MEMORIE

DELL'

ISTITUTO NAZIONALE ITALIANO

CLASSE

DI FISICA E MATEMATICA

Tomo primo. Parte seconda

BOLOGNA. 1806

PRESSO I FRATELLI MASI E COMPAGNO

TIPOGRAFI DELL' ISTITUTO

MEMORIE

DELLA CLASSE

DI FISICA E MATEMATICA

DESCRIZIONE

Di un Gonimetro tascabile, e di un nuovo Pantometro ad uso massimamente della geometrìa sotterranea

Di Ermenegildo Pino

Presentata a' 14 luglio 1804

1. Sino dall' anno 1780 io detti negli opuscoli scelti di Milano l' abbozzo di un nuovo stromento, con cui esattamente e speditamente si riconosce nello stesso tempo l' inclinazione e direzione di qualunque linea o piano; e ne indicai gli usi mineralogici per rapporto alla stratificazione dei monti, ed alla posizione dei filoni metallici. Nulladimeno questo stromento, che allora chiamai *Gonimetro*, e che mi è di comodissimo uso nelle mie escursioni mineralogiche, non sembra essere abbastanza conosciuto; giacchè in Parigi stesso, dove alcuni mineralogisti il videro presso di me, fu

riguardato non meno utile che nuovo; e come tale fu quindi recentemente rammemorato in un rapporto, che alcuni Consiglieri delle miniere di Francia fecero all' Istituto nazionale su di un *Grafometro sotterraneo* proposto dal Luogotenente generale *Komarsewski*. (*Journal des mines* vol: 14. pag: 416.) L'aver io allora dato un semplice schizzo del nominato gonimetro fu forse cagione, che non se ne comprendesse abbastanza la costruzione; altronde vi feci in seguito diversi miglioramenti, e lo ridussi anche ad essere tascabile, quale è desiderato da chi viaggia per le montagne a farvi osservazioni mineralogiche. Quindi mi è sembrato che questo stromento possa ancora al presente essere da me prodotto come nuovo; e che dando una più distinta spiegazione della sua costruzione e degli usi suoi, possa essere riguardato non solo come utile, ma ben anco come necessario per le operazioni mineralurgiche.

2. Nel perfezionare tale stromento, esso divenne atto a tutti gli usi geodetici e montanistici: onde io lo chiamerò *Pantometro*. Col gonimetro le direzioni vengono determinate per mezzo dell' ago magnetico. Ma questo è soggetto ad irregolari deviazioni, quando sia in vicinanza di materie che contengano ferro in un certo stato, e perciò la calamita non può usarsi nelle cave di miniere di ferro retrattorie; anzi l' uso di essa può essere sospetto anche in quelle cave, in cui non si manifestano tali miniere, attesochè molte altre materie lo contengono, ed alle pruove manifestano una decisa polarità. Aggiugnesi, che nel ripulire il vetro che serve di coperto alla bussola, come spesso occorre di fare nelle cave, esso può contrarre una certa elettrici-

tà, ed agire sull' ago magnetico. Finalmente, siccome questo è soggetto a variazioni nella declinazione, perciò intervengono difficoltà e dubbj nel combinare tra loro le direzioni dei filoni metallici prese colla bussola in diverse epoche, quando pure sui disegni delle cave non sia stata segnata la meridiana del luogo. Attese tali circostanze, già da qualche tempo si pensò al modo di prescindere dall' ago magnetico nelle operazioni della geometrìa sotterranea; ed al presente il Consiglio stesso delle miniere di Francia si occupa di tale progetto, sebbene finora non l' abbia ridotto a compimento. Intanto avendo il Luogotenente generale *Komarsewski* presentato all' Istituto nazionale di Francia il sopraccennato grafometro diretto all' indicato fine, i delegati a farne il rapporto, lo trovarono atto ad essere sostituito agli antichi stromenti montanistici (*Journal des mines*. vol: 14. pag: 419) Dalla descrizione però, che ne dette lo stesso autore, si comprende che il suo grafometro non è di un uso generale, non potendosi con esso prendere l' inclinazione e direzione di qualunque piano: il che sarà più sotto da me dimostrato. Comunque siasi, il pantometro che io propongo, è di costruzione diversa da quella dell' indicato grafometro, ed è certamente atto al divisato fine di prendere esattamente l' inclinazione e direzione di qualunque piano o linea, indipendentemente dall' ago magnetico.

3. Da che il gusto della geologìa si è propagato tra' mineralogisti, molti ci hanno date le loro osservazioni sulla inclinazione e direzione degli strati di que' monti, per cui essi viaggiarono. Io però mi crederei

di non errare, se assicurassi che quelle per lo più furono fatte senza gli opportuni stromenti, e spesso da persone che neppure sapevano in che consiste la misura dell' inclinazione e direzione di un piano; sì che tali osservazioni non potrebbero servire per una teoria geologica, se non quando fossero rifatte. Affinchè pertanto possa a questo e ad altri usi servire lo stromento, di cui sono per dare la descrizione, gioverà che io brevemente ne premetta i principj teorici.

4. Se una retta è perpendicolare ad un piano, essa è perpendicolare a tutte le rette condotte nel piano stesso. Ma se la retta AB (fig. 1) è obliqua, o sia inclinata ad un piano, come $GHIK$, essa forma diversi angoli colle varie linee condotte per il punto A d' incidenza; e per avere la misura della sua inclinazione col piano, conviene abbassare da un punto B di essa una perpendicolare BC sul piano, e congiugnendo i punti C, A colla retta CA, l' angolo CAB sarà la misura dell' inclinazione di AB. Perciocchè tal misura dee essere costante; e l' angolo BAC è tale, siccome quello che è il minimo tra tutti quelli, che la retta AB forma con qualunque altra, come AD, condotta dal punto A nel piano stesso. In fatti descrivendo col raggio AC un circolo nel piano $GHIK$, e congiugnendo DB, i due triangoli ABC, ABD avranno il lato AB comune, e le basi AC, AD eguali, come raggj dello stesso circolo. Ma BC, come perpendicolare al piano, sarà minore di BD; onde l' angolo BAC sarà minore di BAD; e poichè da un punto B si può condurre una sola perpendicolare al piano stesso, perciò sarà l' angolo BAC il minimo di

tutti quelli, che la retta $A B$ forma con altre rette condotte nel piano stesso.

5. Poichè il piano $A B C$ passa per la retta $B C$, la quale è perpendicolare al piano $G H I K$, perciò quello sarà perpendicolare a questo, e si chiamerà *piano d' inclinazione*. In quello la retta $A C$ è la sua comune sezione col piano dato $G H I K$, la quale chiamasi anche la *projezione* della retta obliqua $A B$; e la perpendicolare $B C$ chiamasi il seno dell' angolo d' inclinazione $B A C$.

6. Se due piani $D F S R$, $D F E G$ (fig. 2) sono tra loro inclinati, essi si taglieranno in una comune sezione $D F$, e la misura della loro inclinazione sarà l' angolo $B A C$ formato dalle rette $A B$, $A C$ perpendicolari alla comune sezione, e condotte da un suo punto A, l' una nel piano $D F S R$, l' altra nel piano $D F E G$. Perciocchè la misura dell' inclinazione deve essere costante; e tale è l' angolo $B A C$, essendo il minimo tra tutti quelli che si possono formare da due rette condotte dal punto A nei due piani inclinati tra loro: il che si dimostra, come al n°. 5.

7. Poichè il piano $B C A$, che passerebbe per le rette $A B$, $A C$, è perpendicolare ad ambi i piani $D F S R$, $D F E G$, perciò la misura dalla loro inclinazione, che è l' angolo $B A C$, è quello che è formato dalle comuni loro sezioni $A B$, $A C$ con un piano perpendicolare ad ambedue; e questo si chiamerà *piano d' inclinazione* dei due piani inclinati tra loro.

8. Se il piano, su cui cade perpendicolarmente una retta o un piano, è orizzontale, la retta o il piano dicesi *verticale*; ed un piano è orizzontale, allora che

ad esso è perpendicolare un filo stirato da un peso.

9. Un piano verticale, che intendesi passare per i poli della terra, chiamasi *meridiano*, e la sua comune sezione coll' orizzonte chiamasi *meridiana astronomica*.

10. Un ago magnetico che possa liberamente girare su di una punta, ha una direzione polare, in virtù della quale si dirige, e si ferma o nella meridiana astronomica, ovvero in una linea che colla meridiana stessa forma un angolo determinabile secondo le varie circostanze di tempo e luogo. Questa linea si chiama *meridiana magnetica*.

11. L' angolo che al centro di un circolo orizzontale formasi da una retta, o sia da un raggio colla meridiana, è la direzione di quella linea; e dicesi direzione o *astronomica*, o *magnetica*, secondo che la meridiana è o l' astronomica, o la magnetica.

12. La direzione magnetica di una linea chiamasi direzione *osservata*, per distinguerla dall' *astronomica*, che è l' originaria. L' osservata però può ridursi all' astronomica; e quella dicesi *ridotta* o *corretta*, quando si è fatta la riduzione all' astronomica. Quindi chi espone le sue osservazioni mineralogiche, dee avvertire, se le direzioni di cui parla, sieno le osservate, o le ridotte.

13. Per fare tal riduzione, conviene sapere la declinazione dell' ago magnetico, cioè l' angolo che la meridiana magnetica forma coll' astronomica. Questa declinazione è varia in diversi tempi e luoghi, onde conviene frequentemente riconoscerla. Al presente nelle nostre regioni la declinazione è verso occidente; ed è

di gradi 18 $\frac{1}{2}$ in Milano, di 20 $\frac{1}{2}$ in Bologna, di 22 in Parigi.

14. La posizione di una linea, o di un piano per rapporto all' orizzonte è determinata, quando sia determinata sì l' inclinazione, che la direzione loro.

15. L' inclinazione si suol misurare con un quadrante di circolo nel modo, che sarà detto più sotto.

16. Per misurare la direzione magnetica (fig. 3) di una linea, o di un piano, serve la così detta bussola. Questa consiste in una scatola circolare, dal centro della quale sorge una punta I, su cui sia mobile l'ago magnetico. La scatola è impernata in un anello $N''XEVS''YO''$ ai punti $E'O'$; e questo è similmente impernato a squadra in un altro anello $N'BS'D$ ai punti $N'S'$; così che movendosi la scatola, e l' anello in cui è impernata, si mantenga in essa la posizione orizzontale. Dentro la scatola è un circolo, in cui primamente si conduce un diametro NS, il quale noi chiameremo *meridiana istromentale*; perciocchè questo rappresenta il principio da cui si computa la direzione; e questa meridiana rappresenta la linea, la cui direzione si vuol determinare. Ad una estremità di questa meridiana si segna il settentrione, o sia *Nord* colla lettera N, ed all' altra opposta il mezzodì, o sia il *Sud* colla lettera S. Perpendicolarmente a questo diametro NS si conduce un altro diametro EO, che chiameremo *conjugato*; ad una delle di lui estremità si segna l' oriente o sia l' *Est* colla lettera E, ed all' altra l' occidente o sia l' *Ovest* colla lettera O; e questo circolo, che sempre dee esser parallelo all' orizzonte astronomico, si chiamerà orizzonte *istromentale*.

17. La meridiana istromentale divide l' orizzonte istromentale in due semicircoli, uno dei quali è *orientale*, e l'altro *occidentale*; e vicendevolmente il diametro conjugato divide la meridiana in due parti, l'una delle quali è la *settentrionale*, e l' altra è la *meridionale*. Il semicircolo sì orientale che occidentale, dividesi in 180 gradi, che si chiamano orientali, ovvero occidentali, secondo che sono nel semicircolo orientale, ovvero occidentale. Ma la numerazione ordinale dei gradi dee essere segnata diversamente, secondo la diversa maniera di computare e di denominare la direzione.

18. E parimente l' orizzonte istromentale si può annettere all'ago magnetico, così che giri col moto comune dell' ago stesso: il che si fa, applicandovelo in maniera, che il suo centro corrisponda alla punta, da cui è sostenuto l'ago magnetico, e che il nord dell' orizzonte istromentale e mobile, sia nella parte settentrionale dell' ago medesimo; nel qual modo il nord istromentale viene a coincidere col nord magnetico. Dee però rimanere segnata nell' istromento la meridiana istromentale $N' S'$, siccome quella che sempre dee corrisponder alla linea, di cui si vuol determinare la direzione. Posta tale disposizione dell' orizzonte istromentale, l' oriente vi si segna a destra di chi dal centro guarda il nord istromentale, e l' occidente a sinistra: il che corrisponde alla posizione astronomica dei quattro punti cardinali. Inoltre siccome si suole estimare la direzione, andando dal nord verso oriente, così nel circolo mobile si segnano i gradi coi numeri crescenti, cominciando dal nord, e proseguendo verso

l' est sino al sud, ove si segna il numero 180. Di poi si ricomincia la numerazione, andando verso occidente, e terminandola nel nord, d'onde si cominciò. Quindi la direzione di una linea si determina, facendo alla linea stessa corrispondere la parte settentrionale della meridiana istromentale: il che fatto, il numero dei gradi, che sull'orizzonte mobile viene a corrispondere al nord istromentale, è la direzione richiesta della linea; la qual direzione dicesi *orientale*, se i gradi segnati dal nord istromentale sono nel semicircolo mobile orientale; e dicesi *occidentale*, se sono nel semicircolo occidentale.

19. Ma quando l' orizzonte istromentale non è mobile col moto comune dell'ago magnetico, conviene in quello segnare a rovescio sì l' oriente e l' occidente, come anche la numerazione successiva dei gradi; cioè a dire si scrive l'*est* a sinistra, e l' *ovest* a destra, com' è nella figura 3; ed i gradi che cominciano al nord, si segnano coi numeri crescenti a sinistra sino al sud, ov' è il numero 180; e da questo punto si ricominciano, continuandoli per l'ovest, sinchè si giunga al nord, ove sarà pure il numero 180, che indica 180 gradi occidentali, i quali corrispondono allo zero di gradi di direzione orientale. In tal disposizione la direzione di una linea si determina, facendo corrispondere ad essa il raggio settentrionale della meridiana istromentale, ed osservando il numero di gradi, che viene segnato dal nord magnetico; e la direzione dicesi *orientale*, se i gradi segnati dal nord dall' ago magnetico sono nel semicircolo segnato nell' istromento come orientale; *occidentale*, se sono nell' occidentale. Se in vece di segnare a rovescio l' est e l' ovest, si segnassero secondo

la loro situazione astronomica, converrebbe nell' uso dello stromento ricordarsi di chiamare occidentali i gradi del semicircolo segnato *E*; ed orientali quelli del semicircolo segnato *O*.

20. Per gli usi della geometria sotterranea, la direzione si misura non in gradi, ma in ore; cioè a dire il semicircolo orientale dell' orizzonte istromentale si divide in 12 parti eguali che chiamansi *ore*, ed in altrettante il semicircolo occidentale, segnandovi i numeri collo stesso ordine, che ho indicato pei gradi. Ogni ora si suddivide in 8 parti, cioè in ottavi di ora.

21. Per la nautica il semicircolo orientale dell' orizzonte istromentale si suddivide in 16 venti, ed in altrettanti l' occidentale; e questi, come abbiamo detto dei gradi, si segnano a rovescio, quando l' orizzonte non è connesso coll' ago magnetico. Questo circolo così diviso suol chiamarsi *rosa dei venti*.

22. La direzione in gradi si esprime nel seguente modo. Supponendo che siasi trovata di 20 gradi orientali, si scrive 20 Or., oppure *E*. 20; che se fossero occidentali, si scriverebbe 20 Or., oppure *O*. 20. In simile maniera si esprime la direzione in ore: per esempio 4. 2. Or. oppure *E*. 4. 2., che significa essere la direzione a 4 ore e 2 ottavi, ed essa orientale; che se fosse occidentale, si scriverebbe 4. 2. Oc. oppure *O*. 4. 2. Finalmente la direzione espressa in Venti si denomina dal vento a cui corrisponde, esprimendola coll' abbreviazione indicata nella rosa dei venti. (fig. 3)

23. La direzione che si determina nelle accennate maniere, è l' *osservata*. Per ridurla all' astronomica, conviene farvi l' opportuna correzione. Il che richiede

che si sappia la declinazione dell' ago magnetico. Quando questa sia nota, e si usi l' orizzonte connesso coll' ago medesimo, si può colla bussola avere la direzione astronomica nell' atto stesso dell' operazione. Ciò si ottiene nel seguente modo. Supposto che la declinazione sia di gradi 20 verso occidente, è chiaro che la parte settentrionale della meridiana astronomica formerà verso oriente, cioè alla destra della parte settentrionale della meridiana magnetica, un angolo di gradi 20. Quindi nell' attaccare l' orizzonte istromentale all' ago magnetico, invece di far corrispondere la parte settentrionale dell' orizzonte istromentale mobile alla parte settentrionale dell' ago magnetico, quella si terrà 20 gradi alla destra di questa, cioè a dire, invece di far corrispondere al nord magnetico il grado 180 *N*, si farà corrispondere il grado 160 del semicircolo occidentale, e così nella bussola stessa sarà ridotta la direzione osservata all' astronomica, che sarà segnata dal nord dell' orizzonte istromentale fisso.

24. Come tutte queste diverse maniere di osservare e di determinare la direzione si ottengano col gonimetro, si vedrà nella descrizione del medesimo. Intanto gioverà notare alcune altre maniere di computazione. I mineralogisti svezzesi dividono l' orizzonte istromentale in quattro quadranti, ciascuno di 90 gradi, ed ogni quadrante in 4 Venti.

25. Gli ungaresi dividono bensì la bussola mineralogica in 24 ore, e computano la direzione, andando dal nord all' oriente. Essi però non ricominciano, come noi facciamo, la numerazione al sud, ma la continuano in serie crescente dopo il 12; così che, laddove nel

semicircolo occidentale noi segniamo 1, 2, 3, ec., essi segnano 13, 14, 15. La maniera però da noi usata è migliore, ed è perciò seguita più comunemente dagli scrittori di geometria sotterranea.

26. Abbiamo detto che la posizione di una linea o di un piano è determinata, quando sia determinata la sua inclinazione e direzione. Allora che la linea è orizzontale, la sua inclinazione è nulla: perciocchè nell' orizzontale è il principio, d' onde si computa in gradi l' inclinazione delle linee non orizzontali, il qual principio è zero di gradi. Ora siccome una linea può intendersi prolungata indefinitamente da ambe le parti, perciò la direzione magnetica di una linea orizzontale CN (fig. 4) può essere sì l' angolo NCN', che segna una direzione orientale, come il suo opposto ed eguale SCS', che si può intendere formato dal prolungamento di essa, e che segna una direzione opposta, cioè occidentale. Quindi per togliere l' ambiguità, conviene distinguere la linea, o come da descriversi, o come già descritta. Se è già descritta, senza che sia fissato in essa il punto, dal quale si cominciò la descrizione, la sua direzione è tra due punti N, S di essa, che sono, l' uno da una parte, e l' altro dall' altra del centro dell' orizzonte istromentale: onde se per esempio la linea SN coincide colla meridiana magnetica, la sua direzione deve dirsi tra settentrione e mezzodì; nè si può esclusivamente dire che sia da settentrione a mezzodì; perciocchè può anche dirsi essere da mezzodì a settentrione. Ma se la linea si riguarda come descritta, o da descriversi da un punto I, (fig. 4) come principio, andando dirittamente ad un altro punto N, come ter-

mine, allora la direzione della retta IN, che congiugne questi due punti, sarà determinata, e da esprimersi nel modo sopra indicato (n°. 22); e noi supponiamo sempre, che il principio della linea, di cui si avrà a determinare la direzione, corrisponda al centro I dell' orizzonte istromentale, ed il termine sia verso il nord della meridiana istromentale, al quale sia sempre rivolto l' osservatore supposto nel centro stesso.

27. Quando una retta, come AB (fig. 1) è obbliqua, la sua direzione è quella, che ha la sua projezione AC sull' orizzonte; ed allora la direzione della linea può chiamarsi o *ascendente*, o *discendente*. Così se la sua direzione è tra l' est e l' ovest, la retta può esser ascendente dall' est all' ovest, oppure dall' ovest all' est; onde per determinare la posizione, conviene esprimere se l' ascensione sia orientale, ovvero occidentale, cioè da qual rispetto sia ascendente. In quella maniera però, che una retta può dirsi *ascendente* dall' est all' ovest, può esser chiamata *discendente* dall' ovest all' est. Ma ordinariamente si esprime il rispetto dell' ascensione; e quando trattasi di calcolare, si riguarda la direzione ascendente come positiva, e la discendente come negativa, in quella guisa che la direzione orientale si chiama *positiva*, e l' occidentale *negativa*.

28. Anche l' inclinazione di un piano parallelo all' orizzonte è nulla, come è nulla la sua direzione. Perciocchè per la direzione di un piano richiedesi ch' esso abbia una sezione comune coll' orizzonte; ed un piano orizzontale, o parallelo all' orizzonte non forma con questo veruna sezione comune. Potrebbesi però anche dire che un piano orizzontale ha innumerevoli dire-

zioni come possibili; ma per questo stesso non ne ha veruna come esistente o determinata.

29. Quando un piano *DFSR* (fig. 2) è inclinato, in esso convien distinguere due direzioni, l'una ascendente da *A* in *B*, e l'altra laterale, che è quella della comune sezione *FD*, che esso forma coll'orizzonte, e che stendesi da *A* in *F*, ovvero da *A* in *D*. La direzione ascendente è quella, che ha la retta *AB* che è comune sezione del piano inclinato *DFSR* col piano verticale d'inclinazione *BAC*: la qual direzione è quella stessa, che ha la retta *AC* che è la projezione di *AB*. La direzione laterale *DF* è sempre perpendicolare alla direzione ascendente; onde, quando questa sia determinata, diviene nota anche la laterale.

30. La direzione laterale è quella che propriamente intendesi dai mineralogisti, quando semplicemente nominano *direzione*; e l'ascendente è da essi chiamata *pendenza*. Così se un filone o uno strato ha la direzione tra nord e sud, la sua *pendenza* dicesi tra est ed ovest.

31. Se il piano di cui si cerca la direzione, è non inclinato, ma verticale, la sua pendenza o sia la sua direzione ascendente è nulla, in quanto che cessa di essere piano inclinato: ma propriamente esso ha la massima elevazione sul piano orizzontale; e la sua direzione è quella che ha la sua comune sezione coll'orizzonte; la qual direzione è propriamente la laterale.

32. E qui è da avvertire alla diversa maniera che si può seguire nel computare la maggiore o minore inclinazione o pendenza di una linea o di un piano. Ordinariamente si computa il principio dell'inclinazione

dalla posizione orizzontale, così che, quando una linea o un piano è orizzontale, la sua inclinazione dicesi nulla; onde a misura che la linea o il piano forma coll' orizzonte un angolo maggiore, finchè giunga a formare un angolo retto, dicesi avere una maggiore inclinazione o obbliquità coll' orizzonte. Alcuni però distinguono l' obliquità dalla inclinazione; e quella estimano dalla verticale, così che chiamano più obliqua quella linea che maggiormente declina dalla verticale, cioè che ha una minore inclinazione coll' orizzonte, o sia che forma un angolo minore colla linea orizzontale. Lo stesso intendono anche di un piano.

33. Dai principii esposti dipende la determinazione della posizione degli strati e dei filoni metallici. *Strati* diconsi quei massi soprapposti gli uni agli altri, ciascuno dei quali è compreso tra due piani paralleli. Il piano di uno strato, che giace sul piano di un altro, chiamasi *commessura*: onde i massi, affinchè sieno stratificati, devono avere le commessure parallele. Nella figura 8 sono espressi tre strati, le cui commessure sono $GHEF$, $NIDS$, ec.

34. *Filone* o *vena* chiamasi uno strato di materia minerale diversa da quella, dentro la quale rimane incassata. In un filone obliquo distinguesi il *riposo*, ed il *cadente*; o sia il *pavimento*, ed il *tetto*; la quale distinzione è da intendersi anche negli strati. *Per riposo* intendesi il piano giacente, su cui il filone s' appoggia; ed il *cadente* è la superficie opposta al riposo. Così un filone che fosse tra i due piani $FHIE$, $ABCD$ (fig. 9), avrebbe il primo per riposo, ed il secondo per cadente.

35. Premesse tali cose, vengo ora alla descrizione ed agli usi dello stromento, con cui nello stesso tempo e con somma facilità si misura l' inclinazione e direzione di qualunque linea o piano; e comincerò dal gonimetro tascabile. Esso è disegnato nella sua grandezza reale nelle figure 3, 5, 6. Consiste primieramente (fig. 5, 6) in un anello piatto $N'' V O''$ sostenuto da tre colonnette A egualmente alte, che in esso entrano a vite, e sono amovibili. All' indicato anello (fig. 3) è applicata la bussola descritta al n°. 16. Finalmente in un piano parallelo alla meridiana istromentale è applicato un quadrante (fig. 6) $R C D$, in modo che il suo raggio $C P$ il quale segna lo zero, sia perpendicolare al piano dell' accennato anello, ovvero alla base $A A' A''$ dell' Istromento (fig. 5), e l' altro $C D$, che segna il numero 90, sia parallelo al piano dell' anello stesso, ed alla meridiana istromentale $N S$.

36. Dal centro C del quadrante pende un piombino P, e tutto il quadrante è amovibile, essendo applicato allo stromento per mezzo di due piccole punte T, che entrano nelle corrispondenti cavità praticate sulla costa dell' anello $V O N''$.

37. L' orizzonte istromentale (fig. 3) ha tre divisioni circolari, l' una in gradi, l' altra in Venti, la terza in ore.

38. Il gonimetro si smonta, svitando i piedi, e detraendo il quadrante: il che fatto, rimane la bussola nel suo anello, ed il tutto si ripone in una scatola o astuccio che riesce di piccola mole e di poco peso. Ma affinchè l' ago magnetico non esca di luogo nel trasporto, avvi una *ferma* (fig. 7) fatta nel seguente mo-

do. Nel mezzo *C* del circolo che forma il fondo della bussola, è fissata la punta che sostiene l'ago magnetico; e questa passa entro ad un cono di ottone *EDF*, il quale è forato nel mezzo, ed ha al di sotto due pezzi *HY*, per mezzo dei quali si connette colle viti *n*, *m* ad un tubo *atza* terminato in un bottone *GH*. La sommità *aa* di questo tubo s'appoggia contro una molla *ar* fatta di sottili lamine di ottone, così che, premendo insù il tubo, si rialza con esso il cono al di sopra della punta che sostiene l'ago magnetico; e lasciando agire la molla, la punta stessa sporge fuori del cono sì che l'ago magnetico può agire liberamente. Per tale artifizio, quando si ripone nella scatola la bussola, il peso di questa vince la pressione della molla, e spinge insù il cono, il quale riceve il cappelletto dell'ago magnetico, e lo preme contro il vetro che cuopre la bussola, e così impedisce il moto dell'ago stesso.

39. Il descritto stromento è sufficiente per gli usi mineralogici. Ma per renderlo di un uso più esteso, e massime per la geometria sotterranea, richiede diverse addizioni, dalle quali risulta un nuovo stromento, che io chiamo *pantometro*. Questo è composto di due parti. La prima è il *gonimetro*; la seconda è un treppiede sul quale si monta il gonimetro, allora che bisogna. In questo però alcune sue parti sono costruite diversamente da quel che sono nel tascabile.

40. Primamente per base del gonimetro si prepara una lamina di ottone circolare *EFG* (fig. 15, 16, 17) ritagliata internamente in una crociera *HH'B''H''*, nel cui mezzo sia un foro *D*.

Su questa base si alzano quattro sostegni egualmente alti, cioè tre colonnette (fig. 15) $A\,A'\,A''$, ed un bracciuolo montante $B\,B'\,B''$, che colle viti r, r', r'' si annette alla base perpendicolarmente; e su questi sostegni si congiugne l'anello superiore $x, x', x''\,r$, che porta la bussola, e che è eguale all'inferiore $GHEF$, come vedesi nella fig. 16 rappresentante il gonimetro in prospettiva.

Nell'anello superiore, che è fisso, sono tre fori a vite x, x', x'', i quali sono destinati a ricevere tre altre colonnette, che devonsi avere a parte per applicarvele superiormente, quando il gonimetro si deve usare, ponendolo sul cadente di uno strato, o filone metallico (n°. 34).

All'anello mobile $r\,x\,x'\,x''$ (fig. 16) della bussola è applicato un traguardo Z nella direzione della meridiana istromentale; il qual traguardo consiste in due punte di tale lunghezza, che per esse si possa mirare anche ad un oggetto alquanto elevato, o depresso per rapporto all'orizzonte: il che si otterrà, abbassando o elevando l'anello stesso, che per costruzione è girevole su de' suoi perni.

41. Per alcuni usi giova avere in pronto una tavoletta quadrata di legno, nel cui mezzo sorga un cilindro di ottone, sulla quale si porrà il gonimetro, facendo entrare nel cilindro il foro centrale D praticato nella base del gonimetro stesso.

42. Nell'anello GFE (fig. 15) si farà un piccol foro t, che servirà per fissar con vite il gonimetro sulla tavoletta o sul treppiede, come si dirà.

43. La bussola ha l'orizzonte istromentale girevole;

e tal moto è praticato nel seguente modo. Al di sotto della piastra che serve di orizzonte istromentale, qual è *g h i* (fig. 17, 18), è unita una ruota dentata *a b c* mobile centralmente per mezzo di un pignone *d*, il cui bottone sporge fuori al di sotto della bussola, come vedesi nella fig. 18; e per bilanciare il peso del pignone, è aggiunto il contrappeso *e m*.

Allora che l'orizzonte istromentale è girevole, i Venti vi si segnano coll' ordine diretto, e non a rovescio; ma nel cerchio diviso in gradi, che è fisso, la segnatura dell' est ed ovest rimane a rovescio, come si è detto al n°. 19. Di più nell' orizzonte girevole si segna il luogo della correzione della direzione magnetica, cioè a dire, se la declinazione magnetica è di 20. gr. oc. il segno si fa nel suo semicerchio occidentale in distanza di 20 gr. dal nord dell' orizzonte girevole.

Al sopraindicato bracciuolo si applica in vece del quadrante un semicircolo (fig. 16, 20) graduato *T B t*, il quale si possa girare intorno al suo centro. La sua posizione deve essere perpendicolare alla base del gonimetro, e parallela al piano condotto per la meridiana istromentale perpendicolarmente alla base stessa.

A questo semicircolo (fig. 18), che sulla costa *u r* è solcato, si applica una vite di richiamo pei piccoli movimenti. Questo meccanismo resta dietro il Nonio *G F* (fig. 20); e consiste in una vite perpetua che ingrana nei solchi *u r* del semicircolo, e che per mezzo del bottone *K* si può girare, facendo così elevare o abbassare centralmente il semicircolo a piccoli gradi. Questa vite perpetua è incassata in modo che l'incassatura *L L'* si possa alzare ed abbassare intorno il centro z; e per mezzo di una vite di pressione R (fig. 18) essa si tiene ferma all' altezza richiesta, affinchè la vite perpetua ingrani nei solchi del semicircolo.

Poichè la posizione di questo meccanismo impedisce che il filo del pendolo vada a radere il piano del semicircolo, come richiede l' uso del gonimetro (fig. 20), perciò il pendolo o piombino è fatto in modo che dal centro della sua base sporga un sottile ago t, il quale equivale al filo e può segnare sul semicircolo i gradi di elevazione, essendo ritagliati i raggi CY, CY', CY'' nelle porzioni $XY, X'Y, X''Y''$ in modo che il cilindretto I costituente il piombino del pendolo, possa per metà entrare in questi ritaglj.

44. Sulle estremità del semicircolo prolungato sono due coscinetti ad arco circolare T, T (fig. 18, 20), su' quali si pone un cannocchiale munito di un livello a bolla d' aria, allora che il gonimetro si riduce ad uso di pantometro.

Il gonimetro così costruito si ripone in una cassetta unitamente alla tavoletta sopraindicata ed alle tre colonnette amovibili (n°. 40); e quella per mezzo di un manubrio potrà comodamente essere portata dal mineralogista, ed a lui servirà per prendere l' inclinazione e la direzione magnetica dei piani inclinati.

45. Per ridurlo a uso di pantometro, converrà avere in pronto un treppiede colla sua testa terminata da piatine, in modo che possano queste orizzontarsi per mezzo dei livelli: il che si otterrà col meccanismo già noto dei teodoliti, di cui altronde potrassi avere un' idea dalla *descrizione del Teodolito* pubblicata dal sig. *Pessuti*.

46. La costruzione più opportuna sembrami essere la seguente. Il treppiede abbia ciascun piede formato di due bastoni *A A*, *B B* (fig. 21). parallelepipedi, il primo dei quali possa scorrere sull'altro. In questo secondo *B B* si fissi una veretta di ottone *A B C D* abbastanza consistente, dentro la quale possa scorrere il bastone superiore *A A*, e così formare un piede più o meno lungo secondo il bisogno. Nella parte superiore della veretta sia una vite di pressione *L I*, stringendo la quale, sarà fermato il bastone *A A* a quella lunghezza che si vorrà. Il poter accorciare i piedi giova massimamente quando si usa il treppiede nelle cave che sogliono essere anguste e basse.

I tre piedi sieno uniti alla loro estremità superiore col meccanismo teodolitico. Questo termina in una piastra circolare, dal cui centro sorge un cono, sul quale si suole investire quella parte dell' istromento, che forma la principale parte del teodolite. Ma per ridurre il gonimetro a pantometro, la piatina superiore del teodolite si faccia piana e senza la scatola per l' ago magnetico, giacchè su di quella deve collocarsi il gonimetro, che già è fornito della bussola magnetica. Affinchè questo vi sia collocato centralmente, e vi stia fermo, sorgerà dal centro della piatina un piccolo cilindro adattato al foro *D* (fig. 16) praticato nella base del gonimetro, e nella piatina stessa sarà un foro a vite corrispondente al foro *t* preparato nella base stessa per fermare con una vite il gonimetro sulla piatina medesima.

47. La figura 19 rappresenta il piantato della piatina teodolitica insieme col gonimetro soprapposto.

m n r s è il tubo che entra nel cono annesso al treppiede. Per unire il corpo dell' Istromento col treppiede in modo che quello non si smuova, si suole far passare al disotto del tubo una lunga vite che traversa la testa del treppiede. Ma sarà più semplice cosa il fare nel tubo *m n r s* (fig. 20) una fessura *g h*, e nel cono un risalto corrispondente, in cui quella entri, e così il tubo vi rimanga fermo.

L' indicato tubo è unito per mezzo di sei raggi di ottone con un anello $R N M' R' M R'' M''' R'''$ (fig. 19, 20) parimente di ottone, la cui larghezza è $M R''$, e la grossezza è $x x'$ (fig. 20).

Su questo anello è posta la piatina $M D M' M'' M'''$, che centralmente si gira per mezzo di un pignone che ingrana in una ruota dentata unita alla piatina stessa, il bottone del quale sporge fuori al disotto della piatina, ed è indicato dalla lettera X' (fig. 20).

Sull' anello indicato sono le divisioni in gradi, come nella fig. 19, e sul bordo *O V* della indicata piatina, che è obbliquo, è segnato un Nonio *x y* (fig. 20).

Sulla piatina stessa sono situati due livelli a bolla d' aria $R' S$, $T Q$ (fig. 19).

Finalmente ad essa si soprappone il gonimetro nel modo indicato, allora quando si vuole adoperare come pantometro. Tale disposizione è espressa nella figura 20, che è tutto lo stromento separato dal treppiede, e veduto di prospetto al semicerchio in elevazione ortografica.

Questo stromento unito al treppiede avrà tutti gli usi del teodolite, poichè è atto alla misura degli angoli orizzontali, e verticali; ma adoperando il gonimetro separatamente, avrà di più un uso, al quale è inetto il teodolite, cioè a dire, servirà per conoscere l'inclinazione e direzione di qualunque piano inclinato.

48. Allora quando le visuali saranno dirette a piccole distanze, come suole avvenire nelle cave, si farà uso del traguardo; ma quando saranno dirette a grandi distanze, servirà il cannocchiale *b b'* (fig. 20), che si porrà sui coscinetti *T'*, *t*, fermandovelo con due punte che passino nei piccoli fori *f*, *f'*.

49. Poichè sì il teodolite, che il pantometro può servire per le livellazioni, perciò, affinchè queste riescano più esatte, gioverà sulla piatina girevole *V O O' V'* (fig 20) fissare due coscinetti di eguale altezza, e simili a quelli che portano il cannocchiale sul semicerchio: perciocchè la linea orizzontale presentata dal cannocchiale ad essi soprapposto sarà più esatta, siccome quella che sarà soggetta ad alterazioni minori di quelle, che può soffrire, quando il cannocchiale è portato dal semicerchio.

Resta ora, che io spieghi gli usi dei descritti stromenti: il che farò colla soluzione di alcuni problemi.

PROBLEMA 1°.

50. Trovare col gonimetro l'inclinazione o pendenza di un piano, e la sua direzione magnetica.

Per la soluzione del problema è da distinguere se il piano presenta il riposo oppure il cadente. Supponiamo primamente, che presenti il riposo, quale è *F B C D* (fig. 11). Si collochi su di esso la base del gonimetro, e questo vi si raggiri, finchè il filo del piombino r venga a radere il piano del quadrante HEu, cioè finchè il filo sia nello stesso piano del quadrante. L' inclinazione del piano sarà l' angolo tEu formato dal filo, e dal raggio Eu del quadrante; e la direzione ascendente sarà quella che è indicata dal nord dell' ago magnetico.

Per dimostrarlo, intendasi il raggio Eu prolungato, finchè incontri in un punto X il piano dato $FBCD$; Dal punto X si conduca un piano orizzontale $RQGM$, il quale col piano inclinato formerà la comune sezione GM. Si prolunghi la direzione tE del piombino, sinchè incontri il piano orizzontale nel punto Y, ed il piano inclinato nel punto Z. Quindi dal punto X si conducano ai punti Y, Z le rette XY, XZ, la prima delle quali sarà nel piano orizzontale $RQGM$, e l' altra nel piano inclinato $FBCD$; e poichè le rette Et, Eu per la posizione del gonimetro sono nello stesso piano, che è quello del quadrante HEu; perciò anche le rette XY, XZ saranno nello stesso piano ZEX formato sul prolungamento delle rette Et, Eu; e questo piano ZEX sarà verticale, siccome quello che passa per la retta verticale Et, che è la direzione del piombino.

Ora essendo Et perpendicolare al piano orizzontale $RQGM$, l' angolo EYX, o sia ZYX sarà retto. Parimente essendo per costruzione del gonimetro la retta EX perpendicolare all' anello SEN, e perciò alla base dello stromento, la quale coincide con una parte del piano inclinato, sarà EX perpendicolare a questo stesso piano; onde l' angolo ZXE sarà retto. Per lo che nei due triangoli XEZ, XZY, che hanno retti gli angoli ZYX, ZXE, e comune l'angolo YZX, sarà parimente l'angolo ZXY eguale all' angolo XEY. Ma l' angolo ZXY è la misura dell' inclinazione del piano dato $FBCD$ col piano orizzontale $FBCM$, attesochè le rette YX, ZX sono le comuni sezioni dei due piani accennati con un piano verticale ZEX. Dunque l'angolo YEX, o sia tEu segnato dal piombino nel quadrante sarà la misura dell' inclinazione o pendenza del piano dato.

Quanto alla direzione ascendente del piano stesso, essa deve essere un angolo, che la retta orizzontale YX forma colla direzione della meridiana magnetica $n' s'$, il centro della quale sia nel punto X. Ma poichè l'orizzonte istromentale (n°. 16) sempre riesce orizzontale, perciò la meridiana magnetica $s n$ sarà parallela a quella che sarebbe segnata dall' ago magnetico, se fosse situato nel punto X come centro; e la retta YX sarà parallela alla meridiana istromentale SN. Ora le direzioni dell' ago magnetico in piccole distanze sono tra loro parallele; perciò l' angolo formato nel piano $FBCM$ dalla retta XY e dalla meridiana magnetica $s' n'$ sarà eguale all'angolo formato nell'orizzonte istromentale dalla retta SN, e dall' ago magnetico $s n$. Osservando pertanto nella bussola, quale sia la direzione segnata dal nord magnetico, questa sarà la direzione ascendente del piano proposto.

Supponiamo ora che il piano inclinato presenti il *cadente*, per esempio la parte di sotto del piano $F'B'C'D'$ (fig. 11), cosicchè non sia accessibile collo stromento la sua superficie superiore. Tale sarebbe la soffitta di una grotta, ovvero un filone, il cui riposo sia distrutto. Per riconoscere l' inclinazione e direzione di questo piano, si applichino (n°. 40) i piedi *L K* del gonimetro alla parte superiore dell' anello *S V N E*. Quindi esso si appoggi di sottoinsu contro il piano, cosícchè le estremità *K K' K''* dei piedi stessi lo tocchino, formandovi il piano *K K' K''*, e si giri, finchè il filo del piombo venga a radere il quadrante. Ciò fatto, si osservi l' angolo d' inclinazione segnato dal piombino, e la direzione segnata dal nord magnetico; e si avrà ciò che si cerca. Il che è chiaro, giacchè il piano del cadente è parallelo al piano del riposo, e perciò quello che si è detto del riposo, vale del cadente.

PROBLEMA 2°.

51. Data la pòsizione della meridiana in vicinanza di un piano inclinato, trovare col pantometro la direzione astronomica del medesimo.

Sia *K G Q L* (fig. 12) un piano orizzontale, su cui sia segnata la meridiana *N I*; e sia *D E F A* il piano inclinato, il quale sia per esempio il riposo di un filone metallico, che deve riguardarsi come superiore al piano *K G Q L*. Col gonimetro si trovi l'angolo d'inclinazione del piano *D E F A*, riducendo cioè il filo del piombino nel piano del quadrante o semicircolo; e si segni sul piano stesso *D E F A* la linea *A B*, che è la comune sezione di esso col piano d' inclinazione, il quale è lo stesso col piano del quadrante, oppure è parallelo a questo stesso. Quindi si prolunghi, se bisogna, la meridiana, e sulla direzione di essa l' osservatore, tenendo sospeso un filo *V R*, da cui penda un piombino, miri con un occhio al filo ed alla linea *A B*, trasportandosi in situazione diversa, finchè la visuale *V R* cuopra la retta *A B*, o cada su di essa, cioè finchè l' occhio, il filo, ed *A B* sieno nello stesso piano visuale, che sarà verticale, siccome quello che passa per la linea verticale del piombino. Ciò fatto si trasporti il gonimetro posto sul treppiede al punto *V*, su del quale punto si farà corrispondere per mezzo di un pendolo o piombino il centro del pantometro, o della piatina girevole, che suppongo essere *a b r*; e questa si riduca orizzontale. Poi si diriga il traguardo in un piano verticale che passi per la meridiana *O N*; il che si otterrà, conducendo su di questa una perpendicolare *M N*, o sia facendo pendere su di essa il filo di un piombino, e mirando al filo medesimo. Si osservi il numero di gradi, a cui corrisponde questa visuale *X M*. Finalmente si diriga il traguardo sulla retta *A B*; e l' angolo *r X t* segnato sull' orizzonte, istromentale dalle sezioni *X p*, *X M*, che i due piani verticali *X B p*, *X M N V* formano coll' orizzonte, sarà la direzione richiesta. Imperciocchè, supponendo che per un punto *A* della retta *A B* passi un piano *A K C* parallelo all' orizzonte, e da un altro suo punto *B* cada la linea verticale *B C*, quel piano orizzontale formerà col piano verticale *A B C* la comune sezione *A C*, che è la projezione della pendenza *A B*, e perciò (n°. 5, 27) sarà *A B C* il piano d' inclinazione, e l' angolo *C A B* sarà l' inclinazione del piano, che è eguale a quella che nel quadrante dell' Istromento si sarà osservata. Quindi *A C* sarà la linea, la cui direzione sarà quella che ha la pendenza AB del piano $ADEF$. Prolungando BC, e BA sino al sottoposto piano orizzontale, e conducendo VP, questa sarà parallela ad AC, e nello stesso piano ABC prolungato: onde la direzione di VP sarà la stessa che quella di AC. In fatti le rette XV, XB, VB sono nello stesso piano XBV; e questo è verticale, siccome quello che passa per la retta XV, che è verticale per costruzione. Verticale è pure il piano ABC, ovvero VBP; essendo questo il piano d'inclinazione. Ora, poichè le linee verticali BC, VX sono condotte da due punti V, B della stessa linea AB prolungata, perciò le tre rette XV, VB, BC, ovvero BP saranno nello stesso piano verticale; ed in questo piano saranno pure le rette XB, VP; cioè a dire i due piani VXB, VBP formeranno un solo piano verticale. Supponendo ora, che per le rette XV, VN passi il meridiano $VXMN$, l'angolo NVP formato dai due verticali $VXMN, VXBP$ sull'orizzonte, sarà la direzione meridiana del piano $VXBP$, o sia ABC. Ma quest'angolo è eguale all'altro MXp formato al centro X del pantometro orizzontato, attesochè la visuale XM è parallela a VN, e l'altra Xp parallela a VP. Dunque la direzione astronomica o meridiana del piano $DEFA$ è l'angolo MXp, o sia tXr segnato sul circolo posto alla base orizzontata del pantometro.

Se il piano, su cui si colloca il treppiede del pantometro non fosse orizzontale, l'osservazione fatta nell' indicato modo darebbe ancora la richiesta direzione, purchè la verticale VX cada sul prolungamento della meridiana IN. Perciocchè il piano orizzontale, sul quale si misura la direzione o sia l' angolo MXp, è formato dalle visuali Xp, Xm, che sono in un piano orizzontale per la disposizione orizzontale che si dà allo stromento.

Che se la meridiana NI non fosse immediatamente prolungabile sino al luogo V, ma a questo si potesse arrivare per diversi angoli, la direzione della pendenza del piano si conoscerebbe allo stesso modo, purchè si conoscano questi angoli e le lunghezze dei loro lati. Suppongasi per esempio essere NI (fig. 14) la meridiana; ed IG, VG sieno due rette, le quali formano gli angoli NIG, IGV; e sieno già misurati in piani orizzontali sì gli angoli, che i loro lati; cioè a dire suppongasi che ICV sia l'icnografia delle direzioni di diverse gallerie. Sia VB la linea della pendenza di un piano già determinata col gonimetro, e VX sia la verticale che è nello stesso piano con VB o sia col piano dell' inclinazione. Facciansi colla linea VG le stesse operazioni, come se fosse la meridiana, e si avrà l' angolo BVG, che il piano verticale VXB, o sia la sua projezione VB forma sull' orizzonte colla retta VG; e da questo si dedurrà la richiesta direzione del piano, o sia l' angolo, che VB forma colla meridiana IN.

Per determinarlo, si conduca la retta IV, e si prolunghino le rette NI, BV sinchè concorrano in Z. Nel triangolo IGV essendo noti i lati IG, GV, e l' angolo intercetto G, saranno noti anche gli angoli GIV, GVI, ed il lato IV. Quindi nel triangolo IZV si conoscerà l' angolo ZIV come supplemento dell' angolo VIN, che è eguale alla somma dei due noti

N I G , *G I V*; come pure si conoscerà l'angolo *Z V I*, che è supplemento dell'angolo *I V B*, o sia della somma dei due noti *I V G* , *G V B*. Per lo che sarà noto anche *I Z V*, come complemento a due retti. Così se *Z V I* + *Z I V* fosse di gradi 70, sarebbe *I Z V* di gradi 180 — 70, cioè di 110 gr., e questo angolo sarebbe la direzione astronomica della pendenza del piano proposto.

Questo metodo vale, finchè si tratta di piccole estensioni, nelle quali si può supporre che nei diversi loro punti non sia una sensibile differenza di meridiani. Ma nelle grandi estensioni converrà fare le opportune riduzioni.

Per trovare la direzione astronomica, richiedesi che sia segnata una meridiana nelle vicinanze dei luoghi, ove si deve operare, per esempio all' ingresso di una cava, se si tratta di osservazioni di geometria sotterranea; e questa meridiana si segnerà coi metodi astronomici, o per mezzo della direzione dell' ago magnetico, a cui sia fatta la conveniente riduzione.

PROBLEMA 3°.

52. Ridurre col gonimetro la direzione magnetica di una linea, o di un piano, all' astronomica, o sia l'osservata alla corretta.

Per la soluzione del presente problema conviene richiamare alla mente la costruzione del gonimetro indicata al n°. 43; posta la quale, la riduzione si farà nel seguente modo. Si noti il numero di gradi segnato dal nord magnetico come direzione della linea proposta. A questo numero si faccia corrispondere il segno di correzione, che è notato sulla rosa dei Venti girevole, in supposizione che la declinazione sia occidentale e di gr. 20; quindi si osservi a qual numero di gradi del circolo fisso corrisponda il nord della rosa dei Venti; e questo numero sarà la direzione corretta, la quale sarà orientale, ovvero occidentale, secondochè questo numero sarà nel semicircolo fisso orientale, ovvero occidentale. In fatti essendo la declinazione magnetica verso occidente, ed essendo questa segnata a sinistra del nord della rosa dei Venti, ne segue che facendo venir il segno della declinazione al punto, ove si fermi il nord magnetico, debba il nord della rosa dei Venti essere più avanzato verso oriente, di quel che sia il nord magnetico, e che perciò segni sul circolo fisso il numero di gradi corrispondente alla direzione astronomica.

L' indicato avanzamento de 20 gradi dicesi orientale, in quanto che la numerazione dei gradi si fa cominciando dal nord, e andando verso oriente; altronde essendo la declinazione magnetica di 20 gr. verso occidente, conviene per la correzione, che il nord astronomico sia 20 gr. all' oriente del nord magnetico.

La correzione o riduzione può farsi, come abbiamo veduto (n°. 18), all' atto dell' osservazione, come anche col calcolo. Ma l' attaccare la rosa dei Venti all' ago magnetico lo rende meno ubbidiente al moto; ed il fare la correzione col calcolo richiede una computazione, nella quale si può facilmente errare: ai quali due inconvenienti è rimediato col fare la rosa dei Venti girevole nel modo indicato.

Problema 4°.

53. Data la direzione ascendente di un piano, determinarne col gonimetro la laterale.

Poichè la direzione ascendente di un piano è sempre perpendicolare alla laterale, perciò al punto, dal quale è indicata la direzione ascendente, si faccia venire il nord dell'orizzonte girevole; ed il diametro conjugato dello stesso orizzonte segnerà sul cerchio fisso i punti, tra i quali corre la direzione laterale del piano proposto.

Se il gonimetro non avrà l'orizzonte girevole, allora si osservi il numero di gradi della direzione ascendente; e sia per esempio di 65°. oc. Ad esso si aggiungano 90°, e si avranno 155°. oc., e la direzione laterale sarà segnata dal diametro che passa da 155°. oc. a 155°. or. Che se la somma di quei due numeri sarà maggiore di 180°, come se fosse di 210°, si prenderà la differenza di questi due numeri, che è 30., e la direzione laterale sarà da 30°. or. a 30°. oc.

Problema 5°.

Data la direzione laterale di un piano inclinato, trovarne l'ascendente.

Sui due punti trovati della direzione laterale si facciano corrispondere i due punti estremi della meridiana girevole; ed allora tra i punti segnati dal diametro conjugato sul circolo fisso sarà la direzione ascendente. Ma rimarrà indeterminata la denominazione, cioè non sarà noto se l' ascensione del piano sia orientale, ovvero occidentale. Perciocchè due piani inclinati che abbiano l' ascensione in senso contrario, possono avere una comune sezione, la quale corrisponde alla loro direzione laterale.

Per conoscere la direzione laterale di un piano inclinato, basta condurre in esso una retta orizzontale, e prendere la direzione di essa, o di una parallela alla medesima. Questo ultimo metodo si suole usare dagl' ingegneri montanistici, tirando una funicella per l' indicata parallela, ed appendendovi la bussola: il che è meno esatto e meno spedito dell' uso del gonimetro.

Problema 6°.

54. Ridurre col gonimetro le varie maniere di computare le direzioni alla computazione in gradi e *vice-versa*.

Il gonimetro è costruito in modo che la computazione delle direzioni sia primamente da farsi in gradi nel circolo che rimane fisso, ed in cui l' est e l' ovest sono segnati a rovescio. Ma, quando avvi l' orizzonte girevole, le ore ed i Venti sono in esso segnati, come se girasse col moto dell' ago magnetico (n°. 43). Quindi, osservata che sia la direzione in gradi, se si vorrà ridurla in ore, ovvero in Venti, si faccia venire il nord girevole al grado osservato; e l' ora o il Vento che sull' orizzonte girevole corrisponderà al nord istromentale fisso, sarà l' ora o il vento corrispondente alla direzione computata in gradi.

Vicendevolmente se sarà da ridurre in gradi la direzione computata in ore o in Venti, si giri l' orizzonte girevole, finchè l' ora o il Vento che segna la direzione, venga di contro al nord istromentale fisso; e si osservi il numero di gradi segnato dal nord girato; e questo numero sarà la direzione ridotta in gradi. Così se la direzione è *NE*, ovvero di ore 3 ori., si faccia quella corrispondere al nord istromentale fisso, ed allora il nord girato segnerà 45°. ori. per la direzione ridotta.

Problema 7°.

55. Determinare col gonimetro la inclinazione e direzione di una retta che sia il termine della commessura di uno strato.

Si ponga il gonimetro sulla tavoletta indicata al n°. 41, in modo che uno dei lati della medesima sia parallelo alla meridiana istromentale. Questo lato si applichi alla retta proposta, e s' inclini la tavoletta, finchè il filo del piombino venga a radere il piano del semicircolo o del quadrante. L' angolo indicato dal filo stesso sarà l' inclinazione della retta proposta, e la sua direzione sarà quella che verrà indicata dal nord dell' ago magnetico. Imperocchè essendo parallelo il piano del quadrante al lato della base, il quale è una superficie piana costituente la grossezza della base stessa, è parallelo a tutte le rette che in quel lato si possono intendere; e quando s' inclina tutto lo stromento in modo che il filo del piombino tocchi il piano del quadrante, allora una sola linea del lato della base, cioè quella che è comune sezione del lato stesso colla superficie superiore della base, viene a coincidere colla retta proposta, o con una parallela alla medesima; e questa retta riesce in un piano parallelo al piano del quadrante, cioè in un piano verticale. Per lo che l' inclinazione segnata dal piombino sul quadrante è quella, che ha la retta proposta; e conseguentemente la sua direzione sarà quella segnata dal nord magnetico.

Problema 8°.

56. Trovare col gonimetro l' inclinazione, e direzione di uno strato, il quale non presenti che i termini della sua commessura uniti ad angolo.

La soluzione di questo problema richiede una preparazione, la quale consiste nel prolungamento del piano occulto dello strato, per potere su quello collocare il gonimetro soprapposto alla tavoletta indicata.

Questo prolungamento si potrà fare nel seguente modo. Si tiri un filo su ciascuna delle due linee che sono il termine della commessura, e si tengano stesi per mezzo di appoggj o sostegni, che secondo le circostanze locali si troveranno più opportuni. A questi fili si soprapponga la tavoletta che serve di base al gonimetro, e vi si faccia col solito metodo l' osservazione. L' inclinazione e direzione che sarà indicata dal gonimetro, sarà quella del piano proposto. Imperocchè è chiaro che le due linee espresse dai due fili stirati, sono nello stesso piano col supposto ed occulto. Per lo che l' inclinazione e direzione che sarà indicata dal gonimetro, sarà quella del piano stesso.

A dichiarazione di che, sieno AI, IB (fig. 10) le commessure lineari, che nei due fianchi $IHLB$, $AIHM$ di un monte sono presentate dallo strato occulto $AIBZ$. Da un punto S di una commessura lineare si tiri il filo SIG, che con essa coincida; e da altro punto T dell' altra commessura si tiri un altro filo TIF, che con questa coincida. I due fili FI, IG così stirati, saranno nello stesso piano col piano occulto. La sola difficoltà consisterà nel tenere bene stirati i fili. Questo però si otterrà, insinuando nelle commessure stesse o in qualche vicina fessura della montagna qualche spranga di ottone o anche di legno, a cui si raccomandino le estremità F, G dei fili stirati nell' indicata maniera.

Quando i sostegni dei fili stirati sieno atti a reggere al peso del gonimetro, questo potrà essere appoggiato ai medesimi fili; in caso diverso richiederassi alquanto di destrezza per sostenere a mano il gonimetro sui fili, in modo che essi sieno nel piano della base del medesimo, senza che quello traballi sensibilmente.

Il prolungamento del piano richiedesi per poter far uso del gonimetro, allora quando non sia facile lo scoprire una porzione del piano dello strato. Ma se questo si può facilmente scoprire col detrarre quella piccola parte del masso soprapposto, la quale lasci luogo alla collocazione del gonimetro sul piano stesso, l'osservazione sarà più esatta, se sarà fatta collocando lo stromento sul piano stesso.

57. Molte sono le montagne stratificate, le quali non presentano all' occhio del viaggiatore se non le commessure lineari; e molti sogliono dare come inclinazione e direzione degli strati, quella che ad occhio

determinano in quelle commessure. Fu già notato dall' instancabile geologo *De Saussure*, che quando gli strati obliqui sono tagliati da un piano parallelo alla comune sezione del loro piano coll'orizzonte, le loro commessure nelle parti diroccate dei monti sembrano orizzontali: onde se da esse si giudicasse della inclinazione degli strati, si errerebbe, credendoli orizzontali. Per tale avvertenza però non si viene a conoscere la vera loro inclinazione e direzione. Perciocchè il profilo, che presentano i monti nei loro fianchi, può essere o retto, o anche obliquo; e dal solo profilo retto si può conoscere immediatamente l' inclinazione e direzione degli strati.

Sia per esempio GAI (fig. 13) il fianco di un monte, che presenta le commessure lineari BC, ED tra loro parallele, per essere gli strati tagliati da un piano parallelo alla loro comune sezione coll' orizzonte. Sia HAG un altro fianco contiguo, in cui compajono le commessure lineari KB, IE, che presentano come il profilo degli strati. Affinchè l'inclinazione e direzione delle linee KB, IE sia quella degli strati obliqui, conviene che il profilo di questo fianco sia retto, cioè a dire, che le commessure apparenti sieno in un piano perpendicolare alla comune sezione del piano orizzontale col piano degli strati (n°. 6, 7). Ora rarissime volte avviene che i monti presentino nelle loro naturali sezioni un profilo retto; e quand' anco talora fossero così tagliati, ciò non si potrebbe assicurare in una data sezione, se non usando lo stromento nel modo innanzi detto, o adoperando altro equivalente mezzo. Non può dunque immediatamente conoscersi l' inclinazione e direzione degli strati dalle commessure lineari, ma è necessario determinarla con atti stromenti sul piano stesso degli strati.

58. Nell' usare il gonimetro è da osservare, che siccome la bussola è mobile in due sensi, così può avvenire che inavvertentemente essa si capovolga, e riesca il nord in parte opposta a quella, che deve avere, perchè indichi le direzioni nel modo esposto. La situazione del nord istromentale deve essere da quella parte in cui è situato il piombino che pende dal centro del quadrante: onde quando si avrà ad usare lo stromento, si osserverà se abbia tale situazione: quando esso abbia un semicircolo in vece del quadrante, si segnerà colla lettera N il Nord anche sull' anello fisso del gonimetro; e si conoscerà che la bussola ha la richiesta situazione, quando le due lettere N corrisponderanno dalla stessa parte.

59. Resta a compimento di questa memoria, che io dimostri ciò che al principio accennai, cioè che il grafometro sotterraneo non è atto a determinare l'inclinazione e la direzione di qualunque piano. Questo stromento consiste in un circolo graduato ACB (fig. 23), su del quale è perpendicolare un arco circolare DEF parimente graduato e girevole centralmente su del primo. Lo insieme di questi due circoli s' insinua sopra un ginocchio GKP, il quale per mezzo di due livelli e delle viti K si può orizzontare; e quando è orizzontato, il circolo AB riesce orizzontale, e l'arco DEF verticale. Al centro I dell' arco sono applicate due alidade terminate in un uncino M, a cui si annette una funicella che fa l'uffizio quasi di visuale o d' indice.

60. L' inclinazione di un piano con questo stromento si prende nel seguente modo. Si livella lo stromento sul piano proposto. Quindi al punto del piano, in cui supponesi il termine della pendenza, si alza un treppiede, la cui altezza è eguale all' altezza LI; e finalmente si stira la funicella sino alla sommità del treppiede. Allora l' angolo NIM si riguarda come l' inclinazione del piano proposto. Ora egli è chiaro che questo angolo non può essere l' inclinazione del piano, se non nel caso in cui, dopo aver livellato, o sia orizzontato lo stromento, l'arco NEO, che è sempre perpendicolare al circolo MB, riesca pure perpendicolare al piano inclinato proposto; il qual caso è assai raro; e per riconoscere se intervenga, non può servire il proposto grafometro. Quindi intendesi che esso non è atto neppure a far conoscere la direzione della pendenza di un piano, se non nell' indicato caso. Per determinare tale direzione, conviene primamente determinare e segnare la linea della pendenza del piano, giacchè la direzione è l' angolo orizzontale, che questa linea forma colla meridiana o astronomica o magnetica; e tale determinazione non può esser fatta, se non seguendo i principii sopra esposti, ai quali non è consentanea la costruzione del grafometro sotterraneo.

Aggiugnerò che questo stromento, segnando l' angolo d' inclinazione per mezzo di una funicella stirata, non può segnarlo con sufficiente esattezza.

61. Terminerò questa memoria, avvertendo che in alcuni gonimetri tascabili che si fecero da alcuni costruire, la numerazione dei gradi dell' orizzonte istromentale fu bensì segnata com' è nella figura 3; ma i

Venti vi si segnarono non a rovescio, come fu superiormente prescritto, ma bensì secondo la loro posizione astronomica; e le ore furono segnate crescenti, andando dal nord istromentale verso il levante segnato a destra di chi dal centro è rivolto verso il nord medesimo. Per tale segnatura la determinazione delle direzioni, se s' enunciano col nome di Venti o delle ore, richiede alcune per altro facili mutazioni nelle denominazioni, affinchè corrisponda alla regola superiormente assegnata. Per conoscere la ragione di tali mutazioni, conviene richiamare alla mente, che la determinazione fondamentale delle direzioni è quella che è indicata dalla rosa dei Venti, che sia girevole coll' ago magnetico, e nella quale sieno segnati i Venti nella loro situazione astronomica. A questa determinazione equivale quella che noi abbiamo assunta, supponendo la rosa dei Venti fissa, ma coi Venti segnati a rovescio.

Quindi nel gonimetro in cui i Venti sono segnati non a rovescio, la direzione in gradi indicata dal nord magnetico si denominerà in senso contrario, così che quella che è indicata dal nord magnetico come orientale, si avrà a denominare occidentale, e *viceversa*. Così se la direzione indicata dal nord magnetico sarà per esempio di 80 gr., che sieno nel semicircolo segnato orientale, si chiamerà occidentale.

Che se la denominazione della direzione si farà dai Venti, si muterà in ciascun vento il nome di orientale in occidentale, e *viceversa*. Così se la direzione indicata dal nord magnetico sarà SE, o sia Sud-Est, si chiamerà SO, cioè Sud-Ovest; se sarà NO, si chiamerà NE; se sarà $S\,E\,q\,E$, si chiamerà $S\,O\,q\,O$. Il fare questa mutazion di denominazione è lo stesso che prender la denominazion del vento indicato dal sud magnetico.

Finalmente quando nella rosa dei Venti anche le ore sono segnate, cominciando dal nord istromentale e andando alla destra ove sia segnato il levante, la direzione in ore, indicata dal nord magnetico, si denominerà parimente in senso contrario, cioè a dire le ore indicate dal nord magnetico come esistenti nel semicircolo occidentale, si chiameranno orientali, e *viceversa*. In oltre in vece dell' ora indicata dal nord magnetico, si prenderà il supplemento al n°. 12, cioè quel numero che aggiunto all'indicato forma 12. Così se il nord magnetico indica per direzione 5 ore orientali, la direzione sarà 7 ore occidentali. Se indica 2 ore occidentali, sarà di 10 ore orientali.

Colle accennate correzioni le direzioni indicate dal nord magnetico nel gonimetro, segnato diversamente da quello che fu da me prescritto, saranno ridotte alla semplice regola superiormente fissata. E dovrà esser cura di chi intende far uso di questo stromento, il riconoscerne da principio la costruzione, e quando avrà ad usarlo, anche la sua retta posizione, affinchè non intervengano delle sviste, che anche nelle operazioni più facili non di rado intervengono, massime nelle osservazioni che si fanno in siti men che comodi, siccome sono le montagne e le cave di miniere. Ad evitare il qual inconveniente gioverà primamente maneggiare lo stromento, facendo replicate pruove in siti comodi su diversi piani, per il quale maneggio non solo l' osservatore venga a ben conoscere lo stromento, ma lo stromento stesso conosca, direi quasi, l' osservatore.

Fig. 2.

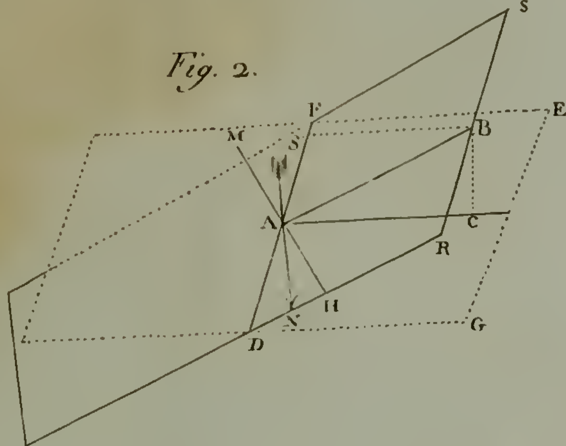


Fig. 1.

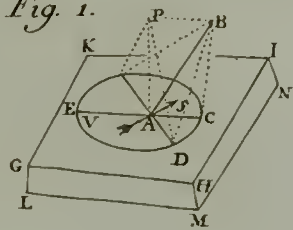


Fig. 4

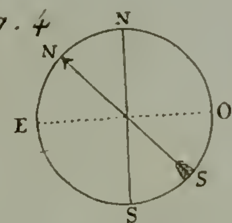


Fig. 3.

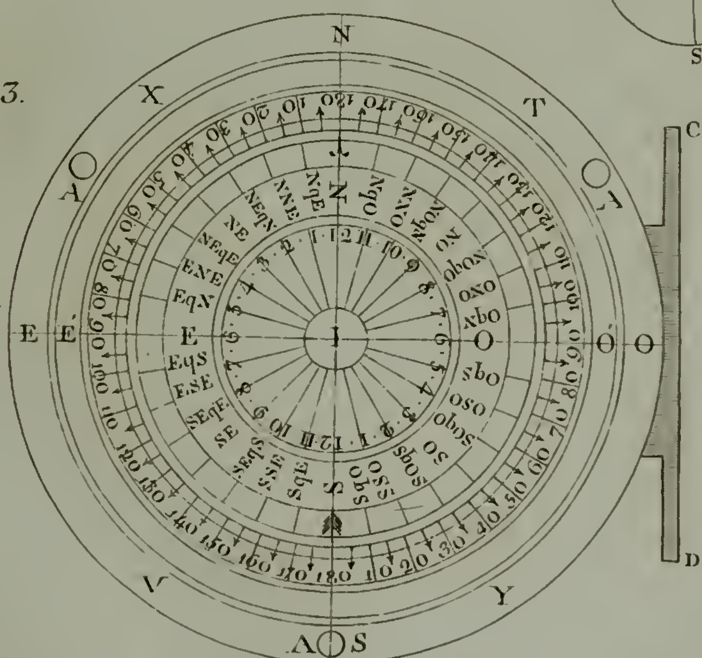
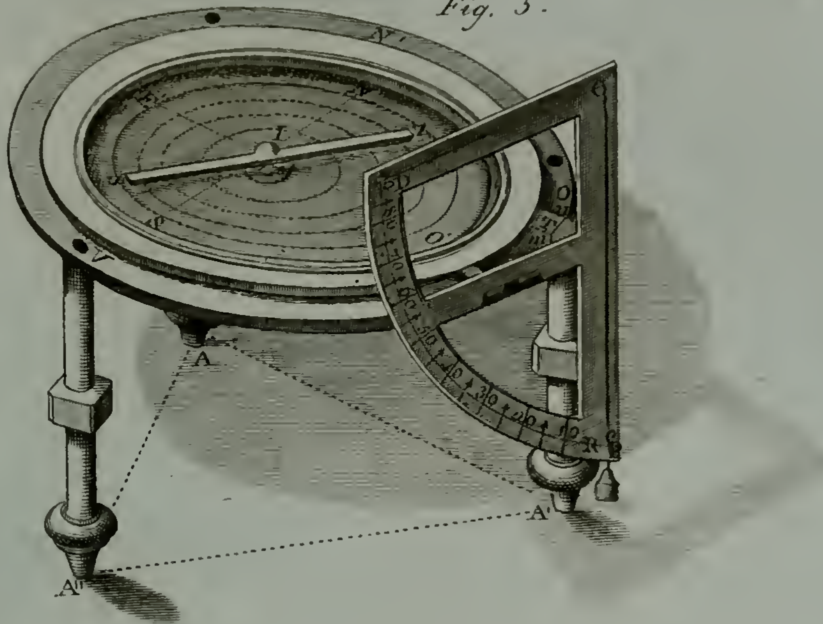


Fig. 5.



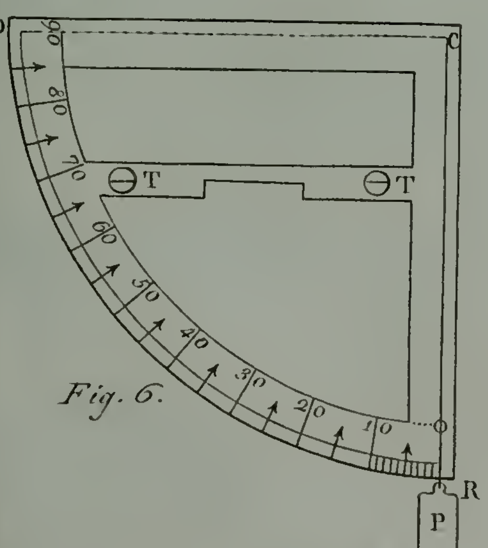


Fig. 6.

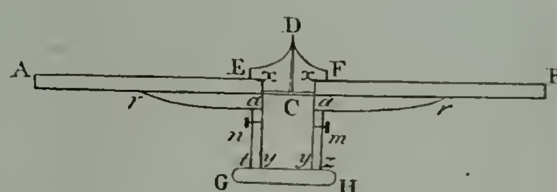


Fig. 7.

Fig. 8.

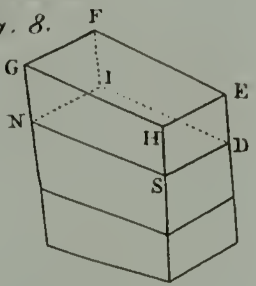


Fig. 9.

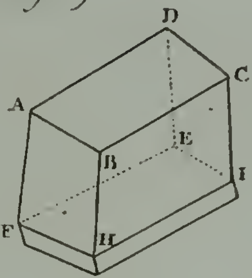


Fig. 10.

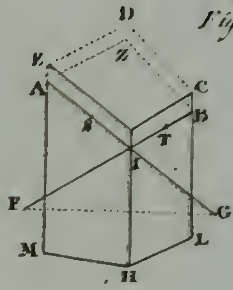


Fig. 11.

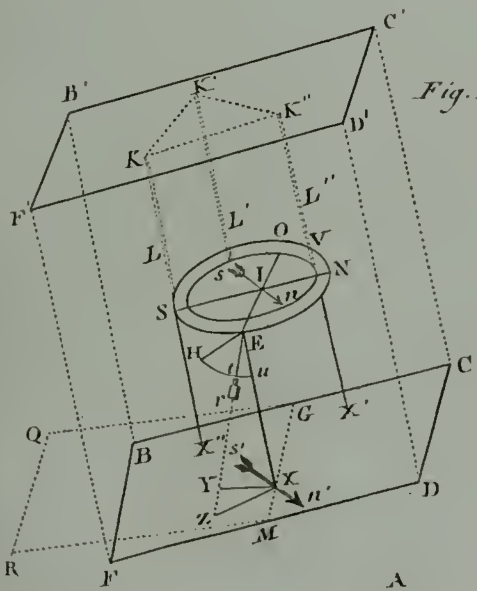


Fig. 12.

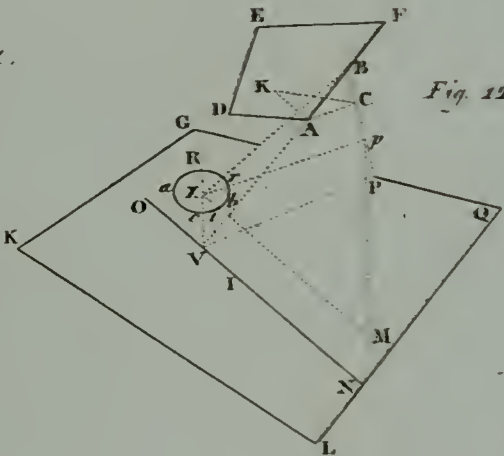


Fig. 13.

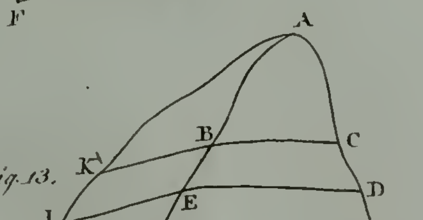


Fig. 14.

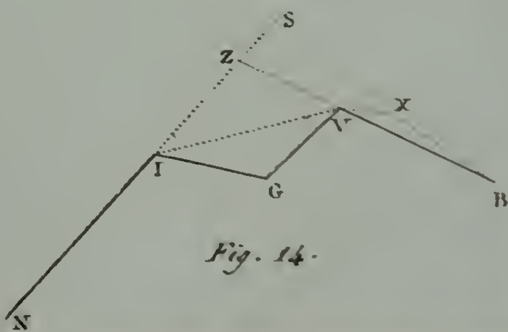
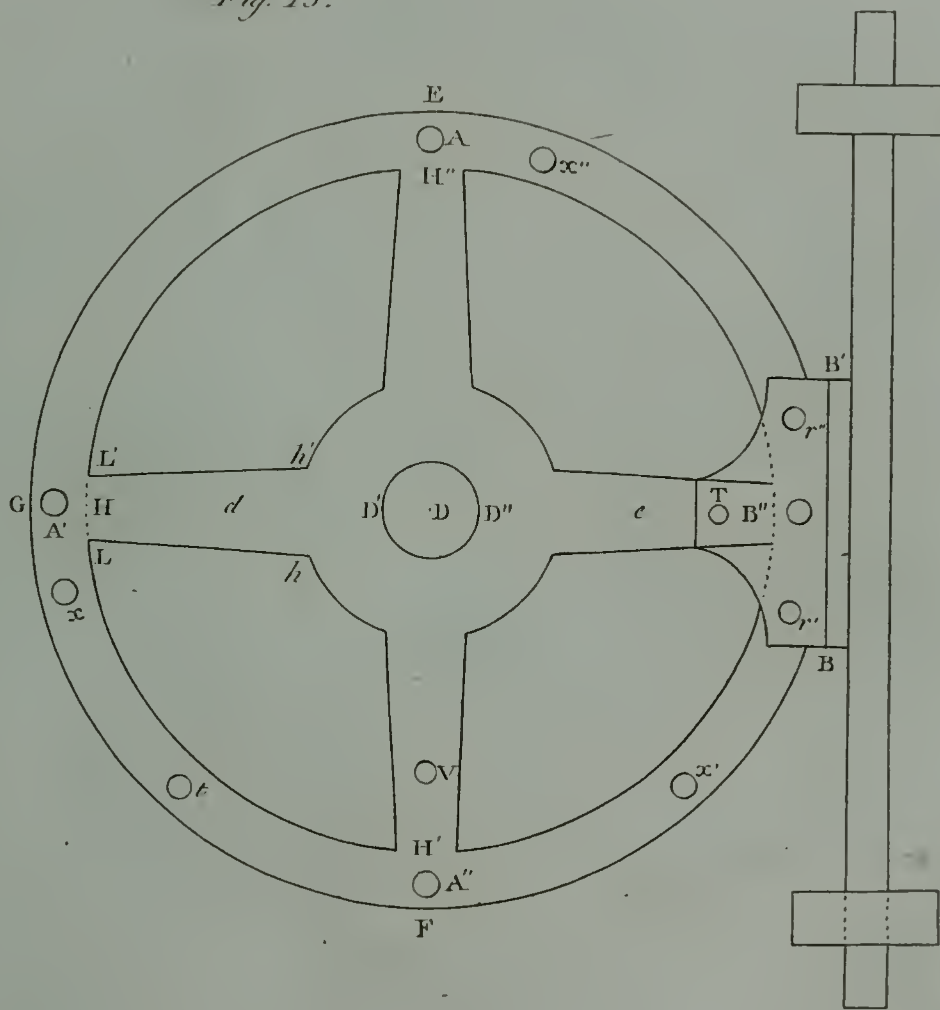


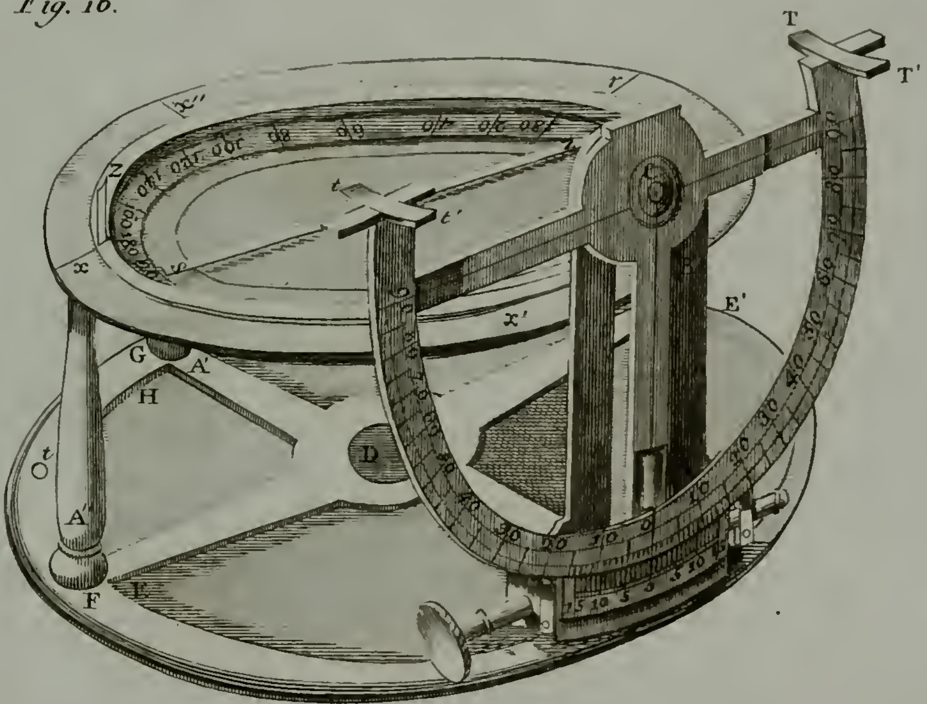
Fig. 15.



Pag. 42. Part. II

Tav. V.

Fig. 16.



Pag. 42. Part. II.

Tav. VI.

Fig. 17.

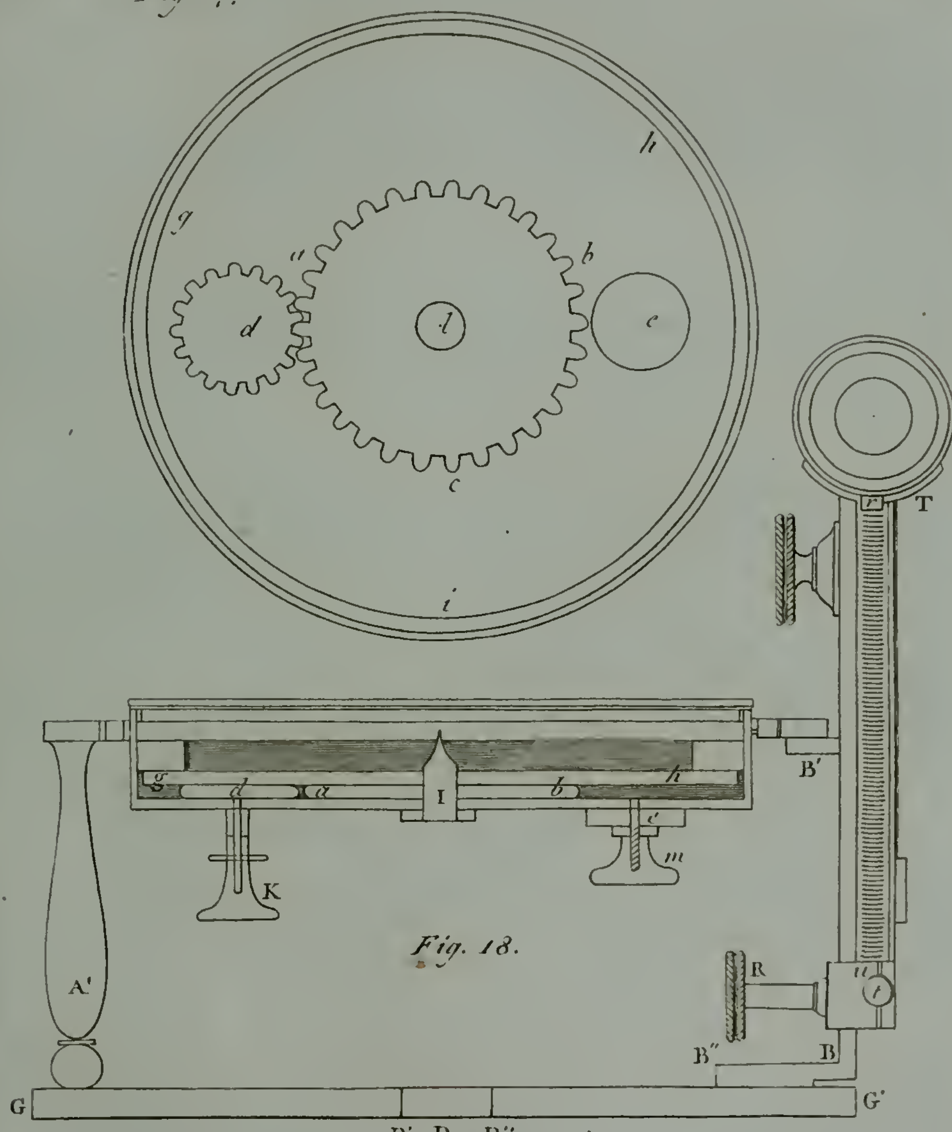
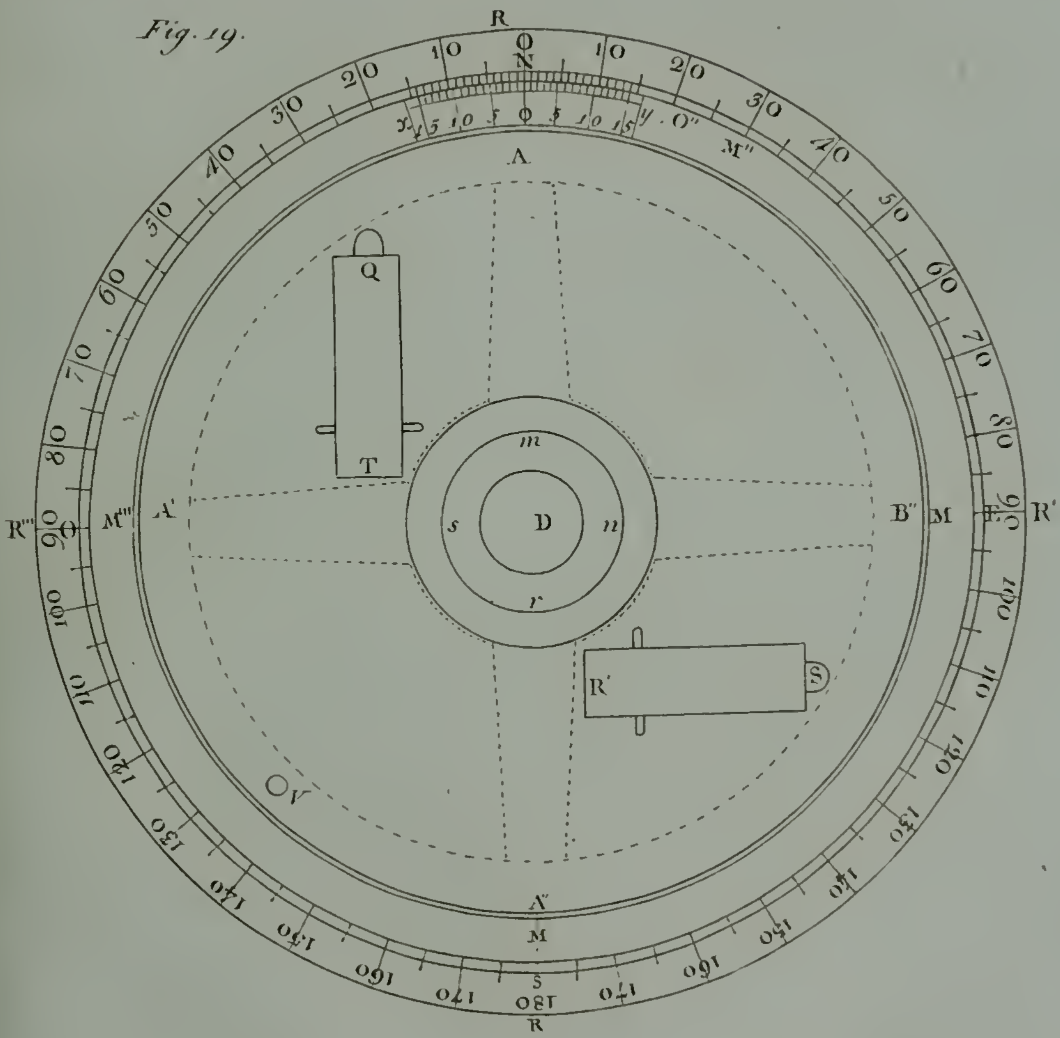


Fig. 18.

Fig. 19.



Pag. 42 Part. II.

Tav. VIII.

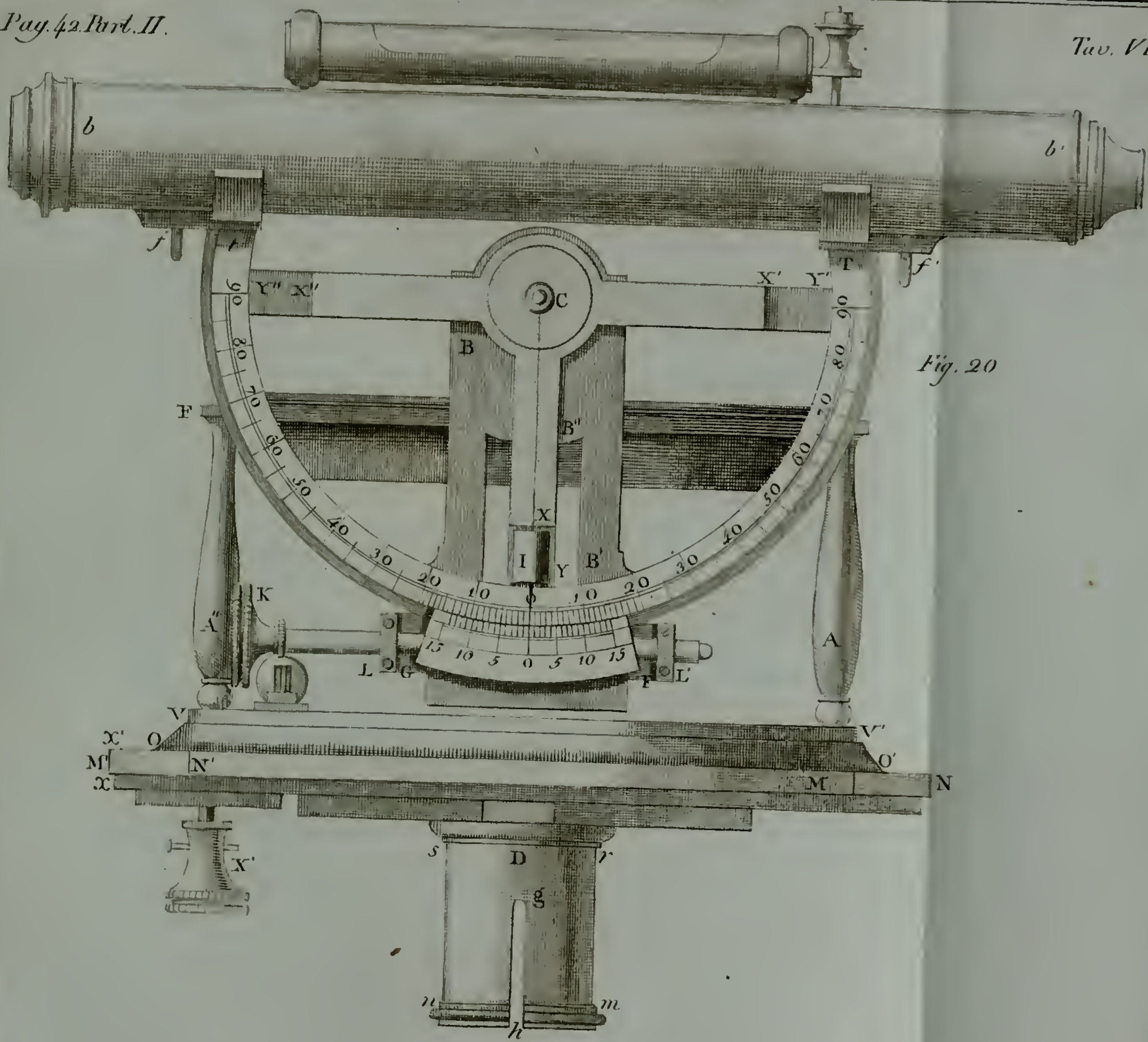


Fig. 20

Fig. 22.

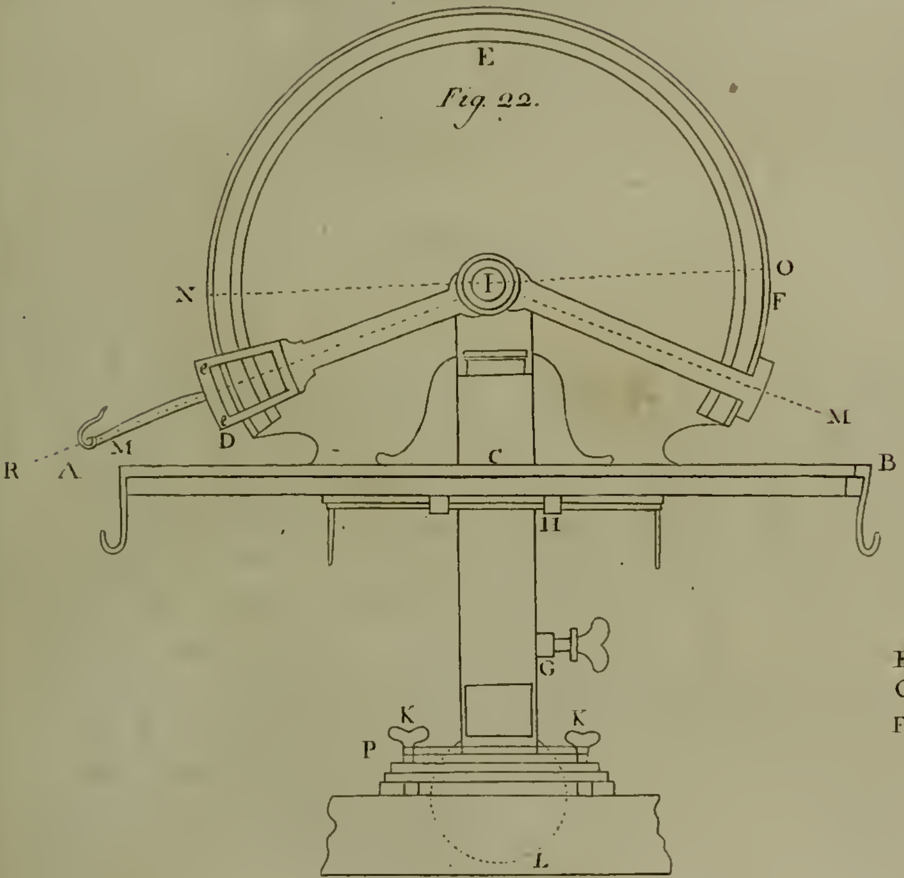
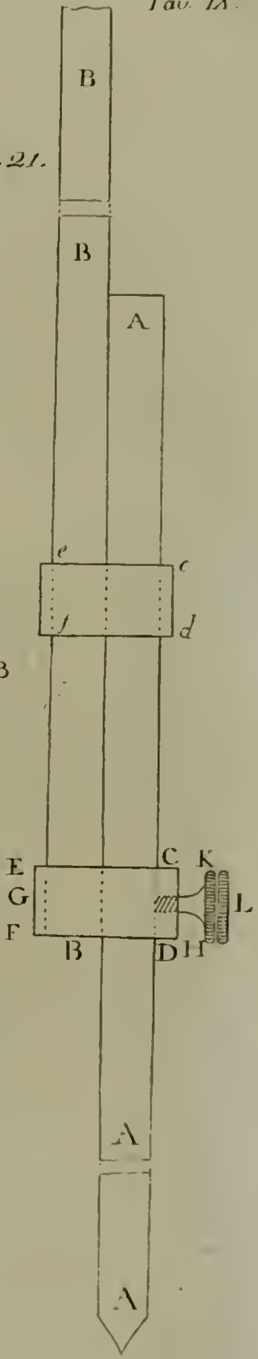


Fig. 21.



DELLA DISCESA DE' GRAVI

PER LA LEMNISCATA

E della dimostrazione che questa curva è una della famiglia dell' Ellissi Cassiniane.

DEL CANONICO GIROLAMO SALADINI

Presentata ai 16 Luglio 1804.

Celebre tra' geometri è la curva, a cui, per cagione di sua figura che emula due lemnischi, fu dato il nome di Lemniscata. Gl' illustri fratelli Giacomo e Giovanni Bernoulli fecero uso degli archi di lei, per costruire le curve isocrone paracentriche, ed elastiche; ma più copiosamente di ogni altro parlò di essa l' insigne conte Giulio Carlo di Fagnano marchese de' Toschi e di S. Onofrio, padre dell' altro insigne mattematico Gio: Francesco. Tanto egli si compiacque di questa curva, che in Sinigaglia vedesi sul suo sepolcro delineata la lemniscata, come la sfera inscritta al cilindro già videsi sul sepolcro d' Archimede, e come la spirale logaritmica adorna la tomba di Jacopo Bernoulli in Basilea. Noi stessi nell' istituzioni analitiche composte insieme coll' immortale Riccati non trascurammo una curva sì rinomata. Nell' indagare le leggi della discesa de' gravi per questa linea, m' avvenni in una assai elegante, che non so se siavi stata riconosciuta da alcuno. Una tal legge fu scoperta ancora dal dottor Malfatti chiarissimo mattematico in Ferrara, nella discesa de'gravi per una dell' ellissi cassiniane, come leggesi nel trattato sintetico della curva cassiniana dedicato a monsig. Bonfioli Malvezzi. Il celebre sig. Bonati mattematico ferrarese pubblicò su ciò un opuscolo analitico molto elegante, in cui trattò il problema inverso di una tal curva, che volle chiamare isocrona. La legge esige che la discesa per l' arco si compia nel tempo stesso che la discesa per la corda a quest' arco corrispondente. Una tale somiglianza di discesa mi fece nascere il sospetto, che la lemniscata fosse una delle curve cassiniane, così dette da Domenico Cassini famoso astronomo, il quale voleva sostituirle in cielo all' ellissi Chepleriane. Noi vedremo esser vera la medesimezza delle tre curve, la cassiniana del sig. Malfatti, l' isocrona del sig. Bonati, e la lemniscata del sig. Fagnani, dopo aver dimostrato in questa verificarsi la legge dianzi detta.

Molte sono le maniere di descrivere la lemniscata per infiniti punti, come si suol dire; ne daremo ciò non ostante quì una nuova che sembraci non del tutto inelegante, che servirà per giungere più speditamente al fine propostoci. La retta AQ (fig. 1) divisa per metà in C che esprimeremo con $2a$, sia prolungata nelle due estremità A, Q in L, R, in maniera che ciascuno dei rettangoli $QL \times LA$, $AR \times RQ$ sia eguale al quadrato CA. Centro C, intervallo CA, si delinei il circolo $AMQH$. Dal punto L si tirino le seganti LSM, LSM ec. e la tangente LB che sarà eguale a CA. Centro A, intervallo SL, si descriva il circolo $PYGX$; e centro Q, intervallo LM, si descriva l' altro circolo YVG. I punti Y, G notati dalla comune intersecazione di questi circoli, sono nel ramo $LYCGL$ della lemniscata che ha per diametro CL. Facciasi la stessa operazione per riguardo al punto R; avremo descritta l' intera lemniscata della forma $LYCTRZCGL$ consistente in due rami che s' intersecano in C, che rappresenta la figura della cifra otto. Da qualunque punto G si cali GK normale ad AQ, e si ponga $CK = z$, $GK = r$; sarà

$$GA = \sqrt{[(CA - CK)^2 + \overline{GK}^2]} = \sqrt{[(a-z)^2 + rr]}, \text{ e}$$

$$GQ = \sqrt{[(CQ + CK)^2 + \overline{GK}^2]} = \sqrt{[(a+z)^2 + rr]}$$

Essendo per costruzione $GQ = LM$; $CA = LS$; sarà $QG \times GA = ML \times LS$; e perchè il rettangolo $ML \times LS$ eguaglia il quadrato di LB, essendo ciò una notissima proprietà del circolo, sarà pertanto il rettangolo $QG \times GA = LB^2 = CA^2$; ed analiticamente $\sqrt{[(a-z)^2 + rr]} \times \sqrt{[(a+z)^2 + rr]} = aa$; dal che si ricava $(zz + rr)^2 = 2a^2 (zz - rr)$, che è appunto l'equazione della lemniscata, come si può rilevare dal cap. 12; l. 3 delle nostre instituzioni analitiche, tom. 1; pag. 371.

Sia (fig. 2) $AQKPDSA$ un ramo della lemniscata, il cui asse AP formi un angolo semiretto colla verticale AH: da qualunque punto Q della curva si cali sull' asse AP la QM normale; e sia $AM = z$, $QM = r$, ed $AP = a\sqrt{2}$; avremo per le cose dette di sopra l'equazione della curva riferita all' asse AP

$(zz + rr)^2 = 2a^2(zz - rr)$; e chiamata la corda $AQ = \sqrt{(zz + rr)} = u$, sarà $u^4 = 2a^2(zz - rr)$. Si prolunghi QM finchè concorra colla verticale AH in L; e da Q si cali QC normale ad AH, che sarà una orizzontale; si nomini $AC = x$, $CQ = y$. Nel triangolo rettangolo LMA essendo l' angolo MAL semiretto, lo sarà ancora l' angolo MLA; onde avremo $ML = z$, $CL = y$; e perciò

$AL = x + y = z\sqrt{2}$, ed $LM = z = r + y\sqrt{2}$, onde

$y = \frac{z - r}{\sqrt{2}}$, $x = \frac{z + r}{\sqrt{2}}$; fatta la sostituzione nell' equazione della curva, si ottiene $u^4 = 4aaxy$. Si noti che u è eguale a $\sqrt{(xx + yy)}$. Ecco adunque un' altra equazione della lemniscata riferita alle coordinate x, y, o sia alla tangente AH del punto A; poichè è dimostrato da' soprallodati autori che hanno trattato della lemniscata, essere la retta che nel punto A fa un angolo di quarantacinque gradi coll' asse AP, la tangente della curva nel punto A.

Differenziando l' equazione $(xx + yy)^2 = 4aa . xy$, e sostituendo in vece di $4aa$ il suo valore $\frac{(xx + yy)^2}{xy}$, si ritrova

$$dy = y\frac{dx}{x}\left(\frac{3xx - yy}{xx - 3yy}\right), \text{ e}$$

$$ds = \frac{dx}{x}\left(\frac{u^3}{xx - 3yy}\right), \text{ e}$$

$$du = \frac{u\,dx}{x}\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 3y^2}\right).$$

Ciò posto, al punto Q della curva, sia QR tangente, la cui espressione è $\frac{u^3}{u^2 - 4x^2}$, e chiamata la gravità assoluta d'un corpo $= g$, sarà essa alla gravità relativa che sollecita il corpo alla discesa in Q per la direzione della tangente, o sia del latercolo della curva $= ds$, come $QR : RC :: ds : dx :: u^3 : x^3 - 3yyx$; onde tal forza verrà espressa per

$$g\left(\frac{x^3 - 3yyx}{u^3}\right) = gx\left(\frac{uu - 4yy}{u^3}\right);$$ la forza poi relativa con cui la gravità preme la curva, è

$$\frac{gCQ}{QR} = gy\left(\frac{uu - 4xx}{u^3}\right).$$

La velocità d'un grave che dal punto A scenda per qualunque curva, è eguale in qualsivoglia punto Q, a quella di cui è dotato un corpo nel punto C, che sia disceso per la verticale corrispondente AC, proprietà insigne dei gravi dal Galileo dimostrata; onde esprimendosi la velocità in C per $2\sqrt{AC} = 2\sqrt{x}$, ancora la velocità in Q si dovrà esprimere per $2\sqrt{x}$.

Si esprima per ϕ un minuto secondo, e per τ lo spazio percorso nel tempo ϕ con moto accelerato da un grave che parta dalla quiete, e T disegni il tempo della discesa per $AC = x$, sarà $\frac{\phi\sqrt{x}}{\sqrt{\tau}} = T$; come esigono le leggi galileane del moto de' gravi; e perciò avremo l'equazione $dT = \frac{\Phi}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}}$, espressione del tempicello della discesa per dx. Ora essendo le velocità in C e Q eguali, il tempo per dx sta al tempo per ds, come $dx : ds$, secondo la teoria del moto variabile; dunque se si chiami dt il tempo per ds, avremo

$$dt = \frac{\Phi}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{ds}{2\sqrt{x}} = \frac{\Phi}{2\sqrt{\pi x}} \times \frac{u^3\,dx}{x(xx - 3yy)}, \text{ e}$$

$t = \frac{\Phi}{2\sqrt{\pi}} \int \frac{u^3\,dx}{x^{\frac{3}{2}}(xx - 3yy)}$ sarà l'espressione del tempo per l'arco AQ.

Acciocchè possiamo integrare questa formola $\frac{u^3\,dx}{2x^{\frac{3}{2}}(xx - 3yy)}$, la dispongo così;

$$\frac{u\,dx}{2x^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{2x^2 - 2y^2 - x^2 + 3y^2}{x^2 - 3y^2}\right) = \frac{u\,dx}{x^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{xx - yy}{xx - 3yy}\right) - \frac{u\,dx}{2x^{\frac{3}{2}}};$$

ma abbiamo detto di sopra che du sia uguale $\frac{u\,dx}{x}\left(\frac{xx - yy}{xx - 3yy}\right)$; dunque la nostra formola diviene $\frac{du}{\sqrt{x}} - \frac{u\,dx}{2x^{\frac{3}{2}}}$, il cui integrale è $\frac{u}{\sqrt{x}}$; sarà per tanto il tempo della discesa per l'arco $AQ = t = \frac{\Phi}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{u}{\sqrt{x}}$

Non è sì facile determinare se l'integrale $\frac{u}{\sqrt{x}}$ richieda costante alcuna, poichè non potendosi avere sì facilmente il valore di y dato per x, a cagione del grado alto dell' equazione, sarà malagevole ancora avere l' integrale espresso per la sola variabile x. Ciò non ostante avendosi nel nodo A della curva il flesso contrario, ed essendo la linea dell'ascisse tangente, sarà per le cose che ho dimostrate nel libro 3°. della geometria degl' infinitesimi, vicino a questo punto l' ordinata y infinitamente piccola rispettivamente all'ascissa x; onde avremo $x = u$. Se dunque supporremo $t = o$, quando x sia zero; diventando vicino al vertice A la $t = \frac{\phi}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{x}$, troveremo $o = o$. Da ciò si conchiude che l' integrale $\frac{u}{\sqrt{x}}$ non esiga costante alcuna. Arrivato il corpo in K, e terminato lo scendere, sale per l' arco KPD colla celerità acquistata mentre cadde dall' altezza AH; tuttavia riman costante la legge, che il tempo in cui vien trascorso qualunque arco $AQKPD$, pareggi il tempo dello scendere per la sua corda, perchè rimane invariata l' espressione del tempo per l' arco, cioè $t = \frac{\phi}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{u}{\sqrt{x}}$ che è la stessa che esprime il tempo per la sua corda; proprietà elegante della nostra curva.

Abbiamo veduto che il tempo per la verticale AC sia eguale $\frac{\phi}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{x}$; ma il Galileo ha dimostrato che il tempo per AC è al tempo della caduta per la corda AQ, come AC ad AQ: dunque il tempo della discesa per la corda AQ avrà per espressione $\frac{\phi}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{u}{\sqrt{x}}$; dal che si vede chiaramente che la corda AQ e l'arco corrispondente AQ vengono percorsi dal grave cadente da A nello stesso tempo.

Il sig. dottor Bonati, come abbiam detto, scioglie il problema inverso, e incontra un'equazione che è appunto la stessa che nasce dalla nostra descrizione della Lemniscata; onde la Cassiniana del sig. Malfatti, l'Isocrona del sig. Bonati, e la Lemniscata del sig. Fagnani sono una stessa identica curva. Quantunque niente siavi nella risoluzione del problema inverso del sig. Bonati, che non corrisponda alla sua dottrina, ciò non ostante non mi si deve imputare ad inutilità, se riassumo la risoluzione per altra via, onde consolidare le dimostrate proprietà del nostro isocronismo, e scoprirne di nuove.

PROBLEMA.

Si cerca (fig. III) una Curva AQL, per cui cadendo il Grave da A, consumi a percorrere l'arco AQ quel tempo, che consuma a percorrere la corda corrispondente AQ, se liberamente cada per questa.

Sia AH la linea dell' ascisse, in cui si prenda $AC = x$, $CQ = y$; alla quale sia infinitamente vicina BS. Si ponga l'arco infinitesimo $SQ = ds$. Poichè la celerità per questo spazietto si può reputare costante, dalle leggi del moto equabile avremo $dt = \frac{ds}{c}$; chiamata la celerità in $Q = c$, e il tempicello in cui si percorre ds, $= dt$; ma abbiamo veduto essere $c = 2\sqrt{x}$; dunque $dt = \frac{ds}{2\sqrt{x}}$; e $t = \int \frac{ds}{2\sqrt{x}}$.

Il tempo poi della discesa per la verticale AC sta al tempo per la corda AQ, come $AC : AQ$, come $x : u$; ed essendo il tempo per la verticale espresso per $\sqrt{x}$, sarà il tempo per la corda $AQ = \frac{u}{\sqrt{x}}$. Quindi sorge l' equazione $\int \frac{ds}{2\sqrt{x}} = \frac{u}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{(xx+yy)}}{\sqrt{x}}$;

e differenziando, si ritrova

$x\,ds\sqrt{(xx+yy)} = x^2dx + 2xy\,dy - yy\,dx$, equazione differenziale della curva ricercata.

Vediamo se si possa integrare questa equazione, il che avverrà sicuramente per essere omogenea. Fo pertanto $p\,dx = dy$, $xq = y$. Eseguite le sostituzioni, ricaviamo l' equazione

$$x^2dx\sqrt{(1+pp)}\times\sqrt{(1+qq)} = x^2dx - x^2q^2dx + 2x^2qp\,dx,$$

cioè

$$\sqrt{(1+pp)}\times\sqrt{(1+qq)} = 1 - qq + 2qp.$$

Se si ordini l' equazione per p, si ritroverà di secondo grado; e sciolta, dà $p-q=o$, e $p-q=\frac{2q^3+2q}{1-3qq}$.

Si differenzii adesso l' equazione $y=xq$, ed avremo $xdq+qdx=dy=pdx$; onde $\frac{dq}{p-q}=\frac{dx}{x}$; e sostituiti i valori di $p-q$, nascono due equazioni

$$\frac{dx}{x}=\frac{dq}{o},\quad \frac{dx}{x}=\frac{1-3qq}{2q^3+2q}dq$$

La prima di queste equazioni ci mostra essere $xdq=o$; onde in questo caso l' equazione $dy=xdq+qdx$ diviene $dy=qdx=\frac{ydx}{x}$; e perciò $xdy-ydx=o$; ed integrando sarà $\frac{x}{y}+C=o$, equazione alla linea retta, la quale in un certo senso è dotata della proprietà meccanica di cui parliamo.

L' equazione seconda $\frac{dx}{x}=\frac{1-3qq}{2q^3+2q}dq$ si può cangiare in questa $\frac{dx}{x}=\frac{dq}{2q}-\frac{2qdq}{qq+1}$, che integrata, diventa $Lx=L\frac{Cq^{\frac{1}{2}}}{qq+1}$; quindi $x=\frac{Cq^{\frac{1}{2}}}{qq+1}$; ma è $q=\frac{y}{x}$; dunque $yy+xx=C\sqrt{xy}$, ed $(yy+xx)^2=CCxy$, equazione alla Lemniscata.

Niuna curva pertanto fuori di questa, permette a' gravi che per essa discendono, l' impiegare lo stesso tempo; o discendano per l' arco, ovvero per la corda corrispondente.

Ma piace di ritornare all' esame della discesa de' gravi per la nostra curva. Oltre la pressione che dalla curva si sostiene in Q, (fig. 11) prodotta dalla gravità, che di sopra trovammo essere $g y \left(\frac{u u - 4 x x}{u^3}\right)$, havvi un' altra pressione nata dalla forza centrifuga, che determino così. Chiamata la velocità in $Q = c$, e il raggio d' osculo R, e la forza centrifuga f, si sa dalla teoria delle forze centrifughe, che se un corpo cada per uno spazio eguale alla metà del raggio d' osculo, sollecitato da una forza costante eguale alla centrifuga, acquista esso in fine di tal discesa una velocità eguale a quella che ha il corpo nel punto Q; quindi per le leggi del Galileo sarà $f \times \frac{R}{2} = \frac{c c}{2}$, o sia $f R = c c$; ma essendo c quella velocità ancora, che ha un grave in C cadendo dall' altezza $A C$; perciò avremo per le leggi galileane, l' equazione $g x = \frac{c c}{2}$; chiamata al solito la gravità assoluta g, sarà $2 g x = f R$, ed $f = \frac{2 g x}{R}$: ma il raggio d' osculo R della lemniscata è uguale al quadrato del diametro $A P$ diviso per il triplo della corda, cioè $= \frac{u^3}{6xy}$, come con poco giro di calcolo si può dedurre dall' equazione differenziale sopra trovata della curva; dunque sarà l' espressione della forza centrifuga f, che preme perpendicolarmente la curva in Q, $f = \frac{12gx^2y}{u^3}$, a cui aggiunta la pressione perpendicolare contro la curva, nata dalla gravità, otterremo che la pressione totale contro la curva si rappresenti per $gy\left(\frac{u^2 + 8x^2}{u^3}\right)$.

Fa d' uopo qui avvertire che la pressione perpendicolare contro la curva, originata dalla gravità ed espressa per $gy\left(\frac{uu - 4xx}{u^3}\right)$ cresce fino al punto infimo della curva K, in cui il latercolo e la tangente hanno la posizione orizzontale: da questo punto in su, per l'arco KD una tal pressione continuamente si diminuisce, e finalmente svanisce nel punto D, dove la tangente divenendo verticale, riesce parallela alla AH; per determinare i punti K, D respettivamente alla linea delle ascisse AH, o sia per determinare le ascisse AC, AH, notiamo che nel punto K l' ascissa AH diviene massima, e nel punto D diviene massima l'ordinata CD. Differenziata l'equazione della curva $(yy + xx)^2 = 4aaxy$, abbiamo $\frac{dx}{dy} = \frac{y^3 + xxy - aax}{aay - x^3 - yyx}$. Posto, come esige il metodo de' massimi e de' minimi, $dx=o$, avremo $y^3+x^2y=aax$. Se questo valore di aax si metta nell' equazione della curva, avrassi $(yy+xx)^2=4yy(yy+xx)$, o sia $yy+xx=4yy$; da cui si ricava $x=y\sqrt{3}$. Quindi nel punto K, dove l' ascissa è massima, e dove la tangente orizzontale è confusa coll'ordinata, e la pressione perpendicolare contro la curva, originata dalla gravità, similmente è massima ed eguale alla gravità assoluta del corpo, cioè dove è $dx=o$, l' ascissa sta all' ordinata come $\sqrt{3}:1$, ovvero come l' altezza del triangolo equilatero sta alla metà della base.

Si ponga ora $dy=o$; sarà $x^3+yyx=aay$, e fatto il calcolo come sopra, si ritrova che nel punto D, in cui la tangente diviene verticale, e la pressione cagionata dalla gravità è nulla, e l' ordinata CD massima, l' ascissa AC sta all' ordinata CD, come la metà del lato del triangolo equilatero alla sua altezza. Se adunque dal punto A dell' ascissa AH si conducano le rette AK, AD, che facciano con essa l'angolo HAK di trenta gradi, e l' angolo HAD di sessanta, i punti K, D, che le rette AK, AD segneranno nella curva, sono i punti ricercati, dove la pressione della gravità è massima, e dove svanisce del tutto. L' ascissa che corrisponde al punto K, cioè AH, si trova eguale ad

$\frac{a}{2}\times\sqrt[4]{27}$, e l' ordinata $HK=\frac{a}{2}\times\sqrt[4]{3}$. Il contrario avviene nel punto D, cioè CD è eguale ad

$\frac{a}{2}\times\sqrt[4]{27}$, $CA=\frac{a}{2}\times\sqrt[4]{3}$. Le corde poi AK. AD sono eguali ad $a\sqrt[4]{3}$, e il rettangolo $AHL'O$ è un quadrato, la cui diagonale AL' è $\frac{a}{2}\times\sqrt[4]{108}$.

Essendo nel punto D annientata la pressione della gravità contro la curva, e continuando il corpo a camminare per essa, poichè in D la velocità acquistata dalla caduta per l' arco AK non è ancora estinta, rimanendovi quella che conviene all'altezza AC, il corpo non potrà stare attaccato alla curva, che in vigore della forza centrifuga, anzi per meglio dire, in vigore dell' eccesso della forza centrifuga sopra la gravità relativa del corpo perpendicolare alla curva; quindi si deduce che non debbansi dal punto D in su sommare le due espressioni della forza centrifuga $\frac{12gx^2y}{u^3}$, e della gravità relativa $gy\left(\frac{uu-4xx}{u^3}\right)$; ma debbasi dalla prima sottrarre la seconda, onde sia la pressione contro la curva $=gy\left(\frac{16x^2-u^2}{u^3}\right)$

Se mai avvenga, che questa espressione sia $=o$, prima che il corpo giunga in A, sarà esso costretto ad abbandonare la curva, continuando il suo cammino liberamente per una parabola, come insegna la dottrina de' projettili. Per vedere se siavi e dove un tal punto, che chiamiamo di distacco, si ponga $gy\left(\frac{16x^2-u^2}{u^3}\right)=o$, avremo $16x^2-u^2=o$, ed $x\sqrt{15}=y$. Nel punto pertanto di distacco avremo l' ascissa all' ordinata, come $1:\sqrt{15}$. Se dunque qualunque ordinata CQ si prolunghi indefinitamente, e fatto centro in A coll' intervallo eguale a quattro ascisse AC si descriva un circolo che noti nella CQ prolungata il punto G, congiunti il punto A ed il punto G colla retta AG, taglierà essa la curva in S, dove cessando ogni pressione, il corpo sarà costretto dalle forze che l'agitano, ad abbandonarla. L'equazione $gy\ (\frac{16x^2-u^2}{u^3})=o$ dà y ancora eguale a zero; il che altro indicare non vuole che sul principio del moto la pressione contro la curva sia eguale a zero.

Mi sia permesso di fingere che il corpo giunto in S continui il suo moto per la parte convessa della curva AS: il corpo sarebbe spinto in questo caso contro la curva, e sarebbe costretto a stare attaccato alla parte convessa dall' eccesso della gravità rispettiva sopra la forza centrifuga, continuando il suo moto ritardato colla stessa legge, cioè che il tempo impiegato nello scorrere l'arco $AQKPDS$ sia eguale a quello che impiegherebbe, cadendo per la corda AS; cioè se due corpi dal punto A cadessero nello stesso punto di tempo, ed uno percorresse l' arco $AQKPDS$, e l' altro la corda AS, s'incontrerebbero in S dotati della stessa celerità.

Da ciò si raccoglie che il grave non ritornerebbe al punto A, se non dopo un tempo infinito, imperciocchè nel punto A, il raggio d' osculo é perpendicolare alla tangente orizzontale AO, e perciò si confonde colla verticale AH, ed è infinito; ed in fatti la sua espressione da noi sopra usata è $\frac{u^3}{6uy}$; ma dall' equazione della curva abbiamo $xy = \frac{u^4}{4aa}$; dunque il raggio d' osculo sarà $= \frac{2aa}{3u}$, e svanendo la corda u, sarà $\frac{2aa}{o}$ = all' infinito; dunque la corda infinitesima AS della curva si confonde colla corda infinitesima del circolo che ha per raggio la verticale AH prolungata all' infinito. Ma nel circolo qualunque corda AS condotta dall' estremità d' un diametro, comecchè infinitesima, si percorre nel tempo stesso, che mette il grave a discendere per il diametro verticalmente collocato, come esigono le leggi galileane; ed essendo il tempo della discesa pel diametro infinito AH, esso pure infinito; sarà il tempo per la corda infinitesima AS, e perciò il tempo dell' intera rivoluzione per la lemniscata $AQKPDSA$, infinito. Questa verità sembra sottoposta a qualche dubbiezza, per quanto si stabilisce nel libro 3°. della geometria degl' infinitesimi, dove dimostrasi che ne' punti di flesso contrario delle curve (e tale è il punto A, come si può rilevare dalla fig. 1) non siavi alcun circolo osculatore, e che non senza paralogismo in tali punti si confonda la curvatura con quella d' un circolo di raggio infinito. Ma se veggansi le cose dimostrate nel libro terzo, cap. 9. tom. 1 delle

Istituzioni analitiche, vedrassi altresì che gli archetti minori di qualunque dato di quà e di là da questi punti singolari, hanno essi ancora veri circoli osculatori, i quali nel nostro caso essendo dotati di raggio infinito, la discesa per le loro corde infinitesime che son quelle della curva, si farà in tempo infinito, presi i termini dell' infinito e infinitesimo nel loro vero senso, cioè di quantità indeterminate che ponno a piacimento prendersi maggiori o minori di qualunque data. Onde da questa dottrina altro non si ricava che il corpo non possa tornare alla pristina altezza per curve di curvatura più accostante alla linea retta di quella di qualsivoglia circolo finito.

L' ipotesi, che il corpo nel punto S dal concavo della curva vada a scorrere la parte convessa AS, niente ha di contraddittorio; anzi sarebbe un caso della natura, se si facesse cadere un globo per un canale che abbia la figura $AQKDSA$ della lemniscata, e che abbia la situazione rispetto alla verticale, che ha colla tangente AH; in tal circostanza il globo per l' arco $AQKPDS$ premerebbe la parete concava del tubo colla forza che fu da noi espressa per $gy\left(\frac{u^2+8xx}{u^3}\right)$ fino al punto D; e per $gy\left(\frac{16x^2-u^2}{u^3}\right)$ dal punto D fino al punto S; onde scorrerebbe pel cavo della parete del tubo. Nel punto S nessuna parte della parete del tubo verrebbe premuta; per la porzione poi del tubo SA verrebbe premuta la parete convessa con forza espressa per $gy\left(\frac{u^2 - 16xx}{u^3}\right)$ come quella con cui viene

premuta la parte concava DS presa negativamente: onde il globo sarebbe costretto a salire per la convessità interiore del tubo. Le quali cose essendo assai chiare per se stesse, non esigono ulteriore spiegazione.

Vogliasi ora determinare l' ascissa AT corrispondente al punto del distacco S. Abbiamo detto che in questo luogo $x : y :: 1 : \sqrt{15}$, o sia $y = x\sqrt{15}$; sostituito questo valore di y nell' equazione della curva $(xx + yy)^2 = 4aaxy$, avremo $(16x^2)^2 = 4x^2\sqrt{15} \times aa$;

e perciò $x = \frac{a}{8} \times 15^{\frac{1}{4}}$

Resta che determiniamo il tempo in cui il corpo percorre l' arco $AKPDS$, cioè percorre la curva fino al punto del distacco S. Essendo il tempo per la corda

AS eguale $\frac{\Phi}{\sqrt{\pi}} \times \frac{AS}{\sqrt{AT}}$; ed essendo $AS = 4AT$, sa-

rà il tempo per AS

$$= \frac{\Phi}{\sqrt{\pi}} \times 4\sqrt{AT} = \frac{\Phi}{\sqrt{\pi}} \times \sqrt{2a \,.\, 15^{\frac{1}{4}}}$$

Supponghiamo che sia $\frac{\pi}{2} = a$, cioè a eguale alla metà

dello spazio che un grave percorre in un secondo, da noi espresso per Φ; sarà il tempo della discesa per $AS, = \Phi \,.\, 15^{\frac{1}{8}}$, cioè sarà eguale a un secondo e due quinti prossimamente; ed in questo tempo il grave da *A* giungerà in *S*, scorrendo l' arco della lemniscata *A Q K P D S*.

Se si eseguisca lo sperimento dell' isocronismo della nostra curva, facendo discendere una palla levigata per una lemniscata metallica o di qualunque altra materia solida ben pulita e liscia, e situata colla tangente del centro verticalmente, si vedrebbero verificati gli effetti dalla teoria stabiliti; lo che potrebbe servire a consolidare viemaggiormente le famose leggi galileane, che per altro oramai non hanno bisogno di maggior conferma.

Fig. 1

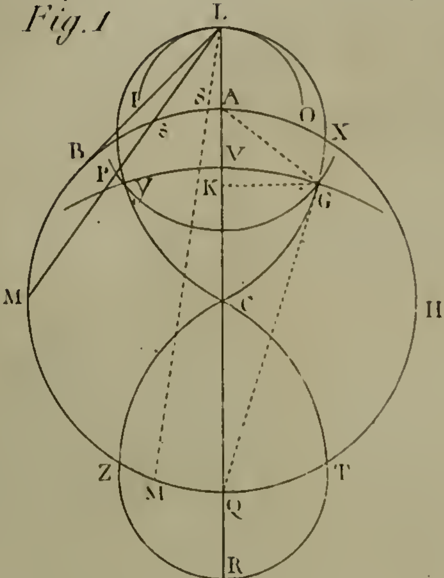


Fig. 3

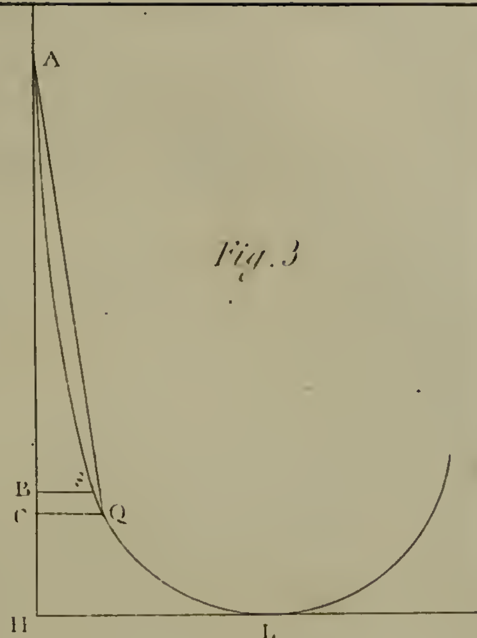
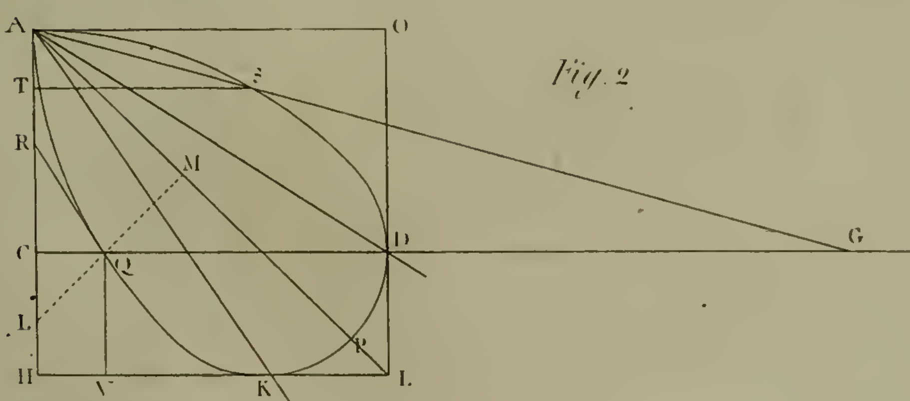


Fig. 2



SUL CIRCOLO DI PROPORZIONE E MILITARE

Di Paolo Delanges

Ricevuta a' 18 luglio 1804.

Quanto fosse cara al nostro Galileo l' invenzione del suo *Compasso geometrico e militare*, chiamato comunemente il *Compasso di proporzione*, che fu la prima tra le sue scoperte, e ch'ei diede alla luce l' anno 1596, chiaramente lo dimostra la forte e viva difesa che fece contro chi voleva usurpargliela. Contemplava egli, che oltre all' essere questo suo ritrovamento vantaggioso nelle più frequenti occorrenze pratiche degl' Ingegneri civili e militari, con esso avea pur scoperto un mezzo d' inanimire e di allettare coloro che intraprendono l'arduo ed astratto studio delle scienze matematiche con una preventiva cognizione dell' importanza di esse ne' bisogni della società, non giudicando quindi „ indecente la richiesta di quel gran discepolo, che da Archimede suo maestro nella geometria, ricercò strada più facile ed aperta che all' acquisto di quella lo conducesse„. Lorgna l' anno 1768, cioè 172 anni dopo, pubblicò un altro strumento, che denominò *Squadra di proporzione*, considerandolo, quantunque più complicato e macchinoso, da preferirsi al

Compasso di proporzione, per essere adatto più di questo ad alcuni usi, e specialmente per offerire con facilità nella stessa sua configurazione un' esatta Livella.

Se tali strumenti reputansi a ragione pregevoli, perchè dispensano l' Ingegnere negli esercizj delle operazioni pratiche e rilievi spettanti alla sua professione, dal soccorso di parecchj altri inventati per usi particolari, non lo dispensano però da quello della Tavoletta pretoriana, e non servono all' artigliere nella pratica importante de' tiri, cioè alla soluzione de' problemi di balistica. Quindi è che mi venne in pensiere d' indagare se tra gli elementi della geometria, da cui furon ricavati i principj su' quali le invenzioni degli accennati strumenti si appoggiano, ve ne fosse qualche altro per l' invenzione d' uno, che col servire agli usi a' quali essi si applicano, soddisfacesse ancora a quelli proprj della Tavoletta pretoriana ed a tutte le pratiche dell' artiglieria. Non essendo stata vana la mia lusinga, esporrò ora il principio o teorema geometrico da cui il nuovo strumento è dedotto, la sua fabbrica, ed il suo maneggio in alcuni de' più importanti usi, persuaso che riuscir debba di non lieve giovamento agl' Ingegneri singolarmente militari ed agli artiglieri, a' quali non è permesso di portar seco in campagna moltitudine di attrezzi, libri di tavole, e perder tempo in calcoli, dovendosi valutare in tali circostanze più la sollecitudine e prontezza di poter eseguire le operazioni, che l' ultima scrupulosa esattezza de' risultati.

Articolo I

Principj geometrici su' quali si fondano le invenzioni del Compasso, della Squadra, e del Circolo di proporzione

La quarta proposizione del libro VI d' Euclide, che ne' triangoli equiangoli *ABC ADE* (fig. 1. tav. I) i lati intorno agli angoli uguali sono proporzionali, è il fondamento su cui si appoggia l' invenzione del *Compasso di proporzione*, e la dimostrazione di tutti i problemi aritmetici e geometrici che con esso si risolvono

La fabbrica della *Squadra di proporzione*, e la dimostrazione de' suoi usi dipendono dal teorema, che se due triangoli rettangoli *DAE CAF* (fig. 2. tav. I) sieno costituiti coll' angolo retto allo stesso punto *A*, e le loro basi sieno nella stessa retta *DBF*, sicchè la perpendicolare *AB* calata dall' angolo retto *A* alla base *DE* d' uno, sia la perpendicolare anche alla base *CF* dell' altro, i segamenti *DB BE* sono reciprocamente proporzionali ai segamenti *CB BF*

La trentacinquesima proposizione del libro III, in cui si dimostra che il rettangolo dei segamenti *DC CE* (fig. 3. tav. I) è uguale al rettangolo dei segamenti *AC CB* nelle due corde *DE AB* che scambievolmente si segano nel punto *C*, è il principio su cui si fonda lo strumento ch' io denomino *Circolo di proporzione*

Altro consimile strumento potrebbe dedursi dal teorema, che se tra due parallele *HI LM* (fig. 4.

tav. I) si conducano due rette ACB DCE che si seghino nel punto C, i segamenti AC CB di una, sono proporzionali ai segamenti EC CD dell' altra.

Si comprende però facilmente che il *Circolo di proporzione* merita, tra gli strumenti matematici di siffatto genere, la preferenza, sì per la sua generalità, che per potersi applicare a molti importanti usi, senza aggiunte di complicati artifizj alla semplice sua conformazione, che lo rendano di delicato e difficile maneggio

Articolo II

Fabbrica del Circolo di proporzione

Sul piano d' una Tavoletta pretoriana, che ergesi sul suo piede, mediante un pezzo chiamato *ginocchio*, che tiene alla sua estremità superiore con cui si unisce alla tavoletta, una palla di rame rinchiusa tra due conchiglie dello stesso metallo, che si stringono più o meno con una vite, e che, com' è noto, serve a disporre e mantener fermo il piano della stessa tavoletta in qualsivoglia posizione tra l'orizzontale e la verticale, s' inserisca in appropriato incavo il cerchio $ABCD$ (fig. 5 tav. I) di legno sodo ovvero di metallo, graduato secondo il solito, e che abbia unita la fascia PC in direzione del raggio PC; in guisa che levando le due viti in C e B, possa estraersi il quadrante PCB a piacere

Abbiansi inoltre due o più regoli, secondo gli usi che vorranno ottenersi dallo strumento, lunghi quanto la diagonale, oppure quanto il lato della tavoletta, che supponesi quadrata, de' quali uno dee essere fornito di piccioli fori a chiocciola alle estremità E, F (fig. 6 tav. I) sicchè possa con viti armarsi di diottre e servire di traguardo all' occorrenza. Tali regoli avranno gli orli in lunghezza ef gh smussati, e saranno forniti nella loro metà di due fori circolari a, c come dimostra la figura, di maniera che posto il regolo EF sul piano della tavoletta in una data posizione, tenendo con una mano il perno GH (fig. 7 tav. I) verticale inserito nel foro a, girando coll' altra dalla parte E od F il regolo in altra posizione $e'f'$, l' intersecazione delle linee EF $e'f'$ cada precisamente nel centro del foro a. Lo stesso s' intenda dell' altra linea gh, inserendosi il perno nel foro c. Opportunamente s' indicheranno le altre provvidenze di cui dee essere munito il nostro strumento, per applicarlo ad alcuni usi particolari

Articolo III

Della costruzione e divisione delle linee ne' regoli

In ogni regolo possono costruirsi quattro linee a quattro differenti usi, cioè due nella faccia EF (fig. 6 tav. I) su gli orli ef gh, ed altre due sugli stessi orli dell' opposta. Tutte le divisioni in tali linee devono avere origine da' centri de' fori a, c, e procedere verso le estremità EF, e possono estendersi per la lunghezza di pollici 9 parigini dall' una e dall' altra parte ugualmente, tale essendo il raggio del cerchio che può accomodarsi in una tavoletta di ordinaria grandezza. Accennerò ora succintamente come deggiono contrassegnarsi le divisioni delle linee che servono a' più frequenti usi per norma di quelle che volessero aversi in pronto, onde ottenerne degli altri dallo stesso circolo di proporzione

Della linea delle parti uguali

Stabilito di contrassegnare la linea delle parti eguali sull' orlo *ef* (fig. 7. tav. I), dovrà dividersi in uguali particelle la metà a destra *a f*, e come in questa linea che dee servire agli usi aritmetici, così in tutte le altre che vorranno segnarsi ne' regoli ad altri usi, dovranno dividersi nello stesso numero di particelle uguali le metà *ac cg* ec. a sinistra, alle quali darò il nome di *scala*. Venendo per ordinario nel compasso di proporzione della lunghezza di pollici sei divisa la linea, denominata delle parti uguali, in 200 particelle, la linea *af* e tutte le linee a sinistra ne' regoli, cioè le *ae cg*, lunghe pollici 9, possono comprenderne 300 egualmente visibili e distinte; e potrebbero anche comprenderne 600, facendo i regoli lunghi quanto la diagonale della tavoletta; il che non riuscirebbe per nessun conto incomodo

Delle linee de' seni delle corde e delle tangenti

Le divisioni di queste linee che devono, come s'è detto, notarsi nelle metà *ch ec* (fig. 6. tav. I) a destra de' regoli, facilmente si desumono dallo stesso circolo di proporzione, diviso ne' suoi gradi, come già supponesi. E' necessario solo avvertire, che siccome tra le divisioni la massima dee sempre eguagliare il raggio di esso, così se per le divisioni della linea de' seni la linea *c h* spontaneamente diventa il seno massimo di 90° nella superiormente fissata lunghezza de' regoli, per le divisioni della linea delle corde, bisogna trasportare in una linea eguale alla *c h* in cui vogliono contrassegnarsi, le metà delle corde prese sul circolo di proporzione, sicchè la stessa linea risulti la corda di 180°; e per le divisioni della linea delle tangenti è d'uopo descrivere, perchè diventi essa tangente d'un arco maggiore di 45°, di cui è tangente nel circolo di proporzione, un cerchio concentrico colla terza ed anche quarta parte del suo raggio. Le divisioni nelle predette linee si possono determinare anche numericamente, mediante le tavole de' seni, tangenti, ec.

Della linea de' solidi

Dovendo scriversi in tale linea i lati omologhi de' solidi simili crescenti in progressione de' numeri naturali, è manifesto, che supposto essere il lato omologo del primo e più picciol solido 50 particelle di quelle 300 che comprende il lato omologo del massimo solido simile, lunghezza dell'intera linea da contrassegnarsi, starà il solido minimo al massimo in ragione di 1 a 216, e perciò si scriverà all' estremità di 50 particelle l'unità, ed all'estremità dell'intera linea il numero 216: ogn' uno sa come debbano determinarsi i lati omologhi de' solidi simili intermedj, cioè del doppio, del triplo, ec.

del primo, onde farne l' annotazione colla stessa scala di particelle trecento

Della linea delle misure lineari

E poichè il metro, diecimilionesima parte del quadrante del meridiano terrestre preso oggidì per misura universale, risulta sulle esatte misure fatte dai celebri astronomi Bouguer e Condamine nel Perù, e recentemente verificate in Francia dai celebri Mechain e Delambre, di piedi parigini 3, 078444, maggiore cioè del braccio di Russia usato in Pietroburgo, che pel passato era il massimo tra le braccia o piedi usati nelle altre principali città dell' Europa; così è manifesto che la linea su cui vorranno notarsi le misure lineari de' paesi, che nella scala dello strumento è di particelle 300, rappresenterà intera il metro a cui dovranno riferirsi. Avendo poi la ragione del piede parigino, che rispetto al metro è figurato dal numero 1, 000000, al piede di Londra, di Vienna ec. o al braccio russo, di Milano ec., si avranno anche quelle del metro colle enunciate misure. Abbiansi ora determinate a cagion d' esempio le seguenti proporzioni di misure relativamente al metro

Metro	3 , 078444	Pietroburgo	2 , 188888
Parigi	1 , 000000	Vienna	0 , 978070
Londra	0 , 938095	Milano	1 , 831478

e non rimarrà che, per segnare nella linea delle misure lineari la spettante ad un paese, trovare il quarto proporzionale al metro, alla relativa misura del paese, ed alle particelle 300, che costituisce la grandezza del metro nella nostra scala, per avere in parti della stessa la ricercata misura del paese. In tal guisa operando, si scopre che Parigi dee scriversi a 97 particelle, Londra a 91, Pietroburgo a 214, Vienna a 95, e Milano a 178 ec.

Della linea de' pesi

Siccome delle misure lineari, così de' pesi è stata fissata una misura universale in Francia. Il peso di un palmo (ch' è la decima parte del metro) cubico d'acqua distillata, di cui il calore sia a 4 gradi del termometro di Reaumur, detrattovi il peso dell' aria, si è la nuova libbra chiamata da' francesi *chilogrammo*, che è di grani 18803, 18, mentre l' antica libbra era di grani 9216. Risultando la nuova libbra o chilogrammo di Francia la massima tra le libbre delle altre città di Europa, verrà essa contrassegnata coll' intera lunghezza della linea in quel regolo in cui vorranno segnarsi le ragioni de' diversi paesi respettivamente al chilogrammo. Data la ragione poi del chilogrammo alla libbra d'un qualsivoglia paese, si determinerà facilmente il numero delle particelle nella solita scala, esprimente la libbra del proposto paese. Così per esempio data la ragione del chilogrammo alla libbra parigina ne' numeri 18803, 18 : 9216, la quarta proporzionale a' detti numeri, ed al numero 300, cioè 147 indicherà nella nostra scala la grandezza dell' antica libbra parigina in confronto del chilogrammo, e dovrà scriversi all' estremità di questo numero il nome del paese, cioè Parigi. Nessuno troverà difficile come debbano contrassegnarsi le linee della respettiva ragione del peso de' metalli, quella del calibro delle palle da cannone o mortajo, o di linee assegnate ad altri usi spettanti alle pratiche matematiche

ARTICOLO IV

Alcuni principali usi del circolo di proporzione

Nell' aritmetica

A tre numeri dati trovare il quarto proporzionale

Si applichi il regolo EF (fig. 8. tav. II) in cui è scritta la linea delle parti uguali sul piano della tavoletta pretoriana; sicchè il secondo AB e terzo termine AC dati cadano sulla circonferenza del circolo; indi tenuto con una mano fermo il perno GA, coll' altra si giri il regolo, finchè il primo de' tre numeri dati che sia Ab, cada pur esso sulla stessa circonferenza, e sarà Ac nella linea delle parti uguali il ricercato quarto proporzionale

La dimostrazione di questa operazione immediatamente deducesi dal principio geometrico su cui è fondata l' invenzione dello strumento

Tutte le operazioni aritmetiche, non eccettuata, per approssimazione, l'estrazione della radice quadrata d' un proposto numero, che può ridursi prossimamente alla soluzione della regola aurea, si risolveranno facilmente col circolo di proporzione nel modo indicato

Tra due numeri dati trovare due medj proporzionali

Essendo AF (fig. 8. tav. II) nel regolo EF la linea de' solidi, si situi esso in guisa sul piano della tavoletta, che corrisponda nella circonferenza del circolo di proporzione in C il lato del solido dal secondo numero denominato, ed in B nell' opposta scala di particelle 300 il primo de' due numeri dati; quindi si giri al solito il regolo come in ef, cosicchè cada nella circonferenza dello stesso circolo in c il lato Ac del solido denominato dal primo numero, e verrà in b indicato nell' opposta scala Ac il primo de' due medj proporzionali ricercati. Imperocchè stando Ac ad AC come AB ad Ab, starà anche il cubo di Ac al cubo di AC; così il cubo di AB a quello di Ab; ma i cubi di Ac AC stanno nella ragione de' numeri dati: dunque il primo al secondo numero dato avrà la ragione del cubo del primo dato al cubo del numero ritrovato Ab, e perciò Ab sarà il primo de' due medj proporzionali ricercati. Per avere ora il secondo ricercato medio proporzionale, si soprapponga al circolo di proporzione la linea delle parti uguali, e si accomodi in maniera che AC sia il secondo numero dato, e nella scala corrispondente sia AB il primo medio proporzionale ritrovato, e girando lo stesso regolo finchè riesca Ac eguale ad Ab; sarà Ac ovvero Ab media proporzionale alle AB AC, e perciò sarà essa il secondo medio proporzionale ricercato

Estrarre da un numero dato la radice cuba

Sia proposto il numero di cinque cifre 78590; è manifesto che la radice cuba di esso sarà eguale prossimamente a quella del numero 79000, crescendo le tre ultime cifre 590 il mezzo migliajo

Disposto il regolo che ha descritta la linea de' solidi sul circolo di proporzione, onde cada in C (fig. 8. tav. II) il solido 79, ed in B nella scala opposta il numero 40, si mova intorno al perno GA sino a che il solido 64 incontri la circonferenza del circolo in c; e sarà notata in b nella scala la radice cuba ricercata: avvegnachè essendo AC^3 ad Ac^3 come Ab^3 ad AB^3, e per la linea de' solidi AC^3 ad Ac^3 come 79 a 64, ovvero 79000 a 64000: dunque come 79000 a 64000, così Ab^3 a 40^3; ma 40 è la radice cuba di 64000: dunque il numero notato in b nella scala sarà la radice cuba di 79000, cioè prossimamente la ricercata

Nella geometria

Costruire sul lato $b'c'$ (fig. 9. tav. II) omologo al lato $B'C'$ una figura rettilinea simile alla data $A'B'C'D'E'$

Divisa la data figura mediante le rette $A'D'$ $D'B'$ in triangoli, ed aggiustato il regolo della linea delle parti uguali sul circolo di proporzione, in maniera che sia AC (fig. 8. tav. II) uguale a $b'c'$, ed AB uguale a $C'D'$, girando intorno al perno GA il regolo,. se sarà Ac uguale a $B'C'$, sarà Ab il lato omologo al $C'D'$; e così se sarà AC uguale a $b'c'$, ed AB uguale a $B'D'$, e si giri il regolo sul punto A, cosicchè Ac sia uguale a $B'C'$, sarà la Ab l'omologa diagonale alla $B'D'$, e proseguendo in tal guisa, si costruirà sulla data retta $b'c'$ la figura rettilinea $a'\,b'\,c'\,d'\,e'$ simile alla data $A'\,B'\,C'\,D'\,E'$

Dato il lato d'un poligono regolare, trovare il raggio del cerchio in cui sta inscritto

Sia dato il lato d'un ennagono. E' manifesto che usando della linea delle corde, il quarto proporzionale che si otterrà alla corda di 40°, a quella di 60°, ed al lato dato, sarà il raggio del cerchio ricercato, come per la detta linea la corda di 40° è il lato dell' ennagono inscritto nel cerchio che ha per raggio quella di gradi 60

Dato il lato d'un solido, trovare il lato omologo d' un solido simile che stia al primo in data ragione

Sia la ragione data quella di 15 a 37. Il quarto proporzionale al solido 15 nella linea de' solidi, al lato del solido dato nella scala opposta, ed al solido 37, sarà il lato del solido ricercato

Dati due o più solidi simili, costruirne uno simile ed uguale a tutti insieme

Siano $P\,Q$ (fig. 10. tav. II) i lati omologhi di due solidi simili dati. Si adatti la linea de' solidi sul circolo di proporzione, in guisa che sia AC il terzo solido, ed AB nell' opposta scala uguale al lato P, e si giri il regolo intorno al punto A, finchè Ab nella stessa scala risulti eguale al lato Q dell'altro solido dato, e cada in c il solido 8. Fatto ciò, si trasferisca lo stesso regolo, e si situi in maniera che, mentre ab' nella scala è uguale al lato Q, nella linea de' solidi cada in c' il solido 11, somma del primo preso ad arbitrio e dell' osservato in c. Indi si giri nuovamente il regolo intorno al punto a, e cadendo in c'' il solido 3, sarà ab'' nella scala il lato del solido ricercato

Imperocchè essendo Ac^3 ad AC^3 come AB^3 ad Ab^3, ed Ac^3 ad AC^3, per la linea de' solidi, come 8 a 3; dunque sarà AB^3 ad Ab^3 come 8 a 3, cioè P^3 a Q^3 come 8 a 3. Similmente si dimostrerà che ab''^3 ad ab'^3, così 11 a 3; oppure ab''^3 ad ab'^3, così 11 a 3; e dividendo $ab''^3 - Q^3$ a Q^3, così 8 a 3; e perciò si avrà $ab''^3 - Q^3 = P^3$, cioè $ab''^3 = P^3 + Q^3$

Reputo inutile dopo gli esposti esempj aritmetici e geometrici, di estendermi maggiormente su gli altri usi consimili a cui può applicarsi il circolo di proporzione, come sono quelli che appartengono alla trigonometria rettilinea, alla permutazione di misure e pesi, ed a tutti gli usi dipendenti dalle linee contrassegnate ne' regoli. Indicherò ora brevemente come si trasformi esso con facilità in altri particolari strumenti capaci ad usi di molta importanza

I

Annestato al quarto di cerchio *BCP* (fig. 5, 6. tav. I) il regolo *EF* con viti passanti pe' fori a bella posta in esso fatti in *fh ac*, corrispondenti ai *P* e *B* a chiocciola, già preparati sulla tavoletta pretoriana, armando anche il detto regolo *EF* di diottre alle sue estremità *E F*, si avrà un quadrante, per cui, lasciandolo annesso alla tavoletta, si potranno ottenere con comodità ed esattezza, tra i molti usi abbastanza noti, anche quelli di misurare a vista altezze, profondità, e distanze, come diffusamente dimostra Galileo, applicando appunto il suo compasso di proporzione a tali operazioni. Così estraendo l' architettato quadrante dalla tavoletta, servirà esso a parecchj usi spettanti alla pratica artiglieria, cioè a disporre un mortajo od un cannone sotto un dato angolo di elevazione, ec.

II

Assicurato con viti il regolo *EF* sul piano della tavoletta, come rappresenta la figura 11 (tav. II), ed attaccato al centro *P* un filo che sostenga un peso *G*, onde accertarsi che disposta sia con esattezza in un piano verticale, e che la visuale passante per le diottre annesse alle estremità *EF* sia orizzontale, il circolo di proporzione verrà convertito in una pronta livella, che può rendersi sempre più utile ed esatta con quelle aggiunte ed artifizj che l' arte suggerisce, secondo le applicazioni in grande o in piccolo che vogliono farsi

III

Liberando il regolo EF da viti (fig. 11. tav. II) alle sue estremità, e restando mobile intorno ad un perno inserito nel centro P, che avrà perciò costruita a vite la parte soltanto che s' insinua nella grossezza della tavoletta, essendo cilindrica quella che sporge dal piano di essa, si otterrà uno strumento per misurare gli angoli colla vista, e per rilevare la carta d' un paese, ec.

IV

Fermato finalmente con viti, come in a a' (fig. 12. tav. II) il regolo EF sul piano della tavoletta, in posizione tale che la linea delle parti uguali sia tangente in A alla circonferenza graduata del circolo di proporzione, col solo sussidio d' un peso G che mediante un filo sia sospeso dallo stesso regolo, si otterrà lo strumento inventato da Blondel pel getto delle bombe, descritto nella sua opera intitolata *l'art de jeter les bombes*, e nuovamente esposto da Blond nella sua *artiglieria ragionata*; alle quali opere può ricorrersi per conoscerne l' uso, ed i principj su cui è fondato

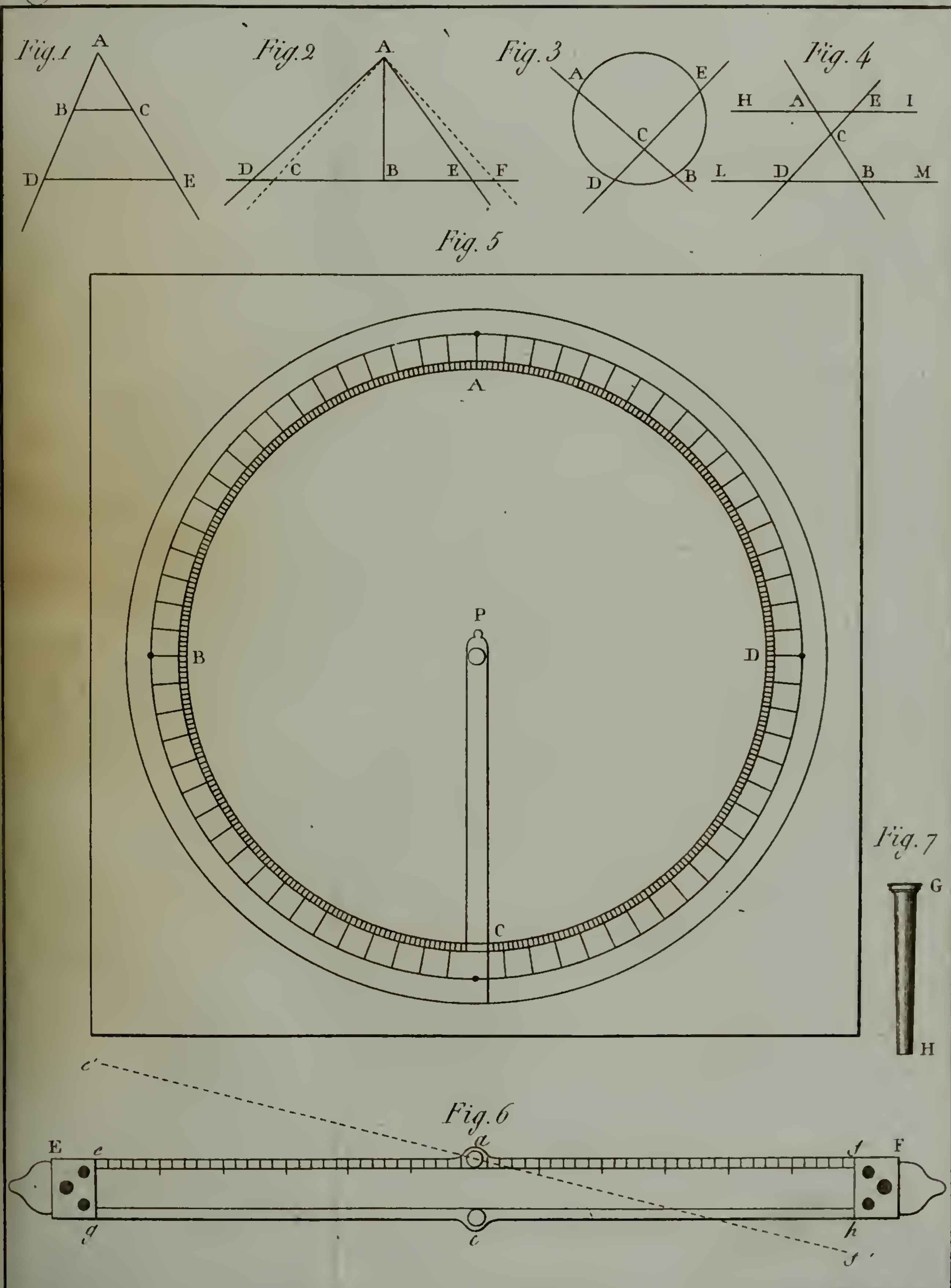


Fig. 1
A
B C
D E
Fig. 2
A
D C B E F
Fig. 3
A E
C
D B
Fig. 4
H A E I
C
L D B M
Fig. 5
A
P
B D
C
Fig. 7
G
H
Fig. 6
c
E e a f F
g c h
f

Fig. 8

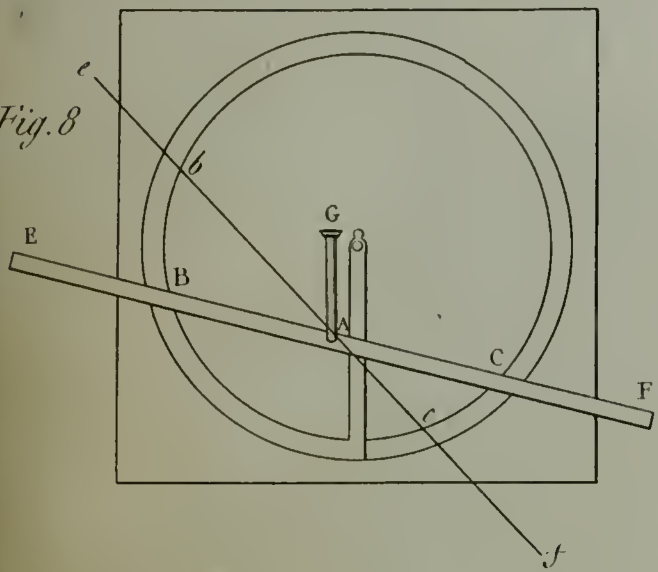


Fig. 9

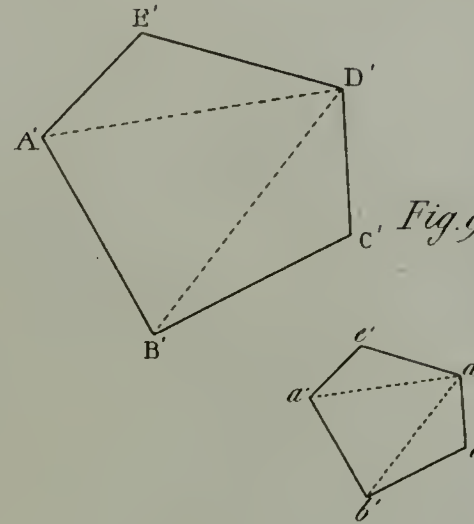


Fig. 10

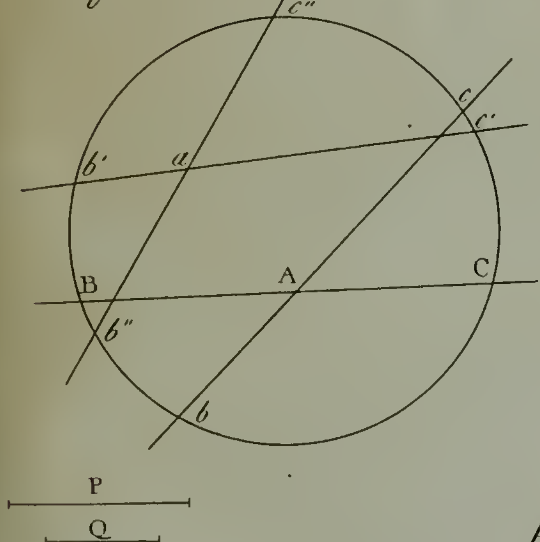


Fig. 11

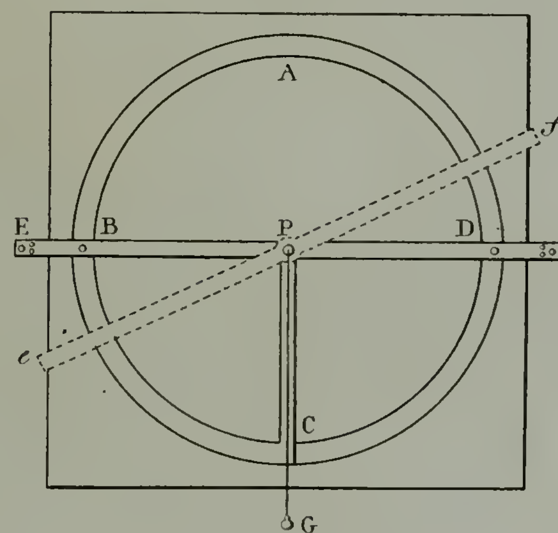
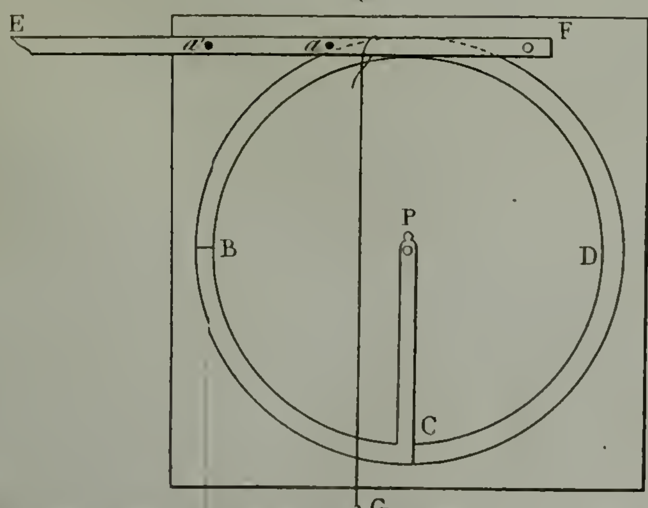


Fig. 12



SOPRA I PRINCIPJ E LE APPLICAZIONI

del calcolo differenziale ed integrale.

Di Vincenzio Brunacci

Presentata ai 24 di luglio. 1804

Lagrange, sino dal 1772, in una memoria contenuta negli atti di Berlino, asserì che lo sviluppo delle funzioni in serie conteneva i veri principj del calcolo differenziale, sbarazzati da ogni considerazione d' infinitesimi, di evanescenti, di limiti e di flussioni, e che potea detto calcolo ridursi ad essere un ramo d' analisi algebraica. Concepirono i geometri sino da quell' epoca la speranza di vedere espulsa dalle scuole di matematica la tenebrosa metafisica degl' infinitesimi *(y)* e dimostrati rigorosamente i principj d' un calcolo sì sublime; ma non continuando quel geometra le sue ricerche, si proseguì ad andare barcollando sopra i fondamenti del Leibnizio, ed ognuno che scrisse di calcolo differenziale, non pago delle altrui dimostrazioni, si affaticò a sostituirne di proprie, che non ebbero miglior fortuna di quelle

Da questi medesimi sforzi trar si può certissima prova, che i principj del nostro calcolo non si giudicarono ben dimostrati. Ed in fatti è ancora pochi anni, cioè nel 1796 (più di un secolo dopo le scoperte del Neutono e del Leibnizio) che Carnot geometra profondo quant' altri mai, pubblicò una serie di riflessioni sopra la metafisica del calcolo infinitesimale, che avean per oggetto, come egli dice, *di ravvicinare i diversi punti di vista, sotto dei quali si erano considerati siffatti principj, e spargere alcun grado di luce sopra un tanto oscuro ed interessante argomento (2)*

Per quanto la lettura di quello Scritto di Lagrange avesse fatto sentire che $(\frac{dy}{dx})$ era il simbolo di una funzione finita di x, ottenuta per mezzo di una certa operazione fatta sopra y, simbolo che avremmo potuto rappresentare per qualunque altro segno, pure sembrava impossibile che con questa idea soltanto, potessero afferrarsi le questioni geometriche e meccaniche; ed in conseguenza credevasi che la considerazione di $\frac{dy}{dx}$ come un rapporto di quantità infinitesime fosse indispensabilmente l' unico filo capace a dirigere l' analista negl' intricatissimi laberinti, che presentano le soluzioni dei problemi sopra i contatti, sopra le quadrature, sopra l' equilibrio, sopra il movimento dei corpi, e sopra infiniti altri oggetti, che inutil sarebbe d'enumerare. Per questo continuarono ad adoperarsi gl' infinitesimi, e si desiderarono nel tempo stesso altri principj, i quali portando nelle dimostrazioni la persuasione, maggiormente contentassero il nostro spirito *(3)*

La teoria delle funzioni analitiche pubblicata da Lagrange nel 1798 avrebbe dovuto compiere i voti di tutti. In essa dopo aver egli ridotto il calcolo differenziale ad un ramo di analisi algebraica ordinaria, estesamente trattiensi a dedurne tutte le teorie che riguardano i contatti, le rettificazioni, le quadrature, le solidità delle curve, delle superficie, dei corpi, come pure le velocità, le forze acceleratrici, e le altre affezioni dei movimenti variati, senza che nessuna volta bisogno egli abbia degl' infinitesimi. I suoi ragionamenti nulla hanno di metafisico, nessuna concessione addimandano, e sono dello stesso genere di quei che si fanno nell' algebra cartesiana, per lo che brilla in quelle dottrine il rigore geometrico che incontrasi nell' applicazione dell' analisi cartesiana alle curve. Ma un tal libro che solo basterebbe a render immortale l' italiano autore, non ha ottenuto al parer mio quel successo, che era in diritto d' attendersi; imperocchè dopo di esso avrebbero dovuto cangiar di faccia il calcolo differenziale ed integrale, ed in questa guisa la matematica sublime fare una rivoluzione nella maniera di esser trattata ed applicata, in quella guisa appunto che fece la chimica: con le nuove idee avrebbero dovuto stabilirsi nuovi segni e nuovi nomi *(4)*, e rigenerarsi, per così dire, questa parte di scienze esatte; mentre per altro verso nulla avrebbe sofferto quella massa d' inconcusse ed eterne verità ritrovate mercè quel calcolo sublime, e sopra delle quali tutta si appoggia l' armonia dell' universo

Se però questo necessario e felice cangiamento non si è fatto in quel paese, ove le matematiche, mercè l' autore delle funzioni analitiche, tengono il principato, a ragion possiam lusingarci che seguirà nella nostra Italia, da che la saggezza di chi presiede alla somma delle cose, ha prescritto che nelle due università nazionali del Regno il calcolo differenziale ed integrale debba esser fondato sopra i principj lagrangiani dedotti dall' *analisi derivata* (5)

Sarà gloria e somma gloria per gl' italiani aver essi creati i principj del metodo infinitesimale, e l' aver ridotti questi principj all' ultima lor perfezione, di modo che gli sforzi tutti degli stranieri siano compresi tra questi due limiti. Nè sembri esagerata per troppo amor patrio la mia proposizione. Il Cavalieri nella sua geometria degl' indivisibili ha considerata la linea, la superficie ed il solido come generati dal punto, dalla linea e dalla superficie continuamente *fluenti*: così ha somministrato al Neutono l' idea e la parola del calcolo delle flussioni. Cavalieri di più ha stabilito che qualunque continuo è composto di un numero infinito d' indivisibili, ed ha così somministrato al Leibnizio la parola e l' idea del calcolo infinitesimale, giacchè gl' indivisibili non sono altro che gl' infinitesimi, e lo stesso annoverese geometra promiscuamente usa questi due nomi nel dare i fondamenti dell' algoritmo differenziale (6). Ma le cose del Cavalieri erano vestite di geometria. L' applicazione dell'algebra alla geometria, tanto promossa dal Cartesio (7) che se ne può quasi chiamar l' inventore, mostrando come in poche linee si scrivono lunghissimi ragionamenti, (8) dovea necessariamente far nascere il desiderio di tradurre in linguaggio analitico le teorie del Cavalieri, che menavano allora tanto rumore. Tentò l' impresa il Vallis (9), e più felici di lui Neutono e Leibnizio immaginarono, contemporaneamente ciascuno, un algoritmo per iscrivere le verità di quella sublime geometrìa, e ne formarono così un puro ramo di calcolo, che estesero, mercè i loro simboli, alla considerazione di qualunque quantità

Alcuni geometri però, i quali han letta e considerata quella teorìa delle funzioni analitiche, (giacchè le riflessioni di coloro che pronunciano avendone solo veduto il frontespizio, meritano tanto peso, quanto ne ottennero le objezioni fatte alle fasi di Venere (10) scoperte dal Galileo) mentre confessano potersi mirabilmente prescindere dagl' infinitesimi nella determinazione delle affezioni delle curve, e del movimento, come han veduto aver fatto Lagrange, dichiarano che sarebbe forse impossibile risolvere in quella guisa i problemi tutti di statica, e di dinamica, come per esempio quei che riguardano il centro di gravità, il centro d' oscillazione, il movimento dei fluidi, ed altri molti i quali si trovano risolnti nei libri di meccanica con artifizio mirabile nell' impiego delle quantità infinitamente piccole: ed in fatti quel geometra niente ha parlato di questi, e d' altronde difficilmente potrebbero risolversi con ciò soltanto, che egli ha detto in quel libro

Onde mostrare come neppure in siffatte indagini non abbisognino infinitesimi è destinata questa memoria, la quale essendo letta alla presenza d' illustri colleghi che conoscono l' opera sopra laudata, mi dispensa dal dimostrare alcune formole, (appartenenti alla teorìa dei contatti, ed ottenute senza la considerazione del triangolo barroviano da Lagrange) delle quali mi occorre fare uso, e dal far loro osservare quel poco, che essa può contener di nuovo, e che dà, per così dire, l' ultima mano all' intiera espulsione del metodo infinitesimale dalle soluzioni dei problemi geometrici e meccanici. Non ho preso a trattare nuovi problemi, perchè potea creder taluno, ch' io gli avessi immaginati a bella posta adattati all' oggetto, ma mi sono accinto a risolvere delle questioni più complicate di meccanica, per le quali credevasi necessaria la teorìa degl' infinitesimi: e quì credo opportuno di riferire il principio di cui Lagrange si serve per far le applicazioni alle cose meccaniche e geometriche, ed in seguito un altro principio che a me, se non sbaglio, intieramente si deve, del quale pure mi abbisognerà far uso nella presente memoria. Da questi due principj ben maneggiati dipenderà la soluzione di qualunque problema di geometrìa o di meccanica sublime

PRINCIPIO I

Supponiamo che la funzione o quantità ricercata sia rappresentata da $a\,\omega^m + b\,\omega^{m+1}$, essendo ω una quantità assolutamente indeterminata; a una funzione incognita di x; b una simil funzione incognita di x, e di ω, ma ordinata secondo le potenze intiere e crescenti di ω: secondo la natura della questione si determinino i limiti tra i quali è contenuta questa quantità; e supponiamo che questi abbiano la forma $A'\omega^m + B'\omega^{m+1}$, $A'\omega^m + B\omega^{m+1}$, essendo A' una funzione cognita di x: B', B due funzioni cognite di x e di ω ordinate secondo le potenze intiere e crescenti di ω. Disposti i limiti e la funzione cercata per ordine di grandezza, abbiamo

$$A'\omega^m + B'\omega^{m+1}$$

$$a\,\omega^m + b\,\omega^{m+1}$$

$$A'\omega^m + B\,\omega^{m+1}$$

e dovrà essere per qualunque valore di ω la differenza tra i due limiti sempre maggiore della differenza tra un limite, e la quantità media

Sarà dunque

$$(B'-B)\,\omega^{m+1} > (a-A')\,\omega^m + (b-B)\,\omega^{m+1}$$

Ora stando

$(B'-B)\,\omega^{m+1} : (a-A')\,\omega^m + (b-B)\,\omega^{m+1} :: (B'-B)\,\omega : (a-A') + (b-B)\,\omega$, dovrà essere il secondo antecedente sempre maggiore del secondo conseguente, giacchè il primo antecedente lo è del primo conseguente, qualunque d'altronde sia ω. Ora questa condizione non può aver luogo, se non abbiamo $a-A'=o$, poichè in caso diverso diminuendo il valore di ω, l' antecedente $\omega\ (B'-B)$ potrà ridursi non solo ad eguagliare il conseguente $a-A'+(b-B)\ \omega$ (nel quale vi è una porzione costante $a-A'$), ma ancora ad esser minore di lui, ciò che sarebbe contro l'ipotesi; dunque, affinchè per tutti i valori possibili la quantità $a\,\omega^m + b\,\omega^{m+1}$ sia contenuta entro i limiti $A'\omega^m + B'\omega^{m+1}$, $A'\omega^m + B\,\omega^{m+1}$, bisogna chè sia $a=A'$, e quest' equazione è quella che servirà alla risoluzione della questione

E qui faccio osservare la differenza che passa tra il nostro ω ed il dx infinitesimo. Questo debbe esser minore di ogni quantità assegnabile, di modo che non puossi concepire una grandezza più piccola di lui, e quello, cioè l' ω, lo considero diminuire finchè renda $(B'-B)\omega = a - A' + (b-B')\omega$, e posso allora immaginare un' infinità di altri valori di ω più piccoli di quello, per i quali il primo membro divenendo minore del secondo, nascerebbe l' assurdo, o la quantità non sarebbe contenuta tra i due limiti, contro l' ipotesi, se non fosse $a = A'$

PRINCIPIO II

Se abbiamo l'equazione $a + b\omega + c\omega^2 + e\omega^3 + \text{ec.} = o$ la quale debba esser vera per tutti i valori possibili della indeterminata ω, è necessario che i coefficienti delle respettive potenze di ω formino dell' equazioni egualmente vere, che abbiasi cioè $a = o, b = o, c = o$, ec.

Quindi se la soluzione di un problema potrà ridursi alla determinazione dei coefficienti A e B, di una funzione $A\omega + B\omega^2$, e se per i dati dello stesso problema debbe essere questa funzione eguale ad una serie $m\omega + n\omega^2 + l\omega^3 +$ ec. essendo m, l, n, ec. quantità cognite, s' avrà $A\omega + B\omega^2 = m\omega + n\omega^2 + l\omega^3 +$ ec. ed in conseguenza $A - m = o$, $B - n = o$, $l = o$; ec. saranno l' equazioni che risolveranno il problema. Egualmente se tra le quantità cognite ed incognite potremo trovare un' equazione di questa forma $A + B\omega + C\omega^2 + \text{ec.} = o$, le equazioni $A = o$, $B = o$, ec. ci serviranno alla soluzione del problema

Questi due principj si concepiranno più facilmente in seguito

Moto variabile

Per quanto la velocità e la forza acceleratrice di un qualunque moto variabile alla fine di un certo tempo sia stata determinata da Lagrange, pure potendosi ritrovare le stesse quantità per un ragionamento più semplice, appoggiato ancora esso a considerazioni puramente algebraiche, e che apre la strada alla soluzione di altri problemi, ho creduto non tempo perduto, trattenermi a determinarle di nuovo

Indicando per s uno spazio rettilineo, per t un tempo in cui è stato descritto, l'equazione $s = \phi\ (t)$, nella quale il secondo membro è una funzione di t, esprime analiticamente tutti i movimenti possibili in linea retta, ed abbiamo tanti movimenti, quanti sono i valori che possono darsi $a\ \phi\ (t)$

L' osservazione e l' esperienza ci ha dimostrato che due movimenti semplici esistono in natura, rappresentati dall'equazioni $s = at$, $s = bt^2$, al primo dei quali si dà il nome di *moto uniforme*, ed all' altro di *uniformemente accelerato*. Il coefficiente costante a che entra nell' equazione del moto uniforme, è chiamato *velocità*, ed il coefficiente b che trovasi nell' equazione di quell' altro movimento (coefficiente che è costante in un medesimo moto, e varia da un moto all' altro) esprime la forza acceleratrice costante, che produce il moto uniformemente accelerato

Il movimento $s = at$ è quello col quale si moverebbe un corpo messo in moto da una causa istantanea, da una causa cioè che dopo avere agito in un istante lo abbandona a se medesimo, se tutti gli ostacoli e le resistenze che incontra, non alterassero quel movimento

Il movimento poi $s = b\,t^2$ è quello prodotto da una causa la quale opera costantemente ed egualmente sopra di un corpo, e continua la sua azione con la medesima intensità, con la quale ha agito nel primo momento, anche nel tempo stesso in cui quel corpo si muove. I corpi liberamente cadenti si muovono con questo movimento, astrazione facendo dalla resistenza dell' aria, e considerando per nulla la variazione, che soffre la gravità, in virtù della legge neutoniana che porta la diminuzione di questa forza, per l' allontanamento dei corpi dal centro della terra

Ciò premesso, consideriamo un movimento qualunque rettilineo, che è rappresentato, come abbiam detto, dall' equazione $s = \varphi(t)$; alla fine del tempo t il mobile ha percorso lo spazio $\varphi(t)$: ed in conseguenza alla fine del tempo $t + \omega$ egli avrà percorso lo spazio $\varphi(t+\omega)$: sarà dunque $\varphi(t+\omega) - \varphi(t)$ lo spazio percorso nel tempo ω, il quale comincia quando t finisce. Sviluppiamo in serie la funzione $\varphi(t+\omega)$ per mezzo del teorema di Tailor, ed avremo [scrivo φ per $\varphi(t)$]

$$\varphi(t) + \omega\left(\frac{d\,\varphi}{d\,t}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\,\varphi}{d\,t^2}\right) + \frac{\omega^3}{2\,.\,3}\left(\frac{d^3\,\varphi}{d\,t^3}\right) + \text{ec.}$$

Dunque lo spazio percorso nel tempo ω sarà rappresentato dalla formola

$$\omega\left(\frac{d\,\phi}{d\,t}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\,\phi}{d\,t^2}\right)+\frac{\omega^3}{2\,.\,3}\left(\frac{d^3\,\phi}{d\,t^3}\right)+\text{ec.}$$

nella quale il tempo t trascorso avanti il principio del tempo ω, è considerato come costante, riguardo al moto che ha luogo nello stesso tempo ω; così il movimento col quale questo spazio è percorso, è composto di differenti movimenti parziali, di cui gli spazj corrispondenti al tempo ω sono

$$\omega\left(\frac{d\,\phi}{d\,t}\right),\ \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\,\phi}{d\,t^2}\right),\ \frac{\omega^3}{2\,.\,3}\left(\frac{d^3\,\phi}{d\,t^3}\right),\ \text{ec.}$$

Di questi moti parziali il primo è un moto uniforme con una velocità misurata dalla funzione $\left(\frac{d\,\phi}{d\,t}\right)$; il secondo è un moto uniformemente accelerato, dovuto ad una forza acceleratrice misurata da $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\,\phi}{d\,t^2}\right)$, o proporzionale alla funzione $\left(\frac{d^2\,\phi}{d\,t^2}\right)$; dunque, qualunque sia il tempo ω, il movimento che ha luogo per la di lui durata, è composto (se $\phi\ (t+\omega)$ non sia sviluppabile in un numero finito di termini) di un numero infinito di movimenti, dei quali sebbene due soli si riportino a movimenti conosciuti, pure sarebbe errore grandissimo il considerare nulla la somma di tutti quegli altri moti, solo perchè non sappiamo a cosa si riferiscano.

Nel tempo ω, il quale comincia quando t finisce, lo spazio descritto è [pongo s per $\phi\ (t)$]

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)\omega + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)\omega^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3 s}{dt^3}\right)\omega^3 + \text{ec.}$$

Ora immaginiamo una velocità media V tale, che il corpo dotato di essa faccia con moto equabile ed uniforme nel tempo ω lo spazio medesimo che ei percorreva in virtù dei movimenti variati da cui è realmente animato. Se io suppongo che sia v la velocità con la quale comincia il moto nel tempo ω, ovvero la velocità, che ha il mobile alla fine del tempo t, l'espressione di V dovrà aver questa forma $V = v + \omega z$, essendo ωz una funzione di ω e di t, che si annulla quando $\omega = 0$. Che V debba aver la forma $v + \omega z$ si comprenderà facilmente, riflettendo che, supponendo che la velocità variabile vada sempre crescendo o scemando dal principio di ω sino alla fine, la velocità media dovrà essere maggiore o minore della velocità v, di una quantità ωz dipendente da ω, e tale che si annulli, quando ω è zero. Sarà dunque

$$(v + \omega z)\,\omega = \left(\frac{ds}{dt}\right)\omega + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)\omega^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3 s}{dt^3}\right)\omega^3 + \text{ec.}$$

ovvero

$$v\,\omega + z\,\omega^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)\omega + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)\omega^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3 s}{dt^3}\right)\omega^3 + \text{ec.}$$

Ora (Prin. II.) quest' equazione dovendo avverarsi per qualunque valore dell' indeterminata ω, i coefficienti delle rispettive potenze di ω debbono formare da se stessi dell'equazioni egualmente vere; dunque debbe essere

$v - \left(\frac{ds}{dt}\right) = 0$, e quindi

$v=(\frac{ds}{dt})$. Dunque la velocità del mobile alla fine del tempo t è rappresentata dalla funzione $(\frac{ds}{dt})$.

Egualmente riflettendo che la somma degli spazj descritti nel tempo ω, escluso quello $(\frac{ds}{dt})\,\omega$, il quale è fatto con moto equabile, è

$$\frac{1}{2}(\frac{d^2 s}{dt^2})\,\omega^2 + \frac{1}{2\,.\,3}(\frac{d^3 s}{dt^3})\,\omega^3 + \text{ec.}$$

se noi immaginiamo una forza acceleratrice media F, la quale nel suddetto tempo ω faccia percorrere al mobile con moto uniformemente accelerato uno spazio eguale a quella somma descritta con moti variati, e se noi supponiamo $F=f+\omega y$, essendo f la forza acceleratrice alla fine del tempo t, ed $\omega\, y$ una funzione di ω e di t, che si annulla quando $\omega=0$, avremo

$$(f+\omega y)\,\omega^2=\frac{1}{2}(\frac{d^2 s}{dt^2})\,\omega^2 + \frac{1}{2\,.\,3}(\frac{d^3 s}{dt^3})\,\omega^3 + \text{ec.}$$

e quindi

$$f\omega^2 + y\,\omega^3 = \frac{1}{2}(\frac{d^2 s}{dt^2})\,\omega^2 + \frac{1}{2\,.\,3}(\frac{d^3 s}{dt^3})\,\omega^3 + \text{ec.}$$

equazione che dovendo esser vera per tutti i valori di ω, ci darà $f=\frac{1}{2}(\frac{d^2 s}{dt^2})$. Dunque in qualunque movimento variato la forza acceleratrice alla fine del tempo t sarà rappresentata da $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 s}{d t^2}\right)$, ed in conseguenza sarà proporzionale a $\left(\frac{d^2 s}{d t^2}\right)$

Per questo faremo $f=\left(\frac{d^2 s}{d t^2}\right)$, avvertendo che quest' equazione è una vera proporzionalità, come sono in meccanica tutte le equazioni, nelle quali sono paragonate tra loro le quantità eterogenee, spazio, velocità, tempo, e forza. Dovrà poi aversi riguardo a tutto questo nel paragone delle forze acceleratrici tra loro

CENTRO DI GRAVITA'

Fig. 1. Sia APM l'area della quale si ricerca il centro di gravità. Supponiamo che gli assi dei momenti siano quei medesimi delle coordinate $AP=x$, $PM=y$, e che l'origine dell' area sia nell' origine delle ascisse, Indicando per $\phi\,(x)$ il momento dello spazio AMP relativamente all'asse AH, sarà $\phi\,(x+\omega)$ il momento dello spazio ARE, quando si faccia $PR=\omega$. Ora compiamo i rettangoli $PSER$, $PMDR$ circoscritto ed inscritto al trapezio mistilineo $PMER$, e vedremo subito che il momento di AER è sempre maggiore del momento dello spazio $AMP+PMDR$, ed è nello stesso tempo minore del momento dello spazio $AMP+PSER$. Se dunque rappresentiamo questi tre momenti per m', m, m'', dovremo sempre avere $m''>m'>m$, ed in conseguenza $m''-m>m'-m$, qualunque sia ω

E qui si avverta che noi supponiamo non ritrovarsi nell' arco corrispondente ad ω, alcun punto singolare, come di massimo, o minimo, di flesso, ec. Questa supposizione è legittima, imperocchè essendo arbitraria l' ω, possiam prenderla in guisa che l'arco ad essa corrispondente cada al di quà del punto singolare.

Esprimiamo analiticamente questi tre momenti, ed avremo

$$m''=Mom:AMP+Mom:PSER=\varphi(x)+(x+\frac{\omega}{2})\omega.RE$$

$$=\varphi(x)+(x+\frac{\omega}{2})\left\{y+\omega(\frac{dy}{dx})+\frac{\omega^2}{2}(\frac{d^2y}{dx^2})+\text{ec.}\right\}\omega;$$

$$m'=\varphi(x+\omega)=\varphi(x)+\omega(\frac{d\varphi}{dx})+\frac{\omega^2}{2}(\frac{d^2\varphi}{dx^2})+\text{ec.};$$

$$m=Mom.APM+Mom.PMDR=\varphi(x)+(x+\frac{\omega}{2})\omega y$$

Facciamo $R=\frac{1}{2}(\frac{d^2\varphi}{dx^2})+\text{ec.}$

$p=\frac{1}{2}(\frac{d^2y}{dx^2})+\text{ec.}$

e si avrà

$$m'=\varphi(x)+\omega(\frac{d\varphi}{dx})+\omega^2R$$

$$m''=\varphi(x)+(x+\frac{\omega}{2})\left\{y+\omega(\frac{dy}{dx})+\omega^2p\right\}\omega$$

$$m=\varphi(x)+(x+\frac{\omega}{2})\omega y$$

Dovrà dunque essere

$$\omega^2 \left\{ \left(\frac{dy}{dx}\right) + \omega p \right\} \left(x + \frac{\omega}{2}\right) > \omega \left\{ \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) - xy \right\} + \omega^2 \left(R - \frac{y}{x}\right)$$

qualunque sia d' altronde il valore di ω; e questa condizione non può aver luogo per tutti i valori possibili di ω (Prin. I.) se non si annulla il coefficiente di ω, se cioè non è $\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) - xy = 0$

Dunque $\left(\frac{d\Phi}{dx}\right) = xy$, $\Phi(x) = \int xy\,dx$

Ora si sa dalla meccanica, che supponendo in G il centro di gravità, e conducendo ai due assi dei momenti le perpendicolari GQ, GO, abbiamo
$Mom : AMP = GQ . \int y\,dx$;

dunque $GQ . \int y\,dx = \int xy\,dx$,

ed in conseguenza $GQ = \dfrac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}$.

Per trovare GO, indichiamo per $\Phi(x)$ il momento dello spazio APM relativamente all' asse AR, ed avremo (rappresentando per m, m', m'', i momenti dei tre spazj sopra considerati)

$$m'' = \Phi(x) + \omega \left\{ y + \omega \left(\frac{dy}{dx}\right) + \omega^2 p \right\} \frac{y + \omega \left(\frac{dy}{dx}\right) + \omega^2 p}{2}$$

$$m' = \Phi(x) + \omega \left(\frac{d\Phi}{dx}\right) + \omega^2 R$$

$$m = \Phi(x) + \omega y . \frac{y}{2}$$

Ma dobbiamo sempre avere $m'' - m > m' - m$; dunque

$$\omega^2 y \left\{ \left(\frac{dy}{dx}\right) + \omega p \right\} + \frac{\omega^3}{2} \left\{ \left(\frac{dy}{dx}\right) + p\omega \right\}^2 > \omega \left\{ \left(\frac{d\phi}{dx}\right) - \frac{y^2}{2} \right\} + \omega^2 R$$

qualunque sia ω; dovrà dunque (Prin. I) esser nullo il coefficiente $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) - \frac{y^2}{2}$; e perciò debb' essere

$$\phi(x) = \int \frac{y^2}{2} dx;$$

Ma $Mom : AMP = \phi(x) = GO . \int y dx;$

dunque $GO = \dfrac{\int \frac{y^2}{2} dx}{\int y\, dx}$.

Se $y = fx$ esprimesse la sezione di un solido fatta perpendicolarmente all'asse degli x, e corrispondente all'ascissa x, dimostreremo nella stessa guisa, che la distanza del centro di gravità di questo solido da un piano parallelo alla sezione, e che passa per l' origine delle ascisse, è $= \dfrac{\int y x\, dx}{\int y\, dx}$. Trovate poi le distanze del centro da due altri piani perpendicolari al primo, sarà determinato il centro di gravità del solido medesimo

Fig. 2. Per trovare il centro di gravità S dell'arco AM, indichiamo per $\phi(x)$ il momento di quest' arco relativamente all' asse AC; e la meccanica ci darà

$$\phi(x) = GQ . \int \sqrt{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)\right]} dx$$

Supponiamo che $AP = x$ divenga $AR = x + \omega$; conduciamo l' ordinata RN; le tangenti ai punti M, N finchè incontrino le ordinate PM, RN prolungate in T e T'; e finalmente la retta MD parallela alla $T'N$

Sarà adesso facile dimostrare che il momento dell' arco AMN debb' esser sempre minore del momento di $AM + MT$, e maggiore del momento di $AM + MD$, qualunque sia ω. Rappresentando adunque per m', m'', m questi tre momenti, e disponendoli per ordine di grandezza, si avrà

$\left[\text{la funzione } fx \text{ tien luogo di } \sqrt{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)\right\}}\right]$

$$m'' = \phi(x) + \left(x + \frac{\omega}{2}\right)\omega f(x)$$

$$m' = \phi(x) + \omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \omega^2 R$$

$$m = \phi(x) + \left(x + \frac{\omega}{2}\right)\omega f(x + \omega)$$

e dovrà sempre essere $m'' - m > m'' - m'$, cioè

$$\left(x + \frac{\omega}{2}\right)\omega\left\{f(x) - f(x + \omega)\right\} > \omega\left\{xf(x) - \left(\frac{d\phi}{dx}\right)\right\} + \omega^2\left\{\frac{1}{2}f(x) - R\right\}$$

la qual cosa acciocchè sempre succeda, bisogna che sia

$xf(x) = \left(\frac{d\phi}{dx}\right)$, ed in conseguenza $\phi(x) = \int xf(x) . dx$;

ovvero

$$\phi(x) = \int x\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} . dx$$

Avremo pertanto

$$G\,Q = \frac{\int x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,.\, dx}{\int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,.\, dx}$$

Con lo stesso metodo potremmo trovare la distanza GO; in fatti rappresentando al solito per $\phi\,(x)$ il momento dell' arco AM relativamente all' asse AB, avremo

$$m'' = Mom:(AM + MT) = \phi(x) + \left[y + \frac{\omega}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right] \omega f(x)$$

$$m' = Mom:(\,AMN\,) = \phi(x) + \omega\left(\frac{d\phi}{dx}\right) + \omega^2 R$$

$$m = Mom:(AM + MD) = \phi(x) + \left[y + \frac{\omega}{2}\left(\frac{dy'}{dx}\right)\right] \omega f(x + \omega)\,,$$

essendo y' ciò che diviene y quando x si cangia in $x + \omega$; ma dobbiamo sempre avere $m'' - m > m'' - m'$;

dunque $\left(\frac{d\phi}{dx}\right) = y f(x)$ ovvero

$\phi\,(x) = \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,.\, dx$ e quindi

$$G\,O = \frac{\int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,.\, dx}{\int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \,.\, dx}$$

Volendo il centro di gravità della superficie conoidica formata dal ravvolgimento di *A M N* intorno ad *A B*, faremo un simile ragionamento. Il centro di gravità è nell' asse *A B*, e rapporto ad un piano perpendicolare ad *A B*, il momento della superficie conoidica fatta da *A M N* è medio tra l' aggregato dei momenti della zona conica fatta da *M T*, e della superficie conoidica fatta da *A M*, e l' aggregato dei momenti della stessa superficie conoidica, e dell' altra zona conica descritta da *M D*

Si segue un médesimo andamento per trovare le formole le quali appartengonó alla teorìa dei centri di oscillazione

PROBLEMA DI STATICA

Determinare le condizioni d' equilibrio fra tutti i cunei di una volta qualunque cilindrica *(JJ)*

I „ Siano (Fig. 3.) *A C A'* la curva interna di una „ volta cilindrica, *a c a'* la curva esterna. Supponiamo „ che a ciascun cuneo siano applicate delle forze as- „ solute *V, F, F'*, ec., *f, f'* ec. Siano *X*, *X'* due cu- „ nei consecutivi sottoposti rispettivamente all' azione „ delle due forze *F*, *F'*. Le giunture *m M*, *n N*, *p P*, „ ec. debbono essere perpendicolari alla curva interna „ *A C A'*, tanto per la grazia della volta, che per la so- „ lidità della costruzione, e noi perciò le supporremo „ tali

II „ Avendo preso sulla direzione della forza *F* la „ parte *X E* per rappresentarla, la decompongo in due „ altre forze *X u*, *X t* perpendicolari alle due giun- „ ture *m M*, *n N* del cuneo *X*. Sia *X'* il punto, in

„ cui la direzione della forza $X t$ incontra quella $F' X'$
„ della forza F'. Prendo sulla $F' X'$ la parte $X' E'$
„ per rappresentare la forza F', e la decompongo in
„ due altre $X' q$, $X' l$ perpendicolari alle giunture
„ Nn, Pp del cuneo X'. Allora i due cunei X, X'
„ si faranno equilibrio, quando le due forze $X t$, $X' q$
„ direttamente opposte, con le quali essi agiscono uno
„ contro l'altro, saranno eguali tra loro. Tutto adun-
„ que si ridurrà a formare l' equazione
„ $Forza \; X t = Forza \; X q$, ed a sostituire invece di
„ queste forze i loro valori

III „ Il parallelogrammo $X t E u$ dà

„ $$Forza\, X t = Forza\, X E \,.\, \frac{sen\, X E t}{sen\, X t E} = F \,.\, \frac{sen\, X E t}{sen\, X t E}$$

„ ed il parallelogrammo $X' q E' l$ dà parimente

„ $Forza\, X' q = F' \,.\, \dfrac{sen\, X' E' q}{sen\, X' q E'}$; avremo adunque

„ $F \,.\, \dfrac{sen\, X E t}{sen\, X t E} = F' \,.\, \dfrac{sen\, X' E' q}{sen\, X' q E'}$, ovvero

„ $$(\mathrm{A}) \; \ldots \; \frac{F}{F'} = \frac{sen\, X t E \,.\, sen\, X' E' q}{sen\, X E t \,.\, sen\, X' q E'}$$

IV. „ Siano, I il punto di concorso delle giunture
„ mM, nN prolungate; T quello del concorso delle
„ giunture nN, pP parimente prolungate; H ed L
„ i punti di concorso delle giunture esterne mM, pP
„ con l'asse verticale CO; Z e G i punti di concorso
„ delle forze F, F' collo stesso asse. Egli è chiaro che
„ l'angolo $X t E$ eguaglia l'angolo $N I M$, poichè i la-

„ ti dell'uno sono perpendicolari a quei dell' altro. Per
„ la stessa ragione l'angolo $X'\ q\ E'$ è eguale all'angolo $P\,I\,N$. Di più conducendo per il punto z, in cui
„ la retta Xu incontra la giuntura mM, la retta linea zz' parallela alla direzione della forza F, si vedrà
„ che l'angolo $u\,X\,E$, o l'angolo $u\,z\,z' =$ ang°. $u\,z\,k$ —
„ ang°. $k\,z\,z' = 90° -$ (ang°. $C\,Z\,E$ — ang°. $C\,H\,M$) e
„ per delle considerazioni simili l'angolo $X'E'q = 90° -$
„ (ang°. $C\,l\,P$ — ang°. $C\,G\,F'$). Dunque prendendo sempre il seno totale per l'unità, s' avrà dalla trigono-
„ metria

„ $sen\,X\,E\,t = cos\,C\,Z\,E \times cos\,C\,H\,M + sen\,C\,Z\,F \times sen\,C\,H\,M$; e

„ $sen\,X'E'q = cos\,C\,G\,F' \times cos\,C\,L\,P + sen\,C\,G\,F' \times sen\,C\,L\,P$, e

„ l' equazione (A) si cangierà in questa (B) .....

„ $$\frac{F}{F'} = \frac{sen\,N\,I\,M\,(cos\,C\,G\,F'\,.\,cos\,C\,l\,P + sen\,C\,G\,F'\,.\,sen\,C\,l\,P)}{sen\,P\,T\,N\,(cos\,C\,Z\,F\,.\,cos\,C\,H\,M + sen\,C\,Z\,F\,.\,sen\,C\,H\,M)}$$

„ Da quest' equazione si vede, che conoscendo la fi-
„ gura della curva interna, gli archi $M\,N$, $N\,P$, ec.
„ ai quali corrispondono i cunei, e le direzioni delle
„ forze F, F' ec. si troveranno i rapporti delle stesse
„ forze, e la figura della curva esterna

Fig. 4. Supponendo che la curva della volta formi un arco continuato, prendiamo due porzioni eguali $M\,N$, $N\,P$ di quest' arco; e siano F, F' le risultanti di tutte le forze, che respettivamente agiscono sopra ciascuna di queste porzioni; siano $F\,Z$, $F'G$ le direzioni di queste risultanti; conduciamo all' asse verticale $C\,O$ le ordinate $M\,R$, $R'\,N$, $P\,R''$; sia $M\,H$ la

normale alla curva nel punto M; egualmente siano NL, PL le normali nei punti N, P; facciamo $MC=s$, e riguardiamo tutte le linee e quantità dipendenti dal punto M, come funzioni di s; poniamo

$$CM = s \qquad MN = NP = \omega$$

$$CR = x_s \qquad MR = y_s$$

$$CR' = x'_s = x_{s+\omega} \qquad NR' = y'_s = y_{s+\omega}$$

$$CR'' = x''_s = x_{s+2\omega} \qquad PR'' = y''_s = y_{s+2\omega}$$

$$Ang^o.\,CZF = u_s \qquad Ang^o.\,CGF' = u'_s = u_{s+\omega}$$

$$F = F_s \qquad F' = F_{s+\omega}$$

Paragonando la figura 3 con la 4, avremo

$$sen\,(NIM) = sen\,(CL'N - CHM)$$

$$sen\,(PTN) = sen\,(CLP - CL'N)\,;$$

ma

$$sen\,CHM = \left(\frac{dx}{ds}\right) \qquad cos\,CHM = \left(\frac{dy}{ds}\right)$$

$$sen\,CL'N = \left(\frac{dx'}{ds}\right) \qquad cos\,CL'N = \left(\frac{dy'}{ds}\right)$$

$$sen\,CLP = \left(\frac{dx''}{ds}\right) \qquad cos\,CLP = \left(\frac{dy''}{ds}\right)\,;$$

facendo adunque le opportune sostituzioni nella formola (B), s' avrà

$$\frac{F_s}{F_{s+\omega}}=\frac{\left\{\left(\frac{dy'}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)-\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right)\right\}\left\{\left(\frac{dy''}{ds}\right)\cos u_{s+\omega}+\left(\frac{dx''}{ds}\right)\operatorname{sen} u_{s+\omega}\right\}}{\left\{\left(\frac{dy''}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right)-\left(\frac{dy'}{ds}\right)\left(\frac{dx''}{ds}\right)\right\}\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\cos u_s+\left(\frac{dx}{ds}\right)\operatorname{sen} u_s\right\}}$$

ovvero

$$F_s\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\cos u_s+\left(\frac{dy}{ds}\right)\operatorname{sen} u_s\right\}\left\{\left(\frac{dy''}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right)-\left(\frac{dy'}{ds}\right)\left(\frac{dx''}{ds}\right)\right\}=$$

$$F_{s+\omega}\left\{\left(\frac{dy''}{ds}\right)\cos u_{s+\omega}+\left(\frac{dx''}{ds}\right)\operatorname{sen} u_{s+\omega}\right\}\left\{\left(\frac{dy'}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)-\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right)\right\}$$

Ora osserviamo che (noi scriviamo indistintamente x, y, x', y', ec. per x_s, y_s, x'_s ec.)

$$x'_s=x_{s+\omega}=x_s+\omega\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)+\omega^3 \text{ ec.}$$

$$x''_s=x_{s+2\omega}=x_s+2\omega\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{4\omega^2}{2}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)+\omega^3 \text{ ec.}$$

$$y'_s=y_{s+\omega}=y_s+\omega\left(\frac{dy}{ds}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)+\omega^3 \text{ ec.}$$

$$y''_s=y_{s+2\omega}=y_x+2\omega\left(\frac{dy}{ds}\right)+2\omega^2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)+\omega^3 \text{ ec.}$$

$$\operatorname{sen} u_{s+\omega}=\operatorname{sen} u_s+\omega\left(\frac{d\operatorname{sen} u}{ds}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\operatorname{sen} u}{ds^2}\right)+\omega^3 \text{ ec.}$$

$$\cos u_{s+\omega}=\cos u_s+\omega\left(\frac{d\cos u}{ds}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\cos u}{ds^2}\right)+\omega^3 \text{ ec.}$$

$$F_s=\phi(s)+\omega t_s$$

$$F_{s+\omega}=\phi(s)+\omega\left\{t_s+\left(\frac{d\phi}{ds}\right)\right\}+\frac{\omega^2}{2}\left\{\left(\frac{dt}{ds}\right)+\left(\frac{d^2\phi}{ds^2}\right)\right\}+\text{ ec.}$$

essendo rappresentata da $\phi(s)$, funzione di s, la forza che agisce nel punto M della volta, ed $\omega . t_s$ essendo una funzione di ω e di s, la quale si annulla, quando $\omega = 0$. Facendo adunque le opportune sostituzioni nella ritrovata equazione, ed ordinandola nel tempo stesso per ω, noi avremo una nuova equazione di questa forma $\alpha \omega^0 + \beta \omega + \gamma \omega^2 + \delta \omega^3 + \text{ec.} = 0$, la quale dovendo essere vera per tutti i valori possibili di ω, ci darà $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, ec. e ciascuna di queste apparterrà allo stesso problema

Per avere effettivamente queste equazioni, incominciamo dal fare le sostituzioni e le successive riduzioni in ciascuno dei fattori della nostra equazione, e si troverà

$$\left(\frac{d y''}{d s}\right)\left(\frac{d x'}{d s}\right) = \left\{\left(\frac{d y}{d s}\right) + 2\omega\left(\frac{d^2 y}{d s^2}\right) + 2\omega^2\left(\frac{d^3 y}{d s^3}\right) + \omega^3 \text{ ec.}\right\}\left\{\left(\frac{d x}{d s}\right)\right.$$

$$\left. + \omega\left(\frac{d^2 x}{d s^2}\right) + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^3 x}{d s^2}\right) + \omega^3 \text{ ec.}\right\} = \left(\frac{d y}{d s}\right)\left(\frac{d x}{d s}\right)$$

$$+ \omega\left\{\left(\frac{d y}{d s}\right)\left(\frac{d^2 x}{d s^2}\right) + 2\left(\frac{d x}{d s}\right)\left(\frac{d^2 y}{d s^2}\right)\right\} + \omega^2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d y}{d s}\right) \times\right.$$

$$\left.\left(\frac{d^3 x}{d s^3}\right) + 2\left(\frac{d^2 x}{d s^2}\right)\left(\frac{d^2 y}{d s^2}\right) + 2\left(\frac{d x}{d s}\right)\left(\frac{d^3 y}{d s^3}\right)\right\} + \omega^3 \text{ ec.}$$

$$\left(\frac{d x''}{d s}\right)\left(\frac{d y'}{d s}\right) = \left(\frac{d y}{d s}\right)\left(\frac{d x}{d s}\right) + \omega\left\{\left(\frac{d^2 y}{d s^2}\right)\left(\frac{d x}{d s}\right) + 2\left(\frac{d y}{d s}\right)\left(\frac{d^2 x}{d s^2}\right)\right\}$$

$$+ \omega^2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{d x}{d s}\right)\left(\frac{d^3 y}{d s^3}\right) + 2\left(\frac{d^2 x}{d s^2}\right)\left(\frac{d^2 y}{d s^2}\right) + 2\left(\frac{d y}{d s}\right)\left(\frac{d^3 x}{d s^3}\right)\right\}$$

$$+ \omega^3 \text{ ec.}$$

$$\left(\frac{d\,y''}{d\,s}\right)\left(\frac{d\,x'}{d\,s}\right)-\left(\frac{d\,x''}{d\,s}\right)\left(\frac{d\,y'}{d\,s}\right)=\omega\left\{\left(\frac{d\,x}{d\,s}\right)\left(\frac{d^2\,y}{d\,s^2}\right)-\left(\frac{d\,y}{d\,s}\right)\left(\frac{d^2\,x}{d\,s^2}\right)\right\}$$

$$+\,\omega^2\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{d\,x}{d\,s}\right)\left(\frac{d^3\,y}{d\,s^3}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{d\,y}{d\,s}\right)\left(\frac{d^3\,x}{d\,s^3}\right)\right\}$$

$$+\,\omega^3\text{ ec.}=A\,\omega+B\,\omega^2+\omega^3\text{ ec.}$$

$$\left(\frac{d\,y''}{d\,s}\right)\cos u_{s+\omega}=\left\{\left(\frac{d\,y}{d\,s}\right)+2\,\omega\left(\frac{d^2 y}{d\,s^2}\right)+2\,\omega^2\left(\frac{d^3\,y}{d\,s^3}\right)+\omega^3\text{ ec.}\right\}\left\{\cos u\right.$$

$$\left.+\,\omega\left(\frac{d\cos u}{d\,s}\right)+\frac{\omega^2}{2}\left(\frac{d^2\cos u}{d\,s^2}\right)+\omega^3\text{ec.}\right\}=\left(\frac{dy}{d\,s}\right)\cos u$$

$$+\,\omega\left\{\left(\frac{dy}{d\,s}\right)\left(\frac{d\cos u}{d\,s}\right)+2\left(\frac{d^2\,y}{d\,s^2}\right)\cos u\right\}$$

$$+\,\omega^2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{d\,s}\right)\left(\frac{d^2\cos u}{d\,s^2}\right)+2\left(\frac{d^2\,y}{d\,s^2}\right)\left(\frac{d\cos u}{d\,s}\right)\right.$$

$$\left.+\,2\left(\frac{d^3\,y}{d\,s^3}\right)\cos u\right\}+\omega^3\text{ ec.}$$

$$\left(\frac{d\,x''}{d\,s}\right)\operatorname{sen} u_{x+\omega}=\left(\frac{dx}{d\,s}\right)\operatorname{sen} u+\omega\left\{\left(\frac{dx}{d\,s}\right)\left(\frac{d\operatorname{sen} u}{d\,s}\right)+2\left(\frac{d^2x}{d\,s^2}\right)\operatorname{sen} u\right\}$$

$$+\,\omega^2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{d\,s}\right)\left(\frac{d^2\operatorname{sen} u}{d\,s^2}\right)+2\left(\frac{d^2x}{d\,s^2}\right)\left(\frac{d\operatorname{sen} u}{d\,s}\right)\right.$$

$$\left.+\,2\left(\frac{d^3\,x}{d\,s^3}\right)\operatorname{sen} u\right\}+\omega^3\text{ ec.}$$

$$\left(\frac{dy''}{d\,s}\right)\cos u_{s+\omega}+\left(\frac{dx''}{d\,s}\right)\operatorname{sen} u_{s+\omega}=\left(\frac{dy}{d\,s}\right)\cos u+\left(\frac{dx}{d\,s}\right)\operatorname{sen} u$$

$$+\,\omega\left\{\left(\frac{dy}{d\,s}\right)\left(\frac{d\cos u}{d\,s}\right)+\left(\frac{dx}{d\,s}\right)\left(\frac{d\operatorname{sen} u}{d\,s}\right)+2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\operatorname{sen} u\right\}+$$

$$+\omega^2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^2\cos u}{ds^2}\right)+2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)\left(\frac{d\cos u}{ds}\right)\right.$$

$$+2\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)\cos u+\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^2\operatorname{sen}u}{ds^2}\right)+2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\left(\frac{d\operatorname{sen}u}{ds}\right)$$

$$\left.+2\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)\operatorname{sen}u\right\}+\omega^3\text{ec.}=H+C\omega+D\omega^2+\omega^3\text{ec.}$$

$$\left(\frac{dy'}{ds}\right)\left(\frac{dx}{ds}\right)-\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{dx'}{ds}\right)=\omega\left\{\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)-\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\right\}$$

$$+\omega^2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)\right\}$$

$$+\omega^3\text{ ec.}=A\omega+F.\omega^2+\omega^3\text{ ec.}$$

Effettuiamo le sostituzioni nell' equazione, ed avremo (ϕ tien luogo di $\phi\ (s)$ e t di t_s)

$$H.\phi.(A\omega+B\omega^2+\omega^3\text{ ec.})+t\,(A\omega^2+B\omega^3+\omega^4\text{ ec.})\,H=$$

$$\phi.(H+C\omega+D\omega^2+\omega^3\text{ ec.})\,(A\omega+F\omega^2+\omega^3\text{ ec.})$$

$$+\left(\frac{d\phi}{ds}\right)(H+C\omega+D\omega^2+\omega^3\text{ ec.})\,(A\omega^2+F\omega^3+\omega^4\text{ ec.})$$

$$+t\,(H+C\omega+D\omega^2+\omega^3\text{ ec.})\,(A\omega^2+F\omega^3+\omega^4\text{ ec.})$$

$$+\left\{\left(\frac{dt}{ds}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\phi}{ds^2}\right)\right\}\left\{H+C\omega+D\omega^2+\omega^3\text{ ec.}\right\}$$

$$\left\{A\omega^3+F\omega^4+\omega^5\text{ ec.}\right\}+\text{ ec.}$$

Si eseguiscano ora le moltiplicazioni, e troveremo

$$\phi.H.A.\omega+\phi.H.B.\omega^2+t.H.A.\omega^2+\omega^3\text{ ec.}=\phi.H.A\omega+\phi.H.F\omega^2$$

$$+\phi.C.A.\omega^2+\left(\frac{d\phi}{ds}\right).H.A.\omega^2+t.H.A.\omega^2+\omega^3\text{ec.}$$

la quale si riduce a

$$\left\{\phi . HB - \phi . HF - \phi . AC - \left(\frac{d\phi}{ds}\right) . HA\right\}\omega^2 + \omega^3 \text{ ec.} = 0$$

Avremo dunque (Principio II)

$$\phi(HB - HF - CA) - \left(\frac{d\phi}{ds}\right)HA = 0, \text{ ovvero}$$

$$\phi . C + \left(\frac{d\phi}{ds}\right)H + \phi . H\frac{F-B}{A} = 0$$

Sostituiamo per C, H, F, B, A i respettivi valori, ed otterremo $\phi . \left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d\cos u}{ds}\right) + \left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d\,\mathrm{sen}\,u}{ds}\right)\right.$

$$\left. + 2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)\cos u + 2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\mathrm{sen}\,u\right\} + \left(\frac{d\phi}{ds}\right)\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\cos u + \left(\frac{dx}{ds}\right)\mathrm{sen}\,u\right\}$$

$$+ \phi\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\cos u + \left(\frac{dx}{ds}\right)\mathrm{sen}\,u\right\}\frac{\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right) - \left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)}{\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) - \left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)}$$

Ora quando le coordinate si considerano funzioni dell' arco, l' espressione del raggio osculatore è

$$R = \frac{1}{\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right) - \left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)}$$

Dunque potremo dare alla nostra equazione finale questa forma

$$R\,.\,\phi\,.\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\left(\frac{d\cos u}{ds}\right)+\left(\frac{dx}{ds}\right)\left(\frac{d\,\mathrm{sen}\,u}{ds}\right)+2\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)\cos u\right.$$

$$\left.+\,2\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)\mathrm{sen}\,u\right\}+R\left(\frac{d\phi}{ds}\right)\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\cos u+\left(\frac{dx}{ds}\right)\mathrm{sen}\,u\right\}$$

$$+\,\phi.\left\{\left(\frac{dy}{ds}\right)\cos u+\left(\frac{dx}{ds}\right)\mathrm{sen}\,u\right\}\left(\frac{dR}{ds}\right)=0$$

Quest' equazione contiene la soluzione del problema che ci siamo proposto „ Conoscendo la legge del„ le forze che agiscono sopra tutti i punti della vol„ ta cilindrica, essa ci dà la curva della volta; e co„ noscendo questa curva, essa ci dà la legge delle „ forze „

Osservazione

Nello stabilire le forme delle quantità che entrano in questo problema, abbiam posto ang. $CZF = u_s$ funzione di s. Ora quest' angolo è una funzione di s e di ω; così, facendolo tale, potrebbe venire qualche diversità nell' equazioni ottenute in quella supposizione. Per togliere questa difficoltà, chiamisi v l'angolo, che la direzione della forza agente nel punto M, fa con l' asse; e per la stessa ragione per cui si è supposto $F_s = \phi\,(s) + \omega\,t_s$, si ponga $u_s = v + \omega\,T$. Introdotta nel calcolo la quantità $v + \omega\,T$ invece della u_s, nell'equazione che risulterebbe corrispondente a quella, la quale contiene le diverse potenze della ω, non tenendosi conto se non di quella parte dell' equazione medesima la quale conterrebbe la potenza minima di questa ω, è facile vedere che giugneremo in fine alla stessa equazione $\phi C + \frac{d\phi}{ds} H + \phi H \frac{F-B}{A} = 0$,

cangiata in essa semplicemente u_s in v

PROBLEMA D' IDRODINAMICA

Fig. 5. Sconvolto l' equilibrio dell' aria in un tubo cilindrico, orizzontale, e rettilineo AB; e conosciute le circostanze del moto che indi ne segue in una sezione verticale RS dopo un tempo determinato, si dimanda un' equazione la quale esprima in generale il movimento dell' aria in un' altra sezione qualunque alla fine di un certo tempo, relativamente al movimento conosciuto in RS (12)

Sia A un punto fisso: SR la sezione nella quale l' aria è stata agitata nel primo istante: supponiamo che alla fine del tempo t, la porzione o strato d' aria indeterminato $SR\ R'S'$ sia stato trasportato in $s\,r\,r'\,s'$, di modo che il punto S sia giunto in s, ed il punto S' in s': paragoniamo lo stato dell' aria in $srr's'$ con quello iniziale, che essa aveva in $SRR'S'$: Supponiamo $AS = S$; $As = s = \phi(S, t) = \phi$; la densità dell' aria in $SR = F(S) = F$; la densità dell' aria in $sr = \psi(S, t) = \psi$: per ϕ, F, ψ, ec. noi vogliamo significare delle funzioni delle variabili poste tra le parentesi

Sia a^2 la superficie della sezione SR del tubo, o la base dello strato indeterminato $SRR'S'$: sia l' altezza di questo strato $= S\,S' = \omega$, ed avremo

$$A\,s' = \phi\,(S + \omega\,,\,t) = \phi + \omega\,\left(\frac{d\,\phi}{d\,s}\right) + \omega^2 \text{ ec., ovvero}$$

$$A\,s' = s + \omega\,\left(\frac{d\,s}{d\,S}\right) + \omega^2 \text{ ec.}$$

$$s\,s' = \omega\,\left(\frac{d\,s}{d\,S}\right) + \omega^2 \text{ ec.}$$

la densità in $R'S' = F\,(S + \omega)$; quella in

$$r'\,s' = \psi\,(S + \omega\,, t) = \psi + \omega\,\left(\frac{d\,\psi}{d\,S}\right) + \omega^2 \text{ ec.}$$

Rappresentiamo per δ la densità media dello strato indeterminato $S\,R\,R'\,S'$, ed essa sarà espressa da $F\,(S) + \omega\,N$, poichè δ debbe divenire $F\,(S)$ quando $\omega = 0$: egualmente indicando per δ' la densità media dello strato $s\,r\,r'\,s'$, avremo $\delta' = \psi\,(S, t) + \omega\,N'$ per la simil ragione. La massa dunque $S\,R\,R'\,S'$ sarà espressa da $a^2\,(F\,(S) + \omega\,N)\,\omega$, e la massa $s\,r\,r'\,s'$ da

$$a^2 \left\{ \psi\,(S\,, t) + \omega\,N' \right\} \left\{ \omega\,\left(\frac{d\,s}{d\,S}\right) + \omega^2 \text{ ec.} \right\}$$

Ora queste due masse debbono essere eguali; dunque

$$(1) \ldots \omega \left\{ F(S) + \omega\,N \right\} = \left\{ \psi\,(S, t) + \omega\,N' \right\} \left\{ \omega\left(\frac{d\,s}{d\,S}\right) + \omega^2 \text{ec.} \right\}$$

equazione che debbe esser vera per tutti i valori possibili di ω

La forza acceleratrice dell' aria nella sezione $r\,s$ è, come abbiam dimostrato, $\left(\frac{d^2\,s}{d\,t^2}\right)$. Sia rappresentata da

$f(S+\omega,t)$ per esprimere la forza acceleratrice in $r's'$. Sia $\theta\,(S,t)$ la forza acceleratrice media, o la risultante di tutte le forze acceleratrici che agiscono sopra lo strato $srr's'$; ed avremo $\theta\,(S,t)=f(S,t)+\omega L$, poichè essa debbe divenire $f\,(S,t)$ quando $\omega=0$; dunque

$$a^2\left\{\psi(S,t)+\omega N'\right\}\left\{\omega\left(\frac{ds}{dS}\right)+\omega^2 \text{ ec.}\right\}\left\{f(S,t)+\omega L\right\}$$

ovvero [scrivo ψ per $\psi\,(S,t)$]

$$a^2\left\{\psi+\omega N'\right\}\left\{\omega\left(\frac{ds}{dS}\right)+\omega^2 \text{ ec.}\right\}\left\{\left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)+\omega L\right\}$$

sarà la forza acceleratrice totale della massa d'aria $srr's'$

Questa forza è l'eccesso della pressione, che l'aria fa in sr per ispingere avanti lo strato indeterminato d'aria $srr's'$ sopra la pressione, che l'aria al di là di $r's'$ esercita sopra $r's'$ per spingerlo indietro; se dunque supponiamo che la pressione, o l'elasticità dell'aria sia in ragion diretta della densità, e che K esprima il rapporto della densità dell'aria naturale alla sua elasticità, la forza elastica dell'aria, o la forza di pressione in qualunque punto, sarà allora espressa per il prodotto della respettiva densità in K; la pressione adunque sopra rs sarà $a^2 K\,.\,\psi$; e quella sopra

$r's'$ sarà $a^2 K\left(\psi+\omega\left(\frac{d\psi}{dS}\right)+\omega^2 \text{ ec.}\right.$ dunque

$-a^2 K\left\{\omega\left(\frac{d\psi}{dS}\right)+\omega^2 \text{ ec.}\right\}$ sarà la differenza di queste due pressioni; ed avremo in conseguenza

$$(2) \ldots - a^2 K \left\{ \omega \left(\frac{d\psi}{dS}\right) + \omega^2 \text{ec.} \right\} =$$

$$a^2 \left\{ \psi + \omega N' \right\} \left\{ \omega \left(\frac{ds}{dS}\right) + \omega^2 \text{ec.} \right\} \left\{ \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right) + \omega L \right\}$$

Anche quest' equazione debbe essere vera per qualunque valore di ω. Ora se l'equazioni (1) e (2) si sviluppano ordinandole secondo le potenze dell' indeterminata ω, ed eguagliamo a zero i coefficienti delle respettive potenze, avremo tante equazioni che apparterranno tutte al nostro problema (Prin. II); ma senza che facciam questo sviluppo, prendendo nella prima equazione i coefficienti dei termini, ove ω si trova elevato alla potenza zero, che è la più bassa cui sia innalzato ω, abbiamo

$(a) \ldots\ldots F = \psi \cdot \left(\frac{ds}{dS}\right)$; e prendendo nella seconda

i coefficienti della prima potenza di ω, che è la più bassa, abbiamo $-K . \left(\frac{d\psi}{dS}\right) = \psi \cdot \left(\frac{ds}{dS}\right) \cdot \left(\frac{d^2 s}{dt^2}\right)$, ovvero

$$(b) \ldots\ldots\ldots K . \left(\frac{d\psi}{dS}\right) + F . \left(\frac{d^2 s}{dS^2}\right) = 0$$

Ora per mezzo di queste due equazioni (a), (b) e per mezzo del differenziale della prima, preso rapporto ad S, potremo eliminare ψ e $\left(\frac{d\psi}{dS}\right)$, ed otterremo in fine l' equazione

$$K . \left(\frac{dF}{dS}\right)\left(\frac{ds}{dS}\right) - FK\left(\frac{d^2 s}{dS^2}\right) + F\left(\frac{ds}{dS}\right)^2 \left(\frac{d^2 s}{dS^2}\right) = 0$$

a differenze parziali del secondo ordine, che bisognerebbe integrare per trovare il moto dell' aria nel tubo

PROBLEMA

Sia $AMPC$ la sezione orizzontale di un canale curvilineo di uniforme larghezza $AM = \frac{b}{2}$: supponendo che il fluido si muova in questa sezione con una velocità dovuta ad una altezza a, si dimanda la pressione da esso generata sopra qualunque punto g, per causa della sua forza centrifuga dovuta a quella velocità

Sia v la ricercata pressione del punto g, e sia $gi = \omega$ quantità indeterminata. Le pressioni variando da g in i, se P rappresenta una pressione media tale, che se essa si esercitasse sopra ciascun punto di gi, questo pezzo di canale sarebbe premuto nella stessa guisa che lo è con quelle pressioni variate, avremo $P = v + \omega z$, essendo ωz una funzione incognita, che si annulla quando $\omega = 0$; sarà dunque la pressione totale sopra gi, o la somma di tutte quelle pressioni $= \omega(v + \omega z)$

Sia M la massa fluida $fghi$; ed avremo $M = \omega\left(\frac{b}{2} + \omega y\right)$, essendo ωy una funzione che si annulla quando $\omega = 0$. Ora ciascuna particella di questa massa scorrendo in un canale curvilineo, avrà una forza centrifuga. La particella che è in g, ha una forza centrifuga eguale alla sua massa m moltiplicata per $\frac{2a}{r}$, chiamando r il raggio osculatore della curva in g. Sia $(\frac{2a}{r} + \omega u)\, m$ una forza centrifuga media, della quale se dotata fosse ogni particella della massa M, questa farebbe sopra il pezzo di canale gi la stessa pressione, che vi fa per le vere pressioni variate, di cui è animata ciascuna delle sue particelle, e s' avrà

$M(\frac{2a}{r} + \omega u)$, ovvero $\omega(\frac{b}{2} + \omega y)(\frac{2a}{r} + \omega u)$ per esprimere la somma di tutte le forze centrifughe, o della pressione totale, che queste fanno sopra gi;

dunque $\omega\,(\frac{b}{2} + \omega y)(\frac{2a}{r} + \omega u) = \omega(v + \omega z)$

e perciò $v = \frac{ab}{r}$; e questa è l' espressione della pressione in qualunque punto del canale

Abbiamo sciolto questo problema per liberare dagl'infinitesimi la bella teoria sulla percussione dei fluidi, data dal sig. Lagrange negli atti di Turino del 1784

NOTE

(1) Lo stesso Leibnizio parlando dell' infinito, così si esprime „ Siamo sempre imbarazzati nelle serie dei numeri che vanno all' infinito. „ E si concepisce per un ultimo termine o un numero infinito, o infinitamente piccolo; ma tutto questo è una finzione: ogni numero è finito ed assegnabile; ogni linea lo è egualmente „ (Essai de Théodicée Disc. prelim. § 70)

Maclaurin nella sua introduzione al trattato delle Flussioni di Newton, osserva che gli autori, i quali hanno meglio trattato la scienza dell' infinito, riconoscono che vi è „ qualche cosa d' inconcepibile nella supposizione d' un numero infinitamente grande o infinitamente piccolo „ e che „ il passaggio dal finito all' infinito è oscuro ed incomprensibile „ Ed in una nota soggiunge „ Le nostre idee degl' infiniti ed infinitesimi sono oscure „ ed imperfette per giungere alla cognizione di quel che vi è di più „ profondo nella geometria sublime; e quei che le hanno applicate con „ una gran libertà a questa scienza, hanno avanzato molte cose le quali violano ogni verisimiglianza

„ Alcuni hanno supposto non solamente degl' infiniti ed infinitesimi „ di una infinità di generi, ma ancora hanno distinti i nulla in differenti „ specie, e se quest' abuso continua, è facile prevedere quali assurdità „ saranno spacciate come scoperte di geometria sublime

Il Sig. Bernulli parlando dei fondamenti del calcolo differenziale [Atti di Turino del 1784. Tom. I. part. II.] dice „ De quelque manière cependant qu' on envisage ces infiniment petits, qu' on leur donne une valeur réelle avec la plupart des auteurs, ou qu' on les fasse avec Euler „ égaux au zero absolu, on rencontre des écueils, dont la rigueur mathématique ne sauroit se sauver. Le zero n' étant qu' une négation de quantité ne peut jouir d' aucune qualité telle que celle de former des rapports. D' un autre côté on trouve de la difficulté à négliger des quantités réelles, sans porter atteinte à l' exactitude du calcul, et on a „ encore plus de peine à concevoir les infiniments des différents ordres. „ C' est ainsi qu' avec quelque facilité qu' on ait d' abord cru saisir les „ principes de Leibnitz, ils nous échappent bientôt, et nous tombons dans „ l' incertitude „

Bernulli volendo evitare questi inconvenienti, e nel tempo stesso non volendo far uso del metodo delle flussioni, perchè complicatissimo nelle dimostrazioni dei suoi principj, considera sotto un diverso punto di vista le quantità variabili, ed indica per dx e per dy non gli aumenti che ricevono le variabili x ed y, ma le *disposizioni* che queste hanno ad aumentare. Si vedano gli atti citati

(2) Di quest' operetta di Carnot si è fatta una seconda edizione a Pavía, con annotazioni ed aggiunte del sig. Magistrini pubblico professore di matematica sublime nell' università di Bologna

(3) L' esame delle diverse soluzioni dei problemi meccanici fondate sopra gl' infinitesimi, convince della verità, che noi avanziamo. Per esempio nel problema delle corde vibranti, le vibrazioni sono riguardate come piccolissime, o infinitesime, ed in questo caso il calcolo differenziale è un vero metodo d' approssimazione: ma l' idea che in questa guisa si unisce alla parola infinitamente piccoli, è ben diversa da quella, per la quale sono considerati come quantità minori di ogni assegnabile, o come assolutamente nulli. Se le vibrazioni si considerassero infinitesime in questo secondo senso, allora la corda sarebbe assolutamente in quiete: non ostante però la diversa idea che è data a quelle quantità piccolissime, le quali si considerano nelle vibrazioni delle corde sonore, sono esse trattate come gl' infinitesimi ordinarj, dal che nasce un errore di ragionamento e di calcolo

(4) „ La semplicità, precisione, ed esattezza nei simboli e nei no-„ mi che usar debbonsi in un ramo di analisi, sono più importanti di quel „ che communemente si crede. Leibnizio inventore dell' algoritmo differen-„ ziale, parlando di quello delle flussioni di Neuton, così si esprime „ Il „ faut rendre cette justice à monsieur Neuton, qu' encore en ceci il a „ eu quelque chose de semblable de son chef, suivant ce qu' on a su „ depuis. Il est vrai qu' il se sert d' autres caractères, mais comme *la* „ *caractéristique même est, pour ainsi dire, une grande part de l' art d' in-* „ *venter,* je crois que les nôtres donnent plus d' ouverture „ [Leibnitz. Op. Tom. III. pag. 301]

(5) L' analisi derivata pubblicata a Pavía nel 1802, presenta i fondamenti di un calcolo generale, il quale comprende tutti quei rami d' analisi, per i quali fu stabilito un simbolo d' operazione, e fissato un algoritmo per calcolargli

Il fondamento di una tale analisi, che chiamasi *principio di derivazione*, considera una quantità qualunque in diversi stati dipendenti uno dall' altro per una stessa legge; ed il suo oggetto è di rintracciare le proprietà di questa medesima quantità relativamente ai suoi stati, per quindi far uso delle proprietà stesse nella soluzione dei problemi

Rappresentiamo per y una quantità qualunque, e facendo sopra di essa un' operazione, supponiamo d' ottenerne per risultato un' altra quantità Y. E' manifesto che Y dipende da y, e che ogni rapporto tra y ed

Y consiste nell' operazione per la quale abbiam derivata una di quelle quantità dall'altra. La y chiamasi *quantità* o *funzione derivatrice*. Dicesi *derivare* il far la descritta operazione: e con la lettera d messa avanti alla derivatrice s' indica il risultato Y di questa operazione medesima: questo risultato adunque è simbolicamente rappresentato da dy, e dicesi *quantità*, o *funzione derivata*

Se ora trattando dy come la quantità y, si deriva da dy con la stessa operazione un'altra quantità $d\,(d\,y)$, che possiamo indicare per $d^2 y$, avremo una seconda quantità derivata da dy, come lo era questa da y, e così ne avremo una terza, una quarta ec; di modo che secondo questo principio, la seguente serie $y, dy, d^2 y, d^3 y, \ldots\ldots d^m y$ ci rappresenta col suo primo termine la quantità, dalla quale si deducono tutte le altre, e che abbiam detta funzione derivatrice: Col suo secondo termine la *derivata prima*, o *di primo ordine*, col suo terzo la *derivata seconda*, o *di secondo ordine*, e col suo $(m+1)^{esimo}$ *la derivata* m^{esima} *di* y, o *dell' ordine* m^{esimo}

La legge di derivazione, la quale prescrive l' operazione che far si dee per dedurre o derivare una quantità da un'altra, può esser qualunque: avremo però tanti rami di calcolo, quante sono le operazioni che possono immaginarsi indicate da d, le quali dipendendo dall' arbitrio del geometra, sono infinite di numero

L' analisi derivata adunque abbraccia in generale qualunque ramo di calcolo, che si raggiri sopra la maniera di dedurre una quantità da un' altra, e sul determinarne le proprietà; così tutte quelle branche di calcolo per le quali si stabilì un algoritmo, cioè la *teorìa degli esponenti*, il *calcolo delle differenze finite*, quello *delle funzioni analitiche*; il *calcolo differenziale*; la *teorìa delle facoltà numeriche*, ec. formano tante parti di analisi derivata

L' analisi derivata ha due parti. Il finquì detto appartiene alla prima parte che chiamasi *analisi derivata diretta*, perchè ci insegna a passare dalla derivatrice alle sue derivate. L' altra parte chiamasi *analisi derivata inversa*; ed a questa appartiene tutto quel che ha rapporto al ritrovamento di una derivatrice, allorchè è data la sua derivata di un certo ordine

(6) Se per invenzione del calcolo differenziale e' s' intende l' averno immaginato l' algoritmo analitico, certo che Leibnizio è l' inventore dei differenziali, come Neutono lo è del calcolo delle flussioni. Ma se [qualunque pregio d' altronde s' attribuisca alle caratteristiche ed ai simboli] vogliamo dar la palma dell' invenzione a chi ha il primo considerate le quantità sotto quel punto di vista, che permetteva d' assoggettarle ad una nuova analisi, il trionfo è del nostro italiano. Ecco come si esprime questo geometra nella prefazione alla sua geometrìa degl' indivisibili. „ Verùm

„ paulo profundius rem contemplatus, in hanc tandem devèni sententiam,
„ nempe etc. Cylindrum igitur et conum jam dictos, non amplius per
„ axem, sed æquidistanter basi cen sectos contemplatus, eandem sane
„ rationem habere illa comperii, quae voco omnia plana cylindri ad om-
„ nia plana coni, nempe circulorum congeriem [quæ intrà cylindrum et
„ conum *veluti vestigia plani a basi ad oppositam basim continuò illi*
„ *æquidistanter fluentis* quodammodo relinqui intelliguntur] ei quam
„ habet cylindrus ad conum. Optimam ergo methodum figurarum scrutan-
„ dæ mensuræ judicavi, prius linearum pro planis et planorum pro solidis
„ rationes indagare, ut illico ipsarum figurarum mensuram mihi compa-
„ rarem; res, puto, juxta vota successit, ut perlegenti patebit. Artificio
„ autem tali usus sum, quale ad propositas quæstiones absolvendas Al-
„ gebratici adhibere solent, qui quidem numerorum radices, quamvis inef-
„ fabiles, surdas ac ignotas, nihilominus simul aggregantes, subtrahentes,
„ multiplicantes ac dividentes, dummodo propositæ rei exoptatam sibi
„ notitiam enucleare valeant, sua satis obijsse munera sibi persuadent.
„ Non aliter ipse ego indivisibilium sive linearum, sive planorum conge-
„ rie, *licet, quoad eorumdem numerum, innominabili*, surdâ ac ignotâ,
„ quoad magnitudinem tamen, conspicuis limitibus clausâ, ad continuorum
„ investigandam mensuram usus sum, ut legenti apparebit. „

Ora parmi fuori d'ogni dubbio che in questo passo del Cavalieri siano contenuti tanto il principio tradotto in calcolo da Neuton, che quello tradotto in calcolo dal Leibnizio, e che ancora siano ben chiaramente espressi. Di più in tutte le definizioni per l' intelligenza della teorìa degl'indivisibili, Cavalieri fa sempre uso della parola *plano fluente* per esprimére quel piano dal cui movimento si generano le superficie ed i solidi; e stabilisce che „ qualunque continuo è composto di un numero infinito „ d' indivisibili „

Aveva anche il Cavalieri considerate le diverse grandezze negl' infiniti, e senza riportare tutto ciò che può servirne di prova, basterà ripetere cosa scrive il Torricelli nelle sue lezioni accademiche, parlando degl' infiniti di diversa grandezza „ Qui bisogna che io rimetta questa causa al
„ fòro del maraviglioso fra Bonaventura Cavàlieri, appresso al quale *non*
„ *solo non è assurdo che un infinito sia maggiore d' un altro, ma è neces-*
„ *sario:* la nuova geometrìa degl' indivisibili va per le mani dei dotti,
„ come miracolo di scienza; e per essa ha imparato il mondo, che i se-
„ coli d' Archimede e d' Euclide furono gli anni dell' infanzia per la scien-
„ za della nostra adulta geometrìa „

Che il calcolo delle flussioni di Neuton sia la traduzione del metodo del Cavalieri in un nuovo linguaggio analitico, si ricava ancora dal riflettere, che nelle lettere del *commercio epistolare* e nell' opera dei principj matematici [dalle quali tutti i geometri hanno dedotto che egli era in possesso del calcolo flussionale] non si fa alcun uso delle lettere puntate con uno due ec. punti messi al di sopra, e tutto è trattato per mezzo di linee e figure, metodo usato prima di esso da Cavalieri, Torricelli, ec.

Ma sentiamo lo stesso Maclaurin. Questi nell'introduzione al trattato delle flussioni di Neuton, parlando della lunghezza che avrebbero le dimostrazioni, se volesse sempre seguirsi il rigoroso metodo degli antichi [che era la sintesi] soggiunge ,, In generale dobbiamo confessare, che se le ultime scoperte fossero trattate a lungo nella stessa guisa che gli antichi ,, han dimostrati i lor teoremi, la vita di un uomo basterebbe appena per ,, esaminarle tutte; in modo che un metodo generale corto, e che equivalendo per il rigore a quello degli antichi, comprenda in poche parole un'infinità di teoremi, debbe riguardarsi come una invenzione eccellente. Cavalieri sentì e le difficoltà ed i vantaggj che risultavano dal ,, suo metodo. Ei ne parlò come se egli avesse preveduto che *dovea ridursi in una forma incontrastabile* per contentare i geometri più scrupolosi, e lascia *questo nodo gordiano*, come dice egli stesso, *a qualche* ,, *Alessandro. Isacco Neuton compì ciò che Cavalieri avea augurato* inventando il suo metodo delle flussioni, e proponendolo in maniera da ,, potersi dimostrare rigorosamente ,,

(7) Credesi generalmente che Cartesio sia stato il primo, il quale abbia applicato l'algebra alla geometria; ma l'autore di questa importante scoperta è Marino Ghetaldo matematico raguseo [Si veda una prolusione del professor Monti ,, *dell' obbligo d'onorare i primi scopritori del vero in fatto di scienze* ,,

(8) Si veda nella nota *6* la testimonianza di Maclaurin

(9) Il fondamental principio della geometría del Cavalieri è ,, Due ,, figure piane hanno tra di loro la medesima ragione che tutte le di loro ,, linee condotte parallelamente a qualunque retta. Parimente due solidi ,, hanno tra loro la stessa ragione che tutti i piani di uno a tutti i piani ,, dell' altro. Così per trovare la ragione di due figure o di due solidi, ,, basta trovare la ragione di tutte le linee di una figura a quelle di un' ,, altra, o di tutti i piani di un solido a quei di un altro ,,

Cavalieri ricerca queste ragioni per mezzo della geometría, e Vallis vi applica l'aritmetica. L'uno e l'altro però limitano le loro ricerche alle cose geometriche. L'analisi di Leibnitz non ha riguardo nè a figure nè a numeri, e considerando le grandezze in generale, dà il mezzo di avere la ragione tra tutti gl'indivisibili che ne compongono una, a quei che compongono l'altra

Ma per vedere come i metodi del Cavalieri, Vallis, e Leibnitz, non siano che quello del Cavalieri in quanto alla sostanza, prendiamo a risolvere un problema di quadratura, secondo i metodi di ciascuno. Le quadrature, le rettificazioni, le solidità, sono l' oggetto principale per il quale hanno inventati i lor calcoli quei geometri; e le osservazioni che potran farsi sopra quel problema, hanno luogo per tutti gli altri di simili generi

Fig. 6. Sia AEB una parabola apolloniana, di cui AC, CB siano le coordinate ortogonali. Si dimanda la quadratura dello spazio parabolico $AEBC$. Compiamo il rettangolo circoscritto $ADBC$, che per maggior semplicità supporremo esser quadrato; e sarà risoluto il problema, quando sapremo il rapporto dello spazio $AEBC$ ovvero $AEBD$ allo stesso quadrato

Metodo del Cavalieri

La linea AC fluendo parallelamente a se stessa ad angolo retto, venuta in DB, ha generato il quadrato circoscritto. La stessa linea AC fluendo nella medesima maniera, e nel tempo stesso il punto A fluendo da A verso C in modo che quando la linea AC è per esempio in PQ, il punto A sia in E, essendo AP e PE in quella proporzione che richiede la proprietà della parabola, genera lo spazio parabolico $AEBC$, come pure il complemento $AEBD$. Se dunque supponiamo che questa linea lasci in certo modo continue vestigia del suo passaggio, le quali saranno altrettante lineé, la congerie di tutte queste linee, dette dal Cavalieri *indivisibili*, che si trovano nel quadrato $ADBC$, starà alla congerie di tutte quelle componenti lo spazio $AEBD$, come la superficie del quadrato stesso alla superficie di questo spazio. Dunque tutto si riduce a *trovare il rapporto della somma di tutti gl' indivisibili del quadrato alla somma di tutti gl' indivisibili del complemento*. Per ottenere un tal rapporto, Cavalieri stabilisce questo lemma

Fig. 7. In ogni rettangolo $ABCD$ la somma dei quadrati di tutti gl' indivisibili DC, ll, ll, ec. che lo compongono, è tripla della somma dei quadrati di tutti gl'indivisibili i quali compongono il triangolo ABC. Questo lemma è dimostrato sinteticamente dal nostro geometra, ed in un modo che ha tutto il rigore geometrico. Non riporteremo questa dimostrazione per esser lunghissima e complicata, e dedurremo la verità di questo teorema dalla misura dei solidi. E' si sa dagli elementi d' Euclide, che la piramide è la terza parte di un prisma della stessa base e della stessa altezza: se dunque sopra ciascuno degl' indivisibili che compongono il rettangolo, si fa un quadrato il cui piano sia perpendicolare al piano della figura, e lo stesso facciasi sopra ciascun indivisibile del triangolo, è facile vedere, che la congerie dei quadrati degl' indivisibili del triangolo formerà una piramide, e che la congerie dei quadrati degl' indivisibili del rettangolo formerà un prisma della medesima base e della medesima altezza della piramide: dunque la somma dei quadrati degl' indivisibili del

rettangolo starà alla somma dei quadrati degl'indivisibili del triangolo, come 3 : 1

Fig. 6. Questo premesso, conduciamo la diagonale AFB; e siccome per la proprietà della parabola, si ha Quad. AP: Quad. DB :: PE: DB, così sarà Quad. PQ:PF:: PQ : PE, e quindi tutti i Quadrati delle PQ: tutti i Quadrati delle PF:: tutte le linee PQ: tutte le linee PE. Ora il primo rapporto è quello di 3 : 1, ed il secondo è quello di $ADBC$:$AEBD$; dunque sarà il complemento parabolico $AEBD$ eguale ad un terzo del quadrato $ACBD$, e quindi la superficie parabolica ne sarà due terzi

Metodo di Vallis

Per trovare il rapporto della somma di tutti gl' indivisibili del quadrato alla somma di tutti gl' indivisibili del complemento $AEBD$, al qual rapporto anche Vallis riduce le soluzioni dei problemi sopra le quadrature, si può fare uso di un metodo aritmetico

Lemma

Sia proposta una serie di quantità proporzionali in ragione duplicata [o secondo la serie dei numeri quadrati] continuamente crescenti, incominciando dal zero [come per esempio 0, 1, 4, 9, 16, ec.] e si dimandi la ragione, che ha la somma di un numero qualunque di termini di questa serie, alla somma di un egual numero di termini, ciascun dei quali eguaglj l' ultimo e maggior termine di quella serie. Instituiamo la ricerca per via d' induzione, e si avrà

$$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

$$\frac{0+1+4}{4+4+4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{18}$$

$$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16}=\frac{1}{3}+\frac{1}{24}$$

$$\frac{0+1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25+25}=\frac{1}{3}+\frac{1}{30}, \text{ e così di seguito}$$

Quella ragione è sempre maggiore di $\frac{1}{3}$, e l' eccesso sempre scema con l' aumentarsi il numero dei termini, ed eguaglia l' unità divisa per il sestuplo del numero dei termini che si trovano dopo il zero

Se adunque sarà proposta una serie infinita di quantità proporzionali, e continuamente crescenti in ragion dupla [ovvero secondo i quadrati dei numeri naturali] dal primo termine che sia zero, la somma dei di lei termini starà alla somma di altrettanti termini eguali all' ultimo e più gran termine della serie, come 1 : 3, poichè l' eccesso diviene zero, avendo per denominatore l' infinito

Corollario

Fig. 8. Dunque il complemento della semiparabola è al rettangolo circoscritto, come 1 : 3; ed in conseguenza la semiparabola è : : 2 : 3

In fatti sia A il vertice della figura AOT; siano AD, AT gli assi delle coordinate. Dividiamo AT in un numero infinito di parti eguali nei punti T, T, T, ec. e conducendo le ordinate TO, per la proprietà della parabola le rette TO, TO ec. saranno in ragione duplicata delle corrispondenti AT, AT ec. Tutta adunque la figura AOT (*formata da un numero infinito di rette* TO, TO ec. *crescenti in duplicata ragione delle rette* AT, AT ec. *aritmeticamente proporzionali*) sarà al parallelogrammo o rettangolo egualmente alto (*formato* di altrettante rette eguali alla più grande TO) come 1 : 3; e conseguentemente la semiparabola starà allo stesso parallelogrammo : : 2 : 3

Metodo di Leibnizio

Fig. 8. Leibnizio comincia dal riguardare gl' indivisibili TO, TO, ec. non come linee prive di qualunque grossezza, ma come rettangoli di un' altezza infinitamente piccola, o infinitesima. Così per avere il rapporto dello spazio parabolico, o del complemento AOT allo spazio compreso dal rettangolo circonscritto $ADOT$, cerca il rapporto *della somma del numero infinito di rettangoli infinitesimi componenti il complemento, al numero infinito di rettangoli infinitesimi componenti il rettangolo.*

Onde ottenere quella prima somma d' indivisibili, instituisce la seguente analisi

Sia rappresentata da x l' ascissa AT, e sia y l' ordinata TO, la quale sarà, per ciò che ha insegnato Cartesio, una funzione di x. Supponiamo che l' ascissa AT aumenti di una quantità infinitesima $Tt = \omega$: Essendo ω infinitesimo, le potenze superiori di esso si annulleranno in confronto delle inferiori, come un infinitesimo del primo ordine si annulla in confronto di una quantità finita: così ω^2 sarà nullo a riguardo di ω; ω^3 a riguardo di ω^2 ec.

Condotta l' ordinata tn, il trapezio $TOtn$ potrà considerarsi eguale al rettangolo $Ttom$, perchè differiscono tra loro di un triangolo, la cui superficie è un infinitesimo di secondo grado: sarà dunque $Tton = TO \cdot Tt = y\omega$, ed in conseguenza $y\omega$ rappresenterà analiticamente uno di quei rettangoli infinitesimi, ovvero uno degl' indivisibili i quali compongono il complemento ATO

Ora x divenendo $x+\omega$, il complemento ATO diviene Atn; dunque $TtOn$, ovvero $y\omega$ è l' aumento che riceve il complemento, mentre la x riceve l' aumento ω; dunque per aver quel complemento medesimo, o la somma di tutti gl' indivisibili che lo compongono, conviene cercare quella funzione di x tale che quando x cresce di ω, essa cresca di $y\omega$; ed ecco una regola generale che serve per le quadrature di tutte le curve, mercè della quale la ricerca della somma degl' infiniti indivisibili i quali compongono uno spazio qualunque, è ridotta ad una ricerca algebraica: bisogna trovare quella funzione di x tale, che facendo in essa $x+\omega$ invece di x, l' aumento da lei ricevuto (trascurando però le potenze di ω superiori alla prima) sia eguale al prodotto dell' ordinata y moltiplicata per ω, cioè ad $y\omega$, che è l' espressione analitica di uno degl' indivisibili

Essendo adunque $y = \frac{x^2}{a}$ l' equazione della parabola apolloniana AOO, nella quale a è il parametro, avremo $\frac{x^2\omega}{a}$ per esprimere uno degl' indivisibili o dei rettangoli infinitesimi, che la compongono; e la somma di questi indivisibili, o il complemento ATO sarà $= \frac{x^3}{3a}$; dunque

$$ATO = \frac{x^3}{3a} = \frac{x^2}{a} \cdot \frac{x}{3} = y \cdot \frac{x}{3} = \frac{AT \cdot TO}{3}$$; ma $ATOD = AT \cdot TO$; dunque $ATO : ATOD :: 1 : 3$

Leibnizio indica per dx l' aumento ω, di modo che un indivisibile è rappresentato da $y\,dx$; e la somma di tutti quegl' indivisibili, o la funzione, cui quello appartiene, per $\int y\,dx$; così nel caso della parabola è

$$ATO = \int \frac{x^2\,dx}{a} = \frac{x^3}{3a}$$

Questo gran geometra generalizza in seguito la sua analisi, considerando qualunque quantità appartenente alla geometria, alla meccanica, alla fisica ec. come composta d' indivisibili, o infinitesimi, cercando il valore di uno di questi, quando è dato il valore di lei, e trovando il valore di quella, quando è dato il valore di uno di questi

Rappresentando adunque per $\phi(x)$ una qualunque quantità funzione di x, ne cerca uno dei suoi indivisibili (che ei chiama differenziali) ponendo $x + dx$ per x, e trascurando nella differenza $\phi(x + dx) - \phi(x)$ i termini, ove la dx si trova elevata a potenze maggiori della prima: questo indivisibile o differenziale sarà della forma $P\,dx$

Il calcolo per trovare gl' indivisibili è chiamato da Leibnizio calcolo differenziale, e quello per risalire dalla cognizione di quelli alle funzioni cui appartengono, chiamasi integrale. Così il calcolo differenziale altro non è che il metodo di Cavalieri tradotto in analisi. E' però vero che il metodo degl' indivisibili trattato con i simboli del Leibnizio, ha acquistata un' estensione, per dir così, infinita in confronto di quella, che egli avea tra le mani del geometra italiano; come l' acquistò la geometria delle curve d' Apollonio e d' Archimede con l' applicazione dell' algebra, che fece ad essa il Cartesio

(10) „ *Prendano un canocchiale e guardino Venere: se hanno occhj, vedranno Venere falciata* „ diceva il Galileo „. Prendano la teoria delle funzioni e la leggano, dirò io; se hanno intelligenza, si persuaderanno, e cesseranno le objezioni

(11) Questo problema è ricavato dalla meccanica del sig. Bossut: ivi è sciolto per mezzo degl' infinitesimi. Abbiamo scelto questo problema, perchè in esso aveano luogo le considerazioni degl' infinitesimi di primo secondo e terzo ordine, e pareva impossibile a risolversi senza i vantaggj che presenta il metodo degl' infinitesimi a spese del rigore geometrico

(12) Anche questo problema si trova risoluto nell' idrodinamica del sig. Bossut col metodo infinitesimale. Sarà cosa utilissima il confrontare i ragionamenti fatti da quell' illustre autore con i nostri

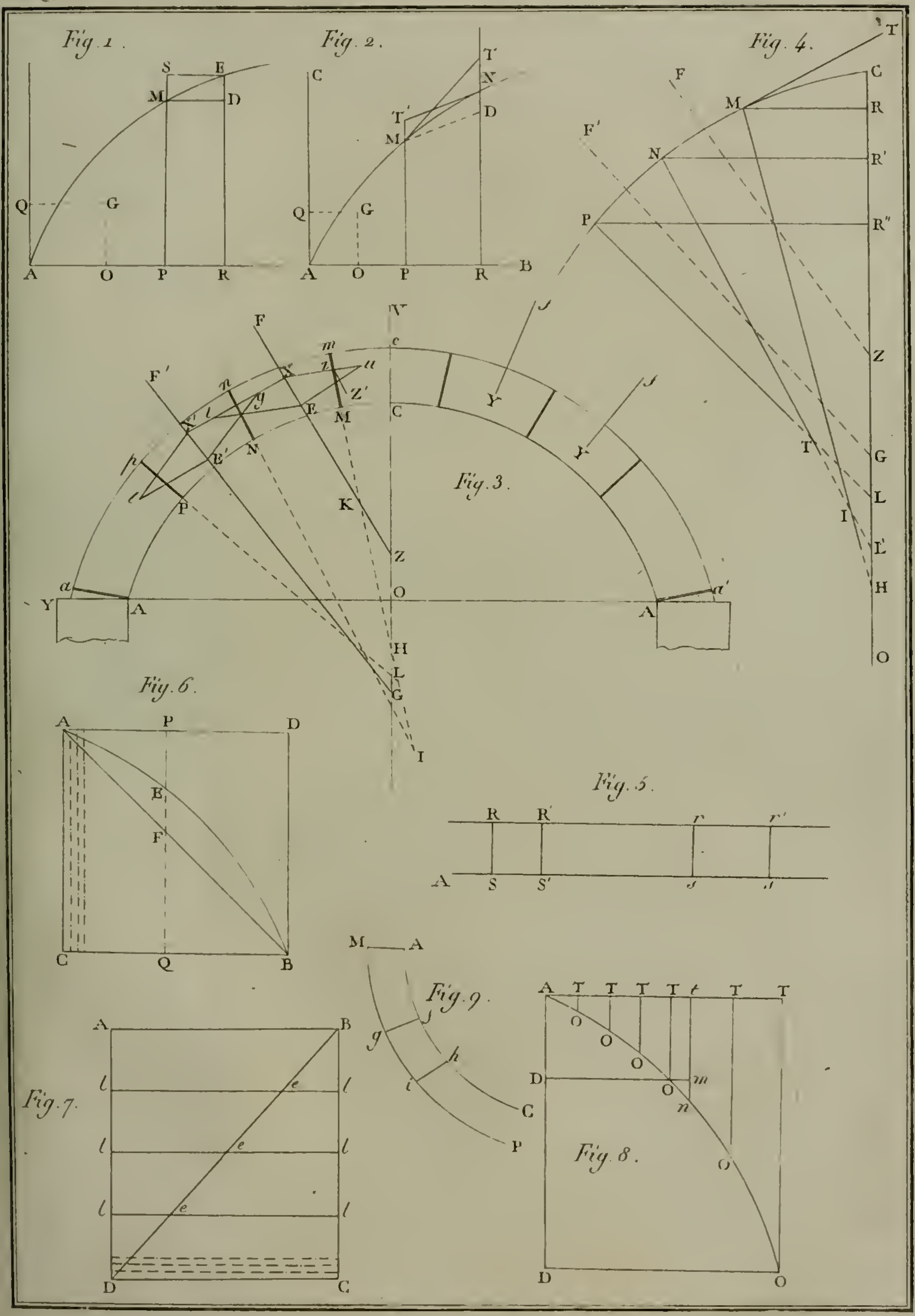


Fig. 1.
S E M D Q G A O P R
Fig. 2.
C T N T' D M Q G A O P R B
Fig. 4.
T C F M R F' N R' P R'' Z G T' L I L' H O
Fig. 3.
V F F' m c u z Z' n y N' l E M C E' N p t P K Z a O Y A A a' H L G I Y Y s s
Fig. 6.
A P D E F C Q B
Fig. 5.
R R' r r' A S S' s s'
M A
Fig. 9.
g s h i C P
Fig. 7.
A B l e l l e l l e l D C
Fig. 8.
A T T T T t T T O O O D O m n O D O

SOPRA LA GRANDINE.

DI ALESSANDRO VOLTA

Ricevuta il dì 1 di Agosto 1804

Nunquid ingressus es thesauros nivis, aut thesauros grandinis aspexisti?
Job. c. 38. v. 22.

MOLTE sono le difficoltà che si presentano al Fisico, il quale si accinga a voler spiegare la formazione arcana della grandine, l' ingrossamento mirabile de' suoi grani, la sospensione de' medesimi in aria fino alla rovinosa lor caduta, ed altri fenomeni che la precedono e l' accompagnano. Non così astrusa è la spiegazione de' temporali non grandinosi; dell' elettricità che ne è in parte l'origine e in più gran parte l'effetto, prodotta cioè dal rapido condensamento di grande copia di vapori in folti ed atri nuvoloni; di quell' elettricità che in un modo o nell' altro vi domina più o meno strepitante, e variabile non solo nell' intensità, ma nella qualità pur anco, passando da positiva o sia per eccesso, in negativa o sia per difetto, e da negativa in positiva a più riprese e vicende; delle scariche di tal elettricità con lampi, tuoni, e fulmini; degli scrosci di pioggia, che sogliono a questi succedere ec: non tanto astrusa, dico, è la spiegazione di tutti questi fenomeni insieme, onde sono stipati tutti, più o meno, i temporali, quanto quella di un altro sintoma più disastroso che ne accompagna alcuni solamente, cioè la grandine. (1)

(1) Nelle mie memorie sulla *meteorologia elettrica*, contenute in una serie di lettere al fu chiarissimo professore di Gottinga Lichtenberg, le quali scritte in un cattivo francese furono tradotte in tedesco, e pubblicate in Germania in un volumetto, poco dopo essere comparse con qualche aggiunta trasportate da me in italiano nell' antico giornale del nostro professore Brugnatelli, intitolato *biblioteca fisica di Europa*, io mi era avanzato già nella lett. 8 fino al punto di descrivere un temporale nascente, e di dar anche un cenno de' suoi progressi; e ciò, dopo avere spiegato, primieramente, l' elettricità *in meno* di quasi tutte le pioggie, malgrado che l' elettricità di ciel sereno, delle rugiade e delle nebbie sia costantemente *in più*, e quella delle nuvole semplici o di prima formazione, quasi sempre *positiva* anch' essa; in secondo luogo il passaggio di alcune di coteste nubi col tempo dallo stato di tal elettricità originaria *in più* a quello di elettricità *in meno;* il quale invertimento di elettricità succede, quando in virtù dell' azione delle *atmosfere elettriche*, o sia di quella che chiamasi *elettricità di semplice pressione*, e quando in forza dell' evaporazione sofferta da una nube primaria, conforme all' antica mia scoperta, cioè che i corpi evaporanti vanno elettrizzandosi *negativamente*; appresso, come per tal evaporazione di essa nube primaria, o sia di un inferiore strato nuvoloso, si dia luogo alla formazione di altre nuvole secondarie, elettriche queste *in più*, negli strati di aria superiori: in ultimo, qual possa essere il giuoco reciproco di codeste nuvole contrariamente elettrizzate (veggasi tal lett. 8 nell' indicato giornale. Tom. XI per l' anno 1789). Nella lettera 9 poi mi era innoltrato, giusta il proposto nell' antecedente, a tentar di risolvere alcuna delle principali difficoltà intorno alla formazione della grandine; segnatamente ad investigare onde mai e da qual causa provenga il freddo oltremodo intenso, che dee sorprendere quelle tra le nubi temporalesche, ch' hanno a divenir gravide di folta e grossa grandine; giacchè non si formano esse di sicuro, nè han-

Si domanda in primo luogo, onde è prodotto il freddo eccessivo che giunge ad agghiacciare le nubi apportatrici di gragnuola, le quali non compajono già molto alte, anzi sembrano essere delle più basse, e che ravvisansi, qualche tempo prima della fatale scarica, di un color cinericcio tirante più o meno al chiaro, andar vagando e come raminghe sotto il telone scuro dell' altre nubi che coprono il cielo. Tali nuvole cinerizie funeste, sa ben distinguerle il contadino attento osservatore de' tempi, e dinotarle per quel che sono, per un ammasso cioè di grandine bella e formata. Ma d' onde viene, ripeto, il freddo inconcepibile che le ha in tal modo agghiacciate? Come ha potuto sorprenderle nel cuor dell' estate, nel bel mezzo

no la loro stanza in regioni così alte, che vi regni naturalmente un tale e tanto freddo, ma sibbene aggiransi nelle mezzane e piuttosto basse regioni, ove la commune temperatura è di alcuni gradi ancora, e spesso di molti, superiore a quella del gelo. Cotesta nona lett. molto lunga si aggira pressochè tutta intorno ad un tal punto, ed a provare quindi la necessità di un freddo accidentale od avventizio intensissimo, che sorprenda, come dicemmo, in quella regione temperata la nube, od i vapori di essa, che vanno a subire tal congelazione, che li converta in grandine. Fra le varie opinioni, d' onde venga, e da qual causa sia prodotto un tale e tanto freddo estemporaneo, accennate in questa stessa lettera, ed in parte confutate, si passa ad esporre quella, che sola sembra potersi sostenere, e ch' io abbraccio, e mi propongo di sviluppare. Questa è l' evaporazione rapida e copiosissima, più di quello che immaginare ci possiamo, di essa nube, in circostanze a ciò favorevolissime, che mi pare di ravvisarvi. Stimo non inutile il riportar quì di tal lett. nona (consegnata nel tomo XIV del cit. giornale; anno 1790) alcuni squarcj che contengono le principali cose ivi dedotte

= Ecco come anche il sig. De Luc ricorre, non più all' immaginato spediente di far venire dalle altissime regioni superne in grembo alle basse nubi temporalesche de' fiocchi di neve fredda all' eccesso, secondo che opinò un tempo, e alcuni per avventura opinano ancora; bensì ad un freddo del giorno, in una regione molto inferiore alla region nivale?

A codesta questione assai difficile da risolversi io mi sono accinto altra volta a rispondere, parte adottando ciò che da qualche Fisico è già stato messo in campo, parte valendomi di altre osservazioni dirette, non che ad appoggiare la già tentata spiegazione, ma a darle nuova forma. Si è detto adunque non senza verisimiglianza, ed io con più fondamento ancora m'avanzo a sostenere, che un tale e tanto freddo può esser prodotto dall' evaporazione, che soffre la nube medesima già formata; evaporazione che io riguardo come estremamente rapida e copiosa nelle circostanze che vado ad indicare; e sono, 1°. i raggj del sole, che

---

accidentale ed avventizio, che sorprende una parte di coteste nubi, come noi pure crediamo... In fatti non vi è altro partito da prendere; e a questo conduce tutto ciò, che son venuto diffusamente mostrando nella presente lettera, e che mi giova di qui ricapitolare, ristringendolo alle seguenti proposizioni „

„ I. La stagione de' più fieri temporali, e massime dei grandinosi, è la primavera e l' estate; e le ore in cui sogliono nascere e scoppiare, quelle più calde del giorno: e sebbene sieno men frequenti nel cuor di essa state, pure ne accadono anche ne' giorni più cocenti „

„ II. L' altezza delle nubi temporalesche e grandinose non suol essere grandissima, e talvolta sono queste assai basse, poche centinaja di tese cioè sopra la terra: come, oltre molte altre osservazioni, lo comprova l' intervallo di soli 3, o 4 minuti secondi tra il bagliore del lampo che fère la vista, e il rumore del tuono che giunge all' orecchio „

„ III. A così picciola altezza, diamola anche di 600, 800, 1000 tese (nel primo dei quali casi ci va, a sentirsi da noi il tuono dopo veduto il lampo, più di 3 secondi; nel secondo più di 4″, nel terzo più di 5″) la temperatura dell' aria non può essere che da 6 a 10, o al più 12 gradi reaum. men calda che nell' infima regione, vicino cioè alla terra; ove giugnendo a 22, 24, 25 gr. R., e talvolta di più, deve essere lassù per lo meno tra i 10 e i 15, o 16 gradi superiore al punto della congelazione „

percuotono la parte superiore del nuvolo; di un sole sommamente vivo nelle ore e ne' giorni più caldi dell' anno, in cui sogliono appunto accadere più spesso i temporali con grandine: 2°. la grande rarezza e siccità dell'aria che sovrasta ad esso nugolo; la quale straordinaria secchezza degli alti strati è comprovata e posta fuori d' ogni dubbio dalle moltiplici osservazioni dei due più grandi Fisici che siansi occupati delle modificazioni dell' atmosfera nelle diverse regioni fino alle più grandi altezze, cioè i signori De Luc e Saussure: ciò chè anche è stato confermato dopo l' invenzione de' palloni aerostatici da que' Fisici che se ne sono valuti al miglior uopo, cioè a fare cogli stromenti meteorologici delle osservazioni a varie altezze: 3°. la

---

„ IV. Manca dunque ancora non poco al freddo necessario per la formazione della grandine; quand' anche non si richiedesse maggiore di quello, a cui gela naturalmente l' acqua. Or che sarà se ricerchisi di molto maggiore? „

„ V. E tale si ricerca in fatti: 1°. perchè i vapori vescicolari, di cui son composte tutte le nebbie e le nuvole, resistono molto alla congelazione, come si osserva negli aspri giorni d' inverno, in cui si mantengono pensili in aria, e non forman neve, malgrado che regni un freddo di alcuni gradi sotto il zero reaum. la qual renitenza a stringersi e modellarsi in neve, proviene e dal molto *calor latente*, che debbono perdere essi vapori innanzi gelare, e dalla loro particolar costituzione „

„ VI. 2°. Perchè i rudimenti della grandine, la base di ciascun grano, ciò che ne forma, diremo, il *nucleo*, essendo un fiocco di neve, come la materiale ispezione lo dimostra, questo fiocco nevoso vuol essere freddissimo, cioè concepire e ritenere un grande eccesso di freddo sotto il o R. sì, se ha da ridurre ad agghiacciarsi una dietro l'altra varie pellicole d' acqua, che esso fiocco di neve si tira addosso nell' attraversare la gran massa nuvolosa composta di vapori vescicolari non anco gelati, mano mano cioè, che urta in queste vescichette e le rompe, e incontra altre goccie già formate: se ha, dico, tal fiocco nevoso a formarsi d' attorno la grossa crosta di ghiaccio, che gli dà la consistenza e la forma di un grano di grandine „

disposizione de' vapori vescicolari (un ammasso de' quali, e non altro, è qualunque nube) a risolversi in vapor elastico; considerando che tali vescichette d'acqua o palloncini cavi fluttuanti nell'aria, disgiunti un dall'altro, anzi in certo modo repellentisi, son già, per così dire, incamminati allo stato di vapor elastico, ad assumer il quale loro non manca molto; disposti sono in somma ad una pronta e perfetta vaporizzazione, assai più che l'acqua in massa, o i corpi semplicemente bagnati: 4°. finalmente l'elettricità medesima che favorisce in modo singolare qualunque evaporazione, come tante sperienze coll' elettricità artificiale de' nostri gabinetti ne fanno palese. Or dunque quanto più promoverà la risoluzione de' vapori vescicolari in va-

---

„ VII. Ma se tutto questo freddo di un' inconcepibile intensità non lo porta, e non lo dà la regione dell' aria, ove hanno stanza le nubi temporalesche, la quale è calda anzi 10, 12, 15 gradi sopra il punto della congelazione (III), chi lo darà a tutta la massa di coteste nubi, o ad una parte di esse; e da qual causa mai potrà essere prodotto? Scenderà forse l'aria della superna regione da 5, 6, o più miglj d'altezza, di là cioè, ove soltanto può credersi che regni un freddo di molti gradi sotto il o R., quale richiederebbesi all' uopo? Ma questa supposizione non può in alcun modo ammettersi, ed è poi contraria alle dirette osservazioni „

„ VIII. Come neppure può sostenersi, e viene egualmente contradetto dalle osservazioni, che i primi embrioni della grandine, i fiocchi cioè di neve eccessivamente freddi, siccome esser denno all'effetto di cui si tratta, si formino essi colassù entro a nubi distinte altissime, e di là piovano in seno alle basse nuvole temporalesche „

„ IX. Conviene dunque di necessità ricorrere ad una causa non rimota, ma presente, che produca un freddo accidentale estemporaneo di tanti gradi, quant'è richiesto, non solo a togliere i 10. 12. 15. gradi di calore proprio alla regione, ove son congregate le nubi temporalesche, ma ad indurvi inoltre una temperatura di altrettanti gradi inferiore al punto della congelazione, se pur anche basta: ad una causa, dico, convien ricorrere, che ve lo produca ivi proprio quel gran freddo, non che ve lo porti da lontano „

por elastico la sì potente elettricità atmosferica, quella straordinariamente forte, onde sono animati e si repellono quindi fra loro con vivacità cotali vescichette o palloncini cavi de' primi nuvoli temporaleschi? Quanto facilmente verranno lanciati dal seno di codeste nuvole, o piuttosto dalla loro superficie, tutt' intorno nell'aria, l' un dopo l' altro in copia, essi palloncini o sferette cave, per scomparire quindi, fusi in certo modo in vapor elastico, massimamente verso l' alto, ove concorre a tale trasformazione l' azion del sole, e l' aria secca, come quì sopra vedemmo?

Tutte queste circostanze che cospirano a promovere prodigiosamente l' evaporazione della nuvola temporalesca, segnatamente della sua faccia superiore, non po-

---

„ Tutte queste asserzioni io mi lusingo di averle bastantemente provate, sicchè niuno vorrà più contrastarmele. Resta pertanto ad investigare quale esser possa cotesta causa produttrice di un tanto freddo nelle nubi temporalesche, ed ivi proprio presente. Noi non andremo già a cercarla in quelle immaginarie *particelle frigorifiche*, che furono un tempo in voga, ed ora sono sbandite affatto dalla fisica; come neppure in non so quali dissoluzioni saline, e *fermentazioni fredde*, che senza fondamento si sono tirate in campo; non presentandoci tanto la grandine, quanto le pioggie temporalesche, niente dei pretesi sali o d' altri ingredienti, ma semplice e pura acqua . . . . „

„ Escluse queste e simili cause, escluderemo dunque ogni altra causa, o *processo chimico?* Intendiamoci: alcune cause ed effetti considerar si possono e come fisici e come chimici, a cagion d' esempio la combustione, la respirazione, l' evaporazione. Or appunto quest' ultima, e sì concepita in un senso più chimico che fisico, qual è quello della trasformazione dei vapori nebulosi o sia vescicolari, in vapori elastici aeriformi, che si spandono più ampiamente nell' aria, e che tali divengono, assorbendo e appropriandosi una gran quantità di calorico, che diventa in essi *calor latente*, onde appunto il raffreddamento, che producono, ec. questa evaporazione, io mi persuado che sia cagione del freddo cotanto intenso, che concepisce, se non tutta la massa, una parte almeno delle nubi temtranno forse bastare a produrre nella mezzana regione dell' aria, in cui trovasi cotal nuvola sospesa, e ch' è già notabilmente men calda dell' infima regione, un freddo valevole a congelare il residuo di essa nuvola svaporante, od una parte almeno della medesima, la superficie cioè più esposta a tale evaporazione? A me sembra che sì. A chi però giudicasse ch' io le attribuisca troppo di poter refrigerante, e che? direi, non siam forse giunti a congelar l'acqua quaggiù anche in estate, mercè l' evaporazione dell' etere sulfurico, per ciò solo, ch' ella è grande e rapida oltre modo? Ora un nuvolo nelle surriferite circostanze favorevolissime può bene andar soggetto ad un' evaporazione che uguaglj e superi pur anco quella dell' etere: e ciò basterebbe all' intento.

---

poralesche, quella voglio dire, che va a formare la grandine. Ancor io dunque do una *spiegazione chimica*, se vuol dirsi tale, del fenomeno; o più giustamente adduco una causa fisica e chimica insieme „

„ Il sig. De Luc attribuisce più apertamente il freddo eccessivo inconcepibile, onde sono comprese cotali nuvole che vanno a diventare grandinose, ad una *causa chimica*: non già ch' egli ricorra alle dissoluzioni saline ed effervescenze fredde, che abbiamo rigettate; ma bene avendo in vista delle composizioni, anzi vere generazioni, e distruzioni di *fluidi elastici*, delle metamorfosi dell' acqua in aria e dell' aria in acqua (ch' egli presume, e di cui si fa delle idee singolari), nelle quali operazioni la materia del calore or si nasconda, or si liberi ec., si argomenta di trovare in ciò, come di molti altri, la spiegazione del fenomeno, di cui ora si tratta. Di tali viste, parte veramente luminose, e parte troppo sublimi, e piuttosto lavori di una bella e ricca immaginazione, che altro, sono piene le ultime sue opere (*Idées sur la météorologie*; e Introduction à la physique terrestre par les fluides expansibles).... Ma lasciando che altri giudichino meglio di coteste opere interessantissime in generale, e particolarmente delle nuove idee di De Luc riguardo alla grandine; e lasciando pure, che si denomini fisica, o chimica, come più aggrada, quella spiegazione, o questa, lo che poco importa, purchè compaja fondata, Che se si desiderasse una prova palpabile, una sperienza diretta comprovante che l'acqua si congeli effettivamente in conseguenza della sua propria evaporazione, ne potrei addurre più di un esempio; ma valga per molti quello, che ci offre una macchina idraulica ingegnosissima che trovasi impiegata nelle famose miniere di *Schemnitz*, e che porta il nome del suo inventore Hell, fratello del già celebre astronomo di Vienna. Questa macchina (tralasciando qui la descrizione e l'uso della medesima) presenta un fenomeno il più sorprendente, che è la prova la più sensibile e più bella all' istesso tempo, del prodigioso raffreddamento, che può produrre l'acqua spruzzata nell'aria, mercè la pronta e copiosa sua evaporazione. Girata una

---

e conforme ai fenomeni della natura, torniamo alla nostra, che credo tale, e che è tratta da ciò che più conosciamo degli effetti dell'evaporazione „

„ Io dunque ripeto il fenomeno, che abbiam mostrato di sì difficile spiegazione, cioè il grande, il massimo raffreddamento, il qual opera quella prodigiosa congelazione de' vapori in certe nubi temporalesche, che li trasforma in fiocchi di neve, indi in grandine, lo ripeto da un'evaporazione straordinariamente rapida e copiosa, cui van soggette, non dirò tutte, ma alcune di dette nubi, quelle appunto, che diventan grandinose: da un' evaporazione promossa insignemente dall'aria secca superiore; dalla viva azione de' raggj solari, onde vengono quelle nuvole investite; e dalla valida elettricità che le anima; da quell'evaporazione in somma, il cui giuoco ho tirato già in scena, ed ho fatto tanto valere nella lettera precedente, riguardo al distruggere ch'essa fa l'elettricità *per eccesso* di cotali nuvole, che divengon giusto temporalesche, e ridurle fino alla contraria *per difetto*. Riportandomi alle quali osservazioni, e ad altre prove che addurrò nella lettera che seguirà questa d'appresso, farò qui soltanto riflettere, che se tale e tanta si è l'evaporazione di siffatte nuvole, tale e tanto il *fluido elettrico* che si portan via i vapori elastici, in cui si converte una gran parte dei vescicolari, onde son quelle formate, che distrutta la forte loro elettricità *in più*, che avean da principio, riduconsi ad una non debole *in meno*; può bene essere tanto anche il *fluido calo-*

certa chiave o galletto, per cui schizza acqua ed aria a un tempo con grande impeto, e si sparpaglia quella a maraviglia; e presentato di contro a cotale pispíno spruzzante, un cappello, un fazzoletto, o simile, questo in breve riman coperto di una crosta di ghiaccio, grossa più d'una linea. Eppure, chi 'l crederebbe? L'acqua rinchiusa coll'aria nel recipiente, prima che ne esca, non è molto fredda, anzi ha la temperatura comune, cioè di 8 in 10 gradi reaum:, giusta quanto riferì l'esgesuita Poda, vecchio professore di meccanica a Schemnitz, al suo consocio Herbert già professore di fisica a Vienna: intorno a che può vedersi la bella operetta di quest' ultimo *Dissertatio de igne*

---

rifico, che se ne va via con essi vapori elastici, giusta la loro esigenza, e conforme la teoria del *calor latente*; può, dico, essere tanta, e lo sarà qualche volta almeno, la materia calorifica portata via, da distruggere non solo i 10, 12, 15 gradi di caldo proprio di quella regione, in cui trovansi sospese le nuvole, di cui parliamo; ma d' indurre inoltre in taluna di esse (quando non fosse che alla parte loro superiore, la qual soffre la massima evaporazione e la perdita immediata) una temperatura di molto inferiore alla congelazione. =

Ciò basta per mostrare fin dove io era giunto con codesta lettera nona. Altre ne dovean succedere, in cui si sarebbe spiegato più ampiamente ancora, e reso vie più verisimile codesto prodigioso raffreddamento indotto dall' evaporazione in alcune nubi ad essa singolarmente soggette, e tentato insieme di risolvere altre difficili questioni, che pur rimangono intorno alla grandine; ma di queste memorie in gran parte già scritte fu interrotta per alcuni accidenti la pubblicazione. Ebbi però occasione di comunicare ad alcuni miei corrispondenti e amici, sì italiani, che esteri, il contenuto, e di leggerne anche a taluno de' lunghi squarcj. Tutti m' incoraggirono a pubblicare queste mie idee, per quella parte almeno, che sembrò loro contenere del nuovo; ma non seppi mai indurmi a farlo, o mi mancò l'opportunità. Or questa mi si offre colla raccolta di memorie dei membri del nostro Istituto, che va a stamparsi; e un nuovo sprone s'aggiunge a sollecitarmi. Ripiglio dunque l'antico mio lavoro, e lo rifondo nella dissertazione, che ora presento.

stampata nel 1773, ove trovasi pur anche la descrizione della macchina colle figure. Quale dunque e quanta debb' essere l' evaporazione di quel getto d' acqua tramescolato d' aria, quale e quanto il freddo ivi prodotto, se arriva a congelare tanto prontaménte un cumulo di gocciole d' acqua dianzi temperata!

Applichiamo quest' esempio ad una nuvola la qual soffra un' egual evaporazione o poco minore, e non vi sarà più difficoltà a concepire che possa del pari congelarsi qualche sua parte, quella cioè che vi si trovi più dell' altre soggetta ovvero contigua al torrente, dirò così, di vapori elastici, che l' aria secca, il sole, e l' elettricità ne fanno sgorgare. Anche questa nuvola è formata di gocciole d' acqua tramescolate all' aria; il che favorisce di molto la risoluzione delle medesime in vapore elastico, come nel zampillo quì sopra descritto: anzi non essendo quelle altrimenti goccie piene, ma sferette cave minutissime, formate di una pellicola d' acqua estremamente sottile, quali sono tutti i vapori delle nebbie e delle nuvole, detti perciò *vapori vescicolari*, trovar si deggiono assai più disposte a subire una tal compita vaporizzazione. Per le quali circostanze tutte, anche senza il getto violento, e l' urto contro l' aria, che ha luogo per quell' acqua che spiccia fuori sparpagliandosi dalla macchina sovrindicata, può l' ammasso di tali vescichette o palloncini cavi, formante la nuvola di cui si tratta, non già denso ma più o men raro, su quella faccia massimamente ch' è rivolta all' alto verso l' aria più secca, e guarda il sole, può dico, quest' ammasso e svaporare e congelarsi al pari di quel getto maraviglioso. Se poi i vivi raggi solari assorbiti dall' atra nube medesima, oltre al riscaldarla forte e più o men profondamente, le movano d' attorno delle correnti di aria secca, le quali, o blande la lambiscano e la rimescolino soltanto in parte, o violente la solchino più addentro, la sferzino e la straccino fin anche; chi negherà che possa la congelazione, effetto dell' evaporazione ivi per tanti mezzi promossa e sollecitata, non che uguagliare, superare quella, che presenta la macchina di Schemnitz?

Insisto molto sulle circostanze dell' aria secca al di sopra della nuvola che va a farsi grandinosa, e del sole che la investe; perchè credo che grandemente favoriscano l' evaporazione della medesima; tanto la favoriscano e la promovano, che senza di esse non possa per avventura mai essere così pronta e copiosa da agghiacciare ne' tempi caldi un' intiera nuvola, e neppure la corteccia di essa.

E primieramente se l' aria che cova sopra la nuvola, non è secca, potrà ben questa svaporare ed anche abbondantemente, ove il sole la percuota; ma non si sarà appena sollevato il vapor elastico, che riuscendo sovrabbondante in quell' aria già quasi satura, tornerà a condensarsi ed a riprendere la forma di vapor vescicolare nebuloso. Tal cosa si rende talora visibile, quando cioè collocati opportunamente, miriamo alzarsi da qualche nuvola, là dove appunto viene dal sole sferzata, delle colonne come di fumo. In questo e somiglianti casi, che sono certamente frequenti, ben s' intende come, tornando per tal condensazione a liberarsi il *calor latente* poco lungi e quasi indosso alla nuvola svaporante medesima, ne venga in gran parte riparato il raffreddamento da essa sofferto, e non possa quindi aver luogo la congelazione di cui parlasi. Il concorso poi del sole, e di un sol vivo, quanto possa e debba influire, si è già spiegato abbastanza ed è più facile a comprendersi. Non fia dunque maraviglia, che siano queste due circostanze necessarie, come or ora dicevamo, all' effetto del quale si tratta.

Del resto qual altra ragione addurre si potrebbe, per cui i temporali circa le ore del mezzo giorno, e per un tempo secco, soglion essere i più minacciosi e funesti per grandine; laddove al contrario rarissimi gli esempj sono in cui ne cada nelle ore della notte, e di notte soprattutto avanzata, per quanto spaventosi sieno in tal tempo i temporali, e l'elettricità fulminante? qual mai potrebbesi addurre ragione di ciò, fuori di quella che vado ad esporre? cioè: che l' evaporazione la quale raffredda potentemente il nuvolo, fino a stringerne insieme aggliacciati i vapori vescicolari, e le gocciole d' acqua intersperse, per qualche pioggia che cominci a stillare, fin anche a farne discendere la temperatura molti gradi sotto il o reaum:, cotesta evaporazione è soprattutto promossa ed avvalorata circa il mezzodì, pe' raggj del sole più vivi e penetranti che investono la faccia superiore di tal nuvolo, e per l' aria più che mai secca che giusto allora vi sta sopra: laddove in mancanza del sole, e sopraggiugnendo l' umidità della sera, umidità che dee regnare allora anche in alto, l'evaporazione de' nuvoli, o sia quel processo che ne risolve e converte gran parte in vapor elastico, viene molto rallentato, se pur anche non cessa affatto; e quindi anche cessa in un colla congelazione de' vapori vescicolari la formazion della grandine.

Ecco come io spiego uno de' più gran paradossi di meteorologìa, la comparsa cioè della grandine ne' giorni dell' anno più caldi; la congelazione de' vapori nella regione dell' aria molto inferiore alla region nivale; la formazione di più o men grossi pezzi di ghiaccio colassù, ove pur regna naturalmente una temperatura pochissimo fredda; e, quel ch' è più, nelle ore del giorno più infocate, in cui anche quella regione deve essere calda anzichè no. Inerendo agli esposti principj, l' osservazione fatta già da altri fisici, che la presenza del sole e l' azione viva de' suoi raggj concorre quasi indispensabilmente alla formazione della gragnuola, rientra nella teorìa, ed anzichè un' obbiezione, ne somministra una novella prova.

Un' altra gravissima difficoltà, che ci presenta la grandine, sta nella grossezza e costituzione de' suoi grani, formati quasi sempre di più strati o lamine distinte di ghiaccio sodo trasparente intorno ad un nocciolo bianchiccio. Noi ne veggiamo per disgrazia tutti gli anni nella nostra Lombardìa della grossezza di una noce, e tal volta anche di maggior mole. Ora non è facile il concepire in qual maniera de' pezzi solidi di ghiaccio, cotanto pesanti, possano essere sostenuti in aria, come pare che lo siano tutto il tempo, che veggonsi quelle tali nuvole cinerizie, che stimiamo giustamente zeppe di grandine, avvolgersi e passeggiar lente, o rimanere immobilmente sospese sotto il gran telone od ammasso di nuvoloni scuri, che formano il pieno del temporale, e coprono un più gran tratto di cielo. D' altra parte volendo supporre che s' ingrossino a tal segno detti grani da principio minutissimi, e vadano rivestendosi di nuove e nuove croste di ghiaccio, durante la loro caduta (come la più parte de' fisici hanno avanzato senza prove, e per non saper che dire di meglio) da quale prodigiosa altezza non dovrebbero essi cadere per aver tempo di far ciò? Giusta le migliori osservazioni, la più grande altezza, a cui si trovino mai de' nuvoli, non va a 6 miglj italiani. Ora un grano di grandine, supponiamolo cresciuto già alla grossezza di un cece quando comincia a cadere (senza prenderci briga di spiegare come abbia potuto restar sospeso fino a questo punto), un tal grano abbastanza pesante ha ben tosto percorso col moto accelerato di gravità questo spazio di 6 miglj; nel che impiegar appena potrebbe, con tutta la resistenza dell'aria, un minuto primo (2). E come mai dunque in sì breve tempo crescer potrebbe egli a forza d' incrostazioni successive alla grossezza di una noce, e fino di un uovo di gallina, essendosi pur veduti tal volta de' grani di tal grossezza? Che poi? se le nubi temporalesche non siano neppure delle più alte, come in fatti si osserva che non lo sono (3); e se più basse anche dell'ordinario sian quelle dinotate appunto per nuvole gravide di gragnuola, come abbiam fatto fin da principio rimarcare?

(2) Lo spazio che percorrerebbe un grave liberamente cadendo, senza cioè la resistenza dell'aria, in un minuto primo, è di oltre 54, 000 piedi. Diamo che la resistenza dell'aria ritardi la caduta del grano di grandine già discretamente grosso e pesante, come l'abbiam supposto, la ritardi tanto da fargli percorrere due terzi solamente di questo spazio nel detto tempo; saranno ancora 36, 000 piedi, cioè da 7 miglj; 5 miglj buoni, se gli faccia percorrere la metà spazio, ec.

(3) Vegg. la mia lettera nona, o l'estratto nella lunga nota (1).

Eccoci pertanto costretti a supporre che la grandine, durante la sua formazione, ed anche bella e formata, si sostenga pensile nell' aria, non uno od alcuni minuti, ma delle ore per avventura; tanto tempo cioè, quanto ve ne vuole, perchè giungano i suoi grani a forza di nuove incrostazioni a quell' ingrossamento, che veduto abbiamo che acquistano. Ma quale sarà mai la forza che sì li sostenti, e li ritenga dal cadere, massime quando cresciuti già a notabile grossezza, son divenuti molto pesanti? Non possiamo immaginare altra forza o potenza, fuorchè l' elettricità: resta a vedere se questa possa essere da tanto.

Concepiscansi i nuvoli temporaleschi dotati, come lo sono effettivamente, e ne dan segni più o meno strepitosi, di una poderosissima elettricità; eglino dovranno in virtù di questa repellere fortemente le parti loro esterne: da ciò viene, che siffatti nuvoloni ci presentano sovente i loro bordi come stracciati, o a frangie, e gonfia la superficie in più luoghi, e per molte gobbe e prominenze, irregolare; per nulla dire de' brani che si prolungano in fuori, si staccano, e vengono visibilmente rigettati dal corpo della nuvola medesima. Altre volte compajono anzi raccolti e condensati cotai nuvoloni nella parte inferiore, verisimilmente perchè cotesta superficie molto meno elettrizata, o elettrizzata in senso contrario della faccia superiore, viene da essa attratta: come succede appunto in certe nostre sperienze (fatte per imitare alcuni fenomeni dell' elettricità atmosferica) che la parte inferiore di un volume di cotone elettrizzato, ove venga spogliata in qualche modo, ex. gr. con una punta, dell' elettricità, che avea comune col resto, o meglio si faccia passare all' elettricità contraria, tosto da rara e sfioccata che era, si raggruppa e si serra addosso alle parti interne, ed alle superiori, in cui vige più forte l' elettricità primiera. E' questa a mio credere una delle principali cagioni, per cui siffatti nuvoli si fanno più densi, e scuri degli altri. Comunque sia, ve ne hanno al certo ne' forti temporali, che dispiegano una prepotente elettricità sulla faccia superiore.

Passiamo ora a considerare uno di cotai nuvoloni gagliardamente elettrici, il quale sorpreso da una quasi subitanea congelazione alla sua faccia superiore, in virtù di una stragrande evaporazione, cui va pel concorso di alcune circostanze soggetto, come abbiamo spiegato, trovisi su detta faccia cosparso e come seminato d' innumerevoli molecole e stellette di ghiaccio: egli è facile il figurarsi che codeste molecole, questi embrioni o primi granellini di grandine, spinti e rigettati in alto dalla forte repulsione elettrica del nuvolone medesimo, saran tenuti sospesi ad una certa distanza, non altrimenti che una piuma, un fiocchetto di cotone, od altro corpicello leggiero son tenuti sospesi in aria da un tubo di vetro stropicciato ben bene, o da un altro corpo fortemente elettrizzato che lor si presenti per di sotto. Impiegando un largo piatto, o meglio un telone teso orizzontalmente ed isolato, sparso sopra di varj corpicelli, si può, infondendovi una vigorosa elettricità, avere il vago spettacolo di veder levarsi in aria e sostenervisi lunga pezza tai corpicelli, anche non leggerissimi, cioè non solo delle piume, de' fiocchetti di seta o di cotone, delle foglietle d' oro battuto, ma delle pallottole di carta, di sovero, ed altre ancora più pesantelle. La quale sperienza, fatta così più in grande, rappresenta meglio e in più bella maniera i grani di grandine sospesi, com' io immagino, al di sopra del telone nuvoloso, certamente non meno elettrico del nostro quì descritto.

Facendo attenzione a tale sperienza, osserveremo che que' fiocchetti, quelle pallottole, ec: non si tengono già là immobili e costantemente al medesimo intervallo sopra il telone o piatto elettrizzato; bensì in una specie di oscillazione sempre fluttuanti: si alzano, si abbassano alternativamente, quali più, quali meno; altri cadono addosso al piatto medesimo, e risalgono un istante dopo, altri vi rimangono giacenti: in fine ridotta l' elettricità ad un certo grado di debolezza, il bel giuoco, la danza galleggiante finisce; ed eccoli tutti que' corpicelli cadere, per non più rialzarsi. Lo stesso adunque succeder dee ai grani di grandine da prima minuti, indi via via più grossi: oscillan essi al di sopra della nuvola fortemente elettrica com' essi; molti spogliati di elettricità cedendo al loro peso ricadono, e non che toccare la superficie penetrabile e affatto soffice di essa nuvola, vi s' immergono più o meno, come accader dee; ma ben tosto, contrattane di nuovo l' elettricità, ne vengono ricacciati all' insù: solamente quelli a cui avviene di sommergersi tanto nel corpo della nuvola medesima da oltrepassarne il centro, vincendo coll' impeto della loro caduta la di lei forza repellente, non si rialzano più e vengono a terra; son questi que' grani rari e solitarj, dirò così, che scappano quà e là, e precedono la folta grandine che va fra non molto a cadere. Giacchè finalmente il giuoco di tutti quegli altri grani che stan volteggiando al di sopra della nube, non è eterno; esso non può durare che un certo tempo; fin tanto cioè, che da una parte la mole di ciascun grano accresciuta per sempre nuove incrostazioni, e dall' altra la repulsione, che contro loro esercita il nuvolone, diminuita, a cagione dell' elettricità che mano mano s' indebolisce (dissipandosi questa, o per via di frequenti scariche, o per una lenta comunicazione all' ambiente), vengono essi grani strascinati dal loro peso vincente, a rovesciarsi precipitosamente e in folla sopra la terra.

Ecco come io penso che si possa spiegare la sospensione della grandine in aria per lungo tempo, sospensione necessaria alla sua compita formazione e all'ingrossamento sì notabile de' suoi grani, non supponendo ancora che un solo strato nuvoloso fortemente elettrico.

Or se ci piaccia di ricorrere ad una supposizione più che verisimile, qual è quella di due o più strati, un sopra l' altro, elettrizzati contrariamente, la spiegazione diverrà molto più facile e compita. Potremo allora rappresentarci questi grani non solamente sospesi e fluttuanti, ma in una viva agitazione, saltellanti e come ballottati, spinti cioè e rispinti dallo strato di nuvole elettrico *in più* all' altro elettrico *in meno*: nella stessa guisa che de' corpicelli leggeri di ogni specie, e fin delle pallottole di sovero non leggerissime, danzano e saltellano tra due piatti nelle sperienze elettriche de' nostri gabinetti, qual è quella che in francese chiamasi *danse des pantins*.

Per avere sotto gli occhi un'immagine più rappresentativa, si può far ballare un gran numero di pallottole di midollo di sambuco, di sovero, o di carta, tra due lenzuoli o tappeti tesi orizzontalmente un sopra l'altro alla distanza di alcuni piedi, ed elettrizzati uno positivamente, o sia *per eccesso*, l'altro negativamente, o sia *per difetto*, ad un alto segno. Coloro che avran contemplato cotesto giuoco curioso, quand'anche non siano fisici, non avranno difficoltà a concepire che succeda la medesima cosa molto più in grande colassù tra due strati di nubi, tostochè si sarà loro fatto intendere che quelle nubi temporalesche posseggono un'elettricità incomparabilmente più forte di quella che possiamo mai eccitare colle nostre macchine. I fisici poi informati pienamente di cotesta elettricità naturale e della sua forza, e che ne sanno per prova e per analogìa apprezzare gli effetti, non dubiteranno punto della possibilità del fenomeno, e ardisco sperare che vi troveranno almeno qualche verisimiglianza, sol che ammetter vogliano in que' temporali che vanno a scaricare grossa grandine, i due strati di nubi separati da un giusto intervallo, ed elettrizzati uno contrariamente all'altro, com'io suppongo.

E come non ammetterli in tali casi e in altri pure? L'esistenza di più di uno strato di nuvoli in molti temporali non può rivocarsi in dubbio; come neppure l'elettricità contraria degli uni rispetto agli altri. Non vi è forse persona un poco osservatrice che non abbia rimarcato più d'una volta, soprattutto nei temporali tempestosi, de' nuvolotti men lontani da terra, che ora rimangono immobili, ora scorrono, e s'agitano sotto ad altri nuvoli estesi più elevati; siccome non vi ha alcun Fisico, il quale essendosi applicato alle sperienze dell' elettricità naturale, non abbia osservato nel conduttore atmosferico impiegato a tali sperienze, de' passaggj frequenti e talvolta repentini dall' elettricità *positiva* alla *negativa*, e *vice versa*, nel forte de' temporali. Mi è accaduto, esplorando l'elettricità, nel maggior bollore di questi, coll' elettrometro atmosferico portatile di Cavallo [il noto elettrometro a boccetta da me perfezionato *(4)*] avente la picciola asta o sia verghetta metallica avvitata sul suo cappelletto alla maniera di Saussure, e il candelino acceso in cima alla mia maniera, che trovo molto vantaggiosa *(5)*, mi è accaduto di veder avvicendarsi le due contrarie elettricità, con passaggio quando repentino, e quando gradato ma rapido, otto, dieci, e fin quattordici volte in un minuto d' ora.

Non può dunque dubitarsi, ripeto, che esistano in siffatti temporali de' nuvoli dotati di contrarie elettricità, se fin ne abbiamo segni non equivoci all' elettrometro, oltre gl' indizj, che ne danno i lampi e le saette, che veggiam trascorrere per entro a que' campi di nuvoli, quali congregati, quali segregati, e che altro sicuramente non sono, che scariche elettriche, onde si bersagliano l' un l'altro. Potrebbe tutt' al più moversi qualche dubbio intorno alla disposizione e collocamento troppo regolare, che sembra ch' io dia a coteste nubi, separandole giustamente in due strati paralleli fra lo-

---

(4) Vegg. le mie prime lettere *sulla meteorologìa* elettrica.
(5) Ivi.

ro e coll' orizzonte, ed assegnando tal intervallo tra l' uno e l' altro strato, che non sia nè troppo grande nè troppo picciolo, per dar luogo appunto all' immaginata danza de' grani di grandine. E' d' uopo certamente che cotesto intervallo sia grande anzi che no, altrimenti si scaricherebbe tosto l' uno strato della sua elettricità sopra dell' altro, od andrebbero per la mutua attrazione ad unirsi e confondersi insieme, non lasciando luogo nè tempo a detta danza. Ma d' uopo è ancora, che non sia la distanza tanto grande da togliere all' azion mutua di farsi sentire dall' un termine all' altro, in guisa di produrre l' effetto di cui si tratta. Or come supporre che le cose si trovino aggiustate così di tutto punto?

Ai quali dubbj e difficoltà risponderò, ch' io non pretendo nè i due strati precisamente, detto già avendo che se ne possono formare di più, nè tale e tanta regolarità di posizione e di distanza, che altronde non è necessaria all' uopo; bastando che la descritta disposizione abbia luogo all' incirca, e nulla ostando qualche particolare varietà. Ma sia pure quella qualunque disposizione che si ricerca, difficile ad incontrarsi, e rara, difficilissimo anzi il concorso di tutte le circostanze favorevoli, secondo me, alla formazione della grandine e ad un insigne ingrossamento de' suoi grani; che perciò? Varj anche sono i casi, in cui cade copiosa grandine e grossa, nè è dessa già un appannaggio di tutti i temporali, ma di alcuni solamente, e per nostra fortuna di pochi, in mezzo al gran numero, che ne abbiamo noi qui ogn' anno; appunto perchè o l' una o l' altra o molte di tali circostanze mancano per lo più, e solo per disgrazia e fatalità si combinano alcuna volta tutte a segno di portarci una di quelle grosse gragnuole di cui parliamo.

Del resto non so vedere perchè la disposizione delle nubi in due strati a un di presso orizzontali, separati da un intervallo assai grande senza essere immenso, ed elettrizzati l'uno *per eccesso*, l' altro *per difetto* ad un grado abbastanza forte, debba giudicarsi oltremodo difficile, e poco meno che impossibile; nè mi pare che una tal supposizione debba aversi per arbitraria, qualor si rifletta a quello che ho già fatto rimarcare, e che è uno dei punti, sui quali mi appoggio di più, cioè: che il sole, il quale sferza le nubi di prima formazione, onde risulta lo strato inferiore, promove e accelera di molto l' evaporazione della faccia superna di tal primo strato, risolve una gran parte di quei vapori vescicolari in vapor elastico: concorrendo a ciò, e l'aria secca che regna di sopra, e la costituzione propria di tali vapori vescicolari, e la loro mutua repulsione avvalorata dall' elettricità, conforme si è spiegato al principio di questa dissertazione *(6)*. Imperocchè comprendesi allora agevolmente che cotesti nuovi vapori elastici sollevandosi, incontrar denno tosto o tardi un' aria abbastanza fredda per condensarli un'altra volta in vapori vescicolari, e formarne a conveniente distanza un secondo strato nuvoloso somigliante al primo: con questa differenza però, che fa al nostro caso, cioè: che il testè formato in alto dispiegherà una

(6) E più diffusamente era stato sviluppato nelle mie lettere ottava e nona.

forte elettricità *positiva* (qual è quella che sorge a dirittura da ogni condensamento di vapori in nebbia o nuvoli), mentre il vecchio strato inferiore, scaricato già in parte, mercè di varie comunicazioni mediate o immediate colla terra, ed esausto inoltre per l'anzidetta copiosa evaporazione, trovasi, non che privato della primiera sua elettricità parimente positiva, ma ridotto alla *negativa*, forte anch' essa *(7)*. Ecco dunque i due gran piatti, tra i quali danzano e saltellano i grani di grandine formati dianzi, siccome io penso, in seno alla nuvola inferiore, segnatamente sulla faccia che guarda la nuvola superiore, formati, dico, in forza del prodigioso raffreddamento cagionatole dall' evaporazione, come si è spiegato abbastanza.

PARTE II.

Ho parlato fin quì della grandine, come se i suoi grani fossero già dal principio belli e formati, e senza cambiare di figura e di costituzione, non facessero che ingrossare in seguito per via di successive incrostazioni, durante tutto il tempo che volteggiano nell' aria cacciati e ricacciati dall' uno all' altro strato di nubi. Solamente ho fatto qualche cenno del fiocchetto di neve, da cui sembra aver il suo principio ognuno di tali grani. Or conviene considerar meglio un tal punto importante e trattenersi più di proposito su di esso. Abbiamo dunque per un fatto presso a poco generale, che

---

(7) Vegg. la nota 1, e la lettera ottava, in cui ho trattato ampiamente questo soggetto.

de' fiocchetti di neve han servito di base alla grandine, scorgendosene commmemente uno non picciolissimo, anzi talora di più che discreta mole, nel centro di ciascun grano. Differiscono pertanto interamente gli embrioni della grandine dai grani adulti, o vogliam dire compiti, della medesima; non essendo quelli sulle prime che fiocchi di neve, e questi formati dianzi da picciole stellette risultanti da filetti o sottili aghi di ghiaccio, quali si producono dalla congelazione immediata de' vapori nebulosi o sia vescicolari, sorpresi da un freddo intensissimo avantichè si rompano e risolvano in goccie, com' è ormai riconosciuto dai migliori fisici, e come lo dimostra all' occhio la formazione di quella specie di brina che i francesi chiamano *gelée blanche*, o *givre*, e noi nebbia gelata; e meglio ancora lo diede a vedere la curiosa sperienza fatta per azzardo dagli accademici francesi in Lapponia, e che è stata ripetuta da altri in Siberia. Avendo essi introdotta dell' aria eccessivamente fredda in una camera calda e molto vaporosa in cui si trovavano, la si vide in pochi istanti ripiena di cotali stellette o piccioli fiocchi di neve, che cadevano sui loro abiti e sul suolo.

Questo spettacolo era assai bello; ma sarebbe stato molto più dilettevole e grazioso, se si fossero trovati in quella camera sospesi due gran piatti elettrizzati l' uno *in più*, l' altro *in meno*, il vedere que' fiocchetti ballare e saltellare, fare la così detta *danse des pantins*, e rappresentare al naturale ciò che avviene, com' io suppongo, in seno ai temporali ove si forma la grandine. Io son persuaso e punto non ne dubito, che se si fosse sostenuta lungo tempo in un coll' elettricità cotal danza, e si fossero forniti vapori abbastanza per mantenere nella stanza una grande umidità, potuto avrebbero que' fiocchetti coprirsi di qualche lamina di ghiaccio e prendere la forma e consistenza di una grandine almeno sbozzata, di quella che chiamasi in francese *grésil*. Meriterebbe certamente di essere ripetuta una tale sperienza sotto questo punto di vista; ma non so se alcuno vorrebbe portarsi espressamente per tal oggetto

. . . . „ oltr' Elba e Spree
fin sotto l' orsa algente
tra barbarica gente:
. . . .
presso l' artico speco
fra le bistonie nevi
dov' è perpetua sera.

I fiocchi di neve che si formano alla medesima maniera nella regione delle nubi, voglio dire per un freddo eccessivo che assale i vapori vescicolari, di cui sono esse nubi composte, debbono risultare tanto più grandi e folti, quanto detti vapori vi si trovano più affollati, e la nube o nebbia, che in fondo è la stessa cosa, più densa e serrata; al contrario più rari e sottili, in ragione che tai vapori vi nuotano più alla larga. Gli è perciò, che nelle regioni molto avanzate del Nord vedesi d' inverno, in tempo di fortissimo gelo, l' aria serena seminata di rari punti luccicanti che sono per così dire, àtomi di ghiaccio, vapori sparsi congelati.

Una osservazione importantissima per la meteorologia in generale e pel nostro oggetto in particolare, ella è, che i vapori vescicolari sopportano, senza congelarsi, un freddo di gran lunga superiore a quello che stringe in ghiaccio l' acqua in massa, come han fatto osservare il sig. de Saussure ne' suoi *Saggj d' Igrometria*, e il sig. De Luc in tutte le sue opere meteorologiche, ed io pure in più luoghi delle mie lettere già citate, particolarmente nella nona, e come è facile ad ognuno di convincersene. Si vedono sovente delle nebbie tener forte delle ore e dei giorni interi contro un freddo che fa discendere il termometro molti gradi sotto il punto della congelazione *(8)*. Gli è allora, che i rami degli alberi e delle siepi, l' erbe, i pagliaj, le tettoje, e fino i capegli, e i lunghi peli degli animali, incanutiscono, coprendosi di quella specie di brina o neve gelata, che abbiam poco sopra accennata: e ciò perchè le vescichette d' acqua ond' è formata la nebbia, e che libere e nuotanti nell' aria reggono ad un freddo così rigoroso, al contatto poi di un corpo solido parimente freddo, contro il quale si rompono urtando, e si risolvono in gocciole o fili d' acqua, cedono alla forza congelante, e formano le prime laminette o sottili aghi di ghiaccio, a' quali, come a punto di appoggio, se ne attaccano mano mano degli altri, prendendo certe configurazioni proprie della cristallizzazione dell' acqua in questo stato. In tal maniera formansi talvolta de' lunghi fiocchi pendenti a guisa di trine o frangie,

---

(8) Ho veduto a Lione nel gennajo del 1802 durar la nebbia folta più giorni, regnando un freddo di 12 e più gradi sotto il zero reaumuriano.

de' festoni lavorati come a filagrana, bellissimi a vedersi.

Quanto alle altre vescichette che restan lungi dal contatto de' corpi terrestri, e costituiscono le nebbie alte o sia le nubi, esse non gelano, come dicevamo or ora, non formano stellette o fiocchi di neve, se non quando un freddo che sorpassa di molti gradi il termine della congelazione dell' acqua, vince tal loro inerzia, e le assoggetta finalmente a questa trasformazione; o quando l' urto de' venti spingendo le une contro le altre, avvien che le rompa. Talvolta ancora delle picciole goccie d' una pioggia straniera, portatavi sibbene da un vento, o versatavi da una nube superiore per avventura men fredda, o pure alcuni fiocchi di neve parimente estranei che sopraggiungano, servendo di punto d'appoggio, traggon seco la congelazione delle vescichette freddissime, che incontrano, le quali senza di ciò rimarrebbero nello stato in cui sono.

Ecco come si genera d' inverno la neve, per la temperatura freddissima (intendo molto al di sotto del o reaum:) che regna in questa stagione ne' nostri climi all' altezza ordinaria delle nubi; (ne' climi più meridionali, ed anche tra noi d' estate non si genera che ad altezze corrispondentemente maggiori; tranne il caso di temporali in cui abbia luogo quel freddo accidentale straordinario, di cui abbiamo a lungo ragionato antecedentemente:) neve che cade subito o quasi subito dopo la sua formazione; le nubi non essendo temporalesche, cioè a dire non essendo animate da un' elettricità abbastanza vigorosa per sostenerne in aria i fiocchi, e farli saltellare lungo tempo; o non esistendo i due strati nuvolosi contrariamente elettrizzati, e a giusta distanza un dall'altro, per favorire una tal danza. *(9)*

Non è così d'estate per que' temporali in cui l'elettricità si manifesta d'una forza prodigiosa; in cui l'evaporazione delle nubi inferiori promossa dall'azione del sole, in concorso delle altre circostanze da noi indicate, ha prodotto un freddo straordinario e di gran lunga superiore alla temperatura dell'aria, che occupano queste nubi, superiore pur anche di molti gradi alla semplice congelazione dell'acqua, in somma bastante a soggiogare i vapori vescicolari, e stringerli in fiocchi di neve gelatissima; in cui in fine cotesti fiocchi rispinti vigorosamente dalla nube elettrica, a cui

---

(9) Parlo qui, come si deve intendere, di quelle nubi che per sola forza di freddo vengono costrette a formar i primi stami, indi le stellette e fiocchi di neve, disposte altronde tali nubi a sostenersi e a non cambiare stato: il che non è di tutte nè sempre; giacchè ve ne hanno, che, o per il sopraggiungere di nuovi vapori, onde riescano troppo zeppe, o per altra causa che le condensi in alcuna parte di soverchio, o le agiti e commova internamente, o che porti comunque le vescichette, di cui constano, ad una troppo grande vicinanza tra loro, e alcune fino al mutuo contatto, onde vengano queste a rompersi, o a perdere in qualsisia modo la loro forma; v'hanno, dissi, delle nuvole, e son forse le più frequenti, che non reggono ad un freddo appena più forte del o reaum; bastando questo a convertirle in neve, che in tali circostanze di temperatura non freddissima cade sovente più copiosa che mai.

Si comprende da se, che le stesse cagioni portando a cozzar insieme e rompersi le vescichette delle nuvole, la temperatura delle quali sia e si conservi non già più fredda del detto zero, ma o tale appena, o un poco più calda, formeransi in vece di stellette e fiocchi di neve, delle goccie che distilleranno in pioggia; e che in pioggia pure si risolveranno spesso i fiocchi di neve già formati, e fino i grani di grandine, ove in cadendo valicar debbano lunghi tratti di aria abbastanza calda per fonderli.

appartengono, sono attratti con altrettanta vivacità dalla nube superiore, dotata, come vi è tutto il fondamento di credere, di un' elettricità contraria, indi rimandati alla prima che li ricaccia: e così per un tempo più o men lungo, anzi talora lunghissimo.

Egli è per effetto di questa danza e ballottamento, di questo lanciarsi su e giù, come ognuno può figurarselo, che i fiocchi di neve, primi rudimenti e base della grandine, come già dicemmo, prendono la forma vera di questa, vestendosi d' una ed altra lamina o crosta di ghiaccio, e figurandosi in grani più o meno solidi, più o meno rotondi, in parte opachi, in parte trasparenti. Rompon essi da prima le vescichette di qualche nebbia, o picciol nuvolo sparso, che incontrino sul loro passaggio; poi molte di quelle dei due strati nuvolosi medesimi di contrarie elettricità forniti, che percuotono con impeto, ed entro cui penetrano fino a certa profondità avanti esserne ricacciati; e così coll' acqua di tali vescichette rotte e disfatte, che si tirano indosso e che congelano, van crescendo di mole. S'aggiunge poi quella diffusa in istato non più di vapori nebulosi o vescicolari, ma di vapor elastico trasparente, in tutto il gran campo d' aria ch' è tramezzo ai detti due ampj tavolati di nuvole, elettrizzati contrariamente, come supponiamo; la qual aria così rinchiusa, debb' essere non poco umida, e divenire, se non lo fosse, umidissima, satura cioè, o quasi, di tal vapore elastico, col tempo: con quest' altra acqua adunque, che si depone sopra i già formati granellini, per essere i medesimi molto più freddi di detta aria umida, che attraversano, si coprono vie meglio di una pellicola, poi di altre ed altre le quali vengono mano mano indurate in ghiaccio sodo e trasparente, mercè di detto freddo eccessivo che trovavasi originariamente nei fiocchi di neve nuda più che gelati, come ho spiegato sopra, e che ritengono anche già vestiti fino ad un certo segno.

Abbiamo un esempio del coprirsi per l' umido grande dell' aria, di una lamina o crosta di ghiaccio sodo, anziche di brina, o di *givre*, alcuni corpi, come le colonne, i pavimenti, le muraglie, i vetri delle finestre, quando appunto avendo essi concepito, e ritenendo un freddo di alcuni gradi più forte del o R. trovinsi esposti ad un' aria sciroccale, cioè assai più calda e molto umida senza però essere nebbiosa. Questo, che noi diciamo *gelicidio*, e i francesi *verglas*, è ben diverso dalla nebbia gelata (givre), la quale si forma, come vedemmo, dalla congelazione in figure vagamente cristallizzate dei vapori vescicolari freddissimi sopra corpi per lo più men freddi di essi; dove al contrario il gelicidio nasce a dirittura dal disfacimento del vapor elastico diffuso nell' aria serena, il qual si depone precipitandosi, e forma uno strato o lamina unita sulla superficie de' corpi assai più freddi di esso e dell' aria, ed ivi vien tosto per tal freddo rappreso ed indurato in ghiaccio. Ora nei grani di grandine, che mostransi più trasparenti che opachi, in cui sono più le croste durissime di ghiaccio sodo, che le parti bianchiccie, molli, o spugnose, appare che questa del gelicidio ha prevalso all' altra foggia di congelazione.

Cotai grani di grandine trasparenti e cristallini tutti fino ad un picciol nucleo centrale, opaco, e bianco, che scopresi, spaccandoli, essere vera neve, sono i più frequenti, e soglion essere tutti di questa sorte ne' fortissimi temporali, e quando cadono di un' insigne grossezza. Altre volte i grani, ancorchè di una mole considerabile, come nocciuole per esempio, si mostrano semi-trasparenti od anche opachi, e biancastri in quasi tutta la sostanza, e appena in qualche parte cristallini, aventi però sempre il nucleo nevoso più o meno distinto. Questi grani, è da credere che siansi ingrossati massimamente colla congelazione successiva di vapori vescicolari, a foggia della nebbia gelata, di cui sopra. Ho vedute ancora delle grandini, in cui nella maggior parte de' grani si alternavano, cominciando dal nucleo nevoso, gli strati trasparenti solidi cogli opachi men duri e bianchi: il qual accidente s' intende benissimo dalle cose dette poc' anzi, come abbia potuto aver luogo. Finalmente compajono ancora, rarissime volte però, delle gragnuole di grani anzi piccioli che grossi, i quali non hanno neppure il nucleo nevoso, e che si presentano quai globetti intieramente solidi. Di queste avrò occasione di parlare ancora in seguito. Non sono poi mai i grani di grandine, che si dicono sferici, di una sfericità perfetta; dalla quale se non si allontanano molto nella maggior parte dei casi, comparendo soltanto od un poco ovali, o sferoidali alquanto compressi; altre volte ne si mostrano ora schiacciati sopra una faccia e quasi emisferici, or aventi più faccie, or a forma di lenti ec. per nulla dire di altre irregolarità più mostruose in certo modo, come quando si fan vedere angolosi, cornuti, od irti di più punte: i quali casi rarissimi concepir possiamo che nascano da fortuiti accozzamenti, dall' agglomerarsi ed innestarsi più grani in uno, ec., siccome di quelle altre irregolarità meno strane, di quelle compressioni, possono essere stati causa, o il troppo impeto con cui furon ballottati e lanciati, o dei colpi di vento, o qualche parzial fusione da essi sofferta, sia colassù tra lo danzare tumultuoso, sia vicino a terra, nel cadere framescolati a pioggia, od altro qualsiasi accidente.

Tutte queste varietà di forma e di costituzione ne' grani di grandine si conciliano benissimo colla supposizione del saltellare e danzare che fanno lunga pezza cotesti grani, quali essi sieno, mandati e rimandati dall' uno all' altro strato di nubi per largo intervallo di aria molto umida, sparsa fors' anche quà e là di altri nuvolotti rari, o piccioli volumi di nebbia, come già si è detto e come ci possiamo facilmente figurare: si conciliano, ripeto, benissimo con tal supposizione; anzi non veggo come in altra maniera potrebbe spiegarsi l' ingrossamento sovente così grande di detti grani. Non facendo per tanto più alcun conto di siffatte varietà, che nulla cangiano al fondo della cosa, e che al proposito della supposta danza la richiedono tutte ugualmente; ripigliamo il nostro assunto, richiamando l' osservazione importantissima, che ciascun grano di grandine presenta comunemente, anzi sempre, eccettuato soltanto qualche caso rarissimo che abbiam quì sopra indicato, e di cui torneremo a parlare, una picciola massa bianca e spugnosa, talora anche grandicella, che ne occupa il centro, e che è vera neve. Questa osservazione della macchia bianca o fiocchetto centrale ben distinto, è stata fatta già da lungo tempo, ed è notissima a chiunque ancora non è fisico; siccome ignorar non può chi lo è, l' origine e la qualità di neve che ritiene tuttavia là dentro a quella massa di ghiaccio solido che la involge e stringe.

Si conviene dunque generalmente, che de' fiocchetti di neve siano il primo elemento della grandine, la base di ciascun grano, di cui formino il nucleo. Ora io amo di rappresentarmeli cotali fiocchi di una neve straordinariamente fredda, cioè molto oltre il termine della semplice congelazione dell' acqua, come ho insinuato ch' esser denno in certi casi; amo di rappresentarmeli che danzano e saltellano tra due gran tavolati di nuvole elettriche contrariamente; che rompono con tal movimento impetuoso e tumultuante molti vapori vescicolari, che incontrano tra via, e molti ancora di quelli delle istesse nubi da cui vanno e vengono cacciati e ricacciati con forza, e in cui perciò si affondano ogni volta più o meno; che al di più si tirano addosso anche il vapore non vescicolare nebuloso, ma trasparente, sparso nell'aria molto umida, che attraversano; e che per tutte queste guise acquistano nuove e nuove incrostazioni di ghiaccio, come spero di avere abbastanza spiegato. Se cotesto giuoco non dura che un breve spazio di tempo, ecco che ne viene a cadere una grandine, dirò così, appena sbozzata, formata di granellini minuti (somigliante a certi piccioli confetti di semi di curiandolo zuccherati) che chiamiam *neve gelata*, e i francesi *grésil*: ordinario prodotto di certi temporali deboli e passeggieri. Al contrario, se il temporale si sostiene, se le nubi coprono lungo tempo il cielo, e mormorano inquiete, la maggior parte però immobili all'alto, le altre al di sotto più o meno vaganti; se non iscaricano la loro elettricità, che in parte; se durano un gran pezzo senza dissiparsi nell' aria, o diffondersi largamente ad altre parti dell' orizzonte, o senza precipitarsi quelle di uno strato sopra quelle di un altro, e confondersi insieme; se stazionario in somma e senza quasi cambiare il tetro suo aspetto mantiensi per delle ore il temporale; se il freddo straordinario, ciò che più fa, continua sempre tanto in esse nuvole, quanto nell' intervallo tra uno strato e l' altro: i grani di grandine in queste circostanze, ed altre favorevoli, che non saprei tutte annoverare, e ch' è difficile per altro che s' incontrino tutte, potranno giungere a forza di nuove incrostazioni ad una grossezza prodigiosa.

Egli è vero che richiedesi a tal uopo, per tener sospesi cioè in aria e far saltellare così de' grani anche solo di mezzana grossezza, che son pure non poco pesanti, non che i grossissimi e pesantissimi, una forza elettrica di cui non abbiamo idea. Ma tale è effettivamente quella delle nubi ne' temporali, e in alcuni soprattutto. Per convincersene basta osservare come delle volte un nembo tempestoso, che non sarà ancora elevato sopra l' orizzonte 45 gradi, affetta già l' aria serena che sta sopra il nostro capo, in guisa che l' elettroscopio atmosferico, che noi alziamo, ne dà dei segni sensibilissimi, e non solamente quando l' elettricità del nembo è della medesima specie di quella dell' aria, cioè *positiva*; ma ben anche quando ella è contraria, o sia *negativa*. Ognuno giudichi da ciò quale debba essere la forza elettrica di quegli ammassi di nuvole, che estendono così la loro sfera di attività a molte leghe di distanza; quale debba essere, dico, la forza tanto attrattiva, che repulsiva sui corpi vicini, a norma dello stato in cui si trovano questi, o di niuna, o di omologa, o di contraria elettricità; e se essa non sarà valevole a cacciare e ricacciare da strato a strato i grani di grandine più pesanti che siansi mai veduti (elettrizzati essi pure alternativamente *in più* e *in meno*) con maggior facilità di quella, con cui noi facciam ballare le piume e le pallottole di midollo di sambuco co' nostri apparecchj, e la nostra meschina elettricità artificiale, la quale non estende che a pochi piedi la sua sfera di attività.

Ritornando al nucleo nevoso, non voglio dissimulare, che sovente i granelli di neve gelata (*grésil*) di cui ho già parlato, e alcune volte pur anche i grani più considerabili di una vera grandine, si mostrano senza l' indicato nucleo o corpicciuolo bianco centrale, come ne ho già fatto cenno. Questi grani che costituiscono una specie particolare di gragnuola, io li credo col sig. De Luc juniore (che dimora a Ginevra, fratello del famoso autore delle *ricèrche sulle modificazioni dell' atmosfera*, e di tante altre opere, il qual vive a Londra,) li credo prodotti originariamente da goccie vere di pioggia, cadenti da una nuvola superiore, che si sono agghiacciate nell' attraversar indi uno strato di nuvole, inferiore freddissimo. Questo Fisico e naturalista illuminato, osservatore non meno attento e sagace del suo fratello maggiore, ha notato molto bene le circostanze del fenomeno rimarcabile di cui si tratta; e si è assicurato un giorno (era verso la fine di autunno) che cadeva a Ginevra una grandine di tale specie, si è, dissi, assicurato che lo strato di nubi superiore che distillava una picciola pioggia, non era tanto freddo quanto lo strato inferiore, trovandosi questo effettivamente di alcuni gradi sotto il termine della congelazione, mentre l'altro superiore aveva una temperatura di qualche grado sopra tal punto.

Una tale osservazione non conferma ella l' idea che io mi sono formata, e su cui insisto tanto, del raffreddamento del primo basso strato di nuvole, mercè l' evaporazione che questo soffre, e che dà origine ad un secondo strato superiore? Il tempo essendo calmo, io non veggo come si possa spiegare altrimenti cotesto freddo più grande dello strato nuvoloso inferiore. Con tutto ciò, mi si dirà, è ben lungi che succeda sempre così: allorchè ci avviene di attraversare più di uno strato di nuvole, salendo sopra montagne molto elevate, i più alti strati ancorchè nuvolosi, trovansi d'ordinario i più freddi. Io non negherò questo: le nubi per se stesse sieguono la temperatura delle regioni d' aria che occupano; per conseguenza non è che nei casi, in cui la nuvola superiore si è formata a spese dell' inferiore preesistente, la quale ha sofferto una grandissima evaporazione, non è che in questi casi, che tale nuvola inferiore impoverita, può trovarsi più fredda della superiore, supponendo il tempo calmo; poichè se regnano dei venti di diversa temperatura, se han luogo delle correnti d' aria ascendenti, discendenti, ec.. è facile comprendere come possa dominare accidentalmente uno strato d' aria temperato nella regione più alta, ed uno freddo nella bassa. Ora io son persuaso che in occasione di temporale, allorchè le nuvole inferiori minacciano la gragnuola, siano sempre queste le più fredde, freddissime anzi oltre modo, o si tratti di una grandine propriamente detta col nucleo nevoso incrostato da una o più lamine concentriche di ghiaccio, o si tratti dei minuti grani di neve gelata (*grésil*), o finalmente di quell' altra specie molto più rara, consistente in grani solidi e pieni, formati da goccie di pioggia gelatesi nella loro caduta, di cui or ora parlavamo. In quei temporali per tanto, che sono, apparentemente almeno, preceduti ed accompagnati durante la lor formazione da calma, scatenandosi i venti contrastanti, e turbinosi solamente allo scoppiare della procella, in tali temporali, dico, in cui appajono dal lor principio fino al maggior pieno quasi immobili gli ammassi nuvolosi, eppure vi si sta fabbricando ed ingrossandosi la grandine, non può credersi che il freddo oltremodo intenso delle nuvole più basse zeppe di tal grandine vi sia stato portato da alcun vento: e d'onde mai, se stato anche ve ne fosse senza farsi in alcun modo da noi sentire, lo piglieremmo cotanto freddo? Resta dunque, che all'evaporazione sofferta da esse nuvole, ad un' evaporazione estremamente grande e rapida nelle date circostanze, sia dovuto un sì prodigioso raffreddamento, la totale o parziale loro congelazione, ec., ciò che è stato uno de' principali miei assunti in questo scritto e ne' precedenti. *(10)*

---

(10) Veggasi l' ottava e la nona delle mie lettere *sulla meteorologia elettrica*.

PARTE III

Ho ancora molte cose a dire in favore della mia supposizione esposta ne' precedenti articoli, dei due strati cioè di nuvole elettrizzati contrariamente l'uno all'altro ad un altissimo grado, massime il superiore, e separati da un intervallo assai grande; fra i quali io poi immagino che dei fiocchi di neve, da prima semplici e leggeri, indi più grandicelli, e rivestiti mano mano di lamine di acqua congelatesi sopra di essi, in virtù dell' estremo freddo de' medesimi, e cambiati per tal modo in vera grandine, sono cacciati su e giù, e ballottati per lungo tempo; durante il quale non cessano d'ingrossarsi vie più per nuove incrostazioni di ghiaccio.

Quanto alla prima parte di questa ipotesi, che stabilisce tali strati presso a poco orizzontali, distinti e separati non solo, ma animati da opposte vigorose elettricità, se non in tutti i temporali, ne' più complicati almeno, e segnatamente in quelli, in cui vien fabbricata molta grandine, e portata ad un' insigne grossezza, io potrei aggiungere alle già addotte, diverse altre osservazioni che molto la favoriscono, e sforzano, direi quasi, ad adottarla. Una di queste è quel passaggio frequente, e talvolta quasi repentino dall' una all' altra elettricità contraria, che scorgesi negli elettroscopj atmosferici esposti a tai temporali: di che ho parlato già, riportando che fin 14 di tali inversioni di elettricità mi è accaduto di osservare nel tempo di un minuto. Ora non possiamo figurarci, che in così breve spazio si cambj tante volte la nuvola soprastante all'elettroscopio, e sottentrino alternatamente con tanta rapidità le une alle altre delle nuvole elettrizzate in senso contrario: e il figurarselo ancora sarebbe contrario al fatto, quando osserviamo, che la nube da noi esplorata è presso a poco stazionaria, o rimane immobile, che in somma è per lungo tempo la medesima. Non v' è dunque altra maniera, onde spiegare il suddetto avvicendarsi de' segni nell' elettroscopio, marcando esso un momento l' elettricità *per eccesso*, un momento dopo, quella *per difetto*, indi tosto la prima, poi di nuovo la seconda, ec., fuori che supporre che possedendo la nuvola o lo strato di nuvole, verso cui s'alza esso elettroscopio, un' elettricità qualsiasi, (verisimilmente la *negativa*) un'altra nuvola od uno strato di nuvole superiore possegga l' elettricità contraria ad un grado molto più forte; per cui quando l' un nuvolo o strato si avvicina all' altro, e a misura che si accostano, l' atmosfera elettrica del superiore contrabbilanciando colla sua azione o sia *elettricità premente*, come da alcuni si chiama, l' elettricità contraria più debole dell' inferiore, va affievolendo mano mano la *tensione*, e i segni di questa, o li toglie del tutto, o avanzandosi più ancora, obbliga esso nuvolo inferiore a dar segni di quella elettricità contraria prevalente: così poi scostandosi i due strati, van mancando gradatamente questi segni di elettricità *accidentale* fino al zero; e più oltre risorgono e van crescendo quelli della *reale* contraria, ec.

Tutto ciò viene rappresentato benissimo con due piattelli elettrizzati artifizialmente, uno ad un debol grado *per difetto*, e montato sopra uno de' nostri elettrometri a boccetta, l'altro ad un grado più forte *per eccesso*, il qual tengasi isolato sopra, e parallelamente al primo a varie altezze. Quando il piattello superiore sta molto alto, l'inferiore dà segni di tutta o quasi tutta la sua elettricità *negativa*, che è poca, come dicemmo; ma a misura che quello si abbassa, o che alziamo verso di lui il piattello inferiore, scemano cotai segni in questo, finchè ad un certo punto di vicinanza cadono del tutto, ed a maggiore prossimità ancora vi sorgono quelli dell' elettricità contraria propria del piattello superiore. Nè è già che cotesta elettricità soperchiante vi si sia effettivamente comunicata, cioè che abbia avuto luogo una reale trasfusione: niente di questo (salvo che un troppo grande accostamento abbia provocato una qualche scarica od esplosione di scintilla:) egli è per semplice *pressione*, o sia per la sola *azione dell' atmosfera elettrica* prepotente del piattello superiore, che viene costretto l' inferiore a dar segni di elettricità *positiva*, comunque ritenga ancora la sua *negativa*: in prova di che, ritirando gradatamente quel piattello superiore, van decadendo pure per gradi i segni nell' inferiore di cotal elettricità *accidentale*, o *di pressione* fino al nulla, e fino al risorgere, a misura che cresce ancora l'allontanamento, i primieri segni della propria elettricità *negativa*.

Somigliante dunque possiamo figurarci, anzi dobbiamo credere che sia la condizione delle nubi temporalesche, quando l'elettroscopio innalzato verso l'inferiore loro strato, contro ad un nuvolo, che non si cambj già, nè venga altrimenti portato via da' venti (dei quali casi, che accadono sibbene, non parlo or qui,) pur ce lo mostra che muta da un momento all' altro lo stato di sua elettricità, passando per gradi più o men rapidamente, e tal volta quasi per salto, dall' una all'altra opposta. Ammessi i due strati, è facile immaginare che s' accostino e s' allontanino vicendevolmente, or più or meno e a varie riprese; che ascenda o discenda or l' uno or l' altro, or si movano ambedue, quando avvicinandosi, quando scostandosi, spinti da venti o correnti d' aria ascendenti o discendenti (che sembrano in fatti aver luogo di frequente ne' forti temporali,) o variamente sollecitati dalle stesse forze elettriche, sì dispiegate da essi, che procedenti da altri ammassi di nuvole al di fuori, ec., è facile rappresentarceli que' due strati moventisi su e giù, e come ondeggianti tra loro: e tanto basta per tutte quelle mutazioni di segni elettrici, di cui parliamo, che imitiamo così bene colle nostre sperienze de' piattelli, come si è veduto, e che in tutt' altra maniera sarebbero inesplicabili, ma intese così, cessano fin anche di essere sorprendenti.

Un' altra osservazione molto pure favorevole, e conducente quasi per necessità ad ammettere i due strati nuvolosi contrariamente elettrizzati ne' temporali di cui si tratta, è quello che ho rimarcato già da molti anni, e che altri probabilmente avran rimarcato anche prima di me, cioè: che i temporali i quali vanno a scaricare e profondere grossa grandine, non soglion essere i più minacciosi e i più a temersi per riguardo a' fulmini, giacchè rarissimi son questi ove quella si prepara ed è imminente. E non è già, che non domini molto l' elettricità in sì fatti temporali grandinosi; che anzi il mormorar quasi continuo de' tuoni, e la frequenza dei lampi per assai lungo tempo, annunziano e mostranci evidentemente, che una prodigiosa quantità di fluido elettrico è messa in giuoco: eppure non avvengono scariche fulminee contro terra, o poche, in tali circostanze, in cui parrebbe che dovessero essere frequenti. Ora si può render facilmente ragione di un tal fenomeno, tostochè si ammettano con me i due strati nuvolosi elettrizzati in senso contrario: basta dire, che siccome lo strato inferiore, dal quale si potrebbero temere i colpi di fulmine, rivolge allora la sua azione e forza principalmente verso lo strato superiore contrariamente elettrico: così le scariche si fanno dall' uno all'altro. anzichè contro la terra; i nuvoli o si saettano fra loro, o con ampj e più facili trascorrimenti van ripartendosi lo stesso fluido fulmineo già cotanto sbilanciato: quindi quei lampi frequenti e quasi continuati; quell' infocamento che talora appare di questo o di quel tratto, e fin di tutta la volta nuvolosa; quel mormorar sordo e come da lontano del tuono *(11)* (e ciò perchè gli scoppj accadendo al di sopra dello strato nuvoloso a noi più vicino, questo ne smorza il suono, che dee giungere al nostro orecchio;) quel mormorar, dico, quasi senza intermissione; quel fremito del cielo e dell' aria, che ci atterrisce, e ch' io non saprei descrivere: sintomi tutti che minacciano grandine, e grandine copiosa.

---

(11) Roulement du tonnerre dicono i francesi; ed è in fatti un suono che rassomiglia a quello di carri pesanti tirati sopra a delle strade lastricate, o a quello di grosse palle, che si faccian rotolare sopra alle soffitte.

Io ho per disgrazia molti esempj sì antichi che recenti, ne'quali, dietro gl'indicati sintomi e qualche altra osservazione (come delle nuvole cinerizie vaganti sotto il gran telone più o meno scuro; e ciò nelle ore vicine al mezzodì, nelle quali il sol più cocente ha potuto sferzare la faccia superiore del primo strato nuvoloso formatosi, e divenuto in seguito temporalesco,) dietro tali sintomi, dico, ed osservazioni, ho pronosticata e indovinata pur troppo la caduta di grandini più o meno desolatrici *(12)*. Il più rimarcabile di tali esempj, e in cui comparvero più spiegati i detti sintomi, è la grandine spaventosa caduta la notte del 19 al 20 agosto dell' anno 1787, che ha devastate le campagne ne' contorni di Como in un' estensione di 30 miglj di lunghezza sopra 20 circa di larghezza. Il temporale non avea cessato di mormorare nel modo sopra descritto dalle 2 ore pomeridiane fino a mezza notte, allorchè succedette quell' orribile scarica di grandine sterminatrice; e durante tutto questo tempo, non cadde, che si sappia, alcun fulmine; non v'ebbe alcun luogo eminente o basso colpito; non si udirono neppure dei colpi di tuono spaventevoli od assordanti, quantunque l' elettricità delle nuvole fosse così grande, che

---

(12) In questi stessi giorni, in cui, ripigliato il lavoro già da 16 anni interrotto, sto compilando la presente memoria, cioè nel corrente giugno 1806, contemplando de' temporali, ora vicini, ora lontani, giacchè sono sì frequenti in questi paesi e nei circonvicini, ho potuto dinotare e distinguere (triste indovino!) i grandinosi da quelli che non lo erano: triste indovino pur troppo anche per me! una di tali grandini, e delle più rovinose, essendo venuta a flagellare i contorni della villa poco lontana da Como, in cui mi trovava il fatal giorno (22 giugno,) e a devastare le poche mie vigne e campi.

i lampi erano continui ed estesissimi, e tutto il cielo pareva in fiamme, la sera massimamente, e nelle ore prime della notte. Tutto il giuoco di quest' immensa elettricità, tutte quelle scariche ed effusioni della medesima, succedevano dunque lassù all' alto, senza dubbio fra nuvole o strati di nuvole contrariamente elettriche, che si bersagliavano esse piuttosto che la terra. Vi è poi tutto il fondamento di credere che la grandine abbia cominciato a formarsi durante il giorno, allorquando il sole saettava i suoi raggi sulla faccia superiore della nube che divenne utero e culla di essa grandine; quantunque questa non cominciasse a cadere che a notte innoltrata, cioè a 10 ore in alcuni luoghi, a 11 a 12 in altri, e in qualche sito più tardi ancora. *(13)*. Almeno egli è evidente per questa stessa dilazione di tempo osservatasi, che una gran parte dei grani, alcuni dei quali grossi come ovi di gallinaccio, e molti pesanti più di 9 oncie, han dovuto essere sostenuti in aria per delle ore. E che facevano essi mai colassù? S' ingrossavano, s' impinguavano, diciam così, saltando e danzando, come io penso, e come è facile di figurarsi, fra i due gran tavolati di nuvole, i quali elettrici contrariamente, se li rimandavano a vicenda, e rivolgevano le loro forze l' un contro l' altro; fino a tanto che scaricati questi strati nuvolosi in gran parte, e omai esausti di tali elettricità, che andavano

---

(13) Ho voluto produrre quest' esempio di grandine caduta a notte avanzata, in prova che, sebben rarissime volte, conforme si è già fatto osservare, pur ne avvengono anche in tal tempo: nei soli casi però, come pare, in cui ha potuto formarsi essa grandine di giorno sotto l' azion potente de' raggi solari.

vicendevolmente distruggendosi, e non avendo quindi più tanta forza da cacciare e ricacciare cotali grani divenuti troppo pesanti, han dovuto lasciarli precipitar sulla terra: e ciò a diverse epoche nei diversi siti, secondo che, corrispondentemente a diversi tratti di essi strati nuvolosi estesissimi; più presto o più tardi veniva a mancare cotal forza elettrica abile a sostenere la grandine in aria, e mantenerla in ballo.

Quest' altra parte della mia ipotesi, che riguarda la danza, o sia il vivo e frequente saltellare de' grani di grandine, che ho descritto, e di cui mi prendo qualche volta piacere di rappresentarmene una bella immagine, gettando una manciata di leggieri pallottole fra due lenzuoli o tappeti tesi orizzontalmente un sopra l' altro ad una conveniente distanza, ed elettrizzati uno *positivamente*, l' altro *negativamente*, e mantenuti lungo tempo in tale stato di contrarie elettricità piuttosto forti; questa parte, dico, non meno curiosa che importante della mia ipotesi, confesso che ha bisogno ancora di prove, quantunque ella abbia in suo favore, oltre l' indicata bella rappresentazione, la teoria elettrica medesima, e ch' essa si accordi molto bene con molte circostanze ed accidenti rimarcabili che precedono ed accompagnano la grandine, come ho spiegato. Con tutto questo ella non va esente, il vedo, da qualche difficoltà; e altronde si trova appoggiata a sole congetture, molte in vero e plausibili; ma non ancora ad alcuna osservazione diretta, che la dimostri e la renda così evidente da non lasciar luogo a dubitare. Eccone però una che toglierebbe qualunque dubbio, e finirebbe di convincerne, se essa fosse ben certa e confermata. Molte persone assicurano aver sovente inteso all' accostarsi della grandine, e sì anche un tempo considerabile avanti la sua caduta, un certo strepito o scroscio nella nube che comparivane carica, somigliante a quello di un mucchio di noci che venissero sommosse, oppur versate da sacchi. Se questo scroscio pertanto non era l' effetto, come potrebbe sospettarsi, della grandine già cadente e percuotente la terra in altri luoghi più o meno lontani; se, come tali persone sostengono, si sentiva molto prima che essa grandine avesse cominciato a sfogare; se veniva tal rumore manifestamente dall' alto *(14)*; è chiaro che ciò non potè esser altro che il ballo tumultuoso della grandine medesima, quale io lo suppongo, cioè il romore cagionato dalla collisione dei grani di questa, già grossi e solidi, dal cozzar fra loro nell' andar e venire in folla e in furia da un nuvolo all' altro cacciati e ricacciati più volte, prima di trapassare la nube inferiore, e venir a battere la terra cadendo.

Se qualcuno fosse così ardito di montare in un pallone aerostatico in mezzo ad un gran temporale, fino ad attraversare il primo strato nuvoloso, quale spettacolo imponente non gli offrirebbe il combattimento delle nubi, le varie loro incursioni, il fuoco elettrico versato a torrenti, ec.? Sarebbe egli allora a portata di osservare, di studiare ciò che ora c' interessa, la forma-

---

(14) Nell' articolo *grandine* dell' antica enciclopedia si parla pure di tale strepito preveniente della grandine, come di cosa nota; e si ripete dall' urtarsi che fanno in aria i suoi grani: non dubitando neppure l' autore, che quello strepito venga dall' alto, e che preceda la caduta di essa grandine sulla terra.

zione della grandine, le sue modificazioni, i suoi movimenti: vedrebbe se quella specie di danza, quel saltellare su e giù de' suoi grani spinti e rispinti da uno strato nuvoloso all' altro, che mi piace di supporre, ha luogo effettivamente, e fino a qual segno; vedrebbe se m' inganno in tali mie immaginazioni, o se colgo giusto in qualche parte almeno. In mancanza di queste osservazioni nel seno stesso de' più fieri temporali, che niuno potrebbe intraprendere senza esporsi ad evidenti gravissimi pericoli, non ne abbiamo noi delle altre fatte da alcuni de' più intrepidi aeronauti in tempi meno procellosi, le quali possano in qualche modo supplire? Senza parlare del freddo eccessivo, che comunemente hanno essi incontrato nella regione delle nubi, io mi riporto a quello, che mi sovvengo di aver letto nelle relazioni di alcuni di cotai viaggj aerostatici, cioè, che quando ebber que' volatori toccato colla macchina aerea il primo velo di nubi, e penetrandole quinci vi furono immersi tanto d' averne già sorpassato uno strato o più, si trovarono con sorpresa involti da fiocchi di neve, quantunque non fosse inverno, e da piccioli grani gelati (*grésil*), che saltellanti percotevano da tutte le parti la stoffa del loro pallone, e ne venivan rimbalzati: e ciò in un tempo, in cui non cadeva niente sulla terra nè di tai fiocchi, nè di tai grani di neve gelata. Senza dubbio eran questi, rudimenti od embrioni di grandine; e sembra che cotali grani fossero già dotati di un principio di quel movimento che li avrebbe fatti ballare e saltare con vivacità, nel modo ch' io ho descritto parlando della vera grandine, se in vece d' un temporale che potea dirsi appena iniziato, e in niun modo avvertito dagli abitanti della terra, si fosse trattato di un vero temporale, potente in elettricità, tuonante, e, ciò che più fa al nostro caso, minacciante grandine rovinosa.

Dopo tutto questo bisogna pur convenire, che se non può dirsi ancor dimostrata, è resa sommamente probabile anche questa parte della mia teorìa, che riguarda la lunga sospensione in aria, e la danza sostenuta della grandine che va ingrossandosi. Le altre parti risguardanti l' esistenza delle due contrarie elettricità in nuvole o strati nuvolosi separati a varj intervalli, e il freddo intensissimo, onde è compreso uno almeno di questi strati, cioè l' inferiore, o sia quello in seno a cui formansi i fiocchetti di neve, primi embrioni di essa grandine, non han bisogno, mi lusingo, dopo le cose dedotte negli antecedenti articoli, di ulteriori prove.

Non posso abbandonare questo soggetto senza risolvere alcune delle principali difficoltà, che non ho per anco prevenute, e rispondere a due o tre altre questioni. Come mai, dirassi, si può concepire che due strati nuvolosi contrariamente elettrizzati si tengano giustamente alla distanza richiesta, per attrarre e rispingere alternativamente da prima i semplici fiocchi di neve, in seguito questi medesimi intonacati di ghiaccio sodo, e trasformati così in grani pesanti di grandine, senza permettere loro di cadere a terra; e ciò per un tempo lunghissimo? Non è egli evidente, che tali strati di nubi attraendosi, si accosterebbero, e si confonderebbero ben tosto in una massa?

Si può rispondere a questa obbjezione, che il nuvolo inferiore non è attratto soltanto dal superiore elettrico contrariamente, ma ben anche dalla terra, particolarmente dalle montagne, dalle foreste, ec., alle quali veggiamo che le nubi si accostano e si attaccano di preferenza; e che in tal maniera può essere cotesto nuvolo inferiore contrabbilanciato; non altrimenti che può esserlo ancora il superiore da un terzo che lo attragga in senso contrario. In questo caso le masse dei due strati nuvolosi dotati delle opposte elettricità, dei quali si tratta, restando immobili, od in una semplice oscillazione, in quella specie di ondeggiamento, che abbiamo di già considerato (spiegando il sì frequente cambiarsi dei segni nell' elettroscopio atmosferico), le parti delle loro superficie interne cederanno sole alla tendenza mutua che le sollecita; esse si gonfieranno, soffrendo come una specie di flusso; se ne distaccheranno ben anche dei brani, e fin dei grossi pezzi, che andranno su giù, innanzi indietro dall' uno all' altro strato a vicenda: ciò che faranno con molto maggior agilità, frequenza, e tumulto i fiocchi di neve, e i grani di grandine, se ve ne hanno framezzo, picciolo essendo il volume d' aria, che ciascun d' essi deè smovere. Imperocchè ecco ciò che ritarda il moto di andare e venire, sia di detti brani, sia di altre nuvole interposte, e soprattutto l' accostamento di uno strato intiero verso l' altro, quando pure tali moti hanno luogo, ed esse nuvole o strati non sono ritenuti da altre forze: egli è il loro gran volume, e quello dell' ampio strato d' aria intermedio, che resiste al suo spostamento, e fa che tali nubi estese non possano avanzarsi l' una verso l' altra, che con lentezza più o meno grande.

Ma senza tutte queste considerazioni, il ritardo alla riunione delle nuvole contrariamente elettrizzate, è un fatto di cui non si può dubitare, allorchè si osservano i cambiamenti dei segni elettrici dal *positivo* al *negativo*, e *viceversa*, più volte per tutto il tempo che dura quel tal temporale, cambiamenti che abbiam già fatti osservare: il che certamente non avrebbe luogo, se le nuvole elettriche *in più* raggiugnessero tosto quelle elettriche *in meno*, verso le quali tendono, e si riunissero in una sola massa. Questo ritardo è qualche volta così grande, che una tal riunione non ha luogo neppure a capo di molte ore, duranti le quali l' elettricità o si dissipa altrimenti, o passa sibbene dall' uno strato nuvoloso all' altro, non però tutta ad un tratto, ma una porzione per volta, in virtù di scariche, sia romorose e sensibili, sia insensibili, per mezzo singolarmente de' corpi interposti che non cessano di andare e venire, o se non altro, per mezzo de' sparsi vapori. Altre volte per lo contrario essa riunione si fa tosto, o in pochi momenti, ajutata da un vento o da altra circostanza favorevole. Tosto o tardi che succeda, le nuvole aggiugnendosi l' una all' altra, o compenetrandosi in qualche maniera, e quindi le elettricità contrarie distruggendosi vicendevolmente, ne siegue d' ordinario un forte rovescio di pioggia, e la grandine, se ve n' era colassù, abbandonata tutt' ad un tratto al suo proprio peso, si precipita sulla terra.

Un' altra obbjezione potrebbe per avventura cavarsi da queste medesime osservazioni, che ho allegate in favore della mia ipotesi; le quali ci mostrano i nostri conduttori atmosferici in occasione di temporale, sia esso grandinoso o no, elettrizzati ora *positiva-*

mente, ora *negativamente*: giacchè sembra che dovrebbero esserlo sempre *negativamente* ne' grandinosi, s' egli è pur vero, che in cotesti temporali lo strato nuvoloso inferiore, quello cioè che trovasi più vicino alla terra, ha acquistato appunto un' elettricità *per difetto* dopo la perdita dell' originaria *per eccesso*, a forza di evaporazione, come vuole tal mia ipotesi, e come ho spiegato ed ho cercato di provare con ogni maniera di argomenti. La sperienza, dirassi, è poco d' accordo con siffatta ipotesi; giacchè molte volte detto strato inferiore dà segni di elettricità *in più*, in vece di darli *in meno*. Ed io rispondo che anzi l' esperienza è favorevole; attesochè effettivamente l' elettricità *negativa* o *in meno*, è quella che domina comunemente, o che domina di più, in mezzo ai cambiamenti accidentali, ne' gran temporali, come i primi osservatori attenti dell' elettricità atmosferica lo aveano di già notato, e noi lo troviamo confermato ne' nostri giornali meteorologici.

Che se non di rado si mostra anche l' elettricità *positiva*, quand' anche si mostrasse tanto sovente quanto la *negativa*, il che non è; io posso sempre dire che altre cause han portato questo accidente: delle cause che non sono già immaginarie o gratuite, ma reali e provate, di cui noi conosciamo l' efficacia, e che sono giustamente capaci di produrre il cangiamento di cui si tratta. Io ho principalmente in vista l' azione delle *atmosfere elettriche*. Facciasi dunque che lo strato nuvoloso superiore elettrico fortemente *in più* discenda verso lo strato inferiore elettrico, giusta la mia ipotesi, *in meno*, ma più debolmente; o che questo ascenda verso quello; che s' accostino in somma più o meno: questo accostamento potrà esser tale, che la debole elettricità del nuvolo inferiore venendo intieramente contrabbilanciata, cada del tutto; sarà allora uno di quei casi, che non sono già estremamente rari, in cui, in mezzo al forte di un temporale, si osserva come una sospensione di segni elettrici nel conduttore atmosferico, e l' elettrometro marca zero: potrà esser tale, che i segni di elettricità *in meno* vengano soltanto indeboliti, poco o molto; il che succede più spesso: e tale finalmente da farvi comparire quelli di un'elettricità *in più, accidentale*, o come si dice *di pressione*; il che pure accade non di raro. Tutto questo lo abbiamo spiegato più ampiamente al principio di questa sezione, e messo sott' occhio col paragone ancora di analoghe sperienze fatte coll' elettricità artificiale, coll' esempio cioè de' due piattelli elettrizzati, quel vicino od annesso all' elettrometro *in meno*, l' altro superiore, portato a diverse distanze, *in più* ad un grado più forte: e i cambiamenti e passaggi, spesso sì frequenti in certi temporali, dall' una all' altra elettricità opposta, imitati così bene con tali sperienze de' piattelli, ci hanno servito di prova dimostrativa dell' esistenza in sì fatti temporali di due strati o ammassi di nuvole contrariamente elettrizzati. Riguardo però all' essere piuttosto l' inferiore che il superiore elettrico *in meno*, convengo che nulla potrebbe inferirsi nè da queste sperienze nè da quelle osservazioni. Ma le ragioni, e. posso dire, le prove altronde dedotte per istabilire che sia proprio l' inferiore strato quello, in cui ha preso luogo l' elettricità *negativa*, son tali e tante (raccolte nelle altre due sezioni di questa memoria, e sviluppate già in gran parte nella ottava mia lettera sulla *meteorologìa elettrica*), che pare non se ne possa dubitare; e un indizio ne abbiamo ancora da ciò, che, come testè dicemmo, in mezzo ai varj cambiamenti che accadono duranti i grossi temporali, i nostri conduttori atmosferici soglion darci più segni di cotesta elettricità *negativa*, che della *positiva*.

Non è dunque un' obbjezione che valga contro l' elettricità *per difetto* delle nuvole inferiori, l' osservarsi talvolta, ed anche non di rado, segni di quella *per eccesso*; all' incontro ne è una conferma il vedere, che si abbiano più spesso o più lungamente i segni appunto di essa elettricità *per difetto*. Altronde è troppo facile il render ragione dell' elettricità *di eccesso* soltanto *accidentale*, o sia *di pressione*, che vi appare: è facile, dico, renderne ragione, supponendo che vi sian giusto i due strati nuvolosi, quali li abbiamo considerati, nè più, nè meno; i quali ondeggiando in certo modo, or s' accostino fra di loro, or s' allontanino, come pure si è da noi spiegato. Ma non può egli darsi ancora, che sotto lo strato che era il più vicino a terra, e che per la grande e rapida evaporazione sofferta è passato all' elettricità *in meno*, si formin altre nuvole? Queste essendo allora, siccome di nuova formazione, elettriche *in più*, affetteranno parimente *in più* il conduttore atmosferico, salvo che siano contrabbilanciate o vinte dall' elettricità contraria dello strato che sta lor sopra. Di più egli non è impossibile, è anzi probabile, come accennato abbiamo fin dal principio di questa dissertazione, che in alcuni temporali vi siano più di due e di tre ampj strati, e in oltre altre nuvole sparse da molti lati, parte isolate e nuotanti, parte aggruppate, ec., dotate esse pure di elettricità contrarie; e allora non può che succedere frequentemente, in mezzo ai combattimenti di queste nuvole, ai loro movimenti cagionati dalle attrazioni e repulsioni elettriche, dai vènti, ec., che ora l'elettricità di una, or quella dell' altra, mercè singolarmente l'azione delle rispettive atmosfere, diventi prevalente sopra le nostre teste o sopra la colonna d'aria, nella quale trovasi inalzato il conduttore francliniano. Per tal maniera s' intende anche più facilmente, che nella supposizione di due strati soli, come nel forte del temporale, allorchè il combattimento delle nubi e de' vènti è più fiero, i movimenti di quelle più tumultuosi, i lampi frequenti, e le scariche fulminee fra le nubi medesime moltiplicate, si osservino in questo conduttore, e meglio nell' elettroscopio atmosferico portatile, dei passaggi e ritorni così frequenti e quasi istantanei da una specie di elettricità all' altra: ciò che non succede, almeno con tanta rapidità, sul principio ed alla fine di questi medesimi temporali, nè durante il corso di quelli che sono meno strepitosi e men complicati, nei quali l' elettricità dominante, vo' dir quella che si fa sentire al conduttore atmosferico, è per lo più l' elettricità *negativa*, come ho fatto osservare.

Ammettendo cotai temporali formati, come appare che ve ne siano realmente, di più strati od ammassi di nuvole variamente elettrizzati, sopra, sotto, e ai lati, e di altri gruppi ancora quà e là sparsi, può sembrare ch' io m' allontani troppo dalla primiera supposizione, di uno strato cioè inferiore elettrico *in meno*, e di un superiore elettrico *in più*, paralleli all'orizzonte e fra loro; fra i quali danzino e saltellino lunga pezza cacciati e ricacciati con impeto i grani di grandine, come veggiam saltellare le pallottole di sambuco fra due piatti nelle nostre sperienze di gabinetto. Debbo dunque dichiarare ch'io ho formata tal supposizione, e presentata tal immagine, e me ne son valuto come della più semplice a far intendere la mia teoria: la quale vuole sibbene per la formazione e ingrossamento della grandine le due contrarie elettricità in due strati nuvolosi distinti, e l'indicata danza prima di semplici fiocchi di neve, indi dei medesimi cresciuti per successive incrostazioni di ghiaccio a veri grani di grandine mano mano più grossi; ma non esclude altri strati ed altre nuvole in qualsisia numero, posizione, e forma; nè esige di necessità il supposto esatto parallelismo dei due strati; giacchè possono benissimo essere mandati e rimandati i grani suddetti, piccioli o grossi, e mantenersi lungamente in ballo tra due strati inclinati all' orizzonte e fra loro, siccome pure possono sostenersi librati in aria entro al ricinto di molte nubi diverse e diversamente collocate, oscillar, saltellare; possono lanciati su, giù, di quà, di là da un corpo di nuvole all' altro, intrecciar varie danze per più o men lungo tempo.

Checchè ne sia di tai temporali così complicati, supponendoli anche più frequenti di quel che sono, penso che non sian rari quelli, che ho presi per esempio e posti come per tipo, cioè di due strati presso a poco paralleli, separati da giusto intervallo, ed elettrizzati contrariamente, l'inferiore *per difetto*, il superiore *per eccesso*: di due soli strati, dico, contando per nulla qualche straccio di nube interposto, qualche picciol nuvolo al di fuori, ed anche qualche gruppo lontano.

Mi si domanderà forse s'io riguardi la disposizione delle nubi in due o più strati separati, e l'elettricità contraria fra due almeno, come condizioni essenziali alla costituzione di un temporale. A questa domanda rispondo tosto, ch'io non pretendo ciò; che credo anzi possibilissimo, che come se ne compongono anche di più di due strati, conforme or dicevamo, così pure se ne formino di un solo ammasso nuvoloso, unito e dotato tutto di un' elettricità omologa, purchè sia questa assai forte: ma che sì fatti temporali, fuori di qualche lampo e tuono, senza dei quali non sarebbero neppur chiamati temporali, offrir non potrebbero quel gran numero di accidenti variati, che si osservano d'ordinario nelle vere tempeste: che la loro elettricità si mostrerebbe costantemente di una sola specie, cioè a dire o *positiva* o *negativa* dal principio alla fine, variando soltanto nell' intensità; ciò che non succede quasi mai ne'gran temporali: che potrebbero bene aver luogo delle scariche fulminanti fra una tal massa di nuvole temporalesche unite e la terra, in una parola, dei veri fulmini; ma non que'scoppj di tuono frequenti e ripetuti, que' sentieri o strisce di luce vivissima, e a zigzag, quasi ad ogni momento, effetti delle nuvole che si bersagliano e fulminano tra di loro: che tutt' al più comparirebbero colassù dei lampi e dei trascorrimenti di luce da un capo all' altro dell'unico telone nuvoloso, in occasione e al momento di una forte scarica contro la terra (in quella guisa, che ne compajono sopra una lunga e larga tavola cosparsa e come seminata di sottili e rare limature metalliche, od anche di minute goccie d'acqua, allorchè un torrente di fluido elettrico attraversa questi conduttori imperfetti o sia interrotti da piccioli interstizj): che finalmente codesti temporali semplici ed uniti, ne' quali o non vi fosse separazione di nuvole in differenti strati o gruppi, od essendovi, non s' incontrasse contrarietà di elettricità fra essi, non potrebbero produrre una grandine a grossi grani, o molto difficilmente: difficilmente, dico, una grandine molto grossa; giacchè per una picciola o mezzana, per il *grésil*, e qualche cosa di più, può forse bastare quella repulsione e sospensione de' grani, che anche un sol telone nuvoloso fortemente elettrico è valevole a produrre; come sul principio ho voluto supporre, prima cioè di entrar a parlare de' due strati contrariamente elettrici. Ecco ciò, ch' io penso riguardo ai temporali in generale, e sull'articolo della grandine in particolare, che è il principal soggetto di questa memoria.

Si domanderà ancora perchè non succedano quasi mai temporali d' inverno, almeno nelle nostre regioni: di que' temporali vuol dirsi, che sono accompagnati da grandi tuoni e da frequenti lampi e saette, segni manifesti di una quantità e forza stupenda di elettricità messa in giuoco in una maniera straordinaria: manco poi ne succedano con grandine massiccia e pesante. Al che è facile di rispondere che nè questo giuoco nè questa prodigiosa accumulazione di elettricità possono aver luogo, o molto difficilmente in tale stagione; e ciò in conseguenza di molte circostanze sfavorevoli, che sono le seguenti.

1°. La quantità dell'evaporazione giornaliera, intendo dei vapori elastici che si sollevano da terra, e portano il fluido elettrico ch' essi si sono appropriato, nella regione delle nubi, è molto minore nell' inverno, che nelle altre stagioni; onde le nuvole medesime non riescono allora nè così grosse nè così dense nè in conseguenza così elettriche, come que' nuvoloni scuri in primavera e in estate, che diventano temporaleschi.

2°. Questa medesima regione trovandosi più bassa d'inverno, le nubi vengono più facilmente spogliate di quella qualunque elettricità di cui trovinsi provvedute, dai conduttori terrestri, dalle montagne, dagli alberi, ec., che attraggon quelle, e smungon questa.

Aggiungasi per 3.°, che una tale sottrazione di elettricità è facilitata e promossa dall'interposizione di un'aria comunemente più umida in quella stagione, dalle nebbie, che giungon sovente fino a terra, e dalle pioggie frequenti.

4°. La durata delle notti, tempo nel quale in tutte le stagioni il fluido elettrico viene ricondotto e restituito alla terra, mercè appunto dell' umido notturno, e particolarmente delle rugiade, essendo molto lunga nell'inverno, contribuisce pur molto al ristabilimento dell' equilibrio di elettricità tra l'aria più o men alta, e la terra; di maniera che non si accumula essa elettricità nella region delle nubi un giorno dietro l'altro, e per molti di seguito, come succede spesso in primavera ed in estate.

5°. Nel breve corso di ciascun giorno invernale i deboli obliqui raggi del sole non producono in così grande abbondanza quell'evaporazione secondaria, cioè della parte superiore delle nuvole, ch' essi percuotono: evaporazione che ha tanta parte, e giuoca così bene, secondo me, nella formazione de' temporali, e particolarmente della grandine.

6°. Finalmente quel poco ancora di vapori elastici che si producono in tal modo, non si sollevano molto, obbligati dal freddo e dall' aria umida anche sopra a condensarsi di nuovo abbandonata appena la nuvola onde son sorti, se non anche prima di abbandonarla del tutto; ciò che li porta a riunirvisi; cosicchè è difficile che si formino d' inverno i due strati di nubi da me voluti, collocati cioè a giusto intervallo, ed elettrizzati contrariamente l' uno all' altro, difficile che si formino varj ammassi o gruppi separati ed elettrizzati pure diversamente. Non si vede in fatti d' ordinario in quella stagione, quando il cielo è coperto, che un sol telone o strato nuvoloso unito, più o meno esteso; e quando è in parte coperto, in parte sereno, ciascuna nuvola appar semplice, di un sol volume cioè o strato, non sormontata da altro strato disgiunto, a foggia di quelle, che osserviamo d' estate ne' temporali o già formati o che vanno a formarsi. Tali nuvole poi semplici, che regnano d' inverno, appunto perchè semplici, soglion dare segni costanti, avvegnachè deboli di elettricità *in più*, che è l'elettricità originaria delle nubi egualmente che delle nebbie, l'elettricità che risulta immediatamente dalla condensazione dei vapori, come sappiamo.

Non voglio dissimulare che si presentano anche d' inverno, sebben di rado, alcuni nuvoli più scuri e più fortemente elettrici, fra i quali ve ne ha talvolta, che lo sono *in meno*. Son questi d' ordinario nuvoli che vanno a portarci della neve, nuvoli che hanno qualche cosa di un aspetto temporalesco. Nondimeno come la loro elettricità non è ancora abbastanza potente per sostenere in aria i fiocchi di neve, e come poi manca quell' altro strato superiore di nubi separato da un giusto intervallo, ed elettrizzato in senso contrario, capace di attrarre e repellere alternativamente per un tempo abbastanza lungo questi fiocchi, di ballottarli, di far loro fare la descritta danza (*danse des pantins*), ecco che cadono essi quali sono al momento di lor formazione o poco dopo, senza aver potuto rivestirsi di lamine d' acqua congelata, e formare con ciò dei grani di grandine; tutt' al più giungono, e ciò solamente allorchè l' ammasso di nuvoli ha un poco più l' aria temporalesca, a convertirsi in quella specie di granellini gelati (*grésil*), che è media fra la neve e la grandine: fenomeno, che rarissimo esso pure d' inverno, accade più sovente in primavera ed in autunno, come è facile comprendere da ciò, che or ora si è detto.

Ecco come si può render ragione del comparir così di rado temporali nell' inverno *(15)* e del non ca-

(15) Ho avvertito sopra, che intendo parlare di queste nostre contrade; noto essendo, che in alcune altre regioni, singolarmente marittime, infieriscono i temporali anche d' inverno: dei quali voglionsi accagionare i vènti procellosi che regnano colà in quella stagione; vènti che apportando diverse temperature a varie altezze, e ora ammassando nubi sopra nu-

dere mai o quasi mai una vera grandine in tale stagione; quantunque cada tanta neve, che è per se stessa sì vicina, e diciam pure parente della grandine medesima, tanto per la sua origine, quanto per la sua costituzione; che è in somma il suo primo rudimento e la sua base. Ma d'onde viene, si potrebbe ancora domandare, che ne cade rare volte anche in mezzo ai più forti temporali nelle altre stagioni; e che non ne cade mai o quasi mai in molti paesi? Parrebbe in fatti, non considerando che superficialmente le spiegazioni, che io ho date della formazione e della ritardata caduta della grandine, per cui ha luogo il suo ingrossamento, che un gran numero di temporali, anzi la maggior parte, dovessero portarcene in quantità, e di una grossezza più o men grande: ciò che per fortuna non accade, essendo anzi rari i casi funesti.

Ma convien riflettere meglio, e richiamarsi quante circostanze sono richieste per ciò; le quali difficilmente possono incontrarsi tutte ad un tempo, come abbiam già fatto osservare: circostanze che non sono già richieste per tutti i temporali (bastando un sol nuvolo

---

bi, e addensandole oltre modo, ora spezzandole, or disciogliendone gran parte con forzata evaporazione, poi di nuovo costringendone i vapori, e quindi nascer facendo per diverse maniere, forti e contrarie elettricità, fabbricano, dirò così, estemporaneamente que' temporali. Or non fia meraviglia, se per simili accidenti avvenga anche fra noi un qualche temporale, come in altre stagioni, così pure d'inverno. Tali casi rarissimi e tali temporali son fuori del nostro soggetto. Quelli di cui trattiamo sono i temporali più frequenti e comuni, che preceduti anzi per lo più da calma, sorgono d'ordinario e si lavorano, almen da principio, nel silenzio, segnatamente i grandinosi, i quali non sogliono accadere d'inverno per le ragioni addotte qui sopra.

denso e ridondante di elettricità a segno di dar qualche tuono o lampo, per costituire un picciolo temporale; ed uno o più gruppi, od un più ampio ammasso di tali nuvoli collocati e disposti in qual si sia modo, animati però di un' elettricità strepitante, per que' temporali più grandi ed estesi che recano maggiore spavento); ma che si ricercano, secondo me, perchè nel temporale vada formandosi ed ingrossando la grandine. Primieramente adunque vi bisogna un' evaporazione abbondantissima e rapidissima di un primo strato di nuvole assai denso, una svaporazione tale, che da una parte basti non solamente a distruggere l' elettricità originaria *in più* di questo strato, ma a portarlo fin anche ad un grado assai forte di elettricità *in meno*; e dall' altra parte giunga a raffreddarlo potentemente, ad un grado, che appena possiam concepire, fino cioè a congelare una quantità considerabile delle sue vescichette, ed a formarne de' fiocchi di neve freddissimi, vale a dire molto al di sotto del termine semplice del ghiaccio; come ho fatto opportunamente rimarcare, insistendo anzi molto su tal punto. In secondo luogo debbe aver luogo ed effettuarsi una nuova condensazione dei vapori, che si sono innalzati in forma elastica dal detto primo strato nuvoloso, in guisa che se ne formi un secondo superiore dotato di una forte elettricità contraria, cioè *in meno*. Per terzo questi due strati contrariamente elettrici debbono trovarsi da principio ad una distanza che non sia nè troppo grande nè troppo picciola; e, ciò che è più difficile ancora, mantenersi lungo tempo ad un tal intervallo giusto, malgrado la mutua attrazione che tende ad approssimarli, ed a ricondurre l' equilibrio di elettricità colla loro riunione mediata od immediata. Finalmente debbono conservare le loro rispettive elettricità, non perderle troppo presto od in gran parte, sia con delle scariche immediate dell' uno contro l' altro, sia per mezzo di altri nuvolotti, o brani di nuvole, che vanno e vengono da uno strato all' altro, o s'infilano facilmente in modo di stabilire una catena di comunicazione fra essi strati: giacchè se le loro elettricità opposte non si mantengono in forza per assai lungo tempo, i fiocchi di neve prima, poi i grani di grandine sbozzati, non potranno continuare la loro danza fra i detti due strati (danza che deve forse durare per delle ore, a fine di dar luogo alla lor formazione compita, al loro ingrossamento per via d' incrostazioni successive); essi non potranno neppure essere sostenuti, e cadranno sol mezzo formati: sovente non caderanno neppure in questo stato fino a terra; ma bene fusi in grosse goccie: quale ci giunge sovente la prima pioggia in goccioloni rari, e molto elettrici, da certi temporali minacciosi, ma passeggieri.

Così è: queste grosse goccie isolate voglionsi riguardare, in molti casi almeno, come altrettanti piccioli grani di grandine liquefatti durante la loro caduta attraverso l' aria calda che si trova fra la terra e lo strato nuvoloso inferiore. Ed ecco perchè non cade giammai quella picciola grandine imperfetta, che ha nome presso noi di *neve gelata* (*grésil*) in estate ne' climi caldi, come il nostro: giacchè nei climi più freddi questa minuta gragnuola è frequente anche in estate, potendo attraversar l' aria senza fondersi. Da noi al contrario in tempo dei forti calori non vi sono che i grani di grandine di una certa grossezza e consistenza, che possano giungere fino a terra senza venire intieramente squagliati.

Ciò che ho detto quì dei piccioli grani di grandine, si applica così facilmente ai semplici fiocchi di neve, che non ho bisogno di trattenermi per rispondere in particolare a quest'altra questione che è l'inversa della precedente, in cui si cercava perchè non cada grandine da noi in tempo d'inverno. E perchè dunque non cade egli mai neve in estate, quando pur è manifesto che se ne forma, singolarmente in certe nubi temporalesche, e che fiocchi di neve, come tante volte si è detto, sono gli embrioni della grandine, ciascun grano di essa presentandoci un nucleo nevoso? La risposta è la medesima della sopra recata: il calore dell'aria nella bassa regione, che può fondere e fonde sovente i piccioli grani di grandine, non può mancar di squagliare molto più facilmente i semplici fiocchi di neve, quando avvien che cadano prima di essersi intonacati di una lamina solida di ghiaccio abbastanza grossa: non è che in quest'ultimo caso, in cui abbian preso una consistenza e grossezza considerabile, che possono sostenersi contro il calore degli strati d'aria più bassi, in guisa di arrivare fino a terra tuttora agghiacciati.

Questo scioglimento dei fiocchi di neve ed anche dei grani di grandine più o men piccioli in goccie d'acqua cadendo, che si capisce così bene, è spesso visibile in tempo pur d'estate, allorchè durante una pioggia temporalesca che bagna la pianura e le falde di un monte, noi ne osserviamo la sommità e il dorso, che s' imbiancano a vista d' occhio, coprendosi sia di grandine sia di neve, mentre al basso non giunge che mera acqua.

Rimarrebbero ancora alcune altre questioni, e molte ulteriori osservazioni mie intorno ai temporali; ma siccome non riguardano la grandine, che è il soggetto della presente dissertazione divenuta già troppo lunga, così le rimetto ad altra occasione. Spiegherò allora come si producano talvolta de' temporali anche fieri, con lampi e tuoni orrendi, in seguito di forti pioggie e sì continuate per giorni intieri; quando parrebbe ch' esse avessero dovuto ricondurre l' equilibrio di elettricità fra le nubi e la terra, anzichè romperlo. Più poi mi tratterrò intorno ad un certo periodo, che affettano i temporali, se non da per tutto, in questi nostri paesi montuosi: intorno, voglio dire, a quella tendenza che hanno, a riprodursi di nuovo e comparire molti giorni di seguito, verso la stessa ora, e, ciò che è più rimarcabile, presso a poco in quell' istesso tratto di cielo, che già occuparono. Mi farò quindi a cercare d' onde proceda quel vento freddo, e (cosa mirabile!) secchissimo, che suol succedere ad alcuni temporali molto dirotti, e che hanno maggiormente sfogato in pioggia e in grandine.

SOPRA I CRITERJ

che distinguono i massimi dai minimi delle formole integrali.

DI VINCENZIO BRUNACCI

ricevuta a' primi di febbrajo 1805

Il geometra Legendre, che primo ha dato i criterj necessarj onde distinguere i massimi dai minimi nel calcolo delle Variazioni (*Atti dell' accademia reale di Francia del 1786*), stabilisce che la formola integrale $\int \psi dx$, nella quale ψ è funzione di $x, y, p = (\frac{dy}{dx})$, $q = (\frac{d^2 y}{dx^2})$, ... $u = (\frac{d^2 y}{dx^2})$, diviene massima per una certa relazione tra x ed y, se questa stessa relazione rende $(\frac{d^2 \psi}{du^2})$ negativo, e minima, se positivo. In seguito cercando il criterio necessario perchè $\int \psi dx$ sia massima o minima quando ψ è funzione di x, y, p, e ϕ, essendo ϕ una quantità data dall'equazione differenziale $(\frac{d\phi}{dx}) = Z$, mentre Z è ancora essa funzione di x, y, p, e ϕ, ritrova che questo criterio consiste egualmente nell' essere $(\frac{d^2\psi}{dp^2})$ negativo nel massimo, positivo nel minimo.

Ora applicatomi alla stessa ricerca, ho trovato precisamente il primo risultato, ma riguardo al secondo, il criterio che ottengo è il seguente

„ Vi è il massimo se la quantità $(\frac{d^2\psi}{dp^2}) - \alpha(\frac{d^2Z}{dp^2})$ è ne-
„ gativa; ed il minimo se essa è positiva. „

La lettera α indica una funzione conosciuta e determinata delle variabili.

La differenza del mio risultato da quello dell' illustre geometra dipende dall' avere esso trascurati alcuni termini nella variazione del secondo ordine, dei quali bisogna tener conto.

§ 1. Ecco il problema che trattasi di risolvere.

PROBLEMA.

Data la formola integrale $\int \psi\, dx$, nella quale ψ è funzione di x, y, p, e ϕ, avendo ϕ il valore che diremo, si cerca

1°. una relazione tra x ed y, che renda l' integrale $\int \psi\, dx$ esteso tra i limiti $x=a$, $x=b$, massimo o minimo.

2°. un criterio per distinguere il massimo dal minimo.

La quantità ϕ si suppone data dall' equazione $(\frac{d\phi}{dx})=Z$, essendo anche Z una funzione di x, y, p e ϕ, di modo che si ha

$$d\psi = \left(\frac{d\psi}{dx}\right) dx + \left(\frac{d\psi}{dy}\right) dy + \left(\frac{d\psi}{dp}\right) dp + \left(\frac{d\psi}{d\phi}\right) d\phi ,$$

$$dZ = \left(\frac{dZ}{dx}\right) dx + \left(\frac{dZ}{dy}\right) dy + \left(\frac{dZ}{dp}\right) dp + \left(\frac{dZ}{d\phi}\right) d\phi .$$

Sia $y = f(x)$ la relazione la quale rende quella funzione integrale massima o minima, ed ogni altra relazione differente da quella che vorrassi sostituire in ψ, ci darà $\int \psi dx$ minore, quando $y = f(x)$ conduce al massimo; maggiore, quando conduce al minimo.

Rappresentando per ω una qualunque funzione di x, e per i una costante arbitraria, cui possiam dare un valore quanto vogliamo piccolo, $y = f(x) + i\omega, y = f(x) - i\omega$ saranno due altre relazioni, una delle quali darà le ordinate maggiori, l'altra le ordinate minori della $y = f(x)$; e queste due relazioni sostituite in $\int \psi dx$ ci dovranno dare due quantità minori del valore di $\int \psi dx$, in cui si faccia $y = f(x)$ se abbiamo il massimo, e maggiori, se abbiamo il minimo.
Indichiamo per $+ i\theta$, e $- i\theta'$ gli aumenti che riceve ϕ quando y diviene $y \pm i\omega$, e rappresentiamo ψ per $\psi\ (x, y, p, \phi)$.

Le due differenze adunque

$$\int \psi \left(x, y + i\omega, p + i\left(\frac{d\omega}{dx}\right), \phi + i\theta\right) dx - \int \psi (p, y, x, \phi)\, dx,$$

$$\int \psi \left(x, y - i\omega, p - i\left(\frac{d\omega}{dx}\right), \phi - i\theta'\right) dx - \int \psi (p, y, x, \phi)\, dx$$

dovranno esser positive nel minimo, negative nel massimo.

Se facciamo $A=(\frac{d\psi}{d\phi})$, $B=(\frac{d\psi}{dy})$, $C=(\frac{d\psi}{dp})$, $F=(\frac{d^2\psi}{d\phi^2})$,

$G=(\frac{d^2\psi}{d\phi dy})$, $H=(\frac{d^2\psi}{d\phi dp})$, $I=(\frac{d^2\psi}{dy^2})$, $K=(\frac{d^2\psi}{dy dp})$,

$L=(\frac{d^2\psi}{dp^2})$ ec., e sviluppiamo quest' espressioni in serie per mezzo del teorema di Tajlor, le due differenze quì sopra considerate prenderanno questa forma

$$
(E)\quad
\begin{aligned}
&+i\int\Big\{A\theta+B\omega+C(\frac{d\omega}{dx})\Big\}dx+\frac{i^2}{2}\int\Big\{F\theta^2+2G\theta\omega+2H\theta(\frac{d\omega}{dx})\\
&\qquad+2K\omega(\frac{d\omega}{dx})+I\omega^2+L(\frac{d\omega}{dx})^2\Big\}dx\\
&\qquad+\frac{i^3}{2.3}\int\Big\{\text{ec.}\Big\}dx+\text{ec.}\\
&-i\int\Big\{A\theta'+B\omega+C(\frac{d\omega}{dx})\Big\}dx+\frac{i^2}{2}\int\Big\{F\theta'^2+2G\theta'\omega+2H\theta'(\frac{d\omega}{dx})\\
&\qquad+2K\omega(\frac{d\omega}{dx})+I\omega^2+L(\frac{d\omega}{dx})^2\Big\}dx\\
&\qquad-\frac{i^3}{2.3}\int\Big\{\text{ec.}\Big\}dx+\text{ec.}
\end{aligned}
$$

Le somme di queste due serie debbono essere positive nel minimo, negative nel massimo, prendendo gl' integrali da $x=a$ sino ad $x=b$.

§ 2. Facciamo

$$i\int\Big\{A\theta+B\omega+C(\frac{d\omega}{dx})\Big\}dx=i\Big\{\alpha\theta+\beta\omega+D\Big\}$$

essendo α, ε, D quantità variabili da determinarsi, e differenziando questa supposta equazione, avremo

$$i\left\{A\theta+B\omega+C\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\}=i\left\{\alpha\frac{d\theta}{dx}+\theta\frac{d\alpha}{dx}+\varepsilon\frac{d\omega}{dx}+\omega\frac{d\varepsilon}{dx}+\frac{dD}{dx}\right\}.$$

Ora osservo che se nell' equazione $\left(\frac{d\phi}{dx}\right)=Z$ si pone $y+i\omega$ in vece di y, otteniamo

$$i\frac{d\theta}{dx}=i\left\{A'\theta+B'\omega+C'\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\}+\frac{i^2}{2}\left\{F'\theta^2+2G'\theta\omega+2H'\theta\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+I'\omega^2\right.$$
$$\left.+2K'\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+L'\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right\}+\frac{i^3}{2.3}\text{ ec.}$$

essendo $A'=\left(\frac{dZ}{d\phi}\right), B'=\left(\frac{dZ}{dy}\right), C'=\left(\frac{dZ}{dp}\right), F'=\left(\frac{d^2Z}{d\phi^2}\right)$, ec.;

dunque sostituendo il valore di $\frac{d\theta}{dx}$, avremo

$$i\left\{A\theta+B\omega+C\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\}=i\left\{\alpha A'\theta+\alpha B'\omega+\alpha C'\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+\theta\frac{d\alpha}{dx}+\varepsilon\frac{d\omega}{dx}\right.$$
$$\left.+\omega\frac{d\varepsilon}{dx}\right\}+i\frac{dD}{dx}+\frac{i^2}{2}\left\{\alpha F'\theta^2+2\alpha G'\theta\omega\right.$$
$$+2\alpha H'\theta\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+\alpha I'\omega^2+2\alpha K'\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$$
$$\left.+\alpha L'\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right\}+\frac{i^3}{2.3}\text{ ec.}$$

Quest' equazione si può spezzare nelle quattro seguenti

$$A - \alpha A' - \frac{d\alpha}{dx} = 0$$

$$B - \alpha B' - \frac{d\beta}{dx} = 0$$

$$C - \alpha C' - \beta = 0$$

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{i}{2}\left\{\alpha F'\theta^2 + 2\alpha G'\theta\omega + 2\alpha H'\theta\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \alpha I'\omega^2 \right.$$

$$\left. + 2\alpha K'\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + \alpha L'\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right\} + \frac{i^3}{2.3}\text{ ec.}$$

Dalle prime tre di queste equazioni potremo eliminare α, e β, e troveremo allora tra le variabili x, y una relazione che soddisfarà alla ricerca del massimo e del minimo. In seguito si ritroveranno i valori di α, e β.

§ 3. Da ciò che abbiam detto al § antecedente si conclude che la prima delle due espressioni (E) trovate al § 1, diviene

$$+ i(\alpha\theta + \beta\omega) + \frac{i^2}{2}\int\left\{(F - \alpha F')\theta^2 + (G - \alpha G').2\omega\theta + (H - \alpha H').2\theta\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right.$$

$$\left. + (I - \alpha I')\omega^2 + (K - \alpha K').2\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right) + (L - \alpha L')\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right\}dx$$

$$+ \frac{i^3}{2.3}\int\{\text{ec.}\}\,dx + \text{ec.}$$

Per trovare la seconda di quelle due espressioni (E), facciamo

$$- i\int dx\left\{A\theta' + B\omega + C\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right\} = -i(\alpha\theta' + \beta\omega) + iD',$$

e lo stesso ragionamento fatto al § antecedente ci darà quattro equazioni, le prime tre delle quali saranno identicamente le stesse che quelle trovate al § citato, e la quarta servirà a determinare il valore di D'; avremo in conseguenza quella seconda espressione così ridotta

$$-i(\alpha\theta'+\mathcal{E}\omega)+\frac{i^2}{2}\int\left\{(F-\alpha F')\theta'^2+(G-\alpha G').2\omega\theta'+(H-\alpha H')2\theta'\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right.$$
$$\left.+(I-\alpha I')\omega^2+(K-\alpha K').2\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+(L-\alpha L')\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right\}dx$$
$$-\frac{i^3}{2.3}\int\left\{\text{ec.}\right\}dx\,.$$

§ 4. Facciamo per abbreviare $M=F-\alpha F'$, $N=G-\alpha G'$, ec., e le due quantità (E) diverranno

$$+i(\alpha\theta+\mathcal{E}\omega)+\frac{i^2}{2}\int\left\{M\theta^2+2\omega\theta N+2O\theta\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+P\omega^2+2Q\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right.$$
$$\left.+R\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right\}dx+\frac{i^3}{2.3}\int\left\{\text{ec.}\right\}dx+\text{ec.}$$

$$-i(\alpha\theta'+\mathcal{E}\omega)+\frac{i^2}{2}\int\left\{M\theta'^2+2\omega\theta'N+2O\theta'\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+P\omega^2+2Q\omega\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\right.$$
$$\left.+R\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2\right\}dx-\frac{i^3}{2.3}\int\left\{\text{ec.}\right\}dx+\text{ec.}\,,$$

le quali debbono essere negative nel massimo, positive nel minimo, estesi gl' integrali da $x=a$ sino ad $x=b$.

Se dunque indichiamo per $(\alpha\theta+\mathcal{E}\omega)^{\text{o}}$, $(\alpha\theta+\mathcal{E}\omega)^{\text{I}}$ i valori di $(\alpha\theta+\mathcal{E}\omega)$ al principio ed alla fine dell' integrale; e per $(\alpha\theta'+\mathcal{E}\omega)^{\text{o}}$, $(\alpha\theta'+\mathcal{E}\omega)^{\text{I}}$ i valori di $(\alpha\theta'+\mathcal{E}\omega)$ negli stessi punti, avremo le due quantità

$$+ i \left\{ (\alpha\theta + \beta\omega)^{\mathrm{I}} - (\alpha\theta + \beta\omega)^{\circ} \right\} + \frac{i^2}{2} \int \left\{ M\theta^2 + 2N\omega\theta + \text{ec.} \right\} dx$$

$$+ \frac{i^3}{2.3} \int \left\{ \text{ec.} \right\} dx + \text{ec.}$$

$$- i \left\{ (\alpha\theta' + \beta\omega)^{\mathrm{I}} - (\alpha\theta' + \beta\omega)^{\circ} \right\} + \frac{i^2}{2} \int \left\{ M\theta'^2 + 2N\omega\theta' + \text{ec.} \right\} dx$$

$$- \frac{i^3}{2.3} \int \left\{ \text{ec.} \right\} dx + \text{ec.}$$

che dovranno esser negative nel massimo, positive nel minimo.

Diamo a queste quantità le seguenti forme

$$+ i\, F(1) + i^2 F(2) + i^3 F(3) + \text{ec.}$$

$$- i\, F'(1) + i^2 F'(2) - i^3 F'(3) + \text{ec.}$$

indicando per $F(1)$, $F'(1)$, $F(2)$, ec.

i respettivi coefficienti delle diverse potenze di i.

Ora siccome si può prendere i tanto piccolo, che i primi termini di queste due serie superino la somma di tutti quei che gli seguono, così dato un tal valore ad i, le due serie saranno positive o negative, secondo che lo sono i loro primi termini: in generale adunque una di esse sarà positiva, e l' altra negativa, se quei due termini sussisteranno; dovendo per tanto nel caso del massimo o del minimo esser negative insieme e positive insieme, acciò abbia luogo il massimo o minimo, converrà che sia $F(1) = 0$, $F'(1) = 0$, cioè

$$(\alpha\theta + \beta\omega)^{\mathrm{I}} - (\alpha\theta + \beta\omega)^{\circ} = 0$$

$$(\alpha\theta' + \beta\omega)^{\mathrm{I}} - (\alpha\theta' + \beta\omega)^{\circ} = 0.$$

A queste equazioni potremo sempre soddisfare per mezzo delle costanti arbitrarie, che sono nei valori di α e di ϵ, e delle condizioni particolari del problema.

§ 5. Ridotte le due quantità, le quali divenir debbono positive o negative, alla forma

$$i^2 F(2) + i^3 F(3) + \text{ec.}$$

$$i^2 F'(2) - i^3 F'(3) + \text{ec.} \qquad (*)$$

si può dimostrare egualmente, che possiam prendere i così piccolo, che i primi termini $i^2 F(2)$, $i^2 F'(2)$ superino la somma di tutti quei che gli seguono, e che quindi le due quantità siano positive se $F(2)$, $F'(2)$ sono positivi, e negative se negativi; dunque vi sarà il massimo, quando i due integrali

$$\int \left\{ M\theta^2 + 2N\omega\theta + \text{ec.} \right\} dx,$$

$$\int \left\{ M\theta'^2 + 2N\omega\theta' + \text{ec.} \right\} dx$$

saranno negativi; ed il minimo, quando saranno positivi.

Per trovare i criterj onde distinguere questi due casi, facciamo

---

(*) Questo ragionamento suppone che necessariamente dei due termini $+ iF(1)$, $- iF'(1)$ uno sia positivo, l' altro negativo. Ora possiamo anche ottenere quella riduzione senza questa supposizione. In fatti se per mezzo delle costanti arbitrarie e delle condizioni del problema facciamo in modo che si annullino i coefficienti $F(1)$, $F'(1)$, ridurremo le quantità che debbono divenire positive o negative, alla forma

$$i^2 F(2) + i^3 F(3) + \text{ec.}, \; i^2 F'(2) + i^3 F'(3) + \text{ec.}$$

$$\int\left\{M\theta^2+2N\omega\theta+\text{ec.}\right\}dx=g\omega^2+2m\theta\omega+n\theta^2+\int R\left\{\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+l\omega+h\theta\right\}^2dx,$$

ed avremo, differenziando, sostituendo il valore di $\frac{d\theta}{dx}$ ritrovato al § 2 (lasciati però i termini moltiplicati per i, giacchè questi nelle quantità superiori altro cangiamento non portano che nei termini moltiplicati per i^3), ed eguagliando i due termini simili nei due membri, l'equazioni

$$M=\frac{dn}{dx}+Rh^2+2A'n,$$

$$N=\frac{dm}{dx}+Rlh+A'm+B'n,$$

$$O=m+Rh+C'n,$$

$$P=\frac{dg}{dx}+Rl^2+2B'm,$$

$$Q=g+Rl+C'm.$$

Il numero di queste equazioni eguaglia quello delle incognite g, m, n, l, h. La di loro risoluzione non è facile, poichè dipende dall' integrazione d' equazioni differenziali del terz' ordine.

Supponendole risolute (e ciò basta per il ragionamento, che vogliam fare) potremo fare in modo che la quantità fuori dell' integrale o sia nulla, o abbia lo stesso segno di quell' integrale medesimo, e così l' esser positiva o negativa la quantità, dipenda dall' esser positivo o negativo quell' integrale. Ora questo è positivo, o negativo, tra i limiti $x=a, y=b$, se R, ovvero $\left(\frac{d^2\psi}{dp^2}\right)-\alpha\left(\frac{d^2Z}{dp^2}\right)$ è una quantità positiva o negativa per tutti i valori possibili da $x=a$ sino ad $x=b$; e siccome ancora l' altra quantità integrale ci conduce alla stessa condizione, perciò „ Avremo il massimo „ o minimo secondo che $\left(\frac{d^2\psi}{dp^2}\right)-\alpha\left(\frac{d^2Z}{dp^2}\right)$ è negativa „ o positiva per tutti i valori possibili da $x=a$, sino „ ad $x=b$. „

A questa condizione conviene aggiungere che nessuna delle quantità M, N, P, ec., m, n, l, ec. divenga infinita per qualcuno di quei valori particolari di x compresi tra $x=a, x=b$.

I termini trascurati dal sig. Legendre sono quei che formano i valori di D, D' nel § 2 e 3.

Scolio

Non abbiam fatto uso in questo scritto del solito algoritmo del calcolo delle variazioni, imperocchè si è riconosciuto che tutte le ricerche a quello appartenenti possono trattarsi coll' ordinario dei differenziali. Eulero è il primo che abbia fatta questa osservazione. Ecco com' egli si esprime nel tomo XVI dei nuovi commentarj di Pietroburgo „ Videbatur igitur calculus variationum omnino singulare calculi genus constituere, verùm postquam ejus indolem accuratius essem

„ perscrutatus, universum hunc calculum perspexi, levi factâ immutatione, ad secundam partem calculi integralis, cujus elementa in tertio volumine operis mei de hoc argumento exposui, reduci posse. „ In seguito Lagrange nella sua teorìa delle funzioni analitiche apre la via per trattarlo nella guisa che noi abbiam fatto quì sopra.

PROBLEMI

sull' equazione dell' orbita e sulla eccentricità de' pianeti.

Di Antonio Cagnoli

ricevuti a' 21 d'aprile. 1805

Nella seconda edizione della trigonometria, che ho pubblicato in Bologna l' anno decorso, mi son fuggiti di mente due problemi astronomici, che altre volte ebbi in animo d' inserirvi, e ch' io giudico interessanti ogni giorno più, dappoichè le scoperte di nuovi pianeti si rendono assai frequenti. Stimo conveniente farne omaggio all' Istituto nazionale, sicchè riparare il mancamento quivi stesso dov' è avvenuto.

Problema I

Data l' eccentricità d' un pianeta, trovar l' equazione massima dell' orbita.

Siano

1 il semiasse maggiore dell' orbita

b il minore

e l' eccentricità

ε l' equazione massima del centro

u l' anomalìa vera

z l' anomalìa media.

Si deve esprimere ε per e. Ora abbiamo (Trigon. 1495), $\varepsilon = z - u$. Dunque (1488)

$$(A) \ldots \varepsilon = 2\, e \, sen\, u + \left(\frac{3}{4} e^2 + \frac{1}{8} e^4 + \frac{3}{64} e^6 + \frac{3}{128} e^8\right) sen\, 2\, u$$

$$+ \left(\frac{1}{3} e^3 + \frac{1}{8} e^5 + \frac{1}{16} e^7 + \frac{7}{192} e^9\right) sen\, 3\, u$$

$$+ \left(\frac{5}{32} e^4 + \frac{3}{32} e^6 + \frac{15}{256} e^8\right) sen\, 4\, u + \left(\frac{3}{40} e^5 + \frac{1}{16} e^7 + \frac{3}{64} e^9\right) sen\, 5\, u$$

$$+ \left(\frac{7}{192} e^6 + \frac{5}{128} e^8\right) sen\, 6\, u + \left(\frac{1}{56} e^7 + \frac{3}{128} e^9\right) sen\, 7\, u$$

$$+ \frac{9}{1024} e^8 \, sen\, 8\, u + \frac{5}{1152} e^9 \, sen\, 9\, u\,.$$

In questa serie, che va all' infinito, son trascurati come superflui li seni de' moltiplici ulteriori dell' arco u, egualmente che le potenze di e dopo la nona.

Ma (Trigon. 481, 484)

$$sen\, u = \sqrt{(1 - cos^2 u)}.$$

$$sen\, 2u = 2 \cos u \sqrt{(1 - cos^2 u)}.$$

$$sen\, 3u = (4 \cos^2 u - 1) \sqrt{(1 - cos^2 u)}.$$

$$sen\, 4u = (8 \cos^3 u - 4 \cos u) \sqrt{(1 - cos^2 u)}.$$

$$sen\, 5u = (16 \cos^4 u - 12 \cos^2 u + 1) \sqrt{(1 - cos^2 u)}.$$

$$sen\, 6u = (32 \cos^5 u - 32 \cos^3 u + 6 \cos u) \sqrt{(1 - cos^2 u)}.$$

$sen\,7u = (64 \cos^6 u - 80 \cos^4 u + 24 \cos^2 u - 1)\sqrt{(1-\cos^2 u)}$.

$sen\,8u = (128 \cos^7 u - 192 \cos^5 u + 80 \cos^3 u - 8 \cos u)\sqrt{(1-\cos^2 u)}$.

$sen\,9u = (256 \cos^8 u - 448 \cos^6 u + 240 \cos^4 u$

$- 40 \cos^2 u + 1)\sqrt{(1-\cos^2 u)}$.

Sostituendo nella serie (A) questi valori; e dicendo, per brevità, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon'$, ec., li coefficienti di $\sqrt{(1-\cos^2 u)}$; non che A, B, C, ec. quelli de' seni in essa serie (A): la medesima si può esprimere come segue.

$(B) \ldots \varepsilon = (A + \alpha B + \beta C + \gamma D + \delta E + \varepsilon' F + \zeta G + \eta H + \theta I)\sqrt{(1-\cos^2 u)}$.

Ora nell' atto dell' equazione massima,

$\cos u = \frac{1 - b\sqrt{b}}{e}$, (Trigon. 1501). Inoltre $b = \sqrt{(1-e^2)}$,

(1480); laonde $b\sqrt{b} = (1-e^2)^{\frac{3}{4}}$.

Dunque $\cos u = \frac{1}{e} - \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{4}}}{e}$. Riducendo in serie il binomio $(1-e^2)^{\frac{3}{4}}$, emerge

$$\cos u = \frac{3}{4} e + \frac{3}{32} e^3 + \frac{5}{4.32} e^5 + \frac{5.9}{4.16.32} e^7 + \text{ec.}$$

Quindi $\cos^2 u = \frac{9}{16} e^2 + \frac{9}{2.32} e^4 + \frac{69}{32.32} e^6 + \text{ec.}$

$$\cos^3 u = \frac{3.9}{4.16} e^3 + \frac{9.9}{16.32} e^5 + \text{ec.}$$

$$\cos^4 u = \frac{9.9}{16.16} e^4 + \text{ec.}$$

Li termini negletti in queste serie si rendono per ora inutili, egualmente che le potenze ulteriori di $\cos u$, poichè tutto ciò introdotto nell' equazione (B), cioè nei valori di α, β, ec., e fatte le moltiplicazioni con quelli di B, C, ec., nascerebbero potenze di e superiori alla nona, ch' è il limite assunto.

Si eseguiscano le moltiplicazioni indicate nell' equazione (B) dai coefficienti di $\sqrt{(1-\cos^2 u)}$; e si troverà, col favore di faticose riduzioni, ch' ella si tramuta nella seguente

$$(C) \ldots \varepsilon = \left(2e + \frac{19}{24}e^3 + \frac{179}{320}e^5 + \frac{4019}{5.7.16^2}e^7 + \frac{491927}{5.7.9.16^3}e^9 + \text{ec}\right)\sqrt{(1-\cos^2 u)}.$$

Ma $$\sqrt{(1-\cos^2 u)} = 1 - \frac{1}{2}\cos^2 u - \frac{1}{8}\cos^4 u - \frac{1}{16}\cos^6 u - \frac{5}{128}\cos^8 u - \text{ec.}$$

Ed è poi $$\cos^2 u = \frac{9}{16}e^2 + \frac{9}{2.32}e^4 + \frac{69}{32.32}e^6 + \frac{165}{4.32.32}e^8 + \text{ec.}$$

$$\cos^4 u = \left(\frac{9}{16}\right)^2 e^4 + \frac{9\,9}{16.32}e^6 + \frac{3.9.29}{16.16.32}e^8 + \text{ec.}$$

$$\cos^6 u = \left(\frac{9}{16}\right)^3 e^6 + \frac{3.9.9.9}{16.32.32}e^8 + \text{ec.}$$

$$\cos^8 u = \left(\frac{9}{16}\right)^4 e^8 + \text{ec.}$$

Surrogati questi valori, e adempite le riduzioni, riesce

$$\sqrt{(1-\cos^2 u)} = 1 - \frac{9}{32}e^2 - \frac{225}{8.16^2}e^4 - \frac{4233}{16^4}e^6$$
$$- \frac{371973}{8.16^5}e^8 - \text{ec.}$$

La qual serie moltiplicata con la (C) porge finalmente, dopo lunghe fatiche, la soluzion del problema, come segue

$$(D) \ldots . \varepsilon = 2e + \frac{11}{48}e^3 + \frac{599}{5120}e^5 + \frac{17219}{229376}e^7 +$$
$$\frac{14226541}{264241152}e^9 + \text{ec.}$$

Questa serie si legge eziandìo nell' effemeridi di Berlino per l' anno 1790, ma senza il quinto termine e senza dimostrazione.

Non mi è noto, che sia stata publicata da altri, nè in tutto nè in parte, la conversione di essa. Questo lavoro sarà il soggetto del seguente problema II.

PROBLEMA II

Data l' equazione massima dell' orbita d' un pianeta, trovar l' eccentricità.

Bisogna convertir l' equazione (D); val a dire, esprimere e con le potenze di ε. A tal uopo opportuna e pronta è la formula generale, che ho apprestata nell' art. 264 della trigonometria. Essa proviene dalla seguente segnata (P) nell' art. 259: nella quale distinguo con accento il coefficiente e per non confonderlo con la c dinotante l' eccentricità.

$$(P) \ldots\ldots m = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + e'y^5 + fy^6 + gy^7 + \text{ec.}$$

Fatto $m = \varepsilon$, $y = e$, $b = 0 = d = f$, tosto la (P) rappresenta la (D). E con questi valori la formula generale diviene

$$(E) \ldots e = \frac{\varepsilon}{a} - \frac{c}{a^4}\varepsilon^3 + \frac{3c^2 - ae'}{a^7}\varepsilon^5 - \frac{12c^3 - 8ace' + a^2g}{a^{10}}\varepsilon^7 + \text{ec.}$$

Ora comparando la (P) con la (D), abbiamo

$$a = 2, \; c = \frac{11}{48}, \; e' = \frac{599}{5120}, \; g = \frac{17219}{229376}.$$

Introdotti questi valori nella (E), e fatte le riduzioni, laboriose in vero; essa appaga l' intento proposto, nel modo seguente

$$(F) \ldots\ldots e = \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{11}{768}\varepsilon^3 - \frac{587}{983040}\varepsilon^5 - \frac{40583}{2642411520}\varepsilon^7 - \text{ec.}$$

fermandomi alla settima potenza di ε, per essere questa serie molto più convergente della (D).

Affinchè le due serie importanti, che espongo ad uso degli astronomi, godano la moral probabilità d' esser esenti da errore, ho fatto che Ottavio mio nipote fraterno si eserciti nella loro investigazione con lavoro separato dal mio. E poichè abbiamo entrambi trovato li medesimi termini, debbo credergli assolutamente sicuri ed esatti.

La brevità di questa memoria non pregiudicherà, come spero, nel giudizio de' periti, alla giusta considerazione del lungo travaglio de' computi, e dell' intrinseca sua utilità.

DEI VASI LINFATICI DELLA PLACENTA.

DI GAETANO UTTINI

presentata a' 12 di maggio. 1805

Se il cordone ombelicale, e la placenta, abbiano queste parti del feto que' vasi che chiamansi linfatici valvulosi, o sieno soltanto fornite al perfetto loro uso dei già noti vasi arteriosi, e venosi, non è ciò per anche fuori d' ogni dubbio, e si dibatte tuttora dagli anatomici de' nostri giorni.

Anno fra gli altri eccitata una tale quistione i due celebri inglesi Alessandro Monrò, e Giovanni Hunter, i quali si diedero con tutto lo studio ad investigare l' origine dei vasi linfatici, che varia da varj autori era stata innanzi creduta. Stabilirono entrambi, che detti vasi traessero la loro origine da ciascuna cavità o picciola o grande dell' animale vivente, assorbendo un umore ivi deposto; ma non così furono d' accordo, che tale assorbimento si facesse da questi soli vasi linfatici. Monrò pretese che una parte di quello si faccia ancora da vene inalanti; sostenne l' Hunter non esservi altro genere di vasi assorbenti se non quello dei linfatici valvulosi. Per convalidare il primo la propria opinione, addusse la mancanza dei medesimi vasi linfatici nel cordone ombelicale, e nella placenta, il che essendo, resterebbe abbastanza dimostrato, che il feto contenuto nell' utero si nudrisce per mezzo del solo assorbimento fatto dalle estreme venuzze della placenta, e che perciò la natura si serve di questa sorte di vasi come atti essi pure ad assorbire. Ma l' Hunter in ciò costante, che i soli linfatici sieno que' vasi destinati nel corpo animale ad assorbire, dubita che il Monrò abbia nelle riferite parti del feto immaginata la privazione di detti vasi piuttosto, che dai fatti dedotta, senza però addurre del dubbio suo fondate pruove. In tale incertezza sono rimaste sin quì le sentenze di questi due illustri anatomici, nè per quanto è a mia notizia, sono più state fatte in seguito dirette osservazioni a fine di scoprire, se pure fra i vasi ombelicali abbiano o nò luogo i linfatici. Lo stesso Mascagni indagatore di quanti mai sono vasi linfatici nel corpo umano, e seguace in tutto dell' Hunter, nella sua grand' opera, o sia nella storia di questi vasi, lungi dal far parola dell' esposta controversia, per niun modo prende a considerare il feto umano, e mette sotto l' occhio solamente i linfatici da lui osservati nel corpo nato, e adulto.

Dalle cose fin quì premesse ognuno intende abbastanza a quale scopo sia rivolto il mio presente discorso. Io appunto bramo di esporre alcuni tentativi da me fatti, per vedere se si possa con qualche fondamento stabilire la reale, o niuna esistenza dei vasi linfatici nella placenta, e nel tralcio ombelicale. Imperocchè quantunque io fossi inclinato a credere per alcune osservazioni da me pur fatte in esse parti, quando presi una volta ad esaminare, se le placente di più feti contenuti nell' utero abbiano fra di loro naturale comunicazione, pure non essendo stato allora lo studio mio a tal fine precisamente diretto, non fui pago di sì lievi e passeggiere osservazioni, e mi proposi di farne delle più diligenti ed esatte.

Prima di accignermi a queste col consiglio e colla direzione del chiarissimo nostro anatomico Mondini, che meritò, mentre visse, per la sua dottrina l'onore di esser eletto fra i primi membri di questo Istituto nazionale italiano, si pensarono que' mezzi che fossero più opportuni e sicuri per ottenere l' intento. Si temettero le injezioni di mercurio; caddero ancora in sospetto i liquori glutinosi, e astringenti, come sostanze capaci di rompere, di otturare, o di corrodere i sottili e angusti canaletti pe' quali devono scorrere. Si preferirono perciò alle dette injezioni quelle di semplice acqua, o colorata soltanto con materia vegetabile, quali furono il verzino e il campeggio. Dove questi ajuti non potevano bastare, si ponea ogni speranza nelle lenti e nei microscopj. Con sì fatto apparecchio intraprese ad esplorare non poche placente colla somma sua diligenza il Dottor Vigna dal Ferro peritissimo nell' arte anatomica, il cui lavoro diede luogo alle seguenti osservazioni.

E tacendo le minute cose, che niente conducono al proposto fine, si notò primieramente, che delle materie injettate sì per le due arterie, che per la vena, niuna si vidde uscire da alcuna parte, ma passando tutte con prontezza mostrarono le colorate turgidi e distinti i proprj vasi, ne' quali erano diffuse. Esaminate indi con attenzione le membrane amnio, e corio, si potè la prima per tutta l' estensione della placenta separare dall' altra sino alla radice del cordone, e piegandosi verso la convessità di essa placenta, terminava in altra più sottile membrana che ricoprivane l'intera superficie. Osservata col microscopio la detta membrana, apparve fornita di molti e lunghi pelini a guisa di tanti villi. Accadde per sorte di poter ripetere la stessa osservazione in una placenta di donna tabida, ove trovandosi quella del pari estenuata, riuscì meglio di vedere la parte sua convessa, e di contemplare per così dire minutamente la suddetta villosa membrana. In fatti oltre i copiosi villi di sopra osservati, si vidde in essa coll' occhio armato una rete di filamenti in altri ed altri più sottili divisi, e quasi trasparenti.

Quantunque avessero questi una specie di tanti canalini, non potemmo di ciò abbastanza persuaderci, onde si andò meditando qual altra osservazione si avesse a fare, che recasse maggior schiarimento. Venne perciò in mente di tagliare il cordone ombelicale trasversalmente nel luogo presso a poco, dove s' impianta nella placenta, per vedere se entravano entro di esso altri vasi, associandosi alla vena e alle due arterie nel restante del loro cammino. Imperocchè (così discorrevamo fra noi) se vi anno i linfatici, de' quali si disputa, non possono questi tenere altra strada per entrare nel corpo del feto, a cui devono servire, onde con molto minore difficoltà si dovrebbe ravvisare la loro presenza nel luogo ove si uniscono, che nelle parti più alte dalle quali si diffondono.

Condotti da un tale raziocinio, e fatta una sezione trasversale nel cordone di una recente placenta, eccoci colla lente ad osservare una materia biancastra alquanto viscida, che sembrava contenuta in una circoscritta rotonda cavità fra la vena e le arterie ombelicali. Ivi ferma restando questa materia formava eguale il piano della sezione colle aperture dei detti vasi. Col mezzo del microscopio diede a vedere nella sua superficie molti piccoli punti trasparenti, come sarebbero tanti lumi di vasellini. Fatte altre simili sezioni nel resto del cordone, si osservò sempre continuare per tutta la lunghezza di esso la stessa materia con una costante direzione, di modo che dovea credersi prodotta ancor questa insieme co' vasi ombelicali fin dentro alla cavità dell' addome del feto. Questa osservazione fu ripetuta più volte in altri tralci di placente fresche con pari successo.

Restava in verità a conoscersi meglio la natura della suddetta materia, quando capitata alle mani un'assai gracile placenta di donna per fame estenuata, riuscì nell' esaminarla di vedere l'accidente, che sono per descrivere. Entravano i tronchi dei vasi ombelicali in essa placenta poco sopra il di lei lembo, e quasi scoperti per l' estrema tenuità delle esterne membrane. Mentre si osservavano queste, e l'una dall' altra si divideva, si presentò all' occhio non so qual picciolo foro, che mise voglia di esplorarlo con injezione di mercurio diretta verso il cordone. Si arrestò a breve tratto, ma non per altro si sparse fra le membrane. Spinto col dito si andava il fluido avanzando sempre unito co' suoi globetti giù pel cordone. Perduto di vista, si dubitò che avesse rotte le tonache dei vasi ombelicali, e penetrato nelle loro cavità. Si volle perciò aprirli secondo la loro lunghezza, ma niente di mercurio fu in essi ritrovato. Si fece quindi un taglio trasversale nel cordone per scoprire in qual parte si fosse arrestato, quando subito si viddero uscire dalla nota sostanza globetti di mercurio a guisa di bollicine, sembrando uscir fuori da varie boccuccie di vási. Questo ci ávvenne di poter osservare nell' ultima nostra sperienza.

Dagli esposti fatti, se mal non mi appongo, credo si possa trarre una ragionevole congettura per l' esistenza dei controversi linfatici. E primieramente considerando quei pelini aventi la forma di villi, de' quali si vidde ornata quella sottile membrana che copre la convessa superficie della placenta, che possono essi significare con maggiore verisimiglianza se non quella stessa origine di vasi linfatici, che in molte membrane di parti del nostro corpo si trova? Quei filamenti in oltre sottili e trasparenti, ch' indi più manifesti si osservarono nella stessa membrana della tabida placenta, che potrebbero meglio rappresentare della forma di sottilissimi condotti? Se poi vogliansi attentamente considerare i caratteri tutti di quella sostanza che lungo i vasi ombelicali in regolare e costante maniera giù pel tralcio con essi discende, tutto ciò conduce a credere che i linfatici nati dalle superiori parti, e altri in seguito aggiunti ivi quasi raccolti si trovino, e che recisi per le trasversali sezioni presentino all' osservatore quella biancastra sostanza che appare nella sua superficie di pellucidi punti aspersa. Finalmente la copia grande di linfatici, che dal peritoneo nel contorno dell' uràco si dirama, sembra essa pure un indizio che terminando colà nel feto il cordone ombelicale, dove che i vasi sanguigni ai determinati luoghi si portano, sono gli altri ricevuti dal peritoneo in cui anno potuto mantenersi nei nati ancora nel loro uffizio.

Sì fatta induzione di cose, se mai paresse ad alcuno non provare abbastanza la presenza dei supposti vasi, rifletta quanto sia grande la loro picciolezza, e difficoltà di vederli in tante e tante parti dell' uomo, onde non debba aspettarsi dall' occhio suo evidenti e geometriche dimostrazioni in quelle parti di cui si tratta. Di quì forse è nata la niuna menzione di questi vasi presso la maggior parte degli anatomici, e l'aperta opposizione di altri.

Ma non dovrà dolersi il Monrò, che esistano pure tai vasi non meno nella placenta e nel cordone ombelicale, se così richiede il sistema dei linfatici da lui stesso proposto, e confermato colle proprie osservazioni. Imperocchè se dalle cellette di quelle membrane che si chiamano cellulose, anno origine, come egli asscrisce, i vasi linfatici, avendo le suddette parti del feto molta sostanza cellulosa, ne viene per conseguenza, che abbiano ancora i suoi vasi linfatici. Se poi si consideri l' uffizio a cui tali condotti sono stati destinati, il quale consiste nel riportare gli assorbiti umori alla massa del sangue, onde si renda egli più fluido, e insieme più atto alla nutrizione delle parti, non sarebbe stata provida la natura verso del feto, se omessa nella placenta e nel cordone ombelicale questa sorta di vasi, avesse privato il feto di quei vantaggi che derivano dall' umore linfatico. La qual trascuranza tanto è più assurdo di attribuire alla natura, quanto essa si ammira più sagace e sollecita nel procurare tutte le altre cose che possono contribuire al bene del feto medesimo.

Avrei desiderato per ultimo a compimento dell' opera, di osservare le summentovate parti non già separate dal feto, ma ad esso congiunte, se una tale combinazione avessi potuto ottenere. Intanto mi lusingo, che se restano a desiderarsi più chiare e convincenti pruove del mio assunto, su le tracce almeno da me segnate altri possano rinvenirle, il che sarà sempre un sufficiente frutto delle mie ricerche.

DESCRIZIONE

di un grande Lambicco economico per distillare l' acquavite.

Di Luigi Brugnatelli

presentata a' 20 di giugno 1805.

La quì annessa tavola rappresenta tutto l' apparecchio distillatorio montato.

a b c Intiera cucurbita del lambicco di rame stagnato. La caldaja ha il fondo piano: è guarnita di due manubri *n*, *n*, che s' appoggiano alle spalle del muro di mattoni dal quale è circondata.

c Capo della cucurbita.

d d Recipiente un po' elevato, la cui capacità è poco meno quella che occupa il liquore, che deve distillare, ossia quella della cucurbita.

Esso costituisce negli ordinari lambicchi il solo refrigeratorio.

e Grande capitello di latta, o di rame stagnato, che ha internamente l' orlo *z z*, in cui è il canaletto destinato a ricevere il liquore che si condensa, e che porta nel tubo *g*, il quale entra nel tino *q*.

h Tubo destinato a vuotare il recipiente *dd*.
q Tino di legno che serve di refrigerante al vapore proveniente dal recipiente *dd*. Esso è elevato, affine di poter vuotare il liquido che contiene, e farlo passare nella caldaja del lambicco *a*, che la riempie sino ad *yy*.
i Tubo munito di robineto, pel quale si fa passare il liquido del tino *q* alla caldaja *a*, aprendo il robineto del corrispondente tubo *o*.
k Tubo destinato a vuotare la cucurbita *a*.
f Tubo cha porta il vapore alcalico nel serpentino che attraversa l' acqua fredda del tino *p*.
l Focolare.
m Cenerario.
s s Due pilastri di cotto, sui quali appoggiano i due tini *p*, *q*.
t Luogo ove si può aprire il lambicco.
u, *u* Due travicelli di legno fissati nel muro per sostenere il peso del recipiente *dd* pieno di liquore.

Maniera di usare il menzionato apparecchio distillatorio.

Supponendo che cotesto lambicco debba servire alla fabbrica dell'acquavite, si riempie di vino la caldaja *a* fino in *yy*, introducendolo dall' apertura *t t*. Si adatta il recipiente *dd*, una porzione del cui collo si congiunge con *tt*. Questa commessura si chiude con una benda di carta incollata. Si riempie il recipiente *dd* sino a *zz* di vino destinato anch' esso alla distillazione. Il tino *q* si riempie pure del medesimo vino. Si adatta il tubo *g* al serpentino ΔΔ, e il tubo *f* al serpentino ΦΦ, il quale pesca nel tino *p* anch' esso pieno di vino. Il vino fresco de' tini *p*, *q* serve di refrigeratorio ai due serpentini.

Quando tutti i recipienti sono pieni, chiuse le commessure, l' acquavite distilla dal tubo *f*ΦΦ; il vino del recipiente *dd* si riscalda prestissimo, fino a leggiera ebullizione: l' acquavite che s' inalza, passa dal tubo *g* al serpentino ΔΔ. Il vino contenuto ne' due tini *p*, *q* sebbene si riscaldi con grande lentezza, è però caldo sufficientemente a distillazione compiuta. Allora si leva il residuo vino dalla caldaja *a* per mezzo del tubo *k*: si fa entrare subito in essa il vino caldo del tino *q*: si cava il vino residuo dealcoolizzato esistente nella caldaja *dd*, e vi si versa quello già riscaldato del recipiente *p*. I tini *p*, *q* si riempiono di nuovo vino; e così si prosegue finchè si giudica opportuno.

In luogo di vino si può mettere nel recipiente *dd* l' acquavite ottenuta colla prima distillazione del vino, ad oggetto di rettificarla; la qual cosa è anche più opportuna.

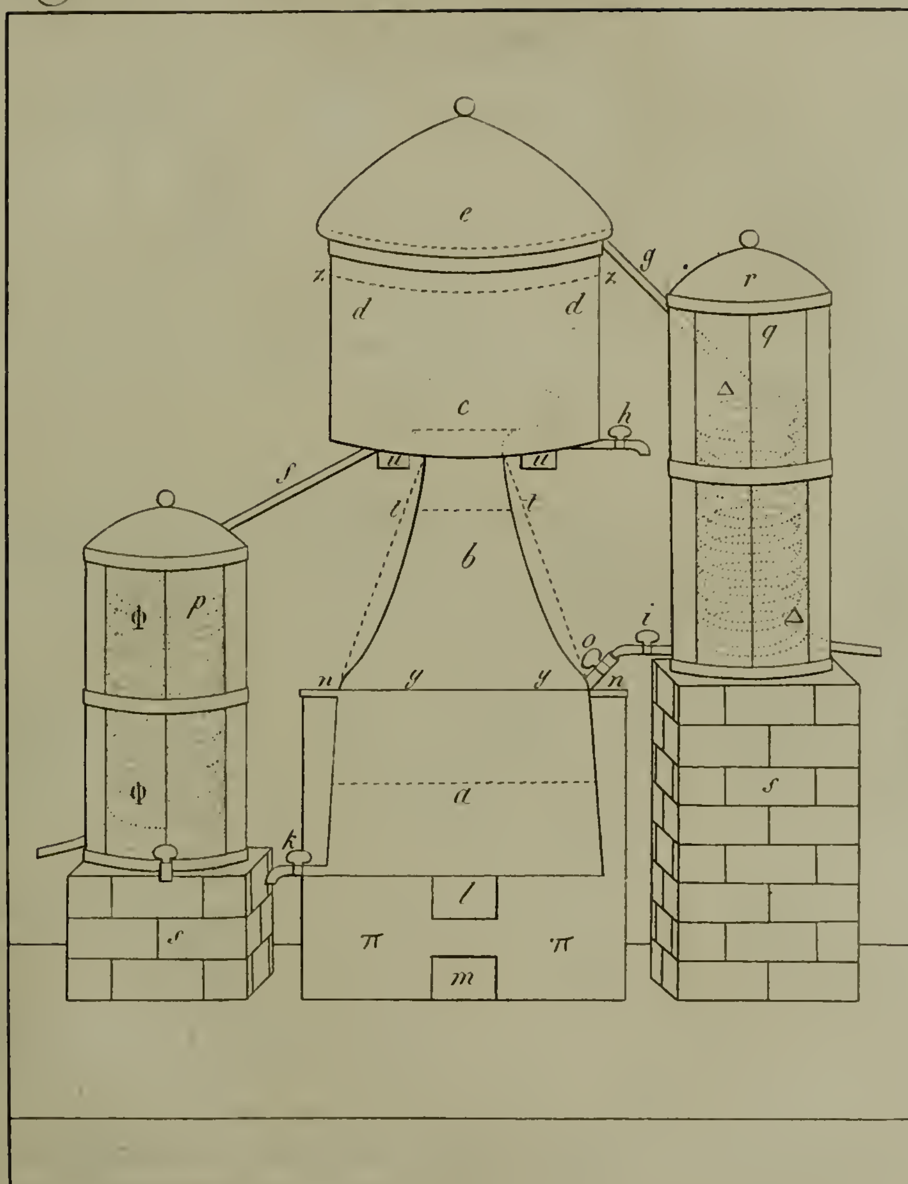
La grande cucurbita *abc* si potrebbe dividere in due concamerazioni, le quali terminassero con due capi, che formerebbero, per così dire, il fondo del recipiente *dd*. Ma allora ci vorrebbero tre serpentini in luogo di due.

Egli è facile il comprendere che in questo apparecchio si hanno due lambicchi, uno riscaldato dal combustibile del fornello ττ, e l' altro dal vapore cocente che si porta al capitello *c* della cucurbita. La caldaja *a* trovandosi immediatamente sopra il combustibile, ha bisogno dello spazio *b* per impedire che il vino nella forte sua ebullizione passi dal tubo *f*: Ma questo bisogno cessa pel recipiente *dd* riscaldato dal vapore che si condensa in *c*; quantunque il vino, o l' acquavite in esso contenuta venga riscaldata a segno di distillare con facilità.

La potenza con cui si riscalda il vino in questo recipiente *dd* è comprovata dall' esperienza; nè è ignota ai Distillatori, la qual cosa è anche conforme alle operazioni de' Fisici moderni: soprattutto a quelle del conte Rumford, sulla comunicazione del calore ai liquidi; la quale si eseguisce con facilità dal basso in alto, mentre essa non ha luogo, o è stentatissima dall' alto in basso: cosicchè il Conte riguarda i liquidi quasi come non conduttori del termico (calorio v. s.). Per la qual cosa noi abbiamo fatto il capo del lambicco *c* basso per quanto fu possibile, e di larga superficie, ad oggetto di riscaldare prontamente il liquido che vi sovrasta.

Si ha pertanto il vantaggio di distillare mediante questo apparecchio con due lambicchi sopra un solo fornello. Vi è quindi risparmio di fabbrica, di tempo, di giornalieri, e di combustibile. Cotesti vantaggi assai calcolabili vengono pure accresciuti facendo servire il vino destinato alla distillazione per raffreddare i serpentini dei due tini *p*,*q*. Imperocchè quando è compiuta la distillazione del vino dei due lambicchi *a*,*dd*, il vino de' tini *p*,*q* si trova bastantemente caldo; e versato ne' recipienti *a*, *dd* passa prestissimo a distillare. La difficoltà, che il liquido contenuto nelle botti *p*,*q* ha di riscaldarsi, dipende dalla mentovata non conducibilità de' liquidi pel termico; cosicchè venendo esso in gran parte dall' alto in basso, il riscaldamento succede lentamente. Per questo non è necessario che le botti sieno molto ampie, come si costumano ordinariamente nelle fabbriche di acquavite, non avendo altro oggetto se non quello di raffreddare.

Pag. 222 Part. II



DE' SOLIDI

d' eguale resistenza rispettiva.

DI MARIANO FONTANA

presentata a' 24 di giugno. 1805

I solidi, che sotto l'azione o del proprio peso, o di pesi estranei sono in ogni luogo ugualmente o lontani, o vicini al pericolo d' essere spezzati, non sono mai prismatici, e godono d' una eguale sicurezza ove anno le minime dimensioni, e ove anno le massime. La cognizione di tali solidi porta molti vantaggi nelle costruzioni, che l'architettura prescrive. I principali sono il risparmio di materia, il potere adoperare corpi che sono in nostro potere, e che ci sarebbero in altra supposizione inutili, e principalmente la diminuzione del carico in certi casi, ne' quali il soverchio peso sarebbe dannoso. Di quì è, che quanti della resistenza de' solidi già scrissero, tutti si proposero di determinare la forma, che ad essi si vuol dare, perchè godano d' una sicurezza in ogni lor parte eguale. Sotto due condizioni essenzialmente diverse questi solidi si possono considerare: cioè o come pendenti con un estremo libero fuori d'un altro solido, dal quale nell'altro estremo sono invincibilmente tenuti; oppure come sostenuti da due appoggi ne' loro estremi, o in due opposti segmenti. Se si riguarda alla prima di queste condizioni, e vogliasi la forma d'un corpo, il quale in ogni sua sezione parallela alla direzione del peso, e normale ad un certo asse soffra un egual pericolo di rottura, la troviamo presso degli scrittori compitamente determinata. Che sebbene il problema sia di sua natura indeterminato, pure, aggiunte alla forma de' solidi da costruirsi alcune generali condizioni, che fortunatamente riescono alla loro costruzione assai comode, si ha già il metodo sicuro per formarli. Ma convien pure confessare, che se si volgiamo a' corpi retti su due sostegni, la teoria da' più lodati scrittori lasciataci ne abbandona. Assai poche cose ne dicono, e di queste alcune non sono vere. Io considerai con qualche accuratezza, sono già tre lustri, *(a)* la resistenza de' solidi, ed esposi i veri e generali principj onde quasi spontaneamente viene il metodo di trovare i solidi, de' quali parliamo; ma allora non fu in mia facoltà di più stendermi in queste ricerche. Avendo in seguito osservato, che altri trattò dopo quel tempo di quest' interessante parte della statica, e non vedendo emendati i difetti de' più vecchi scrittori, richiamati i pensieri da gran tempo abbandonati, pensai d' esporre i principj, e dare le formole che hanno in se la determinazione di questi solidi che in due appoggi si reggono; e che chiamiamo *solidi d' eguale resistenza rispettiva.* E prima dirò de' solidi d' un solo peso gravati. Poi di

(a) Pavia 1790.

quelli che sostengono due pesi, o un numero determinato di pesi. In fine di quelli che sono gravati da infiniti pesi, o sia che si considerano come pesanti.

§ I.

De' solidi gravati da un solo peso.

1. Il primo passo, che far si dee per riuscire ove vogliamo pervenire, è quello di fissare la misura de' momenti, che i pesi adoperano per ispezzare i solidi, in quella delle loro sezioni, che più si voglia considerare. Non è stata bene definita questa misura, se non per un caso, e per ciò non si è bene prescritta la forma de' solidi d' egual resistenza rispettiva, se non per quel caso. Il che chiaro apparirà a chiunque vorrà gettare uno sguardo alla nuova teoria, di cui parlai poco sopra, e che con tutta brevità esporrò insieme colle formole che necessarie sono all' intento.

A rendere questa ricerca più facile fo uso di due principj di statica abbastanza per se stessi evidenti. E primieramente in un sistema di corpi tra se legati, che siano in equilibrio, si può riguardare qual parte più piaccia del sistema come immobile. E certo la reazione che fa una parte del sistema alle potenze che tendono a muoverlo è assolutamente la stessa, che loro opporrebbe, se fosse immobile. Colla stessa ragione possiamo riguardare come immobile una parte d' un sistema di corpi, quando le potenze sono ancor lontane dal porre le parti del sistema nel limite del moto. In secondo luogo per definire l' effetto d' una potenza che preme un corpo sopra uno degli appoggi, si potrà l'effetto stesso desumere da una potenza eguale alla pressione che soffre l'appoggio, ma che abbia direzione opposta. Considerando tale potenza come quivi applicata, si calcolerà nel sistema lo stesso effetto che produce la data potenza premente.

2. Sia ora un solido rappresentato dal profilo verticale AHa (fig. 1ª). Posi la sua base sopra i due sostegni A, a, che sono nella stessa orizzontale Aa, e ad esso sia ovunque applicato il peso P. Le rette verticali MN, mn, HK, l'ultima delle quali è nella direzione del peso, esprimano tre sezioni del solido verticali e normali all' asse Aa. Cercasi il momento, con cui il peso tende a rompere il solido nella sezione MN, o nell' altra mn.

Pongo $Aa = a$, $AK = b$, $AN = x$, $an = x'$. Esprimo le pressioni provenienti dal peso sopra gli appoggi A, a, che chiamo p, p', ed ottengo

$p = \frac{P(a-b)}{a}$, $p' = \frac{P.b}{a}$. In vece delle reazioni che a tali pressioni in A, a si fanno, considero le due potenze

$AF = \frac{P(a+b)}{a}$, $af = \frac{P \cdot b}{a}$. Quindi supponendo applicata al solido la potenza AF, si ha nel solido lo stesso effetto da questa potenza che trae da A verso F, che nel solido medesimo produce il peso P. Ma la potenza AF esercita contro la sezione MN il momento

$AF.AN = \frac{P(a+b)}{a}.x$. Tale è adunque il momento che esercita il peso P a rompere il solido nella sezione MN.

Nel modo medesimo troviamo il momento del peso contro la sezione $mn = \frac{P.bx'}{a}$. Gioverà osservare, che tanto il momento contro la sezione MN si può avere per mezzo della potenza af, quanto il momento contro la sezione mn dalla potenza AF. Mostriamolo di quest' ultimo, giacchè la stessa dimostrazione vale anche del primo. E' cosa manifesta, che la potenza AF agisce per far girare il segmento Anm del solido intorno al punto m col momento $AF.An$. Ma non è men chiaro, che a questo moto s' oppone il peso P col momento $P.Kn$. Per tanto il momento, con cui sollecitato viene il segmento Anm, è eguale alla differenza $AF.An - P.Kn = P\left(\frac{a-b}{a}\right)(a-x') - P(a-b-x') = \frac{P.bx'}{a}$, quale s' è trovato facendo uso della potenza af.

Che se si vuole il momento che soffre la sezione HK, nella cui direzione è il peso, sarà esso $P\left(\frac{ab-b^2}{a}\right)$. E questo è il solo, che sia stato conosciuto dagli autori, non traendone un recentissimo che l' anno 1798 diede un ampio e dotto trattato sulla resistenza de' solidi.

Se in oltre la sezione HK tagliasse per mezzo l' asse Aa, sarebbe $b = \frac{a}{2}$, ed il momento contro di lei riuscirebbe $P . \frac{a}{4}$. Questo è il massimo momento che esercitar possa il peso a rompere il solido.

3. Trovata la misura de' momenti dei pesi, deesi rintracciare quella de' momenti, co' quali la tenacità della materia s' oppone alla rottura. Si sogliono per ciò riguardare i solidi come regolari e soggetti ad una equazione. Di più si suppone, ch' essendo collocati coll' asse orizzontale, e gravati da opportuni pesi s' abbiano a rompere in una sezione verticale e normale al detto asse. In tal supposizione anch' io per ora mi fermo, sia ella, o non sia generalmente vera.

Riguardo in oltre la materia come fragile, ovvero tale, che dovendosi aprire il corpo in una sezione intorno ad un estremo della quale i due segmenti, ove esso si divide, o un solo di loro, debbano girare, essa sezione tutta s' apre in un istante. Modo di rottura, ch' esclude la distensione delle fibre. E so io bene, che questa maniera di rottura è contraria alla costituzione d' un gran numero di corpi, e massime de' vegetabili. Ma siccome da una parte la legge con cui si tendono le fibre è cosa oscura e tuttavia incerta, e tutte arbitrarie sono le teorie fin' ora proposte da' sommi filosofi Leibnizio, Mariote, Jacopo Bernoulli, e se altri è entrato in questa ricerca; e d' altra parte i momenti di resistenza nelle due supposizioni, e delle fibre che s' estendono, e che non s' estendono, anno un rapporto costante, che non può mutare la forma de' corpi che cerchiamo; così suppongo col Galileo la materia fragile, osservando altresì, che non manca un gran numero di corpi che sensibilmente godono d' una tale disposizione, e primieramente le pietre arenarie. Ma di questo alquanto più ampiamente nell' appendice che sarà aggiunta alla presente memoria. Ciò posto stabilisco con Galileo, che lo ha dimostrato, e con cui sono tutti d' accordo, che il centro di gravità d' un piano, che nel rompersi dee girare intorno ad un suo limite, coincide col centro delle tenacità di tutte le minime parti componenti il piano; supponendo però, come sempre si fa, che la materia sia omogenea.

4. Due problemi si possono proporre sopra la forma conveniente ad un solido appoggiato a due sostegni, affinchè sia d' eguale resistenza rispettiva. Il primo cerca un corpo di tal forma, che in un determinato suo luogo sostenendo un peso, il momento di questo contro qualunque sezione normale all' asse orizzontale $A\,a$ che passa pei due sostegni, abbia da per tutto un rapporto costante al momento di resistenza della sezione.

Il secondo poi cerca la forma d'un solido, lungo il quale facendosi scorrere un peso, il suo momento contro la sezione in cui trovasi attualmente, abbia al momento di resistenza di questa sezione quel rapporto, che aveva il suo momento a quello d'un'altra sezione, quando quivi si trovava.

Questi due problemi sono diversissimi l' uno dall' altro, e solidi di forma assai diversa soddisfano all' uno e all' altro. Gli autori, quelli almeno, ch' io ho potuto vedere, anno sciolto il primo ne' solidi incastrati con un loro estremo, e liberamente pendenti coll' altro. Ma passando a' solidi retti sopra due sostegni, non isciolgono che il secondo, senza nemmeno avvertire, che questo problema è diverso dal primo. Nè altro fa il moderno sopra lodato scrittore. Ecco, come dietro le idee di Viviani egli procede.

Il solido $ABDMM'A'$ le cui sezioni verticali e normali all'asse orizzontale AA', cioè BD, PP' sono rettangoli, sia sostenuto dalla retta orizzontale HF che passa per l'inferior base MP' della sezione, qualunque ella sia, $PMP'M'$. Sono applicati agli estremi A, A' i pesi Q', Q'' che intorno all' asse HF s' equilibrano. Facendo $AA' = 2f +$, $AP = x$, $A'P = 2f - x$, viene $Q' : Q'' :: 2f - x : x$, cioè $Q' : Q' + Q'' :: 2f - x : 2f$, onde $Q' = (Q' + Q'')\left(\frac{2f - x}{2f}\right)$, e ponendo $Q' + Q'' = Q$ si ha $Q' = Q\left(\frac{2f - x}{2f}\right)$. Ma $Q'x$ è il momento, che il peso Q' esercita contro la sezione PP', adunque, chiamando per ora M il momento di resistenza che la tenacità della sezione PP' oppone alla rottura, avremo $M = Q\left(\frac{2fx - x^2}{2f}\right)$. Equazione ch'esprime l'uguaglianza de' momenti del peso Q', e della tenacità della sezione PP'. Ciò stabilito passa l' autore dal caso in cui il solido è retto dall'asse HF, all' altro, in cui sia sostenuto ne'suoi estremi A, A'. La statica ne avvisa, che ponendo nella direzione della sezione PP' un peso che uguagli la somma de' due Q', Q'', tal peso adopera un momento, che contro lui esercitava il peso Q', o l' altro Q''. Quindi anche per la nuova supposizione del solido sostenuto da due appoggi, sarà $M = Q\left(\frac{2fx - x^2}{2f}\right)$.

Questo è il teorema trovato già dal Galileo, e ampiamente adoperato da Viviani, e da Grandi. Che se il nostro solido avrà una equazione, onde la sezione PP' sia una funzione di x, e T sia la tenacità della materia, e però il momento di questa tenacità sia pure una funzione di x, che chiamo X, otterrassi

$X = Q\left(\frac{2fx - x^2}{2f}\right)$; e questa equazione ne darà i solidi, ne' quali scelta una qualunque sezione PP', e quivi applicato il peso Q, riuscirà il momento del peso uguale al momento di tenacità della sezione. E' dunque chiaro che questa determinazione non iscioglie che il secondo de' proposti problemi, e non il primo.

L' equazione dunque $X = Q\left(\frac{2fx - x^2}{2f}\right)$, o secondo le espressioni da noi adoperate $X = P.\left(\frac{ax - x^2}{a}\right)$ contiene la determinazione de' solidi appoggiati a due sostegni, ne' quali ogni sezione oppone un momento di tenacità che ha un costante rapporto al momento dello stesso peso nella propria direzione applicato. E qui s' osservi che, qualunque sia il solido che soddisfaccia all' intento, egli è però tale, che dalla sezione verticale DFB (fig. 3ª) la quale passa pel punto C dell' asse Aa, ed è di tutte la massima, viene diviso in due parti eguali e simili, che egualmente si vanno diminuendo mentre s' accostano agli estremi A, a, e quivi svaniscono affatto. Ciò per se è manifesto, essendo il massimo valore di $ax - x^2$ ove $x = \frac{a}{2}$, e ricevendo lo stesso prodotto $ax - x^2$ valori eguali, ove passa per punti dell' asse Aa ugualmente distanti da C, e finalmente annullandosi tanto ove $x = 0$, quanto ove $x = a$.

Per altro il problema generalmente proposto è per più riguardi indeterminato. Passi per l' asse Aa il piano $ANaA$, che forma quasi la base del solido, questo piano può essere qualunque curva. Le sezioni NME, nme tra se parallele e normali all' asse Aa, possono esser curve di qualunque natura. E similmente può essere qualunque la curva AFa, che passa per i loro vertici, o in qualsivoglia maniera termina superiormente il solido. Di queste tre curve due si hanno da supporre date, perchè il problema riesca determinato. Accennerò le supposizioni più comode per ottenere solidi che facilmente si possano costruire.

Primieramente si può supporre, che il solido sia di rivoluzione. Il problema è tosto determinato; giacchè, e le sezioni normali all' asse sono circoli, e la curva orizzontale non è diversa dalla verticale che passa pe' vertici de' circoli.

Appresso se il solido sia prismatico colle basi verticali, la sezione orizzontale sarà un rettangolo, e rettangoli pure le sezioni normali all' asse Aa. Il Viviani propose questo solido, e lo dimostrò essere d' eguale rispettiva resistenza quando la base sia un' elisse apolloniana.

Ancora ove il solido sia prismatico, e le basi orizzontali, basterà di ritrovare la forma di queste basi.

Il Galileo osservò, che il solido riuscirà quale lo cerchiamo, se le basi orizzontali $AN'a$, $BM'b$ (fig. 4ª) saranno parabole coniche.

Così si potranno fare altre ed altre supposizioni, e basterà per determinare il problema, che siano date due delle tre curve, come poc'anzi accennai. Non m'intratterrò di più su questo problema che ampiamente è stato trattato da Viviani, da Grandi, da Warignon, e dal moderno sopraccennato autore, da cui abbiamo il trattato sopra la resistenza de' solidi.

5. Vengo al primo de' due problemi sopra enunciati, in cui essendo dato, e costante il luogo del peso, il solido debb' esser tale, che considerata ogni sua sezione MN, il momento che quivi esercita il peso abbia un costante rapporto al momento di resistenza della stessa sezione. Il momento del peso ha per espressione $P\left(\frac{a-b}{a}\right)x$, ponendo $AN=x$. Ma per ogni caso X significa il momento di resistenza della sezione MN. Si contiene adunque la soluzione del problema nell' equazione $X=P\left(\frac{a-b}{a}\right)x$, che abbraccia tutti i luoghi della sezione nel segmento KHA, o pure sarà $X=\frac{h}{k}P\left(\frac{a-b}{a}\right)x$ l' equazione dello stesso problema, se si vuole, che il momento della resistenza non già sia uguale a quello del peso, ma a lui abbia il costante rapporto $h:k$. Per l' altro segmento KHa, se faremo $an=x'$, ed il momento di resistenza della se-

sezione $m\,n = X'$, otterremo $X' = \frac{P\,b\,x'}{a}$, ovvero
$X' = \frac{h}{k}\frac{P\,b\,x}{a}$.

Qui ancora il problema è per se indeterminato, e per determinarlo debbono supporsi date due delle tre curve che a' solidi possono convenire; valendo questo stesso d'ogni solido, qualunque sia il numero e la condizione de' pesi che lo premono.

In oltre la sola ispezione delle formole ne avvisa, che il solido del presente problema non sarà un solido continovo, ma composto di due parti unite per la sezione HK comune ad entrambi, e queste saranno non solo diseguali, ma altresì dissimili, fuor solamente del caso, che il punto K sia nel mezzo dell'asse Aa. Ne è men chiaro, che ne' punti A, a termina il solido, riuscendo $x = 0$ in A, e $x' = 0$ in a.

Finalmente si dee osservare, che queste due parti, delle quali abbiamo detto essere composto il solido, s'ottengono ne più ne meno che s'ottenga un solido d'eguale rispettiva resistenza, quando da una sua parte è conficcato in un muro, ed essendo libero dall'altra soffre la pressione d'un peso. Il momento sostenuto da ogni sezione di questi solidi si fa dal peso supposto nell'estremo del solido e moltiplicato per la sua distanza da quella sezione contro cui si considera esercitarsi. Ora la reazione del sostegno A fa esattamente le veci del peso, se non che preme dal basso all'alto; ed il segmento AHK è nelle stesse circostanze, come se fosse obbligato in un piano HK. In fatti le formole esprimenti i momenti ne'due casi sono in tutto le stesse.

Debba per esempio il solido essere di rivoluzione, e pongasi, come sopra, $AN=x$, sia $NM=y$, e T la tenacità della materia, e $1:\pi$ il rapporto del raggio alla periferia. Avremo $X=\frac{\pi}{2}Ty^3$. Onde l'equazione $\frac{\pi}{2}Ty^3=P\left(\frac{a-b}{a}\right)x$, cioè $y^3=\frac{2P}{\pi T}\left(\frac{a-b}{a}\right)x$.

Per tanto la curva, dalla di cui rivoluzione si crea il solido AHK è la prima parabola cubica; appunto quale riesce, se il solido è infisso nel muro. Un' altra parabola della medesima classe genera l' altro solido aHK; poichè facendo $nm=y'$, vale per questo secondo solido l' equazione $\frac{\pi}{2}Ty^3=\frac{Pbx'}{a}$.

Sarebbe inutile fermarsi in questo problema che è identico con un altro così compitamente trattato, che sopra lui niente di più rimane a dirsi.

§ II.

De' solidi gravati da due, o più pesi.

6. La parte più interessante della proposta teoria riguarda i solidi retti da due sostegni, e gravati di più pesi. Un falso principio ha condotto molti ad una falsa misura de' momenti, che tali pesi producono per rompere i solidi. Lo vedremo chiaro dalle cose che siamo per dire. Cominciamo da due pesi, e sarà questo caso il fondamento di tutti gli altri.

Un solido retto da' sostegni A, a (fig. 5ª) si rappresenti al solito col suo profilo $AHha$, e sia gravato de' pesi P, p, la direzione de' quali passa per i punti K, k dell' asse Aa. La reazione del sostegno A è

$$\frac{P.Ka + p.ka}{a}, \text{ e quella del sostegno } a \text{ è } \frac{P.KA + p.kA}{Aa}.$$

Qui non si può generalmente cercare il momento di questi pesi contro una sezione qualunque, ma si vogliono distinguere due situazioni, che può avere la sezione, esenzialmente diverse. Si dee vedere, se la sezione sia tra le direzioni de' due pesi, com' è la sezione $M'N'$; o pure s' ella sia fuori del segmento del solido ch' è tra le direzioni de' pesi, quali sono le due MN, mn. La varietà di questi luoghi porta insigne varietà nel momento che esercitano i pesi P, p.

Si cerchino prima i momenti che sostengono le sezioni MN, mn. La reazione, che in A viene da due pesi moltiplicata per la distanza AN, cioè $\left(\frac{P.Ka + p.ka}{Aa}\right).AN$ è manifestamente il momento che sostiene la sezione MN; ed il prodotto $\left(\frac{P.KA + p.kA}{Aa}\right).an$ è il momento che sostiene la sezione mn.

Passi ora pel punto Z la direzione del centro di gravità de' due pesi. Ciascuno vede che i momenti ora trovati non sono punto diversi da quelli, che contro le stesse sezioni produrrebbono i pesi, se si supponessero riuniti nel loro centro di gravità, entrambi cioè fossero applicati nella direzione che passa per Z. Pertanto quando le sezioni, per rispetto alle quali si considerano i momenti de' due pesi, sono fuori delle direzioni de' pesi stessi, questi supporre si possono nel loro centro di gravità, senza che il lor momento si muti.

7. Non si potrà però ottenere nella medesima maniera il momento contro la sezione $M'N'$. Imperciocchè seguitando a considerare la reazione del sostegno A come una potenza che preme per alzare il segmento $AN'M'$, e per farlo girare intorno al punto M', non è possibile, che questo moto succeda, se non si vince lo sforzo del peso P, che studiasi di tenere nel proprio luogo lo stesso segmento $AN'M'$. Ad aver dunque il momento de' due pesi per fiaccare il solido nella sezione $M'N'$ si dovrà dal prodotto della reazione per la distanza AN' levarsi $P.KN'$, che è il momento con cui il peso P si oppone all' effetto della reazione del sostegno A. Quindi il momento de' pesi contro la sezione $M'N'$ sarà

$$\left(\frac{P.Ka+p.ka}{Aa}\right)AN'-P.KN'=\frac{(P.Ka+p.ka)AN'-P.Aa.KN'}{Aa},$$

la qual'espressione ridotta riviene a $\dfrac{P.AK.aN'+p.ak.AN'}{Aa}$.

Questa espressione è diversa assai da quella del momento che risulterebbe, se i pesi fossero nel loro centro di gravità, la cui direzione passa per Z; giacchè allora il momento de' pesi contro la sezione $M'N'$ sarebbe $\left(\frac{P.Ka+p.ka}{Aa}\right)AN'$, cioè $\dfrac{P.Ka.AN'+p.ka.AN'}{Aa}$.

Dagli scrittori di meccanica generalmente si suppone, che per calcolare l' effetto di molte potenze sia sempre permesso di considerarle come riunite nel loro centro d' equilibrio, e parlando di pesi, nel loro centro di gravità. Ma questo principio non è generalmente vero, e va soggetto ad una insigne eccezione che io chiaramente spiegai nella Dinamica; ove diedi regola de' casi ne' quali non è lecito di farne uso.

Prima di passare ad un maggior numero di pesi diasi un' occhiata alla formola $\frac{P.KA.aN'+p.ka.AN'}{Aa}$ esprimente il momento che da due pesi soffre la sezione $M'N'$. Siano i pesi P,p reciprocamente proporzionali alle loro distanze KA,ka da' vicini appoggi A,a. Avremo $P.KA=p.ka$, e la formola si volgerà in

$P.KA\left(\frac{aN'+AN'}{Aa}\right)=P.KA$. Da ciò vengono due importanti verità. In primo luogo il momento de' pesi è costante per tutte le sezioni, che sono nel segmento $HKkh$. In secondo luogo il momento sostenuto da ciascuna di queste sezioni non è che il prodotto d' uno de' pesi per la distanza dal suo vicino appoggio, cioè o $P.KA$, ovvero $p.ka$.

8. Ma già siano i pesi che premono un solido, in qualunque numero, Si può generalmente stabilire, che gravato un solido di vari pesi, il lor momento contro una sezione che sia tra un appoggio ed il peso ad esso vicino, sarà quello stesso, che soffrirebbe questa sezione da tutti i pesi, se tutti si trovassero nel loro centro di gravità; ma non così, se la sezione si trovi tra

le direzioni de' pesi. Allora il momento sarà quale sarebbe, se tutti i pesi, che stanno da una parte della sezione, fossero nel loro centro di gravità, e simigliantemente nel loro si trovassero tutti gli altri che stanno dall' altra parte. Per dimostrare queste due proposizioni suppongo per più facilità, che il solido $AHha$ (fig. 6ª) sia premuto da quattro pesi P, P', p, p'. Facilmente ciascuno comprenderà, che, quello che dimostreremo di questi quattro, varrà per qualunque numero. La reazione del sostegno A a questi quattro pesi ha per espressione $\frac{P.Ka + P'.K'a + p.ka + p'.k'a}{Aa}$. Dunque il momento de' pesi contro la sezione MN che giace tra l' appoggio A ed il primo peso P, risulta $\left(\frac{P.Ka + P'.K'a + p.ka + p'.k'a}{Aa}\right) AN$. Ora se in Z, per esempio, fosse il centro di gravità di tutti i pesi, il loro momento contro la sezione MN sarebbe $(P + P' + p + p').Za.AN$, come dal § 1. è manifesto. Ma $Za = \left(\frac{P.Ka + P'.K'a + p.ka + p'.k'a}{P + P' + p + p'}\right)$, dunque, mettendo nell'espressione del momento questo valore, s' ottiene appunto $\left(\frac{P.Ka + P'.K'a + p.ka + p'.k'a}{Aa}\right) AN$. Pertanto i pesi ne' loro luoghi K, K', k, k' esercitano quel momento che eserciterebbero, se nel loro centro di gravità fossero riuniti. Lo stesso vale del momento contro la sezione mn.

Passiamo alla sezione $M' N'$, che da una parte ha i due pesi P, P', e dall' altra i due p, p'. Tutti questi pesi per la reazione del sostegno A contro M', N' adoperano il momento $\left(\frac{P.Ka + P'.K'a + p.ka + p'.k'a}{Aa}\right) AN'$.

Ma alla rottura s' oppongono i pesi P, P', non potendo il segmento $AM'N'$ girare intorno al punto M', se non sono sollevati questi pesi. Dunque dal momento della reazione dell' appoggio A si debbono levare gli opposti momenti de' pesi P, P', che sono $P.KN', P'.K'N'$. Pertanto il momento de' quattro pesi contro la sezione $M'N'$ è $\left(\frac{P.Ka + P'.K'a + p\,ka + p'.k'a}{Aa}\right) - P.KN' - P'.K'N'$,

che richiamando i due ultimi termini allo stesso denominatore, e riducendo, diventa

$$\frac{(P.KA + P'.K'A)\,aN' + p.ka + p'.k'a)\,AN'}{Aa}.$$

Ma se i quattro pesi si trovassero nel loro centro di gravità, il loro momento contro la sezione $M'N'$ sarebbe $\left(\frac{P.Ka + P'.K'a + p.ka + p'.k'a}{Aa}\right) AN'$. Dal confronto

delle due espressioni si vede, che il momento de' quattro pesi riguardati ne' loro proprj luoghi è diverso da quello che risulterebbe, se fossero essi nel loro centro di gravità.

Pongasi adesso, che in z sia il centro di gravità de' pesi P, P', e in z' quello de' pesi p, p'. Per ciò che s'è dimostrato di sopra il momento de' quattro pesi contro la sezione $M'N'$, se i due primi si suppongono in z, e i due secondi in z', riesce

$$\frac{(P+P')\,Az\,.\,aN'+(p+p')\,az'\,.\,AN'}{Aa}\,.$$

Ma $Az=\frac{P\,.\,AK+P'\,.\,AK'}{P+P'}$, $az'=\frac{p\,.\,ak+p'\,.\,ak'}{p+p'}$.

Sostituendo adunque questi valori, il momento si riduce a

$$\frac{(P\,.\,AK+P'\,AK')\,aN'+(p\,.\,ak+p'\,.\,ak')\,AN'}{Aa},$$

s' ottiene cioè lo stesso momento, o si trovino i pesi ne' loro proprj luoghi, o pure i due primi P, P' siano riuniti nel loro centro di gravità, e nel loro altresì i due altri p, p'. E poichè questo vale qualunque sia il numero de' pesi che sono applicati tra N', e A, e similmente tra N', e a, si stabilisca pure per generale principio, che data una sezione $M'N'$ tra le direzioni di qualunque numero di pesi, ad avere il momento di tutti contr' essa sarà permesso di riguardare tutti i pesi che sono tra punti N', A come riuniti nel loro centro di gravità, e similmente nel loro tutti gli altri che sono tra punti N', a.

9. Daremo a' ritrovati valori più comode espressioni per ottener tosto la forma la quale conviene a' solidi che cerchiamo.

Sia (fig. 5ª) $Aa=a$, $AK=b$, $ak=c$, $AN=x$, $an'=x'$, $AN'=z$, il momento contro la sezione $M'N'=Z$, contro la sezione $MN=X$, contro la sezione $mn=X'$. Si ottiene

$$Z = \frac{Pba-(Pb-pc)z}{a},\ X = (\frac{Pa-Pb+pc}{a})\,x,$$

$$X' = (\frac{Pb+pa-pc}{a})\,x'.$$

E più generalmente, volendo che i momenti de' pesi abbiano un costante rapporto a' momenti di resistenza nelle sezioni $M'N'$, MN, mn; se sarà $h:k$ il rapporto, che da per tutto dee avere il momento di resistenza al momento del peso, per i tre segmenti si hanno le tre equazioni

$$Z = \frac{h}{k}(\frac{Pba-(Pb-pc)z}{a}),\ X = \frac{h}{k}(\frac{Pa-Pb+pc}{a})\,x,$$

$$X' = \frac{h}{k}(\frac{Pb+pa-pc}{a})\,x'.$$

Ridotto il problema ad essere determinato coll'assegnare due delle tre curve, dalle quali sono chiusi i solidi, come sopra si è osservato, queste tre equazioni danno tre segmenti determinati ciascuno da una curva, che in ispecie e la stessa per tutti tre, diversa però in quella specie per ciascun d' essi segmenti, così chiedendo i diversi fattori delle quantità z, x, x'. Sarà dunque il solido composto di tre segmenti di tre solidi diversi, e passando dall' uno all' altro non si serberà continuità, sebbene i loro limiti saranno le comuni sezioni che uniranno il solido intermedio, e i due estremi.

Non mi fermerò in applicazioni, essendo la cosa per se agevole. Solo avvertirò, che al solido si potrà dare certa regolarità in que' casi ne' quali è in nostro arbitrio adoperare pesi che abbiano qualunque rapporto, e possano essere collocati, come a noi piaccia. Poniamo in prima, che i pesi siano proporzionali reciprocamente alle distanze da' loro vicini appoggi, onde sia $P:p::c:b$, cioè $Pb=pc$. L' equazioni diventano

$Z=\frac{h}{k}.Pb, X=\frac{h}{k}Px, X'=\frac{h}{k}px'$. La prima ne avvisa, che il segmento, che giace tra le direzioni de' pesi è un prisma colle basi HK, hk.

Siano in secondo luogo i pesi eguali, eguali saranno altresì le distanze b, c, le due ultime equazioni saranno identiche, i due segmenti estremi saranno uguali e simili ed uniti all'intermedio per le comuni sezioni HK, hk risulterà il solido dotato di certa regolarità.

10. Questo è il primo de' due problemi, che nel § 1. abbiamo notato potersi proporre intorno a' solidi d' eguale rispettiva resistenza. Qualcuno dimanderà forse: e non si potrebb' egli sciogliere per due pesi il secondo di que' problemi? Non si potrebbe cercare un solido su cui scorrendo i due pesi, ne' luoghi de' pesi stessi il momento di resistenza delle sezioni avesse un costante rapporto al momento contr' esse esercitato da' pesi? Rispondo, che il problema sarà sempre indeterminato; giacchè potendo variare i luoghi de' pesi in infinite maniere, ed influendo il luogo che ha ciascun peso nel momento che soffre la sezione, nella cui direzione è l' altro peso, nell' espressione di ciascun momento vi avranno due variabili, cioè le distanze di ciascun peso dal suo vicino appoggio, che cangiano continovamente. In fatti chiamando $AK=y, ak=v$ il mo-

mento de' due pesi contro la sezione HK risulta

$\frac{Pay - Py^2 + pvy}{a}$, e contro la sezione hk riesce

$$\frac{Pvy + pav - pv^2}{a}$$

11. Se i pesi sono più di due, tutto il solido sarà composto di tanti segmenti più uno, quanti sono i pesi. Tali segmenti dipenderanno da curve della medesima specie, varie però in ciascuno a cagione de' vari fattori costanti. Vediamolo nella supposizione di quattro pesi, essendo chiaro, che lo stesso si dovrà dire, qualunque sia il loro numero.

Per avere i due segmenti estremi AHK, ahk (fig. 6ª) si riguardino tutti i pesi, come esistenti nel loro centro di gravità, ed il momento di qualunque sezione MN del segmento AHK sarà

$\left(\frac{P.Ka + P'.K'a + p'.k'a + p.ka}{Aa}\right) AN$; e contro qualunque sezione mn del segmento ahk sarà

$$\left(\frac{P.KA + P'.K'A + p'.k'A + p.kA}{Aa}\right) an.$$

Ora passando al segmento $HKK'H'$ abbiamo dalle cose già dimostrate, che il momento contro ogni sua sezione μ, ν si esprime per

$$\frac{P.KA.a\nu + (P'.K'a + p'.k'a + p.ka) A\nu.}{Aa}$$

Nel modo medesimo il momento contro ogni sezione $M'N'$ del segmento $H'K'k'h'$ riesce

$$\frac{(P.PA+P'.P'A)\,aN'+(p'.k'a+p.ka)\,AN'}{Aa}.$$

E finalmente il momento contro una sezione $\mu'\nu'$ del segmento $h'k'kh$ si troverà essere

$$\frac{(P.PA+P'.P'A+p'.k'A)\,a\nu'+p.ka.A\nu'}{Aa}.$$

Quindi se saranno $X, X', X'', X''', X^{\text{IV}}$ i momenti di resistenza delle sezioni $MN', \mu\nu, M'N', \mu'\nu', mn$, e $k:h$ il costante rapporto che ovunque aver dee il momento de' pesi a quello di resistenza; e di più si faccia $KA=b, K'A=b', k'A=b'', kA=b''', AN=x, A\nu=x', AN'=x'', A\nu'=x''', An=x^{\text{IV}}$, otteniamo le cinque equazioni.

$$X\;=\frac{h}{k}\left(\frac{P.\overline{a-b}+P'.\overline{a-b'}+p'.\overline{a-b''}+p.\overline{a-b'''}}{a}\right)x$$

$$X'=\frac{h}{k}\left(\frac{Pb[a-x']+[P'.\overline{a-b'}+p'.\overline{a-b''}+p.\overline{a-b'''}]\,x'}{a}\right)$$

$$X''=\frac{h}{k}\left(\frac{[Pb+P'b'].[a-x'']+[p'.\overline{a-b''}+p.\overline{a-b'''}]\,x''}{a}\right)$$

$$X'''=\frac{h}{k}\left(\frac{[bP+P'.b'+p'b''].[a-x''']+[p.\overline{a-b'''}]\,x'''}{a}\right)$$

$$X^{\text{IV}}=\frac{h}{k}\left(\frac{[Pb+P'.b'+p'b''+p.b''']}{a}[a-x^{\text{IV}}]\right)$$

Queste equazioni, supponendosi date due delle tre curve, dalle quali dipende la forma de' cinque segmenti, ne danno la terza per cui rimarranno essi interamente definiti. Il loro complesso costituirà il solido che vogliamo.

De' solidi d' egual resistenza rispettiva da due, o più pesi premuti niente dice Viviani, ne Grandi, ne il moderno autore, che sopra ho rammentato, ne altri ch' io abbia avuto occasione di vedere. Ciò è avvenuto, se non m' inganno, perchè giudicando essi che in ogni caso fosse lecito di supporre tutti i pesi nel loro centro di gravità, hanno insieme creduto, che quanti siano i pesi i quali gravino il solido, basti supporlo caricato da un solo che sia nel comune lor centro di gravità, e sia uguale alla somma di tutti.

§ III.

De' solidi riguardati come pesanti.

12. Per calcolare i momenti che dal peso de' solidi sostengono le loro sezioni, si hanno essi da riguardare come gravati d' un minimo peso in ogni loro sezione. Non è dunque un solido pesante, che un solido gravato da un sistema di pesi; e a lui tosto s' adatta il metodo nell' antecedente § adoperato. Quindi ad ottenere l' espressione del momento della gravità contro una sua sezione trovisi il peso de' due segmenti, ne' quali dalla sezione resta diviso il solido; si determini il loro centro di gravità; e si consideri tutto il peso di ciascun segmento come collocato nel suo centro di gravità. Ecco il solido pesante ridotto al caso in cui sostenga due pesi, tra la direzione de' quali si trova la sezione che soffre il loro momento.

Mettiamo sott' occhio la legittimità del metodo col più semplice caso che si possa immaginare.

Sia un prisma rappresentato dal profilo $B\,A\,a\,b$ (fig. 7ª) retto ne' suoi estremi A, a. La sua base sia B, e $A\,B$ un lato della base. Volendo il momento che esercita il peso del prisma per ispezzarlo in una sua sezione MN, dividansi per metà in K, k i segmenti $A\,N$, $a\,N$, e passeranno per i punti K, k i loro centri di gravità. Facciasi $A\,a = a$, $A\,N = x$, $a\,N = a - x$, onde $A\,K = \frac{x}{2}$, $a\,k = \frac{a-x}{a}$, il peso del segmento $B\,N = B\,x$ ponendo la gravità specifica $= 1$, il peso del segmento $b\,N = B\,(a - x)$. Il momento del peso per rompere il solido in MN sarà $B\,x \cdot \frac{x}{2}(a - x) +$ $B\,(a - x)\left(\frac{a-x}{2}\right)x$; cioè la somma de' due prodotti il primo de' quali è il peso del primo segmento $B\,N$ moltiplicato per la distanza del suo centro di gravità dal vicino appoggio A, e per la distanza dell' altro appoggio a dalla sezione $M\,N$; ed il secondo prodotto è il peso del secondo segmento $b\,N$ moltiplicato per la distanza del suo centro di gravità dal vicino appoggio a, e per la distanza del primo appoggio A dalla sezione $M\,N$; la qual somma sia divisa per la lunghezza dell'asse $A\,a$. Tal momento si riduce a $B\left(\frac{a\,x = x^2}{2}\right)$. Infatti essendo la reazione del punto $A = B \cdot \frac{a}{2}$, questa esercita contro la sezione MN il momento $B.\frac{ax}{2}$. Ma il peso del segmento AM gli si oppone con un momento che risulta dallo stesso peso, e dalla leva KN, dunque per ottenere il momento di tutto il peso del prisma contro la sezione MN, si dee dal momento $= B.\frac{ax}{2}$ sottrarre l' altro $B\frac{x^2}{2}$. Onde il cercato momento $= B\left(\frac{ax - x^2}{2}\right)$.

Se il punto N è nel mezzo dell' asse Aa, cioè se $x = \frac{a}{2}$, il momento sarà $B\frac{a^2}{8}$, siccome contro l'opinione del de la Hire altrove già dimostrai.

13. Venendo ora a' solidi d' eguale rispettiva resistenza, poichè sarà espresso il momento del peso contro una sezione indeterminata, si passerà ad esprimere il momento di resistenza di questa sezione, e dovrà porsi costante il rapporto di tali momenti. Nascerà un'equazione da cui si potrà avere la forma de' solidi che si cercano.

Sia rappresentato un solido pesante dal profilo AHa (fig. 1ª). Si prenda qualunque sua sezione HK normale all' asse orizzontale Aa che dividerà il solido ne' due segmenti KHA, KHa. Siano P, p i pesi di questi segmenti, e N, n i punti ne' quali l' asse Aa è incontrato dalle direzioni de' loro centri di gravità. Chiamisi M il momento di resistenza della sezione HK, e $k : h$ il costante rapporto che in ogni sezione dee passare tra i momenti del peso e della resistenza. E' il momento del peso $\frac{P.NA.aK+p.na.AK}{Aa}$, dunque $M=\frac{h}{k}(\frac{P.NA.aK+p.na.AK}{Aa})$. Quest' equazione è quanto si può richiedere dalla teorìa meccanica. La determinazione de' pesi de' segmenti del solido, de' luoghi de' loro centri di gravità, del momento di resistenza nelle sezioni, e in fine la riduzione dell' equazione è opera della geometrìa.

14. Daremo una generale equazione che s' appartiene a tutti i solidi, che goder possono dell' insigne proprietà della quale parliamo. Ma prima avverto che siccome la loro forma dipende da tre curve, si potrà alquanto ristringere il numero delle soluzioni che si potrebbono tentare. Esaminando l' espressione $\frac{P.NA.aK+p.na.AK}{Aa}$ si scorge, che entrambi i termini del numeratore si vanno più e più diminuendo nell' accostarsi che fa la sezione HK o all' estremo A, o all' altro a, fino a svanir poi ne' punti stessi A, a. Imperciocchè, se si suppone in A, si annullano i fattori NA, AK, e se si suppone in a, svaniscono altresì i fattori na, aK. Tale perciò dovrà essere la forma del solido, che le sezioni normali all' asse Aa svaniscano tanto in A, quanto in a. Quindi non si potranno assumere curve, che rendano finite tali sezioni o in A, o in a; quali sarebbero due curve di genere pa-

rabolico, che avessero il vertice comune in A, o in a, e l' una come ATR (fig. 8ª) servisse di base orizzontale al solido, l'altra Asa fosse la sezion verticale fatta da un piano per l' asse Aa. Tale supposizione renderebbe finita la sezione TSR normale all' asse Aa. Questa è un' assai notabile differenza fra solidi incastrati in un muro e liberi con un loro estremo, e i solidi che si reggono sopra due sostegni.

Sia già il solido AMa in cui la base orizzontale $ACac$ che ha per asse Aa; e le sezioni a quest' asse normali siano le curve BHb, CMc, ec. le quali hanno il vertice nella curva AMa sezione verticale del solido per l' asse Aa; e tali curve siano l' una per l' altra determinabili. Debba questo solido esser d' eguale rispettiva resistenza supponendosi appoggiato a' sostegni A, a.

Assunte due delle trè curve ACa, AMa, CMc come date, pongo nel solido la sezione indeterminata CMc normale all' asse Aa, e a questa ne' segmenti $AMCc$, $aMCc$ le sezioni parallele BHb, EHe, le direzioni de' centri di gravità de' quali segmenti suppongo passare pei punti G, g dell' asse. Siano in oltre le rette KH, NM, kh le comuni sezioni, che le tre curve BHb, CMc, EHe fanno col piano AMa, le quali comuni sezioni riescono insieme gli assi di queste curve. In questi stessi assi prendo ovunque i punti P, Q, p, e conduco le tre rette LL', OO', II' parallele alle rette Bb, Cc, Ec, che sono le comuni sezioni delle tre curve col piano orizzontale ACa; e finalmente suppongo in Z il centro di gravità della curva CMc, e significo per T la tenacità della materia e.

per G la gravità specifica. Affinchè il descritto solido sia quale si vuole, dee valere l' equazione

$$T.CMc.ZN = \frac{h}{k} G \left(\frac{aN.AMCc.AG + AN.aMCc.ag}{Aa} \right) =$$

$$\frac{h}{k} G \left(\frac{aN.AMCc.AG + AN.aMCc(aN - Ng)}{Aa} \right)$$

Sia dunque $Aa = a$, $AN = z$, $NM = Y$, $OO' = q$, $MQ = y$, $Cc = Q$, $AK = v$, $HK = X$, $HP = x$, $LL' = r$, $Bb = R$, $Ak = v'$, $hk = X'$, $hp = x'$, $II' = r'$, $Ee = R'$. Onde viene

$$BHb = \int r\,dx, Ehe = \int r'\,dx', AMCcA = \int (\int r\,dx)\,dv, AG = \frac{\int(\int r\,dx)\,v\,dv}{\int(\int r'\,dx)\,dv},$$

$$aMCca = \int (r'\,dx')\,dv', Ng = \frac{\int(\int r'\,dx')\,v'\,dv'}{\int(\int r'\,dx')\,dv'}; CMc = \int q\,dy, ZN = \frac{\int q\,y\,dy}{\int q\,dy},$$

$ZN = \dfrac{Y \int q\,dy - \int q\,y\,dy}{\int q\,dy}$. Sostituendo adunque otteniamo

$$T(Y \int q\,dy - \int q\,y\,dy)$$

$$= \frac{\frac{h}{k} G \left((a-z) \int (\int r\,dx)\,v\,dv + z \left(\int (r'\,dx')\,dv' \left(a - z - \frac{\int(\int r'\,dx')\,v'\,dv'}{\int(\int r'\,dx')\,dv'} \right) \right) \right)}{a}$$

cioè $\dfrac{k.Ta}{h.G} (Y \int q\,dy - \int q\,y\,dy) = (a-z) \int (\int r\,dx)\,v\,dv$

$$+ z \left((a-z) \int (\int r'\,dx')\,dv' - \int (\int r'\,dx')\,v'\,dv' \right),$$

nella qual' equazione gl' integrali $\int q\,dy$, $\int q\,y\,dy$ si hanno a prendere da M fino a N, l' integrale $\int r\,dx$ da H

fino a K, siccome $\int r'dx'$ da h fino a k; e gl' integrali $\int(\int r dx)v dv, \int(\int r'dx')v'dv'$, da A fino a N il primo, e da a fino a N il secondo. E giacchè le curve BHb, CMc, ec. si possono determinare l' una per l' altra, se due delle tre curve, dalle quali dipende il solido, saranno assunte, si arriverà all' equazione differenziale della terza.

15. Poniamo, che le curve che tagliano normalmente l' asse Aa siano simili. Perciò $\int q dy : \int r dx :: Q^2 : R^2$, onde $\int r dx = \frac{R^2 \int q\, dy}{Q^2}$, e così pure $\int r'dx' = \frac{R'^2 \int q\, dy}{Q^2}$.

Osservando adunque, che $\frac{\int q\, dy}{Q^2}$ dee riguardarsi come quantità costante, nasce

$$\frac{k.Ta}{h.G}\left(Q^2 Y - \frac{Q^2 \int q y dy}{\int q\, dy}\right) = (a-z)\int R^2 v\, dx + (az-z^2)\int R'^2 dv' - z\int R'^2 v' dv';$$

la qual vale per tutti i solidi, quando le curve BHb, CMc sono simili.

E se supporremo, che la base $ACac$ sia un circolo, avremo $R^2 = 2av - 2v^2, R'^2 = 2av' - 2v'^2$; e quindi

$$\frac{k.Ta}{h.G}\left(Q^2 Y - \frac{Q^2 \int q\, y\, d\, y}{\int q\, d\, y}\right) =$$

$$(a-z)\int(2av^2 - 2v^3)dv + (az-z^2)\int(2av' - 2v'^2)dv' - z(2av'^2 - 2v'^3)dv' =$$

$$(a-z)\left(\frac{2av^3}{3} - \frac{v^4}{2} + C\right) + (az-z^2)\left(av'^2 - \frac{2v'^3}{3} + C'\right) - z\left(\frac{2av'^3}{3} - \frac{v'^4}{2} + C''\right).$$

La prima costante C è manifestamente nulla, poichè se $v=0$ l' integrale svanisce. L' altre due costanti si determinano osservando, che s' annullano gl' integrali, quando $v'=z$. Però $C'=-az^2+\frac{2z^3}{3}$, $C''=-2az^3+\frac{z^4}{3}$.

Pertanto $\frac{k.Ta}{h.G}(Q^2 Y-\frac{Q^2 \int qy\,dy}{\int q\,dy})$

$$=(a-z)(\frac{2av^3}{3}-\frac{v^4}{2})+(az-z^2)(av'^2-\frac{2v'^3}{3}-az^2+\frac{2z^3}{3})$$

$$-z(\frac{2av'^3}{3}-\frac{v'^4}{2}-\frac{2az^3}{3}+\frac{z^4}{2}).$$

Ma perchè gl' integrali $\int R^2 v\,dv$, $\int R'^2 v'\,dv'$ si stendano il primo da A fino N, il secondo da a fino a N, si dee porre z per v. Adunque ridotti i termini otteniamo l' equazione

$$\frac{k.Ta}{h.G}(Q^2 Y-\frac{Q^2\int qy\,dy}{\int q\,dy})=\frac{a^4z-2a^3z^2-2a^2z^3+7az^4-4z^5}{6}.$$

E giacchè $Q^2=2az-2z^2$, sostituendo, e riducendo troviamo $12\frac{k.Ta}{h.G}(Y-\frac{\int qy\,dy}{\int q\,dy})=a^3-a^2z-3az^2+4z^3$.

Quest' equazione appunto darà la curva AMa ogni volta che la base orizzontale $ACac$ sia un cerchio, e le figure BHb, CMc normali all' asse Aa siano simili. Le due ordinate di questa curva corrispondenti agli estremi A, a dell' asse sono eguali. La curva è all' asse convessa, ed ha la minima ordinata corrispondente all' ascissa, la quale sia $=a\,(\frac{2{,}5275}{4})$ prossimamente.

APPENDICE.

16. Fu notato di sopra, che la sopposizione in cui Galileo guardò i solidi, quasi fossero perfettamente rigidi, non è conforme alla costituzione della maggior parte de' corpi. Perciò molti celebri scrittori hanno voluto tener conto della elasticità delle fibre, e i principali furono Mariotte, Leibnizio, Iacopo Bernulli, Moschembroechio, Parent, Bulfingero. Ma nemmeno questi grand' uomini, componendo ciascuno la sua teorìa, vanno concordi nell' assegnare il rapporto tra le potenze tendenti, e la tensione delle funi elastiche. Tutti in oltre suppongono, che le fibre, quando in vigor delle potenze son tese, serbino sempre la direzion rettilinea. E questo è ben vero quando la potenza agisce nel senso della loro lunghezza; ma certo è falso quando la potenza ha una direzione o normale, o obbliqua a quella delle fibre; ch' è il caso avuto in vista dagli stessi scrittori, mentre s' accingono di sostituire alla galileana la nuova loro teorìa. La supposizione delle fibre conservantisi rettilinee un' altra se ne trae dietro ugualmente falsa. Quest' è la figura della minima apertura del solido, o piuttosto del piano verticale, che secondo la lunghezza delle fibre passa per lo spazio nel quale si distendono le fibre. Tutti riguardano tale figura come un triangolo rettilineo; eppure rettilineo non può essere, se le fibre distendendosi s' incurvano. Queste supposizioni ed altre ancora lasciano incerta e la resistenza di ciascuna fibra, e la legge, secondo cui le resistenze convengono alle fibre discendendo dalla più tesa alla

meno; e finalmente incerto il centro di tali resistenze. Laonde incerto altresì si rimane il momento della resistenza che offre la sezione del solido. Il celebre scrittore che della resistenza de' solidi recentemente trattò s' appiglia al partito d' applicare all' inflessione e rottura de' corpi la bellissima teorìa delle curve elastiche, che immaginata dal profondissimo geometra Jacopo Bernulli, fu perfezionata dal non men grande Daniele, e dall' immortale Eulero negli atti di Pietroburgo, e che quest' ultimo aggiunse all' opera, veramente originale sulle curve, che godono di proprietà di massimo o di minimo. Ma questa teorìa sì bella e sì illustre considerata per se stessa niente può promovere la concreta teorìa della resistenza de' solidi. Vediamo il processo, con cui da Eulero s' arriva alla generale equazione della curva elastica, e consideriamo diligentemente le supposizioni sù le quali è fondata.

La lamina elastica AMB (fig. 10ª) è invincibilmente ritenuta in un piano coll'estremo B, e all'estremo A è unita la verga inflessibile AC, alla quale è applicato il peso Q; in virtù di questo peso la lamina tanto s'è ripiegata, che la sua elasticità nella posizione BMA già equilibra il peso. Si prolunghi la direzione CA, e sù questa prendansi le ascisse CP, che comincino in C. Da qualunque punto M della ripiegata lamina si meni sopra CA la normale MP. Il momento del peso Q dee uguagliarsi al momento con cui gli si oppone l' elasticità, onde la lamina non si pieghi di più. Ora ritenendo l' ipotesi di Leibnizio sopra la tensione delle fibre elastiche, l' energia dell' elasticità in qualunque punto M dee essere reciprocamente come il raggio di curvità cui è ridotta la lamina in M. Quindi se si chiami E l' elasticità della materia, della quale si compone la lamina, e il raggio di curvità in M sia R, la forza elastica dell' elemento ch' è in M, sarà $\frac{E}{R}$. Ma l' elasticità non potrebbe fare equilibrio col peso Q, che moltiplicato per la distanza CP forma il momento $Q.CP$, se essa stessa non fosse moltiplicata per la lunghezza d' una certa leva cui applicata si supponga. Quindi Eulero con somma accortezza moltiplica la forza elastica per k^2, affinchè il momento $\frac{Ek^2}{R}$ s' uguagli al momento $Q.CP$. Facendo pertanto $CA=a, AP=x$ nasce l' equazione $Q(c+x)=\frac{Ek^2}{R}$. Sostituendo al raggio R il valore che gli conviene con porre dx costante, cioè sostituendo $\frac{-dx\,ddy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}$, e moltiplicando per dx tutta l'equazione, e integrando s' arriva all' equazione differenziale $Q\left(cx+\frac{x^2}{2}+f\right)=\frac{Ek^2\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, dá cui viene

$$dy=\frac{Q\left(cx+\frac{x^2}{2}+f\right)dx}{\sqrt{\left(E^2k^4-Q^2\left(cx+\frac{x^2}{2}+f\right)^2\right)}}$$

Quest' è l' equazione delle curve elastiche, dalla quale il grand' Eulero, oltre le generali affezioni, determina con somma facilità ed eleganza le varie classi e quasi famiglie, che da lei nascono, solo che il principio delle ascisse si muti. E tale pure è l' equazione di cui il recente scrittore ha voluto far uso per introdurre ne' problemi della resistenza de' solidi l' elemento dell' elasticità. Ma non veggo come l' esposta equazione servir possa ai problemi de' quali è questione. In questi vuolsi che la costituzione della materia di cui si compongono le travi si consideri qual' è in natura; e perciò appunto non s' è voluta adottare la supposizione di Galileo, e si è detto doversi i solidi riguardare come elastici.

Ora l' equazione $Q(c+x)=\frac{Eh^2}{R}$ ridotta alla forma, che poco sopra si vede, s'appoggia a varie supposizioni che non possono mai verificarsi in un solido cui sia applicato un peso per romperlo o per piegarlo. E lascio, che quì si suppone una lamina o di niuna o d' infinitesima grossezza, laddove infinite di queste compongono una trave, ed in ciascuna ha da essere varia la curvità; e lascio pure che il raggio R non può servire che ad una di queste curve; ommetto che il porre l' azione dell' elasticità reciproca al raggio di curvatura è un' ipotesi arbitraria, potendo essere come un' altra funzione dello stesso raggio. Tutto ciò lasciando mi fermo a considerare il fattore k^2. Questo nell' equazione euleriana si assume costante. Ed è ben lecito ad un geometra fare ne' problemi astratti quelle supposizioni che più gli piacciono, e secondo que' supposti varranno le soluzioni ch' egli ottiene. Ma se le teorie riducansi al concreto, non saranno certo legittimi i risultati, se in atto quelle supposizioni non si verificano.

Ma egl' è certo che, volendo la curva elastica in concreto, non potrà k^2 esser costante. La qual cosa perchè dimostrata apparisca, cerchiamo che significhi l'elemento k, che nell' equazione $Q(c+x)=\frac{Ek^2}{R}$ viene da Eulero con somma ragione introdotto. Il peso Q non può, come sopra si disse, essere equilibrato dalla forza elastica che è in M, se questa non s' intende applicata ad una leva, onde si produca un momento uguale a quello del peso Q. Pretendere che una semplice potenza possa equivalere al momento d' un altra potenza, egli è come pretendere che una linea equivalga ad una superficie. Se si riguarda dunque l' elasticità della lamina solamente. qualunque minimo peso applicato in C la piegherebbe affatto, e da qualunque posizione, che da principio avesse; senza fallo la ridurrebbe alla verticale. Poco a ciò hanno atteso alcuni che ricercando l' equazione delle curve elastiche hanno uguagliato i momenti de' pesi alle semplici potenze. E' necessario dunque che l' elasticità in ogni elemento della lamina gravata da un peso s' intenda applicata ad una leva di certa lunghezza, onde risulti un momento uguale a quel del peso, cioè nel caso nostro uguale al prodotto $Q(c+x)$. Ne credo che per altra ragione il sagacissimo Eulero introducesse nella sua equazione il moltiplicatore k^2. Ch' anzi avendo egli scelto un moltiplicatore di questa forma sembra che abbia supposto convenire la forza elastica $\frac{E}{R}$ a tutti i punti della leva, sì che considerata la detta forza nella sommità, o sia nel punto M della leva, risulti l' intera forza elastica

$\frac{Fk}{R}$; la quale in fine per la lunghezza di tal leva che è k, di nuovo moltiplicata genera il momento $\frac{Ek^2}{R}$.

Ma qualunque sia stata la mente del celebratissimo geometra, due cose sono ugualmente certe. L' una è ch'egli poteva stabilire quale ipotesi più gli piaceva, e secondo questa ricavare l'equazione della sua curva. L'altra, che se togliendosi dalle supposizioni arbitrarie, si vorrà discendere al concreto, e rintracciare la vera forma che una trave elastica dee prendere per l' azione del peso Q, non sarà più permesso di porre costante la quantità k^2, ma si dovrà considerare come una funzione della distanza $c+x$. Imperciocchè il peso Q operando contro l' elemento che è in M, sforza col momento $Q(c+x)$ il segmento MA (fig. 11ª) ad inclinarsi sotto il livello ST, e molte delle fibre della sezione MP a distendersi, e più le superiori Mm, meno le inferiori $M'm'$. Dunque secondo che crescerà il momento $Q(c+x)$, cioè la distanza x, più fibre saranno distese, e l'apertura MLm si farà più grande. In oltre le fibre superiori M saranno distese di più, che le inferiori $M'm'$. Quindi per se stesso è chiaro, che volendo anche supporre ragunata nel luogo più alto M tutta l' elasticità, che pur opera variamente in tutta la lunghezza ML, e volendola esprimere per $\frac{Ek^2}{R}$, si dovrà considerare la lunghezza ML come variabile al variare di x. Adunque il moltiplicatore k^2 è una funzione di $c+x$, ne si può significare se non per $F(c+x)$, o con altra simile espressione. Dalle quali cose risulta, che non può k^2 riguardarsi per costante nè problemi concreti.

Ora, come sopra si è osservato, l'equazione della curva elastica, che alcuni hanno quasi presa in prestito da Eulero per servirsene ne' problemi della resistenza de' solidi, suppone k^2 costante. Dunque non può essa servire per la soluzione di tali problemi.

17. Che se qualcuno si rivolgesse al primo inventore delle curve elastiche, al dottissimo Jacopo Bernulli, il quale nell' ultima memoria che scrisse sù questo soggetto, volle tener conto dell' azione delle fibre distese per tutta la grossezza della trave; ne solo considerò la distensione delle fibre superiori, ma la compressione ancora delle infime, e pretendesse perciò di poter far uso della equazione della curva elastica a definire la resistenza de' solidi; questi non dovrà che consultare il giudizio che portarono delle sue supposizioni, e de' suoi discorsi non solo i chiarissimi Parent e Bulfingero, ma ancora il suo comentatore il profondo Gabriele Cramer, per persuadersi, che quell' insigne geometra il quale pure inventò questo problema, poco felicemente è riuscito a scioglierlo, ove si voglia tener conto degli accidenti che nell' apertura MLm hanno luogo, siccome è necessario di fare ne' problemi concreti.

18. Tutta la dottrina della resistenza de' solidi stà nel confronto che si dee fare tra momenti delle potenze adoperate a rompergli, e i momenti delle resistenze colle quali la natura ha provveduto alla loro sicurezza fino a certi limiti. Egli è perciò chiaro, che a fare quel confronto utilmente, si dee conoscere la mi-

sura assoluta d' entrambi i momenti. Della misura de' momenti delle potenze, non cade dubbio, solo che note ci sieno le potenze, e dati i luoghi ove sono applicate. Ma la cosa non è così chiara de' momenti delle resistenze nella maggior parte de' corpi. Poichè se hanno le fibre in grado sensibile distendibili, la misura de' momenti di loro resistenza non si può immediatamente definire, nemmeno se si conosca l' assoluta forza della loro coerenza. Questa determinazione è ben facile nell' ipotesi di Galileo, risultando la ricercata misura dal prodotto della coerenza della materia, della sezione di rottura, e della distanza del suo centro di gravità da quel limite intorno cui la fatta sezione dee girare nell' atto della rottura. Ma se le fibre sensibilmente sono estendibili, l' ultimo fattore del prodotto varia, perchè supponendosi applicate le potenze in direzione o normale o obbliqua all' asse del solido, non coincide il centro delle resistenze col centro di gravità delle sezioni. La difficoltà d' assegnare con esattezza quest' ultimo fattore è quella che rende incerte le teorìe di Mariotte, Leibnizio, di Jacopo Bernulli, e di altri, ed essa è pure, che impedisce d' applicare a questi problemi delle resistenze l' elegante teorìa delle curve elastiche.

Ciò però non toglie l' utilità alla dottrina delle resistenze. Imperocchè se la distanza del centro delle resistenze che sono nelle minime parti delle sezioni, dal centro del moto non è identica con quella del centro di gravità, le è però proporzionale. Quindi sebbene ne' corpi elastici l'assoluta misura del momento di resistenza non sia quella stessa, che ne' corpi perfettamente rigidi, nulladimeno così in que' corpi, come in questi sono i momenti come i cubi de' lati omologhi delle sezioni simili. Verità fondata non solo sopra la teorìa, ma conforme altresì ad un gran numero d'esperienze di Buffon, e d'altri. Due importanti conseguenze vengono da questo costante rapporto. In primo luogo vagliono anche ne' corpi elastici le equazioni sopra esposte, poichè esse non riguardano che i rapporti tra' momenti de' pesi, e que' delle resistenze. In secondo luogo col mezzo d'una sola esperienza si potrà almeno prossimamente assegnare l'assoluto momento di resistenza in qualunque sezione di rottura. Si faccia un solido prismatico della stessa materia di cui è composto il solido in questione, e quello abbia la base simile alla sezione di rottura di questo. Si cerchi con una sperienza il momento di resistenza nel solido costruito. Starà il momento di resistenza in questo al momento di resistenza nella sezione del solido dato come il cubo d'un lato della base del solido d'esperienza al cubo del lato omologo della sezione di rottura nel solido dato. Ho detto prossimamente, perchè que' valenti, e benemeriti Fisici che tali sperienze hanno fatto, non attesero ad un' elemento la cui considerazione non si vuole disprezzare. Egli è lo sfregamento che uno almeno de' segmenti del solido, che spezzar si dee, soffre da un suo appoggio sù cui alcun poco ha da scorrere prima che il solido si spezzi, e nell'atto stesso dello spezzarsi.

Fig. 1

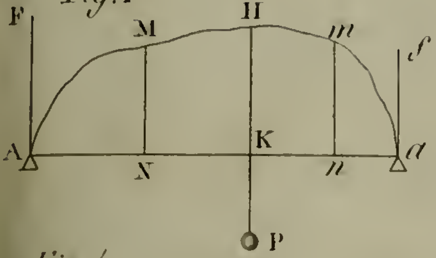


Fig. 2

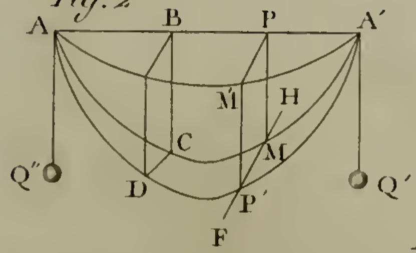


Fig. 3

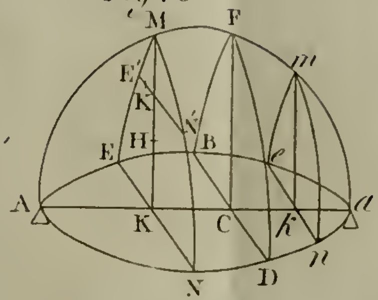


Fig. 4.

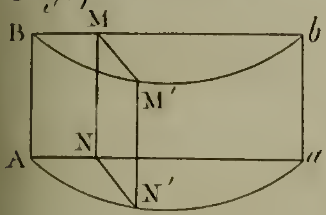


Fig. 5

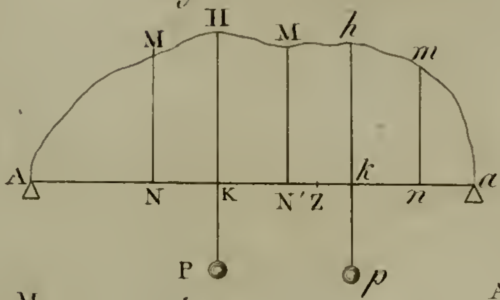


Fig. 6

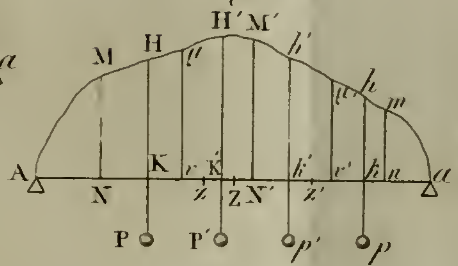


Fig. 7

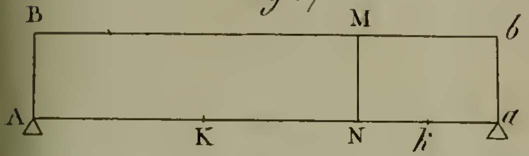


Fig. 8

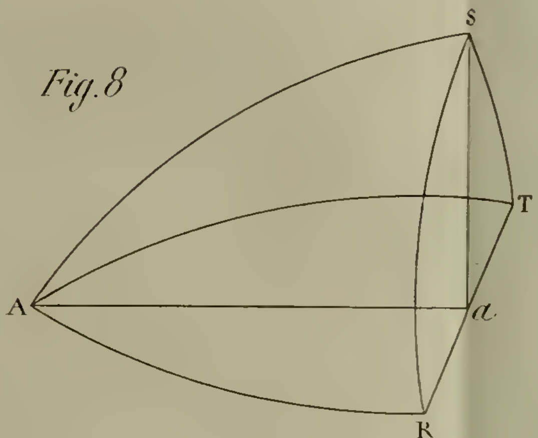


Fig. 9

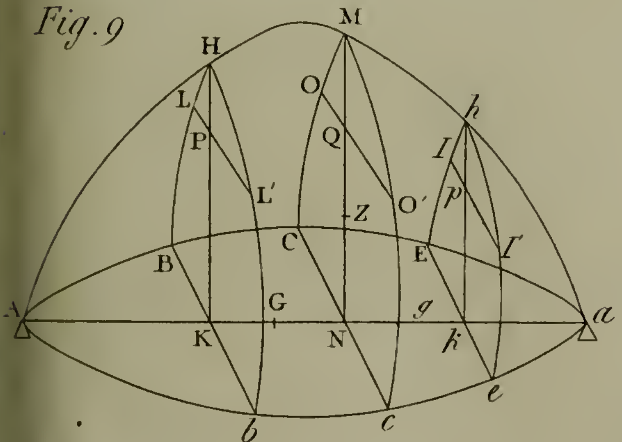


Fig. 10

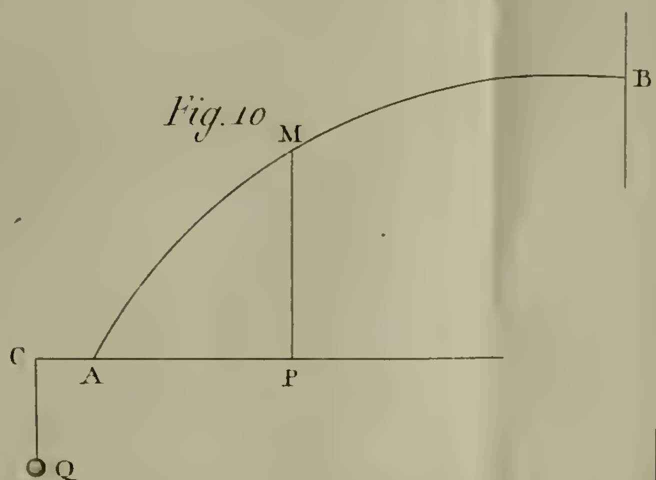
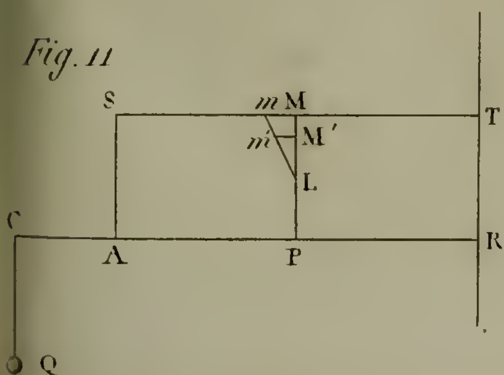


Fig. 11



OSSERVAZIONI PRATICHE

sul metodo Anelliano nella cura dell' Aneurisma.

Di Giuseppe Atti

presentata ai 4 Gennajo 1806.

La legatura d' un grosso tronco arterioso affetto di aneurisma fu sempre considerata come una delle più ardue, e rischiose intraprese della Chirurgia, o la difficoltà si risguardasse dell' operazione, o l' incertezza della riuscita; nè potea essere diversamente in quei tempi ne' quali l' inspezione anatomica non avea alla Chirurgia ancora aperto il cammino per le scoperte luminose, che doveano in seguito illustrare quest' arte, ne l' umana industria eccitata dal potente stimolo del bisogno di portar sollievo all' umanità l' aveva ancora portata a quel grado di perfezione a cui la miriamo al presente salita. Troppo timidi gli antichi Chirurghi non ravvisavano nella legatura d' un insigne tronco arterioso che le conseguenze inevitabili dell' intercettato circolo del sangue, la morte cioè, e lo sfacello della sottoposta parte. In seguito colla scorta dell' anatomia resi più coraggiosi, non però meno circospetti osarono confidare di vantaggio nelle forze della natura, ed insegnò loro l' esperienza quanto fosse ricca l' arte nostra di ripieghi, e d' industrie nelle più luttuose circostanze. Ad onta però de' lumi a que' tempi acquistati, e delle accurate osservazioni, e de' tentativi coronati alcuna volta di successo fortunato era però l' operazione dell' aneurisma creduta assai pericolosa, ed il metodo in fatti che allora seguivasi nell' operare esponeva ad infinite, quasi insuperabili difficoltà. Era riservato l' avanzamento di questo ramo di pratica Chirurgica a' nostri giorni ne' quali l' Anatomia palesò le numerose, e frequenti anastomosi de' vasi, e l' osservazione accurata de' tumori aneurismatici ne scoprì la vera natura, ed essenza. Nessun ramo di Chirurgia fu a' nostri giorni con più impegno coltivato, e l' indefesso studio de' suoi coltivatori nulla lasciò d' intentato a perfezionarlo. Il celebre Hunter, a cui la Notomia, e Chirurgia dee tante luminose scoperte, seguendo le traccie segnate dall' Anellio, e da altri Chirurghi, instituì un nuovo metodo di operare l' aneurisma, che per la sua semplicità ha riscosso l' universale approvazione, e che ora dagli Operatori si pratica comunemente. Dopo lui studiarono molti in seguito di perfezionarlo, ed al Professore Scarpa ultimamente nella sua insigne opera su gli Aneurismi è piaciuto fare alcune modificazioni al metodo di Hunter, che conducono a facilitarne l' esecuzione, e ad assicurare un esito felice. La ragionevolezza, e singolarità del metodo proposto fece, chè m' invogliassi io pure, appena mi fu noto, di ripetere i loro tentativi, quando mi si fosse offerta occasione d'operare tumori aneurismatici. Non tardarono queste a presentarsi, ed ebbi campo non solo di confermare colle proprie mie osservazioni le già sparse dottrine sul nuovo metodo d'operare gli aneurismi, ma ancora d'immaginare nuovi compensi, che mi sembrarono essere richiesti da qualche particolarità de' casi diversi, che mi si offrirono. Egli è perciò, che io intendo di raccogliere le mie osservazioni pratiche sulla cura degli aneurismi dopo la scoperta di Hunter descrivendo con somma ingenuità la storia degli operati, ed aggiugnendo quelle riflessioni, che possono meritare le suddette particolarità. Una materia, a cui hanno sempre recato e recan tuttora il maggiore interesse i Chirurghi, che ha eccitata in essi la gara di perfezionarla, e che promette sì segnalati vantaggj all'umanità, forma ora l'argomento delle mie ricerche, e delle pratiche mie osservazioni.

Un Giovine Imolese d'anni ventisei, robusto, che fino a quell'età avea goduto d'una assai prospera salute dopo avere fatti strani sforzi, mantenendo le gambe in violente estensioni col reggersi con forza sulla punta dei piedi, incominciò a sentire qualche torpore, e stupidità alla gamba destra; in seguito accusò un senso di dolore alla sura, che si aumentava di giorno in giorno. Fu giudicato dapprima un semplice reuma, e gli furono perciò prescritte unzioni, e forti fregagioni sulla parte, come pure gli fu ordinato di esercitare la medesima frequentemente, e con forza. Vedendo l'infermo, che sotto l'uso delle unzioni, e sotto questo violento esercizio la sura vieppiù gonfiavasi, che il dolore s'aumentava, e che camminando si rendeva quasi insopportabile, risolvette di trasportarsi a Bologna per consultarmi. Inteso, che io ebbi il preciso racconto del suo male, esaminai la gamba ove ravvisai una manifesta intumescenza della sura; si estendeva questa più alla parte esterna della gamba ove riscontravasi maggiore la durezza, e la resistenza. Il colore della cute non era per modo alcuno alterato, non sentivasi fluttuazione, ma bensì una pulsazione profonda. Ciò mi fece sospettare di un aneurisma riflettendo specialmente alle cause, che aveano prodotta tal malattia. Ad accertarmene feci una forte compressione nell' interno della coscia sul tragitto della femorale superficiale affine di intercettare il circolo del tronco arterioso: esaminato in allora il tumore, non si sentiva più veruna pulsazione, anzi mantenendo la compressione per qualche tempo, svaniva in parte l' intumescenza della sura, ed essa diveniva molle, e cedente come quasi in istato naturale, abbandonata la compressione gonfiavasi nuovamente, indurivasi, e faceva sentire di bel nuovo la pulsazione. Ciò tolse ogni dubbio sulla natura del male; ne solo da tal prova conobbi, che si trattava di un aneurisma, ma mi parve da essa potere ancora rilevare, che l' aneurisma era circoscritto stante la prontezza colla quale il tumore scompariva quasi affatto dopo alcuni minuti di compressione, mentre negli aneurismi diffusi, fatta la compressione, cessa il tumore di pulsare, ma non cede già l' intumescenza, o cede soltanto ad una compressione protratta a lungo tempo. La situazione del tumore indicava bastantemente che l' arteria resa aneurismatica era la tibiale postica, anzi prendendo il centro del tumore come il luogo ove l' arteria soffrisse da prima, o rottura nelle prime tonache, o altra lesione, v' era luogo a credere, che ivi precisamente dapprima soffrisse l' offesa ove, dividendosi, forma la peronea, tanto più, che la gonfiezza della sura, come già dissi, più estendevasi alla parte esteriore della gamba sul luogo appunto ove cammina la peronea. Avvertii l' infermo dello stato infelice in cui si ritrovava, e della necessità di sottoporsi ad una operazione la quale, benchè difficile fosse, e pericolosa, era però l' unica strada, che poteasi tentare per evitare le funeste conseguenze cui andava incontro. L' obbligai a guardare il letto, a mantenere in un totale riposo la gamba, gli prescrissi un copioso salasso, ed un vitto tenue, e semplicissimo. Deciso per una operazione, che io già vedeva indispensabile, e che non poteasi differire più lungo tempo, era tuttora dubbioso, ed incerto sul metodo, che dovessi scegliere nell' eseguirla. L' apertura del sacco aneurismatico per allacciare poscia sopra, e sotto l' arteria è metodo ora mai abbandonato, nè in tal caso era nemeno praticabile poichè troppo esteso il tumore, e profondo, e sepolto sotto i grossi muscoli della sura. Era forza adunque applicarsi al metodo anelliano, ed allacciare l' arteria al disopra dell' aneurisma. Ma dovea io, come consiglia Hunter, allacciare la femorale superficiale sulla coscia, ovvero nel poplite, vale a dire la poplitea? Non può negarsi, che la legatura della femorale nel terzo superiore della coscia non fosse per riescire meno difficoltosa, atteso che ella cammina più superficialmente coperta soltanto dagl' integumenti, e dal fascialata, mentre all' opposto l' altra scorre profondamente nello scavo popliteo tra i condili dell' osso vicino alla capsula articolare, profondità, che in vero imbarazza, come confessa Hunter, l'operatore, poichè riesce difficile lo scoprire l' arteria, e scoperta che sia difficilissimo passarvi sotto l' ago, e con esso fare la curva per allacciarla. Queste difficoltà furono quelle, che determinarono Hunter negl' aneurismi poplitei ad allacciare piuttosto la femorale nella coscia di quello che la poplitea. Animato dai felici tentativi di Hunter non avrei io punto esitato a presciegliere il suo metodo, anzichè azzardare la difficile impresa della legatura dell' arteria nello scavo popliteo, se nel mio caso, come in quelli da lui riportati, si fosse trattato di un aneurisma nel poplite, ma siccome l'arteria aneurismatica era la tibiale postica, ed il tumore perciò occupava il grosso della sura, non già lo scavo del poplite, così mi rimaneva il timore, che legata la femorale in luogo troppo distante dal sacco aneurismatico, i rami laterali si anastomizzassero superiormente al sacco, e non togliendosi perciò il circolo al medesimo, si mantenesse, ad onta della legatura, il tumore. Altronde io ben vedeva le difficoltà, che seco porta la legatura della poplitea, ma mi parevano superabili qualora si avesse pensato a correggere li aghi di cui sin'allora erasi fatto uso nella legatura di tali arterie. La profondità dell' arteria richiede, che l'ago che si adopra ad allacciarla sia assai lungo, e curvo, ciò che opponendosi al facile maneggio del medesimo, forma lo scoglio principale di questa ardua operazione. Cercai pertanto d'immaginare un ago, che combinasse un facile maneggio colle qualità richieste dalla profonda situazione dell'arteria. L' ago, che io credetti opportuno in questa circostanza è quello che trovasi delineato nella fig. 1ª. Egli è assai lungo, molto curvo nella sua inferior parte *A A*, e la sua curvità corrisponde ad un mezzo circolo. E' fornito di un manico *B B*, onde sia più robusto, e si possa trapassare sotto l' arteria con maggiore facilità. La sua estremità *C* è piatta, spuntata, e tagliente ai lati, ha un' apertura *D* per ricevere il filo, il quale rimane nascosto in una scanalatura, che ritrovasi nella parte convessa dell' ago *E*. Quasi simile a questo si è l' ago inventato da Goulard per la legatura dell' arteria intercostale. Ma in questo dovendosi, dopo averlo passato sotto la costa, afferrare il filo per ritirare poscia l' ago per ove è entrato, così pensai di variarlo sembrandomi troppo imbarazzante una simile manovra, stante che il sangue, che dal taglio fatto piove nel cavo, non lascia distinguere il filo per afferrarlo, e perciò l' operazione non si potrà compiere con quella prontezza, che è pur d' uopo. Volli pertanto che l' ago mio fosse costruito in modo, che potesse dividersi quando passata la sua curvità sotto l' arteria condotto si fosse il filo sotto la medesima. Ritirando allora una parte dell' ago per ove è entrato, l' altra per la parte opposta, dovea riescire l' operazione come se in arteria poco profonda si fosse usato un ago breve, e curvo mediocremente. Si svita egli nel mezzo *F*, ove termina la sua curvità *a a*, e dividesi in due porzioni *A*, *B*, (fig. 2ª), ciò che a mio parere toglie quelle difficoltà, che obbligarono Hunter a decidersi piuttosto per la legatura della femorale nella coscia. Fatto costruire l' ago nella forma sopra descritta mi determinai d' operare allacciando la poplitea. Feci coricare prono l'infermo, ed applicato il Tourniquet nella coscia per la compressione al bisogno della femorale, instituii un taglio longitudinale degl' integumenti nella parte inferiore dello scavo popliteo, scostai colle dita i sottoposti muscoli, ed il nervo ischiadico, che immediatamente cammina lungh' essi, e portato l' indice della sinistra profondamente vicino alla capsula, manifestossi immediatamente l'arteria pulsante; cercai d' isolarla più che era possibile, onde non comprendere il nervo, e la vena nella legatura, e preso l'ago colla destra, e portata la sua punta col dito che sosteneva l' arteria, guidato da esso lo condussi sotto la medesima, ed afferratane la punta con la sinistra mano, coll' altra lo divisi svitandolo, per cui reso breve, e comodo al passaggio mi fu facile il ritrovarlo, e venire immediatamente alla legatura dell' arteria. Tenni doppio il filo nella cruna dell' ago per avere in pronto, nel caso che accidentalmente si fosse troncato il primo filo, un secondo senza dovere ripassare l' ago, ed introducendo l'un capo d' essi due volte nell' ansa strinsi l' arteria senza fare un secondo laccio, o nodo acciò si mantenessero sempre distanti, e divisi i fili, e potere liberamente stringere di nuovo il nodo se fosse d'uopo per arrestare pienamente la circolazione. Una sola legatura basta a parer mio a trattenere, ed intercettare il corso del sangue pel canale arterioso, mentre una discreta compressione è sufficiente a condurre, e mantenere a contatto le pareti arteriose, ed a superare la forza del circolo. Quindi io giudico inutili i lacci di osservazione proposti da Hunter superiori l'uno all' altro, e distanti per comprimere a poco a poco, e scemare gradatamente l'urto del sangue; Che se queste si volessero instituire ad oggetto di avere in pronto in caso di rottura d'arteria altro laccio per arrestare la micidiale emorragia, che ne verrebbe, avvertasi, che difficile, e quasi direi impossibile si è, che succeda tale rottura quando l' allacciatura sia fatta con quelle precauzioni, e que' mezzi che indichiamo, riflettendo di più, che devonsi d' altronde evitare le difficoltà, ed i pericoli di replicate allacciature di vasi a tale profondità. Il filo di seta di cui io mi servo a legare l' arteria, non è che un fascicolo di più fili uniti insieme, ed incerati. Tale filo più flessibile, e scorrevole d' un cordoncino di seta resiste egualmente d' esso, ed ha il vantaggio rimanendo piatto al pari d' una fettuccia di portare perfettamente a contatto le pareti dell' arteria senza che soffrano alcuna violenza, e lesione, che le metta a pericolo d' erosione, o altra specie di rottura. In tal modo parmi ancora che si possa far di meno del mezzo d' altronde ingegnosissimo ultimamente praticato dal proffessor Scarpa, vale a dire della compressetta frapposta frà il nodo, e l' arteria, compressetta immaginata a regolare bene il contatto delle pareti arteriose, ed a difenderle dalla indicata alterazione. Questa fu precisamente la maniera colla quale fu da me eseguita l' allacciatura della poplitea. Semplicissimo fu l' apparato apposto alla ferita, alcune fila morbide dentro lo scavo, ed una legger fasciatura contentiva. Cessò dopo la legatura la pulsazione, e siccome doveva allora dirigersi tutto l' urto del sangue contro i rami laterali, prescrissi una larga emissione di sangue sul timore, che non cedessero alla violenza del medesimo, e forzati oltremodo, non andassero soggetti a pericolosa rottura. Anzi non vedendo scemato per questa sanguigna l'urto del polso, e la forza della circolazione, fui costretto replicarla più volte fintantochè parvemi restituito l'equilibrio. Non levai l'apparato se non se il terzo giorno allorchè potea supporsi incominciata la suppurazione, e frattanto viddi sparire affatto la gonfiezza edematosa del piede, mantenersi il calore naturale alle parti sottoposte, scemare notabilmente il dolore, dileguarsi in somma a grado a grado quei sintomi, che accompagnavano l'aneurisma, indizj della libera circolazione nella gamba, e presagj d'un esito felicissimo. Levato l'apparecchio fu per me consolante cosa l'osservare libera affatto da gonfiezza la sura, svanire a poco a poco ogni preternaturale durezza, e resistenza, e l'ulcere presentare un aspetto piucchè mai soddisfacente. Concepii perciò le migliori speranze per la perfetta guarigione dell'infermo, ed il progresso della cura non servì, che a maggiormente confermarla. Guadagnò l'ulcere a poco a poco, ed ogni dì più si ristrinse. Troncossi nel giorno vigesimo l'arteria per la suppurazione, e cadde da se il filo senza la minima violenza. Libero si mantenne il moto della gamba, incominciò a formarsi la cicatrice, ed in breve tempo risanata viddi la ferita, e restituito il membro allo stato naturale. La storia sincera, ed ingenua dell'operazione descritta come dimostra, e comprova la facilità, e sicurezza, che il metodo anelliano promette nella cura degl'aneurismi, e la preferenza, che a ragione questo merita all'antico metodo dell'apertura del sacco aneurismatico, così ancora fà vedere, che se negl' aneurismi poplitei è necessario instituire secondo il metodo di Hunter la legatura della femorale sulla coscia negl' aneurismi situati più inferiormente, come quello quì descritto della tibiale, può con sicurezza allacciarsi la poplitea senza le difficoltà, ed i pericoli, che spaventarono Hunter, ed imbarazzarono la maggior parte degli operatori, e ciò particolarmente se vogliasi far uso dell' ago che io propongo, perchè esperimentato comodo, ed opportuno per la detta allacciatura. Crederà forse taluno, che nel caso descritto non si possa ripetere l' esito felice dell' operazione dall' avere legato piuttosto la poplitea, di quello che la femorale, mentre avrìa potuto essere egualmente felice il successo della medesima, se in vece della medesima si fosse allacciata, come asserisce l' illustre professore Scarpa, la femorale superficiale nel terzo superiore della coscia. Io non posso oppormi a tal opinione non avendo finora osservazioni, che la contrastino. Dirò soltanto, (e nessuno potrà negarmelo) che quando più alto s' instituisce la legatura dell' arteria, altrettanto più incerto dee rimanere l' esito della cura, mentre meno frequenti sono i rami laterali per cui possa farsi strada il sangue, che deve deviare dal tronco arterioso intercetto, e per conseguenza più difficilmente deve mantenersi il circolo, e con esso calore, azione, e vita nella parte sottoposta alla legatura; e di più quand' anche si superi questa difficoltà, pare che rimanga tuttavia il timore, come già dissi, che essendo assai lontana la legatura dell' arteria dal tumore, possa per mezzo dell' anastomosi il sangue rientrare nel tronco al disotto della legatura, ed acquistare tant' urto quanto non possa esser superato da grumi, e concrezioni di sangue del sacco, e mantenersi perciò il tumore ad onta della legatura. Se pertanto puossi allacciare la poplitea con facilità, e sicurezza, come l' esperienza me lo ha mostrato nell' aneurisma descritto della tibiale postica, se mediante l' ago da me proposto si scansano le difficoltà, ed i pericoli, che Hunter ripete dalla situazione profonda dell' arteria, se finalmente l' altezza della legatura, o la lontananza della medesima dal sacco rende, se non incerto, almeno men probabile il felice esito della cura, parmi, che si possa a ragione conchiudere, che negli aneurismi della tibiale, e degl' altri ancora inferiori, debba preferirsi la legatura della poplitea alla legatura della femorale nella coscia, e che grande è il comodo, e vantaggio, che ci presta l' ago descritto nell' allacciatura de' grossi tronchi arteriosi situati profondamente, ed in modo, che gl' altri aghi non avrebbono potuto compiere la medesima con eguale felicità. L' utilità, che ne esperimentai in questo caso, mi decise a servirmene in tutti gli altri aneurismi, e della brachiale, e della femorale, che in seguito ho avuto occasione di operare. La storia di questi aneurismi io riporterò qui non tanto a conferma dell' utile invenzione di questo ago meglio comprovata certamente colla legatura della poplitea della quale si decantavano tanto i pericoli, quanto per le particolari circostanze, che sembrano essere qui notate, e per comprovare vie più i vantaggi del metodo Anelliano nella cura generale degl' aneurismi.

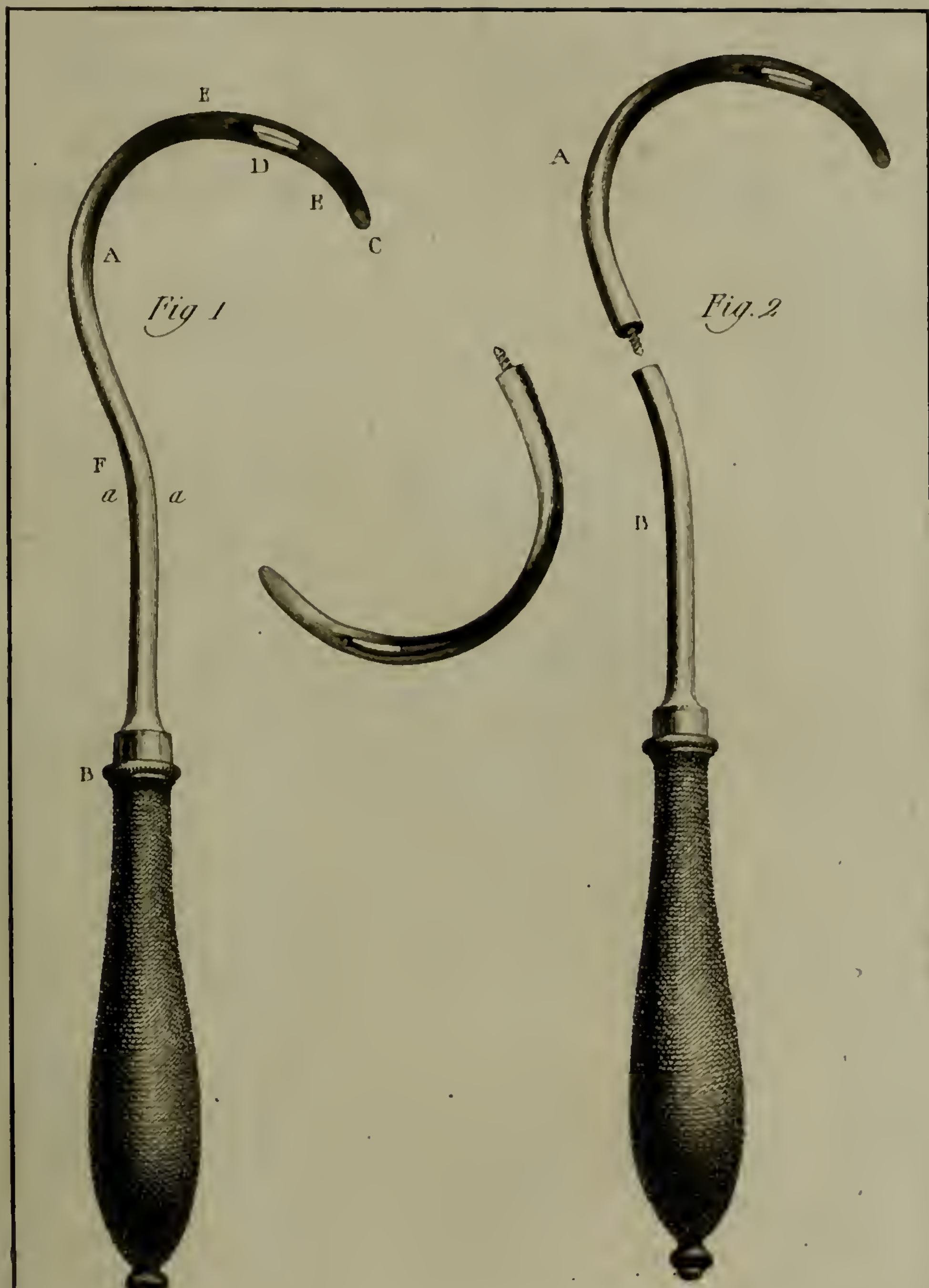
Gaetano Piana di trenta anni circa rilevò in una rissa una ferita nell' antibraccio sinistro, dalla quale sortì sul punto una considerabile quantità di sangue. Il luogo della ferita era nella parte superiore dell' antibraccio due dita distante dall' articolazione coll' omero diretta dal basso all'alto, e verso l' interna parte del braccio. Un coltello strettissimo fù l' istrumento feritore, e perciò la ferita angustissima. Condotto all' ospitale ebbe pena il chirurgo ad arrestare l' emoragìa copiosa, che aveasi dalla ferita, e che indicava la lesione di un grosso vaso arterioso. Ottenne finalmente d' arrestarla colle graduate compresse sostenute da fasciatura compressiva. Visitato da me il giorno dopo ritrovai il braccio tumido assai, e dolente, e strozzato dalla detta compressione. Feci levare l' apparecchio, e conobbi, che il sangue sortito dall' arteria erasi sparso nelle vicine parti, e già erasi formato un aneurisma diffuso. Non volli però precipitare alcuna risoluzione, deciso di volere osservare gli effetti di questa rottura d' arteria attendendo quale corso prendeva il male. Gli prescrissi una larga emissione di sangue dall' altro braccio, gli raccomandai di tenere in perfetto riposo il braccio offeso, e che questo fosse continuamente fomentato con fomentazioni risolventi. Ottenni con ciò, che ne primi tre giorni il male non facesse progresso, anzi che il dolore a grado a grado diminuisse, in seguito cominciò a scemare la gonfiezza del tumore, nel settimo giorno la ferita era chiusa, e nel vigesimo era già totalmente assorbito il sangue, ed era svanita affatto la tumefazione del membro, ed i sintomi tutti che l' accompagnavano, e nel vigesimo ottavo riacquistato avendo perfettamente il libero uso del braccio sortì dall' ospitale persuaso di essere affatto ristabilito; ma dopo otto giorni ricomparve la primiera gonfiezza con tutto l' apparato de sintomi consecutivi. Visitai di nuovo il suo braccio, e conobbi tosto, che era nata effusione di sangue, e che erasi riprodotto l' aneurisma. A spiegare tale riproduzione della malattia è d' uopo credere, che un grumo di sangue fermatosi sulla ferita dell' arteria trattenesse per qualche tempo lo stravaso, e desse luogo al riasorbimento del sangue pria stravasato, ed all' apparente guarigione dell' infermo, ma che spostato in appresso quel grumo, sia per qualche violento moto del braccio, sia per l' urto, ed impeto della circolazione, dovesse il sangue spandersi di nuovo, ricomparire la gonfiezza, crescere oltre misura, e dar luogo agl' accennati sintomi. Ebbi di nuovo ricorso ai fomenti, ed agl' altri presidj, ma inutilmente. Il tumore aumentava ogni giorno, la mano, e l' inferiore parte dell' antibraccio per l' intercetto circolo dei linfatici cominciarono a farsi edematosi, le si rese impossibile il moto, ed a poco a poco mancavale il calore. Questi gravi, e funesti accompagnamenti mi determinarono a sollecitare un operazione già indispensabile. Deciso di tentare ancora in questo soggetto il metodo anelliano m' accinsi alla legatura della bracchiale. Scostato il braccio dell' infermo dal petto esplorai l' arteria omerale frà il condilo interno dell' omero, ed il margine interno del bicipite, e nell' esteso spazio, che rimane fra l' origine delle due collaterali, scelsi il luogo ove credetti, che la pulsazione indicasse essere più superficiale l' arteria. Diressi il taglio dalla parte del margine interno del bicipite, misi allo scoperto l' arteria, e sollevata coll' indice, e separata dal nervo mediano, e dalla vena, ne feci la legatura coll' ago sopra descritto. L'apparecchio applicato fu lo stesso dell' operazione precedente, e lo stesso il processo consecutivo della cura. I sintomi che accompagnavano l' aneurisma si dileguarono a mano che s'assorbiva il sangue evasato, e che per conseguenza scemava l' intumescenza aneurismatica. Fa però meraviglia, che dopo la legatura non cessasse affatto la pulsazione del tumore, e che anzi questa si conservasse ancora dopo che cessavano gli altri sintomi allo scomparire del tumore. Nel diciottesimo giorno non v' era più vestigio alcuno del tumore precedente, nel decimonono cadde da se il laccio, ed in meno di quaranta giorni la piaga si rimarginò, acquistò il braccio libertà di moto, e forza, e potè l'ammalato sortire perfettamente ristabilito dall' ospitale. E' da notare, come già dissi nella presente storia, una singolare particolarità, la pulsazione, che si mantenne sempre nel tumore, ed in tutto il corso dell' omerale, se si eccettui un tratto di tre, o quattro dita trasverse nel luogo ove se ne instituì la legatura; anzi di più nel luogo, che corrispondeva al centro del tumore, la pulsazione era ancora più forte, ed accompagnata da certo fremito, e stridore. Ciò mi dava sospetto, che mantenuto il circolo nel tronco inferiore pei rami laterali potesse nuovamente l' urto del sangue riaprire la ferita dell' arteria, e dare occasione a rinnovarsi l'aneurisma. Consigliai pertanto l' infermo di tenere in riposo più che potesse il braccio operato, e di astenersi da qualunque fatica. Costretto però egli a guadagnarsi il vitto colle sue braccia non ha potuto seguire i miei consiglj, ed ha dovuto riprendere il mestiere faticoso, che prima esercitava. Sono trascorsi ormai due anni, ed il braccio non ha sofferto per anche dalle fatiche alterazione alcuna; continua però la stessa pulsazione, il fremito stesso, ma non avvi gonfiezza, ne dolore, ne torpore, ne altro sintomo, che possa cagionare timore di futura replica della malattìa.

Parmi, che da questa particolare osservazione si possa dedurre, che non sempre dietro la legatura del tronco si intercetta il corso del sangue nel luogo ove aveasi il tumore, che i rami laterali possono ricondurre il sangue nel tronco inferiore, e mantenerlo aperto, è ciò non ostante svanire, e dissiparsi il tumore interamente.

La descrizione d' altra operazione da me due anni sono eseguita col metodo anelliano nella coscia merita a mio credere di essere quì riferita, perchè fatta ad una tale altezza, nella quale dalla maggior parte de' chirurghi non vuolsi si possa fare in alcun modo. Il soggetto a questa operazione fu un uomo d' anni circa trentacinque, e che nel corso di sua vita non altra malattìa avea avuto, che alcuni sintomi di lue venerea confirmata. Guarì colle frizioni mercuriali, e dopo esse non ebbe più sintomo alcúno della precedente malattìa. Qualche mese dopo tal cura avendo dovuto sostenere con forza un grave peso colla destra coscia, sentì come uno scroscio accompagnato da fiero dolore nella superiore parte della medesima. Questo dolore cresceva camminando, e l' obbligava a zoppicare manifestamente. Non passarono molti giorni, che cominciò ad apparire un' intumescenza circoscritta poco sotto la piegatura della coscia, che attesa la situazione, e la precedente malattia, fu creduto un ingorgamento glandulare, anzi un Bubone celtico, e perciò furono prescritte nuovamente le frizioni mercuriali, sotto le quali l' intumescenza aumentò, s'accrebbe il dolore, e l'infelice non potè più reggersi, e camminare da se. Condotto all'ospitale, ed esaminato il tumore grosso circa come un ovo di gallina, lo conobbi ben tosto per un aneurisma, poichè la pulsazione, che in ogni punto del tumore si sentiva, non lasciava alcun dubbio sulla natura del male. Mi contentai sulle prime di comprimere il tumore, e d' arrestare almeno con questo mezzo più che era possibile i progressi di una malattia, che assai mi spaventava; poichè quanto era critica la situazione dell'infermo, altrettanto imbarazzante il decidersi sui mezzi di porvi riparo. La gravezza de' sintomi, ed il frettoloso avanzamento ad onta della compressione mi astrinsero a determinare qualche cosa onde vedere da campare dalla morte quest' infelice. Non viddi lusinga alcuna, che nella legatura della femorale comune, mezzo in vero pericoloso, ma che la necessità obbligava a scegliere prontamente. Non v' è esempio alcuno a me noto, che altri abbia tentata giammai quest' allacciatura a sì notabile altezza, e le poche guarigioni ottenute d' aneurismi sì alte, o sono state opera spontanea di natura, o l'arte non vi è concorsa che colla sola compressione. Di più la ragione stessa sembrava riprovarla. Non vi sono che le poche diramazioni delle arterie del didentro della pelvi, le quali anastomizzandosi colle circonflesse, e colla femorale profonda possono rimettere alle parti sottoposte il sangue, e mantenere la circolazione, ma queste sono assai poche, e piccole ancora per cui si possano credere capaci di dilatarsi al segno di trasportare tutto il sangue necessario al circolo, e alla nutrizione di tutto l'arto. Di più chi ne assicura, che questi stessi fossero stati capaci di resistere all'impeto del sangue, che si sarebbe a loro diretto, e sofferta avessero una equabile, e giusta dilatazione? Non era forse a temersi che sfiancati essi pure dall' urto del sangue, o avrebbero accresciuta la causa del male, o renduto avrebbero per lo meno inutile il rimedio? Ad onta però di tante e ragionevoli difficoltà, la mancanza d' altro mezzo di cura, e l' urgente necessità, mi determinarono ad avventurare la legatura della femorale comune, non ebbi pena a determinarvi l' infermo tormentato da dolori insoportabili per l' estesa mole del tumore, ed il giorno seguente m' accinsi all' impresa con più coraggio che speranza. Coricato supino l' infermo divisi con taglio gli integumenti dal legamento fino alla sommità del tumore, poscia divisi il fascialata sotto di cui manifestossi tosto l' arteria pulsante, non mi riescì difficile il separarla dalla vena, e dal nervo, e d'allacciarla mediante il solito ago. L' apparecchio fu semplicissimo, e sostenuto dalla spica inguinale leggermente compressiva. Cessò tosto dopo la legatura la pulsazione, e l'inferiore parte mantenne quasi il naturale colore. Il tumore ne'giorni consecutivi cominciò a diminuire a grado a grado, e nel decimo giorno era svanito totalmente. Indicava tutto ciò ristabilito già il circolo per i rami laterali. L' ulcere suppurava lodevolmente, ed aveva l' aspetto il più soddisfacente. Tutto in somma prometteva un esito felicissimo ad una operazione così azzar–

dosa. Ma la fortuna, che spesso si prende gioco delle umane speranze, sembrò non aver fatto sopravivere quest' infelice ad operazione pericolosissima se non se per riservarlo a più funesto, e micidiale accidente. Nella notte del decimo quarto giorno sopragiunse al meschino una copiosissima emoragia dall' ulcere, per cui non essendosi avveduto egli tosto del sinistro accidente perdette una grande quantità di sangue. Un assistente l' arrestò con una costante compressione nell' inguine. Avvertito immediatamente la mattina della pericolosa situazione dell' infermo dubitai, che una prematura distruzione delle pareti arteriose per la legatura fosse la causa della detta emoragìa, ed era perciò deciso di replicare poco più sopra la legatura. Ma osservando bene l' ulcere conobbi, che non già vicino alla legatura, ma al disopra assai, e quasi dietro il legamento scaturiva il sangue, per cui bisognava credere, che derivasse o dal tronco stesso, o da qualche ramo del medesimo, che non avendo potuto reggere all' urto del sangue si fosse a poco a poco sfiancato, e rotto, ciò che era ancora presumibile attesa la preternaturale disposizione di quest' arteria. Nell' imminente pericolo di quest' infelice illanguidito già dalla pregressa emoragia non viddi altro compenso, che quello di azzardare la legatura del tronco rasente il legamento, fu d' uopo anzi ad arrestare l' emoragìa comprendere nella legatura porzione del legamento stesso. L' emoragia fu arrestata con quest' allacciatura, ma l' infermo non vi sopravisse che un giorno. L' apertura del cadavere giustificò i miei sospetti; mentre trovossi intatta la prima legatura, e soltanto un apertura laterale del tronco arterioso nel luogo ove prende origine l' epigastrica. La prima rottura dell'arteria, che avea dato occasione all'aneurisma erasi ristretta assai, e si disponeva a chiudere totalmente, era dessa nella femorale superficiale poco sotto la divisione della profonda. Lo sventurato contrattempo per cui fu tolto di vita l' infermo in mezzo alle più lusinghiere speranze di guarigione, non credo debba scemare la confidenza; che si deve riporre nella legatura della femorale comune ne' casi egualmente difficili, e spaventevoli. Io certo con sommo rammarico viddi togliermi in un momento il frutto di una operazione così azzardosa, ma non perciò con men di coraggio l' intraprenderei, se di nuovo l' occasione mi si presentasse. E' sicuro, che il circolo si mantenne pei rami laterali, che se sopravenne l' emoragia, vogliamo noi supporre, che questa debba attribuirsi totalmente allo sforzo grande, ed all' impeto eccessivo del sangue, e non piuttosto ad una preternaturale lassezza, e friabilità dell'arteria, di cui già ne abbiamo prove nella precedente rottura, che cagionò l' aneurisma? Se così è, straniera affatto all'operazione diviene la causa della sua morte, e non dee punto questo accidente scoraggirci, e trattenerci dal tentare quelle legature della femorale le quali hanno finora spaventati gli operatori. Ho voluto riportare le storie delle operazioni degli aneurismi da me eseguite col metodo anelliano dopo i felici tentativi di Hunter, ed altri rinomatissimi chirurghi, poichè credo, che da esse si potrà dedurre argomento per confermare sempre più la preferenza, che merita questo metodo sull' antico metodo dell' apertura del sacco, e che di più da quelle particolarità, che i casi da me osservati possono somministrare, vi sia luogo a trarre un qualche lume per illustrare l' argomento, che forma oggi giorno il soggetto de' studj delli più illustri anatomici, e chirurghi.

Pag. 284. Part. II



SOPRA UN NUOVO ISTRUMENTO

IL GALLEGGIANTE COMPOSTO

per misurare le velocità delle acque correnti al di sotto della superficie.

Di Vincenzio Brunacci

ricevuta ai 26 ottobre 18c5.

§ 1. L' Istrumento per misurare la velocità nei diversi strati d'un'acqua corrente al di sotto della superficie, denominato il *Galleggiante composto*, è formato di due palle d' egual diametro, una delle quali è di gravità specifica minore, e l'altra maggiore dell'acqua, unite con una sottil cordicella di peso sprezzabile, e tali che gettato quest' istrumento nell' acqua una palla si profonda mentre l' altra galleggia *(a)*.

La grandezza di queste palle è diversa secondo la larghezza delle correnti in cui si adopera l' istrumen-

(a) Mariotte è in vero il primo che abbia immaginato di unire in tal guisa due palle per ispiare le velocità inferiori; ma l' istrumento non ha avuto alcun successo per un secolo intiero, giacchè nè egli nè altri viddero come da esso poteva esattamente aversi il *quanto preciso* delle velocità medesime, e come adoprarlo nei gran fiumi.

to: in generale essa è quella che richiedesi per poter scorgere distintamente dalla sponda la palla superiore, la quale per rendersi visibile bisogna che sporga fuori dell' acqua un picciol segmento. Nei nostri canali navigabili le palle del Galleggiante composto non avevano più di quattro centimetri di diametro, e volendo sperimentare in Pò, la di cui larghezza è taluna volta al di là di cinquecento metri, si è fatto il diametro di trè decimetri e mezzo.

§ 2. Ecco come se ne fa uso: „ Si misura prima „ con un galleggiante semplice la velocità superficiale; „ sia questa denominata v: in seguito gettando il Gal- „ leggiante composto nel fiume si misura la di lui ve- „ locità (facendone la spia la palla superiore), e que- „ sta sia denominata V. Chiamisi x la velocità dello „ strato nel quale trovasi immersa la palla inferiore „ dello strumento, ed avremo sempre $x = 2V - v$.

Il doppio cioè della velocità composta diminuito della componente in superficie dà l' altra componente dello strato inferiore.

La profondità poi di questo strato è sensibilmente eguale alla distanza dei due centri delle palle; giacchè in pratica si è sempre riconosciuto essere di pochi gradi l' inclinazione della cordicella, e trascurabile affatto la sua curvatura.

§ 3. Si potrebbe anche tener conto dell' inclinazione quando vi fosse sensibile misurandola con questo facilissimo metodo pratico. Si divide la superficie della palla superiore in tante zone di cinque gradi ciascuna più o meno secondo la grandezza del diametro, facendosi queste zone di due diversi colori, alternativamente bianche e nere, per esempio; esse debbono essere in tal modo segnate, che posto l' istrumento in acqua stagnante conservino il parallelismo all'orizzonte. Se nel tempo della sperienza s' inclina la palla superiore, tante zone si occultano sott'acqua da una parte, quante se ne scoprono dall' altra: così contando quante sono le zone che si trovano fuor d' acqua da una banda e dall' altra, e prendendone la metà della differenza, ci dà questa l' inclinazione del filo. Noi però non abbiamo avuto mai bisogno d' apprezzare questa inclinazione, e lo stesso è avvenuto a chi si è accinto ad esperimentare.

§ 4. Il vantaggio principale di questo mio istrumento, ch'è il solo col quale possano farsi grandi esperienze, consiste nel facile di lui maneggio tanto nei piccoli canali, come nei gran fiumi; e questo vantaggio non lo ha nessuno degli strumenti immaginati finora. Io me ne sono servito per l' esperienze che ho dovuto fare in occasione di progettare il nuovo canal navigabile da Milano a Pavia. Fra queste ve ne sono state alcune per confrontare le portate del Naviglio della Martesana in luoghi diversi e ben distanti tra loro, e la differenza di queste portate ha esattamente eguagliato la quantità d' acqua, che per uso d' irrigazione si estraeva da quel tronco di canale, quantità della quale se ne sapeva esattamente la misura.

La quì unita tavola presenta la figura di quest'istrumento.

§ 5. Potrebbero le palle del Galleggiante composto esser anche diseguali; anzi, se vogliansi tutte le formole relative a quest' istrumento, si avranno nella maniera seguente

Chiaminsi a, b i due raggi delle palle;
p, q le densità delle medesime;
r la densità del fluido;
V la velocità del Galleggiante composto;
v la velocità della superficie del fluido;
x quella dello strato ov' è immersa la palla inferiore;
g la gravità;
n il così detto coefficiente della percussione;
α l' angolo d'inclinazione del filo con l'orizzontale;
m la lunghezza del filo che unisce le palle,
ed operando a dovere si troveranno le due equazioni

$$1^a \ldots \ldots b(x-V)=a(V-v),$$

$$2^a \ldots \ldots (q-r)\,b^3=(r-p)\,a^3 .$$

La prima ci dà $x=\frac{V(a+b)-av}{b}$, e la seconda ci determina la gravità specifica d' uno dei due globi, quando è data quella dell' altro.

La posizione poi del filo ci è data dall'equazione

$$\text{Tang}\ \alpha=\frac{8g(q-r)\,b\,(a+b)^2}{3\,n\,r\,a^2(x-v)^2};$$

e la profondità P a cui si trova la palla inferiore del Galleggiante composto sarà

$$P=\frac{4g(r-p)\,\alpha\,m}{\sqrt{\left\{\frac{9}{4}n^2r^2(V-v)^4+16g^2(r-p)^2a^2\right\}}}.$$

Tralascio le considerazioni cui danno luogo queste formole per la miglior costruzione del Galleggiante composto.

§ 6. Se nel Galleggiante composto aver vorremo riguardo a quel piccolo segmento della palla superiore che rimane fuori di acqua, converrà allora determinare qual palla dovrebbe prendersi in luogo di quella, perchè restando immersa con un certo segmento facesse l' uffizio esattamente d' una palla intieramente sommersa ed eguale alla inferiore: ecco le formole che sciolgono approssimatamente il quesito.

Posto a il raggio della palla inferiore;

z quello della superiore;

h l' altezza del segmento fuor d' acqua;

p la densità della palla superiore se non dovesse restar fuor d' acqua alcun segmento, densità quì sopra determinata;

s quella della superiore nel caso attuale, il cuï raggio è z:

r la densità del fluido;

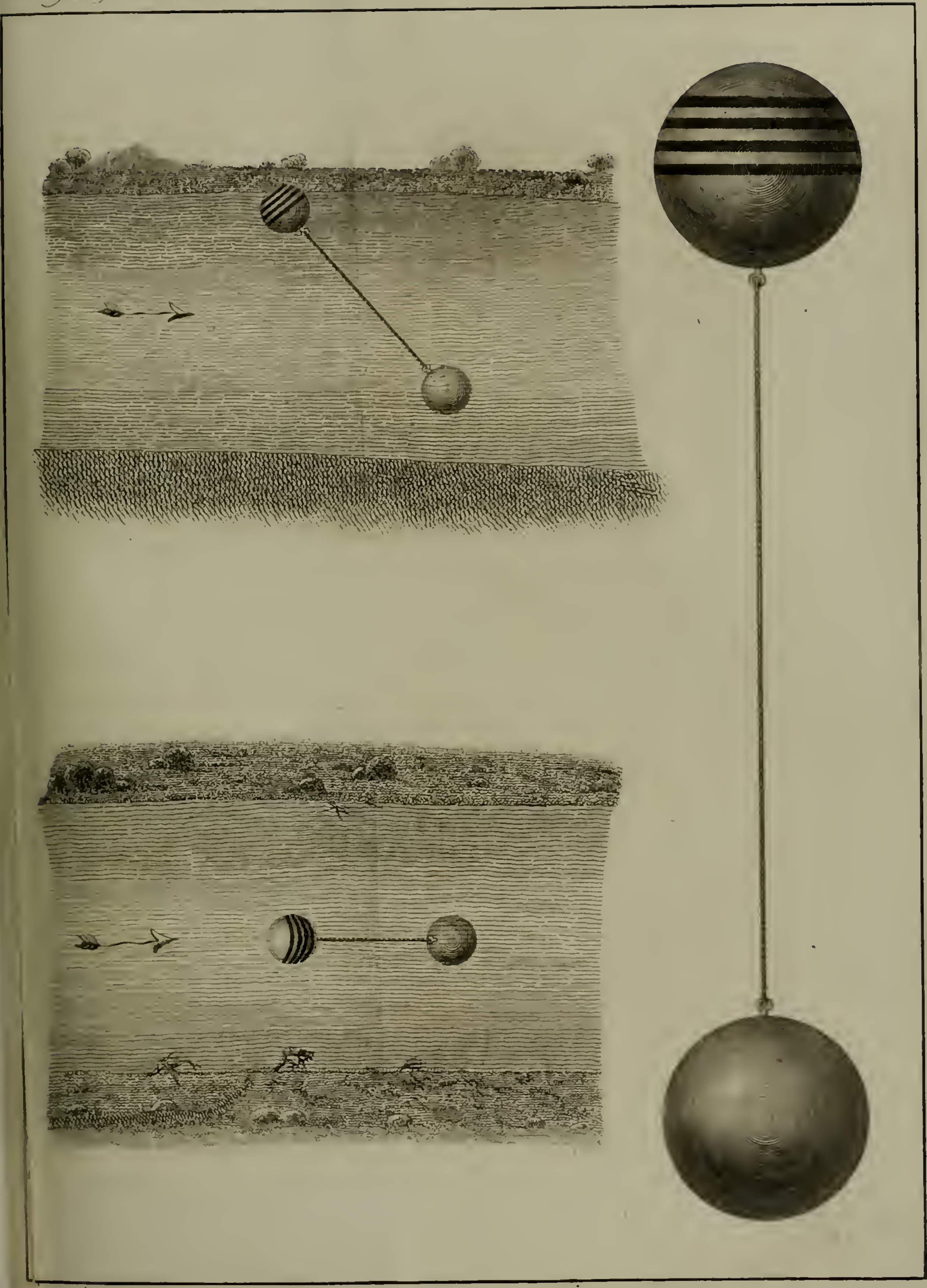
$1 : \pi$ il rapporto del diametro alla circonferenza, si trova

$$z = a + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{a h}{2}}$$

$$(r-s)\left(a + \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{a h}{2}}\right)^3 = (r-p)\, a^3 :$$

La prima dà prossimamente il diametro della palla superiore, e la seconda il rapporto delle due densità delle palle. In queste ultime formole la quantità h vi è considerata assai piccola in confronto di a da potersene trascurare le potenze superiori alla prima.

Nella pratica non è necessario tener conto della connessione che danno queste formole medesime.



OSSERVAZIONI

Sull' identità di alcuni nuovi caratteri del Carbone con quelli de' metalli.

Di Luigi Valentino Brugnatelli

ricevute in settembre 1806.

Nelle mie *Osservazioni Chimico-galvaniche* che ho avuto l' onore di comunicare l'anno passato all' Istituto, ho annunziato un nuovo carattere del carbone, quello di associarsi per mezzo del galvanismo al flogogene, base estesissima delle sostanze organiche, e di formare con esso un composto particolare distinto dal carbone comune, che ho chiamato *carbone flogogenato*.

Egli è noto dalle interessanti ricerche sopra il carbone de' chiarissimi Fisici *Senebier*, *Priestley*, *Fontana*, e *Rouppe* che questo combustibile rovente quando venga estinto nel vuoto rendesi atto ad assorbire varie specie di gas, e lo stesso gas flogogene, al quale sia messo in contatto nelle ordinarie temperature dell' atmosfera, e che l' assorbimento di questo è sommamente pronto e quasi istantaneo. Ma dalle medesime sperienze risulta, che il gas flogogene si unisce al carbone senz' alterarlo in alcun modo ne' suoi caratteri fisico-chimici, come io stesso ho potuto confermare; e che di nuovo dal carbone si sprigiona il gas assorbito a un calore anche inferiore a quello dell' acqua bollente.

Per ottenere il carbone flogogenato in brevissimo tempo, senza ricorrere al galvanismo, sono riuscito col tuffare il carbone ardente nell'acqua finchè si sprigiona gas flogogene. Porzione del flogogene nascente si combina col carbone, e lo converte in carbone flogogenato, mentre che un' altra porzione si gasifica associandosi con parte del carbonio, con cui costituisce del gas flogogene carburato.

Ma se il carbone si flogogena, come si flogogenano alcuni metalli, esso, come questi, è anche suscettibile di termossidarsi, ed ecco un altro nuovo carattere del carbone de' più singolari che si conoscano.

Il carbone si può termossidare galvanizzando per mezzo d'esso l'acqua comune dal polo positivo, cioè là dove si sviluppa il termossigene che nel suo stato nascente si combina al carbone tenacissimamente.

Questa combinazione si può ottenere parimente con facilità per mezzo del gas ossimuriatico termossigenato. Basta a questo scopo, che il carbone eletromotore rimanga immerso nel gas ossimuriatico termossigenato, e lasciarvelo alcuni minuti. Il gas si decompone in contatto del carbone senza molta elévazione di temperatura, e senza formare un atomo di ossicarbonico; e intanto il carbone si appropria il termossigene e si termossida. Alquanto ossimuriatico semplice si trova poscia libero sul carbone medesimo, di cui si può liberare tergendolo nell' acqua pura.

In luogo di ossimuriatico termossigenato ho usato con egual successo dell'ossiseptonico, il quale come ho dimostrato altrove *(1)*, è ricco di termossigene. Il carbone elettromotore immerso in quest' ossico concentrato si termossidò come un metallo alle ordinarie temperature dell' atmosfera, e quindi sprigionò nello stesso tempo l' *ossido di septono* che si è potuto raccorre nelle campane sotto forma di gas. Col riscaldare l' ossiseptonico concentrato sopra il carbone in vasi chiusi ho ottenuto, in grande, il mentovato gas purissimo.

Se il carbone termossidato nell' ossiseptonico fosse pregno di quest' ossico indecomposto basta lasciarlo esposto all' aria finchè l' ossico sia tutto decomposto, e il carbone reso affatto insipido. Si può anche saturare l' ossico libero esistente nel carbone col tuffarlo in una soluzione di potassa, ma quest' artifizio è per lo più inutile.

La luce promuove in particolar maniera la decomposizione dell' ossiseptonico sul carbone: imperocchè i carboni bagnati d'ossiseptonico ed esposti alla luce del sole schiudono del gas ossido di septono, e quindi si rendono affatto insipidi termossidandosi egregiamente. In conferma di quest' osservazione ho posto de' pezzi di carbone nell' acqua leggiermente ossidula d'ossiseptonico raccolta in una campana di cristallo capovolta sopra un tondo pieno della stessa acqua, ed esposta alla luce del sole. I carboni erano stati dianzi imbevuti dell' acqua ossidula, e quindi privati dell' aria ospitante nella loro porosità, ed occupavano il fondo della

---

(1) Vedi i nostri Elementi di Chimica seconda edizione Pavese in quattro Vol.

campana. L' evoluzione gasosa fu però incessante per tre giorni consecutivi, e quindi cessò affatto. Esaminato il gas raccolto l' ho trovato gas ossido di septono purissimo. L' acqua ossidula si era resa affatto insipida, il carbone manifestossi pure insipido, ma si trovò assai bene termosidato.

Il carbone termossidato non è sensibilmente alterato ne' caratteri fisici, eccettochè si aumenta di peso corrispondente alla quantità di termossigene a cui è unito. Esaminato pel carattere elettromotore col condensatore e coll' elettrometro esso diede allo zinco laminato 8 gradi all' elettrometro, mentre il carbon vergine dava allo stesso metallo circa 4 gradi, e il carbone flogogenato soltanto $\frac{1}{2}$ grado. Ora esplorando sulla lingua il carbon vergine col carbone flogogenato, questo dispiega un acuto sapor ossico, ed è positivo, laddove si trova senza equivoco il polo positivo nel carbon vergine messo a contatto del carbone termossidato. Le rane preparate in parte pel galvanismo si scuotevano vivamente poste col dorso su d' un carbon vergine quand' esso veniva a contatto del carbone flogogenato, o termossidato posto sotto alle gambe o alle coscie.

Il sig. Volta dietro esperienze eseguite con quella esattezza che tanto lo distingue ha ora eretta una nuova tavola di *Elettromotori* solidi ove il carbone termossidato si trova alla testa. La sua tavola è la seguente

Carbone termossidato
Oro termossidulo
. . . .
. . . .

Termossido di manganese cristallizzato
Carbon semplice
Oro
Argento
Platino
Rame
Ottone
. . . .
Oricalco
. . . .
Bronzi varj
Ferro
. . . .
. . . .
Antimonio
Stagno
Piombo
. . . .
Fogli stagnati
Carbone flogogenato
Zinco

Restava a sapere se il flogogene nascente determossidava il carbone, com' esso determossida i metalli. A questo fine ho posto un pezzo di carbone termossidato da cui s' era sprigionata l' aria interposta alla di lui porosità col tenerlo tuffato nell' acqua, e l' ho accoppiato a un pezzo di zinco legando la coppia con un filo di seta: un altro pezzo di carbone termossidato e spogliato pure d' aria ho posto a contatto di una lastra di piombo collo stesso artifizio. Ho immerse le due coppie in due vasi d'acqua comune separati, ove sono rimaste otto ore di seguito fino al momento in cui mi sono accorto che si era formato del termossido metallico in amendue i recipienti. La temperatura atmosferica trovavasi a 16 gradi sopra il zero del termometro di Reaumur. Levate dall' acqua le coppie si trovò il carbone intieramente determossidato sì nell' una che nell'altra coppia. In quest' esperienza non si è veduto mai sviluppo di gas di sort'alcuna, se non quando il carbone trovossi determossidato. Allora porzione del flogogene nascente si univa al carbone, e porzione acquistava l' abito gasoso, e facevasi strada attraverso l' acqua.

Nelle mie sperienze chimico-galvaniche io fatto aveva il progetto d' innalzare una pila vegetabile, solida con dischi di carbone flogogenato accoppiandoli ad altri dischi di carbon vergine, e interponendo a ciascuna coppia i dischi di cartone bagnato, come si costuma nella pila Voltiana. Ma le ultime ricerche intraprese su questo argomento in compagnìa de' miei dottissimi colleghi *Volta* e *Configliacchi* appieno mi hanno convinto, che il carbone flogogenato è di brevissima durata, e quindi inopportuno a quest'oggetto. Maggior vantaggio ci prometteva il carbone termossidato, e per essere permanente in questo stato, e per esserè assai lontano nel grado elettromotore dallo stesso carbon vergine. A un dipresso ei stà al carbon vergine, come il rame stà allo zinco. Difatti avendo innalzata una pila di varj dischi di carbone termossidati e vergini coll' interposizione di dischi bagnati d' acqua semplice ne abbiamo ottenuti de' segni d' elettricità assai forti, sempre relativi al numero delle coppie che formavano la pila.

La facilità con cui il carbone si termossida e flogogena in contatto dell' acqua che si decompone col galvanismo, secondo che esso trovasi dal lato termossidante o flogogenante, mi fece argomentare che col solo carbon vergine si sarebbe avuto una di quelle pile che *Ritter* chiama *pile a caricare*. A questo fine s'innalzò una pila di 20 dischi elettromotori di carbon vergine interponendo a ciascun disco un carbone bagnato d'acqua semplice. Si è collocata questa pila per se stessa inattiva sul piano del polo positivo d'una forte pila Voltiana divisa in due colonne comunicanti insieme, e per mezzo d'una lamina metallica, che partiva dal disco superiore della pila di carbone, si fece comunicazione col polo negativo della pila metallica. Dopo un' ora si levò la pila di carbone dalla pila Voltiana, della quale faceva parte, e si trovò molto più attiva e forte della pila a dischi d' oro descritta dal sig. Ritter. Il carbone, anche a questo riguardo, supera l' oro medesimo.

L' attività della mentovata pila di carbone è però di breve durata, come sono *le pile a caricare* metalliche; imperocchè la faccia del carbone flogogenato si deflogogena colla maggior facilità e quindi rendesi inerte.

I nuovi punti d' analogia scoperti fra alcuni caratteri del carbone e quelli de' metalli mi spinsero a rintracciarne degli altri. Ho voluto vedere, a cagion d' esempio, se alcuni metalli nel loro stato, dirò così, nascente si sarebbero combinati alla superficie de' carboni, come fanno a quella d' alcuni metalli. A questo fine ho sottoposte diverse dissoluzioni metalliche all' azion del carbone che si galvanizzava negativamente con una buona pila, là dove il flogogene è così efficace nel determossidare. Con questo mezzo ho veduto che il carbone s' indorava galvanizzato nell' ammoniuro d' oro, coprendosi con eleganza in tutta la superficie d'oro brillante. Collo stesso mezzo il carbone si vestiva d' uno strato di rame galvanizzato nell' ammoniuro di rame, o nell' ossisolfato di rame. Nell'ammoniuro d' argento, o nella dissoluzione di questo metallo nell' ossiseptonico saturata, il carbone si copriva di granellini brillantissimi d' argento, lo che facevan pure diversi altri metalli usando le loro dissoluzioni.

Nè per repristinare de' metalli sul carbone mi fu bisogno della pila. Ho fatto vedere ai miei colleghi, che bastava incastrare nel carbone termossidato una lastra di zinco ad angolo, e tenere per alcuni minuti le due braccia immerse in una delle predette dissoluzioni metalliche, i metalli si determossidavano sul carbone, e lo vestivano di metallo puro. Il rame lo velava d'una patina di color rosso di cinabro senza brillante, cui acquistava poscia vivacissimo col brunitojo: il mercurio vi si repristinava sotto forma di minutissimi globetti, e così si repristinavano altri metalli.

Il chiarissimo sig. Conte Morozzo in una memoria pubblicata nel tomo XI della *Società Italiana* pretende, che il carbone possegga anche la proprietà di decomporre l'acqua nelle ordinarie temperature dell'atmosfera sotto l'influenza della luce. Le esperienze egli le intraprese col carbone di nocciolo e acqua comune raccolta in campane di vetro. Lo sviluppo gasoso del carbone fu copioso, quando le campane trovaronsi esposte ai raggi solari. E siccome il gas così sprigionato lo trovò più puro dell'aria atmosferica, ha conchiuso, che il carbone sotto l'influenza della luce decomponeva l'acqua, e ne schiudeva *il gas termossigene*. Ma se il carbone sprigionava dall'acqua uno de' suoi componenti, il *termossigene*, sotto forma di gas, perchè non si è fatto carico il sig. Conte di cercare ove andava il flogogene l'altro componente del medesimo liquido?

Avvegnachè il carbone sia suscettibile di combinarsi al flogogene come risulta dalle nostre osservazioni, non pertanto l'attrazione reciproca di queste basi io l'ho trovata di gran lunga inferiore a quella che il carbone esercita col termossigene. Ho pertanto creduto necessario ripetere l'esperienze del Conte Morozzo, le quali a prima giunta parevano contrariare la mentovata conclusione. Il carbone sopposto confinato nell'acqua comune esposta alla luce del sole entro campane di cristallo ha schiuso al certo una quantità notabile d'aria, e quest'aria si trovò alla prova de' conosciuti reattivi un poco migliore, nella bontà, dell'aria atmosferica: ma vedendo io che lo sviluppo gasoso si arrestava dopo pochi giorni quando l'acqua comune non fosse stata rinnovata, e che il carbone non si alterava in alcun modo nel decorso dell'esperienza, mi sono accorto che l'aria sprigionatasi non era prodotta dalla decomposizione dell'acqua operata dal carbone sotto l'influenza della luce, ma ch'era l'aria atmosferica ospitante nel carbone medesimo e sopra tutto nell'acqua comune, la quale in bontà supera l'aria atmosferica, che coll'azione simultanea del calore e della luce del sole veniva schiusa e gasificata. Di fatti avendo presi de' carboni ardenti, e tuffati nell' acqua distillata parimente bollente in modo che ogni gas rinserrato tanto nell' acqua, quanto nella porosità del carbone, venisse dissipato, ed esposta quindi coll' indicato artifizio alla luce del sole per settimane intiere, niuna bolla comparve all' occhio percettibile. Dopo questa osservazione più volte ripetuta, parmi poter con sicurezza conchiudere contro l' opinione del sig. Conte Morozzo, che il carbone arricchito in oggi di diversi nuovi caratteri, non possiede però quello di decomporre l' acqua sotto l' influenza della luce del sole.

DE' RECIPROCI DELLE FORMOLE IRRAZIONALI.

DI SEBASTIANO CANTERZANI

presentata in Gennaro 1806.

Tanti sono nell' uso dell' algebra i casi, in cui o bisogna, o certamente giova avere il reciproco d' una qualche formola irrazionale, pel quale cioè moltiplicata che sia la formola ne nasce un prodotto razionale, che non del tutto inutile sembrar dee il pensiere di chi prenda ad esaminare i metodi, che su tale proposito sono stati da altri immaginati, e tenti di aggiunger qualche nuova regola. Sono dall' altra parte ordinariamente si lunghi, e molesti i calcoli, che a tal uopo si richiedono, che il sapere quale metodo possa in certi casi riuscire meno fastidioso di qualch' altro non può non essere cosa grata al calcolatore.

A tre si riducono, per quanto è a mia notizia, i metodi fin ora proposti per ritrovare il reciproco d'una data formola irrazionale. L' uno è del Bolognese Dot. Gabriele Manfredi, ed è esposto nel terzo tomo delle memorie dell' Accademia delle Scienze di Bologna; l' altro è dell' Inglese Dot. Eduardo Waring, e forma il soggetto del problema XXIII delle profonde di lui meditazioni algebraiche pubblicate a Cambridge l' anno 1770; il terzo viene accennato dal nostro sig. Canonico Saladini nel tom I. lib. III. cap. III. §. VIII. dell' aureo suo compendio d' Analisi.

Per cominciare dall' estero, vuole il Waring, che ciascuno de' radicali contenuti nella formola proposta si moltiplichi per ognuna delle radici dell' unità di quell' asimetria, di cui è il radicale stesso, e che in seguito si scriva tante volte la formola proposta, quante volte si richiede, perchè nella formola le diverse radici dell' unità, che moltiplicano i radicali, vengano combinate in tutte le maniere possibili. Il numero delle formole, che verranno scritte, sarà il prodotto degl' indici de' radicali, che si trovano nella formola proposta, e tra esse si troverà la proposta stessa. Se all' esclusione di questa si moltiplicheranno insieme tutte le altre, si avrà nel prodotto il reciproco cercato; onde moltiplicando questo per la proposta nel nuovo prodotto si avrà la formola razionale, che nasce dalla proposta pel suo reciproco.

Qualora tra i radicali della formola proposta ne sia qualche coppia composta di due radicali, che moltiplicati insieme dieno un prodotto razionale; come pure allor quando il reciproco consiste in una formola, la cui dimensione sia inferiore alla dimensione della formola proposta, questo metodo dopo un calcolo assai laborioso somministra il reciproco non preciso, ma moltiplicato per una formola razionale, della quale convien poi liberarlo.

Il Manfredi vuole che i radicali che trovansi nella formola, di cui si cerca il reciproco, abbiano, o sieno ridotti ad avere lo stesso indice, che egli denota per m. Se per β, γ, δ ec. s' intendano le quantità che sono sotto i segni radicali, vuole che si facciano le seguenti serie $1 + \sqrt[m]{\beta} + \sqrt[m]{\beta^2} + \sqrt[m]{\beta^3} \ldots\ldots + \sqrt[m]{\beta^{m-1}}$; $1 + \sqrt[m]{\gamma} + \sqrt[m]{\gamma^2} + \sqrt[m]{\gamma^3} \ldots\ldots + \sqrt[m]{\gamma^{m-1}}$; $1 + \sqrt[m]{\delta} + \sqrt[m]{\delta^2} + \sqrt[m]{\delta^3} \ldots\ldots + \sqrt[m]{\delta^{m-1}}$; ec., le quali saranno in numero n, se per n si denoti il numero de' radicali. Queste serie si debbono tutte insieme moltiplicare, e all' unità, come pure a ciasun termine radicale della serie, che risulta dalla loro moltiplicazione, si dee assegnare un coefficiente inderminato. Che se la formola proposta non abbia verun termine razionale, il calcolo può riuscir molto meno complicato, perchè la serie, ai cui termini si dee assegnare un coefficiente indeterminato, si può formare co' soli termini, che hanno sotto il segno radicale le quantità β, γ, δ, ec. a dimensioni $m-1$, $2m-1$, $3m-1$, ec. finchè queste dimensioni si mantengano non maggiori di $n(m-1)$. Così resta costrutta la formola, che quando sieno determinati i coefficienti indeterminati diventa il ricercato reciproco. A determinare questi coefficienti basta moltiplicare la formola costrutta per la formola proposta, e ordinare i termini del prodotto in maniera che il complesso di tutti quei che sono affetti nello stesso modo da radicale, costituiscano un solo termine. Imperciocchè rappresentando questo prodotto la formola razionale, che risulta dalla moltiplicazione della formola proposta pel suo reciproco, converrà che ciascuno de' termini, che sono affetti da radicale, sia $=0$, e rimanga il solo termine, che non è affetto da verun radicale. Mettendo pertanto $=0$ ciascuno di que' termini si ottengono tante equazioni, una meno, quanti sono i coefficienti indeterminati, uno de' quali resta arbitrario.

Ha questo metodo il vantaggio, che quando la formola proposta ha qualche coppia di radicali, che moltiplicati insieme danno un prodotto razionale, la formola del reciproco riesce di dimensione inferiore alla dimensione, a cui ascenderebbe col metodo del Waring. Ma anch'esso somministra il reciproco non preciso, ma moltiplicato per una formola razionale, quando la dimensione del reciproco dee essere inferiore a quella della formola proposta. Riesce poi in questo metodo per lo più assai malagevole la determinazione dei coefficienti indeterminati, e ciò forse in grazia del coefficiente arbitrario, il quale all'ultimo sempre sparisce, e appunto perchè sparisce mostra di essere superfluo.

Il metodo del sig. Canonico Saladini ammette anch' esso i coefficienti indeterminati, ma non ne lascia veruno arbitrario. Vuole che si finga un' equazione a coefficienti indeterminati del grado, che risulta dalla moltiplicazione degl' indici de' radicali; che quest' equazione si divida per la formola proposta, e che nel residuo della divisione, che dee essere $=0$, sia eguagliato a zero ciascun complesso di termini affetti nello stesso modo da radicale.

Questo metodo, che sembrami il più diretto, riesce anche il più semplice nel caso che i radicali non abbiano tutti lo stesso indice, nè tra essi se ne trovi qualche coppia consistente in due radicali, che moltiplicati insieme producano un razionale. Fuori di questo caso trovo ancor più semplice il calcolo procedendo col metodo, che passo ad esporre.

Rappresenti $X+Y$ la formola, di cui si vuole il reciproco, dove X sta in luogo della parte razionale di essa, se vi è (se non v'è sarà $X=0$), e Y in luogo della irrazionale. Suppongo sempre, che i termini della parte irrazionale Y abbiano già, o sieno ridotti ad avere la forma radicale più semplice, che possono avere; onde non si trovi a cagion d'esempio $\sqrt{a^3}$, $\sqrt[3]{b^5}$, ma in loro vece $a\sqrt{a}$, $b\sqrt[3]{b}$. Ciò posto quando i radicali, il cui numero sia n abbiano tutti lo stesso indice, che denoto per m, nè vi sia veruna coppia di radicali, che moltiplicati insieme producano un razionale, messo k in luogo di m^n assumo la formola generale.

$$(I)\ X^k+AX^{k-m}+BX^{k-2m}+CX^{k-3m}+DX^{k-4m}\ldots\ldots+T$$

in cui $A, B, C, D\ldots\ldots\ldots T$ sono coefficienti indeterminati, e per essa intendo rappresentato il prodotto nato dalla formola proposta moltiplicata pel suo reciproco; onde debba potersi dividere per $X+Y$ senza avanzo. Ma fatta questa divisione avanza

$$(II)\ Y^k-AY^{k-m}+BY^{k-2m}-CY^{k-3m}+DY^{k-4m}\ldots\ldots\ldots\pm T,$$

dove il segno superiore vale quando k è numero pari, l'inferiore quando k è dispari: dunque quest' avanzo dee essere $=0$.

Quando adunque la formola proposta abbia le condizioni accennate di sopra, faccio le potestà della parte irrazionale indicate nella formola (II), e le sostituisco nella formola stessa disponendone i termini così che quelli che sono allo stesso modo affetti da radicale, costituiscano un solo termine. Risultan così tanti termini, quanti sono i coefficienti indeterminati; onde ponendoli ciascuno $= 0$, vengonsi a determinare i coefficienti tutti, i valori de' quali posti nella formola (I), e fatte le potestà della parte razionale della formola proposta ivi indicate, nasce la formola razionale, che contiene il prodotto della formola proposta nel suo reciproco. Quando voglio il reciproco trovo più comodo di fare la divisione della formola razionale nell' esposta maniera ottenuta per la formola data, poichè la formola generale del reciproco, cioè il quoziente della divisione della formola generale (I) per $X + Y$, riesce molto composta, e per servirsene converrebbe oltre le potestà della parte irrazionale rappresentata per Y, che sono contenute nella formola (II), fare anche tutte le potestà intermedie.

Chi nel caso, di cui parliamo, ammettesse nelle formole generali (I), (II) anche le potestà intermedie alle ivi notate, introducendo altrettanti coefficienti indeterminati di più, dopo un calcolo tanto più laborioso troverebbe all' ultimo gli stessi risultati, perchè tutti i coefficienti introdotti di più riuscirebbero $= 0$; perciocchè i coefficienti, che si trovano in quei tra i complessi di termini che si pongono $= 0$, i quali non contengono verun termine privo di coefficiente, cioè verun termine appartenente alla potestà Y^k, debbono necessariamente riuscire $= 0$.

Ma se i radicali contenuti nella parte irrazionale Y non abbiano tutti lo stesso indice, o se abbiano bensì lo stesso indice, ma se ne trovi qualche coppia, in cui due radicali insieme moltiplicati dieno un prodotto razionale, nelle due formole (I), (II) pongo in luogo di m l'unità, e in luogo di k il prodotto di tutti quanti sono gl' indici, ammettendo in questo prodotto un medesimo indice più volte, se per avventura appartenga a più radicali, purchè non accada, che due radicali sieno tali, che insieme moltiplicati producano un razionale, poichè tali due radicali si debbono riguardare come un radical solo, e il comune loro indice non due volte, ma una sola volta dee entrare nell' esponente k.

Se nella formola proposta manchi la parte razionale indicata per X, allora è chiaro che T sarà il prodotto della formola proposta nel suo reciproco. E perciò costrutta la formola (II) siccome T entra solamente nel complesso di que' termini, che non sono affetti da radicale, così si potrà avere risparmio di calcolo, poichè basterà trovare i valori di que' soli coefficienti indeterminati, che in quel medesimo complesso di termini han luogo.

Può succedere anche in questo metodo, che il reciproco, che si ritrova, non sia il reciproco preciso, ma lo contenga involuto, cioè moltiplicato per una qualche formola razionale. Ciò accade sicuramente, quando avvenga che il reciproco preciso debba ascendere a una dimensione inferiore a quella della formola proposta; poichè è manifesto che qualunque si tenga dei metodi qui esposti, il reciproco, che si rinviene, ascende necessariamente a dimensione più alta di quella della formola proposta. Perciò sarà opportuno il disporre i termini del reciproco ritrovato di maniera che tutti quei, che sono allo stesso modo affetti da radicale, costituiscano un termine solo; indi tentare se due qualunque di questi termini, prescindendo dal radicale ad essi annesso, oppure uno di essi, e il prodotto ricavato dalla formola (I), ammettano un comune divisore; poichè se lo ammettono, dividendo per esso il reciproco ritrovato si avrà nel quoziente il reciproco preciso, cioè espresso ne' termini i più semplici possibili.

Molti degli usi, che possono avere in algebra i reciproci delle formole irrazionali, si trovano esposti dagli autori da principio citati nei luoghi ivi indicati.

DELLE TORBIERE

esistenti nel Dipartimento d' Olona, e limitrofi, e de' loro vantaggi ed usi.

RAGIONAMENTO

DI CARLO AMORETTI

presentato in ottobre 1806.

INTRODUZIONE

Le continue e ognor crescenti querele degli abitanti di questo bel paese sulla scarsezza delle legna sì per l' uso domestico che per le arti: querele che hanno a se chiamata l' attenzione del provido nostro Governo, e data origine a savie leggi sulla conservazione, e sull' aumento de' boschi, hanno in questi ultimi tempi richiamate al pensier mio le ricerche negli scorsi anni da me fatte sugli altri combustibili, cioè i Litantraci e le Torbe, che noi abbiamo in grandissima copia, e che potendo alle legna sostituirsi, qualora usar sen voglia, non solo di quelle che ci restano faranno opportuno risparmio; ma daranno comodo ai boschi di racquistare vigore, e alle nuove piantagioni, che per ogni dove si meditano, di crescere intatte; e al tempo stesso un facile e men dispendioso fuoco somministreranno alle manifatture e alle arti, e anche alla domestica economia.

E per l'amore che sempre ebbi per le arti utili, e per dovere dell'impiego mio quando era Segretario della Società Patriottica che di queste occupavasi unicamente, dopo d'aver conosciuta la natura e l'uso della Torba, che assai più del carbon fossile abbonda, non risparmiai studj, ricerche, e viaggi per istruirmi intorno ad essa, sia per conoscerne le località, sia per esaminarne l'indole, sia per vedere in qual modo se ne possa trarre il maggior vantaggio per gli usi diversi.

Di tutto ciò tratterò in questo ragionamento, e dividendolo in tre parti, parlerò nella prima delle torbiere a me note che nel Dipartimento nostro e nè limitrofi abbiamo: quindi, traendo le notizie da quanto ho veduto letto e udito, esporrò nella seconda i vantaggi che ricavare ne possiamo; e nella terza indicherò i mezzi più opportuni per introdurne l'uso presso di noi. Varrommi specialmente degli scritti degli amici miei *Asquino (a)*, e *Fortis (b)*, le torbiere de quali andai a visitare a Fagania oltre Udine, e a Galzignano ne' colli Euganei; e più ancora dell'opera del mio ill. collega Prof. Cav. *Pini (c)*, il quale molte torbiere della Lombardia ha esaminate, e delle nostre tor-

(a) Discorso sopra la scoperta e gli usi della Torba ec. del Co: *Fabio Asquino* Segr. della Società d'Agricoltura. Udine 1770 presso Gallici, in 8.

(b) Della Torba che trovasi appiè de'colli Euganei ec. dell'Ab. *Alberto Fortis*. Venezia presso Palese 1795 in 8.

(c) Della maniera di preparare la Torba, ed usarla, di *Ermenegildo Pini*. Milano, presso Marelli 1785 in 8 Fig.

be ha fatti non solo sperimenti ed analisi ma v'ha puraggiunti i calcoli sui vantaggi che arrecar ci potrebbono, e indicati i mezzi per allontanarne gli ostacoli. Le osservazioni, le ricerche, e le sperienze ultimamente fatte da altri e da me sono ciò che aggiugnerovvi del mio, corredando l' opera di qualche disegno per una più facile intelligenza.

PARTE I.

Indicazione delle Torbiere che sono nel Dipartimento d' Olona, e ne' limitrofi.

1. Chiunque ha qualche nozione della Torba sa essere questa un ammasso di vegetabili, per molti secoli nati, caduti, e più o meno infraciditi in fondo a paludi, misti a terra, a un alcali volatile, a un olio più o meno denso, e sovente anche a sostanze resinose e bituminose. V' è pertanto probabilità di trovarne ovunque sono o furono paludi. Un' estensione immensa di luoghi torbosi dev' essere in tutta la valle del Po, e specialmente ne' confini meridionali della vetusta Insubria, ove al dir di *Plinio (a)* quasi tutto il piano era bosco, più al pascolo de' maiali destinato che all' agricoltura; e quindi, pel trascurato corso delle acque che lo inondavano, specialmente allo sciogliersi delle nevi, esser dovea palude. Sin dal 1775 io ebbi occasione di localmente esaminare la Torbiera d' Oggiono,

(a) Histor. lib. II.

e sperimentarne la torba. Vidi quindi adoperata, e adoperai io stesso in un cammino di Franklin, la torba d' Angera. Occasione mi si presentò in seguito di veder usata in molti fornelli e in piccola fornace la torba di Chignolo; e volendo poi scrivere il *Viaggio ai tre Laghi* procurai, sì interrogando gli uomini, che esaminando le terre, di fare tali ricerche e indagini per cui di gran numero di torbiere ebbi notizia. Di queste ora parlerò partitamente; e per procedere con ordine geografico comincierò dalle torbiere meridionali riguardo a Milano; e andando in giro per la via d'Oriente, rammenterò quelle che abbiamo a Settentrione, le quali sono le più numerose; e finirò con quelle che abbiamo a Occidente. L' annessa carta Topografica (tav. 1), ove la lettera *T* indicherà Torbiera, servirà di guida. Qualche cosa in ultimo accennerò intorno ad altre più note, sebbene lontane, torbiere del Regno Italico.

2. Se v'abbiano torbiere fra Milano e Pavia nol so. Quello che dirò parlando a proprio luogo (num. 27) della valle di Ticino lascia ben credere che vi sen debba trovare. Ve n'ha certamente, ed io ne vidi nel 1783 presso il confluente di Ticino e Po. Una gran torbiera vidi pur allora alla Torre de' Negri presso Belgioioso; e la vidi poi tutta o quasi tutta corrosa, e via portata dal Po, che s'ingoiò pure quasi intero il mentovato Villaggio.

3. Nel 1785. essendo a Chignolo co' Signori Cusani sospettai, per la nerezza della terra e per le circostanze locali, che il sottoposto fondo fra Chignolo e'l Bissone, fra l' alta sponda che costeggia il bel col-

le di S. Colombano al nord, il Po al sud, e 'l Lambro all' est, fosse per la massima parte torboso. Me ne assicurai tosto al solo guardar la terra tratta dalle fosse che faceansi per dare scolo alle acque di que' fondi uliginosi; e me ne accertai maggiormente ne' seguenti anni, quando il sig. del luogo ordinò a quest'oggetto degli scavi in alcune parti di que' bassi terreni; e avendo fatta adoperare quella torba ne' fornelli da seta, opportuna all'uopo trovolla ed economica. Vedasi al num 35.

4. Lungo il Lambro, come lungo l' Adda, nella parte che al Po s'avvicina esservi devono delle torbiere, poichè ve n'ha, come vedremo, nella parte superiore. Forse ad una scomposizione di sostanze vegetali devesi quell' aria che in gran copia e incessantemente svolgesi da profonda fossa conica alla sinistra del Lambro, all' est del mentovato colle di S. Colombano, presso il gran canale de' signori Cusani, che il fiume attravversa: luogo che diè origine alla importante scoperta dell'aria infiammabile delle paludi *(a)*. V' ha probabilmente della torba nel luogo detto i Silleri, donde si vuole ora trarre un canal d' acqua per l' irrigazione del basso Pavese. Ma quel luogo io non visitai.

5. So che risalendo l' Adda nel basso piano ove vuolsi che anticamente fosse il lago Gerundio, detto or Gera d' Adda, v' ha delle torbiere descritte sin dal 1771 dal sig. Conte *Annibale Sanseverino Vimercati (b)*, una

(a) Lettere del sig. D. Alessandro Volta sull' aria infiammabile nativa delle Paludi. Milano, presso Marelli, 1774 in 8.

(b) Della Torba. Memoria del sig. Conte *Annibale Vimercati Sanseverino*. Crema, presso Carcano 1771 in 4.

delle quali pochi passi distante dalla città di Crema, formata in gran parte di tronchi d' alberi; e l' altra è a Pandino, luogo non lontano, composta d' erbe palustri, la quale molto estendesi in tutti que' bassi contorni: ed è un eccellente combustibile, come il mentovato benemerito autore coll' esperienza d' alcuni anni se n' è assicurato.

6. Risalendo verso il nord fra l' Adda e 'l Lambro, ove molte collinette lasciano fra loro degli stagni, e più ne lasciavano un tempo, esser vi deve della torba, e ve n' ha. Io ne ho veduta e fatta scavare ne' fondi uliginosi detti il Cavendone sotto Cernusco-Lombardone. Se il dabben' uomo, che prima di me l' avea sperimentata umida nella sua cucina, non si fosse spaventato dall' odore e fumo incomodo, e avessela adoperata ben secca e in ben costruito fornello, forse in vece di farla detestare avrebbene raccomandato l' uso; e sin d' allora sul suo autorevole esempio se ne sarebbe tratto vantaggio per le molte filande che sono in que' contorni. V' è pur lì vicina Valfredda sotto Montavegia, che somministrando buona argilla per mattoni e tegole, offre ampio consumo di combustibile. Ivi trovaronsi sepolti de' grossi tronchi di Legno infracidato, che tagliavasi come l' argilla stessa; ma, seccato prese forma e consistenza di legno. Forse è quì pure una torbiera; ma io non ne conosco altro indizio. E' rimarchevole il Legno fossile che trovasi sotto l' argilla, del che avrò occasione d'addurre altri esempj. Sospetto di torbiera v' è pur sotto Maresso, e sotto Missaglia; e più ancora presso il Laghetto di Sartirana.

7. Nella sponda orientale del Lario non conosco

torbiere (tranne quelle di Valsassina mentovate anche dal ch. Prof. *Pini*) sino al Piano di Colico. Colà ve n'ha una che vuolsi estesa a 10,000 pertiche colla profondità di braccia Milanesi 3 $\frac{1}{3}$ cioè di piedi 6 $\frac{1}{4}$. Assai la commenda, e pel non molto spiacevole odore, e per l' attività e per la durata, l' Autore della Istruzione *sulla Torba, e sul Carbon fossile* pubblicata nel 1775 per ordine del Governo, *(a)* e la reputa simile alla miglior torba Olandese. Osservò poi il mentovato Pini essere quella torba „ bruna, fosca, fitta, di me-„ diocre peso, che non si accende facilmente, ma quan-„ do vi si è incamminato il fuoco forma una fiamma „ e produce brage attive e durevoli, e regge all' azio-„ ne del mantice „. Ognun comprende come nello estraerla giovar si potrebbe ai fondi uliginosi e all' aria malsana di quel Piano; e quanto, attesa la vicinanza del Lago, ne sarebbe facile il trasporto.

8. La Valtellina ha pur essa varie torbiere; ma sebbene, percorrendo quella valle nel 1782, abbiane congetturata l'esistenza, pure, non avendone fatta nota allora, nè trovatane poi notizia altrove, non saprei ora indicarle. Non difficil cosa però sarà il rintracciarle e 'l rinvenirle ne' molti fondi uliginosi che sovente ne guastan l' aria, e presso i frequenti laghetti che or nella Mera or nell' Adda immettono. Lo stesso dicasi delle paludi chiavennasche. So che v' ha della torba, e s' adopra sulla vetta di quelle Alpi, e nominatamente al monte Spluga, e alla Motta, ove le Legna mancano.

(a) Milano, presso Galeazzi 1775 in 8.

9. Il triangolo montagnoso, che sul Lario divide il ramo di Lecco da quel di Como, ha pur esso una torbiera, scopertasi nel 1782, e la ha sopra Nesso, anzi sopra Valleso in luogo alto dal Lago, secondo il ch. *Pini*, 1945 braccia milanesi, all' ovest del Pian del Tivano, rinomato per l' erbe utili alla medicina e alle arti come pe' bei fiori estivi; e che probabilmente è una torbiera anch' esso non avendo le acque che vi cadono altra uscita che il buco o pozzo detto di Nicolina, ond' è ben probabile che negli antichi tempi vi stagnassero. La torbiera di Velleso è in qualche parte composta di caduti tronchi di abeti, che, sebbene al momento dello scavo sembrino fracidi, pur secchi racquistano colore forma e durezza legnosa, e in parte di radici, rami e foglie d' erbe, ed è d' eccellente qualità. Lo strato di torba sta sopra uno strato d' argilla, e a questo un altro strato di torba succede. Dell' uso fattone parlerò al num. 35.

10. Ben più comode, più ampie e più vantaggiose sono le torbiere poste a piedi de' monti compresi fra i due summentovati rami del Lario al mezzodì fra i monti stessi e i colli Brianzei nell' antico catino dell' Eupili che *Plinio (a)* paragonò al Verbano, al Lario, e al Benaco pel Lambro che vi si spandeva e n' usciva; il quale ora in angusti laghetti è diviso. Cominciando dalla parte orientale vi si entra per Valmadrera lungo l' emissario de' laghetti d' Annone e d' Oggiono. Intorno a questi v' ha circa 1000 pertiche di terreno torboso, e questo, che trent' anni fa era tutto fondo comunale, ap-

(a) Hist. Nat. lib. 3. cap. 19.

partien ora per la massima parte a diversi Proprietarj, e parte ancor ne resta da livellarsi o vendersi dalle comunità limitrofe. Osservò *Pini* che la torbiera de' Pascoli di Bosisio ha d'altezza 3 braccia, quella d'Oggiono br. 2 $\frac{1}{2}$, e quella d' Annone br. 2. Con questa torba fece il ch. Professore molte delle sperienze, delle quali avrò occasione di parlare più sotto. D' una parte di questa torbiera, ch' è presso il villaggio di Sirone, fece menzione il benemerito sig. Curato Beretta in un ragionamento che presentò alla Società Patriottica di cui era membro *(a)*. Essa ha tutto il comodo pe' trasporti, essendovi buone strade carreggiabili pel monte di Brianza e pel Pian d' Erba, ove grandissima quantità di combustibile consuma la filatura della seta; e per la via di Valmadrera facilmente trasportasi al Lario presso Parè, ove copia ancor maggiore se ne consuma nelle fornaci di calcina; e può anche su barche e su zattere esser portata a Milano. Torba pur v' ha al sud del piccol lago del Sagrino. Torba anche vidi sopra Canzo nella valle di Vicino. Ven' ha al sud, e al sud-ovest del lago di Pusiano, e ve n' avrà senza dubbio presso il lago d' Alserio. Tutte queste torbiere hanno gli stessi vantaggi di quella d' Oggiono per la comodità de' trasporti e pel facil consumo.

11. Alcune collinette o piccole alture separano il pian d' Erba dalle valli Comasche. Mi fu detto esservi della torba in alcuni fondi paludosi sotto Fecchio; e moltissima io stesso ne vidi nella valle che percorre il picciol Seveso e la così detta Roggia di Desio. V' ha

---

(a) Atti della Soc. Patr. di Milano. Tom. III. pag. 1.

non lungi da Como al sud un incolto e steril fondo communale detto prato pagano. Il sig. *Galeazzo Fumagalli* di quella torba fece cavare e buona trovolla, servibile alla cottura di mattoni e tegole. Non sì buona parve al ch. *Pini* quando sperimentolla; ma è noto che anche a piccole distanze talora la torba varia sì per l'altezza dello strato che per la qualità.

12. Venendo più al sud, fra que' colli ove l' acqua s'è aperta un'angusta via giugnesi a un fondo detto il Bassone, appartenente per molta parte al cel. prof. Cav. *Volta*, ove tutto è torba coperta da leggiera crosta di terra. Io quella torba ho provata. Essa è molto soffice e interamente formata d' erbe palustri, ma ben arde. Del modo di renderla compatta parlerassi nella parte III. Consimile è quella del vicin fondo detto Acquanegra dalla nera palude che v' era un tempo.

13. Più al sud stendesi la valle torbosa sin sotto la pria commendata e or soppressa Badia di Vertemate. In tutta quella parte acquitrinosa che costeggia il colle occidentale, e specialmente nel prato detto della Trebbia, ho trovata la torba a un mezzo piede sotto la superficie, e a più di due piedi d'altezza. Essa è di buona qualità e ben arde. Ben è sperabile che il sig. Ingegnere Ferrari, fittaiuolo per molti anni di que' fondi, il quale in Chignolo, sua patria, vide l' uso della torba di cui parlossi al num. 3, saprà trarne il vantaggio che sen propone, adoperandola specialmente nelle fornaci di calce e di mattoni, giacchè breccia calcare e argilla v' ha in quelle vicinanze. Aggiungasi che la torbiera non molto distà dalla strada Comacina a Vertemate e a Minoprio, e da altra carreaggiabil via che per

Carimate a Meda conduce. Indizj d' altre torbiere trovansi all' ovest della medesima strada Comacina sotto i primi colli, non lungi da S. Maria.

14. Per passare dal Lago di Como a quel di Lugano la più breve strada è quella per cui da Menagio si va a Porlezza. Oltrepassando, al casolare di Croce, la vetta del basso colle che i due Laghi divide, quando s' è in faccia de' paesucci di Bene e Agrone, vedesi a manca un prato uliginoso detto il Laghedone, che lago di fatti diviene quando le pioggie soverchie più acqua gli mandano di quella che uscir possa dal solo pertugio per cui va sotterra. E' ben probabile che ivi sia della torba. Più probabile è ancora che ve ne abbia intorno a quel monticello, detto il castello, ch' era isola quando quella valle ingombra era dalle acque. Poco più sotto v'è il laghetto del Piano che essendo stato in parte asciugato per metterne a coltivazione il contiguo terreno, ha lasciata una maggiore estensione di fondo torboso allo scoperto. Alle sponde occidentali del Ceresio dicesi esservi presso Lavena (paese da lungo tempo celebre per le miniere metalliche) una sostanza combustibile media fra 'l carbon fossile e la torba *(a)*. Io più volte colà fui; non mai me ne avvidi, nè intesi parlarne, onde non so dirne di più. V' ha della torba certamente presso il non lontano laghetto d'Agno, presso Bellinzona, e in vetta all' alto San Gottardo; ma appartenendo que' Luoghi al Cantone Elvetico del Ticino, non ne ho fatta particolar ricerca.

15. Da Porto di Morcotte posto sul bordo meri-

(a) Sulla Torba e sul Carbon fossile pag. 10.

dionale dello stesso lago lungo la via che conduce a Varese, si passa presso Bisuschio, e lì sotto v' è ampia torbiera che utilissima può riuscire alle molte fornaci di calce che sono nel vicino Arcisate; come a quelle d'Induno potrà servire la torba che poc' oltre questo paese si trova all' est della strada nel luogo detto la palude. Questo combustibile potrà ugualmente giovare alle fornaci di mattoni e tegole che formansi sotto il vicino villaggio di Penasca.

16. Se da Porto o da Selva-piana si vuole salire il monte che Valgana dal lago divide, presso il paesuccio di Campagnano, ov' è il residuo ancora d' un laghetto, trovasi della torba; e intesi pur esservene in altre elevate pianure del monte medesimo, non lungi dal luogo che fu un tempo sacro *Deserto* de' Romiti Carmelitani, e ora è utile ovile delle pecore merine del cel. *Dandolo*, ora Provveditore nella Dalmazia.

17. Discendendo nella valle di Gana o Valgana, trovasi un piano che fu una volta interamente lago o palude, specialmente quando il torrente, allora emissario, Morgorabbia non aveva ancora pertugiato il colle sotto Cunardo, formando il così detto Ponte Nivo. La parte di valle che piega verso nord-ovest, chiamata il Paludaccio, è una torbiera, ove la sostanza combustibile or più or meno profonda e di buona qualità, frammista a rami fracidi d' alberi, è stata da me esaminata anche in questi ultimi mesi: e poichè quei fondi (per convenzione fra i Livellarj e lo Spédal Maggiore di Milano che n'è il diretto padrone) devon' ora asciugarsi, la torba regolarmente estratta potrà adoperarsi in forni di calce, od anco incarbonirsi per più

facile trasporto. L'attività, lo zelo, e le cognizioni del degno Priore Parroco di Gana sig. Fumagalli fanno sperare che sen trarrà vantaggio. Ove pur il laghetto di Gana s'asciughi, com' è progettato, torboso dee trovarsene il fondo; e tale, sebbene coperta da innumerevoli frantumi di porfido, esser deve quell' angusta valle che termina col laghetto di Ghirla, e col suo emissario. Ma lì presso gioverà piuttosto tentare lo scavo del litantrace già noto, e che esser potrà più vantaggioso. Io faronne il soggetto d'un altro ragionamento.

18. Sol che da Gana salgasi al sud-sud-ovest sul monte detto il Pian di Martica, trovasi una torbiera che con varie interruzioni stendesi sino a Bedero. Discendendo quindi all' ovest viensi al laghetto di Brincio. Non dirò già che sia questo un cratere d' estinto volcano, come taluno immaginò; nè oso asserire che sotto siavi carbon fossile e zolfo; ma ben posso dire che il contorno del laghetto è torboso.

19. Discendendo a Varese, e da Varese al lago che da questo insigne borgo prende il nome, andiamo sicuramente in luogo di molta torba; e i lavori che attualmente fannosi per dare scolo alle acque ivi stagnanti ben ne presenteranno delle prove. Nelle stesse circostanze sono i contigui laghetti di Comabbio, di Monate e di Biandrone.

20. Da questi contorni vassi al Verbano. So che v' ha delle torbiere al nord del lago, parte del cantone Elvetico del Ticino, ov' hanno foce questo fiume e la Maggia; ma noi più interessano quelle che stanno nel seno cotanto abbellito dalle isole Borromee, ove porta al lago le bianche acque sue la Tosa. Presso Fe-

riolo, al sud-est del promontorio granitoso, i prati, che stendonsi dal piè della montagna alla nuova magnifica strada del Sempione presso al lago, sembran essere interamente di torba. Questa è quasi asciutta: non vi trovano radici ne' frondi; tutto essendo stato dal tempo ridotto in una nera pasta che posa sopra finissim'arena quarzosa: solo v'ho trovati de' frammenti di carbone. Brucia bene e non dà puzzo, e lascia una cenere rossigna, inetta certamente al bucato, ma senza dubbio servibile a buon concime. Io sospetto che trarre sen possa vantaggio qual si trae dalla terra d' ombra, che pur è una torba, come dimostrò l'ill. *Faujas (a)*. Se potrò farne sperimento che men'accerti, ne parlerò. Se è tale, quanti vantaggi non potranno ritrarne le arti, l'agricoltura, e sopra tutto la Finanza!

21. Due altre piccole torbiere sono in quelle vicinanze sull'alto del monte stesso. Una trovaine a caso nel 1796 ne pascoli del Margozzolo d' un piede e mezzo di spessezza, che posa su arena finissima quarzosa giallognola; e questa sull'argilla. Antichissima è certamente quella torbiera, che alle erbe palustri appena riconoscibili ha misti de' grossi rami d' abete: albero che or più non è su que' monti. Quanto s' estenda non l'osservai abbastanza; mo so che v' ha della torba sulla prolungata vetta del monte sopra Stresa. Incomodo, e quindi costoso ne sarebbe il trasporto sino al lago, ma può colassù servire ai pastori; e se le ultimamente trovate miniere ricchissime di pirite di rame sopra Bave-

(a) Memoire sur la terre de Cologne &c. Journ. de Nimes. num. 36 *Opuscoli scelti* di Milano tom. XX. pag. 253.

no, e quelle di pirite arsenicale presso Stresa dovessero esser trattate per via umida, in cui abbisogna lungo fuoco per la svaporazione; come per quelle di pirite aurifera presso Graglia, e di piombo presso Genesio, per le quali basta un mediocre fuoco, potrebbe ricavarsi dalle vicine torbiere anzichè da boschi il combustibile. Mi fu pur detto esservi un ampio bosco sotterra al nord di questo seno presso al laghetto in riva a cui sta l'alto Premeno; e v' ha certamente presso a quel laghetto della torba.

22. Ve n'avrà senza dubbio anche in val d'Ossola, ove, secondo gli antichi ragguagli del *Macanco* e del *Capis* trovavansi molte paludi, delle quali vedonsi ancor de' vestigj sì alla destra che alla sinistra della Tosa. Mi dicono esservene in val d'Antrona ov'è piccol laghetto: e oltre Domo presso al laghetto, che sta sulla vetta del Monte Ossulano. Quelle torbiere non vidi, ma una ne esaminai presso la vetta del Sempione tagliata in parte dalla nuova strada. Essa sta nel territorio Vallese; ma giovare può forse a quel commendevole Ospizio, che il Regno Italico, a comodo de' viaggiatori e del commercio, ha colassù stabilito e intertiene. Assai estesa è quella torbiera, e la torba, alta circa due piedi, dividesi pel colore, e non per sostanze intermedie, in tre stratti, neri essendone il primo e'l terzo, e rossigno il secondo. Quelli ospitali canonici di S. Bernardo ben la conoscono; ma l' abbondanza e la comodità de' larici fa sì che la traseurano.

23. Discendiamo da sì alto luogo, e avviciniamoci al piano. Sui colli Novaresi (dipartimento dell' Agogna) fui non ha guari a vedere ed esaminare una parti-

colare specie di torbiera. Una selva di pini è qui caduta, parte in tronchi di gran diametro, e parte in ischegge, e quindi coperta da franato monte. Essa molto estendesi sotto que' colli viniferi in istrati alquanto inclinati all' est. Fu casualmente trovata nello scorso anno sotto uno strato sottile d'arena ferrea, che ha acquistata consistenza e durezza, e sul quale sta un' ottima argilla bianca, che sino a Milano trasportasi. Il legno è per lo più annerito; e sovente i suoi strati son frammezzati da lucente nafta. Da simil bitume è penetrata la terra argillosa, che sotto il legno nuovamente si trova per l' altezza di 3 piedi all' incirca *(a)*. Forse in que' contorni, ove non rari sono gl' indizj d' acque stagnanti, troverannosi pur delle torbe propriamente dette; ma non son note.

24. Più vicina a noi, e all' est del Verbano, sta la torbiera d' Angera, la più grande e la più comoda delle torbiere nostre ch' io conosca. Salendo sulla rocca, signoria de' Borromei, se mi guardo intorno, e mi figuro il livello del lago di poche braccia più alto di quello che or sia comunemente, io mi trovo su un' isola distante due miglia da quella terra, su cui ora stanno Ispra, Barzola, e Capronno. Tale doveva essere un tempo quel colle quando il Ticino, che fra la rupe

---

(a) Le belle osservazioni e sperienze di *Hall* (vedi la *nuova scelta d' Opuscoli* tom. I. p. 377) sul cangiarsi de' legni in bitume per la pressione de' sovrapposti corpi, possono qui come a Gandino, sul Bergamasco, e a Scariano sul Piacentino, trovare de' nuovi fatti che le confermino. E' rimarchevole pure che le mentovate tre selve sotterranee trovinsi vicine o miste a corpi marini; e quella di Scariano è pur vicina a miniera di ferro ocracea cristallizzata a nocciuole, o *ceci*, come colà si chiamano.

d' Angera, e quella d' Arona cadea, non avea tutto corroso ancora lo scoglio calcare che lo conteneva. Allor fu che le erbe palustri vi crebbero, e vi perirono per moltissimi secoli, e forse ivi a colmare quel canale precipitarono dal monte i boschi, de' quali troviamo de' vestigi ne' grossi tronchi di pino anneriti qual ebano, che giacciono sotterra in mezzo alla torba. Dal colle, al cui piede stanno Angera al sud e Ranco al nord ovest, sino alle summentovate alture orientali, tutto il fondo è torboso; ma la porzione men bassa di quesro piano è da lungo tempo asciutta in modo che benissimo si presta alla coltivazione. Tal parte non conviene scandagliare; perchè più della torba utili sono quì il vino, la seta, il grano, i legumi e 'l fieno istesso. Ma v'ha ancora un amplissimo fondo che sol produce inutili giunchi e ciperi, e altre poco men che inutili erbe palustri. Di fatti chi va da Sesto ad Angera vede oltre Lisanza quanta parte di Lago occupano i giunchi. In questa, nel luogo detto le *Bruschere*, sino dal 1774. fece cavare molta torba il benemerito sig. Canonico allor proposto d' Angera Caldarini. Essa è formata di vegetali quasi interamente disfatti. Buona pure, e più comoda, perchè meno immersa nell' acqua, è quella che sta sotto Capronno.

25. Ma trovossi in seguito più abbondante e più comoda la torba che è nel contiguo podere del sig. Cav. Borromeo, quasi nel centro di quel piano. Essa è a un piede incirca sotterra; ed ha più di tre piedi di profondità in ogni luogo ov' io la provai con opportuno scandaglio. Più volte, e specialmente in quest' anno, di consenso dell' ottimo e generoso Proprietario, io ne feci scavare, e sperimentare. Esporrò più sotto in

che modo, e con qual successo; e basterà quì dire che opportunissima ed economica fu trovata pe' fornelli da seta, per le distillazioni, le svaporazioni ec. Aggiungasi essere questa torbiera comodissima, attesa la sua posizione; poichè da due fianchi ha il Lago, ove agevolmente s' imbarca, o ad Angera trasportisi o ad Incuassa; e non sarebbe difficile formare un canale del cavo stesso da cui la torba si estrae, onde questa su piccola barca portare al Lago direttamente; e quindi pel Lago, pel Ticino, e pel Canal navigabile (il Naviglio grande) trasportarla a Milano; e trasportarlavi su zattere, onde considerevolmente diminuire del trasporto la spesa.

26. Navigando da Sesto sul Ticino sino al testè mentovato Canal navigabile, ove parte del fiume derivasi per Milano, non ho veduto luogo di probabile torbiera se non a Marano o Varal-pombia, ove so che da colti Proprietarj di que' fondi farannosi le opportune ricerche; e daddove, se si ritrova, più facile ancora saranne il trasporto a Milano; poichè tosto di colà s' imbocca il Canale.

27. Ben trovai della torba nella valle del Ticino, andato essendo ad indagarla col coltissimo sig. Cagnola in un esteso suo fondo a Ozeno non lungi da Abbiato-grasso. Vedemmo nella più parte de' campi e prati uliginosi, ove facemmo de' saggi collo scandaglio, or uno ora due strati di torba frammezzati da uno strato di fina ghiaja. Egli proponsi di farne esteso scavamento e sperimento. Fummi da più d' un barcajuolo detto che simil sostanza, ossia terra nera composta di radici, vedesi ancor più al sud stratificata nelle sponde che, il Ticino

corrode; ma non ebbi sinora occasione di verificarlo.

28. Sono queste le notizie che ho potuto raccogliere dalle osservazioni mie e dagli altrui rapporti sulle torbiere del Dipartimento nostro e de' limitrofi. Molte sicuramente avronne omesse; ma le indicate bastano per far conoscere che una quantità di combustibile immensa e trascurata abbiamo, con cui al gran consumo che se n' fa abbondantemente supplire, serbando e Legna per que' soli luoghi e per quegli usi, pe' quali la torba non conviene, non piace, o non basta.

29. Analoghe ricerche fatte in altri paesi ci daranno, cred' io, analoghi risultati. Una bella Dissertazione dell' amico mio e collega il sig. Prof. *Maironi da Ponte* a me diretta, e inserita nel Tom. XIII. delle Memorie della nostra Società Italiana delle Scienze, ci fa conoscere la torbiera di Cereto in Valle Seriana, da cui le vicine filande di seta già in quest' anno trassero molto vantaggio. D' un' altra torbiera, che sta ne' contorni del Lago d' Iseo, fa menzione il ch. *Pilati (a)*. Notissima è ora la miniera di combustibile di Gandino nel Dipartimento medesimo, che è pur essa come quella di Maggiora (V. il num. 23), una selva d' alberi resinosi roversciata e sepolta, da cui grandissimo profitto già si ritrae.

30. Ho pur inteso, che il ch. Prof. e mio collega *Delanges*, incaricato d' esaminare i fondi pe' quali vorrebbesi scavare un canal navigabile che le acque del Dipartimento del Mella congiungesse al Po, fondo torboso incontrò in molte parti. So che se n' trova molta

(*a*) Storia Naturale Bresciana Brescia 1769.

nell' antico alveo del Tartaro, e che ve n' ha ne' contorni di Peschiera.

31. Non ho precise notizie del Cremonese, ma so che all' opposta sponda del Po, sul Parmigiano, v' ha molta torba; ed io ne vidi e ne sperimentai presso Vicamero ne' fondi del mio amico colto e valente Agronomo sig. Conte Schiaffinati, già Primo Maggiordomo dell' ultimo Duca di Parma. Quindi è ben probabile che ne abbondino i Dipartimenti del Crostolo del Panaro, e del Reno, ed altri ne' terreni al Po contigui. D' una torbiera del Mantovano fa menzione il ch. Pini *(a)*; e riguardo a Ferrara scrivemi il ch. Prof. *Moratelli* che due specie di torba colà si conoscono: una cenerognola che poco arde, e l' altra nera che arde eccellentemente quando è secca; ma che la copia delle Legna, di cui colà i contorni del Po abbondano, fa sì che nessuno pensi a trarne profitto. Delle torbiere del Polesine fa menzione *Fortis* nella citata sua memoria *(b)*, e il ch. Zanon scrive che molta torba suole trovarsi sulle sponde dell' Adriatico *(c)*.

32. Ora al Regno Italico appartiene la già mentovata torbiera, di cui all' Accademia di Padova sua patria, fè generoso dono il cel. *Fortis*. Sta essa appiè de' colli Euganei fra 'l famoso Cataio e 'l già suo Galsignano, non lungi dalle antiche Terme Aponensi. Seco la visitai, e la sperimentammo. Chi ne vuole più estese notizie legga la citata Memoria che su di essa scrisse. Indizj frequenti di torba pur vidi andando dal-

(a) Loc. cit. pag. 3. *(b)* Pag. 23. *(c)* Lett. X.

la Battaglia ad Arqua ove stanno le ceneri di Petrarca presso Valsanzibio, e nel così detto Ritratto di Monselice. Della torbiera di Fagania oltre Udine, che più d' ogni altra femmi conoscere l' utilità di questo combustibile, già parlai, e riparleronne più diffusamente nella Parte III.

PARTE II.

De' vantaggi che dalla Torba possono ricavarsi.

33. Da tante sì estese, sì buone, e sì comode torbiere del nostro e de' limitrofi Dipartimenti quali vantaggi abbiamo noi ricavati sinora? Nessuno, o ben pochi. Quali vantaggi possiamo ricavarne? Molti. Nelle arti, come nella domestica economia, si può quasi sempre sostituire la torba alle legna. So che non si accorda alla torba attività bastante per fondere le miniere di ferro e di rame per liquefare i quarzi e altri corpi vitrescibili, per cuocere cristalli, porcellane ec. Vedremo più sotto che ciò non è in tutto vero. Ma sia pur vero; che importa? Adopreremo se si vuole per questi lavori carbone e legna; ma le legna e 'l carbone, che potremo risparmiare in cento altri usi, non mancherannoci per quelle arti e lavori, pe' quali son riputati necessarj. Annovererò intanto qui brevemente gli usi più comuni e più ordinarj, ne' quali la torba sostituirsi può alle legna agevolmente.

34. Dalle non poche prove fatte fra noi risulta, che la torba, collocata su un focolare in modo che

siavi una corrente d' aria che l' avvivi, arde, e riscalda in guisa i sovrapposti recipienti da far bollire i liquori che questi contengono. Come ciò ottengasi senza che incomodi il puzzo o il fumo, lo vedremo nella Parte III. Ecco dunque la torba adoperabile ne' fornelli delle Lavandaje pe' bucati, e delle sbianche per le manifatture di tele sì di lino che di bambagia; ne' fornelli de' Tintori, sia per purgare i fili, le sete, e le lane, sia per tingere queste sostanze; ne' forni delle saponaje, delle fabbriche di cera e di sevo; sotto le caldaje de' pellattieri, de' cuojai ec. in ogni manifattura in somma in cui s' adopri fuoco.

35. I fornelli delle filande da seta sono un oggetto della massima importanza per noi. Si può calcolare che il Dipartimento d' Olona e i Limitrofi, le cui torbiere ho indicate nella prima parte, svolgano dai loro bozzoli per lo meno 1,500,000 libbre di seta all' anno. Dando un consumo di 25 libbre grosse (cioè di 28 once) per ogni libbra piccola (di 12 once) di seta si abbrucieranno per la sola filatura della seta 37,500,000 libbre di legna, ossia 375,000 centinaja. Quando, per la sostituzione della torba, non se ne risparmiasse che la metà, non sarebbe egli sempre un gran risparmio? Che poi la torba bastantemente attiva sia pe' fornelli da seta credo non esservi uomo ragionevole che la conosca e ne dubiti, dacchè si sa che in varj luoghi dei Dipartimenti del Serio, del Mella, e di Passeriano s' adopera con vantaggio; e specialmente in quest' ultimo un fornello riscaldato colla torba non costava più di quattro in cinque soldi veneti al giorno; e la seta, per la eguaglianza del calore trovavasi meglio filata. A ciò,

che leggesi nella Memoria di *Fortis*, soggiugnerò che la torba nel 1785 s' adoperò col risparmio di $\frac{3}{8}$ di spesa in trenta fornelli per circa due mesi in Chignolo nel castello de' sigg. Cusani, come rilevasi da autentico rapporto fattone alla Società Pattriotica dal sig. Avv. Ferrari: che la Società stessa nel 1784 adoperò per molti giorni, nelle sperienze fatte sulla filatura della seta, la torba di Velleso; e se non vi trovò considerevol vantaggio economico, e' fu per la soverchia spesa del trasporto da sì alto e sì lontano luogo: e per ultimo dirò che in questo stesso anno io feci sperimentare la torba d' Angera in alcuni fornelli a Desio. La seta ben filossi: l' acqua tardò bensì a concepire il necessario grado di calore, perchè la torba non dà pronta la fiamma come le legna; ma poi sì calda si mantenne che fu d' uopo quasi chiudere interamente la bocca del fornello; e 'l risultato fu che adoperossi, in peso, minor torba in un fornello che legna nell' altro ove filavasi di confronto; e che le filatrici e gli assistenti non sentirono nessuno spiacevol odore della torba; il quale solo sentissi da qualche vicino, nella cui casa portato era il fumo dal vento. Come a ciò riparisi lo vedremo nella Parte III.

36. Noi abbiamo de' forni di svaporazione per varj oggetti, e due considerevoli stabilimenti vi sono ne' quali molto combustibile consumasi per somministrare ai Grigioni e agli Svizzeri un sal marino distinguibile da quello che vende nel Regno la Finanza. Il primo è a Gera rimpetto alla torbiera di Colico sul Lario: il secondo a Macagno ove comodo è pel Lago maggiore il trasporto della torba d' Angera. Abbiamo nella Col-

lina di S, Colombano molte acque salse dalle quali non conviene ora estrarre il sale per la carezza del combustibile, ma s' estraeva da PP. Certosini e da sigg. Cusani e Schiaffinati ne' secoli XVI, e XVII quando abbondavan le legna. Non potrebbe ora somministrare il combustibile la torbiera di Chignolo di cui parlossi al num. 3? Di forni di svaporazione hanno bisogno que' tutti che estraggono i sali alcalini, o, come volgarmente dicesi il *Salino* dalle ceneri; e chi conosce le nostre vetraje ben sa quanto sen consumi, sicchè le varie fabbriche si disputano il privilegio esclusivo di comperar le ceneri ne' loro distretti. Abbiam' anche dei sassi e delle terre alluminose conosciute dai Naturalisti, ma di nessun prodotto sinora. La torbiera di Prato Pagano presso Como non potrebbe ella adoperarsi a trarre dell' allume dalla così detta Pietra Mollegna su cui è edificato Castel Baradello.

37. Il nitro è divenuto un oggetto piucchè mai importante per molte arti, e sopra tutto per farne polvere da schioppo. I Salnitrai, che dalle terre traggono il salnitro per portarlo greggio alla Finanza, devono far isvaporar l' acqua, che passando per le terre nitrose se n' è saturata. Non posson essi servirsi della torba ove ne hanno il comodo? Questa non solo ha tutta la forza, ma ha, secondo l' osservazione di *Fortis*, anche il vantaggio che non facendo bollire la soluzione di nitro a ricorsojo, come fanno le legna sovente, non produce quella forte svaporazione che porta via il nitro stesso. Aggiungasi che in un ben fatto fornello, oltre il risparmio del minor costo v' è pur quello della minor quantità, come mel dimostrò la

prova che ne feci colla torba d' Angera nello scorso agosto alla regia Raffineria de' Nitri. *(a)*

38. Ma ben più d' ogni forno e fornello consumano le fornaci. Noi ne abbiamo per la calcina, pe' mattoni, pe' vasi di terra cotta, per le majoliche, per la così detta terraglia, per le vetraje ec. Forse ad alcune delle summentovate manifatture non sarà adattata la torba o per mancanza d' attività o pel fumo; ma in quelle medesime manifatture servirà essa ad usi subalterni. P. es. se non conviene pe' vetri bianchi e pe' cristalli, specialmente ove s' adopra quarzo, servirà per le bottiglie nere, o sian' esse soffiate di vecchio vetro polverizzato; ovvero del trappo ch' io trovai in grandissima copia e assai fusibile presso Intra sul Verbano *(b)* e trovasi anche altrove; ovvero di Lave, dacchè ora al Regno Italico appartengono i volcani estinti de' monti Veronesi e Vicentini, i colli Euganei e i Berici. Se pur la torba non basterà per la fusione, potrà bastare a far le fritte, e basterà certamente per la ricottura, e pel forno in cui le lastre soffiate si spianano. Farassi

---

(a) Sotto la gran caldaja capace di 23 brente, ove in circa 12 ore si scioglie il nitro che l' acqua bollente può sciogliere, consumansi ordinariamente circa 900 libbre (grosse) di legna, cioè 75 libbre all' ora. Io vi feci portare 120 libbre di torba che colà si pesarono, e queste bastarono per essere sostituite alle legna per lo spazio di due ore e mezza; dunque sen consumò in ragione di libbre 48 all' ora; e pertanto il risparmio fu di più di $\frac{3}{5}$. Il calore fu certamente uguale, e forse maggiore perchè convenne chiudere la bocca del fornello. Vero è però che la torba adoperossi a forno già riscaldato; e per tema che non avesse forza bastante, si caricò il fornello più del dovere.

(b) Memorie della Società Ital. delle Sc. Tom. VIII. pag. 416., e *Opuscoli scelti di Milano*, Tom. XX. pag. 410.

dunque sempre colla torba anche per le vetraje considerevole risparmio di Legna.

39. Che per le fornaci di Majolica, e altre terre cotte più comuni basti la torba, lo dimostra l' esperienza di molti paesi, e citar posso fra gli altri la Figulina del più volte mentovato sig. Conte Asquino a Fagania. Forse non basterà per la così detta terraglia, pei *grès*, per le porcellane ec. ma se non basta a far cuocere queste terre, basta certamente a farne asciugare i vasi, prima di cuocerli, nel forno a ciò destinato: ed ecco un risparmio di Legna. Di ciò accertommi uno sperimento fatto nella nuova fabbrica di terraglia e *grès* diretta dal sig. Muller presso S. Vittore. Trovò egli la torba d' Angera da me datagli per lo sperimento più attiva delle Legna stesse, ne' suoi ingegnosi ed economici forni, che gioverebbe imitare.

40. Che colla torba facciasi cuocere il sasso calcare e l' argilla per mattoni e tegole io lo vidi a Fagania summentovata; e leggo nelle note fatte sul luogo ai 6 di novembre del 1790, che in que' forni cuoceansi per l' altezza di 7 in 8 piedi veneti di sasso calcare, meno per trarne vantaggio che per sostenere la prima forza del fuoco troppo violento; e quindi 14 piedi di lavori di terra di varia grossezza, sicchè de' mattoni alcuni ven' avea, destinati a fermagli d' arco, del peso di 150 libbre (di 18 once), e altre di 3 once d' altezza, sicchè quattro bastavano pel focolajo d' un fornello da seta. Fra gli 11 e 13 giorni tutto il materiale d' una gran fornace a quattro bocche era cotto. Vidi presso di noi le tegole e i mattoni, che il mentovato sig. Fumagalli avea fatto cuocere colle tor-

be di Colico, e di Prato Pagano, presentati al Governo per mezzo del fu Conte Consigliere Odescalco; e vidi in Chignolo colla torba sopravanzata alla filatura (num. 35) il medesimo sig. Ferrari, e il sig. Ab. or Rettore Marinoni far cuocere in piccola fornace calcina e mattoni, de' quali presentarono in saggi alla summentovata Società Patriottica. Sappiamo che in Olanda colla sola torba fassi calcina de' gusci di conchiglie che il mar getta alla sponda; e dissemi ultimamente il cel. sig. *Faujas de S. Fonds* d' aver egli veduto colà cuocersi colla torba molti milioni di mattoni in una volta. Come ciò facciasi lo diremo nella parte III.

41. I forni di fusione del ferro son numerosi presso di noi, e sarebbonlo ancora di più, se più combustibil vi fosse: essendo ora ben noto che moltiplici filoni di ferro, or solitario or misto ad altri metalli, occupano la media catena delle Alpi, e le vette dell' Apennino, e che molto altresì ve n' ha d' ocraceo a nidi o in istato di ferro paludoso o d' arena ne' nostri monti e colli, e nelle stesse valli. So che non si reputa bastante l' attività della torba per la fusione del minerale, nè pel depuramento del ferro fuso nelle così dette fucine grosse. Ma sia pur vero: non potrà la torba servire ad altre operazioni metallurgiche che la fusione precedono e la seguono? Son queste l' abbrustolimento del Minerale e i lavori delle fucine sottili, nelle quali il ferro s' affina, s' assottiglia, e si prepara pe' Fabbri. Cento sperimenti, anche fatti presso di noi, hanno dimostrato che la torba basta ad arroventare e far bollire il ferro; e a ciò basta anche la torba incarbonita: anzi s' è pur trovato che pe' piccoli pezzi la

torba è preferibile al carbone perchè ne abbrucia meno, ed essi meno saltano e sprizzano *(a)*. Potendo per tanto farsi qualche risparmio di legna sul ferro ch' è di un uso sì esteso, il risparmio verrà sempre ad essere considerevole.

42. In tutti gli altri metalli, e nello stesso mercurio, e per lo zolfo se vogliasi ricavare dalla terra o dal sasso che lo contiene, abbisogna fuoco. Il rame o fondesi, o ottiensi quando per la calcinazione, e la svaporazione se n'ha il metallo in istato d'ossido che fondesi poi. Di fuoco ha bisogno il piombo sì per separarne la parte sulfurea che per fonderlo. Pochi altri metalli abbiamo, o non gli abbiamo in copia tale da valutarne molto il consumo del combustibile. Tuttavia questo può meritare qualche considerazione, se osservisi che col fuoco si separa l'oro dal mercurio con cui s'è amalgamato: col fuoco a coppella si separa l'argento dal piombo a cui è combinato dalla natura, o dal rame a cui è unito dall'arte: col fuoco si formano gli acidi necessarj alle partizioni; e col fuoco fassi non solo ogni fusione, ma ogni mescolanza di metalli e ogni saldatura. Se questo fuoco è tale, come lo è generalmente, che la torba basti a fornircelo, ben è chiaro che immenso risparmio di legna che consumansi intorno ai metalli, adoperando in loro vece la torba, può risultarne.

43. Giacchè rammentai gli acidi che servono alla partizione de' metalli, e pe' quali gran forno abbisogna di fuoco non forte ma costante, come può vedersi nel-

---

(a) Pini loc. cit. pag. 55.

la R. Zecca, deggio anche mentovare i molti fornelli che servono alla distillazione de' vini e delle stesse graspe tratte fuor de' tini e dello strettojo. S'è pur trovato vantaggioso il ricavare uno spirito da varj prodotti trascurati dianzi come le patate, le castagne, i frutti del rovo, del moro, l'acqua degli sciolti favi, e d' altre tali sostanze nelle quali esiste una materia zuccherina. Aggiungansi a tutte queste le preparazioni e distillazioni farmaceutiche. Come a queste serva la torba sperimentollo non ha guari colla da me datagli torba d' Angera il ch. sig. *Porati* P. Prof. di Chimica farmaceutica. Dal ragguaglio ch' egli favorì di darmene, e che io soggiungo a piè di pagina *(a)*, vedesi quanto vantaggio possa dalla torba ricavarsi.

(a) Un moggio della torba d' Angera quì fatto venire e favoritomi dal sig. *Amoretti*, fu ne' primi di Luglio p. p. trasportato alla mia spezieria e poichè era alquanto umida la posi in luogo asciutto e ventilato onde s' asciugasse. Quando fu ben secca men servii per lo spazio d'una settimana in ogni giorno in un fornello grande per distillare con Lambicco di rame le acque ad uso della Spezieria. Il fornello è fatto di mattoni colla graticola di ferro che 'l divide in due, restandovi di sopra il focolare del diametro d'un piede, e di sotto il cenerario: hanno amendue le rispettive portine di ferro. Questo fornello è fatto per adoperarvi carbone di legna. In ogni giorno cominciai a riscaldare il fornello con carbone; e nel resto del giorno non vi si rimettea che torba, la quale tosto accendevasi senza dar fumo, e mettendo una fiamma non molto alta. Il calor che dava fu sufficiente a mantenere nel Lambicco il bollimento e la distillazione de' liquori senza che vi volesse una maggior quantità di torba di quello che vi si richieda di carbone. In un fornello più piccolo costruito allo stesso modo di soli 9 poll. di focolare destinato alle distillazioni chimiche, si fece una distillazione per storta a bagno d' arena di quattro libbre di nitrato di potassa, due di olio di vetriolo e due d' acqua per avere in tal modo un licore d' acido nitrico. Vi s' impiegò un pò di più di tempo di quello che vi si spende usando carbone di legna: ma la distillazione fu portata a compimento, anche sul finire della operazione, nel qual tempo

44. Forse non meno delle manifatture e delle arti consuma la domestica economia, in cui ogni classe di persone ha più o meno bisogno di fuoco. Continue barche di legne e di carbone portano a questa capitale i due canali navigabili, e da carra di legna sono frequentemente ingombre le strade, che alle varie porte della città conducono. Io ben so che non si vuole adoperar torba ovunque ora s' adoprano legna; ma so che adoperar si potrebbe, e ne offre una prova l' Olanda, che di legna manca interamente e di torba abbonda; e torba or adopra non poca parte di Parigi per tace-

---

abbisogna un calor maggiore di quello che basta a far bollire l' acqua. Per questa distillazione ho consumata sul principio una libbra e mezza di carbone per iscaldare il fornello ed avvivare di tempo in tempo il fuoco, e dodici libre (di 12 oncie) v' ho impiegate di torba. Ripetei poscia a circostanze uguali la stessa distillazione col solo carbone, e ven consumai libbre 5 $\frac{1}{2}$; onde deducendone la libbra e mezza impiegata unitamente alla torba, restano libbre quattro, alle quali per l' attività del calore corrisposero libbre dodici di torba. Sperimentai la torba anche nel focolare di cucina che non ha graticola nè cenerario; ed osservai che se la torba era sovrapposta a legna che tenessela sollevata dal pavimento, ardea con bella fiamma, e facea bollir l' acqua con notabile risparmio di legna; ma se non v' era che torba, mancando il cenerario, difficilmente infiammavasi, e non dava che fumo, il quale, spandendosi per la cucina dava un odor ingrato, ma non mai dannoso; non essendo che un misto di fumo vegetale, e di ben poca sostanza animale. Quindi risulta che la torba è preferibile al carbone, perchè, non producendo un calore soverchio, non suol cagionare quel gonfiamento, che cagionan sovente la legna e 'l carbone, per cui i liquori bollenti sorpassano gli orli de' recipienti; ma ha bisogno di star sopra un cenerario, o aver aria sotto di se in qualche modo; ed è altresì necessaria, almeno sul principio, una diligente assistenza per alimentare con nuova torba il fuoco.

Milano ai 31 Luglio 1806.

Segnato Antonio Porati.

re di molte altre città. Veggiamo però con maggior precisione ove non sarebbe nè difficile nè incomodo l' adoperarla.

45. A chi parlasse d' usar la torba in vece di legna ne' forni da pane risponderebbesi per lo meno con un sogghigno, arricciando il naso alla sola idea del pane puzzolente. Eppure moltiplici sperimenti fatti a Berlino per ordine del gran Federico, in Linguadoca dal sig. *Venel*, e sopra tutto dall' Accademia di Lione nel 1784, mostrarono, contro l' opinione comune, che un forno da pane può riscaldarsi col carbon di terra ancorchè non depurato, i cui effluvj son generalmente riputati più incomodi e nocevoli che quei della torba, senza che ne risulti nè incomodo alla salute dell' uomo, nè ingrato odore nel pane. Come ciò facciasi dirollo nella Parte III, al num. 70. Quanta legna ne' forni da pane si consumi ognuno ben lo sa, e basta dire che la summentovata Accademia fu indotta a proporre considerevol premio per trovare il modo di sostituire ne' forni da pane il carbon di terra alla legna affin di riparare alla penuria che di questa v' era in Lione, sebbene una città quella sia da due fiumi navigabili bagnata.

46. Immensa quantità di legna presso di noi consumano i cammini per iscaldarsi nell' inverno. So che quasi tutti dicono: la torba manda un puzzo che appesta, ma so anche che fra tutti quelli che 'l dicono molti non l' hanno provata mai; so che molti l' hanno provata non ben asciutta; so che l' hanno provata non collocandola su graticole o gabbie di ferro, come far si deve, e so pure che molti di quelli che l' hanno

provata, anche sentendone il fumo, quando la torba era ben asciutta, non v' hanno sentito odore incomodo. E se v' è un pò di puzzo sarà gran danno? Io veggo i nostri Conciatori di pelli formarsi cogli avanzi della concia le così dette *formagelle* o focacce, che vendonsi al povero, e anche al ricco economo, a prezzo molto superiore a quello della torba *(a)*; e si abbrucciano, sebbene sentasi che puzzano come puzzar devono, essendovi in esse molta sostanza animale. Perchè dunque non s' adoprerà allo stesso modo la torba? Che se i cammini facciansi a dovere, cioè alla Thomson, i quali non sono soggetti al fumo e mandano molto calore; se la torba mettasi sovra una griglia, o entro una specie di gabbia, siccome s' usa in ogni paese ove la torba s' adopra; se la torba o facciasi incarbonire o s' impasti con calce co' metodi che indicherannosi nella Parte III, allora la sperienza mostrerà, come a me e ad altri mostrollo e lo mostra attualmente ne' cammini frankliniani, che la torba non puzza, non incomoda, e scalda.

47. Ma diamo pure che adoperar non vogliasi ne cammini di lusso, qual cagione potrà ritenere dall' adoperarla nelle stufe? Queste, se non sono mal costruite o rotte, non mandano mai fumo nelle stanze; e 'l fumo che non è molto, uscendo dall' alto de' fumajuoli sul tetto, comunque puzzolente suppongasi, non incomoda nessuno. Le stufe sono già molto in uso fra noi ed estendersene può grandemente l' uso ove si

---

(a) Nella Conceria de' signori Rive, e Comp. presso Porta Tanaglia queste focaccie fannosi in gran copia, e vendonsi lire 2 di Milano per ogni 100 libbre di 28 oncie.

sostituiscano ai cammini ne' luoghi in cui molta gente accorre, e rendere si vuole più temperato l'ambiente. Se si teme, come da molti temesi in fatti, che la stufa guasti l'aria, facciasi in essa una *cassa d'aria* all'uso della francliniana, che aria nuova e calda introduca nella stanza continuamente, e la fredda e guasta dalla respirazione facciane uscire. Vuolsi pure un cammino? Abbiasi un cammino di *Franklin*, che cammino e stufa è al medesimo tempo. E' noto inoltre che le stufe son necessarie a molte arti per asciugare lentamente alcuni oggetti, per mantenere una leggera fermentazione, per impedire il congelamento ec.

48. Chi ha giardino di lusso sa quante legne adoperar bisogna all' inverno ne' così detti *Tepidarj*, e *Calidarj*, o serre calde; e più ancora se si hanno tali piante esotiche come gli ananassi, le muse ec., che vogliono un caldo oltre + 18° reaumuriani, mentre forse l'atmosfera è d'alcuni gradi sotto lo zero. Adoperando torba non solo si ha il vantaggio del risparmio della legna; ma v'è pur il risparmio ben considerevole dell' assistenza. E' noto che il legno, ove non sia alimentato e mosso presto si spegne; ma la torba una volta accesa in ben fatto forno non ispegnesi mai: onde il Giardiniere, fatto avendo per alcune notti lo sperimento della quantità con cui dee caricarsi il forno perchè duri sino alla mattina il fuoco, può dormirsene caldo e tranquillo senza tema che la negligenza d'un' ora gli faccia perdere il frutto degl' incomodi, e delle spese di molti anni.

49. Che la torba faccia bollire l'acqua, e quindi cuocere ciò che sta nella pentola, non v'ha dubbio.

Dunque con essa potrassi somministrare il fuoco alle cucine. V' è fumo e cattiv' odore da temersi? Vi si ripara col fare i cammini sì ben chiusi che fumo non esca; e sì fatti cammini son conosciuti da chiunque studia l' ecomomia del combustibile. Veggasi su di ciò la bell' opera del sig. *Thomson Conte di Rumford*, che pur è stata tradotta in nostra lingua. Vi si ripara col fare incarbonire la torba. Io vidi a Udine nella casa del mio mentovato amico sig. Conte Asquino e cammini da sala e da cucina, e fornelletti, e per sino le cassette delle dame, non con altro riscaldate che colla torba sua incarbonita. Molti de' poveri d' Udine non abbruciano pe' loro domestici bisogni che la torba incarbonita di Fagania, che il mentovato benefico signore a bassissimo prezzo lor vende. Nel 1794 ne vendè 500,000 libbre (di 14 once) a una lira veneta per ogni centinajo *(a)*. Potrei anche proporre l' economica cucina che può farsi colla stufa della Termolampa del sig. *Winzler (b)* da me sperimentata e descritta *(c)*. Potrebbe certamente la torba adoperarsi negli spedali, e in altri luoghi di pubblica carità, ove generalmente i cammini costruiti per l' economia non lasciano disperdere il calore; e quindi nè il fumo nè l' odore. E' noto ora, anche per le recenti osservazioni e sperienze del ch. sig. Prof. *Marabelli* di Pavia, come un ottimo e abbondante brodo estraggasi dalle ossa per mezzo di

---

(a) *Fortis* loc. cit. pag. 23.

(b) Die Thermolampe in Deutschland ec. Von. zach. andr. Winzler. Brunn 1803.

(c) Opuscoli scelti tom. XXII pag. 120. 410.

replicate bolliture *(a)*. Quanto non s' accrescerà questo vantaggio ove di poca spesa sia il combustibile!

50. Rammenterò anche i vantaggi che può trarre dalla torba l' Argicoltura. In generale le torbiere son collocate in luogo acquitrinoso e sol fecondo d' inutili cannucce, carici, e giunchi per l' umidità soverchia. E' chiaro che scavando la torba devono farsi delle fosse; e che queste, ridotte ad opportuni canali e ben dirette, devono asciugare il fondo, e atto renderlo a produrre grani, legumi, molti generi d' erbe, arbusti, alberi ec. E' dimostrato in secondo luogo, per gli sperimenti fatti in ogni paese di torbiere, che le ceneri da esse risultanti quando s' abbruciano sono un ottimo ingrasso; nè possono non esserlo, dacchè la torba è un composto di sostanze vegetali e animali, e far deve, come osserva il dottissimo mio collega *Giobert*, l' effetto della fuliggine; facendo per ciò anche perire gl' insetti nocivi. Riferirò, giacchè parlasi d' agricoltura, l' uso che fa il più volte mentovato sig. Con. *Asquino* della polvere di torba, che parrebbe doversi considerare come un inutile spazzatura della torbaja. Egli ha alla sua Fagania una celebre vigna da lui piantata con viti del Tokai, dalle cui uve, con ingegnosa maniera servate sino al Gennajo, spreme lo squisito suo *Picolit*, che il Tokai stesso non invidia. E' la sua vigna, come tutte il sono, soggetta alle brine, che in una mattina di primavera colà, come altrove, distruggono tutte le speranze dell' autunno. Ma egli colla torba sua vi ripara.

(a) Sul progetto d' applicare le ossa all' economia alimentare. Pavia, presso Galeazzi 1806. Nuova scelta d' Opuscoli tom. I pag. 351.

Il vignajuolo ne coglie la polvere sul pavimento della torbiera che descriverò nella Parte III, e ne fa nella vigna de' mucchietti che hanno circa un piede di diametro e altrettanto d' altezza; e fattavi una fossetta sull' apice, previene l' aurora (ora delle brine); e se pargli mattina da dover temere questa funesta rugiada, la vigna scorre con un recipiente pieno di ben accese brage e una ne depone in ognuna delle fossette de' mucchietti torbosi: questa accende tosto la polvere della torba, che più non si spegne finchè non l' estingue il vignajuolo istesso; e sparge tal fumo che i teneri germogli e le uve nascenti libera dalla brina. Non è quì luogo di produrre teorie per ispiegare il fenomeno, ma il fatto è notissimo, e 'l fu a più antichi Agricoltori, che del fumo piccante si valsero anche per far perire gl' insetti, che talora al par della brina sono all' uva e ad ogni frutto funesti.

51. La torba contien della terra, e questa nell' abbruciarsi sovente diviene una scoria o vetro. Tale sostanza, che s' estrae in gran copia dalle fornaci a torba, ha due usi importanti. Il sig. Con. Asquino mi fè vedere come adoperavala in luogo della pozzolana per le fabbriche da farsi nell' acqua, e n' aveva i medesimi effetti.

52. Fra i vantaggi della torba annovererò per ultimo il licore che c' insegnò ad estrarne il sig *Pfeiffer* col distillarla: licore ch' egli chiama acqua stittica, e che trovo opportunissimo alla concia delle pelli e de' cuoi, sostituibile come astringente ad un bagno di vallonìa.

53. Il massimo poi de' vantaggi della torba è il

tenue costo di essa nelle vicinanze delle torbiere, o dove siane facile il trasporto, in confronto della legna, e del carbone comune. E poichè ho inteso su di ciò moversi de' dubbj, non contento de' risultati che facilmente deduconsi da quanto ho detto finora, riferirò quì in breve i calcoli del Prof. *Pini* esposti nel più volte lodato suo libro. Egli, da osservazioni fatte altrove e dalle proprie sperienze, ha rilevato che due uomini in un giorno cavano mille mattoni di torba lunghi once (milanesi) 6, larghi once 4, e alti once 2, e quindi in 66 giornate que' due uomini caveranno la torba d' una pertica di terreno; e supponendo la torba alta soltanto un braccio ne caveranno 1849 braccia cubiche, o come noi diciamo, *quadretti*, giacchè appunto 1849 braccia quadrate formano la pertica milanese. Accorda egli inoltre la spesa di 33 giornate per farla seccare e riporla: e, valutando a 30 soldi al giorno la paga del Giornaliere, trova che la spesa sarebbe di lire 297, a cui 3 lire aggiunge pel fitto del fondo, e altrettanto pel consumo degli utensili; onde tutta insieme la spesa sarebbe di lire 303. E siccome la torba diseccandosi e stagionandosi diminuisce di $\frac{1}{3}$ in volume, così con tal somma avrebbonsi 1233 braccia cubiche di torba secca. Riducendo il quadretto al moggio milanese del carbone, che equivale ad un quadretto e $\frac{1}{8}$, s' avrebbono per lire 303, moggia 1096 di torba secca, onde questa costerebbe di valore originario sul luogo un pò meno di 6 soldi al moggio. Calcola egli poi che aggiugnendo a questo un discreto guadagno dell' intraprenditore, e 'l trasporto per acqua sino a Milano dal Verbano o dal Lario, il moggio di torba quì costerebbe 12 soldi. Fa poi il computo della stessa torba ridotta in carbone co' metodi che nella Parte III insegnerannosi; e 'l risultato n' è che, perdendo essa nell' incarbonirsi metà del volume, e calcolando 6 soldi al moggio le spese tutte dell' incarbonimento, verrebbe il carbon di torba trasportato in Milano a costare 24 soldi al moggio. Or vuò che accrescasi, per l' accrescimento d' ogni derrata e della man d'opera, di $\frac{1}{2}$ ogni spesa: avremo il moggio di carbon di torba a 36 soldi. Mi si dica ora quanto si paga il carbon di legna? Aggiugnerò a questo che *Fortis* fa montare a $\frac{2}{3}$ il risparmio che si ha usando torba in luogo di legna, che *Asquino* trovò nelle arti grosse un risparmio di 60 per 100, e molto maggiore nella filatura della seta, io già dissi che a Chignolo, in una prima sperienza che costa sempre più delle altre, il risparmio fu di $\frac{3}{8}$; e dirò ora che in quest' anno, avendone accordate, mediante l' assenso del proprietario, alcune carra col Fittajuolo della torbiera d' Angera, le pagai lire tre al carro di torba secca del peso di 500 libbre grosse, e una lira di più pel trasporto dalla torbiera alla barca. L' introduttosi uso di caricar le zattere, le quali non hanno come le barche la gravissima spesa del rimontare il fiume, può di molto diminuire la spesa del trasporto sino a Milano.

54. Per ultimo vò farmi carico anche dell' obiezione che mi fè taluno sullo scavo della torba, come cagione di consumare e perdere affatto il fondo riducendolo a stagno. Sia ciò pur vero. Secondo il precedente calcolo da una pertica di terra, che abbia un sol braccio di torba, colla spesa di lire 303 s' avreb-

bono 1096 moggia di torba secca, la quale costerebbe sul luogo sei soldi al moggio. Se questa sul luogo si vendesse 10 soldi (prezzo tenuissimo in confronto delle legna e del carbone) s' avrebbe un guadagno di lire 219. 4 pel valore del fondo che anderebbe perduto. Or dicasi se tanto costa la pertica un fondo torboso? Che se la torba avesse la profondità di 3 braccia, come l' ha sovente, dal fondo perduto ricavérebbonsi lire 657. 12 per ogni pertica. Questo vantaggio avrebbesi perdendo il fondo; ma questo cavandone la torba, non sempre perdesi, come or ora dirò; e, perdendosi, generalmente migliora e rende atto per le fosse che scavando la torba si fanno, alla coltivazione il circostante terreno, che acquista un valore ben maggiore di quello che perdasi per la sottratta torba. Sovente pure sen' ottengono delle acque che derivansi per più bassa irrigazione. Ma diamo anche che si formi uno stagno: sarà questo inutile? V' ha ben de' paesi ove scavansi espressamente degli stagni per farne peschiere. Temesi che lo stagno guasti l'aria? Osservisi che presso le risaje se l' aria è cattiva non è già quando il riso è inondato e 'l terreno coperto dall' acqua; ma quando, levata questa per purgare dalle male erbe il riso, diviene un fondo paludoso, quali sono le torbiere. Aggiungasi a tutto ciò non esser punto vero che scavata una volta la torba sia perduto il fondo per sempre. E' stato osservato che se le erbe palustri vi rinascono, come avvenir suole, in meno di mezzo secolo esse ricoprono, e rioccupano interamente il fondo con nuova torba; e narrommi il più volte mentovato sig. *Faujas*, che il cel. *Van-Marum*, avendo ad Harlem una peschiera, di cui non faceva nessun uso, trovolla dopo pochi anni piena di torba formatasi pei successivi sedimenti delle conserve e della lente palustre.

PARTE III.

De' mezzi più opportuni onde introdurre l' uso della Torba.

55. Vedemmo quanto numerose ed estese siano le nostre torbiere, e quali e quanti vantaggi ne potremmo ritrarre. Ora, perchè non sen ritrae nessuno, o ben poco almeno? Cerchiamo le cagioni di questo politico-economico fenomeno, e indichiamone, se ne riesce, i ripari. Le cagioni, a parer mio, sono: 1°. L'ignoranza che fa adottare i pregiudizj, pe' quali sen crede inutile anzi nocivo lo scavo e l'uso: 2°. L' ignoranza nel rintracciarla, scavarla, prepararla, e conservarla: 3°. L' ignoranza del modo di adoperarla: 4°. L'ignoranza de' metodi co' quali si spoglia di ciò che può renderla incomoda o pericolosa: 5°. L' ignoranza de' vantaggi che sen possono ritrarre. Di questi ultimi già parlai abbastanza nella parte II: delle altre cagioni parlerò ora partitamente, tentando di dissipar l' ignoranza colle istruzioni ricavate dagli scrittori, e da alcune mie osservazioni.

56. La maggior parte delle persone alle quali si parla della torba non sanno quall' idea attaccare a questa parola; e in non pochi mi sono avvenuto, uomini altronde non affatto incolti, che la torba dal carbon fossile non ben distingueano. Devesi ciò alla pubblica

e privata istruzione, in cui mille inutili e presto dimenticabili parole relative a cose lontane di tempo e di luogo s' insegnano, e si lasciano intanto i fanciulli nella più profonda ignoranza di ciò che gli circonda, e serve alla esistenza e conservazion loro come al bene della Società. Quindi è che il più degli uomini, se loro si parla di sostituire la torba alla legna e al carbone trovano la cosa ineseguibile; e dopo che gli avete pur fatto intendere e mostrato che cosa ella è, con tuono fra la derisione e lo sdegno vi dicono che se fosse una buona cosa sen sarebbono ben valsi gli antenati loro; e se la torba trascurarono egli è evidente, conchiudono, che adoperarla noi non deggiamo. Quello che a me più d' una volta fu detto, io qui ridico. Dovrebbono pur rinvenire da questo pregiudizio gli uomini ragionevoli, e considerare che cento argomenti abbiamo ogni dì sott' occhio di nuovi ritrovati, usi, prodotti, che una volta non s' aveano, ignoravansi o credevansi impossibili o inutili. Ma è proprio della inerzia dello spirito umano di non potersi smovere se non a gran fatica dalle antiche abitudini; e ciò ch' è più strano, (osserva il redattore degli sperimenti fatti col carbon fossile a Lione) gli artigiani che aver dovrebbono il maggior interesse in adottare le cose che loro apporterebbono risparmio e guadagno, son quegli appunto che ne contrastano più degli altri l' introduzione.

57. Sarebbe ancor perdonabile il pregiudizio contro l' uso della torba, se soltanto insufficiente la credessero per le arti e la domestica economia; ma essi la credono e la predican nociva. V' ha chi, facendo commercio e monopolio di legna e carbone, ha inte-

resse di screditare ciò che allo smercio della sua derrata può nuocere: sordamente insinua che pestifero è l' alito della torba, e in prova ne adduce il puzzo della medesima: v' aggiunge poi, facendola da saccente, che ciò nasce da particelle sulfuree o arsenicali frammistevi, e dallo imputridimento in essa di velenosi rettili. Ciò non è vero; ma l' ignorante che l' ode non sa negarlo e s' arrende, perchè è più comodo il disprezzare e condannare che esaminare. Che se taluno propone, per evitare i supposti pericolosi effluvj, di adoperar la torba in aperta e solitaria campagna, ove a nessuno apporti incomodo o nocumento, il detrattore della torba, mette sott' occhio una palude che ivi si forma più pestifera che non era quella d' Averno un tempo; e che da questa gli effluvj su tutto il paese diramerannosi a distruggere la vegetazione e la vita degli animali come delle piante. Io ciò dico, perchè più d' una volta oppormelo intesi; nè si volle ch' io dicessi essere le torbiere già naturalmente in terreno paludoso, e quindi umida e guasta forse esserne l' aria: farsi generalmente, col cavare la torba, de' canali, che le acque stagnanti derivano e allontanano; essere la torba un composto di vegetabili con ben poca parte di sostanze animali, e meno ancora di sostanze minerali, trovarvisi talora delle parti bituminose e resinose, che l' aria purificano anzichè viziarla; effetto sicuro del fuoco, ove la torba in fornaci o forni s' abbrucia, essere il purgamento dell' atmosfera, cosicchè i Lionesi chiesero che il medesimo carbone di terra trasportato fosse dalla miniera ad essere purgato in quell' angolo della città loro ove men pura per le acque stagnanti è l' aria. Tutte queste ragioni, che pur convincere devono ogni uomo sensato, non erano ascoltate da coloro che compiaceansi a trovare nello scavamento, e più nell' abbruciamento della torba, la cagione delle malattie epidemiche, delle epizootie, delle nebbie che indebolivano la vegetazione, e degl' insetti che la rodevano.

58. Il dire al volgo (e per volgo qui intendo ogni ceto di persone o poco o male instruite) che il popolo è soggetto ad essere indotto in errore da chi ha interesse d' ingannarlo, riputavasi un insulto all' umanità e a nostri maggiori, e vano era l' apportare cento esempi d' errori popolari *(a)*. Sperai indarno di convincere cogli esempj dell' uso che sen fa non solo nell' Olanda, ove non altro che torba si abbrucia, nella Francia occidentale, e nella stessa metropoli, ove oggidì, anche nella domestica economia, più torba che legna consumasi, e di alcuni paesi d' Italia ove l' uso della torba s' è introdotto e si accresce, come nella parte II ho indicato. Volli pur citare gli sperimenti fatti presso di noi; ma anzichè ricavarne argomento del vantaggioso uso che sen potrebbe fare, sen' argomentava, che, non seguendosene qui l' esempio, aver si dee ragio-

---

(a) Eccone alcuni. Fra noi s' è creduto lungamente che i filugelli non facessero buona riuscita se non teneansi quasi ermeticamente chiusi; che sulle zattere non si potessero portare con sicurezza le mercanzie; che non si potesse levare il fumo ai cammini se non coll' ampliare l imboccatura della canna del fumajolo, o coll' introdurre aria fredda nella stanza; che lo sbiancamento delle tele nocesse alla vegetazione; che l' innesto del vajuolo umano, e molto più che l' innesto del Vaccino preparasse all' umana salute gran detrimento; che il suono delle campane allontanasse le grandini e i fulmini; che i conduttori elettrici accrescessero di questi il pericolo anzichè toglierlo ec. ec. Erano errori, ma erano riputati verità, e alcuni il sono ancora.

ne di così operare. Con chi così ragiona vano è il disputare. Forse quando più comune sarà la torba, quando i tentativi si moltiplicheranno, quando alcuno avrà il coraggio e'l buon senso di adoperarla in fornaci di cui possa disporre, troverannosi degli imitatori, ma finora, quantunque numerose, estese, e sparse per tutti gli angoli del nostro paese sieno le torbiere, la torba bruciabile e preparata non trovasi, per cagione principalmente de' pregiudizj, degli errori, e forse degl'inganni.

59. Taluno sperimenterebbela se l'avesse comoda, e forse l'ha ne' proprj fondi o ne' fondi pubblici che suoi può fare: ma come trovarla? Se la torba è in un fondo, ben facile e ben poco dispendiosa n'è la ricerca. Deve nascere sospetto che vi sia se il fondo è, od è stato paludoso al di là della memoria d' uomini; o se il fondo è soffice, e lungi da torrenti o fiumi ghiajosi o arenosi che 'l ricoprano sovente di sassi e ghiaie. Tali sono le vallate de' gran fiumi e gli abbandonati loro letti, i contorni de' laghi, e le alte valli che dopo d' essere state laghi lungo tempo, divennero paludi e quindi prati. Molti de' nostri campi, dice il sig. *Poiret*, e possiamo dirlo anche noi, furon laghi, e indi torbiere prima d'esser campi o prati. Il sospetto dell' esistenza della torba facilmente si verifica, poichè generalmente questa è a poca profondità, e umido e molle è il terreno che la copre. Che se credasi di poterne trovare ad una profondità maggiore, o trovarne più strati, come non di rado avviene, allora adoprasi lo scandaglio o sia trivellone se si può avere, e ove questo non s' abbia vi si supplisce con acuta pertica di duro legno, in cui

fannosi degli intagli, ne' quali, quando dopo averla immersa alla profondità che vuolsi esplorare, si ritrae in alto, trovasi la sotterranea materia; ed è facil cosa il conoscere se è torba, e qual n' è la qualità. Se resta dubbio su di ciò si fa seccare, e si tenta d' accenderla.

60. Lo scavare la torba è un operazione che sa fare chiunque maneggia la vanga; ma lo scavarla con economia di tempo e di fatica richiede della diligenza e degli opportuni utensili. Quantunque molte qualità di torba annoverino coloro che ne trattano, io a quattro sole specie le ridurrò; cioè 1°. alla torba compatta formata di radici e d' erbe con poca terra; e questa è la più comune e frequente: 2°. alla torba i cui componenti non siano facilmente riconoscibili, e sia affatto molle e quasi sciolta nell' acqua, e questa non di rado trovasi alle sponde de' laghi e degli stagni: 3°. alla torba simile a terra nera formata di particelle tenui con nessuno o pochi indizj di corpi organici, ma consistente; e questa e rara e trovasi lungi dalle acque: 4°. alla torba compatta formata di tronchi e rami d' alberi con bitume e terra bituminosa, e questa è più rara ancora fra noi. Gli stromenti che abbisognano sono una vanga o pala, e meglio sarà se questa abbia un' aletta, come vedesi nella figura *(a)*; e una barella, ovvero un carretto a ruota. D' altri strumenti, che alcune circostanze esigono, parleremo poi.

61. In due modi principalmente si cava la torba della prima qualità: uno è quello ch' è stato descritto dal ch. *Pini*, e reso ancor più chiaro colla tavola in-

---

(a) Tav. II. fig. 1.

cisa. Consiste questo in mettere allo scoperto il piano torboso, levandone la terra vegetabile; indi con tagli perpendicolari fatti colla vanga pel lungo e pel largo dividerlo in modo che ogni pezzo abbia all' incirca la larghezza, e la lunghezza d' un mattone; con taglio orizzontale alla profondità di tre in quattro pollici separarne ogni pezzo e per così dire ogni quadrello o mattone, e postolo sulla barella portarlo ove messo in piedi riceva l' aria internamente da ogni lato, e s' asciughi, facendone muricciolo o pigna, come appunto co' mattoni si fa comunemente.

62. L'altro metodo è quello che io ho veduto adoperarsi nella torbiera di Fagania. Scoperta che sia la torba, e fatta la prima fossa, colla vanga alata sen' estrae perpendicolarmente un parallelepipedo di quattro in cinque pollici di grossezza, e lungo mezzo braccio milanese o un piede parigino. In queste misure, come ognuno ben immagina, non è punto necessaria l'esattezza. Indi sen' estrae un vicino, e così si prosiegue. Ognun vede che dei quattro lati del parallelepipedo, due sono allo scoperto, e due tagliansi colla vanga in un sol colpo. Questi pezzi appena estratti posansi su una barella e portansi in parte la più vicina ed opportuna, ove stendonsi al sole. All' indomani, se il tempo va asciutto e caldo, que' pezzi, fatti già maneggevoli, mettonsi staccati fra loro, e l' uno in croce sull' altro a due a due in modo che fra essi corra l' aria quanto è possibile: e si fa così una pigna di tredici, solitario essendo il più alto *(a)*. Dopo pochi giorni,

(a) Ivi fig. 2.

più o meno a misura del caldo e dell' asciutto, portansi al Torbajo, di cui parlerò al num. 67. Se non sono ben asciutti i pezzi che toccan terra, nuove pigne o mucchietti con essi si formano.

63. E' da notarsi una importante differenza che passa fra i mattoni d' argilla e quei di torba. I primi da una forte e prolungata pioggia vengono disfatti; ma non così i secondi: il che nasce dalla diversa indole delle due sostanze; essendo l' argilla composta di fine particelle aderenti per l' attrazione del contatto; mentre la torba, generalmente composta di fibre, radicette, e foglie lunghe quali sogliono averle le erbe palustri, deve la consistenza sua anche alla propria formazione, e quasi direi alla tessitura. Più cura però a questo riguardo richiede la torba della seconda e terza qualità; e dirò più sotto come possa agevolmente dalla pioggia difendersi. Men cura d' ogni altra richiede la torba formata di tronchi, poichè questi, che generalmente come molle argilla agevolmente si tagliano colla vanga quando sono entro terra sepolti, presto acquistano la forma e la consistenza legnosa. Talora tai legni così anneriscono e s' indurano, come ho pur veduto in alcuni tronchi della torbiera d' Angera, che usarne conviene come di legname d' opera ed intarsiatura, anzichè come di legna da fuoco.

64. La torba è sempre più o meno bagnata, più o meno soffice. Comprimendola si ha il doppio vantaggio di spogliarla d' una parte d' umido, e di renderla compatta. Il più semplice modo di comprimerla si è di metterla su una tavola, o sulla mentovata barella alquanto inclinata, e messavi sopra una uguale o

più larga tavola, co' piedi calcarla. Alcuni hanno per quest' oggetto piccolo e semplice strettojo portatile descritto dal ch. *Pini* che ne da la figura. Dove si può avere a portata uno de' grandi torchj che presso di noi s' adoperano pe' vini, se ne stringe a un tratto una grandissima quantità, framezzando delle tavole agli strati di torba, che poscia tagliansi in mattoni a parallelipipedi.

65. Cure maggiori, e maggior lavoro esige la torba della seconda specie; quella cioè ch' è molle e quasi sciolta nell' acqua. Questa torba cavasi per lo più sott' acqua, e poco lavoro si farebbe colla vanga. S'adopera allora (e così fassi in Olanda) una specie di rete o fitto crivello, ovvero una zappa orizzontale col manico perpendicolare, che la torba fangosa dall' acqua estrae, quale a un dipresso da noi s' usa per trarre di sott' acqua l' arena. Mettesi l' estratta torba entro una cassa traforata, e si comprime finchè, perduta l' acqua soverchia, acquisti della consistenza. Comprimesi con una tavoletta quadrilunga che sotto i piedi s' attacca. Quando la torba è maneggevole, mettesi in forme di legno o di ferro, e colle mani, o col mentovato piccolo strettojo si preme. I mattoni che ne risultano si fanno seccare nel modo indicato.

66. Parlammo già (num. 63) della pioggia, la quale non di rado sopravviene alla torba che sta seccandosi. Se non n' è disfatta, com' avvien de' mattoni, si perde almeno tutto il vantaggio dello asciugamento ottenuto in più giorni di sole e di vento. Per riparare a questo inconveniente non è nè difficile nè molto dispendioso il formare in una ben esposta parte della

torbiera tal edifizio ove la torba s' asciughi e sia difesa dall' acqua *(a)*. Mettansi i pezzi su pertiche o *cantinelle* fra lor distanti da tre in quattro once (da 6 in 7 pollici parigini), sostenute a varj piani per mezzo di travi perpendicolari, e travicelli traversi. I piani distino fra loro quanto basta perchè vi si possano maneggiare e rivolgere i pezzi di torba: siano larghi quanto col braccio giunger si possa alla metà; e siano in tal numero che un uomo giunga comodamente col braccio al più alto. Sopra questo un'altro piano vi sia, su cui stendansi delle stuoje assicurate all' uopo con cordicelle contro i venti. Ove sono torbiere vi sono generalmente i materiali per fare stuoje di foglie di carici e di giunchi; e 'l tesserle è facilissima cosa. Anzi nemmeno v' è bisogno di tesserle, bastando legare a mazzi per un capo le lunghe foglie delle erbe palustri, e disporle come le tegole: ogni pecorajo e bifolco sa farsi un mantello di queste foglie che da ogni acqua il difenda. Il farvi un piccol tetto di tavole non sarebbe altronde di grave spesa. La lunghezza di questo semplicissimo edifizio sia adattata al luogo, e proporzionata alla quantità della torba che vuolsi seccare. Chi vuole averne un' idea fra noi vegga la mentovata Conceria del sig. Rive, ove fannosi così seccare le *formagelle*, avanzo del tanno.

67. Quando la torba è secca bisogna conservarla in luogo ventilato, ben coperto e ben difeso. Ove il legname d'opera non è molto caro fassi un magazzino, il cui tetto sia sostenuto da varj pilastri, e che abbia delle paliz-

---

(a) Vedasene la figura nella tav. II. fig. 3.

zate di travicelli in vece di pareti. Possono queste formarsi co' mattoni collocando uno strato di mattoni convergenti fra loro ad angoli retti sopra strato orizzontale, e così continuando sino alla cima; il che si fa in alcune cascine per difendere il fieno, la paglia, e le legna dal fuoco e da furti *(a)*. Il mentovato Conte Asquino a mattoni diritti ha sostituito de' mattoni incurvati a semicircolo come grosse e corte tegole, poste l'una sull'altra in maniera che una colle estremità posa sulla parte convessa di due sottoposte, ed ha così un forte muro che lascia all'aria tutto il passaggio *(b)*. Egli vuole inoltre che la sua torba riceva aria anche per di sotto: quindi il suo torbajo, che così egli chiama il serbatojo della torba, ha un suolo formato di pertiche sostenute da travicelli: il suolo è alto da terra circa tre piedi, e le pertiche sono fra loro distanti circa due pollici. Su questo suolo si getta la torba secca alla rinfusa; e i frammenti e la polvere che cadono fra le pertiche, raccolgonsi con legno o ferro adunco, e servono a formare nella vigna que' mucchietti, di cui parlai al num. 50.

68. Venghiam' ora al modo d' adoperare la torba ben secca e stagionata. In qualunque modo essa s'accenda, e per qualunque uso, ha sempre bisogno di molt' aria per ardere. Quindi sui cammini, sui fornelli, nelle fornaci, ne' forni è necessario che siavi una graticola di ferro o di sasso, o anche di mattoni secondo le circostanze, onde l' aria passi dal di sotto fra

---

(a) Fig. 4.
(b) Fig. 5.

mezzo alla torba. E' necessario altresì che siavi un cenerario, ossia luogo in cui cader ne possa comodamente la cenere, che suol' essere molta, e di cui, collo scuotere di tempo in tempo la torba che arde, conviene spogliarla per aver vivo fuoco. Convien pure aver mezzo di chiudere tanto la bocca per cui la torba introducesi, quanto il cenerario stesso, per diminuire al bisogno la soverchia attività del fuoco. E poichè talora il fumo della torba incomoda i vicini nelle cui case è portato, per ovviare quanto si può a quest' incomodo, giova tenere assai sollevati sopra del tetto i fumajuoli, il che servirà, non solo a far sì che il vento sciolga e dissipi più facilmente il fumo, ma anche a liberar da questo i sottoposti cammini o fornelli. Ove adoperar si voglia la torba ne' cammini delle stanze, esigono pur questi una graticola, in forma di gabbia, alta alcuni pollici dal piano tanto che si possa la torba per di sotto agevolmente accendere, ed estraerne quindi la cenere. Gioverà molto, non tanto per l' economia del calore quanto per evitare il fumo, e per avere una corrente d' aria che soffi nel fuoco, formare i cammini col metodo del mentovato sig. Conte di *Rumford*; metodo ora notissimo e adottato fra noi *(a)*, Veggo pure col fatto esser all' uso della torba opportunissimo il cammino francliniano.

69. Nelle fornaci di calcina e mattoni deve pur la torba, ben secca e stagionata, collocarsi poco dentro la bocca in modo che resti su una specie di graticola

---

(a) Vedasene la descrizione e la figura anche negli *Opuscoli scelti.* tom. XIX. pag. 397.

fatta di ferro fuso se aver si può agevolmente, ovvero di sassi refrattarj, detti sassi da fornaci, che fra noi non mancano. Il calorico che la torba manda, avvivato e portato dall' aria, è spinto entro la fornace con violenza, specialmente dopo che il primo calore, prodotto da aride legna o fascine, ha rarefatto l' interno ambiente. Ben si sa che la fiamma della torba non s' inalza quanto quella della legna; ma il calorico che manda è maggiore; e questo resta così più immediatamente applicato alle sostanze su cui deve agire. Per avere una giusta idea dell' azione del fuoco spinto dall' aria orizzontalmente in una fornace, alla maniera de' noti forni di riverbero, legga ciò che scrivono *Franklin* e'l Co. di *Rumford* sulle teorie de' cammini; e vegga i forni ben fatti de' Vasaj, e nominatamente quelli del mentovato sig. *Muller*. Alla graticola, nelle fornaci comuni che non l' hanno, suppliscono in certo modo le legna ben accese su cui la torba si getta, e fa di quelle gran risparmio, come dimostrò il Co: *Asquino* ne' primi suoi sperimenti; ma dispongansi le legna in modo che sotto di esse passi l' aria, ed estrarre sen possa la cenere e la scoria. Che se una bocca non basti a mandare il calore in tutta la massa contenuta nella fornace, esse si moltiplicano. Una fornace di Fagania, di cui mi fu pur dato il disegno dall' ottimo Proprietario, n' avea quattro; e dissemi il già lodato sig. di *Faujas* che le fornaci a mattoni in Olanda hanno sino a 18 bocche, nelle quali gli uomini non cessano mai di gettar torba, finchè non s' avveggono a noti indizj che la fornaciata è cotta.

70. Ne' forni da pane tener si deve il metodo te-

nuto a Lione col carbon di terra. La R. Accademia d' Agricoltura ed arti di quella città, veggendo la penuria che v' era di legna, mentre un abbondante miniera di carbon fossile cavavasi ne' contorni, ed osservando che i fornai consumavano più legna che tutte le altre arti, propose pel 1784 un premio a chi sapeva indicare il modo di scaldare il forno col carbon di terra senza che il pane ne acquistasse cattiva qualità. Sapeasi che all' Accademia R. di Berlino era stato proposto un forno scaldato da altro forno esteriore; cosa soverchiamente dispendiosa: che un forno di riverbero avea proposto il sig. *Venel*; e che in Linguadocca metteasi il carbon di terra ad ardere sull' atrio de' piccoli forni che riusciano bensì economici, ed atti a sostituire il carbon di terra alle legna, ma troppo piccoli erano per somministrare il pane a popolatissima città. Il sig. *Lanoix* Speziale propose d' adoperare del carbone purgato; il che facea poca economia: altri forni proposero d' assai dispendiosa costruzione, ma il sig. *S. Brun* propose un forno comune colla sola attenzione che in vece di mettere il carbone ad ardere sul pavimento del forno, lo mettea su certe graticole, le quali quando il forno era caldo a dovere, venian levate per collocarvi il pane all' usato modo. Il pane si fè cuocere nel forno così riscaldato, e riuscì uguale a quello che coceasi colle legna, senz' aver contratto il menomo cattivo odore, sebbene altronde puzzolentissimo fosse quel carbone. La sperienza gli mostrò che bisognava disporre il carbone frammezzato di qualche pezzo di legno perchè meglio s' accendesse, e anche di qualche asta di ferro perchè non restasse soffocato; e per ultimo nel levare dal forno le graticole bisognava avere degli adattati spegnitoi, perchè poi non continuasse a consumarsi il carbone inutilmente. Serviano al tempo stesso questi spegnitoi, ch' erano vasi in cui il carbone, esattamente chiudendoli, soffocavasi, a formarne del carbone più o meno purgato. Ognuno sente che allo stesso modo, e meglio ancora, si può scaldare il forno colla torba; e che spegnendola nell' indicata guisa sen' avrà la torba abbrustolita e incarbonita di cui parlerò quì sotto. Così io or l' una or l' altra ottengo colla torba d'Angera che giornalmente accendo nel cammino di Franklin, e soffoco in chiusa pentola.

71. Ma sia pur vero che la torba *cruda*, cioè senz' altra preparazione che quella di farla seccare, dia, e dia inevitabilmente odore troppo spiacevole per essere adoperata nella domestica economia: egli è vero altresì e noto che in più modi di tal odore la torba si priva. Essa per tal oggetto si abbrustolisce, s' incarbonisce, e s' impasta colla calce. Vedemmo a principio, secondo l' analisi fatta dal ch. *Pini* e da altri, che la torba ancorchè seccata contiene molta parte acqnosa, dell' alcali volatile e dell' olio empireumatico in parte liquido e in parte denso. L' umidità per se non puzza, ma serve di veicolo agli altri effluvj di cattiv' odore. Il fuoco dissipa questa umidità, e presto anche scaccia dalla torba l' alcali e l' olio più liquido: se poi il fuoco si continua ne scaccia anche l' olio più denso. Nel primo caso diviene torba *abbrustolita*, nel secondo *incarbonita*. In amendue i casi perde una parte della sostanza combustibile che la torba cruda contiene, e più ne perde nel divenir carbone. Nella tor-

ba abbrustolita l'olio denso rimastovi dar può ancora un residuo di mal odore; ma, ardendo la torba con fiamma viva e senza fumo, l'olio denso si dissipa, e l'odore generalmente non sentesi; nel secondo caso, ove sia incarbonita a dovere, non ha nè cattivo odore, nè i troppo noti inconvenienti del carbon di legna. La combinazione della calce colla torba distrugge o neutralizza le particelle dalle quali il cattivo odore risulta.

72. L'abbrustolimento della torba non è che un imperfetto incarbonimento: quindi è che per abbrustolire la torba in grande devono farsi i medesimi preparativi e le stesse operazioni che fannosi per incarbonirla; cioè richiedonsi a un dipresso quelle operazioni colle quali si fa carbone colle legna. E poichè volendo incarbonire la torba convien prendere de' carbonaj pratici, è inutile l'insegnar qui il metodo che tiensi comunemente. Solo deve avvertirsi che necessarj sono alla torba più che alle legna gli spiragli, e specialmente gl' inferiori; che nuovi spiragli devono farsi da quel lato ove dalla mancanza del fumo vedesi che meno si estende il fuoco; e ove trovasi che arda troppo vivamente, devono i fatti spiragli chiudersi. Per ottenere la torba ben incarbonita deve spegnersi il fuoco nella maniera che indicherò, quando sarà cessato ogni fumo: per averla soltanto abbrustolita si spegne quando al fumo oscuro e denso succede il fumo bianco. Secondo i diversi usi ai quali la torba abbrustolita destinasi si danno diversi gradi d'abbrustolimento, lasciandola più o meno ardere nella carbonaja. Terminata l'operazione non devesi, come si fa col carbon di legna, lasciare che il fuoco da se stesso, o col

solo chiuderne gli spiragli, si spegna; poichè correrebbesi rischio di vedere tutta la torba ridotta in cenere; ma devesi a strato a strato coprire con fina arena, la qual suole generalmente trovarsi sotto o presso le torbiere; e d' uopo è star ben attento per vedere se in alcune parti fuma ancora per coprirla maggiormente, e se bisogna anche spegnerla coll' acqua. Se all' arena o terra con cui fu coperta la torba restano frammisti molti frammenti di carbone, quella si crivella, e questi tengon luogo della carbonella o *carbonina*.

73. Un altro metodo or tiensi in alcuni paesi della Francia *(a)* per carbonizzare la torba. Si costruisce di muro un forno cilindrico isolato con molti pertugj all' intorno e a varie altezze, e aperto superiormente. Si riempie di torba ben asciutta mettendovi di sotto uno strato di fascine per accenderla. Sopra la torba si colloca un cappello circolare di ferro o d' altra sostanza non combustibile, che posi sulla torba, e sia d' un diametro un pò minore che l' interno del forno. Il vuoto che rimane fra 'l cappello e 'l muro all' intorno chiudesi a dovere con una corona di terra. Cogli spiragli laterali sen regola il fuoco acciò per tutto portisi ugualmente. Siccome la torba diminuisce della metà del suo volume nell' incarbonirsi, così il cappello che su di essa posa deve abbassarsi, il che produce superiormente delle screpolature e aperture, alle quali conviene sollecitamente riparare con nuova terra, affinchè la torba non diventi cenere anzichè carbone. Io

(a) Vedi *Journ. des Mines*. Num. 63. *Opuscoli scelti*. tom. XXII. pag. 346.

ho provato a far incarbonir la torba alla Regia raffinazione de' nitri in Milano nel luogo e nel modo con cui s' incarboniscono le legna per farne il carbone con cui si compone la polvere da schioppo; cioè entro fossa quadrata ove fu chiusa (quando la sostanza combustibile fu ben accesa) con lastra di ferro ricoperta di terra, affin di togliere ogni comunicazione all' aria: il carbone è riuscito leggiero e lucido; e ben arse poi senza il menomo odore.

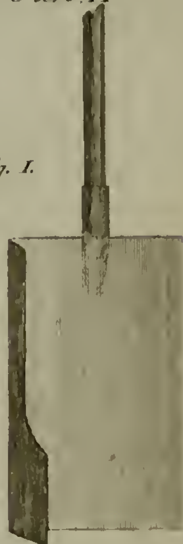
74. Un metodo più economico, perchè è più breve, meno costa, e non priva punto la torba della sostanza combustibile, m' è stato ultimamente indicato dal già lodato sig. *Faujas de S. Fonds*. Eccolo. Quando la torba è molle ancora, e specialmente quando è si molle da doverla mettere nelle forme, delle quali parlossi al num. 65 per darle una consistenza, s' impasta con acqua di calce, si comprime e si lascia seccare coll' usato metodo. Allora abbruciandola anche negli aperti cammini, tarda bensì un pò più ad accendersi, ma arde e riscalda senza mandare il menomo cattivo odore. Io ne ho fatto lo sperimento in piccolo, ed ho trovata vera l' asserzione di quell' illustre Geologo.

Conclusione

Molte sono le Torbiere nostre per natura e per circostanze locali generalmente adoperabili qual sostanza combustibile, e talora in altri usi economici: e sovente poste in tali situazioni da valersene comodamente, o farne facil trasporto. Grandi, moltiplici, certi e facili ad ottenersi sono i vantaggi che derivar ne possono alla pubblica e privata economia, adoperando la torba specialmente nelle manifatture ed arti che di combustibile fanno il maggior consumo. Facili sono i mezzi di che gli uomini si servono o servir si possono per trovare la torba, scavarla, prepararla, conservarla, valersene ne' varj usi e nel miglior modo, e per ovviare a quanto può allontanarli dall' adoperarla. Di tutto questo io credo d' aver date sufficienti prove in questo mio ragionamento. Con tutto ciò non lusingomi d' aver fatta cosa che sia per essere effettivamente vantaggiosa fino a che la pubblica, o la privata beneficenza non dimostra con moltiplici e generosi esempi che la torba può con molta utilità sostituirsi alle legna, e non mette quella a portata di chi ha desiderio o bisogno d'economizzare sul combustibile. Convien confessare che presso di noi i premj offerti, e le istruzioni pubbliche non ebbero l' effetto che se n' attendea. Speriamo che l' esempio l' otterrà.


MAPPA DELLE TORBIERE
DEL DIPART D' OLONA
E DE' LIMITROFI
T indica una Torbiera
CF Carbon Fossile
I numeri indicano i paesi come vedesi nell' opposto foglio
27
46
Briga
Gondo
Domo
Creola
Lago Maggiore
Lugano
Morbegno
Val Tellina
Sondrio
Porchiavo
Lago di Como
COMO
Oggiono
Varese
Angera
Arona
BERGAMO
Biella
Ivrea
NOVARA
MILANO
Vercelli
Vigevano
Mortara
Pavia
Lodi
Crema
Pizzighettone
Codogno
Stradella
Olona
Ticino
Sesia
Adda
Serio
Oglio
Po
N
S

Fig. I.



Bocca della Fornace di Fagania

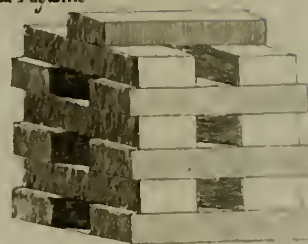


Fig. II.

Fig. III.

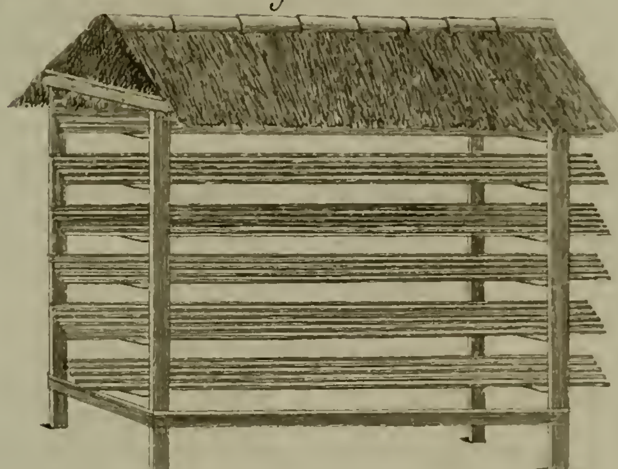


Fig. IV.

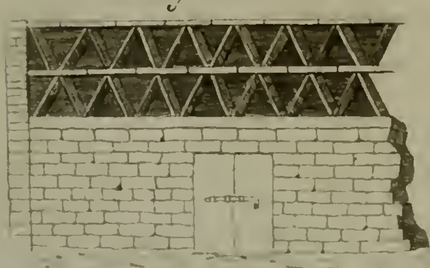
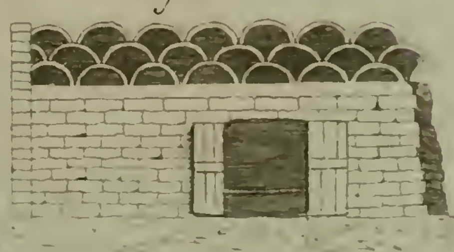


Fig. V.



INDICE NUMERICO DE' PAESI SEGNATI NELLA MAPPA CON NUMERI.

N. B. I Numeri progrediscono da sinistra a destra; e la linea indica quando si torna a sinistra.

1 Cambiò
2 Broni
3 Castel s. Gio:

4 Mede
5 Cairo
6 s. Nazzaro
7 Torre de'Negri
8 Guardamiglio

9 Sartirana
10 Lomello
11 Albignola
12 Sommo
13 Acqua-negra

14 Marzo
15 Valeggio
16 Groppello
17 Dorno
18 Gera
19 Belgioioso
20 Corteolona
21 Orio
22 Cas. Pusterlengo
23 Borghetto
24 Zurlesco
25 Castiglione
26 Casal Buttano

27 Robbio
28 Morsella
29 Bereguardo
30 Villanterio
31 s. Angelo
32 Muzza Piacent.
33 Castel Leone
34 Soresina
35 Quinzano

36 Borgo Vercelli
37 Olfengo
38 Bolducco
39 Casorate
40 Binasco
41 Giussago
42 Landriano
43 Locate
44 Castelletto
45 Romanengo
46 Soncino
47 Orcinovi

48 Biandrate
49 Buzzoletto
50 Abbiate grasso
51 Gagiano
52 Movorasca
53 Meregnano
54 Paullo
55 Spino
56 Pandino

57 Trecate
58 Galliate
59 Buffalora
60 Sedriano
61 Mezzate
62 Settala

63 Fara
64 Mommo
65 Cartano
66 Nerviano
67 Ro
68 Bollate
69 Balsamo
70 Cassina Pecchia
71 Gorgonzola
72 Cassano
73 Terviglio
74 Caravagio
75 Mozzanica

76 Gheme
77 Oleggio
78 Maggia
79 Busto Arsicio
80 Legnano
81 Saronno
82 Desio
83 Monza
84 Vimercato
85 Trezzo
86 Verdello
87 Martinengo
88 Calcio
89 Chiari
90 Palazzuolo
91 Bettola

92 Romagnano
93 Borgo Ticino
94 Somma
95 Gallarate
96 Cas. delle corde
97 Gerenzano
98 Berlassina
99 Agliate
100 Merate
101 Ponte s. Pietro
102 Albano
103 Trescorio

104 Grignasco
105 Borgo Manero
106 Borgo Sesia
107 Quarona
108 Gozzano
109 Sesto Calende
110 Tradate
111 Appiano
112 Fino
113 Canturio
114 Nibbionno
115 Brivio
116 Caprino
117 Almeno

118 Scopello
119 Moglia
120 Buccioletto
121 Varallo
122 Vocca
123 Orta
124 Agera
125 Lisanza
126 Lomnago
127 Varese
128 Olgiate
129 Alferio
130 Incino
131 Olginate
132 Valsecca
133 Zogno
134 Gandino
135 Endine

136 Alagna
137 Rima
138 Fobello
139 Rimella
140 Campello
141 Fornero
142 Omegna
143 Belgirate
144 Leginno
145 Cuvio
146 Arcisate
147 Gana
148 Mendriso
149 Codilago
150 Blevio
151 Pliniana
152 Argegno
153 Nesso
154 Tremezzo
155 Onno
156 Lecco
157 S. Gio: Bianco
158 Clusone

159 Macugnaga
160 Banio
161 Feriolo
162 Baveno
163 Pallanza
164 Laveno
165 Valtorta
166 Cultura
167 Ronco

168 Antrona
169 Premosello
170 Ornavasso
171 Intra
172 Lavena
173 Beola
174 Pto. di V. Travaglia
175 Canobio
176 Luino
177 Albogasio
178 Porlezza
179 Agrone
180 Menagio
181 Bellano
182 Premana
183 Girola
184 Redola
185 Denari

186 Bugnanco
187 Preglia
188 Masera
189 Malesco
190 Cursolo
191 Macagno
192 Bassano
193 Vegnio
194 Dervio
195 Colico
196 Delebio
197 Tarteno
198 Valle
199 Aprica

200 Isella
201 Crodo
202 Annessa
203 Bellinzona
204 Damaso
205 Ardenno
206 Teglio
207 Caiolo
208 Ambria

209 Sempione
210 Ospizio
211 Premia
212 Fopiano
213 Andorval
214 S. Lorenzo
215 Vigazzolo
216 Riva
217 Màsino
218 Sondrio
219 Ponte
220 S. Giacomo
221 Cardone
222 Chiavenna

INDICE ALFABETICO DE' PAESI SEGNATI NELLA MAPPA CON NUMERI.

Abbiate grasso	50
Acqua-negra	13
Agliate	99
Agrone	179
Alagna	136
Albano	102
Albignola	11
Albogasio	177
Almeno	117
Alserio	129
Ambria	208
Andorval	213
s. Angelo	31
Agera	124
Annessa	202
Antrona	168
Appiano	111
Aprica	199
Arcisate	146
Ardenno	205
Argegno	152
Balsamo	69
Banio	160
Berlassina	98
Bassano	192
Baveno	162
Belgioioso	19
Belgirate	143
Bellano	181
Bellinzona	203
Beola	173
Bereguardo	29
Bettola	91
Biandrate	48
Binasco	40
Blevio	150
Bolducco	38
Bollate	68
Borghetto	23
Borgo Manero	105
Borgo Sesia	106
Borgo Ticino	93
Borgo Vercelli	36
Brivio	115
Broni	2
Buccioletto	120
Buffalora	59
Bugnanco	186
Busto Arsicio	79
Buzzoletto	49
Caiolo	207
Cairo	5
Calcio	88
Cambiò	1
Campello	140
Canobio	175
Canturio	113
Caprino	116
Caravagio	74
Cardone	221
Casal Buttano	26
Cas. Pusterlengo	22
Casorate	39
Cassano	72
Cas. delle corde	96
Cassina Pecchia	70
Cartano	65
Castel Leone	33
Castelletto	44
Castel s. Gio:	3
Castiglione	25
Chiari	89
Chiavenna	222
Clusone	158
Codilago	149
Colico	195
Corteolona	20
Crodo	201
Cultura	166
Cursolo	190
Cuvio	145
Delebio	196
Denari	185
Dervio	194
Desio	82
Domaso	204
Dorno	17
Endine	135
Fara	63
Feriolo	161
Fino	112
Fobello	138
Fopiano	212
Fornero	141
Gagiano	51
Gallarate	95
Galliate	58
Gana	147
Gandino	134
Gera	18
Gerenzano	97
Gheme	76
S. Giacomo	220
S. Gio: Bianco	157
Girola	183
Giussago	41
Gorgonzola	71
Gozzano	108
Grignasco	104
Groppello	16
Guardamiglio	8
Incino	130
Intra	171
Isella	200
Landriano	42
Lavena	172
Laveno	164
Lecco	156
Leginno	144
Legnano	80
Lisanza	125
Locate	43
Lomello	10
Lomnago	126
S. Lorenzo	214
Luino	176
Macagno	191
Macugnaga	159
Maggia	78
Malesco	189
Martinengo	87
Marzo	14
Masera	188
Màsino	217
Mede	4
Menagio	180
Mendriso	148
Merate	100
Meregnano	53
Mezzate	61
Moglia	119
Mommo	64
Monza	83
Morsella	28
Movorasca	52
Mozzanica	75
Muzza Piacent.	32
s. Nazzaro	6
Nerviano	66
Nesso	153
Nibbionno	114
Oleggio	77
Olfengo	37
Olgiate	128
Olginate	131
Omegna	142
Onno	155
Orcinovi	47
Orio	21
Ornavasso	170
Orta	123
Ospizio	210
Palazzuolo	90
Pallanza	163
Pandino	56
Paullo	54
Pliniana	151
Ponte	219
Ponte s. Pietro	101
Porlezza	178
Pto. di V. Travaglia	174
Preglia	187
Premana	182
Premia	211
Premosello	169
Quarona	107
Quinzano	35
Redola	184
Rima	137
Rimella	139
Riva	216
Ro	67
Robbio	27
Romagnano	92
Romanengo	45
Ronco	167
Saronno	81
Sartirana	9
Scopello	118
Sedriano	60
Sempione	209
Sesto Calende	109
Settala	62
Somma	94
Sommo	12
Soncino	46
Sondrio	218
Soresina	34
Spino	55
Tarteno	197
Teglio	206
Torre de'Negri	7
Tradate	110
Trecate	57
Tremezzo	154
Trescorio	103
Terviglio	73
Trezzo	85
Valeggio	15
Valle	198
Valsecca	132
Valtorta	165
Varallo	122
Varese	127
Vegnio	193
Verdello	86
Vigazzolo	215
Villanterio	30
Vimercato	84
Vocca	121
Zogno	133
Zurlesco	24

OSSERVAZIONI

sulla medicina dei Morlacchi e sulla conformità del loro empirismo antichissimo coi più ricevuti principj della teoria medica

DI PIETRO MOSCATI

presentate ai 12 Novembre 1806.

. . . . . . artem experientia fecit
Exemplo monstrante viam . . . . . . *Manilio*

L' uomo egualmente che tutti gli animali è forzato dalla propria struttura a cercar d' evitare il dolore e procurarsi la sensazione del piacere: è questa una necessaria conseguenza dell' essere esso ugualmente degli animali fornito d' un sistema nerveo che per intrinseca non conosciuta proprietà riceve sensazion grata dal piacere, ingrata ed insopportabile dal dolore. Una tal proprietà fece divenir l' uomo medico *(1)* pria che ne

(1) Egl' è stato un errore d' alcuni sedicenti filosofi il dire che inutili riescono i medici perchè senza medici nelle popolazioni meno civilizzate non cresce la mortalità. Le incolte nazioni non hanno un ceto distinto di medici laureati, ma tutte hanno qualcuno che credesi possedere in qualche modo l' arte di guarire, della quale non può dirsi privo verun popolo anche selvaggio.

anche il pensasse, come nell' esercizio di altre facoltà fu a lui di stimolo e di maestro il bisogno. La civilizzazione figlia dello stato socievole e delle prerogative eminenti accoppiate nell' uomo ad una più felice organizzazione lo separò dagli altri animali in tutto ciò che risguarda l' avanzamento delle cognizioni, e per conseguenza dai più rozzi principj di ricercare a caso l' applicazione empirica di alcune sostanze per sollevarsi dal dolore salì, perchè perfettibile e ragionatore, a crearsi fra le altre arti e scienze anche quella della medicina qual' essa esiste nella colta Europa. Quei popoli per tanto che poco hanno progredito verso la civil società avranno anche avanzato poco nella medicina. Non è però che gli esili progressi fatti dall' empirismo ed i semplici modi di medicare prodotti dal bisogno e corretti dall' esperienza fra i popoli meno colti meritino il nostro scientifico disprezzo; è perciò appunto prezzo dell' opera il dare qualche saggio de' singolari loro metodi di cura presso i Morlacchi *(2)*.

Sono essi un popolo pochissimo civilizzato, che nelle arti e nelle scienze è per anche fanciullo, che ha costumi semplici, se non vogliam dire anche rozzi, un regime abitualmente frugale ed una medicina che molto si accosta ai primordj della nostr' arte. Limitati nelle loro cognizioni ad un ristretto numero di malattie, e privi di dottrine mediche il loro Ipocrate è ciò che o essi stessi osservarono a caso, od il padre, l' avolo, il

---

(2) Senza imbarazzarmi della provenienza o della definizione de' veri Morlacchi, per questi io intendo gli abitatori delle montagne tanto della Dalmazia quanto dell' Albania.

zio lasciarono alla memoria del figlio e del nipote. Io produrrò in questa memoria alcune osservazioni relative alla medicina dei Morlacchi, un buon numero delle quali ho avuto campo di notare io stesso sul luogo sebbene in un' epoca poco grata ad un osservatore. Coll' analisi dei metodi loro curativi, o coll' esame del loro empirismo cercherò di dedurre dei principj ragionati, e di provare come dessi sieno conformi ai principj ricevuti da' medici riputatissimi delle nazioni civilizzate.

Ned' io pretendo con ciò di compilare una materia medica ragionata, nè un trattato di medicina Morlacca; molto meno poi ho in animo di seguire in ciò l' esempio del Padre Lucca *(3)*. Non mi tratterrò quindi ad esporre tutti i medicamenti semplici e composti usati da varj Morlacchi, nè farò alcuna menzione dei rimedj superstiziosi i quali presso di loro hanno qualche valore, come quello per esempio per le *emorroidi* che consiste nel legare a qualche parte del corpo la radice di *burdana* recente fino a che sia essiccata, ed altri analoghi della classe degli amuleti; che se alcune volte sembrò che giovassero, ciò fu opera del tempo e della natura. E poichè i fatti costanti sono la pietra di paragone delle teorie e dei sistemi io crederò di far cosa grata se farò osservare ai medici, come l'ho osservato io stesso, che la medicina empirica di cotesto popolo poco meno che incolto è riducibile in molte parti ai principj della nostra medicina ragionata, salva la

(3) Vedi ciò che ne dice Lovrich nelle osservazioni aggiunte ai viaggi di Fortis. Venezia 1776.

differenza che necessariamente danno le abitudini, i temperamenti ed il clima.

Se il sistema Browniano consistesse solo in una materia medica contenente degli stimoli assai forti, ed in una nosologia di malattie di debolezza, si direbbe che i Morlacchi sono per natura loro Browniani. Di fatti la medicina universale dei Morlacchi dice anche Lovrich *(4)* è di cercare del buon vino e della Rakia, o sia acquavite per gli ammalati. Ma ed il sistema di *Brown* è ben lontano dal capire in tali limiti, ed i Morlacchi dal ragionare di debolezza e di stimolo; regolati da un cieco empirismo si curano impiegando spesse volte rimedj piuttosto veterinarj che medici: ma questi rimedj vincono non rade volte de' mali che noi stentiamo a guarire.

Prima di esporre alcuna cosa in dettaglio sulla medicina dei Morlacchi giova far osservare, che il temperamento di codesti individui è generalmente robusto, il metodo di vivere è, siccome ho detto di sopra, frugale e semplice, attivi d' altronde essi sono e laboriosi; in conseguenza di che devono andar soggetti piuttosto a malattie di debolezza che a malattie di vigore. Di più atteso il robusto temperamento dei Morlacchi possono questi resistere a' rimedj energici ed anche contrarj a quelli che parrebbe richiedere il loro stato morboso. Così in una malattia di vigore curandosi con sostanze eccitanti, dopo una scossa considerevole che ne deve sentire il sistema, finiscono con un dirotto sudore il quale cagiona salute. Sudore che io credo pro-

(4) Opera citata.

dotto da inattitudine della fibra nel reagire ad ulteriori stimoli, e salute che penso cagionata dalla cessazione della reazione allo stimolo, e dalla evacuazione ottenuta. Il loro ragionare in simili casi si è di *sudare il male*, ragionamento analogo a quello del popolo, e se vogliamo anche degli antichi medici i quali volevano che la *materia morbifica* si evacuasse per sudore, per orina, per secesso, ec.

Chirurgia de' Morlacchi.

La Chirurgia dei Morlacchi consiste in poche operazioni. Vi sono fra di loro persone che hanno fama di sapere rimettere le ossa slogate, e riattano le infrante. Grandi sforzi per distendere la muscolatura contratta ed allungarla, quiete del membro rimesso sono le principali cure in questa loro operazione, che il più delle volte riesce felice.

I Morlacchi, sebbene non conoscano l' uso delle lancette, cavano nondimeno sangue servendosi di certa specie di coltelli o meglio rasoj che loro servono a meraviglia. Usano anche di certo strumento fatto a foggia di dardo con punta piatta e ritondata, ch' io però non ho veduto, il quale sorte limitatamente da un cannello ed è spinto, quanto basti, da una funicella distesa dalla elasticità d' un arco compresso a modo di balestra. Se si prescinda dalla rozzezza dello strumento, esso fa l' uffizio medesimo ed è fondato sugli stessi principj che il *croch* usato principalmente in Germania per tagliar le coppette in un colpo solo, ed anche per cavar sangue: ed i Morlacchi ponno registrare il loro strumento come registrano il suo i nostri chirurghi volendolo applicare a persone di un tessuto adiposo più o meno denso.

Applicano i Morlacchi le sanguisughe alle parti enfiate e dolenti, ove il bisogno lo richiegga; e di questo modo di evacuazioni locali è pure uso inveterato tra i nostri medici riputatissimi, ed i principj sù quali è fondato un tal metodo sono conosciutissimi dalle persone dell'arte. Ai tagli ed alle scorticature di recente fatte applicano un'argilla ferruginea propria di alcuni luoghi del loro territorio; e questo modo semplice di medicare coteste leggieri ferite è pur coerente agli usi che ne fanno altri popoli Europei e molti chirurgi; nè da un tal metodo discordano i principj conosciuti sulla facoltà balsamica dell' ossido di ferro; imperciocchè si conosce la facolta corroborante, o come si dice astringente, di un tal medicamento capace d'arrestare le emorragie, di consolidar le parti rilasciate, di dar tono e vigore alla fibra. In oltre le argille ferruginose le quali sono della natura dei così detti *boli armeni*, per l' affinità che ha l' allumina verso l' acqua con cui forma un cemento, diventano adattatissime ad arrestare il sangue assorbendo del medesimo il siero e lasciando all' apertura del vase sanguigno la materia fibrosa ed albuminosa che vi forma un coagulo, e garantisce la parte offesa dal contatto dell' aria. A medicar poi altre ferite di maggior rilievo formano varie composizioni tra le quali un *balsamo* composto di tuorlo d' ovo, d' olio e di poco sale, della qual composizione, benchè sia strana in apparenza, non se ne possono negare i buoni effetti, ed i felici successi. Verisimilmente essa opera perchè impedisce il contatto dell' aria, e limita l' infiammazione della ferita al solo punto della cicatrizzazione, giacchè è pur nécessario che una infiammazione locale preceda la riproduzione ed unione di quelle fibre ch' erano rimaste tagliate, ed è parimente necessario che non sia eccessiva l' infiammazione perchè non ne succeda la cancrena, o non ne avvenga lo spasimo, e fors' anche un tetano. Di fatti i nostri chirurgi applicano gli emollienti in tali casi: egli mi è pur accaduto d' osservare effetti prontissimi in ferite anche profonde della istantanea applicazione subito dopo fatta la ferita del prezzemolo contuso mescolato a poco sal muriatico, purchè l' applicazione si faccia avanti che la ferita s' infiammi od abbia pel ritardo della medicatura cagionato lungo dolore.

Fuoco sacro

Per guarire dal *fuoco sacro*, o da quella specie di risipola detta anche *fuoco Sant' Antonio* adoperano i Morlacchi un rimedio la di cui azione dev' essere uguale a quella vantata, non è molto, del carbon vegetabile applicato alle piaghe croniche, a tumori di cattivo aspetto, ai flemmoni e risipole carbonose, a mortificazioni senz' ulcere ec. *(5)*. Pestano del frumento abbrustolito su d' una lastra di ferro sino a carbonizzazione: applicano la polvere carbonosa, la quale, per essere unita ad una porzione d'olio empireumatico, è untuosa, spalmandone la parte affetta, e lasciandovela so-

---

(5) Vedi. Considérations on the medical use and on the productions of factions airs ec. by Thomas Beddoes. Terza edizione. Bristol 1796.

pra tre giorni: rinnovano poscia la medicatura dopo aver lavata la parte ed al finire d' alcune di queste medicazioni essi guariscono assai felicemente. Ho veduto io stesso co' miei proprj occhi il profitto che ne ritraggono, ed ho veduto parimente che un tal metodo guarisce più sollecitamente che i metodi da noi adoperati in tali affezioni.

In mezzo agli esili progressi della medicina appo i Morlacchi si scorge adunque nel caso presente com' essi avrebbono potuto sulla base dell' empirismo insegnare ai dotti medici della colta Europa un medicamento nuovo, un rimedio efficace. Ciò ch' era antico medicamento per i Morlacchi riesce di data recente per noi, ove, solo da pochi anni, si è decantata la facoltà medicatrice del carbone, dopo le ricerche chimiche instituite da *Lowitz*, e dopo le mediche osservazioni di *Beddoes*, *Sandford*, *Iohn*, *Iohnston*, *Field*, *Odier*, *Maunoir* sopra d' una tale sostanza.

Quanto al modo di agire del carbone non sò se i Morlacchi che lo adoperano empiricamente sieno meno avanzati nelle cognizioni di que' medici che spiegar lo vollero con varie teorie. *Beddoes (6)* pretende che l' azione principale del carbone sia d' assorbire i miasmi ed i gaz pestiferi, e che in oltre agisca assorbendo l' ossigeno o sia come un deossigenante, o forse come antisettico. Quanto alla prima ipotesi, essa sembra destituita di probabilità se si rifletta, che il carbone giova applicato anche in que' casi ove si osserva esalazione di gas pestiferi, e d' altronde l' acido muriatico os-

(6) Opera citata.

sigenato che decompone cotesti principj o miasmi contagiosi non credo che recherebbe lo stesso sollievo, applicato in analoghe circostanze. Riguardo poi alla seconda, essa non comparisce meno improbabile riflettendo che il carbone non è atto ad assorbire l' ossigeno che in istato gazoso, o pure ch' è necessaria un'alta temperatura perchè l' ossigeno in qualunque stato esso sia si combini chimicamente al carbonio. A me pertanto non sembra inverisimile che l' azione del carbone esser possa analoga a quella dell'allume, dell'inchiostro ec. e di quei rimedj che si dicevano astringenti. La polvere di fatti che nel 1787 tanto si lodava dai giornalisti francesi, e che veniva spacciata da Mr. *Fainard* sotto il nome di polvere stiptica fu riconosciuta dal celebre *Odier* una polvere di carbone, ed usata, come tale, nei casi di emorragie, ec. *(7)*. Veniva raccomandata dall'autore anche nelle emorragie esterne e nei casi d' amputazioni ove si poteva temere un' eccessiva perdita di sangue. La facoltà del carbone riconosciuta secondo l' antico linguaggio medico come astringente sembra dunque analoga agli altri astringenti, de' quali pure è uso inveterato ne' casi di flemmoni incipienti e di risipole, e siccome non si sa fin'ora che nè l'allume nè l' estratto di saturno, ec. agiscano sottraendo l' ossigeno, o assorbendo i miasmi, verisimilmente anche il carbone agirà in tutt' altra foggia. Del rimanente converremo di buona fede che resta per anche avvolta nell' oscurità delle ipotesi la maniera d' agire di molti medicamenti esteriormente applicati.

---

(7) Vedi. Bibl. Britannique. Volume sesto delle scienze ed arti.

MEDICINA INTERNA DEI MORLACCHI.

Non sono meno felici nelle loro cure i Morlacchi quando si tratta di curarsi da alcune interne malattie e col solito loro empirismo curano le coliche, i vermi, le infiammagioni di gola, i reumatismi, l' asma, le intermittenti, le malattie inflammatorie, le indigestioni, le ostruzioni, ec. ottenendone per lo più esiti fortunati. Quando i Morlacchi sono sorpresi da inappetenza, bevono molto aceto, e con ciò riacquistano l' appetito. Non è diversa dal metodo usato infra di noi una tal medicazione, ed è ben coerente ai principj conosciuti sulla natura acida de' sughi gastrici nell' uomo, e sull' influenza dei medesimi nella sensazione della fame. Se da indigestione o da gravezza di stomaco sieno essi affetti ricorrono al *Rakia*, in cui infondono certa quantità di polvere d' archibugio. Codesta medicina stimolante anima le forze vitali del ventricolo, e lo determina a quel movimento il di cui risultato è la digestione degli alimenti. Noi stessi vediamo come un saggio di rosolio preso dopo il pranzo favorisca la digestione, e come anche presso di noi gli stimolanti giovino molte volte in tali incomodi. Forse questa mistura esposta al calor dello stomaco favorisce lo sviluppo d' una certa quantità d' ossigeno il quale e giova alla digestione e produce appetito *(8)*.

---

(8) Veggasi la mia memoria sull' uso del mercurio nel volvolo: nel Volume decimo delli atti della Società Italiana.

Colica nervosa.

Il rimedio di cui fanno uso i Morlacchi nella colica da loro detta da *raggruppamento (zeludaze)*, che equivarrebbe al dire colica nervosa o anche reumatica, purchè non proveniente da indigestione nè accompagnata da infiammazione, si è *una palla di piombo* da archibugio che inghiottiscono, e che, sedati in poche ore i dolori, rendono per secesso. Così quella sostanza tanto venefica che cagiona spesse volte la colica saturnina viene quì adoperata e con esito costantemente felice per curarla. Nè la cosa è senza esempio anche presso i medici razionali *(9)*. Nè si creda a mio avviso che agisca in questo caso il piombo come una forza meccanica e per il solo proprio peso, in quella guisa che si voleva che agisse il mercurio nel volvolo: poichè credo assolutamente che in questo valga lo stesso, e che da tutt' altra cagione dipenda l' azione medicinale siccome del mercurio così del piombo *(10)*. Ed oltre all' azione calmante che aver potrebbe l' Idrogeno svolto per la decomposizione dell' acqua o di qualche altro umore de' sughi digerenti, de' quali l' ossigeno si combina al piombo e lo ossida; anche l' ossido di piombo ha, come tutti i sali saturnini, un' azione energica

---

(9) Effem. natur. cur. D. 1. an. III. obs. 95. pag. 155. Dov' è riferito che una pertinace colica sopravvenuta ad una febbre terzana con molta stitichezza fu guarita col far inghiottire una palla di piombo.

(10) Vedi *Atti della Società Italiana. Vol. X. par. 1. pag. 153.*

e conosciutissima nella fibra vivente *(11)* e sul sistema nerveo. Tutte le accademie e gli atti delle società letterarie, i commentarj medici e gl' institutori di medicina pratica combinano nel riconoscere nel piombo un rimedio energico, e più sovente velenoso. Ma la maniera d' agire del piombo e de' sali saturnini non è egualmente conosciuta, per quel che mi pare, almeno generalmente. L'azione apparentemente diversa del piombo nel cagionar la colica, e nel guarire, sotto l'egual forma, può per avventura sembrare un fatto contraddittorio che ci allontani dalla cognizione intorno al modo d' agire di cotesto *medicamento eroico*. Io però credo che tali anomalie svaniscano considerando le circostanze diverse che accompagnano la diversita de' casi ne' quali io considero le circostanze come diametralmente opposte: imperciocchè la colica saturnina, o sia la colica cagionata dal piombo sia deglutito in istato solido, sia preso liquido nello stato salino, sia finalmente sotto qualunque forma vaporosa inspirato od assorbito per mezzo de' linfatici, si osserva accader principalmente in soggetti d' un debole temperamento, o sottomessi per lungo tempo all' azione continua e lenta del veleno; al contrario la colica nervosa de' Morlacchi, e così dicasi degl' Indiani occidentali, i quali, come scrive Chalmers *(12)*, sono soggetti ad una colica, che viene felicemente curata col zolfato di rame ed i necessarj clisteri, succede in temperamenti robusti e pre-

---

(11) La sezione de' cadaveri morti d' avvelenamento di piombo ha fatto osservare che i muscoli sono, quasi del tutto, decomposti, ed hanno perduto la loro coerenza. Vedi sù ciò: *Commentaria de rebus in scientia naturali gestis*. Vol. XIX. pag. 120.

(12) Comment. de reb. in medicin. gestis. Tom. XX. pag. 458.

disposti alla stenia anzichè a debolezza, e che per poco tempo ritengono entro di se il rimedio, talmente che non rimane al piombo un tempo necessario a produrre la colica saturnina che succederebbe colla lunga dimora del piombo nel canale intestinale quando per la continuata azione sedativa d' esso si fosse fatto il passaggio dal vigore alla debolezza, o sia sorpassato si fosse lo stato di vigorosa salute. Chiaro apparisce pertanto come il piombo che produce una colica possa esser rimedio alla colica nervosa dei Morlacchi, poichè nel primo caso, essendo la macchina già molto indebolita, richieggonsi gli stimoli alla guarigione, mentre nel secondo richieggonsi i debilitanti. Di fatti la colica saturnina è stata felicemente curata coll'oppio *(13)* col fumo di tabacco *(14)* ec., delle quali sostanze insorger giammai non potrà questione se esse siano stimolanti ed agir debbano in contrario a quella causa che produsse la malattia. I Morlacchi adunque che seguono la sopradetta cura lo fanno con vantaggio perchè sono robusti ed evacuano meglio l' inghiottito piombo: e questo stesso metodo di cura anderebbe a risico di divenir fatale alle persone deboli che per più lungo tempo lo ritenessero in corpo.

Malattie verminose.

Il più pregiato antelmintico appo i Morlacchi si

---

(13) Veggansi i Commentarj sopra citati che citano le osservazioni di *Backer* in proposito.

(14) Opera citata. Tom. VII. pag. 613 ove si trovano le osservazioni di Scheffero sul fumo di tabacco dato per clistere.

è il *petròleo*, col quale in occorrenza di verminazione ungono il ventre e che pigliano anche per bocca a poche goccie. L' effetto salutare di tal medicamento sembra dipendente non solo dalla sua facoltà nauseante, quanto dal modo con cui ammazza codesti animali parasitici, e col suo cattivo odore *(15)* e colla sua azione venefica ai medesimi. Il petròleo è pur stato usato e s' usa tutt' ora da' medici ripmatissimi. A Montpellier, in Egitto ed in altri luoghi è stato adoperato tanto internamente che esternamente per frizioni all' abdome *(16)*.

Febbri intermittenti.

I Morlacchi che non sono soggetti meno alle influenze delle stagioni cattive, dell' umidità e di altre cagioni produttrici delle febbri intermittenti di quello che lo siano i nostri popoli dell' Italia, cadono non di rado in tali affezioni dalle quali però si liberano anche senza china. Alcune febbri terzane sono da essi loro curate col vino e col pepe preso fino all' ubbriacchezza: altre le curano coll' acqua e col sudore *(17)*. Nel primo caso cominciano dal prendere nel primo e secondo giorno un bicchiere di vino nel quale sia stato infuso per varie ore un pizzico di pepe: nel terzo e quarto giorno raddoppiano la dose e così di seguito

(15) E' opinione che alcuni odori siano micidiali ai vermi. Vedi Rosenstein.

(16) Vedi *Brera su i vermi del corpo umano*.

(17) Quest' ultimo modo di curar le intermittenti io non l' ho veduto; lo dice però *Lovrich* nell' opera citata.

secondo il temperamento del soggetto febbricitante; in oltre altri costumano di bere molto vino fino ad obbliare se medesimi e di correre poi fortemente nell'ora del parosismo febbrile: il che non può certo farsi che da uomini della loro robustezza.

Nel secondo caso si cuoprono bene e si distendono ai cocenti raggi del sole in faccia al fuoco, bevendo di continuo acqua fredda. In simil modo cadono in un abbondante sudore e col *sudar il male*, secondo essi dicono, si liberano più o meno dalle febbri.

Dall' analisi di questi due modi curativi dei Morlacchi si conosce, che sebbene non sian' essi tanto medici da saper la teoria delle due diatesi proprie delle intermittenti, le curano non di meno con un metodo che coincide ne' principj di quelli che ammettono le febbri steniche e le asteniche. Di fatti nessuno negherà che il vino ed il pepe sieno stimolanti potenti, ed è noto che anche fra noi sono spesso curate alcune febbri intermittenti coll' oppio dato a dosi generose: mentre l' acqua e le evacuazioni che producono debolezza gioveranno nelle intermittenti prodotte da stenia. Ora l' applicazione di tali rimedj nelle febbri intermittenti e gli effetti che dai Morlacchi se ne ottengono fanno conoscere, che il loro modo di curarsi si regge in paragone delle più ricevute teorie mediche del giorno.

Ostruzioni.

Le ostruzioni sono curate dai Morlacchi coll' applicazione d'una gran pietra piana sul ventre dell'ammalato. Usano in oltre una pozione composta di rakia, mele e pece di Pino che fanno bollire alquanto prima di berla. Moltiplici sono i rimedj usati da' medici nelle ostruzioni. Le pressioni meccaniche però sono state riconosciute di sollievo, e la fasciatura dell' abdome proposta da *Portal* può per avventura fare l' ufficio medesimo della pietra usata dai Morlacchi. Gli stimolanti si sono pure adoperati nelle ostruzioni, e Gedeone Arveo *(18)* propose la tintura da lui detta di tartaro o sia una soluzione di potassa nello spirito di vino, e che deve agire per ciò come stimolo, od eccitante energico.

MALATTIE INFLAMMATORIE.

Le malattie inflammatorie sono curate da' Morlacchi con varj metodi. Nelle malattie di tal indole contratte per le eccessive fatiche sogliono curarsi col rakia preso in generosa dose, col rakia misto al pepe ed alla polvere d' archibugio; e dopo presa la mistura si cuopron bene se è in tempo d' inverno, o si distendono supini in faccia all' ardente sole se è d' estate. In simil guisa cadono in abbondante sudore, in sequela del quale si liberano più o meno dalla malattia.

Altri in vece usano nelle pleuritidi, d' applicare alla parte dolente una pietra molto riscaldata involta in un cencio asciutto, ovvero prendono del miglio ben riscaldato al fuoco, involto pure in un panno, applicandolo sulla parte. In oltre alcuni prendono per bocca una pozione di sterco topino mescolato all' acqua.

---

(18) V. Gedeon Harvejus. De arte curandi morb. expectat. pag. 25.

In questi diversi modi di curarsi dei Morlacchi si scorge che il sudore consecutivo alla medicina d' altronde stimolante è la cagion principale della guarigione, giacchè il sudore deve produr debolezza. Un tal metodo di cura per altro non sarebbe applicabile a' sistemi deboli. Così pure l' applicazione della pietra riscaldata producendo un effetto analogo a quello delle coppette asciutte richiama il sangue alla parte, e quindi ne succede una specie di sudor locale abbondante. E' stata pure usata in altro tempo l' ustione nelle pleuritidi ed Albucasis la propone *(19)*; L' ustione pertanto sembra agire in un modo analogo alla pietra riscaldata, salvo che quest' ultima opera più blandamente: ed in egual maniera operano i vescicanti applicati alla parte dolente; pratica usata in ogni tempo con successo dai medici più accreditati. Non tutti guariscono con questo metodo i Morlacchi, siccome accade anche fra noi coi metodi più ragionati; ma egli è verisimile ch' essendo essi per la natural loro robustezza capaci di resistere alle scosse violente passino essi rapidamente per mezzo di questi stimoli dallo stato d' astenìa ad una indiretta debolezza procurata anche in parte dal sudore profuso che in poco tempo producono gli attivi stimoli suddetti. E' dunque conforme anche alle nostre teorie questo metodo di cura, ma perchè esso riuscisse tra noi felice, converebbe che noi avessimo la loro robustezza che pronta rendesse l'azione del solido vivente, e l' abituale loro frugalità che ci

---

(19) V. Albucasis Christ. pag. 1. c. 31.

rendesse nelle occasioni così prontamente sensibili all' azione degli stimoli.

Infiammazioni di gola.

Per leggieri infiammazioni di gola applicano i Morlacchi l' esca senza concia la quale promovendo maggior secrezione d' umor traspirabile gli guarisce da tali leggieri infermità. E' coerente anche un tal metodo a' principj della chimica pneumatica, dalla quale si conosce come l' acqua sia più facilmente evaporabile quando è diradata da una sostanza quasi reticolata e porosa; e come l' acqua col ridursi in vapore produca del freddo, o sia assorbisca il calorico. Ora l' esca applicata alla parte infiammata assorbe l' umor traspirabile, e diradandolo, oltre che produce freddo, ne promove eziandio l' evaporazione, col favor della quale il calorico viene maggiormente sottratto dalla parte affetta. Levata la causa del calore, ch' era pure una causa presente di quell' eccitamento locale, è tolta la malattia, e ne succede una pronta guarigione. Io ho veduto adoperare l' indicato metodo tanto semplice, ed ho osservato ch' esso riesce molte volte felice.

Asma.

Più singolare e di pronto effetto è il rimedio stato usato da qualche Morlacco alla cura dell' asma, rimedio che dagl' istitutori di medicina pratica vien collocato tra le cagioni produttrici della stessa malattia: dico l' arsenico in vapore. Mi raccontò il Parroco di *Sca-*

gliari terra al di là di *Cattaro*, che una donna venuta al mercato di codesta città, soggetta ad accessi asmatici fu sorpresa sul luogo da uno di questi, per cui s' appoggiò al muro per sollevarsi. Passò in questo mentre uno di *Padgorizia* terra turca di confine, orefice di professione, che si esibì di guarirla. Mandò a pigliare due *gazzette (20)* d' arsenico: lo mise sopra le brage in uno scaldino coperto da un imbuto e fece inspirare a riprese e per intervalli il fumo alla donna. Ad ogni inspirazione del fumo arsenicale diede un sorso di vin di Cipro. Al finire del fumo la donna fu libera, nè mai più sofferse accessi asmatici pel lungo tempo che visse. Il Parroco l' assistette, molti anni dopo, all' ultima malattia che fu di tutt' altro genere della testè accennata. Un' altra donna pure di *Scagliari* allora assai vecchia sua parrochiana, sull' esempio felice a lei noto, ripetè da se stessa cotesto rimedio per l' asma che soffriva; ne guarì radicalmente, ed essa viveva quando mi si narrò la cosa ed esibirono di mostrarmela. Il Curato che sapeva questi fatti, divenuto asmatico, e non avendo il coraggio di esperimentare il fumo d' arsenico, provossi ad inghiottire il fumo d' un legno acceso ed incarbonito in cima; lo faceva ad ogni accesso, e se ne trovava sollevato; nell' uso di questo rimedio cominciava dall' esporsi ad un fuoco vivo di legna al cammino, sebbene però sollevato negli accessi non guarì punto dal male.

Un tal modo di curarsi dall' asma usato da qual-

(20) Piccola moneta del paese, delle quali due equivarrebbero a un dipresso, ad un nostro soldo.

che Morlacco ed usato pure in altro tempo da medici riputati *(21)* fà vedere la diversa azione delle sostanze sull' economia sana ed ammalata. L' arsenico in vapore che può cagionar l' asma all' uomo sano, guarisce da codesta malattia. Si ha in questo caso un esempio analogo alla palla di piombo che cagionò la colica in alcuni casi, e guarì dalla colica in altri. Un tal fenomeno sarà forse attribuibile ad un principio analogo. L' asma cagionato dal vapor arsenicale sarà esso d'una diatesi opposta a quello guarito dall' arsenico vaporoso? Io non oserei giudicarlo, poichè è poco nota fin'ora l' azione di cotesto violento veleno. Quello ch' è certo si è, che l' arsenico è stato adoperato da varj medici con felice esito nella cura delle intermittenti e *Lordat* lo usò riportandone moltiplici guarigioni *(22)*, ed io pure l' ho usato, come l' ha usato il Dott. Locatelli con esito felice. Nell' ospedale di Pavia ove occorrono più di sovente febbri intermittenti di natura astenica si è usato in un tempo l'arsenico con felice riuscita; ma se ne abbandonò poi l' uso, forse per l' orrore che il popolo aver poteva per un rimedio che al solo nome intimorisce. Restò per tanto indeterminata l' azione medica di questo famoso veleno, e si fu contento di considerarlo nell' aspetto soltanto di un *perturbativo assai forte de' moti dell' economia animale.*

---

(21) Vedi. Frankische samml. 11. pag. 70.

(22) Vedi il giornale di medicina di Parigi. Agosto 1805, in cui si prescrive d' unire la soluzione d' arsenico ad una soluzion di potassa nella dose di mezza dramma per ciascheduna sostanza secca, la prima sciolta in oncie 6 acqua distillata, la seconda oncie 2 acqua di cannella, da darsi a 4. 6. 8 goccie in un bicchiere d' acqua.

Ma non sarebb' egli probabile che l' azione d' un rimedio sull' animale economia ammalata fosse diversa dall' azione sulla stessa economia in istato di salute, nella stessa guisa in cui è diversa l' azione d' un rimedio o d' un veleno sù d' un animale paragonato ad altro di specie differente? Io mi ricordo d' avere una volta letto che i vapori del mercurio cagionano i vermi, e che gli scavatori delle miniere di mercurio sono soggetti a cotesti animali parasitici; noi sappiamo d' altronde come giovi il mercurio in casi di verminazione. Le straordinarie dosi di rimedj energici sopportate ne' casi d' alcune malattie fanno pure conoscere la differenza che passa fra l' uomo ammalato ed il sano. Nelle febbri intermittenti si danno nell' imminente accesso a persone dilicate e sensibili dosi fortissime d' oppio senza danno, le quali molto n' arrecherebbero in altro tempo. Nel tetano si è dato l' oppio a 36 e più grani senza produr sonno. *F. Newbery* diede un' oncia di laudano liquido al giorno, e *Sydenam* un' oncia in clistere nel trismo *(23)*. In Milano abbiamo avuto una donna affetta d' un cancro all' utero la quale continuò per più mesi a prendere fino a 1764 grani d' oppio al giorno *(24)*; e fino a' 200 grani e più al giorno lo diede Zeviani in un vomito urinoso e per lungo tempo, talchè si calcola che l' ammalata pigliasse da duecento libbre d' oppio nello spazio di molti anni *(25)*.

---

(23) Vedi Bronner *De Trismo ex vulnere. Dissertatio inauguralis.* Goettingae.

(24) Vedi *Aipamonti* nel nuovo giornale della più recente letteratura medico-chirurgica Tom. X. pag. 144. Io ho conosciuto la donna e somministravo giornalmente l' oppio dalla Spezieria dello Spedale.

(25) V. Memorie della Società Italiana. Tom. VI. pag. 94.

Tali straordinarie dosi d' un rimedio che ben di sovente a due o tre grani produce un sopore spesse volte profondo ci fanno conoscere il diverso modo d' agire dell' oppio in un sistema sano ed in un ammalato. Ma si dirà che lo stato d'una diatesi astenica molto forte, che l' abitudine contratta dagl' individui, i quali avevano incominciato da pochi grani nella loro cura, sono le cagioni di tali fenomeni straordinarj. Comunque però seducente esser possa la teorìa che non ammette se non che malattie di debolezza e di vigore, rimedj stimolanti e debilitanti, pel di cui mezzo spiegar si vogliono tutti i fenomeni vitali, e l' azione degli agenti esterni sulla economia sana ed ammalata, a me sembra che impenetrabile risulti la spiegazione d' alcuni fenomeni fin'ora osservati, e che hanno un gran rapporto colla teoria medica. Non si spiega per esempio in qual modo la canfòra tenuta generalmente come uno stimolo serva d' antidoto all'oppio principe de' stimolanti *(26)*; come gli acidi vegetabili, ed in specie l' aceto, che tenuti sono debilitanti, sieno il controveleno del lauro ceraso tenuto pel principe de' debilitanti, ed altri fatti analoghi che si oppongono alla teoria Browniana, ed alle modificazioni a cui si vuole soggettarla. Niente di meraviglia pertanto se anche l' azione de' vapori dell' arsenico è tutt'ora indeterminata, quan-

---

(26) Vedi Hahneman nel *Journal des pract.* Arzneyk II. B. ed io stesso l' ho osservato per pratica molte volte servendomi abitualmente fin dall' anno 1774 della canfora in clisteri per ravvivare dal mortal sopore que' bambini esposti, ai quali, per impedir che non piangessero per istrada, v' era il costume di dare una dose, per que' corpicciuoli generosa, di requie magna di Niccolò.

tunque siasi usata una tal sostanza empiricamente, ovvero in seguito di teorie più o meno improbabili. Frattanto diremo, che i Morlacchi conoscono indipendentemente da teoria la facoltà medicatrice dell' arsenico in vapore, non che quella del gaz acido carbonico fuliginoso atti a guarire dall' asma, o sia da quella malattia che il più delle volte riesce incurabile o almeno che ammette per lo più una semplice cura palliativa. Ed in coteste cognizioni non sono meno avanzati di Frankische, Percival, Avgenius, i quali hanno conosciuto specialmente l'uso del vapore arsenicale, del gaz acido carbonico, del fumo ec. *(27)* nella cura dell'asma.

R e u m i.

I Morlacchi curano i reumi con violente fregagioni sino alla lividezza della pelle ed alla scorticatura, siccome scrive *Fortis (28)*. Nei reumatismi e dolori intercostali usano d' esporre l'ammalato nudo al fuoco applicando alla parte dolente un mattone caldissimo che arrossa ed anche scotta la pelle; in seguito danno a bere vino generoso, e pongono l' ammalato in letto, qual si risolve tosto in profuso sudore e spesso guarisce. Non è diverso in origine un tal metodo da quello se-

---

(27) Sull' uso del vapor d' arsenico nell' asma vedi Frankische Samml. II. pag. 70. Sull' uso del gas acido carbonico, vedi Percival, on the boison of Lead pag. 29. Avgenius ha usato il fumo di tabacco che dev' esser press' a poco analogo a qualunque altro fumo, vedi Avgenius Hor. I. II. Ep. 19.

(28) Viaggi in Dalmazia. Venezia 1774. in quarto:

guito da varj medici celebrati, e *Thilenio* usò la moxa nel reumatismo cronico *(29)* *Bose* adoperò l' ustione nel reumatismo *(30)*, come l' usò il Dott. *Naudau* *(31)* e *Poteau* *(32)* e più anticamente *Ipocrate*. Ora tali metodi seguiti da' medici di riputazione coincidono col metodo adoperato dai Morlacchi, di applicare cioè una pietra ben calda alla parte affetta: operando essa come la moxa o come un' ustione. Cosi gli stimolanti usati nei reumatismi ci assicurano che i Morlacchi non fallano nel curarsi col vino; in quella guisa sieguono la più indicata cura procurandosi il sudore sì raccomandato da que' medici che proposero le polveri del *Doverio* ed altri diaforetici in tali occorrenze *(33)*.

Nel reumatismo lombare in alcuni luoghi i più incolti si pone l' uomo sdrajato boccone sul terreno dopo avervi distesa sotto la sua *strucca*; un altr' uomo vi passeggia sopra come zappando a piedi nudi; poi brancicando ruvidamente la pelle tratta del dorso, e preso l' ammalato sulle spalle del sano gli si danno due o tre scosse e lo pongono in letto e se gli dà a bere rakia, per cui terminando il *male col sudore* spesso si guarisce. Tanto un tal modo di procedere come quello delle violente fregagioni si vede chiaramente essere ambidue analoghi agli usati da medici tanto antichi che moderni. Le fregagioni, il moto, l' equitazione proposti da Gardano, da Bourdelin, da Goeritz *(34)*, ed

(29) V. Med. und. chirurgische bemer Kungen. pag. 278.
(30) V. Bose Pr. De ustione in rheumatismo et artritide.
(31) Journal de medecine Tom. LXXV.
(32) Mélanges de Chirurgie pag. 20.
(33) Vedi Clarck ed altri moltissimi.
(34) Act. natur. cur. Tom. III. obs. 89.

usati anche al giorno d'oggi, sono corrispondenti al fine che ne ottengono i Morlacchi colla loro rozza cura. Il movimento che scuote il sistema muscolare quasi direi irrigidito, i stimolanti ch' eccitano il sistema linfatico e lo determinano alla di lui funzione, non che il sistema sanguigno per cui si ha escrezione di sudore, sembrano il principal modo di agire e la base d'un tal metodo di cura diretto d' altronde a debellare una malattia la di cui etiologia invano ha sin ora stancato l' immaginazione de' Fisiologi e de' Patologi.

Conclusione.

Tali sono le osservazioni da me raccolte sulla medicina d' un popolo non giunto per anche alla civilizzazione. Abbiamo veduto come il suo medicare empirico non sia opposto ai metodi usati da' medici di varie epoche e più o meno ragionatori; abbiamo osservato come i Morlacchi si avvicinino in varie loro cure al modo di curare Browniano, o come almeno dalla lor pratica dedurre si possono i principj della nuova dottrina. Una medicina di fatti che portar dee per anche qualche traccia della natura, atteso che i Morlacchi per la loro poco avanzata civilizzazione s' avvicinino di più allo stato naturale, nulla doveva in se contenere di contradittorio al vero modo di guarire, e nè anche ai principj teorici d' un sistema creduto il più conforme al naturale o sia più vero. Frattanto ho voluto paragonare anche la medicina empirica de' Morlacchi colle osservazioni pratiche più o meno accreditate de' medici di varie età: 1°. perchè la medicina d' osservazione è madre delle teorie mediche; 2°. perchè i fatti ben avverati, siccome sono la conseguenza di leggi immutabili, non possono essere in contradizione co' fatti osservati in altri tempi e da altri popoli; 3°. perchè si vedesse sempre più, come una raccolta d' osservazioni più o meno disordinate, si possa coll' analisi richiamare ai principj stessi cui si richiamarono le osservazioni mediche raunate da *Ipocrate* sino a noi. Vero è che spesso accade, che una serie d' osservazioni raccolte da molte opere e collezioni accademiche si pieghi ad una teoria, mentre con egual' indifferenza somministra materiali ad altra teoria fondata su' principj diversi e qualche volta diametralmente opposti: così la teoria della fermentazione, quella della putrescenza, della effervescenza, delle acrimonie acide, saline, e muriatiche, della bile ec. e tant' altre teorie de' passati tempi hanno rivocato a se tutti que' fatti ch' ora il sistema Browniano cita con uguale felicità: ma le teorie sono spesso distrutte dal tempo, mentre le osservazioni ben fatte rimangono nella loro integrità e non soffrono le vicende della moda, e appare quindi quanto vera sia la sentenza di *Manilio* che

. . . . . . *artem experientia fecit*
Exemplo monstrante viam . . . . . .

RICERCHE

Sopra la vibrazione delle lamine elastiche

DI GIOVANNI PARADISI

Ricevute in Novembre 1806.

Torna più conto talune volte ingegnarsi a sorprendere la natura nella formazione di un certo fenomeno onde conoscere come questa si regoli per produrlo, piuttosto che darsi in preda alle congetture, e fingere delle ipotesi per renderne ragione.

Questa seconda maniera in vero più soddisfà il nostro amor proprio, ma ordinariamente è fallace. Galileo battè la prima strada, e Cartesio la seconda. Ambidue spezzarono il giogo dell' Aristotelica autorità nelle scienze naturali, ma il Filosofo di Firenze fu più felice dell' altro nello scoprire delle verità.

Illuminando colla fiaccola dell' esperienza gli arcani di natura, spesso si giugne a svelare tal legge nella produzione degli effetti, che difficilmente avria potuto stabilirsi, anche se tutte avessimo conosciute le cause operanti nei medesimi; imperciocchè mancandoci ordinariamente i mezzi di assegnare il *quantum* di ciascima di quelle cause, i calcoli più sublimi che di quel dato abbisognano, restano allora senza efficacia. Gli esperimenti ponno portarci a dirittura ad un punto da cui facil sia progredire per le ricerche ulteriori.

Ho seguito questa via nell'indagare le circostanze del moto vibratorio delle lamine elastiche, ed avendo co' miei esperimenti scoperte alcune proprietà di quel moto, o leggi di vibrazione, le faccio di pubblico diritto, communicandole.

Il fenomeno di una lamina elastica che percossa rende un certo suono è una meraviglia della natura, che ci recherebbe sorpresa se si ascoltasse la prima volta. Esso è continuamente alla nostra portata, pure è così inviluppata nelle tenebre la maniera con la quale si produce, che io dubito non essere bastante quanto sappiamo di fisica, meccanica e di analisi sublime onde poterlo calcolare. Non vi è, se io non mi sbaglio, che Eulero il quale abbia tentato la soluzione di qualche problema di tal genere con tutta la forza di suo ingegno.

I nuovi commentarii dell'Accademia di Pietroburgo nel Tomo X anno 1764 contengono due dissertazioni di questo gran Geometra sopra le vibrazioni della membrana dei Timpani, e sopra quelle delle campane *(1)*. Ad ogni linea di queste memorie scorgesi il genio di Eulero, ma le supposizioni ch'egli ha dovuto ammettere onde ridurre a stima e misura le forze che vi hanno

---

(1) Anche il Sig. Biot nel quarto Tomo dell'Istituto Nazionale di Francia parlando degl' integrali delle equazioni a differenziali parziali, intraprende la stessa ricerca d' Eulero e giugne alla stessa equazione.

influenza, fanno desiderare una maggior cognizione di ciò che succede in fenomeni di sì fatta natura.

§ 1. Sapevasi da qualche tempo *(2)* che se una lamina di vetro tenuta saldamente quant'occorre in situazione orizzontale, o fra due dita, o col mezzo dell' istrumento che si vede disegnato nella fig. 38, o in altri modi de' quali si parlerà all'uopo, si suoni nel lembo con un arco da violino concepisce un moto tremulo divenendo sonora, e che se si sparga sopra di essa della polvere, questa, dopo aver quà e là balzato in quell' oscillazione, finalmente si dispone per formare certe figure, dal contorno delle quali più non esce poi comunque continui la lamina a tremolare.

Questo fenomeno maneggiato a dovere sembrommi che condur potesse a scoprire qualche interessante proprietà circa la natura delle vibrazioni nelle lamine elastiche; me lo resi familiare ed instituii una serie di ricerche, d' alcune delle quali rendo conto in questa memoria; Certo se quel fenomeno stato mi fosse incognito non avrei forse avuta occasione di speculare so-

---

(2) Si prenda una lamina rettangolare di vetro di grandezza arbitraria per esempio, tre sopra sei pollici, e si posi in equilibrio sopra un appoggio di sughero che la sostiene nel suo mezzo, e dopo averla impolverata con sabbia fina si fissi stabilmente sopra l' appoggio per mezzo del pollice. Ciò fatto se ne sfregi il contorno con un arco da violino sicchè produca il suono. Le vibrazioni che la lamina prova in quel tempo fanno disporre la sabbia in una maniera singolare, e che varia secondo il luogo del vetro che n'è toccato coll'arco, e secondo la forza delle vibrazioni che si sono prodotte. Se in vece d' una lamina s' impiega un disco circolare, s' ottengono degli effetti analoghi, ma la sabbia si dispone in raggi in una maniera simmetrica. = *Ecco quanto si ritrova nella Biblioteca Britannica Tomo 23 pag. 141 ove si da l' estratto di quel cap. di Fisica del Sig. Cavallo nel quale sono riportate quest' esperienze di Chadui.*

pra questa materia; lascio quindi a chi lo ha, il merito della prima scoperta, attendendo che altri attribuisca alle mie fatiche ulteriori quel pregio che ad esse crederà convenire.

Esperienza I.

§ 2. Tenuto il rettangolo di vetro *A B C E* (fig. 1) orizzontale per mezzo d'un appoggio che lo arresti tra due punticini *P*, come mostra la fig. 38, e suonato questo rettangolo nel punto *S*, allorchè rendeva un certo tuono, che io indicherò per *M*, la polvere si disponeva nelle linee punteggiate come mostra la figura dividendone in tanti altri rettangoli eguali tra loro *a*, *a* ec. la superficie. Per quanto si continuasse a produr quel medesimo suono la polvere non usciva da quelle linee *(3)*.

Riflettendo sopra questo fenomeno io mi persuasi che se la polvere si manteneva in quella situazione nel

---

(3) L'esperienze che si citano sonosi replicate più e più volte, nè sarei stato pago di un risultato, se l'avessi ottenuto con pochi esperimenti: così può aversi piena fiducia ai fenomeni che si riferiscono. Il rettangolo sottoposto alle esperienze ha nove pollici di lunghezza sopra tre di larghezza. Il punto di sospensione *P* è distante della sesta parte della lunghezza dal lato *A B*, e della metà della larghezza dal lato *B C*. Il punto del suono *S* è distante un terzo di *B C* da *B*.

Si avverta chi vorrà ripetere l'esperimento che potrà ancora prendere rettangoli di diverse dimensioni; dovrà talvolta però un poco variare il luogo del suono. Otterrà sempre le linee rette che si legano tra loro e legano i lati ad angolo retto, ma non avrà sempre lo stesso numero di rettangoli *a*, *a*, *a* ec. Nei suoni acuti questo numero di rettangoli sarà maggiore, e nei gravi minore, così in quelli i rettangoli saranno più piccoli, ed in questi più grandi, quando avvenga, come suole accadere, che nello stesso rettangolo suonato in due tuoni diversi, abbiansi le stesse linee rette. Ritornerò sopra questa importante osservazione.

tempo che la lamina era sempre in moto, ciò succedere non poteva che per una di queste due ragioni 1ª. o perchè quei punti sopra i quali era la polvere, si restavano in quiete, e tranquilli nel tempo del movimento, che agitava tutti gli altri; o perchè in questi punti per quanto si trovassero anch' essi in moto, si combinava un contrasto di forze che comunicate ai grani di polvere sopra incombenti si distruggevano tra loro, e così questi grani restavano fermi, non già perchè nessuna forza agisce sopra loro, ma perchè quivi le forze che agivano si elidevano.

Si trattava d'indagare per quale di queste ragioni ciò succedesse, giacchè di quì dipendeva il cominciare a veder qualche barlume in quest'arcano della natura.

Alcuni esperimenti ch'io riferirò sotto il titolo di esperienza II. mi sciolsero felicemente il nodo della questione. Da essi ricavai molto più di quello che domandava, poichè mi spiegarono tutto il meccanismo di una lamina in vibrazione.

Esperienza II.

§ 3. Fig. 2, 3, 4, 5, 6. La lamina di vetro è la stessa del paragrafo antecedente, situata nella stessa guisa e suonata nel medesimo punto e nel tuono medesimo *M*, mentre però nell' esperienza I. suonando la lamina, non si staccava mai da essa l'arco da violino, e così un' arcata era immediatamente seguita dall' altra, in questa si suonò a riprese con arcate staccate l' una dall'altra, osservando ciò che avveniva nella polvere ad ogni una di quelle arcate.

Alle prime arcate la polvere si disponeva, come nella fig. 2, formando tanti mezzi circoli *a*, *a* ec. di egual raggio i cui centri erano a distanze quasi eguali gli uni dagli altri. Continuando a suonare crescevano questi mezzi circoli sino a toccarsi, come mostra la fig. 3. Quindi seguitando il suono si schiacciavano nei punti del contatto, e continuavano ad estendersi, e ad aumentarsi di raggio nella parte superiore, come mostra la fig. 4. Passavano in seguito a formare la fig. 5 in cui le sommità degli archi d' una banda toccavano quelle degli archi della banda opposta. In questi luoghi di contatto si schiacciavano continuando il suono, e si disponevano come nella fig. 6, finalmente proseguendo ad eccitare le vibrazioni sonore, divenivano tanti rettangoli, come mostra la fig. 1, nè subivano poi al di là verun' altro cangiamento.

Si avverta che in tutti questi esperimenti la polvere andava tanto più lenta, quanto più si allontanava da' centri di quei circoli.

Riflessioni, e conseguenze che si deducono da questa seconda esperienza.

§ 4. La serie degli esperimenti quì sopra riferiti ci mostra ad evidenza l'andamento che segue la natura nella formazione dei rettangoli della fig. 1. nei quali si dispone la polvere. Essi in origine erano mezzi circoli, i quali, per dir così, schiacciandosi a poco a poco sono divenuti rettangoli. Questa genesi ci ha non poco sorpreso, ed a vero dire era difficile il congetturarla.

Ponendo poi mente a tutto questo processo, ecco quali verità noi possiam stabilire.

I. „ Il punto nel quale si suona la lamina diventa „ un centro di vibrazione. Egli concepisce un moto di „ sussulto di alto in basso, e lo comunica circolarmen- „ te attorno di se, ed egualmente per ogni parte.

II. „ Questo movimento vibratorio che concepisce „ la lamina va divenendo più debole a misura che si „ allontana dal centro di vibrazione.

III. „ Si formano nella lamina altri centri di vi- „ brazione, che io chiamerò *secondarj* i quali hanno „ quel moto di sussulto che ha il primario centro, e „ da questi partono le vibrazioni colle medesime leg- „ gi colle quali si diramano da quello.

Questi centri secondarj di vibrazione sono appunto nei centri di quei mezzi circoli, ed avendo io trovato il mezzo di produrre il fenomeno lentissimamente, ancora indipendentemente dalla maniera di suonare, giungo perciò a determinare con tutto il più grande scrupolo i punti ove trovansi i centri secondarj tanto in questo esperimento, che ne' seguenti, ne' quali senza un particolare artifizio sarebbe stato impossibile il rinvenirli.

§ 5. Spieghiamo ora in che precisamente consista quel movimento vibratorio della lamina. E primieramente consideriamo una (fig. 7) fibra elastica SP tenuta fissa nel punto P, e non riguardiamo in essa che la lunghezza.

Per maggior facilità nel dichiarare il nostro concetto fingiamola divisa in un numero di parti picciolissime 1, 2, 3, ec. Sia il punto S percosso, o premuto con una forza qualunque perpendicolare alla direzione della fibra. (Se fosse obliqua noi la decomporemmo, e considerando per nulla quella che agisce in direzione della fibra, non avremmo riguardo che a quella porzione che gli è normale). Egli è manifesto che l' effetto di questo colpo sarà di abbassare il punto S; se di alto in basso è diretta la forza. Quando la fibra fosse perfettamente dura nel medesimo istante matematicamente preso, questo movimento si comunicherebbe a tutta la fibra da un capo all' altro, ed essa roterebbe intorno al punto P; i suoi punti descriverebbero altrettanti archi di cerchio tanto minori di quello descritto dal punto S, quanto le loro distanze sono minori di SP.

Ma non essendo di tal natura la fibra, ed il moto per comunicarsi da una parte all' altra dei corpi molli ed elastici avendo bisogno di un tempo, la faccenda non può andar così. Nel primo istante si piegherà la particella 1, tutte le altre stando ferme per non essere ancora passato a loro l' effetto di quella percossa, e la fibra prenderà la posizione $S' P'$. Nel secondo istante il movimento si sarà comunicato alla particella 2. In questo secondo istante la particella 1, in virtù della sua elasticità tornerà in alto per restituirsi al posto ov' era, oscillando intorno al punto di piegatura che l' unisce con la particella 2, mentre questa stessa particella discenderà per obbedire al colpo che è giunto a fare azione sopra di lei. Tutte le altre particelle staranno ferme, e la fibra prenderà la posizione $S'' P''$. Nel terzo istante si abbasserà la particella 3, si alzerà la 2, e si abbasserà la 1, ed in questa guisa la fibra si troverà nella posizione $S''' P'''$, e così di seguito, Dopo un certo numero d'istanti adunque tutte le particelle della fibra oscilleranno, ed essa prenderà la posizione $S^n P^n$. La curva $S^n P^n$ è detta communemente serpentina, essa ha tanti flessi contrarj quanti sono i gobbi che la compongono.

La somma di tutti quest' istanti, o il tempo dentro a cui si mette tutta la fibra in movimento è maggiore, o minore secondo che la fibra è più o meno elastica, poste le altre cose tutte eguali.

Le oscillazioni poi di quelle particelle componenti la fibra elastica diminuiscono quanto più sono lontane dal centro di movimento S, giacchè l' azione di quella percossa è a poco a poco estinta dalle resistenze reciproche di quelle particelle, e così disturba il movimento, e s' indebolisce quanto più si allontana da S.

Di quì si ricava ancora la ragione per la quale le distanze dei flessi contrarj, o le lunghezze dei gobbi che compongono la curva della fibra in vibrazione, vanno continuamente crescendo, e divengono più spianati a misura che si discostano da S.

§ 6. Veniamo ora a parlare della vibrazione d' una lamina elastica. Ci sarà facile concepire come questa si faccia, purchè siasi compreso a dovere quanto si è detto nel § antecedente.

Sia $R\,T$ (fig. 8) quella lamina, ed S il punto ove si percuote, o si preme. Supponiamo divisa la lamina in tante zone circolari 1, 2, 3 ec. come si vede fatto nella figura. La percossa nel primo istante abbassi la porzione della lamina 1, le lamine 2, 3 ec. staranno ferme non essendosi per anche ad esse communicato il movimento. Nel secondo istante sarà in moto anche la zona 2, e si abbasserà, ed in questo mentre la zona 1 si alzerà, tutte le altre restando nella loro situazione. Nel terzo istante comunicandosi il moto alla zona 3 questa si abbasserà, mentre la zona 2 in virtù della sua elasticità tornerà in alto, e la zona 1 per quel movimento di oscillazione già concepito discenderà di nuovo, e così di seguito.

Dopo un certo numero d' istanti tutta la lamina si troverà animata da questo moto ondulatorio, ogni zona formando un' onda che si alzerà, e si abbasserà nel tempo delle vibrazioni; E se si facesse una sezione perpendicolare alla lamina che passasse per quel centro, essa sarebbe formata da una curva serpentina come quella della fibra elastica. Anche nel caso della lamina in vibrazione il movimento va diminuendo a misura che si allontana dal centro, e per la stessa cagione addotta nella fibra elastica, e per cagione della maggior quantità di materia che continuamente debbe mettersi in oscillazione, a misura che cresce la distanza dal punto ove si fa la percossa. Di qui segue che le diverse ondate circolari di quella lamina tremolante sono tanto più schiacciate, e tanto più lunghe, quanto maggiore è la lontananza dal centro di vibrazione.

§ 7. Nel movimento di una lamina elastica in vibrazione tutto segue come nel movimento ondulatorio che prende la superficie d' un acqua stagnante allorchè si percuote in qualche luogo. E come entro quell' acqua in più luoghi percossa, si fanno più centri di moto, dai quali partono quelle circolari increspature che vanno via via crescendo finchè s' incontrano, s' intersecano senza quasi turbarsi, e proseguono il loro viaggio, così segue appunto lo stesso nella vibrazione di una lamina elastica. Da que' centri di vibrazione che si formano in essa, allor quando in un certo punto è suonata, si diramano circolarmente le oscillazioni ovvero ondulazioni della lamina, si distendono, s' intersecano, e progrediscono sino agli estremi della lamina medesima. La polvere è scacciata da que' centri verso le circonferenze, e non si ferma se non che in quelle tracce ove le forze di cui è animata in virtù delle ondulazioni che la spingono lontano, e che provengono dai diversi centri di vibrazione, o si distruggono tra loro, o producono una risultante nella direzione delle tracce medesime. In tutti gli altri siti un grano di arena non trovando quest' eguaglianza di forze, o quella direzione di risultante, sarà obbligato a moversi, e cangiare continuamente di posto finchè si trovi dove hanno luogo quelle condizioni.

Quì per nulla abbiamo considerate le resistenze prodotte dall' attrito e dall' adesione dei grani di sabbia colla lamina. A queste avendo riguardo si dirà che i grani di polvere si disporranno in quelle curve, nei punti delle quali le risultanti saranno eguali a quelle resistenze, ovvero saranno nelle direzioni delle curve medesime.

Nè faccia specie questa incrociatura d'ondulazioni nel moto di una lamina in vibrazione senza che quelle si turbino. Non segue diversamente nelle ondulazioni che concepisce l' aria messa nello stesso tempo in moto da più istrumenti sonori.

Rapporto poi alle ondulazioni vibratorie tengo opinione che nella medesima guisa che le ondulazioni dell' acqua, esse si riflettano, e ripieghino sopra se stesse, allorchè hanno raggiunti i contorni della lamina in vibrazione, facendo l'angolo d'incidenza eguale a quello di riflessione.

§ 8. Nel § antecedente ho paragonate le onde che si formano nella superficie d' un' acqua stagnante colle vibrazioni delle lamine elastiche. Que' movimenti seguono veramente nella stessa guisa per quanto dipendano da cause diverse. Per ispiegare d'onde derivi l'increspatura dell' acqua la discorro così.

Sia $L\,M$ (fig. 9) la superficie dell'acqua stagnante, e scelgasi il punto P nel quale si vuol percuotere. Intorno al punto P si prendano delle piccole porzioni 1, 1, 2, 2, ec. Premendo l' acqua in P essa è obbligata in questo punto ad abbassarsi, e non essendo compressibile, non può avvenire questo abbassamento, senza che si sollevino le porzioni 1, 1, intorno ad esso, giacchè sono quelle le prime a sentire il riflusso di quell' acqua scacciata dal punto P. Sul primo istante adunque la superficie dell'acqua stagnante diverrà $L'M'$. Nel secondo istante le due porzioni acquee 1, 1, già sollevate sul livello naturale precipitano abbasso in virtù del loro peso premendo l' acqua che stà sotto. In questa caduta esse pel moto concepito si profondano sotto il livello ordinario, ed obbligano in conseguenza tantò l' acqua P, che le porzioni 2, 2, da cui sono esse circondate, a sollevarsi; così alla fine di questo secondo istante la superficie diviene $L''M''$. Continuando lo stesso ragionamento si vedrà come vanno via via formandosi altre ondulazioni, e così tutta l' intera superficie dell' acqua s' increspa circolarmente. S' intende anche come quelle crespe acquee vanno divenendo, e più larghe, e minori in altezza quanto più si allontanano dal centro del movimento. Questo stesso ragionamento serve per ispiegare come si formino le onde, o cavalloni nella superficie del mare, e come vadano queste propagandosi in guisa che si facciano vedere anche a grandissime distanze dal luogo ove incominciano a comporsi.

§ 9. Dopo aver spiegato in che consista quel movimento delle lamine, pel quale la polvere si dispone in certe linee, io pongo sott'occhio una seconda esperienza, che non solo confermerà sempre più quanto abbiamo detto, ma ci farà anche conoscere un' altra verità che, cioè, i centri secondarj di vibrazione si formano taluna volta nella stessa area del rettangolo.

Esperienza III.

Sospeso il rettangolo $ABCE$ (fig. 10) nel punto P prossimo al di lui centro, e suonato in S metà del lato BC la polvere si è disposta come mostrano le tracce punteggiate della figura. In questa disposizione di polvere noi abbiamo ritrovati 9 centri secondarj, e sono questi nei punti e, e, e, ec.

Nel principiarsi del fenomeno la polvere viene scacciata da quel centro secondario, e dal primario formando alcune zone circolari come mostra la fig. 11. Continuando a prodursi il suono, quelle dieci zone circolari s' ingrandiscono, e giungono a toccarsi come accenna la fig. 12; successivamente si schiacciano, e si sformano come appare nelle fig. 13, 14; quindi col rompersi delle linee di polvere *o*, *o*, *o* (venendo queste balzate a destra ed a sinistra dalle forze combinate de' centri opposti) ne nasce la fig. 15, ed in fine da questa disposizione di polvere si passa a quella ultima della fig. 10, la quale più non si cangia, quand' anche si continui a suonare la lamina.

Cosi quelle sei curve di polvere della stessa fig. 10 sono generate da otto semicircoli, e da due circoli; questa istessa genesi sorprendentissima ha luogo in tutte le disposizioni di polvere, delle quali parleremo, e può vedersi coll' occhio, purchè s' abbia l'artifizio e la destrezza necessaria per far produrre lentamente il fenomeno.

§ 10. Ritornando al nostro scopo renderò conto d' altre esperienze.

Esperienza IV.

Per indagare se nella vibrazione delle lamine influiscano la situazione del punto d'appoggio, quella del punto ove si applica l' arco da violino, ed il suono che si trae dalla lamina suonata, ho istituiti con quella stessa lastra rettangolare di vetro diversi esperimenti, facendo variare ora alcuna, ora tutte le tre accennate circostanze.

Non ne riferirò che alcuni. Certo si è che le figure nelle quali si dispone la polvere, le quali d' ora in avanti chiamerò curve pulvifere, sono spesso così bizzarre che recano sorpresa all' esperimentatore, massime se suonando con qualche prestezza non gli riesca di vedere com' esse si generino a poco a poco.

Appoggiato il rettangolo nel punto P (fig. 16) in prossimità del lato AE, ed alla distanza da A di $\frac{1}{4}$ AE, si è sonato in S cavandone un suono acuto. Il punto S è dirimpetto a P. Allorchè la polvere ha terminato di disporsi, essa ha segnate le curve che si vedono in questa figura: i grani della sabbia non uscivano da quelle tracce continuando a suonare, ed in alcuni luoghi aveano un movimento nella direzione della curva nella quale si trovavano.

Suonando la lamina nello stesso punto, ma appoggiata in P cioè verso il bordo AE (fig. 17) alla metà della lunghezza AE, e ricavandone egualmente un suono acuto, la polvere si è disposta come mostra questa figura.

Appoggiata (fig. 18) nello stesso luogo la lamina, e suonata in S, cioè distante da C di $\frac{2}{11}$ della lunghezza BC ricavandone un suono grave, la polvere ha formate le curve pulvifere disegnate in questa figura.

Lasciato (fig. 19) lo stesso appoggio alla lamina suonata nello stesso luogo S, ma ricavatone un suono acuto, la polvere si è disposta come mostra la figura.

Da questi quattro esperimenti, e da molti altri che credo inutili riferire, ne ho dedotte queste conseguenze.

I. Il cambiamento del suono prodotto dalla lamina in vibrazione porta sempre una diversità nelle curve pulvifere, nelle quali si dispone la sabbia.

II. Lo stesso fà, generalmente parlando, un cangiamento nell' appoggio: Dico generalmente parlando, perchè, come vedremo in seguito, vi ha dei cangiamenti, che possono farsi impunemente.

III. Una mutazione considerabile del luogo ove si suona la lamina, generalmente parlando, fà disporre la sabbia in figure diverse.

IV. In tutti questi casi però nel punto ove si suona la lamina formasi il centro primario di vibrazione: in altri punti della lamina si producono centri secondarj: dal centro primario, e dai secondarj partono in circolo le ondulazioni vibratorie, le quali producendo nella lamina sussulti di alto in basso gettano la polvere dal centro verso le circonferenze, vale a dire verso quelle parti nelle quali il moto diviene sempre minore. In questo modo que' centri incominciano ad espellere, per dir così, d'intorno a se la polvere sovr' imposta alla lamina, formando aree circolari sbarazzate dai grani di essa. Queste aree che quasi determinano la sfera d' attività di quei centri pervengono finalmente a toccarsi, ed estendendosi in seguito si cangiano di figura, a tal segno che sembra impossibile di riconoscerne la generazione. In somma i grani della polvere obbligati ad allontanarsi da tutti quei centri di vibrazione si dispongono in quei punti ed in quelle curve, nelle quali per ciascuno d'essi la risultante di tutte le forze agenti, e reagenti è nulla; ovvero (essendo di qualche valore) ha per direzione la direzione stessa della tangente della curva. Allora infatti può moversi quel grano di sabbia, ma non può escir giammai dalla curva medesima formata dagli altri grani.

Ne' sopradetti esperimenti non di rado mi è avvenuto di notare questo movimento della polvere pel quale essa cammina lungo la stessa traccia in cui già si era disposta, e mi era paruto uno stranissimo fenomeno prima che le sperienze ed i ragionamenti mi avessero convinto che la cosa era, e doveva essere così.

Di qui nasce adunque che in quelle curve, e punti nei quali la polvere avrà la risultante di tutte le forze che agiscono sopr' essa, eguale a zero, essa resterà nelle stesse curve per quanto si continui a suonare. In quelle poi ove questa risultante è in direzione della loro tangente, la polvere, continuando il suono, si assottiglierà moltissimo, e finalmente anche talvolta spariranno i grani di arena a poco a poco andandosene via. Questo è ciò che di fatti spesso mi è avvenuto di vedere.

Un' osservazione curiosa ho potuto anche fare in tutti gli sperimenti di questo genere. Nei suoni acuti la polvere si dispone in molte curve dotate di spesse e brusche piegature. Nei suoni gravi succede il contrario. Poche sono le tracce della polvere; Piccole le curvità delle medesime, e dolcissime ne sono le piegature o i gomiti.

Con qualche pratica di esperimentare l' ispezione delle figure formate dalla polvere mi faceva indovinare se erano state prodotte da un suono grave, e acuto.

Esperienza V.

§ 11. Divisa la lunghezza *B C* del rettangolo in 22 parti eguali, e fermatolo (fig. 17) nel punto *P'* prossimo al lato *A E*, e distante da *A* una di quelle parti, si è avuta la disposizione della sabbia che mostra questa figura. Il luogo del suono è stato in *S* distante cinque parti da *B*.

Sospeso il rettangolo (fig. 17) nel punto P'' come sopra, distante tre di quelle parti da A, e suonato nello stesso punto S, sonosi generate le curve pulvifere che ci mostra la figura.

Sospeso il rettangolo (fig. 17) nel punto P come sopra, e distante undici parti da A, si è suonato egualmente in S: la polvere allora si è disposta come si vede disegnata.

In questi trè esperimenti il suono è stato sempre acuto, e del medesimo tuono.

Sospeso il rettangolo (fig. 20) in P in prossimità del lato AE, come nei superiori esperimenti, ed alla metà della lunghezza AE, si è suonato nel punto S distante una di quelle parti da B, ricavandone un suono acuto, la polvere ha formate le curve pulvifere indicate da quelle tracce punteggiate.

Suonando nel medesimo luogo il rettangolo (fig. 20), ma sospeso in P' distante otto parti da A, la sabbia ha composte le curve segnate in questa figura.

Sospeso il rettangolo (fig. 21) in un punto P prossimo al lato AE, e distante da A della ventiduesima parte di AE, se avveniva che si suonasse in S distante $\frac{3}{22}$ di BC da B, ricavandone un tuono acuto, la polvere si disponeva nelle curve segnate in questa figura.

Lo stesso rettangolo suonato egualmente in S, e sospeso nel punto P' distante $\frac{9}{22}$ di AE da A, ha fatto nascere le stesse curve pulvifere.

In questi esperimenti il cambiamento di situazione nell' appoggio non ha cangiata disposizione nella polvere.

Riflettendo sopra i due primi esperimenti ebbi opinione, che il cangiamento del punto d' appoggio, stando tutte le altre cose eguali, non facesse cangiare le curve pulvifere, quando questo appoggio in principio situato in un punto d' una curva disegnata dalla sabbia si facesse in seguito passare in qualche altro punto appartenente però ad una di quelle curve. Il ragionamento favoriva questa opinione, particolarmente quando la figura in cui si disponeva la polvere conservava una simetria, indipendentemente dalla posizione del punto d' appoggio.

Il terzo, il quinto, ed il settimo esperimento, nei quali il cambiamento dell' appoggio è stato sempre assoggettato alla condizione di cui si parla, non che una folla d' altri esperimenti istituiti ad oggetto di confermare, o rigettare la mia idea, sia col disporre l' appoggio in diversi punti delle curve pulvifere, sia col situarlo in punti prossimi bensì alle curve, ma fuori di esse, ne hanno pienamente stabilita la verità.

Possiam dunque concludere

„ Ottenuta in una prima esperienza una certa dis-
„ posizione di polvere, se collochiamo l' appoggio in
„ qualunque punto di quelle curve disegnate dalla sab-
„ bia, e si ripete l' esperimento suonando e nello stes-
„ so tuono, e nel luogo medesimo, la sabbia si dispone
„ come se l' appoggio non avesse cangiato di luogo.

Questa conseguenza è della più grande importanza in un' indagine di tanta oscurità.

Esperienza VI.

L' esame delle curve pulvifere nell' esperienze sopra citate mi fece congetturare che se io avessi cangiato il luogo del suono, e che la nuova posizione del punto suonato relativamente all' appoggio, ed alle parti del rettangolo, fosse stata simile alla prima, la figura composta da quelle tracce della sabbia non avrebbe dovuto cangiare. La cosa era d' altronde naturale, pure l' ho assoggettata ad esperimenti.

I. Sospeso il rettangolo della fig. 17 in P e suonato nel punto S' distante da C quanto S da B, allorchè abbiamo ottenuto il medesimo suono che in S, la polvere ha formato le curve medesime.

II. Così il rettangolo (fig. 20) sospeso in P dà le stesse curve pulvifere sia che si suoni in S, sia che si suoni in S', purchè se ne ricavi il medesimo suono, essendo questi due punti S, S' distanti della medesima quantita rispettivamente da B e da C.

Tutti gli esperimenti fatti per tal' oggetto ci hanno dato il medesimo risultato.

Questa eguaglianza nelle curve pulvifere non' và presa in istrettissimo senso matematico. Si dica lo stesso per gli esperimenti, e cose seguenti.

Esperienza VII.

§ 13. Il rettangolo della fig. 21 fermato in P', essendo P' prossimo al lato AE, e distante di $\frac{2}{22}$ di AE dal punto A, lo abbiamo suonato in S' distante $\frac{3}{22}$ dal punto C, e ricavandone lo stesso suono, la polvere si è disposta come nella fig. 20.

Il rettangolo della fig. 22 fermato in P presso l'angolo A, e suonato in S presso l'angolo B, ci ha date quelle curve pulvifere che vi sono segnate.

Lasciato lo stesso punto d'appoggio al rettangolo, lo abbiamo suonato in S' presso l'angolo E ricavandone un egual tuono, e la polvere ha formate le medesime curve che prima.

Il rettangolo della fig. 17 fermato in P, suonato col medesimo tuono in S', ha fatto disporre la polvere come nell'esperienza citata per questa figura quando si è suonato in S.

Ecco che cosa noi concludiamo da questi, e da altri esperimenti i quali tralasciamo.

„ Allor quando la polvere si dispone in una fi-
„ gura simmetrica, e regolare indipendentemente dal
„ punto ove noi suoniamo il rettangolo, (che è il cen-
„ tro primario di vibrazione) e dal punto d'appoggio,
„ di modo che diviso in due parti eguali il rettango-
„ lo risulti anche quella figura divisa in due parti e-
„ guali, e simili; il punto omologo a quello in cui si
„ suona è un centro secondario di vibrazione; e suo-
„ nando in questo punto la lamina, se ne ottiene la
„ stessa disposizione della polvere, quando però siasi
„ ottenuto lo stesso suono. Così la lamina si vibra
„ egualmente suonata in quei due punti omologhi.

Esperienza VIII.

§ 14. Il rettangolo della fig. 17 suonato in S'' nello stesso tuono degli altri esperimenti fatti sopra di esso, ci ha data la medesima disposizione della sabbia.

Il rettangolo della fig. 23 appoggiato nel punto P prossimo al lato AE, e distante $\frac{1}{22}$ di AE dal punto A, se avveniva che si suonasse in S distante $\frac{7}{22}$ di BC da B, e se ne ricavasse un suono medio tra il grave cioè, e l'acuto, la polvere formava le curve disegnate in questa figura.

Lo stesso rettangolo suonato in S' distante $\frac{11}{22}$ da B nello stesso tuono ci dava le stesse curve pulvifere.

Il rettangolo della fig 24 appoggiato in P alla distanza $\frac{3}{22}$ da A, e suonato con suono acuto in S alla stessa distanza da B ha disposta la polvere come si vede.

Lo stesso rettangolo suonato nello stesso tuono in S' distante $\frac{7}{22}$ da B ha date le medesime tracce ove si è collocata la sabbia.

Il rettangolo della fig. 25 appoggiato in P distante $\frac{5}{22}$ da A, e suonato in S alla distanza di $\frac{3}{22}$ da B con suono medio tra 'l grave e l' acuto ha disposta la polvere come mostra la figura.

Lo stesso rettangolo suonato in S' alla metà di BC, e nello stesso tuono ha date le medesime curve pulvifere.

Riflettendo sopra i risultati di questi esperimenti ho concluso

„ Che ottenuta una certa disposizione della pol-
„ vere per aver suonato il rettangolo in un tal punto
„ ricavandone un certo suono, le curve pulvifere non
„ si cangiano se lasciato lo stesso appoggio si trasporta
„ il punto del suono in alcuno dei centri secondarj di

„ vibrazione di modo che quei centri secondarj, ed „ il primario si permutano a vicenda.

Questa singolar proprietà è della più alta importanza nella teoria della vibrazione delle lamine.

V' è poi sempre un centro secondario di vibrazione in quella porzione di lato del rettangolo ch' è tagliato in due punti da una curva pulvifera.

Talvolta anche si trova uno di questi centri nella porzione del lato intercetta tra due curve. Riguardo poi all' interno del rettangolo v' è sempre un centro secondario nel mezzo d' un circolo, di un' ovale pulvifera o di due curve pulvifere le quali si voltano la concavità.

Talvolta anche si trova uno di questi centri nello spazzio compreso tra curve che si rivolgono la convessità.

Avendo però noi il mezzo, come si disse, di produrre il fenomeno della formazion delle curve pulvifere a poco a poco, giungiamo in qualunque figura più complicata a determinare il numero, e la posizione de' centri secondarj. Così abbiamo avuti mille mezzi di ripetere gli esperimenti, sopra cui appoggiasi l' importante legge di vibrazione quì sopra riferita, che cioè, *il centro primario ed i secondarj si permutano a vicenda.*

La disposizione della polvere ottenuta nella fig. 10, e nella 21 ch'è la medesima, si è anche avuta lasciando quegli appoggi, e suonando in uno dei centri secondarj qualunque *c*, *c*, *c*, ec. i quali sono nel contorno del rettangolo.

Esperienza IX.

§ 15. Un suono più o meno acuto produce sempre un cangiamento nelle curve pulvifere, di modo che sospeso il rettangolo in un certo punto, e suonato in un altro punto ricavandone un tuono *M*, se avvenga che restando i medesimi i punti di sospensione, e del suono, si ricavi da quel rettangolo un diverso tuono *N*, le curve pulvifere nei due casi sono diverse. Io non riporto gli esperimenti fatti a questo proposito, poichè sono i più frequenti a rinovarsi quando si esperimenta; e poi ci avverrà di doverne parlare più abbasso.

Con più rettangoli di diverse dimensioni abbiamo istituiti altri esperimenti, ed abbiamo sempre ottenuto le conferme di quelle leggi di vibrazione nel movimento delle lamine da noi sopra enunciate; noi perciò le presentiamo al pubblico con tutta la sicurezza.

§ 16. Per quanto fosse naturale il congetturare, che nelle lamine di figura diversa dalla rettangolare avvenissero gli stessi fenomeni, e quindi le leggi da noi scoperte fossero sempre vere, pure pensammo d'istituire delle sperienze con lamine elastiche di diverse figure, e sempre ne ricavammo le medesime conseguenze.

Esperienza X.

Un triangolo equilatero, per esempio (fig. 26) *ABC* il cui lato è fermato nel centro *P*, e suonato in *S*, essendo *AS* un quarto di *AC*, faceva disporre la polvere in linee rette che da un angolo cadevano sopra la metà della base opposta.

Questa disposizione di polvere accadeva, come mostra la fig. 27. Oltre il centro primario di vibrazione si formavano altri cinque centri secondarj nei punti *e*, *e*, *e* ec. dai quali la polvere era scacciata circolarmente sinchè quei circoli, schiacciandosi, terminavano in linee rette. Dopo le cose dette sopra facilmente concepiremo tutto il processo di questo fenomeno, il quale ci è indicato dalla fig. 27.

Dallo stesso triangolo sospeso nel centro, e suonato alla metà della base in *S*, secondo che si preme più o meno l'arco, ricaviamo un tuono diverso; talvolta un tuono acuto, talvolta un medio, e talvolta un grave.

Questi tre tuoni i quali sono i soli che possono ricavarsi dal punto *S* dispongono la polvere in tre diverse maniere.

La fig. 28 ci mostra come si è disposta la polvere nel tuono acuto, e quanti centri di vibrazione sonosi formati. Essi sono sedici posti nei punti *e*,*e*,*e* ec.

La fig. 29 ci dà la disposizione della polvere nel tuono medio, e i suoi nove centri di vibrazione *e*,*e*,*e* ec. La fig. 30 in fine ci presenta le curve pulvifere ottenutesi col tuono grave, nelle quali si hanno solo quattro centri di vibrazione, e questi nei punti *e*,*e*,*e* ec.

Esaminando attentamente quanto avviene in questa esperienza, nelle superiori, ed in altre che non riferisco, ho concluso

1°. Nei tuoni acuti si forma un maggior numero di centri più che nei gravi ricavati dalla medesima lamina.

2°. Questo numero è tanto maggiore quanto il tuono è più acuto.

3°. Le distanze rispettive dei centri sono tanto più piccole, quanto il tuono è più acuto.

Questi tre tuoni poi misurati sopra la scala diatonica sono come segue; il più grave di tutti è un Cesolfaut calante alquanto nel Corista di Milano.

Con questo esperimento si spiega l' osservazione fatta sopra, che cioè nei tuoni acuti le curve pulvifere sono più spesse, e ripetute sopra le lamine, e che sono dotate di molti flessi contrarj.

Il medio è poi due ottave al di sopra di quella nota grave, e l' acuta è la terza maggiore di tale media, ed è una circostanza rimarcabile, che il numero de' centri formi la serie quadrata 4^2, 3^2, 2^2.

Questa osservazione se si verifichi in altre circostanze può certamente condurre allo scoprimento d' una legge della natura della maggior importanza.

§ 17. Nel paragrafo antecedente ho detto che sonato il triangolo della fig. 28 nel mezzo della base *S* si poteva ottenere uno di certi tre determinati tuoni secondo che si premeva più, o meno con l' arco da Violino. Ora per comprendere come una lamina elastica senza cangiare d' appoggio, e di centro di suono possa rendere diversi suoni, basta riflettere (fig. 8) che il suono è tanto più acuto, quanto sono più strette le zone 1,2, ec. che formano le circolari ondulazioni della lamina.

Queste zone hanno tanta maggior larghezza, quanto maggiore è la percossa nel centro del suono *S*. Possiamo poi aumentare, e diminuire questa percossa premendo più, o meno la lamina elastica in una direzione, o in un' altra con l' arco da Violino.

§ 18. Meditando sopra le esperienze suddette riguardo ai centri di vibrazione, penso che possa spiegarsi il fenomeno in questo modo.

Per ogni tuono che ricavasi da una medesima lamina vi ha sempre una determinata, e fissa distribuzione di centri di vibrazione; di modo che le distanze, e le posizioni rispettive di essi sono determinate per un determinato suono. Non può cangiarsi il tuono, senza che nel tempo si cangi, e la respettiva posizione dei centri, e le loro distanze reciproche, e viceversa impedendo una certa distribuzione di centri, non potrà farsi prendere alla lamina il suono corrispondente.

Una medesima distribuzione di un certo numero di centri porta sempre le stesse curve pulvifere, di modo che dal cangiamento di queste congetturar ne possiamo la mutazione nella posizione dei centri.

Questa teoria è confermata anche dagli esperimenti come vedremo.

Esperienza XI.

§ 19. Appoggiato un rettangolo, un triangolo, o un'altra figura qualunque in un punto, e suonata in un' altro, supponiamo che si ottengano certe determinate curve pulvifere. Abbiamo detto al § 11 che trasportando l' appoggio in qualunque punto delle curve pulvifere non si cambia la loro disposizione, che è quanto dire non alterasi la posizione, e le distanze dei centri di vibrazione. Ora se situeremo l' appoggio in qualche punto prossimo ad una di quelle curve, e suoneremo la lamina, noi vedremo generarsi le medesime curve, ma qualche poco sformate, ed in tal modo disposte che una di esse (quella cioè che era prossima all' appoggio) passa nuovamente per l' appoggio medesimo; ciò che è sicuro indizio che anche la posizione dei centri ha qualche poco variato. Trasportando più lungi l' appoggio, la curva pulvifera continua a piegarsi per passare sotto di esso; sinchè collocato l' appoggio in un centro, o verso di lui, talvolta dalla lamina non si ricava alcun suono, o (ciò che accade ordinariamente) si ricava un tuono affatto diverso dal primo.

Si osservi che il suono che produceva la prima disposizione di polvere cangiasi qualche poco a misura che si trasporta altrove il centro di sospensione; ciò che mostra evidentemente il rapporto che vi è tra un suono, e la posizione dei centri di vibrazione, di modo che questa non può alterarsi se quello nel tempo stesso non soffre qualche modificazione.

Il non aversi poi quel suono primo allor quando si pone l' appoggio in un centro di vibrazione, è una facile ed immediata conseguenza della teoria stabilita al § antecedente.

Abbiamo detto che tal volta collocando l' appoggio in un centro di vibrazione non potevasi ricavare alcun suono dalla lamina; ciò accadeva in quelle lamine dalle quali non ci era stato possibile ricavare che un solo tuono, e nelle quali non si poteva per conseguenza ottenere che una sola disposizione di centri, di modo che questa impedita, la lamina non potea concepire alcuna vibrazione sonora.

Esperienza XII

§ 20. In qualunque esperimento, pel centro di appoggio passano sempre uno, o più rami delle curve pulvifere, di modo che la lamina altri tuoni non può rendere, se non se quelli pei quali i centri di vibrazione sono disposti in tal guisa che delle curve pulvifere che si producono, una o più possa passare per l' appoggio. Per questo motivo ci è avvenuto spesso di non potere ricavare da una lamina appoggiata, e suonata in un certo luogo che uno, o due suoni, mentre egualmente suonata, ma fermata in altro luogo se ne aveva un maggior numero.

Così suonato il quadrato *ABCD* della fig. 31 nella metà del lato, e sospeso nel centro *P*, non se ne potevano ricavare che due tuoni, uno grave, che dava la disposizione della polvere rappresentata dalla fig. 31; la quale ha quattro centri di vibrazione, ed un tuono acuto, il quale fa disporre la polvere come nella fig. 32, che ha dodici centri *c*,*c*, ec di vibrazione.

Se si sospendeva altrove il quadrato per esempio verso *H*, e si suonava nello stesso punto *S* noi ne ottenevamo un maggiore numero di tuoni diversi. Il quadrato è di vetro, ed il suo lato di 6 pollici in punto.

§ 21. A questo proposito giova citare un fenomeno curioso, e la cui spiegazione dipende intieramente dai principj da noi stabiliti.

Se nel fare alcuno esperimento si preme con uno stile la lamina, facendo la pressione in qualche punto di una curva pulvifera, non si cangia il suono, ne alteransi le curve; se pel contrario la pressione si fa in qualunque altro punto, la lamina, o non concepisce più alcun suono, ciò che però accade raramente, o ne concepisce uno tutto diverso dal primo, ed un nuovo ramo di curva pulvifera passa sotto la punta dello stile che premeva la lamina; di modo che puossi far passare sempre una curva pulvifera per qualunque punto piaccia a taluno di segnare in quella guisa sopra la lamina.

Facil cosa è spiegare tutto questo: facendosi la pressione in alcun punto delle curve pulvifere, essa si fa in un luogo ove la risultante di tutti gli sforzi che agiscono sopra la polvere, o è nulla, o è in direzione della tangente della curva; quindi questa pressione agendo per impedire il tremolìo delle parti sottoposte alla polvere, non può obbligarla a sortire dal luogo ove si trova.

Quando poi la pressione si fa in un altro punto, allora è obbligata ad alterarsi tutta la disposizione dei centri di vibrazione, giacchè non è più libera quella porzione di lamina, che permetteva una tale disposizione, e perciò quella disposizione che eravi avanti la pressione, non può esservi più quando questa sussiste. Ora se la lamina sarà tale che possa formarsi un' altra disposizione di centri, delle cui curve pulvifere una passi per quel punto di pressione, ed una pel punto d'appoggio, allora ricaveremo dalla lamina quel suono che a quella disposizione si conviene; e nel caso contrario la lamina non potrà mai renderci un suono qualunque.

Esperienza XIII.

Questa tredicesima esperienza confermerà le teorie stabilite, e spiegherà che cosa avvenga nelle lamine della stessa materia, ma di diversa grandezza, e di simil figura.

Nel triangolo equilatero di vetro ABC della fig. 33, che è lo stesso della fig. 26 si è divisa la perpendicolare, o altezza AE in un certo numero di parti eguali, quindi sospeso in ciascuna di esse, e suonato in E, metà della base BC, in qualunque punto di sospensione non abbiamo ottenuti che tre tuoni.

Se questo punto di sospensione si prendeva in P essendo $PA = \frac{1}{4}\ AE$, il più grave di quei tre tuoni era un Befà crescente il medio la sua sedicesima superiore, e il più acuto la sua diciottesima.

Il tuono grave disponeva la polvere come la fig. 35; la sua sedicesima come la fig. 34, e la sua diciottesima come la fig. 33.

Si vede anche da questo esperimento che i centri sono tanto più prossimi fra di loro, quanto è più acuto il tuono; di più la formazione delle curve pulvifere nelle tre figure segue una medesima legge. Nella fig. 34 essendo i centri di vibrazione più distanti che nella fig. 33, (giacchè nella base di questa se ne trovano 7, ove nella base della 34 se ne trovano 5) non possono formarsi che due soli di quei rami di curve, dei quali ne sono tre nella fig. 33. L'ispezione della figura dice quali questi siano.

§ 23. Se il triangolo della fig. 34. fosse più grande, di modo che potesse aversi nella base il numero dei centri, i quali trovansi nella fig. 33; le curve pulvifere avrebbero lo stesso numero di rami nelle due figure, e sarebbero intieramente simili. Questa congettura l' abbiamo ancor verificata con l' esperimento.

Per la fig. 35. non avendo luogo che la formazione di tre centri nella base, due cioè agli angoli, ed uno nel punto del suono E, non vi si è prodotto che un solo ramo di curva, il quale altro non è che quel semicircolo, alquanto però sformato, che incontravasi nelle altre due figure attorno al centro primario di vibrazione. Ingrandendo questo triangolo a segno che nella base potessero capirci cinque centri di vibrazione, allora le curve pulvifere ottenute con quel tuono grave sarebbero simili a quelle della fig 34, ed anche sarebbero, e dello stesso numero, e simili a quelle della fig. 33 se s' ingrandisse in tal modo, che potessero capirci sette centri di vibrazione.

Le distanze $m\,n$ in queste tre figure essendo strettamente legate alle distanze dei centri di vibrazione, noi le prendiamo talvolta per misura di rapporto di quelle distanze medesime.

§ 24. Il triangolo della fig. 36 è simile a quello delle figure precedenti. Esso è egualmente di vetro della medesima grossezza, ed il suo lato è la metà di quello del triangolo precedentemente esperimentato.

Sospeso questo piccolo triangolo in un punto omologo, e suonato in un punto omologo ricavandone un tuono eguale alla terza del tuono m del paragrafo antecedente, la polvere si è disposta come mostra questa fig. 36. La larghezza di $m\,n$ nella fig. 36 era precisamente eguale a quella di mn nella fig. 34.

Da questo piccolo triangolo non abbiamo mai potuto ricavare il suono grave M, e certamente la ragione si è perchè il lato $B'C'$ è minore della distanza mn della figura 35; bensì ricavando dal piccolo triangolo la quinta del tuono M, si è ottenuta una disposizione di polvere simile a quella che nell' altro triangolo ci ha dato la terza; disposizione che ci è rappresentata dalla figura 34.

Ricaveremo da tutto questo „ che in due figure „ simili suonate ed appoggiate in punti omologhi le „ curve pulvifere sono simili quando i due tuoni ch'esse rendono possono produrre in esse il medesimo „ numero di centri, ed egualmente disposti; in generale nelle piccole i tuoni più acuti produrranno le „ curve simili a quelle prodotte nelle grandi dai tuoni più gravi, e lo stesso tuono non può mai dare in „ due figure simili di diversa grandezza e di egual materia curve pulvifere che siano dello stesso numero „ di rami, e simili tra di loro. Quando le lamine sono della medesima materia, e della stessa grossezza, „ ma dissimili di figura e diverse di grandezza, il medesimo tuono produce una medesima disposizione di „ centri, di maniera che questa non dipende dalla figura geometrica e dalla grandezza della lamina; così „ il tuono che produce la disposizione della polvere „ nel rettangolo della figura 16 è quello stesso che fà „ disporre la polvere nel triangolo della fig. 34. In quel „ rettangolo quella disposizione di centri è ripetuta più „ volte, e quindi sono successivamente ripetute quelle „ curve pulvifere; se il rettangolo fosse prolungato si

„ ripeterebbero altre volte quelle curve, stando sem-
„ pre eguale il tuono che da esso si ricava.

§ 25. Si paragonino ora tra loro le vibrazioni prodotte in lamine di diversa materia.

Noi abbiamo assoggettate ad esperimenti lamine di ottone, d'argento, di latta, di noce, d'acero, d'osso, e di più altre materie, e tutte producono i medesimi fenomeni.

La polvere sparsa sopra di esse si dispone in certe determinate curve allorchè con un arco da violino si vibrano in tal guisa che concepiscano un suono. Oltre il centro primario, si formano i centri secondarj di vibrazione, come nel vetro, e si riscontrano in ogni esperimento le medesime leggi di vibrazione.

Alcune però di queste lamine si vibrano più facilmente di altre; così per esempio l' osso è la materia più cattiva nel concepire qualche vibrazione che renda suono, di tutte quelle citate qui sopra.

In altra occasione io renderò conto d' una serie di esperimenti istituiti per iscoprire con questo mezzo quali siano i legni ed i metalli i quali con più facilità si mettono in un movimento di vibrazione. Sapremo allora con sicurezza quali siano le materie da adoperarsi perchè gl' istromenti dotati di cassa armonica riescano i più sonori; nè questa ricerca sarà senza utilità per la musica.

Esperienza XIV.

§ 26. Coll'intendimento poi di confrontar anche le vibrazioni nelle lamine di diversa materia ho preso due figure eguali, una per esempio di vetro, e l' altra di ottone, o due di qualunque altre materie, queste appoggiate in punti omologhi e suonate in punti omologhi, hanno prodotto talvolta le medesime curve pulvifere. In conseguenza v' erano i medesimi centri ed egualmente disposti tra di loro. I due tuoni però che le producevano non erano eguali. Era più grave quello ottenuto dalla lamina meno elastica, di modo che si può concludere „ che il suono dipende e dalla mag- „ gior o minor vicinanza dei centri, e dalla elasticità „ della materia componente la lamina. Ad eguali cur- „ ve pulvifere abbiamo sempre trovato più acuto il „ tuono, che si produceva dal vetro.

La grossezza della lamina sonora ha ancora che fare in queste vibrazioni.

Ma io riserbo ad un' altra occasione di parlare più estesamente del rapporto tra i diversi tuoni, *(a)* del numero dei centri di vibrazione in ciascun tuono, e della qualità della materia della lamina che si vibra. Basti per ora aver esposto i fondamenti di questa teo-

---

(a) Avendo avuto la curiosità di ricercare se tra i diversi tuoni, i quali si ricavano suonando il triangolo di vetro della fig. 26 poteva aversene una intera ottava, io mi accinsi all' esperimento coll' opera di due celebri professori di Musica, Rolla ed Asioli, i quali si sono compiaciuti con una pazienza veramente straordinaria di aiutarmi colla squisitezza del loro orecchio nella ricerca dei tuoni qualunque volta mi è accaduto di doverli conoscere nell' esperienze delle quali mi vò occupando.

Divisa dunque la perpendicolare che dal vertice cade sopra la base in 38 parti eguali, e la metà della base medesima in 29, incominciando le divisioni dal punto d' intersecazione della base, e della perpendicolare, punto ch' io considererò come origine delle coordinate per determinare con esse il punto d' appoggio, e quello del tuono, supponendo verticali quelle parallele alla perpendicolare, ed orizzontali le altre parallele alla base, ho trovato i tuoni come segue ria: nella stessa occasione dirò eziandio alcuna cosa d' un altro fenomeno di vibrazione, che qui mi contento d' annunziare soltanto se facciamo vibrare una lamina di vetro suonandola secondo il solito con un arco da violino, e se a questa vi attacchiamo una corda elastica, la quale essendo ben tesa vada ad unirsi con una seconda lamina sonora, egualmente sospesa che la prima le vibrazioni della prima lamina si communicano per mezzo di quella corda alla seconda lamina, e sopra di questa vedesi la polvere sparsa formare le curve pulvifere, come si formavano sulla prima lamina. Le leggi di questa communicazione di vibrazioni sono della più alta importanza nella teoria dell' Acustica.

Appoggio in	9. Ordi. Vert. 0. Oriz.	Suono in 0. Oriz. = Tuono Cesolfaut
Appoggio in	8. Vert. 11. Oriz.	Suono in 11. Oriz. = Tuono Elamì.
Appoggio in	6. Vert. 1. Oriz.	Suono in 4. Oriz = Tuono Fefaut.
Appoggio in	30. Vert. 4. ½ Oriz.	Suono in 9. Oriz. = Tuono Delasolrè.
Appoggio in	4. Vert. 15. Oriz.	Suono in 19. Oriz. = Tuono Gesolreut.
Appoggio in	8. Vert. 10. Oriz.	Suono 6. Oriz. = Tuono Alamirè.
Appoggio in	4. Vert. 4. Oriz.	Suono 11. Oriz. = Tuono Bemì.
Appoggio in	13. Vert. 0. Oriz.	Suono 0. Oriz. = Tuono Cesolfaut alto.

Non mi è per ora riuscito di riconoscere la legge con cui si connettono insieme i differenti tuoni, e le relative posizioni de' punti di appoggio e di suono.

§ 27. Concluderò questa memoria accennando il modo di determinare coll' analisi matematica le curve pulvifere, trovandone l' equazione generale di quelle.

Siano (fig. 37) A, B, C, ec. tanti centri di vibrazione dati di posizione, e sia $Z\,Z$ questa curva, la proprietà che debbe avere è la seguente.

Un grano d'arena posto in M è spinto, e costretto a muoversi in virtù delle forze di vibrazione che si diramano dai centri A, B, C, ec. e che agiscono secondo le direzioni $A\,M, B\,M, C\,M$, ec. Egli adunque seguirà la via della risultante, e questa risultante esser debbe la stessa tangente alla curva pulvifera nel punto M.

Troviamo questa risultante, e la di lei direzione.

Sia nel centro A l' origine delle coordinate, siano a, b le coordinate del punto C, parimente a', b' quelle del punto B, ec. siano x, y le coordinate del punto M, cioè

$A\,P = x$, $P\,M = y$, ed avremo

$$A\,M = \sqrt{x^2 + y^2} = \delta$$

$$C\,M = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = \delta'$$

$$B\,M = \sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2} = \delta''$$

Supponiamo che le forze di vibrazione le quali si comunicano ad un grano di polvere, siano proporzionali ad una certa funzione delle distanze; siano cioè indicate da

$$F(\delta),\ F(\delta'),\ F(\delta'')$$

Decomponendo ciascuna di queste forze secondo i due assi ortogonali, la forza $F\ (\delta)$ si decomporrà in queste

due $\frac{x}{\delta}\ F\ (\delta)$ parallelamente alle x,

$\frac{y}{\delta}\ F\ (\delta)$ parallelamente alle y;

La forza $F\ (\delta')$ in quest' altre due

$$\frac{(x-a)}{\delta'}\ F\ (\delta')\ ,\ \frac{y-b}{\delta'}\ F\ (\delta')$$

La forza $F\ (\delta'')$ in queste due

$$\frac{x-a'}{\delta''}\ F\ (\delta''),\ \frac{y-b'}{\delta''}\ F\ (\delta''),$$

e così di seguito se vi fossero più centri di vibrazione.

La risultante adunque di queste forze sarà

$$\sqrt{\left\{\left[\frac{x}{\delta}F(\delta)+\frac{x-a}{\delta'}F(\delta')+\frac{x-a'}{\delta''}F(\delta'')\right]^2 + \left[\frac{y}{\delta}F(\delta)+\frac{y-b}{\delta'}F(\delta')+\frac{y-b}{\delta''}F(\delta'')\right]^2\right\}}$$

e la tangente che questa risultante fa con l' asse degli x sarà

$$\frac{\frac{y}{\delta}F(\delta)+\frac{y-b}{\delta'}F(\delta')+\frac{y-b'}{\delta''}F(\delta'')}{\frac{x}{\delta}F(\delta)+\frac{x-a}{\delta'}F(\delta')+\frac{x-a'}{\delta''}F(\delta'')}=\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Tal' è l' equazione differenziale delle curve pulvifere. Onde integrarla completamente conviene prima conosscere la natura della funzione F; Nè ciò sarà difficile, almeno col mezzo di supposizioni particolari per la forma di F. Me ne occuperò in altra memoria che avrà per oggetto la natura, e proprietà di questo nuovo genere di curve.

§ 28. Avvertiamo in fine che chiunque vorrà accingersi a ripetere questi esperimenti, non solo può farlo con lamine eguali alle nostre sopra citate, ma con qualunque, e di qualsiasi figura a lui piaccia di prescegliere. Egli non troverà in vero le stesse curve da noi trovate, ma dagli esperimenti che istituirà avrà sempre la conferma delle leggi vibratorie da noi scoperte.

Noi le abbiamo verificate in lamine circolari, elitiche, triangolari, poligone, ed anche d' irregolare contorno.

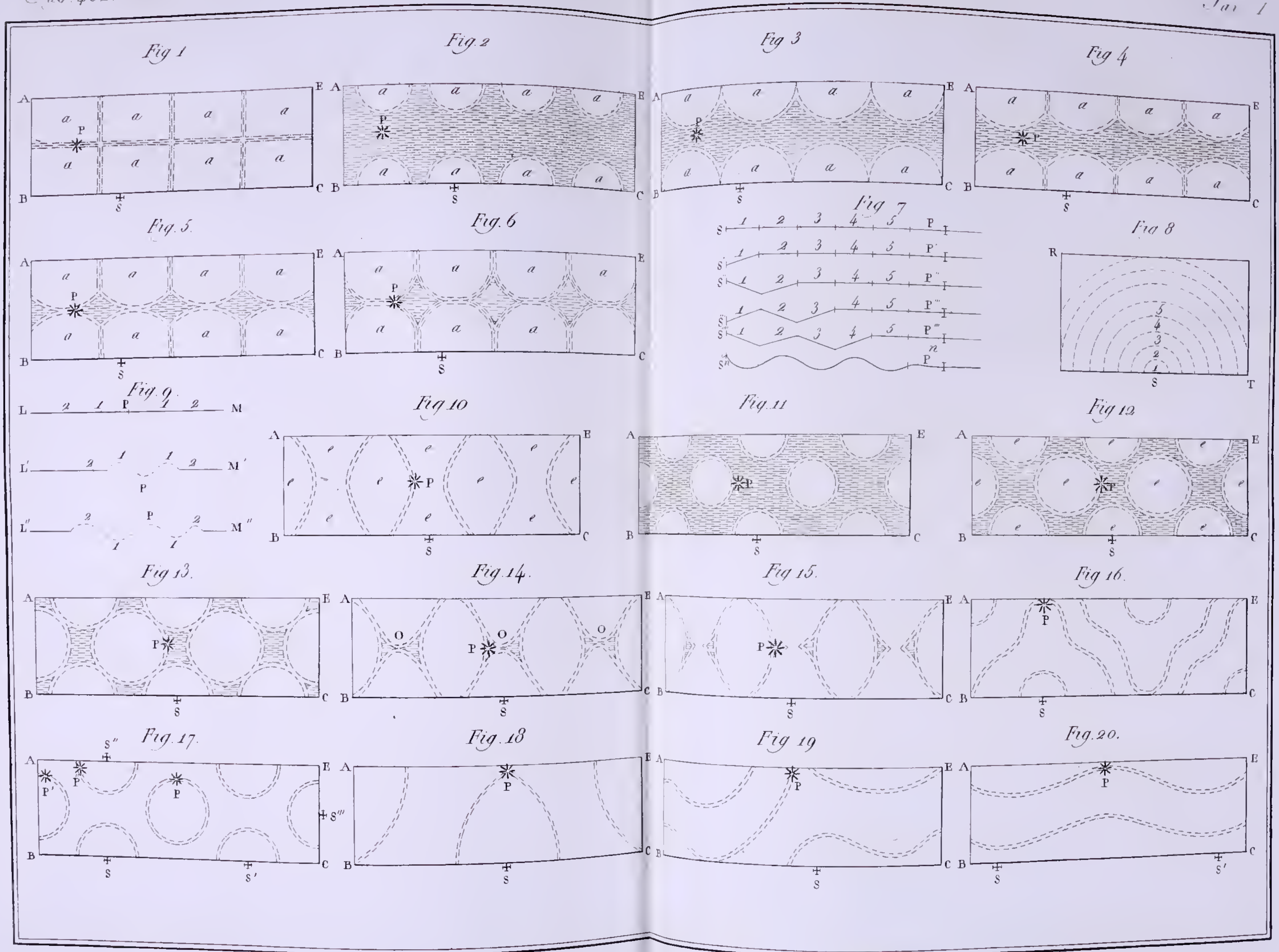


Fig 1
Fig. 2
Fig 3
Fig 4
Fig. 5.
Fig. 6
Fig 7
Fig 8
Fig. 9.
Fig 10
Fig. 11
Fig 12
Fig 13.
Fig 14.
Fig 15.
Fig 16.
Fig. 17.
Fig. 18
Fig 19
Fig. 20.

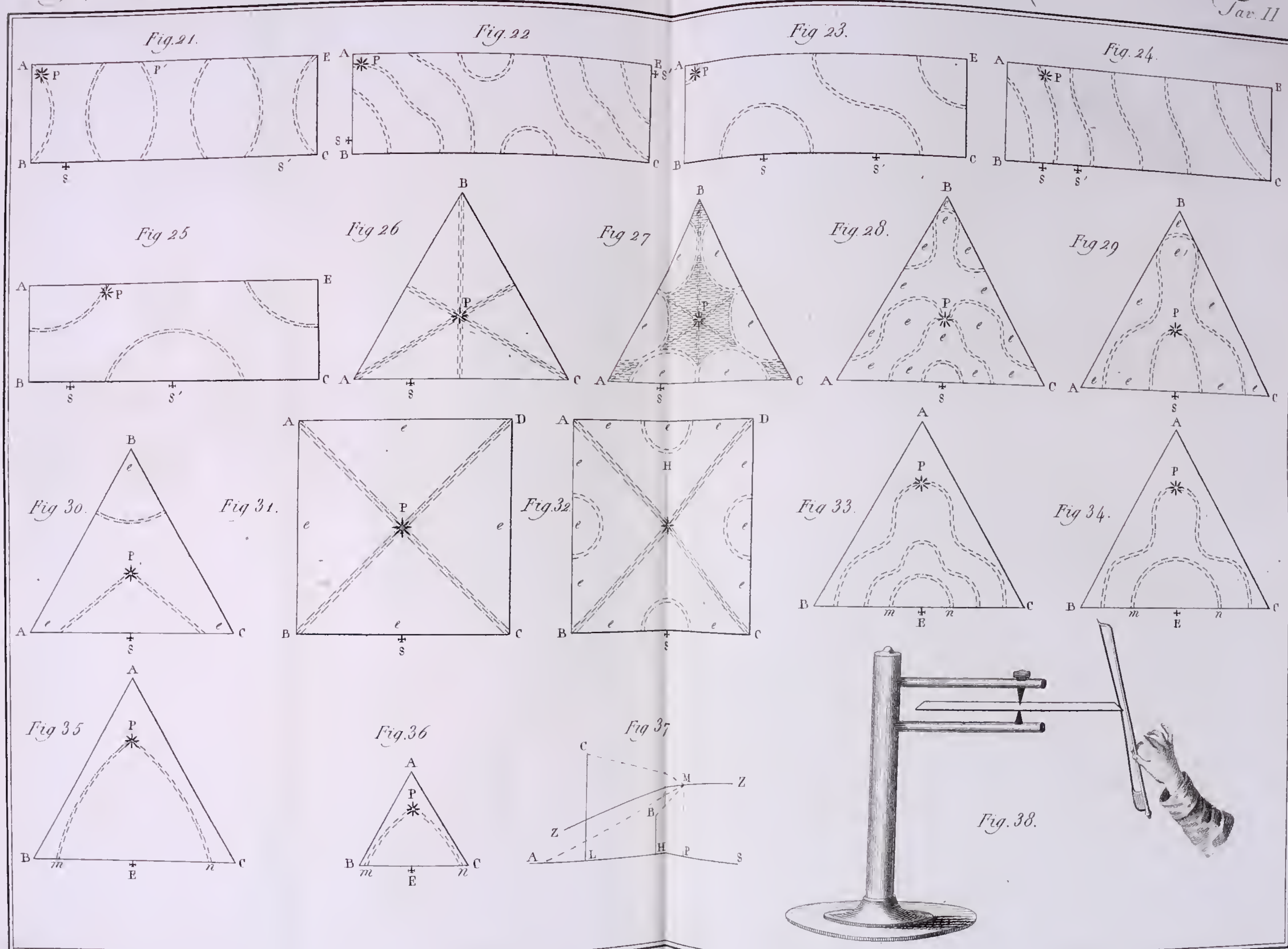


Fig. 21.
Fig. 22
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28.
Fig. 29
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35
Fig. 36
Fig. 37
Fig. 38.

DELLA INSOLUBILITÀ

Delle Equazioni algebraiche generali di grado superiore al 4°, qualunque metodo si adoperi algebraico esso siasi, o trascendentale.

Di Paolo Ruffini

Ricevuta ai 22 Novembre 1806.

Se le Equazioni algebraiche generali di grado superiore al 4°. sono tutte insolubili algebraicamente, come ho già dimostrato *(a)*, potranno poi esse, o potrà qualcuna fra loro ricevere soluzione trascendentale; potrà cioè trovarsi una qualche funzione determinata qualunque essa siasi dei suoi coefficienti avente un numero finito di termini, o, come dicesi, esatta, la quale sostituita in luogo della incognita faccia verificare l'Equazione supposta? Rispondo che no, e la dimostrazione di questa proposizione formerà il soggetto della presente

---

(a) Teor. gen. delle Equaz., Mem. sulla Insolub. delle Equaz. algeb. gen. di grado sup. al 4°. T. IX. Soc. Ital. delle Scienze.

Memoria. E' vero, che qualunque Equazione algebraica di grado dispari è fornita di una radice reale, che qualunque Equazione algebraica è composta di tanti fattori di 1°, o di 2° grado tutti reali; ma non è già per questo, che simili radici, e simili fattori siano sempre attualmente determinabili col calcolo ed esprimibili mediante i coefficienti della data. I discorsi, che sono per fare, mi lusingo, che proveranno essere queste quantità in generale assolutamente incapaci di espressione esatta, algebraica, o trascendentale, nel modo stesso, con cui per esempio il $\sqrt{(a^2+b^2)}$, ove le quantità a, b siano indeterminate, è in generale assolutamente incapace di un' esatta espressione razionale.

(I.) 1. Sia $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + \text{ec.} + V = 0$.

un' Equazione algebraica generale di grado m, e si chiamino x', x'', x''', x^{IV}, ec. $x^{(m)}$ le sue radici. Esprimasi con la lettera P una funzione dei coefficienti A, B, C, ec. qualunque algebraica, o trascendentale, e collocati invece de' coefficienti i loro valori espressi per le radici,

divenga $P = \Phi(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)})$, essendo

questa pure una funzione algebraica, o trascendentale. Praticata su della P espressa con i coefficienti una sola qualsivoglia operazione di calcolo, che come nel (n. 1. Mem. sopra alcune prop. gen. delle Funzioni. Tom. XIII- Società Italiana) denoterò con la lettera Ψ, sia $y = \Psi(P)$ e posto in generale il valore della $\Psi(P)$ moltiplice corrispondentemente ad uno stesso valore della P, abbiansi dalla y gli n valori tra loro diversi

$$y' = \Psi'(P),\, y'' = \Psi''(P),\, y''' = \Psi'''(P), \text{ ec. } y^{(n)} = \Psi^{(n)}(P).$$

Essendo la P una funzione delle x', x'', x''', ec. $x^{(m)}$, tale dovrà essere ancora la y: disegnata adunque quest'ultima, mentre esprimesi con le x', x'', x''', ec. con la lettera ϕ, avremo

(II) $$P = \Psi(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)})$$

ed insieme

$$y = \phi(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)})$$

2. Teor. I°. Se sotto una qualche permutazione fra le x', x'', x''', ec. la P conserva il proprio valore, e sotto la permutazione medesima la y lo cambia; io dico, che tutti i risultati tra loro diversi, i quali per questa permutazione ottengonsi dalla y, deggiono essere tanti valori della $\Psi(P)$, e però essere contenuti nella serie delle y', y'', y''', ec. (n. prec.)

Poichè si suppone che la P si conservi la medesima, e la y si cambi sotto una qualche permutazione, supponghiamo che ciò succeda sotto quella permutazione semplice di primo genere, sotto cui tolta dal primo luogo della funzione la radice, che vi esisteva, ivi passa la radice del luogo secondo, in questo portasi la radice del luogo terzo, nel terzo quella del quarto, nel quarto quella del quinto, e nel quinto finalmente quella del primo. Per questa supposizione avremo

(III) $$P = \phi(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)}) = \phi(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x')(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)})$$
$$= \phi(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x')(x'')(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)}) = \phi(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x')(x'')(x''')(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)})$$
$$= \phi(x^{\text{V}})(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)}),$$

di cinque risultati

$$(\mathrm{IV})\quad \phi\,(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)}),\ \phi\,(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x')(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)}),$$
$$\phi\,(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x')(x'')(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)}),\ \phi\,(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)}),$$
$$\phi\,(x^{\mathrm{V}})(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)}),$$

che perciò provengono dalla y, saranno per la ipotesi fra lor disuguali. Indicata poi con la lettera Π l' operazione inversa a quella che presentasi dalla Ψ, giacchè abbiamo $y = \Psi\,(P)$ (n. prec.) sarà viceversa $P = \Pi\,(y)$, e però

$$(\mathrm{V})\quad \Pi\left(\Phi(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{IV}})\ldots(x^{(m)})\right)=\Phi(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)}).$$

Ciò posto, prendasi uno qualunque dei risultati (IV) diverso dal primo, per esempio il terzo, e si eseguisca su di esso la precedente operazione Π. Essendo la (I) una Equazione generale, ciò che dicesi di una delle sue radici deve dirsi egualmente di ciascuna delle altre. Dunque avendosi per la ipotesi l' Equazione (V), dovrà essere ancora

$$\Pi\left(\phi(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x')(x'')(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)})\right)=\Phi(x''')(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{V}})(x')(x'')(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)}),$$

e quindi per le Equazioni (III) dovrà essere

$\Pi\left(\Phi\,(x''')\,(x^{\mathrm{IV}})\,(x^{\mathrm{V}})\,(x')\,(x'')\,(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)})\right)=P$. Dunque tanto la $\Phi\,(x')\,(x'')\,(x''')\,(x^{\mathrm{IV}})\,(x^{\mathrm{V}})\,(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)})$, come la $\Phi\,(x''')\,(x^{\mathrm{IV}})\,(x^{\mathrm{V}})\,(x')\,(x'')\,(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)})$, somministrandoci col mezzo della operazione Π la quantità P, saranno valori della Ψ *(P)*; ma ciò che si è ora detto del terzo dei risultati (IV) dicesi egualmente degli altri tutti; e ciò che si è dimostrato presentemente rapporto alla permutazione supposta, è chiaro, che si dimostra in egual modo rapporto ancora a tutte le altre. Dunque ec.

3. I. Ritenuto che la P conservi il valor proprio, e la y lo cambi per la permutazione supposta nel (n. prec.), denominiamo $y', y'', y''', y^{\text{IV}}, y^{\text{V}}$ i cinque valori della y uguali ai precedenti (IV), cosichè y' uguagli il valor primo, y'' uguagli il valor secondo, y''' il terzo, e così di seguito. Ora pel Teorema dimostrato nel (n. 5. Mem. Proprietà gen. delle Fun.) i valori della y devono essere tutti funzioni l' uno dell' altro, cosichè la y'' deve essere una funzione della y', e così la y''' della y'', la y^{IV} della y''', ec. Inoltre poichè quella operazione di calcolo, per cui dal valore y' producesi l'altro y'', corrisponde evidentemente alla permutazione fra le x', x'', x''', ec., per cui dal primo dei risultati (IV) deriva il secondo, e perchè per la permutazione medesima dal risultato secondo ne nasce il terzo, dal terzo il quarto, dal quarto il quinto, e dal quinto il primo; ne segue che per la stessa sovraccennata operazione di calcolo praticata sopra y'' dovrà venirne y''', da y''' dovrà risultare y^{IV}, da y^{IV} ne verrà y^{V}, e da y^{V} tornerà y'. Dunque supposto $y''=f(y')$, dovrà essere ancora $y'''=f(y''), y^{\text{IV}}=f(y'''), y^{\text{V}}=f(y^{\text{IV}}), y'=f(y^{\text{V}})$ esprimendosi da questa f una stessa funzione, e sarà quindi pel (II. n. 7. Mem. Prop. gen. delle Funz.)

$$\text{(VI)}\quad y''=f(y'),\ y'''=f^2(y'),\ y^{\text{IV}}=f^3(y'),\ y^{\text{V}}=f^4(y'),\ y'=f^5(y').$$

II. Se la P si conservasse la stessa, e la y si cambiasse per un' altra permutazione fra le x', x'', x''', ec. semplice diversa dalla precedente, anche allora si verificherà evidentemente quanto abbiamo ora detto; e per conseguenza se una permutazione semplice fra le x', x'', x''', ec., qualunque essa siasi, mentre lascia la P dello stesso valore, produce poi nella y un numero in generale g di risultati tra loro diversi, e chiamati questi $y', y^{(a)}, y^{(a+1)}, y^{(a+2)}$, ec. $y^{(a+g-2)}$, se sia $y^{(a)} = \Psi(y')$, espressa con la Ψ la funzione corrispondente ne verrà

(VII) $$y^{(a)} = \Psi(y'), y^{(a+1)} = \Psi(y^{(a)}), y^{(a+2)} = \Psi(y^{(a+1)}), \text{ ec.}$$

$$y^{(a+g-2)} = \Psi(y^{(a+g-3)}), y' = \Psi(y^{(a+g-2)}), \text{ e però}$$

$$y^{(a)} = \Psi(y'), y^{(a+1)} = \Psi^2(y'), y^{(a+2)} = \Psi^3(y'), \text{ ec.}$$

$$y^{(a+g-2)} = \Psi^{g-1}(y'), y' = \Psi^g(y').$$

4. Teor. 2. Supponghiamo, che la P mantenga il proprio valore tanto sotto la permutazione fra le prime cinque radici, per cui nel (n. 2.) si è supposto, che abbian luogo le Equazioni (III), come ancora sotto una o più delle altre permutazioni semplici, che possonsi fare due, o tre, o quattro delle stesse cinque radici. In questa ipotesi io dico, che se i valori (IV) della y sono fra loro disuguali, essa y dovrà conservare il proprio valore per tutte le altre ora indicate permutazioni.

Vogliasi che una di queste seconde permutazioni, per cui la P deve conservare il proprio valore, e la y, se è possibile, cambiarlo, sia la permutazione fra le radici dei primi tre luoghi, cosichè oltre le Equazioni (III) si abbiano ancora le altre.

$$P = \Phi(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)}) = \Phi(x'')(x''')(x')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)})$$

(VIII) $= \Phi(x''')(x')(x'')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots\ldots(x^{(m)})$, e i tre risultati

(IX) $\Phi(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)})$, $\Phi(x'')(x''')(x')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)})$,

$\Phi(x''')(x')(x'')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)})$, valori tutti e tre della

y (n. 2.), che chiamerò corrispondentemente $y', y^{(a)}, y^{(a+1)}$, siano, se è possibile, tra loro disuguali, essendolo già fra loro i risultati (IV). In questa ipotesi o si vuole che il risultato $y^{(a)}$ sia uguale ad uno del (IV), o non si vuole.

I. Abbia luogo il primo di questi due casi, e sia quindi $y^{(a)} = f^p(y')$, esprimendosi dalla $f^p(y')$ uno qualunque dei valori (VI) (n. 3.) diverso dal primo y', onde p uguagli uno dei numeri 1, 2, 3, 4. Ciò posto, mediante un discorso simile a quello, che si è fatto nel citato (I. n. prec.) veggo, che i tre risultati $y', y^{(a)}, y^{(a+1)}$ per la ipotesi sono tali, che nella maniera medesima, con cui da y' producesi $y^{(a)}$, così da questo $y^{(a)}$ ne nasce $y^{(a+1)}$, e da $y^{(a+1)}$ ritorna y'. Dunque avendosi per la supposizione $y^{(a)} = f^p(y')$, dovrà essere ancora $y^{(a+1)} = f^p(y^{(a)})$, $y' = f^p(y^{(a+1)})$, e per conseguenza $y^{(a+1)} = f^{2p}(y')$, $y' = f^{3p}(y')$. Ora pel valore del numero p il prodotto $3p$ non può essere nè zero, nè divisibile esattamente per 5; dunque pel (V. n. 10. Mem. Prop. gen. delle Funz.) la $f^{3p}(y')$ dovrà uguagliare uno dei valori $y'', y''', y^{\mathrm{IV}}, y^{\mathrm{V}}$ (I. n. 3.), ed uno per conseguenza di questi valori verrà ad essere uguale ad y'; ma ciò è contro la supposizione. Dunque non potrà essere $y^{(a)}=f^{p}(y')$. Nella maniera medesima si dimostra non potere neppur essere $y^{(a+1)}=f^{p}(y')$.

II. Sono i due risultati $y^{(a)}$, $y^{(a+1)}$ disuguali dagli altri (VI). Fatto in questo caso nel (II n. prec.) $g=3$, e posto che i valori della y ivi esistenti siano i tre supposti presentemente dalla seconda delle serie (VII) avremo

$$y^{a}=\Psi(y')=\Phi(x'')(x''')(x')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{VI}})\ldots.(x^{(m)}),$$

$$y^{(a+1)}=\Psi^{2}(y')=\Phi(x''')(x')(x'')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{VI}})\ldots.(x^{(m)}).$$

Si pratichi sulla funzione $y^{(a)}=\Psi(y')$ l' operazione supposta nel (n. 2), e indicata dalla f (I n. 3), ne verrà $(y^{(a)})=f\,\Psi(y')$, ma osservo che questo risultato $f\,\Psi(y')$ altro non è, che la funzione $F(y')$ del (n. 20 Mem. Prop. gen. delle Funz.), in cui pongasi Ψ in vece di Φ, ed in cui $\alpha=1$, $\beta=1$. Dunque dipendendo tutti i valori della nostra $y=\Psi(P)$ da una sola operazione di calcolo (n. 1); qualunque essa siasi, la $F^{q}(y')$ dovrà per lo stesso (n. 20 Mem. ec.) mentre si faccia q successivamente $=0, 1, 2, 3$, ec. $3.5-1$, somministrare $3.5=15$, valori tra loro diversi della y. Ora avendosi

$y^{(a)}=\Phi(x'')(x''')(x')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)})$, e l' operazione espressa dalla f corrispondendo alla permutazione fra le cinque radici supposta nel (n. 2), ne viene $f(y^{(a)})$, e però $F(y')$, $=\Phi(x''')(x')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x'')(x^{\text{VI}})\ldots.(x^{(m)})$.

Dunque nascendo la $F(y')$ dalla y'

$= \varphi (x') (x'') (x''') (x^{\mathrm{IV}}) (x^{\mathrm{V}}) (x^{\mathrm{VI}}) \ldots . (x^{(m)})$, per una operazione corrispondente a quella permutazione fra le x', x'', x'', ec. che risulta dal porre nel primo luogo la radice del terzo, nel terzo la radice del quarto, nel quarto la radice del quinto, nel quinto quella del secondo, e nel secondo quella del primo; col replicare la stessa operazione successivamente quanto si può, ne viene

$$F^2 (y') = \varphi (x^{\mathrm{IV}}) (x''') (x^{\mathrm{V}}) (x'') (x') (x^{\mathrm{VI}}) \ldots . (x^{(m)}),$$

$$F^3 (y') = \varphi (x^{\mathrm{V}}) (x^{\mathrm{IV}}) (x'') (x') (x''') (x^{\mathrm{VI}}) \ldots . (x^{(m)}),$$

$$F^4 (y') = \varphi (x'') (x^{\mathrm{V}}) (x') (x''') (x^{\mathrm{IV}}) (x^{\mathrm{VI}}) \ldots . (x^{(m)}),$$

$$F^5 (y') = \varphi (x') (x'') (x''') (x^{\mathrm{IV}}) (x^{\mathrm{V}}) (x^{\mathrm{VI}}) \ldots . (x^{(m)}), \text{ e, però}$$

$$F^6 (y') = F^2 (y'); F^7 (y') = F^3 (y'), \text{ ec.}$$

Dunque la $F^q (y')$ non potrà nel nostro caso somministrarci gl' indicati 15 valori, ma per quanto abbiamo detto poc' anzi, ciò non può essere; dovendo tali valori venire necessariamente somministrati dalla $F^q (y')$. Dunque non potrà neppur essere che, mentre rapporto alla P hanno luogo le Equazioni (III), (VIII), siano poi rapporto alla y disuguali fra loro tanto i risultati (IV) come gli altri (IX). Dunque ec.

Se la seconda delle permutazioni semplici ora considerate in vece di riguardare le radici dei primi tre luoghi, riguardi, giusta l' enunciato del Teorema, le radici di altri tre, o di due, o di quattro dei primi cinque luoghi; poichè il numero dei risultati, che ne provengono, è sempre primo col 5 ne viene che sempre potranno effettuarsi i precedenti discorsi, e sempre per conseguenza si verificherà l' esposto Teorema.

5. I. Vogliasi che la P mantenga il proprio valore per la permutazione semplice di 1°. genere fra le radici de' primi tre luoghi e lo conservi insieme per una delle permutazioni semplice di 2°. genere, che possonsi fare fra le radici de' primi quattro luoghi cosicchè si abbiano le Equazioni (VIII), ed in oltre abbiasi l' altra

(X) $$P=\Phi(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)})=\Phi(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x')(x'')(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)}),$$

oppure la

$$P=\Phi(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)})=\Phi(x'')(x')(x^{\mathrm{IV}})(x''')(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)}),$$

oppure la

$$P=\Phi(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)})=\Phi(x^{\mathrm{IV}})(x''')(x'')(x')(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)});$$

Ancora in questo caso io dico la y non potrà cambiar di valore sotto amendue le permutazioni ora supposte, e la dimostrazione di questa proposizione è affatto simile a quella del Teorema precedente. Imperocchè se ciò negandosi, si volessero tra lor disuguali i risultati (IX) già espressi con le y', $y^{(a)}=\psi(y')$, $y^{(a+1)}=\psi^2(y')$ (n. prec.), e posta la prima delle Equazioni (X), si volessero nel tempo stesso tra lor differenti i risultati.

(XI) $$\Phi(x')(x'')(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)}), \Phi(x''')(x^{\mathrm{IV}})(x')(x'')(x^{\mathrm{V}})(x^{\mathrm{VI}})\ldots(x^{(m)}),$$

il secondo de' quali denominerò $y^{(b)}$, e porrò $=\varrho(y')$, denotando con la lettera ϱ qual funzione del valore y' sia l' altro $y^{(b)}$: allora pure o si vorrebbe il valore $y^{(b)}$ uguale ad uno dei due $y^{(a)}$, $y^{(a+1)}$, o non si vorrebbe; se si, facendo un discorso pienamente simile a quello del (I. n. prec.) posto $y^{(b)}=y^{(a)}$, e però $=\psi(y)'$, si troverebbe $y'=\psi(y^{(b)})=\psi^2(y')$, e quindi $y'=y^{(a+1)}$, il che è contro la supposizione; e posto $y^{(b)}=y^{(a+1)}=\psi^2(y')$, si avrebbe $y'=\psi^2(y^{(b)})=\psi^4(y')=\psi(y')$, il che parimente è contro la ipotesi, che se si volesse $y^{(b)}$ diverso da entrambi i valori $y^{(a)}, y^{(a+1)}$, fatto $\psi\varrho(y')=F(y')$, i sei risultati $y, F(y'), F^2(y'), F^3(y'), F^4(y'), F^5(y')$, a cagione dei due numeri 2, 3 primi fra loro dovrebbero essere tutti fra lor disuguali (n. 20. Mem. Prop. gen. delle Funz.), ma ciò non può essere perchè avendosi

$$\varrho(y')=\varphi(x''')(x^{IV})(x')(x'')(x^{V})(x^{VI})\ldots\ldots(x^{(m)}),\text{ e però}$$

$$\psi\varrho(y')=F(y')=\varphi(x^{IV})(x')(x''')(x'')(x^{V})(x^{VI})\ldots\ldots(x^{(m)})$$

col replicare la permutazione, onde la $F(y')$ nasce dalla y', risulta

$$F^2(y')=\varphi(x'')(x^{IV})(x''')(x')(x^{V})(x^{VI})\ldots\ldots(x^{(m)}),$$

$$F^3(y')=\varphi(x')(x'')(x''')(x^{IV})(x^{V})(x^{IV})\ldots(x^{(m)})=y'.\text{ Dunque ec.}$$

Lo stesso discorso e la conclusione stessa è chiaro, che han luogo ancora, quando si voglia, che accada la seconda, oppure la terza delle Equazioni (X).

II. E' facile a vedersi, che i due casi, che sonosi considerati nel (n. 4), e nel (prec. I) non sono che casi particolari d'una legge più generale riguardante le funzioni, il valor delle quali dipende dai coefficienti, e quindi dalle radici di un' Equazione data. Noi però non ci tratterremo presentemente nella determinazione di questa legge generale, giacchè gl' indicati due casi sono sufficienti al nostro intento.

6. I. Prima di procedere innanzi riflettasi che quan-

to abbiamo asserito, e dimostrato nei (n. 3, 4, ec. 12, 40. Mem. della Insolubilità delle Equaz. alg. gener. di grado superiore al 4°. T. IX. Soc. Ital. delle Scienze) rapporto ai risultati, che in una funzione delle x', x'', x''', ec. provengono dalle permutazioni fra radici de' primi cinque luoghi, si verifica evidentemente, tanto se la funzione data contenga, siccome nei (n. ora cit.), solamente cinque radici, come se ne contenga un numero maggiore; tanto se essa funzione sia razionale, siccome è stato supposto nel (n. 2. Mem. ora cit.), come se sia irrazionale, o trascendente.

II. Sia la P, già ridotta, secondo il solito, all'espressione (II), tale, che per tutte le permutazioni semplici, le quali possonsi fare tra le radici de' primi cinque luoghi prese o a due, o a tre, o a quattro, od a cinque, rimanga costantemente la medesima, oppure acquisti solamente i due valori

$$\text{(XII)}\quad \Phi(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)}),\ \Phi(x'')(x')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)}),$$

tra loro diversi. In questa supposizione dai (n. 7, 9. Mem. della Insol. ec.), e dall' osservare che i valori della P tra loro diversi dipendentemente dalle permutazioni supposte non sono che due, apparisce che la P deve conservare il proprio valore 1°. sotto tutte le permutazioni semplici di 1°. genere fra tre quali si vogliono delle radici de' primi cinque luoghi, 2°. sotto tutte le permutazioni semplici di 2°. genere fra le prime quattro delle radici medesime; e 3°. sotto tutte le permutazioni semplici che possonsi fare fra tutte e cinque le radici stesse; onde dovranno necessariamente verificarsi tutte le Equazioni (III), (VIII), (X).

7. Teor. 3°. Essendo la P quale è stata supposta nel (11. n. prec.), io dico, che la y deve conservare il valor proprio sotto quella permutazione semplice di genere 1°., per cui sonosi formati i risultati (IV).

Siano questi risultati, se è possibile, fra loro disuguali, e cangi così la y di valore sotto l' indicata permutazione fra tutte le prime cinque radici. Per tale ipotesi, per la natura della supposta P, e pel (n. 4) essa y dovrà conservare il proprio valore, ogniqualvolta si permutino fra loro tre quali si vogliono delle accennate cinque prime radici. Dunque, permutando le radici dei primi tre luoghi, avremo

$$y' = \Phi(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)}) = \Phi(x'')(x''')(x')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)})$$

e dalla permutazione fra le radici de' luoghi terzo, quarto, e quinto ottenendosi

$$\Phi(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)}) = \Phi(x')(x'')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x''')(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)}),$$

per le proprietà delle permutazioni sarà ancora

$$\Phi(x'')(x''')(x')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)}) = \Phi(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x')(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)});$$

ma quest' ultimo risultato non è che il secondo dei (IV) = perciò y'' (1. n. 3). Dunque ne verrà $y' = y''$; ma ciò è contro la supposizione. Dunque ec.

8. Teor. 4°. Ritenuta la P, come precedentemente, io dico, che ancora la y sotto tutte le permutazioni, le quali possonsi eseguire tra le radici de' cinque primi luoghi, prese o a due, o a tre, o a quattro, o a cinque, conserverà sempre lo stesso valore, ovvero non acquisterà, che i soli due fra loro diversi

(XIII) $\Phi(x')(x'')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)}),\ \Phi(x'')(x')(x''')(x^{\text{IV}})(x^{\text{V}})(x^{\text{VI}})\ldots(x^{(m)})$,

Pel (n. prec.) la y deve conservarsi la medesima sotto quella permutazione, onde produconsi i risultati (IV), e pei (II. n. 6, I. n. 5) deve ritenere il proprio volore, o sotto la permutazione fra le radici de' primi tre luoghi, o sotto tutte le permutazioni semplici di 2° genere fra le radici de' quattro primi luoghi. Dunque con l' uguaglianza fra loro dei risultati (IV) dovrà sempre combinarsi il primo, od il secondo di questi due casi; ma tanto allorchè succede la prima di tali combinazioni, come allorchè succede la seconda, dai (n. 10, IV. n, 40. Mem. della Insol. ec.) supponiamo, che la y in conseguenza delle permutazioni esposte nell' enunciato del Teorema non può tutt' al più acquistare che i valori (XIII) tra loro diversi. Dunque ec.

9. Teor. 5°. La soluzione esatta della Equazione algebraica generale di grado $m > 4$, è sempre impossibile, qualunque metodo si adopri, algebraico esso siasi, o trascendentale.

Rappresentinsi con le lettere P', P'' P''' ec. tante funzioni algebraiche razionali, qualunque siansi, de cofficienti A, B, C, ec. della data Equazione generale (I), e indicate come nel (n. 1), e con lettere Ψ, Ξ, Σ, ec. tante operazioni quali si vogliono algebraiche, o trascendentali pongasi

$$\Psi(P') = Q',\quad \Xi(P'') = Q'',\quad \Sigma(P''') = Q''',\ \text{ec.}$$

Formate quindi con le P', P'', P''' ec., e con le Q', Q'', Q''', ec. delle nuove funzioni algebraiche razionali qualsivogliono, che indicherò con le lettere

$F1'$, $F1''$, $F1'''$, ec., ed espresse con le $\Upsilon 1$, $\Xi 1$, $\Sigma 1$, ec. altre operazioni come sopra qual si vogliono, si faccia

$$\Upsilon 1 (F1') = R', \ \Xi 1 (F1'') = R'', \ \Sigma 1 (F1''') = R''', \text{ ec.}$$

Costruiscansi in seguito con le precedenti quantità rappresentate dalla P, Q, R, altre funzioni algebraiche razionali, e denominate esse $F2'$, $F2''$, $F2'''$, ec., ed accennate con le $\Upsilon 2$, $\Xi 2$, $\Sigma 2$, ec. delle nuove operazioni, si ponga

$$\Upsilon 2 (F2') = S', \ \Xi 2 (F2'') = S'', \ \Sigma 2 (F2''') = S''', \text{ ec.}$$

Si facciano di nuovo con queste quantità P, Q, R, S, altre funzioni razionali; si chiamino tali funzioni $F3'$, $F3''$, $F3'''$, ec., ed espresse con le $\Upsilon 3$, $\Xi 3$, $\Sigma 3$, ec altre operazioni, facciasi

$$\Upsilon 3 (F3') = T', \ \Xi 3 (F3'') = T'', \ \Sigma 3 (F3''') = T''', \text{ ec.}$$

e si prosegua a formare con le P, Q, R, S, T altre funzioni algebraiche razionali, e ad eseguire su di simili funzioni nuove operazioni. Così facendo, e seguitando così quanto fa d' uopo, vedesi, che col mezzo delle accennate quantità P, Q, R, S, T, ec. potremo sempre esprimere una qualunque funzione algebraica o trascendentale dei coefficienti A, B, C, ec. Ora qualunque siasi il metodo, per cui si voglia ottenere la soluzione esatta della data Equazione (I); è chiaro che esso non potrà mai, che condurre alla determinazione di certe funzioni finite de'coefficienti A, B, C, ec., le quali sostituite in luogo della x facciano verificare l' equazione medesima, e così ne costituiscano le diverse radici. Dunque per quanto si è detto poc' anzi, ogniqualvolta l' equazione data ammetta soluzione, dovranno sempre essere determinabili tante funzioni razionali delle precedenti quantità P, Q, R, S, T, ec. ciascuna delle quali esprima il valore di una radice; e per conseguenza potrà sempre supporsi

$$\text{(XIV)}\quad x'=F(P')(P'')(P''')\ldots(Q^{(n')})(Q^{(p')})(Q^{(q')})\ldots(R^{(n'')})(R^{(p'')})(R^{(q'')})\ldots$$
$$(S^{(n''')})(S^{(p''')})(S^{(q''')}\ldots(T^{(n^{\text{IV}})})(T^{(p^{\text{IV}})})(T^{(q^{\text{IV}})})\ldots \text{ ec.}$$

rappresentandosi dalla F una funzione qualunque razionale; e dalle P', P'', P''', ec. $Q^{(n')}$, $Q^{(p')}$, $Q^{(q')}$, ec. $R^{(n'')}$, $R^{(p'')}$, $R^{(q'')}$, ec. ec. quante e quali si vogliono delle funzioni algebraiche, o trascendentali, che abbiam di sopra indicate con le lettere P, Q, R, ec.

Ciò posto suppongasi per un momento possibile la soluzione esatta della data Equazione generale (1), in cui $m > 4$, ed esprimasi quindi dalla (XIV) il valore dalla x'. Si sostituisca in esso in vece degli A, B, C, ec. i rispettivi valori espressi per le x', x'', x''', ec. e riducansi così le P, Q, R, S, T, ec. a tante funzioni delle stesse x', x'', x''', ec. Ciò fatto, poichè ciascuna delle P', P'', P''', ec. e in generale la P è una funzione algebraica, e razionale de' coefficienti A, B, C, ec., dovrà essa evidentemente divenire per l' indicata sostituzione una funzione delle x', x'', x''', ec. tale, che non cambi mai di valore, qualunque permutazione eseguiscasi tra queste radici. Ora le quantità
$Q^{(n')}$, $Q^{(p')}$, $Q^{(q')}$, ec. ottengonsi per la supposizione dalle rispettive $P^{(n')}$, $P^{(p')}$, $P^{(q')}$, ec. e in generale la Q ottienesi dalla P in conseguenza di una sola operazione, di quella cioè, che di sopra abbiamo rispettivamente indicata con le lettere Ψ, Ξ, Σ, ec., e che pe-

rò può quindi essere diversa nei diversi valori della P. Dunque verificandosi rapporto a ciascuna P tutte le Equazioni (III), (VIII), (X); ciascuna delle Q sotto tutte le permutazioni, che possonsi fare tra le radici de' primi cinque luoghi prese a due, o a tre, o a quattro, od a cinque, pel (n. 8) resterà sempre la medesima, o acquisterà soltanto i due valori (XIII) fra loro diversi, e per conseguenza ciascuna ancora delle Q conserverà il proprio valore per tutte quelle permutazioni, onde sonosi formate le Equazioni (III), (VIII), (X). Ciascheduna delle $F1'$, $F1''$, $F1'''$, ec. è per la ipotesi funzione algebraica razionale delle P, Q, e ciascuna delle $R^{(n'')}$, $R^{(r'')}$, $R^{(q'')}$, ec. nasce dalla rispettiva $F1^{(n'')}$, $F1^{(r'')}$, $F1^{(q'')}$, ec. per una sola operazione di calcolo algebraico, o trascendentale, cioè per una di quelle che abbiamo di sopra espresse con le $\Psi 1$, $\Xi 1$, $\Sigma 1$, ec. Dunque tutte ancora le $F1$, e quindi tutte le R pel citato (n. 8) sotto le permutazioni ora indicate fra le prime cinque radici, o rimarranno sempre dello stesso valore, o non ne riceveranno, che due soli fra lor disuguali corrispondenti ai (XIII), e però dovranno ancora le R per le permutazioni, onde uguagliansi le funzioni (III), (VIII), (X), conservarsi costantemente del valore medesimo. In egual modo essendo le $F2'$, $F2''$, $F2'''$, ec. funzioni razionali della P, Q, R, ec. e ciascuna delle S derivando da ciascheduna delle $F2$ per una operazione sola, per una cioè di quelle, che sonosi indicate con le $\Psi 2$, $\Xi 2$, $\Sigma 2$, ec. troveremo pel solito (n. 8), che ancora le S conservansi le medesime sotto le permutazioni delle Equazioni (III), (VIII), (X). Lo stesso si ritrova delle T, delle V, ec. Dunque ciascheduna delle quantità, che sonosi indicate con le P, Q, R, S, T, ec. essendo tale, che non cangia punto di valore sotto la permutazione, onde si ha l' eguaglianza (III), ne segue, che sotto la permutazione stessa non lo dovrà cambiare neppure il secondo membro della Equazione (XIV); poichè è desso una funzione algebraica razionale delle P, Q, R, S, T, ec., ora il primo membro della stessa (XIV) venendo costituito dalla $x' = x' + 0\,(x'' + x''' + x^{\mathrm{IV}} + x^{\mathrm{V}} + x^{\mathrm{VI}} + \ldots + x^{(m)})$, sotto la sovraccennata permutazione diviene $x'' + 0\,(x''' + x^{\mathrm{IV}} + x^{\mathrm{V}} + x' + x^{\mathrm{VI}} + \ldots + x^{(m)}) = x''$. Dunque venendo tanto la x', come la x'' ad uguagliarsi ad una medesima quantità, ne verrà $x' = x''$; ma tale uguaglianza per esser la data (I) un' Equazione generica, non può aver luogo. Dunque non potrà neppure aver luogo la soluzione esatta della stessa (I), mentre sia $m > 4$, c. d. d.

ESAME

Di uno fra i diversi dubbj messi dal celebre d' Alembert ai principj dell' Ottica; con alcune considerazioni sopra la teoria Psicologica della Visione.

Di Michele Araldi

presentato nel mese di Dicembre 1806.

Fra i molti e rari pregi, de' quali risplendono le opere del celebre d' Alembert, e che concorrono a renderle quanto quelle di niun altro Filosofo de' nostri tempi utili ed instruttive, degni a mio avviso di commemorazione e lode speciale sono gli esempj frequenti ed illustri che in esse per ogni dove ci si presentano, di quella sagacità e diligenza e di quell' Analisi luminosa ed esatta, che recar vuolsi nelle scienze qualunque allo sviluppamento delle primitive loro e cardinali nozioni, e alla determinazion pure de' principj che servon loro di base. In questi punti sopra modo essenziali nelle trattazioni tutte scientifiche egli incontra per tutto motivi la più parte giusti e fondati di querele e di accuse. Nelle matematiche stesse, malgrado il privilegio unico e inestimabile, per cui è lecito di raggiungere in esse la massima perspicuità e precisione, pur nelle idee, su cui versano, e ne' principj che impiegano, e nel modo con cui vengono comunemente trattate non a torto da lui si ravvisano difetti e inesattezze, delle quali studiasi di rimondarle, provvedendo ad uno de' principali bisogni delle medesime; verso delle quali non saprei dire se maggiori sieno i suoi meriti per averne con alcune insigni scoperte allargati i confini; o per gli sforzi, co' quali riesce dove ad assodarne le fondamenta, e dove a rischiararne e appianarne l' ingresso. Benchè perciò che appartiene ai servigi da lui prestati alle matematiche confesso che mi sento quasi disposto a fargli anche in parte onore degli sforzi e successi altrui, vale a dire inclino a credere che queste scienze gli sieno in parte tenute de' vantaggi loro a questi ultimi tempi procacciati da que' nobili ingegni, che dopo lui commossi dal suo esempio, e quali seguendone e premendone le orme, quali scegliendo strade alquanto diverse sembra che sieno riusciti a diradare assaissimo, e forse a disgombrare in tutto la nebbia dianzi raccolta su la region più sublime delle medesime.

Dopo ciò posso io lusingarmi che mi si conceda di aprire un mio dubbio. Io sospetto che l' insigne Uomo nelle sue opere annunzii palesamente una cotal disposizione a ritrovar per tutto nelle scienze luoghi bisognosi di correzione e riforma; ch' ei qualche fiata sbagli i semplici nei per macchie gravi; e trascorrendo oltre i confini del giusto, e abusando del suo acutissimo ingegno, muova difficoltà a tratto a tratto più seducenti che solide. Si direbbe ch' ei mira a spargere nelle cognizioni umane l' incertezza e il Pirronismo; oppure ch' ei consapevole delle sue forze, grandi per vero dire, confida di riuscire, dopo di aver diroccato l' edificio delle scienze, a rialzarlo sopra basi più salde. Taluno potrebbe anche osservare ch' egli per uno di que' deboli non rari ad incontrarsi ne' grandi ingegni, e de' quali, ove giunga ad iscoprirli la mediocrità si consola, mentre si mostra difficile e quasi fastidioso verso le scienze, tutt' all' opposto sù gli oggetti di amena letteratura ei dogmatizza volentieri, e per farlo impunemente libera il gusto dal servaggio e dai ceppi delle leggi; e dove commisera gli eruditi; dove dileggia i Latinisti moderni; in somma si mostra dimentico di quella circospezione scrupolosa ch' ei reca agli oggetti scientifici. Ma perchè intorno a questi ultimi mi giova arrestarmi soltanto, temo che in qualche raro incontro gli accada di proporre difficoltà, nelle quali, chi facciasi a disaminarle da vicino, si ravvisino i caratteri di puri equivoci. Non oserei d' un uomo tale muovere questo sospetto se in me non lo risvegliasse egli stesso con uno fra i diversi dubbii da lui inseriti nel primo volume de' suoi opuscoli matematici contro i principj dell' Ottica.

I Coltivatori di questo bel ramo delle scienze fisiche paghi d' esser giunti ad innestarlo sulle matematiche e a rafforzarlo del soccorso di queste, riposavano tranquilli su la solidità de' principii da essi adottati; e del mentovato soccorso cercavano pur di giovarsi nell' esporre la teoria della visione, sebbene di questa confessassero esser dessa sopra ogni altra parte dell' ottica esposta agli attacchi; nè fossero loro ignote le dispute interminabili che intorno alla natura e all' ingresso nell' animo delle percezioni visibili dividono i Metafisici. Queste dispute vengono in fatti messe da parte dagli Ottici severi, che nelle loro ricerche credonsi tenuti ad impiegare quasi unicamente i dati offerti loro quinci dalle proprietà della luce, quindi dalle condizioni dell' organo, entro del quale, per ciò che appartiene alla luce, la visione si effettua. Or ecco che a turbare il riposo degli Ottici entra con grande animo il Franzese Filosofo, e scotendo da suoi fondamenti la teorìa della visione minaccia di toglierle uno dei principii, su cui essa si regge, quello voglio dire, per cui si opina comunemente che l' oggetto, a cui sieno entrambi gli occhi rivolti veduto sia nel luogo e punto, in cui gli assi ottici concorrono e taglionsi scambievolmente. Appoggia egli i suoi dubbii al seguente argomento.

= Io dico che gli oggetti stessi posti nell' Asse ottico non si veggono sempre in quest' asse. Suppongasi in fatti che i due assi ottici sieno diretti verso la stella *E*. E' certo che questa si vede più vicina di quello che sia in realtà. E' vero che si giudica della sua distanza in un modo vago al sommo e imperfetto, ma è certo a un tempo che questa distanza percepita o apparente o presunta è molto al di sotto della reale. Se dunque si vedesse la stella negli assi *AE*, *BE* sarebbe veduta in ciascuno ne' punti *e e* che sono incomparabilmente più vicini che non *E* ad *A*, *B*; però si vedrebbero due stelle *e* , *e*; e la distanza apparente dell' una dall' altra sarebbe a un dipresso uguale ad

A B. L' esperienza prova all' opposto che non si vede che una stella sola; la qual però è veduta nel punto di mezzo *C* della linea *e e* secondo le linee *A C*, *B C* diverse dagli assi ottici. E' vero che queste linee, benchè realmente diverse dagli assi ottici se ne scostano pochissimo; ma ciò non toglie che non ne differiscano; e questa sperienza basta a provare che gli oggetti posti a grande distanza dall' occhio non sono veduti esattamente nell' asse ottico anche quando sono mirati direttamente =

Di questo argomento che è pure il precipuo, con cui il signore d' Alembert confida di abbattere la legge ottica, di cui trattasi, temo assai, e duolmi di dover dirlo ch' esso parta da un mero equivoco; ma prima di mostrare in che questo consista giova premettere che nel caso attuale già non è punto mestieri di risalire co' Metafisici fino alla formazion primitiva delle percezioni visibili, delle quali i più fra essi pretendono che vengano introdotte nell' animo addottrinato dianzi dall' esperienza e dal concorso e soccorso degli altri sensi e sopra tutto del tatto. Prescindendo dall' esaminare fino a qual segno sia fondata questa pretensione, è lecito di prendere l' occhio da quel tempo e stato, in cui è d' esso ammaestrato bastevolmente, e la visione si effettua a norma di certe leggi feconde di conseguenze e applicazioni senza numero, che hanno posto gli Ottici in istato di formarne un edificio di meravigliosa estensione e vaghezza. Resta dunque a vedere se a questo edificio non manchi per avventura la solidità. O io molto m' inganno o nel dubbio proposto si confonde la vision dell' oggetto col giudizio, che l' animo forma su la sua distanza. Questa parlando a rigore, nella più parte almeno de' casi non è veduta, ma sì bene appresa, percipita. Il giudizio, la percezione accoppiasi e sì strettamente s' incorpora colla visione attuale che ne sembra di veder l' oggetto là dove il giudizio stesso o sia la percezion simultanea della distanza lo colloca. Però non è una maniera esatta e rigorosa di esprimersi quella, per cui si dice che un certo oggetto è veduto ad una certa distanza. Và detto che l' oggetto è veduto ed è congiuntamente giudicato o sia percepito ad una certa distanza. Ne si reputi già questa avvertenza una mera sottigliezza: essa non è tale tosto che per essa sola si comprenda come le leggi della visione sieno indepententi dai giudizii su la distanza; nè l' incertezza e le anomalie di questi vietino che non sieno esse puntualmente osservate. Ho detto che nella più parte de' casi la distanza non sembra oggetto della vista, perchè il fatto ne mostra che dentro certi confini ristretti assai gli occhi si assistono l' un l' altro e consentono ad assistere lo spirito a misurarla con una certa precisione. E' noto che a grande stento si riesce ad infilzare un' anello mirandolo con un' occhio solo, vi si riesce agevolmente rivolgendo ad esso l' uno e l' altro occhio. *(a)* In questo incontro poichè gli occhi manifestamen-

---

(a) Basta questo sol fatto, perchè io mi creda dispensato dall' entrare nella disamina del modo con cui il dotto P. Scarella nel lodevole assunto di porre in salvo i principj dell' ottica dagli attacchi dell' illustre Francese avvisa di potere spiegare il fenomeno, di cui ci occupiamo. In un suo opuscolo inserito nel tomo quinto dell' Accademia delle scienze di Bologna egli avverte che a grande stento s' incontra un' uomo, gli occhi

te concorrono ad informarci della distanza, sembra per vero dire che a questa competa il carattere rifiutatole in tutto da moltissimi di oggetto della visione. Non ho mestieri al presente di arrestarmi su l' interpretazione di un fatto attestato dalla sperienza. Non cerco se l' animo in simil caso misuri la distanza, effettuando, il che non sembra molto credibile, una specie di operazione trigonometrica e confrontando gli angoli e i lati a questi opposti del triangolo, che formato dagli assi ottici ha per vertice il punto mirato, per base l' intervallo degli occhi; o se più tosto la distanza ne sia suggerita dal sentimento di quello sforzo che negli occhi accompagna ogni determinata inclinazione degli assi dependentemente da una legge di cui come di tante altre la natura serbato abbia a se sola il segreto; o perchè il mentovato sentimento richiami all' animo le

---

del quale posseggano a un grado eguale la facoltà di vedere distintamente. Per solito l' un d' essi avvantaggiasi sensibilmente su l' altro. Ora egli opina che all' uopo di scorgere la distanza e la posizione di un' oggetto veduto e mirato con entrambi gli occhi non serva fra i due che quello, che vede meglio. L' animo consulta unicamente e ascolta le istruzioni di questo; e l' apparenza visibile dovuta al più debole rimane improntata per così dire su quella del primo e incorporandosi con essa non fa che renderla alquanto più viva. Applicando queste idee al fenomeno recato dal sig. d' Alembert egli pretende che la stella mirata con entrambi gli occhi sia veduta in un punto dell' asse appartenente all' occhio, che fra i due meglio serve al vedere, cioè in quel punto in cui sarebbe pure veduta, se quest' occhio solo fosse aperto. Così egli, acconciandosi per così dire col suo Avversario, e sagrificandogli un occhio, studiasi di tener fermi i privilegi e i diritti degli assi ottici: *utinam servaverit* dice Francesco Maria Zanotti; ed io aggiungo che ove ammettasi l' opinione, su cui fondasi questa spiegazione, dovrebbe inferirsene che di niun vero vantaggio riesca in qualunque incontro a misurare la distanza il concorso e l' assistenza scambievole de' due occhi: eppure in più casi questo vantaggio è reale e niegnotizie ottenute su la distanza col soccorso della sperienza. Senza entrare in questa spinosa ricerca parto di qui e mi accosto più da vicino al dubbio mosso dal sig. d' Alembert.

Suppongasi che io miri la stella *A* e la giudichi ad una distanza minore assai della reale per esem. in *a*. Suppongasi che rimanendo gli assi ottici rivolti verso *A*, cosicchè la continuazione dell' uno e dell' altro cada su le linee *A B*, *A C*, vengano collocate due stelle o sia due oggetti lucidi qualunque in *b*, e in *c* di grandezza, di fulgore, in tutto in somma uguali perfettamente. Che cosa si vedrà in questa ipotesi? due oggetti senza dubbio; e perchè? perche l' oggetto *b* è bensì posto su l' asse ottico *A B*, ma non già su l'asse ottico *A C*; il che si avvera dell' oggetto *c* posto sopra *A C*, e non già sopra *A B*. Avvertasi che il

---

te equivoco come in quello d' infilzare un' anello. Se a scorgerne la posizione precisa servisse un' occhio solo l' altro più debole non contribuisse che a renderlo più visibile, otterrebbesi l' intento chiudendo anche quest' ultim' occhio, e supplendo al difetto coll' illuminare l' anello alquanto più. Or questo chi dirà mai?

Ma mettendo da parte le dispute facciam piuttosto una riflessione offertaci dal vantaggio sensibile che a giudicare della distanza entro certi confini ristretti assai ottiensi dal concorso sul punto e oggetto mirato degli assi ottici, tutte le volte che questi per la mediocre lontananza dell' oggetto sono l' un verso l' altro inclinati alquanto sensibilmente. Per una opinione invalsa assai e quasi comune si crede che gli occhi o per istituzione di natura o dependentemente dall' abitudine simpatizzino per modo che chiudendone uno esso accompagni non per tanto i movimenti dell' altro che rimane schiuso e veggente. Quinci sembra seguirne che il tener chiuso un' occhio non dovrebbe nuocer gran fatto alla percezione entro i limiti mentovati della distanza; giacchè è assai naturale il credere che questa percezione venga suggerita all' animo da un certo senso o della inclinazione degli assi ottici, o dello sforzo richiesto a tenergli in quella dir ciò è lo stesso che il dire che sì l' uno che l' altro di questi oggetti *b*, *c* non dipinge già sul fondo dell' uno e l' altro occhio immagini che cadano sopra punti corrispondenti cioè similmente posti attorno al punto centrale. Cadono bensì su questi punti corrispondenti l' immagine dell' oggetto *b* su l' occhio *B* e quella dell'oggetto *c* su l'occhio *C*. Si cerchi di sopprimere le altre due immagini cioè quella dell' oggetto *b* su l' occhio *C*, e quella dell' oggetto *c* sull' occhio *B* col porre fra gli occhi un' ostacolo che vieti ai raggi scagliati da *b* di giugnere all' occhio *C* e a quelli che parton da *c* di giugnere all' occhio *B*, e in simil caso, sebbene gli oggetti sien due e posti ne' luoghi diversi *b*, *c*, pur sorgerà nell' animo la percezione di un solo oggetto: di che fra le altre prove ne assicurano i fenomeni del Telescopio binoculo. Nè mi si dica che nell' uso di questo l' oggetto veduto è unico; perchè

---

special posizione. Ma l' esperienza ne assicura che a giudicare rettamente della distanza è giuoco forza valersi d' entrambi gli occhi. Dunque avvi motivo di sospettare non in tutto fondata quell' opinione. In fatti mi sono, non ha guari, avvenuto a leggere in una memoria pregevolissima del chiarissimo sig. Prevost una sperienza che ripetuta in me avvalora il sospetto. Si fissino entrambi gli occhi sopra un' oggetto luminoso; poi tenendo fermo il punto di mira chiudasi un' occhio e tengasi chiuso per alcuni secondi: poi si riapra in un' attimo. Seguirà nell' oggetto veduto raddoppiamento che si dileguerà come un baleno riunendosi le due immagini in una sola. Debbo allo stesso sig. Prevost la notizia che l' Inglese sig. Vell in un suo saggio recente su la visione pretende che l' occhio chiuso accompagni puntualmente l' aperto ne' suoi movimenti, recandone in prova una sua sperienza, da cui il sig. Prevost non è rimasto convinto. Io per la mia parte qualche forza ravviso nell' argomento pur ora addotto e tratto dalla difficoltà di giudicare della distanza con un' occhio solo. Per altro del valore di questo argomento, se il sig. Prevost si abbattesse a leggere la presente Nota, ne abbandono a lui interamente il giudizio.

parlando a rigore l' oggetto più prossimo della vista sono in esso le immagini formate lungo l'asse dei due tubi e più vicinamente quelle che formansi ne' fochi delle due lenti oculari. Del resto niente è tanto chiaro quanto che la distanza, a cui verrà concepito l'oggetto unico, nel quale in questo incontro raccolgonsi que' due che abbiam supposti presenti alla vista dipenderà dal giudizio che l'animo ne formerà; il qual giudizio, poichè l'animo non può non percepire un solo oggetto, palesemente non può aver forza di raddoppiarlo. L' applicazione di questo caso a quello a cui Alembert appoggia la sua opposizione ci si fa incontro spontaneamente. Mettendo anche da parte la differenza essenziale che passa e vuolsi ritenere fra il semplice vedere e il percepire a una certa distanza l' oggetto veduto, *(b)* che è ciò che pretende Alembert? pretende

---

(a) Mi esprimo in questa guisa e mi restringo a dire che altro è il vedere l' oggetto; altro il percepire e l' apprendere la distanza dell' oggetto veduto, perchè non oso o più veramente non tengo mestieri di valermi del linguaggio di cui nella situazione mia userebbe senza veruno scrupolo Porterfield. Questi direbbe che altro è il veder l' oggetto a una certa distanza; altro il percepire questa stessa distanza. Secondo l'opinione di questo grande Ottico però entrambi gli occhi rivolti verso un' oggetto, lo veggon semplice, perchè ciascun d' essi per istituzione di natura lo vede dov' è; e concorrendo entrambi a vederlo nello stesso luogo non ponno non vederlo semplice. Mi giova prescindere da questa opinione senza nè adottarla nè rigettarla. Me certo non giungono a convincere che sia erronea le difficoltà oppostele dall'acuto Reid, col qual confesso che quasi su questo sol punto non mi trovo in tutto d' accordo. Pretende questi che al veder semplice non possa dirsi necessaria una percezione, in cui si spesso e sì agevolmente s' introduce l' inganno. Ogni abbaglio che commettasi nel giudicare della distanza a parer suo raddoppierebbe l' oggetto, il che non si vede che accada. A questa eccezione risponderebbe forse Porterfiled che in essa rinchiudesi un sottile equivoco; sottile sì ma non tanto che dovesse

che se l' uno e l' altro occhio vedesse la stella nella direzione del respettivo asse ottico dovrebbe essa vedersi in *b* e in *c*; vale a dire dovrebbero vedersi due stelle. E bene; intendansi sostituiti a quelle due apparenze visibili d' una sola stella, i due oggetti reali da me supposti: questi, ogni qualvolta dall' oggetto *b* non giungano raggi che all'occhio *A*, e dall'oggetto *c* che all' occhio *C*, si riunirebbero in un' oggetto solo. Dunque non dovrà seguir nè anche niun raddoppiamento della stella.

A prova e rischiaramento maggiore facciasi un' altra ipotesi. Suppongasi che mentre entrambi gli occhi tengono i loro assi rivolti verso la stella *A* chiudasi successivamente l' uno e poi l' altro; per mo' di

---

sottrarsi alla vista dell' acutissimo Professore di Aberdeen. Il vedere l'oggetto a una certa distanza sbagliasi in essa per l' apprendere questa stessa distanza. Nell' idea, che in me se ne risveglia, posso ingannarmi senza che debba per questo raddoppiarsi l' oggetto. Suppongasi che davanti ai miei occhi trovinsi esposti trenta in quaranta granellini di miglio posti gli uni presso gli altri cosicchè, come può benissimo avverarsi, l' occhio gli abbracci tutti d' un colpo. Io veggo dunque senza dubbio trenta in quaranta granellini di miglio; ma non ne percepisco già il numero, se non gli conto, e se formo senza contarli su questo numero un giudizio erroneo, l' occhio già non partecipa per questo all' errore. Confesso in oltre che a me per pochissimo non sembrano identiche queste due proposizioni; cioè il dire con Porterfield e con Reid pure che l' oggetto è veduto nella direzione della normale; e il dire ch' esso è veduto in qualche punto di detta normale. Parmi che l' ammetter la prima quasimente coincida coll' ammetter l' altra, o sia col riconoscere che l' oggetto è veduto a qualche distanza; di cui potrà nell' atto stesso rimaner incerto il giudizio su la sua misura, vale a dire su la proporzione che passa fra essa e una distanza determinata e nota e opportuna a servire come di unità a misurarla.

esempio l' occhio *C*. Suppongasi pure che sussista il giudizio di prima riguardo alla distanza. Dove sarà veduta la stella dall' occhio *B*? in *b* o in *a*? se dicasi in *b*, chiudendo dunque quest' occhio, e schiudendo l' altro la stella dovrà vedersi in *c*. Or com' è che apprendoli entrambi e ritenendo essi i loro assi come prima diretti debbano accordarsi a vederla in *a*? debbano entrambi vederla in una direzione diversa da quella, in cui la vedevano dianzi? se dicasi che quando la stella è mirata separatamente l' occhio supposto aperto la vede in *a*, sappia il signor d' Alembert che questo punto è mobile assai, incerto al maggior segno, or più or meno remoto secondo la varietà de' giudizii che formansi sulla distanza. Quando io miro la stella trovandomi in una strada angusta della città, essa mi sembra ad una distanza mediocre per esempio in *a'*; quando esco all' aperto, la gran volta stellata mi comparisce senza confronto più ampia e la stella a proporzione si allontana. Per quale loro bizzarria gli occhi rimanendo sempre rivolti verso *A*, veggon la stella a diverse distanze angolari dall' asse ottico; or secondo le direzioni *B a*, *C a*; or secondo *B a'*, *C a'*? non è mò meglio il dire che gli occhi la veggono sempre semplice, e l' animo la percepisce quando più quando meno remota secondo la varietà de' giudizii, ch' esso formasi della distanza? della quale giova riflettere che quando un' occhio solo è impiegato a vedere, sembra lecito il dire ch' essa non è a rigore oggetto della vista, perchè un' occhio solo pare che non possa informarne che della direzione dell' oggetto veduto, e non del luogo e punto, in cui nella retta che segna questa direzione l' oggetto è veduto. Però ammettendo anche che in alcuni incontri e dentro limiti ristretti assai qualche informazione su la distanza possa ottenersi dall' impiego contemporaneo de' due occhi, questo vantaggio cesserà tosto che si uscirà da que' limiti, vale a dire tostochè gli assi ottici acquistano quasi un'esatto parallelismo, nel qual caso essi equivalgano a un' occhio solo e la distanza cessa d' essere in qualunque senso oggetto della vista; e ne divengono sopra modo incerti i giudizii senza niun discapito e niuna offesa delle leggi ottiche. In fatti tostochè l' oggetto trovasi ad una distanza sì eccessiva che a determinarla nè gli occhi possano assistersi scambievolmente, e venga pur meno ogni soccorso dell' esperienza, non rimane in vigore e in osservanza salvo che la legge ottica che fissa la direzione dell' oggetto veduto. Questo e ogni suo punto vedesi nella linea che può concepirsi condotta normalmente su quel punto della retina, in cui ne cade l' immagine, la qual linea passa pel centro dell'occhio. Conseguentemente a questa legge le apparenze visibili sono in simili circostanze quali le risveglierebbe la projezione degli oggetti veduti su la superficie concava di una sfera, il centro della quale, se un' occhio solo è aperto, coincide col centro di quest'occhio. Però chiudendolo e aprendo l' altro rimarrà per vero dire spostato un tal poco il centro della sfera, ma di un tale spostamento e all' occhio e all' animo riuscirà impossibile di avvedersi: e per simil modo non potrà accorgersi nè l' un nè l' altro dello spostamento che segue quando aprendo entrambi gli occhi il parallelismo degli assi gli rende equivalenti ad un solo. Tutto cospira ad assicurarne della giustezza di queste idee su la teoria della visione; ed esse ove vengano intese e applicate a dovere, sovrabbondano all' uopo di mostrare l' insussistenza del dubbio proposto dal Francese Filosofo.

E non pertanto mi si permetta di arrestarmi anche per poco sopra di un' argomento involto tuttavia di molta oscurità, che sembra ostinatamente deludere gli sforzi estremi di tanti accintisi a disgombrarnelo. Certo che spesso assai, e più spesso anzi di quel che si crede segue raddoppiamento degli oggetti della vista. E' lecito il dire che veggonsi semplici gli oggetti mirati e quelli pure che senza essere mirati trovansi posti alla stessa distanza. Raddoppiansi tutti gli altri che collocati essendo a distanza maggiore o minor di quella dell' oggetto mirato, sono congiuntamente veduti. Egli è il vero che questa duplicità per solito ci sfugge inosservata; perchè l' attenzione raccolta su l' oggetto mirato trascura gli altri; e all' illusione concorre la facilità, con cui è in nostra balìa di rivolgere ad essi gli occhi e vederli semplici scorrendoli con tale rapidità che il successivo sbagliasi per simultaneo. Può ognuno con facili sperienze assicurarsi della realità del fenomeno. Basta sollevare un dito fra gli occhi e un'oggetto qualunque e mirare quando il dito, quando l'oggetto, recando a un tempo qualche attenzione a quel de' due che non è mirato ma sol veduto: quest' ultimo comparirà raddoppiato; e se l' oggetto verrà mirato, delle due apparenze del dito la destra apparterrà all' occhio sinistro; la sinistra al destro: se verrà mirato il dito delle due immagini dell' oggetto la destra apparterrà all' occhio destro la sinistra al sinistro *(c)*. La comparsa immanchevole di questo fenomeno ben ci avvisa ch' esso è vincolato con una di quelle leggi primordiali, a cui nell' uomo è piacciuto alla natura di suggettare l' esercizio della vista; ed essa pure ne mostra fino a qual segno se a certi riguardi l' universo visibile combacia col reale, a certi altri se ne scosti; e conseguentemente ne ammonisce quanto convenga essere cauti nel fissare le leggi dell' Universo visibile. In questo la natura ha voluto che vegganasi raddoppiati gli oggetti veduti nell' atto che altri posti a distanza diversa dai primi sono mirati; e a questi ultimi ha imposto d' essere veduti nella direzione degli assi ottici che nell' informar l' animo di questa direzione, lo lasciano incerto su la distanza, cui gli suggeriscon soltanto ne' casi che la di-

(c) Questo fenomeno è visibilmente legato colla teoria del così detto Oroptere, col qual nome gli Ottici intendono una linea retta condotta pel punto, a cui concorrono gli assi ottici parallelamente a quella che unisce i centri de' due occhi. A questa linea si assegnan dagli Ottici alcune assai nobili proprietà; delle quali appena fa cenno l' articolo soverchio succinto dell' Enciclopedia, in cui il sig. d' Alembert per irriflessione senza dubbio, inciampa in un' abbaglio non lieve. Ei dice che non si vede semplice che l' oggetto, su cui tengonsi rivolti gli assi ottici; tutti gli altri secondo lui si raddoppiano; mentre il fatto sta che oltre all' oggetto attualmente mirato e posto nel concorso de' detti assi, veggonsi semplici gli altri tutti, le immagini de' quali congiuntamente cadono sopra punti corrispondenti dell' uno e l' altro occhio. L' esistenza di questi punti corrispondenti nelle due retine, e il vincolo e il consenso loro, per cui le commozioni deste in essi dalla luce si riuniscono in una sola, a cui, sebbene due sieno le immagini, tien dietro la vista di un solo oggetto, costituiscono un gran fatto appoggiato a prove sperimentali così robuste che tutto ne invita a valercene senza scrupolo nella teoria della visione. A motivo di questi punti e della collocazione loro simpatizzano l' una coll' altra le due parti destre, e per simil modo le due sinistre de' due occhi; o sia la regione di ciascun occhio posta verso le tempia con quella che

rezion loro sia sensibilmente diversa, cioè in quelli ne' quali l' inclinazione dell' uno all' altro riesce sensibile; nel qual caso per altro l' animo si vale anche a percepire la distanza di altri soccorsi e impiega all' uopo le notizie acquistate con l' esercizio degli altri sensi, cui combina col dato offertogli dall' inclinazione degli assi. Quando questa uscendo da certi confini diviene insensibile, gli assi che non sono a ciò destinati lasciano la distanza indecisa, e i due occhi, come ho detto e giova ripetere equivalgono a un' occhio solo. Quì sta tutto il mistero o a meglio dire tenendo conto di ciò dileguasi ogni mistero.

Ma v' ha di più perchè il sig. d'Alembert col tentare di spogliare gli assi ottici delle loro prerogative, offende una legge sopra ogn' altra generale e autore-

---

trovasi nell' altro occhio verso la radice del naso. Di questi punti corrispondenti si avvera eziandio ch' essi trovansi collocati similmente attorno i punti centrali del fondo dell' occhio; cioè un punto qualunque del fondo di un' occhio ne ha nell' altro occhio il corrispondente nello stesso piano e alla stessa distanza del centro mentovato: però, se concepiscasi che mentre si mira un' oggetto, venga inalzata una normale sur un punto qualunque della retina, e un' altra sul punto corrispondente dell' altra retina, queste due normali concorreranno ad una distanza uguale a un dipresso a quella dell' oggetto mirato, e l' angolo a cui si incontreranno sarà pure uguale a quello, a cui sull' oggetto mirato concorrono gli assi ottici e se un' oggetto trovisi nel luogo e punto dell' incrocicchiamento di dette normali, esso sarà veduto semplice, mentre gli altri tutti posti o al di quà o al di là dello stesso compariranno doppj, perchè non è possibile che sopra punti corrispondenti ne cadan le immagini. Quinci si scorge che gli oggetti veduti semplici nell' atto che uno di essi è mirato trovansi collocati su la superficie concava di una sfera, che ha per raggio la distanza dell' oggetto mirato; alla qual superficie concava, se ben si mira, meglio converrebbe il nome e il concetto di Oroptere; giacchè gli oggetti posti o al di quà o al di là di detta superficie vengono ad essa riferiti per una illusione meramente psicologica e che parte dall' idea nata nell' animo vole, a cui pare che non sottraggasi niuna specie di viventi dotati di vista, quella cioè per cui ogni oggetto è veduto nella direzione della normale inalzata su quel punto della retina, in cui ne cade l'immagine. L'asse ottico è una di queste normali, e il vantaggio che ottiensi col rivolgerlo verso un' oggetto, deriva dall' esser desso quella normale che passando pe' centri dell' occhio e della pupilla incontra la parte più sensibile della retina e la meglio opportuna a servir di centro di quella specie di rappresentazione che sul fondo dell' occhio i raggi della luce dipingono degli oggetti veduti. Per questa particolarità esso avvantaggiasi sopra ogni altra normale; ed è per essa che giova nel mirare rivolgerlo verso gli oggetti che veggonsi nella direzione di esse, come ogni altro si vede in quella del-

della distanza dell' oggetto mirato, la qual idea rimane complicata con quella delle apparenze visibili di detti oggetti. Intorno a che vuolsi avvertire che queste apparenze non ponno essere dall' uno e l' altro occhio riferite agli stessi punti di detta superficie; ma che quinci non ne nasce il loro raddoppiamento. Sorge questo soltanto perchè le immagini non cadono sopra punti corrispondenti delle due retine. In fatti, quando nel mirare un'oggetto sollevasi fra esso e gli occhi un dito, e che questo vedesi raddoppiato, le due apparenze veggonsi a un di presso alla distanza, reale a cui trovasi il dito. Perchè ciò? perchè in tale incontro l'attenzione che recasi al dito basta a togliere di mezzo l'illusione e il trasporto di quelle apparenze ad una maggiore distanza. Nell' atto stesso il raddoppiamento sussiste; e se ripetasi l' osservazione le mille molte, il dito comparirà raddoppiato la millesima volta come la prima. Vuol dire che il fenomeno deriva da una legge independente in tutto dai giudizii dell' animo e dalle informazioni ottenute coll' esercizio degli altri sensi; da quella legge stessa per cui un' oggetto mirato è veduto semplice, non perchè l' esperienza ne assista a correggere l' errore in cui senza di essa ne strascinerebbero le due immagini che se ne formano sul fondo de' due occhi ma perchè sopra punti corrispondenti delle due retine ne cadon le immagini. Saravvi egli veruno il quale sostenga l' assunto insostenibile che reiteranla respettiva normale. Or pretenderà egli il sig. d'Alembert che l'asse ottico non ascolti una legge sì generale? oppure allargherà i suoi dubbj fino ad avvolgere in essi la legge medesima? non sorgerà in lui qualche scrupolo di fare il sì grave torto all'ottica, privandola del vantaggio di entrare a motivo di detta legge in lega con la meccanica? in questa ammettesi come principio che in ogni incontro, in cui un corpo venga ad urtare un'altro, l'urto si effettua normalmente al piano e corpo urtato, il qual cede in detta direzione. Non ha dubbio che ciò pur non si avveri degli urti della luce su la retina; e la mentovata legge coll'esserne una conseguenza necessaria ce ne offre un testimonio e una prova. In tal guisa la teoria della visione divien partecipe del pregio inestimabile posseduto dalla meccani-

---

do le sperienze si riuscirebbe a riunire in una sola le molte apparenze di un'oggetto veduto a traverso di un vetro tagliato a più faccie?

A mostrar poi alquanto meglio che merita di essere ritenuta nella teoria della visione la proprietà dagli Ottici attribuita all'Oroptere, ove massime alla linea denotata presso gli stessi con questo nome si sostituisca la superficie concava di una sfera che ha per raggio la distanza di un'oggetto mirato, gioverà forse l'addurre alcuni pochi fatti de'quali sono stato io stesso testimonio, e posso recarne altri assai più autorevoli. Al chiarissimo sig. Cavalier Canterzani, Soggetto in cui il candore adegua il sapere, accadde un giorno di sbagliare realmente una mosca per un Cavallo; cioè trovandosi egli avanti ad una finestra cogli occhi attraverso i vetri rivolti su la pubblica strada, gli sembrò di veder passare per questa un Cavallo, che non passava altrimenti, ma in suo luogo ei si avvide tosto che una mosca gli passò presso gli occhi correndo sul vetro. Un fenomeno conforme osservò pure un'altro mio dottissimo Collega il sig. Professore Avanzini, a cui trovandosi egli a diporto con altri compagni a caccia di uccelletti, cogli occhi, come costumano i cacciatori, rivolti e fisi verso oggetti lontani parve di vedere in aria uno stormo di uccelli per un'inganno prodotto da un nuvolo di moscherini nel quale senza porvi mente trovossi immerso, svolazzantigli presso gli occhi. La stessa comparsa in ca di poter essere dimostrativamente trattata. E che? farebbe egli, privando l' ottica di questa legge, anche ad altre scienze l' ingiuria di turbarle ne' loro più legittimi e più sicuri possessi? nell' astronomia a cagion d'esempio, per dir d' essa sola, cosa diverrebbe senza questa legge la teoria e la pratica della Parallassi sì certa sì utile sì feconda di usi e di applicazioni? lo stesso dicasi della teoria delle refrazioni astronomiche. Che direm poi della spiegazione ingegnosissima, di cui nel suo Bradlei si onora l'intera Inghilterra, della così detta aberrazione delle stelle fisse? essa coll' accoppiare alla proporzione, che passa fra la velocità della luce e quella del nostro globo il principio ottico, di cui trattasi, ne diviene una nuova prova sperimentale ottenuta con un' apparato di mezzi grande per così dire quando è l' Universo visibile.

altra occasione affacciossi ad alcuno de' suoi compagni di caccia che a torto ne accagionò la fantasia e l' animo acceso della voglia di far preda di uccelli, mentre non era essa che una pura ottica illusione. A me pure più di una volta è intervenuto trovandomi raccolto in qualche pensiero, di vedere in aria l'apparenza come di un Vipistrello prodotta da una mosca passatami in quell' istante presso e rasente gli occhi. Questi fenomeni ne mostrano che quando la mente è distratta, accade agevolmente che alla distanza da essa non avvertita di un' oggetto veduto e non mirato venga sostituita quella dell' oggetto mirato; e l' apparenza del primo s' ingrandisca o impicciolisca secondo che viene trasportata a distanza o maggiore o minore della reale. L' idea della distanza offre il raggio del circolo, gli archi del quale rimanendo la stessa sul fondo dell' occhio l' immagine dell' oggetto, misurano la grandezza della apparenza visibile. Egli è per questo che gli astri veduti a traverso a un telescopio, da un novizzo massime e non uso a maneggiare questi strumenti, appajono nella grandezza loro apparente soggetti a strane e improvvise vicende, a norma dei giudizii formati su la distanza e renduti forse più incerti in un' incontro, in cui impiegasi a vedere un' occhio solo. Ma non serve allungare di più un' annotazione omai soverchio prolissa.

Ma è omai tempo di congedarsi dal sig. d' Alembert, e di chiudere un' esame che potrebbe lusingarsi di aver soddisfatto all' obbligo imposto alla memoria presente dal suo titolo, giacchè si è dovuto spargervi per entro qualche riflessione appartenente alla teoria psicologica della visione. Benchè delle riflessioni di tal natura da me impiegate oso pur lusingarmi che l' ottica rigorosa non rifiuti d' ammetterle nel fondo reale e solido ch' essa possiede. Avverto ciò perchè non sò mica se lo stesso si avveri delle idee tutte psicologiche con cui viene a dì nostri esposta quasi comunemente la mentovata teoria. In questa qual la incontro fin ne' trattati elementari di fisica mere congetture ragionevoli, se vuolsi, ma niente più, spacciansi come dommi e verità dimostrate. I teorici la più parte postisi sotto le insegne del famoso Barchelei e adottandone i principj metafisici nell' assoluta loro purezza si mostran persuasi che l' occhio sia sfornito di qualunque mezzo onde giudicare delle distanze, delle quali anzi affermano che non ponno entrar nel novero delle percezioni visibili. E in realtà, dicon essi tenendo il linguaggio del loro maestro, le particelle lucide che succedendosi in retta linea formano un raggio qualunque, nel giugnere a percuotere il fondo dell' occhio e un punto di questo ponno al più al più risvegliar nell' animo la percezione del punto visibile da cui partono, ma non già della distanza di questo; giacchè l' impressione e conseguentemente la percezione è palesemente la stessa, qualunque sia la lunghezza della linea descritta dalla particella lucida, o sia la distanza dell' oggetto veduto. Barchelei si mostra così convinto della robustezza invincibile di questo argomento che stupisce come gli ottici non sienosi avveduti della poca o niuna solidità del loro edificio, cui quasi con quest' arme sola ei confida di abbattere. Abbandonandosi alle conseguenze che a parer suo derivano dall' incapacità dell' occhio ad informarne della distanza ei giugne a stabilire che niuna vera simiglianza passa fra le percezioni visibili, vale a dire quelle che l' occhio di per se solo risveglierebbe nell' animo, e quelle che in questo si suscitano in seguito delle prime ma dependentemente eziandio dalle notizie delle quali sin dalla nascita e dal primo sviluppamento delle sue facoltà lo hanno arricchito l' esperienza e l' esercizio contemporaneo degli altri sensi e sopra tutto del tatto. E' questo palesemente sopra ogni altro acconcio ad introdur nell' animo giuste e precise notizie e rappresentazioni esatte delle qualità reali de' corpi; delle quali notizie l' animo si vale a correggere o a meglio dire ad interpretare le percezioni visibili, congiuntamente alle quali esse in ogni incontro gli si affacciano e a motivo della nettezza loro con tal forza ne richiamano a se l' attenzione che questa su di esse principalmente e quasi unicamente si arresta, e trascura le percezioni visibili destinate per proprio uso soltanto a risvegliare e rammemorare le prime. Però secondo questa teoria le sensazioni e percezioni proprie della vista costituiscono una specie di naturale linguaggio che niuna simiglianza non ha ne' suoi termini colle percezioni reali, ch' esso nella mente risveglia, come niuna non ne passa fra i suoni articolati o sia i termini del comune linguaggio artificiale e arbitrario colle cose per essi denominate.

Mi arresto un momento su questa ultima conchiusione; e osservo che sebbene Barchelei si picchi di essere un severo e rigido Loico, in questo incontro giugne a una conseguenza, a cui non lo guidano i suoi stessi principj, dai quali ei si scosta, cadendo, come per solito si avvera de' Riformatori e de' Novatori, nelle esagerazioni e negli eccessi. Gli si conceda pure che non può la distanza essere oggetto della semplice vista; che questa non potrebbe introdurne l'idea nell'animo e conseguentemente nè anche del rilievo de' corpi, del concavo, del convesso, e delle proprietà loro qualunque, alla cognizione delle quali serve di base l'idea della trina dimensione. Malgrado queste concessioni ripeto ch' ei trascorre oltre i confini del giusto e del veso; oltre a quelli che vengon fissati da' suoi stessi principj, quando afferma che le percezioni visibili sono meri segni degli oggetti reali, ai quali punto non rassomigliano come niente non rassomigliano alle cose i termini arbitrarii delle lingue comuni. In quella qualunque rappresentazione che viene dall' occhio offerta all' animo degli oggetti, è pur egli costretto ad ammettere una reale distinzione di parti corrispondenti ne' punti loro tutti a quelle degli oggetti reali, e in essa similmente collocate e con tal ordine e simetria che ne resulta un tutto, al quale non mancano i caratteri di un vero disegno vario pinto e variamente ombreggiato? e cui le tinte tutte e le più delicate sfumature e cadenze del chiaro scuro rendono al maggior segno compiuto e finito? a questi pregi punto non nuoce l' incapacità che ora non voglio porre in dubbio, in cui trovasi l' occhio di conoscere la distanza. Questa incapacità non fa che togliere all' immagine il rilievo; ne lascia sussistere le altre doti che la rendono opportuna non a rammemorare soltanto ma a rappresentare gli oggetti. Di quì si vede che a gran torto il Metafisico Irlandese degrada e invilisce le immagini e percezioni visibili, affermando ch' esse e il loro complesso non è che una specie di cifra, cui l'animo istrutto dalla sperienza si addestra a spiegare, giugnendo più o men presto a possederne la chiave. Piuttosto volendosi pur ritenere il confronto da lui proposto sembra che il più basso concetto, che di esse formar si dovesse sarebbe di paragonarle ai Geroglifici Egiziani, e meglio anche che non a questi, alle Pitture, di cui ci si narra che in luogo di Scrittura valevansi i Messicani.

E pure malgrado ciò non si cessa di ripetere che le percezioni, quali l' occhio di per se solo le suggerirebbe all' animo nulla non hanno di conforme a quelle ch'esso addottrinato dall'esperienza risveglia; che le prime non sono delle ultime che meri segni; non si cessa di trarre in campo il confronto di questi segni co' termini del comune linguaggio; de' quali termini si aggiunge che l' animo appena uditi o letti gli trascura e dimentica, rivolgendo l' attenzione alle cose da essi rammemorate. Or quì pure temo assai che il confronto non corra. Certo che alle impressioni recate all'animo dalla vista accoppiansi forse sempre certi giudizii ch' esso forma congiuntamente per una operazione si rapida che nelle percezioni, che ne resultano, riesce sopra modo malagevole il separare ciò che all' occhio appartiene da ciò che l' animo vi aggiugne e sembra che s' incorpori e s' immedesimi e formi un tutto colla percezione dovuta all' occhio. In ciò consentono tutti i Teorici; ma quinci appunto muove il dubbio per cui temo che zoppichi non poco il recato confronto. Sovente certo le parole, soddisfatto al loro ufficio, sdrucciolano su l' animo, nè vi lasciano orma di se. Ma è certo altresì che ognuno ha la facoltà di arrestarle e rivolgere ad esse la sua attenzione. Più; è certo che l' attenzione anche quando sembra raccolta su le cose e su i pensieri, non perde le parole affatto di vista. Sono esse una cotal veste del pensiero che non può non vedersi congiuntamente al pensiero. Senza ciò come potrebbe accadere che nell' udire e nel leggere le parole e ciascuna da se e nella lor successione e nel loro colleganiento facessero sopra di noi impressioni piacevoli o ingrate? che nell' atto che si bada alle cose, pur non isfuggano i pregj o i difetti della lingua e dello stile? de' segni all' opposto co' quali l' occhio, si dice, parla all' animo e gli suggerisce le percezioni tattili, è per lo meno sopramodo malagevole il separarli da queste ultime. Da quelli anzi che al tatto solo concedono la facoltè d' informarne di un Mondo esteriore, e all'occhio abbandonato a se la rifiutano, questa separazione debbe dichiararsi impossibile. Non è dessa tale assolutamente presso quelli che ammettono un Mondo esteriore visibile independentemente dal tatto; ma essa è sempre sommamente difficile, e solo dopo grandi sforzi l' abile Dipintore riesce a staccar dagli oggetti le loro apparenze visibili e ad afferrarle e tenersele presenti quanto è mestieri a trasportarle su la tela. Però non credo di aver torto se temo che per questo verso pecchi l'addotto confronto. Eh che questo mi dirà è un timore panico: per esso si confonde un' ordin di segni stabiliti dalla natura con altri inventati arbitrariamente dagli uomini. Qual meraviglia che possano essi operare su questi ultimi; su i primi non già? potrei rispondere recando esempii di segni palesemente naturali e che non pertanto non vengono mai confusi cogli oggetti significati. Forse che non sono tali i gemiti del dolore, gli urli della disperazione, gli accenti dell' ira? chi confonderà mai le lagrime con quella tenera o tristezza o letizia che le fa piovere? ma voglio dire qual cosa di più.

Me ne schiude l' adito uno de' più illustri Fisici viventi, che in un suo recente e per più titoli pregevolissimo trattato elementare di fisica là dove parla della visione, addottando le opinioni di Barchelei prese per altro di seconda mano da Condillac chiude l' esposizione così = quando l' occhio è addottrinato abbastanza dalla mano e dal tatto, la sola presenza degli oggetti determina il ritorno delle stesse sensazioni all' occasione delle impressioni simili fatte su l' organo dai raggi vibrati da detti oggetti = di quali sensazioni si parla egli in questo tratto? di quelle senza dubbio che accompagnavano l' esercizio del tatto all' epoca, in cui questo ammaestrava l' occhio e l' animo. Ora io dico che la presenza degli oggetti visibili ne non rammemora nè molto meno risveglia simili sensazioni. Può rammemorare soltanto le percezioni delle proprietà tattili, della solidità a cagion d' esempio, della figura; della durezza o mollezza; del liscio o dell' aspro; del convesso o del concavo. Ma l' operazione o modificazione dell' animo, per cui queste proprietà vengono percepite nulla non ha di comune colla sensazione, e lo sbagliarla per tale è un grave equivoco e quasi imperdonabile dopo gli avvertimenti e le istruzioni, delle quali siamo tenuti all' acuto e saggio Reid più assai che non Condillac degno come di servirne di scorta, così di celebrità maggior di quella a cui sia desso salito almeno sul Continente, dove chi sà che non gli faccia qualche danno l' essersi egli contro gli attacchi de' moderni Sofisti dichiarato difensore e campione del senso comune. La figura, la solidità, la durezza ec. non si sente ma si percepisce. Ogni estensione data al termine sentire oltre il proprio suo significato è sempre e più in quest' incontro pericolosa ed illecita. Perchè vuolsi osservare che nell' esercizio del tatto dalle percezioni proprie di esso non vanno mai disgiunte certe sensazioni languide per solito e fugaci al segno che sfuggono inosservate tanto più che le percezioni simultanee delle qualità tattili sono sì nette e precise e limpide che tutta rivolgono a se l' attenzione dell' animo. Esse queste sensazioni sono non per tanto reali; e ben in alcuni incontri non possiamo non avvedercene; come quando la mano esplora un corpo ispido di risalti e punterelle e ne rimane per avventura offesa e ferita. Niuno in tal caso confonde la percezion della punta col dolore della puntura. Or facciasi ragione che sensazioni analoghe a questa, di essa solo di gran lunga più deboli e per l' addotto motivo incapaci di trarre a se l' attenzione dell' animo, accompagnano indivisibilmente l' esercizio del tatto. Come non lasciano esse nell' animo niun orma di se, così non si è pensato a tenerne registro, nè a dar loro niun nome, non senza grave sconcio e grave danno della Psicologia, in cui rimane un'ampia lacuna cui niuno si occupa a riempiere e affrettansi tutti all'opposto ad inalzare un'edificio, di cui non sono ben certi di avere gettate le fondamenta. Davvero che quando rifletto che solo a questi ultimi tempi Reid ha mostrato ai Psicologisti un'ordine intiero di sensazioni, delle quali non si erano avveduti, temo assai che la loro scienza trovisi tuttavia nell'infanzia. Per altro, poichè delle sensazioni compagne dell'esercizio del tatto non tiensi per solito verun conto, è assai probabile che il citato illustre fisico intenda con quel termine di denotare in genere le idee introdotte e raccolte nell'animo col mezzo di questo senso. Però quella espressione forse pecca solo per qualche inesattezza; cui non avrei nè anche avvertita se non mi avesse offerta l'opportunita di recare una osservazione di molta importanza e per se stessa e per le sue conseguenze.

Perchè sebbene le notizie introdotte nell'animo del tatto sieno più chiare assai e distinte che non quelle che gli giungono per gli altri sensi, de' quali però nella nostra specie almeno è desso a certi riguardi l'interpetre, ad ogni modo sarebbe un'errore gravissimo *(d)* l'inferirne che ad esso solo appartenga il privile-

---

(d) Questo errore o equivoco che voglia dirsi, contamina da cima a fondo un libro uscito, non ha molti anni, alla luce in Italia sul famoso problema di Molineux col titolo alquanto ambizioso di Ottica della natura e della educazione. In esso l'autore ligio di Condillac riconosce nel tatto solo l'attitudine ad introdurre nell'animo la notizia degli oggetti esterni: la rifiuta ad ogni altro senso. Su ciò reggesi il suo lavoro, nell'esame del quale dopo questo cenno non mi credo tenuto ad entrare. Me ne sconforterebbe il sapere che dovrei avvolgermi con lui in luoghi si tenebrosi

gio esclusivo d'informarne dell' esistenza di un Mondo esteriore. Quelli, che hanno adottata questa opinione ch' io con Reid reputo erronea, traggono in mezzo la resistenza opposta dai corpi toccati alla mano che gli tocca, e in essa ravvisano un testimonio e una prova che al tatto solo compete di metterne in commercio col detto Mondo. Essi di questa resistenza menano il romor grande; nè non avvertono che anche di essa si avvera che parlando a rigore non è sentita ma percepita. Sempre ad annuziarla intervengono certe sensazioni, colle quali non ha essa niuna simiglianza precisamente come niuna non ne passa fra l' odore quale esiste ed è confusamente percepito ne' corpi odorosi e la sensazione ch' essi risvegliano. Per simil modo nell' esercizio del tatto a certe sensazioni trovasi indivisibilmente congiunta per vincoli, de' quali non occor cercare altra ragione che l' Autorità Sovrana della natura, che sola ne conosce il segreto, la percezione della resistenza e con essa quella dell' oggetto che ne è la sede, e la persuasion pure dell' esistenza di quest' oggetto. Ho cercato di restringere in breve le idee psi-

---

che non mi assicuro di prenderlo a scorta. Egli a cagion d' esempio si batte anche con Alembert, cui gli vien quasi voglia di rimproverare come disertor d' una scuola, gl' interessi della quale dovevano essergli cari. Ne critica alcune riflessioni applicabili al problema di Molineux, che ogni sensata persona troverà sensatissime, poste dall' illustre Francese fra i rischiaramenti da lui aggiunti ai suoi elementi filosofici. Stupisce che in esse un' Alembert si mostri dimentico che l' animo valendosi della sola vista non assistita dal tatto vedrebbe i colori, dove di grazia? nel suo interno e nella serie delle proprie sensazioni. Oh qui confesso che tutto per me è bujo pesto. A me, che ho sempre veduti i colori applicati a qualche oggetto riesce impossibile il concepirneli staccati. Chi mi parla di colori veduti dall' animo nel suo interno e nella serie delle proprie sensazioni usa mecologiche di Reid nelle quali ravviso ragionevolezza maggiore assai che non in quelle di Barchelei e Condillac. Supponendole giuste è lecito di trarne subito una conseguenza importantissima, la qual si è che nell' esercizio della vista alla sensazion del colore trovasi sempre accoppiata la percezion reale e independente dal tatto di un' ordine di oggetti posti fuori di noi; e insieme con essi quella di una estensione visibile che tutti gli abbraccia. A questa estensione, se l' occhio, come pretendesi, è incapace d' informarci della distanza, mancherà forse una dimensione; ma non cesserà essa per questo d'essere un' oggetto reale proporzionato e conforme alla natura del senso che ne introduce nell' animo la notizia. E perchè sul fondo di queta estensione non può non vedersi disteso l' ammanto vario pinto de' colori, questi co' le varietà loro e tinte e cadenze infinite assiston l' occhio all' uopo di scorgere in essa e distinzione di parti e figure e ogn' altra apparenza visibile. Egli è il vero che in ogni special caso con queste apparenze accoppiansi certi giudizii; così che l' attual percezione è conseguenza e resulta-

---

co un linguaggio che non intendo. Eppure potrebbe darsi che i principj di Condillac pretti, rigorosi, guidassero appunto a questa conseguenza; vale a dire ne obbligassero a ragionare sopra cose inconcepibili. Almeno de' misterj in essi rinchiusi mi si adducessero motivi di credibilità tali che potessi prestar loro una fede implicita; ma l' autorità di Condillac non giugne a tanto, e meno poi quella dell' autore dell' Ottica della natura e della educazione; presso cui incontro parecchie manifeste offese fatte alla logica; come mostrerei facilmente se non temessi che alcuno sorgesse ad ammonirmi che non occorre turbar le ceneri de' morti; alla quale ammonizione per altro potrei rispondere che debbon più premere i vivi de' morti; che quel titolo alquanto ambizioso può sedurre gl' incauti; e che tengo prove ed esempj di alcuni a cui era esso giunto ad imporre.

mento delle une e degli altri. Ciò è indubitato; ma quì è appunto, dove io sospetto che annidi l'equivoco. Ci s'insegna che la sensazion del colore richiama all'animo la memoria degli oggetti tattili; e dovrebbe dirsi che le apparenze visibili le quali non ponno non essere estese e colorate rammemorano e suggeriscono all'animo le notizie ottenute con l'esperienza e col tatto. Interpretando le cose in tal guisa non rimangono su questo luogo nobilissimo di Psicologia che i misterj potivi dalla natura; sgombrano quelli che vi hanno aggiunto i Filosofi.

Ma quì alcuno forse sorgerà ad ammonirmi che l'esperienza ha omai definitivamente pronunziato a favore di Barchelei; e citerà a questo proposito il celebre cieco nato di Cheselden. Ammetto il fatto, ma confesso che ho qualche dubbio su le conseguenze che se ne traggono. Quale è la circostanza più notabile, di cui dopo di avere acquistata la vista informò gli astanti questo fanciullo di 13 anni, da cui pretendonsi usciti torrenti di luce a rischiarare la teoria della visione, e chi sa che non forse, se oso dirlo, ad abbagliare i filosofi? Ci si narra ch'ei su le prime diceva di veder gli oggetti presso e come a contatto degli occhi; d'onde s'inferisce con più fretta forse che ragione che la vista è per se stessa incapace d'informane della distanza. Non voglio muover dubbii sul valore e la significazione rigorosa di espressioni e parole uscite da un Soggetto di quella età e proferite in mezzo alla sorpresa, al gaudio, alla commozione vivissima e non mica passeggiera propria di una situazione per lui si nuova. Potrei piuttosto avvertire che forse non si tien conto quanto dovvrebbesi dello stato di un' organo suggettato non molto prima ad una operazione chirurgica e in seguito alla molestia delle bende e della fasciatura richiesta a vietare per qualche tratto l' ingresso alla luce; del qual organo niente è tanto naturale quanto il credere che fosse un tal poco infermo o almeno soverchio sensibile. Il Giovine si accorgeva di aver gli occhi; gli sentiva per così dire; e l' accoppiamento di queste sensazioni con quella del vedere forse contribuì all' illusione. Voglio non per tanto prescindere da tutto ciò e restringermi ad osservare che se il giovine disse ch' ei vedeva gli oggetti presso i suoi occhi, ei dunque gli vedeva fuori di se e senza dubbio nell' aspetto di apparenze colorate ed estese. Sono esse dunque queste apparenze colorate ed estese l' oggetto proprio della vista; nè l' occhio all' uopo di vederle, nè l' animo a quello di percepirle ha mestieri delle istruzioni del tatto. Nè mi si dica che il nostro giovine nel tempo della sua cecità erasi coll' esercizio del tatto proccacciati i materiali e i mezzi onde interpretare il nuovo linguaggio dell' occhio; ch' ei conosceva l' estensione quanto è mestieri a trasportare e improntar subito su la immagine della stessa suggeritagli dalla memoria la sensazion del colore e veder questa fuori di se in quella forma; perchè io rispondo che ogni linguaggio per giugnere ad intenderlo è mestieri averlo studiato; e che questo studio nell'opinione di Barchelei e de' suoi seguaci si nutre del confronto dell'apparenze visibili colle notizie simultaneamente acquistate col tatto: al qual confronto non era luogo nello stato di cecità. E se si giugnesse a pretendere che il giovine malgrado la mancanza di uno studio tale, mercè le cognizioni proccacciategli dal tatto trovossi in istato di trasportar subito fuori di se nell' aspetto di un' apparenza estesa e visibile la sensazion del colore, io replicherei che questa è una asserzione meramente gratuita; che per essa s' innestano le supposizioni le une su le altre: forse anche gli chiederei con qual fondamento dunque ci s' insegni che però al giovine le apparenze vedute comparvero presso gli occhi perchè la distanza non è oggetto della vista? forse che il tatto insieme con l' idea della estensione non lo aveva provveduto di quella della distanza? che questa non era in lui netta e limpida quanto la prima? in somma forse lo ammonirei seriamente a cessar dall' avvolgersi inutilmente fra le contradizioni e le ipotesi. Per altro con queste riflessioni protesto che non intendo che di muovere qualche dubbio su la giustezza delle conseguenze che traggonsi da una osservazione; della quale mi sono, non ha guari, con vera compiacenza avveduto che anche il chiarissimo sig. Prevost bramerebbe che si offrisse qualche occasione di ripeterla.

Prima di chiudere la memoria chieggo licenza di aggiugnere un' altra riflessione, nella quale, se non sono in tutto ingannato, si ravviserà forse qualche importanza. Nelle diverse classi di Animali le differenze notabili e manifeste offerteci dagli occhi e dai movimenti loro sembra che ne avvisino e ne assicurino che al dominio e governo di leggi diverse sia in esse soggetta l' economia del vedere. Non parmi possibile che questa facoltà si eserciti a norma precisamente delle stesse leggi negli animali, che rivolgono entrambi gli occhi verso l' oggetto mirato, e in quelli ai quali ciò non è dato, perchè gli occhi loro posti quinci e quindi ai lati della testa tengon rivolti gli assi in direzioni diametralmente opposte. Di questi ultimi sembra lecito il dire che il campo della lor vista è più esteso assai che ne' primi; ch' esso abbraccia forse un' intera sfera, mentre ne' primi e nell' uomo non comprende che poco più d' un' Emisfero. E' pur palese ch' essi giacchè gli oggetti veduti da un' occhio rimangon nascosti all' altro, ponno giudicare della distanza valendosi d' un' occhio solo. Non mancano anche animali, de' quali sembra che abbiano gli occhi in loro balia a un di presso come noi le braccia e le mani. Ponno muovere l' uno e non l'altro; ponno rivolgerne uno all'innanzi, l' altro all' indietro. Il Lepre per mò d' esempio, il Camaleonte ha questa facoltà. Come porre in dubbio che in queste diverse classi di animali la visione non si eserciti con leggi diverse? ove queste riflessioni si trovin giuste, ne sorge subito la conseguenza che a gran torto dunque si pretende di scoprire le leggi della visione *a priori*, vale a dire dependentemente dal modo soltanto con cui le particelle lucide succedendosi entran nell'occhio e ne urtano il fondo. E pure Barchelei adopera in tal guisa; esso procede con questo metodo pericoloso ed illecito e contradetto dal fatto e dalle varietà, che siamo inevitabilmente costretti di ammettere nelle leggi della vista propria delle diverse classi di animali. Se queste leggi non ponno fissarsi *a priori*, chi ha introdotto Barchelei ne' gabinetti della natura, onde sapere con certezza che nell' uomo l' occhio abbandonato a se restringasi a risvegliare la sensazion del colore; e che l' animo sia di tutto il resto tenuto all' esperienza ed al tatto? oh, dirà taluno, Barchelei poteva prendersi questa sicurtà. Ei sapeva quanto la natura si compiaccia della semplicità e dell' economia nell' impiego de' mezzi, Poteva essa nell' uomo restringer l' occhio all' uso di risvegliare le mere sensazioni del colore, perchè ci aveva già provveduti de' mezzi onde interpretarne il linguaggio, nelle mani e nella eccellenza del tatto. A questa istanza potrei dar più risposte: potrei confessare che per essa qualche grado di probabilità acquista l' ipotesi del metafisico Irlandese, ma nell' atto stesso aggiugnere che qualche grado di probabilità non basta di gran lunga a giustificare l' aria di trionfo con cui egli spaccia la sua dottrina per dimostrata. Potrei concedere che la natura ami la semplicità, l' economia; ma delle così fatte massime generali duttili e pieghevoli a servir d' appoggio eguale alla verità e all' errore potrei congiuntamente avvertire che sono esse state in ogni tempo usate e abusate. Ma in luogo di risposte tali reputo meglio di rifiutare in tutto a Barchelei il diritto ch' ei si è arrogato di ridurre ogni uffizio dell' occhio alla semplice introduzione nell' animo della sensazione del colore. E' illecita a parer mio questa supposizione. De' sensi tutti si avvera, nè in ciò, come ho di sopra notato, non ha il tatto niun privilegio su gli altri, de' sensi tutti, dico. si avvera che dalle sensazioni proprie di ognun d' essi non vanno mai disgiunte certe percezioni più o men distinte di qualche oggetto. E' questo il dato offertoci dalla natura; nè a noi è lecito di alterarlo. Consiste in esso l' estremo limite, a cui è lecito di spingere l' analisi de' sensi. Chi ha il coraggio o l' imprudenza di oltrepassarlo si espone al pericolo di trovarsi insieme con Barchelei travvolto nell' abisso del Pirronismo.

Termino la memoria col rivolgermi a quelli che per avventura le facessero il rimprovero d' essersi con qualche intemperanza arrestata sopra oggetti metafisici. Serva presso loro di scusa il punto, sopra di cui essa versa, collocato palesemente sul confine comune dell' Ottica e della Psicologia.

Pag. 486 Part II

Fig 1

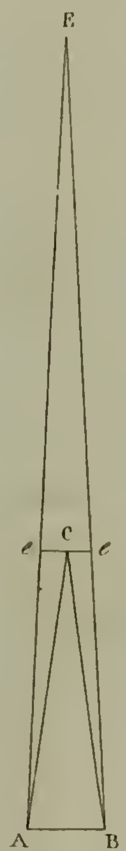
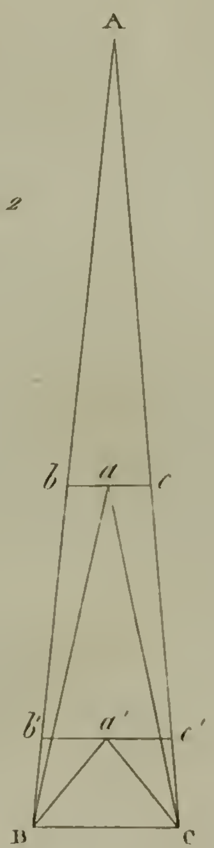


Fig 2



SAGGIO

sul modo di misurare con maggior esattezza mediante una nuova macchina varj effetti meccanici e idrometrici.

Di Giovanni Aldini

presentato in Dicembre 1806.

---

§ 1. La severità e accuratezza somma dei matematici ha renduta molto più ardua a' giorni nostri l'arte d' interrogare la natura coll'esperienze. Per avvicinarsi all' esattezza di que' loro calcoli s'industriarono i fisici in molti modi. Altri proposero metodi pratici per ottenere le più minute e squisite divisioni dei gradi del circolo; altri bilancie atte a mostrare fra due masse le minime differenze dell'equilibrio; altri altre cose e tutte con molto ingegno, e molta lode. Con tali luminosi esempj ho fatto animo anch' io, ed offro una mia macchina la quale, se non erro, esattamente misura le più picciole frazioni del minuto secondo ed insieme pone sott' occhio alcuni delicati risultati della Meccanica e della Idrometrìa.

§. 2. Parto da due osservazioni notissime l' una delle quali stabilisce che un grave abbandonato a se medesimo descrive in un minuto secondo con moto uniformemente accelerato, giusta le rinomate tavole di Prony, lo spazio di piedi 15.098, ovvero metri (4.904); l' altro che un corpo sospeso all' estremità d' una bilancia all'atto di cadere ne turba l' equilibrio, al quale si ricompone tosto che detto corpo giugne a toccare il piatto della medesima. La mia macchina comincia dal segnare le frazioni più piccole del tempo dalla metà del minuto secondo, lasciando le frazioni maggiori più facili a determinarsi con altro metodo. Tutto l' artificio è riposto in una valvola la quale apresi al momento che un grave abbandonato a se stesso percorre un determinato spazio e chiudesi immantinente e nell' istante in cui il corpo giugne al termine dello spazio medesimo. E' dessa prontissima al moto, e aprendosi dà esito ad una certa quantità di mercurio per tutto il tempo della caduta, la qual quantità, poichè il mercurio conservasi nel recipiente ad altezza costante, segue la proporzione del tempo; gli efflussi dunque esprimendo questo vario tempo, rappresentano pure fisicamente e determinano le varie frazioni del minuto secondo.

§. 3. Tre a mio avviso sono le parti principali che compongono la macchina enunciata le quali tosto ad una ad una esporrò, affine di meglio intenderne in seguito gli usi e la maniera di porla in azione.

Dell' Asta, del Piedestallo e della Graduazione della Macchina.

Siavi (fig. 1.) un' asta verticale alta piedi quattro formata di legno ben asciutto tagliato secondo la direzione longitudinale delle sue fibre per allontanare l'azione igrometrica dell' umidità, e quella della varia temperatura dell' atmosfera che potrebbe far variare la sua altezza; abbia di più una certa solidità affine di non concepire tremori che inducano qualche anomalia nell' efflusso del mercurio. La detta asta è fissata a perpendicolo in un robusto piedestallo posto ad esatto livello mediante tre viti e un pendolo che parte dall' estremità superiore, e rimane in mezzo a due linee, l'una delle quali presenta i varj gradi dell' altezza col piede francese, l'altra colle moderne misure del metro. Scorre lungo l'asta un indice, il quale, mediante una molla, arrestasi a qualunque punto, e serve per determinare accuratamente lo spazio da percorrersi dal grave cadente.

§. 4. Conviene che il grave cada sopra una sostanza molle, ed avvi per ciò nel piano del piedestallo una cavità *M* piena di creta destinata a ritenere il corpo caduto il quale, altrimenti, risalirebbe riaprendo la valvola per breve istante e dando luogo a nuovo efflusso. Si può ancora formare un' apertura nel piedestallo, e sottoporvi una cassetta con creta poggiante nel terreno: per tal modo separata l'azione dell' urto del grave dalla macchina, si renderà immune da qualunque più piccolo tremore. Si potrà pure alla creta sostituire uno strato di cera mescolata con sostanza pinguediosa in quella quantità ch' esigerà l' esperienza; in tal caso detto strato sarà coperto con carta oliata a fine d' impedire che il glutine si attacchi al corpo cadente, e ne alteri il peso.

Della leva e dell' azione del grave da essa sostenuto.

§. 5. Alla sommità dell' asta poggia una leva d'acciajo *AB* a guisa del giogo di bilancia la quale con una delle sue estremità sostiene un grave del peso di 20 grammi che chiude dall' altra parte colla sua pressione un picciolo foro situato alla base di uno stagnante di mercurio. Formano il perno intorno a cui si volge detta leva due acutissime punte di metallo (fig. 2.) le quali rendono il centro del moto obbediente a qualunque leggiera impressione. I bracci della medesima egualmente lunghi non sono perfettamente librati tra di loro, essendo il braccio *A* d' alcuni grani più pesante dell' altro. Per tal modo quando cade il peso *M* pendente dal braccio *B* è rotto l' equilibrio nel sistema generale della leva, e il braccio *A* in vigore del suo peso alquanto maggiore seconda l' aprimento della valvola che si opera mediante l' azione del peso *n*.

§. 6. Il grave *M* è nello stesso punto sospeso a due fili *MB*, *Mt*, l' uno de' quali a maggior chiarezza chiamo in seguito filo principale, l' altro filo addizionale; quello serve a tutte le esperienze rimanendo nella sua integrità, questo all' opposto dev' essere ciascheduna volta sostituito. Il filo principale che sostiene il corpo cadente passa attraverso l' asse di una vite ov' è ritenuto mediante un nodo fatto alla sua estremità: alzando ed abbassando la detta vite si concilia al filo il grado necessario di tensione, cosa difficilissima ad ottenersi con altro metodo. Il filo addizionale è sostenuto e scorre sopra l' uncino *t*, e vi si annoda alle varie altezze, alle quali il corpo s' innalza. All'atto dell' esperienza troncasi il filo addizionale bruciandolo con due lumi a fine di elidere più facilmente gli effetti dell' agitazione dell' aria. Convien guardarsi che detto filo non sia composto di molte fibre ritorte, le quali troncandosi successivamente danno un moto tremolo al corpo, e lo fanno cambiare di situazione alcun poco prima che discenda liberamente. Sotto questo punto di vista i fili formati di capelli o di crini sono da preferirsi alla seta. Allorchè si vuole situare il grave alle convenienti altezze si fa scorrere a molla un pezzo di metallo *s* lungo l' asta, e portasi in alto a sostegno del braccio *A*, affinchè rimanga chiusa la valvola fino all' istante di farlo cadere: dimenticata questa cautela, potrebbersi avere irregolari efflussi di mercurio che turberebbero l' esito dell' esperienza.

§. 7. La forma del grave cadente riputata fin' ora la più opportuna si è quella d' un cilindro la di cui altezza uguaglia il diametro della base: per tal modo presenta molta superficie al piano di creta sopra descritto, e troncasi, per così dire, più prontamente il suo movimento. Ove vogliasi la misura assoluta del tempo, il grave cadente sarà di platino, o d' oro, affinchè la stessa massa contenuta sotto il minor volume possibile risenta pure le minori resistenze dal mezzo per cui passa: eseguendo poi esperienze comparative potrà essere indifferentemente o di piombo, o d' altro mettallo.

Dello stagnante di mercurio, e della valvola che serve agli efflussi.

§. 8. Il recipiente che serve agli efflussi del mercurio è un cilindro di cristallo posto su d'un piano metalico sostenuto dall' asta verticale della macchina in poca distanza dalla leva superiore AB. Per mantenere il mercurio ad un costante livello pesca nel medesimo una picciola campana di vetro la quale ha l'orlo della sua apertura toccante appena la superficie, e fa le veci di carico somministrando successivamente tanto mercurio, quanto appunto n' esce dal foro sottoposto: con tal artificio la linea stabile di livello è all'altezza d' un pollice (metri 0,0271). Per render libero l'efflusso è d'uopo che il mercurio sia purgatissimo, e la base dello stagnante al di dentro alquanto concava. Se si volesse il livello con metodo più rigoroso, potrà aversi ricorso ai mezzi ultimamente proposti da fisici per tener un costante livello nello stagnante dei barometri.

§. 9. La base dello stagnante di mercurio è di cristallo lavorata collo smeriglio in modo che forma colla piastra di metallo in cui è fissata un solo piano levigatissimo. Il foro in essa scolpito è di un millimetro; la valvola che lo chiude esteriormente (fig. 3.) è composta d' una curva leva d' acciajo, la quale ha il centro del moto nel punto c: è dessa tratta alla sua estremità in uno stesso punto da due fili uno de' quali mediante la carrucola a, tien chiuso il foro f; l' altro lo apre mediante il contrapeso che agisce nella carrucola *b*. Il filo *Aa* col mezzo di una vite riceve la tensione necessaria al pronto movimento della valvola. La detta leva non tocca il piano che nel centro del moto, e nel luogo in cui chiude il foro; essa muovesi fra le due punte metalliche *r*, e *s*, e descrive fra detti limiti un brevissimo spazio, quale appunto ricercasi per aprire e chiudere colla massima celerità il tenue foro situato alla base del cilindro. La (fig. 4.) esprime la faccia superiore del piano sopra cui poggia lo stagnante di mercurio, e la disposizione delle carrucole che fanno agire la valvola e la concavità data alla base per agevolare l' erogazione del detto fluido che rendesi meno scorrevole per qualunque leggera ossidazione. Per accertare vieppiù la possibile speditezza nel movimento della valvola, si potrebbe in alcune delicate esperienze adattare il solo pezzo dell'efflusso del mercurio alla solita macchina di Atwood allontanando così molte resistenze e rendendo ancora più pronti e liberi gli efflussi stessi.

§. 10. A mettere in piena attività la descritta macchina (fig. 1.), mediante il filo addizionale *Mt*, che passa sopra l' uncino di metallo *t* situato all' estremità della leva, sollevo il grave *M* in *m* all' altezza di piedi tre, pollici nove, linee tre, e sei decimi, (metri 1,2260) corrispondenti alla metà del minuto secondo. Il grave ivi collocato seguita ad agire sopra il braccio della leva, e perciò la valvola chiude il foro che è alla base dello stagnante di mercurio. Abbruciando allora il filo addizionale di seta, il grave movendo dalla quiete cade all' istante, e per mancanza della sua azione rimane la leva tratta in senso contrario dal contrapeso *n*, e resta aperta la valvola per tutto il tempo della caduta, terminata la quale nuovamente chiudesi. Rimane adunque tanto tempo aperta, quanto impiega il grave a percorrere il detto spazio, e perciò la suddetta frazione di tempo è equivalente all' efflusso ottenuto. Il mercurio uscito raccogliesi in un imbuto terminato da sottil cilindro di vetro del diametro di una linea, (metri 0,0023), munito d' una scala divisa in cento parti. Si può ad essa sostituire il metodo di pesare ciascuna volta la quantità di mercurio uscito.

§. 11. Avuto l' efflusso che corrisponde alla metà del minuto secondo, diminuisco a piacimento la discesa del grave, e le varie quantità del mercurio uscito, esse pure proporzionalmente diminuite indicano a mano a mano efflussi sempre minori gli uni degli altri, i quali mi esprimono le varie decrescenti frazioni del minuto secondo. Con questi principj l'efflusso corrispondente alla caduta d' un pollice (metri 0,0271) è denotato per la minutissima frazione 0,0743, o sia $0'', 4''', 27^{\text{IV}}, 27^{\text{V}}$, il qual risultato dimostra colla detta macchina ottenersi non solo i minuti terzi, ma pûr anche le minute loro divisioni corrispondenti ai minuti quarti e quinti *(1)*.

(1) Non sarà difficile dalle esposte cose il rilevare come la mia macchina differisce da tutte le altre in questo genere in addietro, e poc' anzi pubblicate. Differisce certo dalla macchina immaginata molto tempo prima dal celebre Giovanni Poleni consistente in un orologio munito di tre indici i quali mostrano li minuti primi, secondi e terzi: aveva esso pure eseguita una valvola (il di cui modello possediamo nel R. Gabinetto di questa Università) la quale pone gli efflussi del mercurio in relazione coi gradi percorsi dagl' indici del detto orologio. Gli originali disegni degli ap-

§. 12. Non pago di vedere questi miei risultati raccomandati dalla sola teoria, ho amato di accertarmene col fatto. Innalzo ad un pollice (metri 0,0271) il solito peso; poca è certo la forza acquistata in tanta brevità di spazio; pure apresi e chiudesi la valvola dando sensibilissimo efflusso fisicamente divisibile nel sottoposto tubo graduato in molte parti atte a denotare le più fine suddivisioni del minuto secondo con tal precisione che sembrava togliersi all' esame de' fisici. Sono stato sollecito di sottoporre alla considerazione di alcuni de' miei colleghi dell' Istituto e di altri Professori di questa Regia Università le principali esperienze da me fatte cogli apparati costrutti dal valente macchinista Francesco Borelli. Trovandomi poi, non ha molto, a Parigi secondando le esortazioni d'illustre Personaggio feci eseguire varj modelli al rinomato artista Dumotiez, e tenutone discorso *(2)* col chiarissimo Lagrange provai la

---

parati del Poleni cortesemente comunicatimi dal dotto Collega Professor Stratico mi autorizzano ad affermare che la loro costruzione è affatto diversa da quella della mia macchina altronde capace di quelle applicazioni che non possono eseguirsi in alcun' altro de' metodi finora proposti.

(2) Frà le dotte riflessioni intese in tale circostanza, non tacerò il progetto di sopprimere la graduazione nell' asta di legno, ritenendo soltanto invariabile la sua altezza. Fu immaginata una specie di registro situato al centro della leva il quale avvolge il filo addizionale disposto però in modo che non impedisce al grave la sua azione sul braccio della bilancia. Un indice con movimento micrometrico denota quanta porzione di detto filo si avvolge, e perciò segna con tutta precisione le varie altezze alle quali si colloca il grave cadente. Avendo avuto prima di partire da Parigi occasione di far eseguire alcuni modelli della mia macchina ho interessata la bravura, ed insieme la compiacenza de' due valenti artisti Dumotiez e le Noir, acciò vogliano costruirli col detto principio. Tal modificazione non incontra veruna difficoltà nella prima macchina da me proposta; esige però qualche mutazione, ove vogliasi tradurre all' ultima costruzione che sarà da me fra poco indicata.

compiacenza di riportarne un lusinghiero suffragio, avendolo avuto testimonio oculare dei principali risultati.

§. 13. Se mi fu accordato coraggio nel coltivare questi miei tentativi, sentii però tutto il peso della loro autorità nell' intendere da essi confermate quelle stesse difficoltà che già mi si erano, in addietro, presentate. Ma di queste, altre reputo aver pienamente rimosse, altre diminuite colle modificazioni date alla macchina stessa. Non ha mancato taluno di accusare come inesatta la scala direttrice delle altezze opinando che l' accelerazione acquistata dal grave al tempo della caduta distenda il filo, ed aumenti lo spazio che doveva percorrere di tanto, quanto importa la profondità a cui è penetrato nella creta. Sarei io disposto a dar molto valore a tale opposizione, se fossi obbligato, com' altra volta, ad impiegare gravi talora eccedenti il peso d' una libbra; ora però che mi bastano pochi grammi, debbo molto meno temere o dalla distensione del filo, o dalla escavazione nella creta stessa. Qualunque però essa sia, egli è certo che il grave cadente appena tocca la superficie della creta agisce sulla leva e chiude la valvola; che se pur prosegue a discendere adopera sulla leva con maggior impeto e chiude la valvola più fortemente, ma non ne avverrà per ciò che debbasi riguardare come variato lo spazio che dovea percorrere; giacchè l' efflusso che lo misura e misura pure il tempo impiegato a scorrerlo, cessa tosto che il grave giugne alla creta.

§. 14. Molto più ardua opposizione nasce dall' esaminare gli ostacoli che vietano il libero efflusso del mercurio. Poichè la valvola per aprirsi compiutamente esige un certo tempo durante il quale l'efflusso si fa per un foro che va crescendo, e perciò nel successivo aprimento l'efflusso non sarà uniforme; lo stesso, ma in senso contrario, interverrà nel chiudimento della valvola che non può essere istantaneo. La qual considerazione potrebbe al più nuocere alla scrupolosa precisione dei risultati che aspettansi dalla mia macchina, quando cade la misura assoluta del tempo; non indurrebbe però sensibile errore nelle misure relative, delle quali faccio quasi sempre uso nelle molte applicazioni che esporrò in appresso. A togliere poi anche più direttamente l' enunciata opposizione, che confesso essere una delle maggiori che possano muoversi contro l'uso della mia macchina, piacemi distinguere in tre tempuscoli il tempo totale dell'efflusso del mercurio. Nel primo si apre, nell' ultimo si chiude la valvola, ed in ambidue questi tempuscoli accordo esser l' efflusso alcun poco impedito: è desso affatto libero nel tempuscolo medio. Ora, esaminate le funzioni della valvola, si ravviserà che quello che manca all' efflusso libero nell'aprirsi nel primo tempuscolo, ridonderà per altra parte pel ritardo che si ha nell' ultimo tempuscolo a chiuderla, e ciò servirà ad ottenere con approssimazione quella compensazione la quale farà evitare un errore sensibile nel calcolare il giusto valore degli efflussi suddetti.

Ho posta poi ogni cura per aprire e chiudere la valvola colla maggiore celerità *(3)*, ho rinunciato al

---

(3) All' atto della pubblicazione della presente memoria, insorge altra idea sulla costruzione della proposta macchina che la riduce a maggior semplicità: risparmio in essa l' uso delle due carrucole, la tensione del filo dalla parte del contrapeso, e allontano molti attriti movendo la

presidio dell' elastro da me impiegato in altro tempo ed ho sostituito l'azione di due pesi che operano (fig. 3.) sullo stesso punto d'una leva, e la traggono successivamente in contrarie direzioni con quella rapidità la quale potrà impedire una sensibile alterazione negli efflussi, ove il grave cadente e il contrapeso stiano fra di loro nella proporzione la più favorevole alle operazioni affidate alla valvola suddetta. Atteso pertanto il picciolissimo spazio d'una mezza linea che deve percorrere la valvola, e le altre proposte facilità per muoverla colla prestezza possibile, ho luogo a credere che quella qualunque differenza nata negli efflussi sarà tanto piccola, che potrà fisicamente trascurarsi: essa poi non indurrà mai alcun ostacolo nelle esperienze comparative, posta l'avvertenza di fare cadere il grave da altezze sempre eguali.

---

valvola colle sole oscillazioni d'un pendolo posto in azione dai bracci della bilancia stessa. Mancando il tempo di compiere sì importante mutazione praticamente prima della pubblicazione del presente volume, mi riserbo a renderne conto nel susseguente. Intanto ne ho consegnata la descrizione negli atti dell'Istituto, prevalendomi di questa circostanza per interrogare il dotto sentimento de' miei colleghi Canterzani, Araldi, Avanzini, Guglielmini, non solo intorno alla primitiva mia macchina, ma anche sul modello di quest'ultima modificazione. Dipendendo dall'esattezza del moto della valvola l'utilità intera del mio apparato, mi farò sempre un debito di partecipare tutto ciò che può contribuire alla sua maggior perfezione. Questo stesso riguardo mi ha trattenuto dal render pubbliche finora varie sperienze da me eseguite, aspettando che i fisici convengano prima fra di loro in quella forma di costruzione che serve con maggior sicurezza al fine proposto. Per parte mia non ho certo mai risparmiato nè fatica nè industria per avvicinarmi al desiderato intento, avendone sino dieci anni sono communicate le mie idee non solo ai celebri professori Volta, Vassalli, Sgagnoni, ma ancora all'intera Accademia dell' Istituto delle Scienze in Bologna.

§. 15. Che se non piacesse a taluno essersi la graduazione della scala conformata alla caduta de' gravi nel vacuo, e volesse perciò volgere a difetto della macchina la non curata resistenza dell'aria, consideri ch'essa è leggerissima, e che volendo, potrà pur'anche calcolarla col presidio delle note formole proposte dal celebre Bezout nella sua Meccanica e da altri autori. Potrà pur'anche, volendo, render più semplice tal correzione coll'istituir sempre le sue esperienze alla stessa altezza barometrica. Che se il nostro oppositore praticamente incontrasse in questo stesso altri ostacoli reputo miglior consiglio che abbandoni l'aria, e faccia in vece cadere i gravi nell'acqua distillata fornita di costante temperatura *(4)*; avrà in tal caso la soddisfazione di notare le più delicate frazioni del minuto secondo in uno stesso fluido, e in una scala minore della metà dell'altra in addietro impiegata; le quali cose conciliano ai miei apparati una molto più semplice e comoda precisione. Poichè essendo per tutto eguale la gravità specifica del detto fluido, e sapendosi per altra parte il peso ed il volume del grave in esso cadente, sarà apprestata a qualunque vicino o lontano speri-

---

(4) Non pretendo io già risparmiare in questo luogo col nuovo metodo da me proposto la correzione della resistenza del mezzo per cui passa il grave: reputo soltanto di averla agevolata, e renduta più sicura col far uso di un fluido che posso procurarmi ovunque fornito di una data temperatura, e d'una costante densità. Nè dovrò certo tener conto della variata pressione dell'aria atmosferica sopra il livello del detto fluido, la quale, secondo le ultime esperienze eseguite da Coulomb, non può indurre veruna alterazione sulla resistenza del grave cadente nell'acqua distillata. *V. Memoires de l'Institut national des Sciences Mathematiques, et Physiques. Tom. III. pag. 246.*

mematore quella parità di circostanze, la quale è tanto a desiderarsi per ottenere dagli apparati fisici costanti sempre, ed uniformi risultati.

Premessa in generale l' indole e la struttura delle proposte macchine, lascio volontieri ad altri di valersene per quelle applicazioni che sono del loro istituto; io mi limito a quelle sole che più da vicino interessano le ricerche della fisica sperimentale.

APPLICAZIONE PRIMA

Stabilire la resistenza che oppone l'aria ad una certa massa cadente sotto volumi diversi.

§. 16. I calcoli de' matematici in questo genere offrono cause ritardatrici tanto piccole che arduo riesce ridurle ad una misura sensibile: questa però sembra potersi ottenere col seguente metodo.

Il solito peso di piombo di venti grammi discende, come sopra, dall'altezza di piedi 3,7745 (metri 1,2260) con moto uniformemente accelerato nella metà d' un secondo, e questo tempo è espresso con un determinato efflusso di mercurio che adunasi nel sottoposto tubo. Se ora altro corpo della stessa massa sotto volume maggiore ricade dall'altezza medesima, la resistenza che incontra è sensibilmente più gagliarda di quella che opponevasi al primo, e perciò in più lungo tempo percorre lo stesso spazio, e più copioso ancora è in proporzione l' efflusso ottenuto. Se dunque detraggasi il primo efflusso corrispondente alla caduta del corpo di minor volume da quello che si è avuto nel secondo, la differenza dinota precisamente la resistenza opposta dall'aria ad una stessa massa in proporzione del volume accresciuto. Ripetuta l'esperienza in una serie di masse uguali il cui volume cresca con determinate proporzioni, viene apprestata un' accurata tavola delle resistenze opposte dall' aria al vario volume dei corpi cadenti.

Applicazione seconda.

Ritenuta eguale la massa e il volume del corpo cadente indagare il rapporto della diversa gravità specifica de' fluidi ne' quali esso cade.

§. 17. Prendo un cilindro di cristallo (fig. 5.) fornito di base metallica coperto d'uno strato di cera molle, e vi verso or' uno, or' altro fluido. Faccio cadere il solito grave da una stessa altezza in fluidi diversi, e noto i varj tempi che impiega a percorrere lo stesso spazio: trovo esser essi in un costante rapporto colle loro varie specifiche gravità. Sotto quest' aspetto la proposta macchina mi fa le veci di Aerometro per varie qualità d' acque saturate di diversi sali, per varie specie di alkool, e in generale per tutti i fluidi d'eguale temperatura, privi però d' una particolar adesione nelle loro particelle, la quale, come vedremo in appresso, turba gli effetti della loro resistenza. Il punto fisso di comparazione che mi guida in tali osservazioni è la resistenza che soffre il grave cadente nell'acqua distillata: del resto esso in qualunque caso dovrà essere d' una sostanza inalterabile dall'influenza dei diversi fluidi pei quali passa.

APPLICAZIONE TERZA.

Calcolare le resistenze dei corpi solidi posti in moto in un fluido il quale è in moto esso pure.

§. 18. Un grave cade alla superficie d' un vaso (fig. 6.) in cui l' acqua è mantenuta ad un costante livello. Sonovi alla base due robinetti uno de' quali somministra un efflusso doppio dell' altro. E' lecito per tal modo crescere o diminuire l' erogazione del fluido coll' aprire a piacimento o l' uno o l' altro dei due robinetti, o ambidue. Alcuni sono di parere che un grave cadendo anche nel fluido posto in moto acquisti dopo pochi istanti della sua discesa un moto equabile; ma i mezzi de' quali fecero uso non sono atti a mostrare le varietà del moto con quella precisione, che si ottiene nella mia macchina.

§. 19. Pubblicherò ad altro tempo li ottenuti risultati su tal proposito accompagnati dalla resistenza che soffrono i solidi variando non solo la loro massa, ma anche il loro volume e la loro figura. L' illustre fisico S' Gravesande fece simili esperienze in un grandioso macchinamento in cui la resistenza de' solidi mossi ne' fluidi equivale al peso addizionale necessario a comporre in equilibrio il braccio della bilancia a cui sono sospesi. Istrutto io dal lungo uso della detta macchina sarei d' avviso che l' efflusso del mercurio ne' miei apparati fosse un mezzo molto più comodo e sicuro per rilevare le dette resistenze.

Applicazione quarta.

Determinare la resistenza che oppongono alcuni fluidi al movimento dei solidi per la varia tenacità delle particelle che li compongono.

§. 20. Il solito grave sperimentato nella precedente applicazione in varj fluidi col solo riguardo della loro specifica gravità si faccia discendere in recipienti pieni d'olio o d'altro mezzo le di cui parti abbiano una particolar coerenza fra loro. La discesa per un dato spazio della nota scala compiesi in un tempo maggiore di quello esigerebbe la sola influenza delle specifiche gravità calcolata colle note teorie, e quest'incremento dovrà accordarsi alla resistenza opposta dall'adesione delle parti componenti il fluido sottoposto all'esperienza. A quest'intendimento altri proposero di misurare o le vibrazioni d'un pendolo, o le oscillazioni d'un filo composto ad un certo grado di torsione e immerso in diversi fluidi; pare però più semplice il metodo di notare il vario tempo impiegato da un grave a percorrere nei medesimi un certo spazio. Questo genere di esperienze permette ancora d'avere a piacimento i movimenti o celeri o lenti, e conseguentemente di esaminare se la resistenza de' fluidi si conformi alla legge che la vorrebbe proporzionale al quadrato della velocità.

§. 21. Mi propongo di ripetere su queste traccie non solo le belle esperienze di Coulomb dirette a determinare in generale la coerenza de' fluidi, ma d'aggiugnerne altre, onde fissare il singolar cambiamento che soffrono per la portentosa influenza del calorico. Egli è desso che temperato in molte guise in alcuni fluidi ora ne separa e divide le minime parti riducendoli allo stato aeriforme, ora scemando loro permette di accostarsi e costiparsi trasformandoli in corpi solidi. L' acqua distillata sotto quest' aspetto passando pei gradi del calore di cui è capace offre una scala precisa della diversa adesione delle sue particelle prodotta dalle varie temperature, cominciando dalla resistenza ch' essa oppone nell' apparato descritto al §. 17. quando è ridotta in vapori, e quando raffreddata a poco a poco passa allo stato di congelazione. Il grave di cui faccio uso in tali esperienze non è mai di metallo, ma sempre di vetro o d' altra sostanza difficile a sentire le impressioni delle temperature, e le più picciole alterazioni nel suo volume.

Applicazione quinta.

Determinare l' influenza delle temperature nelle erogazioni dei fluidi.

§. 22. Molti s' avvisano che il calorico variando la temperatura dei fluidi porti ne' loro efflussi un cambiamento di velocità; ma non è stato abbastanza dimostrato, come, e quanto influisca, e in quali circostanze. Due antlie di cristallo ben calibrate ad uso di macchina pneumatica sono state da me impiegate per determinare la varia velocità de' fluidi a misura delle loro temperature, mentre sgorgavano da due eguali fori situati alla base che aprivansi contemporaneamente. Le differenze delle velocità negli efflussi erano in molti casi tanto manifeste, ch'eludevano qualunque sospetto o della variata capacità delle antlie di sei millimetri di grossezza, o dell'aumentata ampiezza del foro scolpito in una sostanza meno atta a sentire le impressioni del calorico, quale appunto è il vetro.

§. 23. Parmi che questa delicata ricerca si possa con maggior esattezza eseguire nel mio ultimo apparato (fig. 1.) col mercurio o altro fluido che sgorghi a varie temperature per una data frazione di tempo. Con ciò avremo meno a meravigliare l' apparente paradosso idraulico che mostra diverse erogazioni d' uno stesso fluido posto in due vasi ad eguali altezze, e sgorgante da luci pure eguali. Questa maniera di esaminare l' influsso delle temperature nelle velocità de' fluidi è diversa da quella che in altro tempo proposero il celebre Leonardo Eulero, Weitbricht, ed altri Fisici.

Applicazione sesta.

Stabilire il metodo d' una idrometria a minime frazioni di tempo fisicamente assegnabili.

§. 24. Chiunque voglia istituire delicate sperienze idrometriche ben sa quanto sia malagevole il determinare gli efflussi a picciole frazioni del minuto secondo col presidio dei soliti orologi. Noi non misuriamo le parti del tempo se non se dal numero delle idee che possiamo in tal tempo formare distintamente; egli è appunto per questa ragione che non possiamo tener dietro ad un pendolo che oscilli con molta rapidità. Chi potrà accertare che il momento nel quale esso comincia a vibrare, sia lo stesso in cui si apre la valvola d'onde esce il fluido, e che il momento in cui è compiuto l'efflusso sia quello in cui termina la vibrazione del pendolo? Perciò la mia macchina non senza qualche vantaggio supplisce a quella rapidità d'idee che non possiamo noi seguire colla mente nostra *(5)*. Non la incerta mano, non l'occhio infedele dirigge il movimento della valvola, ma lo stesso grave cadente fa che si apra al primo istante in cui viene abbandonato, e si chiuda tosto che ha compinta la sua discesa.

§. 25. Sostituisco nel noto apparato al mercurio l'acqua comune, ed osservo che gli efflussi compionsi egualmente collo stesso grave cadente dalle medesime altezze della solita scala. Pongo ora in luogo del piccolo cilindro (sopra descritto fig. 1.) una serie di vasi di cristallo di varie altezze pieni d'acqua, e mi si presenta vasto campo a ripetere le più interessanti esperienze riguardanti la teoria degli efflussi, onde meglio stabilire molte, tutt'ora incerte leggi dell'Idrometria.

---

(5) Cadendo in questo mese di Gennaro del corrente anno nelle mie lezioni le esperienze relative agli apparati della Meccanica, ho pubblicamente posta in azione la mia macchina, ed ho ottenuto un sensibilissimo efflusso di mercurio inalzando il solito grave soltanto a mezzo pollice. Il mio Collega Dottor Veratti, tutti li miei scolari, e molti amatori delle scienze Fisiche sono stati in questa R. Università di Bologna testimonj dell'enunciato risultato al quale non aveva mai potuto giugnere cogli apparati in addietro eseguiti in Italia e a Parigi; questo stesso giustifica la precisione anche maggiore che aspetto dalla mia macchina col nuovo metodo da me accennato nella terza annotazione.

Applicazione settima.

Uso della descritta idrometria per determinare le velocità iniziali degli efflussi.

§. 26. Una delle più gravi questioni idrometriche mosse in altro tempo da' valenti matematici si è quella della precisa quantità degli efflussi ne' primi istanti dell' erogazione de' fluidi da luci determinate. Molte sono le anomalie del loro moto iniziale espresse in più luoghi dell' Idrodinamica di Daniele Bernoulli, e del Professore Gregorio Fontana degno di dividere con quel profondo matematico la gloria di sì ardua ricerca. La velocità dovuta all' intera altezza d' un fluido in un vaso costantemente pieno non si concepisce tutta all' istante, ma si aumenta a poco a poco, finchè rendasi uniforme continuatamente nei tempuscoli successivi. Questi gradi di accelerazione prima di giugnere ad una uniforme velocità compionsi in brevissimo tempo, e producono tali irregolarità nell' efflusso, che i suddetti matematici disperarono poter riscontrare coll' esperienze.

§. 27. Considerati ora gli usi della mia macchina pare che le leggi delle velocità iniziali possano a fedele misura richiamarsi. Poichè stabiliti col calcolo due efflussi corrispondenti a diverse frazioni del minuto secondo senza la considerazione delle velocità iniziali, se si consulteranno gli efflussi stessi ottenuti dall' esperienza, si avrà una differenza la quale potrà con molta approssimazione determinare l' influenza delle velocità iniziali nelle erogazioni de' fluidi.

APPLICAZIONE OTTAVA.

Confermare co' detti apparati a tutta precisione le fondamentali leggi de' corpi cadenti con moto uniformemente accelerato.

§. 28. Il calcolare le leggi dell' accelerazione de' gravi chiese dapprima, com'è noto, un incomodissimo genere di esperienze; altronde nella proposta macchina l' intera azione della gravità opera in breve e comoda altezza non dissimile da quella delle macchine d' Atwood, potendosi agevolmente calcolare e le discese perpendicolari dei corpi, e le più picciole frazioni dei minuti secondi in cui sono descritte. Mi basta di fare discendere il solito peso da varie altezze espresse con numeri quadrati; gli efflussi del mercurio mi esprimono la proporzione delle radici degli spazj percorsi, e per tal modo mi apprestano nuove maniere onde confermare le note leggi del moto uniformemente accelerato. Pochi pezzi aggiunti al detto apparato lo rendono atto a misurare sulle tracce della macchina di Atwood le leggi del moto equabile, e del moto uniformemente ritardato.

§. 29. Il vantaggio d' esperimentare a brevi e comode altezze non ci toglie di adoperarne altre maggiori quali appunto furono tentate da Newton, da Ugenio, da Riccioli, da Mairan, e da altri Fisici. Basterà levar l' asta della nota macchina dalla sua base, e fissarla sopra un portante murato alla sommità del luogo destinato alle sperienze: assicurato il grave dagli urti delle pareti, e reso libero alla discesa per tutta l'al-

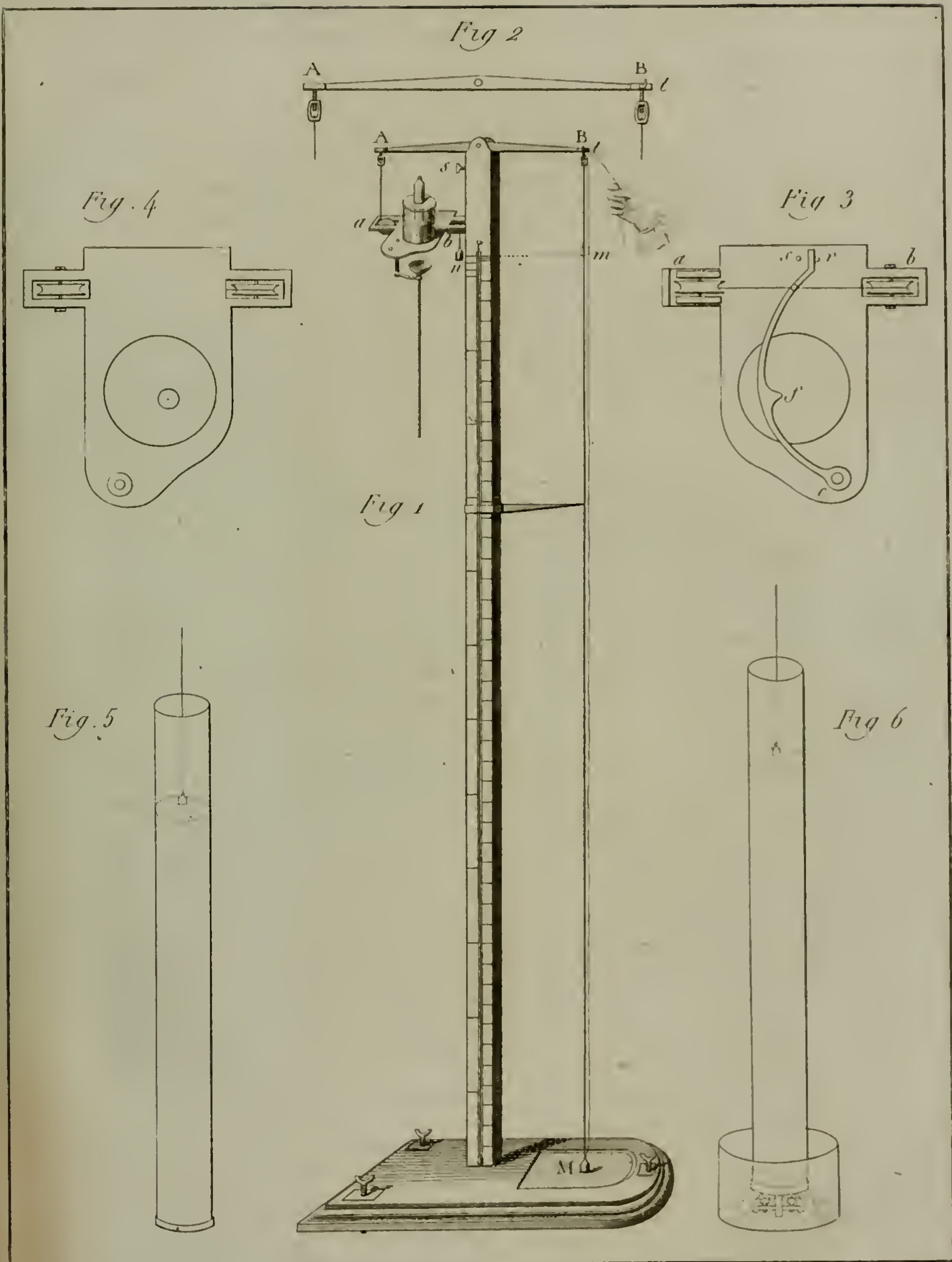


Fig 2
A
B
l
Fig. 4
Fig 3
a
b
s
m
n
Fig 1
Fig. 5
Fig 6
M

tezza proposta, si collochi al termine della medesima un vaso pieno di creta molle a tale profondità che sia capace d' elidere tutto ad un tratto la conceputa forza di accelerazione. Varj saranno gli efflussi di mercurio *(6)* ch' esaminati con un tubo graduato, si troveranno precisamente proporzionali alle varie radici degli spazj percorsi. La maniera d' esperimentare a' grandi altezze concilia ad un tempo stesso molta precisione alle suddette osservazioni, e reca in oltre il vantaggio di eseguire coll' acqua i tentativi idrometrici accennati al §. 15 ove gli efflussi compiansi in un tempo superiore alla metà del minuto secondo.

§. 30. Mentre io mi occupo a confermare con nuove esperienze i risultati delle proposte applicazioni, non dubito che i coltivatori delle scienze fisiche vorranno essermi cortesi dei loro lumi, e dividere con me il loro interesse o nel perfezionare la struttura delle proposte macchine, o nell' aditare gli usi ulteriori che aver possono nell' Astronomia, nella Balistica, nella Chimica e in tutta quanta la Matematica applicata *(7)*. Mi ri-

(6) Trattandosi nelle dette sperienze di lunghi spazj descritti dai gravi cadenti, insigne sarà la resistenza dell'aria, la quale farà d'uopo calcolare unitamente alla gravità del filo che li sostiene.

(7) Si presenta per se medesimo l' uso che può farsi della mia macchina nell' Astronomia per deffinire nei tempi minimi l' occultazione delle stelle fisse, o il preciso passaggio de' corpi celesti nel meridiano. La Ballistica poi ne abbisogna per stabilire le velocità iniziali de' corpi projetti, e più vasto campo ancora si offre alla Chimica per analizzare in molti casi le leggi delle affinità in una maniera più precisa, della quale mi occupo presentemente. Essendo finalmente il tempo un elemento dominatore di tutte le funzioni della Meccanica, e della Idrometria, non credo di spingere troppo oltre le mie lusinghe, se corraggioso invito i fisici a volere con me estender l' uso della mia macchina a tutta quanta la Matematica applicata.

puterò fortunato se potrà essere loro di stimolo a sì vasta e nobile intrapresa il saggio da me proposto su i mezzi atti a conciliare la possibile accuratezza ai risultati che aspettiamo dagli apparati di Fisica Sperimentale.

INDICE
DELLE MEMORIE

Pag.	*Lin.*	*Errori*	*Correzioni*
270	15	ritrovarlo	ritirarlo
273	19	quando	quanto
274	12	degl' altri	negli altri
280	25	colore	calore
314	1	distante	è distante
316	4	Valleso	Velleso
335	6	in saggi	i saggi
340	4	i nostri	dai nostri
348	3	conserve	conferve
356	7	a parallelipipedi	o parallelipipedi
361	18	altri	altri, altri
446	12	supponiamo	sappiamo
480	25	informane	informarne
490	2	guediosa	guedinosa