlung.*

Dieses von FERMAT und EULER behandelte Problem brachte JACOBI** in Verbindung mit der Integralrechnung, indem er darauf aufmerksam machte, daß der von ihm EULER zugeschriebene Algorithmus, welchen EULER auf die Aufsuchung neuer Punkte aus einem rationalen Punkte der Kurve (1) anwendet, übereinstimmt mit dem algebraischen Algorithmus der Multiplikation der zu (1) gehörigen elliptischen Integrale erster Gattung. JACOBI geht sogar einen Schritt weiter und spricht die Verallgemeinerung des in Rede stehenden Problems in Betreff der hyperelliptischen Kurven mit rationalen Koeffizienten von der Form

$$y^2 = R(x) = a_0 x^{2p+2} + a_1 x^{2p+1} + \cdots + a_{2p+2}$$

aus, in betreff beliebiger algebraischer Kurven mit rationalen Koeffizienten deutet er sie an.

In bezug auf hyperelliptische Kurven spricht JACOBI sein Theorem so aus:

Es sei $R(x)$ eine ganze Funktion vom $(2p+1)$ten oder $(2p+2)$ten Grade mit rationalen Koeffizienten und ξ ein rationaler Wert, für den auch $\sqrt{R(\xi)}$ rational ist; dann gibt es unzählig viele Gleichungen $p$ten Grades mit rationalen Koeffizienten von der Beschaffenheit, daß wenn $x_k (k = 1, 2, \ldots, p)$ eine beliebige Wurzel einer solchen Gleichung ist, $\sqrt{R(x_k)}$ rational ausdrückbar ist in x_k und rationalen Zahlen.***

---

* Mémoires de l'Academie impériale de St. Pétersbourg, Bd. XI. Vgl. auch EULERS Anleitung zur Algebra, Bd. II (St. Petersburg 1771) S. 238—274.

** De usu theoriae integralium ellipticorum et integralium Abelianorum in analysi Diophantea, Crelles Journal Bd. 13 (1834), S. 353—355, JACOBIS Werke Bd. II, S. 53—55.

*** Schon EULER hat bemerkt, daß es im Falle $p = 2$ im allgemeinen unmöglich ist, aus einem rationalen Punkte neue rationale Punkte abzuleiten, Im Laufe des 19. Jahrhunderts haben sich mehrere Mathematiker mit den Kurven dritten und vierten Grades vom Geschlechte 1 mit rationalen Koeffizienten vom arithmetischen Standpunkte aus beschäftigt.*

Im Jahre 1901 erschien eine umfangreiche Abhandlung von Herrn POINCARÉ über arithmetische Eigenschaften der algebraischen Kurven**, in der er sich, ohne Berufung auf seine Vorgänger, mit den unikursalen und bikursalen Kurven mit rationalen Koeffizienten und unter den letzteren besonders mit den Kurven dritter Ordnung eingehend beschäftigt, hingegen bei den Kurven vom höheren Geschlecht sich sozusagen nur auf die Zusammenfassung der Ergebnisse beschränkt. Hinsichtlich des Theorems von JACOBI geht er bei den Kurven vom Geschlecht p nicht von einem rationalen Punkte, sondern von solchen p Punkten aus, welche zwar nicht rational sind, aber eine r a t i o n a l e P u n k t g r u p p e bilden, d. h. bei welchen die elementaren symmetrischen Funktionen ihrer Koordinaten rational sind, und bildet daraus andere $p$elementige rationale Punktgruppen.

---

daß es aber stets möglich ist, eine Gleichung zweiten Grades mit rationalen Koeffizienten abzuleiten, die der in dem erwähnten Theorem von JACOBI auftretenden Gleichung p-ten Grades entspricht (Anleitung zur Algebra 1771, Bd. II, S. 263).

* Siehe P. BACHMANN, Encyklopädie der math. Wissenschaften, Art. I, Kap. 1, S. 571—573, vgl. auch dessen französische Übersetzung, Encyclopédie des Sc. Mathém. Tome I, vol. 3, p. 27 ff. Außer den dort erwähnten Verfassern erwähnen wir die einschlägigen Arbeiten von ARONHOLD und Herrn S. GUNDELFINGER, ferner die von Herrn G. KOHN in dem Art. III, Kap. 5 der Encykl. d. m. Wiss. Bd. III, 2, S. 502 angeführten Autoren, die, wenn auch nicht vom Gesichtspunkte der arithmetischen Theorie aus, auf die allgemeine Kurve dritter Ordnung eine Konstruktion (Konstruktion der STEINERschen Polygone) angewandt haben, mit Hilfe deren wir auf einer Kurve dritter Ordnung mit rationalen Koeffizienten aus einem rationalen Punkte neue rationale Punkte bestimmen können. Wenn nämlich der Punkt A einer solchen Kurve ein rationaler Punkt ist, so ist der Tangentialpunkt A_1 des Punktes A wieder ein rationaler Punkt, der Tangentialpunkt von A_1 wieder ein rationaler Punkt usw. Oder, wenn A, B und C rationale Punkte sind, so schneidet die Grade AC einen rationalen Punkt C_1, die Grade BC_1 einen rationalen Punkt C_2 usw. aus der Kurve aus.

** Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques, Journal de mathématiques (Liouville) (5) t. 7 (1901), p. 161—233.

In der Abhandlung von Herrn POINCARÉ spielt die birationale Transformation (mit rationalen Koeffizienten) der Kurven eine wichtige Rolle, die die arithmetischen Eigenschaften der Kurven nicht ändert, indem durch sie jedem rationalen Punkte ein rationaler Punkt, jeder $q$elementigen rationalen Punktgruppe eine $q$elementige rationale Punktgruppe entspricht. Als eine hinsichtlich dieser Transformation invariante Zahl definiert nun POINCARÉ den Rang der Kurve dritter Ordnung mit rationalen Koeffizienten, d. h. die Anzahl solcher rationaler Punkte, welche auseinander nicht ableitbar sind, aber aus denen jeder rationale Punkt auf der Kurve ableitbar ist.

Neuerdings wies Herr L. SCHLESINGER auf diese Untersuchungen hin, in seinem in der EULER-Sitzung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (1907) gehaltenen Vortrage*, in dem er nachweist, daß der von JACOBI EULER zugeschriebene Algorithmus schon bei FERMAT vorkommt; er beweist ferner, worauf sich JACOBI bloß berief, daß der FERMAT-EULERsche Algorithmus, durch den wir aus einem rationalen Punkte der Kurven (1) zur Kenntnis anderer rationaler Punkte gelangen, mit dem algebraischen Algorithmus der Multiplikation der zu (1) gehörigen elliptischen Integrale erster Gattung übereinstimmt; des weiteren macht er aufmerksam auf das ohne Beweisführung gebliebene Theorem von JACOBI und zeigt endlich den Zusammenhang unter den Abhandlungen von FERMAT, EULER, JACOBI und POINCARÉ.

Ungefähr zur selben Zeit erschien eine Publikation von Herrn BEPPO LEVI, welche nachher noch in drei Publikationen fortgesetzt wurde, nämlich über die Kurven dritter Ordnung mit rationalen Koeffizienten**. In der ersten Publikation beschäftigt er sich mit den durch birationale Transformation mit rationalen Koeffizienten ineinander überführbaren Kurven dritter Ordnung, deren Invarianten, und mit der Verteilung der auf ihnen befindlichen rationalen Punkte, während er in den drei übrigen Publi-

* Über ein Problem der DIOPHANTischen Analysis bei FERMAT, EULER, JACOBI und POINCARÉ, Jahresbericht Bd. 17, S. 57—67.

** Saggio per una teoria aritmetica delle forme cubiche ternarie, Nota I—IV, Accademia reale delle scienze di Torino, 1906—1908.

kationen solche spezielle Kurven dritter Ordnung aufstellt, auf denen aus einem bestimmten rationalen Punkte nur endlich viele Punkte ableitbar sind.

Im Anschluß an die SCHLESINGERsche Abhandlung erschienen in dem ersten Hefte des Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (Bd. XVIII, 1909) drei Abhandlungen, unter denen die von Herrn J. PTASZYCKI* und die meinige** das Theorem von JACOBI beweisen und zwar die erste Abhandlung für hyperelliptische Kurven, die zweite auch für den Fall allgemeiner algebraischer Kurven. Die dritte Abhandlung***, deren Verfasser P. v. SCHAEWEN ist, beschäftigt sich mit der in ihrem Titel angegebenen FERMATschen Aufgabe und führt sie auf die Form (1) zurück. Auf diese Abhandlung bezieht sich meine andere Notiz.†

Der Anregung von Herrn Prof. SCHLESINGER, dem ich meinen verbindlichsten Dank auch an dieser Stelle aussprechen möchte, verdankt auch diese Arbeit ihre Entstehung, worin im Anschluß an Herrn POINCARÉ über die Kurven höheren Geschlechtes ausführlicher gehandelt wird, insbesondere über die Kurven vom Geschlechte 2 und unter diesen über die Kurven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte.

Die bisher erwähnten Abhandlungen gehen nicht von den allgemeinen Kurven mit rationalen Koeffizienten aus, sondern von solchen, auf denen es einen rationalen Punkt oder eine $p$elementige rationale Punktgruppe gibt (p ist das Geschlecht der Kurve). Die Frage, wann, d. h. bei welchen Wertsystemen der Koeffizienten, es auf der Kurve einen rationalen Punkt, eine $2, 3, \ldots$ elementige Punktgruppe gibt, ist außerordentlich schwierig und, abgesehen von einigen speziellen Kurven††, nur für die Kegelschnitte geklärt.†††

---

* Sur un théorème d'analyse indéterminée, énoncé par JACOBI.

** Über ein Theorem von JACOBI und seine Verallgemeinerung.

*** $Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 = z^3$ in rationalen Zahlen zu lösen.

† Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn P. v. SCHAEWEN, Jahresbericht der Deutsch. Math.-Vereinigung, Bd. XVIII, S. 401—402.

†† BACHMANN, Encyklopädie der math. Wiss. I, Kap. 1, S. 572—573.

††† BACHMANN, Encykl. d. math. Wiss. I, Kap. 2, S. 623—622, 633—635.

II. Über Kurven von höherem Geschlecht.

1.

Auf den Kurven vom Geschlechte 1 mit rationalen Koeffizienten kann man aus einem bekannten rationalen Punkte (ξ, η) (Punkt mit rationalen Koordinaten), wie Herr POINCARÉ nachgewiesen hat, im allgemeinen unendlich viele rationale Punkte aufsuchen. Auf den Kurven von höherem Geschlecht hingegen kann man aus einem bekannten rationalen Punkte (ξ, η) im allgemeinen keine rationalen Punkte ableiten, aber man kann aus einer rationalen Punktgruppe, d. h. aus einer solchen Punktgruppe, deren Punkte zwar nicht rational sind, aber bei denen sämtliche elementare symmetrische Funktionen ihrer Koordinaten rational sind, unendlich viele andere rationale Punktgruppen ableiten.

Das Theorem über die algebraischen Kurven vom Geschlecht 1 mit rationalen Koeffizienten verallgemeinerte Herr POINCARÉ in seiner Abhandlung wie folgt:

Es sei

$$f(x, y) = 0 \tag{3}$$

eine algebraische Gleichung* mit rationalen Zahlkoeffizienten; bedeutet n die Ordnung, p das Geschlecht der durch (3) definierten algebraischen Kurve und kennt man p Punkte auf dieser Kurve mit den Koordinaten (x_k, y_k) $(k = 1, 2, \ldots, p)$, für die die elementaren symmetrischen Funktionen der x_k, y_k rationale Zahlen sind, so lassen sich noch unendlich viele Systeme von p Punkten der Kurve von derselben Beschaffenheit angeben.

Aus der gegebenen $p$elementigen rationalen Punktgruppe können wir neue $p$elementige rationale Punktgruppen mit Hilfe adjungierter Kurven mit rationalen Koeffizienten aus der Kurve (3) ausschneiden.

Nach den bekannten Sätzen** der Theorie der algebraischen

---

* Der Einfachheit halber werden wir den Fall betrachten, daß die Kurve (3) nur gewöhnliche Singularitäten, also gewöhnliche Doppelpunkte und Spitzen hat, aber es sind unsere Entwicklungen auch dann anwendbar, wenn die Singularitäten der Kurve (3) nicht so einfach sind.

** Siehe BERZOLARI, Theorie der höheren ebenen algebraischen Kurven, Encykl. d. math. Wiss. III, Kap. 4, S. 414; STAHL, Abelsche Funktionen, S. 71—75.

Kurven können wir unter den $nq-2d$ Schnittpunkten, in welchen eine adjungierte Kurve $q>(n-3)$ter Ordnung (außer den d Doppelpunkten) die Kurve (3) schneidet, im allgemeinen nur $nq-2d-p$ Punkte beliebig annehmen, die übrigen p Schnittpunkte sind durch diese bestimmt, so daß wir die auf der Kurve (3) befindliche Punktschar $g_{nq-2d}^{nq-2d-p}$ durch ein $k=nq-2d-p$ nichthomogene lineare Parameter enthaltendes adjungiertes Kurvenbüschel $q$ter Ordnung

$$(4) \qquad \varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) + \lambda_1 \varphi_1(x, y) + \cdots + \lambda_k \varphi_k(x, y) = 0$$

aus der Kurve (3) ausschneiden können, wo $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y), \ldots,$ $\varphi_k(x, y)$ voneinander linear unabhängige adjungierte Kurven $q$ter Ordnung sind, deren Koeffizienten sich aus den Koeffizienten der Kurve (3) rational zusammensetzen; im vorliegenden Falle also, wo die Kurve (3) rationale Koeffizienten hat, sind auch die Koeffizienten der Kurven $\varphi_0(x, y)$, $\varphi_1(x, y), \ldots, \varphi_k(x, y)$ rational.

Wenn wir also die Kurve (4) durch eine $k=nq-2d-p$-elementige rationale Punktgruppe der Kurve (3) hindurchführen, so erhalten die Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ rationale Werte, und weil die Kurven (3) und (4) mit rationalen Koeffizienten einander außer in der rationalen Punktgruppe der Doppelpunkte und der $k$elementigen rationalen Punktgruppe notwendigerweise wieder in einer rationalen Punktgruppe schneiden, bilden die übrigen p Schnittpunkte eine rationale Punktgruppe.

Es kann auch der Fall eintreten, daß durch die $k=nq-2d-p$-elementige rationale Punktgruppe nicht nur eine, sondern unendlich viele adjungierte Kurven von der Form (4) und der Ordnung q hindurchgehen, d. h. daß unter den Parametern $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ 1, 2, ... beliebig bleiben; in diesem Falle können wir die durch die $k$elementige Punktgruppe von der Form (4) hindurchgehende Kurve durch 1, 2, ... beliebige rationale Punkte der Ebene hindurchführen, damit die $p$elementige rationale Punktgruppe bestimmt sei.

Eine solche $k'=nq-2d-p$elementige rationale Punktgruppe, wie wir sie bei der Konstruktion der $p$elementigen rationalen Punktgruppen brauchen, können wir immer bilden, wenn wir eine $p$elementige rationale Punktgruppe der Kurve (3) kennen. Aus dieser $p$elementigen Punktgruppe und einer $nq-2p$elementigen rationalen Punktgruppe G, worin eine beliebige adjungierte Kurve mit rationalen Koeffizienten $q>(n-3)$ter Ordnung die Kurve (3) schneidet, stellen wir eine $nq'-2d-p$elementige rationale Punktgruppe dadurch zusammen, daß wir jene $(\varepsilon-1)$mal, diese $(\lambda+1)$-mal nehmen, wo $\varepsilon-1$ und $\lambda+1$ nichtnegative ganze Zahlen sind, welche die Gleichung

$$(5) \qquad nq'-2d-p=(\varepsilon-1)p+(\lambda+1)(nq-2d)$$

befriedigen, der wir auch die Form

$$(6) \qquad n(q'-q)-\lambda(nq-2d)=\varepsilon p$$

geben können.

Es sei

$$\varrho=[n, 2d], \qquad \varrho'=[n, 2d, p],$$

wo das Klammerzeichen den größten gemeinsamen Teiler der in ihm befindlichen Zahlen bedeutet, dann können wir die Gleichung (6) durch positive ganzzahlige Werte $q'-q$ und $\lambda \geqq -1$ nur dann befriedigen, wenn $\frac{\varepsilon p}{\varrho}$ einen ganzzahligen Wert hat. Dieser Fall aber wird für einen solchen kleinsten Wert ε eintreten, der durch

$$\varepsilon=\frac{\varrho}{\varrho'}=\frac{[n, 2d]}{[n, 2d, p]}$$

bestimmt ist. Für diesen Wert ε hat die Gleichung (6) unendlich viele positive ganzzahlige Lösungen $q'-q$ und $\lambda \geqq -1$. Wegen der Gleichung (5) schneidet also die adjungierte Kurve, welche durch die $p$elementige rationale Punktgruppe $(\varepsilon-1)$mal, durch die rationale Punktgruppe G $(\lambda+1)$mal hindurchgeht, außer diesen Punktgruppen noch eine $p$elementige rationale Punktgruppe aus der Kurve (3) aus.

Wir erhalten eine neue $p$elementige rationale Punktgruppe, wenn wir entweder von anderen Lösungen $q'-q, \lambda$ der Gleichung (6) ausgehen, oder wenn wir für die schon erhaltenen $p$elementigen rationalen Punktgruppen die vorige Konstruktion wiederholen.

Auch eine andere Methode gibt Herr POINCARÉ zur Konstruktion $p$elementiger rationaler Punktgruppen, welche indessen nur dann anwendbar ist, wenn schon zwei oder mehrere $p$elementige rationale Punktgruppen auf der Kurve (3) bekannt sind. Wenn wir nämlich durch zwei p elementige rationale Punktgruppen (wenn nur zwei p elementige rationale Punktgruppen bekannt sind, dann durch eine derselben zweimal) eine adjungierte Kurve mit rationalen Koeffizienten $q \geqq \frac{3p+2d}{n}$ ter Ordnung hindurchführen, so wird diese Kurve die Kurve (3) in einer $nq - 2d - 2p$ elementigen rationalen Punktgruppe schneiden. Eine durch diese Punktgruppe und eine dritte p elementige rationale Punktgruppe hindurchgehende adjungierte Kurve derselben q ten Ordnung schneidet eine neue p elementige rationale Punktgruppe aus (3) aus.

Wenn wir dieses Verfahren auf die durch die vorhergehende Methode erhaltenen zwei oder mehr p elementigen rationalen Punktgruppen anwenden, so führt auch diese Methode im allgemeinen zur Kenntnis unendlich vieler p elementiger rationaler Punktgruppen auf der Kurve (3).

In dem speziellen Falle, daß es möglich ist, eine solche ganze Zahl q zu finden, daß $q = \frac{3p+2d}{n}$ ist, ist die zweite Konstruktion von Herrn POINCARÉ auch auf eine p elementige rationale Punktgruppe anwendbar, weil dann auch die bei der Konstruktion benutzte $nq - 2d - 2p$ elementige rationale Punktgruppe selbst eine p elementige ist, und demnach können wir sie zur Konstruktion neuer p elementiger rationaler Punktgruppen anwenden. Die so erhaltenen p elementigen rationalen Punktgruppen sind im allgemeinen von den durch die zwei vorhergehenden Konstruktionen erhaltenen Punktgruppen verschieden. Diese Konstruktion ist aber nur dann anwendbar, wenn

$$q = \frac{3p+2d}{n} = \frac{p+2p+2d}{n} = n - 3 + \frac{p+2}{n},$$

d. h. $p+2$ durch n teilbar ist, was z. B. erfüllt ist, wenn

$$p = 2,\ n = 4; \quad p = 3,\ n = 5, \quad \text{usw.}$$

Wenn diese Annahme auch nicht erfüllt wird, aber die Gleichung

$$nq - 2d = (h+2)p$$

besteht, wo q und h positive ganze Zahlen sind, so schneidet die adjungierte Kurve q ter Ordnung, welche wir durch die gegebenen

$p$elementige rationale Punktgruppe $(h+1)$mal, oder durch $h+1$ $p$elementige rationale Punktgruppen hindurchführen, die Kurve (3) noch in einer $p$elementigen rationalen Punktgruppe.

Damit aber die erwähnte Gleichung erfüllt sei, dafür ist die Bedingung die, daß $hp+2$ durch n teilbar sei. Dies ist der Fall, wenn die Gleichung

$$kn - hp = 2$$

ganzzahlige Lösungen k und h hat, was nicht immer zutrifft.

2.

Die auf der Kurve (3) befindlichen $p$elementigen Punktgruppen können wir nach dem Inversionsproblem von JACOBI durch die Summen der zu (3) gehörigen ABELschen Integrale erster Gattung charakterisieren.

Es seien nämlich $u_1, u_2, \ldots, u_p$ die p zu (3) gehörigen voneinander linear unabhängigen Normalintegrale erster Gattung, so ist, wenn (a_i, b_i) $(i=1, 2, \ldots, p)$ p Fixpunkte der Kurve (3) sind, und die Summen der Integrale

(7) $$\alpha_k = \int_{(a_1, b_1)}^{(x_1, y_1)} du_k + \int_{(a_2, b_2)}^{(x_2, y_2)} du_k + \cdots + \int_{(a_p, b_p)}^{(x_p, y_p)} du_k$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

gegeben sind, die Punktgruppe (x_i, y_i) $(i=1, 2, \ldots, p)$ der Kurve (3) ganz bestimmt*, vorausgesetzt, daß der Weg der Integration zwischen den Punkten (a_i, b_i) und (x_i, y_i) $(i=1, 2, \ldots, p)$ in jeder Integralsumme auf der zu (3) gehörigen RIEMANNschen Fläche derselbe ist.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Integrale (7) eine und dieselbe untere Grenze haben, d. h. daß $a_i = a$, $b_i = b$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ sind.

Wir nennen die Integralsummen (7), durch welche die $p$elementige rationale Punktgruppe (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, p)$ bestimmt

* Eine Ausnahme bildet der Fall, wenn die $p$elementige Punktgruppe (x_i, y_i) $(i=1, 2, \ldots, p)$ auf einer adjungierten Kurve $(n-3)$ter Ordnung ist, weil dann die Summen $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ nicht eine, sondern unendlich viele $p$elementige Punktgruppen bestimmen.

ist, die Argumente dieser Punktgruppe und bezeichnen die Punktgruppe selbst als Punktgruppe $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ oder kurz α. Argumente nennen wir die Integralsummen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ auch dann, wenn sie sich nicht auf p Punkte (x_i, y_i) $(i=1,2,\ldots,p)$ beziehen, sondern auf mehr Punkte. Dann ist die Punktgruppe durch die Argumente nicht bestimmt.*

Nach dem ABELschen Theorem sind die für die nq Schnittpunkte der Kurve (3) mit einer Kurve $q$ter Ordnung geltenden Argumente

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$$

unabhängig von den Koeffizienten der Kurve $q$ter Ordnung und hängen außer von den unteren Grenzen der Integrale und den Koeffizienten der Kurve (3) nur von der Ordnungszahl q ab.

Wenn also für die in einer beliebigen Geraden befindlichen Schnittpunkte (x_i, y_i) $(i=1, 2, \ldots, n)$

$$\alpha_1 = \varkappa_1, \ \alpha_2 = \varkappa_2, \ \ldots, \ \alpha_p = \varkappa_p$$

ist, so sind

$$\alpha_1 = q\varkappa_1, \ \alpha_2 = q\varkappa_2, \ \ldots, \ \alpha_p = q\varkappa_p$$

die Argumente für die Schnittpunkte mit einer Kurve $q$ter Ordnung.

Bezeichnen wir die Argumente, die zu den Doppelpunkten (zweimal gerechnet) gehören, mit

$$\delta_1, \ \delta_2, \ \ldots, \ \delta_p,$$

so sind die Argumente für die $nq-2d$ Schnittpunkte, in denen eine beliebige adjungierte Kurve $q$ter Ordnung die Kurve (3) schneidet,

$$\alpha_1 = q\varkappa_1 - \delta_1, \ \alpha_2 = q\varkappa_2 - \delta_2, \ \ldots, \ \alpha_p = q\varkappa_p - \delta_p.$$

---

* Herr POINCARÉ wählt die Integrale erster Gattung so aus, daß die Summe der Argumente

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p = 0$$

sei, für die Schnittpunkte (außer den Doppelpunkten) der Kurve (3) mit jeder adjungierten Kurve. Diese Annahme ist bei ihm darum bequem, weil er nur die Argumentensumme $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_p$ der von einer $p$elementigen rationalen Punktgruppe α ableitbaren $p$elementigen rationalen Punktgruppe darstellt, wodurch die Punktgruppe nicht ganz charakterisiert ist.

Nachdem diese Sätze vorausgeschickt sind, können wir durch die Argumente einer $p$elementigen rationalen Punktgruppe

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$$

die daraus ableitbaren $p$elementigen Punktgruppen bzw. deren Argumente darstellen.

Die im vorhergehenden Paragraphen angewandte adjungierte Kurve q'ter Ordnung, die durch die Punktgruppe α $(\varepsilon - 1)$mal, durch die $nq - 2d$elementige rationale Punktgruppe

$$G = q\varkappa - \delta = (q\varkappa_1 - \delta_1, q\varkappa_2 - \delta_2, \ldots, q\varkappa_p - \delta_p)$$

$(\lambda + 1)$mal hindurchgeht, schneidet aus der Kurve (3) wegen der Gleichung (5) die folgende $p$elementige rationale Punktgruppe aus:

$$\begin{aligned} q'\varkappa - [(\varepsilon - 1)\alpha + (\lambda + 1)(q\varkappa - \delta) + \delta] \\ = \alpha - \varepsilon\alpha - [(\lambda + 1)q - q']\varkappa - \lambda\delta, \end{aligned}$$

d. h. diejenige Punktgruppe, deren Argument

$$\alpha_i - \varepsilon\alpha_i - [(\lambda + 1)q - q']\varkappa_i - \lambda\delta_i$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p)$$

sind.

λ und $q' - q$ befriedigen die Gleichung (6); hieraus folgt:

$$(\lambda + 1)q - q' = \frac{2\lambda d - \varepsilon p}{n} = \mu,$$

d. h.

$$2\lambda d - \mu n = \varepsilon p.$$

Wenn λ_0 und μ_0 die kleinsten, unserer Aufgabe entsprechenden ganzzahligen Lösungen sind, so lauten alle unserer Aufgabe entsprechenden Lösungen

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{n}{\varrho} k, \quad \mu = \mu_0 + \frac{2d}{\varrho} k,$$

wo $\varrho = [n, 2d]$, und k eine beliebige nichtnegative ganze Zahl ist. Auf Grund dessen erhalten wir aus der $p$elementigen rationalen Punktgruppe α durch die entsprechende Veränderung der Ordnungszahl q' der adjungierten Kurve die folgenden $p$elementigen rationalen Punktgruppen

$$\alpha - \varepsilon\alpha - \mu_0\varkappa - \lambda_0\delta - k\left(\frac{n}{\varrho}\varkappa + \frac{2d}{\varrho}\delta\right).$$

Setzen wir der Kürze wegen

$$\varepsilon\alpha + \mu_0\varkappa + \lambda_0\delta = \overline{\alpha}$$

und

$$\frac{n}{\varrho}\varkappa + \frac{2d}{\varrho}\delta = \sigma,$$

so werden die vorher erhaltenen $p$elementigen rationalen Punktgruppen

$$\alpha - \bar{\alpha} - k\sigma$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Wir wenden jetzt die zweite Konstruktion des Herrn POINCARÉ auf die $p$elementigen rationalen Punktgruppen α, β und γ an. Die durch die Punktgruppen β und γ hindurchgeführte adjungierte Kurve mit rationalen Koeffizienten $q \geqq \frac{3p+2d}{n}$ ter Ordnung schneidet aus (3) eine rationale Punktgruppe mit den Argumenten

$$-(\beta_k + \gamma_k) + q\varkappa_k - \delta_k$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

aus, die durch diese Punktgruppe und durch die Punktgruppe α hindurchgehende adjungierte Kurve derselben $q$ten Ordnung schneidet aus (3) die $p$elementige rationale Punktgruppe

$$\beta + \gamma - \alpha$$

aus.

Wenn wir diese zweite Konstruktion auf die $p$elementigen rationalen Punktgruppen

$$\alpha - \bar{\alpha} - k_1\sigma, \quad \alpha - \bar{\alpha} - k_2\sigma, \quad \alpha - \bar{\alpha} - k_3\sigma$$
$$(k_1, k_2, k_3 \geqq 0)$$

anwenden, so erhalten wir die $p$elementige rationale Punktgruppe

$$\alpha - \bar{\alpha} + (k_1 - k_2 - k_3)\sigma,$$

wo $k_1 - k_2 - k_3$ jetzt jeden ganzzahligen Wert einschließlich der Null bedeuten kann.

Wenn also α eine $p$elementige rationale Punktgruppe ist, so ist auch

(8) $$\alpha - \bar{\alpha} + k\sigma$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

eine $p$elementige rationale Punktgruppe.

Außer den so erhaltenen rationalen Punktgruppen können wir auch andere $p$elementige rationale Punktgruppen auf der Kurve (3) konstruieren, wenn wir die zweite Konstruktion von

Herrn POINCARÉ auf die durch die folgenden Gleichungen bezeichnete Art anwenden:

$$\begin{aligned}
&2(\alpha - \bar{\alpha}) - \alpha = \alpha - 2\bar{\alpha},\\
&2(\alpha - 2\bar{\alpha}) - (\alpha - \bar{\alpha}) = \alpha - 3\bar{\alpha} = (\alpha - 2\bar{\alpha}) + (\alpha - \bar{\alpha}) - \alpha,\\
&2(\alpha - 3\bar{\alpha}) - (\alpha - 2\bar{\alpha}) = \alpha - 4\bar{\alpha} = 2(\alpha - 2\bar{\alpha}) - \alpha,\\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&2(\alpha - k\bar{\alpha}) - (\alpha - (k-1)\bar{\alpha}) = \alpha - (k+1)\bar{\alpha} \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\alpha - (\alpha - \alpha) = \alpha + \bar{\alpha},\\
&2(\alpha + \bar{\alpha}) - \alpha = \alpha + 2\bar{\alpha},\\
&2(\alpha + 2\bar{\alpha}) - (\alpha + \bar{\alpha}) = \alpha + 3\bar{\alpha} = (\alpha + 2\bar{\alpha}) + (\alpha + \bar{\alpha}) - \alpha,\\
&\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&2(\alpha + k\bar{\alpha}) - (\alpha - (k-1)\bar{\alpha}) = \alpha + (k+1)\bar{\alpha} \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Diese zwei Gleichungserien bestimmen einen gewissen Algorithmus für die Konstruktion der $p$elementigen rationalen Punktgruppen. Durch diesen Algorithmus erhalten wir aus den $p$elementigen rationalen Punktgruppen α und $\alpha - \bar{\alpha}$ die $p$elementigen rationalen Punktgruppen

$$\alpha + m\bar{\alpha}$$
$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Mit Rücksicht auf (8) sind also die aus der Punktgruppe α ableitbaren zweifach unendlich vielen $p$elementigen rationalen Punktgruppen*

$$\alpha + m\bar{\alpha} + k\sigma \tag{9}$$
$$(m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Daß wir aber im allgemeinen durch die beiden Konstruktionen von POINCARÉ keine von diesen verschiedene $p$elementige rationale Punktgruppe ableiten können, zeigen wir auf folgende Weise.

---

* Um ein Mißverständnis zu vermeiden, bemerken wir, daß $\alpha + m\bar{\alpha} + k\sigma$ keine Summe der Argumente, wie bei Herrn POINCARÉ, sondern nur ein Symbol ist, welches die rationale Punktgruppe mit den Argumenten

$$\alpha_k + m(\varepsilon\alpha_k + \mu_0\varkappa_k + \lambda_0\delta_k) + k\left(\frac{n}{\varrho}\varkappa_k + \frac{2d}{\varrho}\delta_k\right)$$
$$(k = 1, 2, \ldots, p)$$

bedeutet.

Wir können keine neue $p$elementige rationale Punktgruppe mit Hilfe der ersten Konstruktion erhalten, weil die aus der rationalen Punktgruppe $\alpha + m\bar{\alpha} + k\sigma$ durch das erste Verfahren erhaltene $p$elementige rationale Punktgruppe

$$\begin{aligned}(\alpha + m\bar{\alpha} + k\sigma) - \varepsilon(\alpha + m\bar{\alpha} + k\sigma) - \mu_0\varkappa - \lambda_0\delta - k_1\sigma \\ = \alpha - (\varepsilon\alpha + \mu_0\varkappa + \lambda_0\delta) - (\varepsilon m - m)\bar{\alpha} - (\varepsilon k - k + k_1)\sigma \\ = \alpha - (\varepsilon m - m + 1)\bar{\alpha} - (\varepsilon k - k + k_1)\sigma\end{aligned}$$

eine der unter (9) befindlichen ist.

Aber auch durch das zweite Verfahren von POINCARÉ können wir keine neue $p$elementige rationale Punktgruppe erhalten, weil die $p$elementige rationale Punktgruppe

$$\begin{aligned}(\alpha + m_1\bar{\alpha} + k_1\sigma) + (\alpha + m_2\bar{\alpha} + k_2\sigma) - (\alpha + m_3\bar{\alpha} + k_3\sigma) \\ = \alpha + (m_1 + m_2 - m_3)\bar{\alpha} + (k_1 + k_2 - k_3)\sigma\end{aligned}$$

zu den Punktgruppen (9) gehört.

Die aus der $p$elementigen rationalen Punktgruppe α durch die beiden Konstruktionen von Herrn POINCARÉ erhaltenen sämtlichen $p$elementigen rationalen Punktgruppen werden also durch (9) dargestellt. In dem Falle, der nicht der allgemeine ist, daß nämlich die am Ende des vorigen Paragraphen erwähnten Annahmen erfüllt werden, können wir noch andere $p$elementige rationale Punktgruppen erhalten.

Was aus (9) als wesentlicher Unterschied gegenüber dem Falle $p = 1$ uns sofort in die Augen fällt, ist, daß im allgemeinen für Kurven vom Geschlechte $p = 1$ mit rationalen Koeffizienten nur einfach unendlich viele rationale Punkte aus einem rationalen Punkte ableitbar sind, wogegen sich auf den Kurven von höherem Geschlechte ($p \geqq 2$) mit rationalen Koeffizienten aus einer $p$elementigen rationalen Punktgruppe im allgemeinen mindestens zweifach unendlich viele rationale Punktgruppen ergeben.

Wenn außer der $p$elementigen rationalen Punktgruppe α noch eine $p$elementige rationale Punktgruppe β bekannt ist, welche aus α nicht konstruierbar ist, so sind die $p$elementigen rationalen Punktgruppen, welche daraus durch die beiden Konstruktionen von Herrn POINCARÉ ableitbar sind,

$$\beta + m\bar{\beta} + k\sigma$$
$$(m, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

($\bar{\beta} = \varepsilon\beta + \mu_0 x + \lambda_0 \delta$), und wenn die erwähnten Annahmen nicht erfüllt sind, so sind diese Punktgruppen die einzigen. Außer den so erhaltenen und unter (9) befindlichen $p$elementigen rationalen Punktgruppen können wir noch neue Punktgruppen durch Kombination der zweierlei Punktgruppen mit Hilfe der zweiten Konstruktion von Herrn POINCARÉ bekommen. So erhalten wir die $p$elementigen Punktgruppen

$$(\alpha + m_1\bar{\alpha} + k_1\sigma) + (\alpha + m_2\alpha + k_2\sigma) - (\beta + m_3\bar{\beta} + k_3\sigma)$$
$$= 2\alpha - \beta + (m_1 + m_2)\bar{\alpha} - m_3\bar{\beta} + (k_1 + k_2 - k_3)\sigma \text{ usw.},$$

und im allgemeinen die Punktgruppen

$$n_1\alpha + n_2\beta + m_1\bar{\alpha} + m_2\bar{\beta} + k\sigma,$$

wo n_1, n_2, m_1, m_2, k beliebige ganze Zahlen (einschließlich auch der Null) sind, unter denen nur die Bedingung besteht:

$$n_1 + n_2 = 1.$$

Noch allgemeiner, seien $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ voneinander unabhängige $p$elementige rationale Punktgruppen, d. h. unter ihnen sei keine aus den übrigen konstruierbar; dann sind die $p$elementigen rationalen Punktgruppen

$$(10)\quad n_1\alpha + n_2\beta + n_3\gamma + \cdots + m_1\bar{\alpha} + m_2\bar{\beta} + m_3\bar{\gamma} + \cdots + k\sigma$$

aus ihnen ableitbar durch die allgemein anwendbaren Methoden. In (10) sind $n_1, n_2, n_3, \ldots, m_1, m_2, m_3, \ldots, k$ beliebige ganze Zahlen einschließlich der Null, und nur für die Zahlen n besteht die Bedingung

$$n_1 + n_2 + n_3 + \cdots = 1.$$

Wenn die im vorigen Paragraphen erwähnte nicht allgemeine Methode auch anwendbar ist, so schließen sich an die in (10) enthaltenen $p$elementigen rationalen Punktgruppen die Punktgruppen an, welche wir durch die dort behandelte Konstruktion auffinden.

Wenn alle auf der Kurve (3) befindlichen $p$elementigen rationalen Punktgruppen aus den Punktgruppen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ableitbar sind, so nennen wir die r_p Punktgruppen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ primitive $p$elementige rationale Punktgruppen und die Zahl r_p die Rangzahl der auf der Kurve (3) befindlichen rationalen Punktgruppen.

3.

Gegenüber einer birationalen Transformation T mit rationalen Koeffizienten sind die arithmetischen Eigenschaften einer algebraischen Kurve C mit rationalen Koeffizienten invariant.

Jeder $s$elementigen rationalen Punktgruppe S auf der Kurve C entspricht zufolge der Transformation T eine und nur eine* gleichfalls $s$elementige rationale Punktgruppe S' auf der transformierten algebraischen Kurve C' mit rationalen Koeffizienten, und umgekehrt. Ferner, wenn S irreduzibel ist, d. h. nicht in aus weniger Punkten bestehende rationale Punktgruppen zerfällt, so ist auch S' irreduzibel; denn wäre S' reduzibel und zerfiele es in $s_1, s_2, \ldots, s_k$elementige rationale Punktgruppen $S_1', S_2', \ldots, S_k'$, wo

$$s_1 + s_2 + \cdots + s_k = s$$

ist, so müßte auch die rationale Punktgruppe S zufolge der inversen Transformation von T in $s_1, s_2, \ldots, s_k$elementige Punktgruppen $S_1, S_2, \ldots, S_k$ zerfallen, was unserer Annahme widerspräche. Umgekehrt entspricht jeder reduziblen Punktgruppe S eine gleichfalls reduzible Punktgruppe S', welche in ebensolche rationale Punktgruppen zerfällt, wie die Punktgruppe S.

Aus diesem Grunde sind im allgemeinen gegenüber der birationalen Transformation mit rationalen Koeffizienten invariante Zahlen: die Anzahl der auf der Kurve C befindlichen rationalen Punkte, die Anzahl der sämtlichen irreduziblen und infolgedessen auch der sämtlichen reduziblen $2, 3, \ldots$ usw.-elementigen rationalen Punktgruppen. Wenn es aber unendlich viele $s$elementige Punktgruppen gibt, so ist die Ordnung ihrer Unendlichkeit, also die Rangzahl r_p der $p$elementigen rationalen Punktgruppen invariant.

---

* Eine Ausnahme kommt nur dann vor, wenn die rationale Punktgruppe S teilweise oder ganz in die Fundamentalpunkte der transformierenden Kurven fällt.

Wir bemerken noch bezüglich der Kurven von höherem Geschlechte, daß, wenn die Ordnung n und die Zahl $p-1$ keinen gemeinsamen Teiler haben, es immer, bei beliebigen rationalen Werten ihrer Koeffizienten, auf ihnen $p$elementige rationale Punktgruppen gibt.

Bei der ersten Konstruktion von Herrn POINCARÉ müssen wir die adjungierte Kurve von der Ordnung q' durch die $p$elementige rationale Punktgruppe α $(\varepsilon-1)$mal, durch die $nq-2d$-elementige rationale Punktgruppe G $(\lambda+1)$mal hindurchführen. Diese adjungierte Kurve wird eine neue $p$elementige rationale Punktgruppe aus (3) ausschneiden. Diese $p$elementige rationale Punktgruppe ist von α unabhängig, wenn $\varepsilon=1$ ist, und so können wir $p$elementige rationale Punktgruppen auf den Kurven, auf welchen diese Annahme erfüllt ist, auch dann erhalten, wenn wir vorläufig keine $p$elementige rationale Punktgruppe kennen. ε aber ist dann und nur dann gleich der Einheit, wenn n und $p-1$ keinen gemeinsamen Teiler haben; es ist nämlich

$$\varepsilon=\frac{[n, 2d]}{[n, 2d, p]};$$

weil aber

$$2d=n(n-3)-2(p-1)$$

ist, so haben wir

$$[n, 2d]=[n, 2(p-1)]$$

und

$$[n, 2d, p]=[n, 2(p-1), p].$$

Hieraus können wir unsern Satz leicht herauslesen.

Es gibt also immer rationale Punktpaare (zweielementige Punktgruppen) auf den Kurven vom Geschlechte zwei mit rationalen Koeffizienten; rationale Punkttripel auf den Kurven unpaarer Ordnung vom Geschlechte drei mit rationalen Koeffizienten; rationale Punktquadrupel auf den Kurven vom Geschlechte vier mit rationalen Koeffizienten, wenn ihre Ordnung nicht durch drei teilbar ist usw.

Im Folgenden werden wir uns mit den Kurven vom Geschlecht zwei mit rationalen Koeffizienten beschäftigen, d. h. mit den einfachsten Kurven, auf welchen immer $p(=2)$elementige rationale Punktgruppen existieren.

III. Über Kurven vom Geschlechte zwei.

1.

Es gibt im allgemeinen immer auf den Kurven vom Geschlecht zwei mit rationalen Koeffizienten rationale Punktpaare. Alle adjungierten Kurven $(n-3)$ter Ordnung mit rationalen Koeffizienten schneiden aus der Kurve $n$ter Ordnung vom Geschlechte zwei mit rationalen Koeffizienten, welche wir im Folgenden kurz $C_n^{(2)}$ nennen werden, rationale Punktpaare aus. Diese Punktpaare gehören dem kanonischen Punktsystem $g_{2p-2}^{p-1} = g_2^1$ der Kurve $C_n^{(2)}$ an. Es gibt im allgemeinen auch von dem kanonischen Punktsystem verschiedene rationale Punktpaare.

Wir schneiden die $C_n^{(2)}$ mit einer Geraden mit rationalen Koeffizienten. Diese schneidet die $C_n^{(2)}$ in einer $n$elementigen rationalen Punktgruppe. Wenn wir durch jeden Punkt dieser Punktgruppe eine adjungierte Kurve $(n-3)$ter Ordnung hindurchführen, so schneidet jede solche Kurve die $C_n^{(2)}$ noch in einem Punkte außer den Doppelpunkten. Die so erhaltenen n Punkte bilden wieder eine rationale Punktgruppe, weil, obgleich die einzelnen adjungierten Kurven $(n-3)$ter Ordnung im allgemeinen keine rationalen Koeffizienten haben, ihre Gesamtheit eine Kurve $n(n-3)$ter Ordnung mit rationalen Koeffizienten bildet, welche die $C_n^{(2)}$, außer in der rationalen Punktgruppe der Doppelpunkte und außer in der auf der rationalen Geraden befindlichen $n$elementigen rationalen Punktgruppe, in der erwähnten $n$elementigen rationalen Punktgruppe schneidet. Durch die so erhaltene $n$elementige rationale Punktgruppe kann man im allgemeinen eine nichtdegenerierende adjungierte Kurve $(n-2)$ter Ordnung hindurchführen, welche die $C_n^{(2)}$ außer in der $n$elementigen rationalen Punktgruppe in einem, nicht der g_2^1 gehörigen rationalen Punktpaare schneidet.

Wenn wir aber eine rationale Punktgruppe der $C_n^{(2)}$ kennen, welche nicht zum kanonischen Punktsystem g_2^1 gehört, so können wir eine solche birationale Transformation mit rationalen Koeffizienten herstellen, welche die $C_n^{(2)}$ in eine (einen Doppelpunkt enthaltende) Kurve C vierter Ordnung mit rationalen Koeffizienten überführt.

Wir legen eine die $C_n^{(2)}$ im bekannten Punktpaare berührende adjungierte Kurve $(n-2)$ter Ordnung mit rationalen Koeffizienten, welche die $C_n^{(2)}$ außer in dem Punktpaare in einer $(n-2)$-elementigen rationalen Punktgruppe schneidet. Durch diese $(n-2)$-elementige rationale Punktgruppe* gehen zweifach unendlich viele adjungierte Kurven $(n-2)$ter Ordnung hindurch, deren Gleichung

$$(11) \qquad \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \lambda_3 \varphi_3 = 0$$

lautet, wo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ beliebige Konstanten, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ adjungierte Kurven $(n-2)$ter Ordnung mit rationalen Koeffizienten sind.

Wenden wir jetzt auf die Kurve $C_n^{(2)}$ $n$ter Ordnung vom Geschlechte zwei

$$(12) \qquad F(x, y) = 0$$

die birationale Transformation mit rationalen Koeffizienten

$$(13) \qquad \xi = \frac{\varphi_1(x, y)}{\varphi_3(x, y)}, \qquad \eta = \frac{\varphi_2(x, y)}{\varphi_3(x, y)}$$

an, so geht die Kurve (12) in eine einen Doppelpunkt enthaltende Kurve vierter Ordnung mit rationalen Koeffizienten

$$(14) \qquad f(\xi, \eta) = 0$$

über, weil das Kurvennetz (11) die Kurve (12) in vier veränderlichen Punkten schneidet.

Im allgemeinen können wir also immer eine Kurve $C_n^{(2)}$ durch birationale Transformation mit rationalen Koeffizienten in eine Kurve C überführen.

Zufolge dieser Transformation entspricht jedem rationalen Punkte, jedem rationalen Punktpaare der $C_n^{(2)}$ ein rationaler Punkt bzw. ein rationales Punktpaar der Kurve C und umgekehrt. Eine Ausnahme bilden nur die Fundamentalpunkte der transformierenden Kurven.

Zufolge dieser Beziehung zwischen den Kurven $C_n^{(2)}$ und C kann man die beiden Kurven als äquivalent betrachten, und eben darum werden wir uns im Folgenden nur mit der Kurve C beschäftigen.

Wir bemerken jetzt, daß man im allgemeinen jede Kurve $C_n^{(2)}$ durch birationale Transformation mit rationalen Koeffizienten in

---

* Statt dieser $(n-2)$elementigen rationalen Punktgruppe können wir die $(n-2)$elementige rationale Punktgruppe nehmen, in welcher die durch das rationale Punktpaar hindurchgehende Gerade die $C_n^{(2)}$ schneidet.

eine Kurve $C_6^{(2)}$ von der hyperelliptischen Form

$$(15) \qquad y^2 = R(x) = a_0 x^6 + a_1 x^5 + \cdots + a_6$$

überführen kann. Zum Beweis dieses Satzes genügt es zu beweisen, daß wir jede Kurve C in eine Kurve von der Form (15) transformieren können.

Die Gleichung einer Kurve C ist, wenn der Doppelpunkt der Anfang des Koordinatensystems ist, von der Form

$$(16) \qquad \varphi_2(x, y) + 2\varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) = 0,$$

wo $\varphi_2(x, y)$, $\varphi_3(x, y)$, $\varphi_4(x, y)$ homogene Funktionen 2ten, 3ten, bzw. 4ten Grades der Veränderlichen x, y sind.

Durch die birationale Transformation

$$\xi = \frac{y}{x}, \qquad \eta = \frac{\varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y)}{x^3}$$

geht die Kurve (16) in die Kurve

$$(17) \qquad \eta^2 = \varphi_3^2(1, \xi) - \varphi_2(1, \xi) \cdot \varphi_4(1, \xi)$$

über.

Von dieser Transformation werden wir im Folgenden keinen Gebrauch machen.

2.

Auf einer Kurve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte und rationalen Koeffizienten, welche wir im Folgenden auch kurz C nennen werden, schneiden die Strahlen des durch den Doppelpunkt hindurchgehenden Strahlenbüschels, welche rationale Koeffizienten haben, die zum kanonischen Punktsystem g_2^1 gehörigen rationalen Punktpaare aus. Solche Punktpaare werden wir perspektivische Punktpaare nennen, weil ihre zwei Punkte perspektivische Lage in betreff des Doppelpunktes haben.

Es gibt auf C außer den perspektivischen rationalen Punktpaaren im allgemeinen auch noch andere, sehr leicht auffindbare rationale Punktpaare. Solches Punktpaar schneiden die zwei Tangenten des Doppelpunktes aus C aus. Im allgemeinen Falle ist der Doppelpunkt reell und es haben seine Tangenten irrationale Koeffizienten, oder er ist isoliert und seine Tangenten haben imaginäre Koeffizienten. Es kommt nur in speziellen Fällen vor, daß wir auf der Kurve C statt des Punktpaares rationale Punkte erhalten. Ein solcher spezieller Fall liegt dann vor, wenn die zwei Tangenten rationale Koeffizienten haben, in welchem Falle beiden Tangenten aus C rationale Punkte ausschneiden; ferner wenn die Kurve C eine Spitze hat, in welchem Falle die Spitzentangente einen rationalen Punkt aus C ausschneidet, und endlich wenn die eine Tangente des Doppelpunktes Inflexionstangente ist, in welchem Falle die andere Tangente die C in einem rationalen Punkte trifft. In einem sehr speziellen Falle erhalten wir weder einen rationalen Punkt, noch rationale Punktpaare, wenn nämlich beide Tangenten des Doppelpunktes Inflexionstangenten sind.

Aus dem so erhaltenen rationalen Punktpaare oder Punkte können wir im allgemeinen zweifach unendlich viele rationale Punktpaare auf C konstruieren.

Aus einem rationalen (nicht perspektivischen) Punktpaare, oder, was für die Konstruktion nichts wesentlich vereinfacht, aus einem rationalen Punkte bietet die Ableitung rationaler Punktpaare Gelegenheit zur rein linearen Konstruktion, wobei also nur Schnittpunkte gewisser Geraden mit der Kurve C zu bestimmen sind.*

Dazu Anlaß gibt einerseits der Umstand, daß die durch ein rationales Punktpaar hindurchgehende Gerade aus C wieder ein rationales Punktpaar ausschneidet, andererseits aber der, daß die beiden Strahlen, die ein rationales Punktpaar vom Doppelpunkte aus projizieren, die Kurve C wieder in einem rationalen Punktpaare treffen.

Auf Grund dessen ist die angedeutete lineare Konstruktion der rationalen Punktpaare folgendermaßen durchführbar. Durch das gegebene rationale Punktpaar führen wir eine Gerade hindurch, welche die Kurve C in einem rationalen Punktpaare schneidet. Das so erhaltene rationale Punktpaar projizieren wir aus dem Doppelpunkte auf die Kurve C, und durch das erhaltene neue rationale Punktpaar führen wir wieder eine Gerade hindurch usw. Dieses Verfahren können wir auch rück-

* Hiermit wollen wir nicht behaupten, daß wir die rationalen Punktpaare mit dem Lineal in der Tat konstruieren können, wenn die Kurve C aufgezeichnet ist; die Punkte des rationalen Punktpaares sind nämlich nicht notwendigerweise reell.

wärts fortsetzen, wenn wir das gegebene rationale Punktpaar, statt durch dasselbe eine Gerade hindurch zu führen, aus dem Doppelpunkte auf die Kurve projizieren und durch das so erhaltene Punktpaar eine Gerade hindurchführen usw.

Die durch dies Verfahren erhaltenen Punktpaare erschöpfen im allgemeinen die aus dem gegebenen rationalen Punktpaare ableitbaren rationalen Punktpaare nicht. Wir erhalten neue rationale Punktpaare, wenn wir durch das gegebene einen adjungierten Kegelschnitt mit Berührung erster Ordnung hindurchführen und für das so erhaltene rationale Punktpaar die oben erwähnte Konstruktion anwenden. Durch zwei rationale Punktzweier unter den vorher erhaltenen führen wir wieder einen adjungierten Kegelschnitt hindurch und wenden für das dadurch ausgeschnittene Punktpaar wieder die lineare Konstruktion an. Es ist unnötig, bei der Konstruktion adjungierte Kurven höherer Ordnung in Anspruch zu nehmen, weil wir die sämtlichen rationalen Punktpaare, die aus einem ableitbar sind, durch Gerade und adjungierte Kegelschnitte konstruieren können, wie es aus dem folgenden Paragraphen hervorgehen wird.

Es geht aus den erwähnten zwei Konstruktionen hervor, daß sie nicht vereinfacht werden, wenn ein rationaler Punkt statt eines rationalen Punktpaares bekannt ist, weil man sowohl beim Konstruieren der Geraden wie bei dem der Kegelschnitte, durch die wir zu neuen rationalen Punktpaaren gelangen, einer aus einer paaren Anzahl von Punkten bestehenden rationalen Punktgruppe bedarf.

Wenn auch ein solches rationales Punktpaar auf der Kurve C bekannt ist, das von den aus dem vorigen Punktpaare ableitbaren verschieden ist, so können wir aus diesem durch die erwähnte Konstruktion im allgemeinen unendlich viele rationale Punktpaare ableiten, aber wir erhalten außer diesen noch neue, wenn wir adjungierte Kegelschnitte durch solche zwei Punktpaare hindurchführen, unter denen das eine aus dem ersten, das andere aus dem zweiten Punktpaare konstruierbar ist. Aus mehreren voneinander unabhängigen rationalen Punktpaaren (unter denen keines aus den übrigen ableitbar ist) konstruierbare Punktpaar können wir auf Grund des Bisherigen leicht aufsuchen.

3.

Wir charakterisieren die auf C befindlichen rationalen Punktpaare auch hier durch ihre Argumente. Der Einfachheit halber nehmen wir nicht nur an, daß die unteren Grenzen der in den Argumenten vorkommenden Integrale dieselben sind, sondern auch, daß diese untere Grenze einer der sechs Punkte ist, deren Tangenten durch den Doppelpunkt hindurchgehen.

Bei einer derartigen Wahl der unteren Grenze nach dem ABELschen Theorem sind die Argumente der perspektivischen Punktpaare

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0.$$

Wenn $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ auch jetzt die Argumente einer beliebigen Geraden bezeichnen, so sind, weil die Argumente eines perspektivischen Punktpaares Null sind, die zum Doppelpunkte (als rationalem Punktpaare) gehörigen Argumente

$$\delta_1 = \varkappa_1, \quad \delta_2 = \varkappa_2,$$

und die Argumente des rationalen Punktpaares, das die zwei Tangenten des Doppelpunktes ausschneiden,

$$-\varkappa_1, \quad -\varkappa_2.$$

Wir stellen durch die Argumente (α_1, α_2) eines rationalen (nicht perspektivischen) Punktpaares die Argumente der daraus linear konstruierbaren rationalen Punktpaare sehr einfach dar.

Die durch das Punktpaar (α_1, α_2) hindurchgehende Gerade schneidet aus der Kurve C das rationale Punktpaar mit den Argumenten

$$\varkappa_1 - \alpha_1, \quad \varkappa_2 - \alpha_2$$

aus. Wenn wir aber das Punktpaar (α_1, α_2) aus dem Doppelpunkte auf die Kurve projizieren, so werden die Argumente des erhaltenen Punktpaares, weil die Argumente eines perspektivischen Punktpaares gleich Null sind,

$$-\alpha_1, \quad -\alpha_2.$$

Auf Grund dessen können wir leicht einsehen, daß die Argumente der aus dem rationalen Punktpaare (α_1, α_2) linear konstruierbaren rationalen Punktpaare entweder die Form

$$\alpha_1 + n\varkappa_1, \quad \alpha_2 + n\varkappa_2,$$

oder die Form

$$-\alpha_1 + n\varkappa_1, \quad -\alpha_2 + n\varkappa_2$$

haben, wo n jede ganze Zahl sein kann; und zwar haben die Argumente des Punktpaares die erste oder die zweite Form, je nachdem wir mit einer paaren oder unpaaren Anzahl von Schritten aus dem rationalen Punktpaare (α_1, α_2) zum betreffenden rationalen Punktpaare gelangten.

Auch die Argumente der aus dem Punktpaare (α_1, α_2) durch adjungierte Kegelschnitte konstruierbaren Punktpaare können wir einfach durch die Argumente α_1, α_2 darstellen. Die Argumente, die zu den sechs Schnittpunkten eines adjungierten Kegelschnittes gehören, sind

$$2\varkappa_1 - \varkappa_1 = \varkappa_1, \quad 2\varkappa_2 - \varkappa_2 = \varkappa_2,$$

also sind die Argumente des rationalen Punktpaares, welches der im Punktpaare (α_1, α_2) berührende adjungierte Kegelschnitt aus C ausschneidet,

$$-2\alpha_1 + \varkappa_1, \quad -2\alpha_2 + \varkappa_2.$$

Der durch dieses und das rationale Punktpaar $(-\alpha_1, -\alpha_2)$ hindurchgehende adjungierte Kegelschnitt trifft die Kurve C im Punktpaare mit den Argumenten

$$3\alpha_1, \quad 3\alpha_2.$$

Der adjungierte Kegelschnitt, der durch das letztere und das rationale Punktpaar $(\alpha_1 + \varkappa_1, \alpha_2 + \varkappa_2)$ hindurchgeht, schneidet aus der Kurve C das rationale Punktpaar

$$(-4\alpha_1, -4\alpha_2)$$

aus, usw.

Wir können also sagen, daß die Argumente der rationalen Punktpaare, die aus dem rationalen Punktpaare (α_1, α_2) konstruierbar sind, durch die Argumente

$$n\alpha_1 + m\varkappa_1, \quad n\alpha_2 + m\varkappa_2 \tag{18}$$

bestimmt sind, wo n und m jeden ganzzahligen Wert annehmen können. Den Werten $\alpha = 0$, $m = 0$ entsprechen alle perspektivischen Punktpaare, den Werten $n = 0$, $m \neq 0$ diejenigen rationalen Punktpaare, die aus dem durch die Tangenten des Doppelpunktes ausgeschnittenen Punktpaare konstruierbar sind.

Im allgemeinen Falle haben wir aus der $p$elementigen rationalen Punktgruppe $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ die $p$elementigen rationalen Punktgruppen

$$\alpha + m\bar{\alpha} + k\sigma$$

erhalten, wo m und k beliebige ganze Zahlen,

$$\bar{\alpha} = \varepsilon\alpha + \mu_0 \varkappa + \lambda_0 \delta,$$

$$\sigma = \frac{n}{\varrho} \varkappa + \frac{2d}{\varrho} \delta$$

sind, und λ_0 und μ der Gleichung

$$2d\lambda - n\mu = \varepsilon p$$

Genüge leisten.

Im Falle der Kurve C sind

$$n = 4, \; 2d = 2, \; \varepsilon = 1, \; p = 2, \; \varrho = 4, \; \lambda_0 = 1, \; \mu_0 = 0,$$

ferner haben wir, wegen der der unteren Grenze der Integrale auferlegten Beschränkung,

$$\delta_1 = \varkappa_1, \quad \delta_2 = \varkappa_2 .$$

Infolgedessen bekommen wir, wenn wir das allgemeine Verfahren auf die Kurve C anwenden, nur die rationalen Punktpaare

$$(m+1)\alpha + (m+3k)\varkappa,$$

wo m und k beliebige ganze Zahlen sind. Die so erhaltenen Punktgruppen können wir auch in folgender Form schreiben:

$$m\alpha + (m+2+3k)\varkappa.$$

Der Grund dafür, daß diese Formel mit der vorhin erhaltenen Formel (18) nicht übereinstimmt, ist der, daß, worauf wir als speziellen Fall am Ende des ersten Paragraphen des zweiten Kapitels hinwiesen, wenn wir $q = 2$ benutzen, die bei der zweiten Konstruktion von POINCARÉ angewandte rationale Hilfspunktgruppe ebenfalls ein rationales Punktpaar ist.

Wenn wir dieses beachten, so erhalten wir alle aus dem rationalen Punktpaare α konstruierbaren Punktpaare. Wenn wir nämlich durch zwei rationale Punktpaare

$$m_1\alpha + (m_1 + 2 + 3k_1)\varkappa, \quad m_2\alpha + (m_2 + 2 + 3k_2)\varkappa$$

einen adjungierten Kegelschnitt hindurchführen, sind die Argumente des ausgeschnittenen Punktpaares von der Form

$$m\alpha + (m+3k)\varkappa.$$

Wenn wir aber durch zwei rationale Punktpaare von der Form

$$m_1 \alpha + (m_1 + 2 + 3k_1)\varkappa, \quad m_2 \alpha + (m_2 + 3k)\varkappa$$

einen adjungierten Kegelschnitt hindurchführen, so erhalten wir ein rationales Punktpaar von der Form

$$m\alpha + (m + 1 + 3k)\varkappa.$$

Mit diesem Verfahren erhalten wir also die sämtlichen rationalen Punktpaare von der Form

$$n\alpha + m\varkappa,$$

wo n und m beliebige ganze Zahlen sind.

Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ voneinander unabhängige (nicht perspektivische) rationale Punktpaare sind, d. h. keines aus den übrigen ableitbar ist, so sind aus diesen jene und nur jene rationalen Punktpaare ableitbar, welche die Argumente

$$n_1 \alpha_1 + n_2 \beta_1 + n_3 \gamma_1 + \cdots + m\varkappa_1,$$
$$n_1 \alpha_2 + n_2 \beta_2 + n_3 \gamma_2 + \cdots + m\varkappa_2$$

haben, wo $n_1, n_2, n_3, \ldots, m$ beliebige ganze Zahlen sind. Dem Falle

$$n_1 = n_2 = n_3 = \cdots = m = 0$$

entsprechen die perspektivischen Punktpaare, dem Falle

$$n_1 = n_2 = \cdots = 0, \quad m \neq 0$$

aber entsprechen die unendlich vielen rationalen Punktpaare, welche aus dem von den Tangenten des Doppelpunktes ausgeschnittenen rationalen Punktpaare ableitbar sind.

Wenn alle rationalen Punktpaare auf der Kurve C aus den k rationalen Punktpaaren $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ ableitbar, aber keiner dieser k Punktpaaren aus den übrigen konstruierbar ist, so nennen wir diese Punktpaare primitiv, ihre Anzahl k aber den Rang der rationalen Punktpaare auf der Kurve C. Diese letztere Zahl ist offenbar für birationale Transformation mit rationalen Koeffizienten invariant.

Wir erwähnen noch, daß die primitiven rationalen Punktpaare keinesfalls bestimmte rationale Punktpaare sind, denn, wenn (α_1, α_2) ein primitives rationales Punktpaar ist, so kann auch $(\alpha_1 + m\varkappa_1, \ \alpha_2 + m\varkappa_2)$ oder $(-\alpha_1 + m\varkappa_1, \ -\alpha_2 + m\varkappa_2)$ ein solches sein.

Zum Schluß bemerken wir, daß unsere Entwicklungen auch dann bestehen bleiben, wenn die Kurve (3) oder $C_n^{(2)}$ oder C keine rationalen Koeffizienten hat. In diesem Falle müssen die Koeffizienten der angewandten adjungierten und nichtadjungierten Kurven und der birationalen Transformation im Zahlkörper der Koeffizienten der Kurve rational sein, und p Punkte bilden auf der Kurve eine $p$elementige rationale Punktgruppe, wenn die elementaren symmetrischen Funktionen ihrer Koordinaten in diesem Zahlkörper rational sind.

5.

ÜBER DIE ADDITIVE DARSTELLUNG EINIGER ZAHLENTHEORETISCHER FUNKTIONEN.*

Von MICHAEL FEKETE.

I. Einleitung.

Der Zweck vorliegender Arbeit ist eine solche Darstellung einiger elementarer, jedoch in den zahlentheoretischen Untersuchungen wichtiger Funktionen, welche die Kenntnis der Zerlegung des Argumentes in Primfaktoren nicht erfordert. Wir wollen also diese Funktionen auf Grund ihrer Definition durch solche analytische Ausdrücke darstellen, die explizite nur vom Zahlenwerte des Argumentes abhängen und keine besondere Darstellungsweise dieser Argumente voraussetzen.

Von den zwei gebräuchlichen Darstellungsarten zahlentheoretischer Funktionen: der multiplikativen und der additiven, kann nur die letztere ohne Zerlegung des Argumentes in Primfaktoren zur Bestimmung des Funktionenwertes führen.

Die sogenannte multiplikative Darstellung ist nämlich an die Existenz einer Funktionalgleichung von der speziellen Gestalt

$$f(n_1 n_2) = \varepsilon f(n_1) f(n_2) \qquad (\varepsilon = 1 \text{ oder } 2)$$

gebunden, wo n_1 und n_2 teilerfremd sind und gibt dann auf Grund dieser Funktionalgleichung für $f(n)$ die Formel

$$f(n) = \varepsilon^{r-1} f(p_1^{\alpha_1}) f(p_2^{\alpha_2}) \ldots f(p_r^{\alpha_r}),$$

wo n in Primfaktoren gleich $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ ist. Diese Art der Darstellung bedingt also die Kenntnis der Zerlegung des Argumentes in Primfaktoren.

---

* Ungarisch erschienen in den „Math. és Phys. Lapok“ Jahrgang 1909.

Dem gegenüber gibt die additive Darstellung die zu bestimmende Funktion $f(n)$ in der Gestalt einer Summe von gewissen Substitutionswerten einer zu $f(n)$ „adjungierten" Funktion eines oder mehrerer Argumente, und dies kann mitunter ohne alle Primfaktorenzerlegung gelingen.

Wir werden die Möglichkeit und die Art der additiven Darstellung ohne Primzahlenzerlegung des Argumentes im Falle folgender Funktionen mitteilen:

$\varphi(n)$ und $\psi(n)$: die Anzahl bzw. die Summe derjenigen Zahlen, die nicht größer als n und zu n relativ prim sind;

$S(n)$ und $\Sigma(n)$: die Anzahl bzw. die Summe sämtlicher Divisoren von n;

$\varrho(n)$ und $\sigma(n)$: die Anzahl bzw. die Summe derjenigen Teiler d von n, die zu dem assoziierten Teiler $\frac{n}{d}$ relativ prim sind.

Bezeichnen wir den größten gemeinsamen Teiler von k und n mit (k, n) und definieren $a_n(k)$, $b_n(k)$, $c_n(k)$ so, daß:

$a_n(k) = 1$, wenn $(k, n) = 1$, während $a_n(k) = 0$, wenn $(k, n) > 1$;

$b_n(k) = 1$, wenn $(k, n) = k$, während $b_n(k) = 0$, wenn $(k, n) < k$; $k \leqq n$;

$c_n(i, k) = 1$, wenn $ik = n$ und $(i, k) = 1$; $c_n(i, k) = 0$, wenn $ik \neq n$ oder $(i, k) > 1$,

so können unsere obigen sechs Funktionen in der folgenden Weise dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
\varphi(n) &= \sum_{k=1}^{n} a_n(k), & \psi(n) &= \sum_{k=1}^{n} k a_n(k), \\
S(n) &= \sum_{k=1}^{n} b_n(k), & \Sigma(n) &= \sum_{k=1}^{n} k b_n(k), \\
\varrho(n) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_n(i, k), & \sigma(n) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (i + k)\, c_n(i, k).
\end{aligned} \tag{1}$$

Unser nächster Zweck ist $a_n(k)$, $b_n(k)$ und $c_n(i, k)$ explizite aus den Zahlenwerten ihrer Argumente und des als Parameter fungierenden n ohne deren Primteilerzerlegungen darzustellen. Zu diesem Zwecke werden wir diese Funktionen mittels der Hauptminoren der SYLVESTERschen Resultante der Binomen (x^n-1) und (x^k-1) bzw. (x^n-1) und (x^i-1) ausdrücken.

Bezeichnen wir die SYLVESTERsche Resultante der Binomen $(x^\alpha-1)$ und $(x^\beta-1)$ mit $R_{\alpha,\beta}$ und ihren, nach Abtrennung der letzten γ Zeilen und letzten γ Spalten überbleibenden γten Hauptminor mit $R_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}$, so werden wir

$$
\begin{aligned}
a_n(k) &= |R_{k,n}^{(1)}|,\\
b_n(k) &= 1-|R_{k,n}^{(k-1)}|, \qquad\qquad (2)\\
c_n(i,k) &= |R_{i,k}^{(1)}|\left(1-|R_{k,n}^{(k-1)}|\right)\left(1-|R_{i,n}^{(i-1)}|\right)\left(1-|R_{ik,n}^{(ik-1)}|\right)
\end{aligned}
$$

finden, wo $|\ |$ den absoluten Wert bedeutet.

Zufolge dieser Formeln entsprechen die Darstellungen (1) von $\varphi(n)$, $\psi(n)$, $S(n)$, $\Sigma(n)$, $\varrho(n)$ und $\sigma(n)$ in der Tat der Forderung, daß sie keine Zerlegung in Primfaktoren bedingen. Unsere eigentliche Aufgabe ist also, die Formeln (2) zu verifizieren. Dies geschieht mittels zweier Lemmen über die SYLVESTERsche Resultante solcher binomischer Gleichungen, welche die Einheitswurzeln geben. Die Formulierung und der Beweis dieser Lemmen ist die Aufgabe des nächstfolgenden Kapitels.

II. Zwei Lemmen über die SYLVESTERsche Resultante der binomischen Gleichungen $x^k-1=0$ und $x^n-1=0$.

Unter der SYLVESTERschen Resultante zweier Gleichungen

$$
\begin{aligned}
f(x) &\equiv a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_k=0\\
g(x) &\equiv b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n=0
\end{aligned}
$$

versteht man bekanntlich die Determinante

$$
R=\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_k & 0 & . & \dots 0 & 0\\
0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} & a_k & . & \dots 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & & a_0 & a_1 & \dots a_{k-1} & a_k\\
b_0 & b_1 & b_2 & \dots & & b_{n-1} & b_n & \dots 0 & 0\\
0 & b_0 & b_1 & \dots & & b_{n-2} & b_{n-1} & \dots 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \dots & b_0 & . & . & \dots b_{n-1} & b_n
\end{vmatrix}.
$$

Streichen wir die letzten i Zeilen und die letzten i Spalten, so erhalten wir einen Minor $(k+n-i)$ten Grades, den wir mit $R^{(i)}$ bezeichnen und kurz den $i$ten Hauptminor von R nennen wollen, da in unseren Untersuchungen keine anderen Hauptminoren von R vorkommen werden. Die beiden Lemmen, die wir benötigen, können wir nun in der folgenden Weise ausdrücken:

1. Sollen

$$x^n - 1 = 0 \quad \text{und} \quad x^k - 1 = 0$$

wenigstens δ gemeinsame Wurzeln haben, so ist dazu notwendig und hinreichend, daß ihre SYLVESTERsche Resultante samt dem ersten, zweiten, . . ., $(\delta - 1)$ten Hauptminor verschwinde.

2. Wenn die Gleichungen

$$x^n - 1 = 0 \quad \text{und} \quad x^k - 1 = 0$$

genau δ gemeinschaftliche Wurzeln haben, dann ist der absolute Wert jedes Hauptminors ihrer SYLVESTERschen Resultante von dem δten Hauptminor an gleich 1.

Das erste Lemma ist die Spezialisierung für den Fall der binomischen Gleichungen des folgenden allgemeineren Satzes:

1*. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die folgenden, keine Nullwurzel besitzenden, sonst aber beliebigen Gleichungen

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k = 0 \\ g(x) &\equiv b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

wenigstens δ gemeinschaftliche Wurzeln besitzen, besteht in dem Verschwinden der SYLVESTERschen Resultante R und ihres ersten, zweiten, . . ., $(\delta - 1)$ten Hauptminors. (Die mehrfachen Wurzeln sind hier und im Folgenden mit ihrer Multiplizität zu zählen.)

Von diesen zwei, unter 1. und 1*. vorgeführten Sätzen, die neue Kriterien der Existenz gemeinschaftlicher Wurzeln geben, werden wir gleich dem allgemeineren Satz 1* beweisen. Da der Satz für $\delta = 1$ bekannt ist, so können wir hierzu die Methode der vollständigen Induktion benutzen.

Nehmen wir also an, daß 1* im Falle $\delta = i$ richtig ist; wenn wir dann die Richtigkeit für den Fall $\delta = i + 1$ beweisen wollen, so müssen wir nur darlegen, daß für zwei Gleichungen mit wenigstens i gemeinschaftlichen Wurzeln zur Existenz einer $(i+1)$ten gemeinschaftlichen Wurzel die hinreichende und notwendige Bedingung im Verschwinden des $i$ten Hauptminors $R^{(i)}$ besteht.

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_k$ bzw. $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Wurzeln der Gleichungen $f(x)=0$ bzw. $g(x)=0$ und seien $y_1, y_2, \ldots, y_i$ bzw. $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{k-i+1}$ die schon als gemeinschaftlich erkannten Wurzeln. Um die behauptete Eigenschaft des $R^{(i)}$ zu beweisen, stellen wir diesen Hauptminor als Funktion der Wurzeln unserer Gleichungen dar. Multiplizieren wir zu diesem Zwecke die Determinante

$$R^{(i)} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & & a_k & 0 & & \ldots & 0 \\ 0 & a_0 & \ldots & & a_{k-1} & a_k & & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 & & & \ldots & a_k \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_0 & & & \ldots & a_{k-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & & & a_0 & a_1 & \ldots & a_{k-i} \\ b_0 & b_1 & \ldots & & & b_{n-1} & b_n & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_0 & & & & \ldots & b_n \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} (n-i \text{ Zeilen}) \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} (i \text{ Zeilen}) \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} (k-i \text{ Zeilen}) \end{matrix}$$

mit der folgenden

$$D = \begin{vmatrix} y_1^{k+n-1} & y_2^{k+n-2} & \ldots & y_1^i \\ y_2^{k+n-1} & y_2^{k+n-2} & \ldots & y_2^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_n^{k+n-1} & y_n^{k+n-2} & \ldots & y_n^i \\ x_1^{k+n-1} & x_1^{k+n-2} & \ldots & x_1^i \\ x_2^{k+n-1} & x_2^{k+n-2} & \ldots & x_2^i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k-i}^{k+n-1} & x_{k-i}^{k+n-2} & \ldots & x_{k-i}^i \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n \text{ Zeile} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} k-i \text{ Zeile.} \end{matrix}$$

Komponieren wir Reihen mit Reihen und berücksichtigen dabei die Relationen $f(x_1)=\cdots=f(x_k)=g(y_1)=\cdots=g(y_n)=0$, so bekommen wir $DR^{(i)}$ gleich

$$\left.\begin{array}{cccccc}
y_1^{n-1}f(y_1) & \ldots & y_n^{n-1}f(y_n) & 0 & \ldots & 0 \\
y_1^{n-2}f(y_1) & \ldots & y_n^{n-2}f(y_n) & 0 & \ldots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
y_1^{i}f(y_1) & \ldots & y_n^{i}f(y_n) & 0 & \ldots & 0 \\
y_1^{i-1}[f(y_1)-h_0(y_1)] & \ldots & y_n^{i-1}[f(y_n)-h_0(y_n)] & -x_1^{i-1}h_0(x_1) & \ldots & -x_{k-i}^{i-1}h_0(x_{k-i}) \\
y_2^{i-2}[f(y_1)-h_1(y_1)] & \ldots & y_n^{i-2}[f(y_n)-h_1(y_n)] & -x_1^{i-2}h_1(x_1) & \ldots & -x_{k-i}^{i-2}h_1(x_{k-i}) \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
y_1[f(y_1)-h_{i-2}(y_1)] & \ldots & y_n[f(y_n)-h_{i-2}(y_n)] & -x_1h_{i-2}(x_1) & \ldots & -x_{k-i}h_{i-2}(x_{k-i}) \\
[f(y_1)-h_{i-1}(y_1)] & \ldots & [f(y_n)-h_{i-1}(y_n)] & -h_{i-1}(x_1) & \ldots & -h_{i-1}(x_{k-i}) \\
0 & \ldots & 0 & x_1^{k-1}g(x_1) & \ldots & x_{k-i}^{k-1}g(x_{k-i}) \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \ldots & 0 & x_1^{i}g(x_1) & \ldots & x_{k-i}^{i}g(x_{k-i})
\end{array}\right|,$$

wo

$$h_\lambda(x) = a_k + a_{k-1}x + \cdots + a_{k-\lambda}x^\lambda.$$

Da $y_1, y_2, \ldots, y_i$ gemeinschaftliche Wurzeln der Gleichungen $f(x) = 0$ und $g(x) = 0$ sind, also $f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_i)$ verschwinden, so ist nach dem LAPLACEschen Satze:

$$D \cdot R^{(i)} = (-1)^\alpha D_1 \varDelta(y_{i+1}, \ldots, y_n) \cdot (y_{i+1}y_{i+2}\cdots y_n)^i f(y_{i+1}) \cdots$$
$$f(y_n) \varDelta(x_1, x_2, \ldots, x_{k-i})(x_1 \ldots x_{k-i})^i g(x_1) \ldots g(x_{k-i}),$$

wo α eine ganze Zahl ist, deren nähere Bedeutung uns hier nicht interessiert, und wo $\varDelta(y_{i+1}, \ldots, y_n)$ und $\varDelta(x_1, x_2, \ldots, x_{k-i})$ die VANDERMONDEsche Determinante ihrer Argumente, D_1 aber die folgende Determinante bedeutet:

$$\begin{vmatrix}
a_k y_1^{i-1} & \ldots & a_k y_i^{i-1} \\
a_{k-1}y_1^{i-1} + a_k y_1^{i-2} & \ldots & a_{k-1}y_i^{i-1} + a_k y_i^{i-2} \\
\vdots & & \vdots \\
a_{k-i+2}y_1^{i-1} + \cdots + a_k y_1 & \ldots & a_{k-i+2}y_i^{i-1} + \cdots + a_k y_i \\
a_{k-i+1}y_1^{i-1} + \cdots + a_k & \ldots & a_{k-i+1}y_i^{i-1} + \cdots + a_k
\end{vmatrix}$$

Einfache Umgestaltungen der Determinanten zeigen uns, daß

$$D_1 = (-1)^\beta a_k^i \varDelta(y_1, y_2 \ldots, y_i).$$

Anderseits ist

$$D = (-1)^\gamma (y_1 y_2 \ldots y_n)^i (x_1 x_2 \ldots x_{k-i})^i \varDelta(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_{k-i})$$
$$= (-1)^\varepsilon b_n^i (x_1 \ldots x_{k-i})^i \varDelta(y_1, \ldots, y_n) \varDelta(x_1, \ldots, x_{k-i}) g(x_1) \ldots g(x_{k-i}),$$

also ist das Produkt

$$b_n^i(x_1 \dots x_{k-i})^i \varDelta(y_1, \dots, y_n) \varDelta(x_1, \dots, x_{k-i}) g(x_1) \dots g(x_{k-i}) R^{(i)}$$

vom Vorzeichen abgesehen gleich dem Produkte

$$a_k^i \varDelta(y_1, \dots, y_i) \varDelta(y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_n) \varDelta(x_1, \dots, x_{k-i})$$
$$g(x_1) \dots g(x_{k-i})(x_1 \dots x_{k-i})^i f(y_{i+1}) \dots f(y_n)(y_{i+1} \dots y_n)^i.$$

Diese Gleichung ist in $x_1, x_2, \dots, x_k$ und in $y_1, y_2, \dots, y_n$ eine identische Gleichung, welche bei jedem Wertsystem dieser Variabeln besteht, vorausgesetzt, daß auch durch die Relationen:

$$f(y_1) = \dots = f(y_i) = g(x_k) = \dots = g(x_{k-i+1}) = 0$$

bestehen. Wir dürfen also beide Produkte mit dem Koeffizienten des $R^{(i)}$ dividieren, woraus folgt, daß:

$$R^{(i)} = (-1)^\vartheta \frac{a_k^i \varDelta(y_1, \dots, y_i) \varDelta(y_{i+1}, \dots, y_n)}{b_n^i \varDelta(y_1 \dots, y_i, y_{i+1}, \dots, y_n)} (y_{i+1} y_{i+2} \dots y_n)^i.$$
$$\cdot f(y_{i+1})(y_{i+2}) \dots f(y_n). \tag{4}$$

Im Falle, wo die Gleichung $g(y) = 0$ nur einfache Wurzeln besitzt, sind die Größen

$$\varDelta(y_1, \dots, y_i), \qquad \varDelta(y_{i+1}, \dots, y_n), \qquad \varDelta(y_1, \dots, y_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$$

von 0 verschieden; in diesem Falle können wir also schon aus der oben aufgeschriebenen Form des $R^{(i)}$ darauf schließen, daß $R^{(i)} = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung der Existenz einer $(i+1)$ten Wurzel ist. Um aber auch dann zu dieser Einsicht zu gelangen, wenn wir von den Wurzeln der Gleichung $g(x) = 0$ nur das eine fordern, daß sie von 0 verschieden seien, werden wir die rechte Seite der Gleichung (4) umformen.

Wir werden in Betracht ziehen, daß einerseits

$$\varDelta(y_1, \dots, y_i, y_{i+1}, \dots, y_n) =$$
$$= \varDelta(y_1, \dots, y_i) \varDelta(y_{i+1}, \dots, y_n) \prod_{j=i+1}^{n} (y_j - y_1) \dots (y_j - y_i),$$

andererseits

$$f(y_{i+1}) \dots f(y_n)$$
$$= a_0^{n-i} \prod_{j=i+1}^{n} (y_j - x_1) \dots (y_j - x_{k-i})(y_j - x_{k-i+1}) \dots (y_j - x_k)$$
$$= a_0^{n-i} \prod_{l=1}^{k-i} \prod_{j=i+1}^{n} (y_j - x_l) \cdot \prod_{j=i+1}^{n} (y_j - y_1) \dots (y_j - y_i),$$

woraus folgt, daß:

$$R^{(i)} = (-1)^{\vartheta} a_0^{n-i} \frac{a_k^i}{b_n^i} (y_{i+1} y_{i+2} \dots y_n)^i \prod_{l=1}^{k-i} \prod_{j=i+1}^{n} (y_j - x_l). \qquad (5)$$

Nach unserer Annahme sind a_k und b_n von 0 verschieden, also folgt aus Relation (5), daß $R^{(i)} = 0$ die hinreichende und notwendige Bedingung zur Existenz einer $(i+1)$ten gemeinsamen Wurzel ist.

Bevor wir den Beweis des Lemma II geben, wollen wir bemerken, daß der gemeinschaftliche Teiler der Binomen $x^k - 1$ und $x^n - 1$ immer die Gestalt

$$x^{\delta} - 1$$

besitzt, wo δ der größte gemeinschaftliche Teiler der Zahlen k und n ist.

Auf Grund dessen kann das Lemma II. in folgender Weise gefaßt werden:

Wenn $(n, k) = \delta$, dann ist

$$\left| R_{k,n}^{(\delta)} \right| = \left| R_{k,n}^{(\delta+1)} \right| = \dots = \left| R_{k,n}^{(k+n-1)} \right| = 1.$$

Den Beweis dieses Satzes werden wir in zwei Teilen geben: vorerst werden wir beweisen, daß, wenn $(n, k) = \delta$, dann ist $\left| R_{\varkappa,n}^{(\delta)} \right| = 1$; sodann werden wir dieses Ergebnis mit Hilfe der vollständigen Induktion verallgemeinern, indem wir zeigen, daß wenn $\left| R_{k,n}^{(i)} \right| = 1$, dann auch $\left| R_{k,n}^{(i+1)} \right|$ gleich 1 ist. Dabei ist natürlich $i \geqq \delta$ angenommen.

Indem wir die Formel (4) im Falle

$$f(x) \equiv x^k - 1, \quad g(x) \equiv x^n - 1, \quad i = \delta$$

aufschreiben, bekommen wir:

$$R_{k,n}^{(\delta)} = (-1)^{\vartheta} \frac{\Delta(y_1, \dots, y_\delta) \Delta(y_{\delta+1}, \dots, y_n)}{\Delta(y_1, \dots, y_\delta, y_{\delta+1}, \dots, y_n)} \cdot$$
$$\cdot f(y_{\delta+1}) \dots f(y_n) (y_{\delta+1} \dots y_n)^{\delta}.$$

Nun ist aber:

$$(y_{\delta+1} y_{\delta+2} \dots y_n)^{\delta} = \frac{(-1)^{\delta n}}{y_1^{\delta} y_2^{\delta} \dots y_\delta^{\delta}} = (-1)^{\delta n},$$

weil die gemeinschaftlichen Wurzeln unserer Gleichungen, y_1, $y_2, \dots, y_\delta$ der Gleichung $x^{\delta} - 1 = 0$ genügen; also ist

$$R^{(\delta)}_{\varkappa,n} = (-1)^{\lambda} \frac{\Delta(y_1,\ldots,y_\delta)\Delta(y_{\delta+1},\ldots,y_n)}{\Delta(y_1,\ldots,y_\delta,y_{\delta+1},\ldots,y_n)} f(y_{\delta+1})\ldots f(y_n).$$

Nehmen wir jetzt in Betracht, daß:

$$\Delta(y_1,\ldots,y_\delta,y_{\delta+1},\ldots,y_n) =$$

$$= \Delta(y_1,\ldots,y_\delta)\Delta(y_{\delta+1},\ldots y_n) \prod_{j=\delta+1}^{n} (y_j - y_1)\ldots(y_j - y_\delta)$$

und daß

$$\prod_{r=1}^{\delta} (x - y_r) = x^\delta - 1.$$

Auf Grund dessen ist:

$$R^{(\delta)}_{k,n} = (-1)^{\lambda} \frac{(y^k_{\delta+1} - 1)\ldots(y^k_n - 1)}{(y^\delta_{\delta+1} - 1)\ldots(y^\delta_n - 1)}.$$

Um die Relation $\left|R^{(\delta)}_{\varkappa,n}\right| = 1$ verifizieren zu können, werden wir beweisen, daß die Zahlenfolgen:

$$y^\delta_{\delta+1}, y^\delta_{\delta+2},\ldots, y^\delta_n \tag{α}$$

$$y^k_{\delta+1}, y^k_{\delta+2},\ldots, y^k_n \tag{β}$$

abgesehen von der Reihenfolge ihrer Glieder mit einander identisch sind.

Es sei $n = n'\delta$, $k = k'\delta$. Vor allem ist es evident, daß die Glieder der Zahlenfolgen (α) und (β) n'-te Einheitswurzeln sind.

Das allgemeine Glied der Zahlenfolge (α) ist:

$$\cos\frac{2\pi(qn'+r)}{n'} + i\sin\frac{2\pi(qn'+r)}{n'}.$$

Das allgemeine Glied der Zahlenfolge (β) ist:

$$\cos\frac{2\pi(qk'n'+rk')}{n'} + i\sin\frac{2\pi(qk'n'+rk')}{n'}.$$

Die hier in Betracht zu nehmenden Werte von q, bzw. r sind die folgenden:

$$q = 0, 1, 2, \ldots, \delta - 1; \quad r = 1, 2, \ldots, n' - 1.$$

In der Zahlenfolge (α) kommen also sämtliche n'-te Einheitswurzeln vor (die Einheit ausgenommen), und zwar wiederholt sich jede δ-mal. Gleiches gilt auch von der Zahlenfolge (β), denn während r mod. n' die sämtlichen Werte des vollständigen Restsystems durchläuft, nimmt, zufolge $(k', n') = 1$, auch $k'r$ die sämtlichen Werte desselben an. Es stehen demnach in unserer obigen Formel für $R^{(\delta)}_{k,n}$ im Zähler und im Nenner dieselben Faktoren, und wir haben in der Tat:

$$|R^{(\delta)}_{k,n}| = 1.$$

Nunmehr gehen wir zu dem Beweise dessen über, daß, wenn $(n, k) = \delta$, dann ist außer dem δ-ten auch der $(\delta + 1)$-te, $(\delta + 2), \ldots$, $(n + k - 1)$-te Hauptminor des $R_{k,n}$ dem absoluten Werte nach gleich 1.

Daß der k-te, $(k+1)$-te, ..., $(n+k-1)$-te Hauptminor diese Eigenschaft besitzt, folgt unmittelbar schon aus der Form der Determinante $R_{\varkappa n}$; die Richtigkeit der Gleichung $|R^{(i)}_{k,n}| = 1$ ist also nur im Falle $\delta < k$ und bei denjenigen Werten von i zu beweisen, welche die Bedingung

$$\delta \leqq i \leqq k - 1$$

erfüllen.

Um bei der vollständigen Induktion aus

$$|R^{(i)}_{k,n}| = 1$$

die Gleichung

$$|R^{(i+1)}_{k,n}| = 1$$

folgern zu können, brauchen wir nur zu zeigen, daß die Determinante $R_{k,n}$, wenn wir zu den einzelnen Zeilen die vorangehenden Zeilen mit passenden ganzen Zahlen multipliziert addieren, in eine solche Determinante $\overline{R}_{k,n}$ übergeht, in welcher links von der Hauptdiagonale lauter Nullelemente stehen.

Nach der besagten Transformation wird nämlich nicht nur die neue Determinante $\overline{R}_{k,n}$ gleich $R_{k,n}$ ausfallen, sondern jeder ihrer Hauptminoren $\overline{R}^{(i)}_{k,n}$ gleich $R^{(i)}_{k,n}$ sein. Auch werden die Elemente der neuen Determinante ganze Zahlen sein. Wenn also

$$|R^{(i)}_{k,n}| = 1$$

ist, dann können in der Hauptdiagonale der Determinante $\overline{R}^{(i)}_{k,n}$, die mit $R^{(i)}_{k,n}$ dem Zahlenwerte nach gleich ist, nur solche Elemente stehen, deren absoluter Wert gleich Eins ist, während links von der Hauptdiagonale alle Elemente verschwinden. Dann ist aber $\overline{R}^{(i+1)}_{k,n}$ als erster Hauptminor von $\overline{R}^{(i)}_{k,n}$ von derselben Gestalt, woraus folgt, daß $\left|\overline{R}_{k,n}^{(i+1)}\right| = 1$ ist, also zufolge der Gleichheit von $R_{k,n}^{(i+1)}$ und $\left|\overline{R}_{k\,n}^{(i+1)}\right|$ auch

$$\left|R_{k,n}^{(i+1)}\right| = 1.$$

Was nun die gewünschte Transformation von $R_{k,n}$ betrifft, so ist sie äquivalent mit der folgenden Aufgabe:

Aus dem Systeme der hom. linearen Formen

$$A_1, A_2, \ldots, A_h, \ldots, A_{n+k},$$

in welchen die Koeffizienten von A_h gleich der h-ten Zeile von $R_{k,n}$ sind, soll ein solches System

$$\overline{A}_h = A_h + \lambda_{1\,h} A_1 + \lambda_{2\,h} A_2 + \cdots + \lambda_{h-1,h} A_{h-1} \qquad \text{(I)}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, n+k)$$

abgeleitet werden, in dem $\overline{A}_h$ die ersten $h - 1$ der Unbestimmten $e_1, e_2, \ldots, e_{n+k}$ nicht enthält, also

$$\overline{A}_h = \alpha_h^{(h)} e_h + \alpha_{h+1}^{(h)} e_{h+1} + \cdots + \alpha_{n+k}^{(h)} e_{n+k} \qquad \text{(II)}$$

ist. Dabei dürfen für die λ nur ganze Zahlen gewählt werden. Bei der Lösung dieses Problems werden wir die totale Induktion benützen: wir werden beweisen, daß dieses Problem im Falle des Systems $A_h (h = 1, 2, \ldots, n+k)$ lösbar ist, wenn es im Falle solcher $A_{h'} (h' = 1, 2, \ldots, n' + k')$ lösbar ist, deren Koeffizientensystem die Determinante $R_{k',n'}$ ist, wo

$$k' \leqq k - 1, \quad n' \leqq n - 1.$$

Das System der zu der Resultante $R_{k,n}$ gehörigen linearen Formen ist

$$\left.\begin{aligned} A_\alpha &= e_\alpha - e_{\alpha+k}, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \\ A_{n+\beta} &= e_\beta - e_{\beta+n}. \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, k) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(S)}$$

Bei dem Beweise der Möglichkeit der gewünschten Transformation des linearen Formensystems werden wir annehmen, daß $k \leqq n$ ist.* Bei dieser Annahme kann n immer in der Form

$$n = kq + r$$

* Die Diskussion des Falles $k > n$ können wir auf den von uns besprochenen Fall $k \leqq n$ zurückführen. Wenn nämlich $k > n$ ist, so gibt es eine solche positive ganze Zahl i, daß die Relation $0 < k - in \leqq n < k - (i-1)n$

dargestellt werden, wo q eine positive ganze Zahl ist und r die Bedingung $0 \leqq r \leqq k-1$ erfüllt.

Wenn $r > 0$ ist**, überführen wir das System (S) in das folgende:

$$
\begin{aligned}
&A'_\alpha = A_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \\
&A'_{n+\beta} = A_{n+\beta} - (A_\beta + A_{\beta+k} + A_{\beta+2k} + \cdots + A_{\beta+qk}) \qquad \text{(III)} \\
&\qquad\qquad (\beta = 1, 2, \ldots, r) \\
&A'_{n+r+\gamma} = A_{n+r+\gamma} - (A_{r+\gamma} + A_{r+\gamma+k} + \cdots + A_{r+\gamma+(q-1)k}). \\
&\qquad\qquad (\gamma = 1, \ldots, k-r)
\end{aligned}
$$

Es ist dies eine Transformation vom Typus (I). Untersuchen wir, wie die so erhaltenen A' mit den Unbestimmten ausgedrückt werden können, so erhalten wir

$$A'_\alpha = e_\alpha - e_{\alpha+k} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

$$A'_{n+\beta} = (e_\beta - e_{n+\beta}) -$$

$$- \{(e_\beta - e_{\beta+k}) + (e_{\beta+k} - e_{\beta+2k}) + \cdots + (e_{\beta+qk} - e_{\beta+qk+k})\},$$

also

$$A'_{n+\beta} = - e_{n+\beta} + e_{n+\beta+k-r} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, r)$$

und

$$A'_{n+r+\gamma} = (e_{r+\gamma} - e_{r+\gamma+n}) -$$

$$-\{(e_{r+\gamma} - e_{r+\gamma+k}) + (e_{r+\gamma+k} - e_{r+\gamma+2k}) + \cdots + (e_{r+\gamma+(q-1)k} - e_{r+\gamma+qk})\},$$

also

$$A'_{n+r+\gamma} = e_{n+\gamma} - e_{n+\gamma+r} \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, k-r).$$

---

besteht. Wenn wir die Transformation

$$
\begin{aligned}
&A'_\alpha = A_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, n) \\
&A'_{jn+\beta} = A_{jn+\beta} + A_{(j-1)n+\beta} + \cdots + A_{2n+\beta} + A_{n+\beta} - A_\beta \qquad \text{(III}^+\text{)} \\
&\qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, i) \\
&A'_{(i+1)n+\gamma} = A_{(i+1)n+\gamma} \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, k-in)
\end{aligned}
$$

auf das Formensystem $A_h (h = 1, 2, \ldots, n+k)$ anwenden, so entsteht ein solches System, dessen erste in Glieder dem Gesetze folgen, das in (II) ausgedrückt ist. Die übrigen $n+k-in$ Glieder bilden ein solches System, das zu der Resultante $R_{k-in,n}$ angehörig betrachtet werden kann. Aber die Zahl $k-in$ befriedigt schon die Bedingung: $k - in \leqq n$.

* Ist $r = 0$, so führt die Transformation

$$A'_\alpha = A_\alpha \; (\alpha = 1, 2, \ldots, n),$$

$$A'_{n+\gamma} = A_{n+\gamma} - (A_\gamma + A_{\gamma+k} + \cdots + A_{\gamma+(q-1)k}) \quad (\gamma = 1, 2, \ldots, k)$$

zum System $A'_\alpha = e_\alpha - e_{\alpha+k}$, $A'_{n+\gamma} = 0$, welches die Eigenschaft (II) besitzt.

Die Transformation (III) überträgt demnach das System (S) in ein System von solchen linearen Formen $A'_h (h = 1, 2, \ldots, n + k)$, unter welchen die n ersten Formen: $A'_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, n)$ die Eigenschaft zeigen, die in der Relation (II) zum Ausdruck gelangt; dagegen ist

$$-A'_{n+1}, \ -A'_{n+2}, \ \ldots, \ -A'_{n+r}, \ A'_{n+r+1}, \ \ldots, \ A'_{n+k}$$

(wo $r \neq 0$ ist) ein solches, mit k Unbestimmten geschaffenes System von linearen Formen, welches als zu der Resultante $R_{k-r,r}$ gehörig betrachtet werden kann, welches also, da $k - r \leqq k - 1$ und $r \leqq n - 1$ ist, unserer Annahme gemäß durch eine Transformation von dem Typus (I) in ein System von der Eigenschaft (II) übertragen werden kann. Dann ist aber diese Bemerkung auch bezüglich des Systems

$$A'_{n+1}, \ \ldots, \ A'_{n+r}, \ \ldots, \ A'_{n+r+1}, \ \ldots, \ A'_{n+k}$$

gültig.

Das System (S) kann also mit der gemeinsamen Anwendung der zur Umgestaltung dieser Formen dienenden Transformationen und der Transformation (III) in ein solches System $\bar{A}_h (h = 1, 2, \ldots, n + k)$ übertragen werden, welches die Eigenschaft (II) besitzt. Die Verbindung dieser Transformationen ist aber wieder eine Transformation vom Typus (I), also können wir den Satz aussprechen, daß das System $A_h (h = 1, 2, \ldots, n + k)$ auf die gewünschte Weise in ein System $\bar{A}_h$ mit der Eigenschaft (II) transformiert werden kann, wenn diese Transformabilität im Falle solcher $A_{h'}$ möglich ist, wo:

$$h' = 1, 2, \ldots, n' + k' \quad k' \leqq k - 1, \, n' \leqq n - 1.$$

Im Falle $k' = 1$, $n' = 1$ ist aber diese Transformation möglich, also ist sie auch bei jedem beliebigen Werte des k und n auf die gewünschte Art ausführbar.

III. Die additive Darstellung von $\varphi(n)$, $\psi(n)$, $S(n)$, $\Sigma(n)$, $\varrho(n)$ und $\sigma(n)$. Anwendungen.

Im vorigen Kapitel haben wir ausführlich bewiesen, daß, wenn $(n, k) = \delta$, dann ist:

$$R_{kn} = R^{(1)}_{k,n} = \cdots = R^{(\delta-1)}_{k,n} = 0,$$

$$\left|R^{(\delta)}_{k,n}\right| = \left|R^{(\delta+1)}_{k,n}\right| = \cdots = \left|R^{(n+k-1)}_{k,n}\right| = 1;$$

wir haben auch gezeigt, daß, wenn umgekehrt die Resultante der Binome (x^k-1) und (x^n-1) und ihre Hauptminoren den oben aufgeschriebenen Relationen genüge leisten, $(n, k) = \delta$ ist.

Wir können nun leicht die Richtigkeit der Formeln beweisen, in welchen wir die der additiven Darstellung von $\varphi(n)$, $\psi(n)$, $S(n)$, $\Sigma(n)$, $\varrho(n)$, und $\sigma(n)$ zugrunde liegenden $a_n(k)$, $b_n(k)$ und $c_n(i, k)$ als Funktionen der obigen Resultanten-Hauptminoren angaben.

Die Definition von $a_n(k)$ war, daß ihr Wert gleich 0 oder 1 ist, jenachdem $(k, n) > 1$ oder $(k, n) = 1$. Aus dem oben gesagten folgt, daß $|R_{k,n}^{(1)}|$ dieselbe Eigenschaft hat, also

$$a_n(k) = |R_{k,n}^{(1)}| \tag{α}$$

ist.

$b_n(k)$ wurde mit den folgenden zwei Eigenschaften gegeben: es ist

$$b_n(k) = 1 \quad \text{für} \quad (k, n) = k,$$

während

$$b_n(k) = 0 \quad \text{für} \quad (k, n) < k.$$

Nach unseren Lemmen ist — wenn der größte gemeinschaftliche Teiler des k und n mit δ bezeichnet wird —

$$|R_{k,n}^{(k-1)}| = 0, \quad \text{wenn } \delta = k,$$

während

$$|R_{k,n}^{(k-1)}| = 1, \quad \text{wenn } \delta < k;$$

daraus folgt

$$b_n(k) = 1 - |R_{k,n}^{(k-1)}|. \tag{β}$$

Die Funktion $c_n(i, k)$ wurde folgenderweise definiert: ihr Wert ist gleich 1 oder 0, jenachdem die simultanen Relationen

$$(i, k) = 1, \quad ik = n$$

befriedigt werden, oder wenigstens eine der beiden nicht erfüllt ist. Es ist klar, daß die gleichzeitig bestehenden Bedingungen

$$(i, k) = 1, \quad ik = n$$

mit den ähnlicherweise gleichzeitig bestehenden Bedingungen

$$(i, k) = 1, \quad (i, n) = 1, \quad (k, n) = k, \quad (ik, n) = n$$

äquivalent sind, also können wir die Definition des $c_n(i, k)$ auch so abfassen: $c_n(i, k)$ ist eine solche Funktion des i und k, dessen Wert 1 ist, wenn die Argumente i und k den oben aufgeschriebenen vier Relationen genüge leisten, während ihr Wert gleich 0, wenn von diesen Relationen auch nur eine nicht besteht. Auf Grund dieser neuen Definition ist:

$$c_n(i,k) = a_i(k)b_n(i)b_n(k)b_n(ik)$$

und so ist, α und β in Betracht genommen:

$$c_n(i,k) = |R_{i,k}^{(1)}|(1 - |R_{i,n}^{(i-1)}|)(1 - |R_{k,n}^{(k-1)}|)(1 - |R_{ik,n}^{(ik-1)}|). \quad (\gamma)$$

Auf Grund der Formeln (α), (β) und (γ) ist die additive Darstellung unserer Funktionen die folgende:

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{n} |R_{k,n}^{(1)}|, \tag{1}$$

$$\psi(n) = \sum_{k=1}^{n} k\,|R_{k,n}^{(1)}|, \tag{2}$$

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} (1 - |R_{k,n}^{(k-1)}|), \tag{3}$$

$$\Sigma(n) = \sum_{k=1}^{n} k\,(1 - |R_{k,n}^{(k-1)}|), \tag{4}$$

$$\varrho(n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |R_{i,k}^{(1)}|(1 - |R_{i,n}^{(i-1)}|)(1 - |R_{k,n}^{(k-1)}|)(1 - |R_{ik,n}^{(ik-1)}|), \tag{5}$$

$$\sigma(n) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |R_{i,k}^{(1)}|(1 - |R_{i,n}^{(i-1)}|)(1 - |R_{k,n}^{(k-1)}|)(1 - |R_{ik,n}^{(ik-1)}|)(i+k). \tag{6}$$

Mit diesen Formeln sind unsere Funktionen — wie wir es uns zum Ziele setzten — durch solche analytische Ausdrücke gegeben, welche explizite nur von dem Zahlenwerte des Funktionenargumentes n abhängen.

Diese Darstellungsweise beansprucht nicht die Kenntnis der Primfaktorenzerlegung des Argumentes der dargestellten Funktion und eliminiert also diejenigen Versuche, welche die Zerlegung des Argumentes in Primfaktoren benötigt.

Man könnte fragen, ob bei dieser additiven Darstellung unserer Funktionen überhaupt Versuche eintreten. Diese Fragestellung ist evidenter mit der folgenden äquivalent: beansprucht die Auswertung solcher Determinanten, deren Elemente ganze Zahlen sind, Versuchesschritte oder nicht?

Wir wollen uns hier mit der Entscheidung dieser Frage nicht befassen.

Zum Schlusse unserer Auseinandersetzungen wollen wir nur eine Anwendung der behandelten Funktionendarstellung geben.

Es ist folgendes bekannt: damit irgend eine ganze Zahl n Primzahl sei, ist erforderlich und genügend, daß eine der Relationen

$$\varphi(n) = n - 1,$$

$$\psi(n) = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$S(n) = 2,$$

$$\Sigma(n) = n + 1$$

bestehe.

Bei der multiplikativen Darstellung — die an die Kenntnis der Primfaktorenzerlegung des n gebunden ist — hatten diese Kriterien keine praktische Bedeutung. Mit der Kenntnis der besprochenen additiven Darstellung sind wir nun fähig, die in den obigen Relationen vorkommenden elementaren zahlentheoretischen Funktionen ohne die Kenntnis der Primfaktorenzerlegung ihrer Argumente darzustellen, was den oben erwähnten Primzahlenkriterien theoretisch-praktische Bedeutung verleiht.

Auf Grund der unter (1)—(4) aufgeschriebenen Darstellungen des $\varphi(n)$, $\psi(n)$, $S(n)$ und $\Sigma(n)$ können wir aussprechen, daß: irgend eine ganze Zahl n dann und nur dann eine Primzahl ist, wenn eine von den (einander involvierenden) Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{n} \left| R_{k,n}^{(1)} \right| = n - 1,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \left| R_{k,n}^{(1)} \right| = \frac{n(n-1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left| R_{k,n}^{(k-1)} \right| = n - 2,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k \left| R_{k,n}^{(k-1)} \right| = \frac{(n+1)(n-2)}{2}$$

erfüllt ist.

6.

SUR L'HYSTERESIS SISMIQUE.

(Discours de réception à l'Académie hongroise des Sciences du membre ordinaire R. DE KÖVESLIGETHY.)

Après les fréquentes catastrophes sismiques des années passées il y avait lieu de reprendre la question, soulevée timidement de temps en temps, de savoir si, dans l'état actuel de la science, la prévision des tremblements de terre au moins tectoniques n'était pas possible.

La question ne date pas d'hier, et de nombreuses recherches statistiques auraient établi, dans la fréquence des sismes, soit une périodicité, soit une dépendance des facteurs météorologiques et cosmiques. Mais on n'ignore pas combien les résultats obtenus sont contradictoires même dans un pays d'étendue assez restreinte et, pour arriver aux traits caractéristiques, il fallait encore subdiviser les grandes unités géographiques. Il n'est donc pas trop étonnant que les méthodes statistiques aient quelque peu perdu de leur crédit, et M. MONTESSUS DE BALLORE* n'est que l'interprète de l'opinion courante en estimant que cette branche de la sismologie ait déjà trop accaparé les soins des savants.

Un résultat des plus suggestifs de cette méthode prétend que, au Japon, les tremblements de terre destructifs coïncident avec les valeurs extrêmes de la latitude.** Mais on a beau connaître le mouvement du pôle, cela ne peut conduire à une prévision, parce que la proposition n'est pas réversible et ne contient aucune indication sur le lieu de l'ébranlement.

Les tâtonnements d'apparence plus déductive ne sont pas

---

* MONTESSUS DE BALLORE, La Science séismologique, Paris, 1907, p. 226.

** Publications of the Earthquake Investigation Committee in Foreign Languages (PEIC), N° 18 Tokyo 1904, p. 13.

moins stériles. On trouve toujours encore des personnes qui attribuent les sismes aux marées internes du globe. Certes, on calcule très facilement l'intensité de la force, ainsi que le lieu de la tension maxima, mais nul ne s'est encore élevé, en suivant cette théorie, à une prévision utile.

Toutefois on déduira deux propositions importantes de la critique de ces efforts: que ce n'est pas là la voie, par où on puisse arriver à une prévision, et que les facteurs externes, météorologiques ou cosmiques, ne constituent pas la cause primaire des tremblements de terre, mais tout au plus font éclater prématurément les tensions dont la source est située ailleurs.

Je ne saurais, quant à moi, me rallier entièrement à la manière de voir de M. MONTESSUS DE BALLORE, car nous verrons, chemin faisant, qu'une fois entré dans le temps critique qui précède le tremblement de terre, la statistique soigneuse fournit des signes prémonitoires très utiles. A mon avis de pareilles recherches mériteraient d'être continuées en chaque pays, et non pas seulement par déférence pour le travail assidu et honnête du passé.

Sans connaître toute l'histoire de la terre entière et de toutes les forces en action je ne me figure pas la prévision déductive à priori des tremblements de terre; par contre la prévision symptomatique me paraît bien possible. D'ailleurs ce doit être également l'avis de MM. OMORI* et REID**; l'un s'appuie, pour certains pronostics, sur les traces imprimées par les sismes antérieurs, l'autre cherche à déduire, du déplacement des points fixes, la tension sismique d'un lieu quelconque. La première manière, qui exige une très grande expérience personnelle, ne sera jamais, comme méthode scientifique, à la portée de tous, la deuxième n'est jusqu'ici qu'une proposition sans fondement expérimental. Elle a le désavantage, d'ailleurs indiqué par l'auteur même, de ne fournir que les variations de la tension dans l'espace et dans

---

* Bulletin of the Imperial Earthquake Investigation Committee. Vol. I. N° 2. Tokyo 1907. p. 66.

** Comptes Rendus des séances de la troisième réunion de la Commission permanente de l'Association internationale de sismologie à Zermatt, 1909, Budapest 1910, p 164.

le temps, et il se peut aisément que ce soient des quantités qui échappent à nos meilleurs instruments.

La condition nécessaire pour la possibilité de la prévision sismologique sera, sans doute, de trouver un phénomène essentiellement lié aux sismes, capable d'être exprimé avec une précision suffisante en fonction du temps. J'estime qu'on peut parfaitement satisfaire à ce postulat.

Expression analytique de l'hystérésis sismique.

Les sismes tectoniques — dans cette recherche il ne s'agira que de ceux-ci — sont presque toujours accompagnés de répliques. C'est M. ENYA et particulièrement M. OMORI* qui les ont étudiés depuis le grand tremblement de terre de Mino-Owari, survenu en 1891, et qui fut suivi, pendant les premiers huit ans de 3482 secousses ultérieures.

On se souvient que, grâce aux catalogues sismologiques du Japon, M. OMORI** fut à même de redresser la statistique des répliques des sismes d'autrefois; les tremblements de terre de Zenkoj en 1847, et de Tenpo en 1830 en sont les plus reculés. Leurs répliques se font même sentir aujourd'hui par un faible accroissement de la fréquence sismique du lieu, dont le calcul s'accorde parfaitement avec les observations. Il convient d'ajouter que la formule empirique de la fréquence des répliques est basée sur les observations des premiers jours qui suivent le sisme; ainsi la formule des répliques du tremblement de terre de Mino-Owari, bien que calculée sur la statistique des cinq premiers jours, ne cesse pas d'être valable pendant les huit années suivantes.

Nous devons donc à M. OMORI une règle empirique qui, fondée sur les observations de quelques jours, supporte une extrapolation de presque un demi-siècle.

---

* Journal of the College of Science, Imperial University Tokyo, Vol. XII, Tokyo 1895, pp. 113—200. Même sujet: PEIC, N° 4, Tokyo 1900, p. 40. — N° 7, Tokyo 1902, p. 27.

** Bull. Imp. Earthquake Invest. Comm. Vol. II, N° 2, Tokyo 1908, p. 185.

En désignant par t le commencement d'un intervalle de temps arbitrairement choisi, et par N le nombre des répliques dans cet espace de temps, on a d'après M. OMORI

$$N = \frac{b}{t+a}, \tag{1}$$

a et b étant deux constantes. Cependant on trouve assez vite que cette expression n'est qu'une première approximation, plutôt une indication du chemin à suivre. En effet, la courbe de la fréquence sismique s'approche plus vite de l'axe des ordonnées que l'hyperbole équilatérale, et, dans son cours ultérieur, elle est quelque peu déformée par une courbe périodique superposée, révélant des actions secondaires météorologiques ou cosmiques. M. OMORI* se sert très habilement de ces variations périodiques qui, d'ailleurs, ne dissimulent pas la marche moyenne hyperbolique de la courbe, pour en déduire les périodes qui figurent dans les tremblements de terre. Leur constance, même pour des sismes différents, assure la réalité des résultats tirés de ces recherches. La déformation près de l'axe des ordonnées est la seule essentielle.

L'existence même des répliques nous engage à croire que les tremblements de terre tectoniques sont dus à une tension qui, à son tour, engendre dans les couches terrestres l'hystérésis élastique. Au moment du sisme la tension première s'annule, mais l'hystérésis retarde l'établissement de l'équilibre. En effet, nous avons vu qu'on sait retracer de vieux tremblements de terre même après un demi-siècle.

En appelant h_0 l'hystérésis au moment d'un tremblement de terre, où, par l'accroissement continu de la tension, elle est devenue maxima, et h l'hystérésis à une époque ultérieure quelconque, la différence $h_0 - h$ désignera évidemment la relaxation élastique. On peut supposer que la sismicité instantanée soit proportionelle à la vitesse de relaxation, et alors le nombre $N(t)$ des répliques à l'époque t deviendra

$$N(t) = -c\frac{dh(t)}{dt}, \tag{2}$$

c étant un facteur de proportionnalité.

---

* PEIC, N° 8, Tokyo 1902, p. 1.

Les hypothèses adoptées, que le nombre des répliques est proportionnel au quotient différentiel de l'hystérésis et qu'il est approximativement représenté par une hyperbole équilatérale, suffisent entièrement à l'établissement précis de la fonction de l'hystérésis. Nous n'avons qu'à ajouter encore la condition que le principe de superposition reste valable. Toutefois il me semble bon de qualifier de sismique l'hystérésis ainsi trouvée, car il se peut qu'une certaine différence existe entre la nature et l'expérience. Là il s'agit de la matière répandue régionalement et hétérogène, fréquemment plissée, jouée, brisée et recollée, assujettie à une action très complexe, tandis qu'au laboratoire on recherche l'action soigneusement isolée d'une seule force sur un spécimen homogène. Il n'est pas nécessaire de supposer que l'énergie des tremblements de terre soit due à une variation de la conductibilité des couches terrestres ou du gradient géothermique, mais il reste toujours probable que l'hystérésis thermique, voire magnétique, joue un certain rôle. En rapport avec cette complexité on se souviendra des difficultés que présenterait l'étude du mouvement d'une molécule isolée d'un gaz, tandis que l'ensemble de ces mouvements compliqués conduit à une loi remarquablement simple. Donc, si les recherches expérimentales n'ont pas donné, jusqu'ici, une loi manifeste, on n'est peut-être pas autorisé à affirmer que cette conséquence soit également de rigueur pour la résultante de ce qui se passe dans les profondeurs de la terre.

Les quatre sismes, dont on a le mieux étudié les répliques, ont eu lieu dans des parties différentes du Japon, même près des côtes. La supposition, que dans ces cas différents la tension sismique ait pris naissance et se soit développée des façons les plus diverses est donc tout à fait plausible. Et si nous trouvons néanmoins la même formule pour leurs répliques, on peut, sans contradiction, admettre le principe:

La courbe de la fréquence des répliques est une hyperbole équilatérale, sur laquelle est superposée une courbe généralement inconnue, contenant l'histoire de la tension dégagée pendant le tremblement de terre.

On verra que cette définition, assez vague en apparence, suffit. En effet, soit $p(t)$ une force quelconque variable avec le temps, qui commence à agir à l'époque t_0, pour s'annuler à l'époque t_1. Si on appelle $h(t)$ l'hystérésis élémentaire ou provenant d'une force constante, alors l'hystérésis due à la force variable $p(t)$ sera à l'instant t

$$H_0 = \int_0^{t-t_0} p'(t) h(t) dt. \tag{3}$$

Pour résoudre le problème on procédera comme suit: au lieu d'interrompre la force à l'instant t_1, nous supposons qu'elle va toujours en augmentant jusqu'au temps t; l'hystérésis sera naturellement H_0 que nous venons de trouver. Or à l'instant t_1 nous appliquons une force égale, mais de sens opposé, qui va en décroissant jusqu'à t. L'hystérésis correspondant à cette tension est

$$H_1 = -\int_0^{t-t_1} p'(t) h(t) dt.$$

D'après le principe de superposition $H_0 + H_1$ est l'hystérésis d'une tension qui croît de t_0 à t_1, et qui reste constante depuis ce temps, puisque dès ce moment-là l'accroissement et la décroissance sont égaux. L'intensité de la force devenue constante est $p(t_1 - t_0)$. En retranchant l'hystérésis de cette force constante

$$H_{01} = p(t_1 - t_0) h(t - t_1),$$

nous obtiendrons l'hystérésis d'une force qui agit depuis t_0 à t, et qui s'annule subitement au moment t_1; la valeur en est

$$H(t) = \int_{t-t_1}^{t-t_0} p'(t) h(t) dt - p(t_1 - t_0) h(t - t_1), \ (t_1 > t_0). \tag{4}$$

En combinant cette équation avec les relations (1) et (2) d'après le principe que nous venons d'énoncer, on aura pour la loi des répliques:

$$\begin{aligned} N(t) \equiv p(t_1 - t_0) h'(t - t_1) + p'(t - t_1) h(t - t_1) \\ - p'(t - t_0) h(t - t_0) = \frac{b}{t+a} + \psi(t), \end{aligned} \tag{5}$$

où $\psi(t)$ désigne une fonction inconnue du temps, rapidement décroissante et qui dépend de l'expression analytique de $p(t)$. On peut supposer en outre que le facteur c de l'équation (2) est compris dans le second membre de l'équation.

Après division par la constante $p(t_1 - t_0)$ on obtient:

$$h'(t-t_1) + \frac{p'(t-t_1)}{p(t_1-t_0)} h(t-t_1) - \frac{p'(t-t_0)}{p(t_1-t_0)} h(t-t_0)$$
$$= \frac{B}{t-t_1+A} + \frac{\psi(t)}{p(t_1-t_0)}. \qquad (6)$$

Le premier terme du premier et du deuxième membre de l'équation est absolument indépendant de la manière dont la tension varie, par conséquent indépendant de l'histoire du système, alors que les autres termes en dépendent. L'équation (6) se décompose donc, et il résulte comme partie première la relation

$$h'(t-t_1) = \frac{B}{t-t_1+A}, \qquad (7)$$

qui, après substitution de t au lieu de $t - t_1$, donne:

$$h(t) = \nu l \cdot \frac{t+A}{\tau},$$

où τ est la constante d'intégration, ν celle de l'hystérésis. La première étant évidemment égale à A, nous aurons comme expression de l'hystérésis élémentaire

$$h(t) = \nu l \cdot \frac{t+\tau}{\tau}, \qquad (8)$$

si on désigne par τ le temps après lequel l'hystérésis est mesurée.

Pour arriver à ce résultat vraiment simple, je suis parti d'abord des principes de la thermodynamique qu'on estime valable pour des modifications extrèmement lentes. Mais on consulte en vain, pour la forme explicite de la fonction hystérésique, les beaux travaux de MM. BRILLOUIN, DUHEM* et bien d'autres. Une indication très utile se trouve par contre dans un mémoire de M. DE SZILY**. Certes, l'auteur ne soutiendrait point à l'heure qu'il est le titre de son mémoire, mais il mériterait d'être revu au point de vue de l'hystérésis. Dans un cas spécial M. BOLTZMANN*** déduit une formule logarithmique analogue.

---

* BRILLOUIN, Comptes-Rendus, T. 106, 1888, 416, 482, 537, 589. — P. DUHEM, série de mémoires dans les Mémoires de l'Acad. belge. 1896—1902.

** SZILY KÁLMÁN, A höelmélet második fötétele s. i. t. Értek. a Math. Tud. Köréböl. Bpest. 1875.

*** WINKELMANN Handb. d. Phys. 2. éd. Vol. I, p. 805.

Mais c'est surtout M. KUSAKABE* qui s'est occupé très assidument de l'hystérésis, et cela au point de vue de la sismologie même. Ses recherches sur les constantes élastiques des roches appartenant à de diverses formations géologiques l'amenèrent exactement à l'équation (8). Il l'accepte, toujours en indiquant son caractère hypothétique, et en déduit la loi des répliques. Comme en effet les séries publiées de ses observations ne comptent que quelques jours, je n'osai pas appliquer cette loi. Pourtant, après une étude approfondie des répliques, je reconnus que la formule empirique de M. OMORI permet très exactement de calculer l'époque du tremblement de terre, ce qui me conduisit à renverser le raisonnement de M. KUSAKABE, en l'appliquant tout de suite à une tension quelconque.

Nous avons donc trouvé, dans les répliques, un sûr fondement empirique, d'où déduire la loi de l'hystérésis, et les résultats obtenus jusqu'ici nous assurent que les résultats obtenus sont applicables à une assez longue série d'années. La précision des observations et la justesse de l'induction, bien qu'un peu hardie, de M. KUSAKABE, méritent toute notre admiration.

En laissant de côté dans l'équation (5) les termes que j'appellerai dorénavant historiques, et qui, comme nous le verrons plus tard, ne sont importants qu'immédiatement après le tremblement de terre, nous retombons sur la formule empirique de M. OMORI qui, pour les répliques du tremblement de terre de Mino-Owari du 28 octobre 1891 donne:

$$N = \frac{440{,}7}{x + 2{,}314},$$

si l'on appelle N le nombre des secousses dans l'intervalle x. L'unité de cet intervalle est la moitié du jour, l'époque initiale le 29 octobre 1891, midi. Si l'on fixe l'époque de l'ébranlement principal par la condition que le nombre des répliques y doit tendre vers l'infini, on obtiendra pour ce tremblement de terre l'époque 1891 octobre $29{,}0 - \frac{1}{2} \cdot 2{,}314 = 28$ octobre 1891, 8 heures 14 minutes matin, tandis que la valeur observée est 6 heures 37 matin. Autant que je sache c'est le premier exemple d'un

* PEIC N° 14 Tokyo 1903 et N° 17 Tokyo 1904.

pronostic, retrospectif, il est vrai, mais toujours scientifique, et le résultat eût été, certes, plus précis encore, si l'on n'avait pas négligé les termes accessoires de l'équation (5).

Le rapport entre le symbole x de M. Omori et le temps courant t est d'ailleurs très simple. Soit t_1 le moment où le tremblement de terre a eu lieu, c'est à dire où la tension a été annulée, et T l'époque initiale, à partir de laquelle on compte les reprises, enfin m le nombre de jours qui, dans x, servent d'unité de temps. Comme le dénominateur de la formule théorique (7) est $t - t_1 + \tau$, tandis qu'il est $x + a$ dans la formule empirique, où

$$x = \frac{t - T}{m},$$

on aura

$$\frac{b}{x + a} = \frac{c}{t - t_1 + \tau},$$

ou

$$t_1 = T - am + \tau, \quad c = bm.$$

Le peu de données dont je dispose permet de croire qu'on peut poser $m = \tau$, ce qui fait

$$t_1 = T - (a - 1)m.$$

L'application à l'exemple ci-dessus donne le même résultat. Au moyen des observations des premiers cinq jours nous avons donc déterminé l'époque du tremblement de terre à 1 heure 37 près. La précision est à peu près du même ordre même pour les tremblements de terre reculés, ce qui me sembla garantir, en quelque mesure, la réussite de ces recherches.

Mais la connaissance de la fonction de l'hystérésis est encore bien loin de nous fournir les moyens de prévision, car, les sismes étant des procédés irréversibles, on ne remplacera point l'avenir par le passé négatif. Toute l'histoire du passé rentre dans le problème, mais l'avenir ne projette pas en avant ses lumières.

La manière dont on saurait lier l'hystérésis au premier principe de la thermodynamique, soit, par exemple, au moyen de la conception de la disgrégation, nous apprend qu'il s'agit ici d'une fonction qui a quelques relations avec l'entropie. En nous occupant plus tard des processus cycliques, nous verrons que l'hystérésis tend, à l'instar de l'entropie, vers un maximum et qu'elle deviendra, après un espace de temps infiniment grand, infinie d'ordre logarithmique. Si l'on suppose avec Lord KELVIN qu'un espace d'environ 40 millions d'années nous sépare de la première cortification de la terre, et ainsi de l'époque des premiers tremblements de terre, on pourra affirmer que l'hystérésis actuelle ne dépasse que 20 fois la valeur initiale.

Son caractère mécanique, la preuve en est dans sa forme logarithmique, équivaut à une force retardatrice proportionnelle au carré de la vitesse, et elle peut être représentée par l'entropie d'une sphère cosmique de gaz permanent se contractant proportionnellement au temps*.

Reste à examiner la deuxième partie de l'équation 6) décomposée. En écrivant

$$t-t_1=x, \quad t_1-t_0=\vartheta, \quad p'(u)h(u)=P(u), \quad \frac{\psi(t)}{\vartheta}=-\varphi(x), \tag{9}$$

on obtiendra

$$\frac{P(x+\vartheta)-P(x)}{\vartheta}=\varphi(x). \tag{10}$$

La statistique des répliques nous fournit les valeurs au moins numériques de la fonction $\varphi(x)$; t_1 est le moment du tremblement de terre, t_0 l'époque où la force renaît et que nous déterminerons plus tard, enfin h la fonction caractérisée par (8). L'histoire du système est donc comprise dans une équation à différences finies, dont la solution nous apprend l'évolution de la tension. Elle renfermera toutes les modifications apportées par les agents cosmiques et météorologiques, et les termes périodiques, qui se trouveraient, au cours ultérieur de la courbe, caractérisent évidemment la réaction des couches relaxées, mais encore sensibles, envers les actions périodiques extérieures.

L'équation (6) se rapporte exclusivement à un tremblement de terre isolé. Pour tenir compte des sismes antérieurs, il faut étudier l'hystérésis des variations cycliques. Certes, les corrections

---

* A. RITTER, Anwendg. der Mech. Wärmetheorie auf kosmolog. Probleme. Leipzig 1882, p. 25.

à apporter modifieront également l'équation (10); mais elles n'ajouteront au second membre de l'équation qu'un nouveau terme d'ailleurs connu, ainsi il ne sera pas nécessaire d'y revenir.

Jusqu'ici nous n'avons point spécifié la forme analytique de la tension. Dans les calculs qui vont suivre, il sera toujours supposé que cette tension croît proportionnellement au temps. Une telle supposition simplifie considérablement les calculs sans être, à l'heure qu'il est, plus hypothétique qu'une hypothèse quelconque.

On peut se figurer, sans que cette hypothèse rentre dans nos considérations ultérieures, que la cause primaire des tremblements de terre soit une tension due aux variations de la température dans les profondeurs de la terre. Comme il s'agit de variations très lentes, on emploiera les deux principes de la thermodynamique qui restent applicables jusqu'à l'éclatement du tremblement de terre.

En conservant les symboles communément employés, ces deux principes combinés se présentent, pour les solides, sous cette forme:

$$dQ = C_p\, dT - \left(\frac{dv}{dT}\right)_p T dp \tag{11}$$

qui, par la relation approchée

$$\frac{ds}{s} = \frac{dp}{E} - \alpha\, dT \tag{12}$$

est transformée en

$$dQ = C_p dT - \alpha v T dp, \tag{13}$$

où α est le coefficient de dilatation thermique. La chaleur dQ est fournie à l'unité de poids de la couche terrestre par conduction thermique des couches inférieures; sa valeur dans l'unité de temps est donc:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\lambda}{s}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho}\frac{\partial T}{\partial \varrho}\right),$$

λ étant le coefficient de conductibilité, s la densité, T la température absolue, ϱ le rayon de la couche et t le temps courant.

Cette quantité de chaleur se décompose en deux parties distinctes. L'une est fournie par le refroidissement séculaire de la terre, action qu'on jugera stationnaire en comparaison avec l'action brusque que sont les tremblements de terre. La plus grande partie de cette chaleur est peut-être utilisée au plissement des montagnes. Il y a sur cette matière des recherches très appréciées de M. HERGESELL* qui, sans y introduire les conditions initiales nécessairement hypothétiques du problème de FOURIER, donnent même quelques valeurs numériques.

Sur cet état stationnaire se superposent les variations de la chaleur, causes présumées des sismes. Pour la sismologie on ne retiendra donc que le quotient différentiel par rapport au temps. Si nous introduisons encore le gradient géothermique γ que nous compterons selon l'usage dans la direction de la profondeur x, nous arrivons à cette équation:

$$\frac{\lambda}{s}\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial x\partial t}-\frac{2}{r-x}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)dt = C_p x\frac{\partial\gamma}{\partial t}dt-\alpha v T dp. \tag{14}$$

On dirait que la tension croissante s'accusera par la variation du gradient. Autant que je sache il n'existe pas d'observations sur ce point, mais, fait curieux, au Japon la détermination du gradient rentre dans les attributions de la commission sismologique.

La solution de cette équation est

$$\frac{dp}{dt}=\mu, \tag{15}$$

l'accroissement de la tension dû à la variation de la température. Les quantités sous-entendues dans μ ne sont pas de véritables constantes, mais il faudra les regarder nécessairement comme telles, d'une part parce que nous ne les connaissons pas en fonction de l'état du corps, d'autre part parce que l'observation du gradient et, à plus forte raison, l'observation de sa variation présentent des difficultés presque insurmontables qui rendraient illusoire la reconnaissance d'une loi plus complexe. Actuellement la simple proportionnalité de la force et du temps convient le mieux à la pratique.

Si nous choisissons comme unités le mètre, le kilogramme et l'année, on obtient pour un roche tenant le milieu entre le basalte et le grès $\frac{\lambda}{sC_p}=26{,}3$, tandis que M. SCHMIDT déduit des

---

* Beiträge zur Geophysik Vol. II. 1895, p. 153.

observations météorologiques la valeur 27,8. Dans l'expression du gradient nous ne retiendrons que le premier terme, puisque les suivants, multipliés par les puissances de la profondeur, sont tout à fait incertains; la moyenne en est $\gamma = 0{,}0281$. Soit enfin $x = 10000$ mètres la profondeur moyenne du foyer sismique. On trouvera d'abord que, dans les couches supérieures de la croûte terrestre, le premier membre de l'équation (14) est insensible; on doit donc considérer le processus comme adiabatique, ce qui nous conduit à l'équation de M. THOMSON. Enfin si on suppose que le gradient varie, pendant un an, de $\frac{1}{35{,}6}$ à $\frac{1}{34{,}6}$, on aura

$$\mu = 360 \cdot 16^6 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2},$$

tandis que le module d'élasticité est 630.10^6 pour le grès et $20\,000.10^6$ pour l'acier anglais.

Réciproquement on peut se demander quelle doit être la variation du gradient pour expliquer les ébranlements les plus grands possibles? On sait que l'accélération du plus fort tremblement de terre dépasse quelque peu celle de la pesanteur. Soit donc $t - t_0$ l'espace de temps nécessaire pour l'accumulation de cette tension, alors on trouvera

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t}(t - t_0) = 67.10^{-6},$$

ce qui donne $^2/_3$ °C de différence entre deux niveaux distants de 10 kilomètres, si le tremblement de terre ne s'est préparé que pendant un an. Nul ne croira donc qu'un tremblement de terre puisse s'accuser par une variation observable du gradient.

Pour l'étude de l'hystérésis due à l'alternance des tensions, je pars de cette supposition assez générale que les tensions naissent aux moments $t_0, t_2, \ldots t_{2n-2}$, et qu'elles s'annulent aux époques $t_1, t_3, \ldots t_{2n-1}$. Ces dernières époques sont donc en même temps celles du 1^er^, 2^ème^, ... $n^{\text{ème}}$ tremblement de terre. Pendant les pauses $t_2 - t_1$, $t_4 - t_3$, ... $t_{2n-2} - t_{2n-3}$ il n'y a point de tension.

Divisons l'intervalle de temps $t - t_0$ en parties $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_{2n}$, ϑ, telles que

$$\vartheta_1 = t_1 - t_0, \quad \vartheta_2 = t_2 - t_1 \quad \ldots, \quad \vartheta_{2n-1} = t_{2n-1} - t_{2n-2},$$
$$\vartheta_{2n} = t_{2n} - t_{2n-1}, \quad \vartheta = t - t_{2n}. \tag{16}$$

Si la tension prend naissance au commencement de l'intervalle ϑ_1 pour croître ensuite, si l'on applique à la fin du même intervalle une force égale à la première, mais en sens opposé, si l'on retranche enfin cette force devenue $p(\vartheta_1)$ au moment où finit l'intervalle, nous aurons évidemment, comme à la formation de l'équation (4) l'hystérésis d'une tension croissant pendant le temps ϑ_1 et s'annulant ensuite soudainement; la valeur en est:

$$H_1 = \int\limits_0^{\vartheta_1+\vartheta_2+\vartheta_{2n}+\vartheta} p'(t)h(t)\,dt - \int\limits_0^{\vartheta_2+\vartheta_3+\cdots+\vartheta_{2n}+\vartheta} p'(t)h(t)\,dt - p(\vartheta_1)h(\vartheta_2+\vartheta_3+\cdots+\vartheta_{2n}+\vartheta).$$

En répétant le même jeu de la tension pendant l'intervalle ϑ_3 on obtient,

$$H_3 = \int\limits_{\vartheta_4+\vartheta_5+\cdots+\vartheta_{2n}+\vartheta}^{\vartheta_3+\vartheta_4+\cdots+\vartheta_{2n}+\vartheta} p'(t)h(t)\,dt - p(\vartheta_3)h(\vartheta_4+\vartheta_5+\cdots+\vartheta_{2n}+\vartheta),$$

et ainsi de suite. Par extension et en conservant toujours le principe de la superposition on trouvera enfin l'expression de l'hystérésis

$$H_n(t) = \sum_1^n{}_i \int\limits_{\vartheta_{2i}+\vartheta_{2i+1}+\cdots+\vartheta_{2n}+\vartheta}^{\vartheta_{2i-1}+\vartheta_{2i}+\cdots+\vartheta_{2n}+\vartheta} p'(t)h(t)\,dt$$
$$- \sum_1^n{}_i\, p(\vartheta_{2i-1})h(\vartheta_{2i}+\vartheta_{2i+1}+\cdots+\vartheta_{2n}+\vartheta) \tag{17}$$

d'une tension qui, commençant par la valeur zéro au début des intervalles $\vartheta_1, \vartheta_3 \ldots \vartheta_{2n-1}$ croît continuellement, et finit par être annulée entièrement à la fin de ces intervalles. Pendant les intervalles $\vartheta_2, \vartheta_4 \ldots \vartheta_{2n}$ le système est exempt de toute tension primaire.

Comme la tension a été annulée au bout du dernier intervalle, soit au moment t_{2n-1}, $H_n(t)$ est évidemment l'hystérésis survivant au $n^{\text{ème}}$ tremblement de terre. Si par contre nous allons seulement jusqu'au $(n-1)^{\text{ème}}$ tremblement de terre sans empêcher la tension de renaître et de croître pendant le temps $\vartheta_{2n-1}+\vartheta_{2n}+\vartheta$, nous obtiendrons évidemment

$$
\begin{aligned}
{}_nH(t) = & \sum_1^{n-1} {}^i \int\limits_{\vartheta_{2i}+\vartheta_{2i+1}+\cdots+\vartheta_{2n}+\vartheta}^{\vartheta_{2i-1}+\vartheta_{2i}+\cdots+\vartheta_{2n}+\vartheta} p'(t)h(t)\,dt \\
& - \sum_1^{n-1} {}^i p(\vartheta_{2i-1}) h(\vartheta_{2i}+\vartheta_{2i+1}+\cdots+\vartheta_{2n}+\vartheta) \qquad (18) \\
& + \int\limits_0^{\vartheta_{2n-1}+\vartheta_{2n}+\vartheta} p'(t)h(t)\,dt,
\end{aligned}
$$

soit l'hystérésis après le $(n-1)^{\text{ème}}$ tremblement de terre, mais qui, par l'accroissement nouveau de la tension, devient proprement l'hystérésis avant le $n^{\text{ème}}$ tremblement de terre. La position de l'indice n auprès du symbole H dénote donc s'il s'agit de l'hystérésis qui précède ou qui suit le $n^{\text{ème}}$ sisme.

Après avoir restitué, d'après les équations (16), le temps courant, on trouve

$$
H_n(t) = \sum_1^{n} {}^i \int\limits_{t-t_{2i-1}}^{t-t_{2i-2}} p'(t)h(t)\,dt - \sum_1^{n} {}^i p(t_{2i-1}-t_{2i-2}) h(t-t_{2i-1}), \quad (19)
$$

et par comparaison des relations (17) et (18):

$$
{}_nH(t) = H_n(t) + \int\limits_0^{t-t_{2n-1}} p'(t)h(t)\,dt + p(t_{2n-1}-t_{2n-2}) h(t-t_{2n-1}). \quad (20)
$$

En choisissant enfin la tension, proportionnelle au temps, comme il a été dit ci-dessus, et en supprimant le facteur constant $\mu\nu$ qui, dans les applications, devra être ajouté ultérieurement, on aura

$$
\begin{aligned}
{}_nH(t) = & \sum_1^{n-1} {}^i (t - t_{2i-2} + \tau)\, l \cdot \frac{t - t_{2i-2} + \tau}{t - t_{2i-1} + \tau} \\
& - \sum_1^{n-1} {}^i (t_{2i-1} - t_{2i-2}) + (t - t_{2n-2} + \tau)\, l \cdot \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{\tau} \\
& - (t - t_{2n-2}), \quad (t \geqq t_{2n-2}), \qquad (21)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
H_n(t) = & \sum_1^{n} {}^i (t - t_{2i-2} + \tau)\, l \cdot \frac{t - t_{2i-2} + \tau}{t - t_{2i-1} + \tau} \\
& - \sum_1^{n} {}^i (t_{2i-1} - t_{2i-2}), \quad (t \geqq t_{2n-1}), \qquad (22)
\end{aligned}
$$

ou en rapprochant ces deux équations

$$ {}_nH(t) = H_n(t) + (t - t_{2n-2} + \tau)\, l \cdot \frac{t - t_{2n-1} + \tau}{\tau} - (t - t_{2n-1}), $$

$$ (t \geqq t_{2n-1}). \tag{23} $$

Au moment du $n^{\text{ème}}$ tremblement de terre $t = t_{2n-1}$, partant

$$ {}_nH(t_{2n-1}) = H_n(t_{2n-1}), \tag{24} $$

ce qui veut dire que le tremblement de terre ne consume que la tension primaire, puisque les tensions dues à l'hystérésis coïncident au moment de l'éclatement. Par contre l'hystérésis résiduelle se perd par une lente décharge à travers le temps. En effet, on peut mettre l'équation (22) sous la forme

$$ H_n(t) = -\sum_1^n \left[(t - t_{2i-2} + \tau)\, l \cdot \left(1 - \frac{t_{2i-1} - t_{2i-2}}{t - t_{2i-2} + \tau}\right) + (t_{2i-1} - t_{2i-2}) \right] $$

qui fait voir d'un coup d'oeil que l'hystérésis résiduelle s'évanouit, si le temps croît de plus en plus. Par contre, on trouvera aisément que ${}_nH(t)$ va en augmentant, et que l'hystérésis qui précède un tremblement de terre sera d'autant plus grande que l'éclatement de celui-ci se fait plus attendre.

Puisque la tension totale F est la somme de la force primaire et de l'hystérésis, on aura aux moments du tremblement de terre:

$$ F(t_{2n-1} - 0) = \mu(t_{2n-1} - t_{2n}) + \mu\nu\, {}_nH(t_{2n-1}), $$

$$ \text{et } F(t_{2n-1} + 0) = \mu\nu H_n(t_{2n-1}). \tag{25} $$

Conformément à ce qui a été dit ci-dessus, on voit se produire pendant le sisme un saut $\mu(t_{2n-1} - t_{2n})$ dans la tension. Vu le rapport de cette chute avec la tension, on est amené à croire que le coefficient de l'hystérésis avant et après le sisme est sensiblement le même.

On déduit de l'équation (22) pour deux tremblements de terre consécutifs la relation:

$$ H_n(t) - H_{n-1}(t) = (t - t_{2n-2} + \tau)\, l \cdot \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{t - t_{2n-1} + \tau} - (t_{2n-1} - t_{2n-2}). \tag{26} $$

Comme $t \geqq t_{2n-1}$ et $t_{2n-1} > t_{2n-2}$ on voit aisément que le second membre est toujours positif; l'hystérésis croît donc après chaque tremblement de terre. D'ailleurs la différence des deux hystérésis résiduelles a la même forme que $H_1(t)$, qui est l'hystérésis après un seul ébranlement. Il serait faux d'en conclure que le $n^{\text{ème}}$ tremblement de terre se produira comme si la terre était dans son état primitif après les $n-1$ secousses antérieures. On trouve en effet:

$$ {}_nH(t) - H_{n-1}(t) = (t - t_{2n-2} + \tau)\, l \cdot \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{\tau} - (t - t_{2n-2}), \qquad (27) $$

ce qui a tout à fait la forme de ${}_1H(t)$. Mais on ne doit pas oublier que les deux tensions dont nous avons ici la différence ne sont pas du tout coexistantes; il n'existe que ${}_nH(t)$, si un nouveau sisme va se préparer, ou $H_{n-1}(t)$ si, après le dernier, le calme parfait est rétabli.

Étant donné que l'hystérésis résiduelle va en croissant après chaque tremblement de terre, on devrait connaître pour le calcul de l'hystérésis à un moment donné, tous les éléments de tous les tremblements de terre antérieurs, soit un amas de données historiques inconnues. Pourtant pour acquérir une idée générale nous admettrons pour le moment que tous les intervalles soient égaux, savoir que

$$ t_1 - t_0 = t_2 - t_1 = \cdots = t_{2n-1} - t_{2n-2} = \theta, \qquad (28) $$

où θ est le demi-intervalle entre deux sismes consécutifs; il y a donc un intervalle θ de calme et un autre de la même durée pendant lequel la nouvelle agitation se prépare.

Ne connaissant pas l'époque initiale nous choisirons convenablement t_{2n-2} comme point de départ, ce qui donne

$$ t - t_{2i-2} + \tau = t - t_{2n-2} + \tau + 2(n-i)\theta. $$

Si le nombre des sismes précédents est assez élevé on remplacera la sommation par l'intégration, ce qui donne:

$$ {}_nH(t) = \int_0^n [t - t_{2n-2} + \tau + 2(n-i)\theta]\, l \cdot \frac{t - t_{2n-2} + \tau + 2(n-i)\theta}{t - t_{2n-2} + \tau + (2n - 2i - 1)\theta}\, di - n\theta $$

$$ + (t - t_{2n-2} + \tau)\, l \cdot \frac{t - t_{2n-1} + \tau}{\tau} - (t - t_{2n-1}) $$

$$ = \frac{1}{4}\left[t - t_{2n-2} + \tau - \frac{7}{2}\theta + \theta l \cdot \frac{t - t_{2n-2} + \tau + (2n-3)\theta}{t - t_{2n-2} + \tau - \theta} - \frac{(t - t_{2n-2} + \tau)^2}{\theta} l \cdot \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{t - t_{2n-2} + \tau - \theta}\right] $$

$$ + (t - t_{2n-2} + \tau)\, l \cdot \frac{t - t_{2n-1} + \tau}{\tau} - (t - t_{2n-1}). \qquad (29) $$

L'expression tend vers l'infini, si n va sans cesse en croissant, et cela logarithmiquement, comme l'entropie· Par contre $H_n(t)$, comme nous l'avons déjà vu, tend vers zéro, si $n = \infty$.

Arrivés à ce point, nous sommes à même de concevoir une méthode directe de prévision sismologique, mais on verra tout de suite que l'application en pratique est impossible.

Soit donc F la tension maxima que supporte une couche quelconque. L'époque du $n^{\text{ème}}$ tremblement de terre sera la racine de l'équation (25):

$$\mu[(t - t_{2n-2}) + \nu_n H(t)] = F.$$

Or nous avons vu l'impossibilité de déterminer, faute de données historiques, l'hystérésis actuelle ${}_nH(t)$. Nous ne connaissons pas non plus la valeur F qui, très probablement, au lieu d'être constante, varie après chaque tremblement de terre même survenu dans le même niveau, par l'éternel va-et-vient de brisements et de conglutinations. Le facteur μ, lui aussi, offre bien des difficultés. Même s'il était déterminé par la thermodynamique, comme nous l'avons supposé pour un moment, il n'y aurait pas moyen de l'observer par les variations du gradient. En outre il est presque sûr que la tension dérivée d'une variation du gradient n'est pas la cause unique des tremblements de terre, et ce μ pourra très bien renfermer les actions secondaires cosmiques et météorologiques, dont la plupart ne peuvent être prévues. Loin de pouvoir observer ce μ, nous ne savons pas même en constater l'existence.

L'équation que nous venons de discuter est donc dépourvue de tout intérêt, même théorique. Une prévision utile ne s'appuiera pas, après ce qui a été dit ci-dessus, sur la fonction de l'hystérésis, mais tâchera plutôt d'en utiliser les dérivées qui offrent moins d'inconvénients.

Notons, en passant, que les équations de l'hystérésis déduites jusqu'ici, en les appliquant aux procédés cycliques alternants, donnent ces boucles bien connues dans la représentation graphique de l'hystérésis.

Enfin j'exposerai ici quelques formules simples, ainsi que leur graphique.

$$ {}_1H(t) = (t - t_0 + \tau)\, l \cdot \frac{t - t_0 + \tau}{\tau} - (t - t_0), \quad (t \geqq t_0), $$

$$ H_1(t) = (t - t_0 + \tau)\, l \cdot \frac{t - t_0 + \tau}{t - t_1 + \tau} - (t_1 - t_0), \quad (t \geqq t_1), $$

$$ {}_2H(t) = (t - t_0 + \tau)\, l \cdot \frac{t - t_0 + \tau}{t - t_1 + \tau} + (t - t_2 + \tau)\, l \cdot \frac{t - t_2 + \tau}{\tau} $$

$$ - (t_1 - t_0) - (t - t_2), \quad (t \geqq t_2), $$

$$ H_2(t) = (t - t_0 + \tau)\, l \cdot \frac{t - t_0 + \tau}{t - t_1 + \tau} + (t - t_2 + \tau)\, l \cdot \frac{t - t_2 + \tau}{t - t_3 + \tau} $$

$$ - (t_1 - t_0) - (t_3 - t_2), \quad (t \geqq t_3). $$

La figure 1, fondée sur les données sismiques moyennes du Japon, représente l'hystérésis pour les trois premiers tremble-

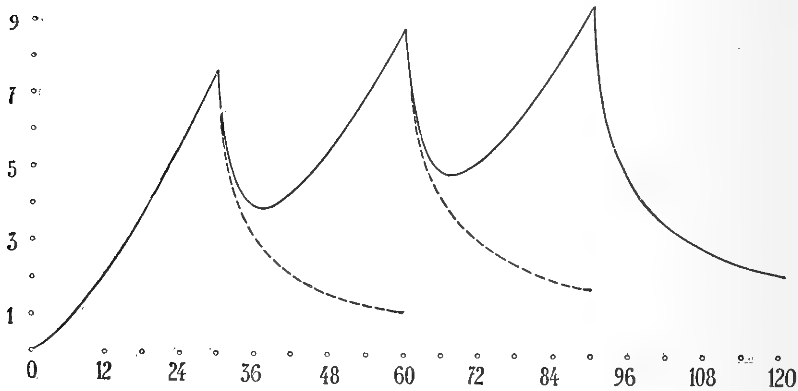


Fig. 1.

ments de terre. Leur intervalle constant est de 30 mois, ainsi que $t_0 = 0$, $t_1 = 30$, $t_3 = 60$, $t_5 = 90$ et $\tau = 1$ mois. On a supposé, en outre, que le gradient de la tension est constant ($\mu = 1$), et que la nouvelle tension renaît, au moment, où la précédente a été éteinte, de sorte que $t_2 = t_1$, $t_4 = t_3$. On voit assez bien l'accroissement continu de l'hystérésis après chaque sisme. Les courbes pointillées donnent l'hystérésis résiduelle $H_n(t)$ qui aurait lieu, si, après le $n^{\text{ème}}$ tremblement de terre, le calme était rétabli pour toujours.

Dans la deuxième figure on a supposé que la nouvelle tension commence à agir aux moments $t_0 = 0$, $t_2 = 39$. $t_4 = 81$. La tension a donc été entièrement suspendue pendant 9 mois après

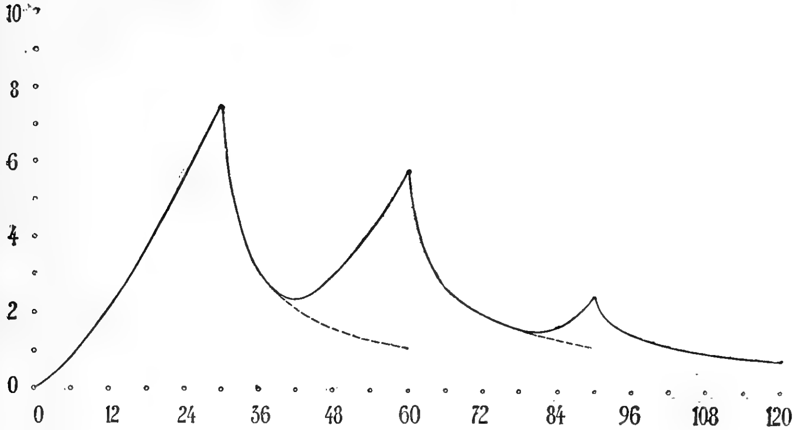


Fig. 2.

le premier, et pendant 21 mois après le deuxième tremblement de terre. Les autres suppositions restent intactes.

Secousses accessoires.

Le raisonnement qui conduit de la loi empirique des répliques à la reconnaissance de l'hystérésis suggère également l'existence de secousses prémonitoires. Comme l'hystérésis va toujours en croissant avant le tremblement de terre, on écrira l'équation des chocs prémonitoires et subséquents sur le modèle de l'équation (2) dans la forme

$$ {}_nN(t) = \frac{\partial_n H(t)}{\partial t} \quad \text{et} \quad N_n(t) = -\frac{\partial H_n(t)}{\partial t}, \tag{30} $$

ou en s'appuyant sur les équations (21) et (22):

$$ {}_nN(t) = \sum_1^{n-1}{}_i\, l \cdot \frac{t - t_{2i-2} + \tau}{t - t_{2i-1} + \tau} - \sum_1^{n-1}{}_i\, \frac{t_{2i-1} - t_{2i-2}}{t - t_{2i-1} + \tau} $$

$$ + l \cdot \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{\tau}, \quad (t \geqq t_{2n-2}), $$

$$ N_n(t) = \sum_1^{n}{}_i\, \frac{t_{2i-1} - t_{2i-2}}{t - t_{2i-1} + \tau} - \sum_1^{n}{}_i\, l \cdot \frac{t - t_{2i-2} + \tau}{t - t_{2i-1} + \tau}, \quad (t \geqq t_{2n-1}). \tag{31} $$

D'où l'on trouvera pour les premiers tremblements de terre les formules:

$$_1N(t) = l \cdot \frac{t-t_0+\tau}{\tau}, \quad (t \geqq t_0);$$

$$N_1(t) = \frac{t_1-t_0}{t-t_1+\tau} - l \cdot \frac{t-t_0+\tau}{t-t_1+\tau}, \quad (t \geqq t_1);$$

$$_2N(t) = l \cdot \frac{t-t_0+\tau}{t-t_1+\tau} + l \cdot \frac{t-t_2+\tau}{\tau} - \frac{t_1-t_0}{t-t_1+\tau}, \quad (t \geqq t_2);$$

$$N_2(t) = \frac{t_1-t_0}{t-t_1+\tau} + \frac{t_3-t_2}{t-t_3+\tau} - l \cdot \frac{t-t_0+\tau}{t-t_1+\tau} - l \cdot \frac{t-t_2+\tau}{t-t_3+\tau}, \quad (t \geqq t_3).$$

Avant d'employer toutes ces formules, on doit ajouter au second membre le facteur $c\mu\nu$, que nous avons supprimé; c est le coefficient de fréquence des secousses accessoires, μ celui de la tension et ν de l'hystérésis.

La deuxième équation du groupe (31) est la forme plus complète de la loi des répliques de M. Omori. Comme $t_1 - t_0$ est le temps pendant lequel le premier tremblement de terre mûrissait, le terme $c(t_1 - t_0)$ est assez grand vis-à-vis de c. On en conclura que l'influence du terme logarithmique est assez faible, et qu'il disparaîtra en outre très rapidement à cause de la forme de son argument. Ce raisonnement reste en vigueur même si le nombre des tremblements de terre qui précèdent est très grand. Il est donc prouvé à postériori que la condition imposée à la fonction $\psi(t)$ de l'équation (5) est justifiée.

Il existe des relations analogues aux (26) et (27) pour les chocs accessoires:

$$N_n(t) - N_{n-1}(t) = \frac{t_{2n-1}-t_{2n-2}}{t-t_{2n-1}+\tau} - l \cdot \frac{t-t_{2n-2}+\tau}{t-t_{2n-1}+\tau},$$

$$_nN(t) + N_{n-1}(t) = l \cdot \frac{t-t_{2n-2}+\tau}{\tau}, \quad (t \geqq t_{2n-2}), \tag{32}$$

qui, d'ailleurs, ont la même forme que $N_1(t)$ et $_1N(t)$.

La tension qui entraîne le $n^{\text{ème}}$ tremblement de terre a son origine à l'époque $t = t_{2n-2}$, pour laquelle

$$_nN(t_{2n-2}) = - N_n(t_{2n-2}).$$

Si le temps va en croissant, le deuxième membre de l'équation (32 bis) croîtra à son tour, alors que $N_{n-1}(t)$ va en décroissant, comme on le voit d'un coup d'oeil d'après l'équation (31 bis).

Il s'en suit que ${}_{n}N(t)$ croît d'autant plus vite. Pendant un certain temps les chocs prémonitoires d'un tremblement de terre sont donc identiques aux secousses subséquentes du sisme précédent, ce qui explique leur signe négatif; après ce temps-là ils se transforment en chocs prémonitoires proprement dits.

Il y a tout intérêt à déterminer le moment où ce changement a lieu; on en déduira aisément l'époque du renouvellement de la tension. Nous différons ce problème jusqu'au moment, où nous connaîtrons mieux l'expression complète de ${}_{n}N(t)$.

L'aspect de l'équation (31 bis) nous a appris que, à travers les temps, le nombre des répliques décroît rapidement. D'où la possibilité d'estimer aisément l'influence de tous les tremblements de terre précédents.

Nous écrirons la première des équations (31) sous la forme

$$\begin{aligned} {}_{n+i}N(t) = {} & \sum_{1}^{n}{}_{\lambda} l \cdot \frac{t - t_{2\lambda-2} + \tau}{t - t_{2\lambda-1} + \tau} - \sum_{1}^{n}{}_{\lambda} \frac{t_{2\lambda-1} - t_{2\lambda-2}}{t - t_{2\lambda-1} + \tau} \\ & + \sum_{1}^{i-1}{}_{\lambda} l \cdot \frac{t - t_{2n+2\lambda-2} + \tau}{t - t_{2n+2\lambda-1} + \tau} - \sum_{1}^{i-1}{}_{\lambda} \frac{t_{2n+2\lambda-1} - t_{2n+2\lambda-2}}{t - t_{2n+2\lambda-1} + \tau} \qquad (33) \\ & + l \cdot \frac{t - t_{2n+2i-2} + \tau}{\tau}. \end{aligned}$$

On a décomposé cette équation pour pouvoir mieux calculer les i derniers tremblements de terre, chacun avec ses propres éléments, tandis que pour les n sismes antérieurs on se contentera d'employer l'intervalle moyen déduit de la statistique sismologique du pays. Le $n^{\text{ème}}$ tremblement de terre, survenu à l'époque t_{2n-1}, est donc le dernier dans la série qui ait été calculé approximativement. Le renouvellement de la tension tombe au moment t_{2n}, que je choisirai comme point de départ. On aura donc

$$t - t_{2\lambda-2} + \tau = t - t_{2n} + \tau + (2n - 2\lambda + 2)\theta,$$

et au cas, où n est assez grand, on calculera la première ligne du deuxième membre de l'équation, savoir la correction pour les tremblements de terre du passé, en remplaçant la sommation par l'integration. On trouvera ainsi

$$
\begin{aligned}
{}_{n+i}N(t) &= l\cdot\frac{t-t_{2n+2i-2}+\tau}{\tau} \\
&+\sum_{1}^{i-1}{}_\lambda\, l\cdot\frac{t-t_{2n+2\lambda-2}+\tau}{t-t_{2n+2\lambda-1}+\tau}-\sum_{1}^{i-1}{}_\lambda\,\frac{t_{2n+2\lambda-1}-t_{2n+2\lambda-2}}{t-t_{2n+2\lambda-1}+\tau} \qquad (34)\\
&+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,\frac{t-t_{2n}+\tau+2\theta}{\theta}\,l\cdot\frac{t-t_{2n}+\tau+2\theta}{t-t_{2n}+\tau+\theta},
\end{aligned}
$$

où les deux derniers termes du deuxième membre forment la correction cherchée.

Soit brièvement

$$t-t_{2n}+\tau+2\theta=u,$$

alors cette correction prendra la forme

$$\frac{1}{2}\left[1+\frac{u}{\theta}l\cdot\left(1-\frac{\theta}{u}\right)\right]=-\frac{1}{2}\sum_{2}^{\infty}{}_k\,\frac{1}{k}\left(\frac{\theta}{u}\right)^{k-1}$$

qui démontre qu'elle diminue rapidement avec le temps.

Prenons le $(n+i)^{\text{ème}}$ tremblement de terre qui éclate au moment $t_{2n+2i-1}$, négligeons τ et choisissons l'intervalle commun moyen θ, alors

$$u=(2i+1)\theta,$$

et le premier terme de la correction deviendra

$$\frac{1}{4(2i+1)}.$$

Si l'on ne prend en considération que les trois derniers tremblements de terre, la correction sera à peu de chose près $\frac{1}{30}$. On en déduit la proposition suivante: tandis que l'hystérésis dépend essentiellement de l'histoire sismique de la croûte terrestre, les chocs accessoires n'en conservent qu'une faible mémoire.

On a évidemment pour $t=t_{2n}$ et pour $t=\infty$:

$$0<\frac{\theta}{u}<\frac{1}{2},$$

d'où il suit que les sismes antérieurs pourront être évalués au moyen d'un petit tableau numérique avec l'argument $\frac{\theta}{u}$, dans lequel les valeurs C de la correction se rangent entre les valeurs limites

$$0<C<(\tfrac{1}{2}-l\cdot 2).$$

Enfin, on déduira aisément des équations (32) avec ${}_{n+i}N(t)$ les expressions de $N_{n+i-1}(t)$ et de $N_{n+i}(t)$; il est peut-être superflu de les reproduire.

Si l'intervalle moyen θ est considéré comme constant, on aura pour la différence de la fréquence des chocs prémonitoires, aux moments de deux tremblements de terre consécutifs:

$${}_{n}N(t_{2n-1}) - {}_{n-1}N(t_{2n-3}) = l \cdot \frac{(2n-1)\theta+\tau}{(2n-2)\theta+\tau} - \frac{\theta}{(2n-2)\theta+\tau} < 0,$$

ce qui veut dire qu'en moyenne le nombre de chocs prémonitoires va en décroissant pour chaque tremblement de terre suivant. Mais cela n'est juste qu'à condition que la tension croisse toujours de la même manière avec le temps et que le coefficient de fréquence reste constant. Cette décroissance est actuellement, vu le grand nombre de tremblements de terre historiques, de l'ordre $\frac{1}{4(n-1)^2}$, ce qui est pratiquement zéro.

Peut-être convient-il de retenir, pour l'avenir, que nous venons de trouver une quantité qui tend vers l'établissement d'une certaine constance, tandis que l'hystérésis va toujours en augmentant.

En effet des chocs prémonitoires ont été observés avant quelques tremblements de terre modernes, même avant la catastrophe de Messine, mais on en connaît très peu*. Des sismes provenant de localités voisines se ressemblent souvent à un degré tel que les sismogrammes relevés offrent des traits presque identiques, et il paraît qu'il en est de même pour les chocs prémonitoires. M. Omori a publié deux cas, où les chocs prémonitoires devancèrent l'éclatement à des intervalles égaux. Quelle que soit l'importance des études futures, actuellement il serait trop hardi de fonder un système de prévision sur des phénomènes si peu connus.

L'expression des chocs prémonitoires ne renferme pas la quantité t_{2n-1}, époque du tremblement de terre, d'où l'impossibilité de la prévision en se basant sur la fréquence observée. Certes, on sait faire rentrer ce paramètre, par exemple en cher-

* Bull. of the Imp. Earthqu. Invest. Comm. Vol. II N°. 2 Tokyo 1908, p. 89 et Bollettino Sismologico, Vol. XIII, 1909, p. 305.

chant le nombre total des secousses prémonitoires, et encore cela ne sert à rien, si l'on ne connaît pas d'avance une certaine relation à laquelle cette somme est assujettie.

S'il s'agissait d'un seul tremblement de terre, on trouverait

$$\sum_{t_1}^{\infty} N_1(t) = c \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{t_1 - t_0}{t - t_1 + \tau} - l \cdot \frac{t - t_0 + \tau}{t - t_1 + \tau} \right) dt$$
$$= c\left[(t_1 - t_0 + \tau)\, l \cdot \frac{t_1 - t_0 + \tau}{\tau} - (t_1 - t_0) \right],$$

$$\sum_{t_0}^{t_1} {}_1N(t) = c' \int_{t_0}^{t_1} l \cdot \frac{t - t_0 + \tau}{\tau}\, dt = c'\left[(t_1 - t_0 + \tau)\, l \cdot \frac{t_1 - t_0 + \tau}{\tau} - (t_1 - t_0) \right],$$

pourvu que le nombre des chocs soit assez grand.

Si donc le coefficient de fréquence est le même avant et après un sisme, ce qui est bien vraisemblable, alors le nombre total des chocs prémonitoires et subséquents est le même.

Au moment du sisme les quantités ${}_nN(t_{2n-1})$ et $N_n(t_{2n-1})$ sont différentes, alors que l'hystérésis restait la même. Il y a encore un saut proportionel à la tension dégagée pendant le tremblement de terre, et cela exige que les coefficients c et c' de la fréquence avant et après le sisme restent sensiblement égaux.

On peut se faire même une idée sur l'intensité moyenne des secousses accessoires. Puisque l'intensité du tremblement de terre est produite par la tension $\mu_n(t_{2n-1} - t_{2n-2})$, celle des chocs accessoires provient exclusivement de l'hystérésis. Si l'on désigne par i l'intensité moyenne des secousses on aura, en se rappelant que $N(t)$ a pour intégral $H(t)$:

$$\begin{aligned} {}_ni \sum_{t_{2n-2}}^{t_{2n-1}} {}_nN &= c\mu_n \nu [{}_nH(t_{2n-1}) - {}_nH(t_{2n-2})], \\ i_n \sum_{t_{2n-1}}^{t_{2n}} N_n &= c\mu_n \nu [H_n(t_{2n}) - H_n(t_{2n-1})], \end{aligned} \tag{35}$$

et il ne reste qu'à trouver la valeur de μ.

Soit x la profondeur du foyer sismique, Γ_n l'accélération du mouvement oscillatoire imposée à toute la colonne de la hauteur x dont le poids spécifique est gs, alors on posera

$$\mu_n(t_{2n-1} - t_{2n-2}) = \frac{\Gamma_n}{g} sgx, \tag{36}$$

et d'autre part d'après l'équation de CANCANI*

$$G_n = 3 \log \frac{4}{3} \Gamma_n, \tag{37}$$

G_n étant la force de l'ébranlement exprimée en degrés de l'échelle sismologique de FOREL-MERCALLI. La combinaison des deux équations révèle la valeur de μ_n.

Les figures 3 et 4 représentent la fréquence des chocs accessoires avec les mêmes conditions numériques qui ont servi dans

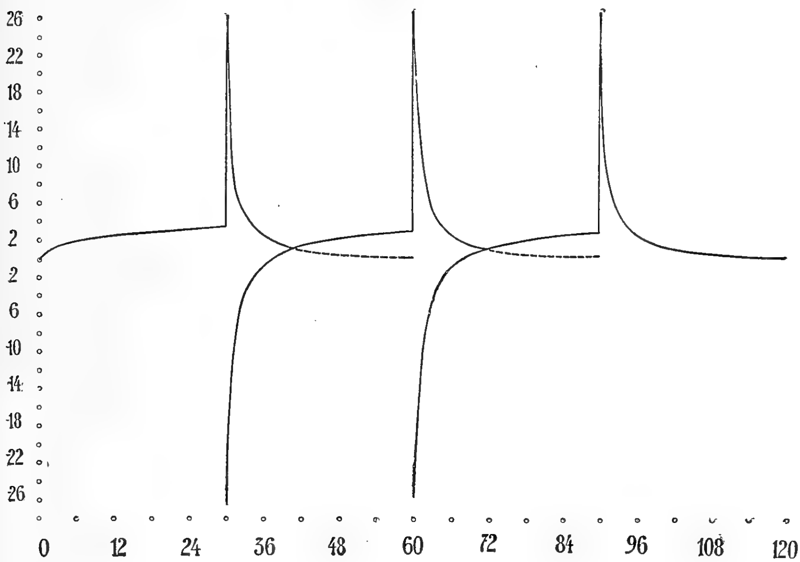


Fig. 3.

les figures 1 et 2. Le facteur de la fréquence c a été égalé à l'unité. Les racines des équations ${}_2N(t) = 0$ et ${}_3N(t) = 0$ sont $t_2^0 = 37{,}23$ et $t_4^0 = 67{,}68$, c'est à dire les moments, où la courbe des chocs prémonitoires change de signe, et en même temps, où l'hystérésis avant le tremblement de terre est devenue minimum. Dans la figure 4, où les moments du renouvellement de la tension sont distribués moins régulièrement, les temps correspondants

* Seismonomia, Modena 1906, p. 77.

sont $t_2^0 = 41{,}32$ et $t_4^0 = 81{,}48$. Étant donné l'impossibilité de les observer, ces moments n'ont qu'un intérêt théorique.

L'inspection des courbes facilite essentiellement le classement des secousses accessoires. Le tremblement de terre est naturellement un procédé tumultueux, mais la continuité de l'hystérésis et des secousses accessoires est strictement conservée entre deux sismes. On en déduit que les chocs prémonitoires du $n^{\text{ème}}$ tremblement de terre se comptent du point d'intersection des courbes ${}_nN(t)$ et $N_{n-1}(t)$. Ici la fréquence est dévenue minima, et l'époque

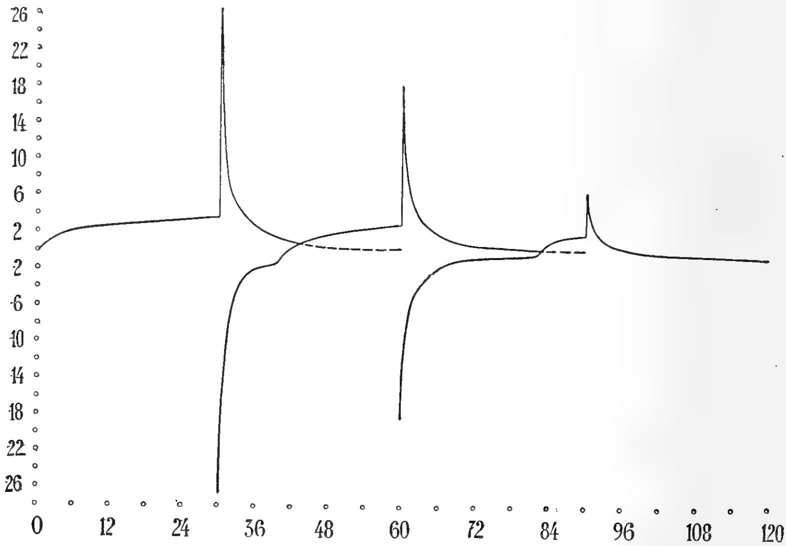


Fig. 4.

que nous désignerons t'_{2n-2} est accessible à l'observation et cela même avec une précision suffisante. Nous en parlerons plus tard.

Les équations (32) donnent sous la condition ${}_nN(t) = N_{n-1}(t)$ la relation

$$l \cdot \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{\tau} = 2 N_{n-1}(t),$$

ou

$$l \cdot \frac{t - t_{2n-2} + \tau}{\tau} = 2 \sum_1^{n-1} {}_i \left[\frac{t_{2i-1} - t_{2i-2}}{t - t_{2i-1} + \tau} - l \cdot \frac{t - t_{2i-2} + \tau}{t - t_{2i-1} + \tau} \right], \quad (38)$$

dont la solution cherchée est t'_{2n-2}. On trouve ainsi pour les figures 3 et 4: $t_2' = 41{,}02$ et $t_4' = 71{,}98$, et $t_2' = 44{,}03$ et $t_4' = 82{,}13$.

Le deuxième membre de l'équation (38) est toujours positif; il s'ensuit que $t'_{2n-2} > t_{2n-2}$; les premières secousses prémonitoires débutent toujours après le renouvellement de la tension. On déduit enfin de l'équation (38) la solution

$$t_{2n-2} = t'_{2n-2} - \tau \left[e^{2N_{n-1}(t'_{2n-1})} - 1 \right]$$

donnant ce moment, où la tension ressuscita. Et c'est le dernier élément inconnu dont nous aurons besoin.

La vitesse de propagation des ondes sismiques.

L'hystérésis a pour résultat que le module d'élasticité est fonction de l'état instantané du corps; il est donc tout naturel de représenter la vitesse de propagation en fonction de la tension. Nous aurons par là un élément sismologique assez aisément accessible, témoin la triangulation sismologique* réalisée au Japon de 1895 à 1898. Et comme le nombre des sismes survenants est assez élevé, on pourra ainsi assujettir chaque point de la surface de la terre à un contrôle presque continu.

Désignons par u soit le volume, soit une donnée caractéristique quelconque d'un corps sous l'action d'une force élastique, on aura pour des variations très petites l'équation bien connue

$$-\frac{\delta u}{u} = \frac{\delta p}{E_0} + \frac{\nu}{E_0}\, \delta H(t), \tag{39}$$

E_0 étant le module d'élasticité correspondant à l'état neutre instantané. Le module neutre n'est pas, naturellement, identique avec la module virginel qui, faute de connaissance de l'histoire complète du système, reste inconnu. Pourtant après un calme infiniment prolongé le module neutre tend vers la valeur virginelle. L'équation que nous venons d'établir montre que toute variation du volume ou de la forme se compose des variations dues à la loi de HOOK et à la tension secondaire hystérésique. Au lieu du premier membre on posera également

$$-\frac{\delta u}{u} = \frac{\delta p}{E}, \tag{40}$$

E étant le module instantané, variable avec l'hystérésis.

---

* PEIC. N° 7. Tokyo 1902, p. 5.

Le rapprochement des deux dernières équations donne

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_0}\left[1 + \nu\frac{\partial H(t)}{\partial p}\right]$$

ou, en négligeant les petites variations de la densité et du coefficient de contraction latérale

$$\frac{(v)^2}{v^2} = 1 + \nu\frac{\partial H(t)}{\partial p}, \tag{41}$$

v étant la vitesse de propagation observée, (v) celle qui correspond à l'état instantané neutre. Une communication orale de M. Kármán qui poursuit, actuellement, au laboratoire physique de l'université de Goettingue des expériences d'une étendue exceptionnelle, m'apprend en effet que les variations de la densité sont tout à fait négligeables même au moment du brisement des spécimens.

Une observation essentielle est que le quotient $\frac{\partial H(t)}{\partial p}$ est toujours positif, par conséquent $\frac{\partial H(t)}{\partial t}$ et $\frac{\partial p}{\partial t}$ ont toujours le même signe. Donc si nous n'envisagerons que des tensions croissant proportionnellement au temps, nous pourrons mettre $N(t)$ au lieu de $\frac{\partial H(t)}{\partial p}$, et on verra que même le facteur μ de la tension a disparu. Après les remarqnes que nous venons de faire, l'équation (41) fournit les deux suivantes:

$$\frac{(v)^2}{{}_n v^2} = 1 + \nu_n N(t) \quad \text{et} \quad \frac{(v)^2}{v_n^2} = 1 + \nu N_n(t) \tag{42}$$

donnant les vitesses avant et après le $n^{\text{ème}}$ tremblement de terre. Bien que le facteur μ soit éliminé, on ne pourra pas affirmer que cette vitesse soit indépendante de la manière dont la tension croît.

Suivons à présent le cours de la courbe de la vitesse. Après le $(n-1)^{\text{ème}}$ sisme $N_{n-1}(t)$ décroît, partant v_{n-1} va en augmentant, et cela jusqu'au moment t'_{2n-2}. A partir de ce point ce sont les chocs prémonitoires qui apparaissent, et comme ${}_nN(t)$ est une fonction croissante, ${}_nv$ diminue. Au point t'_{2n-2} la courbe est brisée, sans perdre la continuité, et ce point de rebroussement répond au maximum de la vitesse. En connaissant par des observations cette valeur maxima, en même temps que son époque, on en déduit au moyen de l'équation (38) la valeur t_{2n-2}, époque où la tension ressuscite.

La diminution de la vitesse de propagation accuse l'accumulation d'une nouvelle tension, partant un tremblement de terre mûrissant.

Comme le facteur μ, indiquant l'intensité de la force, a disparu, cette règle reste valable quelle que soit la cause qui engendre la tension; la seule restriction est, qu'elle doit croître proportionnellement au temps. La vitesse répond donc toujours à l'état actuel de la tension, qu'elle se produise par des variations tectoniques, cosmiques ou météorologiques, pourvu que ces variations soient toujours proportionnelles au temps. Au cas d'une tension quelconque l'équation plus générale (41) devrait être retenue. Comme il ne s'agit ici que de la dérivée de l'hystérésis, le problème est résoluble, sans aucune restriction sur la forme de la tension.

Voici que nous avons acquis un symptôme vraiment observable de la menace d'un tremblement de terre, parce que nul ne doutera que l'époque, où les chocs subséquents cèdent aux chocs prémonitoires, ne saurait être l'objet d'observation.

Au moment du sisme il se produit une discontinuité; on a notamment, entre ${}_nN(t_{\overline{2n}-1})$ et $N_n(t_{2n-1})$ une chute de fréquence montant à $\frac{t_{2n-1}-t_{2n-2}}{\tau}$ et qui est évidemment proportionnelle à la tension $\mu(t_{2n-1}-t_{2n-2})$ dégagée pendant l'ébranlement. On y déduira la relation

$$\frac{(v)^2}{v_n^2}-\frac{(v)^2}{{}_nv^2}=\frac{\nu}{\tau}(t_{2n-1}-t_{2n-2}). \tag{43}$$

Si l'on réussit à observer le saut survenu dans la vitesse immédiatement aux environs du tremblement de terre, on aura un moyen très simple pour la détermination du coefficient ν.

Actuellement on ne sait rien sur la valeur que prendra la vitesse au moment du futur tremblement de terre, et pour cette raison l'équation (42) ne se prête pas à la prévision sismologique. Je crois bien que, chemin faisant, on apprendra quelque chose d'utile sur ce sujet. La tendance de rendre constante la fréquence des chocs accessoires est, certes, très suggestive. Mais encore, cette voie de prévision n'est-elle pas tout à fait suffisante, car elle ne contient aucune indication sur la force du tremblement de terre qui menace. La cause en est la perte du facteur μ.

Sans confier entièrement la solution du problème à l'avenir, on sait actuellement fixer deux limites, entre lesquelles le tremblement de terre devra éclater. Nous établirons deux conditions qui me semblent bien incontestables.

La première est fondée sur le deuxième principe de la thermodynamique qui, pour des processus irréversibles, est donné par l'inégalité

$$dQ < TdS, \tag{44}$$

S étant l'entropie. En posant

$$\frac{\partial p}{\partial s} = v^2, \quad \text{et} \quad (v)^2 = \frac{E_0}{s}, \tag{45}$$

les équations (12) et (13) donnent:

$$v^2 = (v)^2 \frac{C_p dT - dQ}{[C_p - \alpha^2 (v)^2 T] dT - dQ}.$$

Or on sait que

$$C_p - \alpha^2 (v)^2 T = C_u,$$

u étant le volume, partant

$$v^2 = (v^2) \frac{C_p dT - dQ}{C_u dT - dQ}. \tag{46}$$

Il est vrai que cette équation, valable pour un corps solide homogène, contient déjà le second principe de la thermodynamique, mais pas d'une façon essentielle, ainsi qu'elle reste applicable. Pour les gaz idéaux on la trouvera sans avoir recours au principe de Clausius.

Si l'on marque d'accents les quantités assujetties à l'hystérésis, on obtiendra de l'inégalité

$$dQ_{irr} < dQ_{rev}$$

la suivante:

$$\frac{C_u v'^2 - C_p (v)^2}{v'^2 - (v)^2} < \frac{C_u v^2 - C_p (v)^2}{v^2 - (v)^2}, \tag{47}$$

partant

$$v'^2 < v^2, \tag{48}$$

ou d'après la définition de la vitesse v':

$$_nN(t) > 0. \tag{49}$$

Cette équation correspond à l'état virginel de la terre. Si l'on introduit, au lieu des vitesses v' et v, celles qui se rapportent à l'état des couches avant le $n^{\text{ème}}$ tremblement de terre et après le $(n-1)^{\text{ème}}$, on trouvera par extension

$$_nN(t) > N_{n-1}(t), \tag{50}$$

ce qui donne la proposition qui suit: l'époque limite inférieure d'un tremblement de terre est le moment, où les chocs subséquents du dernier sisme se transforment en chocs prémonitoirés. La proposition paraît être banale; mais elle ne l'est pas réellement, car elle démontre qu'en ce moment-là il y a déjà une certaine tension accumulée.

La solution de l'inégalité (50) est fournie par la racine t'_{2n-2} de l'équation (38); nous l'appellerons dorénavant plus avantageusement t'_{2n-1}. Puisque $_nN(t)$ est une fonction croissante, la limite trouvée est vraiment la limite inférieure, pour laquelle

$$t_{2n-1} > t'_{2n-1}, \tag{51}$$

t_{2n-1} étant l'époque du tremblement de terre attendu.

C'est un fait assez remarquable que le premier symptôme du péril menaçant ne dépende que d'une seule inconnue, de l'époque du renouvellement de la tension, qui s'accuse par le maximum de la vitesse.

Pour trouver une limite supérieure de l'époque du tremblement de terre, on se dira d'abord que le relâchement de la terre dû à la suite presque ininterrompue des sismes abaisse continuellement la vitesse de propagation. Elle atteindrait sa valeur minima V, si la terre était réduite à un amas de particules incohérentes, assujetties seulement à l'action de la pesanteur. La vitesse actuelle surpasse certainement cette valeur limite, d'où il résulte:

$$\frac{1}{(v)^2}\Big[1 + \nu_n N(t)\Big] < \frac{1}{V^2}, \tag{52}$$

ou

$$_nN(t) < \frac{1}{\nu}\left[\frac{(v)^2}{V^2} - 1\right]. \tag{53}$$

Soit t''_{2n-1} la solution de cette relation, si l'on remplace le signe d'inégalité par celui de l'égalité; on aura alors

$$t_{2n-1} < t''_{2n-1}. \tag{54}$$

En réunissant les deux inégalités (51) et (54) on obtient le pronostic qui suit:

$$t'_{2n-1} < t_{2n-1} < t''_{2n-1}. \tag{55}$$

Entre ces limites il est tenu compte de toutes les tensions accessoires qui pourront accélérer prématurément le déclenchement du tremblement de terre. Une fois entré dans l'espace critique désigné par la limite inférieure, on observera méticuleusement tous les phénomènes que la statistique soupçonne, mais particulièrement la vitesse locale de propagation. Il y a possibilité de restreindre ainsi ces limites, et cela par des moyens dont on a cru devoir se passer. En comparaison avec la limite inférieure, la limite supérieure, dépendant de trois paramètres à déterminer par des observations, est évidemment plus douteuse.

Puisque le pronostic est donné par deux limites, il y a lieu d'évaluer l'intensité du tremblement de terre en vue. Au lieu de l'équation (36) on peut poser plus généralement

$$\mu_n(t_{2n-1} - t_{2n-2}) = c\Gamma_n, \tag{56}$$

où c est une certaine constante et μ_n le gradient de la tension totale y compris les tensions provenant des forces extérieures. S'il n'y a pas de causes pour déclencher le sisme prématurément, celui-ci mûrira lentement pour éclater à la limite supérieure avec la force maxima $G = \text{XII}$. Ce qui fournit l'équation

$$\mu_n(t'_{2n-1} - t_{2n-2}) = c\Gamma_{\text{XII}}, \tag{57}$$

qui, combinée avec l'équation de Cancani donne enfin pour la force G_n de l'ébranlement:

$$G_n = \text{XII} - 3 \log \cdot \frac{t'_{2n-1} - t_{2n-2}}{t_{2n-1} - t_{2n-2}}. \tag{58}$$

Plus tard aura lieu le sisme, plus fort il sera.

Il ne reste que la détermination de la vitesse V qu'on calculera pour un système de particules désagrégées moyennant l'équation

$$V^2 = \frac{\partial p}{\partial s}.$$

En adoptant la loi de densité de ROCHE

$$s = s_0\left(1 - \alpha\frac{r^2}{R^2}\right), \tag{59}$$

où α et s_0 sont des constantes, R le rayon de la terre et r le rayon de la couche de densité s, on calculera d'abord l'accélération de la pesanteur, puis la pression; on obtiendra ainsi la vitesse de propagation à une profondeur quelconque. Pour la surface de la terre il s'en suivra

$$V^2 = \frac{1-\alpha}{2\alpha} g R.$$

A la rigueur on devrait multiplier le deuxième terme par le quotient des chaleurs spécifiques sous pression constante et sous volume constant. Mais puisque les particules de la terre désagrégée se comportent comme des molécules infiniment complexes, ce facteur est sensiblement égal à l'unité. En prenant $\alpha = 0{,}764$, on obtient

$$V = 3{,}102 \frac{\text{km}}{\text{sec}}, \tag{60}$$

valeur assez proche de celle qu'on observe actuellement au Japon et témoin par cela même du grand nombre de sismes survenus dans ces parages.

Les figures 5 et 6 représentent la vitesse relative de propagation $\frac{v}{(v)}$ sous les mêmes conditions numériques adoptées pour les figures 1, 3, et 2, 4. On a ajouté encore la condition tout

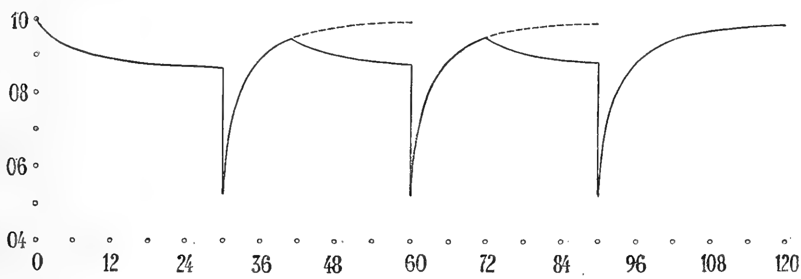


Fig. 5.

à fait arbitraire $\nu = 0{,}1$. La courbe pointillée représente la vitesse qui serait observée dans un terrain dorénavant parfaitement calme.

Le seul aspect des figures 3 à 6 nous apprend un fait curieux, très défavorable à toute prévision: que les changements après le tremblement de terre sont toujours plus sensibles qu'avant. J'y vois la confirmation analytique de cette observation que la statistique pure et simple ne saurait servir comme base solide des prévisions.

A l'heure qu'il est, je ne connais pas de méthode plus propice à l'observation continue de la vitesse locale de propagation

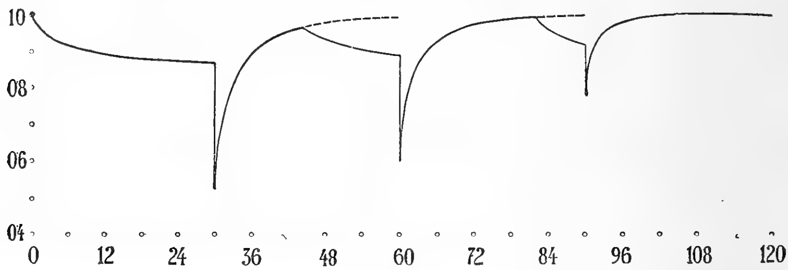


Fig. 6.

que la triangulation sismologique. La vitesse apparente, c'est-à-dire la vitesse superficielle mesurée le long du grand cercle joignant le lieu d'observation et l'épicentre, se détermine par

$$u = \frac{\varphi' - \varphi}{t' - t}, \tag{61}$$

où $\varphi' - \varphi$ est la différence des distances épicentrales des deux stations, et $t' - t$ l'intervalle de temps écoulé entre l'arrivée de la même secousse. Tandis que le numérateur est fort bien connu, le dénominateur peut être assez erroné à cause de la différence de sensibilité des deux sismographes employés, et surtout de l'incertitude de l'état des deux horloges. L'exigence que les deux stations devraient être aussi voisines que possible contribue encore à augmenter l'erreur. Et cependant, il s'agit toujours de variations de vitesse très faibles, comme le démontrent les figures 5 et 6.

La triangulation sismologique réduit très sensiblement ces erreurs. Malheureusement il n'y a eu qu'une seule tentative faite au Japon. M. PALAZZO* cherche à établir la méthode pour la

* C. R. Comm. perm. de l'Assoc. internat. de sism. Zermatt 1909. Budapest 1910, p. 159.

Calabre et la Sicilie en employant même, pour une partie du réseau, la télégraphie sans fil.

Si l'angle d'émergence du rayon sismique est désigné par e, on trouvera la vitesse vraie par l'équation

$$v = u \cos e,$$

et il va sans dire, que cette vitesse se rapporte au lieu où elle a été observée. Remarque bien utile pour l'avenir, par laquelle on arrivera à la prévision de l'épicentre, où le tremblement de terre devra se produire. En effet, si le réseau de triangulation est assez serré, on tracera, sur le modèle des cartes météorologiques synoptiques, les isotachytes, lignes de lieux de même vitesse locale. La construction continue de ce système de lignes permettra de suivre le déplacement de la meiotachyte, courbe de la vitesse minima, et par suite de localiser le foyer probable du tremblement de terre futur.

La fréquence des sismes est assez considérable pour permettre un contrôle efficace, mais, certes, les vitesses observées se rapporteront, suivant la distance de la station du foyer sismique, à des profondeurs différentes. Reste donc à localiser, à l'intérieur de la terre, les données des observations et à les réduire au même niveau. On sait assez bien la géométrie des rayons sismiques pour mener à bien cette tâche, à laquelle la géologie, elle aussi, a toute raison de s'intéresser.

Le tremblement de terre de Chihuzen du 10 août 1898.

A l'emploi pratique des résultats que nous venons de trouver s'oppose une grave difficulté: nulle part on ne dispose d'une série continue de vitesses observées qui mériterait confiance, et on devra ou renoncer à toute vérification, ou choisir la seule triangulation qui existe, celle du Japon. Certes, on n'obtiendra ainsi tout au plus qu'une prévision rétrospective, mais pourtant une prévision qu'on eût pu faire, avec les connaissances acquises à présent, en temps utile.

Cette triangulation a été opérée entre trois points de Tokio et un quatrième à Hitsosubashi, lieu situé à une distance de 10 kilomètres de la capitale. Les vitesses sont, par conséquent, les vitesses locales de Tokio et rigoureusement elles ne sauraient servir qu'à la prédiction des tremblements de terre, dont l'épicentre est dans les environs de cette ville.

Le tableau suivant donne le matérial de l'observation. Les première, troisième et quatrième colonnes contiennent l'époque et le lieu du tremblement de terre par rapport à Tokio, la deuxième la vitesse apparente locale: l'azimut est compté à partir du nord vers l'est. L'amplitude de la composante verticale de la secousse qui, pour Tokio, est en moyenne un septième de la composante horizontale, ne modifia cette vitesse apparente qu'en deux cas, en tant qu'elle rend les vitesses comprises dans la troisième et septième lignes 3,11 et 3,28 km par sec. Pourtant il sera bon de retenir que les deux sismographes, enregistrant les composantes verticale et horizontale, sont d'un principe et d'une sensibilité très différents entre eux de sorte, que la détermination de l'angle d'émergence paraît quelque peu illusoire, et on ferait peut-être mieux de multiplier toutes les vitesses observées par cos (arc tang $\frac{1}{7}$) = 0.9899, le facteur moyen de réduction. IMAMURA en discutant les résultats de cette triangulation est, lui aussi, d'avis que la correction apportée est trop incertaine, et en effet il l'a rejetée au cours de ses recherches suivantes*. Je me tiendrai, moi-même, à cet exemple.

Variations de la vitesse sismique locale de Tokio.

Date de l'observation	vitesse km par sec	Épicentre du tremblement de terre	
		distance en km	azimut en degr.
1895. IV. 3.	3.22	110	325
1896. II. 23.	3.58	160	35
1896. III. 6.	3.13	120	20
1896. IV. 24.	3.04	70	335
1897. VIII. 5.	3.23	450	50
1897. VIII. 16.	3.20	300	42
1898. II. 13.	3.49	60	335
1898. VII. 12.	3.30	80	315

La figure 7 représente la courbe de ces vitesses qui a été tracée sans nous inspirer des résultats de la théorie exposée.

* PEIC N° 7 Tokyo 1902, p. 23. La vitesse N° 6 de 3,26 doit être remplacée par 3,20; voir p. 19.

Les points sur l'axe des abscisses, copiés sur le catalogue sismologique du Japon et sur le diagramme de M. OMORI*, donnent

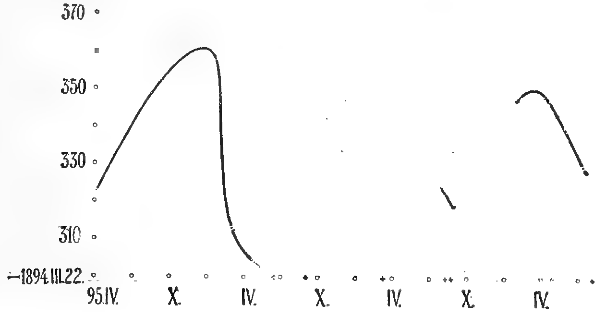


Fig. 7.

les tremblements de terre forts et destructifs, survenus pendant la durée de la triangulation.

Liste des tremblements de terre aux environs de la triangulation sismologique.

Numéro	Époque du sisme	Localité du tremblement de terre
$i = 1$	$t_{2n+1} =$ 1894. III. 22. = 0 jour	Nemuro, Kushiro et Ile de Kunashiri
2	$t_{2n+3} =$ 1894. VI. 20. = 90	Tokio et environs; le plus fort sisme depuis 1855.
3	$t_{2n+5} =$ 1896. VI. 15. = 816	Origine sous-marine; grand raz de marée aux côtes E. du Japon septentrional.
4	$t_{2n+7} =$ 1896. VIII. 31. = 893	Ugo et Rikuchiu.
5	$t_{2n+9} =$ 1897. II. 20. = 1065	Sendai et part orientale de Rikuzen.
6	$t_{2n+11} =$ 1897. VIII. 5. = 1231	Sous-marin; à 220 km SE de Miyako.
	1897. VIII. 27.	Faible, sous-marin; à 160 km. SE de Miyako.
7	$t_{2n+13} =$ 1898. IV. 23. = 1492	Origine sous-marine; à 200 km. ESE de Miyako.
8	$t_{2n+15} =$ 1898. VIII. 10. = 1601	Chihuzen, désastreux, à 900 km WSW de Tokio.

Le tremblement de terre du 27 août 1897, bien qu'il soit présenté dans la figure, est supprimé dans les calculs, puisque

* Journ. of the Coll. of Sc., I. Univ. Tokyo, 1899, Vol. XI, Part. IV, p. 401 et PEIC N° 18 Tokyo 1904 Pl. V.

l'époque, le lieu et la force le qualifient également comme réplique du sisme qu'il précéda de trois semaines.

La première branche de la figure 7 montre très nettement l'accroissement de la vitesse après un tremblement de terre et la chute soudaine qui précède le sisme suivant. Les observations du 6 mars 1896 et, plus décidément encore celles du 24 avril accusérent donc un nouveau sisme qui, en laissant de côté celui du 15 juin d'origine sous-marine, éclata le 31 août 1896.

A partir de cet événement il n'y a pas eu, pendant quinze mois, d'observation de la vitesse, et on ne saurait guère continuer la courbe. Une faible chute entre les 5 et 16 août 1897 annonce peut-être un nouveau tremblement de terre qui coïncide presque avec cette brusque variation de vitesse. La troisième et dernière branche de la courbe est quelque peu incertaine, d'une part, parce qu'il y a deux observations seulement, assez éloignées l'une de l'autre, entre lesquelles se trouve un tremblement de terre intrus dont, faute d'observations, on ne connaît pas les effets, et d'autre part, parce que la vitesse du 13 février 1898 pourrait être douteuse, à cause de la grande, mais douteuse correction due à l'angle d'émergence. Mais il se peut bien que l'incertitude ne soit pas aussi grande que nous ne le craignons. Le sisme du 23 avril 1898 a été d'origine sous-marine et assez distant de Tokio; il ressemble aux deux perturbations précédentes et n'aura donc pas troublé plus qu'elles la courbe de la vitesse. Donc si l'on adopte les données de M. Imamura, sur lesquelles la courbe de vitesse est fondée, la chute considérable de la vitesse est le signe précurseur du tremblement de terre du 10 août 1898; si l'on avait négligé l'avant-dernière vitesse, on aurait perdu ce signe prémonitoire.

On voit combien les matériaux dont nous disposons sont pauvres et douteux. Ils ne comprennent qu'un seul sisme appartenant aux environs de Tokio et qui n'est pas précédé des observations de la vitesse. Les autres sismes ont leur origine à une si grande distance de Tokio, que nous devons nous demander, si les observations de la capitale sont vraiment valables pour fournir sur eux un pronostic. Aussi envisagé-je le calcul qui va suivre non comme une vérification de la théorie, mais comme un exemple pur et simple.

Je chercherai à pronostiquer le tremblement de terre de Chihuzen, et je tirerai les données nécessaires de la première branche de la courbe 7 qui, étant assez éloignée de l'événement attendu est en même temps la mieux observée. Une incertitude sensible de la troisième branche n'influencerait en rien la prévision, mais elle enlèverait la possibilité de voir d'avance, par les observations, qu'un sisme se prépare.

Comme point de départ pour compter le temps je choisis le 22 mars 1894, époque du dernier tremblement de terre précédant la triangulation sismologique. Tous les sismes antérieurs seront pris en considération moyennant une correction sommaire. A Kioto, ancienne capitale du Japon, où l'histoire sismologique est le mieux connue, il y eut 228 grands tremblements de terre déstructifs entre les années 800 et 1904*. L'intervalle moyen est donc de 1769 jours, et par suite, suivant la définition (28), $\theta = 884{,}5$ jours. C'est avec cet intervalle porté à 30 mois que j'ai calculé ci-avant les figures 1 à 6. Pour ne pas attribuer un rôle exagéré aux répliques, on ne devait évidemment choisir que les grands sismes indépendants.

Avant tout il faut calculer pour le sisme de Chihuzen la valeur de ${}_{n+8}N(t)$, la fréquence des chocs prémonitoires. Donc on introduira dans la formule (34) les valeurs de $t_{2n+1}, \dots t_{2n+13}$ tirées de notre liste des sismes. Les valeurs $t_{2n} \dots t_{2n+12}$ des moments de renaissance de la tension seraient connues dès qu'on aurait les maxima des vitesses, condition qui n'est pas remplie ici. Vu le peu d'influence qu'exerce le passé même rapproché, je supposerai que la tension renaît exactement à mi-distance entre deux sismes consécutifs. On aura donc

$$t_{2n} = t_{2n+1} - \theta, \quad t_{2n+2} = \tfrac{1}{2}(t_{2n+1} + t_{2n+3}) \dots,$$
$$t_{2n+12} = \tfrac{1}{2}(t_{2n+11} + t_{2n+13}).$$

Mais pour le renouvellement de la tension qui déclenchera le tremblement de terre dont nous cherchons l'époque, il conviendrait de mieux en connaître l'époque. L'incertitude dans laquelle nous nous trouvons sur le dernier maximum de la vitesse nous en empêche. Je ferai l'hypothèse que cette dernière tension a

* PEIC N° 19 Tokyo 1904, p. 13.

pris naissance à l'époque $t_{2n+14} = t_{2n+13}$, c'est-à-dire immédiatement après le dernier tremblement de terre; il est aisé de voir dans quel sens se trouvera l'erreur, introduite par cette supposition. Si l'on a trop avancé cette époque, la limite supérieure de l'échéance sera en avance elle aussi.

Nous choisirons enfin $\tau = 1$ jour, et nous calculerons les équations (34) et (32) de vingt en vingt jours. Le tableau suivant expose les étapes du calcul qui permettent en même temps d'estimer l'influence de chaque tremblement de terre. Les sept derniers sismes sont rigoureusement pris en considération, les précédents, dont le nombre est supposé infiniment grand, ont été calculés sommairement au moyen de la correction C.

$t-t_{2n+1}$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	C	$l\cdot\frac{t-t_{2n+14}+\tau}{\tau}$
1492	0,1314	0,0007	0,1070	0,0020	0,0176	0,0416	125,1211	0,0628	0,0000
1512	1244	6	1015	19	165	362	4,2384	630	3,0445
1532	1217	5	0967	18	150	320	1,7518	623	3,7136
1552	1190	4	0920	15	138	284	0,9953	623	4,1108
1572	1161	4	0878	16	134	254	6513	622	4,3945
1592	1136	4	0838	14	119	228	4624	615	4,6151
1612	1112	5	0801	12	111	207	3470	607	4,7958
1632	1087	4	0766	12	102	188	2702	601	4,9487

L'inscription des colonnes sert d'abréviation pour

$$(i) = \frac{t_{2n+2i-1} - t_{2n+2i-2}}{t - t_{2n+2i-1} + \tau} - l \cdot \frac{t - t_{2n+2i-2} + \tau}{t - t_{2n+2i-1} + \tau},$$

et la correction est donnée par

$$C = \frac{1}{2}\,\frac{t - t_{2n+1} + 3\theta + \tau}{\theta}\, l \cdot \frac{t - t_{2n+1} + 3\theta + \tau}{t - t_{2n+1} + 2\theta + \tau} - \frac{1}{2}.$$

En combinant les éléments suivant les indications des équations (34) et (32) on obtient le tableau que voici:

$t-t_{2n+1}$	date	$N_{n+7}(t)$	${}_{n+8}N(t)$
1492	= 1898. IV. 23.	125,484	−125,484
1512	V. 13.	4,582	−1,538
1532	VI. 2.	2,082	+1,632
1552	VI. 22.	1,313	2,798
1572	VII. 12.	0,958	3,436
1592	VIII. 1.	0,758	3,857
1612	VIII. 21.	0,632	4,163
1632	IX. 10.	0,546	4,402

qui a été représenté graphiquement dans la figure 8. On en tire immédiatement pour l'époque, où les secousses subséquentes se transforment en chocs prémonitoires,

$$t'_{2n+15} = 1537 = 1898.\text{ VI. } 7. \tag{62}$$

C'est la solution de l'équation $_{n+8}N(t) = N_{n+7}(t)$, et la limite inférieure du tremblement de terre à venir.

Pour avoir la limite supérieure on devra connaître suivant la relation (53) les quantités v et (v) qu'on déduira utilement de la première branche de la figure 7.

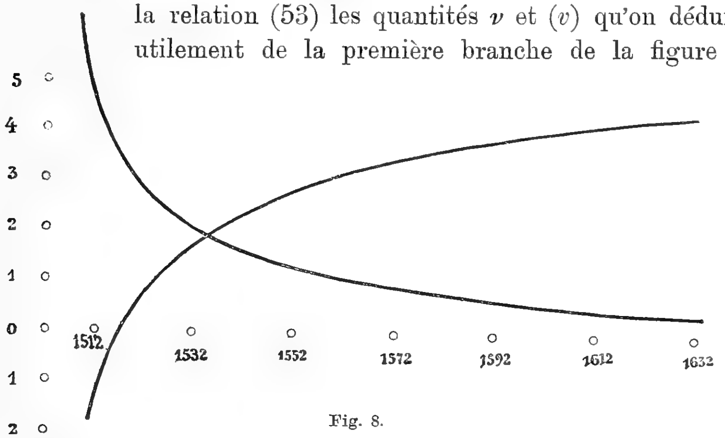


Fig. 8.

Pour combiner des données aussi éloignées que possible dans le temps, je m'appuie sur ce fait que la vitesse est tombée du 11 janvier 1896 jusqu'au 24 avril de la même année de sa valeur maxima 3,62 à 3,04 km par seconde.

L'incertitude de l'élément t_{2n+4} n'a pas influencé jusqu'ici notre calcul, puisque le tremblement de terre de Chihuzen est bien éloigné en temps. Par contre, il joue, à présent, un rôle considérable et doit être tiré des observations mêmes.

Avant tout on cherchera la fréquence des chocs prémonitoires du tremblement de terre du 15 juin 1896 au moyen de l'équation (34) qu'on écrira utilement sous la forme

$$_{n+3}N(t) = l \cdot \frac{t - t_{2n+4} + \tau}{\tau} - x,$$

où x est donnée par le tableau qui suit:

Époque	$t - t_{2n+1}$	x
1896. I. 11.	= 660 jours	— 0,5732
II. 23.	703	— 0,5256
III. 6.	715	— 0,5129
IV. 24.	764	— 0,4682

On y ajoutera encore l'équation

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{(v)^2} + \frac{\nu}{(v)^2} \cdot {}_{n+3}N(t)$$

avec les inconnues $\frac{1}{(v)^2}$ et $\frac{\nu}{(v)^2}$.

Ce système simultané de deux équations qu'on appliquera aux observations donne après quelques tâtonnements systématiques:

$$t_{2n+4} = 641 = 1895.\ \text{XII. } 23., \qquad \nu = 0{,}4522,$$
$$(v) = 5{,}240 \text{ kilomètres par seconde.}$$

L'engendrement du tremblement de terre du 15 juin 1896 ne date donc pas au delà du 23 décembre 1895; vu le raid maximum de la courbe de vitesse, on pouvait s'y attendre.

Aussitôt que je vis apparaître le nombre 5,240, je me souvins sur le coup de la vitesse de propagation de 5,197 kilomètres par seconde très bien déterminée lors du tremblement de terre de Charleston en 1886 et tout de suite m'apparut très clairement la constitution du sous-sol de ces parages. En m'occupant, il y a quelques années, des vitesses sismiques, je ne savais où mettre cette donnée; elle m'apprend à présent que cette ville est située sur un terrain peu disturbé et presque neutre dont le sous-sol a peu souffert par les forces tectoniques. Ce raisonnement me paraît d'autant plus sûr que la profondeur de cet ébranlement*, également bien déterminée, est de 100 kilomètres environ, de sorte que les couches supérieures, d'un caractère peut-être plus irrégulier, n'exercent qu'une très faible influence.

On peut dire avec une certaine probabilité que la vitesse de propagation à travers une couche neutre est actuellement 5,2 kilo-

---

* C. R. Comm. perm. de l'Assoc. internat. de sism., Rome 1906. Budapest 1906, p. 175.

mètres par seconde. Si, par contre, la terre était tout à fait désagrégée, cette vitesse serait de 3,102 km. Dans ce dernier cas il n'y a pas de contraction latérale, d'où la possibilité d'évaluer cette constante. Suivant la théorie de l'élasticité, on partira de l'équation

$$\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}=\left(\frac{5{,}240}{3{,}102}\right)^2,$$

d'où

$$\mu = 0{,}2721,$$

ce qui est en accord parfait avec les valeurs déduites des observations récentes pour l'intérieur de la terre*, et qui nous donne même une confirmation assez inattendue de la valeur V. En supposant la vitesse des ondes longitudinales de 11,160 kilomètres, on obtient pour les vibrations transversales la valeur de 6,244 km par sec.

En ce qui concerne l'hystérésis je n'en connais qu'une seule donnée que j'ai réussi à tirer des recherches de M. KUSAKABE. Il donne notamment les variations de la vitesse de propagation pour un spécimen de marbre métamorphique de formation paléozoïque** sujet à des cycles alternants de torsion; il en résulte la valeur

$$\nu = 0{,}4393$$

en bon accord avec celle que nous venons de trouver par les tremblements de terre pour le sol du Japon. Il ne serait donc pas trop hardi de dire que les valeurs numériques de (v) et de ν sont de vraies constantes physiques, et non pas seulement des paramètres n'ayant qu'un rôle purement arithmétique et passager.

Tous les éléments nécessaires étant donnés, on trouve enfin pour la condition (53):

$$_{2n+15}N(t) < 4{,}100 \tag{63}$$

à laquelle répond suivant le diagramme 8 la solution

$$t''_{2n+15} < 1610 \text{ jours ou } 1898.\ \text{VIII}.\ 19. \tag{64}$$

---

* Über Erdbebenwellen III. K. ZÖPPRITZ u. L. GEIGER. Nachr. der k. Ges. d. Wiss. Gött. 1909.

** PEIC N° 14 Tokyo 1903, p. 54.

En combinant les conditions (62) et (64), il en résulte le pronostic

$$1898.\ \mathrm{VI}.\ 7. < t_{2n+15} < 1898.\ \mathrm{VIII}.\ 19, \tag{65}$$

tandis que l'époque observée du tremblement de terre a été le 10 août 1898. Et on se souvient que, d'après la supposition faite, pour la renaissance de la tension, la limite supérieure devrait être un peu plus étendue. Le fait que ce sisme n'éclata que bien près de la limite supérieure prouve qu'il n'y avait pas, cette fois, des agents secondaires, capables de déclencher prématurément la tension; elle a eu tout le temps de s'accumuler et de mûrir. L'effet en devait être un tremblement de terre très fort et les catalogues japonais le classent comme destructif; il y eut dans l'aire meizosismique des bâtiments endommagés et des écroulements de montagnes*.

Dans les tremblements de terre volcaniques ou provenant d'un éboulement il y a, outre la tension, un élément accessoire, savoir des déplacements de masses, soit un flux de laves vers le foyer, soit une perte de matières dissoutes. En tant que les méthodes gravimétriques rendent compte de ces changements*, la possibilité de la prévision nettement localisée y gagne encore.

[Séance du 14 février 1910 de la IIIème classe de l'Académie hongroise des sciences].

---

* Journ. of the Coll. of Sc. I. Univ. Tokyo, 1899. Vol. XI, Part. III, p. 141.

** C. R. Comm. perm. de l'Assoc. internat. de sism. Rome, 1906. Budapest 1906, p. 177

7.

NEUERE BEITRÄGE ZUR GEOLOGIE DES SZÉKLERLANDES.

Vom korresp. Mitglied I. LŐRENTHEY.

1890 und 1891 hatte ich Gelegenheit in Kolozsvár jenes reiche Pliozänmaterial zu untersuchen, welches von FR. HERBICH und J. v. BUDAI gesammelt worden ist. Das von HERBICH gesammelte Material wurde im Jahrbuch der k. k. geol. Reichsanstalt 1875 von M. NEUMAYR beschrieben*, ein kleiner Teil der BUDAIschen Sammlung aber im Bd. XI des Földtani Közlöny von L. ROTH v. TELEGD.** HERBICH faßt in seiner „geologischen und paläontologischen Beschreibung des Széklerlandes"*** alldas zusammen, was er als Einwohner des Széklerlandes durch Jahre hindurch beobachtet hat. Durch die Aufsammlungen J. BUDAIS gelangte der Siebenbürgische Museumverein in den Besitz eines viel reicheren Materials, als das bis dahin beschriebene war. Es gereichte mir also zur großen Freude, als mein Freund BUDAI die Liebenswürdigkeit hatte, mir dieses reiche und überaus wertvolle Material zur Bearbeitung zu überlassen.

Da mir jedoch sowohl aus der Literatur als auch auf Grund von mündlichen Mitteilungen BUDAIS bekannt war, daß die pliozänen Bildungen des Széklerlandes im Gegensatz zu unseren sonstigen Pliozänbildungen von sehr gestörter Lagerung sind, und auch ihre Fauna gänzlich abweichend ist, erwartete ich die Lösung der allmählich in den Vordergrund tretenden Fragen von einem Lokalaugenschein. So führte ich denn im Sommer 1892, 1894 und 1895 mit Unterstützung des Siebenbürgischen Museumvereins im Sommer 1893 aber mit materieller Unterstützung der Ungar.

* HERBICH u. NEUMAYR: Die Süßwasserablagerungen im südöstlichen Siebenbürgen.

** Beitrag z. Kenntnis d. Fauna d. neogenen Süßmasser-Ablagerungen im Széklerlande.

*** Mitteil. a. d. Jahrb. d. kgl. ungar. geol. Reichsanst. Bd. V.

Akademie der Wissenschaften Untersuchungen durch. Für diese Unterstützungen spreche ich auch an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank aus.

Über diese Ausflüge berichtete ich in zwei vorläufigen Mitteilungen u. z. unter dem Titel: „Über die geologischen Verhältnisse der Kohlenbildung im Széklerlande“ und „Neuere Beiträge zur Geologie der Kohlenbildung im Széklerlande“.* Es wurde nachgewiesen, daß diese jüngeren Schichten levantinisch sind, während sie bis dahin von HERBICH und NEUMAYR teils als „unterstes pontisches“ teils als sarmatisch, von HEER als sarmatisch, von STAUB als pontisch und von ANDRUSSOW als präpontisch angesprochen wurden; später stellte NEUMAYR einen Teil zu den Paludinenschichten, jedoch nicht in dem Sinne, in welchem ich die ganze Schichtengruppe in diese Stufe versetze. Meine Beobachtungen haben auch HERBICHS Karte modifiziert, das gesammelte reiche Material aber hat die HERBICHsche Einteilung der Pliozänbildungen abgeändert.

In meinen bisherigen Berichten wurden meine im E-lichen zwischen Vargyas und Szászmagyarós gelegenen Teile des Persánygebirges, ferner im S-lich von Füle und Magyarhermány bis zur großen Biegung des Oltflusses sich erstreckenden Teile des Gebirges von Barót gemachten Beobachtungen besprochen.

Vor der Publikation der das ganze Gebiet zusammenfassenden Arbeit soll nun noch in Kürze über meine am W-Rande des Gebirges von Bodok durchgeführten Untersuchungen, sowie über einige das ganze Gebiet betreffende Beobachtungen berichtet werden. Ein herausgegriffener Teil dieser Arbeit unter dem Titel „Die geologischen Verhältnisse der Umgebung von Barót“ wurde vor zehn Jahren (1899) von der Kgl. Ungar. Naturw. Gesellschaft mit einem Preis gekrönt. An der Fertigstellung der Arbeit wurde ich einerseits durch den außerordentlichen Reichtum angesammelten Materials verhindert, andererseits aber auch dadurch, daß ich noch den zwischen Angyalos und Szárazpatak gelegenen SE-Rand des Gebirges besuchen will, um die Verbreitung der levantinischen Bildungen, welche nach der Karte HERBICHS auch hier auftreten, zu studieren. Am S-, SE- und SW-Rande des Barcaság fehlen diese

* Math. u. Naturw. Ber. a. Ungarn. Bd. XX.

in faunistischer Beziehung äußerst interessanten Bildungen, wie ich mich mehrfach überzeugen konnte, vollständig.

Die Durchforschung des E-Randes des Gebirges von Bodok ist der Vollständigkeit der Arbeit zuliebe erwünscht, einerseits, weil diese E-lichste Bucht des levantinischen Binnensees in faunistischer Hinsicht gänzlich unbekannt ist, andererseits aber weil gerade dieser SE-liche Teil der HERBICHschen Karte am meisten verbesserungsbedürftig ist.

So haben meine Untersuchungen nachgewiesen, daß der auf der Karte HERBICHS von Barót gegen S über Árapatak und Erösd, die S-Spitze des Gebirges von Barót umgehend ununterbrochen bis Zalány dahinziehende levantinische Streifen zur Hälfte fehlt, insofern diese Bildung zwischen Erösd und Zalány vom Oltflusse gänzlich abgetragen worden ist. Diese Lignit führende Bildung blieb insgesamt nur auf dem Kölesmezö bei Ilyefalva und im Bache Falupataka („Dugós“) bei Szentkirály in je einem kleinen Fleck, sowie in der kleinen Bucht zwischen Szepsiszentgyörgy und dem N-lich davon gelegenen Kökönyöspatak erhalten. N-lich von Körispatak hingegen ist dem das Grundgebirge darstellenden neokomen Karpathensandstein bereits Andesittuff aufgelagert. Denselben konnte ich auch am linken Ufer des Oltflusses beobachten. Die Senken und der Rand des Karpathensandsteins werden nämlich überall wo er von der Erosion verschont geblieben ist, von Andesittuff und Brekzie ausgefüllt und nicht von levantinischen Binnenseesedimenten, wie dies auf der HERBICHschen Karte bezeichnet ist, nach welcher der Rand des Gebirges S-lich von Zoltán bis an die E-Lehne des Gebirges von Bodok überall aus levantinischen Binnenseeablagerungen besteht.

Demgegenüber fand ich dort, wo nach der Karte HERBICHS zwischen Bodok und Zoltán Alluvium vorkommt, überall den Karpathensandstein des Grundgebirges (unter 30—35^0 gegen SE fallend) vor, welcher z. B. im Bache Borvizpataka bei Bodok nächst des Säuerlings sogar gebrochen wird; am NW-Ende der Ortschaft am rechten Ufer des Oltflusses hingegen ist bereits Andesittuff, Lapilli und Sand aufgeschlossen, welche im Zusammenhang mit dem Andesittuffe des Büdöshegy hier große Fläche bedecken. Bloß die steile Wand des SE-lich von Szepsimartonos befindlichen ersten kleinen Wasserrisses besteht aus loserem, stellenweise mehr festem bänkigen Kalkstein oder eisenschüssigen Sandstein, welcher mit Steinkernen von *Dreissensia Münsteri* BRUS. angefüllt erscheint. Von hier läßt sich der Sandstein des levantinischen Binnenseesediments bis an das S-Ende von Angyalos verfolgen. Am schönsten ist diese Bildung zwischen Szepsimartonos und Angyalos in dem kleinen Wasseriß gegenüber der an der von Gidófalva kommenden Landstraße befindlichen Kote 582 m aufgeschlossen (Karte 1 : 75 000).

Hier ist zu unterst der neokome Karpathensandstein des Grundgebirges aufgeschlossen, auf welchen in 1—1,5 m Mächtigkeit das Trümmerwerk dieses Sandsteines folgt, welches sich nach aufwärts konglomeratartig festigt. Auch diese klastische Schicht ist mit Wirbelfragmenten von *Dreissensia Münsteri* BRUS. angefüllt, was darauf hinweist, daß diese Bildung ein Abrasionsprodukt des levantinischen Binnensees ist. Darüber folgt in 2—4 m Mächtigkeit jener sandige Kalkstein (oder kalkige Sandstein) welchen ich von Szepsimartonos erwähnt habe. Auch dieser ist mit Steinkernen von *Dreissensia Münsteri* BRUS. angefüllt. Dann folgt 1 m mächtiger Ton, ebenfalls mit Wirbelfragmenten von *Dreissensia Münsteri.* Zu oberst aber lagert eine 0,5 m mächtige, dunkle sandige Tonschicht, welche zusammengeschwemmt zu sein scheint, wahrscheinlich alluvial und angefüllt mit Fragmenten von *Dreissensia Münsteri* ist, außerdem auch sonstige kleine levantinische Formen wie *Hydrobia transitans* NEUM., einige neue Cardiumarten, Viviparen und Bruchstücke von *Cardium levanticum* nov. sp. führt. Bei Angyalos bricht die Bildung ab, weil in dem Steinbruche SE-lich von der Ortschaft, am S-Fuße des Berges bereits Karpathensandstein gebrochen wird, während Herbichs Karte auch hier pliozänes Binnenseesediment verzeichnet.

Betreffs des auf das Gebirge von Barót entfallenden Teiles der HERBICHschen Karte hat bereits BUDAI nachgewiesen, daß derselbe einen viel wechselvolleren Bau besitzt, als dies auf Grund der Karte HERBICHS anzunehmen ist. HERBICH besagt zwar in seiner Arbeit (S. 260) selbst, daß „außer dem auf der Karte ausgeschiedenen Trachytzuge innerhalb der Brekzien-, Tuff- und Konglomeratzone hie und da kleinere Trachytpartien vorkommen.“

Diese konnte er — wie er schreibt — nicht ausscheiden, weil er bei Begehung des Gebietes nicht über die nötigen detaillierten Karten verfügte. So ist z. B. auf der Karte HERBICHS N-lich von Málnás bis zum Uzonkabache Karpathensandstein ausgeschieden, nördlich davon aber Andesittuff, obzwar BUDAI nachgewiesen hat*, daß der im N-lichen Teile des Málnás, E-lich vom Berge Körösbérc befindliche Ligethegy, sowie der noch N-licher gelegene Nagymurgó aus anstehendem Andessit (Dazit) besteht. Ebenso bestehen auch die in die HERBICHsche Andesittuffzone entfallenden Berge Milács und Peleske aus anstehendem Andesit. Ja BUDAI fand sogar in der von HERBICH bei Bibarcfalva ausgeschiedenen Binnenseesedimentzone anstehende Eruptivgesteine, indem der Tirkuberg bei Bibarcfalva aus Augitandesit besteht. N-lich davon, in der Andesittuffzone gelang es auch mir E-lich von Bardóc im SE-lichen Teile des Berges Kútteteje so große Andesitmassen zu finden, daß sie ebenfalls als anstehend betrachtet werden müssen.

In geologischer Beziehung ist es jedoch vielleicht noch viel wichtiger, daß — während die Kreide des Gebirges von Barót nach unseren bisherigen Kenntnissen nur von dem neokomen Karpathensandstein vertreten war — ich nun am Berge Nyárashegy zwischen Szentkirály und Elöpatak ein Korallenriff des Kaprotinenkalkes entdeckte, welcher im Persánygebirge die höchsten Gipfel und Wasserscheiden aufbaut. Der Nyárashegy selbst besteht aus dem im Széklerlande verbreiteten, bänkigen, äußerst muskovitreichen Neokomsandstein, während seine Spitze aus dem Kaprotinen-Korallenkalksteine aufgebaut erscheint. Leider konnte das Verhältnis dieser beiden Bildungen auf dem mit dichtem Wald bestandenen Berge nirgends ermittelt werden, so daß nicht einmal soviel festgestellt werden konnte, ob dieser Kalkstein eine Wurzel hat oder aber wurzellos ist, wie solche von HAUER und HOHENEGGER beschrieben wurden. In letzterem Falle ist die Korallen-

* Beiträge zur Petrographie des S-lichen Teiles des Hargitagebirges (Foldtani Közlöny, Bd. XI, 1881). Später wurde ein Teil des Andesit auch von Dr. M. v. PÁLFY untersucht und unter dem Titel „Die Andesitgesteine des Hargitagebirges" (Értesitö, XX. Jahrg. Kolozsvár 1895; ungar.) beschrieben.

kalkmasse dieses Gipfels als ein riesiger Kalksteinschluß in dem Litoralkonglomerat der großen oberkretazischen Transgression zu betrachten. Doch erscheint auch das nicht ausgeschlossen, daß dieses Korallenriff, wie dies auch heute zu beobachten ist, infolge seines Gewichtes in den Schlamm eingesunken ist und erst durch die Erosion freigemacht wurde. Möglicherweise stammen auch die Kaprotinen — hauptsächlich aber Korallenkalkeinschlüsse der jüngeren Konglomerate um Árapatak und Erösd von dieser Kalksteinscholle her.

* * *

Vor mehreren Jahren habe ich von den Bergleuten von Köpec erfahren, daß die dortigen, die Lignitlager aufschließenden Stollen bereits tief unter den Sandstein getrieben worden sind. Da es hier außer dem das Grundgebirge bildenden Karpathensandstein sonst keinen Sandstein gibt, läßt sich die Sache nur durch die Annahme erklären, daß der neokome Karpathensandstein über die levantischen Bildungen überschoben ist; in Ungarn wäre dies also die erste Stelle, wo die heutzutage so moderne Überschiebungstheorie mit unzweifelhaften Beweisen unterstützt wird, u. z. mit Beweisen, die verläßlicher und unzweideutiger sind als alle bisherigen. Um dies zu untersuchen und das neu eröffnete Lignitbergwerk von Hidvég zu besichtigen, habe ich diese beiden Orte im Laufe des Monats August 1909 neuerdings besucht.

Durch die aus den neueren Aufschlüssen gewonnenen Erfahrungen wurden meine früheren Beobachtungen zwar bestätigt, jedoch betreffs der stratigraphischen Einteilung der Schichten teils auch modifiziert und ergänzt.

Vor allem wollen wir die Horizontierung der Schichten untersuchen; Herbich teilt die levantinischen Schichten in seiner „Geologischen und paläontologischen Beschreibung des Széklerlandes“ in drei „Entwicklungsformen“ u. z.:

1. in eine untere, welche aus grauem Tegel mit Braunkohlen und Sphärosyderitlagern besteht;

2. in eine mittlere, aus Ton-, Sand- und Sandsteinbildungen, Kalk- und Brauneisenerzbildungen bestehende;

3. in eine obere, durch Schotter und groben Sand vertretene.

Nach J. v. Budai („Beiträge zur Petrographie des südlichen

Teiles des Hargitagebirges") kann die levantinische Stufe in folgende Horizonte geteilt werden:

1. zu unterst lignitführender Tegel; hierauf folgt
2. sandiger Ton; dann
3. sehr mächtiger, lockerer, leicht verwitternder, grober Sandstein mit Eruptivgesteinseinschlüssen, welche mit dem „tridymithaltigen Trachyt" des Nagymurgó übereinstimmen; hierauf folgt
4. der von STAUB beschriebene, Pflanzenabdrücke führende sehr mächtige Tegel, an dessen oberer Grenze (Bodos: Sárospatak) Reste von sämtlichen Eruptivgesteinen der Gegend anzutreffen sind; zu oberst ein
5. lockeres, kalkiges, sandiges, fossilleeres Gestein mit steilwändiger Abscheidung (wahrscheinlich Löß).

Im Gegensatz zu diesen auf petrographischer Grundlage stehenden Einteilungen teilte ich diese Bildungen auf Grund der eingeschlossenen Faunen in folgende drei Horizonte ein:

1. Unterer Horizont; weiße, blaue oder grauliche Tone bisweilen mit Lignitflözen, und einer aus kleinen Arten bestehenden Fauna. Aus diesem Horizont rührt die NEUMAYRsche Fauna des Vaspatak bei Vargyas sowie die ROTHsche von Kövespatak bei Bodos her. Hierher gehören die Lignitflötze von Köpec und Szárazajta-Lajoskút. Die Fauna wird durch mehrere Unionen, durch Hydrobien, Tropidinen, *Carinifex quadrangulus* NEUM., jedoch vor allem durch die große Anzahl von *Bythinia labiata* NEUM. und das spärliche Auftreten der Viviparen und hauptsächlich der Cardien charakterisiert. Dieser Horizont ist 50—60 m mächtig.

Die Schichten dieses unteren Horizontes weisen die geringste oberflächliche Ausdehnung auf, und beschränken sich nur auf den N-lichen Teil des begangenen Gebietes. Sie erstrecken sich von Nagyajta bis Vargyas und von Felsörákos bis Nagybacon.

Gegen Ende der Ablagerung dieser Bildung gelangte die Asche und Lapilli der S-lich vom Hargitagebirge, also im N-lichen Teil des Gebirges von Barót befindlichen kleinen parasitischen Vulkane sowie allenfalls der Vulkane der Büdös-Berggruppe (bei Tusnád) das erste Mal hierher.

2. Mittlerer Horizont. Schieferiger, blauer oder gelber Ton,

sandiger Ton, Quarzsand und Andesitsand oder Andesitbrekzie stellenweise mit Lignitflözen, dann Sphärosideritadern und -Linsen (Bibarcfalva) und Einschlüssen und Kluftausfüllungen der unteren Schicht (Barót, Nagyerdőpataka). In diesem Horizont kommen die Formen des unteren selten vor, die Cardien hingegen werden stellenweise nahezu gesteinbildend. Charakteristisch ist die große Anzahl von *Cardium Fuchsi* Neum. mit scharfen, dachförmigen Rippen; von der im unteren Horizont häufigen *Bythinia labiata* Neum. fand sich hingegen bisher kein Vertreter. Aus diesem Horizont sammelte Staub die reiche Flora.

In den oberen Partien des etwa 160 m mächtigen Schichtenkomplexes sind größere Versteinerungen stellenweise selten, häufig hingegen Ostrakoden, welche wieder in den tieferen Schichten selten sind. Dieser anscheinend mehr salzige Horizont lagert überall den in mehr ausgesüßtem Wasser zum Absatz gelangten unteren Schichten auf; er erstreckt sich jedoch bereits auf ein größeres Gebiet, was auf eine nach NE und S gerichtete Transgression des Binnensees hindeutet, insofern sich dieser Horizont gegen N bis Füle gegen S bis Árapatak, gegen E aber bis zum E-Rand der Bucht von Szárazajta erstreckt.

Der Andesittuff bez. Brekziendyke ist innerhalb dieses Horizontes im Köpecbache 20—30 m mächtig.

3. Oberer Horizont. Derselbe besteht hauptsächlich aus Quarzsand, Quarzschotter, Andesitsand, Capilli und Kalkstein, untergeordnet aus bläulichem Ton. Dieser Horizont wird durch das massenhafte Auftreten von Viviparen, Dreissensien und Melanopsiden charakterisiert. Stellenweise sind Viviparen, jedoch noch häufiger *Dreissensia Münsteri* Neum. vorherrschend. Einzelne Partien des kalkigen Sandsteines sind nahezu vollständig mit dieser Art angefüllt, so in der Bucht von Szárazajta, ferner an den erwähnten Fundorten zwischen Szepsimartonos und Angyalos. Anderswo wird er durch lößartigen in senkrechten Wänden aufgeschlossenen Sand mit vorzüglich erhaltenen *Dreissensia Münsteri*-Exemplaren vertreten. Dieser 3. Horizont weist eine noch größere Verbreitung auf, als der frühere, insofern er den E-lichen Teil des Persány-Gebirges bei Apáca und Ürmös sowie die W-Lehne des Gebirges von Bodok umsäumt, auch im SW-

Teile des Gebirges von Barót in der Umgebung von Árapatak und Erösd ist diese Bildung am meisten entwickelt. Ihre Mächtigkeit beläuft sich auf etwa 80 m. Die Schichten dieses Horizontes finden sich auch bei Gált und Hidegkút an der W-Lehne des Persánygebirges.

Diese meine Einteilung stimmt am besten mit der BUDAIschen überein, indem es mir auf Grund der Fauna gelang, seine auf petrographischer Grundlage ruhende Einteilung zu bekräftigen. Seine erste Schicht ist mit meinem ersten Horizont identisch, seine Schicht 2, 3 und 4 aber mit meinem zweiten Horizont, indem sein lockerer, leicht verwitternder, grober Sandstein, welcher tridymithaltige Trachytbruchstücke führt, nichts anderes als Andesittuff ist. Dies ist jene Schicht, welche auch von den Bergleuten von Köpec als Sandstein betrachtet worden ist. Nachdem es sich nun herausgestellt hat, daß diese Bildung Andesittuff und kein Karpathensandstein ist, hat Köpec aufgehört, ein klassischer Beweis der Überschiebungstheorie zu sein.

5. BUDAIS „lockeres, kalkiges, sandiges Gestein mit steilwändiger Abscheidung (wahrscheinlich Löß)" ist nichts anderes als meine Schicht 3, welche stellenweise tatsächlich ebenso senkrecht stehende, hohe, steile Wände bildet wie Löß. Das schönste Beispiel hiefür ist bei dem Bache Várpatak N-lich von Erösd zu sehen, dessen Aufschluß auch das geübteste Geologenauge irreführt. Sobald man jedoch das Gestein näher betrachtet, stellt sich das levantinische Alter dieser Schicht sofort heraus, indem sie mit charakteristischen Formen meines dritten Horizontes angefüllt ist. Daß die 5. Schicht BUDAIS, von welcher er besagt, daß sie aus Löß besteht und welche er bei Bodos beobachtete, tatsächlich mit meinem in das 3. Horizont gehörende lößartigen Gestein identisch ist, kann ich damit beweisen, daß sich im I. anatomischen Universitätsinstitut aus dem ISZLAYschen Nachlaß ein ziemlich abgewetzter Zahn von *Mastodon arvenensis* CR. et JOB. befindet, welchen BUDAI laut der von ihm eigenhändig geschriebenen Etiquette 1880 beim Kövespatak nächst Bodos in dem den Paludinenschichten aufgelagerten „Löß" gefunden hat.

* Herr Hofr. Prof. Dr. MICHAEL LENHOSSÉK gestattete mir diesen Zahn zu besichtigen; für seine Freundlichkeit spreche ich ihm auch an dieser Stelle meinen besten Dank aus.

Diese meine Einteilung wird durch die Daten des Aufschlusses bei Hidvég ergänzt. Ich habe diese Lokalität besucht, um das Profil des neueröffneten Kohlenbergwerks zu studieren.

In Hidvég bez. in Nyáraspatak über die E-lichsten Häuser der Ortschaft hinaus einige 100 m E-lich in der „Sötyikert“ genannten Gegend hat die Sparkasse von Marosvásárhely jüngst ein Lignitbergwerk erschlossen. In dem kleinen Wasserriß neben dem Stollen sind die Schichten sehr schön aufgeschlossen. Am linken Abhang des Wasserrisses ist hier folgende Schichtenreihe zu beobachten:

1. Zu unterst geschichteter Quarzschotter, mit höchstens haselnußgroßen Körnern, welcher mit feinerem und mehr grobkörnigem, stellenweise eisenschüssigem Quarzsand wechsellagert. Hier im Bachbett ist er in 1 m Mächtigkeit aufgeschlossen. Hierauf folgt

2. Lignit in etwa 1 m Mächtigkeit; dann folgt wieder

3. geschichteter eisenschüssiger Quarzsand und -Schotter, welcher mit der Schicht (1) übereinstimmt. Seine Mächtigkeit beträgt 1—2 m. Hie und da finden sich darin Viviparen und *Dreissensia Münsteri.* Darüber lagert

4. dichter, blauer Ton in 2 m Mächtigkeit, in welchem sich wenige Cardien mit flachen Rippen, *C. levanticum* nov. sp. finden.

5. Zu oberst lagert blauer, schieferiger Ton mit gelben glimmerreichen Sandadern und -Linsen. Dieser Schichtenkomplex ist mit *Cardium levanticum* angefüllt. Besonders am rechten Abhang dieses kleinen Wasserrisses einige Meter von dem Eingang des Stollens entfernt, etwas vor dem erwähnten Lignitausbiß ist eine gelbliche Sandlinse aufgeschlossen, welche sozusagen ein Konglomerat von Cardium levanticum darstellt.

6. Hierauf folgt Alluvium mit reichlichen Bruchstücken von Karpathensandstein.

In der Grube ist der unter dem Lignit gelagerte Schotter und stellenweise Sand schwarz, kohlig. Von hier kamen Zähne und eine Kinnlade von *Mastodon Borsoni* J. Cop. zutage. Der Lignit ist 2—2,5 m mächtig und wird er auch hier wie in dem erwähnten Ausbiß von feinem, weißlichem Quarzschottter (erbsen- oder bohnengroß) und Sand überlagert in dessen unteren Partien viel Viviparen und *Dreissensia Münsteri* Brus. vorkommen, in seinen oberen Partien hingegen viel — anscheinend eingeschwemmte — Fragmente von *Neritina* sp. *Dreissensia cristellata* Roth. sp. und *Bithynia labiata* Neum. zu beobachten sind; darüber lagert sandiger, blauer Ton mit ebenfalls viel *Cardium levanticum.*

Die Aufschlüsse ändern meine bisherige Horizontierung insofern, als auf die von Budai und auch von mir als jüngste betrachtete Viviparen und *Dreissensia Münsteri* Neum. führende Schicht hier noch eine Cardien führende Schicht folgt. Diese Cardienschicht wird durch das massenhafte Auftreten einer mit flachen Rippen versehenen Art des *Cardium levanticum* nov. sp. charakterisiert, während das massenhafte Auftreten des scharfberippten *Cardium Fuchsi* für einen tieferen Horizont bezeichnend ist. Es kann jedoch nur das massenhafte Auftreten als maßgebend erachtet werden, da beide Arten fast in jedem Horizont vorkommen, in den tieferen freilich nur sporadisch. In der Gesellschaft von *Dreissensia Münsteri* und mehrerer neuer Cardiumarten fand sich *Cardium levanticum* auch in dem jenseits der Stürze gelegenen Teile des Baches Csinótpataka bei Nagybacon. Daß dieses *Cardium levanticum* keinen Horizont und namentlich auch hier bei Hidvég höchstens nur eine Fazies bezeichnet, geht aus dem Vorkommen von Erösd und Árapatak hervor, wo dieses Fossil in dem durch viel Viviparen und *Dreissensia Münsteri* charakterisierten Sand vorkommt u. z. in den im Sande nächst Árapatak enthaltenen Konkretionen ziemlich häufig ist. Es ist eine interessante Tatsache, daß *Cardium Fuchsi* — nach meinen bisherigen Beobachtungen — in größerer Menge nur in tonigen, *Cardium levanticum* hingegen nur in sandigen Schichten anzutreffen ist. Bei Hidvég ist auch der untere Cardium-Horizont entwickelt, u. z. ist das Bett des Dirisenpatak in denselben eingeschnitten, während der im Dirisenwalde, einige hundert Meter W-lich vom Jägerhause ausgelängte Schürfstollen den tonigen, blauen Sand des Viviparen- und *Dreissensia Münsteri*-Horizontes aufgeschlossen hat, dessen Schlämmungsrest viel Lignitbruchstücke aufweist. Aus demselben sammelte ich folgende kleine Fauna:

Dreissensia Münsteri Brus.
Vivipara Sadleri Partsch.

Bei einem Vergleich der lignitführenden Schichten von Nyáraspatak mit jenen von Köpec tritt der Horizontunterschied der beiden Lignite sofort vor Augen. Wir wollen zuerst den Lignit von Köpec sehen.

Das Liegende desselben ist feiner, glimmeriger Quarzsand, das geschlämmte Trümmerwerk des Karpathensandsteins, nach der freundlichen Mitteilung des Herrn Bergdirektor G. Hoffmann 2—5 m mächtig, hierauf folgt eine 1—2 m mächtige blaue, tonige Schicht, mit den Fossilien des unteren Süßwasserhorizontes, dann ein 1 m mächtiges Lignitflöz, hierauf Schiefer in 1 m Mächtigkeit mit den Fossilien des unteren Horizontes, jedoch vorwiegend *Anodonten*, dann folgt 5—5,5 m mächtiger Lignit, hierauf 0,30 m mächtiger Schiefer mit den Fossilien des unteren Horizontes, jedoch vorherrschend *Valvata piscinalis* Müll. foss. dann wieder 1,5 m mächtiger Lignit, hierauf wieder Fossilien des unteren Horizontes führender 0,6—1 m mächtiger schieferiger Mergel mit viel Planorben. Dieser übergeht nach aufwärts — wie dies im Tagbau zu beobachten ist — in das eigentliche Hangende des Lignits, in den 4—6 m mächtigen schieferigen, blauen Ton, welcher mit *Cardium Fuchsi* erfüllt ist. Darüber lagert hier alluviales Anschwemmungsmaterial. Die Mächtigkeit dieser an *Cardium Fuchsi* reichen Schicht schwankt hier zwischen 50—60 m, und wird, wie dies weiter oben am Köpec-Bache deutlich zu beobachten ist, von dem dieselbe durchbrechenden Andesittuff überlagert, dessen Mächtigkeit in der Umgebung etwa 20—30 m beträgt. Wie in dem Aufschlusse an der nach Barót führenden Fahrstraße zu sehen ist, lagert dem Tuffe ein 1 m mächtiges Lignitflöz auf (welches nach der Mitteilung des Bergwerksdirektors Hoffmann weiter drinnen im Schürfstollen 3 m mächtig ist), hierauf folgt wieder der schieferige, Cardien führende, blaue Ton, doch ist in demselben *Cardium Fuchsi* bereits seltener als in den Partien unterhalb des Tuffes, wohingegen Ostrakoden häufiger auftreten.

Hieraus ist ersichtlich, daß es in Köpec in zweierlei Horizonte gehörigen Lignit gibt; im Tagbau wird der Lignit des unteren Horizontes abgebaut, während im Oberlaufe des Köpecpatak an der nach Barót führenden Straße der in den oberen *Cardium Fuchsi*-

Horizont gehörige Lignit aufgeschlossen ist. Der Lignit von Nyárás-patak hingegen ist wahrscheinlich in meinen dritten Horizont zu stellen, indem der Liegendschotter des Lignits mit dem hangenden identifiziert werden muß, welcher von Formen des 3. Horizontes, von Viviparen und *Dreissensia Münsteri* angefüllt erscheint.

In den unteren Horizont gehört der durch die von NEUMAYR beschriebene Fauna von Vargyas charakterisierte Lignit, sowie der SE-lich von Kövespatak bei Bodos, im Bette des Lajoskut oder Ludaspatak (dem E-lichten Arm des Bessenyöpatak) aufgeschlossene, bereits zu Szárazajta gehörige — in der Literatur bisher unbekannte Lignit. Derselbe ist in den hellgrauen, schieferigen Mergel des unteren Horizontes eingelagert, dessen Schlämmungsrest folgende Fauna enthielt:

Cardium levanticum nov. sp.? (Bruchstücke)
Dreissensia cristellata ROTH sp.
„ *bodosensis* ROTH sp.
„ *sulcata* nov. sp.
Bithinya labiata NEUM.
Carinifex quadrangulus NEUM.
Hydrobia Eugeniae NEUM.
„ *transitans* NEUM.
„ *pagoda* NEUM.
„ *margarita* NEUM.
„ *nov. sp.*
Valvata (Tropidina) Eugeniae NEUM.
„ „ *bifrons* NEUM.
„ *piscinalis* MÜLL.?
„ *sp. ind.*

Der Lignit selbst ist zwei Meter mächtig. Im Schlämmungsrückstande des Hangendmergels sind besonders viel Lignitbruchstücke enthalten.

In den durch *Cardium Fuchsi,* Pflanzenabdrücke und Ostrakoden gekennzeichneten Horizont gehört der am Bache Karujoscserepatak bei Bodos aufgeschlossene Lignit, welcher also gleichalt mit dem am Oberlaufe des Köpecbaches aufgeschlossenen ist. Der Lignit von Ilyefalva, Szentkirály, und wohl auch der von

Szepsiszentgyörgy hingegen gehört in den oberen Horizont, so daß jeder Horizont sein Lignitflöz hat.

In meinem ersten Berichte wurde hervorgehoben, daß die von mir abgetrennten Horizonte auf faunistischer Grundlage kaum *scharf* voneinander zu trennen sind, da alle drei Horizonte viel gemeinsame Arten führen.

Die einzelnen Horizonte können nur mit Betracht auf die Gesamtfauna und die Lagerungsverhältnisse festgestellt werden. Auf Grund der bisher bekannten Aufschlüsse sind die einzelnen Horizonte sehr leicht kenntlich, und es sind höchstens einige lokale Arten, welche die Faunen hie und da vom Typus abweichend erscheinen lassen. Die unteren Schichten der einzelnen Bildungen sind fossilreicher als die oberen.

In Ungarn ist die gestörte Lagerung innerhalb der pliozänen Bildungen, welche die Feststellung der Aufeinanderfolge der einzelnen Schichten häufig erschwert, ungewohnt.

Stellenweise sind Verwerfungen häufig, so um Köpec herum, wo die Schichten des unteren Horizonts mit Lignit — wie erwähnt — an der Oberfläche aufgeschlossen sind, während um weniges gegen N am rechten Ufer des Baches von Barót in demselben Niveau die Schichten des zweiten Horizontes zutage treten, ja die Schurfbohrungen haben — nach der Mittelung G. Hoffmanns — den mittleren Horizont sogar noch in 120 m Tiefe nachgewiesen. Hier ist also eine Verwerfung von etwa 150 m anzunehmen. Anderweitig ist das Gebiet wieder durch und durch verrutscht, so in der Umgebung des Csinótpatak bei Nagybacon.

Außer der schlechten Bestimmung der Fauna trägt einesteils der eigenartige, von den sonstigen levantinischen Bildungen Ungarns gänzlich abweichende Charakter der levantinischen Fauna (der Reichtum an Cardien) die Schuld daran, daß das genaue Alter dieser Bildung solange nicht sicher ermittelt werden konnte. Der Reichtum an Cardien bringt diese Fauna mit dem rumänischen Pliozän einigermaßen in Beziehung, jedoch mit dem Unterschiede, daß dort die Psilodone mit ihrer ungemein dicken Schale in charakteristischer Menge auftreten, während hier im Széklerlande zumeist äußerst dünnschalige, geschlossene Cardien vorkommen, welche neue, bisher nur von hier bekannte Arten sind.

Außerordentlich interessant ist der tropische — vorwiegend afrikanische — Charakter der Fauna. Während nämlich die Molluskenfauna der tieferen pannonischen Horizonte mit den Faunen des Kaspischen Meeres, des Aral- und Bajkal-Sees, sowie der ostasiatischen Süßwässer verwandt ist, ist z. B. *Vivipara pseudo-Vukotinovici* nov. sp von Szepsiszentgyörgy, Gált und Hidegkút zunächst mit der im afrikanischen Viktoria-Nyansa lebenden *Vivipara victoriae* SMITH sp.* — mit welcher sie fast übereinstimmt, ferner mit der auf den Philippinen vorkommenden *V. mearnsi* BARTSCH** und der serbischen, fossilen *Vivipara conica* PAVL.*** verwandt. Ein entfernterer Verwandter ist bereits *V. Vukotinovici* FRFLD. sp. aus dem Deliblát† und Slavonien. Während für den Zusammenhang unseres pliozänen Festlandes mit dem afrikanischen Kontinent bisher nur die Säugetierfauna sprach, erscheint derselbe jetzt auch durch die Süßwasser-, die Binnenseemollusken schön erwiesen.

Dieser pliozäne Schichtenkomplex des Széklerlandes ist mit dem rumänischen „Dazien“ gleichalt, also wie gezeigt wurde unterlevantinisch.

Im nördlichen Teil des Gebirges von Barót wechsellagern diese jungen Sedimente mit vulkanischen Tuffen bez. richtiger Brekzien. Auf diese Art ist das Alter der letzteren sicher zu ermitteln, weshalb wir das Verhältnis dieser Tuffe zu den fossilführenden levantinischen Schichten genauer betrachten wollen.

Wie im Hargitagebirge überhaupt, so spielt der massige, anstehende Andesit im Verhältnis zu seinen klastischen Bildungen (Sand, Lapilli, Brekzie und Agglomerat) eine sehr untergeordnete Rolle. In den — zuweilen sehr mächtigen — Brekzien (zwischen

---

* BAUMANN: Durch Massailand zur Nilquelle (S. 303, Taf. XXIV, Fig. 5).

** P. BARTSCH: The Philippine pond snails of the genus Vivipara. Procedings of the U. S. National-Museum; Washington 1907, Bd. XXXII, S. 142, Taf. X, Fig. 6).

*** P. S. PAVLOVIC: Beiträge z. Fauna d. Tertiärablagerungen in Altserbien (Ann. géol. de la péninsule balkanique Bd. VI, Heft 2, S. 26, Taf. IV, Fig. 8—10), 1908.

† Prof. Dr. E. v. CHOLNOKY hat mir ein Exemplar dieser Art zukommen lassen, welches im Deliblát bei einer Brunnenbohrung samt mehreren levantinischen Fossilien zutage gefördert wurde.

Barót und Köpec 20—30 m) sind im allgemeinen Andesitblöcke von der verschiedensten Zusammensetzung und Größe (von Mohnkorn bis Hausgröße), und verschiedene organische Reste enthalten. Die Andesitlaven keilen sich zwischen diese wie es scheint auch hier ebenso wie im Kelemen- und Hargitagebirge mehrfach nur in der Form von kleinen Decken oder Dykes ein, da sie sich zur Zeit des Aschen- und Lapilliausbruches ergossen haben und von letzterem bedeckt wurden. Die feine, häufig bimsteinartige Brekzie (Tuff), welche die Zwischenräume zwischen den größeren Blöcken ausfüllt, ist locker, und zerfällt auf den ersten Hammerschlag. Der Krater dieser vulkanischen Produkte ist nicht bekannt, und wird wahrscheinlich auch niemals bekannt werden. Am wahrscheinlichsten ist, daß mehrere kleine parasitische Krater tätig waren, welche bei der Eruption auch Bruchstücke des Grundgebirges (Karpathensandstein) und jener Sedimente herausschleuderten, welche sie durchbrachen, ja vielleicht auch Bruchstücke der älteren, bereits erhärteten Lava. Die Tätigkeit dieser Vulkane dürfte dem Ausbruche des Cotopaxi im Jahre 1877 oder der Tätigkeit des südlichsten der Liparischen Inseln, des Vulkanos zwischen 1888 und 1890 ähnlich sein, jedoch mit dem Unterschiede, daß bei letzterem jede Spur eines Lavaergusses fehlte, während hier, ebenso wie beim Cotopaxi auch dieser nachzuweisen ist.

Als ich die Umgebung von Kisbacon zum ersten Mal besuchte, machte ich mir Gedanken über den Umstand, daß sich auf der Spitze des aus feinerem und gröberen Tuff bestehenden Csikorraberge NE-lich von der Ortschaft, verstreut Andesitblöcke von mehreren Metern Durchmesser, ja sogar von der Größe eines kleineren Hauses finden. Doch fand diese eigenartige Erscheinung in dem Umstand, daß diese Blöcke in den oberen Schichten des Berges in Andesitsand eingebettet waren, und nach der Wegschwemmung des feinen Sandes bald eine Erklärung; seither wurden diese Blöcke größtenteils fortgeschafft und als Bausteine verwendet. Solche große Andesitblöcke sind in der Umgebung von Bibarcfalva und Barót in der Andesitbrekzie verstreut überall anzutreffen; bei Füle hingegen kommen sie so häufig vor, daß zwischen ihnen kaum tuffiges oder brekziöses Material zu finden ist.

MATHEMATISCHE
UND
NATURWISSENSCHAFTLICHE
BERICHTE AUS UNGARN

MIT UNTERSTÜTZUNG
DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER
KÖNIGLICH UNGARISCHEN NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

ROLAND BARON EÖTVÖS UND JULIUS KÖNIG

REDIGIERT VON

JOSEF KÜRSCHÁK UND FRANZ SCHAFARZIK
MITGLIEDER DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND · 1908
4. HEFT

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1913

[IN WIEN BEI KARL GRAESER & K^IE.]

MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE BERICHTE AUS UNGARN.

SECHSUNDZWANZIGSTER BAND. 1908.

INHALT DES 4. HEFTES.

AVIS.

Die Mathematischen und naturwissenschaftlichen Berichte aus Ungarn werden jährlich in vier Heften herausgegeben. Der Preis eines Jahrganges von 20—22 Bogen beträgt 8 Mark. Die Redaktion.

Wenn man das Verhältnis der Andesideruption zu den Sedimenten untersucht, so zeigt sich, daß die levantinische Eruption mit einem feineren Aschen- und Lapilliregen begonnen hat, dessen Spuren in den Sedimenten des unteren Horizontes hie und da anzutreffen sind. Die Haupttätigkeit der Vulkane, der Auswurf des gröberen Materials erfolgte zur Zeit des Absatzes der *Cardium Fuchsi*-Schichten (mittlerer Horizont) und hauptsächlich nach dem Absatz derselben. Teilweise aber drang die Brekzie in der Form von Dykes in und durch die *Cardium Fuchsi*-Schichten. Solche Dykes sind am schönsten im Kaszavépatak bei Barót, ferner im Csihánios-patak bei Bodos zu beobachten, und deuten auf das geringe Alter dieser vulkanischen Tätigkeit.

Diese Brekzien führen stellenweise Bruchstücke von Karpathensandstein, bald $^1/_1$ m große Andesitblöcke zwischen vielen kleineren, ferner große Blöcke des unteren, weißen Süßwassermergels, dann zu Kalkstein metamorphosierte Bruchstücke und Kohlenstücke dieses Horizonts. Auch Bruchstücke des schieferigen$_2$ blauen *Cardium Fuchsi* führenden Tones als Fragmente der präexistierte Sedimente, sowie Eisenkonkretionen des letzteren Horizontes kommen darin vor.

Diese Eruptionen währten durch die ganze levantinische Stufe hindurch und griffen bis in das Diluvium hinein. Die Solfatarentätigkeit des Szentannató-Kraters bei Tusnád ist z. B. auch noch heute sehr intensiv, viel stärker als jene des Hundsloches bei Neapel. Ein Ergebnis dieser postvulkanischen Tätigkeit sind die vielen Säuerlinge, deren Verteilung — wie ich bereits nachgewiesen habe — mit der Tektonik des Gebietes in Zusammenhang steht.

(Aus der Sitzung der III. Kl. der Ungar. Akademie der Wissenschaft am 15. März 1909.)

8.

BEITRÄGE ZUR KENNTNIS DER MIKROFAUNA DES KOSSOGOL-BECKENS IN DER NORDWESTLICHEN MONGOLEI*.

Von Prof. E. v. DADAY in Budapest.

Mit 12 Textfiguren.

W. S. ELPATIEWSKY, Assistent am zoologischen Museum der Universität Moskau, hat bei seiner in den Monaten Juni, Juli und August im nordwestlichen Mongolien unternommenen Studienreise aus dem an der Grenze von Sibirien und Mongolien liegenden Kossogol-See, der unter dem 50° 12′ 49″ n. Br. und 100° 7′ 44″ ö. L. liegt, 130 km lang und 36 km breit ist, ca. 2945 qkm Flächenraum hat, sowie aus der Umgebung des großen Sees von insgesamt 41 Fundorten in 93 Eprouvetten, größtenteils in Spiritus konserviertes Planktonmaterial gesammelt.** Zur Aufarbeitung dieses reichen Materials hat W. S. ELPATIEWSKY mich aufgefordert, und ich habe dieser ehrenden Aufforderung um so lieber entsprochen, als ich mit Rücksicht auf die Lückenhaftigkeit der mir zur Verfügung stehenden literarischen Daten hoffte, einen Beitrag zur Mikrofauna von Mongolien bieten zu können.

Über die mikroskopische Süßwasserfauna von Mongolien haben nämlich, laut der mir zugänglichen Literatur, bisher bloß J. RICHARD, E. v. DADAY und G. O. SARS Daten beigebracht. J. RICHARD hat

---

* Vorgelegt in der Sitzung der III. math.-naturw. Klasse der ung. Akademie der Wissenschaften zu Budapest am 20. Nov. 1905.

** Die geographischen und hydrographischen Verhältnisse des Kossogol-Sees sind in der Abhandlung von C. H. OSTENFELD „Beiträge zur Kenntnis der Algenflora des Kossogol-Beckens in der nordwestlichen Mongolei, mit spezieller Berücksichtigung des Phytoplanktons“ in „Hedwigia“, Bd. 46, p. 371 eingehend beschrieben.

1897 von mongolischen Fundorten *Diaptomus Chaffajoni* beschrieben und zugleich *Daphnia similis* Cls. = *Daphnia carinata* King verzeichnet (15); E. v. DADAY hat 1901 vom Chermin-czagan-nor 12 Arten aus dem Bereiche der *Protozoen, Würmer* und *Entomostraken* beschrieben (3); während G. O. SARS 1903 in zwei Abhandlungen 33 *Entomostraka-Arten* von verschiedenen Fundorten beschrieben hat (16, 17). Hält man die Daten dieser drei Forscher gegeneinander, so zeigt es sich, daß aus Mongolien bisher die von E. v. DADAY beschriebenen *Cercocysten* mitgerechnet, insgesamt 41 mikroskopische Süßwassertiere bekannt sind, was offenbar als kein reiches, noch befriedigendes Ergebnis zu betrachten ist.

Über die Fundorte und die Funddaten des mir vorgelegenen Planktonmaterials bietet nachstehendes Verzeichnis Aufschluß. Zu der Beschreibung der bei meinen Untersuchungen beobachteten Arten befolge ich die aufsteigende systematische Reihenfolge. Eine eingehendere Beschreibung, eventuell auch Abbildungen biete ich nur von den neuen oder in irgendeiner Hinsicht interessanteren Arten, wogegen ich bei den gewöhnlicheren und bekannteren Arten bloß das bei der Determinierung zu Rate gezogene Werk erwähne. Nach der systematischen Aufzählung fasse ich die von den einzelnen Fundorten verzeichneten Arten gesondert zusammen und skizziere dann gleichfalls in einem eigenen Kapitel die zoogeographischen Verhältnisse der beobachteten Arten in kurzen Umrissen. Um aber über die Tierchen, welche die kolossale Wassermenge des Kossogol bevölkern, ein leicht übersichtliches Bild zu bieten, gebe ich noch außerdem ein Verzeichnis der an verschiedenen Punkten des Sees gesammelten Arten.

I.

Verzeichnis der Fundorte.

1. Mündung des Flusses Changa 3., 4., 5., 9. VI. 1903.
2. Kleiner Sumpf an der Mündung des Flusses Changa. 8. VI. 1903.
3. Zwischen dem Fluß Changa und Cap Santa. Aus der Tiefe 2—21,5 m. 9. VI. 1903.
4. Chubtu-nor, am nordwestlichen Ufer des Kossogol. 9., 10. VI 1903.
5. Zwischen der Mündung des Flusses Than und Cap Santa. Aus der Tiefe 16,5 m. 9., 22. VI. 1903.

6. Kossogol, im Sande der littoralen Zone. 13. VI. 1903.
7. Mündung des Flusses Turuk. 13. VI. 1903.
8. Pfütze im Tal des Flusses Turuk. 13. VI. 1903.
9. Fluß Morin-Tuskul. 17. VI. 1903.
10. Verbindungsstelle des kleinen Sees Borsok mit dem Kossogol. 4., 20., 21. VI. 1903.
11. Fluß Noin-gol, östliches Ufer des Kossogol. 15. VI. 1903.
12. Südwestliches Ufer der Insel Dala-kui. 25. VI. 1903.
13. Oberflächlicher Fang 200 m südlich von der Insel Dala-kui. 25. VI. 1903.
14. Borsok-See. 21. VI. 1903.
15. Zwischen der Insel und dem westlichen Ufer des Kossogol, aus der Tiefe 20 m. 27. VI.; 1. VII. 1903.
16. Fluß Malyi-Gumnuk. 2. VII. 1903.
17. Nordwestliches Ufer der Halbinsel Dolon-ula. 3. VII. 1903.
18. Nördliche Seite des Cap Toilgot. 6. VII. 1903.
19. Kiren-nor. 6. VII. 1903.
20. Chorchoito-nor. 9. VII. 1903.
21. Fluß Mota. 10. VII. 1903.
22. Mota-Bucht., 12., 24. VII. 1903
23. Fluß Chilin. 20. VII. 1903.
24. Mattabulun-Cap. 24. VII. 1903.
25. Angolheim-See, am westlichen Ufer des Kossogol. 25. VII. 1903.
26. Westliches Ufer bei Cap Toilgot. 25. VII. 1903.
27. Am Ufer der Halbinsel Dolon-ula, aus der Tiefe 25 und 51 m. 1., 3. VII. 1903.
28. Erster, kleiner See nördlich von Angolheim-See. 25. VII. 1903.
29. Zweiter, kleiner See nördlich von Angolheim-See. 25. VII. 1903.
30. Gytschygenty-nor, am westlichen Ufer des Kossogol. 26. VII. 1903.
31. Cheltyge-nor, am westlichen Ufer des Kossogol. 26. VII. 1903.
32. Bei Cap Santa, aus der Tiefe 98,4 m. 29. VII. 1903.
33. Gegenüber Cap Santa, am westlichen Ufer des Kossogol. 30. VII. 1903.
34. Ajagam-maranai-bulun, am westlichen Ufer des Kossogol. 30., 31. VII. 1903.
35. Fluß Djeglyk bei der Mündung. 30. VII. 1903.
36. Westliches Ufer des Kossogol, zwischen dem Fluß Djeglyk und Chatschim. 30., 31. VII. 1903.
37. Kleiner See bei der Mündung des Flusses Chatschim. 2. VIII. 1903.
38. Bucht des Flusses Chatschim, westliches Ufer des Kossogol. 2. VIII. 1903:
39. Chatschim-nor, am westlichen Ufer des Kossogol. 2. VIII. 1903.
40. Mündung des Flusses Tochomyk. 4. VIII. 1903.
41. Quelle Bulunai, 25 km vom östlichen Ufer des Kossogol. 6. VII. 1903.

II.

1. Die beobachteten Arten.

I. *Protozoa.*

Aus der Fauna von Mongolien waren bisher bloß zwei *Protozoa*-Arten, d. i. *Zoothamnium parasita* STEIN und *Tokophrya Cyclopum* CLAP. et LACHM. bekannt, die E. v. DADAY aus der Sammlung der Expedition ZICHYS vom Chermin-czagan-nor verzeichnet hat.

Class. ***Sarcodina.***

Subclass. *Rhizopoda.*

Ord. *Lobosa.*

Aus dieser Ordnung habe ich in dem vorliegenden Material bloß Repräsentanten einige Arten gefunden, die Gehäuse mit fester Wandung herstellen. Aus der Familie der *Amoebidae* vermochte ich mithin keine einzige Art zu erkennen und zu verzeichnen; die Ursache hiervon beruht nur in der Schwierigkeit der Konservierung der hierhergehörigen Arten.

Fam. *Arcellidae.*

1. *Arcella vulgaris* EHRB.

Arcella vulgaris J. LEIDY 10 p. 170, Taf. 27, 28, Fig. 1—7.

Eine gemeine Art, die ich in dem Material von folgenden Fundorten vorfand: Mündung des Changa-Flusses; südliches Ufer der Halbinsel Dalakuy; Sand der littoralen Zone des Kossogol; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Angelheim-See; zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Chubtu-nor; kleiner See an der Mündung des Chatschim-Flusses; Mündung des Tochomyk-Flusses; Mündung des Turuk-Flusses; Pfütze im Tal des Turuk-Flusses; Morin-Tuskul-Fluß; Chilin-Fluß; Verbindungsstelle des Borsok-Sees mit dem Kossogol.

2. *Arcella discoides* EHRB.

Arcella discoides J. LEIDY **10** p. 173, Taf. 28, Fig. 14—38.

Weniger häufig als vorige Art; ich verzeichnete sie bloß von folgenden Fundorten: Mündung des Changa-Flusses; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Angolheim-See; Gytschygenty-See; Cheltyge-See.

3. *Arcella mitrata* Ehrb.

Arcella mitrata J. Leidy **10** p. 175, Taf. 29.

Diese Art zählt zu den selteneren, insofern ich sie bei meinen Untersuchungen bloß an einem Fundort vorgefunden habe, und zwar in einer Pfütze im Tal des Turuk-Flusses.

4. *Centropyxis aculeata* (Ehrb.)

Centropyxis aculeata J. Leidy **10** p. 180, Taf. 30, Fig. 20—34. Taf. 31, 32, Fig. 29—37.

Eine der gemeineren Arten, die ich von folgenden Fundorten verzeichnete: Angolheim-See; Gytschygenty-See; Mündung des Djeglyk-Flusses; Pfütze im Tal des Turuk-Flusses, Verbindungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol; Maly-Gumnuk-Fluß; Kiren-nor; Chilin-Fluß.

5. *Difflugia constricta* Ehrb.

Difflugia constricta J. Leidy **10** p. 120, Tab. 18.

Fundorte: Sand der littoralen Zone des Kossogol-Flusses; Morin-Tuskul-Fluß; Chilin-Fluß; nirgends häufig. Unter den Exemplaren fand ich auch solche, deren Gehäuse mehr Dornen trug.

6. *Difflugia corona* Ehrb.

Difflugia corona J. Leidy **10** p. 117, Taf. 17.

Einige Exemplare dieser Art fand ich an folgenden Fundorten: Morin-Tuskul-Fluß; Borsok-See; Bucht Mota.

7. *Difflugia globulosa* Ehrb.

Difflugia globulosa J. Leidy **10** p. 96, T. 15, Fig. 25—31, Taf. 16, Fig. 1—34.

Wie es scheint, gehört diese Art in der Fauna von Mongolien nicht zu den häufigeren, denn ich habe sie nur von einem einzigen Fundort verzeichnet und zwar von den Ufern der Halbinsel Dolon-ula, und auch hier war sie nicht häufig.

8. *Difflugia lobostoma* Leidy.

Difflugia lobostoma J. Leidy **10** p. 112, Taf. 15, Fig. 1—24, Taf. 16, Fig. 25—29.

Auch diese Art dürfte zu den selteneren zu zählen sein, denn ich habe sie bloß von einem Fundort verzeichnet, d. i. aus einem kleinen See an der Mündung des Chatschim-Flusses.

9. *Difflugia pyriformis* PERTY.

Difflugia pyriformis J. LEIDY **10** p. 98, Taf. 10, 11, 12, Fig. 1—18, Taf. 15, Fig. 32, 33, Taf. 16, Fig. 38, Taf. 19, Fig. 24—26.

Ich habe diese Art nur an folgenden Fundorten angetroffen: im Sande der littoralen Zone des Kossogol; Chorchoito-nor; an keinem dieser Fundorte häufig.

10. *Difflugia urceolata* EHRB.

Difflugia urceolata J. LEIDY **10** p. 106, Taf. 14, 16, Fig. 32—34, Taf. 19, Fig. 28, 29.

Diese Art ist die häufigste der Gattung; ich habe sie von folgenden Fundorten verzeichnet: Mündung des Changa-Flusses; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Chubtu-nor; Verbindungsstelle stelle des Borsok-Sees und des Kossogol; Borsok-See; Chilin-Fluß; in Massen ist sie nirgends vorgekommen.

Ord. ***Filosa.***

Fam. *Euglyphidae.*

11. *Englypha alveolata* EHRB.

Euglypha alveolata J. LEIDY **10** p. 207, Taf. 35, Fig. 1—18.

Bei meinen Untersuchungen ist mir diese Art nur an den folgenden zwei Fundorten vorgekommen: Chubtu-nor; Chorchoito-nor; auch hier nicht häufig.

12. *Cyphoderia ampulla* (EHRB.).

Cyphoderia ampulla J. LEIDY **10** p. 202, Taf. 34, Fig. 1—16.

Scheint zu den seltenen Arten zu zählen, ich habe sie bloß an einem Fundorte angetroffen, und zwar an der Mündung des Turuk-Flusses.

Ord. *Heliozoa.*

Fam. *Chalarothoraca.*

13. *Rhaphidiophrys elegans* HERT. LESS.

Rhaphidiophrys elegans J. LEIDY **10** p. 248, Taf. 42.

Fundorte: Mündung des Changa-Flusses; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; kleiner See an der Mündung des Chatschim-Flusses; Verbindungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol. Ich habe bloß vereinzelte und farblose Exemplare gefunden.

Class. ***Mastigophora.****)

Ord. ***Chloromonadina.***

Fam. *Euglenidae.*

14. *Euglena deses* EHRB.

Euglena deses S. KENT **9** p. 383, Taf. 20, Fig. 52, 53.

Ich habe diese Art nur von einem Fundort bemerkt, bzw. in dem Material aus dem Angolheim-See einige Exemplare gefunden.

15. *Euglena viridis* EHRB.

Euglena viridis S. KENT **9** p. 381, Taf. 20, Fig. 29—81.

Scheint häufiger zu sein als vorige Art; ich traf sie an folgenden Fundorten an: Mündung des Changa-Flusses; zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Chorchoito-nor.

Class. ***Infusoria.***

Subclass. *Ciliata.*

Fam. *Amphileptidae.*

16. *Lionotus folium* (DUJ.).

Lionotus anser F. BLOCHMANN **1** p. 92, Taf. 5, Fig. 169.

In dem Material von der Mündung des Changa fand ich einige Exemplare.

Ord. *Trichostomata.*

Fam. *Parameciidae.*

17. *Paramecium Aurelia* O. F. M.

Paramecium aurelia S. KENT **9** p. 483, T. 26, Fig. 28—30.

Ist mir bei meinen Untersuchungen bloß ein einzigesmal vorvorgekommen, und zwar in dem Material von dem Fundort Chorchoito-nor.

Fam. *Halteriidae.*

18. *Strombidium Claparedii* KENT.

Strombidium Claparedii S. KENT **9** p. 634, Taf. 32, Fig. 46.

Diese bisher bloß aus Europa bekannte Art habe ich aus dem Material von der Mündung des Changa verzeichnet.

---

* Die Arten der Familie *Dinobryontidae* sowie der *Dinoflagellaten* habe ich außeracht gelassen, nach dem sämtliche in der Abhandlung von C. H. OSTENFELD schon aufgezählt und bekannt gemacht sind (13 *a*).

Fam. *Oxytrichidae.*

19. *Oxytricha pellionella* (O. F. M.).

Oxytricha pellionella S. KENT **9** p. 7, 86, Taf. 45, Fig. 3—5.

Von dieser Art fand ich einige Exemplare in dem Material aus dem Angolheim-See.

Fam. *Euplotidae.*

20. *Euplotes Charon* EHRB.

Euplotes Charon F. BLOCHMANNI **1** p. 115, Taf. 6, Fig. 229.

Einige Exemplare habe ich in dem Material von den Ufern der Halbinsel Dolon-ula beobachtet.

Fam. *Vorticellidae.*

21. *Lagenophrys nassa* STEIN.

Lagenophrys nassa S. KENT **9** p. 733, Taf. 40, Fig. 47.

Einige Exemplare dieser Art habe ich in dem Material vom Fundort Chorchoito-nor beobachtet. Das Gehäuse aller war ein wenig von den STEINschen verschieden, insofern dasselbe nicht kreisförmig war, sondern einem an beiden Enden gleichförmigen abgerundeten Ei gleichkam. Der Kragen der Gehäuseöffnung erscheint aus kleinen Stäbchen zusammengesetzt, der freie Rand oben ist gezähnt.

Diese Art gehört zu den selteneren und war bisher bloß aus Europa und Nordamerika bekannt. Es ist wahrscheinlich, daß die von mir untersuchten Exemplare sich von *Gammarus*-Arten losgelöst haben, denn die europäischen sitzen hieran.

22. *Vaginicola decumbens* EHRB.

Platycola decumbens S. KENT **9** p. 731, Taf. 40, Fig. 33, 34.

In dem Material aus dem Flusse Moli Gumnuk fand ich einige Exemplare dieser Art. Das Gehäuse derselben hatte von oben gesehen die Form eines an beiden Enden gleichförmig abgerundeten Eies, weichen somit einigermaßen ab von den von S. KENT abgebildeten europäischen Exemplaren, deren hinteres Ende etwas gespitzt ist. In allen Gehäusen ruhten je zwei Tiere, deren Kern zufolge der Konservierung zu dicken, kurzen Stäbchen zusammengeschrumpft war. Außer Europa war diese Art bisher bloß aus Nordamerika und Neuseeland bekannt.

23. *Cothurniopsis imberbis* Ehrb.

Cothurnia imberbis S. Kent 9 p. 720, Taf. 40, Fig. 9, 10.

Ich habe diese Art nur im Material von dem Fundort Chorchoito-nor vorgefunden, und zwar nicht nur auf Pflanzenresten, sondern auch auf *Cyclops*-Arten gelagert; bisher war sie bloß aus Europa bekannt.

24. *Cothurnia crystallina* Ehrb.

Vaginicola crystallina S. Kent 9 p. 715, Taf. 40, Fig. 1.

Ist als ziemlich kosmopolitische Art zu betrachten, ich fand sie indessen bei meinen Untersuchungen nur in dem Material von dem Fundort Chorchoito-nor.

25. *Epistylis plicatilis* Ehrb.

Epistylis plicatilis S. Kent 9 p. 701, Taf. 39, Fig. 12—15.

Diese Art kommt an mehreren Orten vor, und zwar teils auf Pflanzenresten, teils auf *Entomostraken* gelagert. Fundorte: Mündung des Changa-Flusses; Noin-gol-Fluß; Pfütze im Tal des Turuk-Flusses; Chorchoito-nor.

26. *Zoothamnium parasita* Ehrb.

Zoothamnium parasita S. Kent 9 p. 698, Taf. 37, Fig. 16.

Ich habe diese aus Mongolien schon früher bekannte Art bei meinen jetzigen Untersuchungen bloß an *Copepoden* aus dem Material von dem Fundort Kossogol bei Cap Santa vorgefunden.

27. *Vorticella microstoma* Ehrb.

Vorticella microstoma S. Kent 9 p. 683, Taf. 35, Fig. 9—24.

Diese Art hat eine allgemeine geographische Verbreitung, scheint indessen in Mongolien nicht häufig zu sein, insofern ich sie nur von zwei Fundorten verzeichnet habe, und zwar: Mündung des Changa-Flusses, Pfütze im Tale des Turuk-Flusses.

28. *Vorticella nebulifera* Ehrb.

Vorticella nebulifera S. Kent 9 p. 679, Taf. 35, Fig. 32—47.

Wahrscheinlich ist diese Art in Mongolien ebenso häufig, wie in anderen Faunengebieten; allein ich habe sie nur in dem Material von dem Fundort Chorchoito-nor vorgefunden.

Subclass. ***Suctoria.***

Ord. *Acinetida.*

Fam. *Acinetinae.*

29. *Podophrya cyclopum* (Cl. und L.).

Podophrya cyclopum S Kent **9** p. 818, Taf. 46, Fig. 23.

Ich habe diese aus Mongolien schon früher bekannte Art bei meinen derzeitigen Untersuchungen nur an den Schalen von *Ostrakoden* aus dem Mota-Fluß gefunden.

II. *Coelenterata.*

Class. *Hydrozoa.*

Ord. *Hydroidea.*

Fam. *Hydridae.*

30. *Hydra fusca* Auct.

In dem Material aus dem Flusse Malyi-Gumnuk waren mehrere Exemplare dieser Art vorhanden.

31. *Hydra viridis* L.

Häufiger als vorige Art, dies geht aus dem Umstand hervor, daß ich sie an folgenden Fundorten angetroffen habe: Angolheim-See; Mündung des Djeglyk-Flusses; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogolflusses.

III. *Vermes.*

Class. *Nemathelmintes.*

32. *Monhystera similis* Bütsch.

Monhystera similis de Man **20** p. 40, Taf. 3, Fig. 11.

Der Körper vorn nur wenig, hinten dagegen stark verengt. Die Kutikula ist glatt, am Kopf mit feinen Borsten versehen In der Mundhöhle liegen an der Grenze des Lumens zwei Kutikularstäbchen schief nach innen, so daß sie einen kleinen Trichter bilden. Der Oesophagus ist nach hinten allmählich verdickt, bildet aber keinen Bulbus. Die Afteröffnung liegt entfernter von dem Schwanzende wie von der Genitalöffnung.

Das weibliche Geschlechtsorgan ist unpaar und öffnet sich im zweiten Körperdrittel nach außen.

Der Schwanz ist gegen das Ende stark verjüngt und endigt entweder nadelförmig gespitzt oder das Ende ist keulenförmig aufgedunsen.

Ich habe bloß Weibchen gefunden, die folgende Größenverhältnisse aufgewiesen haben: die ganze Körperlänge betrug 0,75 bis 0,8 mm, die Länge des Oesophagus 0,18 mm, die Schwanzlänge 0,18 mm, der größte Durchmesser 0,05 mm. Diese Exemplare sind mithin um 0,1 mm kleiner als die BÜTSCHLIschen, mit denen sie sonst vollständig übereinstimmen.

Bei meinen Untersuchungen habe ich diese Art nur in dem Material aus einer Pfütze im Tal des Turuk-Flusses vorgefunden. Bisher nur aus Europa bekannt.

33. *Trilobus gracilis* BAST.

Trilobus gracilis DE MAN **20** p. 75, Taf. 11, Fig. 43.

Eine häufige Art, die ich von folgenden Fundorten verzeichnet habe: Sand der littoralen Zone des Kossogol; Angolheim-See; Mündung der Djeglyk-Flusses; Pfütze im Tal des Turuk-Flusses; Fluß Malyi-Gumnuk; Mota-Fluß und Mota-Bucht. An manchem Fundort häufig.

Unter den vorliegenden Exemplaren habe ich bloß Weibchen gefunden, die Größenverhältnisse derselben sind folgende: ganze Körperlänge 2—2,5 mm, Länge des Oesophagus 0,4—0,5 mm, Schwanzlänge 0,35—0,4 mm, der größte Durchmesser 0,1 mm.

34. *Plectus tenuis* BAST.

Plectus tenuis DE MAN **20** p. 111, Taf. 17, Fig. 69.

Von dieser Art lagen mir mehrere Exemplare vor von folgenden Fundorten: Cheltyge-nor; Pfütze im Tal des Turuk-Flusses; Morin-Tuskul-Fluß; Borsok-See. Bisher bloß aus Europa bekannt.

Die untersuchten Exemplare stimmten im allgemeinen mit den von DE MAU abgebildeten holländischen Exemplaren überein, aber in den Details zeigt sich dennoch einige Abweichung. Der Körper ist bis zur Afteröffnung kaum merklich verengt und selbst hinter der Afteröffnung noch ein Stück ebenso dick wie vor der Afteröffnung. Der Schwanz ist gleichmäßig verengt, endigt etwas keulenartig und an der Spitze befindet sich eine bemerkbare Drüsen-

Ausleitung. Im Schwanze vermochte ich drei Drüsen wahrzunehmen. Der Mund und die Mundhöhle erinnern einigermaßen an die von *Plutus rhizophilus,* DE MAN, an der Mundöffnung aber sind keine Lippen zu sehen. Die Zahnvorrichtung des Schlundbulbus stimmt zwar mit dem der holländischen Exemplare überein, die Struktur aber ist etwas einfacher. Die äußere Schicht der Kutikula ist glatt, die mittlere hingegen fein geringelt. Die Genitalöffnung liegt in der Körpermitte.

Ich habe bloß Weibchen gefunden, deren Größenverhältnisse folgende sind: ganze Körperlänge 1,2—1,25 mm, die Länge des Oesophagus 0,33—0,35 mm, die Länge des Schwanzes 0,15 bis 0,17 mm, der größte Durchmesser 0,65 mm.

35. *Diplogaster Elpatiewskyi* DAD.

Fig. 1 *a, b.*

Diplogaster Elpatiewskyi DADAY **4***a,* p. 54.

Der Körper ist nach vorn kaum merklich, nach hinten dagegen stark verengt, die Kutikula erscheint bloß im vorderen Körperdrittel sehr fein geringelt, sonst ist sie glatt und nirgends mit Borsten besetzt.

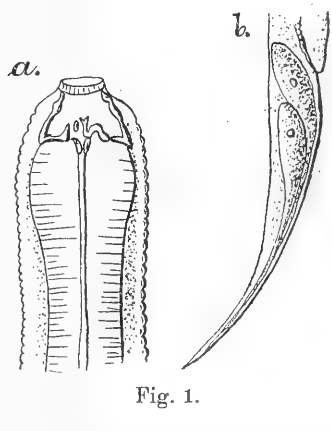


Fig. 1.

Die Mundhöhle ist geräumig, ihre Wandung ist mit verdickter Kutikula bedeckt, welche an einzelnen Punkten knotig erscheint. In der Mundhöhle zeigt sich eine eigentümliche Zahnvorrichtung, deren Struktur aus der Abbildung Fig. 1*a* ersichtlich ist. Das innere Lumen des Schlundanfanges ist gleichfalls mit einer verdickten Kutikula bedeckt. Das innere Lumen des vorderen Schlundbulbus ist durch eine dickere Kutikula begrenzt als das des hinteren. In der Wandung des Darmkanals vermochte ich keine Zellen auszunehmen.

Das weibliche Geschlechtsorgan ist paarig, im Verhältnis kurz; die Genitalöffnung liegt in der Körpermitte.

Von der Afteröffnung an ist der Schwanz plötzlich verengt und endigt sehr gespitzt; im Innern habe ich zwei Drüsen wahrgenommen (Fig. 1 *b*).

Es lagen mir nur Weibchen vor, die Größenverhältnisse derselben sind folgende: die ganze Körperlänge beträgt 1,5—1,55 mm, die Länge des Schlundes 0,3—0,35 mm, die Länge des Schwanzes 0,2—0,25 mm, der größte Durchmesser 0,07 mm.

Fundort: Borsok-See.

Diese Art, welche ich dem Sammler W. S. ELPATIEWSKY zu Ehren benannt habe, ist von den übrigen Arten der Gattung vermöge der Struktur der Mundhöhle, bzw. der Zahnvorrichtung leicht zu unterscheiden. Übrigens steht sie dem *Diplogaster fictor* BAST. am nächsten.

36. *Dorylaimus filiformis* BAST.

Dorylaimus filiformis DE MAN **20** p. 187, Taf, 32, Fig. 134.

Es lagen mir mehrere Exemplare dieser Art vor, die ich in dem Material von folgenden Fundorten gefunden habe: Chatschin-nor; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und Kossogol-Flusses; Borsok-See und Kiren-nor. Bisher bloß aus Europa bekannt.

Class. ***Nematorhyncha.***

Ord. ***Gastrotricha.***

Fam. ***Chaetonotidae.***

37. *Chaetonotus polychaetus* DAD.

Chaetonotus polychaetus DADAY **4** *a*, p. 55.

Der Körper ist ziemlich gedrungen, von oben gesehen, nach hinten merklich verbreitert, in der Halsgegend etwas eingeschnürt somit einigermaßen einem Pantoffel gleich, übrigens erinnert die Körperform lebhaft an *Chaetonotus hystrix.*

Am Kopf vermochte ich keine Vorsprünge wahrzunehmen was ich übrigens geneigt bin, der Konservierung zuzuschreiben. Der Hals ist wenig schmäler als der Kopf und die Grenze ist, vermöge der Vertiefung zwischen Hals und Rumpf, selbst bei der Seitenlage des Tierchens ersichtlich.

Der Rumpf ist gegen die Basis der Furkalanhänge etwas verengt und zwischen den Furkalanhängen ziemlich tief eingeschnitten; von der Seite gesehen erscheint derselbe übrigens stumpfbogig.

Der ganze Rücken ist, wie es mir gelang festzustellen, mit in 16—17 Längsreihen angeordneten Schuppen bedeckt. Die einzelnen Schuppen sind annähernd keilförmig, bzw. dreiflügelig, das vordere Ende ist gespitzt, das hintere Ende, welches gleichsam der Keilbasis entspricht, ist bogig ausgeschnitten, und demzufolge bilden die beiden hinteren Spitzen einen bogigen, spitzen Flügelfortsatz. Jede einzelne Schuppe liegt mit ihrem hinteren Flügelfortsatz auf den nächstfolgenden zwei Schuppen, und zwei benachbarte Schuppen bedecken in gewissem Grade den Endteil der zwischen und hinter ihnen liegenden Schuppen.

Auf jeder Schuppe erhebt sich je ein ästiger, dreikantiger Dorn, von welchen die am Kopfe stehenden weit kürzer sind, als die am Hals und Rumpf befindlichen, bzw. die Dornen werden vom Kopf an nach hinten allmählich länger, indes sind die nahe der Furkalanhänge ausgehenden von allen die längsten. Sämtliche Dornen entspringen nahe zum Hinterrand der Schuppe; ihre Basis zeigt drei Kämme, deren einer in der Mittellinie der Schuppe hinzieht und fast bis zur vorderen Spitze reicht; wogegen die beiden anderen auf den Flügelfortsätzen der hinteren Seite der Schuppe ruhen. Der Nebenast aller Dornen entspringt nicht nahe der distalen Spitze, sondern in der Mitte des Dorns, mithin sehr entfernt von der Endspitze.

Am Bauche vermochte ich die Anwesenheit von Schuppen nicht zu konstatieren. Von den langen Tastborstenbündeln der Bauchseite des Kopfes gelang es mir nur das eine Paar wahrzunehmen.

Die Furkalanhänge sind schwach sichelförmig gekrümmt, gegen das distale Ende sind sie allmählich verengt, und ihre Oberfläche ist glatt.

Die Mundröhre ist gut entwickelt, in ihrer Wandung zählte ich 18 Stäbchen. Der Schlund ist nach hinten allmählich verdickt, bildet aber keinen bemerkbaren Bulbus; seine Länge beträgt ungefähr $^3/_4$ der Magenlänge. Der Magen gleicht einem geraden, nach hinten verengten Schlauche.

Die Länge des Körpers beträgt ohne die Furkalanhänge 0,095 mm, die Länge der Furkalanhänge 0,02 mm, die Breite des

Kopfes 0,04 mm, die größte Breite des Rumpfes 0,05 mm, die Länge der Kopfdornen 0,003 mm, die der Halsdornen 0,004 bis 0,005 mm, die der Rumpfdornen 0,015—0,018 mm.

Fundorte: Cheltyge-nor; kleiner See bei der Mündung des Chatschim-Flusses; Mündung des Turuk-Flusses.

Durch die Form und Struktur der Schuppen gleicht diese Art den europäischen und noch mehr den paraguayischen Exemplaren *Chaetonotus hystrix* METSCH., unterscheidet sich jedoch von denselben dadurch, daß der Nebenast der großen Dornen nicht nahe der distalen Spitze, sondern in der Mitte entspringen, hauptsächlich aber durch die größere Anzahl der Dornenreihen, insofern *Chaetonotus hystrix* bloß neun Dornenreihen aufweist (vgl. C. ZELINKE 19, p. 325).

Class. ***Rotatoria.***

Ord. *Digononta.*

Fam. ***Philodinidae.***

38. *Philodina aculeata* EHRB.

Philodina aculeata HUDSON-GOSSE 7 p. 101, Taf. 9, Fig. 5.

Diese Art ist vermöge ihrer Dornen selbst in zusammengeschrumpftem Zustande leicht zu erkennen; ich habe sie aus dem Material von folgenden Fundorten verzeichnet: Mündung des Changa-Flusses; Mündung des Turuk-Flusses.

39. *Philodina roseola* EHRB.

Philodina roseola HUDSON-GOSSE 7 p. 99, Taf. 9, Fig. 4.

Ebenfalls eine Art, die selbst in konserviertem Zustande leicht zu erkennen ist, und zwar einerseits durch die rote Körperfarbe, andererseits an den längslaufenden Kutikularfalten. Ich habe sie bloß an einem Fundorte vorgefunden: kleiner See an der Mündung des Chatschim-Flusses.

40. *Rotifer vulgaris* EHRB.

Rotifer vulgaris HUDSON-GOSSE 7 p. 104, Taf. 10, Fig. 2.

Wahrscheinlich eine häufige Art; ich habe indessen nur in dem Material von den südlichen Ufern der Insel Dala-kuy Exemplare gefunden, die mit Sicherheit zu determinieren waren.

41. *Rotifer macrurus* EHRB.

Rotifer macrurus HUDSON-GOSSE 7 p. 107, Taf. 10, Fig. 4.

Infolge ihrer auffällig langgestreckten Füße und deren Fingerfortsätzen ist diese Art selbst in zusammengeschrumpftem Zustande leicht zu erkennen. Dieselbe war bisher außer Europa nur aus Süd- und Nordamerika bekannt, auf letzterem Gebiete habe ich sie an einem paraguayischen Fundorte angetroffen. Bei meinen derzeitigen Untersuchungen fand ich sie bloß in dem Material vom Cap Toilgot im Kossogol und Chorchoito-nor.

42. *Rotifer sp.*

Zahlreiche, mehr oder weniger zu Klumpen zusammengeschrumpfte Exemplare fand ich in dem Material von folgenden Fundorten: Pfütze im Tal des Turuk-Flusses; Vereinigungspunkt des Borsok-Sees und Kossogols; Mota-Bucht; westliches Ufer des Kossogol zwischen den Flüssen Chatschim und Djeglyk.

43. *Actinurus neptunius* EHRB.

Actinurus neptunius HUDSON-GOSSE 7 p. 108, Taf. 10, Fig. 6.

Diese Art ist zufolge ihres auffallend langen, dünnen und vielgliederigen Fußes, sowie ihrer auffällig langen Zehen auch in konserviertem Zustande unschwer zu erkennen. Fundorte: Pfütze im Tal des Turuk-Flusses; Chorchoito-nor.

Ord. ***Monogononta.***

Fam. ***Asplanchnidae.***

44. *Aplanchna Brightwellii* GOSSE.

Asplanchna Brightwellii HUDSON-GOSSE 7 p. 122, T. 12, Fig. 1.

Diese sehr häufige Art habe ich von folgenden Fundorten verzeichnet. Zwischen der Mündung des Than-Flusses und dem Cap Santa; südliches Ufer der Insel Dala-kuy; Angolheim-See; zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Mündung des Djeglyk-Flusses; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol; Chorchoito-nor.

Fam. *Melicertidae.*

45. *Melicerta ringens* EHRB.

Melicerta ringens HUDSON-GOSSE 7 p. 70, Taf. 5, Fig. 1.

Ich habe bloß charakteristische Fragmente des Gehäuses gefunden, und zwar in dem Material aus einer Pfütze im Tal des Turuk-Flusses.

Conochilus volvox Ehrb.

Conochilus volvox Hudson-Gosse 7 p. 89, Taf. 8, Fig. 3.

Verschiedene große Kolonien dieser Art waren ziemlich häufig in dem Material vom westlichen Ufer des Kossogol, zwischen dem Djeglyk und Chatschim.

Fam. *Flosculariidae.*

46. *Floscularia sp.?*

Ich fand bloß frei schwebende Exemplare, die ich aber wegen der eingezogenen Räderorgane nicht zu determinieren vermochte. Fundorte: Angolheim-See und zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees.

Fam. *Synchaetidae.*

47. *Synchaeta pectinata* Ehrb.

Synchaeta pectinata Hudson-Gosse 7 p. 125, Taf. 13, Fig. 3.

Diese gemeine Art habe ich in dem Material von folgenden Fundorten vorgefunden: Mündung des Changa-Flusses; zwischen der Mündung des Than-Flusses und Cap Santa; Kossogol beim Cap Santa; erster kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; zwischen dem westlichen Ufer des Kossogol und der Insel Ajagam-maranaibulun; Mündnng des Flusses Tochomyk, Mündung des Flusses Turuk; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol; Cap Motabulun.

48. *Synchaeta tremula* Ehrb.

Synchaeta tremula Hudson-Gosse 7 p. 128, Taf. 13, Fig. 2.

Diese Art ist nicht so häufig, wie vorige, ich habe sie bloß von folgenden Fundorten verzeichnet: Mündung des Flusses Changa; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Angolheim-See; zwischen dem westlichen Ufer des Kossogol und der Insel Chubtu-nor.

Fam. ***Ploesomidae.***

49. *Ploesoma sibirica* Dad

Ploesoma sibirica E. v. Daday 3 p. 453, Taf. 24, Fig. 1—4.

Einige Exemplare fand ich in dem Material von folgenden Fundorten: Angolheim-See; zweiter kleiner See nördlich des

Angolheim-Sees; zwischen dem westlichen Ufer des Kossogol und der Insel. Bisher als speziell asiatische Art zu betrachten, bisher bloß von Baltim in Sibirien bekannt.

Fam. ***Notommatidae.***

50. *Furcularia forficula* EHRB.

Furcularia forficula HUDSON-GOSSE 7 II, p. 41, Taf. 20, Fig. 1.

Diese Art ist vermöge ihrer eigentümlichen Zehen leicht zu erkennen; ich habe sie bei meinen derzeitigen Untersuchungen von folgenden Fundorten verzeichnet: Mündung des Flusses Djeglyk; Fluß Morin-Tuskul, aber an keinem Orte häufig.

51. *Furcularia gibba* EHRB.

Furcularia gibba HUDSON-GOSSE 7 Taf. 2, p. 43, Taf. 19, Fig. 13.

Scheint häufiger zu sein als vorige Art; ich habe sie von folgenden Fundorten verzeichnet: Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Mündung des Flusses Tochomyk; Pfütze im Tale des Flusses Turuk; Verbindungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol.

52. *Diglena catellina* EHRB.

Diglena catellina HUDSON-GOSSE 7 T. 2, p. 58, Taf. 19, Fig. 10.

Diese Art ist, mit Ausnahme von Afrika, aus allen Weltteilen bekannt; ich habe sie in dem Material von folgenden Fundorten angetroffen: Mündung des Flusses Changa; Chubtunor; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogols.

53. *Diglena grandis* EHRB.

Diglena grandis HUDSON-GOSSE 7 T. 2, p. 48, Taf. 19, Fig. 6.

Scheint seltener zu sein, als vorige Art, insofern ich nur einige Exemplare in dem Material von der Mündung des Flusses Changa gefunden habe.

Fam. ***Rattulidae.***

54. *Mastigocerca carinata* EHRB.

Mastigocerca carinata HUDSON-GOSSE 7 T. 2, p. 60, Taf. 20, Fig. 7.

Diese Art besitzt eine ziemlich allgemeine geographische Verbreitung, insofern sie bisher bloß aus Afrika noch nicht bekannt ist. Ich habe sie bei meinen derzeitigen Untersuchungen an folgenden Fundorten angetroffen: Mündung des Flusses Changa; Mündung des Flusses Djeglyk; Mündung des Flusses Turuk;

Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol; Chorchoito-nor.

55. *Mastigocerca cornuta* EYF.

Mastigocerca cornuta HUDSON-GOSSE 7 Suppl. p. 35, Taf. 33, Fig. 21.

Ebenso häufig wie vorige Art. Fundort: Mündung des Flusses Changa; Angolheim-See; Mündung des Flusses Turuk; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol; Chorchoito-nor.

56. *Mastigocerca elongata* GOSSE.

Mastigocerca elongata HUDSON-GOSSE 7 T. 2, p. 61, Taf. 20, Fig. 5.

Ich fand diese Art in Gesellschaft der beiden vorherigen an folgenden Fundorten: Mündung des Flusses Changa; Chorchoito-nor; kleiner See an der Mündung des Flusses Chatschim.

57. *Mastigocerca scipio* GOSSE.

Mastigocerca scipio HUDSON-GOSSE 7 T. 2, p. 61, Taf. 20, Fig. 11.

Ich habe diese Art von folgenden zwei Fundorten verzeichnet: Mündung des Flusses Changa; Gytschygenty-nor; an beiden Stellen selten.

58. *Mastigocerca rattus* EHRB.

Mastigocerca rattus HUDSON-GOSSE 7 T. 2, p. 62, Taf. 20, Fig. 9.

Diese Art ist mir nur an einem Fundorte vorgekommen, d. i. an der Mündung des Flusses Changa.

59. *Rattulus tigris* (EHRB.).

Rattulus tigris HUDSON-GOSSE 7 T. 2, p. 65, Taf. 20, Fig. 13.

Eine häufige Art, die ich in dem Material von folgenden Fundorten vorgefunden habe: Mündung des Flusses Changa; Sumpf an der Mündung des Flusses Changa; Gytschygenty-nor; Vereinigungsstelle des Borok-Sees und Kossogols; Chorchoito-nor.

Fam. ***Anuraeidae.***

60. *Anuraea aculeata* EHRB.

Anuraea aculeata HUDSON-GOSSE 7 T. 2, p. 123, Taf. 29, Fig. 4.

Eine der weitverbreitetsten Arten dieser Gattung, die in der ganzen Mongolei sehr gemein ist. Fundorte: Mündung des Flusses Changa; zwischen der Mündung des Flusses Than und Cap Santa (viele); südliches Ufer der Insel Dala-kuy; im Sand der littoralen Zone des Kossogol (wenig); Kossogol beim Cap Santa (viel); Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Angolheim-See; erster kleiner See nördlich des Angolheim-Sees (viel); zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; 200 m südlich von der Insel Dala-kuy; zwischen dem westlichen Ufer des Kossogol und der Insel Chubtu-nor; Gytschygenty-nor; Cheltyge-nor; Ajagam-maranai-bulun; Mündung des Flusses Djeglyk; Bucht im Tal des Flusses Chatschim; Chatschim-nor; Fluß Morin-Tuskul; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol; Bulunai, Quellen; Chorchoito-nor: westliches Ufer des Kossogol zwischen den Flüssen Djeglyk und Chatschim; Cap Motta-bulun.

61. *Anuraea cochlearis* Gosse.

Anuraea cochlearis Hudson-Gosse 7 T. 2, p. 124, Taf. 29, Fig. 7.

Ebenso häufig, wie die vorige Art; ich habe sie an folgenden Fundorten angetroffen: Mündung des Flusses Changa; zwischen dem Fluß Changa und Cap Santa; zwischen der Mündung des Flusses Than und dem Cap Santa (wenig); südliches Ufer der Insel Dala-kuy; im Sand der littoralen Zone des Kossogol (wenig); Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Angolheim-See (viel); erster kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; zwischen dem westlichen Ufer des Kossogol und der Insel; Chubtu-nor; Gytschygenty-nor; Mündung des Flusses Djeglyk; kleiner See an der Mündung des Chatschim; Bucht im Tal des Flusses Chatschim; Chatschim-nor; Mündung des Flusses Tochomyk; Mündung des Flusses Turuk; Fluß Morin-Tuskul; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol; Chorchoito-nor; Cap Motta-bulun.

62. *Anuraea accuminata* Ehrb.

Fig. 2 *a*, *b*.

Notholca acuminata Hudson-Gosse 7 T. 2, p. 125, Taf. 29, Fig. 3.

Diese Art war bisher bloß aus Europa bekannt, ist aber auch da nicht häufig. Bei meinen Untersuchungen habe ich sie öfters angetroffen, und zwar in dem Material von folgenden Fundorten:

Mündung des Flusses Changa; Mündung des Flusses Djeglyk; Mündung des Flusses Turuk; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol.

Unter den mir vorliegenden Exemplaren fand ich zwar auch solche, die mit den typischen europäischen Exemplaren in jeder Hinsicht übereinstimmten (Fig. 2*a*), in überwiegender Anzahl aber untersuchte ich Exemplare, die in der Struktur des Stirnrandes der Schale von den typischen europäischen abgewichen sind. Während nämlich an den typischen europäischen Exemplaren am Stirnrand der Schale sechs Dornen aufragen, die paarweise verschieden lang sind, tragen die untersuchten Exemplare größtenteils am Stirnrand bloß vier Dornfortsätze, die gleich lang sind. Die Verschiedenheit in der Anzahl der Dornfortsätze wird dadurch verursacht, daß die zwei mittleren Dornen vollständig fehlen (Fig. 2*b*). Außerdem sind die untersuchten Exemplare insgesamt länger und schlanker als die europäischen, der hintere Schalenfortsatz ist dünner und spitz gerandet; die Oberfläche der Schale ist ziemlich eng liniert, der Rücken gleichmäßig gewölbt, der Bauch unter dem Ovarium schwach vorstehend. Die ganze Länge schwankt zwischen 0,16—0,2 mm, der größte Durchmesser beträgt 0,06 mm.

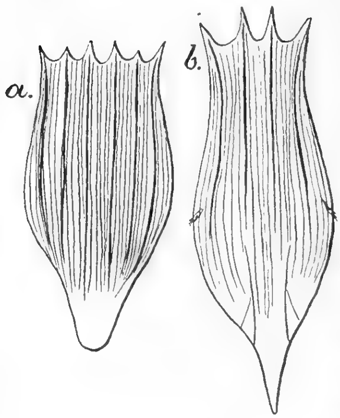


Fig. 2.

63. *Anuraea foliacea* Ehrb.

Notholca foliacea E. F. Weber **21** p. 725, Taf. 25, Fig. 19—21.

Eine der interessantesten Arten der Gattung, die mit der Struktur der Schale die Merkmale der Gattungen *Anuraea* und *Notholca* in sich vereinigt, d. i. dokumentiert, daß das neuere Genus *Notholca* ganz überflüssig ist. Es lagen mir zahlreiche Exemplare von folgenden Fundorten vor: Mündung des Flusses Changa; Kossogol bei Cap Santa; Gytschygenty-nor; Mündung des Flusses Tochomyk; Fluß Morin-Tuskul; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol. Bisher bloß aus Europa bekannt.

Hinsichtlich der Schalenform erinnern die untersuchten Exemplare von oben gesehen an *Anuraea cochlearis*, sind aber etwas länger und ihr hinterer Dornfortsatz kürzer. In dieser Hinsicht unterscheiden sich dieselben daher sowohl von den durch HUDSON-GOSSE, als auch von den durch E. F. WEBER abgebildeten Exemplaren, deren Schale nach hinten allmählich verengt ist und ohne scharfe Grenze in den hinteren Dornfortsatz übergeht. In der Seitenlage aber zeigt die Schale dieselbe Struktur wie C. F. WEBERS abgebildete Exemplare. Was die Struktur der Schale betrifft, finde ich es für sehr bemerkenswert, daß ihre Oberfläche nicht nur Längslinien, sondern auch Punkte (Warzen?) aufweist, besonders nahe des Stirnrandes, sowie daß einzelne Längslinien durch ihre Stärke auffallen und einige in der Weise verlaufen, daß sie Felderchen zu bilden scheinen. Und eben deshalb halte ich diese Art für eine Übergangsform zwischen den Gattungen *Anuraea* und *Notholca*, und aus diesem Grunde ziehe ich die Gattung *Notholca* ein, die sich von der alten Gattung *Anuraea* nur dadurch unterscheidet, daß ihre Schale liniiert ist, dagegen keine Felderchen und Warzen aufweist.

64. *Anuraea clypeus* DAD.

Fig. 3.

Anuraea clypeus DADAY J. *4a*, p. 57.

Die Schale ist schildförmig, und diesem Umstande verdankt die Art auch ihren Namen. Nach hinten ist sie allmählich verengt, die Seiten schwach bogig, die Seitenränder biegen sich gegen den Bauch, den sie auf schmalem Gebiet der ganzen Länge nach bedecken; das hintere Ende ist ziemlich spitz gerundet (Fig. 3). Am oberen Stirnrande erheben sich sechs Dornfortsätze, die fast gleichhoch sind und fast gleichweit voneinander stehen, übrigens sind sie insgesamt relativ kurz und breit. Der untere Stirnrand ist in der Mitte tief ausgebuchtet, an beiden Seiten der Bucht bildet der Rand je einen kleinen äußeren und je einer größeren inneren gerundeten Höcker (Fig. 3). Auf der ganzen Oberfläche der Schale ziehen feine Längslinien hin.

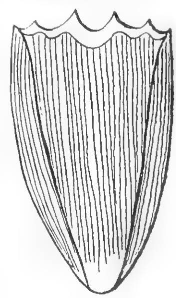


Fig. 3.

Die ganze Länge der Schale beträgt 0,13 mm, ihr größter Durchmesser 0,068 mm.

Bezüglich der Struktur der inneren Organe weist diese Art nicht wesentliche Abweichungen von den übrigen Arten der Gattung auf.

Fundorté: Mündung des Flusses Changa; zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol.

Die neue Art steht der *Anuraea (Notholca) jugosa* GOSSE am nächsten, unterscheidet sich jedoch von derselben außer durch die Form der Schale hauptsächlich dadurch, daß die Seitenränder gegen den Bauch gebogen sind; zudem ist *Anuraea jugosa* ein Seetier, welches GOSSE bei Kopenhagen gefunden hat.

65. *Anuraea labis* GOSSE.

Fig. 4.

Notholca labis HUDSON-GOSSE 7 Suppl., p. 57, Taf. 31, Fig. 56.

Diese Art war bisher bloß aus Europa bekannt, ist aber auch hier nicht häufig. Ich habe sie bei meinen Untersuchungen an mehreren Fundorten angetroffen, und zwar: Mündung des Flusses Changa; Kossogol bei Cap Santa; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Mündung des Flusses Turuk; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol.

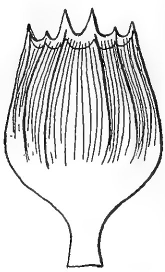


Fig. 4.

Die untersuchten Exemplare stimmen hinsichtlich des hinteren Schalenfortsatzes in hohem Grade mit den Exemplaren von GOSSE überein und weichen in demselben Maße von denjenigen von E. F. WEBER ab. Die ganze Länge der Schale beträgt 0,15 bis 0,18 mm. Ebenso stimmen sie noch bezüglich der Schale mit den Exemplaren von GOSSE überein (Fig. 4).

66. *Anuraea longispina* KELL.

Notholea longispina HUDSON-GOSSE 7 T. 2, p. 125, Taf. 28, Fig. 6.

Diese Art ist als ständige Form des Limno- und Potamoplanktons zu betrachten; hierfür spricht der Umstand, daß sie fast an sämtlichen Fundorten vorkommt. Fundorte sind: Mündung des Changa-Flusses; zwischen dem Flusse Changa und Cap

Santa; zwischen der Mündung des Flusses Than und Cap Santa; Südufer der Insel Dala-kuy; Sand der littoralen Zone des Kossogol; Kossogol bei Cap Santa; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Kossogol bei Cap Toilgot; Angolheim-See; zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; 200 m südlich der Insel Dala-kuy; zwischen dem westlichen Ufer des Kossogol und der Insel Cheltyge-nor; Mündung des Flusses Djeglyk; kleiner See an der Mündung des Flusses Turuk; Fluß Morin-Tuskul; Vereinigungspunkt des Borsok-Sees und des Kossogol; Bulunai-Quellen; westliches Ufer des Kossogol zwischen den Flüssen Djeglyk und Chatschim; Cap Mota-bulun.

67. *Anuraea striata* (O. F. M.).
Fig. 5.

Notholca striata E. F. WEBER **21** p. 720, Taf. 25, Fig. 16—18.

Es liegen mir zahlreiche Exemplare vor, die nur in unwesentlichen Merkmalen von den HUDSON-GOSSEschen Exemplaren abweichen, und zwar ist die Schale vorne schmäler als hinten und von den oberen Steinfortsätzen sind die mittleren auffällig kürzer als die übrigen (Fig. 5). Hinsichtlich der Schalenform und der Struktur des unteren Stirnrandes stimmen meine Exemplare mehr mit den von E. F. WEBER überein (vgl. E. F. WEBER **21** Taf. 25, Fig. 16). Die ganze Länge der Schale schwankt zwischen 0,15 bis 0,19 mm.

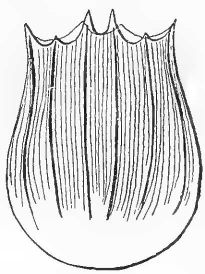


Fig. 5.

Fundorte: Mündung des Flusses Changa (viel); Kossogol, Sand der littoralen Zone (wenig); Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Angolheim-See (viel); Chubtu-nor; Mündung des Flusses Djeglyk; kleiner See an der Mündung des Flusses Chatschim; Mündung des Flusses Tochomyk; Mündung des Flusses Turuk; Vereinigungspunkt des Borsok-Sees und des Kossogol; Fluß Malyi Gumnuk; Kiren-nor; Chorchoito-nor; Cap Motta-bulun.

68. *Anuraea angulata* DAD.
Fig. 6.

Anuraea angulata DADAY J. 4*a*, p. 57.

Die Schale gleicht einigermaßen einem Schlauch, das vordere und hintere Ende ist schmäler als die Mitte. Am oberen Stirnrand erheben sich in fast gleicher Entfernung voneinander sechs fast gleichlange Dornfortsätze; der untere Stirnrand ist, insofern es mir gelang festzustellen, wellig, und zeigen sich daran sechs kleine Vorsprünge. Die Seitenlinien der Schale laufen von der Stirn fast bis zu der Mitte der Schale, bzw. etwas darüber hinaus, schräg nach außen und hinten, bilden dann eine spitze Ecke, jenseits welcher sie nach hinten und innen verlaufen. Vor und hinter den Ecken sind die Seitenlinien indessen nicht gerade, sondern mehr oder weniger bogig (Fig. 6). Am hinteren Schalenende geht in der Mitte ein kurzer, ziemlich breiter Dornfortsatz aus, gleichwie bei *Anuraea labis* GOSSE.

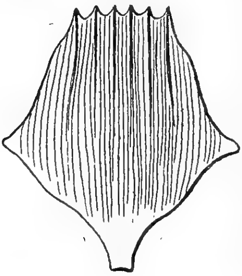


Fig. 6.

An der ganzen Schalenoberfläche erheben sich ziemlich gedrängt stehende Längslinien, worunter die von den Stirnfortsätzen entspringenden am schärfsten sind.

Die ganze Länge der Schale beträgt 0,3 mm; ihre größte Breite 0,25 mm.

Fundort: Mündung des Flusses Changan, aber auch hier nicht häufig, insofern ich bloß zwei Exemplare zu Gesicht bekam.

Diese Art ist von den übrigen der Gattung durch die Form und Struktur der Schale leicht zu unterscheiden. Übrigens steht sie der *Anuraea labis* GOSSE am nächsten.

Fam. ***Dinocharidae.***

69. *Dinocharis pocillum* EHRB.

Dinocharis pocillum HUDSON-GOSSE 7 T. 2, p. 71, Taf. 21, Fig. 1.

Gehört zu der häufigeren Arten, insofern ich sie in dem Material von folgenden Fundorten vorgefunden habe: Mündung des Flusses Changa; Angolheim-See; Gytschygenti-nor; Mündung des Flusses Djeglyk; kleiner See an der Mündung des Flusses Chatschim; Chorchoito-nor.

70. *Scaridium longicaudum* EHRB.

Scaridium longicaudum HUDSON-GOSSE 7 p. 73, Taf. 21, Fig. 5.

Diese Art ist weit seltener als vorige; ich habe sie nur von folgenden zwei Fundorten verzeichnet: Mündung des Flusses Djeglyk; Mündung des Flusses Turuk.

Fam. ***Salpinidae.***

71. *Salpina brevispina* EHRB.

Salpina brevispina HUDSON-GOSSE 7 T. 2, p. 84, Taf. 22, Fig. 4.

Ziemlich häufige Art. Fundorte: Mündung des Flusses Changa; Pfütze an der Mündung des Flusses Changa; Angolheim-See; Gytschygenty-nor; Mündung des Flusses Turuk.

72. *Salpina spinigera* EHRB.

Salpina spinigera HUDSON-GOSSE 7 T. 2 p. 2, p. 86, Taf. 22, Fig. 2.

Diese Art scheint seltener zu sein als vorige; ich habe sie an folgenden Fundorten angetroffen: Mündung des Flusses Changa; Angolheim-See; Mündung des Flusses Tochomyk; Cap Mottabulun.

Fam. ***Euchlanidae.***

73. *Euchlanis dilatata* EHRB.

Euchlanis dilatata HUDSON-GOSSE 7 T. 2, p. 90, Taf. 23, Fig. 5.

Eine gemeine Art, die ich von folgenden Fundorten verzeichnet habe: Mündung des Flusses Changa; Südufer der Insel Dalakuy; Angolheim-See; erster kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Chubtu-nor; Mündung des Flusses Djeglyk; kleiner See an der Mündung des Flusses Chatschim; Mündung des Flusses Turuk; Vereinigungspunkt des Borsok-Sees und des Kossogol; Chorchoito-nor.

74. *Euchlanis triquetra* EHRB.

Euchlanis triquetra HUDSON-GOSSE 7 Suppl., p. 91, Taf. 31, Fig. 38.

Weit seltener als vorige Art; ich habe sie nur an zwei Fundorten vorgefunden: Pfütze im Tal des Flusses Turuk und Chorchoito-nor.

Fam. ***Cathypnidae.***

75. *Cathypna diomis* GOSSE.

Cathypna diomis HUDSON-GOSSE 7 Suppl., p. 41, Taf. 31, Fig. 38.

Ich fand diese Art nur in dem Material von der Mündung des Flusses Changa.

76. *Cathypna luna* Ehrb.

Cathypna luna Hudson-Gosse 7 T. 2, p. 94, Taf. 24, Fig. 4.

Diese Art zählt zu den häufigeren; ich habe sie von folgenden Fundorten verzeichnet: Mündung des Flusses Changa; zwischen dem Fluß Changa und Cap Santa; Angolheim-See; Gytschygenty-nor (viel); Ajagam-maranai-bulun; kleiner See an der Mündung des Flusses Chatschim; Bucht im Tal des Flusses Chatschim; Mündung des Flusses Tochomyk.

77. *Monostyla lunaris* Ehrb.

Monostyla lunaris Hudson-Gosse 7 T. 2 p. 98, Taf. 25, Fig. 2.

Gemeine Art. Fundorte: Mündung des Flusses Changa; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Angolheim-See; Gytschygenty-nor; Mündung des Flusses Djeglyk; Fluß Noin-gol; kleiner See an der Mündung des Flusses Chatschim; Fluß Morin-Tuskul; Chorchoito-nor.

78. *Monostyla quadridentata* Ehrb.

Monostyla quadridentata Hudson-Gosse 7 T. 2: p. 100, Taf. 20. Fig. 3.

Weit seltener als vorige Art, insofern ich sie bloß an folfolgenden zwei Fundorten aufgefunden habe: Ufer der Halbinsel Dolon-ula und Mündung des Flusses Djeglyk.

Fam. ***Coluridae.***

79. *Colurus bicuspidatus* Ehrb.

Colurus bicuspidatus Hudson-Gosse 7 T. 2, p. 102, Taf. 26, Fig. 2.

Bei meinen Untersuchungen habe ich diese Art nur von zwei Fundorten verzeichnet, und zwar Mündung des Flusses Changa und Mündung des Flusses Turuk.

80. *Colurus deflexus* Ehrb.

Colurus deflexus Hudson-Gosse 7 T. 2, p. 102, Taf. 26, Fig. 1.

Auch diese Art ist nicht häufig, denn ich fand sie bloß an zwei Fundorten, und żwar Vereinigungspunkt des Borsok-Sees und des Kossogol und Chorchoito-nor.

81. *Colurus uncinatus* Ehrb.

Colurus uncinatus C. G. Ehrenberg **5** p. 495, Taf. 59, Fig. 6.

Eine seltene Art, die ich in Gemeinschaft mit der vorigen, aber nur in dem Material aus dem Chorchoito-nor zu Gesicht bekam.

Fam. ***Lepadellidae.***

82. *Metopidia lepadella* Ehrb.

Metopidia lepadella Hudson-Gosse **7** T. 2, p. 106, Taf. 26, Fig. 6.

Einige Exemplare dieser Art fand ich in dem Material von zwei Fundorten, d. i. Angolheim-See und Fluß Noin-gol.

83. *Metopidia acuminata* Ehrb.

Metopidia acuminata Hudson-Gosse **7** T. 2, p. 107, Taf. 25, Fig. 9.

Vermöge der eiförmigen, hinten zugespitzten Schale ist diese Art von den übrigen dieser Gattung leicht zu unterscheiden.

Fundorte: Mündung des Flusses Changa; Vereinigungspunkt des Borsok-Sees und Kossogols; Borsok-See; Chorchoito-nor.

84. *Lepadella ovalis* Ehrb.

Lepadella ovalis C. G. Ehrenberg **5** p. 457, Taf. 57, Fig. 1.

Eine der gemeineren Arten, die ich von folgenden Fundorten verzeichnet habe: Mündung des Flusses Changa; Gytschy-genty-nor; Cheltyge-nor; Mündung des Flusses Djeglyk; Mündung des Flusses Turuk; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol; Fluß Malyi-Gumnuk; Chorchoito-nor.

Fam. *Pterodinidae.*

85. *Pterodina ellyptica* Ehrb.

Pterodina ellyptica C. G. Ehrenberg **5** p. 510, Taf. 64, Fig. 5.

Eine der seltensten Arten dieser Gattung, die ich bisher allein oder in Gemeinschaft mit der nachstehenden Art gefunden habe. Fundort: Mündung des Flusses Changa; Kossogol, Sand der littoralen Zone; Angolheim-See; zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees.

86. *Pterodina patina* Ehrb.

Pterodina patina Hudson-Gosse **7** T. 2, p. 112, Taf. 26, Fig. 2.

Häufiger als vorige Art. Ich habe sie von folgenden Fundorten verzeichnet: Mündung des Flusses Changa; Angolheim-See; Cheltyge-nor; Mündung des Flusses Djeglyk; Mündung des Flusses Turuk; Chorchoito-nor.

Fam. *Brachionidae.*

87. *Brachionus rubens* EHRB.

Brachionus rubens HUDSON-GOSSE 7 T. 2, p. 119, Taf. 27, Fig. 5.

Ich habe diese Art nur einmal angetroffen, und zwar in dem Material aus dem Chorchoito-nor, allein auch hier war sie nicht häufig.

Fam. ***Triarthridae.***

88. *Triarthra longiseta* EHRB.

Triarthra longiseta HUDSON-GOSSE 7 T. 2, p. 6, Taf. 10, Fig. 6.

Eine der allerhäufigsten Arten, die ich in dem Material von folgenden Fundorten angetroffen habe: Mündung des Flusses Changa; Mündung des Flusses Than; Kossogol, Sand der littoralen Zone; Kossogol bei Cap Santa; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; erster und zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; 200 m südlich der Insel Dala-kuy; zwischen dem Westufer des Kossogol und der Insel Cheltyge-nor; Mündung des Flusses Djeglyk; Chatsim-nor; Mündung des Flusses Tochomyk; Fluß Morin-Tuskul; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol; Bulunai, Quellen; Chorchoito-nor; Bucht Mota; westliches Ufer des Kossogol, zwischen den Flüssen Djeglyk und Chatschim; Cap Motta-bulun.

89. *Polyarthra platyptera* EHRB.

Polyarthra platyptera HUDSON-GOSSE 7 T. 2, p. 3, Taf. 13, Fig. 5.

Ebenso häufig wie vorige Art und in Gesellschaft derselben vorkommend, wie dies auch aus den folgenden Fundorten hervorgeht: Mündung des Flusses Changa; zwischen der Mündung des Flusses Than und Cap Santa; südliches Ufer der Insel Dala-kuy; Kossogol, beim Cap Santa; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Angolheim-See, erster und zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; 200 m südlich der Insel Dala-kuy; zwischen dem westlichen Ufer des Kossogol und der Insel; Chubtu-nor; Ajagam-maranai-bulun; Mündung des Flusses Djeglyk; kleiner See an der Mündung des Flusses Chatschim; Bucht im Tal des Flusses Chatschim; Chatsim-nor; Mündung des Flusses Turuk; Fluß Morin-Tuskul; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol; Chorchoito-nor; Cap Motta-bulun.

IV. *Arthropoda.*

Class. *Crustacea.*

Ord. *Copepoda.*

Aus der Fauna von Mongolien hat den ersten *Copedoden* (Diaptomus Chaffanjoni RICH.) J. RICHARD im Jahre 1897 beschrieben (15); E. v. DADAY hat 1901 gleichfalls eine Art (*Diaptomus asiaticus* ULLJ. (**3.**)) verzeichnet; die ausgiebigsten Daten aber hat G. O. SARS 1903 publiziert (17), insofern er von verschiedenen Fundorten zusammen neun Arten der Familien *Cyclopidae* und *Centropagidae* numerierte und zwar folgende Arten: *Cyclops strenuus* FISCH., *C. viridis* (JUR.), *C. serrulatus* FISCH., *C. vicinus* ULLJ., *Diaptomus bacillifer* KOELB., *D. incrassatus* SARS, *D. Wierzejskyi* R., *Hemidiaptomus Ignatowi* SARS und *Boeckella orientalis* SARS. In dem mir vorliegenden Material ist es mir gelungen, nicht nur einige Repräsentanten obiger zwei Familien, sondern noch einige Arten der Familie *Harpacticidae* aufzufinden, wie aus nachstehenden Daten hervorgeht.

Fam. *Cyclopidae.*

90. *Cyclops serrulatus* FISCH.

Cyclops serrulatus O. SCHMEIL **18** p. 141, Taf. 5, Fig. 6—14.

Sehr gemeine Art, die ich von folgenden Fundorten zu verzeichnen Gelegenheit hatte: Mündung des Flusses Changa; Angolheim-See; erster kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Cheltyge-nor; Ajagam-maranai-bulun; Mündung des Flusses Djeglyk; kleiner See an der Mündung des Flusses Chatschim; Mündung des Flusses Turuk; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol; Borsok-See; Chorchoïto-nor. G. O. SARS hat diese Art aus Mongolien bereits von dem Fundort Barolduschly, 20 Werst nördlich vom Luch-sume aufgezeichnet.

91. *Cyclops albidus* (JUR.).

Cyclops albidus O. SCHMEIL **18** p. 128, Taf. 1, Fig 8—14.

Ich fand bloß einmal einige Exemplare dieser Art, und zwar in dem Material von der Mündung des Flusses Changa. Aus Mongolien bisher unbekannt.

92. *Cyclops fuscus* (JUR.).

Cyclops fuscus O. SCHMEIL **18** p. 223, Taf. 1, Fig. 1—7.

Diese kosmopolitische Art ist bisher aus Mongolien noch nicht verzeichnet gewesen. Bei meinen Untersuchungen habe ich sie an folgenden zwei Fundorten in einigen Exemplaren angetroffen: Angolheim-See; Fluß Mota.

93. *Cyclops gracilis* LILLJ.

Cyclops gracilis O. SCHMEIL **18** p. 110, Taf. 6, Fig. 14—16.

Eine seltenere Art, die aus Mongolien bisher gleichfalls noch unbekannt war; bei meinen Untersuchungen habe ich bloß einige Exemplare derselben in dem Material von Kiren-nor vorgefunden.

94. *Cyclops strenuus* FISCH.

Cyclops strenuus O SCHMEIL **18** p. 39, Taf. 2, Fig. 12—15.

Eine der häufigeren, die aus Mongolien bereits von G. O. SARS von Pajlur, 88 Werst nördlich von Gudjur-sume verzeichnet worden ist. Ich habe sie an folgenden Fundorten angetroffen: Mündung des Flusses Changa; Pfütze an der Mündung des Flusses Changa; Kossogol bei Cap Santa; erster kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Cheltyge-nor; Ajagam-maranai-bulun; kleiner See an der Mündung des Flusses Chatschim; Mündung des Flusses Turuk; Chorchoito-nor.

95. *Cyclops vicinus* ULLJ.

Cyclops vicinus G. O. SARS **17** p. 216; Taf. 15, Fig. 2.

Eine der gemeinsten Arten, die ich in dem Material von folgenden Fundorten vorfand: Mündung des Flusses Changa; zwischen dem Fluß Changa und Cap Santa; zwischen der Mündung des Flusses Than und Cap Santa; südliche Ufer der Insel Dala-kuy; Kossogol bei Cap Santa; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Kossogol bei Cap Toilgot; erster kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; 200 m nördlich der Halbinsel Dala-kuy; zwischen dem westlichen Ufer des Kossogol und der Insel; Bucht im Tal des Flusses Chatrim; Mündung des Flusses Tochomyk; Mündung des Flusses Turuk; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol; Bucht Mota; westliches Ufer des Kossogol; zwischen den Flüssen Djeglyk und Chatschim; Cap Motta-bulum.

G. O. SARS verzeichnet diese Art von zwei Fundorten und bemerkt, daß sie im Dalaj-nor gemein sei.

Die mir vorliegenden Exemplare stimmen mit den von G. O. SARS beschriebenen vollständig überein. Die zentrale Partie des Receptaculum seminis ist in zwei Teile geteilt, der kleinere Teil ist halbmondförmig, der größere schlauchförmig.

Fam. *Harpacticidae.*

96. *Canthocamptus northumbricus* BRADY, var. *coronatus* n. var.

Fig. 7 *a—d.* DADAY J. 4 *a*, p. 58.

Ich fand sowohl junge als auch geschlechtsreife Exemplare. Die letzteren stimmen hinsichtlich der Gliederung des Körpers und der Struktur der Kutikula der Segmente vollständig überein mit den von O. SCHMEIL beschriebenen europäischen Exemplaren. Bei den jungen Exemplaren sind die ersten zwei Segmente des Abdomens gut abgesondert, wogegen die letzten zwei noch miteinander verschmolzen sind, und die Grenze zwischen beiden wird nur durch einen Dornring bezeichnet.

Beide Furkalanhänge sind relativ lang, fast so lang, wie das letzte Abdominalsegment, gegen das Ende verengt, die Bauchseite ist glatt, in der Mittellinie der Rückenseite erheben sich zwei Kutikularhöcker, wovon der proximale die Rückenborste trägt, wogegen der distale einem breiten, kurzen Kegel gleicht (Fig. 7 *a*); im proximalen Drittel des Außenrandes erheben sich nahe beieinander eine kürzere und eine längere Borste, in der Mitte aber eine längere Borste. Die Basis der Endborsten ist von einem Kranz winziger Dornen umgeben (Fig. 7 *a*).

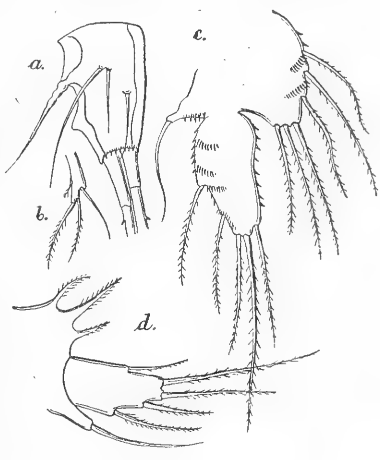


Fig. 7.

Die erste Antenne der geschlechtsreifen Exemplare ist achtgliederig, die der jungen aber ist bloß aus sechs Gliedern zusammengesetzt; im übrigen ist sie derjenigen der europäischen Stammform gleich.

Der äußere Ast der zweiten Antenne ist ungegliedert, im distalen Drittel des Außenrandes sowie an der Spitze und nahe derselben erhebt sich je eine kräftige Borste, am Innenrand aber eine kurze, dünne Borste, ist sonach mit insgesamt vier Borsten bewehrt (Fig. 7*b*). Am inneren Ast ist der Außenrand der zwei letzten Glieder mit winzigen Dornen bedeckt, unter welchem am letzten Glied zwei kräftige lange Dornen aufragen.

Die Füße gleichen in jeder Hinsicht jenen der europäischen Stammform, die inneren Fußäste indessen erschienen etwas länger.

Der fünfte Fuß der geschlechtsreifen Exemplare stimmt mit dem der europäischen Stammform vollständig überein (Fig. 7*c*). Bei jungen Exemplaren ist der äußere Ast des fünften Fußes etwas kürzer und anders als bei den geschlechtsreifen. Zahl und Anordnung der Borsten aber ist dieselbe; der innere Ast weist bereits eine augenfällige Verschiedenheit auf, insofern derselbe bloß mit drei Borsten bewehrt ist, die kurz, mehr dornförmig sind (Fig. 7*d*).

Die Körperlänge der entwickelten Exemplare beträgt ohne die Furkalborsten 0,75 mm.

Fundorte: Cheltyge-nor und die Bucht Mota.

Die mir vorliegenden geschlechtsreifen Exemplare weichen nur durch die Struktur der Furkalanhänge von der europäischen Stammform ab, die Abweichung ist indessen so auffällig, daß ich es auf Grund dessen für motiviert hielt, diese Form als Varietät zu bezeichnen.

97. *Canthocamptus insignipes* LILLJ.

Canthocamptus insignipes W. LILLJEBORG **13** p. 53, T. 4, p. 1—5.

Bei meinen Untersuchungen habe ich bloß ein einziges Männchen dieser Art in dem Material aus dem Kiren-nor gefunden. Nachstehend gebe ich die Beschreibung desselben.

Das erste Rumpfsegment setzt sich in einem breiten, kurzen Rüssel fort, ist so lang wie die nächstfolgenden vier zusammen, die hinteren Seitenwinkel sind gerundet, der Hinterrand glatt, in seiner Nähe erhebt sich eine Reihe von Dornen. Die nächstfolgenden vier Rumpfsegmente sind fast gleich lang, ihr Hinterrand ist ungezähnt, in der Nähe desselben aber erhebt sich eine bogige Reihe von Dornen, die einen Halbring bilden.

Das Abdomen ist kürzer als der Rumpf, der Hinterrand der ersten vier Segmente ist glatt, allein vor demselben erheben sich sowohl am Bauch und Rücken, als auch an beiden Seiten Dornen, die einen ganzen Ring bilden. Am Rücken des ersten und zweiten Segments zeigt sich vor dem vollständigen Ring auch ein fernerer Halbring.

Der Hinterrand des letzten Abdominalsegmentes ist gleichfalls mit Dornen umgürtelt, die auch die Basis der Furkalanhänge umgeben. Außerdem erhebt sich an der Bauchseite des letzten Abdominalsegmentes nahe zur Basis der Furkalanhänge beiderseits je ein kleiner Kutikularhöcker.

Beide Furkalanhänge sind gegen das distale Ende verschmälert, sie sind länger als das letzte Abdominalsegment, an der Basis doppelt so schmal als lang, an der Bauchseite erheben sich im proximalen Drittel warzenartige, im distalen Drittel zwei gespitzte Kutikularhöcker, während an der Rückenseite, an der Basis der Rückenborste fünf bis 6 kleine Dornen in schiefer Reihe stehen, in der Mitte aber, im distalen Drittel ragen mehrere Dornen in zwei Bogenreihen auf, und einige derselben erstrecken sich auch auf den Bauch; der Außenrand ist in der Mitte mit einem kleinen Dorn und einer langen Borste und im distalen Drittel gleichfalls mit einem kleinen Dorn und einer langen Borste bewehrt. Die Basis der Endborsten ist mit einem Dornenkranz umgeben; drei derselben sind entwickelt; die innere ist kaum halbsolang als der Furkalanhang; die Länge der beiden anderen vermochte ich nicht festzustellen, weil der größte Teil derselben fehlte.

Am ersten Antennenpaar ist das Glied, welches das Taststäbchen trägt, dicker als die übrigen, am Vorderrand zeigen sich kegel- und dornfömige Kutikularfortsätze; das Taststäbchen ist zwar auffällig lang, reicht aber nicht bis zur Spitze des letzten Antennalgliedes. Am zweitvorletzten Gliede, welches das Ellenbogengelenk bildet, sind an der inneren Seite zwei höckerartige Kutikularerhebungen, deren proximale in einem Kamm fortgesetzt ist; das letzte Glied ist fast so lang wie die vorangehenden zwei zusammen.

Am zweiten Antennenpaar ist der Seitenast zweigliederig, das erste Glied mit einer, das zweite mit drei Borsten bewehrt.

Das letzte Glied des Hauptastes ist im proximalen Viertel mit im Halbkreis angeordneten Dornen versehen, im distalen Viertel ragen aus einer Vertiefung eine kräftigere und zwei schwächere Dornen auf.

Am ersten Fußpaar sind beide Äste zweigliederig, das letzte Glied des äußeren Astes ist länger als das proximale, am Außenrand mit zwei kräftigen Dornen, am Innenrand mit einer Borste bewehrt, an der Spitze stehen eine kräftigere, dornförmige und eine dünnere Borste; der innere Ast ist etwas länger als der äußere, das proximale Glied ist länger und dicker als das distale, ebenso lang wie das letzte Glied des äußeren Astes, der Innenrand ist fein behaart, im distalen Drittel mit einer kurzen dornförmigen Borste bewehrt; das distale Glied ist schwach gekrümmt, der Innenrand behaart, trägt nahe zur Spitze innen und außen je eine Borste, während von der Endspitze ein langer Dorn und eine Borste ausgehen.

Am zweiten Fußpaar ist der äußere Ast dreigliederig, das distale Glied ist ebenso, wie das des ersten Fußes, der innere Ast ist zweigliedrig, nur wenig länger als die zwei proximalen Glieder des äußeren Astes, das erste Glied ist nicht ganz so lang wie das zweite, welches an der Spitze und nahe derselben mit zusammen drei langen Borsten versehen und am Innenrand bedornt ist.

Am dritten Fußpaar ist der äußere Ast dreigliedrig, ganz so wie der am zweiten Fußpaar; der innere Ast ist zweigliedrig, wenig kürzer als die zwei proximalen Glieder des äußeren Astes, an der inneren Spitze des ersten Gliedes erhebt sich ein kräftiger, geiselförmiger Fortsatz, an der Spitze des zweiten Gliedes aber ein kräftiger Dorn und eine Borste, die gleichsam Äste des Gliedes bilden.

Am vierten Fußpaar ist der äußere Ast ebenso, wie am zweiten und dritten Fußpaare, der innere Ast gleicht dem dem zweiten Fußpaares, es ist zweigliedrig, aber viel kürzer, insofern er das erste Glied des äußeren Astes nur wenig überragt, am Ende ist derselbe gleichfalls mit drei Borsten bewehrt.

Am fünften Fußpaar ist der äußere Ast annähernd blattförmig, bloß mit vier Borsten versehen, wovon zwei am Innen-, eine am Außenrand und eine an der Spitze sitzt, letztere ist länger als die übrigen; von der Spitze des inneren Astes gehen zwei kräftige Dornen aus.

Das anale Operculum ist halbmondförmig, am freien Rand mit kleinen Dornen versehen.

Die Körperlänge beträgt ohne die Furkalanhänge 0,6 cm.

Diese Art war bisher von Porsanger im nördlichen Finnland, sowie aus Sibirien vom Kap Lopotschenjakorga an der Mündung des Jenissej bekannt.

Das oben beschriebene männliche Exemplar weicht in der Struktur der Furkalanhänge und des fünften Fußpaares von den LILLJEBORGschen Exemplaren etwas ab. Außerdem zeigt sich auch in der Struktur der vier hinteren Rumpfsegmente und sämtlicher Abdominalsegmente. Die eingehende Vergleichung wird übrigens sehr erschwert durch den Umstand, daß mir bei meinen Untersuchungen nicht gelungen ist, auch nur ein Weibchen zu finden.

98. *Ophiocamptus mongolicus* DAD.

Fig. 8, 1—19.

Ophiocamptus mongolicus DADAY J. **4a.** p. 59.

Weibchen. Fig. 8. 1, 2, 6—8, 11, 13, 15, 17—19.

Der Körper ist nach hinten nur wenig verengt. Das erste Rumpfsegment ist samt dem Rüssel etwas länger als die danach folgenden vier Segmente zusammen, nach hinten etwas verbreitert, wenig länger als breit, die hinteren Ecken sind fast rechtwinklig. Der Rüssel ist gut entwickelt, relativ langbogig gegen den Bauch gekrümmt. Die nachfolgenden vier Rumpfsegmente sind fast gleichlang und von gleicher Form, ihre hinteren Winkel nach hinten und außen etwas gestreckt, besonders an den ersten drei Segmenten. Der Hinterrand aller Rumpfsegmente ist ungezähnt und dornlos, ihre Oberfläche aber glatt (Fig. 8, 1).

Das abdominale Genitalsegment ist länger als jedes der nachfolgenden, der Hinterrand ist überall ungezähnt und dornlos. Die nachfolgenden zwei Segmente sind gleichlang, ihr Hinterrand ungezähnt, am Bauch aber tragen sie vor dem Rand einen Halbring von Dornen. Am letzten Abdominalsegment erheben sich am Bauch an der Basis der Furkalanhänge Dornkränze (Fig. 8. 1).

Das anale Operculum gleicht einem langen Kegel, der freie Rand ist ganz glatt, die Spitzen abgerundet (Fig. 8, 1).

Die Furkalanhänge sind in der hinteren Hälfte schmäler und so lang, eventuell etwas länger als das letzte Abdominalsegment, am Außenrand ragt im proximalen Drittel nebst einem kleinen Dorn eine lange feine Borste, im distalen Drittel aber eine lange feine Borste empor, am Innenrand aber sitzt in der Mitte ein kleiner Dorn (Fig. 8, 1. 5). Von den Endborsten sind bloß die zwei mittleren gut entwickelt, die äußere derselben ist schmal, fast so lang wie der Furkalanhang und das letzte Abdominalsegment, die innere dagegen kräftig und so lang als die Furkalanhänge und das Abdomen zusammen (Fig. 8. 1), neben der äußeren Borste erhebt sich ein Dorn, neben der inneren eine kurze feine Borste (Fig. 8. 6). Am Abdomen des jungen, noch nicht geschlechtsreifen Weibchens sind die ersten zwei Segmente schon gesondert, die zwei letzten dagegen noch verwachsen und bloß der halbe Dornring am Bauch deutet ihre Grenze an, ansonst aber gleicht es den geschlechtsreifen.

Die erste Antenne besteht aus sieben Gliedern, die beiden ersten Glieder sind schon dick, die übrigen dagegen fast gleich dünn und gleich lang, das erste Glied ist in der distalen Hälfte auffällig verengt. Das Taststäbchen ist relativ kurz, insofern es nicht einmal das distale Ende des fünften Gliedes erreicht (Fig. 8, 2).

Die erste Antenne des jungen Weibchens ist sechsgliederig, die ersten vier Glieder sind fast gleichdick, das fünfte Glied auffällig kurz, das sechste hingegen lang; das Taststäbchen ragt bis an die Spitzen des letzten Gliedes.

Das zweite Antennenpaar ist ganz so wie beim Männchen (Fig. 8, 3).

Der äußere Ast aller Füße ist dreigliederig, der innere Ast hingegen zweigliederig. Der äußere Ast des ersten Fußpaares ist wenig kürzer als der innere, die Glieder fast gleichlang, am letzten Glied erheben sich ein Dorn und drei Borsten (Fig. 8. 6); der Außenrand jedes Gliedes ist mit kleinen Dornen bewehrt. Der innere Ast ist nur wenig länger als die zwei proximalen Glieder des äußeren zusammen, das erste Glied fast doppelt so lang als das zweite, zudem viel dicker, der Außenrand bedornt, am Innenrand erhebt sich nahe zur distalen Spitze eine lange Borste; an der Spitze des zweiten Gliedes sitzen drei Borsten, am Außen-

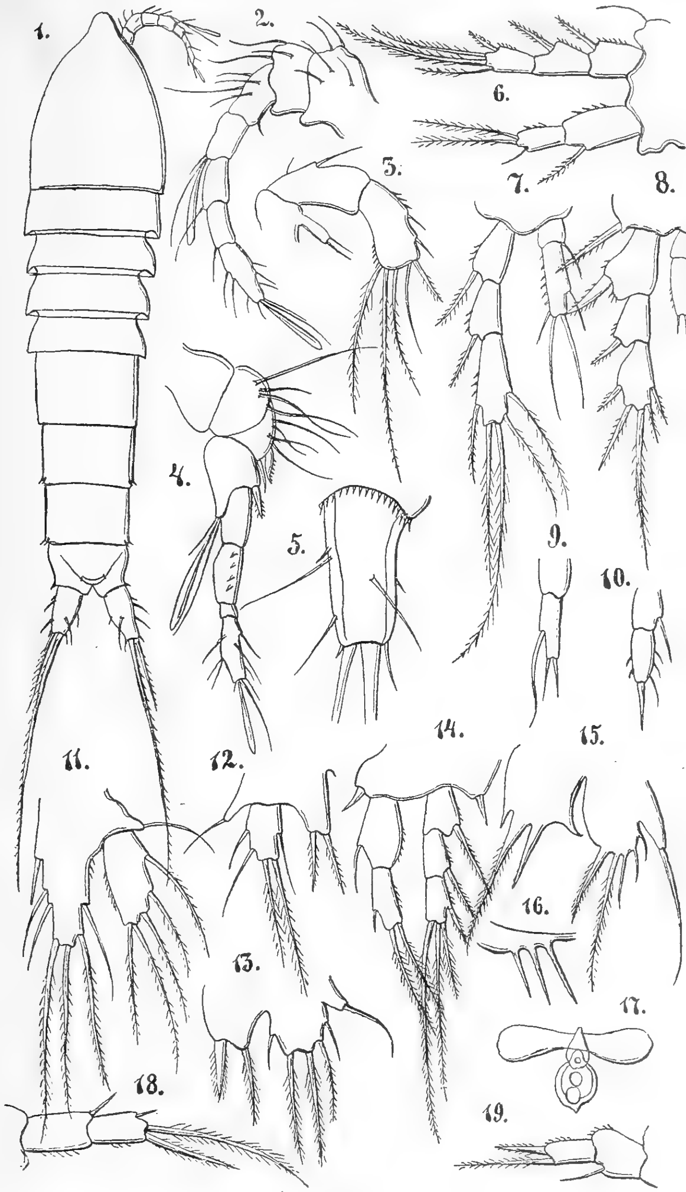


Fig. 8.

rand aber drei kleine Dornen (Fig. 8. 6). Ebenso ist auch der erste Fuß des jungen Weibchens (Fig, 8. 18).

Am zweiten und dritten Fußpaar ist der äußere Ast weit länger als der innere, der Dorn der ersten zwei Glieder auffällig lang, am Außenrand des letzten Gliedes ragt ein Dorn, am Innenrand eine, an der Spitze aber drei Borsten empor. Der innere Ast ist etwas länger als die äußeren zwei proximalen Glieder des äußeren, das zweite Glied ist mit drei Borsten bewehrt und am Außenrand bedornt.

Am vierten Fußpaar ist der äußere Ast ganz ebenso wie am zweiten und dritten (Fig. 8. 7); der innere Ast ist jedoch kürzer, nicht ganz so lang wie die zwei proximalen Glieder des äußeren zusammen. Das zweite Glied ist an der Spitze mit einem Dorn und zwei Borsten, am Innenrand mit einer Borste bewehrt (Fig. 8. 7).

Am zweiten Fuße des jungen Weibchens sind die zwei Glieder des inneren Astes fast gleich lang, das erstere indessen dicker und das zweite Glied an der Spitze mit einem Dorn und einer Borste versehen (Fig. 8. 19). Der äußere Ast des vierten Fußes gleicht fast durchaus dem der geschlechtsreifen, wogegen am letzten Glied des inneren Astes bloß drei kleine Dornen sitzen (Fig. 8. 8).

Der äußere Ast des fünften Fußes ist blattförmig, kürzer als der innere, am Außenrand erheben sich drei, an der distalen Spitze zwei, zusammen fünf lange gefiederte Borsten; der Innenrand ist mit kleinen Dornen bewehrt. Der innere Ast ist etwas länger als der äußere, gegen Ende verschmälert, am Außenrand und an der Spitze entspringen je zwei lange, am Innenrand hingegen drei kurze Borsten (Fig. 8. 11).

Am fünften Fuß des jungen Weibchens sind beide Äste gleich lang, der äußere Ast ist annähernd kreisförmig, mit insgesamt fünf Borsten bewehrt, deren zwei kürzere am Außenrand, eine aber am Innenrand aufragen; der innere Ast ist an der Spitze mit einem kräftigen Dorn und einer Borste versehen (Fig. 8. 13). Ich fand jedoch auch solche junge Weibchen, bei denen der innere Ast des fünften Fußes auch einen auswärts gekrümmten kräftigeren außen und einen geraden, kurzen inneren Dorn führte, außer dem an der Spitze aufragenden Dorn und Borste (Fig. 8. 15).

Das Receptaculum seminis gleicht annähernd dem von *Ophiocamptus Sarsii* (Fig. 17).

Die Länge des entwickelten Weibchens beträgt ohne die Furkalborsten 0,8 mm, mit den Furkalborsten 1,15 mm.

Männchen. Fig. 8. 3—5, 9, 10, 12, 14, 16.

Hinsichtlich der allgemeinen Struktur des Körpers stimmt das Männchen mit dem Weibchen überein, das Rostrum ist indessen etwas dünner und länger und die Seitenränder der Rumpfsegmente sind gerade.

Die ersten drei Glieder der Greifantenne sind viel dicker als die übrigen, am dritten Glied zeigt sich ein dolchförmiger, dorniger Kutikularfortsatz; am vierten Glied erhebt sich außer dem Taststäbchen auch ein kräftiger, fein behaarter Dorn (Fig. 8. 4). An der Innenseite des zweitvorletzten Gliedes sind vier dornförmige Zähnchen zugegen. Das vorletzte Glied ist sehr klein, kleiner als alle übrigen, während das letzte so lang ist wie das fünfte und sechste Glied. Das Taststäbchen überragt das vorletzte Glied ein wenig (Fig. 8. 4).

Der Nebenast des zweiten Antennenpaares ist fingerförmig, eingliederig und trägt an der Spitze zwei kleine Borsten. Das letzte Glied des Hauptastes ist gegen Ende verbreitert, am Außenrand mit zwei Dornen bewehrt (Fig. 8. 5).

Das erste Fußpaar ist dem des Weibchens durchaus ähnlich, der innere Ast ist jedoch so lang wie der äußere und die Glieder sind fast gleichlang (Fig. 8. 14).

Das zweite Fußpaar ist ebenso wie beim Weibchen, auch der äußere Ast des dritten und vierten Fußpaares. Am letzten inneren Astglied des dritten Fußes entspringt in der Mitte des Innenrandes eine geiselförmige kräftige Borste, während an der Spitze zwei kleine Borsten sitzen (Fig. 8. 9). Das erste innere Astglied des vierten Fußes trägt an der inneren Spitze eine ziemlich kräftige Borste, das zweite Glied trägt am Außenrand zwei kleine, am Innenrand zwei kleine und eine lange Borste, an der distalen Spitze aber einen kleinen kräftigen Dorn (Fig. 8. 10).

Der äußere Ast des fünften Fußes gleicht einer gestreckten viereckigen Lamelle, die am Außenrand zwei kleinere, am Innenrand eine kurze, an der distalen Spitze aber zwei längere Borsten trägt, während an der Spitze des kürzeren inneren Astes bloß zwei kräftige, dornförmige Borsten sitzen (Fig. 8. 12). Das sechste Fußpaar wird durch drei gleichförmige, gleichweit voneinanderstehende Borsten repräsentiert (Fig. 8. 16).

Körperlänge ohne die Forkalborsten 0,5 mm.

Fundorte: Angolheim-See; erster kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Cheltyge-nur; Mündung des Flusses Tychomyk; Fluß Mota.

Vermöge der Struktur der Füße gleicht diese Art dem *Ophiocamptus Sarsii* Mrah. Das fünfte männliche Fußpaar erinnert an die von *Ophiocamptus Sarsii* Mrac. und *Canthocamptus crassus* Sars., wogegen die Furkalanhänge ebenso sind wie bei *Canthocamptus insignipes* Lillj.

Fam. *Centropagidae.*

99. *Diaptomus acutilobatus* G. Sars.

Diaptomus acutilabatus G. O. Sars 17 p. 207 Tab. 13 Fig. 1af.

Diese Art ist zurzeit als eine für die Fauna von Zentralasien charakteristische Art zu betrachten. G. O. Sars hat sie an mehreren Fundorten verzeichnet, während ich sie bei meinen Untersuchungen nur in dem Material von der Mündung des Flusses Changa vorgefunden habe.

Es lagen mir zahlreiche Männchen und Weibchen vor; die Männchen unterscheiden sich von den durch G. O. Sars beschriebenen dadurch, daß am fünften Fußpaar an der rechten Seite der Innenrand des zweiten Protopeditgliedes fast in der ganzen Länge einen Kutikularkamm trägt, welcher in der Mitte stärker vertieft ist, demzufolge annähernd nierenförmig erscheint, um so mehr, als er an beiden Enden erhöht und gerundet ist; außerdem bildet am zweiten Protopeditglied des linken Fußes der am Innenrand sich erhebende Kutikularfortsatz eine breite, an der Spitze gerundete, fingerförmige Lamelle und ist nicht spitzig-dornförmig. Allein auch das erste Protopeditglied des rechten Fußes ist etwas verschieden, insofern sich am Innenrand ein kleiner, an der oberen Seite aber ein fingerförmiger Kutikularfortsatz mit gerundeter Spitze erhebt.

Am äußeren Ast des fünften weiblichen Fußpaares ist das letzte Glied sehr kurz und die beiden Endborsten sind dornförmig, kurz; der innere Ast erscheint zweigliederig.

100. *Diaptomus incrassatus* G. O. SARS.

Diaptomus incrassatus G. O. SARS 17 p. 202 Tab. 11 Fig. 2, *a—g*.

Diese Art war zufolge der Aufzeichnungen G. O. SARS aus Mongolien von dem Fundort Barolduschty bereits bekannt. Auf Grund meiner Untersuchungen kann ich behaupten, daß dieselbe in Mongolien gemein ist; ich habe sie nämlich an folgenden Fundorten angetroffen: zwischen der Mündung des Flusses Than und Cap Šanta; südliches Ufer der Insel Dala-kui; Kossogol bei Cap Santa (sehr viel); Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Kossogol beim Cap Toilgot; Angolheim-See, zweiter kleiner See des Angolheim-Sees; 200 m südlich der Halbinsel Dala-kui; zwischen dem westlichen Ufer des Kossogol und der Insel; Chatchimsee; Mündung des Flusses Tochomyk; westliches Ufer des Kossogol; zwischen den Flüssen Djeglyk und Chatschim; Kap Mottabulum.

Es lagen mir zahlreiche männliche und weibliche Exemplare vor, die in jeder Hinsicht mit den von G. O. SARS beschriebenen übereinstimmten.

101. *Diaptomus lobatus* LILLJ.

Diaptomus lobatus G. O. SARS **17** p. 212 Tab. 14 Fig. 2a—g.

Diese Art hat eine größere geographische Verbreitung als die beiden vorigen Arten, insofern sie auch aus Europa bekannt ist (Nowaja Semlja). Aus Asien ist sie derzeit aus Sibirien und Zentralasien (Kwagaldjisesee im Gouvernement Akmolinsk) verzeichnet worden. Ich habe sie bei meinen Untersuchungen in dem Material von folgenden Fundorten angetroffen: zwischen dem Flusse Changa und Cap Santa; erster und zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Bucht im Tal des Flusses Chatschim; Catschim-nor.

Die mir vorliegenden zahlreichen Männchen und Weibchen stimmen durchaus überein mit den von G. O. SARS beschriebenen.

102. *Diaptomus Zichyi* DAD.

Diaptomus Zichyi E. v. DADAY **3** p. 451 Tab. 23 Fig. 10—14.

Diese Art war bisher bloß von Abakansk in Sibirien bekannt; in Mongolien scheint sie ziemlich häufig zu sein, insofern ich sie von folgenden Fundorten verzeichnete: Gytschygenty-see; Ajagam-maranai-bulun; Bulunaiquellen; Chorcho-ito-nor.

Es lagen mir zahlreiche Männchen und Weibchen vor. Am fünften weiblichen Fuß ist der innere Ast fast so lang wie das erste Glied des äußeren Astes, trägt bloß eine längere und eine kürzere dornförmige Borste, am Innenrand aber erheben sich einige kleine Borsten. Am äußeren Ast ist das letzte Glied mit einem kräftigen und einem kleinen Dorn bewehrt.

Am zweitvorletzten Glied der männlichen Greifantenne zeigt sich ein sehr schmaler Kutikularkamm, welcher am Ende zahnartig verlängert ist. Am Protopodit des rechten fünften Fußes ist keinerlei Kutikularerhöhung zugegen; der Endrand des ersten äußeren Astgliedes bildet drei Höcker mit gerundeter Spitze, der innere Ast ist gut entwickelt, fast so lang wie das erste Glied des äußeren Astes, am gespitzten Ende mit Borsten versehen. Das letzte äußere Astglied des linken Fußes bildet innen einen Lappen, an der Spitze trägt es eine breite Kralle und an deren äußerer Basis einen Dorn.

Durch den Umstand, daß sich am Protopodit des rechten Fußes keine Kutikularerhöhung zeigt, erinnern die Männchen lebhaft an jene von *Diaptomus denticornis* Wierz., und überhaupt bilden die mongolischen Exemplare gewissermaßen einen Übergang zwischen dem sibirischen *Diaptomus Zichyi* Dad. und dem europäischen *Diaptomus denticornis* Wier.

Ord. *Phyllopoda.*

Subord. *Cladocera.*

Die erste *Cladocera* der mongolischen Fauna, d. i. *Daphnia similis* Cls. = *Daphnia carinata* King. hat J. Richard 1897 nachgewiesen (15). Ebenso hat E. v. Daday 1901 eine Art unter dem Namen *Moina mongolica* beschrieben (3). Die meisten mongolischen *Cladoceren* aber hat G. O. Sars verzeichnet und zwar die folgenden: *Alona elegans* Sars; *Moina macrocopa* Sars *Moina rectirostris* (Jur.); *Scapholeberis mucronata* (O. F. M.); *Simocephalus vetulus* (O. F. M.); *Sim. exspinosus* C. K.; *Sim. mixtus* Sars; *Daphnia carinata* King.; *D. longispina v. leucocephala* Sars; *D. magna* Str.; *D. pulex* d. Geer.; *D. pulex v. pulicaria* Sars.

Fam. *Chydoridae.*

103. *Chydorus sphaericus* (O. F. M.).

Chydorus sphaericus W. LILLEBORG **13** p. 561 Tab. 77 f. 8—28.

Diese Art ist aus Mongolien bereits durch G. O. SARS konstatiert worden und allem Anschein nach ist er der häufigste Repräsentant der Familie, denn ich habe sie bei meinen Untersuchungen an folgenden Fundorten angetroffen: Mündung des Flusses Changa; Sumpf an der Mündung des Flusses Changa; zwischen dem Fluß Changa und dem Cap Santa; Südufer der Halbinsel Dala-kuy; Kossogol, Sand der littoralen Zone; Kossogol bei Cap Santa; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Angolheim-See; zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees, zwischen dem westlichen Ufer des Kossogol und der Insel; Chubtu-nor; Gytschygenty-See; Cheltyge-nor; Ajagam-maranai-bulun; Mündung des Flusses Djeglyk; Fluß Noin-gol; kleiner See an der Mündung des Flusses Chatschim; Bucht im Tal des Flusses Chatschim; Chatschim-nor; Mündung des Flusses Tochomyk; Mündung des Flusses Turuk; Fluß Morin-Tuskul, Vereinigungsstelle des Borsok-Sees mit dem Kossogol; Fluß Malyi-Gumnuk; Chorchoito-nor; Kap Mottabulun. Somit habe ich diese Art von fast sämtlichen Fundorten verzeichnet.

104. *Alonella exigua* (FISCH.)

Alonella exigua W. LILLJEBORG **13**, p. 513, Tab. 72, Fig. 20—26.

Aus Mongolien war diese Art bisher nicht bekannt; G. O. SARS hat sie aus dem Gouvernement Akmolinks vermerkt. Ich habe sie bei meinen Untersuchungen in dem Material von folgenden Fundorten vorgefunden: Mündung des Flusses Changa; zwischen dem Fluß Changa und dem Cap Santa; zwischen dem westlichen Ufer des Kossogol und der Insel; Cheltyge-nor; kleiner See an der Mündung des Flusses Chatschim; an einzelnen Fundorten ziemlich häufig.

105. *Alonella nana* (BAIND).

Alonella nana W. LILLJEBORG **13**, p. 517, Taf. 72 Fig. 27—31.

In der Form und Struktur der Schale stimmen die mir vorliegenden Exemplare mit den von W. LILLEBORG abgebildeten schwedischen Exemplaren vollständig überein. Der Vorderrand der Lippenlamelle ist nahezu vertikal, mehrfach gewellt. Auch die Form des Hinterleibes ist gleich dem der schwedischen Exemplare, aber die Bedornung ist etwas verschieden; am distalen, stark gerundeten Rückenwinkel sitzen 5—6 kräftige Dornen, während von der obersten bis zur supraanalen Ecke, parallel des Randes mehrere, aus feinen Haaren bestehende Bündel aufragen.

Die ganze Körperlänge beträgt 0,38—0,45 mm, die größte Höhe 0,34 mm.

Fundorte: Mündung des Flusses Changa; Halbinsel Dolonula; Angolheim-See; zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Mündung des Flußes Turuk. Aus all diesen Fundorten ziemlich häufig. Aus Mongolien bisher nicht bekannt.

106. *Alona affinis* Leyd.

Lynceus affinis W. Lilljeborg **13**, p. 454 Tab. 66 Fig. 18—21, Tab. 67, 68 Fig. 1.

Eine der häufigsten Arten dieser Gattung; ich fand sie in dem Material von folgenden Fundorten: Ufer der Halbinsel Dolon-ulu; erster kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Cheltyge-nor; Mündung des Flusses Djeglyk; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees mit dem Kossogol; Borsok-See; Fluß Malyi-Gumnuk; Bucht Mota.

G. O. Sars hat diese Art aus dem Gouvernement Akmolinsk und Altai verzeichnet.

107. *Alona costata* G. O. Sars.

Lynceus costatus W. Lilljeborg **13**, p. 465, Taf. 68, Fig. 9—15.

In der Körperform gleichen die meisten mir vorliegenden Exemplare der von W. Lillejborg Taf. 68 Fig. 9 abgebildeten Form; in der Struktur des Hinterleibes aber weichen meine Exemplare einigermaßen davon ab; am Hinterrand erheben sich nämlich 10—12 kurze, kräftige Dornen in einer Reihe, innerhalb welcher nicht feine Haarbündel, sondern eine Reihe von 7—9 kurzen Dornen zeigen.

Körperlänge 0,55—0,58 mm, größte Höhe 0,37 mm.

Fundorte: zwischen dem Fluß Changa und dem Cap Santa; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; erster kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; zwischen dem westlichen Ufer des Kossogol und der Insel Cheltyge-nor; Mündung des Flusses Chatschim; Fluß Malyi Gumnuk; Chorchoito-nor, Fluß Mota; Ajagam maranai-bulan.

108. *Alona guttata* G. O. SARS.

Lynceus guttatus W. LILLJEBORG **13**, p. 468, Taf. 68 Fig. 16—26.

Allem Anschein nach zählt diese Art zu den selteneren, denn bei meinen Untersuchungen habe ich sie bloß von den folgenden zwei Fundorten verzeichnet: zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Cheltyge-nor. Aus Mongolien bisher nicht bekannt.

109. *Alona intermedia* G. O. SARS.

Linceus intermedius W. LILLJEBORG, **13**, p..173, Taf. 68 Fig. 27—29.

Ebenso selten wie vorige Art; ich habe sie gleichfalls nur an zwei Fundorten angetroffen und zwar Kiren-nor und Motta bulun, stets nur wenige Exemplare. Aus Mongolien bisher ebenfalls unbekannt.

110. *Alona quadangularis* (O. F. M.).

Lynceus quadrangularis W. LILLJEBORG, **13**, p. 448, Taf. 66 Fig. 8—17.

Diese Art war aus Mongolien bisher nicht bekannt; bei meinen Untersuchungen habe ich sie an folgenden Fundorten angetroffen: Ajagam-maranai-bulun; kleiner See an der Mündung des Flusses Chatschim; Gytschygenty-nor; Chatschim-nor.

Hinsichtlich der allgemeinen Körperform gleichen die mir vorliegenden Exemplare zumeist dem Exemplar, welches W. LILLJEBORG auf Taf. 66 Fig. 11 abgebildet hat. Der Hinterleib hat dieselbe Form und Struktur wie sie W. LILLJEBORG (Taf. 66 Fig. 13) darstellt. Die Lippenlamelle aber zeigt einige Verschiedenheit, insofern über der unteren Ecke sich ein tiefer Einschnitt befindet.

111. *Alona rectangula* G. O. SARS.

Lynceus rectangulus W. LILLJEBORG, **13**, p. 476, Tab. 68 Fig. 30, 31; Tab. 69 Fig. 1—6.

Eine der selteneren Arten dieser Gattung, die ich bloß in dem Material von der Mündung des Flusses Changa vorfand. Die untersuchten Exemplare gleichen zumeist dem von W. LILLJE-

BORG Taf. 68 Fig. 30 abgebildeten Exemplar. Diese Art war aus Mongolien bisher nicht bekannt.

112. *Leptorhynchus rostratus* (C. K.).

Lynceus rostratus W. LILLJEBORG, **13**, p. 482, Tab. 69, Fig. 7—21.

Diese Art besitzt eine große geographische Verbreitung, demungeachtet war sie bisher aus Mongolien, ja aus ganz Asien bisher unbekannt. Bei meinen Untersuchungen habe ich bloß in dem Material aus dem Chatschim-nor einige Exemplare vorgefunden.

113. *Acroperus harpae* BARID.

Acroperus harpae W. LILLJEBORG **13**, p. 418, Taf. 63, Fig. 14—24, Taf. 64, Fig. 1—10.

Bei meinen Untersuchungen habe ich Exemplare dieser Art an den folgenden zwei Fundorten beobachtet: Angolheim-See; zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees.

Die mir vorliegenden Exemplare erinnern hinsichtlich der allgemeinen Körperform einigermaßen an das von W. LILLJEBORG Taf. 64, Fig. 1 abgebildete Exemplar; allein der Kopf ist mehr nach unten geneigt, an der Grenze zwischen Kopf und Hals liegt eine Vertiefung, der Hinterrand der Schale ist gerade und vertikal, am unteren Winkel aber stehen 4—5 Zähnchen, die von unten nach oben allmählich kleiner werden.

Am ersten Fußpaar erheben sich im distalen Drittel des Außenrandes zwei Halbringe feiner Haare und diesen gegenüber am Innenrand eine längere Borste.

Eines der charakteristischen Merkmale des Postabdomens ist es, daß der postanale Hinterrand gezackt und mit sehr feinen kurzen Härchen bedeckt ist. In der Nähe des Hinterrandes indessen sind auch hier zu beiden Seiten die feinen Haarbündel gezogen, wie bei den europäischen Exemplaren. Die Körperlänge beträgt 0,72 mm, die größte Höhe 0,45 mm.

114. *Eurycercus lamellatns* (O. F. M.).

Eurycercus lamellatus W. LILLJEBORG **13**, p. 385, Taf. 59—60.

Aus Mongolien ist diese Art bisher unbekannt gewesen; G. O. SARS hat sie aus den Gouvernements Akmolinsk und Altai aufgezeichnet. Bei meinen Untersuchungen habe ich sie nur an zwei Fundorten angetroffen, und zwar an der Mündung des Flusses

Changa und im Fluß Motta. Von beiden Fundorten lagen mir mehrere Exemplare vor, an welchen sich zu beiden Seiten des Postabdomens kleinere oder größere Bündel feiner kleiner Härchen erheben, während sie sonst den von LILLJEBORG beschriebenen Exemplaren gleich sind.

Fam. *Macrothricidae* nom. nov.

Die Arten dieser Familien wurden bisher unter der Bezeichnung *Lyncodaphnidae* SARS zusammengefaßt; nachdem sich jedoch unter den Gattungen keine einzige *Lyncodaphnia* befindet hatte, ich es für zweckmäßig, nach der an artenreichsten Gattung *Macrothrix* statt früheren Familiennamens den neuen Familiennamen *Macrothricidae* in Vorschlag zu bringen, und zwar ganz nach dem Vorgang, wie über Initiative von G. O. SARS an Stelle des alten Familiennamens „*Lynceidae*" der neue Familienname „*Chydoridae*" getreten ist.

115. *Macrothrix odontocephala* DAD.

Macrothrix odontocephala E. v. DADAY 4, p. 272, Taf. 9, Fig. 18—20.

Diese Art war bisher bloß aus Patagonien und Nordamerika bekannt, ihr Vorkommen in Mongolien ist daher umso interessanter.

Hinsichtlich der allgemeinen Körperform und Struktur der Schale stimmen die mir vorliegenden Exemplare mit den patagonischen vollständig überein, allein die Schale selbst erscheint mit blassen, sechseckigen Felderchen geschmückt, die fein granuliert sind.

Das erste Antennenpaar ist kürzer und etwas dicker als an den patagonischen Exemplaren, am Außenrand stehen nicht bloß 4, sondern 6—7 Querreihen von Borsten und die Konturen des Basalteils sind nicht sichtbar.

Das Postabdomen ist nur insofern von dem der patagonischen Exemplare verschieden als die beiden Seiten fast auf der ganzen Oberfläche mit feinen Härchen bedeckt sind, die mehr oder weniger in Reihen stehen.

Die Körperlänge beträgt 0,63 mm, die größte Höhe 0,5 mm.

Fundorte: Ajagam-maranai-bulun; Mündung des Flusses Djeglyk; Mündung des Flusses Turuk; Fluß Marin-Tuskul; Cap Mottabulun.

Fam. *Bosminidae.*

116. *Bosmina obtusirostris* G. O. Sars.

Bosmina obtusirostris W. Lilljeborg **13**, p. 237, Taf. 32, Fig. 4—9. Taf. 33—36 u. 37, Fig. 1—7.

Der häufigste Repräsentant der Familie in den mongolischen Wässern; ich fand diese Art in dem Material von folgenden Fundorten: Mündung des Flusses Changa; zwischen dem Fluß Changa und Kap Santa; zwischen der Mündung des Flusses Than und Cap Santa; Kossogol; Sand der littoralen Zone; Kossogol bei Cap Santa; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Kossogol bei Cap Toilgot; Angolheim-See; zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; 200 Meter südlich der Insel Dala-kui; zwischen dem westlichen Ufer des Kossogol und der Insel; Mündung des Flusses Djeglyk; Chatschim-nor; Mündung des Flusses Tochomyk; Fluß Morin-Tuskul; Vereinigungsstelle des Borsok-See und des Kossogol; Bulunai-Quellen; westliches Ufer des Kossogol zwischen den Flüssen Djeglyk und Chatschim; Cap Mottabulun.

Die mir vorliegenden Exemplare gleichen zumeist der var. *obtusirostris* dieser Art und insbesondere jenem Exemplar, welches W. Lilljeborg auf Taf. 33, Fig. 8 abgebildet hat, unterscheiden sich indessen von demselben dadurch, daß die Schale mit feinen sechseckigen Felderchen geziert ist und am Unterrand des Bauchrandes zwei kleine kurze Dornen stehen.

Das Postabdomen stimmt mit dem des schwedischen Exemplares durchaus überein und am Basalteil der Endkrallen sind keine Dornen zugegen.

Die Körperlänge beträgt durchschnittlich 0,52 mm, die größte Höhe 0,37 mm.

117. *Bosmina longirostris* (O. F. M.).

Bosmina longirostris W. Lilljeborg **13**, p. 233, Taf. 41, Fig. 17.

Wie es scheint, zählt diese Art in der Fauna von Mongolien zu den selteneren, insofern ich sie nur an einem einzigen Fundorte, und zwar vom Angolheim-See verzeichnete und auch dort nur wenig Exemplare fand.

Die mir vorliegenden Exemplare scheinen zu dem Formen-kreis der var. *similis* zu gehören und gleichen zunächst jenen Exemplaren, die W. LILLJEBORG auf Taf. 31, Fig. 17 abgebildet hat. An der Schalenoberfläche ziehen Längslinien hin und der hintere Bauchfortsatz ist relativ lang, gerade nach hinten gerichtet.

Die Körperlänge beträgt samt dem Fortsatz 0,46—0,48 mm, die größte Höhe 0,25 mm.

118. *Bosmina Lilljeborgi* G. O. SARS.

Bosmina mixta W. LILLJEBORG **13**, p. 275, Taf. 31—44.

Bei meinen Untersuchungen habe ich diese Art bloß an zwei Stellen, d. i. in dem Material vom Kossogol bei Cap Santa und zwischen dem westlichen Ufer des Kossogol und der Insel vorgefunden.

Die untersuchten Exemplare gehören in den Bereich der var. *humilis* und gleichen hinsichtlich der Körperform zunächst denjenigen Exemplaren, welche W. LILLJEBORG auf Taf. 42, Fig. 2 u. 9 abgebildet hat, die Stirn ist indessen vor dem Auge nicht vorspringend, die Schale mit feinen Linien versehen und granuliert.

Das erste Antennenpaar ist von mittlerer Länge und sichelförmig gekrümmt, die Tastborste an der Stirn sitzt an der Basis der Antenne.

Das Postabdomen gleicht jenem der schwedischen Exemplare, der Basalteil der Endkrallen ist unbehaart.

Ich muß hier bemerken, daß ich die Bezeichnung *mixta* von W. LILLJEBORG nicht akzeptiere, weil zufolge des Prioritätsrechtes dem Namen *Lilljeborgi* G. O. SARS der Vorrang gebührt.

Fam. ***Daphnidae.***

119. *Ceriodaphnia reticulata* (JUV.).

Ceriodaphnia reticulata W. LILLJEBORG **13**, p. 184, Taf. 27, Fig. 1—10.

Diese Art hat eine sehr ausgebreitete geographische Verbreitung, war aber aus Mongolien bisher nicht bekannt und auch G. O. SARS hat sie bloß aus dem Gouvernement Akmolinsk nachgewiesen. Ich habe bei meinen Untersuchungen bloß einige Exemplare in dem Material von folgenden zwei Fundorten beobachtet: zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees und zwischen dem westlichen Ufer des Kossogol und der Insel.

120. *Ceriodaphnia rotunda* G. O. SARS.

Ceriodaphnia rotunda W. LILLJEBORG **13**, p. 211, Taf. 29, Fig. 15—22.

Diese Art besitzt eine geringere geographische Verbreitung als vorige Art und war aus Mongolien bisher ebenfalls unbekannt. Fundorte: zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Cheltyge-nor; Vereinigungsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol. An jedem dieser Fundorte fand ich nur wenige Exemplare.

121. *Scapholeberis mucronata* (O. F. M.).

Scapholeberis mucronata W. LILLJEBORG **13**, p. 151, Taf. 22, Fig. 15—19, Taf. 23, Fig. 1—7.

Aus Mongolien wurde diese Art bereits von G. O. SARS nachgewiesen, der sie auch in den Gouvernementen Akmolinsk und Altai verzeichnete. Ich beobachtete sie bloß an zwei Fundorten: zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees und Gytschygenty-nor. An beiden Fundorten hatten die Exemplare kein Horn an der Stirn.

122. *Simocephalus vetulus* (O. F. M.).

Simocephalus vetulus W. LILLJEBORG **13**, p. 166, Taf. 24, Fig. 8—18, Taf. 25, Fig. 1—7.

Eine ziemlich kosmopolitische Art, die aus Mongolien schon von G. O. SARS nachgewiesen wurde. Auf Grund meiner Untersuchungen kann ich sie als in Mongolien häufig bezeichnen, insofern ich sie an folgenden Fundorten antraf: Mündung des Flusses Changa; Sümpfe an der Mündung des Flusses Changa; erster kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Cheltyge-nor; Ajagam-maranai-bulun; Mündung des Flusses Djeglyk; Chatschim-nor; Fluß Mota.

123. *Daphnia carinata* KING.

Daphnia carinata G. O. SARS. **6**, p. 159, Taf. 1.

In bezug auf die geographische Verbreitung ist diese Art eine der interessantesten der Gattung, insofern sie bisher bloß aus Asien und Australien bekannt ist. Aus Mongolien, und zwar von dem Fundort Dalaj-nor hat sie bereits G. O. SARS nachgewiesen. Ich habe sie bloß in dem Material aus dem ersten kleinen

See nördlich des Angolheim-Sees gefunden, wo sie ziemlich häufig war; ich sah indessen bloß junge Weibchen.

Hinsichtlich der allgemeinen Körperform sind die mir vorliegenden Exemplare sehr ähnlich demjenigen, welches G. O. SARS auf Taf. 1, Fig. 1 abgebildet hat, am Analrand des Postabdomens aber werden die Krallen gegen oben allmählich kürzer und an der supraanalen Partie erheben sich an beiden Seiten in einem Halbkreis Bündel kleiner Dornen.

124. *Daphnia magna* STR.

Daphnia magna W. LILLJEBORG **13**, p. 69, Taf. 8, Fig. 1—11, Taf. 9, Fig. 1—2.

Aus Mongolien war diese Art bisher nicht bekannt. Bei meinen Untersuchungen fand ich sie an folgenden Fundorten: zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Chubtu-nor; Mündung des Flusses Djeglyk. Die Exemplare von Chubtu-nor sind so groß, daß man sie füglich als Riesen bezeichnen könnte.

125. *Daphnia pulex* de GEEN.

Daphnia pulex W. LILLJEBORG **13**, p. 76, Taf. 9, Fig. 8, Taf. 10—12.

Eine kosmopolitische Art, die aus der Mongolei bereits von G. O. SARS nachgewiesen worden ist, der sie außerdem auch in den Gouvernements Akmolinsk, Altai und Atbassar vorgefunden hat. Ich beobachtete sie bloß an den folgenden drei Fundorten: Sümpfe an der Mündung des Flusses Changa; Chubtu-nor; Chatschim-nor.

126. *Daphnia longispina* O. F. M.

Daphnia longispina W. LILLJEBORG **13**, p. 94, Taf. 12, Fig. 14; Taf. 13—14.

Auf Grund meiner Untersuchungen kann ich diese als in Mongolien gemein bezeichnen, insofern ich sie in dem Material von folgenden Fundorten vorfand: Kossogol bei Cap Santa; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; erster und zweiter See nördlich des Angolheim-Sees; Gytschygenty-nor; Mündung des Flusses Djeglyk; Bach im Tal des Flusses Chatschim; westliches Ufer des Kossogol zwischen den Flüssen Djeglyk und Chatschim; südliches Ufer der Halbinsel Dala-kuy; Ajagam-maranai-bulun; Kap Mottabulun.

Der größte Teil der mir vorliegenden Exemplare ist der von J. Richard auf Taf. 23, Fig. 2 abgebildeten *Daphnia longispina* var. *major* G. O. Sars (Revision des Cladocères II. Ann. d. Sc. Nat. Tom. 12, 1896), bzw. der von G. O. Sars unter dem Namen *Daphnia longispina* var. *Leydigi*-Sars beschriebenen Form in hohem Maße ähnlich, während der geringere Teil dem von J. Richard auf Taf. 22, Fig. 16 abgebildeten Exemplare von *Daphnia longispina* var *rosea* G. O. Sars gleicht.

Ich habe jedoch, außer den oben erwähnten, weniger auffälligen Varietäten auch folgende sehr auffällige Varietäten gefunden.

a) *Daphnia longispina* var. *tenuitesta* G. O. Sars.

Daphnia longispina v. tenuitesta G. O. Sars **16**, p. 168, Taf. 4, Fig. 5.

Diese Form gehört in die Fauna von Mongolien nicht zu den Seltenheiten, insofern ich sie in dem Material von folgenden Fundorten angetroffen habe: erster kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Chatschim-nor; Fluß Morin-Tuskul; Chorchoito-nor.

Es lagen mir zahlreiche Exemplare, sowohl Männchen als auch Weibchen vor.

Die Weibchen gleichen hinsichtlich der allgemeinen Körperform nur wenig dem von G. O. Sars auf Taf. 4, Fig. 5 abgebildeten, vermöge der Stellung des Kopfes aber mehr dem von W. Lilljeborg auf Taf. 13, Fig. 1 dargestelltem Exemplar.

Das Postabdomen zeigt keinerlei auffällige Eigenheiten, am Vorderrand der Endkrallen aber erheben sich drei kleine Dornen.

Ein charakteristisches Merkmal des Männchens ist es, daß die Bauchseite des Kopfes vor der Basis der ersten Antenne schwach vertieft und der Bauchrand der Rumpfschale gewellt ist.

Das erste Antennenpaar ist kurz und ziemlich dick, bloß dreimal so lang als der größte Durchmesser; die Endkralle ist kräftig, nicht ganz halb so lang als die Antenne selbst.

b) *Daphnia longispina* v. *caudata* G. O. Sars.

Daphnia longispina v. caudata G. O. Sars **16**, p. 166, Taf. 4, Fig. 1.

Ich habe bloß Weibchen gefunden, die in der Situierung des Kopfes vollständig übereinstimmen mit dem von G. O. SARS abgebildeten Exemplar, auch der Schalenfortsatz hat dieselbe Stellung; wogegen der Verlauf bzw. die Gewölbtheit des Schalen-Rückenrandes mehr an *Daphnia longispina* var. *turbinata* SARS erinnern (vgl. G. O. SARS 16, Taf. 4, Fig. 3.

Die Struktur des Postabdomens zeigt keinerlei auffällige Eigenheiten, an der supraanalen Partie erheben sich an beiden Seiten zerstreute Bündel und Reihen kleiner Dornen.

Fundorte: erster kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Bulunai-Quellen; Chorchoito-nor.

Aus Mongolien war diese Varietät bisher nicht bekannt. G. O. SARS hat sie nach Exemplaren aus dem Gouvernement Altai beschrieben.

c) *Daphnia longispina* v. *Jardini* BAIRD.

Daphnia longispina v. jardini G. O. SARS **16**, p. 169, Taf. 5, Fig. 2.

Von den Varietäten der Stammform ist diese in der Fauna von Mongolien wohl die seltenste, denn ich habe sie bei meinen Untersuchungen bloß in dem Material aus dem Chatschim-nor vorgefunden, hier aber waren Männchen und Weibchen gleich häufig.

Die Weibchen gleichen hinsichtlich der Körperform und der Struktur des Kopfes jenen Exemplaren, welche G. O. SARS auf Taf. 5, Fig. 2 a abgebildet hat, der Schalenfortsatz aber entspringt etwas höher und ist etwas nach oben gerichtet in der Weise wie bei dem von G. O. SARS auf Taf. 5, Fig. 2 b dargestellten Exemplar.

In der Körperform gleicht das Männchen dem Weibchen, der Schalenfortsatz ist indessen stärker nach oben gerichtet ganz so wie bei dem jungen Weibchen.

Bezüglich des Postabdomens weichen meine Exemplare gar nicht von den durch G. O. SARS beschriebenen ab.

Aus Mongolien war diese Varietät bisher unbekannt, G. O. SARS hat sie aus den Gouvernementen Akmolinsk und Altai beschrieben.

Ord. *Ostracoda.*

Aus der Fauna von Mongolien hat E. v. DADAY die erste *Ostracode* unter dem Namen *Limnicythere mongolica* beschrieben

(3); während G. O. SARS in seiner Publikation von 1903 (17) bereits vier derselben nachgewiesen hat, und zwar die folgenden Arten: *Cypris pubera* (O. F. M.); *Cypris ovalis* SARS, *Cyprinotus incongruens* (RAMDH.) und *Iliocypris lacustris* KAUFM.

Fam. ***Cypridae.***

127. *Eucypris incongruens* (RAMDH.)

Eucypris incongruens E. v. DADAY 2, p. 160, Fig. 22 *a—k.*

Aus Mongolien hat schon G. O. SARS diese Art nachgewiesen, die ich übrigens auch in den Gouvernements Akmolinsk und Atbassar beobachtete. Bei meinen Untersuchungen habe ich sie bloß von den Bulunai-Quellen verzeichnet, aber auch hier fand ich bloß Weibchen.

128. *Herpetocypris strigata* (O. F. M.)

Herpetocypris strigata E. v. DADAY 2, p. 166, Fig. 23 *a—d.*

Bisher war diese Art bloß aus Europa bekannt; ich fand sie nur an einem Fundort, und zwar an der Mündung des Flusses Changa, woher mir nur einige Exemplare vorlagen.

129. *Cypridopsis vidua* (O. F. M.)

Cypridopsis vidua E. v. DADAY 2, p. 188, Fig. 29 *a—d.*

Eine fast kosmopolitische Art, die trotzdem aus Mongolien bisher unbekannt war. Bei meinen Untersuchungen fand ich sie bloß an folgenden zwei Fundorten: Kiren-nor, Chorchito-nor. An jedem dieser Fundorte fand ich nur wenige Exemplare.

130. *Cypria ophthalmica* (JAN.)

Cypria ophthalmica E. v. DADAY 2, p. 225, Fig. 41 *a—k.*

Eine der seltenen Arten, die ich bei meinen Untersuchungen bloß in dem Materiale von folgenden Fundorten angetroffen habe: Mündung des Flusses Changa; erster kleiner See nördlich des Angolheim-Sees; Chorchoito-nor. Ich fand bloß Weibchen.

131. *Candona candida* (O. F. M.)

Candona candida E. v. DADAY 2, p. 268, Fig. 57 *a—n.*

Eine nahezu kosmopolitische Art, die aber aus Mongolien bisher dennoch unbekannt war. G. O. SARS hat sie bloß aus dem Gouvernement Altai verzeichnet. Bei meinen Untersuchungen habe ich sie an drei Fundorten beobachtet: Kossogol, beim Cap Toilgot; Chubtu-nor; Ajagam-maranai-bulun.

132. *Eucandona rostrata* (BRADY-NOREN.)

Eucandona rostrata E. v. DADAY 2, p. 244, Fig. 46 *a—k*.

Diese Art hat eine sehr beschränkte geographische Verbreitung; bisher war sie bloß aus Europa bekannt. In Mongolien gehört sie nicht zu den häufigen Arten, darauf weist wenigstens der Umstand hin, daß ich sie bei meinen Untersuchungen nur an einem Fundorte, und zwar bei Ajagam-maranai-bulun antraf und auch hier war sie nicht häufig, denn ich fand bloß einige Weibchen.

133. *Eucandona tuberculata* DAD.

Fig. 9 *a—f*.

Eucandona tuberculata DADAY J., 4 *a*, p. 62.

Die Schalen sind in der Seitenlage einigermaßen nierenförmig, aber hinten weit höher als vorn. Der vordere Schalenrand überragt die halbe Höhe der hinteren bloß ganz wenig, ist spitz gerundet, geht in den Rücken- und Bauchrand gleichmäßig über, besitzt einen ziemlich breiten Porenkanalgürtel und ist dicht behaart (Fig. 9 *a*). Der dorsale Schalenrand ist im ganzen stumpfbogig, bis zum hinteren Drittel schwach abschüssig aufsteigend, im hinteren Drittel am höchsten und fällt von hier an steil, gewölbt abschüssig zum Hinterrand herab (Fig. 9 *a*). Der Hinterrand ist fast vertikal, über dem oberen Drittel

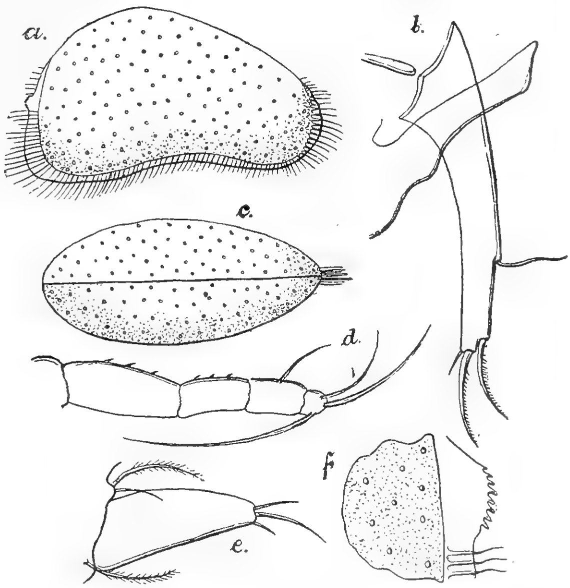


Fig. 9.

erhebt sich an beiden Schalenhälften ein stumpf gerundeter Höcker (Fig. 9 *a*); am freien Rand des Höckers zeigen sich 7—8 kleine fingerförmige Vorsprünge, die mit der Spitze nach unten blicken, je eine feine kurze Borste tragen und den Höcker sägeartig erscheinen lassen (Fig. 9 *f*). Die Anwesenheit dieser Höcker gab Veranlassung zur Benennung der Art. Auch der Hinterrand hat einen Porenkanalgürtel, welcher am unteren Ende am breitesten und ober den Höckern stark verengt ist, allein Porenkanäle und Borsten zeigen sich eigentlich bloß bis zu den Höckern. Der Bauchrand der Schale ist in der Mitte breit und seicht ausgebuchtet, vor der Bucht schwach bogig, hinter der Bucht nach unten bogig abschüssig, dann aber gerade und bildet mit dem Hinterrand einen merklichen, abgerundeten Winkel, trägt in der ganzen Länge einen Porenkanalgürtel, welcher im hinteren Drittel weit breiter ist als sonstwo. Die Struktur der beiden Schalen ist übrigens ganz gleichförmig.

Von oben gesehen (Fig. 9 *c*) sind die Schalen schmal eiförmig, an beiden Enden gerundet, allein das vordere Ende ist spitzer als das hintere.

Die Wandung der Schalen ist fein granuliert und an der ganzen Oberfläche behaart. Die Härchen stehen am vorderen Schalenrand, parallel desselben in dichten Reihen, an anderen Stellen spärlich zerstreut (Fig. 9 *a*).

Das erste und zweite Antennenpaar, der Mandibulartaster und die Maxillen erinnern an diejenigen der übrigen Arten der Gattung. Der Taster des Maxillarfußes ist relativ kurz und dick und trägt an der Spitze drei verschieden lange Borsten; von den zwei Borsten, welche den Kiemenhang substituieren, ist die eine kräftig gefiedert, die andere schwach, kurz und glatt (Fig. 9 *e*).

Am ersten Fuß ist der Unterrand des proximalen 2. Gliedes mit in 5 Bündeln angeordneten Borsten bedeckt. Das 3. Glied trägt an der unteren Ecke eine Borste und ist oben mit Borstenbündeln bewehrt, ebenso ist auch das 4. Glied; das 5. Glied ist etwas über halb so lang wie das 4., annähernd kugelförmig. Die Endkralle an der Basis mit zwei ziemlich langen Borsten bewehrt. Die Endkralle ist so lang wie die der drei letzten Fußglieder zusammen, sichelförmig, aber relativ schwach.

Am zweiten Fußpaar ist das proximale 2. Glied so lang wie die darauffolgenden zwei zusammen, am Hinterrand mit zwei kleinen Zähnchen bewehrt. Die nachfolgenden zwei Fußglieder sind gleichlang, das eine trägt eine Borste, das andere dagegen am Hinterrand 3 kleine Zähnchen (Fig. 9 *d*). Das letzte Glied ist nur halb so lang als das voranstehende, die Seitenborste überragt kaum die Gesamtlänge der distalen 3 Fußglieder; von den Endborsten ist eine so lang wie die distalen drei Fußglieder zusammen, während die andere nur wenig länger ist als die drei letzten Fußglieder zusammen (Fig. 9 *d*).

Der Furkalanhang ist säbelförmig, gegen das distale Ende verengt, die Randborste sitzt im hinteren Drittel, die Endkrallen sind ziemlich dünn, fast gleichförmig, weit kürzer als die halbe Länge des Furkalanhanges; die Endborste ist bloß so lang wie die geringste Breite der Furkalanhänge (Fig. 9 *b*).

Die Vulva ist nach hinten auffällig gestreckt, einem schwachen Bande gleich, das distale Ende schief, der Unterrand bildet am proximalen Ende einen Doppelhöcker, und ist hier auch breiter (Fig. 9 *b*).

Es lag mir ein einziges Weibchen vor mit reifen Eiern und Samenfäden im receptaculum seminis.

Fundort: Fluß Mota.

Von den bisher bekannten Arten der Gattung ist diese durch die Schalenform, hauptsächlich aber vermöge der Höcker am Schalenhinterrand leicht zu unterscheiden. Durch ein auffälliges Merkmal, die bandförmig gestreckte Vulva aber erinnert die neue Art auch an *Eucandona Elpatiewskyi* Dad.

134. *Eucandona Elpatiewskyi* Dad.

Fig. 10 *a—h*.

Eucandona Elpatiewskyi Daday J. 4*a*, p. 64.

Die Schalen sind von der Seite gesehen einigermaßen nierenförmig, vorn und hinten fast gleich hoch, die größte Höhe fällt etwas hinter die Mitte. Der Vorderrand ist von dem Rückenrand durch eine schwache Vertiefung getrennt, von welcher derselbe bogig abschüssig herabzieht und mit dem Bauchrand einen spitz gerundeten breiten Winkel bildet; in der ganzen Länge trägt derselbe einen Porenkanalgürtel, welcher nach oben allmählich verengt ist (Fig. 10 *a*). Der Rückenrand steigt von der Grenzvertiefung an dachförmig empor, ist fast gerade, bildet aber hinter der Mitte einen abgerundeten Höcker, ist von hier an wieder abschüssig und vereinigt sich dann unbemerkt mit dem Hinterrand (Fig. 10 *a*). Der Hinterrand hat fast dieselbe Form und Struktur wie der Vorderrand, ist indessen nach oben gerade und bildet mit dem Bauchrand gleichfalls einen gerundeten Höcker, der Porenkanalgürtel erscheint breiter als der am Vorderrand. Der Bauchrand ist in der Mitte ein wenig breit gebuchtet, trägt in der ganzen Länge einen Porenkanalgürtel, welcher hinter der Bucht breiter ist als vor derselben (Fig. 10 *a*).

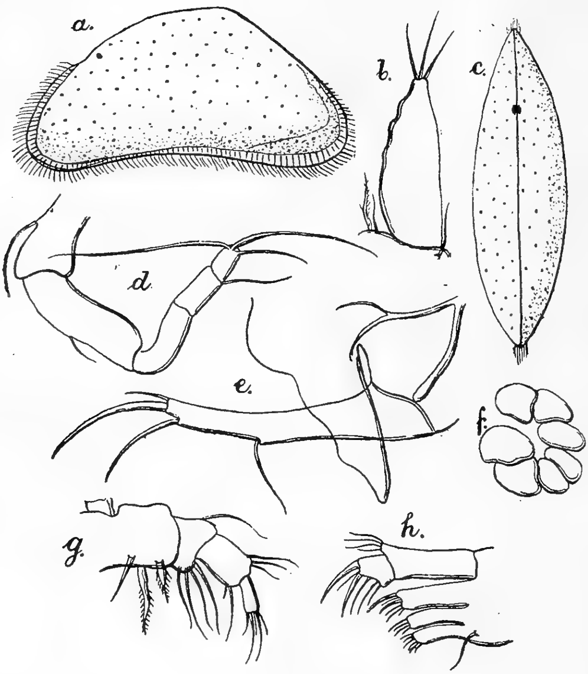


Fig. 10.

Von oben gesehen gleichen die Schalen einem schmalen Ei, fast einem Kahn, sind an beiden Enden gespitzt, indessen vorn mehr als hinten. Die größte Breite fällt in die Mitte (Fig. 10 *c*).

Die Schalenwandung ist fein granuliert und spärlich behaart. Die 7 Muskelabdrücke liegen nahe beieinander und bilden fast eine geschlossene Gruppe (Fig. 10 *f*).

Das erste und zweite Antennenpaar erinnert an diejenigen der übrigen Arten dieser Gattung. Am proximalen Glied des Mandibulartasters sitzt eine lange und eine kurze, gefiederte Tastborste; an der hinteren Ecke des zweiten Gliedes erheben sich vier lange Borsten, die gleichsam ein Bündel bilden, an der Spitze des letzten Gliedes ragen zwei Krallen und drei kurze Borsten auf (Fig. 10 *g*).

Am zweiten Glied des Maxillartasters sitzen zwei kräftige

Krallen und zwischen denselben eine kurze Borste, sowie in einer abschüssigen Reihe drei längere Borsten. Von den Kaufortsätzen ist der erste außer den Endborsten mit zwei glatten Krallen bewehrt (Fig. 10 *g*).

Der Taster des Maxillarfußes ist an einem Rande wellig, am anderen gerade, die Endborsten sind fast gleichlang; von den zwei Borsten, welche den Kiemenfortsatz substituieren, ist die eine kurz und glatt, die andere aber lang befiedert (Fig. 10 *h*).

Am ersten Fußpaar ist das proximale 2. Glied so lang wie die nächstfolgenden drei Glieder zusammen, an der unteren Ecke sitzt, ebenso wie an derjenigen der nächstfolgenden zwei Glieder eine Borste, während der Unterrand mit 6 Borstenbündeln bewehrt ist. Die beiden nächstfolgenden Glieder sind gleichlang, während das Endglied kaum halb solang ist wie das vorletzte. Die Endkralle ist etwas länger als die halbe Fußlänge.

Am zweiten Fußpaar sind die zwei vorletzten Glieder zusammen so lang wie das proximale 2. Glied. Das letzte Glied ist länger als die Hälfte des vorhergehenden, die Randborste ist so lang wie die drei distalen Fußglieder zusammen, von den Endborsten ist die eine nur wenig kürzer als die Randborste, während die andere nicht ganz so lang ist wie die zwei ersten Fußglieder zusammen (Fig. 10 *d*).

Die Furkalanhänge sind, besonders im distslen Drittel, schwach säbelförmig gekrümmt, gegen Ende allmählich verengt; die Randborste ist so lang wie die hintere Endkralle, die vordere Endkralle ist länger und kräftiger als die hintere, die Endborste sehr kurz (Fig. 10 *c*).

Die Vulva ist nach hinten stark gestreckt und endigt spitz, der Unterrand ist wellig, an der Basis liegen zwei größere Wülste (Fig. 10 *c*).

Die Schalenlänge beträgt 1,5 mm, die größte Höhe 0,75 mm.

Fundort: Kap Motta-bulun. Es lag mir bloß ein einziges geschlechtsreifes Weibchen vor.

Diese neue Art, die ich nach dem Sammler W. S. ELPATIEWSKY benannt habe, ist von den bisher bekannten Arten der Gattung, vermöge der Schalenform annähernd der *Eucandona diversa* KAUFM. ähnlich, unterscheidet sich indessen von derselben außer den Verschiedenheiten in der Schalenstruktur durch die Struktur der Vulva und erinnert in dieser Beziehung an *Eucandona tuberculata* DAD.

135. *Iliocypris gibba* (RAMDH.).

Iliocypris gibba E. v. DADAY **2**, p. 230, Fig. 42 *a—m*.

Aus Mongolien war diese Art bisher nicht bekannt. Bei meinen Untersuchungen fand ich sie in dem Material von folgenden zwei Fundorten: Chubtu-nor; Fluß Mota.

136. *Iliocypris lacustris* KAUFMANN.

Iliocypris lacustris A. KAUFMANN **8**, p. 349, Taf. 24, Fig. 5—7, Taf. 25, Fig. 7—16, Taf. 31, Fig. 25.

Diese Art ist aus Europa bloß von schweizer Fundorten bekannt; aus Mongolien hat sie G. O. SARS zuerst von dem Fundort Isudjen-goe verzeichnet. Ich habe bei meinen Untersuchungen bloß einmal eine leere Schale gefunden, und zwar in dem Material aus dem Kossogol bei Cap Toilgot.

Fam. ***Cytheridae.***

137. *Limnicythere incisa* DAHL.

Limnicythese incisa G. O. SARS **17**, p. 226, Taf. 16, Fig. 61—62.

Eine wenig verbreitete Art, die außer Europa bloß in Asien bekannt ist, von woher sie G. O. SARS aus dem Gouvernement Akmolinsk und Altbassar verzeichnet hat. Ich fand sie nur in dem Material von dem Fundort Chubtu-nor.

Ord. ***Amphipoda.***

Fam. ***Gammaridae.***

138. *Gammarus* sp.?

In dem vorliegenden Material fand ich an vielen Fundorten eine großer Menge von *Gammarus*-Exemplaren, war jedoch nicht in derLage dieselben bestimmen zu können.

Klass. ***Arachnoidea.***

Ord. ***Tardigrada.***

139. *Macrobiotus macronyx* DUJ.

Macrobiatus macronyx R. GRAEFF, Untersuchungen über den Bau und die Naturgesch. d. Bärtierchen, Arch. f. mikr. Anat. V. 2, p. 121, Taf. 6, Fig. 4.

Diese Art ist in der Fauna von Mongolien häufig; ich fand sie nämlich bei meinen Untersuchungen in dem Material von folgenden Fundorten: Mündung des Flusses Changa; Ufer der Halbinsel Dolon-ula; Mündung des Flusses Djeglyk; Pfütze im Tal des Flusses Turuk; Borsok-See; Vereinigunsstelle des Borsok-Sees und des Kossogol.

Ord. *Acarina.*

Fam. *Hydrachnidae.*

140. *Eulais Elpatiewskyi* Dad.

Fig. 11 *a—c.*

Eulais Elpatiewskyi Daday J. 4*a*, p. 66.

Der Körper in geringem Maße eiförmig, hinten etwas stumpfer gerundet als vorn; die Länge beträgt 3 mm, der größte Durchmesser 2,3 mm.

Die Haut ist mit feinen Linien besetzt und spärlich granuliert. Die Farbe ist unbekannt, denn das in Spiritus konservierte Exemplar war ganz farblos.

Die Länge des Capitulum beträgt vom Anfang der Mundscheibe gerechnet 0,47 mm. Der Hinterrand ist schwach bogig, die ganze Oberfläche erscheint granuliert, besonders rings der Mundscheibe (Fig. 12 *a*). Die Mundscheibe ist fast vollständig kreisrund, ihr Durchmesser 0,36 mm; unter derselben ist das Capitulum nur ganz wenig vertieft. Die Luftsäcke überragen, nach hinten gelegt, den Pharynx nicht. Das hintere Ende des Pharynx ist einfach gerundet, ohne Ring.

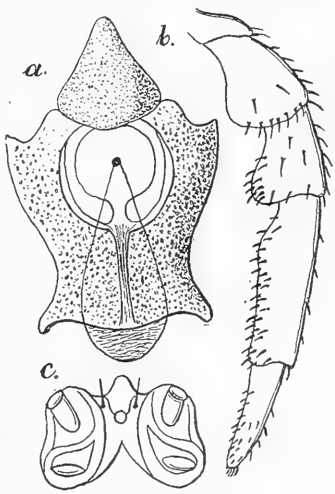


Fig. 11.

Am Maxillartaster ist das erste Glied halb so lang als das zweite und gegen Ende verbreitert. Das distale Ende des zweiten Gliedes ist auffallend breit, mehr als doppelt so breit wie an der Basis, die innere bzw. untere Ecke stumpf gerundet, entlang des distalen Randes erheben sich 7—8 Borsten in einer Reihe an der Innenseite, wogegen an der

Außenseite bloß 4 stehen (Fig. 12 *b*). Das dritte Glied ist wenig schmäler als das zweite aber ebenso geformt, an der Innenseite der inneren, bzw. Bauchecke zeigen sich viele kleine Härchen, während die Außenseite unbehaart ist, am distalen Rande erheben sich innen und außen 3—4 Borsten in einer Reihe. Das vierte Glied ist doppelt so lang als das dritte, gegen das distale Ende schwach verengt, an der Außenseite stehen entlang des Randes bloß 8—10, an der Innenseite dagegen zahlreiche Borsten (Fig. 11 *b*). Das fünfte Glied ist länger als die Hälfte des vierten, ziemlich dicht behaart, an der Endecke erheben sich 4—5 dornförmige Zähnchen.

Die Fußglieder sind dicht beborstet, sämtliche Borsten sind glatt. Die einzelnen Fußpaare werden nach hinten allmählich länger. An der Endkralle des vierten Fußpaares zeigt sich eine kräftige Nebenkralle.

Die einzelnen Augenbrillen sind nierenförmig, die Ecken fast gleichförmig abgerundet; die vordere Linse ist kegel-, die hintere kahnförmig. Die einzelnen Augenbrillen sind 0,25 mm lang. Die Brücke zwischen den Augenbrillen ist am Vorderrand kegelförmig vorspringend, die Ecke gerundet, der Hinterrand tief und spitz eingeschnitten (Fig. 11 *c*). Die Brücke ist auffällig breit, insofern sie von der vorderen Ecke der Augenbrillen bis zum hinteren zieht; ihre Länge beträgt zirka 0,08 mm, ihre Breite 0,2 mm. Die Kutikularverdickung zur Anheftung der Muskeln ist kreisförmig.

Fundort: Chubtu-nor.

Es lag mir bloß ein Exemplar dieser Art vor; ich benenne sie zu Ehren des Sammlers W. S. ELPATIEWSKY; sie steht unter den bisher bekannten Arten dieser Gattung der von C. RIBAGA abgebildeten *Eulais protendens* BERL. am nächsten.

141. *Hydrachna geographica* (O. F. M.).

Hydrachna geographica R. PIERSIG **14**, p. 439, Taf. 42, Fig. 122.

Fundort: Fluß Morin-Tuskul, woher mir zwei Exemplare vorlagen, und zwar ein Männchen und ein Weibchen. Die Haut beider ist fein mit feinen Warzen besetzt, die Warzen sind ziemlich vorstehend.

Am zweiten Glied der Maxillartaster stehen am Rücken kurze Borsten. Die Körperlänge beträgt 4,5 mm, der größte Durchmesser 4 mm.

142. *Mideopsis orbicularis* (O. F. M.).

Mideopsis orbicularis R. PIERSIG **14**, p. 263, Taf. 26, Fig. 67.

Es lag mir ein einziges Weibchen dieser Art vor, welches in dem Material aus dem Flusse Morin-Tuskul vorfand. Von den Epimeren war bloß das zweite und dritte Paar scharf abgesondert, während vom ersten und vierten das Hinderende, bzw. die Hinterwand derart verschwommen war, daß dieselbe mit der Schale ganz verwachsen erschien.

143. *Lebertia tauinsignita* (LAB.).

Lebertia tauinsignita R. PIERSIG **14**, p. 233, Taf. 10, Fig. 51.

Ich habe diese Art nur in dem Material von der Mündung des Flusses Changa gefunden und auch hier nur ein Weibchen, welches mehrere Eier enthielt. Die Körperlänge beträgt 2 mm, der größte Durchmesser 1,8 mm. Die Haut erscheint fein granuliert, allein die einzelnen Punkte sind nichts anderes als winzige Dornen, die nur bei stärkerer Vergrößerung sichtbar sind.

144. *Limnesia connata* KOEN.

Limnesia connata R. PIERSIG **14**, p. 217, Taf. 22, Fig. 88.

Bei meinen Untersuchungen habe ich bloß ein Exemplar gefunden, und zwar in dem Material von dem Fundort Kiren-nor; die Länge desselben beträgt 2 mm, der größte Durchmesser 1,4 mm. Rings der Geschlechtslamelle jedes Exemplares, sowie zwischen dem ersten und zweiten Genitalnapf erheben sich kleine feine Borsten.

145. *Limnesia histrionica* HERM.

Limnesia histrionica R. PIERSIG **14**, p. 205, Taf. 23, Fig. 60.

In dem Material aus dem Fluß Morin-Tuskul fand ich zwei Männchen, deren Länge 2 mm, der größte Durchmesser aber 1,2 mm betrug.

146. *Hygrobates octoporus* DAD.

Fig. 12 *a*, *b*.

Hygrobates octoporus DADAY J. **4** *a*, p. 67.

Der Körper ist ellipsenförmig, vorn und hinten gleich breit abgerundet; die Länge beträgt 1,7 mm, der größte Durchmesser 1 mm.

Die Haut ist weich, geschmeidig, mit feinen Linien versehen.

Die Epimeren nehmen die vordere Körperhälfte ein. Das erste Epimerenpaar ist in der hinteren Hälfte miteinander verschmolzen, der Hinterrand bogig abgerundet, die beiden Seitenwinkel vorspringend (Fig. 12 *a*). Am zweiten Epimerenpaar sind beide Hälften gesondert, gestreckt keilförmig, nur bis zur hinteren vorspringenden Ecken des ersten Paares reichend. Am dritten Epimerenpaare sind beide Hälften gleichfalls keilförmig, wie am zweiten, aber dicker, nach innen und hinten gerichtet, im hinteren Viertel erhebt sich eine lange Tastborste (Fig. 12 *a*). Das vierte Epimerenpaar ist größer als alle übrigen, der Vorderrand gerade, der Außenrand wellig, der Hinter- und Innenrand dagegen bogig, am inneren Ende ragt eine Tastborste auf. Alle Epimeren sind fein granuliert.

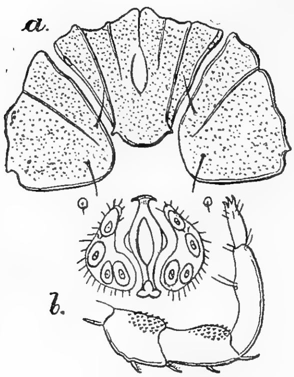


Fig. 12.

Am zweiten und dritten Glied des Palpus maxillaris erheben sich im distalen zweiten Drittel kleine Dornen, während in der Mitte des Rückens und am distalen Rand je ein kräftiger glatter Dorn sitzt. Das vierte Glied ist wenig kürzer als die voranstehenden zwei Glieder znsammen, in der Mitte des Bauchrandes erhebt sich auf einem kleinen Höckerchen eine feine Tastborste, am distalen Ende aber sitzen oben und unten je zwei feine Borsten (Fig. 12 *b*). Das letzte Glied trägt mehrere feine Borsten und ist am distalen Ende mit drei Zähnchen bewehrt.

Die Füße werden nach hinten allmählich länger, tragen wenig Schwimmborsten, alle verschieden langen Dornen und Borsten, die sich an der Oberfläche derselben erheben, sind glatt. Am dritten Fußpaar erhebt sich am distalen Rande des zweiten Gliedes außen ein mit Borsten gesäumter blattförmiger Fortsatz. Alle Füße erscheinen fein granuliert.

An beiden Seiten der Genitalöffnung zeigen sich auf einer abgesonderten Platte je vier Genitalnäpfe, wovon einer an der vorderen Ecke der Platte, einer in der Mitte und zwei an der hinteren Ecke Platz nehmen (Fig. 12 *a*). Alle Genitalnäpfe sind eiförmig, die zwei vorderen gleich groß, von den hinteren dagegen einer kleiner, der andere größer als die übrigen. Der Außenrand der Näpfe ist fein behaart.

Fundorte: Mündung der Flüsse Changa und Djeglyk; woher mir im ganzen drei Exemplare vorlagen.

Das charakteristische Merkmal dieser Art beruht in der Anzahl der Genitalnäpfe, woher sie auch den Namen *octoporus* erhielt.

147. *Pionopsis lutescens* (HERM.).

Pionopsis lutescens R. PIERSIG **14**, p. 157, Taf. 15, Fig. 39.

In dem Material aus einem Sumpf im Tal des Flusses Turuk fand ich ein Weibchen, 1,5 mm lang, welches in jeder Hinsicht mit den von R. PIERSIG abgebildeten übereinstimmte.

148. *Atax crassipes* (O. F. M.).

Atax crassipes R. PIERSIG **14**, p. 52, Taf. 3, Fig. 5.

Ich fand bloß ein einziges Exemplar in dem Material von der Mündung des Flusses Changa; der elliptische Körper desselben war 1,6 mm lang, bei einem Durchmesser von 1 mm.

149. *Piona rotunda* KR.

Curvipes rotundus R. PIERSIG, **14**, p. 118, Taf. 8, Fig. 9.

In dem Material aus dem Borsok-See fand ich zwei Exemplare, deren eines 1 mm lang und 0,7 mm breit, das andere aber 1,8 mm lang und 1 mm breit ist. Die Fußglieder sind mit glatten und gezähnten Dornen bewehrt.

150. *Piona fuscata* (HERM.).

Curvipes fuscatus R. PIERSIG **14**. p. 114, Taf. 12, Fig. 32.

Fundort: Sumpf an der Mündung des Flusses Changa, woher ich jedoch bloß ein Männchen erlangte, das ich in Kalilauge auskochte und Gelegenheit hatte, auch den Penis zu beobachten. Derselbe ist kegelförmig, besteht aus einem mit dem spitzen Ende gegen die Genitalöffnung blickenden Stamm und zwei Ästen, die beide am Vorderende des Stammes entspringen; der eine erhebt sich an der äußeren Ecke des Vorderendes, ist kräftiger halbmondförmig einwärts gekrümmt, wogegen der andere von der inneren Ecke ausgeht, dünner und fast gerade nach vorn gerichtet ist.

151. *Piona nodata* (O. F. M.).

Curvipes nodatus R. PIERSIG **14**, p. 108, Taf. 11, Fig. 30.

Ein einziges Exemplar fand ich in dem Material von den Bulunai-Quellen; dasselbe ist 2 mm lang bei einem Durchmesser von 1,8 mm.

152. *Piona conglobata* E. K.

Curvipes conglobatus R. PIERSIG **14**, p. 92, Taf. 15, Fig. 38.

In dem Material von den Bulunai-Quellen fand ich zwei Weibchen von 1,6 mm Länge mit einem Durchmesser von 1 mm.

III.

Die beobachteten Arten nach ihren Fundorten zusammengestellt.

1. Kossogol. Mündung des Flusses Changa.

I. Protozoa.

Arcella vulgaris EHRB.
„ discoides EHRB.
Difflugia urceolata EHRB.
Rhaphydiophrys elegans H. et L.
5 Euglena viridis EHRB.
Lionotus folium (DUJ.).
Strombidium Claparedii S. K.
Epistylis plicatilis EHRB.
Vorticella microstoma EHRB.

II. Rotatoria

10 Philodina aculeata EHRB.
Synchaeta pectinata EHRB.
„ tremula EHRB.
Anuraea aculeata EHRB.
„ angulata n. sp.
15 „ cochlearis KELL.
„ foliacea EHRB.
„ acuminata EHRB.
„ clypeus n. sp.
„ longispina KELL.
20 „ striata (O. F. M.).
„ labis GOSSE.
Rattulus tigris EHRB.
Diglena catellina EHRB.
„ grandis EHRB.
25 Mastigocerca carinata EHRB.
„ cornuta EYF.
„ elongata GOSSE.
„ scipio GOSSE.
„ Rattus EHRB.
30 Monostyla lunaris EHRB.
Cathypna diomis GOSSE.
„ luna EHRB.
Salpina brevispina EHRB.
Salpina spinigera EHRB.
35 Metopidia acuminata EHRB.
Lepadella ovalis EHRB.
Colurus bicuspidatus EHRB.
Euchlanis dilatata EHRB.
Dinocharis pocillum EHRB.
40 Pterodina ellyptica EHRB.
„ patina EHRB.
Triarthra longiseta EHRB.
Polyarthra platyptera EHRB.

III. Copepoda.

Cyclops serrulatus C. K.
45 „ albidus (JUV.).
„ strenuus FRISCH.
„ vicinus ULLJ.

IV. Cladocera.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Alonella nana (BAIRD).
50 „ exigua (FRISCH).
Alona rectangula SARS G. O.
Eurycercus lamellatus (O. F. M.).
Bosmina obtusirostris SARS.
Simocephalus vetulus (O. F. M.).

V. Ostracoda.

55 Cypria ophthalmica (JUV.).
Herpetocypris strigata (O. F. M.).

VI. Tardigrada.

Macrobiotus macronyx (DUJ.).

VII. Hydrachnidae.

Lebertia tauinsignita (LEB.)
Hygrobates octoporus n. sp.
60 Atax crassipes (O. F. M.).

2. Kleiner Sumpf an der Mündung des Flusses Changa.

I. Rotatoria.
Rotifer sp.
Rattulus tigris Ehrb.
Salpina brevispina Ehrb.

II. Copepoda.
Cyclops serrulatus C. K.
5 „ strenuus Frisch.
Diaptomus acutilobatus Sars.

III. Cladocera
Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Simocephalus vetulus (O. F. M.).
Daphnia pulex d. Geer.

IV. Hydrachnidae.
10 Piona fuscata (Herm.).

3. Kossogol. Zwischen dem Fluß Changa und Cap Santa.

I. Rotatoria.
Anuraea cochlearis Gosse.
„ longispina Kell.
Cathypna luna Ehrb.

II. Copepoda.
Cyclops vicinus Ullj.
5 Diaptomus lobatus Lillj.

III. Cladocera.
Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Alonella exigua (Frisch).
Alona costata Sars.
Bosmina obtusirostris Sars G. O.

4. Kossogol. Zwischen der Mündung des Flusses Than und Cap Santa.

I. Rotatoria.
Asplanchna Brightwelli Gosse.
Synchaeta pectinata Ehrb.
Anuraea cochlearis Gosse.
„ aculeata Ehrb.
5 „ longispina Kell.
Triarthra longiseta Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

II. Copepoda.
Cyclops vicinus Ullj.
Diaptomus incrassatus Sars.

IV. Cladocera.
10 Bosmina obtusirostris Sars G. O.

5. Kossogol. Südliches Ufer der Insel Dala-kuy.

I. Protozoa.
Arcella vulgaris Ehrb.

II. Rotatoria.
Rotifer vulgaris Ehrb.
Asplanchna Brightwelli Gosse.
Anuraea aculeata Ehrb.
5 „ cochlearis Gosse.
„ longispina Kell.
Euchlanis dilatata Ehrb.
Triarthra longiseta Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

III. Copepoda.
10 Cyclops vicinus Ullj.
Diaptomus incrassatus Sars.

IV. Cladocera.
Chydorus sphaericus (O. F. M.).
13 Daphnia longispina (O. F. M.) var.

6. Im Sande der lithoralen Zone des Kossogol.

I. Protozoa.
Arcella vulgaris Ehrb.
Difflugia constricta Ehrb.
„ pyriformis Ehrb.

II. Nematoda.
Trilobus gracilis Bart.

III. Rotatoria.
5 Anuraea aculeata Ehrb.
Anuraea cochlearis Gosse.
„ longispina Kell.
„ striata Ehrb.
Pterodina ellyptica Ehrb.
10 Triarthra longiseta Ehrb.

IV. Cladocera.
Chydorus sphaericus (O. F. M.).
12 Bosmina obtusirostris Sars.

7. Kossogol bei Cap Santa.

I. Protozoa.

Zoothamnium parasita Stein.

II. Rotatoria.

Synchaeta pectinata Ehrb.
Anuraea aculeata Ehrb.
,, foliacea Ehrb.
5 ,, longispina Kell.
,, labis Gosse.
Triarthra longiseta Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

III. Copepoda.

Cyclops strenuus Tisch.
10 ,, vicinus Ullj.
Diaptomus incrassatus Sars.

IV. Cladocera.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Bosmina obtusirostris Sars.
,, Lilljeborgii Sars.
15 Daphnia longispina var.

8. Kossogol. Ufer der Halbinsel Dolon-ula.

I. Protozoa.

Arcella vulgaris Ehrb.
,, discoides Ehrb.
Difflugia globulosa Ehrb.
,, urceolata Ehrb.
5 Rhaphydiophrys elegans H. et L.
Euplotes charon Ehrb.

II. Rotatoria.

Synchaeta tremula Ehrb.
Anuraea aculeata Ehrb.
,, cochlearis Gosse.
10 ,, longispina Kell.
,, labis Gosse.
,, striata (O. F. M.).
Furcularia gibba Ehrb.
Monostyla lunaris Ehrb.
15 ,, quadridentata Ehrb.
Triarthra longiseta Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

III. Copepoda.

Cyclops vicinus Lillj.
Diaptomus incrassatus Sars.

IV. Cladocera.

20 Chydorus sphaericus (O. F. M.)
Alonella nana (Baird).
Alona affinis Leyd.
,, costata Sars.
Bosmina obtusirostris Sars.
25 Daphnia longispina Leyd.

V. Tardigrada.

Macrobiotus macronyx (Duj.).

9. Kossogol bei Kap Toilgot.

I. Rotatoria.

Rotifer macrurus Ehrb.
Anuraea longispina Kell.

II. Copepoda.

Cyclops vicinus Lillj.
Diaptomus incrassatus Sars.

III. Cladocera.

5 Bosmina obtusirostris Sars G. O.

IV. Ostracoda.

Candona candida (O. F. M.).
Iliocypris lacustris Kaufm.

10. Angolheim-See.

I. Protozoa.

Arcella vulgaris Ehrb.
,, discoides Ehrb.
Centropysis aculeata Ehrb.
Euglena deses Ehrb.
5 Oxytricha pellionella Ehrb.

II. Hydroidea.

Hydra viridis Z.

III. Nematoda.

Trilobus gracilis Bart.

IV. Rotatoria.

Asplanchna Brightwelli Gosse.
Floscularia sp.
10 Synchaeta tremula Ehrb.
Ploesoma sibirica Dad.

Anuraea aculeata Ehrb.
„ cochlearis Gosse.
„ longispina Kell.
15 „ striata Ehrb.
Mastigocerca cornuta Eyf.
Monostyla lunaris Ehrb.
Metopidia lepadella Ehrb.
Salpina brevispina Ehrb.
20 „ spinigera Ehrb.
Dinocharis pocillum Ehrb.
Euchlanis dilatata Ehrb.
Cathypna luna Ehrb.
Pterodina ellyptica Ehrb.
25 „ patina Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

V. Copepoda.

Cyclops serrulatus C. K.
„ fuscus (Juv.).
Ophiocamptus mogolicus n. sp.
30 Diaptomus incrassatus Sars.

VI. Cladocera.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Alonella nana (Baird).
Acroperus harpae Baird.
Bosmina obtusirostris Sars.
35 „ longirostris (O. F. M.).

11. Erster kleiner See nördlich des Angolheim-Sees.

I. Rotatoria.

Synchaeta pectinata Ehrb.
Anuraea aculeata Ehrb.
„ cochlearis Gosse.
Euchlanis dilatata Ehrb.
5 Triarthra longiseta Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

II. Copepoda.

Cyclops serrulatus C. K.
„ strenuus Tisch.
„ vicinus Lillj.
10 Ophiocamptus mongolicus n. sp.
Diaptomus lobatus Lillj.

III. Cladocera.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Alona affinis Leyd.
„ costata Sars.
15 Simocephalus vetulus (O. F. M.).
Daphnia longispina var.
„ „ v. caudata Sars.
„ „ v. tenuitesta Sars.
„ carinata King.

IV. Ostracoda.

20 Cypria ophthalmica (Jur.).

12. Zweiter kleiner See nördlich des Angolheim-Sees.

I. Protozoa.

Arcella vulgaris Ehrb.
Euglena viridis Ehrb.

II. Rotatoria.

Asplanchna Brightwelli Gosse.
Floscularia sp.
5 Ploesoma siberica Dad.
Anuraea aculeata Ehrb.
„ cochlearis Gosse.
„ clypeus n. sp.
„ longispina Kell.
10 Pterodina ellyptica Ehrb.
Triarthra longiseta Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

III. Copepoda.

Diaptomus incrassatus Sars.
„ lobatus Lillj.

IV. Cladocera.

15 Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Alonella nana (Baird).
Alona affinis Leyd.
„ guttata Sars G. O.
Acroperus harpae Baird.
20 Bosmina obtusirostris Sars.
Scapholeberis mucronata (O.F.M.)
Ceriodaphnia reticulata (Jur.).
„ rotunda Sars.
Daphnia longispina Leyd.
25. Daphnia magna Str.

13. Kossogol. 200 m südlich der Insel Dala-kuy.

I. Rotatoria.

Anuraea aculeata Ehrb.
„ longispina Kell.
Triarthra longiseta Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

II. Copepoda.

5 Cyclops vicinus LILLJ.
Diaptomus incrassatus SARS.

III. Cladocera.

Bosmina obtusirostris SARS.

14. Kossogol. Zwischen der Insel und dem westlichen Ufer des Kossogol.

I. Rotatoria.

Synchaeta pectinata EHRB.
„ tremula EHRB.
Ploesoma sibirica DAD.
Anuraea aculeata EHRB.
5 „ cochlearis GOSSE.
„ longispina KELL.
Triarthra longiseta EHRB.
Polyarthra platyptera EHRB.

II. Copepoda.

Cyclops vicinus ULLJ.
10 Diaptomus incrassatus SARS.

III. Cladocera.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Alonella exigua (TISCH.).
Alona costata SARS.
Bosmina obtusirostris SARS.
15 „ Lilljeborgii SARS.
Ceriodaphnia reticulata (JUR.).

15. Chubtu-nor.

I. Protozoa.

Arcella vulgaris EHRB.
Difflugia urceolata EHRB.
Euglypha alveolata EHRB.

II. Rotatoria.

Synchaeta tremula EHRB.
5 Anuraea aculeata EHRB.
„ cochlearis GOSSE.
„ striata EHRB.
Diglena catellina EHRB.
Euchlanis dilatata EHRB.
10 Polyarthra platyptera EHRB.

III. Cladocera.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Daphnia magna STR.
„ pulex d. GEER.

IV. Ostracoda.

Candona candida (O. F. M.).
15 Iliocypris gibba (RAMD.).
Limnicythere incisa DAHL.

V. Hydrachinidae.

Eulais Elpatiewskyi n. sp.

16. Gytschygenty-nor.

I. Protozoa.

Arcella vulgaris EHRB.
Centropyxis aculeata EHRB.

II. Rotatoria.

Anuraea aculeata EHRB.
„ cochlearis GOSSE.
5 „ foliacea EHRB.
Rattulus tigris EHRB.
Mastigocerca scipio GOSSE.
Monostyla lunaris EHRB.
Cathypna luna EHRB.
10 Lepadella ovalis EHRB.
Salpina brevispina EHRB.
Dinocharis pocillum EHRB

III. Copepoda.

Diaptomus Zichyi DAD.

IV. Cladocera.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
15 Alona quadrangularis (O. F. M.).
Scapholeberis mucronata (O.F.M.).
Daphnia longispina LEYD.

17. Cheltige-nor.

I. Protozoa.

Arcella discoides EHRB.

II. Nematoda.

Plectus tenuis BAST.

III. Gastrotricha.

Chaetonotus polychaetus n. sp.

IV. Rotatoria.

Anuraea aculeata EHRB.
5 „ longispina KELL.

Lepadella ovalis Ehrb.
Euchlanis dilatata Ehrb.
Pterodina patina Ehrb.
Triarthra longiseta Ehrb.

V. Copepoda.

10 Cyclops serrulatus C. K.
Canthocamptus northumbricus [Brad.
Ophiocamptus mongolicus n. sp.
Diaptomus Zichyi Dad.

VI. Cladocera.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
15 Alonella exigua (Tisch.).
Alona affinis Leyd.
„ costata Sars.
„ guttata Sars.
Ceriodaphnia rotunda Sars.
20 Simocephalus vetulus (O. F. M.).

18. Ajagam-maranai-bulun.

I. Rotatoria.

Synchaeta pectinata Ehrb.
Anuraea aculeata Ehrb.
Cathypna luna Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

II. Copepoda.

5 Cyclops serrulatus C. K.
„ strenuus Tisch.
Diaptomus Zichyi Dad.

III. Cladocera.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Alona quadrangularis (O. F. M.).
10 „ costata Sars.
Macrothrix odontocephala Dad.
Simocephalus vetulus (O. F. M.).
Daphnia longispina Leyd. var.

IV. Ostracoda.

Candona candida (O. F. M.).
15 Eucondona rostrata (C. K.).

19. Kossogol. Mündung des Flusses Djeglyk.

I. Protozoa.

Centropyxis aculeata (Ehrb.).

II. Hydroidea.

Hydra viridis L.

III. Nematoda.

Trilobus gracilis Bart.

IV. Rotatoria.

Asplanchna Brightwelli Gosse.
5 Anuraea aculeata Ehrb.
„ cochlearis Gosse.
„ acuminata Ehrb.
„ longispina Kell.
„ striata Ehrb.
10 Furcularia forficula Ehrb.
Mastigocerca carinata Ehrb.
Monostyla lunaris Ehrb.
„ quadridentata Ehrb.
Lepadella ovalis Ehrb.
15 Dinocharis pocillum Ehrb.
Scardium longicaudum Ehrb.
Euchlanis dilatata Ehrb.
Pterodina patina Ehrb.
Triarthra longiseta Ehrb.
20 Polyarthra platyptera Ehrb.

V. Copepoda.

Cyclops serrulatus C. K.

VI. Cladocera.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Alona affinis Leyd.
„ costata Sars.
25 Macrothrix odontocephala Dad.
Bosmina obtusirostris Sars.
Simocephalus vetulus (O. F. M.).
Daphnia longispina Leyd.
„ pulex d. Geer.

VII. Tardigrada.

30 Macrobiotus macronyx (Duj.)

VIII. Hydrachnidae.

31 Hygrobates octoporus n. sp.

20. Kossogol. Fluß Noin-gol.

I. Protozoa.
Epistylis plicatilis Ehrb.

II. Rotatoria.
Monostyla lunaris Ehrb.
Metopidia lepadella Ehrb.

III. Cladocera.
Chydorus sphaericus (O. F. M.).

21. Kleiner See bei der Mündung des Flusses Chatschim.

I. Protozoa.
Arcella vulgaris Ehrb.
Centropyxis aculeata (Ehrb.).
Difflugia lobostoma Ehrb.
Rhaphydiophrys elegans H. et Z.

II. Gastrotricha.
5 Chaetonotus polychaetus n. sp.

III. Rotatoria.
Philodina roseola Ehrb.
Anuraea cochlearis Gosse.
„ longispina Kell.
„ striata Ehrb.
10 Mastigocerca elongata Gosse.
Cathypna luna Ehrb.
Monostyla lunaris Ehrb.
Dinocharis pocillum Ehrb.
Euchlanis dilatata Ehrb.
15 Lepadella ovalis Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

IV. Copepoda.
Cyclops serrulatus C. K.
„ strenuus Fisch.

V. Cladocera.
Chydorus sphaericus (O. F. M.).
20 Alonella exigua (Fisch.).
Alona quadrangularis (O. F. M.).
„ costata Sars.

22. Chatschim-nor.

I. Nematoda.
Dorilaymus filiformis Bart.

II. Rotatoria.
Anuraea aculeata Ehrb.
„ cochlearis Gosse.
„ longispina Kell.
5 Triarthra longiseta Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

III. Copepoda.
Diaptomus incrassatus Sars.
„ lobatus Lillj.

IV. Cladocera.
Chydorus sphaericus (O. F. M.).
10 Leptorhynchus rostratus (C. K.).
Alona quadrangularis (O. F. M.).
Bosmina obtusirostris Sars.
Simocephalus vetulus (O. F. M.).
Daphnia longispina v. jardini Baird.
15 „ „ v. tenuitesta Sars.
„ pulex d. Geer.

23. Kossogol. Bucht im Tal des Flusses Chatschim.

I. Rotatoria.
Anuraea aculeata Ehrb.
„ cochlearis Gosse.
Cathypna luna Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

II. Copepoda.
5 Cyclops vicinus Lillj.
Diaptomus lobatus Ullj.

III. Cladocera.
Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Alonella exigua (Ficsh.).
Daphnia longispina Leyd.

24. Kossogol. Mündung des Flusses Tochomyk.

I. Protozoa.

Arcella vulgaris Ehrb.
Centropyxis aculeata Ehrb.

II. Rotatoria.

Synchaeta pectinata Ehrb.
Anuraea cochlearis Gosse.
5 „ foliacea Ehrb.
„ longispina Kell.
„ striata (O. F. M.).
Cathypna luna Ehrb.
10 Salpina spinigera Ehrb.
Triarthra longiseta Ehrb.

III. Copepoda.

Ophiocamptus mongolicus n. sp.
Diaptomus incrassatus Sars.
Cyclops vicinus Ullj.

IV. Cladocera.

15 Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Bosmina obtusirostris Sars G. O.

25. Kossogol. Mündung des Flusses Turuk.

I. Protozoa.

Arcella vulgaris Ehrb.
Cyphoderia ampulla (Ehrb.).

II. Gastrotricha.

Chaetonotus polychaetus n. sp.

III. Rotatoria.

Philodina aculeata Ehrb.
5 Anuraea aculeata Ehrb.
„ cochlearis Gosse.
„ acuminata Ehrb.
„ longispina Kell.
„ striata (O. F. M.).
10 „ labis Gosse.
Mastigocerca carinata Ehrb.
„ cornuta Eyf.
Salpina brevispina Ehrb.
Scaridium longicaudum Ehrb.
15 Lepadella ovalis Ehrb.
Colurus bicuspidatus Ehrb.
Euchlanis dilatata Ehrb.
Pterodina patina Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

IV. Copepoda.

20 Cyclops serrulatus C. K.
„ strenuus Tisch.
„ vicinus Ullj.

V. Cladocera.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Alonella nana (Baird.).
25 Macrothrix odontocephala Dad.

26. Pfütze im Tal des Flusses Turuk.

I. Protozoa.

Arcella vulgaris Ehrb.
„ mitrata Ehrb.
Epistylis plicatilis Ehrb.
Vorticella microstoma Ehrb.

II. Nematoda.

5 Trilobus gracilis Bart.
Monhystera similis Bütsch.
Plectus tenuis Bart.

III. Rotatoria.

Rotifer sp.?
Actinurus neptunius Ehrb.
10 Melicerta ringens Ehrb.
Furcularia gibba Ehrb.
Euchlanis triquetra Ehrb.

IV. Copepoda.

Cyclops strenuus Fisch.

V. Cladocera.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
15 Alona affinis Leyd.
„ costata Sars
Acroperus harpae Baird.
Scapholeberis mucronata (O.F.M.).
Daphnia pulex d. Geer.

VI. Tardigrada.

20 Macrobiotus macronyx (Duj.).

VII. Hydrachnidae.

Pionopsis lutescens (Herm.).

27. Fluß Morin-Tuskul.

I. Protozoa.

Arcella vulgaris Ehrb.
Difflugia constricta Ehrb.
" corona Leidy.

II. Nematoda.

Plectus tenuis Bart.

III. Rotatoria.

5 Anuraea aculeata Ehrb.
" cochlearis Gosse.
" foliacea Ehrb.
" longispina Kell.
Furcularia forficula Ehrb.
10 Monostyla lunaris Ehrb.
Lepadella ovalis Ehrb.
Triarthra longiseta Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

IV. Cladocera.

Chydorus spaericus (O. F. M.).
15 Macrothrix odontocephala Dad.
Bosmina obtusirostris Sars.
Daphnia longispina v. tenuitesta [Sars.

V. Hydrachnidae.

Hydrachna geographica (O. F. M.).
Mideopsis orbicularis (O. F. M.).
20 Limnesia histrionica (Herm.).

28. Verbindungsstelle des Sees Borsok und des Kossogol.

I. Protozoa.

Arcella vulgaris Ehrb.
Centropyxis aculeata (Ehrb.).
Difflugia pyriformis Perty.
" urceolata Ehrb.
5 Rhaphidiophrys elegans H. et L.

II. Hydroidea.

Hydra viridis L.

III. Nematoda.

Dorilaymus filiformis Bart.

IV. Rotatoria.

Rotifer sp.
Asplanchna Brightwelli Gosse.
10 Synchaeta pectinata Ehrb.
Anuraea aculeata Ehrb.
" cochlearis Gosse.
" foliacea Ehrb.
" clypeus n. sp.
15 " acuminata Ehrb.
" longispina Kell.
" striata Ehrb.
" labis Gosse.
Mastigocerca carinata Ehrb.
20 " cornuta Eyf.
Rattulus tigris Ehrb.
Furcularia gibba Ehrb.
Diglena catellina Ehrb.
Dinocharis pocillum Ehrb.
25 Metopidia acuminata Ehrb.
Lepadella ovalis Ehrb.
Colurus deflexus Ehrb.
Euchlanis dilatata Ehrb.
Triarthra longiseta Ehrb.
30 Polyarthra plotyptera Ehrb.

V. Copepoda.

Cyclops serrulatus C. K.
" vicinus Ullj.

VI. Cladocera.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Alona affinis Leyd.
35 Bosmina obtusirostris Sars.
Ceriodaphnia rotunda Sars.

VII. Tardigrada.

Macrobiotus macronyx (Duj.).

29. Borsok-See.

I. Protozoa.

Difflugia corona Wall.
" urceolata Ehrb.

II. Nematoda.

Plectus tenuis Bart.
Diplogaster Elpatiewskyi n. sp.
5 Dorylaimus filiformis Bart.

III. Rotatoria.

Metopidia acuminata Ehrb.

IV. Copepoda.

Cyclops serrulatus C. K.

V. Cladocera.

Alona affinis Leyd.

VI. Tardigrada.

Macrobiotus macronyx (Duj.).

VII. Hydrachnidae.

10 Piona rotunda Kr.

30. Fluß Malyi Gumnuk.

I. Protozoa.

Centropyxis aculeata (Ehrb.).
Vaginicola decumbens Ehrb.

II. Hydroidea.

Hydra fusca L.

III. Nematoda.

Trilobus gracilis Bast.

IV. Rotatoria.

5 Anuraea striata (O. F. M.).
Lepadella ovalis Ehrb.

V. Cladocera.

Chydorus spaericus (O. F. M.).
Alona affinis Leyd.
„ costata Sars.

31. Kiren-nor.

I. Protozoa.

Centropyxis aculeata (Ehrb.).

II. Nematoda.

Dorylaimus filiformis Bast.

III. Rotatoria.

Anuraea striata Ehrb.

IV. Copepoda.

Cyclops gracilis Lillj.
5 Canthocamptus insignipes Lillj.

V. Cladocera.

Alona intermedia Sars.

VI. Ostracoda.

Cypridopsis vidua (O. F. M.).

VII. Hydrachnidae.

Limnesia connata Koen.

32. Quelle Bulunai.

I. Rotatoria.

Anuraea aculeata Ehrb.
„ longispina Kell.
Triarthra longiseta Ehrb.

II. Copepoda.

Diaptomus Zichyi Dad.

III. Cladocera.

5 Bosmina obtusirostris Sars.
Daphnia longispina v. caudata [Sars

IV. Ostracoda.

Eucypris incongruens (Ramd.).

33. Chorchoito-nor.

I. Protozoa.

Difflugia pyriformis Perty.
Euglypha alveolata Ehrb.
Euglena viridis Ehrb.
Paramecium Aurelia (O. F. M.).
5 Lagenophrys nassa Stein.
Cothurniopsis imberbis Ehrb.
Cothurnia crystallina Ehrb.
Epistylis plicatilis Ehrb.
Vorticella nebulifera Ehrb.

II. Rotatoria.

10 Rotifer macrurus Ehrb.
Actinurus neptunius Ehrb.
Asplachna Brightwelli Gosse.

Anuraea aculeata Ehrb.
" cochlearis Gosse.
" striata Ehrb.
Mastigocerca carinata Ehrb.
" cornuta Eyf.
" elongata Ehrb.
" rattus Ehrb.
20 Rattulus tigris Ehrb.
Dinocharis pocillum Ehrb.
Colurus uncinatus Ehrb.
Colurus deflexus Ehrb.
Monostyla lunaris Ehrb.
25 Metopidia acuminata Ehrb.
Lepadella ovalis Ehrb.
Euchlanis dilatata Ehrb.
" triquetra Ehrb.
Pterodina patina Ehrb.
30 Brachionus rubens Ehrb.
Triarthra longiseta Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

III. Copepoda.

Cyclops serrulatus C. K.
" strenuus Tisch.
35 " vicinus Ullj.
Diaptomus Zichyi Dad.

IV. Cladocera.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Alona costata Sars.
Daphnia longispina v. caudata Sars.
40 " " v. tenuitesta Sars.

V. Ostracoda.

Cypridopsis vidua (O. F. M.).
Cypria ophthalmica (Juv.).
Eucandona tuberculata n. sp.

34. Kossogol. Mota-Bucht.

I. Protozoa.

Difflugia corona Wall.

II. Nematoda.

Trilobus gracilis Bast.

III. Rotatoria.

Rotifer sp.?
Triarthra longiseta Ehrb.

IV. Copepoda.

5 Cyclops vicinus Ullj.
Canthocamptus northumbricus [Brad.

V. Cladocera.

Alona affinis Leyd.

35. Fluß Mota.

I. Protozoa.

Tocophrya cyclopum (Cl. L.).

II. Nematoda.

Trilobus gracilis Bast.

III. Copepoda.

Cyclops fuscus (Jur.)-
Ophiocamptus mongolicus n. sp.

IV. Cladocera.

5 Alona costata Sars.
Eurycercus lamellatus (O. F. M.).
Simocephalus vetulus (O. F. M.).

V. Costracoda.

Iliocypris gibba (Ramd.).
Eucandona tuberculata n. sp.

36. Westliches Ufer des Kossogol zwischen den Flüssen Djeglyk und Chatschim.

I. Rotatoria.

Rotifer sp.?
Conochilus volvox Ehrb.
Anuraea aculeata Ehrb.
" longispina Kell.
5 Triarthra longiseta Ehrb.

II. Copepoda.

Cyclops vicinus Ullj.
Diaptomus incrassatus Sars.

III. Cladocera.

Bosmina obtusirostris Sars.
Daphnia longispina Leyd.

37. Kossogol. Fluß Chilin.

I. Protozoa.

Arcella vulgaris Ehrb.
Centropyxis aculeata (Ehrb.).
Difflugia urceolata Ehrb.
„ constricta Ehrb.

38. Kap Mottabulun.

I. Rotatoria.

Synchaeta pectinata Ehrb.
Anuraea aculeata Ehrb.
„ cochlearis Gosse.
„ longispina Kell.
5 „ striata (O. F. M.).
Salpina spinigera Ehrb.
Triarthra longiseta Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

II. Copepoda.

Cyclops vicinus Ullj.
10 Diaptomus incrassatus Sars.

II. Cladocera.

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Alona intermedia Sars.
Macrothrix odontocephala Dad.
Bosmina obtusirostris Sars.
15 Daphnia longispina Leyd.

IV. Ostracoda.

Eucandona Elpatiewskyi n. sp.

IV.

Geographische Verbreitung der Arten.

Die bisherigen literarischen Daten über die Mikrofauna von Mongolien sind, die Ergebnisse meiner derzeitigen Untersuchungen mitgerechnet, nicht im entferntesten hinreichend, um auf Grund derselben nur einigermaßen stichhaltige Folgerungen für die Charakterisierung der Mikrofauna von Mongolien ableiten zu können; ich werde mich daher darauf beschränken, die beobachteten Daten nach Gruppen zu ordnen, um auf diese Weise einem späteren Forscher, der sich speziell mit der zoogeographischen Verbreitung der einzelnen Tiergruppen befaßt, die Arbeit zu erleichtern.

Die bei meinen Untersuchungen beobachteten 160 Arten und einige Varietäten lassen sich hinsichtlich der Verbreitung zunächst in zwei Gruppen einteilen, und zwar 1. in solche, die in Asien nur aus Mongolien bekannt sind, und 2. in solche, die außer Mongolien auch aus anderen Gebieten Asiens bekannt sind. Bei einer solchen Gruppierung zerfallen die Arten in folgender Weise:

1. Außer Mongolien aus Asien bisher nicht bekannte Arten.

Arcella mitrata Ehrb.
Cyphoderia ampulla (Ehrb.).
Rhaphidiophrys elegans H. et L.
Lionotus folium (Duj.).
5 Strombidium Claparedei S. K.
Lagenophrys nassa Stein.

Vaginicola decumbens Ehrb.
Cothurnia crystallina Ehrb.
Epistylis plicatilis Ehrb.
10 Vorticella nebulifera Ehrb.
Hydra viridis L.
Monhystera similis Bütsch.
Plectus tenuis Bast.
Diplogaster Elpatiewskyi n. sp.
15 Dorylaimus filiformis Bast.
Chaetonotus polychaetus n. sp.
Philodina aculeata Ehrb.
Rotifer macrurus Ehrb.
Rotifer sp.?
20 Floscularia sp.?
Synchaeta tremula Ehrb.
Anuraea angulata n. sp.
Anuraea clypeus n. sp.
Furcularia gibba Ehrb.
25 Diglena grandis Ehrb.
Anuraea acuminata Ehrb.
" foliacea Ehrb.
" labis Gosse.
" longispina Kell.
30 Anuraea striata (O. F. M.).
Euchlanis triquetra Ehrb.
Cathypna diomis Gosse.
Colurus deflexus Ehrb.
Lepadella acuminata Ehrb.
35 Brachionus rubens Ehrb.
Canthocamptus northumbricus v. coronatus, n. v.
Ophiocamptus mongolicus n. sp.
Alonella nana (Baird).
Alona intermedia Sars.
40 Macrothrix odontocephala Dad.
Bosmima Lilljeborgii Sars.
Ceriodaphnia rotunda Sars.
Herpetocypris strigata (O. F. M.).
Eucandona tuberculata n. sp.
45 Eucandona Elpatiewskyi n. sp.
Iliocypris gibba (Rauch).
Limnicythere incisa Dad.
Eulais Elpatiewskyi n. sp.
Hydrachna geographica O. F. M.
50 Mideopsis orbicularis (O. F. M.).
Limnesia histrionica Herm.
" connata Koen.
Hygrobates octoporus n. sp.
Pionopsis lutescens (Herm.).
55 Piona rotunda Kr.
" fuscata Herm.
" nodata (O. F. M.).

Laut diesem Verzeichnis sind mithin über ein Drittel der beobachteten Arten solche, die bisher von anderen Gebieten Asiens nicht bekannt waren, folglich für die Fauna von Asien und zugleich für Mongolien neu sind.

2. Außer Mongolien auch von anderen Gebieten Asiens bekannte Arten.

Arcella vulgaris Ehrb.
" discoides Ehrb.
Centropyxis aculeata (Ehrb.).
Difflugia corona Warr.
5 " constricta Ehrb.
" globulosa Ehrb.
" lobostoma Ehrb.
" urceolata Ehrb.
" pyriformis Pert.
10 Euglypha alveolata Ehrb.
Euglena deses Ehrb.
" viridis Ehrb.
Paramecium Aurelia Ehrb.
Oxytricha pellionella Ehrb.
15 Euplotes charon Ehrb.
Zoothamnium parasita Stein.
Vorticella microstoma Ehrb.
Cothurniopsis imberbis (Ehrb.).
Tocophrya cyclopum (Cl. et L.).
20 Hydra fusca L.
Trilobus gracilis Bast.
Philodina roseola Ehrb.
Rotifer vulgaris Ehrb.
Actinurus neptunius Ehrb.
25 Asplanchna Brightwelli Gosse.
Melicerta ringens Ehrb.
Conochilus volvox Ehrb.
Synchaeta pectinata Ehrb.
Ploesoma sibirica Dad.
30 Furcularia forficula Ehrb.
Diglena catellina Ehrb.
Mastigocerea carinata Ehrb.
" cornuta Eyf.
" elongata Gosse.
35 " Rattus (Ehrb.)
" scipio Gosse.
Rattulus tigris Ehrb.
Anuraea aculeata Ehrb.
" cochlearis Gosse.
40 Dinocharis pocillum Ehrb.

Scaridium longicaudum Ehrb.
Salpina brevispina Ehrb.
„ spinigera Ehrb.
Euchlanis dilatata Ehrb.
45 Cathypna luna Ehrb.
Monostyla lunaris Ehrb.
„ quadridentata Ehrb.
Colurus bicuspidatus Ehrb.
„ uncinatus Ehrb.
50 Metopidia lepadella Ehrb.
Pterodina ellyptica Ehrb.
Pterodina patina Ehrb.
Triarthra longiseta Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.
55 Cyclops albidus (Jur.).
„ fuscus (Jur.).
„ servulatus Fisch.
„ vicinus Ullj.
„ strenuus Fisch.
60 Canthocamptus insignipes Lillj.
Diaptomus acutilobatus Sars.
„ incrassatus Sars.
„ lobatus Lillj.
„ Zichyi Dad.
65 Chydorus sphericus (O. F. M.).
Alonella exigua (Fisch.).
Alona costata Sars.
„ affinis Leyd.
„ quadrangularis (O. F. M.).
70 „ guttata Sars.
„ rectangula Sars.
Leptorhynchus rostratus (C. K.).
Acroperus harpae (Baird.).
Euryercus lamellatus (O. F. M.).
75 Bosmina obtusirostris Sars.
„ longirostris Sars.
Ceriodaphnia reticulata (Jur.).
Scapholeberis mucronata (O. F. M.).
Simocephalus vetulus (O. F. M.).
80 Daphnia carinata (King.).
„ magna Str.
„ pulex d. G.
„ longispina Leyd.
„ „ v. rosea Sars
85 „ „ v. tenuitesta Sars.
„ „ v. caudata Sars.
„ „ v. jardinei Baird.
„ „ v. Leydigi Sars.
Eucypris incongruens (Rarmd.).
90 Cypridopsis vidua (O. F. M.).
Cypria ophthalmica (Jur.).
Candona candida (O. F. M.).
Ecuandona rostrata (C. K.).
Iliocypris lacustris Kauf.
95 Macrobiotus macronyx (Duj.).
Lebertia tauinsignita (Leb.).
Atax crassipes (O. F. M.).
Piona conglobata (C. K.).

Wie aus den Daten dieser Liste hervorgeht, sind ungefähr zwei Drittel der bei meinen Untersuchungen beobachteten Arten schon früher auch von anderen Gebieten Asiens aufgezeichnet gewesen.

Sowohl in der ersten, auch in der zweiten Gruppe finden sich einige Arten, die in gewisser Beziehung größere Beachtung verdienen; namentlich sind darunter 1. solche, die bisher bloß aus Mongolien bekannt sind, und 2. solche, die auch schon von anderen Forschern aus Mongolien nachgewiesen wurden:

1. Bisher bloß aus Mongolien bekannte Arten.

Diplogaster Elpatiewskyi n. sp.
Chaetonotus polychaetus n. sp.
Anuraea angulata n. sp.
„ clypeus n. sp.
5 Canthocamptus northumbricus v. coronatus n. v.
Ophiocamptus mongolicus n. sp.
Eucandona tuberculata n. sp.
„ Elpatiewskyi n. sp.
Eulais Elpatiewskyi n. sp.
10 Hygrobates octoporus n. sp.

In der Literatur aber stoßen wir ferner auf einige Arten, die bisher gleichfalls nur aus Mongolien bekannt wurden, und die von J. Richard, E. v. Daday und G. O. Sars beschrieben worden sind.

Echinocotyle Linstowi Dad.
„ polyacantha Dad.
Drepanidotaenia Rátzi Dad.
„ mesacantha Dad.
5 Taenia Zichyi Dad.
Diaptomus Chaffanjoni Rich.
Boeckella orientalis Sars.
Moina mongolica Dad.
Moina macrocopa Sars.
10 Simocephalus mixtus Sars.
Daphnia longispina v. leucocephala Sars.
Estheria propinqua Sars.
Branchipodopsis affinis Sars.
Cypris ovalis Sars.
15 Limnicythere mongolica Dad.
Leptestheria tenuis Sars.

Aus den Daten dieser beiden Verzeichnisse zeigt es sich, daß für die Fauna von Mongolien bisher 26 Arten sind, die bisher noch auf keinem anderen Gebiet gefunden wurden.

2. Aus Mongolien auch von anderen Forschern schon verzeichnete Arten.

Zoothamnium parasita Stein.
Tocophrya cyclopum (Cl. et L.).
Cyclops serrulatus Fisch.
„ strenuus Fisch.
„ vicinus Ullj.
Diaptomus incrassatus Sars.
Chydorus sphaericus (O. F. M.).
Scapholeberis mucronata (O. F. M.).
Simocephalus vetulus (O. F. M.).
10 Daphnia carinata King.
„ magna Str.
„ pulex d. G.
Eucypris incongruens (Ramd.).
Iliocypris lacustris Kaufm.

Unter den von mir untersuchten 152 Arten ist mithin die Anzahl derjenigen verschwindend klein, die aus Mongolien schon vorher von einem der erwähnten Forscher beobachtet worden sind.

Um ein vollständiges Bild über die auf die Mikrofauna von Mongolien bezüglichen Daten zu bieten, gebe ich nachstehend ein Verzeichnis derjenigen Arten, die früher aus Mongolien von E. v. Daday und G. O. Sars nachgewiesen worden sind, die ich aber bei meinen derzeitigen Untersuchungen nicht gefunden habe. Es sind folgende:

Vortex truncatus Oerst. (Dad.).
Brachionus Mülleri Ehrb. (Dad.).
Diaptomus asiaticus Ullj. (Dad.).
„ bacillifer Kölb. (Sars).
5 „ Wierzejskyi Rich. (Sars).
Hemidiaptomus Ignatovi Sars (Sars).
Alona elegans Sars (Sars).
Macrothrix hirsuticornis Br. Nr. (Sars).
Moina rectirostris (Jur.) (Sars).
10 Simocephalus exspinosus C. K. (Sars).
Daphniopsis tibetana Sars (Sars).
Daphnia pulex v. pulicaria Sars (Sars).
Cypris pubera (O. F. M.) (Sars).
Branchinecta orientalis Sars (Sars).
15 Estheria Davidi Sars (Sars).
Apus granarius Sars (Sars).

Rechnet man zu den vorstehend verzeichneten Arten diejenigen hinzu, die ich in dem von W. S. Elpatiewsky gesammelten Material vorfand, so läßt sich feststellen, daß aus der Mikrofauna Mongoliens zurzeit 168 Arten und Varietäten bekannt sind, worunter 30 zufolge früherer Sammlungeu und Untersuchungen, 138 aber zufolge der Sammlung W. S. Elpatiewskys und meiner Untersuchungen bekannt geworden sind.

V.

Die aus dem Kossogol-See verzeichneten Arten.

In der Hoffnung, keine ganz überflüssige Arbeit zu unternehmen, halte ich es für angezeigt, nachstehend das Verzeichnis der aus der beträchtlich großen und eben deshalb unter sehr wechselvollen natürlichen Verhältnissen bestehenden Wassermenge des 130 km langen und 37 km breiten Kossogol-See beobachteten Arten auch noch besonders zusammenstelle. Ich halte dies für um so motivierter, weil man sich auf diese Weise ein annähernd zutreffendes Bild von dem Reichtum und der Verschiedenheit der Mikrofauna des Kossogol-Sees bilden kann.

Bei der Aufzählung der Arten befolge ich die aufsteigende Reihenfolge.

I. *Protozoa.*

Class. *Sarcodina.*

Arcella vulgaris Ehrb.
„ discoides Ehrb.
Centropyxis aculeata (Ehrb.).
Difflugia corona Wall.
5 „ constricta Ehnb.
„ globulosa Ehrb.
„ pyriformis Pert.
„ urceolata Ehrb.
Cyphoderia ampulla (Ehrb.).
10 Rhaphidiophrys elegans H. et L.

Class. *Mastigophora.*

Euglena viridis Ehrb.

Class. *Infusoria.*

Lionotus folium (Duj.).
Strombidium Claparedii S. K.
Eyplotes Charon Ehrb.
15 Vaginicola decumbens Ehrb.
Epistylis plicatilis Ehrb.
Vorticella microstoma Ehrb.
Zoothamnium parasita Stein.
Tokophrya cyclopum (Cl. et Z.).

II. *Coelenterata.*

Class. *Hydroidea.*

20 Hydra fusca L.
Hydra viridis L.

III. *Vermes.*

Class. *Nemathelminthes.*

Trilobus gracilis Bast.
Plectus tenuis Bast.

Class. *Gastrotricha.*

Chaetonotus polychaetus n. sp.

Class. *Rotatoria.*

25 Philodina aculeata Ehrb.
Rotifer vulgaris Ehrb.
„ macrurus Ehrb.
„ sp.?
Conochilus volvox Ehrb.
30 Asplanchna Brightwelli Gosse.
Synchaeta pectinata Ehrb.
„ tremula Ehrb.
Ploesoma sibirica Dad.
Anuraea aculeata Ehrb.
35 Anuraea angulata n. sp.
„ clypeus n. sp.
„ cochlearis Gosse.
„ acuminata Ehrb.
„ foliacea Ehrb.
„ longispina Kell.
„ striata (O. F. M.).
Rattulus tigris Ehrb.
Diglena catellina Ehre.
45 „ grandis Ehrb.
Furcularia furficula Ehrb.
„ gibba Ehrb.
Mastigocerca carinata Ehrb.
„ cornuta Eyl.
50 „ elongata Gosse.
„ Rattus Ehrb.
„ scipio Gosse.
Monostyla lunaris Ehrb.
„ quadridentata Ehrb

55 Cathypna luna Ehrb.
„ diomis Gosse.
Salpina brevispina Ehrb.
„ spinigera Ehrb.
Metopidia acuminata Ehrb.
60 „ lepadella Ehrb.
Lepadella ovalis Ehrb.
Scaridium longicaudum Ehrb.
Colurus bicuspidatus Ehrb.
Euchlanis dilatata Ehrb.
65 Dinocharis pocillum Ehrb.
Pterodina patina Ehrb.
Triarthra longiseta Ehrb.
Polyarthra platyptera Ehrb.

IV. *Arthropoda.*

1. *Copepoda.*

70 Cyclops albidus (Jur.).
„ fuscus (Jur.).
„ serrulatus Fisch.
„ strenuus Fisch.
„ vicinus Ullj.
75 Canthocamptus northumbricus v. coronatus.
Ophiocamptus mongolicus n. sp.
Diaptomus incrassatus Sars.
„ lobatus Lillj.

2. *Cladocera.*

Chydorus sphaericus (O. F. M.).
80 Alonella nana (Baird).
„ exigua (Fisch.).
Alona affinis Leyd.
„ costata Sars.
„ intermedia Sars.
85 „ rectangula Sars.
Eurycercus lamellatus (O. F. M.).
Macrothrix odontocephala Dad.
Bosmina Lilljeborgii Sars.
Bosmina obtusirostris Sars.
90 Ceriodaphnia reticulata (Jur.).
Simocephalus vetulus (O. F. M.).
Daphnia magna Str.
„ longispina Leyd.
„ „ v. rosea Sars.
95 „ „ v. Leydigi Sars.
„ „ v. tenuitesta Sars.

3. *Ostracoda.*

Cypria ophthalmica (Jur.).
Herpetocypris strigata (O. F. M.).
Candona candida (O. F. M.).
100 Eucandona Elpatiewskyi n. sp.
„ tuberculata n. sp.
Iliocypris gibba (Ramd.).
Iliocypris lacustris Kaufm.

4. *Tardigrada.*

Macrobiotus macronyx (Duj.).

5. *Hydrachnida.*

105 Hydrachna geographica (O. F. M.).
Mideopsis orbicularis (O. F. M.).
Lebertia tauinsignita (Leb.).
Limnesia histrionica Herm.
Hygrobates octoporus n. sp.
110 Atax crassipes (O. F. M.).

Die in diesem Verzeichnis namhaft gemachten 110 Arten und Varietäten geben eine genug glänzende Zeugenschaft ab von dem Reichtum der Mikrofauna des Kossogol-Sees, demungeachtet aber umfaßt dasselbe sicher nicht die ganze Summe der Arten. Ich enthalte mich daher bei dieser Gelegenheit aller theoretischen Erörterungen und sehe auch ab von einer Vergleichung mit der Mikrofauna anderer Seen, welche die Aufgabe fernerer Forschungen und deren Resultaten bilden wird. Einige Bemerkungen aber möchte ich, gestützt auf das mitgeteilte Verzeichnis, dennoch vorbringen.

Ein allgemeiner Charakterzug der Mikrofauna des Kossogol-Sees ist es, daß, während dieselbe sehr reich ist an Arten, die im Plankton anderer großer Süßwasserseen gänzlich fremd sind, wie z. B. manche *Cladocera*-Arten, derselben andererseits Arten fehlen, die im Plankton anderer großer Seen als beständige, sozusagen charakteristische Tiere auftauchen, wie z. B. gleichfalls von den *Cladoceren* die Repräsentanten der Familie *Sididae*, insbesondere das Genus *Diaphanosoma* und aus der Familie *Leptodoridae* auch *Leptodora hyalina*. Auch kann es auffallen, daß trotz der natürlichen Lage des Kossogol-Sees und seiner beträchtlichen Tiefe auch das Genus *Bythorephes* darin fehlt.

Ein anderweitiger auffälliger Charakterzug der Mikrofauna des Kossogol-Sees beruht darin, daß aus der Klasse der *Rotatorien* neun Arten des Genus *Anuraea* bekannt sind, eine Zahl, die mit Ausnahme des Genfer Sees, noch aus keinem großen See nachgewiesen worden ist.

Schließlich glaube ich nicht zu irren, wenn ich, gestützt auf die in dem Verzeichnis genannten Arten, es als eine für die Mikrofauna des Kossogol im allgemeinen charakteristische Tatsache feststelle, daß in ihr die uferwohnenden und planktonischen Organismen charakteristisch sind und massenhaft auftreten, während die Bewohner des Tiefgrundes, trotz der relativ großen Tiefe, sich nur in verschwindend kleiner Anzahl zeigen.

Vergleicht man die Fauna des Kossogol-Sees mit derjenigen der umliegenden verschiedenartigen stehenden Wässer, Pfützen und kleinere Seen hinsichtlich des Vorkommens der Arten, so gelangt man zu dem Ergebnis, daß in der Mikrofauna des Kossogol-Sees verhältnismäßig wenig Arten fehlen, die in den Wässern der Umgebung desselben vorkommen. Dies wird dadurch zur Genüge dargetan, daß von den beobachteten 160 Arten und Varietäten im Kossogol-See 110 Arten auftreten, von der Gesamtzahl also bloß 43 Arten darin fehlen. Die Ursache davon läßt sich übrigens aus den natürlichen Umständen erklären, insofern' alle Wässer sämtlicher Fundorte zum Wasserbereich des Kossogol gehören und mit demselben fast insgesamt in verschiedener Weise zwar aber dennoch in Verbindung stehen.

Literaturverzeichnis.

1. Blochmann, F., Die mikroskopische Tierwelt des Süßwassers. 1895.
2. Daday, E. v., Ostracoda Hungariae. Budapest 1900. Fig. 1—64.
3. Daday, E. v., Mikroskopische Süßwassertiere, in: Dritte asiatische Forschungsreise des Grafen E. Zichy. 1901.
4. Daday, E. v., Mikroskopische Südwassertiere aus Patagonien. — Term. rajz. füz. Bd. 25, 1902, p. 201, Taf. 2—15.
4a. Édes vizi mikroskopi állatok Mongoliából. Math. term. tud. Ertesitö, 24. köt., 1906, p. 34—77.
5. Ehrenberg, C. G., Die Infusionstierchen als vollkommene Organismen. 1838.
6. Entz, G., Protozoa in: Fauna regni Hungariae. 1896.
7. Hudson et Gosse, The Rotifera or Wheel Animalcules. 1889.
8. Kaufmann, A., Cypriden und Darwinuliden der Schweiz. — Revue Suisse de Zoologie. Ann. d. l. Soc. zool. Suisse, T. 8, Fasc. 3, 1900.
9. Kent, S., Manual of the Infusoria Bd. 1, 2, 1880—1882.
10. Leidy, J., Freshwater Rhizopods of Nord-America. 1879.
11. Lemmermann, E., Beiträge zur Kenntnis der Planktonalgen. XI. Die Gattung Dinobryon Ehrb. — Berichte d. deutsch. botan. Gesellsch., Bd. 18, p. 500, Taf. 18, 19.
12. Lilljeborg, W., Synopsis specierum hucusque in aquis dulcibus Sveciae observatarum familiae Harpactidarum. — Kongl. Svenska vetensk. Akad. Handb., Bd. 36, Nr. 1, 1902, Taf. 1—4.
13. Lilljeborg, W., Cladocera Sveciae, 1898, Taf. 1—87.
13a. Ostenfeld, C. H., Beiträge zur Kenntnis der Alpenflora des Kossogol-Beckens in der nordwestlichen Mongolei, mit spezieller Berücksichtigung des Phytoplanktons. — Hedwigia, Bd. 46, p. 365, Taf. 9.
14. Piersig, R., Deutschlands Hydrachniden, in: Zoologica, H. 22, 1897—1909.
15. Richard, J., Sur deux Entomostracés d'eau douce recueillis par M. Chaffanjon en Mongolie. — Bull. d. Mus. d'hist. Natur., 1897, V. 3, p. 131, Fig. 1—5.
16. Sars, G. O., On the Crustacean fauna of Central Asia. Part. II. Cladocera. Annuaire du Mus. Zool. de l'Acad. imp. de Sc. de St. Pétersbourg, T. 8, 1903, p. 157, Taf. 1—8.
17. Sars, G. O., On the Crustaceanfauna of Central Asia. Part. III. Copepoda and Ostracoda. Ibid. 1903, Tom. 8, p. 195, Taf. 9—16.
18. Schmeil, O., Deutschlands Copepoden, in: Zoologica, Heft 11, 15, 21, 1892—1898.
19. Zelinka, C., Die Gastrotrichen. — Z. f. w. Z., Bd. 49, 1890, p. 209, Taf. 11—15.
20. Man, J. G. de, Die frei in der reinen Erde und im Süßwasser lebenden Nematoden der niederländ. Fauna, Leiden 1884, Taf. 1—34.
21. Weber, E. F., Faune rotatorienne du bassin de Léman, 2. Part. 1898. — Revue Suisse de Zoologie, Tom. 5, Fasc. 4, 1898.

Erklärung der Figuren.

Fig. 1. *Diplogaster Elpatiewskyi* n. sp.

a) ♀, vorderes Körperende, nach Reich Oc. 5, Obj. 7.
b) ♀, Schwanzende, nach Reich Oc. 5, Obj. 4.

Fig. 2. *Anuraea acuminata* Ehrb.

a) ♀ von oben, typische Form, Reich. Oc. 5, Obj. 4.
b) von oben, Varietät, „ „

Fig. 3. *Anuraea clypeus* n. sp.

♀ von unten, nach Reich. Oc. 5, Obj. 4.

Fig. 4. *Anuraea labis* Gosse.

♀ von oben, nach Reich. Oc. 5, Obj. 4.

Fig. 5. *Anuraea striata* (O. F. M.).

♀ von oben, nach Reich. Oc. 5, Obj. 4.

Fig. 6. *Anuraea angulata* n. sp.

♀ von oben nach Reich. Oc. 6, Obj. 2.

Fig. 7. *Canthocamptus northumbricus v. coronatus.*

a) Furca von der Seite, nach Reich. Oc. 5, Obj. 4.
b) Nebenast der zweiten Antenne, nach Reich. Oc. 5, Obj. 7.
c) Älteres ♀, fünfter Fuß, „ „
d) Jüngeres ♀, fünfter Fuß, „ „

Fig. 8. *Ophiocamptus mongolicus* n. sp.

1. ♀ von oben nach Reich. Oc. 5, Obj. 4.
2. ♀, erste Antenne, nach Reich. Oc. 5, Obj. 7.
3. ♂♀, zweite Antenne, „ „
4. ♂, Greifantenne. „ „
5. ♂, Furca von unten, „ „
6. ♀, erster Fuß, „ „
7. ♀, vierter Fuß, „ „
8. Junges ♀, vierter Fuß „ „
9. ♂, Innenast des dritten Fußes, nach Reich. Oc. 5, Obj. 7.
10. ♂, „ „ vierten „ „ „
11. ♀, fünfter Fuß, „ „
12. ♂, „ „ „ „
13. Junges ♀, fünfter Fuß, „ „
14. ♂, erster Fuß, „ „
15. Junges ♀, fünfter Fuß, „ „
16. ♂, sechster Fuß, „ „
17. ♀, Receptaculum seminis „ „
18. Junges ♀, Innenast des ersten Fußes, „ „
19. Junges ♀, „ „ zweiten „ „ „

Fig. 9. *Eucandona tuberculata* n. sp.

a) ♀, rechte Schale, nach Reich. Oc. 5, Obj. 0.
b) ♀, Furca und Vulva, nach Reich. Oc. 5, Obj. 4.
c) ♀, Schalen von oben, nach Reich. Oc. 5, Obj. 0.
d) ♀, zweiter Fuß, nach Reich. Oc. 5, Obj. 2.
e) ♀, Palpus des Maxillarfußes, nach Reich. Oc. 5, Obj. 4.
f) ♀, warzenförmige Erhebung der Schale, nach Reich. Oc. 5, Obj. 2.

Fig. 10. *Eucandona Elpatiewskyi* n. sp.

a) ♀, linke Schale von der Seite, nach Reich. Oc. 5, Obj. 0.
b) ♀, Palpus des Maxillarfußes, nach Reich. Oc. 5, Obj. 4.
c) ♀, Schalen von oben, nach Reich. Oc. 5, Obj. 0.
d) ♀, zweiter Fuß, nach Reich. Oc. 5, Obj. 4.
e) ♀, Furca und Vulva, „ „
f) ♀, Muskeleindrücke, „ „
g) ♀, Palpus mandibularis, „ „
h) ♀, Maxille, „ „

Fig. 11. *Eulais Elpatiewskyi* n. sp.

a) ♀, Capitulum, nach Reich. Oc. 5, Obj. 2.
b) ♀, Palpus maxillaris von der Innenseite, nach Reich. Oc. 5, Obj. 2.
c) ♀, Augenbrille, nach Reich. Oc. 5, Obj. 2.

Fig. 12. *Hygrobates octoporus* n. sp.

a) Epimeren und Geschlechtshof, nach Reich. Oc. 5, Obj. 0.
b) Palpus maxillaris, nach Reich. Oc. 5, Obj. 2.

SITZUNGSBERICHTE.

I. In den Sitzungen der III. (mathematisch-naturwissenschaftlichen) Klasse der Ungarischen Akademie der Wissenschaften wurden vom Oktober 1907 bis Juni 1908 von den nachbenannten Autoren die folgenden Arbeiten vorgelegt:

Sitzung am 21. Oktober 1907.

1. FERDINAND KLUG, o. M.: *„Warum verzehren sich nicht der Magen und die Gedärme des Lebenden?"*
2. LUDWIG v. MÉHELY, o. M.: *„Archäo- und Neolacerten."*
3. E. ABDERHALDEN, C. KŐRÖSSY und E. LONDON: a) *„Die Verdauung des Eiweißes"*, b) *„Die Verdauung der Dipeptiden"*. Vorgelegt durch F. KLUG, o. M.
4. FRITZ KONEK: *„Synthese schwefelhaltiger Alkaloide"*. Vorgelegt durch K. THAN, o. M.
5. MICHAEL BAUER: *„Über die Teiler der Determinante"*. Vorgelegt durch G. RADOS, o. M.

Sitzung am 18. November 1907.

1. EUGEN v. DADAY, k. M.: *„Daten zur Kenntnis der Mikrofauna von Deutsch-Ost-Afrika."*
2. ADOLF ÓNODI, o. M.: *„Das Verhältnis der Nerven der Nase zum Gehirn"*.
3. GÉZA ZEMPLÉN: *„Die Wirkung von Kaliumpermanganat auf Cellulose"*. Vorgelegt von K. THAN, o. M.
4. ERNST TEZNER: *„Über das Herabsinken des Gefrierpunktes von Gemengen"*. Vorgelegt durch F. KLUG, o. M.
5. KARL SCHAFFER: *„Mit Blindheit verbundener Idiotismus von Familien"*. Vorgelegt durch E. JENDRASSIK, k. M.

Sitzung am 16. Dezember 1907.

1. KARL ZIMÁNYI, k. M.: *„Über einen Phosphat aus dem Komitate Gömör"*.
2. EUGEN v. DADAY, o. M.: *„Beiträge zur Kenntnis der ruder- und blattfüßigen Krebse von Deutsch-Ost-Afrika"*.

3. Karl Tangl: *„Die dielektrische Konstante der Gase"*. II. Mitteilung. Vorgelegt durch Baron L. v. Eötvös, o. M.
4. G. Révész: *„Untersuchungen über das Verhältnis der kritischen und der Farbenschwelle"*. Vorgelegt durch F. Tangl.
5. Franz Tangl und Augusta Mituch: *„Neuere Untersuchungen über den Stoff- und Energie-Umsatz des Embrios"*. Vorgelegt durch K. Tangl, k. M.

Sitzung am 20. Januar 1908.

1. Eugen v. Daday, k. M.: *„Daten zur Kenntnis der Muschelkrebse von Deutsch-Ost-Afrika.*
2. Ludwig v. Méhely, k. M.: *„Prospalax priscus, der Vorfahr des Spalax im Pliocän.*
3. R. Kövesligéthy, o. M., legt seine Monographie *„Über das Erdbeben in Valparaiso"* vor.

Sitzung am 17. Februar 1908.

1. Gustav Rados, o. M.: *„Beiträge zur Theorie der Einheitswurzeln"* (Antrittsvortrag).
2. Adolf Ónodi, k. M.: *„Tafeln der Nerven des Kehlkopfes"*.
3. Franz Tangl, k. M.: a) *„Über die Änderungen der Schale des Hühnereies während des Brütens"*. b) *„Über die Zusammensetzung der Caseïne"*.
4. Alexander Kalecsinszky, k. M.: *„Über die Temperaturverhältnisse des Wassers des artesischen Brunnens der Margareteninsel in Budapest"*.

Sitzung am 16. März 1908.

1. Ludwig v. Bodola, k. M.: *„Über die Fundamentalformel der Planimeter"* (Antrittsvortrag).
2. Eugen v. Daday, k. M.: *„Zur Kenntnis der in Süßwässern lebenden Milben von Deutsch-Ost-Afrika"*.
3. H. Kanasugi: *„Über das stimmbildende Zentrum"*. Vorgelegt durch A. Ónodi, k. M.
4. Ludwig Dávid: *„Zur Theorie der algebraischen Iteration"*. Vorgelegt durch G. Rados, o. M.
5. Marcell Riesz: *„Zur Theorie der Potenzreihen"*. Vorgelegt durch G. Rados, o. M.

Sitzung am 6. April 1908.

1. Stephan Rátz, k. M.: *„Die in den Muskeln schmarotzenden Protisten und ihre in der ungarischen Fauna vorkommenden Arten"* (Antrittsvortrag).
2. Leopold Fejér: *„Über Laplacesche Reihen"*. Vorgelegt von J. Kürschák.

Sitzung am 18. Mai 1908.

1. Friedrich Korányi, k. M.: *„Neuere Daten über den diagnostischen Wert des Perkussionsschalles der Wirbelsäule und ihrer Umgebung“.*
2. Ernst Tezner und Johann Roska: *„Über das Herabsinken des Gefrierpunktes von Suspensionen“.* Vorgelegt durch F. Klug, o. M.
3. Ludwig Schlesinger, k. M.: *„Lineare Differentialgleichungen“.* Vorgelegt durch J. König, o. M.
4. Desider Laczkó: *„Geologische Beschreibung der weiteren Umgebung der Stadt Veszprém“.* Vorgelegt durch L. Lóczy, o. M.

Sitzung am 15. Juni 1908.

1. Stefan v. Apáthy, k. M.: *„Die Unterschiede der Fixierbarkeit und Färblichkeit als Zeichen von biologischen Änderungen im Nervensystem“* (Antrittsvortrag).
2. Gustav Rados, o. M.: *„Über einen algebraischen Satz von Kronecker“.*
3. Ludwig v. Méhely, o. M.: *„Die Arten der Blindmäuse in systematischer und phylogenetischer Beziehung“.*
4. Rudolf v. Kövesligethy, k. M.: *„Bericht über die Sitzung des internationalen Polar-Komitees im Jahre 1908“.*
5. Zoárd v. Geöcze: *„Über die Quadratur der Flächen“.* Vorgelegt durch J. König, o. M.

II. In den Sitzungen der Königl. Ungarischen Naturwissenschaftlichen Gesellschaft wurden vom Oktober 1907 bis Juni 1908 die folgenden Vorlesungen gehalten:

A) Fachsektion für Zoologie.

Sitzung am 4. Oktober 1907.

L. Méhely schildert seine neuesten Untersuchungen über *„Archäo- und Neolacerten“.*

Sitzung am 8. November 1907.

1. J. Lósy erörtert in seinem Vortrag über *„Die Art und Varietät“* die ungarischen Varietäten und Lokalrassen des Maikäfers.
2. L. Méhely berichtet über *„Die ägyptische Ratte in Ungarn“.*

Sitzung am 6. Dezember 1907.

1. G. Entz jun. bespricht *„Die Flußkrebse Ungarns“.*
2. St. Bolkay liefert *„Beiträge zur Herpetologie des Komitates Gömör-Kishont“* und schildert auch *„Die Artberechtigung des Teichfrosches“.*
3. E. Csiki demonstriert und beschreibt den *„Floh des Ziesels (Typhlopsylla orientalis Wagn).*

Sitzung am 3. Januar 1908.

1. L. Méhely: *„Zwei für Ungarn neue Wühlmäuse“.*
2. D. Papp: *„Wandermuschel (Dreissensia polymorpha Pall) im Zagyvaflusse“.* Vorgelegt von L. Méhely.

Sitzung am 7. Februar 1908.

1. G. Horváth: *„Die Bekämpfung der Lymantria dispar in Nordamerika“.*

Sitzung am 7. März 1908.

1. L. Soós: *„Anatomie und systematische Stellung von Campylaea coerulans“.*
2. L. Soós: *„Ein neues Schnecken-Genus in der ungarischen Fauna“.*
3. J. Leidenfrost: *„Neue Fischart aus dem Quarnero“.*

Sitzung am 3. April 1908.

1. J. Leidenfrost: *„Über einen seltenen Fisch des Quarnero (Solen Kleini)“.*
2. J. Lósy: *„Die Entwickelung der Distomeen“.*

Sitzung am 8. Mai 1908.

1. K. Kertész bespricht den III. Band seines *„Catalogus Dipterorum hucusque descriptorum“.*
2. G. Kordoss: *„Die Entwickelung und Morphologie der Embryonaldunen der Taube“.* Vorgelegt von L. Soós.
3. J. Leidenfrost: *„Beiträge zur Zoogeographie des Quarnero“.*
4. Z. Szilády: *„Die Ausdehnung des Begriffes des Parasitismus“.*

B) Fachsektion für Botanik.

Sitzung am 9. Oktober 1907.

1. K. Budinszky hält einen Vortrag *„Über die empirischen Richtungen der Untersuchungen des Protoplasmas“.*
2. J. Tuzson spricht über *„Die systematische Stellung von Flabellaria longirachis.*

Sitzung am 13. November 1907.

1. E. Gombocz hält einen Vortrag: *„Verwandtschaftliche Verhältnisse der Populus-Arten mit Rücksicht auf die fossilen Arten“.*
2. J. Györffys Arbeit *„Über das Vorkommen von Dicranum Sendtneri in Ungarn“* wird vorgelegt durch J. Tuzson.
3. R. Rapaics hält einen Vortrag unter dem Titel: *„Pflanzengeographie der Gattung Aconitum“.*

Sitzung am 11. Dezember 1907.

1. J. Ernyey legt eine Abhandlung *„Über die medizinisch-botanischen Gärten in Ungarn am Anfang des 18. Jahrhunderts“* vor.
2. J. B. Kümmerle legt die von ihm und E. G. Nyárády verfaßte Arbeit: *„Beiträge zur Flora der ungarisch-kroatischen Küste, Istriens und Dalmatiens“* vor.
3. J. Szurák spricht *„Über die Moosflora Ober-Ungarns mit Rücksicht auf die ökologischen Verhältnisse“*
4. J. Tuzson berichtet *„Über einige Pflanzen der ungarischen Flora“.*

Sitzung am 8. Januar 1908.

1. Vorsitzender Julius Klein gedenkt des Ablebens J. Fábrys, der sich namentlich um die Erforschung der Flora des Komitates Gömör bemüht hat.
2. J. Bernátsky legt vor und bespricht *„Eine seltene Euphorbia-Art“.*
3. G. Lengyel gibt *„Beiträge zur Kenntnis der Flora der Herzegovina“.*
4. A. Mágocsy-Dietz berichtet a) über *einige Linden- und Pappelbäume der Pozsonyer Donau-Au,* die durch ihre Größe bemerkenswert sind, b) über eine im botanischen Garten *blühende Dahlia imperialis* Roezl, c) über *Capsella bursa pastoris* mit elliptischen und runden Schötchen.

Sitzung am 12. Februar 1908.

1. A. Mágocsy-Dietz spricht a) *„Über einige ökologische Faktoren der Verbreitung der Buche und Fichte in Ungarn“.* Derselbe legt b) eine Lieferung der Dörflerschen *Botaniker-Porträts* und c) eine Sammlung neuer *Mikroskope und Vortragsapparate* vor.
2. E. Radó hält einen Vortrag *„Über die lichtempfindlichen Organe einiger Laubblätter.*
3. L. Thaisz bespricht die *Literatur der Flora des Komitates Abauj-Torna.*

Sitzung am 11. März 1908.

1. J. Hulják s *„Beiträge zur Kenntnis der Flora des nordwestlichen Ober-Ungarns“* werden vorgelegt von G. Moesz.
2. L. Simonkai hält einen Vortrag über *„Die ursprünglich wildwachsenden und kultivierten Acer-Arten Ungarns“.*
3. D. Weber hält einen Vortrag: *„Beiträge zur Kenntnis der Anatomie der Früchte und Samen bei einigen wichtigeren Familien“.*
4. J. Tuzson reflektiert auf ein von A. Degen erschienenes Referat über seine *„Morphologie und systematische Gliederung von Nymphaea Lotus“* (Bd. XXV dieser Berichte). Er weist nach, daß Degens absprechende Bemerkungen unbegründet sind.

Sitzung am 8. April 1908.

1. Vorsitzender J. KLEIN gedenkt des Ablebens des Botanikers A. KMET.
2. E. DUDINSZKYS Arbeit *„Über zwei zusammengewachsene Infloreszenzen von Dalia variabilis“* wird vorgelegt durch K. SCHILBERSZKY.
3. K. SCHILBERSZKY legt vor und bespricht a) eine Roggenpflanze (Sorte *Montagne*), die einen Stengel von 208 cm und eine Ähre von 24 cm Länge aufweist, b) eine Roggenpflanze (Sorte *Montagne*), die nach dem Schnitt im Monat Juli aus einem ausgefallenen Korn hervorgegangen, noch im selben Jahr am 28. September 1907 im verblühenden Zustande mit mehreren anderen Exemplaren zusammen aufgefunden wurde.
4. Z. SZABÓ bespricht das Werk: F. PAX, Die Tertiärflora des Zsil-Tales“.
5. J. TUZSON hält einen Vortrag: *„Zur Systematik der Potentilla rupestris“*.
6. A. MÁGOCSY-DIETZ legt vor und bespricht einige *monströse Koniferenzapfen.*

Sitzung am 13. Mai 1908.

1. Á. KERÉKGYÁRTÓ hält einen Vortrag *„Über das Vorkommen von Eranthis hyemalis* SALB *bei Budapest“.*
2. G. MOESZ bespricht *die Cyperaceen von Brassó und des „Réti Nyír“.*
3. L. SIMONKAI spricht über *die einheimischen und kultivierten Ribes-Arten Ungarns und der nördlichen Gestade der Adria.*
4. A. MÁGÓCSY-DIETZ legt einen *Hexenbesen auf Pistacia Terebenthus L.* vor, den TUZSON in Fiume gesammelt.

   Derselbe legt aus dem Glashause des botanischen Gartens der Universität *Streptocarpus Wendlandii* HOST. und *Monophyllae Horsfieldii R.* BR. vor.

C) Fachsektion für Chemie und Mineralogie.

Sitzung am 26. November 1907.

1. ERNST LÁSZLÓ: *„Über den III. internationalen Petroleum-Kongreß in Bukarest“.*
2. STEFAN WEISER und EMIL WOLF: *„Wie wirkt Carbonilsulfid auf Benzylamin und dann auf Phenylhydrazin?“*
3. EMIL WOLF: *„Über eine neue Erzeugung von Isocyanat“.*
4. IGNATZ PFEIFFER: *„Über das Vorkommen der natürlichen brennbaren Gase in Ungarn“.*

Sitzung am 17. Dezember 1907.

ELEK v. SIGMOND: *„Meine ausländischen Erfahrungen über den Arbeitskreis der Agrikultur- und der agrikulturtechnischen Chemiker“.*

Sitzung am 28. Januar 1908.

Béla Szilárd: *„Über die Umwandelbarkeit der Elemente“.*

Sitzung am 31. März 1908.

1. Ernst Bernárd: *„Die Radioaktivität des Ferrioxid von Buziás“.* Vorgelegt durch J. Weszelszky.
2. Otto Seidl: *„Die Erzeugung des Azophenins auf elektrochemischem Wege“.*

Sitzung am 29. April 1908.

1. Josef Ferenczy: *„Über die Eigenschaften des Chlors“.*
2. Martin Hörcher: *„Über feste Lösungen“.*
3. Koloman Róka: *„Über die neueren Kontrollmethoden der Zuckerfabrikation“.*

Sitzung am 26. Mai 1908.

1. Besichtigung der königl. ung. zentralen Versuchsstelle für Weinbau und des ampelologischen Institutes.
2. Edmund Tisza: *„Rechenschieber für Chemiker“.*
3. Thomas v. Kosutány: *„Ein Verfahren zur Aufdeckung der Schriftfälschung“.*

BERICHTE
ÜBER TÄTIGKEIT, VERMÖGENSSTAND U. A.

DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN UND DER KGL. UNG. NATURWISSENSCHAFTLICHEN GESELLSCHAFT.

I. Ungarische Akademie der Wissenschaften.

1.

Die LVIII. feierliche Jahresversammlung der ungarischen Akademie der Wissenschaften wurde am 3. Mai 1908 abgehalten.

Unter anderem hielt R. Kövesligethy eine Vorlesung: *„Über die Erdbeben“*.

2.

Die Vermögensverhältnisse der Akademie sind aus folgenden Daten ersichtlich:

	Kronen	Heller
Die Akademie besaß am 31. Dezember 1907 ein Vermögen von	5 659 977	11
Davon entfallen auf das Gebäude, die Bibliothek, den Büchervorrat usw.	2 000 000	
Das Budget der Akademie belief sich im Jahre 1907 auf	486 603	16
Die Ausgaben der III. Klasse beliefen sich im Jahre 1907 auf	21 016	45

3.

Die Anzahl der Mitglieder der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am Ende des Jahres 1907 ist aus folgender Tabelle ersichtlich:

	I. (sprachwissen-schaftl. u. ästhetische) Klasse	II. (philosophische und historische) Klasse	III. (mathematische u. naturwissen-schaftl.) Klasse	Zu-sammen
Ehrenmitglieder	6	8	8	22
Ordentl. Mitgl.	12	20	22	54
Korresp. Mitgl.	31	53	50	134
Auswärt. Mitgl.	28	21	23	72
Zusammen	77	102	103	282

Die Vermögensangelegenheiten verwaltete der Direktionsrat der Akademie, der aus dem Präsidenten und Vizepräsidenten, dem Generalsekretär und 23 Mitgliedern bestand.

Nach den Statuten beträgt der Status der Akademie: Ehrenmitglieder 24, ordentliche Mitglieder 60, korrespondierende Mitglieder 156.

Im Mai 1908 wurden in der III. Klasse die folgenden neuen Mitglieder gewählt:

Zum ordentlichen Mitglied:

Alexander Mágócsy-Dietz, Botaniker, bisher k. M.

Zu korrespondierenden Mitgliedern:

Eugen Klupáthy, Physiker,
Karl Tangl, Physiker,
Franz Wittmann, Physiker,
Győző Zemplén, Physiker,
Leopold Fejér, Mathematiker.

Zu auswärtigen Mitgliedern:

Max Wolf, Prof. der Astronomie in Heidelberg,
Sir Georg Howard Darwin, Prof. der Astronomie in Cambridge.
Friedrich Helmert, Prof. der Geodäsie in Berlin.
Hugo Kronecker, Prof. der Physiologie in Bern.
Ernst Salkowsky, Prof. der pathalogischen Chemie in Berlin.

4.

Bibliothek. Die Anzahl der geordneten Fächer beträgt 54. Diese enthalten 75 623 Werke. Darunter:

Anthropologie	572
Mathematik	1261
Naturwissenschaft	252
Physik	1047
Chemie	476
Naturgeschichte	140
Zoologie	745

Botanik	489
Mineralogie und Geologie	589
Medizinische Wissenschaften	2636
Ausgaben von Akademien und wissenschaftlichen Gesellschaften . . .	657
Ausgaben der Ungar. Akademie d. W.	389
Ungarische Zeitschriften	401
Ausländische Zeitschriften	206
Bolyaiana	40

Der Fachkatalog besteht aus 113 Bänden und 47 Zettelkasten. Angekauft wurden 502 Werke. Als Pflichtexemplare wurden erhalten von 203 Druckereien 8979 Werke. Private und Behörden schenkten 199 Werke.

Im Lesesaal der Bibliothek benutzten 5883 Personen 8000 Werke. Ausgeliehen wurden an 145 Personen 854 Werke.

5.

Die III. Klasse hat die folgenden Arbeiten mit Preisen gekrönt:

Josef Krenner: *„Ungarns Mineralogie“* (Semsey-Preis).

Stefan Zorád: *„Die Zukunft des Hanf- und Flachsbaues in Ungarn“* (Forster-Preis).

Nikolaus Jancsó und Aladár Elfer: *„Über die verschiedenen menschlichen Tuberkulosebazillen“* (Rózsay-Preis).

II. Kgl. Ungarische Naturwissenschaftliche Gesellschaft.

1.

Die Gesellschaft hielt ihre Generalversammlung am 31. Januar 1908 ab. Nach der Eröffnungsrede des Präsidenten Prof. Vinzenz Wartha folgte der Jahresbericht des Sekretärs Prof. Ludwig v. Ilosvay, aus dem wir die folgenden Daten entnehmen:

Im Jahre 1908 sind in die Gesellschaft 687 neue Mitglieder eingetreten. Die Gesellschaft hat jetzt 9138 Mitglieder.

Die Gesellschaft gibt die folgenden ungarischen Zeitschriften heraus:

Természettudományi Közlöny (Naturwissenschaftliche Mitteilungen) und *Pótfüzetek a Természettudományi Közlönyhöz* (Ergänzungshefte der Naturwissenschaftlichen Mitteilungen);

Állattani Közlemények (Zoologische Mitteilungen);

Növénytani Közlemények (Botanische Mitteilungen);

Magyar Chemiai Folyóirat (Ungarische Chemische Zeitschrift).

Außerdem erscheinen im Verlage der Gesellschaft auch selbständige naturwissenschaftliche Bücher.

2.

Aus dem Berichte des Kassierers entnehmen wir die folgenden Daten:

	Kronen	Heller
Die Gesellschaft besaß am 31. Dezember 1907 ein Vermögen von	495 957	32
Davon entfallen auf das Gebäude	238 000	—
auf die Bibliothek	100 000	—
auf den Büchervorrat	40 000	—
Die Ausgaben der Gesellschaft beliefen sich im Jahre 1907 auf	139 601	53

3.

Aus dem Berichte des Bibliothekars erfahren wir, daß die Bibliothek der Gesellschaft im Jahre 1907 um 617 Bände gewachsen ist, so daß sie am Ende 1907 insgesamt 28 303 Bände umfaßte. Den Mitgliedern standen im Lesezimmer 134 Zeitschriften zur Verfügung. Auf neue Bücher und Einbände wurden 3840 Kronen verwendet. Der Bibliothek wurden im Jahre 1907 von 1887 Mitgliedern 2244 Bände entliehen.